



**HAL**  
open science

# Supraconductivité en présence de forts effets paramagnétique et spin-orbite

François Konschelle

► **To cite this version:**

François Konschelle. Supraconductivité en présence de forts effets paramagnétique et spin-orbite. Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2009. Français. NNT: . tel-00517920

**HAL Id: tel-00517920**

**<https://theses.hal.science/tel-00517920>**

Submitted on 15 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro d'ordre :

## THÈSE

PRÉSENTÉE À

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

PAR **François KONSHELLE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : Lasers, Matière et Nanoscience

## **Supraconductivité en présence de forts effets paramagnétique et spin-orbite.**

Thèse dirigée par Alexandre BUZDIN et Jérôme CAYSSOL

Soutenue le : vendredi 2 octobre 2009

Devant la commission d'examen formée de :

|  |                      |
|--|----------------------|
| <b>Mme. Hélène BOUCHIAT</b> – Université Paris-Sud - Directrice de recherche         | Membre du jury       |
| <b>M. Alexandre BOUZDINE</b> - Université de Bordeaux - Professeur - Membre de l'IUF | Directeur de Thèse   |
| <b>M. Jérôme CAYSSOL</b> - Université de Bordeaux - Maître de Conférences            | Codirecteur de Thèse |
| <b>M. Denis FEINBERG</b> - Institut Néel Grenoble - Directeur de Recherche           | Rapporteur           |
| <b>M. Vladimir MINEEV</b> - CEA Grenoble - Professeur                                | Rapporteur           |
| <b>M. Philippe TAMARAT</b> - Université de Bordeaux - Professeur                     | Membre du jury       |

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction générale</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1 Fluctuations à proximité de la transition vers l'état de Fulde, Ferrell, Larkin et Ovchinnikov (FFLO)</b> | <b>13</b> |
| 1.1 Phase FFLO et fluctuations gaussiennes . . . . .   | 13        |
| 1.2 Fluctuation de la capacité calorifique . . . . .   | 19        |
| 1.3 Fluctuation de la paraconductivité . . . . .   | 22        |
| 1.4 Fluctuation de l'aimantation . . . . .   | 24        |
| 1.4.1 Réponse paramagnétique des systèmes isotropes. . . . .   | 24        |
| 1.4.2 Oscillation entre réponse dia- et para-magnétique des systèmes anisotropes . . . . .                     | 26        |
| 1.5 Critère de Ginzburg-Levanyuk . . . . .   | 29        |
| 1.6 Conclusion . . . . .   | 32        |
| <b>2 Systèmes hybrides supraconducteur - ferromagnétique</b>   | <b>35</b> |
| 2.1 Effets de proximité S/F et phase $\pi$ . . . . .   | 35        |
| 2.2 Équations de Eilenberger . . . . .   | 40        |
| 2.3 Jonctions S/F/S dans la limite balistique . . . . .  | 47        |
| 2.3.1 Relation courant-phase et phase arbitraire . . . . .   | 48        |
| 2.3.2 Lois de puissances de décroissance du courant critique . . . . .   | 49        |
| 2.3.3 Transition ( $0 - \pi$ ) induite par la température . . . . .  | 54        |
| 2.4 Jonctions S/F/S dans la limite d'un faible désordre . . . . .  | 56        |
| 2.4.1 Impuretés et équations de Eilenberger . . . . .  | 58        |
| 2.4.2 Développement dans la limite d'un fort champ d'échange . . . . .   | 59        |
| 2.4.3 Relation courant-phase et phase $\chi_0$ . . . . .   | 61        |
| 2.5 Conclusion . . . . .   | 63        |
| <b>3 Supraconductivité sans centre d'inversion et couplage spin-orbite</b>                                     | <b>65</b> |
| 3.1 Effet spin-orbite et supraconductivité . . . . .   | 65        |
| 3.2 Effet spin-orbite et effet de proximité . . . . .  | 71        |
| 3.3 Couplage intrinsèque entre phase et aimantation . . . . .  | 73        |
| 3.4 Conclusion . . . . .   | 77        |

|                        |    |
|------------------------|----|
| Conclusion générale    | 81 |
| Liste des publications | 87 |
| Bibliographie          | 89 |

# Introduction générale

La supraconductivité est une propriété de la matière découverte en 1911 par Kammerlingh Onnes, caractérisée par l'absence de résistance électrique. En dessous d'une certaine température  $T_c$ , dite critique, la résistance de certains matériaux disparaît brutalement [1, 2]. Au cours de la série d'expériences réalisées à la suite de cette découverte, Kammerlingh Onnes étudie l'effet d'un champ magnétique sur l'état supraconducteur [3]. Lorsque le champ magnétique appliqué atteint une valeur supérieure à la valeur  $H_c(T)$  dite critique, il détruit brutalement l'état supraconducteur, et le système repasse dans son état résistif. En revanche, tant que le champ magnétique appliqué est inférieur à  $H_c(T)$ , le supraconducteur repousse totalement le champ magnétique, créant l'effet dit Meissner-Ochsenfeld, qui donne lieu à la lévitation magnétique d'un supraconducteur au dessus d'un aimant [4].

Pour comprendre ce phénomène d'expulsion du champ magnétique, les frères London proposent en 1935 une relation constitutive qui, introduite dans les équations de Maxwell donne effectivement une absence totale de champ magnétique dans un volume supraconducteur. Cette relation explique également comment ce champ magnétique disparaît du volume supraconducteur sur une épaisseur  $\lambda$  dite longueur de pénétration, où des courants supraconducteurs se forment [5, 6]. Toutefois, la théorie proposée par les London ne permet pas de comprendre la notion de champ critique.

Il faudra attendre les années 50 pour que la théorie de Ginzburg et Landau permette de décrire cet effet, du moins à proximité de la température critique [7]. Inspirée du modèle des transitions de phase du second ordre introduit par Landau [8], le modèle de Ginzburg et Landau postule l'existence d'un paramètre d'ordre complexe  $\Psi(\mathbf{r})$  répondant à la fonctionnelle d'énergie :

$$H[\Psi] = H_0 + \int d^d\mathbf{r} \left[ \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( \nabla - \frac{i e^*}{\hbar} \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \beta_1 |\Psi|^4 + \beta_2 |\Psi|^6 \right] \quad (1)$$

où  $H_0$  est la fonctionnelle décrivant les propriétés du métal normal,  $\alpha = a(T - T_c)$  mesure l'écart par rapport à la température critique, et  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur associé au champ magnétique appliqué. L'état du système est alors l'état minimisant la fonctionnelle (1). La fonctionnelle (1) impose ainsi  $|\Psi|^2 = 0$  lorsque  $\alpha > 0$ , et  $|\Psi|^2 > 0$  lorsque  $\alpha < 0$ , *i.e.* le paramètre d'ordre croît à la température critique  $T_c$ .

Dans l'approche Ginzburg-Landau, le paramètre d'ordre  $\Psi(\mathbf{r})$  répond à une équation de type Schrödinger non linéaire, et peut donc être vu comme une fonction d'onde macroscopique qui décrit tout le système supraconducteur. De plus, en insérant un paramètre d'ordre supraconducteur  $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0 e^{i\phi(\mathbf{r})}$  dépendant explicitement de la phase, on constate qu'aucun des termes en  $\alpha$  ou  $\beta_i$  n'est modifié. En revanche, le terme en gradient est modifié et induit un terme  $\nabla\phi$ . On doit donc tenir compte de cette modification lorsque l'on veut calculer l'état minimisant  $H[\Psi]$ . La théorie de Ginzburg-Landau impose donc à la fonction d'onde supraconductrice de choisir une phase bien définie : celle qui minimise la fonction-

nelle (1). Comme  $\Psi$  correspond au paramètre d'ordre supraconducteur, la phase choisie devient la phase de l'ensemble du condensat supraconducteur<sup>1</sup>. Lorsqu'aucun champ magnétique n'est appliqué, minimiser la fonctionnelle (1) impose de choisir  $\nabla\phi = 0$ , *i.e.* le condensat supraconducteur empêche les variations spatiales de sa phase dans tout le volume qu'il occupe. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, la phase minimisant  $H[\Psi]$  sera  $\nabla\phi = -ie^*\mathbf{A}/\Psi_0\hbar$ , qui n'est autre que la jauge introduite phénoménologiquement par les frères London ! Non seulement le modèle de Ginzburg-Landau permet de retrouver la relation constitutive intuitée par les London et de résoudre le problème de la nature de la transition de phase entre un métal normal et un métal supraconducteur, mais elle permet également de décrire la dépendance linéaire du champ critique à proximité de la température critique.

Le principe du blocage de phase du condensat induit également une rigidité au condensat. Ainsi, il existe une longueur  $\xi$ , dite de cohérence, qui modélise la distance moyenne sur laquelle les paires de Cooper se brisent [9, 10]. À l'aide du modèle (1), Abrikosov a démontré l'existence de deux types de supraconductivités, définies par le ratio  $\kappa = \lambda/\xi$  des deux longueurs d'écrantage et de cohérence. Lorsque  $\kappa \ll 1$ , la longueur de cohérence domine, et un champ magnétique externe ne peut pas pénétrer le système supraconducteur avant d'avoir atteint la valeur critique  $H_c(T)$ . On parle alors de supraconducteur de type I<sup>2</sup>. En revanche lorsque  $\kappa \gg 1$  la pénétration du champ magnétique devient plus importante, et se réalise sous la forme de tubes de flux, appelés vortex, qui se structurent en réseau, dit d'Abrikosov [12].

Avec ce modèle proposé par Ginzburg et Landau, on peut donc étudier toute l'électrodynamique des supraconducteurs. Mais la fonctionnelle (1), comme toutes les fonctionnelles de type Landau souffre par essence d'une lacune : le développement (1) décrit simplement le comportement supraconducteur dès que la température critique  $T_c$  est franchie, mais elle n'explique absolument pas l'origine microscopique de cette température critique.

En 1956, Cooper découvre que la surface de Fermi d'un gaz d'électrons libres est naturellement instable si les électrons qui la composent subissent la moindre interaction attractive. Se forment alors des états liés entre deux électrons d'impulsion et de spin opposés, que l'on appelle paires de Cooper [13]. Notamment, l'interaction attractive peut-être de nature phononique. À l'aide de cette notion de paire de Cooper, Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) élaborent alors l'année suivante une théorie complète de la supraconductivité, décrivant toute la thermodynamique et l'électrodynamique des supraconducteurs. L'origine de l'interaction attractive résulte du couplage entre deux électrons médiée par un phonon. Ainsi, lorsqu'un électron passe à proximité d'un ion du réseau cristallin, celui-ci se déplace et attire un nouvel électron à la place qu'occupait le premier [14, 15]. Du fait de la nature bosonique des paires de Cooper, ce condensat possède des propriétés proches de celles du condensat de Bose-Einstein, comme suggéré par Schaffroth [16] quelques années avant la théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer.

Peu de temps après le travail de Bardeen, Cooper et Schrieffer, Gor'kov propose une reformulation de la théorie BCS en terme de théorie des champs, qui permet de la généraliser aux cas sales et/ou inhomogènes [17]. De plus, le formalisme de Gor'kov permet de retrouver la fonctionnelle de Ginzburg et Landau à proximité de la température critique, et

---

<sup>1</sup>Remarquons que le terme  $\nabla\phi$  n'est non nul que lorsque  $\phi$  dépend explicitement de la position. On parle alors de jauge locale, et la symétrie que brise la transition de phase métal normal-métal supraconducteur est la symétrie de rotation de cette jauge locale, dite symétrie de jauge U(1).

<sup>2</sup>En fait, la physique des supraconducteurs de type I sous champ magnétique est plus subtile, et il existe un état dit intermédiaire où le champ magnétique peut pénétrer dans le supraconducteur sous la forme de phase lamellaire [11]. Notons également que le vrai critère de séparation entre supraconducteurs de type I et II est :  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  : type I et  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  : type II.

d'en calculer les coefficients de façon microscopique [18].

On se retrouve donc à la fin des années 50 avec plusieurs approches microscopiques de la supraconductivité<sup>3</sup> prédisant une transition de phase entre état métallique et état supraconducteur, transition qui est due à l'interaction électron-phonon couplant deux électrons de spin et d'impulsion opposés formant une paire de Cooper. De plus, toutes ces approches permettent de prédire convenablement les interactions entre l'état supraconducteur et un champ magnétique de type orbital.

Mais du fait de la nature profondément quantique des paires de Cooper, il est parfois nécessaire de prendre en compte les autres couplages liant le champ magnétique et le spin des électrons. Ces effets sont l'effet Zeeman et l'effet spin-orbite, qui induisent tous les deux une levée de dégénérescence de la structure de bande des électrons. Si l'effet Zeeman tend à aligner les spins des électrons sur le champ d'échange appliqué, l'effet spin-orbite résulte du couplage entre le spin de l'électron et le potentiel cristallin. Dans cette thèse, on se propose d'étudier les phénomènes issus de ces couplages Zeeman et spin-orbite de type Rashba en terme de supraconductivité.

Commençons par le survol des propriétés supraconductrices liées à l'effet Zeeman, appelé encore effet paramagnétique. Dans ce cas, l'énergie associée à chaque électron de la paire de Cooper se décale dans le sens contraire de son spin d'une quantité  $h = g\mu_B H$ , où  $g$  est le facteur de Landé,  $\mu_B$  le magnéton de Bohr et  $H$  un champ magnétique [22]. Si ce décalage est trop important, les paires de Cooper sont simplement détruites, puisque les électrons ne vérifient plus la condition d'opposition de leur impulsion. En revanche, à plus faible décalage, l'appariement peut encore subsister. Mais pour pouvoir continuer à s'apparier, les électrons se voient contraints d'acquérir un décalage de leur moment proportionnel au décalage Zeeman. La paire de Cooper acquiert alors un moment global proportionnel à  $2h$ , et n'est plus au repos lors de sa formation, comme on peut le voir sur la figure 1. Ce moment dans l'espace réciproque est équivalent à une oscillation dans l'espace réel, donnant lieu à un nouvel état supraconducteur, que l'on appelle alors inhomogène, ou état FFLO, puisqu'il a été prédit pour la première fois par Fulde et Ferrell [23] ainsi que par Larkin et Ovchinnikov [24] de façon indépendante. En calculant le point d'instabilité à température nulle de la phase métallique par rapport à une phase supraconductrice avec et sans modulation, Fulde, Ferrell, Larkin et Ovchinnikov réalisent que l'état supraconducteur modulé est toujours plus favorable si l'effet paramagnétique domine.

Prenons pour point de départ une fonctionnelle de type Ginzburg-Landau modifiée pour prendre en compte les effets purement paramagnétique. Celle-ci s'écrit

$$H[\Psi] = H_0 + \int d^d \mathbf{r} \left[ \alpha |\Psi|^2 + g |\nabla \Psi|^2 + \gamma |\nabla^2 \Psi|^2 \right] + \int d^d \mathbf{r} \left[ \beta_1 |\Psi|^4 + \mu_1 |\Psi|^2 |\nabla \Psi|^2 + \mu_2 ((\Psi^*)^2 (\nabla \Psi)^2 + c.c.) + \beta_2 |\Psi|^6 \right] \quad (2)$$

et se retrouve directement à partir de modèles microscopiques ne prenant en compte que l'effet paramagnétique. Chaque coefficient dépend du champ d'échange  $h$  et de la température  $T$  [25, 26]. De nouveaux termes  $\gamma$ ,  $\mu_i$  apparaissent donc en plus des termes

---

<sup>3</sup>Pour être complet, il faudrait ajouter aux théories microscopiques de Bardeen, Cooper et Schrieffer d'un côté et de Gor'kov de l'autre, la théorie de Bogoliubov [19] et de Valatin [20], qui renormalise les termes Hartree-Fock d'interaction électron-phonon à tous les ordres dans le cadre d'une interaction faible, généralisant au gaz de fermions les travaux de Bogoliubov sur le gaz de Bose faiblement hors-équilibre [21]. Notons toutefois que toutes ces théories sont équivalentes et portent toutes le nom de théorie BCS.

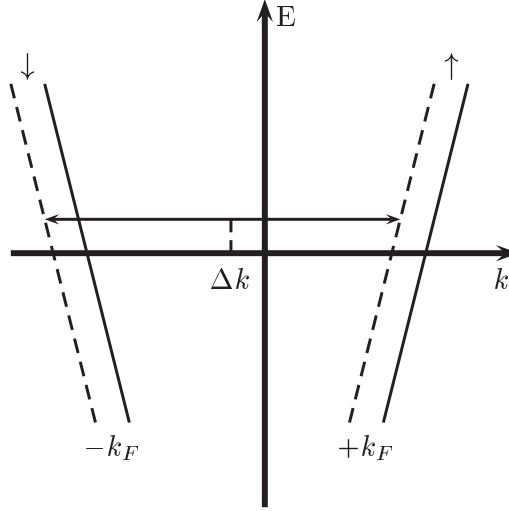


FIG. 1: Décalage associé à un champ d'échange, dans la limite d'une loi de dispersion linéarisée à proximité de l'énergie de Fermi. Chaque branche, en trait plein, correspond à une polarisation en spin. Une paire de Cooper est formée de deux électrons de moment et de spin opposés  $(+k_F, \uparrow; -k_F, \downarrow)$ . Si l'on ajoute un effet paramagnétique, les deux branches sont décalées (traits pointillés), et les paires de Cooper seront formées avec le décalage  $\Delta k$  dû à ces décalages respectifs.

$\alpha$ ,  $g$  et  $\beta_i$  depuis la fonctionnelle (1), mais ils ne sont que les termes attendus aux ordres supérieurs des dérivées du paramètre d'ordre. En effet, l'instabilité de la phase homogène par rapport à la phase inhomogène signifie mathématiquement que le coefficient  $g$  doit changer de signe en un point du diagramme de phase  $(h^*, T^*)$  appelé point tricritique, voir Fig.2. Pour que ce changement de signe donne lieu à une modulation finie, il faut alors que le terme supérieur en dérivée spatiale  $\gamma$  soit positif à proximité de ce point tricritique. Ainsi, lorsque l'on prend pour modèle de modulation un état de la forme  $\Psi(\mathbf{q}) = \Psi_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ , on trouve que le vecteur de la modulation  $\mathbf{q}$  minimisant la fonctionnelle  $H[\Psi(\mathbf{q})]$  s'écrit sous la forme  $q^2 = -g/2\gamma$  pour  $\mu_i = 0$  dans l'expression (2). Dans l'esprit d'une fonctionnelle de type Ginzburg-Landau, notons que l'on ne peut toutefois appliquer la fonctionnelle (2) qu'à proximité du point tricritique, *i.e.* aux petits coefficients  $g$ .

Si le mécanisme d'appariement FFLO décrit ci-dessus est assez clair lorsque l'on ne discute que de l'effet paramagnétique, en revanche, sa compétition avec les effets orbitaux l'est beaucoup moins. En effet, on s'attend généralement à ce que l'effet paramagnétique soit beaucoup plus faible que les effets orbitaux, et que la phase FFLO soit alors quasiment indétectable dans la majorité des matériaux. Pour compenser les effets orbitaux, on peut disposer de composés à fermions lourds par exemple [27], leur plus grande masse effective diminuant naturellement les effets orbitaux. Utiliser des systèmes quasi-bidimensionnels, pour lesquels un champ magnétique externe est appliqué dans le plan, réduit également les effets orbitaux. On peut aussi penser à utiliser des composés magnétiques, *i.e.* comportant naturellement un champ d'échange, ceux-ci devant produire des interactions paramagnétiques plus importantes. Or cette intuition n'est pas si claire, puisqu'il y a alors compétition entre l'ordre magnétique, qui a tendance à vouloir orienter tous les spins électroniques dans une seule direction, avec l'ordre supraconducteur singulet qui couple des électrons de spins opposés, rendant l'étude de la compétition entre phases supraconductrice et magnétique très ardue [28].



De plus, la phase FFLO est très sensible aux impuretés de quelque type que ce soit [29, 30, 31, 26]. Comme les paires sont créées dans un référentiel en mouvement très particulier, *i.e.* que la modulation est proportionnelle au champ d'échange, la présence d'impuretés vient briser cette modulation. Or, un état supraconducteur soumis à un effet paramagnétique important n'est favorable que parce qu'il est modulé. En d'autre terme, le champ critique de l'état inhomogène est toujours supérieur au champ critique de l'état homogène, alors que des impuretés même non-magnétiques viennent détruire cette modulation .

Si l'état FFLO à proprement parler est donc (très) difficile à atteindre, il n'en demeure pas moins un challenge expérimental toujours d'actualité. Ainsi, régulièrement, des composés nouveaux sont testés pour essayer de mettre en évidence cet état. Les derniers composés supraconducteurs susceptibles de réaliser la phase FFLO sont le composé à fermion lourd  $\text{CeCoIn}_5$  [32, 33, 34], et le composé quasi-bidimensionnel organique à base de BETS<sup>4</sup> [35]. Ces matériaux, en plus de rassembler les caractéristiques de grande propreté et d'effet magnétique intrinsèque [36], présentent également certaines caractéristiques relatives à l'effet paramagnétique, comme la présence d'une transition de phase du premier ordre [37] ou encore la présence d'oscillations du champ critique  $H_{c2}(T)$  [38] qui pourraient résulter de transitions entre différents niveaux de Landau prédites dans le cadre de l'état FFLO [39, 40].

Reste alors tout de même la difficulté suivante : la plupart des expériences réalisées sur les composés susceptibles de présenter une phase FFLO peuvent être interprétés de plusieurs façon. Ceci est un phénomène récurrent de tous les systèmes pour lesquels ordre magnétique et supraconducteur cohabitent. Par exemple, il est souvent très difficile de prendre en compte les effets paramagnétique et orbitaux en un seul formalisme. Ainsi, il est souvent très difficile de relier de façon satisfaisante les résultats expérimentaux aux modèles théoriques. De fait, il n'y a pas beaucoup d'outils expérimentaux permettant de révéler de façon claire la présence d'un état FFLO.

Pour tenter de combler cette lacune, nous nous proposons dans cette thèse d'étudier le comportement fluctuationnel de la supraconductivité inhomogène. Ainsi, on se dotera d'un outil permettant de caractériser la transition de phase vers un état FFLO très simplement. Cette étude détaillée des fluctuations à proximité de la ligne de transition de phase pour des systèmes soumis à de forts champs paramagnétiques fera l'objet de la première partie du travail présenté dans ce manuscrit.

Comme beaucoup d'effets liés à la supraconductivité, la physique de l'état FFLO possède sa contrepartie en terme d'effet de proximité.

Lorsqu'un supraconducteur est juxtaposé à un métal normal, une partie de ses paires de Cooper pénètrent dans ce dernier, induisant une partie des effets supraconducteurs au métal normal [9]. En retour, une partie des électrons non-appariés contenus dans la partie métallique normale viennent également modifier le comportement supraconducteur proche de l'interface [41], voir Fig.3. On nomme tous les effets associés à l'interpénétration des électrons non-appariés et des paires de Cooper à une interface entre un métal supraconducteur et un métal normal sous le nom générique d'effets de proximité. Ces effets ne se développent sensiblement que sur la longueur de cohérence  $\xi$  déjà discutée précédemment [9]. Si maintenant on relie deux supraconducteurs par un métal normal d'une longueur plus petite que cette longueur de cohérence, une partie des paires de Cooper d'un des deux supraconducteurs se mélange au condensat qui compose l'autre électrode supraconductrice.

---

<sup>4</sup>La formule chimique complète de ce composé est  $\lambda\text{-(BETS)}_2\text{FeCl}_4$ , et BETS signifie bis(ethylenedithio)tetraselenafulvalene.

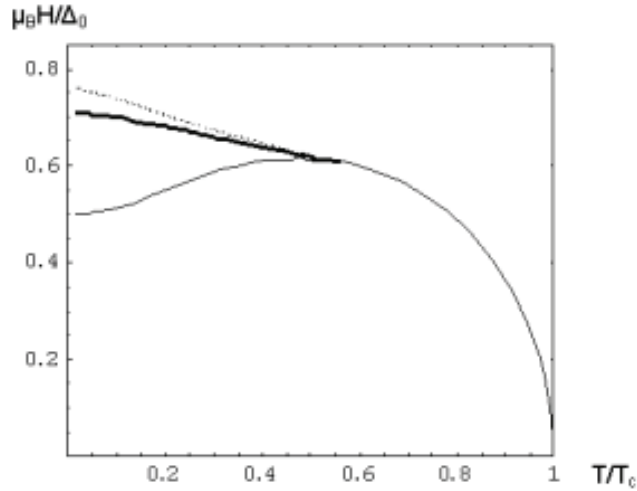


FIG. 2: Diagramme de phase de l'état FFLO. Le point de concours de toutes les courbes est le point tricritique, où les phases normale, homogène et FFLO rentrent en compétition. Avant ce point, *i.e.* près de  $T_c$ , la ligne de transition de phase est commune. On définit ce régime par les propriétés BCS. Après ce point, à plus faible température, la ligne de transition de phase est modifiée par la présence d'effet paramagnétique importants. La courbe inférieure correspond à la ligne de transition de phase du second ordre lorsqu'aucune modulation n'est prise en compte. La ligne en trait gras correspond à une transition de premier ordre, toujours sans modulation. On parle alors de limite de Clogston et Chandrasekhar. La ligne en trait pointillé correspond à une transition du second ordre, lorsqu'une modulation FFLO existe. C'est donc l'état théoriquement le plus favorable, et les deux courbes donnant des champs critiques inférieurs ne sont en principe pas observables.

Un courant supraconducteur peut alors franchir cette structure, appelée hétérojonction, donnant naissance à la physique de l'effet Josephson [42].

L'effet Josephson peut également être vu à l'aide de la relation de commutation qu'il existe entre le nombre  $N$  d'électrons et la phase globale du condensat  $\varphi : [\varphi, N] = i\hbar$  [43, 44]. De fait, le nombre d'électrons et la phase d'un système quantique, même macroscopique, ne peuvent être connus simultanément. Ainsi, lorsque l'on étudie un système isolé, *i.e.* n'échangeant pas de particules avec un milieu extérieur, le nombre de particules peut être considéré comme fixé et la phase est dans ce cas mal définie. Mais lorsque l'on regarde deux supraconducteurs reliés faiblement par une couche isolante ou métallique normale, le passage d'un nombre limité de paires de Cooper est possible via l'effet de proximité, et le couplage issu de la relation de commutation entre le nombre de paires transférées et la phase relative entre les deux condensats  $[\varphi, N] = i\hbar$  prend alors tout son sens. Les relations de Josephson sont justement les relations liant phase du condensat supraconducteur et nombre de paires traversant la jonction, sous la forme d'un courant, dit Josephson.

Maintenant, si les paires de Cooper traversent une jonction ferromagnétique, elles vont subir l'effet paramagnétique issu du champ d'échange, et l'on est en droit d'attendre une physique de ces systèmes similaires aux phases FFLO. Par exemple, on s'attend à retrouver une oscillation du paramètre d'ordre partagé par les électrodes supraconductrices, comme suggéré par la figure 3. Cela peut d'ailleurs aisément se voir à partir de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (2) dont l'équation pour le paramètre d'ordre, dans sa version linéarisée près de la température critique s'écrit

$$\frac{\delta H[\Psi]}{\delta \Psi^*} = 0 \Rightarrow \alpha \Psi - g \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = 0 \quad (3)$$

où l'on a fait l'hypothèse d'une jonction unidimensionnelle le long de l'axe  $x$ . En écrivant alors la solution sous la forme  $\Psi = \Psi_0 \exp(kx)$ , on obtient un vecteur d'onde complexe  $k = k_1 + ik_2$  avec  $k_{1,2}^2 = -g/2\gamma \left( \sqrt{1 + 4\gamma|\alpha|/g^2} \pm 1 \right)$  dont la partie imaginaire  $k_2$  est la signature de l'effet d'oscillation caractéristique des systèmes associant supraconducteurs et ferromagnétiques. Les jonctions constituées de deux métaux supraconducteurs séparés par un pont ferromagnétique, appelées jonctions S/F/S, ont été étudiées théoriquement depuis les années 80 [45]. Notamment, les premières études théoriques prédisaient une oscillation du courant Josephson critique en fonction de la longueur de la jonction [46, 47]. Cet effet spectaculaire a été observé pour la première fois en 2001 [48], donnant naissance à une explosion des travaux théoriques relatifs aux jonctions S/F/S [49, 50, 51].

Du fait de l'impossibilité technique d'obtenir des couches ferromagnétiques propres, tous les travaux théoriques et expérimentaux se sont essentiellement concentrés sur la limite dite diffusive des jonctions S/F/S. Le ferromagnétique est alors caractérisé par un système hautement désordonné et un faible champ d'échange. Dans cette limite, on n'observe pas simplement des oscillations du courant critique mais des annulations. Toutefois, on ne peut observer qu'une seule annulation du courant critique, puisque l'effet de cohérence est détruit sur une distance de l'ordre de la distance d'oscillation du courant critique [50]. Cette annulation correspond néanmoins à un changement de signe du courant critique, correspondant au décalage d'un facteur  $\pi$  de la différence de phase entre les deux supraconducteurs. On parle alors de phase  $\pi$  pour désigner cet état pour lequel la phase relative entre les deux supraconducteurs n'est plus  $\chi$  mais  $\chi + \pi$ . Les paramètres d'ordres dans la phase  $\pi$  ont donc des signes opposés de part et d'autre de la jonction. Ce type de jonction s'appelle alors jonction  $\pi$ .

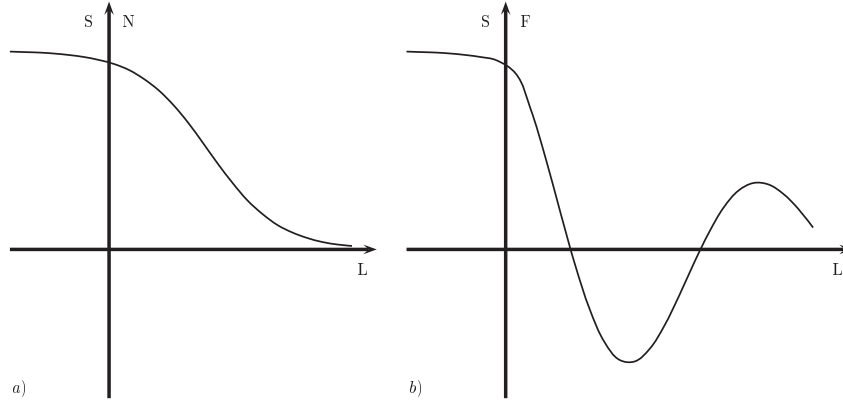


FIG. 3: Effets de proximité entre un métal supraconducteur (s) et un métal normal (N, schéma *a*) et entre un métal supraconducteur (S) et un métal ferromagnétique (F, schéma *b*). Si le cas S/N induit une décroissance monotone de la densité de paires de Cooper dans la partie métallique, cette décroissance est oscillante dans le cas S/F, induisant les effets d'oscillations du courant critique S/F/S par exemple.

Or, du aux progrès réalisés ces dernières années dans les techniques de nanofabrication, il est maintenant possible de réaliser des jonctions S/F/S comportant une couche ferromagnétique dans la limite quasi-ballistique, et ainsi réaliser des systèmes présentant un champ d'échange assez important. Des expériences ont ainsi eu lieu récemment dans cette limite [52, 53], alors qu'elle n'a été que très peu étudiée théoriquement [47, 54]. Cela vient en partie du fait que les équations de transport supraconductrices, dites équations d'Eilenberger [55], ne se simplifient confortablement que dans les deux limites très propres et très sales<sup>5</sup>. Or, les études expérimentales actuelles [52, 53] correspondent plutôt à un cas intermédiaire où le fort champ d'échange oblige à prendre en compte explicitement la auto-consistance des équations de transport supraconductrices en présence d'impuretés.

Nous présenterons donc dans une seconde partie de ce manuscrit l'influence d'un champ d'échange fort sur l'effet de proximité associé aux jonctions S/F/S balistiques. Dans cette limite, on verra que les effets de type FFLO, comme l'oscillation du courant critique, sont exaltés. Notamment, l'anharmonicité de la relation courant-phase est très importante dans la limite propre. Cette superposition de différentes harmoniques permet alors d'induire la phase  $\pi$  par la température par exemple.

Enfin, au cours de cette thèse, de nouveaux effets de proximité S/F/S sont apparus, pour lesquels la différence des phases supraconductrices est directement couplée au champ d'échange de la couche ferromagnétique [57, 58]. Ces effets sont intrinsèquement reliés à l'association d'un champ d'échange et d'un effet spin-orbite dans le pont d'une jonction Josephson bidimensionnelle en l'absence de centre d'inversion. Les deux effets collaborent alors pour rajouter une nouvelle composante  $\chi_0$  à la phase Josephson. Comme beaucoup d'effets magnéto-électriques induit par le couplage spin-orbite, ces jonctions S/F/S avec effet spin-orbite présentent des interactions importantes entre la dynamique de la phase supraconductrice et la dynamique magnétique. La différence essentielle ici est que l'effet magnéto-électrique est induit par les effets de proximité.

On verra donc dans la dernière partie de ce manuscrit le couplage qu'il peut exister

<sup>5</sup>On dit aussi limite ballistique et diffusive pour désigner ces deux limites. La limite diffusive des équations d'Eilenberger utilise le formalisme dit d'Usadel [56].

entre la dynamique de ces nouvelles phases Josephson et la dynamique de l'aimantation, permettant de manipuler l'aimantation de façon purement électrique.



# Chapitre 1

## Fluctuations à proximité de la transition vers l'état de Fulde, Ferrell, Larkin et Ovchinnikov (FFLO)

### 1.1 Phase FFLO et fluctuations gaussiennes

Les phases FFLO sont des phases supraconductrices modulées prédites par Fulde et Ferrell [23] et par Larkin et Ovchinnikov [24] en 1964. Elles résultent de la présence d'une interaction Zeeman agissant sur les paires de Cooper du condensat. Comme dit dans l'introduction générale, l'effet paramagnétique tend à induire un moment global non nul pour chaque paire de Cooper, donnant naissance à une modulation macroscopique du condensat.

Historiquement, ces phases inhomogènes ont été prédites à la suite d'importants travaux prenant en compte l'effet paramagnétique sur la supraconductivité dans les années 60 [59]. À température nulle et lorsque seul l'effet paramagnétique est pris en compte, la transition de phase entre état normal et supraconducteur BCS ne peut pas être du second ordre. En effet, une transition de phase du second ordre donnerait une limite, dite de Pauli, du champ critique égale à  $H_p^{II}(T=0) = \Delta_0/2\mu_B$ , alors qu'une transition de phase du premier ordre donne la limite dite de Clogston et Chandrasekhar  $H_p^I(T=0) = \Delta_0/\sqrt{2}\mu_B > H_p^{II}(T=0)$  [60, 61]. Toujours dans le cas des températures nulles et sans prendre en compte les effets orbitaux, Fulde, Ferrell, Larkin et Ovchinnikov montrent qu'un état modulé sur une longueur de l'ordre de la longueur de cohérence  $\xi$ , résiste mieux aux effets de destruction de la supraconductivité par un effet paramagnétique [23, 24]. Dans ce cas, la transition de phase est du second ordre, mais le champ critique à température nulle dépend maintenant de la dimensionnalité du système supraconducteur. Ainsi,  $H_{\text{FFLO}}^{1\text{D}}$  diverge à température nulle, alors que  $H_{\text{FFLO}}^{2\text{D}} \approx \Delta_0/\mu_B$  et  $H_{\text{FFLO}}^{3\text{D}} \approx 0,75\Delta_0/\mu_B$ . Fort de l'existence de cette nouvelle phase, plusieurs auteurs ont alors calculé les diagrammes de phases champ d'échange - température associés à différents types de modulation FFLO [59, 62].

Ensuite, d'autres études sont venues généraliser ces diagrammes de phases. Ainsi, on s'est rapidement rendu compte que les impuretés détruisent très rapidement cette phase FFLO [29, 31]. Cela peut se comprendre de la façon suivante : les impuretés, réparties de façon aléatoire dans l'échantillon, rentrent en compétition avec la modulation FFLO qui préférerait un agencement ordonné de ces impuretés.

En revanche, des états de supraconductivité dont le paramètre d'ordre est en onde  $d$  peuvent stabiliser la modulation FFLO à basse température, alors que l'état en onde  $d$  n'est pas favorable à l'état FFLO trop proche du point tricritique [63, 64, 65]. Cela résulte cette fois de la compétition entre les deux inhomogénéités du paramètre d'ordre et du condensat dans l'espace des moments : tant que la modulation FFLO n'est pas assez importante, le système supraconducteur préfère conserver un paramètre d'ordre isotrope, alors qu'un paramètre d'ordre anisotrope (en onde  $d$ ) stabilise les plus grandes modulations FFLO arrivant à plus basses températures. Enfin, l'influence des effets orbitaux sur cette phase inhomogène est immensément riche, et encore relativement incompris [66, 67, 68, 69, 70, 71]. En effet, prendre en compte l'effet paramagnétique et les effets orbitaux en une seule approche est extrêmement difficile, et la compétition entre les phases de vortex d'Abrikosov et la phase FFLO induit des transitions de conformations entre différents réseaux d'Abrikosov et/ou inhomogénéité de la phase FFLO. Le ratio prenant en compte les effets de brisures de paires est simplement le rapport du champ critique orbital sur le champ critique paramagnétique. Ce ratio est connu sous le nom de paramètre de Maki [72], qui vaut alors

$$\alpha_M = \sqrt{2} \frac{H_{c2}(T=0)}{H_p(T=0)} \quad (1.1)$$

et qui doit être plus grand que 1,8 pour que l'état FFLO soit favorable à température nulle, du moins numériquement [30].

Toutefois, il n'existe toujours pas de preuve expérimentale claire de l'existence de phase FFLO dans des systèmes supraconducteurs, même si plusieurs composés ont été proposés jusqu'à présent, révélant des caractéristiques proches de celles de l'état inhomogène. Citons les deux exemples prometteurs actuellement. Le premier est le composé organique à base de BETS [73, 35], qui vérifie certaines propriétés attribuées aux forts effets paramagnétiques, comme la transition de phase de type supraconductivité réentrante [32, 74]. Ainsi, à faible champ magnétique, le décalage Zeeman contribue à briser les paires de Cooper, alors qu'à plus fort champ magnétique, il est possible que l'état de spin  $\downarrow$  soit porté à la même énergie qu'un état de spin  $\uparrow$  d'une orbitale de plus haute énergie<sup>1</sup>, permettant cette fois un appariement de Cooper induit par le champ magnétique. À température nulle, il existe alors une poche de supraconductivité à bas champ magnétique, correspondant au diagramme de phase habituel. Cette supraconductivité est détruite au dessus d'un champ critique, comme ordinairement. Mais, lorsque le décalage Zeeman devient suffisamment important, une poche de supraconductivité, dite réentrante, réapparaît, avant d'être de nouveau détruite lorsque le champ magnétique augmente encore.

Un autre effet caractéristique de la présence d'une modulation de la phase supraconductrice est le principe du blocage des vortex de Josephson. Entre deux couches supraconductrices bidimensionnelles, se forment des vortex issus du courant de Josephson entre les deux couches. Normalement, ces vortex se structurent en réseau de sorte que l'énergie de la chaîne de ces vortex soit minimale. Or, lorsque au moins un des deux supraconducteurs est dans la phase FFLO, la modulation FFLO peut venir décaler le pas du réseau, en le faisant coïncider avec un noeud de la modulation par exemple [75]. La signature de ce blocage aurait été observée dernièrement dans le composé bidimensionnel BETS [35].

Le second exemple prometteur est le composé à fermions lourd CeCoIn<sub>5</sub>. Celui-ci possède toutes les caractéristiques de pureté et de paramètre de Maki important [34],

---

<sup>1</sup>On utilise ici les conventions de la physique atomique pour laquelle un état de spin  $\uparrow$  possède une énergie plus basse qu'un état de spin  $\downarrow$ .



ainsi qu'une transition de phase du premier ordre à basse température et fort champ magnétique [76]. Pourtant, la possibilité d'une phase FFLO continue d'être discutée puisque le mécanisme d'appariement, du fait de la présence d'un ordre magnétique intrinsèque dans ce matériaux, n'est pas très bien compris [77, 78, 79]. Dans cette thèse, on ne discutera pas des problèmes associés à la compétition entre l'ordre magnétique et l'ordre supraconducteur, puisqu'on étudiera les phases FFLO de façon assez générale sans rentrer dans la description détaillée de chaque matériau.

Notons que récemment, des phases FFLO ont été prédites dans les domaines de la chromodynamique quantique, où elles pourraient servir à décrire certains états inhomogènes dans les gaz très denses de neutrons, les fameuses étoiles à neutrons, mais il n'existe à ma connaissance aucune preuve de l'existence de ces états [80]. De même, une phase FFLO pourrait être observée dans les gaz d'atomes froids fermioniques [81]. Dans ces gaz, une résonance de Feshbach permet de modifier l'interaction entre atomes formant des quasi-molécules, ce qui permet de passer de la limite de faible attraction (régime BCS), au régime de faible répulsion (régime de condensation de Bose, ou régime BEC) [82]. Si la transition entre les gaz BCS et BEC a été observée expérimentalement [83, 84, 85, 86], aucune phase FFLO n'a été clairement observée dans les gaz ultra-froid fermioniques à ce jour. L'espoir pourrait venir des gaz ultra-froids unidimensionnels. Dans ce cas, la modulation FFLO affecte non pas le condensat, mais les fluctuations de densité du condensat [87].

Pour tenter de développer des outils permettant de fournir des preuves expérimentales de la transition de phase vers un état FFLO, nous avons étudié, au cours de cette thèse, les propriétés de fluctuations à proximité d'une phase inhomogène.

Rappelons la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (2) précédemment introduite. Cette fonctionnelle permet de décrire l'instabilité de la phase homogène supraconductrice au profit de la phase FFLO à proximité du point tricritique sous la forme générale :

$$H[\Psi] = H_0 + \int d^d \mathbf{r} \left[ \alpha |\Psi|^2 + g |\nabla \Psi|^2 + \gamma |\nabla^2 \Psi|^2 \right] + \int d^d \mathbf{r} \left[ \beta_1 |\Psi|^4 + \mu_1 |\Psi|^2 |\nabla \Psi|^2 + \mu_2 ((\Psi^*)^2 (\nabla \Psi)^2 + \text{c.c.}) + \beta_2 |\Psi|^6 \right] \quad (1.2)$$

dont on va étudier dans la suite les propriétés de fluctuations gaussiennes. Notons que dans l'étude originale, seul l'effet paramagnétique était pris en compte, et les coefficients de l'expression (1.2) ne dépendaient donc que du champ d'échange et de la température [25]. Dans des études plus récentes, ces coefficients peuvent dépendre d'effets d'anisotropie et du désordre [88] ou encore d'effets orbitaux [26]. C'est à l'aide de cette fonctionnelle que l'on peut également étudier les réseaux de vortex d'Abrikosov, voir [89] ou [90] et les références sous-jacentes.

Il y a en réalité trois types de fluctuations qui peuvent intervenir dans les phénomènes critiques, associés aux transitions de phase du second ordre :

1. Les fluctuations du point critique quantique, qui n'apparaissent qu'à proximité de la température nulle. Elles ont pour point de départ conceptuel les transitions de phases magnétiques, qui n'existent en dimension inférieure à trois qu'à température nulle, et l'on parle alors de transition de phase quantique [91]. Les transitions de phases quantiques sont caractérisées par une brusque réorganisation d'un système à température nulle induite par une faible variation d'un paramètre externe (dopage, pression, ...) en un point appelé point critique quantique. Plus précisément, les transitions de phases quantiques sont des transitions de phases du second ordre,

caractérisées par des brisures spontanée de symétrie de jauge. La prise en compte des fluctuations à proximité de ce point critique quantique sert alors essentiellement à améliorer les connaissances sur les diagrammes de phases à proximité de la température nulle. Les fluctuations du point critique quantique ont permis entre autre de classer les états magnétiques possibles en terme de pression dans le cas des composés magnétiques [91], ou encore de prédire l'existence de phases complexes à proximité d'une transition vers un état d'isolant de Mott en fonction du dopage en électron ou trou pour les supraconducteurs à hautes températures critiques [92]. On ne les étudiera pas dans cette thèse, puisqu'elles ont été développée, dans le cadre des phases inhomogènes, par Samokhin et Maren'ko peu de temps avant notre étude [93]. On considère généralement que ce type de fluctuations n'est pas pertinent pour les expériences, puisqu'elles n'apparaissent qu'à l'immédiate proximité de la température nulle, qui est difficilement accessible.

2. Les fluctuations critiques, qui apparaissent à l'extrême proximité des transitions de phases critiques, mais à toute température cette fois. Elles peuvent être étudiées à l'aide de l'approche du groupe de renormalisation proposé par Kadanoff [94, 95] et formalisé par Wilson [96]. Ce formalisme permet de remonter aux exposants dit critiques, qui prédisent les comportements universels, ou lois d'échelle, des quantités physiques par l'étude des interactions entre les modes de fluctuations. Ces interactions sont génériquement proportionnelles aux termes d'ordre  $|\Psi|^4$  et  $|\Psi|^6$  dans les développements du type Landau des transitions de phase. On ne les développera pas non plus dans cette thèse, mais on montrera, en étudiant le critère dit de Ginzburg et Levanyuk au paragraphe 1.5, qu'elles n'interviennent que dans une région du diagramme de phase trop proche de la ligne de transition de phase pour être facilement observables.
3. En revanche, les fluctuations gaussiennes, qui apparaissant relativement loin de la ligne de transition de phase du second ordre sont en pratique les seules fluctuations observables. Loin de la ligne de transition de phase, on peut négliger les interactions entre les différents modes de fluctuation, ce qui revient à ne conserver que les termes quadratiques dans les développements de type Ginzburg-Landau (1.2). On dit que l'on se place alors dans l'approximation gaussienne. De plus, les fluctuations gaussiennes sont les principales fluctuations intervenant dans le cadre des transitions entre métal normal et métal supraconducteur. À ce titre, elles ont été largement étudiées dans le cadre de la transition vers un état homogène BCS, avant de connaître un renouveau avec l'apparition des supraconducteurs à hautes températures critiques, pour lesquels le modèle de Ginzburg-Landau fonctionne encore [10, 97]. On associe aux fluctuations gaussiennes des exposants, reminiscence des exposants critiques issus de l'étude des fluctuations critiques, et que l'on nommera dans ce manuscrit des exposants gaussiens. Ce dernier type de fluctuations fait l'objet de cette première partie, et on va donc largement les discuter dans la suite, en montrant qu'elles peuvent servir de signatures expérimentales à la transition vers une phase FFLO.

En effet, à cause des termes  $\gamma$  présents dans l'expression (1.2), on s'attend à trouver des signatures de la transition entre une phase normale et une phase FFLO. Cette idée a été étudiée il y trente ans par Brazovskii dans le cadre des transitions de phase vers des états isotropes de cristaux liquides inhomogènes en utilisant le formalisme du groupe de renormalisation [98]. En calculant les fluctuations très près de la transition de phase, Brazovskii concluait que les fluctuations critiques étaient suffisamment intenses

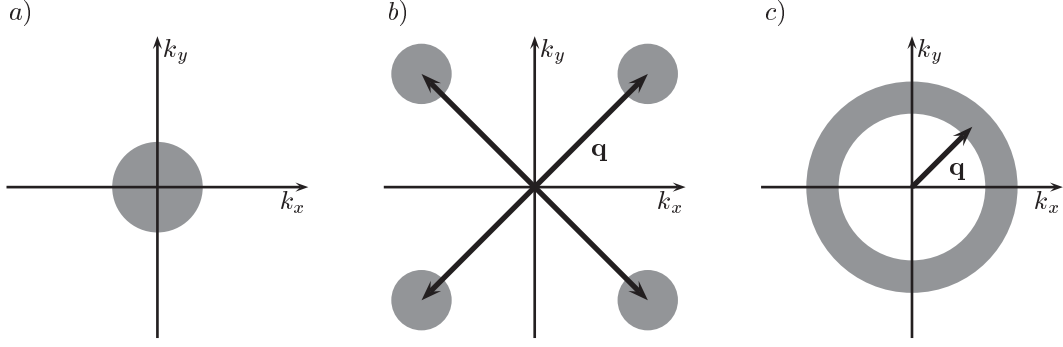


FIG. 1.1: Les différents régimes de fluctuations rencontrés à l'aide de la fonctionnelle gaussienne (1.3). *a*) Régime homogène, pour lequel  $g$  est positif. Les fluctuations de plus faibles énergies sont situées à proximité du centre de la première zone de Brillouin. Ce schéma correspond aussi au régime tricritique, pour lequel  $g = 0$ . Les fluctuations sont alors gouvernées par des modes  $\gamma k^4$  extrêmement mous. *b*) Régime inhomogène et anisotrope, où les fluctuations de plus basses énergies arrivent autour d'un certain nombre de poches dont le centre est donné par la position du vecteur  $\mathbf{q}$  de modulation FFLO et sa dégénérescence (ici il y a quatre poches du fait de l'anisotropie carrée). *c*) Régime inhomogène isotrope, où les fluctuations de plus basses énergies sont situées autour d'une surface unidimensionnelle (point, anneau ou boule, suivant la dimension étudiée).

pour faire passer la transition de phase du second ordre vers le premier ordre. Cette étude des fluctuations critiques a été récemment reproduite dans le cadre des phases FFLO anisotropes, avec essentiellement les mêmes conclusions que Brazovskii : les fluctuations critiques induisent une transition de phase du premier ordre [99].

Dans notre étude, on postulera *a contrario* l'existence d'une transition de phase du second ordre, et on se concentrera sur les fluctuations gaussiennes, puisqu'elles sont les plus importantes dans le cas de la transition de phase vers un état supraconducteurs [97], comme on le verra au paragraphe 1.5. Ainsi, même si une transition de phase du premier ordre existe entre les états normaux et FFLO, cette transition ne peut exister que dans la région de fluctuations critiques, qui se trouve trop près de la ligne de transition de phase pour qu'elle influence les modes de fluctuations gaussiens.

On n'utilise donc dans la suite que les termes dit gaussiens, proportionnels à  $|\Psi|^2$ , issus de la fonctionnelle (1.2), que l'on développe en série de Fourier comme

$$H[\Psi] = \sum_{\mathbf{k}} [\alpha + g_i k_i^2 + \gamma_{ij} k_i^2 k_j^2] |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (1.3)$$

où l'on a de suite réécrit les termes proportionnels à  $k^4$  sous la forme d'un terme anisotrope. En effet, si la première marque de l'état FFLO est la modulation, la prise en compte d'une telle modulation entraîne des termes proportionnels à  $k^4$  dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (1.2). Or, ces termes sont largement modifiés par la présence d'une quelconque anisotropie, qui peut être d'origine cristalline ou induite par un paramètre d'ordre supraconducteur en onde  $d$  par exemple.

Trois régimes seront donc étudiés à l'aide de l'approximation gaussienne (1.3) :

1. Le régime homogène, qui correspond à  $g > 0$ . Dans ce cas, les termes  $\gamma k^4$  sont insignifiants, et l'on retrouve les résultats bien connus des fluctuations gaussiennes de la supraconductivité de type BCS, où les modes de plus basses énergies naissent

à proximité de l'origine de l'espace réciproque, comme le montre la figure 1.1.a) [97]. Dans ce cas, l'anisotropie n'influence pas le comportement des fluctuations du système. Ce régime est calculé dans ce manuscrit à titre de comparaison avec les nouveaux régimes caractéristiques de la phase FFLO détaillés ci-dessous.

2. Le régime inhomogène, qui correspond à  $g < 0$ . Dans ce cas, le terme  $\gamma$  prend toute son importance, et l'on doit calculer les fluctuations pour des systèmes isotropes et anisotropes indépendamment. Dans le cas isotrope, le vecteur de modulation est dégénéré, *i.e.*, adopte n'importe quelle orientation alors que seul son module est fixé. Dans l'espace réciproque, les fluctuations vont donc apparaître autour d'un anneau centré sur l'origine, et les fluctuations seront grandement perturbées par ce type de modulation, et deviendront caractéristiques de l'état FFLO, Fig.1.1.c). Dans le cas anisotrope, on lève la dégénérescence directionnelle du vecteur de la modulation FFLO, qui ne peut prendre que des valeurs discrètes, voir Fig.1.1.b). On retrouve alors des comportements similaires au régime homogène. Même si, dans le cas inhomogène, les points discrets autour desquels la phase FFLO apparaît sont situés en des points de moment non-nuls, les fluctuations gaussiennes vont avoir le même poids statistique que dans le cas homogène.
3. Le régime que l'on nommera ici tricritique, et qui correspond à  $g = 0$ . Dans ce cas, seul le terme  $\gamma$  intervient, et la relation de dispersion des fluctuations gaussiennes sera entièrement dictée par les termes proportionnels à  $k^4$  donnant des modes de fluctuation inhabituellement mous. Ce régime est donc tout à fait caractéristique de la supraconductivité inhomogène, même si les modes de basses énergies naissent à proximité de l'origine de l'espace réciproque, comme dans le cas des fluctuations de type BCS, voir figure 1.1.a).

Pour calculer les fluctuations gaussiennes issues de la fonctionnelle (1.3), on se sert de l'approximation dite du hamiltonien effectif, qui donne la fonction de partition du système supraconducteur sous la forme  $Z = \text{Tr}\{\exp(-\beta H[\Psi_{\mathbf{k}}])\}$  avec  $\beta = (k_B T)^{-1}$ . Cette fonction de partition nous permet alors de remonter à l'énergie libre effective  $F = -k_B T \ln Z$  et d'en déduire les grandeurs thermodynamiques associées. La fonction de partition se calcule explicitement comme :

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\Psi_{\mathbf{k}} \mathcal{D}\Psi_{\mathbf{k}}^* \exp \left[ -\beta \sum_{\mathbf{k}} [\alpha + g_i k_i^2 + \gamma_{ij} k_i^2 k_j^2] |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \right] \\
&= \prod_{\mathbf{k}} \int d\Psi_{\mathbf{k}} d\Psi_{\mathbf{k}}^* \exp \left[ -\beta [\alpha + g_i k_i^2 + \gamma_{ij} k_i^2 k_j^2] |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \right] \\
&= \prod_{\mathbf{k}} \frac{\pi}{\beta [\alpha + g_i k_i^2 + \gamma_{ij} k_i^2 k_j^2]}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

où  $\int \mathcal{D}\Psi_{\mathbf{k}}$  est une intégrale fonctionnelle alors que  $\int d\Psi_{\mathbf{k}}$  est une intégrale ordinaire et où l'on a  $d\Psi_{\mathbf{k}} d\Psi_{\mathbf{k}}^* = d \text{Re} \{ \Psi_{\mathbf{k}} \} d \text{Im} \{ \Psi_{\mathbf{k}} \}$ . On remarque que le calcul entre les deux dernières lignes peut se faire analytiquement dans la mesure où il n'y a pas de couplage entre les différents modes. Le calcul fait alors seulement intervenir des intégrations gaussiennes. Ainsi, pour calculer exactement la fonction de partition (1.4), on ne peut prendre en compte que les termes apparaissant dans l'expression (1.3), *i.e.* les termes négligés par rapport à l'expression (1.2) sont non-gaussien, et doivent être pris en compte à l'aide du groupe de renormalisation [100]. On parle alors de fluctuations gaussiennes pour décrire les fluctuations issues de l'approximation (1.3). Insérant l'expression (1.4) dans l'expression

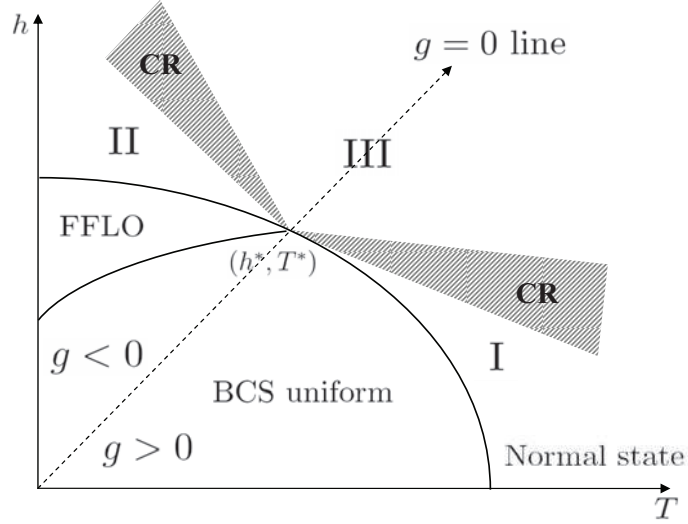


FIG. 1.2: Schéma de la ligne de transition de phase entre les état normal, homogène (région marquée BCS) et inhomogène (région marquée FFLO). La ligne pointillée correspondant à  $g = 0$  coupe la ligne critique au point tricritique caractérisé par  $(h^*, T^*)$ . Les parties grisées de ce schéma représentent les crossovers entre les trois régimes de fluctuations gaussiennes étudiés dans cette partie. Les régimes sont numérotés de I à III et correspondent au régime homogène (I), au régime inhomogène (II), et au régime tricritique (III), qui est médian des deux autres.

de l'énergie libre, on obtient [101, 97] :

$$F = \frac{k_B T}{L^d} \sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{\pi k_B T} \quad \text{où} \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha + g_i k_i^2 + \gamma_{ij} k_i^2 k_j^2 \quad (1.5)$$

constitue le spectre des fluctuations gaussiennes.

Les trois régimes de fluctuations gaussiennes décrits brièvement ci-dessus sont maintenant étudiés dans les trois prochaines sections, que l'on a organisées en fonction des quantités calculées : capacité calorifique, paraconductivité et aimantation. La dernière section de ce chapitre constitue une étude du critère dit de Ginzburg-Levanyuk, qui permet de quantifier la plage d'application en température d'une étude des fluctuations gaussiennes à proximité d'une transition de phase du second ordre. En effet, trop près de la transition de phase, les interactions entre modes deviennent trop importantes pour qu'une étude gaussienne soit viable. Ginzburg [102] et Levanyuk [103] ont alors défini un critère permettant de quantifier le passage entre le régime gaussien et le régime critique, pour lequel la théorie du groupe de renormalisation est nécessaire et pour lequel on parle de fluctuations critiques. On verra que le critère de Ginzburg-Levanyuk adapté aux phases FFLO n'est pas assez restrictif pour que des études de renormalisation soient nécessaires.

## 1.2 Fluctuation de la capacité calorifique

Comme toute transition de phase du second ordre, la transition de phase entre l'état normal et l'état FFLO montre un saut abrupt de la capacité calorifique [101]. On étudie dans cette section les fluctuations de la capacité calorifique qui amènent le système à subir ce saut de capacité calorifique.

On évalue les fluctuations de la capacité calorifique  $C$  à l'aide de l'expression suivante [101] :

$$C = -T_c \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{a^2 k_B T_c^2}{L^d} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2} \quad (1.6)$$

où  $a$  est donné par le premier terme de la fonctionnelle (1.3) :  $\alpha = a(T - \tilde{T}_c)$ , avec  $\tilde{T}_c$  la température de transition entre l'état normal et l'état homogène BCS, et  $L^d$  représente la taille du système (volume, surface ou longueur) en fonction de la dimension  $d = 3, 2, 1$ , respectivement.

Pour différencier les différents régimes homogènes, inhomogène isotrope et inhomogène anisotrope, on peut réécrire l'expression (1.5) du spectre des fluctuations sous la forme :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\text{BCS}} = \alpha + g_i k_i^2 \quad (1.7)$$

dans le cas homogène ou

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\text{iso}} = \tau_{\text{iso}} + \gamma (k^2 - q^2)^2 \quad (1.8)$$

dans le cas inhomogène isotrope et

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\text{ani}} = \tau_{\text{ani}} + g_{ij} (k_i - q_i) (k_j - q_j) \quad (1.9)$$

dans le cas inhomogène anisotrope. Dans chacun des cas (1.8) et (1.9),  $\tau$  représente la nouvelle température de transition vers l'état FFLO, qui est supérieure à  $\tilde{T}_c$  puisque l'état homogène est instable face à l'état inhomogène lorsque  $g$  devient négatif. On aura ainsi  $\tau_{\text{iso}} = \alpha - g^2/4\gamma$  alors que  $\tau_{\text{ani}} = \varepsilon_{\mathbf{q}}$ , où  $\mathbf{q}$  est le vecteur de la modulation FFLO, de composantes  $q_i$ . Dans le cas inhomogène (1.9), on a développé le spectre des fluctuations à proximité des vecteurs de la modulation FFLO, en posant un tenseur de "masse effective"  $g_{ij} = \partial_{ij}^2 \varepsilon_{\mathbf{q}}$ . Notons que si (1.9) est une forme quadratique approchée du spectre des fluctuations (1.5) valable dans l'approximation gaussienne, l'expression (1.8) est une forme exacte lorsque  $g_i = g$  et  $\gamma_{ij} = \gamma$  dans (1.5).

Fort de ces expressions, on s'aperçoit que les modes de fluctuations principaux apparaîtront à proximité d'une structure d'anneau dans le cas isotrope (Fig.1.1.c, Éq.(1.8)), alors que les modes de fluctuations principaux du cas anisotrope seront situés à proximité de points définis par la longueur  $|\mathbf{q}|$  de modulation FFLO (Fig.1.1.b, Éq.(1.9)). Ainsi, on obtient dans le cas inhomogène isotrope une plus forte contribution des fluctuations que dans le cas homogène, puisque les modes de fluctuations principaux sont gouvernés par des modes à  $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$  alors que dans le cas homogène, les fluctuations sont gouvernées par les modes situés à l'origine de l'espace des moments (Fig.1.1.a). On obtient finalement

$$C_{\text{BCS}} = A_d k_B \tilde{T}_c^2 \left(\frac{a}{g}\right)^{d/2} (T - \tilde{T}_c)^{\frac{d-4}{2}} \quad (1.10)$$

pour le cas des fluctuations près de la transition entre l'état normal et l'état supraconducteur homogène. Les deux expressions relatives à la transition vers l'état FFLO seront données par

$$\boxed{C_{\text{iso}} = A_d k_B T_c^2 \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \left(\frac{|g|}{2\gamma}\right)^{\frac{d-2}{2}} (T - T_c)^{-3/2}} \quad (1.11)$$

et

$$C_{\text{ani}} \approx N_{\alpha} k_B T_c^2 \sqrt{\frac{a^d}{\det g_{ij}}} (T - T_c)^{\frac{d-4}{2}} \quad (1.12)$$

où  $A_d = (1/4, 1/8, 1/8\pi)$  est une constante d'intégration dépendante de la dimension alors que  $N_{\alpha}$  représente le nombre de poches de fluctuations différentes qu'il faut prendre en compte dans le cas anisotrope.

Les fluctuations à proximité d'une phase FFLO sont plus importantes dans le cas isotrope que dans le cas homogène, et indépendantes de la dimension du système. En revanche, on retrouve les exposants des systèmes homogènes dans le cas anisotrope. Cela vient du fait que, dans le cas isotrope, les fluctuations sont gouvernées par une structure unidimensionnelle (deux points, anneau ou boule pour  $d = 1, 2, 3$  respectivement), et l'on retrouve alors l'exposant  $-3/2$  caractéristique du cas unidimensionnel BCS. Dans le cas anisotrope (Éq.(1.12)), on retrouve les exposants du cas homogène puisque la structure en poches des points de fluctuations principales est identique à la structure du cas homogène (Éq.(1.10)), où une seule poche autour de  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  participe aux fluctuations. Néanmoins, les préfacteurs sont bien évidemment différents dans ces deux cas puisque les coefficients de la fonctionnelle (1.33) sont différents des coefficients de la fonctionnelle (1). De plus, dans le cas d'une phase FFLO, il faut tenir compte de la présence des différentes poches de fluctuation, et les sommer. Comme elle participent toutes de façon approximativement égale, cette sommation est représentée par la grandeur  $N_{\alpha}$ .

L'autre grande différence par rapport au cas homogène BCS vient du fait que, comme commenté ci-dessus, le coefficient  $g$  peut maintenant s'annuler au point tricritique ( $h^*, T^*$ ). Ainsi, lorsque ce coefficient s'annule, les exposants gaussiens des deux expressions FFLO vont être modifiés de sorte que, par rapport au cas isotrope, on trouvera des exposants plus faibles, alors que dans le cas anisotrope, où  $\det g_{ij} \sim g^d$ , on trouvera des exposants plus forts; des exposants plus fort (faibles) induisant une divergence plus forte (faible) à la transition, respectivement.

On peut calculer facilement la capacité calorifique dans le régime  $g_i = 0$ , dit tricritique, à partir de l'expression (1.5) et on trouvera dans ce cas

$$C^* \approx k_B T^{*2} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{d/4} (T - T^*)^{\frac{d-8}{4}} \quad (1.13)$$

dont l'exposant gaussien vérifie toutes les propriétés annoncées précédemment. Notons que l'on retrouve cet exposant  $(d - 8) / 4$  en posant  $g \sim \tau^{1/2}$  dans chacune des expressions (1.11) ou (1.12), comme le suggère les expressions de  $\tau$ . On vérifie ainsi la consistance de ce régime tricritique [104].

Si le régime tricritique est obtenu ici sur la base de l'annulation du coefficient  $g$  à proximité du point tricritique, on peut quantifier la taille de ce régime tricritique à l'aide de l'expression isotrope pour les fluctuations de la capacité calorifique suivante, obtenue en insérant (1.5) dans (1.6) pour  $g_i = g$  et  $\gamma_{ij} = \gamma$  :

$$C = \frac{a^2 k_B T_c^2}{\gamma^{d/4}} \alpha^{\frac{d-8}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Omega_d k^{d-1} dk}{\left[1 + \frac{g}{\sqrt{\alpha\gamma}} k^2 + k^4\right]^2} \quad (1.14)$$

où le facteur  $g/\sqrt{\alpha\gamma}$  caractérise donc le régime où la modulation FFLO est bien développée (Éqs.(1.11) et (1.12)) du cas tricritique, pour lequel la modulation FFLO n'est pas encore

clairement établie (Éq.(1.13)). Ainsi, les deux termes  $k^2$  et  $k^4$  seront de poids équivalent lorsque  $g^2 \sim \alpha\gamma$ , ce qui signifie que le crossover entre les régions de fluctuations de type inhomogènes et tricritiques est caractérisée par le facteur  $|T - T_c| \sim g^2/\alpha\gamma$ , le régime tricritique étant bien établi pour la limite  $|T - T_c| \gg g^2/\alpha\gamma$  alors que le régime inhomogène sera bien établi lorsque l'on vérifiera  $|T - T_c| \ll g^2/\alpha\gamma$ . Il est donc possible de changer de régime de fluctuation en changeant la température.

### 1.3 Fluctuation de la paraconductivité

Si les fluctuations des grandeurs thermodynamiques seront caractéristiques de la présence d'un état FFLO à travers l'exemple de la capacité calorifique, on peut se demander si la signature du régime tricritique subsiste lorsque l'on regarde des grandeurs de transport. Dans cette section, on étudie l'exemple de la paraconductivité, qui est le nom donné à la conductivité associée aux paires de Cooper.

Normalement, le calcul de cette grandeur se fait à l'aide du formalisme de la physique statistique hors équilibre et de la réponse linéaire de Kubo en particulier [105, 106]. Toutefois, d'importants travaux ont été menés dans les années 70-80 pour généraliser le principe de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau à des cas hors-équilibres, donnant lieu à ce que l'on appelle communément la fonctionnelle de Ginzburg-Landau dépendante du temps [10, 107]. À l'aide de cette fonctionnelle, il est possible de trouver une expression générale pour le tenseur des fluctuations de la paraconductivité (à fréquence nulle) :

$$\sigma_{ij} = \frac{\pi e^2 a k_B T_c}{4 \hbar L^d} \sum_{\mathbf{k}} \frac{v_{\mathbf{k}i} v_{\mathbf{k}j}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^3} \quad (1.15)$$

où  $v_{\mathbf{k}i} = \partial_i \varepsilon_{\mathbf{k}}$  représente la vitesse des paires de Cooper [97].

À l'aide de cette expression générale, on calcule les fluctuations de la paraconductivité dans les trois cas homogène ( $\sigma_{\text{BCS}}$ ), inhomogène ( $\sigma_{\text{iso}}$  et  $\sigma_{\text{ani}}$ ) et tricritique ( $\sigma^*$ ) comme

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{BCS}} &= \frac{\pi A_d e^2 k_B T_c}{\hbar} \left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{d-2}{2}} (T - \tilde{T}_c)^{\frac{d-4}{2}} \\ \sigma_{\text{iso}} &= \frac{\pi A_d e^2 k_B T_c}{\hbar d} \sqrt{\frac{\gamma}{a}} \left(\frac{|g|}{2\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} (T - T_c)^{-3/2} \\ \sigma_{\text{ani}} &\approx \frac{N_\alpha e^2 k_B T_c}{2 \hbar} a^{\frac{d-2}{2}} \frac{\text{Tr}\{g_{ij}\}}{\sqrt{\det g_{ij}}} (T - T_c)^{\frac{d-4}{2}} \\ \sigma^* &\approx \frac{e^2 k_B T^*}{\hbar} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^{\frac{d-2}{4}} (T - T^*)^{\frac{d-6}{4}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

où  $A_d = (1/4, 1/8, 1/8\pi)$  alors que  $N_\alpha$  représente le nombre de poche de fluctuations différentes qu'ils faut prendre en compte dans le cas anisotrope.

Encore une fois, le cas isotrope  $\sigma_{\text{iso}}$  redonne l'exposant du cas homogène unidimensionnel du fait de la structure unidimensionnelle de la surface des iso- $\mathbf{q}$  alors que le cas anisotrope  $\sigma_{\text{ani}}$  redonne les mêmes exposants que dans le cas homogène  $\sigma_{\text{BCS}}$ . Le cas tricritique  $\sigma^*$  révèle quant à lui le passage à l'état FFLO pour lequel les fluctuations de plus basses énergies sont proportionnelles à  $k^4$  et non à  $k^2$ .

Même si l'étude des fluctuations de la paraconductivité ne révèle pas directement



la présence de la phase FFLO dans le cas anisotrope<sup>2</sup>, on peut néanmoins proposer la mesure du rapport d'anisotropie  $\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$  dans le cas bidimensionnel d'une anisotropie rectangulaire pour laquelle le spectre des fluctuations (1.5) sera

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha + g_1 k_x^2 + g_2 k_y^2 + \gamma_1 k_x^4 + \gamma_2 k_y^4 + 2\gamma_{12} k_x^2 k_y^2 \quad (1.17)$$

, ce qui donnera (voir Fig.1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} &= \frac{\gamma_1 g_1}{\gamma_{12} g_1 - \gamma_1 g_2}, \quad q_y = 0 \\ \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} &= \frac{\gamma_{12} g_2 - \gamma_2 g_1}{\gamma_2 g_1}, \quad q_x = 0 \\ \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} &= \frac{\gamma_1 \gamma_{12} - \gamma_2}{\gamma_2 \gamma_{12} - \gamma_1}, \quad q_x = q_y \neq 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

pour les trois positions du vecteur de la modulation FFLO possibles (voir Fig.1.3). Dans le cas BCS, on aurait systématiquement  $(\sigma_{xx}/\sigma_{yy})_{\text{BCS}} = g_1/g_2$ , alors que dans le cas FFLO, puisque les fluctuations viennent de poches éloignées de l'origine de l'espace des moments, ce rapport d'anisotropie des fluctuations de la paraconductivité sera généralement différent de celui obtenu à proximité de la phase BCS. Notons toutefois que si l'anisotropie est carrée, ce qui équivaut à poser  $\gamma_1 = \gamma_2$  et  $g_1 = g_2$  dans les expressions (1.18), on retrouve  $\sigma_{xx}/\sigma_{yy} = 1$  puisqu'alors il faut sommer à chaque fois sur les quatre points de minima d'énergie de la fonctionnelle (1.3).

La mesure du coefficient d'anisotropie ne permet d'identifier la phase FFLO que dans le cas d'une anisotropie rectangulaire. Mais il est également possible de créer de l'anisotropie dans un système bidimensionnel en appliquant un champ magnétique parallèlement au plan supraconducteur [108]. Dans ce cas, certains points de minima de la modulation deviennent instables, et l'on peut passer d'une configuration d'anisotropie carrée à une configuration d'anisotropie rectangulaire [109]. Mieux encore, le rapport d'anisotropie aura un comportement en température de la forme :

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = 1 - \frac{\gamma}{6g} \left( \frac{Hd}{\Phi_0} \right)^2 \left[ \frac{\eta - 3}{\eta - 1} + \frac{g^2 (\eta - 3)^2}{2\gamma\tau (\eta + 1)} \right] \quad (1.19)$$

pour un spectre de fluctuation d'anisotropie carrée  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha + gk^2 + \gamma k^4 + 2\gamma(\eta - 1)k_x^2 k_y^2$  et pour un champ magnétique appliqué le long de l'axe  $x$ . Non seulement le champ magnétique rajoute une anisotropie aux fluctuations, mais cette anisotropie augmente en se rapprochant de la ligne critique.

Notons finalement que l'on n'a étudié dans cette sous-section que la contribution dite de Aslamasov-Larkin des fluctuations de la paraconductivité. Une étude complète des fluctuations de la paraconductivité devrait en principe tenir compte également de la contribution dite de Maki-Thompson [97]. Mais, dans le cadre de la transition de phase vers l'état FFLO, cela n'est *a priori* pas nécessaire, puisque les paires de Cooper sont fortement perturbées par l'effet paramagnétique, et l'on sait que dans le cas d'une forte brisure des paires de Cooper, la contribution de Maki-Thompson est négligeable [97]. De plus, les études incluant la contribution de Maki-Thompson le font dans le cas sale, où elle sera vraisemblablement plus importante que dans le cas propre, dans lequel on se place par défaut pour étudier les phases FFLO<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>En particulier pour  $d = 2$ , qui donne  $\sigma_{\text{BCS}} \sim \sigma_{\text{ani}} \sim \sigma^* \sim (T - T_c)^{-1}$  et il ne devrait *a priori* pas avoir de crossover entre les différents régimes.

<sup>3</sup>Merci à Alex LEVCHENKO pour sa correspondance à ce sujet.

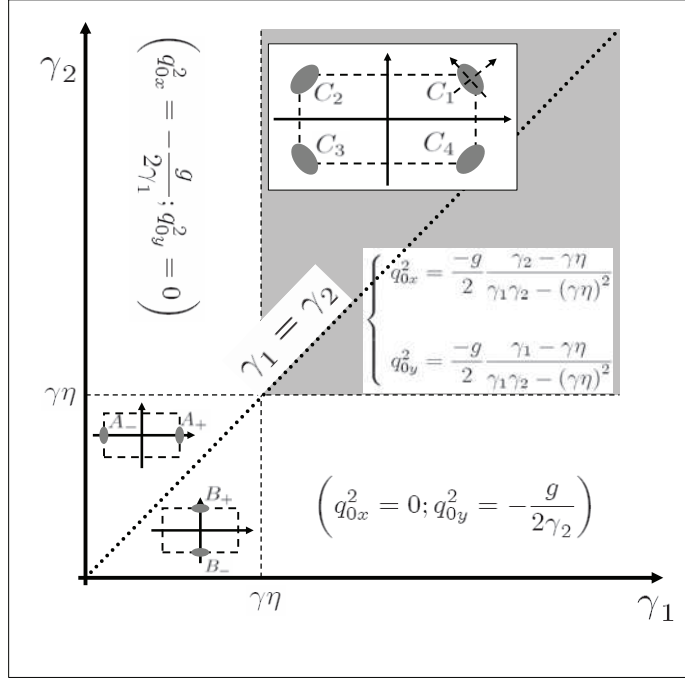


FIG. 1.3: Étude des positions d'équilibre du vecteur de modulation FFLO dans le cas d'une anisotropie bidimensionnelle rectangulaire dont le spectre s'écrit  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha + gk^2 + \gamma_1 k_x^4 + \gamma_2 k_y^4 + 2\gamma\eta k_x^2 k_y^2$ . Il y a trois configurations possibles : soit les poches de fluctuations sont situées sur les axes horizontaux ou verticaux (régions blanches), soit elles sont situées sur les diagonales (région grisée). Le cas d'une anisotropie carrée se retrouve sur la ligne pointillée  $\gamma_1 = \gamma_2$ , pour laquelle il y a toujours quatre directions du vecteur  $\mathbf{q}$  équivalentes.

## 1.4 Fluctuation de l'aimantation

Lorsque l'on applique un champ magnétique de type orbital au système supraconducteur, il faut modifier la fonctionnelle (1.3) sous la forme

$$H[\Psi] = H_0 + \int d^d \mathbf{r} [\alpha |\Psi|^2 + g_i |\Pi_i \Psi|^2 + \gamma_{ij} |\Pi_i \Pi_j \Psi|^2] \quad (1.20)$$

où les opérateurs  $\Pi_i = -i\hbar\partial_i + eA_i$  correspondent aux substitutions de Peirls donnant les opérateurs covariants de jauge habituels. Dans le cas général d'une anisotropie quelconque, il n'est malheureusement pas possible de connaître les états propres de l'équation de Ginzburg-Landau  $\delta H[\Psi]/\delta\Psi^* = 0$  relative à la fonctionnelle (1.20), puisque les différentes composantes  $\Pi_i$  ne commutent pas entre elles. On peut toutefois substituer à la fonctionnelle (1.20) des fonctionnelles effectives prenant en compte quelques formes simples de l'anisotropie. Dans le cas isotrope, en revanche, les fonctions propres de l'équation de Ginzburg-Landau  $\delta H[\Psi]/\delta\Psi^* = 0$  sont connues et sont simplement données par les fonctions associées aux niveaux de Landau qu'aura un système quantique en présence d'effet orbital [22].

### 1.4.1 Réponse paramagnétique des systèmes isotropes.

Ainsi, dans le cas d'un système isotrope, le spectre des fluctuations s'écrit sous la forme simple

$$E_n = \tau + \gamma (Q_n^2 + k_z^2 - q^2)^2 \quad (1.21)$$

où l'on a introduit la notation  $Q_n^2 = 4eH(n + 1/2)/\hbar$  avec  $n$  l'entier caractérisant les niveaux de Landau donné [22].

Pour calculer les fluctuations de l'aimantation associées au spectre énergétique (1.21), on utilise une fois de plus le principe de l'intégration gaussienne de la fonction de partition. En comparaison avec l'énergie libre précédemment obtenue (1.5), il y aura, en plus de la sommation sur le vecteur  $k_z$  lorsque l'on étudie un système tridimensionnel, une sommation sur l'ensemble des niveaux de Landau. Ainsi, l'expression de l'énergie libre (1.5) s'écrira maintenant sous la forme :

$$F = -k_B T \sum_n \int \ln \frac{\pi k_B T}{E_n} dE \quad (1.22)$$

où la somme sur  $n$  correspond à la somme sur l'ensemble des niveaux de Landau et où  $dE$  est la dégénérescence de ces niveaux de Landau. Si l'on suppose que ces niveaux de Landau sont proches les uns des autres, ce qui revient à considérer un faible effet orbital, on peut utiliser la formule sommatoire de Poisson [110] :

$$\sum_{n=0}^N f\left(n + \frac{1}{2}\right) \approx \int_0^N f(x) dx - \frac{1}{24} [f'(x)]_0^N \quad (1.23)$$

à l'ordre le plus bas. La fonction  $f$  est alors simplement donnée par l'intégrale contenue dans  $F$ , Éq.(1.22) :  $f(n + 1/2) = -k_B T \int \ln[\pi k_B T/E_n] dE$ . On obtient ainsi :

$$F \approx -k_B T \int dE \left[ \int_0^N f(x) dx \right] - \frac{k_B T}{24} \frac{8eH}{\hbar} \int \left[ \frac{\gamma(Q_n^2 + k_z^2 - q^2)}{\tau + \gamma(Q_n^2 + k_z^2 - q^2)^2} \right]_{n+1/2=0}^{n+1/2=N} dE \quad (1.24)$$

où la première intégrale ne nous intéresse pas car elle ne contient que des termes non-linéaires qui sortent du cadre de notre étude gaussienne. Toujours dans la limite d'un faible effet orbital, on peut prendre  $N \rightarrow \infty$ . Dans cette limite, le terme évalué entre crochet dans l'expression précédente s'annule, donnant une contribution :

$$F \approx \frac{k_B T e H}{3\hbar} \int \frac{\gamma(k_z^2 - q^2)}{\tau + \gamma(k_z^2 - q^2)^2} dE \quad (1.25)$$

pour l'énergie libre. Donnons encore la dégénérescence d'un niveau de Landau  $dE = [VeH/(2\pi^2)\hbar] dk_z$  dans le cas tridimensionnel. Dans le cas bidimensionnel, il faut supprimer l'intégration sur  $k_z$ , et multiplier l'expression de  $F$  par  $eHS/2\pi\hbar$  qui est le facteur de dégénérescence d'un niveau de Landau. On a posé  $S$  et  $V$  pour la surface et le volume du système bi- ou tri-dimensionnel.

Il n'y a alors plus qu'à calculer l'aimantation. On évalue cette dernière à l'aide de l'expression  $M = -\partial F/\partial H$ , ce qui nous donne

$$\begin{aligned} M_{\text{BCS}} &= \begin{cases} -\frac{k_B T_c H}{12\pi^2} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \sqrt{\frac{g}{a}} (T - \tilde{T}_c)^{-1/2} & \text{pour } d = 3 \\ -\frac{k_B T_c H}{6\pi} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \frac{g}{a} (T - \tilde{T}_c)^{-1} & \text{pour } d = 2 \end{cases} \\ M_{\text{iso}} &\sim \frac{k_B T_c H}{\pi} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \frac{\gamma q_0^2}{a(T - T_c) + \gamma q_0^4} \text{ pour } d = 2, 3 \\ M^* &= -\frac{k_B T^* H}{24\pi^2} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \sqrt[4]{\frac{\gamma}{a}} (T - T^*)^{-1/4} \text{ pour } d = 3 \end{aligned} \quad (1.26)$$

qui révèle donc un caractère diamagnétique près de la phase homogène ( $M_{\text{BCS}}$ ) et un comportement paramagnétique près de la phase inhomogène ( $M_{\text{iso}}$ ) qui ne diverge pas à la transition vers la phase FFLO. Dans le régime tricritique, la contribution bidimensionnelle s'annule alors que la contribution tridimensionnelle est diamagnétique avec un exposant gaussien  $-1/4$  plus faible que dans le cas BCS. Ce changement de signe de la réponse magnétique vient encore une fois du changement de signe du terme  $g$  dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau : la réponse de l'aimantation est proportionnelle à ce facteur  $g$  et change donc de signe à la transition entre l'état homogène et l'état inhomogène. Ainsi, la réponse en aimantation des fluctuations à proximité de la phase FFLO peut également servir de révélateur de la présence de cette phase, puisqu'une faible réponse paramagnétique est tout à fait inattendue pour un supraconducteur BCS.

Remarquons toutefois que le résultat obtenu ici n'est pas général. En effet, pour pouvoir utiliser la formule de sommation de Poisson (1.23), il faut que l'écart entre les niveaux de Landau soit assez faible. Or, cela n'est vrai que pour de faibles champs magnétiques orbitaux. Dans le cas bidimensionnel, on peut toujours supposer que seule la composante perpendiculaire au plan de l'échantillon va donner une contribution diamagnétique à la réponse de l'aimantation. Mais cela n'est pas vrai du tout dans le cas tridimensionnel. Puisque l'état FFLO n'existe qu'à fort champ magnétique, il nous faut calculer la réponse en aimantation différemment dans ce cas. Le formalisme utilisé dans cette section ne s'applique donc en principe qu'au cas de la réponse en aimantation d'un système quasi-bidimensionnel, pour lequel le champ magnétique est faiblement incliné par rapport au plan de l'échantillon.

## 1.4.2 Oscillation entre réponse dia- et para-magnétique des systèmes anisotropes

Dans le cas des systèmes anisotropes, on a déjà dit que l'on ne pouvait pas connaître les états propres associés à l'écriture générale (1.20) de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. On va donc procéder à des approximations pour obtenir des fonctionnelles effectives permettant de décrire les fluctuations de l'aimantation.

Récemment, une étude théorique a décrit le comportement du champ critique en fonction des niveaux de Landau associés à la transition de phase entre les états normaux et FFLO lorsque l'on considère un système anisotrope [89]. Dans le cas d'un système isotrope, à proximité de la température nulle et pour un paramètre de Maki important  $\alpha_M > 9$ , il était établi que la ligne de transition de phase en fonction du champ magnétique appliqué oscillait, le niveau de Landau  $n = 0$  étant instable et donnant lieu à des transitions successives dans les états supérieurs  $n = 1, 2, \dots$  [39, 40]. Ces transitions viennent de la compétition entre un niveau de Landau maximal et une modulation FFLO maximale. Quant l'énergie associée à une trop longue modulation correspond à l'énergie associée au niveau de Landau supérieur, le système peut subir une transition vers ce niveau de Landau supérieur alors que la modulation s'en trouve diminuée, avant de recommencer à croître si le champ augmente encore. Le nombre de transitions entre niveaux de Landau différents est alors donné par la longueur maximale que peut avoir la modulation FFLO, longueur qui est directement liée au paramètre de Maki (1.1). Ainsi, pour de trop faibles paramètres de Maki ( $\alpha_M < 9$ ), ces transitions entre différents niveaux de Landau n'existent pas [39, 40], et l'on retrouve la ligne de transition prédite par Gruenberg et Gunther [30].

Dans le cas d'un système anisotrope à fort  $\alpha_M$ , on retrouve cet effet de transition entre niveaux de Landau différents, mais avec quelques nuances [89]. Dans le cas d'une

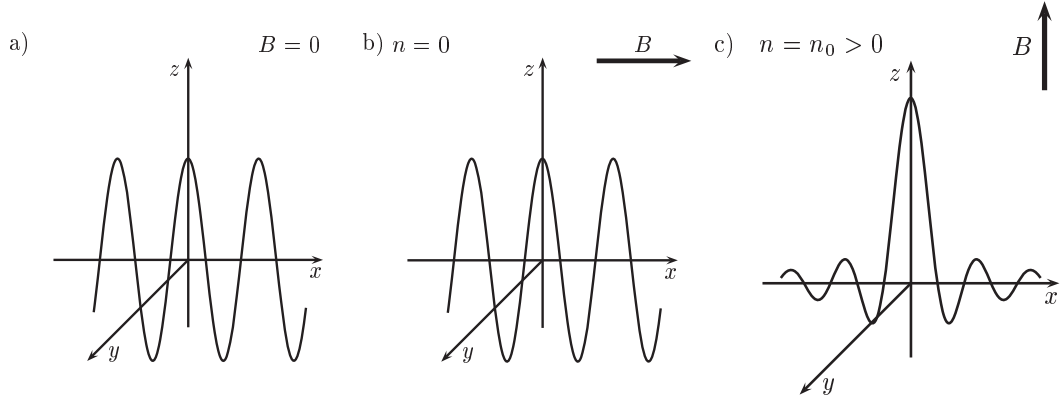


FIG. 1.4: Représentation schématique de l'influence de l'orientation du champ magnétique sur l'état FFLO dans un système tétragonal de plan basal  $xy$ . La forme et l'orientation de la modulation (courbe oscillante en trait plein) dépendent des paramètres de la fonctionnelle Ginzburg-Landau modifiée. Ici, on suppose que l'orientation privilégiée de la modulation sans champ magnétique est le long de l'axe  $x$  (figure a). Lorsque le champ magnétique externe est appliqué le long de l'axe  $x$ , la modulation est certes perturbée par ce champ, mais reste le long de l'axe  $x$ , alors que le niveau de Landau réalisé sera  $n = 0$  (figure b). Lorsque le champ magnétique externe est appliqué le long de l'axe  $z$ , la modulation rentre en compétition avec l'état  $n_0 > 0$  caractérisant le niveau de Landau. La forme de la modulation est alors altérée (figure c). On ne distingue pas ici la différence entre les cas *ii*) et *iii*) du texte. Appliquer le champ le long de l'axe  $y$  plutôt que sur l'axe  $x$  ne change rien en raison de la symétrie particulière du composé choisie ici.

anisotropie tétragonale, bien adaptée au cas du  $\text{CeCoIn}_5$ , deux axes ( $x, y$ ) auront le même rôle tandis que le troisième (l'axe  $z$ ) aura une masse effective différente. Il y aura alors trois scénarii possibles lorsque le champ sera appliqué le long de l'axe  $z$ . Le choix de l'un ou l'autre de ces scénarii dépend des ratios entre les masses effectives du plan  $xy$  et de l'axe  $z$  perpendiculaire à ce plan (voir Fig.1.4 pour le cas d'une modulation le long de l'axe  $x$ ) :

*i*) la modulation FFLO est maximale le long du champ magnétique appliqué, et le système reste dans le niveau de Landau fondamental  $n = 0$ .

*ii*) les niveaux de Landau d'ordres supérieurs, associés à la quantification de trajectoire dans le plan perpendiculaire au champ appliqué sont favorisés alors que la modulation est détruite ou quasiment nulle<sup>4</sup>.

*iii*) il y a compétition entre la modulation la plus grande et le niveau de Landau le plus grand, comme dans le cas isotrope.

Or, comme il n'est pas possible de connaître *a priori* les coefficients apparaissant dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, ou encore de mesurer le vecteur de modulation FFLO, il n'est pas possible expérimentalement de faire la distinction entre les trois scénarii présentés ci-dessus. Néanmoins, on va voir que l'étude des fluctuations permet de les séparer clairement.

Le scénario *i*) peut-être étudié à l'aide du spectre des fluctuations effectif

$$E(k_z) = \tau + \gamma \left( \frac{2\pi H}{\Phi_0} + k_z^2 - q^2 \right)^2 \quad (1.27)$$

<sup>4</sup>Dans l'étude [89], il n'est pas possible de dire si la modulation disparaît totalement dans le plan, mais il est clair qu'elle est drastiquement réduite.

où seul le niveau de Landau  $n = 0$  participe aux fluctuations alors que la modulation  $q$  est maximale de façon à minimiser l'énergie  $E(k_z)$ . Il n'y a alors plus de sommation sur les niveaux de Landau et l'aimantation se calcule aisément sous la forme

$$M = -\frac{2k_B T}{\Phi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(2\pi H/\Phi_0 + k_z^2 - q^2)}{\tau + \gamma(2\pi H/\Phi_0 + k_z^2 - q^2)^2} dk_z \quad (1.28)$$

où le numérateur aura des contributions positive ou négative suivant le signe de  $k_z^2 - q^2$ . Il y aura donc une forte suppression des fluctuations de l'aimantation lorsque l'on approchera un système FFLO anisotrope répondant au scénario *i*). Cette disparition des fluctuations de l'aimantation s'interprète comme un reliquat de la réponse paramagnétique dans le cas des systèmes isotropes obtenue au paragraphe précédent.

Dans le cas des scénari *ii*) et *iii*), on peut écrire un spectre des fluctuations sous la forme effective

$$E(k_z) = \tau + \gamma(Q_N^2 - q^2)^2 + gk_z^2 \quad (1.29)$$

qui favorise l'annulation de la modulation  $q$  dans le plan en faveur d'un niveau de Landau  $n = N$ . La partie  $gk_z^2$  est alors une partie fluctuationnelle qui persiste perpendiculairement au plan. Pour évaluer les fluctuations de l'aimantation associées à ce spectre effectif, on utilise l'approximation d'un fort champ magnétique, qui sépare fortement les niveaux de Landau, de sorte que la sommation de tous les niveaux de Landau n'est plus nécessaire dans le calcul de l'énergie libre. On obtient alors

$$M_N = -\frac{(4N + 2)k_B T}{\Phi_0^2} \frac{\gamma}{\sqrt{ag}} \frac{Q_N^2 - q^2}{\sqrt{T - T_{cN}}} H \quad (1.30)$$

où  $T_{cN}$  est la température critique associée à la transition de phase entre l'état normal et l'état FFLO caractérisé par la modulation  $q$  et le niveau de Landau  $N$ . On retrouve alors l'exposant  $-1/2$  caractéristique des fluctuations de l'aimantation des systèmes tri-dimensionnels. Mais, en fonction de la modulation  $q$  présente dans l'expression de  $M_N$ , l'aimantation est cette fois oscillante entre des états paramagnétiques et des états diamagnétiques, comme le montre la figure 1.5.

Toutefois, on a omis dans les calculs précédents l'aimantation provenant de la dépendance en champ de  $\tau \rightarrow \tau_p = \tau + \mu_B(H - H_p)/H_p$ , où  $H_p$  représente le champ paramagnétique du composé, et  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr<sup>5</sup> [111]. Cette dernière contribution n'est pas oscillante, et l'aimantation complète devient :

$$M_N = -\frac{1}{\sqrt{ag}\sqrt{T - T_{cN}}} \left[ \frac{\mu_B}{H_p} + \gamma \frac{(4N + 2)k_B T}{\Phi_0^2} (Q_N^2 - q^2) \right] H \quad (1.31)$$

à la place de l'expression (1.30). Dans cette dernière expression,  $T_{cN}$  correspond à la température de transition vers l'état FFLO, tenant compte de l'énergie paramagnétique. Or, le terme  $\mu_B/H_p$  sera dominant à fort champ magnétique, et induira une réponse fluctuationnelle majoritairement diamagnétique. Ainsi, contrairement à ce qui a été dit plus haut, l'aimantation n'oscillera pas entre réponses diamagnétique et paramagnétique, mais sera majoritairement diamagnétique. En revanche, cette réponse diamagnétique oscillera bien à l'approche de la ligne critique, puisque la quantité  $Q_N^2 - q^2$  continue de changer de signe périodiquement.

---

<sup>5</sup>Nous tenons à remercier ici Vladimir MINEEV d'avoir porté cette erreur à notre connaissance. Ici, on préfère discuter cette erreur séparément par soucis pédagogique. Ainsi, on discute les expressions (1.30) et (1.31) séparément, bien que l'expression (1.30) soit fautive parce qu'incomplète.

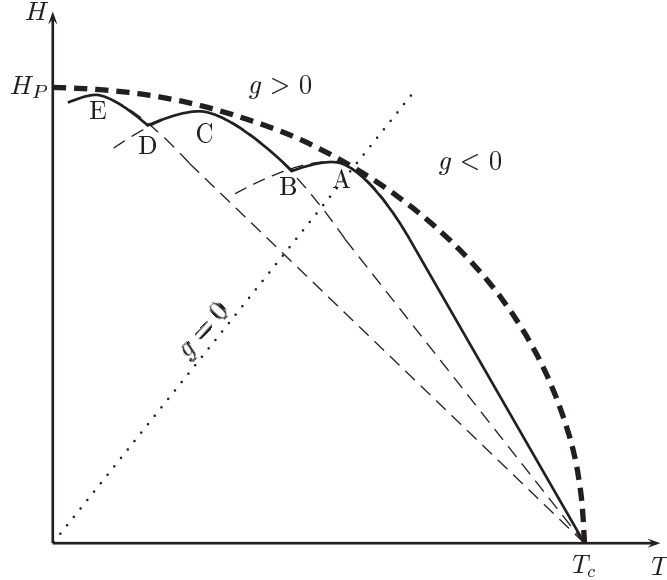


FIG. 1.5: Schéma de la ligne de transition de phase entre l'état normal et l'état supraconducteur, vers un état homogène (partie à bas champ) ou vers un état FFLO (partie à fort champ, partie au dessus de la ligne  $g = 0$ ), lorsque les effets paramagnétiques et orbitaux rentrent en compétition. En fonction du champ magnétique, le système préférera augmenter sa longueur de modulation, qui ne pourra toutefois pas dépasser la longueur associée à une énergie correspondante à la transition vers un niveau de Landau supérieur. Il en résulte des oscillations de la ligne de transition de phase, le système sautant d'un niveau de Landau à l'autre. Chaque ligne de transition de phase associée à un niveau de Landau différent est représenté par les lignes pointillées en trait fin. Les fluctuations de l'aimantation seront de nature paramagnétique le long des sections AB, CD, ... et diamagnétique le long des sections BC, DE, ...

Si l'on considère maintenant un composé bidimensionnel, on peut négliger la composante  $k_z$  dans les expressions précédentes. On obtient alors

$$M_N^{2D} = -\frac{1}{a(T - T_{cN})} \left[ \frac{\mu_B}{H_p} + \gamma \frac{(4N + 2) k_B T}{\Phi_0^2} (Q_N^2 - q^2) \right] H \quad (1.32)$$

qui diverge en  $(T - T_{cN})^{-1}$  comme dans le cas BCS (cf. Éq.(1.26)). Dans ce cas, on peut appliquer un champ externe  $H = \sqrt{H_{\parallel}^2 + H_{\perp}^2}$  dont la composante  $H_{\perp}$  perpendiculaire au plan de l'échantillon est faible. Cette configuration permet de séparer l'effet paramagnétique lié à  $H_{\parallel}$  et l'effet orbital, lié à  $H_{\perp}$ . Dans ce cas,  $H/H_p$  sera faible, puisque la majorité du champ magnétique appliqué contribuera au champ paramagnétique qui compensera  $H_{\parallel} \sim H_p$ . De plus, le faible champ orbital ainsi généré oblige à considérer un niveau de Landau important  $N \gg 1$ . Dans ce cas, les oscillations entre réponses dia- et para-magnétique pourraient être observées.

Toutes ces oscillations, même lorsqu'elles sont atténuées par une réponse diamagnétique importante, sont une caractéristique des systèmes FFLO, et constituent donc un autre outil permettant de révéler cette phase inhomogène.

## 1.5 Critère de Ginzburg-Levanyuk

Dans toute cette étude sur les fluctuations à proximité d'une phase FFLO, on s'est concentré sur les fluctuations dites gaussiennes, qui ne prennent pas en compte les termes

en  $|\Psi|^4$  de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (1.2). Ces termes en  $|\Psi|^4$  correspondent en fait à des termes d'interaction entre les différents modes de fluctuations. Ainsi, une étude des fluctuations gaussiennes, telle que nous l'avons réalisée jusque là, ne tient pas compte du couplage des modes fluctuationnels. Nous allons maintenant donner le critère qui permet de se limiter au cas gaussien, appelé critère de Ginzburg-Levanyuk [103, 102]. Ce critère permet de trouver la plage de température pour laquelle la prise en compte des interactions entre modes est nécessaire à une compréhension complète de la transition de phase.

Bien évidemment, un argument simple consiste à dire que tant qu'on reste loin de la ligne de transition de phase, les fluctuations sont faibles, et les interactions entre les modes de fluctuations encore plus. On s'attend donc tout naturellement à n'avoir pas besoin des termes  $|\Psi|^4$  loin de la transition de phase. Mais comment quantifier ce que l'on entend par "loin" ?

Revenons au cas du saut de la chaleur spécifique  $C$  à la transition de phase du second ordre. Ce saut est donné par les grandeurs dites de champ moyen, *i.e.* par la dérivée seconde de l'énergie libre, comme annoncé à la section 1.2. Lorsque l'on regarde les fluctuations gaussiennes, on voit qu'elles lissent ce saut de chaleur spécifique, en induisant même une divergence de  $C$  lorsque  $T = T_c$ . Or il n'est physiquement pas acceptable de laisser croître les fluctuations de la capacité calorifique indéfiniment à la transition de phase. L'argument de Ginzburg et Levanyuk consiste à dire que cette divergence doit être stoppée lorsque les fluctuations deviennent plus importantes que le saut lui-même.

Ici, on utilisera un argument similaire, mais plus facile à manipuler. On dira que la température associée au critère de Ginzburg-Levanyuk est atteinte lorsque l'on ne peut plus négliger les termes proportionnels à  $|\Psi|^4$  par rapport aux termes gaussiens proportionnels à  $|\Psi|^2$ . Il est facile de se persuader que les deux arguments sont identiques puisque le saut de chaleur spécifique est justement donné par le rapport, moyennant quelques préfacteurs numériques sans importance, des termes  $|\Psi|^2$  sur les termes  $|\Psi|^4$  [101].

Pour calculer explicitement ce critère de Ginzburg-Levanyuk, on réécrit la fonctionnelle (1.2) sous la forme addimensionnée :

$$H[\Psi] = N_d(0) \int d\mathbf{r} \left[ \alpha |\Psi|^2 - g\xi^2 |\partial\Psi|^2 + \xi^4 |\partial^2\Psi|^2 + \frac{g}{T_c^2} |\Psi|^4 + \frac{1}{T_c^4} |\Psi|^6 \right] \quad (1.33)$$

dans laquelle on a négligé les termes  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , qui ne donneront pas d'effets supplémentaires. Dans cette expression,  $\xi$  représente la longueur de cohérence supraconductrice, et  $N_d(0)$  la densité d'état pour la dimension  $d$  et à température nulle. Le point le plus important de l'expression (1.33) est la présence du facteur  $g$  devant le terme  $|\Psi|^4$ . Cela signifie que ce terme disparaît en même temps que les termes en gradient dans cette approche Ginzburg-Landau pour les phases FFLO, ce qui n'est pas intuitif mais se retrouve à partir d'une approche microscopique [25, 26]. Pour traiter les termes proportionnels à  $|\Psi|^4$  et  $|\Psi|^6$ , on utilise le théorème de Wick appliqué aux termes gaussiens [112], ce qui nous permet de réécrire l'expression (1.33) sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_0 &= N_d(0) \sum_{\mathbf{k}} \left[ \tau + (k^2 - q_0^2)^2 \xi^4 + \right] \langle |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_0 + \\ &+ N_d(0) \sum_{\mathbf{k}} \langle |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_0 \left[ \frac{2\tilde{g}}{T_c^2 L^d} \sum_{\mathbf{k}'} \langle |\Psi_{\mathbf{k}'}|^2 \rangle_0 + \left( \frac{2}{T_c^2 L^d} \sum_{\mathbf{k}'} \langle |\Psi_{\mathbf{k}'}|^2 \rangle_0 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.34)$$



dans laquelle chacune des moyennes s'exprime comme

$$\langle |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_0 = \frac{\pi T_c / N_d(0)}{\tau_{\text{iso}} + 4q_0^2 \xi^4 (k - q_0)^2} \quad \text{ou} \quad \langle |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_0 = \frac{\pi T_c / N_d(0)}{\tau_{\text{ani}} + gk^2 \xi^2} \quad (1.35)$$

dans les cas isotrope ou anisotrope, respectivement<sup>6</sup>. Cela correspond à la limite  $|g| \gg (T_c/E_F)^{2(d-1)/(6-d)}$ , *i.e.* au cas d'une modulation FFLO bien établie dans le système. En évaluant alors les sommes de l'expression (1.34), puis en utilisant le fait que  $T_c N_d(0) \xi^d = (E_F/T_c)^{d-1}$ , on réécrit l'expression (1.34) en fonction du seul rapport de l'énergie de Fermi  $E_F$  sur la température critique  $T_c$ . Les termes proportionnels à  $|\Psi|^4$  sont ainsi négligeables devant les termes  $|\Psi|^2$  tant que la température vérifie

$$\boxed{\tau_{\text{iso}} \gg g^{d/3} \left( \frac{T_c}{E_F} \right)^{\frac{2d-2}{3}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\tau_{\text{ani}} \gg g^{\frac{2-d}{4-d}} \left( \frac{T_c}{E_F} \right)^{\frac{2d-2}{4-d}}} \quad (1.36)$$

pour les cas isotropes ou anisotropes, respectivement. Comme  $T_c/E_F \sim (10^{-3} - 10^{-4})$  pour les supraconducteurs conventionnels, la plage de température, près de la ligne de transition de phase, pour laquelle il faut soigneusement prendre en compte les interactions entre modes de fluctuations est très difficile à observer, justifiant *a posteriori* l'étude des fluctuations gaussiennes que l'on a réalisée jusque là. De plus, la transition vers le régime critique se fera extrêmement proche de la ligne de transition de phase, ce qui semble signifier que les phénomènes prédits uniquement dans le régime critique, comme le changement d'ordre de la transition de phase, seront quasiment indétectables. En tout cas, les fluctuations critiques n'influenceront pas suffisamment le système pour que l'étude du régime critique soit pertinente.

Dans le cas du régime tricritique,  $\tilde{g} = 0$  annulant à la fois les termes  $|\nabla\Psi|^2$  et  $|\Psi|^4$ . La valeur moyenne gaussienne est alors :

$$\langle |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_0 = \frac{\pi T_c / N_d(0)}{\tau^* + \xi^4 k^4} \quad (1.37)$$

ce qui nous permet d'obtenir le critère de Ginzburg-Levanyuk sous la forme

$$\boxed{\tau^* \gg \left( \frac{T_c}{E_F} \right)^{\frac{4d-4}{6-d}}} \quad (1.38)$$

et qui correspond au régime défini par  $|g| \ll (T_c/E_F)^{2(d-1)/(6-d)}$ . Même si dans ce régime tricritique, le régime des fluctuations critiques va arriver plus loin de la ligne de transition de phase que dans le cas d'une modulation bien établie, il n'en demeure pas moins que ce régime est très difficile à atteindre. L'approximation gaussienne fonctionne encore très correctement lorsque  $g \rightarrow 0$ . Toutefois, dans ce cas, l'étude du régime critique pourrait s'avérer intéressante. En effet, la transition vers l'état FFLO est, à ma connaissance, le seul état pour lequel le développement de Ginzburg-Landau s'écrit<sup>7</sup>  $\alpha |\Psi|^2 + \gamma k^4 |\Psi|^2 + \mu |\Psi|^6$  et mérite donc certainement une attention toute particulière.

<sup>6</sup>On ne retraitera pas dans ce paragraphe le cas homogène, qui donnerait  $\tau \gg (T_c/E_F)^{\frac{2}{4-d}}$ , comme on peut le trouver dans la littérature [97]. Les conclusions de ce paragraphe s'applique de la même façon dans ce cas : les fluctuations critiques sont très difficiles à observer expérimentalement.

<sup>7</sup>Ordinairement, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau présente une expansion de la forme :  $\alpha |\Psi|^2 + gk^2 |\Psi|^2 + \beta |\Psi|^4 + C |\Psi|^6$ . Il est donc très rare d'avoir besoin des termes proportionnels à  $|\Psi|^6$ .

|               | État<br>homogène<br>région I ( $g > 0$ ) | FFLO iso.  | FFLO anis.                                       | Tricritique   |
|---------------|--|--|--|---|
|               |  | $\gamma q_0^4 \gg \tau$<br>région II ( $g < 0$ )                                     | $\gamma q_0^4 \gg \tau$<br>région II ( $g < 0$ ) | $\gamma q_0^4 \ll \tau$<br>région III ( $g \rightarrow 0$ ) |
| $\mathcal{C}$ | $(d-4)/2$                                | $-3/2$   | $(d-4)/2$  | $(d-8)/4$   |
| $\sigma$      | $(d-4)/2$                                | $-3/2$   | $(d-4)/2$  | $(d-6)/4$   |
| $M_{2D}$      | $-1$                                     | $\left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \frac{k_B T \gamma q_0^2}{\tau + \gamma q_0^4}$<br>% | $\emptyset$                                      | $0$   |
| $M_{3D}$      | $-1/2$                                   |  | cf. § 1.4.2                                      | $-1/4$  |

TAB. 1.1: Rappel des exposants gaussiens à proximité d'une phase FFLO obtenus dans cette partie. Les régions I, II et III correspondent aux régions définies par la figure 1.2. L'argument  $\gamma q_0^4 \sim \tau$  est équivalent à celui posé plus haut  $|T - T_c| \sim g^2/a\gamma$ , comme on peut le voir par une substitution directe.

Pour conclure sur ce critère de Ginzburg-Levanyuk, notons que peu de temps avant la parution de notre étude [109], Zyuzin et Zyuzin ont présenté un calcul similaire [113]. Toutefois, Zyuzin et Zyuzin n'ont pas pris en compte la disparition du terme  $|\Psi|^4$  proportionnellement à  $g$ , et ont donc proposé un critère de Ginzburg et Levanyuk différent du notre à proximité du régime tricritique. Si leur critère de Ginzburg et Levanyuk est ainsi plus restrictif que le notre, les deux critères donnent tout de même des plages de températures extrêmement restreintes, et justifient pleinement le calcul des seules fluctuations gaussiennes à proximité d'une transition de phase vers un état FFLO.

## 1.6 Conclusion

On a donc étudié dans cette première partie l'effet des fluctuations gaussiennes sur les propriétés thermodynamiques et de transport dans la phase normale, lorsque l'on s'approche d'une phase inhomogène de type FFLO. Cette phase étant caractérisée par le changement de signe du terme de modulation : le terme  $g|\nabla\Psi|^2$  dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, il en résulte une plus grande variété de régimes que dans le cas homogène, bien établi depuis de nombreuses années. Ainsi, de façon générale, un supraconducteur dominé par les effets paramagnétiques présentera trois régimes de fluctuations dans la phase normale : un régime dit BCS qui correspond à la phase homogène pour laquelle les fluctuations dominantes sont réparties autour de l'origine de l'espace des moments, un régime FFLO correspondant à une phase inhomogène pour laquelle les fluctuations sont dominantes sur une sphère centrée à l'origine de l'espace réciproque et un régime tricritique caractérisé par des modes de fluctuations extrêmement faibles, pour lequel les fluctuations sont atténuées en comparaison des deux autres régimes.

L'ensemble des exposants gaussiens obtenus au cours de cette thèse sont rappelés dans le tableau 1.1.

On peut ainsi passer d'un régime BCS à un régime caractéristique de l'état FFLO en changeant la température et/ou le champ magnétique. Notamment, la présence d'un

point tricritique peut être révélée par l'existence de deux crossovers encadrant un régime extrêmement original en termes de fluctuations (voir Fig.1.2). L'étude expérimentale des fluctuations pourrait donc se révéler extrêmement intéressante, puisqu'il n'existe pas beaucoup d'autres moyens de certifier la présence d'une phase FFLO.

On a également mis en lumière au cours de cette thèse le rôle très important que joue l'anisotropie sur la phase FFLO, qu'elle soit d'origine cristalline ou qu'elle soit dominée par l'anisotropie du paramètre d'ordre supraconducteur (en onde  $p$ ,  $d$ , ...). Celle-ci, en fixant de façon privilégiée le vecteur de modulation dans des directions de plus hautes symétries, joue le rôle de stabilisateur de la phase FFLO. En revanche, cette stabilité de la direction de la modulation induit des poches de fluctuations isolées dans l'espace des moments, redonnant les exposants gaussiens du cas homogène.

Mais il est encore possible, dans le cas de systèmes anisotropes, de mesurer des comportements caractéristiques de la phase FFLO. On a ainsi proposé la mesure du rapport d'anisotropie de la paraconductivité. De façon surprenante, ce dernier évolue en fonction de la température lorsqu'un champ magnétique externe stabilise la modulation dans une direction privilégiée (§ 1.3).

On a également proposé la mesure des fluctuations de l'aimantation, qui aura un comportement tout à fait spécifique dû aux forts effets paramagnétique créant la phase FFLO (§ 1.4). Il est ainsi possible que les fluctuations de l'aimantation soient paramagnétiques pour des systèmes isotropes bidimensionnels. Plus surprenant, la réponse fluctuationnelle de l'aimantation disparaît dans le cas isotrope tridimensionnel (§ 1.4.1). Dans le cas anisotrope, il n'est pas possible d'obtenir de comportement général pour les fluctuations de l'aimantation. On a alors eu recours à des modèles simples décrivant le comportement attendus pour le composé à fermion lourd  $\text{CeCoIn}_5$ . Dans ce cas, nous avons prédit que les fluctuations étaient soit de nature diamagnétiques, avec une forte atténuation des fluctuations près de la phase FFLO, soit qu'elles oscillaient entre des réponses dia- et para-magnétiques en fonction du ratio  $h/T$  (§ 1.4.2).

Nous avons également validé notre approche gaussienne par l'étude du critère de Ginzburg-Levanyuk adapté aux cas FFLO (§ 1.5). La région des fluctuations critiques est plus large que dans le cas uniforme, mais reste difficilement observable expérimentalement. Cela justifie notre étude gaussienne et rend difficile l'observation expérimentale des phénomènes prédits au moyen du groupe de renormalisation.

Pour finir cette partie, notons qu'à l'heure actuelle, il n'existe encore aucune étude expérimentale des fluctuations à proximité de la transition de phase vers un état FFLO.



# Chapitre 2

## Systèmes hybrides supraconducteur - ferromagnétique

### 2.1 Effets de proximité S/F et phase $\pi$

En étudiant l'influence d'impuretés magnétiques sur les propriétés de *tunneling* des paires de Cooper, Bulaevskii, Kuzii et Sobyenin remarquèrent que le courant critique pouvait devenir négatif [45]. Un courant critique négatif n'étant pas physique, cet état doit être interprété comme un décalage de phase de  $\pi$  dans la relation courant-phase. On parle alors de phase  $\pi$ , ou de jonction  $\pi$ . Plus techniquement, pour obtenir cette phase  $\pi$ , Bulaevskii, Kuzii et Sobyenin modélisent leur jonction comme un système S/I/S, dans lequel l'isolant (I) contient un réseau d'impuretés de spin, ce qui permet de rajouter une interaction Zeeman aux électrons traversant la jonction. Toutefois, si le réseau d'impuretés n'est pas assez dense, on ne peut pas modéliser ce type de jonction par une matrice de *tunneling* contenant une interaction de type Zeeman, puisqu'il n'y a aucune direction privilégiée de spin [114].

Or, une direction privilégiée du spin électronique existe naturellement dans les composés ferromagnétiques. Les systèmes ferromagnétiques itinérants notamment, que l'on peut modéliser comme un gaz d'électrons libres interagissant avec un champ magnétique d'échange *via* l'interaction Zeeman. Utilisant le modèle d'une jonction S/F/S, Bulaevskii, Buzdin et Panyukov démontrent que le courant critique oscille entre les états 0 et  $\pi$  en fonction de la longueur de la jonction magnétique [46, 47].

Néanmoins, il faudra attendre les années 2000 et les expériences de Ryazanov [48] pour avoir la première preuve expérimentale de l'annulation du courant critique dans une jonction S/F/S<sup>1</sup>. À l'heure actuelle, les phases  $\pi$  ont été observées par de nombreuses équipes (voir les revues [49, 50]), et se manifestent dans beaucoup de propriétés de cohérence ou d'interférence entre deux condensats. Citons par exemple les effets d'interférence quantiques (effets SQUID) associant des jonctions normales à des jonctions  $\pi$  insérées dans des anneaux supraconducteurs, qui créent des décalages de la réponse du SQUID en fonction du flux magnétique traversant l'anneau [119, 120].

Plus généralement, on regroupe sous le nom d'effets de proximité S/F une grande variété de phénomènes. La plupart d'entre eux sont caractérisés par des oscillations des

---

<sup>1</sup>D'importants travaux expérimentaux avaient déjà été effectués concernant les effets de cohérence associés aux phases  $\pi$  dans des supraconducteurs *d*-waves, voir [115]. Notons également que depuis quelques années, de nouveaux systèmes apparaissent provoquant des phases  $\pi$  dans des structures S/N/S hors-équilibre [116, 117]. Des systèmes présentant des multicouches ferromagnétiques permettent également de créer des réseaux de vortex et d'antivortex, et peuvent également générer des phases  $\pi$  [118].

quantités physiques en fonction de la longueur du pont ferromagnétique ou du champ d'échange. Toutes ces oscillations résultent alors de la compétition entre l'état ferromagnétique et l'état supraconducteur, comme discuté dans l'introduction générale, cf. Fig.1. En plus des oscillations du courant critique, citons par exemple les oscillations de la densité d'état [121], ou de la température critique [122, 123] d'une bicouche S/F. Un autre effet intéressant relatif aux effets de proximité S/F est la variation de la température critique d'un système F/S/F en fonction de l'orientation relative des aimantations entre les deux ferromagnétiques. Faire varier la température polarise des courants en spin et peut servir d'interrupteur adressable en température pour des courants de spin. Cet effet s'appelle l'effet vanne de spin, qui peut être relativement robuste en regard du courant appliqué dans ces systèmes F/S/F [124, 125]. Dans la suite, on n'étudiera que les systèmes S/F/S, et l'on ne discutera plus des systèmes F/S/F ou des bicouches S/F.

Pratiquement, les effets de proximité S/F ou S/N apparaissent à petite échelle, dans le régime dit mésoscopique. La physique mésoscopique intervient pour décrire le comportement électronique à des échelles de tailles suffisamment petites pour que la physique classique ne fonctionne plus, mais suffisamment grandes pour que l'on puisse considérablement simplifier la physique quantique.

Lorsque l'on diminue la taille d'un système, il apparaît une longueur en deçà de laquelle l'effet du confinement spatial doit être correctement pris en compte. Or, lorsque le confinement devient important, ce sont les effets quantiques qui entrent en jeu. La physique mésoscopique est donc la physique qui étudie les propriétés de transport modifiées par des effets de confinement spatial. Du fait de ce confinement, la physique mésoscopique est décrite par le principe des canaux de conduction, qui correspondent à des quantifications de la trajectoire des particules [126].

Pour caractériser un peu plus ce régime, on définit une longueur dite de cohérence de phase  $\ell_\varphi$  comme la longueur au bout de laquelle le système a perdu la mémoire de sa phase. Celle-ci subissant des fluctuations aléatoires, on dira que le système a perdu la mémoire de sa phase lorsqu'elle aura varié d'un facteur  $2\pi$ . Le régime quantique étant celui pour lequel il est nécessaire de définir une phase, le régime mésoscopique est défini par la donnée de  $L \lesssim \ell_\varphi$ , où  $L$  est la taille du système considéré. Dans le cas contraire  $L \gg \ell_\varphi$ , la longueur de phase n'intervient pas, et l'on retrouve des propriétés classiques. Pour  $L \ll \ell_\varphi$ , on retrouve le régime purement quantique, où il n'est plus du tout possible de parler de trajectoire.

Au sein même du régime mésoscopique, il existe encore deux sous-régimes caractéristiques des comportements mésoscopiques : la limite diffusive et la limite balistique. Dans la limite diffusive, les particules se déplacent en rencontrant un grand nombre d'impuretés. Les équations qui régissent ce régime sont alors des équations de diffusion, et l'on parle souvent de *diffuson* pour nommer la particule se déplaçant dans un réseau dense d'impuretés. Dans la limite balistique, les particules se propagent sans rencontrer d'impuretés. On parlera généralement de systèmes diffusifs lorsque  $\ell_e \ll L \ll \ell_\varphi$ , et de systèmes balistiques dans l'autre cas limite  $L \ll \ell_e \ll \ell_\varphi$ , où  $\ell_e = v_F \tau$  est la longueur moyenne que la particule parcourt à la vitesse de Fermi  $v_F$  durant le temps moyen  $\tau$  entre deux collisions élastiques.

En supraconductivité, on sait qu'une longueur caractéristique sur laquelle les paires de Cooper gardent la mémoire des effets collectifs est donnée par la longueur  $\xi$  dite, justement, de cohérence. Cette longueur de cohérence est simplement la longueur de corrélations de paires de Cooper au sein du supraconducteur. En quelque sorte, elle représente la taille des paires. Lorsqu'il n'y a pas d'interaction magnétique au sein du su-

praconducteur, cette longueur  $\xi$  dépend essentiellement de la température, puisque  $\xi \rightarrow 0$  lorsque  $T > T_c$ . De façon plus générale, cette longueur de cohérence  $\xi$  sera d'autant plus faible que des effets de brisure de paire seront importants dans le système. On suppose ici que les effets de brisure de paire les plus importants sont les effets magnétiques.

Jusqu'à maintenant, on a discuté les systèmes isolés. Un autre enjeu majeur de la physique mésoscopique consiste à superposer les propriétés de différents matériaux pour obtenir des propriétés hybrides. Pour ce faire, il suffit la plupart du temps de juxtaposer différents matériaux, créant ce que l'on appelle des hétérojonctions. Voyons les modifications subies par la longueur de cohérence dans les hétérojonctions.

Lorsque l'on relie deux systèmes supraconducteurs par une jonction métallique normale ou ferromagnétique, on peut toujours voir la longueur de cohérence comme la taille des paires de Cooper. Mais on doit alors redéfinir cette longueur, de façon à prendre en compte les effets de brisure de paires dans la jonction. En effet, il y aura alors deux longueurs de cohérences distinctes, une longueur de cohérence en volume et une longueur de cohérence de proximité. Plus précisément, ces deux longueurs sont distinctes si les mécanismes de brisure des paires de Cooper sont différents dans le supraconducteur et dans la jonction. Cela se produit en particulier lorsque le supraconducteur est supposé sans interaction alors que la jonction est constituée d'un métal ferromagnétique. La longueur de cohérence en volume reste définie par  $\xi$ , alors que la longueur de cohérence de proximité est notée  $\xi_f$ , et vérifie  $\xi > \xi_f$ . Pour que les effets de cohérence entre les deux électrodes supraconductrices existent, il faut donc se placer dans le cas où  $\xi_f$  est plus grande que la longueur de la jonction  $L$ , et le régime mésoscopique de la supraconductivité est défini par  $\xi_f \gtrsim L$ .

Dans le cas des effets de proximité associant supraconductivité et ferromagnétisme, on a encore vu que des effets d'oscillations se produisaient, découplant la pénétration du condensat dans la partie ferromagnétique en une partie atténuée et une partie oscillante (voir Fig.3). L'atténuation étant caractérisée par la longueur de cohérence  $\xi_f$ , on doit encore ajouter une longueur caractéristique des effets d'oscillations. Cette longueur d'oscillation vérifie  $\xi_F = \hbar v_F / h$ , puisqu'il s'agit globalement d'un effet de proximité anormal du au ferromagnétisme, et que la longueur d'oscillation sera d'autant plus courte que le champ d'échange  $h$  sera grand. Fort de cette nouvelle longueur, on doit redéfinir les différents régimes attendus quand on parle de systèmes S/F/S.

Dans la suite, on ne discutera plus de la longueur de cohérence  $\xi_f$ , et on la supposera toujours supérieure à la longueur  $L$  de la jonction ferromagnétique, *i.e.*  $\xi_f \gtrsim L$ . Reste encore trois régimes que l'on décrit ci-dessous dans l'ordre croissant de la concentration en impuretés que rencontre une particule traversant la jonction ferromagnétique.

1. Le premier régime correspond à la limite  $\xi_F \ll L \ll \ell_e$  représenté sur la figure 2.1.a). Dans ce cas, les quasiparticules ne rencontrent aucune impureté lors de leur traversée de la jonction ferromagnétique, comme dans le cas balistique. Elle ne font donc qu'accumuler les effets d'oscillations lié au champ d'échange le long de la jonction. On s'attend donc dans ce régime à ce que les effets oscillants soient les plus forts. Cette limite sera étudiée au paragraphe 2.3.
2. Le second régime correspond à la limite  $\xi_F \ll \ell_e \ll L$  représentée sur la figure 2.1.b). Dans ce cas, les quasiparticules rencontrent quelques impuretés affectant leur comportement oscillatoire, qui s'en trouve alors réduit. Dans ce cas là pourtant, les effets liés aux oscillations des quasiparticules doivent rester important. Cette limite peut également se réécrire  $\xi_F \ll \ell_e \Leftrightarrow \tau h \gg \hbar$ , ce qui correspond à des systèmes modérément désordonnés où le temps de collision entre deux particules  $\tau$  est assez grand en association avec un fort champ d'échange  $h$ . On s'attend donc dans cette limite à avoir des effets d'oscillations assez importants alors que le courant

| Longueurs  | Signification  |
|--|--|
| $L$<br>$\ell_e = v_F \tau$   | longueur de la jonction<br>libre parcours moyen électronique |
| <b>Limite balistique</b> ( $\xi_F \ll L \ll \ell_e \lesssim \xi_f$ ) |  |
| $\xi_f = \hbar v_F / 2\pi k_B T_c$                                   | longueur de décroissance                                     |
| $\xi_F = \hbar v_F / h$  | longueur d'oscillation                                       |
| <b>Limite diffusif</b> ( $\ell_e \ll \xi_F \ll L \lesssim \xi_f$ )   |  |
| $\xi_f = \sqrt{\hbar D_f / h}$                                       | longueur de décroissance                                     |
| $\xi_F = \sqrt{\hbar D_f / h}$                                       | longueur d'oscillation                                       |

TAB. 2.1: Tableau récapitulatif des différentes longueurs caractéristiques des deux régimes balistique et diffusif des systèmes S/F.  $h$  est le champ d'échange ferromagnétique, et  $D_f$  est un coefficient de diffusion. Si dans le régime balistique les deux longueurs de décroissance et d'oscillation de l'effet de proximité sont découplées, dans le cas diffusif en revanche, ces deux longueurs sont égales.

critique ne devrait pas subir trop d'atténuation dûes aux impuretés. Cette limite sera étudiée au paragraphe 2.4. Notons que cette limite n'a pas d'équivalent en physique mésoscopique des systèmes S/N/S, puisqu'elle correspond clairement à la compétition entre deux ordres : la supraconductivité et le ferromagnétisme. Autrement dit, c'est parce que le champ d'échange produit les oscillations du condensat supraconducteur, définissant la longueur  $\xi_F$ , que l'on peut avoir ce régime modérément désordonné.

3. Le troisième régime correspond à la limite  $\ell_e \ll \xi_F \ll L$  représentée sur la figure 2.1.c). Dans ce cas, les quasiparticules rencontrent une grande quantité d'impuretés lors de la traversée de la jonction, comme dans le cas diffusif. Comme le suggère la figure 2.1.c), le comportement oscillatoire fini par être tellement biaisé par les impuretés qu'il devient exponentiellement faible par rapport à la longueur de la jonction. Toutefois, puisque la longueur de cohérence supraconductrice est plus grande que la jonction, on peut toujours observer les oscillations que subissent les quasiparticules dans ce genre de jonctions. Notons également que la limite  $\ell_e \ll \xi_F$  peut se réécrire  $\tau h \ll \hbar$ , qui correspond bien à des temps entre collisions extrêmement petits en même temps que des champs d'échanges pas trop forts. Cette limite a été largement étudiée dans la littérature [49, 50, 51], puisque c'est le cas le plus étudié expérimentalement pour des raisons techniques.

Il était en effet technologiquement impossible de créer des nanosystèmes dans lesquels le ferromagnétique pouvait être considéré comme propre jusqu'à une période très récente. Nous ne reviendront pas dans ce manuscrit sur le cas diffusif, où les effets de cohérence et d'oscillations sont faibles, ne donnant qu'un nombre très limité d'oscillations du courant critique dans la jonction Josephson avant que les effets de cohérence disparaissent [48, 121].

Or, les progrès récents obtenus dans les techniques de nanofabrication rendent possible la création de systèmes ferromagnétiques relativement propres [127, 52], alors que cette limite propre n'a été que très peu étudiée dans le cadre théorique. On se propose dans cette partie de revenir sur cette limite propre des jonctions S/F/S. On s'attend en particulier à ce que les effets d'oscillations associés au champ d'échange soient exaltés puisque les effets de cohérence persistent même en présence de forts champs d'échanges.

On décrira brièvement le formalisme quasi-classique de Eilenberger, bien adapté aux cas balistiques et modérément désordonnés au paragraphe 2.2. Puis on étudiera les deux



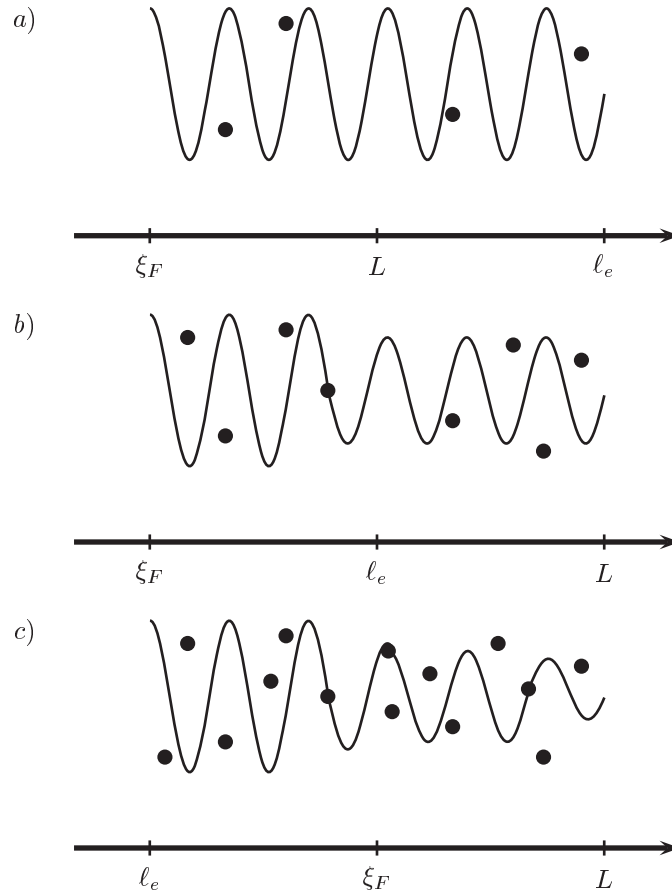


FIG. 2.1: *a)* Limite ballistique d'une jonction SFS : les quasiparticules ne rencontrent pas d'impuretés lors de leur mouvement oscillatoire le long de la jonction. *b)* Limite modérément sale d'une jonction SFS : les quasiparticules rencontrent quelques d'impuretés lors de leur mouvement oscillatoire le long de la jonction. *c)* Limite diffusive d'une jonction SFS : les quasiparticules rencontrent beaucoup d'impuretés lors de leur mouvement oscillatoire le long de la jonction.

limites balistique (Fig.2.1.a) et modérément désordonnée (Fig.2.1.b) aux paragraphes 2.3 et 2.4, respectivement. Dans chaque cas, on prêtera une attention particulière aux systèmes présentant un fort champ d'échange dans la partie ferromagnétique.

## 2.2 Équations de Eilenberger

Malgrès l'énorme avancée que représentent les équations de Gor'kov en terme de compréhension de la supraconductivité [17], le formalisme des fonctions de Green est mal adapté aux cas inhomogènes. En effet, les fonctions de Green quantiques sont des corrélateurs à deux points des opérateurs de création et/ou d'annihilation des particules. Or, lorsque l'on veut prendre en compte des effets liés à des changements de milieu, ces corrélateurs sont très difficiles à manipuler puisqu'ils peuvent être évalués à cheval sur une interface. C'est pourquoi, Eilenberger [55] d'un côté et Larkin et Ovchinnikov [128] de l'autre ont simplifié le formalisme des fonctions de Green mis en place par Gok'kov au cas quasi-classique, qui permet de traiter plus simplement les effets supraconducteurs inhomogènes, tout en tenant compte des effets de cohérence, comme l'effet Josephson.

Le nouveau formalisme est en réalité assez simple à décrire : il ne sert à rien de connaître le détail de la structure microscopique de la paire de Cooper. Ainsi, bien que la paire de Cooper soit effectivement composée de deux électrons de spin-opposés, on peut la regarder simplement comme une particule unique dont le seul mouvement visible à l'échelle mésoscopique est la position de son centre de masse. De fait, on peut alors moyennner toutes les fonctions de Gor'kov, et négliger ainsi les positions relatives des deux électrons par rapport au centre de masse de la paire. L'approximation ainsi obtenue est identique à l'approximation quasi-classique couramment utilisée, où les variations d'énergies à trop petites échelles sont lissées puisque l'on ne considère que le mouvement d'ensemble du paquet d'onde associé à la particule [22, 129].

En terme de supraconductivité, la procédure de moyennage fait explicitement disparaître les variations énergétiques éloignées du niveau de Fermi. Cela se comprend aisément puisque les paires de Cooper ne peuvent exister que dans une région extrêmement réduite autour de cette énergie de Fermi. Or, la taille en énergie de cette région étant proportionnelle au gap supraconducteur  $\Delta$ , l'approximation quasi-classique ainsi effectuée négligera des termes en énergies de variations supérieures à  $\Delta/E_F$ . Et comme  $\Delta/E_F \sim (10^{-4} - 10^{-5})$  pour les supraconducteurs BCS, cette approximation quasi-classique reste une approximation toujours bien vérifiée.

Plus techniquement, lorsque l'on calcule les fonctions de Gor'kov d'un système supraconducteur homogène, on fait apparaître la quantité  $p^2/2m - \mu$ , où  $\mu$  est le potentiel chimique, qui est exactement égal à l'énergie de Fermi lorsque le système est supposé sans interaction à  $T = 0$ . La procédure de moyennage des énergies internes consiste alors à réécrire  $p^2/2m - \mu = \xi_{\mathbf{p}} \approx v_F (p - p_F)$ . La dernière expression est alors une simple linéarisation de la relation de dispersion autour de l'énergie de Fermi [130]. On définit également une transformation de Fourier des fonctions de Green-Gor'kov sous la forme

$$\tilde{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \tilde{G}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{R}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{R} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$  sont respectivement la coordonnée relative et la coordonnée du centre de masse de la paire de Cooper, dont chaque électron est situé aux point  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ , et  $\tilde{G}$  est la représentation de Nambu des fonctions de Green-Gor'kov<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Cette représentation permet de traiter les quatre fonctions de Green-Gor'kov  $G$ ,  $F^+$ ,  $F$  et  $G^+$  sous

Si toutes les fonctions de Green-Gor'kov présentent un comportement piqué autour de l'énergie de Fermi, et décroissent rapidement dès que l'on s'éloigne de  $p_F$ , il est clair que la transformation de Fourier ci-dessus peut être effectuée à proximité de  $p \approx p_F$ . Cela signifie aussi que la taille  $\xi$  caractéristique des paires de Cooper est beaucoup plus grande que la longueur d'onde de Fermi  $\lambda_F \ll \xi$ . On peut ainsi songer à développer les fonctions de Green-Gor'kov sous la forme

$$\check{G}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{R}) \approx \check{G}_\omega(\mathbf{p}_F, \mathbf{R}) + \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{v_F} \hat{\mathbf{p}}_F \left. \frac{\partial \check{G}_\omega}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_F} \quad (2.2)$$

et, à l'approximation la plus simple, ne retenir que le premier terme. Cela revient à dire que  $\xi_{\mathbf{p}}/v_F \ll 1$ , ce qui est une autre façon de dire que l'approximation  $\xi_{\mathbf{p}} \approx v_F(p - p_F)$  fonctionne. Intégrant autour de la surface de Fermi, l'élément d'intégration sera

$$\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{p^2 dp d\Omega_F}{2\pi^2 4\pi} \approx \frac{p_F^2 dp d\Omega_F}{2\pi^2 4\pi} = N_0 d\xi_{\mathbf{p}} \frac{d\Omega_F}{4\pi} \quad (2.3)$$

où  $N_0 = mp_F/2\pi^2$  représente la densité d'état d'un gaz d'électrons libres à température nulle, et  $\Omega_F$  est l'angle solide de la surface de Fermi vu depuis l'origine des impulsions. Injectant toutes ces relations dans la transformation de Fourier précédente, on obtient :

$$\check{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \approx \int e^{i\mathbf{p}_F \cdot \mathbf{r}} e^{i\xi_{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}_F \cdot \mathbf{r}/v_F} \check{G}_\omega(\mathbf{p}_F, \mathbf{R}) N_0 d\xi_{\mathbf{p}} \frac{d\Omega_F}{4\pi} \quad (2.4)$$

où on peut poser  $e^{i\xi_{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}_F \cdot \mathbf{r}/v_F} \approx 1$ , puisque  $\xi_{\mathbf{p}}/v_F \ll 1$ . Si l'on veut généraliser les fonctions quasi-classiques à des cas non-conventionnels, il faudra faire attention à la partie angulaire  $d\Omega_F$  de l'intégration. Ici, on définira les fonctions quasi-classiques sous la forme [107] :

$$\check{g}_\omega(\hat{\mathbf{p}}_F, \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{G}_\omega(\mathbf{p}_F, \mathbf{R}) \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{i\pi} \quad (2.5)$$

où  $\check{g}$  est la représentation de Nambu des fonctions quasi-classique [130]. Du fait de l'intégration sur l'énergie, on constate que les fonctions  $\check{g}_\omega(\hat{\mathbf{p}}_F, \mathbf{k})$  ne dépendront plus que de la direction du vecteur de Fermi, ce que l'on note  $\hat{\mathbf{p}}_F = \mathbf{p}_F/p_F$ , et non plus de sa norme  $p_F$ . C'est là le point essentiel qui permet de passer des fonctions de Green à deux composantes :  $\mathbf{p}_F$  et  $\mathbf{R}$ , aux fonctions quasi-classiques ne dépendant plus que de la position du centre de masse  $\mathbf{R}$  et de la direction  $\mathbf{v}_F$  de la vitesse de Fermi, représentée par le vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{p}}_F$ . Avant de passer à l'expression des fonctions quasi-classique dans le cas d'un supraconducteur homogène, remarquons encore que les fonctions  $\check{g}_\omega(\hat{\mathbf{p}}_F, \mathbf{R})$  peuvent être définies également comme suit :

$$\int \check{g}_\omega(\hat{\mathbf{p}}_F, \mathbf{R}) \frac{d\Omega_F}{4\pi} = \frac{1}{i\pi N_0} \check{G}_\omega(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (2.6)$$

ce qui signifie que les fonctions quasi-classique sont bien les expressions des fonctions de Green-Gor'kov lorsque l'on fait tendre la position relative des électrons formant la paire de Cooper vers zéro. L'analogie sera d'autant plus forte que l'on pourra négliger la dépendance angulaire des fonctions  $\check{g}_\omega(\hat{\mathbf{p}}_F, \mathbf{R})$  qui vérifieront dans ce cas  $\check{g}_\omega(\hat{\mathbf{p}}_F, \mathbf{R}) \sim \check{G}_\omega(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{R})$ . Cette dernière approche a été suggérée par Shelenkov [131].

---

une forme matricielle [130].

Dans le cas d'un supraconducteur homogène infini pour lequel le gap supraconducteur ne dépend pas de la position, l'expression précédente prend la forme, pour les fonctions de Green :

$$g = \mathbf{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{\mathbf{p}} + \mathbf{i}\omega_n}{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Omega^2} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{\pi} = \frac{\omega_n}{\Omega} \quad (2.7)$$

où  $\Omega = \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}$  est toujours une quantité définie positive. De même, les fonctions quasi-classiques anormales se mettront sous la forme

$$f = \mathbf{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Omega^2} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{\pi} = \frac{\Delta}{\Omega} \quad \text{et} \quad f^+ = \mathbf{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^*}{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Omega^2} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{\pi} = \frac{\Delta^*}{\Omega} \quad (2.8)$$

et seront les analogues des fonctions dites de Gor'kov  $F$  et  $F^+$  adaptées à la limite quasi-classique.

Les expressions précédentes ne sont que les intégrations directes des fonctions de Gor'kov autour de l'énergie de Fermi. Les équations d'Eilenberger sont alors justement les équations qui régissent le transport de ces quantités quasi-classiques. Comme les fonctions quasi-classiques représentent la limite  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$  des fonctions de Green-Gor'kov, leurs équations d'évolution sont données par

$$\check{H}(\mathbf{x}_1) \cdot \check{G}_{\omega}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \check{G}_{\omega}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \check{H}(\mathbf{x}_2) = 0 \quad (2.9)$$

où  $\check{H}(\mathbf{x})$  est le hamiltonien de la supraconductivité dans l'espace de Nambu, que l'on ne détaillera pas ici (cf. [130, 9, 59, 107]...). Cette dernière équation est alors bien une équation de transport puisqu'elle correspond à l'évolution de la corrélation  $\check{G}_{\omega}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  entre les points  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ . En utilisant alors la relation  $\check{g}_{\omega}(\hat{\mathbf{p}}_F, \mathbf{R}) \sim \check{G}_{\omega}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{R})$  valable à proximité de l'énergie de Fermi, *i.e.* pour  $\Delta/E_F \ll 1$ , on obtient les équations de Eilenberger [131, 132]. Notons toutefois que les propriétés en volume liées à ces fonctions correspondent trait pour trait avec les propriétés associées aux fonctions de Gor'kov. Seulement, l'utilisation des fonctions quasi-classiques est très souvent d'un usage bien plus aisé que leurs homologues de Gor'kov.

Lorsque l'on ne considère qu'une dimension d'espace, que l'on prend le long de l'axe  $x$  et un gaz d'électrons sans autre interaction que l'interaction BCS, ce qui signifie que la surface de Fermi est une boule, on écrit les équations d'Eilenberger sous la forme [55] :

$$\begin{cases} \hbar v_F \partial_x f + 2\omega f - 2\Delta g + \frac{1}{\tau} (\langle g \rangle_{\theta} f - g \langle f \rangle_{\theta}) = 0 \\ \hbar v_F \partial_x f^+ - 2\omega f^+ + 2\Delta^* g - \frac{1}{\tau} (\langle g \rangle_{\theta} f^+ - g \langle f^+ \rangle_{\theta}) = 0 \\ \hbar v_F \partial_x g - \Delta^* f + \Delta f^+ + \frac{1}{2\tau} (\langle f \rangle_{\theta} f^+ - f \langle f^+ \rangle_{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

où la notation  $\langle \dots \rangle_{\theta}$  signifie

$$\langle g \rangle_{\theta} = \int g(v, x) \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (2.11)$$

et représente la moyenne angulaire de la fonction de Green quasi-classique correspondante. Ainsi, les équations d'Eilenberger ont deux niveaux d'auto-cohérence. Le premier niveau est l'auto-cohérence supraconductrice qui lie le gap supraconducteur aux fonctions de Green-Gor'kov  $F$  ou  $F^+$ . Dans le formalisme quasi-classique, il y aura donc toujours

une relation implicite liant  $\Delta$  à  $f$  et  $\Delta^+$  à  $f^+$ . Ce niveau d'auto-cohérence ne posera toutefois pas de problème particulier, puisque l'on postulera une forme simple pour le gap supraconducteur dans l'espace (cf. discussion suivant l'expression (2.19)). En revanche, la relation (2.11) lie la fonction  $g$  à sa moyenne angulaire *via* la quantité  $\tau = \ell_e/v_F$  qui représente un temps de collision moyen dans l'approximation de Born [107], et qui constitue donc un second niveau d'auto-cohérence. Ainsi, dès qu'il existe des impuretés dans le matériau considéré, les équations d'Eilenberger possèdent une auto-cohérence inévitable, et les solutions analytiques des équations d'Eilenberger ne peuvent être connues que dans les cas les plus simples. On reviendra sur cette auto-cohérence des équations d'Eilenberger au paragraphe 2.4 lorsqu'on la traitera dans le cas des forts champs d'échanges.

On a dit auparavant que les fonctions de Green quasi-classiques correspondaient à la limite  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$  des fonctions  $G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{R})$ . Comme on supprime la variable  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  dans les expressions finales des fonctions quasi-classiques, on perd en quelque sorte le comportement des fonctions de Green lorsque  $\mathbf{r}$  est petit sans être nul. Cette information peut toutefois être réinjectée dans les expressions des fonctions quasi-classique sous la forme d'une condition de normalisation [107, 131]

$$g^2 + f f^+ = 1 \quad (2.12)$$

qui peut être facilement vérifiée par un calcul direct<sup>3</sup> depuis le système (2.10).

En se concentrant dans ce paragraphe sur les solutions des équations d'Eilenberger dans le cas balistique, *i.e.* en posant  $\tau^{-1} = 0$  dans les expressions (2.10), on écrit les solutions des équations d'Eilenberger sous la forme

$$\begin{pmatrix} g(x, \omega_n) \\ f(x, \omega_n) \\ f^+(x, \omega_n) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} \omega_n \\ \Delta \\ \Delta^* \end{pmatrix} + C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{\omega_n + \Omega} \\ \frac{\Delta^*}{\omega_n - \Omega} \end{pmatrix} e^{\kappa_S x} + C_- \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{\omega_n - \Omega} \\ \frac{\Delta^*}{\omega_n + \Omega} \end{pmatrix} e^{-\kappa_S x} \quad (2.13)$$

où  $C_{\pm}$  sont des constantes données par les conditions aux limites des problèmes et où on a posé

$$\kappa_S = \frac{2\Omega}{\hbar v_x} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2} = \mathbf{i} \sqrt{(\mathbf{i}\omega_n)^2 - |\Delta|^2} \quad (2.14)$$

pour le vecteur d'onde de propagation. Remarquons tout de suite que ce vecteur d'onde est réel, induisant des ondes évanescentes propageantes et contrapropageantes dans le supraconducteur. Cela vient bien évidemment du fait que l'on regarde des niveaux énergétiques situés sous le gap, où aucune onde ne se propage indéfiniment. En quelque sorte, les excitations du gaz électronique situées sous le gap sont réabsorbées dans l'état fondamental sur la longueur  $\kappa_S^{-1}$ . De plus, les solutions à l'infini sont les fonctions (2.7) et (2.8) d'un supraconducteur homogène et infini. On peut donc voir le système supraconducteur décrit par les fonctions (2.13) comme un système supraconducteur infini au dessus duquel se déplacent des excitations de quasi-particules localisées sur la longueur  $\kappa_S^{-1}$ . De plus, ces excitations sont uniquement issues des conditions aux limites imposées par les constantes  $C_{\pm}$ , *i.e.* elles n'existent qu'à l'immédiate proximité d'une interface. Enfin, signalons que

---

<sup>3</sup>Il suffit d'écrire l'équation  $\partial_x (g^2 + f^+ f) = 0$  à partir du système d'Eilenberger, qui implique que la quantité  $g^2 + f^+ f$  est constante. Avec les expressions des fonctions quasi-classiques données dans le cas balistique et homogène, on trouve  $g^2 + f^+ f = 1$ . L'étude des cas inhomogènes ne pose pas de problème supplémentaire, puisqu'on peut toujours argumenter qu'à l'infini, le supraconducteur redevient homogène.

dans leur dernière forme  $\Omega = \mathbf{i}\sqrt{(\mathbf{i}\omega_n)^2 - |\Delta|^2}$ , la fréquence  $\mathbf{i}\omega_n$  représente une énergie<sup>4</sup>. On voit alors que  $\kappa_S^{-1} \rightarrow \infty$  lorsque  $\mathbf{i}\omega_n \rightarrow |\Delta|$ . Autrement dit, lorsque l'énergie associée aux quasi-particules supraconductrices s'approche du gap, les excitations associées ne sont plus localisées, mais se propagent sur tout le supraconducteur.

Ayant en vue l'utilisation du formalisme quasi-classique afin de calculer des courants Josephson, on donne la définition de la densité de courant sous la forme [107, 49] :

$$\mathbf{j}^{(d)}(\mathbf{k}) = 2e\nu_0^{(d)}\pi k_B T \sum_n \langle \mathbf{v}_F \text{Im} \{g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\} \rangle \quad (2.15)$$

où  $\nu_0^{(d)}$  est la densité électronique au niveau de Fermi en fonction de la dimension  $d$  du système étudié. Le courant est donc simplement défini par l'intégration angulaire sur la surface de Fermi des modes de propagation des quasi-particules supraconductrices. Ainsi, la solution homogène (premier terme de l'Éq.(2.13)) ne participe naturellement pas au courant, et seules des conditions aux limites vont donner des courants supraconducteurs non nul, et essentiellement concentrés autour des interfaces, où ils disparaissent sur la longueur  $\kappa_S^{-1}$ . Cette définition du courant n'est pas unique, et on peut par exemple lui préférer une définition incluant les fonctions anomales  $f^+$ . Bien sûr, toutes ces définitions sont liées par la condition de normalisation (2.12).

On passe maintenant en revue les différents cas dimensionnels que l'on étudiera par la suite, en commençant par le cas monocanal, ou cas unidimensionnel. Le cas unidimensionnel est simplement le cas où l'intégration angulaire de la fonction  $g$  n'est pas faite. On obtient alors :

$$j_x^{(1)}(x) = 2e\nu_0^{(1)}\pi k_B T \sum_n v_F \text{Im} \{g(x, v_x, \omega_n) - g(x, -v_x, \omega_n)\} \quad (2.16)$$

où il n'y a donc qu'une simple sommation sur les deux contributions  $\pm v_x$ .

Dans le cas d'une jonction très fine en épaisseur, on se limite à une intégration 2D et l'expression de la densité de courant se met sous la forme

$$j_x^{(2)}(x) = 2e\nu_0^{(2)}\pi k_B T \sum_n \int_0^{\pi/2} \text{Im} \{g(x, v_x, \omega_n) - g(x, -v_x, \omega_n)\} v_F \cos \varphi \frac{d\varphi}{2\pi} \quad (2.17)$$

alors que le cas tridimensionnel s'écrit

$$j_x^{(3)}(x) = \pi\nu_0^{(3)}v_F e k_B T \sum_n \int_0^1 \text{Im} \{g(x, v_x, \omega_n) - g(x, -v_x, \omega_n)\} X dX \quad (2.18)$$

où on a fait le changement de variable  $\cos \theta \sin \theta d\theta = -X dX$ .

Le fait que n'interviennent que les valeurs comprises entre 0 et  $\pi/2$  vient du fait que l'on intègre les vitesses pour  $\theta \in [0, \pi]$  sous la forme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_F \text{Im} \{g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k})\} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |v_F| \text{Im} \{g(v_x > 0) - g(v_x < 0)\} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} \quad (2.19)$$

puisque l'intégration sur  $\theta \in [0, \pi]$  revient à considérer une vitesse positive pour  $\theta \in [0, \pi/2]$  et négative pour  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ . On s'est placé dans le cas où la vitesse n'a qu'une

---

<sup>4</sup>Ceci est une particularité du formalisme de Matsubara qui décrit la variable température  $\tau = \mathbf{i}t$  comme un temps purement complexe (rotation de Wick). Voir [130] pour plus de détails.

seule composante pour faire cette remarque. C'est dans cette approximation que l'on se placera dans la suite, puisque l'on considère des jonctions de dimensions très petites par rapport aux dimensions des électrodes supraconductrices. Cette approximation s'appelle l'hypothèse des *weak-links*, ou des bords rigides, ou encore de phase rigide, puisqu'elle permet de traiter la phase des électrodes supraconductrices comme une constante d'espace définie par morceaux [133]. En effet, dans cette approximation où les supraconducteurs sont de tailles beaucoup plus importantes que le pont les reliant, on peut, en première approximation, supposer les supraconducteurs sans interaction avec le pont. Or, un supraconducteur isolé est justement un supraconducteur pour lequel le condensat possède une phase macroscopique fixée, comme signalé dans l'introduction générale. On garde donc cette notion de phase constante dans l'étude des systèmes hybrides, ayant en vue que cette approximation fonctionne très bien dans la géométrie précédemment mentionnée d'un pont de taille bien inférieure à celle des supraconducteurs.

En plus des équations de Eilenberger (2.10), il nous faut connaître la généralisation au cas ferromagnétique de ces équations pour pouvoir calculer le courant supraconducteur dans une hétérojonction. On modélise alors le ferromagnétique comme un système normal dans lequel on rajoute une interaction de type Zeeman  $\hat{\eta}$ . Or, une interaction de spin oblige à prendre en compte explicitement le spin des fonctions de Gor'kov. On obtient alors des équations d'Eilenberger matricielles qui peuvent s'écrire sous la forme [49, 50, 51] :

$$\mathbf{i}\hbar v_F \cdot \nabla \hat{g} + [\mathbf{i}\omega_n (\hat{\sigma}_3 \otimes \hat{\tau}_0) - \hat{\eta} - \hat{\Delta}, \hat{g}] = 0 \quad (2.20)$$

avec la matrice des fonctions quasi-classique suivante :

$$\hat{g}(\omega_n, \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} g_{\uparrow\uparrow} & g_{\uparrow\downarrow} & -f_{\uparrow\uparrow} & -f_{\uparrow\downarrow} \\ g_{\downarrow\uparrow} & g_{\downarrow\downarrow} & -f_{\downarrow\uparrow} & -f_{\downarrow\downarrow} \\ f_{\uparrow\uparrow}^+ & f_{\uparrow\downarrow}^+ & g_{\uparrow\uparrow}^+ & g_{\uparrow\downarrow}^+ \\ f_{\downarrow\uparrow}^+ & f_{\downarrow\downarrow}^+ & g_{\downarrow\uparrow}^+ & g_{\downarrow\downarrow}^+ \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

et où  $\hat{\sigma}_3$  est la troisième matrice de Pauli dans l'espace de spin alors que  $\hat{\tau}_0$  est la matrice identité dans l'espace particule-trou de Nambu [107]. Si l'écriture (2.20) est relativement simple, elle cache un système de 16 équations couplées difficile à résoudre. Toutefois, si l'on modélise le champ d'échange ferromagnétique par un champ constant aligné le long de l'axe  $z$ , on pose  $\hat{\eta} = \mathbf{h} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow h \hat{\sigma}_3$ , ce qui rend diagonal l'effet paramagnétique. Cette convention est bien entendue exacte tant qu'une seule composante du champ d'échange est présente dans le système. Autrement dit, tant que la jonction S/F/S n'est composée que d'un seul ferromagnétique monodomaine, on peut toujours utiliser cette approche. Maintenant, si l'on se concentre sur le cas supraconducteur singulet, on peut encore poser :

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & -\Delta & 0 \\ 0 & \Delta^* & 0 & 0 \\ -\Delta^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

et il y aura alors deux sous-systèmes équivalents complètement découplés, puisque les fonctions  $g_{\uparrow\downarrow} = g_{\downarrow\uparrow} = f_{\uparrow\uparrow} = f_{\downarrow\downarrow} = 0$  ne participent pas, et de même pour les mêmes composantes de  $g^+$  et  $f^+$ . Ainsi, le système le plus complet des équations d'Eilenberger en présence d'un champ d'échange s'écrira sous la forme (2.10) dans laquelle il faut faire la substitution :  $\omega_n \rightarrow \omega_n + \mathbf{i}h$ . De plus, comme le gap supraconducteur  $\Delta = 0$  dans le

ferromagnétique, les solutions de ces équations seront simplement données par

$$\begin{cases} g = \gamma \\ f = \phi e^{-\kappa_F x} \\ f^+ = \phi^+ e^{\kappa_F x} \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\kappa_F$  est le vecteur d'onde dans le ferromagnétique, et s'écrit

$$\kappa_F = 2 \frac{\omega_n + \mathbf{i}h}{\hbar v_x} = 2\Sigma \frac{\omega_n + \mathbf{i}h}{\hbar |v_x|} \quad (2.24)$$

en tenant compte du signe  $\Sigma$  de la vitesse électronique, comme résumé dans le tableau 2.2. Les constantes d'intégration  $\gamma$  et  $\phi$  seront alors données par les conditions aux limites du problème considéré. Notons qu'il n'est plus nécessaire dans ce cas de conserver les indices de spin des fonctions quasi-classiques puisque les deux sous-systèmes relatifs aux fonctions  $(g_{\uparrow\uparrow}, f_{\uparrow\downarrow})$  et aux fonctions  $(g_{\downarrow\downarrow}, f_{\downarrow\uparrow})$  sont découplées et identiques, à condition de changer  $h$  en  $-h$ .

En plus des équations de Eilenberger dont on vient de parler, il existe d'autres formalismes quasi-classiques, qui sont l'approximation quasi-classique d'Andreev [134] des équations de Bogoliubov-de Gennes [9] et le formalisme d'Usadel [56]. Dans ces deux autres formalismes, les fonctions de corrélations sont également évaluées en un point, identiquement au formalisme d'Eilenberger.

Le formalisme d'Andreev correspond à la limite quasi-classique des équations de Bogoliubov-De Gennes. Dans ce formalisme, les excitations du condensat supraconducteur sont représentées par des quasi-particules couplant les électrons et les trous. La limite quasi-classique des équations de Bogoliubov-de Gennes s'appelle parfois équations d'Andreev. En étudiant les propriétés de conversion de ces quasi-particules à l'interface entre un métal normal et un supraconducteur, Andreev et Saint-James ont démontré qu'un électron se réfléchit en trou d'impulsion et de spin opposé à l'électron incident [134, 135]. La non-conservation de charge dans le supraconducteur est compensée par la création d'une paire de Cooper [136, 135]. Ce formalisme est surtout adapté aux cas propres, et permet l'utilisation des concepts de la physique mésoscopique [126, 137, 138] : les particules se déplacent dans les hétérojonctions le long de trajectoires quantifiées, que l'on appelle canaux de conduction. Ainsi, comme l'ont démontré Kulik et Saint-James [139, 135], une jonction S/N/S présente une quantification des niveaux d'énergie dans le métal normal, que l'on appelle niveaux d'Andreev. Ce sont ces niveaux d'énergie qui permettent de remonter au courant dans les hétérostructures [140]. De plus, les quasi-particules peuvent éventuellement interagir entre elles, donnant naissance à des relations courant-phase plus compliquée. Le formalisme des niveaux d'Andreev inclu dans le formalisme des matrices de *scattering* permet alors de prendre en compte de telles interactions dans le calcul du courant Josephson [141].

Le formalisme d'Usadel représente quant à lui la limite diffusive du formalisme d'Eilenberger. Dans la limite d'un fort désordre, Usadel montre que les fonctions quasi-classiques évoluent à l'aide d'équations de diffusion [56], là où, dans les cas généraux, les fonctions quasi-classiques évoluent au sens d'une équation de transport à *la* Boltzmann, comme dans les équations d'Eilenberger (2.10). Les équations d'Usadel sont donc dédiées aux jonctions diffusives. De plus, les équations d'Usadel doivent être complétées par des conditions aux limites caractéristiques, calculées par Zaitsev [142].



## 2.3 Jonctions S/F/S dans la limite balistique

Récemment, un nouveau mécanisme est apparu relatif aux effets de proximité S/F/S. Lorsque le système ferromagnétique se compose de plusieurs domaines non-collinéaires, des corrélations triplets apparaissent entre les électrodes supraconductrices terminales [51]. Les corrélations triplets possèdent un moment de spin  $S = \pm 1$ , et sont donc plus facilement influencées par l'aimantation des ferromagnétiques, et *vice-versa*. Plus surprenant encore, ces corrélations triplet augmentent même le courant critique de Josephson par rapport au supercourant d'origine singulet, ainsi que sa portée [143, 54]. Il est alors possible que le supercourant issu des corrélations triplet se propage sur des longueurs de jonction beaucoup plus grandes que le supercourant d'origine singulet. Et comme la composante singulet est détruite assez rapidement en augmentant la longueur de la couche ferromagnétique, on peut en principe filtrer les composantes singulet en prenant des jonctions longues, où seules les corrélations triplet devraient subsister.

Pour autant, de telles corrélations n'ont jamais été observées expérimentalement dans les jonctions S/F/S. La difficulté essentielle est d'avoir plusieurs domaines magnétiques non colinéaires dans les jonctions, ce qui multiplie le nombre d'interfaces et les difficultés expérimentales liées à la croissance de ce genre de matériaux.

Toutefois, le cas des demi-métaux<sup>5</sup> demande un traitement particulier. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule polarisation de spin au niveau de Fermi, et la réflexion d'Andreev et Saint-James conventionnelle  $|\mathbf{k}, \uparrow\rangle \rightarrow |-\mathbf{k}, \downarrow\rangle + |\mathbf{k}, \uparrow; -\mathbf{k}, \downarrow\rangle$  ne peut avoir lieu, faute de partenaire de spin opposé [144, 145]. Il est généralement admis que dans ce cas frustré en spin, seule des corrélations triplet ont lieu dans la jonction [146, 147, 148].

Il se trouve que c'est justement un demi-métal (DM) qui a été choisi pour tester la présence de corrélations triplet dans une jonction S/DM/S [127]. Des effets de proximité à très longue portée ont ainsi été observés sur une longueur dix fois supérieure à celle attendue pour les corrélations singulet. S'il est clair que l'oxyde de chrome  $\text{Cr}_2\text{O}_7$  utilisé dans cette expérience est demi-métallique en volume, ces propriétés de surface sont moins définies et pourrait tout à fait être modélisées par un ferromagnétique ordinaire. De plus, dans l'expérience de Keizer *et al.* [127], les électrodes supraconductrices sont déposées sur le demi-métal après nettoyage de la surface de  $\text{Cr}_2\text{O}_7$  afin d'enlever les oxydes  $\text{CrO}_3$  naturellement présents dans ce demi-métal. Ce nettoyage de surface pourrait tout à fait créer une jonction Josephson S/F/S bidimensionnelle et balistique.

Au cours de cette partie, on se concentrera donc sur les modèles de jonction S/F/S balistique à toutes les dimensions. Nous montrerons aussi que toutes les harmoniques sont importantes dans le cas pur. Nous verrons également que le courant critique s'amortit sous la forme de lois de puissances, donnant un courant supraconducteur à très longue portée. Nous verrons surtout que le cas bidimensionnel possède une loi de décroissance plus faible que le cas propre tridimensionnel, induisant des effets de proximité d'encore plus longue portée. On notera au passage que le cas unidimensionnel ne possède pas de décroissance, le rendant expérimentalement très intéressant.

On profitera de cette étude pour insister sur la possibilité pour le système S/F/S d'avoir une transition  $(0 - \pi)$  induite par la température pour certaines longueurs de jonction données. En modélisant les impuretés comme une barrière de potentiel au milieu du pont ferromagnétique, Chitchekatchev *et al.* [149] montrent que cette transition est possible en température, mais que cela n'est plus possible si l'on enlève la barrière. De fait, il était généralement admis dans la communauté S/F/S que le cas balistique ne possédait pas de transition  $(0 - \pi)$  en température. Nous allons, dans ce paragraphe,

---

<sup>5</sup>On utilise dans ce manuscrit le mot "demi-métal" pour la traduction du mot anglais *half-metal*.

montrer que cette transition existe bel et bien, même dans le cas balistique.

### 2.3.1 Relation courant-phase et phase arbitraire

Comme dans le cadre des jonctions S/N/S, la relation courant-phase des systèmes S/F/S est caractérisée à basse température par une grande anharmonicité [49]. Ainsi, lorsque l'on descend en température, la relation courant-phase, même pour un simple système S/N/S, ne vérifie plus la relation de Josephson  $I = I_c \sin \chi$  [42], mais se voit rajouter des harmoniques d'ordres plus élevés :  $I \approx I_c \sin \chi + I_2 \sin 2\chi + I_3 \sin 3\chi + \dots$ . Dans le cas des jonctions S/F/S, ces harmoniques d'ordre plus élevé jouent un rôle très particulier, puisque la première harmonique disparaît à la transition de phase ( $0 - \pi$ ).

Il est toutefois important de noter tout de suite que, du fait de la présence de ces harmoniques supérieures, on peut écrire la relation énergie-phase sous la forme

$$\frac{E(\chi)}{\Phi_0/2\pi} = I_c(1 - \cos \chi) + I_2(1 - \cos 2\chi) + I_3(1 - \cos 3\chi) - \dots \quad (2.25)$$

au moins à proximité de la température critique  $T_c$ . On a posé le quantum de flux supraconducteur  $\Phi_0 = \pi\hbar/e$  et on n'a considéré dans le développement précédent que les trois premières harmoniques. Bien évidemment, les harmoniques d'ordre élevé disparaissent lorsque l'on s'approche de la température critique  $T_c$ . Mais la caractéristique des jonctions S/F/S est précisément de faire disparaître le premier terme de ce développement, et la seconde harmonique  $I_2$  devient prépondérante à cette transition ( $0 - \pi$ ).

L'expression (2.25) constitue le paysage énergétique d'une jonction Josephson S/F/S à proximité de la température critique. Les minima de  $E(\chi)$  donnent alors la phase à l'équilibre de la jonction. En ne retenant que les deux premiers termes  $I_c$  et  $I_2$ , les trois solutions à l'équilibre sont  $\chi_0 = (0, \pi, \arccos(-I_c/4I_2))$ , dont les énergies respectives sont  $E(\chi_0) = (-I_2, 2I_c - I_2, I_c + I_c^2/8I_2 + I_2)$ . Lorsque  $I_c$  est négatif, la jonction est dans son état  $\pi$ . Lorsque  $I_c = 0$ , les deux solutions  $0$  et  $\pi$  sont dégénérées : c'est la transition ( $0 - \pi$ ). Ainsi, tant que  $I_2$  reste positif, on ne pourra avoir qu'une transition entre les états de phase  $0$  et  $\pi$ . En revanche, si  $I_2$  devient négatif, c'est la dernière solution  $\chi_0 = \arccos(-I_c/4I_2)$  qui devient favorable. Or, cette dernière solution correspond à  $\chi_0 = \pi/2$  lorsque  $I_c = 0$ . Ainsi, lorsque  $I_2$  est négatif à l'annulation de la première harmonique, l'état de phase le plus stable devient l'état  $\chi_0 = \pi/2$ . De même, à proximité d'un état  $\chi_0 = \pi/2$ , la variation de  $I_c$  est directement reliée à la variation de la phase. La présence d'un terme  $I_2 < 0$  à proximité de l'annulation de la première harmonique génère donc une transition entre les phases  $0$  et  $\pi$  de façon douce, *i.e.* tous les états possibles  $0 < \chi_0 < \pi$  sont possibles. Dans la suite, on appellera jonction- $\chi_0$  toutes les jonctions pouvant transiter entre les états  $0$  et  $\pi$  en passant continuellement par tous les états  $0 < \chi_0 < \pi$ .

De façon générale, la phase  $\chi_0$  doit vérifier  $I(\chi_0) = 0$  avec la condition supplémentaire  $\partial_\chi I(\chi_0) < 0$  [150]. Dans ce cas, la relation courant-phase s'écrira génériquement sous la forme :

$$I(\chi) = I_c \sin(\chi - \chi_0) \quad (2.26)$$

où  $\chi_0$  peut être différent de  $0$  ou  $\pi$ .

Ce type de jonction  $\chi_0$  est supposé exister pour des systèmes multicouches composés d'une alternance de jonctions  $0$  et  $\pi$  [151]. L'empilement d'un grand nombre de couche rend toutefois ce type de jonctions particulièrement difficile à réaliser. Une étude récente analyse également les caractéristiques expérimentales de ce type de jonction sans préciser toutefois les mécanismes qui lui donne naissance [152]. On trouve alors des effets de cohérence originaux, et des réponses dynamiques (saut de Fiske notamment) particulières.

| Notation   | Signification  |
|--|--|
| $L$  | longueur de la jonction ferromagnétique              |
| $S$  | surface transverse à la jonction ferromagnétique     |
| $\ell$   | largeur transverse à la jonction ferromagnétique     |
| $\chi$   | différence de phase de la jonction                   |
| $\Delta_{L,R} =  \Delta  e^{\pm i\chi/2}$                | gap supraconducteur gauche ( $L$ ) et droite ( $R$ ) |
| $h = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}_{\text{ech}}$  | champ d'échange ferromagnétique                      |
| $v_x = v_F \cos \theta$                                  | vitesse électronique dans la jonction                |
| $\Sigma = v_x /  v_x $                                   | signe de la vitesse de Fermi électronique            |
| $\xi_F = \hbar v_F / h$                                  | longueur d'oscillation ferromagnétique               |
| $\ell_e = v_F \tau$                                      | libre parcours moyen électronique                    |
| $\alpha = 2hL / \hbar v_F$                               | nombre d'oscillations dans la jonction               |
| $\omega_n = 2\pi k_B T (n + 1/2)$                        | fréquence de Matsubara fermionique                   |
| $\kappa_S = 2\sqrt{\omega_n^2 +  \Delta ^2} / \hbar v_x$ | vecteur d'onde supraconducteur                       |
| $\kappa_F = 2(\omega_n + \mathbf{i}h) / \hbar v_x$       | vecteur d'onde ferromagnétique                       |

TAB. 2.2: Tableau récapitulatif des différentes grandeurs utilisées dans la partie II.

### 2.3.2 Lois de puissances de décroissance du courant critique

Pour obtenir le courant supraconducteur, il nous faut connaître la fonction de Green  $g_{\omega_n}(x, v_x)$  dans l'hétérojonction. Pour cela, on applique les conditions aux limites propres, qui stipulent que les solutions supraconductrices (2.13) et ferromagnétiques (2.23) sont continues aux deux interfaces. En étudiant la géométrie et les notations de la figure 2.2, on retrouve alors l'expression [46] :

$$g_{\omega_n}(x, v_x) = \frac{\omega_n}{\Omega} + \frac{|\Delta|^2}{\Omega} \frac{\sinh\left(\kappa_F \frac{L}{2} + \mathbf{i} \frac{\chi}{2}\right)}{\omega_n \sinh\left(\kappa_F \frac{L}{2} + \mathbf{i} \frac{\chi}{2}\right) + \Omega \Sigma \cosh\left(\kappa_F \frac{L}{2} + \mathbf{i} \frac{\chi}{2}\right)} \quad (2.27)$$

qui ne dépend pas de la position dans le pont. En cela, on retrouve la notion des niveaux d'Andreev [139, 135], donnés par les annulations du dénominateur de  $g_{\omega_n}(x, v_x)$ . Toutes les grandeurs utilisées sont résumées dans le tableau 2.2. On peut alors insérer cette expression dans la définition (2.15) de la densité de courant pour retrouver la relation courant-phase.

Pour calculer les courants, on va avoir besoin de l'expression de  $\text{Im}\{g(v_x) - g(-v_x)\}$  depuis l'expression (2.15). Pour la calculer, on utilise l'expression (2.27) de  $g$  dans le ferromagnétique dans laquelle on injecte

$$\kappa_F = 2 \frac{\omega_n + \mathbf{i}h}{\hbar v_x} = 2\Sigma \frac{\omega_n + \mathbf{i}h}{\hbar |v_x|} \simeq 2\Sigma \frac{\mathbf{i}h}{\hbar |v_x|} \quad (2.28)$$

qui tient compte du signe de la vitesse. De plus, dans cette dernière expression, on a supposé que le champ d'échange ferromagnétique  $h$  est toujours beaucoup plus grand que l'énergie associée à la température  $k_B T$ , qui est de l'ordre de  $k_B T_c \sim \Delta_0$  dans les supraconducteurs. La plupart du temps en effet, le champ d'échange est de l'ordre de (100 – 1000) K, alors que la température critique supraconductrice est aux alentours de 10 K dans les meilleurs cas étudiés expérimentalement. Cette hypothèse n'est donc pas

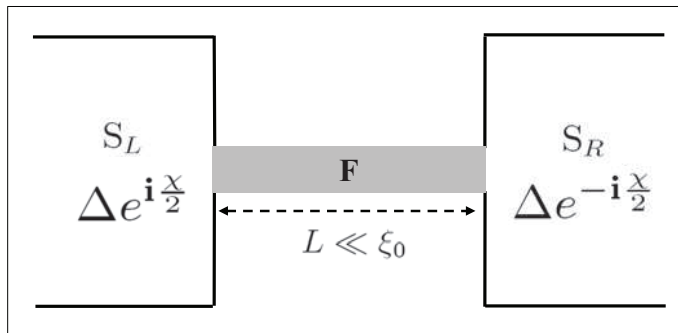


FIG. 2.2: Schéma de la jonction S/F/S étudiée au cours des paragraphes 2.3 et 2.4. La taille du ferromagnétique reliant les deux supraconducteurs est supposée suffisamment restreinte pour que les phases supraconductrices puissent être supposées constantes dans chaque volume supraconducteur, et que le gap supraconducteur soit supposé disparaître aux interfaces S/F.

essentiellement contraignante, et nous permet d'obtenir le noyau de la densité de courant sous la forme

$$\begin{aligned}
 k_B T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Im} \{g(v_x) - g(-v_x)\} &= \\
 &= \sum_{\Sigma=\pm 1} \frac{|\Delta|}{2} \tanh \left[ \frac{|\Delta|}{2k_B T} \cos \left( \frac{\chi}{2} + \frac{\Sigma h L}{\hbar |v_x|} \right) \right] \sin \left( \frac{\chi}{2} + \frac{\Sigma h L}{\hbar |v_x|} \right) \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

où  $\Sigma = \pm 1$  tient compte du changement de signe de la vitesse en fonction des angles  $\theta \in [0, \pi/2]$  et  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ . Notons que si l'on ne fait pas l'approximation (2.28), on ne peut pas calculer analytiquement la sommation sur les fréquences de Matsubara. Cette hypothèse peut toutefois être relaxée si l'on envisage une étude numérique [153]. Remarquons encore que l'approximation effectuée en (2.28) peut se réécrire (cf. Tab.2.1)  $\kappa_F = 2\Sigma (\xi_f^{-1} + i\xi_F^{-1}) \approx 2i\Sigma/\xi_F$ , et correspond donc à  $\xi_F \ll \xi_f$ . En se souvenant que  $\xi_F$  est une longueur d'oscillation due au champ d'échange alors que  $\xi_f$  est la longueur de cohérence des effets de proximité S/F, l'approximation (2.28) est donc bien vérifiée, puisque l'on a supposé dès l'introduction que<sup>6</sup>  $\xi_f \gtrsim L$  (cf. Fig.2.1).

Normalement, on doit encore tenir compte dans l'expression (2.29) de la symétrie de spin [154]. Une paire de Cooper étant constituée de deux électrons sous la forme  $(\mathbf{k}, \downarrow; -\mathbf{k}, \uparrow)$ , l'énergie d'échange  $h = \mathbf{E}_{ex} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  comporte deux éléments  $h(\uparrow) = E_{ex}$  et  $h(\downarrow) = -E_{ex}$  où  $\mathbf{E}_{ex}$  est l'énergie d'échange, et  $\boldsymbol{\sigma}$  est le spin de l'électron de la paire de Cooper. Or, la prise en compte de ces deux contributions donne exactement la même somme sur  $\Sigma = \pm 1$  dans l'expression (2.29), multipliant les expressions du courant par le facteur 2. Cela revient à prendre en compte les deux types de corrélations singulet et triplet pour lesquelles la projection en spin est nulle [51].

Étudions maintenant la relation courant-phase pour toutes les dimensionnalités. À chaque fois, on étudiera également l'énergie de la jonction dans les phases 0 et  $\pi$ , ce qui nous permettra de trouver le diagramme de phase en température, ainsi que les

<sup>6</sup>En réalité, l'hypothèse  $\xi_F \ll \xi_f$  donnant l'expression (2.29) correspond à la limite d'une jonction courte  $\xi_f \gg L$ . On retrouve alors l'expression du courant S/N/S dans cette limite en posant  $h = 0$  dans (2.29). Cela est immédiat si l'on se souvient que la longueur de cohérence  $\xi_N$  des systèmes S/N devant, dans le cas S/F :  $\xi_N \rightarrow \xi_f + i\xi_F$ , *i.e.* se découple en une partie atténuée et une partie oscillante [50]. On ne conserve donc dans la suite que la partie oscillante de l'effet de proximité S/F.

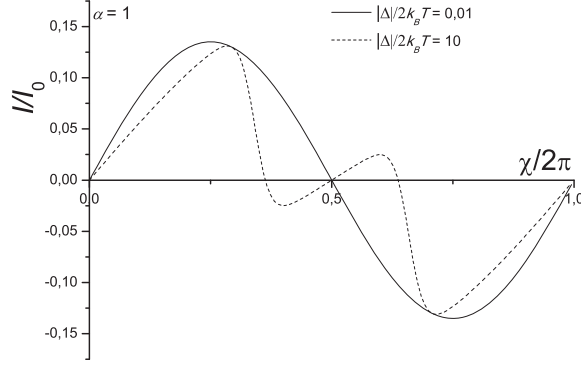


FIG. 2.3: Relation courant-phase SFS monocanal donnée par l'expression (2.30). Ces courbes sont obtenues pour un paramètre  $\alpha = hL/\hbar v_F = 1$  et pour deux températures : proche de  $T_c$  pour la courbe continue (correspondant à  $|\Delta|/2k_B T = 0,01$ ) et à basse température (correspondant à  $|\Delta|/2k_B T = 10$ ) pour la courbe pointillée. Des valeurs encore plus basses de la températures raidissent encore la courbe, signalant l'anharmonicité de la relation courant-phase à basse température.

développement de cette relation courant-phase proche de la température critique et pour des jonctions longues.

En injectant la relation (2.29) dans l'expression du courant (2.15), on obtient les courants Josephson

$$j_x^{(1)}(\alpha, \chi) = e\nu_0^{(1)}\pi v_F |\Delta| \sum_{\Sigma=\pm 1} \tanh \left[ \frac{|\Delta|}{2k_B T} \cos \left( \frac{\chi}{2} + \frac{\Sigma hL}{\hbar |v_F|} \right) \right] \sin \left( \frac{\chi}{2} + \frac{\Sigma hL}{\hbar |v_F|} \right) \quad (2.30)$$

$$j_x^{(2)}(\alpha, \chi) = \pi e\nu_0 v_F |\Delta| \sum_{\Sigma=\pm 1} \int_{\alpha}^{\infty} \tanh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \cos \frac{\chi + \Sigma y}{2} \right) \sin \frac{\chi + \Sigma y}{2} \frac{\alpha^3 dy}{y^2 \sqrt{y^2 - \alpha^2}} \quad (2.31)$$

$$j_x^{(3)}(\alpha, \chi) = e\pi\nu_0^{(3)}v_F |\Delta| \sum_{\Sigma=\pm 1} \int_{\alpha}^{\infty} \tanh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \cos \frac{\chi + \Sigma y}{2} \right) \sin \frac{\chi + \Sigma y}{2} \frac{\alpha^2 dy}{y^3} \quad (2.32)$$

pour les dimensions 1, 2, 3, respectivement.

La courbe du courant S/F/S monocanal (Éq.(2.30)) est représentée sur la figure 2.3 pour deux valeurs de la température. On remarque que la relation courant-phase monocanal n'a pas de décroissance en fonction de la longueur de la jonction, signifiant que l'effet d'oscillation du courant pourrait se conserver sur de grandes distances. Bien que les ferromagnétiques connus pour l'instant soient très loin de vérifier le cas monocanal, on peut toutefois songer à des systèmes hybrides de nanotubes de carbone dans lesquels sont injectés des atomes magnétiques. Ainsi, de tel nanofils pourraient tout à fait servir d'élément de base à du transport cohérent à longue portée utilisant des jonctions  $\pi$ .

Les expressions bidimensionnelle (2.31) et tridimensionnelle (2.32) présentent une forme d'oscillation amortie en fonction de l'épaisseur de la jonction ferromagnétique, représentée par le paramètre  $\alpha = 2hL/\hbar v_F$ . Le même phénomène de passage de la phase 0 à la phase  $\pi$  est également prédit. Toutefois, même si les canaux sont indépendants, on vient maintenant superposer différentes contributions émanant de différents canaux. C'est

cette superposition qui induit les effets d'atténuation du courant critique en fonction de la longueur de la jonction. Mais cette superposition induit également des comportements non-triviaux en température. On va voir notamment qu'elle permet des transitions entre les phases 0 et  $\pi$  pour des plages de  $\alpha$  données au paragraphe 2.3.3.

À proximité de la température critique, on peut linéariser  $I(\chi, L, v_F)$  par rapport à  $|\Delta|/2k_B T$  pour trouver la forme courant-phase de Josephson [155]  $I^{(d)}(\chi, \alpha) = I_c^{(d)}(\alpha) \sin \chi$  avec

$$\begin{aligned} I_c^{(1)}(\alpha) &= e\nu_0^{(1)}\pi v_F \frac{|\Delta|^2}{2k_B T} \cos \alpha \\ I_c^{(2)}(\alpha) &= \pi e\nu_0^{(2)}\ell v_F \frac{|\Delta|^2}{2k_B T} \int_{\alpha}^{\infty} \cos y \frac{\alpha^3 dy}{y^2 \sqrt{y^2 - \alpha^2}} \\ I_c^{(3)}(\alpha) &= e\pi\nu_0^{(3)}Sv_F \frac{|\Delta|^2}{2k_B T} \int_{\alpha}^{\infty} \cos y \frac{\alpha^2 dy}{y^3}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Le courant critique  $I_c^{(d)}$  oscille donc en fonction de l'épaisseur de la couche ferromagnétique. La transition entre les phases 0 et  $\pi$  se fera à chaque annulation du courant critique  $I_c$ . La relation courant-phase n'est alors définie que par l'harmonique suivante, qui vient du terme supérieur en  $|\Delta|/2k_B T$ . Celui-ci sera génériquement de la forme

$$I_m(\alpha) \sim (-)^{m+1} \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \right)^{2m-1} \sin m\alpha \int \cos m\alpha \quad (2.34)$$

pour l'harmonique d'ordre  $m$ , induisant une loi de puissance de décroissance des harmoniques proche de la température critique de la forme  $[(T - T_c)/T_c]^{2m-1}$  puisque  $|\Delta| \sim k_B(T - T_c)$  à proximité de la température critique. On est donc obligé de prendre en compte une quantité de plus en plus grande d'harmonique à mesure que l'on s'éloigne de la température critique pour atteindre des températures plus basses.

Pour étudier la possibilité d'avoir une jonction  $\chi_0$ , il suffit de connaître le signe de la seconde harmonique lorsque la première s'annule à la transition ( $0 - \pi$ ). Dans le cas unidimensionnel, l'harmonique d'ordre 2 sera proportionnelle à  $-\cos 2\alpha$ . La seconde harmonique est donc toujours positive lorsque la première s'annule. La transition de phase ( $0 - \pi$ ) dans une jonction S/F/S propre unidimensionnelle ne permet pas de réaliser une phase  $\chi_0$  arbitraire.

Dans les deux autres cas bi- et tri-dimensionnel, on procède à l'évaluation de la relation courant-phase (2.31) ou (2.32) à proximité de  $T_c$  et pour des jonctions très longues, *i.e.* lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ . On obtient alors :

$$I_c^{(2)} \underset{\alpha \gg 1}{\approx} \pi e\nu_0^{(2)}\ell v_F \frac{|\Delta|^2}{2k_B T} \frac{\sqrt{\pi} \cos \alpha - \sin \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \quad (2.35)$$

$$I_2^{(2)} \underset{\alpha \gg 1}{\approx} -\pi e\nu_0^{(2)}\ell v_F \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \right)^3 \frac{\sqrt{\pi} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{24\sqrt{2\alpha}} \quad (2.36)$$

pour le cas bidimensionnel, où la divergence de l'intégrale (2.33) a été simplement régularisée aux petits angles et

$$I_c^{(3)} \underset{\alpha \gg 1}{\approx} -e\pi\nu_0^{(3)}Sv_F \frac{|\Delta|}{2k_B T} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{et} \quad I_2^{(3)} \underset{\alpha \gg 1}{\approx} \frac{e\pi\nu_0^{(3)}Sv_F}{12} \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \right)^3 \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \quad (2.37)$$

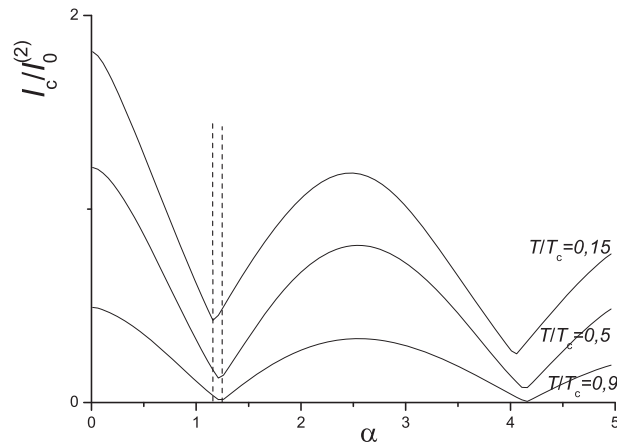


FIG. 2.4: Courants critiques d'une jonction SFS bidimensionnelle courte avec un faible champ d'échange en fonction de l'épaisseur et pour trois valeurs de la température (indiquée en regard des courbes). Les courbes qui ne touchent pas l'axe horizontal correspondent donc à des températures de plus en plus basses. Les traits pointillés verticaux repèrent la position de la première transition ( $0 - \pi$ ) pour les deux courbes extrêmes. On voit donc que la transition entre les phases  $0$  et  $\pi$  peut se réaliser en fonction de la température pour une plage restreinte du paramètre  $\alpha$ .

pour le cas tridimensionnel. Quelque soit la dimensionnalité de la jonction, cette deuxième harmonique  $I_2$  sera toujours positive à l'annulation de la première, induisant une transition de phase ( $0 - \pi$ ) discontinue, et une absence de phase  $\chi_0$ .

En revanche, la relation courant-phase n'est amortie que sous la forme d'une loi de puissance dans le cas propre. Ainsi, chaque harmonique  $m$  n'est amortie que sous la forme  $(m\alpha)^{(1-d)/2}$ , et les harmoniques supérieures jouent donc un rôle non négligeable dans les propriétés des jonctions propres, même dans le cas des jonctions longues.

De plus, une composante bidimensionnelle d'un courant S/F/S aura une décroissance à plus longue portée que le cas tridimensionnel. Il se peut donc tout à fait que le courant critique à très longue portée observé dans l'oxyde de chrome  $\text{Cr}_2\text{O}_7$  soit un courant Josephson bidimensionnel induit par une couche de surface non plus demi-métallique, mais simplement ferromagnétique. Notre étude repose donc la question de la nature du supercourant observé dans l'étude [127]. Il existe ainsi encore deux hypothèses : soit le supercourant observé est de nature triplet si il est entièrement dû aux effets du volume demi-métallique, soit le supercourant est de nature singulet, et pourrait néanmoins transiter à travers l'oxyde de chrome le long des surfaces simplement ferromagnétiques.

De même, la présence d'un grand nombre d'harmoniques dans la relation courant-phase à basse température signifie que le courant critique ne s'annule pas à la transition ( $0 - \pi$ ) à basse température, comme on peut le voir sur la figure 2.4. En effet, la transition de phase ( $0 - \pi$ ) a lieu lorsque la première harmonique  $I_c$  disparaît, mais rien n'oblige les harmoniques supérieures à s'annuler au même point. En général, ces harmoniques ne s'annulent pas, et plus la température est basse, plus ces harmoniques contribuent lorsque la première disparaît. On remarque également que le point de rebroussement correspondant à la transition ( $0 - \pi$ ) se déplace légèrement en fonction de la température. En une certaine plage d'épaisseur de jonction, il est donc possible de franchir la transition ( $0 - \pi$ ) en faisant simplement varier la température. C'est ce que l'on va étudier maintenant.

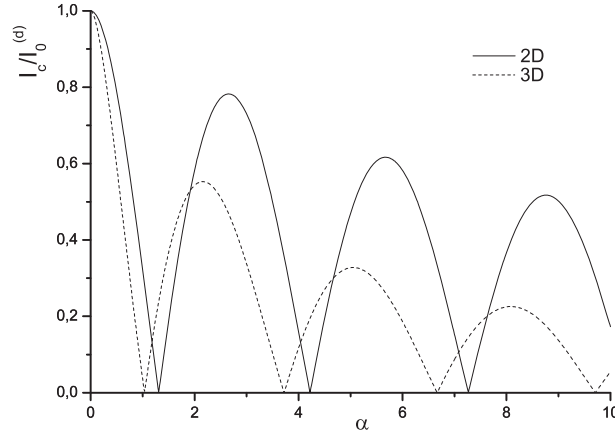


FIG. 2.5: Courants critiques d'une jonction bidimensionnelle (courbe pointillée) et tridimensionnelle (courbe pleine) à proximité de la température critique. On voit que la décroissance suit une loi de puissance dans les deux cas, mais que le cas bidimensionnel présente une décroissance moins forte, induisant des effets de proximité plus forts.

### 2.3.3 Transition $(0 - \pi)$ induite par la température

Du fait de la relation de commutation nombre de particule - phase quantique [43] :  $[N, \chi] = \hbar$ , le courant peut se représenter sous la forme

$$I = \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\partial E}{\partial \chi} \quad (2.38)$$

avec  $\Phi_0 = \pi \hbar / e$  qui représente le quantum de flux supraconducteur. La relation (2.38) n'est rien d'autre qu'une relation de Hamilton appliquée à  $2e\dot{N} = I$ , *i.e.*, au courant supraconducteur.

Étudions maintenant la possibilité d'avoir une transition entre les phases 0 et  $\pi$  induite par la température, comme suggéré par la figure 2.4 dans le cas bidimensionnel. Pour cela, on va utiliser comme définition de la transition entre ces deux phases l'égalité des énergies, définissant ainsi une longueur critique donnée par le paramètre  $\alpha_c$  sous la forme  $E_0(\alpha_c) = E_\pi(\alpha_c)$ .

À l'aide de la relation énergie-courant (2.38), on peut réécrire les énergies de la jonction bidimensionnelle dans chacune des phases sous la forme

$$E_0(\alpha) = -4k_B T \pi \nu_0^{(2)} \hbar v_F \int_\alpha^\infty \ln \left[ \cosh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \cos \frac{y}{2} \right) \right] \frac{\alpha^2 dy}{y^2 \sqrt{y^2 - \alpha^2}} \quad (2.39)$$

$$E_\pi(\alpha) = -4k_B T \pi \nu_0^{(2)} \hbar v_F \int_\alpha^\infty \ln \left[ \cosh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \sin \frac{y}{2} \right) \right] \frac{\alpha^2 dy}{y^2 \sqrt{y^2 - \alpha^2}} \quad (2.40)$$

ce qui donnera comme définition de la transition  $(0 - \pi)$  la relation

$$\int_{\alpha_c}^\infty \ln \frac{\cosh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \cos \frac{y}{2} \right)}{\cosh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \sin \frac{y}{2} \right)} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^2 - \alpha_c^2}} = 0 \quad (2.41)$$



définissant une longueur dite critique  $\alpha_c(T)$  qui va dépendre de la température. Bien sûr, du fait du caractère oscillant de l'intégrale, il existe plusieurs  $\alpha_c(T)$  que l'on notera  $\alpha_c^{(n)}(T)$  pour indiquer qu'il s'agit de la variation en température de la position de la  $n$ -ième annulation de la première harmonique.

En principe, l'expression précédente permet de remonter au diagramme de phase en température de la longueur critique  $\alpha_c(T)$ . Toutefois, pour des raisons d'ordre pratiques liées à la divergence de l'intégrale à proximité de sa borne inférieure, il n'a pas été possible de remonter à l'ensemble de ce diagramme de phase. Cette étude est donc reportée sur le cas 3D, où des effets similaires sont prédits. Toutefois, les valeurs obtenues proches de la température critique et proche de la température nulle indiquent que la plage d'épaisseur de jonctions où une telle transition en température est prédite est un peu plus large dans le cas bidimensionnel que dans le cas tridimensionnel (il suffit de comparer les Figs. 2.4 et 2.6).

Dans le cas tridimensionnel, on aura les énergies relatives aux deux phases 0 et  $\pi$  sous les formes

$$E_0(\alpha) = -4k_B T \pi \nu_0^{(3)} \hbar v_F \int_{\alpha}^{\infty} \ln \left[ \cosh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \cos \frac{y}{2} \right) \right] \frac{\alpha^2 dy}{y^3} \quad (2.42)$$

$$E_{\pi}(\alpha) = -4k_B T \pi \nu_0^{(3)} \hbar v_F \int_{\alpha}^{\infty} \ln \left[ \cosh \left( \frac{|\Delta|}{2k_B T} \sin \frac{y}{2} \right) \right] \frac{\alpha^2 dy}{y^3} \quad (2.43)$$

pour les deux valeurs de l'énergie dans chacune des phases 0 et  $\pi$ . La transition aura donc lieu pour

$$\int_{\alpha_c}^{\infty} \ln \frac{\cosh \left( \frac{\Delta_0}{2k_B T} \cos \frac{y}{2} \right)}{\cosh \left( \frac{\Delta_0}{2k_B T} \sin \frac{y}{2} \right)} \frac{dy}{y^3} = 0 \quad (2.44)$$

qui correspond à l'égalité des deux énergies  $E_0(\alpha_c) = E_{\pi}(\alpha_c)$  à la valeur critique de la longueur de la jonction  $\alpha_c(T)$ , qui varie, comme dans le cas 2D, avec la température. L'étude numérique de cette dernière expression donne la figure 2.6 pour les seconde et troisième longueurs critiques de transition, *i.e.* pour la seconde et troisième annulation du courant critique.

Il existe donc une plage d'épaisseurs de jonction pour lesquelles une transition ( $0 - \pi$ ) peut être induite par la température. On peut quantifier la plage d'épaisseur  $\Delta L$  pour laquelle on peut observer cette transition sous la forme

$$\alpha = \frac{2hL}{\hbar v_F} \Rightarrow \Delta L = \frac{E_F}{2\pi h} \lambda_F \Delta\alpha \quad (2.45)$$

où  $\Delta\alpha$  est la plage de valeurs prise par la paramètre  $\alpha_c$  entre les cas  $T = 0$  et  $T = T_c$ , qui vaut approximativement<sup>7</sup> 0,03 depuis la figure 2.6. Cela donne  $\Delta L \sim (0,1 - 10) \lambda_F$  pour des valeurs typiques de l'énergie de Fermi  $E_F \sim (10^4 - 10^5)$  K et du champ d'échange  $h \sim (100 - 1000)$  K. La transition en température n'est donc aisément observable que pour de grandes valeurs du rapport de l'énergie de Fermi sur l'énergie de champ d'échange  $E_F/h$ .

---

<sup>7</sup>Notons que nous n'avons pas observé de variations significatives de  $\Delta\alpha$  en fonction de l'ordre de l'annulation du courant critique, *i.e.*  $\Delta\alpha_c^{(1)} \approx \Delta\alpha_c^{(2)} \approx \dots \approx 0,03$ . On n'a comparé numériquement que les 5 premières annulations.

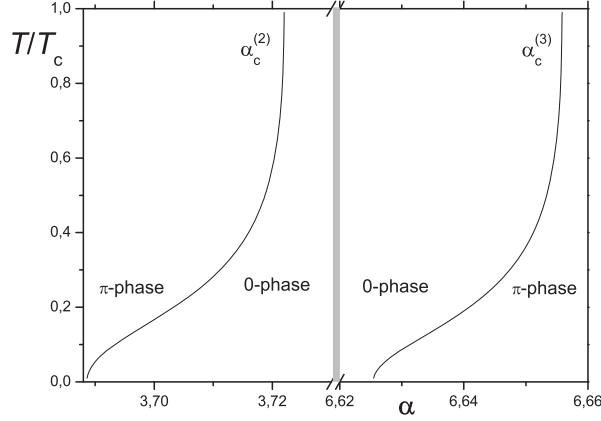


FIG. 2.6: Diagramme de phase en température pour la seconde et troisième annulation de la première harmonique  $\alpha_c^{(2)}$  et  $\alpha_c^{(3)}$ , donnant lieu à la transition de phase ( $0 - \pi$ ) pour une jonction tridimensionnelle. Les courbes en températures sont obtenues à l'aide de l'interpolation  $\Delta_0(T)/2k_B T = (0,882T_c/T) \tanh\left(1,74\sqrt{T/T_c - 1}\right)$  pour le gap supraconducteur.

Nous avons également étudié numériquement le courant critique en fonction de la température. Les courbes correspondantes sont tracées dans le cas tridimensionnel sur la figure 2.7. De façon générale, ces courbes changent de concavité en fonction de la longueur de la jonction, les concavités extrêmes étant données par les maxima et les minima de  $I_c(\alpha)$ . On peut également montrer que la pente de  $I_c(T_c)$  est nulle précisément à la transition ( $0 - \pi$ ). Plus surprenant, le courant critique ne s'annule pas à la transition ( $0 - \pi$ )! Cela s'explique toujours par la présence des harmoniques d'ordre supérieur dans la relation courant-phase. Ces harmoniques ne sont jamais suffisamment faibles pour qu'à l'annulation de la première corresponde une discontinuité dans le courant critique. Pour voir un tel comportement non-monotone, il faudrait se trouver très proche de la température critique, où la relation courant-phase retrouve un comportement purement sinusoïdal. Toutefois, aucun comportement de ce type n'a pu être observé numériquement.

## 2.4 Jonctions S/F/S dans la limite d'un faible désordre

Au paragraphe précédent, nous avons étudié le cas balistique des jonctions S/F/S, qui est un cas limite pour lequel il n'y a pas d'impuretés venant affecter la relation courant-phase, rendant les effets de proximité à longue portée. L'autre cas limite est le cas diffusif, pour lequel la relation courant-phase possède une décroissance exponentielle de chacune de ses harmoniques, rendant les harmoniques d'ordre élevé négligeables sauf précisément à la transition entre les phases 0 et  $\pi$  où la première s'annule.

Nous allons maintenant étudier le régime intermédiaire, pour lequel la jonction possède un nombre non-négligeable d'impuretés, sans pour autant détruire complètement les harmoniques d'ordre élevé. Cette limite n'a été que très peu étudiée, du fait de la nécessité d'avoir un traitement particulier de l'auto-cohérence des équations d'Eilenberger (2.10). De plus, cette limite est décrite par  $h\tau \gg \hbar$ , et correspond donc également à la limite d'un fort champ d'échange. Dans cette limite, les seuls travaux théoriques sont ceux de Bergeret *et al.* [54] donnant une forme du courant critique quelle que soit la concentration d'impu-

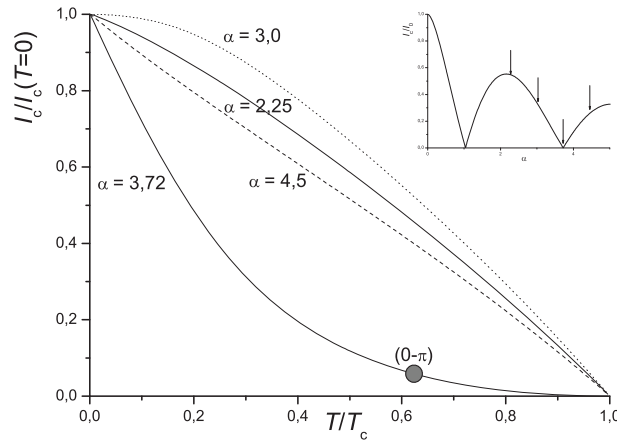


FIG. 2.7: Courant critique d'une jonction tridimensionnelle en fonction de la température pour différentes longueurs de jonction, représentées dans l'encart. Le courant critique présente systématiquement un comportement monotone en température pour toutes les longueurs, même lorsqu'il existe une transition de phase  $(0 - \pi)$  en température (représentée par le cercle gris sur la courbe inférieure). Cette absence d'annulation à la transition  $(0 - \pi)$  en température est associée à la présence d'un grand nombre d'harmoniques supérieures, la transition  $(0 - \pi)$  n'étant associée qu'à l'annulation de la première de ces harmoniques.

reté et le travail de Bulaevskii *et al.* [47] lorsque le libre parcours moyen est relativement grand. Ces deux travaux se limitent néanmoins à la première harmonique. Nous allons donc généraliser ces travaux pour inclure les effets associés à la seconde harmonique. Cela pourrait se révéler *a priori* intéressant puisque la limite que nous allons considérer est la limite dite des forts champs d'échange, pour laquelle l'effet paramagnétique est exalté. Nous nous posons donc la question de savoir si une jonction S/F/S dans la limite d'un fort champ d'échange et lorsque le ferromagnétique comporte un nombre limité d'impuretés peut faire un exemple de jonction  $\chi_0$ .

Très récemment, quelques études expérimentales ont pu atteindre ce régime dit des forts champs d'échange [52, 53], caractérisé également par un assez faible désordre. Ces expériences montrent que les premières oscillations de la relation courant-longueur de jonction vérifient assez bien la loi obtenue dans le cas balistique, mais qu'elle possède également un crossover vers la limite obtenue par Bergeret *et al.* [54]. On se pose donc également la question de savoir si un formalisme prenant en compte une partie des effets associés au cas balistique et une partie des effets associés au cas diffusif ne permettrait pas de résoudre ce crossover. La prise en compte de la seconde harmonique dans la limite des faibles désordres pourrait ainsi permettre de comprendre le crossover entre cas propre et cas sale.

Dans le formalisme d'Eilenberger, les impuretés sont modélisées par un terme de *self-energy*. Cela se comprend aisément puisque les corrélateurs, *i.e.* les fonctions de Green quasi-classiques, peuvent être vus comme des trajectoires que suivent les particules considérées entre deux points de l'espace réel. Or, une impureté fait interagir une trajectoire avec elle-même. Cela signifie mathématiquement que les solutions des équations d'Eilenberger doivent être calculées numériquement dans les problèmes généraux [132]. Toutefois, s'il y a beaucoup d'impuretés, cette auto-cohérence est brisée, et les fonctions quasi-classiques répondent à des équations de diffusion. On parle alors des équations d'Usadel

[56] qui correspondent, dans le cadre des jonctions S/F/S, à la limite  $h\tau \ll \hbar$ , c'est-à-dire lorsque le temps de vie entre deux collisions est très faible et que le champ d'échange n'est pas trop important. Dans le cas S/F/S, le domaine de validité des équations d'Eilenberger (2.10) correspond au régime  $h\tau \gg \hbar$ , bien adapté à notre cas d'un fort champ d'échange.

Ici, on reprend le traitement perturbatif [47] des équations d'Eilenberger en l'appliquant au cas S/F/S d'un fort champ d'échange et d'une jonction longue, ce qui permettra de traiter l'auto-cohérence du système d'Eilenberger assez simplement.

### 2.4.1 Impuretés et équations de Eilenberger

Dans la suite, on continuera de modéliser les supraconducteurs comme des systèmes propres. Seul le pont ferromagnétique contiendra une faible quantité d'impuretés. Pour prendre en compte une petite quantité d'impuretés dans la jonction ferromagnétique, on part des équations d'Eilenberger (2.10). Dans la limite d'un temps de collision très grand, on avait posé au paragraphe 2.3 :  $\tau^{-1} = 0$ , simplifiant considérablement ces équations, puisqu'on venait alors briser l'auto-cohérence due aux impuretés. Dans la limite d'un temps de collision grand, on peut néanmoins considérer ces termes auto-cohérents perturbativement. Par exemple, il est clair à partir des solutions (2.23) que les contributions  $\langle f \rangle$  et  $\langle f^+ \rangle$  vont être extrêmement faibles, puisque les fonctions  $f$  et  $f^+$  sont exponentiellement atténuées. Ainsi, dans une première approximation, on peut négliger toutes les moyennes angulaires pour les fonctions  $f$  et  $f^+$ . De son côté, la fonction  $g$  est une constante dans le ferromagnétique (cf. Éq.(2.23)). On s'attend donc à ce que la contribution  $\langle g \rangle$  dépende peu de la position au sein de la jonction. Faisant ces simplifications, on peut alors considérer le dernier terme moyenné,  $\langle g \rangle_\theta$ , comme une constante en première approximation et le système d'Eilenberger se simplifie sous la forme

$$\begin{cases} \hbar v_F \partial_x f + 2(\omega_n + \mathbf{i}h) f + \frac{1}{\tau} f \langle g \rangle_\theta = 0 \\ -\hbar v_F \partial_x f^+ + 2(\omega_n + \mathbf{i}h) f^+ + \frac{1}{\tau} f^+ \langle g \rangle_\theta = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

alors que l'équation pour  $g$  n'est pas modifiée. Les impuretés viennent donc, dans notre approximation de faible désordre, renormaliser la température, *i.e.* les fréquences de Matsubara, sous la forme  $\omega_n \rightarrow \omega_n + \langle g \rangle_\theta / 2\tau$ . Ce déplacement des fréquences de Matsubara, *i.e.* des énergies, est un mécanisme assez général issu de la série diagrammatique, tronquée au second ordre, d'un développement du type diffusion de Born sur les impuretés [130]. En utilisant la condition de normalisation  $g^2 + f f^+ = 1$ , on obtient pour les solutions constantes sous la forme (2.23) où  $\kappa_F$  est le vecteur d'onde dans le ferromagnétique, qui s'écrit maintenant

$$\kappa_F = 2 \frac{\omega_n + \mathbf{i}h + \langle g \rangle_\theta / 2\tau}{\hbar v_x} = 2\Sigma \frac{\omega_n + \mathbf{i}h + \langle g \rangle_\theta / 2\tau}{\hbar |v_x|} \quad (2.47)$$

en tenant compte du signe  $\Sigma$  de la vitesse électronique, comme résumé dans le tableau 2.2.

Pour évaluer la fonction quasi-classique normale  $g_{\omega_n}$  dans un ferromagnétique modérément sale, on réutilise donc l'expression (2.27) où le seul changement vient de la renormalisation des fréquences de Matsubara, donnée par l'expression (2.47). On obtient donc

explicitement

$$g_{\omega_n}(v_x, \chi, L) = \frac{\omega_n}{\Omega} + \frac{|\Delta|^2}{\Omega} \frac{\sin\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\Sigma L \Phi_\tau}{\hbar |v_x|}\right)}{\omega_n \sin\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\Sigma L \Phi_\tau}{\hbar |v_x|}\right) - \mathbf{i} \Sigma \Omega \cos\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\Sigma L \Phi_\tau}{\hbar |v_x|}\right)} \quad (2.48)$$

avec

$$\Phi_\tau = h - \mathbf{i} \left( \frac{\langle g \rangle_\theta}{2\tau} + \omega_n \right) \quad (2.49)$$

pour la fonction  $g$  d'une jonction S/F/S avec faible désordre dans la partie ferromagnétique.

Au paragraphe 2.3, on avait également postulé que le champ d'échange était suffisamment fort, ce qui permettait de calculer exactement la somme de Matsubara dans une expression du type (2.48). On pourrait reproduire ici le même argument, et l'on aurait alors  $h - \mathbf{i}(\langle g \rangle_\theta / 2\tau + \omega_n) \rightarrow h$  dans cette approximation. Il faudrait alors supposer que l'énergie typique des fréquences de Matsubara est faible en comparaison de l'énergie associée au champ d'échange, mais qu'elle est encore faible devant  $\langle g \rangle_\theta / 2\tau$ . Or cette hypothèse n'est plus du tout vérifiée dans notre approximation. On doit lui préférer la seule condition  $\tau h \gg \hbar$ , et calculer dans cette limite la fonction  $g_{\omega_n}$ .

## 2.4.2 Développement dans la limite d'un fort champ d'échange

Pour développer la fonction  $g_{\omega_n}$  obtenue dans l'expression (2.48), on va se placer dans le cas d'une jonction longue vérifiant :

$$L \gg \ell_e \gg \xi_F \gg 1 \Leftrightarrow \alpha \gg \tau h \gg 1 \quad (2.50)$$

qui est équivalent à la limite modérément sale sous fort champ d'échange :  $\tau h \gg \hbar \Rightarrow \ell_e / \xi_F \gg 1$ . On se place de plus dans la limite des jonctions longues  $\alpha \gg \tau h$ , comme on l'avait abondamment fait dans le cas des jonctions propres au cours de la section 2.3. Notons au passage que le cas  $\tau \omega_n \gg \tau h \gg 1$  ne se réalise pas puisque  $\omega_n / h \gg 1 \Rightarrow \xi_F / \xi_N \gg 1$  ce qui ne peut pas se réaliser expérimentalement. En effet, la longueur de cohérence  $\xi_N$  liée à l'effet de proximité S/N est toujours supérieure à la longueur  $\xi_F$  caractéristique de l'effet de proximité S/F. Dans toute la suite, on appelle, comme dans le cas balistique,  $\alpha = 2hL / \hbar v_F = 2L / \xi_F$  qui représente la longueur de la jonction. Plus exactement,  $\alpha$  représente le nombre d'oscillations du courant critique dans la jonction, multiplié par un facteur 2 qui est d'origine géométrique. En cela, on n'a pas besoin de définir une nouvelle longueur d'oscillation dans la limite d'un faible désordre, alors que l'on aurait été obligé de définir une nouvelle longueur dans le cas diffusif (voir [50] et table 2.1).

Lorsque l'on réécrit l'expression (2.48) en développant les sinus et cosinus, on voit apparaître naturellement toutes les longueurs précédemment présentées. De plus, en factorisant par le champ d'échange, ou par le paramètre  $\alpha$ , on voit apparaître le paramètre  $\tau h$  ou  $L / \ell_e$  qui doit être grand dans la limite considérée des faibles désordres et des forts champs d'échange. On développe alors en fonction du paramètre  $L / \ell_e$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} g_{\omega_n}(v_x > 0, \omega_n > 0) &= \frac{\omega_n}{\Omega} + \frac{|\Delta|^2}{\Omega} \frac{1 - X_{++}}{\omega_n (1 - X_{++}) + \Omega (1 + X_{++})} \\ &= 1 - 2|\Delta|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega_n - \Omega)^{k-1}}{(\omega_n + \Omega)^{k+1}} X_{++}^k \end{aligned} \quad (2.51)$$

avec  $X_{++} = e^{-2i\left(\frac{\chi}{2} + \frac{Lh}{\hbar|v_x|}\right)} e^{-\frac{2\langle g \rangle L}{2\hbar|v_x|\tau}} e^{-\frac{2|\omega|L}{\hbar|v_x|}}$  pour les projections des vitesses positives et avec

$$\begin{aligned} g_{\omega_n}(v_x < 0, \omega > 0) &= \frac{\omega_n}{\Omega} + \frac{|\Delta|^2}{\Omega} \frac{X_{-+} - 1}{\omega_n(X_{-+} - 1) - \Omega(1 + X_{-+})} \\ &= 1 - 2|\Delta|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega_n - \Omega)^{k-1}}{(\omega_n + \Omega)^{k+1}} X_{-+}^k \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec  $X_{-+} = e^{2i\left(\frac{\chi}{2} - \frac{Lh}{\hbar|v_x|}\right)} e^{-\frac{2\langle g \rangle L}{2\hbar|v_x|\tau}} e^{-\frac{2|\omega|L}{\hbar|v_x|}}$  pour les projections des vitesses négatives. Notons dès maintenant que la somme sur l'indice  $k$  portée jusqu'à l'infini n'a évidemment aucun intérêt, puisqu'on ne se servira que des premiers termes dans la suite. Toutefois, elle amène des notations commodes.

Sans se soucier pour l'instant du poids des moyennes angulaires  $\langle g \rangle$ , on fait la différence de ces deux expressions ayant en tête de la porter dans la définition du courant (2.15). Cela donne

$$\begin{aligned} \omega_n > 0 \Rightarrow g_{\omega_n}(v_x > 0) - g_{\omega_n}(v_x < 0) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4i|\Delta|^{2k} \sin k\chi}{(\omega_n + \Omega)^{2k}} e^{-\frac{2ikLh}{\hbar|v_x|}} e^{-\frac{2k\langle g \rangle L}{2\hbar|v_x|\tau}} e^{-\frac{2k\omega_n L}{\hbar|v_x|}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

où l'on a déjà tenu compte du signe de la vitesse, comme on le fait depuis le début de l'étude des jonctions S/F/S. En revanche, il faut maintenant spécifiquement regarder la dépendance des expressions obtenues en fonction du signe des fréquences de Matsubara. Cela n'ajoute toutefois qu'une complication formelle, comme on va le voir ci-dessous.

L'étape supplémentaire consiste à utiliser encore une fois la limite  $L/\ell_e \gg 1$ , ce qui permet de développer l'exponentielle correspondante dans l'expression précédente sous la forme :

$$e^{-\frac{2\langle g \rangle L}{2\hbar|v_x|\tau}} \approx e^{-\frac{2\langle g \rangle^{(0)} L}{2\hbar|v_x|\tau}} \left( 1 - \frac{2\langle g \rangle^{(1)} L}{2\hbar|v_x|\tau} \right) \quad \text{où } \langle g \rangle^{(0)} = \langle X_{++}^0 + X_{-+}^0 \rangle = 1 \quad (2.54)$$

pour la correction constante et

$$\langle g \rangle^{(1)} = -\frac{2|\Delta|^2}{(\omega + \Omega)^2} \langle X_{++}^1 + X_{-+}^1 \rangle_{\theta} = -\frac{2|\Delta|^2 \cos \chi}{(\omega + \Omega)^2} \left\langle e^{-\frac{2iLh}{\hbar|v_x|}} e^{-\frac{2L}{2\hbar|v_x|\tau}} e^{-\frac{2|\omega|L}{\hbar|v_x|}} \right\rangle_{\theta} \quad (2.55)$$

pour la première correction. Cela revient à poser  $\langle g \rangle = \langle g \rangle^{(0)} + \langle g \rangle^{(1)}$  avec  $\langle g \rangle^{(1)} \ll \langle g \rangle^{(0)}$ . La correction  $\langle g \rangle^{(1)}$  va donc donner, multipliée par  $\sin \chi$  venant de la première harmonique, une contribution à la seconde harmonique. Ainsi, trouver précisément le comportement de la seconde harmonique oblige à prendre en compte les corrections en impuretés de la première harmonique.

Avant de prendre la partie imaginaire de  $g_{\omega_n}(v_x > 0) - g_{\omega_n}(v_x < 0)$ , il nous faut rajouter la contribution des fréquences négatives. Tout calcul fait, on obtient :

$$\langle g \rangle_{\omega < 0}^{(0,1)} = -\left( \langle g \rangle_{\omega > 0}^{(0,1)} \right)^* \quad (2.56)$$

ce qui va simplement rajouter un facteur 2 dans l'expression du courant final. En tenant compte encore des deux contributions du champ d'échange, ce qui multiplie encore

l'expression précédente par le facteur 2, on obtient, en posant  $j_0^{(d)} = 2e\nu_0^{(d)}\pi k_B T$  :

$$\begin{aligned} \frac{j}{j_0^{(d)}} &= k_B T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^2 \sin \chi}{(\omega_n + \Omega)^2} \operatorname{Re} \left\langle e^{-\frac{z}{\cos \theta}} \cos \theta \right\rangle_{\theta} - \\ &- k_B T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^4 \sin 2\chi}{(\omega_n + \Omega)^4} \left[ \operatorname{Re} \left\langle e^{-\frac{2z}{\cos \theta}} \cos \theta \right\rangle_{\theta} - \frac{\alpha}{2\tau h} \operatorname{Re} \left\{ \left\langle e^{-\frac{z}{\cos \theta}} \right\rangle_{\theta}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec le paramètre

$$z = \frac{\alpha}{2\tau h} (1 + 2i\tau h + 2\tau\omega_n) = \frac{L}{\ell_e} + i\alpha + \frac{\alpha h}{\omega_n} \quad (2.58)$$

pour l'expression de la densité de courant à toutes les dimensions<sup>8</sup> pour les deux premières harmoniques et pour une jonction S/F/S longue possédant un fort champ d'échange. L'expression (2.57) contient donc distinctement les deux harmoniques, ainsi que la correction en impuretés de la première harmonique, qui donne une contribution à la seconde harmonique proportionnelle au paramètre  $\alpha/2\tau h$  considéré comme grand dans la limite d'une jonction longue. On peut se demander qu'elle est la validité de notre traitement approximatif. En effet, le développement ici effectué à tout l'air de se faire en puissance du terme  $\alpha/2\tau h \gg 1$ , ce qui ne ressemble pas (du tout) à un développement perturbatif. On verra au cours du paragraphe suivant que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, les deux termes participant à la seconde harmonique ont le même poids dans la limite  $\alpha/2\tau h \gg 1$ . Cela revient encore une fois à dire que l'étude précise de la seconde harmonique dans notre limite ne peut se passer de la correction en impureté venant de la première harmonique.

On passe maintenant à l'étude de l'expression générale (2.57) en fonction de la dimension de la jonction.

### 2.4.3 Relation courant-phase et phase $\chi_0$

Commençons notre étude à toutes les dimensions par le cas unidimensionnel. Dans ce cas, l'expression de  $\langle g \rangle^{(1)}$  vaut simplement :

$$\langle g \rangle^{(1)}(x, v_x, \omega_n) = -\frac{2 |\Delta|^2 \cos \chi}{(\omega + \Omega)^2} e^{-\frac{\alpha}{2\tau h}(1+2\tau\omega_n+2i\tau h)} \quad (2.59)$$

et on aura donc, en négligeant la correction en température  $\omega_n/h \ll 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{j^{(1)}(\alpha, \chi)}{j_0^{(1)}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^2 \sin \chi}{(\omega_n + \Omega)^2} e^{-\frac{\alpha}{2\tau h}} \cos \alpha - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^4 \sin 2\chi}{(\omega_n + \Omega)^4} e^{-\frac{2\alpha}{2\tau h}} \left[ \frac{\alpha}{2\tau h} \cos \alpha + \cos 2\alpha \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

pour la relation courant-phase. Ainsi, contrairement au cas propre, le cas modérément sale comporte une décroissance exponentielle d'autant plus importante que l'harmonique en regard est grande. Même dans la limite d'un faible désordre, on retrouve donc les caractéristiques de la relation courant-phase d'un système sale [50]. En faisant le développement aux grands  $\alpha$ , on est surtout intéressé par le signe relatif de la seconde harmonique à la transition  $(0 - \pi)$ . Dans ce cas, lorsque la première harmonique s'annule :

---

<sup>8</sup>Encore une fois, l'expression pour la contribution monocanal ne doit plus avoir de dépendance en  $\theta = 0$  ou  $\pi$ , donnant une sommation simple sur les angles.

$\cos \alpha_c = 0 \Rightarrow \alpha_c \equiv \pi/2 (\pi)$ , la correction en impuretés ne participe pas, et l'on retrouve exactement le même comportement en signe des harmoniques que dans le cas balistique : la seconde harmonique  $-\cos 2\alpha_c = 1$  est toujours positive, induisant une transition  $(0 - \pi)$  discontinue, et une absence de phase  $\chi_0$ .

Dans le cas d'une jonction bidimensionnelle, la relation courant-phase s'exprime comme :

$$\frac{j^{(2)}(\alpha, \chi)}{j_0^{(2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{16 |\Delta|^2 \sin \chi}{(\omega_n + \Omega)^2} F_2(z) + \frac{16 |\Delta|^4 \sin 2\chi}{(\omega_n + \Omega)^4} \left( \frac{\alpha}{2\tau h} F_1^2(z) - F_2(2z) \right) \right] \quad (2.61)$$

avec les fonctions

$$F_n(z) = \int_1^{\infty} e^{-zy} \frac{dy}{\pi y^n \sqrt{y^2 - 1}}. \quad (2.62)$$

qui définissent les harmoniques. Cette dernière forme, bien que très générale, ne doit pas nous faire oublier la limite des grandes jonctions que l'on avait prise comme hypothèse de départ pour évaluer l'auto-cohérence des équations d'Eilenberger. Cette approximation correspond à la limite des grands  $\alpha$ , dans laquelle on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{j^{(2)}}{j_0^{(2)}} = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^2 \sin \chi}{(\omega_n + \Omega)^2} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-2iL/\xi_F}}{L/\ell_e + 2iL/\xi_F} \right) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^4 \sin 2\chi}{(\omega_n + \Omega)^4} \operatorname{Re} \left( \frac{(L/\ell_e - 2iL/\xi_F)e^{-4iL/\xi_F}}{(L/\ell_e + 2iL/\xi_F)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

pour la relation courant-phase d'une jonction bidimensionnelle longue. La décroissance dans la limite des jonctions longues est alors le produit d'une loi de puissance et d'une décroissance exponentielle, mais réalisée sur une longueur plus grande que dans le cas des jonctions diffusives. Bien sûr, la loi de puissance ne joue pas de rôle face à la décroissance exponentielle, et n'est que la mémoire du cas balistique que le système conserve dans cette nouvelle limite.

Dans le cas 3D, on aura la relation courant-phase sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{j}{j_0^{(3)}} = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^2 \sin \chi}{(\omega_n + \Omega)^2} \operatorname{Re} \left\{ E_3 \left( \alpha \frac{1 + 2\tau\omega_n}{2\tau h} + i\alpha \right) \right\} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 |\Delta|^4 \sin 2\chi}{(\omega_n + \Omega)^4} \times \\ & \times \left[ \operatorname{Re} \left\{ E_3 \left( 2\alpha \frac{1 + 2\tau\omega_n}{2\tau h} + 2i\alpha \right) \right\} - \frac{\alpha}{2\tau h} \operatorname{Re} \left\{ E_2 \left( \alpha \frac{1 + 2\tau\omega_n}{2\tau h} + i\alpha \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

où l'on a introduit les fonctions exponentielles intégrales :

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt ; \operatorname{Re}\{z\} > 0 \quad (2.65)$$

pour décrire les harmoniques.

Dans la limite  $\alpha \rightarrow \infty$ , en se servant de la formule  $E_n(z) = e^{-z}/z - nE_{n+1}(z)/z$ , où on néglige la contribution en  $E_{n+1}(z)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{E_3(m(\beta + i\alpha))\} &= \frac{e^{-m\beta}}{m(\beta^2 + \alpha^2)} (\beta \cos m\alpha - \alpha \sin m\alpha) \\ \operatorname{Re}\{(E_2(\beta + i\alpha))^2\} &= \frac{e^{-2\beta}}{(\beta^2 + \alpha^2)^2} ((\beta^2 - \alpha^2) \cos 2\alpha - 2\alpha\beta \sin 2\alpha) \end{aligned} \quad (2.66)$$



avec  $\beta = \alpha(1 + 2\tau\omega_n)/2\tau h$ . On retrouve donc encore une fois la marque du cas diffusif avec sa décroissance exponentielle et la marque de la limite propre avec la décroissance en loi de puissance<sup>9</sup>. Notons, au vu de l'expression approximative de  $E_n(z) \approx e^{-z}/z$ , que les deux termes  $E_3(2z)$  et  $(\alpha/2\tau h)E_2^2(z)$  ont le même poids  $e^{-2z}/z$ , puisqu'on peut poser  $z \approx 2\tau h/\alpha$ . Encore une fois, sans la correction en impureté venant de la première harmonique, l'étude de la seconde harmonique serait fautive dans ce régime.

Si l'on ne néglige rien, on remarque que la première harmonique disparaît pour  $\alpha_c = \arctan \tilde{\beta} + n\pi$  avec  $\tilde{\beta} = \beta/\alpha = (2\tau h)^{-1} + \omega_n/h$ . De la même façon, la seconde harmonique s'écrira, en oubliant les préfacteurs :

$$\frac{\tau h \tilde{\beta} \left( \tilde{\beta}^2 + 1 \right)^2 - \left( \tilde{\beta}^2 - 1 \right)^2 - 4\tilde{\beta}^2}{2\tau h \left( \tilde{\beta}^2 + 1 \right)^2} \underset{\tilde{\beta} \gg 1}{>} 0 \quad (2.67)$$

dont le terme de plus haut degré est clairement positif, donnant une contribution positive de la seconde harmonique à la transition  $(0 - \pi)$ , ce qui signifie que cette dernière est discontinue. On n'obtient donc pas de jonction  $\chi_0$ , même dans le cas des forts champs d'échange.

## 2.5 Conclusion

On a donc étudié dans cette seconde partie le cas des jonctions S/F/S dans la limite balistique (§ 2.3), et quasi-balistique (§ 2.4), où les paires de Cooper ne subissent pas ou peu d'influence des impuretés.

Si la limite balistique avait été très étudiée par le passé, nous avons tout de même pu observer de nouveaux effets liés à la présence d'une forte anharmonicité dans la relation courant-phase. Le plus surprenant de ces effets est la transition  $(0 - \pi)$  en température dans les cas bidimensionnel et tridimensionnel. Cette transition en température était généralement supposée impossible à réaliser dans la limite balistique au sein de la communauté S/F/S. Pourtant, la superposition d'un grand nombre de différents canaux indépendants dans la relation courant-phase induit ce genre de transition, comme on a pu le démontrer au paragraphe 2.3.3. Notre étude a par la suite inspiré une étude numérique [153] qui relaxe l'hypothèse d'un fort champ d'échange faite dans l'expression (2.28). Cette étude numérique montre que la plage d'épaisseur pour laquelle la transition en température est observable s'élargit considérablement lorsque le champ d'échange diminue. En effet, l'approximation (2.28) postule un champ d'échange fort, permettant de résoudre analytiquement la sommation sur les fréquences de Matsubara. Dans leur étude [153], Zitic *et al.* prennent plutôt la limite d'un faible champ d'échange dans le ferromagnétique ( $h \sim \Delta$ ), augmentant la plage des longueurs de jonction pour lesquelles la transition  $(0 - \pi)$  est possible. Ainsi, lorsque la compétition entre les ordres supraconducteur et magnétique n'est pas trop importante, il est tout à fait envisageable que cette transition soit observée expérimentalement à l'avenir.

Au paragraphe 2.3, nous avons également étudié en détail le comportement d'une jonction composée d'un film ferromagnétique. Nous avons ainsi apporté une critique aux expériences de Keizer *et al.* [127] qui pensent avoir observé pour la première fois un supercourant d'origine triplet. Les principaux arguments avancés sont la très longue portée de

---

<sup>9</sup>À la limite  $\omega_n/h \ll 1$ , on retrouve  $\beta = \alpha$  et la décroissance est bien de la forme  $\alpha^{-1}$  comme obtenu dans le cas tridimensionnel ballistique.

ces supercourants et l'utilisation d'un composé demi-métallique (*half-metal*), qui exclu les courants d'origine singulet. Or il se trouve que *i)* les propriétés de surfaces de l'échantillon utilisé dans [127] rendent envisageables la présence d'une surface ferromagnétique non-entièrement polarisée en spin, créant une jonction S/F/S bidimensionnelle et *ii)* les jonctions S/F/S balistiques présentent à toutes les dimensions des effets de proximité à très longue portée, uniquement amortis par des lois de puissances [156]. Notamment les jonctions bidimensionnelles, pour lesquelles la loi de puissance est proportionnelle à  $L^{-1/2}$ . Ainsi, dans le schéma de l'expérience de Keizer *et al.* [127], il se pourrait fort bien que toute ou partie du supercourant se propage à la surface de l'échantillon, créant non pas des supercourants triplets volumiques, mais de simples courants singulets surfaciques.

On a également étudié le comportement en température du courant critique. Celui-ci possède la signature d'absence d'annulation à la transition ( $0 - \pi$ ) induite en température, ce qui ne peut être compris que dans la limite très propre (§ 2.3.3).

Enfin, on a brièvement discuté la possibilité d'obtenir une phase  $\chi_0$  arbitraire dans les systèmes S/F/S balistiques. Si ce type de jonction ouvre théoriquement de grandes possibilités en terme de systèmes cohérents, nous avons constaté qu'elles n'existent pas dans le cas propre.

La deuxième partie de l'étude des systèmes S/F/S était dévolue aux jonctions modérément désordonnées. Dans cette limite encore peu étudiée théoriquement [47, 54], mais néanmoins atteinte expérimentalement [52, 53], il est possible de réaliser des régimes de fort champ d'échange. Nous nous sommes concentrés sur la possibilité d'obtenir une jonction  $\chi_0$  dans de tels systèmes. Nous avons ainsi pu mettre en évidence que de telle jonctions ne sont pas possibles, même dans cette limite de fort effet paramagnétique.

Toutefois, nous avons montré que, même dans le cas de faible désordre, le courant critique était détruit exponentiellement en fonction de la longueur de la jonction. Ainsi, même dans le cas faiblement désordonné, le courant critique retrouve une atténuation similaire au cas diffusif. De ce fait, la seconde harmonique est détruite beaucoup plus rapidement que la première, et devient donc très rapidement indétectable.

Enfin, le crossover entre les limites balistiques à faible longueur de jonction vers le cas modérément désordonné pour de plus longues jonctions observé dans les expériences [52, 53] n'a pas pu être observé dans notre étude. Il faut sans doute envisager des études numériques plus fines pour observer cette transition, en relaxant par exemple l'hypothèse d'une jonction longue  $L \gg \ell_e$  faite ici.

Quant aux jonctions  $\chi_0$ , on sait maintenant qu'il faut soit de nouvelles interactions au sein du pont ferromagnétique, comme on le verra au cours de la dernière partie de ce manuscrit, soit envisager de nouvelles géométries de jonction. Citons par exemple le cas des jonctions double  $0 + \pi$  au sein d'une même barrière [157], qui pourraient peut être servir à créer ces phases  $\chi_0$ . Ou encore les systèmes associant plusieurs supraconducteurs de paramètre d'ordre en onde  $d$ , qui présentent des phases  $\pi/2$  en plus des phases  $0$  et  $\pi$  [158].

# Chapitre 3

## Supraconductivité sans centre d'inversion et couplage spin-orbite

### 3.1 Effet spin-orbite et supraconductivité

À partir du hamiltonien de Dirac qui décrit le comportement d'un électron dans la limite relativiste [44, 129], il est possible de décrire le comportement électronique dans la limite classique à l'aide de la transformation dite de Foldy et Wouthuyusen [159]. Cette transformation permet de retrouver le hamiltonien de Schrödinger d'une particule libre, mais prédit également l'existence d'un facteur de Landé  $g = 2$  pour l'électron. Ainsi, la correction au premier ordre en série du paramètre relativiste  $mc^2$  redonne le hamiltonien dit de Pauli, qui rajoute l'interaction Zeeman au hamiltonien de la particule libre de Schrödinger. La correction au second ordre rajoute quant à elle un terme dit de couplage spin-orbite, qui couple l'impulsion et le spin électronique sous la forme [129] :

$$H_{\text{spin-orbite}}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{4(mc)^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla V \times \mathbf{k}) \quad (3.1)$$

où  $\nabla V$  est le gradient du potentiel électrique. Dans les solides,  $\nabla V$  est le gradient du potentiel électrostatique cristallin. Utilisant l'expression (3.1), Elliott démontre que ces termes spin-orbite sont importants pour les systèmes sans centre d'inversion [160, 161]. Dans ce cas, l'énergie de l'électron d'impulsion positive sera différente de l'énergie de l'électron d'impulsion négative :  $E(\mathbf{k}) \neq E(-\mathbf{k})$ , puisque le système n'est plus tenu de préserver la symétrie associée à la parité  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ . La dispersion de bande peut alors contenir un terme linéaire en impulsion. Or, le seul terme du développement non-relativiste de l'équation de Dirac qui soit linéaire en impulsion est justement le terme spin-orbite<sup>1</sup>.

Le hamiltonien à un corps décrivant l'état sans centre d'inversion doit être réécrit, en seconde quantification, sous la forme générale [164] :

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}, \alpha, \beta} \left[ \xi(\mathbf{k}) \delta_{\alpha\beta} + (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta} \right] \hat{a}_{\alpha}^+(\mathbf{k}) \hat{a}_{\beta}(\mathbf{k}) \quad (3.2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les indices de spin de l'électron d'impulsion  $\mathbf{k}$  créé par l'opérateur  $\hat{a}_{\alpha}^+(\mathbf{k})$  et détruit par l'opérateur  $\hat{a}_{\alpha}(\mathbf{k})$  et où  $\xi(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu$  est la partie indépendante du spin

---

<sup>1</sup>Attention, il est dit ici que l'effet spin-orbite était important lorsque le composé étudié ne contient pas de centre d'inversion. Toutefois, l'absence de centre d'inversion n'est pas (du tout) une condition nécessaire à la présence d'un terme spin-orbite. On l'utilise ici comme une condition suffisante. Voir [162, 163] pour plus de détails.

de l'énergie relativement au potentiel chimique  $\mu$ . Sous cette forme générale, le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$  prend en compte toutes les formes d'effet spin-orbite possibles dans n'importe quel matériau [163]. Les deux formes les plus courantes d'effet spin-orbite sont toutefois l'interaction Dresselhaus [165] et l'interaction Rashba [166]. Dans les systèmes sans centre d'inversion, les termes vérifiant la propriété  $E(\mathbf{k}) \neq E(-\mathbf{k})$  sont nécessairement en puissances impaires de l'impulsion  $\mathbf{k}$ . À la suite d'Elliott, Dresselhaus discute les conséquences, en terme de structure de bande, de l'inclusion de termes spin-orbite de façon générale. Plus tard, Rashba étudiera la modification du spectre énergétique en présence d'un terme spin-orbite linéaire. Il s'avère que l'interaction Rashba est essentielle à la considération d'un système bi-dimensionnel, où elle permet d'expliquer le comportement sous champ magnétique en absence de symétrie d'inversion liée à la surface de l'échantillon. Les autres types d'interactions considérées par Dresselhaus sont quant à elles pertinentes dans le cas d'une absence de centre d'inversion en volume, comme dans les structures zinc-blende de quelques semi-conducteurs dopés [165, 163]. Ayant en vue la description de systèmes supraconducteurs bidimensionnels, on se limite dans la suite à la description de la modification des propriétés supraconductrices induites par un terme d'interaction Rashba, et on néglige les interactions de type Dresselhaus.

Dans le cas d'un effet spin-orbite de type Rashba, on peut réécrire le terme inhomogène  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$  sous la forme :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) = \hbar \mathbf{v}_{\text{s.o.}} \times \mathbf{k} = \hbar v_{\text{s.o.}} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire porté par la direction du gradient d'assymétrie du potentiel cristallin, que l'on prend égal à une constante  $v_{\text{s.o.}}$ , *i.e.*  $\nabla V \sim v_{\text{s.o.}} \mathbf{n}$  depuis l'expression (3.1). Dans le cas d'un système bi-dimensionnel, ce vecteur  $\mathbf{n}$  sera perpendiculaire à la surface du système. Dans ce cas, on aura  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{k})$ . L'étude de ce type d'interaction et de son influence sur l'état supraconducteur commence réellement avec les travaux de Mineev et Samokhin [167] portant sur la symétrie du paramètre d'ordre dans les alliages avec et sans centre d'inversion. Depuis le début des années 2000, ce type de système connaît un renouveau avec la découverte d'effets supraconducteurs dans des composés sans centre d'inversion, comme le CePt<sub>3</sub>Si [168].

Avant d'inclure l'effet paramagnétique aux systèmes sans centre d'inversion, on discute les propriétés des systèmes présentant une interaction Rashba en terme de théorie microscopique. La principale difficulté rencontrée théoriquement pour traiter les problèmes sans centre d'inversion est justement l'antisymétrie du terme  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$  vis-à-vis de l'opération de parité  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ . Or il se trouve que les fonctions de Green de la supraconductivité associent les deux spectres énergétiques  $E(\mathbf{k})$  et  $E(-\mathbf{k})$  des deux électrons subissant l'appariement de Cooper<sup>2</sup>. Il était donc impossible de simplifier confortablement les solutions des équations de Gor'kov. En 2001, Gor'kov et Rashba redécouvre de façon indépendante un travail plus ancien d'Edelstein [169, 170] permettant de traiter ce genre d'interactions antisymétriques en  $\mathbf{k}$  [171]. Leur idée est simple : le hamiltonien  $H_0$  est antisymétrique en  $\mathbf{k}$  tant que  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$  reste sous la forme (3.3). Mais en diagonalisant  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$ , on obtient un spectre d'énergie sous la forme :

$$\xi_{\pm}(\mathbf{k}) = \xi(\mathbf{k}) \pm \hbar v_{\text{s.o.}} |\mathbf{k}| \quad (3.4)$$

qui vérifie alors  $\xi_{\pm}(\mathbf{k}) = \xi_{\pm}(-\mathbf{k})$  et reste symétrique. Ce spectre est tracé sur la figure 3.1. L'indice  $\pm$  différencie alors les deux sous-bandes de spins. Ainsi, on se retrouve après

---

<sup>2</sup>Ce couplage des deux spectres  $E(\mathbf{k})$  et  $E(-\mathbf{k})$  est la signature microscopique du couplage électron-trou de la supraconductivité.

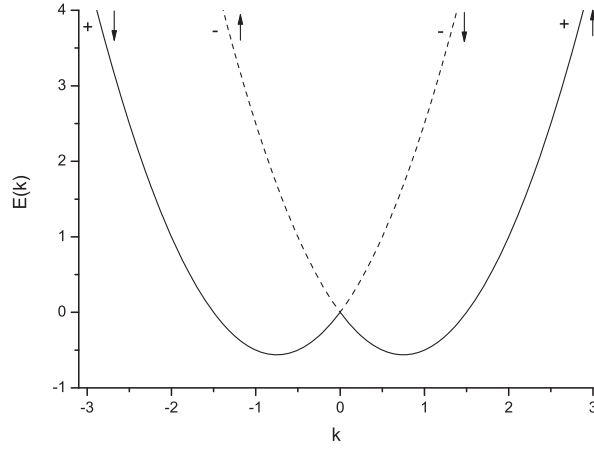


FIG. 3.1: Structure de bande d'un système d'électrons libres sur lesquels agit une interaction spin-orbite de type Rashba (Éq.(3.3)). Les deux paraboles  $\downarrow$  et  $\uparrow$  représentées sur cette figure sont les deux bandes de spin, dont la dégénérescence est levée du fait de l'interaction Rashba. Après diagonalisation (Éq.(3.4)), le spectre énergétique se compose de deux sous-bandes indicées  $+$  et  $-$  se coupant en  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  (bande pointillé et bande en trait plein). Ainsi, chaque sous-bande ne représente plus qu'une seule projection de spin. De plus, tant que le niveau de Fermi est suffisamment élevé, non seulement les surface de Fermi correspondantes seront de simples cercles, mais on peut également négliger les mécanismes inter-bandes.

diagonalisation avec un modèle de supraconductivité à deux-bandes. Cette structure à deux bandes impose normalement de considérer les couplages électroniques intra- et inter-bandes, *i.e.* les interactions de Cooper entre deux électrons au sein d'une même sous-bande ou entre deux sous-bandes. Toutefois, pour des raisons de symétrie<sup>3</sup>, les termes interbandes s'annulent par la transformation diagonalisant le hamiltonien à un corps. Gor'kov et Rashba obtiennent ainsi [171] :

$$g_\lambda(\mathbf{k}, \omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_\lambda(\mathbf{k})}{\omega_n^2 + \xi_\lambda^2(\mathbf{k}) + |\Delta|^2} \text{ et } f_\lambda^+(-\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{\Delta^*(\mathbf{k})}{\omega_n^2 + \xi_\lambda^2(\mathbf{k}) + |\Delta|^2} \quad (3.5)$$

, *i.e.* exactement les mêmes fonctions que dans le cas sans effet spin-orbite [130]. La principale différence avec le cas BCS vient de la définition du spectre d'énergie  $\xi_\lambda$  qui dépend explicitement de la bande considérée. On aura alors  $\xi_\lambda(\mathbf{k}) = v_F(p - p_\lambda)$  où  $p_\lambda = (1 + \lambda v_{s.o.}/v_F)p_F$  comme redéfinition de la linéarisation de la structure de bande pour de grandes valeurs de l'énergie de Fermi<sup>4</sup>. Dans les notations de Gor'kov et Rashba [171],  $g_\lambda$  et  $f_\lambda^+$  sont, comme attendu, les composantes intra-bande, *i.e.* diagonales en indice de spin, des fonctions plus conventionnelles  $G_{\alpha\beta}$  et  $F_{\alpha\beta}^+$ .

Pour l'instant, remarquons simplement que la diagonalisation entraîne quelques subtilités qu'il convient de discuter. Ainsi, en diagonalisant, on a fait subir aux opérateurs

<sup>3</sup>Explicitement, c'est parce que l'interaction de spin est impaire :  $\gamma(\mathbf{k}) = -\gamma(-\mathbf{k})$ , que le couplage interbande disparaît. Il faut également postuler une interaction de Cooper liant deux électrons symétriques par renversement temporel l'un de l'autre (hypothèse BCS) pour que le terme de couplage interbande disparaisse (voir [172]).

<sup>4</sup>Dans le cas BCS, on aurait obtenu les mêmes expressions de  $g$  et  $f^+$  avec  $\xi(\mathbf{k}) = v_F(p - p_F)$ , *i.e.* une dispersion linéaire indépendante du spin [130].

de création et d'annihilation la transformation unitaire suivante

$$\begin{cases} \hat{a}_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_\beta P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \hat{c}_\beta(\mathbf{k}) \\ \hat{a}_\alpha^+(\mathbf{k}) = \sum_\beta \hat{c}_\beta^+(\mathbf{k}) P_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}) \end{cases} \quad (3.6)$$

où la matrice de passage  $\hat{P}$  s'écrit :

$$\hat{P}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_x(\mathbf{k}) - \mathbf{i}\gamma_y(\mathbf{k})}{|\gamma(\mathbf{k})|} & \frac{-\gamma_x(\mathbf{k}) + \mathbf{i}\gamma_y(\mathbf{k})}{|\gamma(\mathbf{k})|} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\mathbf{i}\varphi(\mathbf{k})} & -e^{-\mathbf{i}\varphi(\mathbf{k})} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

et dépend donc de l'impulsion. On a pris ici le cas d'un système bidimensionnel, pour lequel  $\gamma_z = 0$ , *i.e.* on a supposé que le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  était porté par l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface supraconductrice. Cette dépendance en impulsion de la transformation a deux conséquences importantes.

La première conséquence est la présence d'un facteur de phase dans la définition du gap supraconducteur, qui s'écrit alors [171] :

$$\Delta_\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{U}_0}{2} e^{\mathbf{i}\varphi(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{q}, \mu} e^{-\mathbf{i}\varphi(-\mathbf{q})} f_\mu(\mathbf{q}, 0^+) = e^{\mathbf{i}\varphi(\mathbf{k})} \Delta_0 \quad (3.8)$$

dans l'hypothèse d'une interaction  $\tilde{U}_0$  ponctuelle entre les électrons. Le facteur de phase  $e^{\mathbf{i}\varphi(\mathbf{k})}$  est une conséquence directe des propriétés de renversement temporel, et est intrinsèquement lié à l'absence de centre d'inversion<sup>5</sup> [173]. On peut également voir ce facteur de phase comme un facteur purement géométrique, puisque  $\varphi(\mathbf{k})$  est simplement l'angle que fait le vecteur  $\mathbf{k}$  avec l'axe  $x$ . Toutefois, ce facteur de phase est absent des propriétés en volume, puisqu'elles ne font intervenir que  $|\Delta_\epsilon(\mathbf{p})|^2$ . En revanche, ce facteur peut introduire des modifications des effets de proximité. On reviendra donc sur ce facteur de phase au cours de la prochaine section.

La seconde conséquence est plus importante en terme d'effet de supraconductivité en volume, puisqu'elle consiste en la superposition des états singulet et triplet de façon intrinsèque dans le supraconducteur. En effet, la diagonalisation (3.6) ne doit pas nous faire oublier que les nouvelles fonctions de Green ne sont que des reliquats des vraies fonctions, qui s'écrivent à leur tour comme une superposition des fonctions de Green diagonales  $g_\lambda$  et  $f_\lambda^+$  en indice de spin. Ainsi, les anciennes fonctions de Green avant diagonalisation  $G_{\alpha\beta}$  s'écrivent [171] :

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) = \sum_\lambda P_{\alpha\lambda}^+(\mathbf{k}) g_\lambda(\mathbf{k}, \omega_n) P_{\lambda\beta}(\mathbf{k}) \quad (3.9)$$

en fonction des nouvelles fonctions de Green  $g_\lambda$  diagonales en spin. Or, les anciennes fonctions de Green sont maintenant une superposition des composantes singulet et triplet.

Ce résultat est très important pour la supraconductivité en général : l'interaction Rashba mixe les composantes singulet et triplet du paramètre d'ordre. Cela vient encore une fois du mélange de spin induit par l'effet spin-orbite. Parce que le spin n'est plus un bon nombre quantique, on est obligé de décrire l'état supraconducteur sous la forme

---

<sup>5</sup>Dans le cas BCS singulet, on aurait  $\Delta = \tilde{U}_0 \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}, 0^+)$  [130].

d'une superposition de toutes les projections de spin, incluant les effets singulet  $S = 0$  et triplet  $S = 1$ . Toutefois, comme il n'y a qu'une composante de paramètre d'ordre, *i.e.* que les interactions interbande n'existent pas dans les hypothèse BCS, seule les fonctions de corrélations  $F$  et  $F^+$  seront composées de termes singulet et triplet. Le paramètre d'ordre sera uniquement de symétrie singulet [171, 172, 174].

Or, l'interaction Rashba existe dès qu'un composé ne vérifie plus la symétrie de parité. Il en va ainsi des composés sans centre d'inversion en volume, mais également des systèmes bidimensionnels. De plus, même si les composés tridimensionnel et avec centre d'inversion n'ont *a priori* pas d'effet spin-orbite en volume, il peut exister une fine épaisseur à proximité de leur surface au sein de laquelle l'interaction Rashba n'est plus négligeable. Au sein de cette couche de surface, le mélange des composantes singulet-triplet existe donc également [174].

Passons maintenant au cas où on ajoute une interaction Zeeman à l'interaction Rashba précédemment discutée. Dans ce cas, on peut conserver l'expression (3.2) pour le hamiltonien des particules indépendantes, mais on doit cette fois prendre  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$  sous la forme :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) = \hbar v_{s.o.} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) + \mathbf{h} \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{h}$  est le vecteur de champ d'échange qui modélise l'aimantation du matériau considéré. Dans des systèmes sans centre d'inversion il n'est pas rare que l'aimantation dépende fortement de la position, ce qui donne lieu à des aimantations chirales par exemple [11]. Dans le cas d'une telle aimantation, on doit prendre explicitement en compte la dépendance en vecteur d'onde du champ d'échange  $\mathbf{h}(\mathbf{k})$ . Ici, on se limitera à un champ d'échange constant. Notons toutefois que même si  $\mathbf{h}$  ne dépend pas de la position, on aura toujours  $|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})| \neq |\boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{k})|$  du simple fait de la présence d'une aimantation dans le composé sans centre d'inversion. Il y a donc explicitement brisure de la symétrie temporelle dans l'expression (3.10).

Toutefois, on peut toujours diagonaliser  $H_0$  et on obtient le spectre

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}) &= \xi(\mathbf{k}) \pm |\hbar v_{s.o.} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) + \mathbf{h}| \\ &= \xi(\mathbf{k}) \pm \sqrt{(\hbar v_{s.o.} k)^2 + h^2 + 2\hbar v_{s.o.} h k \sin(\theta_{\mathbf{h}} - \theta_{\mathbf{k}})} \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec encore une fois une structure de double sous-bandes en spin. On a considéré ici un modèle bi-dimensionnel avec  $\mathbf{h} = (h \cos \theta_{\mathbf{h}}, h \sin \theta_{\mathbf{h}})$  et  $\mathbf{k} = (k \cos \theta_{\mathbf{k}}, k \sin \theta_{\mathbf{k}})$  tous les deux pris dans le plan  $(xOy)$ . La plus grosse différence vient maintenant du fait qu'il n'y a plus un seul mais deux points de contacts en  $\gamma(k) = 0$ , qui se situeront aux points de module  $k = h/\hbar v_{s.o.}$  et d'angle  $\theta_{\mathbf{k}} = \theta_{\mathbf{h}} \pm \pi/2$ , voir Fig.3.2.

Dans ce cas, la diagonalisation préserve la relation (3.7) avec le nouveau facteur de phase :

$$\varphi(\mathbf{k}) = \arctan \frac{\gamma_y(\mathbf{k})}{\gamma_x(\mathbf{k})} = \arctan \frac{h \sin \theta_{\mathbf{h}} + \hbar v_{s.o.} k \cos \theta_{\mathbf{k}}}{h \cos \theta_{\mathbf{h}} - \hbar v_{s.o.} k \sin \theta_{\mathbf{k}}} \quad (3.12)$$

qui dépend maintenant non-seulement de l'impulsion, mais également de l'orientation du champ d'échange. Remarquons encore une fois que ce facteur de phase est d'origine purement géométrique, puisqu'il est donné par l'angle que fait le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$  avec l'axe des  $x$ . D'ailleurs, il est facile de vérifier que ce facteur de phase sera toujours d'origine

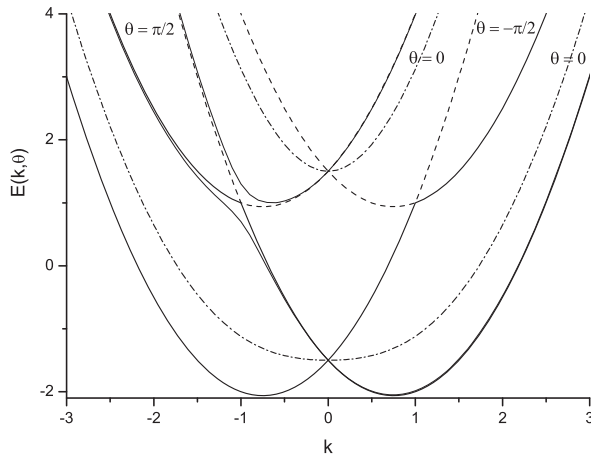


FIG. 3.2: Structure de bande d'un système d'électrons libres sur lesquels agit une interaction spin-orbite de type Rashba ainsi qu'une interaction de type Zeeman (Éq.(3.10)). La structure de bande dépend maintenant de deux paramètres : l'impulsion  $k$  et l'angle relatif  $\theta = \theta_{\mathbf{h}} - \theta_{\mathbf{k}}$  entre le champ d'échange  $\mathbf{h}$  (supposé être appliqué dans le plan supraconducteur) et le vecteur impulsion  $\mathbf{k}$  (Éq.(3.11)). Il y aura alors deux points de contacts entre les deux sous-bandes diagonales (lignes tiret-point) en spin : aux points de module  $k = h/\hbar v_{s.o.}$  et d'angle  $\theta = \pm\pi/2$ . Les angles  $\theta = 0$  et  $\theta = \pm\pi/2$  sont indiqués en regard des sous-bandes respectives. Dès que l'on s'écarte de ces deux points, les sous-bandes s'évitent, comme on peut le voir sur les courbes dessinées à proximité de ces deux points (lignes en trait plein et pointillé).

géométrique puisque l'expression de  $\varphi(\mathbf{k})$  vient simplement de ce que l'on a réécrit le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})$  sous la forme :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \text{Re} \{ |\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})| e^{i\varphi(\mathbf{k})} \} \\ \text{Im} \{ |\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k})| e^{i\varphi(\mathbf{k})} \} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

avec la définition (3.12) pour l'angle.

Dans ce cas également, le mixage des composantes singulet et triplet du gap supraconducteur est également prédit, puisque la relation (3.9) est très générale. Dès que l'on a une diagonalisation non-triviale<sup>6</sup> du hamiltonien des particules indépendantes, on s'attend en effet à retrouver ce comportement associant état singulet et état triplet. De plus, la phase portée par le gap supraconducteur (3.8) dépend maintenant explicitement de l'angle relatif entre le champ d'échange et l'impulsion.

On va illustrer de façon plus pratique pour les calculs d'effet de proximité ce dernier résultat à l'aide d'une fonctionnelle Ginzburg-Landau. Dans le cas d'un système sans centre d'inversion, présentant un effet spin-orbite Rashba et un effet paramagnétique, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau prend la forme, en ne considérant que la forme singulet du paramètre d'ordre, *i.e.* en négligeant les couplages interbandes [175, 176]

$$F = \int d\mathbf{r} [\alpha |\Psi|^2 + \beta |\Psi|^4 + g_{\perp} |\mathbf{D}_{x,y} \Psi|^2 + g_z |\mathbf{D}_z \Psi|^2] + \gamma v_{s.o.} \int d\mathbf{r} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \times [\Psi^* (\mathbf{D}\Psi) + \Psi (\mathbf{D}\Psi)^*]] \quad (3.14)$$

<sup>6</sup>Bien sûr, reste alors à découvrir ce que l'on appelle une diagonalisation non-triviale. Ici, on suppose qu'une diagonalisation est non-triviale lorsqu'elle dépend du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .



où  $D_i = (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})$  contient le potentiel vecteur. Le dernier terme, proportionnel à  $\gamma$ , s'appelle un invariant de Lifshitz [101]. Ces termes ont la particularité d'être des dérivées du premier ordre. C'est l'absence de centre d'inversion qui permet d'une part l'ajout de termes linéaires en  $\mathbf{k}$  dans les relations de dispersion de bande, et d'autre part permet l'inclusion d'invariant de Lifshitz au sein des fonctionnelles de Ginzburg-Landau [167]. La forme exacte de l'invariant de Lifshitz dépend de la classe supraconductrice considérée, ainsi que de la représentation choisie au sein de cette classe<sup>7</sup>. Par contre, le couplage du champ d'échange  $\mathbf{h}$  avec au moins une composante du gradient du paramètre d'ordre est un phénomène général des systèmes sans centre d'inversion.

Notons, pour clore ce paragraphe, que les invariants de Lifshitz ont été également prédit pour des systèmes avec centre d'inversion [167]. Il faut alors coupler des représentations liées à des paramètres d'ordres de parité opposée et de température critique similaire. Ces invariants de Lifshitz sont donc plus difficilement observables. Un autre type d'invariant de Lifshitz a été prédit récemment [178], résultant des interactions interbande dans les modèles à deux bandes. Le principe est alors sensiblement la même que dans le cas avec centre d'inversion : il faut mixer deux représentations ( $S = 0$  et  $S = 1$ ) pour obtenir un invariant de Lifshitz.

Enfin, les effets associés aux invariants de Lifshitz sont traités dans une littérature de plus en plus large. Les effets les plus suprenant en volume sont les effets magnéto-électriques. Dit simplement, le terme spin orbite couple les effets magnétique et électrique. Cela se comprend assez facilement à l'aide de l'expression (3.1), dans laquelle les effets magnétiques de spin sont couplés de façon intrinsèque au potentiel électrostatique. Sous champ électrique externe, ce potentiel électrostatique est la résultante du potentiel cristallin et du potentiel électrostatique externe, donnant lieu à des modifications de la réponse magnétique associé à l'effet spin-orbite. Réciproquement, l'application d'un champ magnétique change les propriétés électriques *via* ce terme spin-orbite (voir à ce propos [164], où un exposé des différents effets magnéto-électriques est donné).

On signale simplement ici que les effets prédit à la section 3.3 seront en quelque sorte des effets magnéto-électriques induits par les effets de proximité.

## 3.2 Effet spin-orbite et effet de proximité

Au cours du paragraphe précédant, on a introduit brièvement les effets associés à l'absence de centre d'inversion dans les systèmes supraconducteurs. On a ainsi mis en évidence de nouvelles propriétés de phase dans le volume supraconducteur. Or, ces nouvelles propriétés de phase doivent venir modifier le comportement des effets de proximité. On se concentre dans la suite sur les modifications de l'effet Josephson.

Au cours de la section précédente, on a vu que facteur de phase dans la définition de paramètre d'ordre et invariant de Lifshitz dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau étaient certainement liés. On va donc explorer les modifications subies par la relation courant-phase de Josephson à l'aide de la fonctionnelle (3.14). Dans ce cas, on va considérer un problème unidimensionnel le long de l'axe  $x$ , auquel cas on aura seulement la composante  $h_y = h$  du champ d'échange qui interviendra, puisque  $\mathbf{n}$  est dirigé selon l'axe  $z$ . On aura alors :

$$\frac{\delta F}{\delta \Psi^*} = \alpha \Psi - g \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2i\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

---

<sup>7</sup>Voir [177] pour plus de détails sur les symétries du paramètre d'ordre en fonction des symétries cristallines.

comme équation de Ginzburg-Landau. On a posé  $\varepsilon = \gamma v_{s.o.} h$  dans cette expression. On aura alors comme solution :

$$\Psi(x) = A \exp \left[ \left( i\varepsilon + \sqrt{\alpha g - \varepsilon^2} \right) \frac{x}{g} \right] + B \exp \left[ \left( i\varepsilon - \sqrt{\alpha g - \varepsilon^2} \right) \frac{x}{g} \right] \quad (3.16)$$

où le terme sous la racine est positif tant que  $\alpha = a(T - T_c) > \varepsilon^2/g$ , ce qui correspond à un système dans l'état normal [57]. En effet, on peut redéfinir la température critique d'un système soumis à l'interaction spin-orbite ainsi qu'à l'effet paramagnétique sous la forme :  $\alpha - \varepsilon^2/g = 0$  ce qui donne la nouvelle température critique  $\tilde{T}_c = T_c + \varepsilon^2/a$ . Le système ne transite donc dans l'état supraconducteur que lorsque  $\alpha < \varepsilon^2/g$ . Regardant la partie décroissante de l'expression (3.16), on s'aperçoit qu'en plus de l'atténuation,  $\Psi(x)$  subit une rotation le long de la jonction induite par le coefficient  $\varepsilon/g$ . En d'autres termes, une phase s'accumule le long de la jonction. Cette accumulation de phase provient du terme  $-i\gamma\hbar v_{s.o.} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \times [\Psi^* (\nabla\Psi) - \Psi (\nabla\Psi)^*]$  dans la fonctionnelle (3.14).

En prenant comme condition aux limites  $\Psi(\pm L/2) = \Delta \exp[\pm i\chi/2]$  on obtient :

$$A, B = \frac{\Delta}{\sinh \left[ \frac{L}{g} \sqrt{\alpha g - \varepsilon^2} \right]} \sinh \left[ \frac{L}{2g} \sqrt{\alpha g - \varepsilon^2} \mp i \frac{\varepsilon L}{2g} \mp i \frac{\chi}{2} \right] \quad (3.17)$$

pour les coefficients de la fonction d'onde dans le système S/F<sub>s.o.</sub>/S considéré. Reste alors à calculer le courant à l'aide de sa définition  $j_x = -\delta F / \delta A_x$  :

$$j(x) = \frac{e i \hbar}{2m} [g (\Psi \partial_x \Psi^* - \Psi^* \partial_x \Psi) + 2\varepsilon |\Psi|^2] = j_c \sin(\chi - \chi_0) \quad (3.18)$$

où apparaît un terme linéaire proportionnel à l'invariant de Lifshitz  $\varepsilon$ . Le courant critique s'écrit alors

$$j_c(L) = 4e\Delta^2 \sqrt{ag - \varepsilon^2} \exp \left[ -\sqrt{ag - \varepsilon^2} L/g \right] \quad (3.19)$$

dans l'approximation d'une jonction longue  $L \gg g/\sqrt{ag - \varepsilon^2}$ . De plus,

$$\chi_0 = -\frac{\varepsilon L}{g} = -\frac{\gamma v_{s.o.} h}{g} L \sim [v_{s.o.} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \times \mathbf{n}_\chi] L \quad (3.20)$$

où  $\mathbf{n}_\chi$  représente le vecteur unitaire porté par la direction du gradient de la phase, ici le long de l'axe  $x$  [57].

Lorsqu'un effet spin-orbite et un effet paramagnétique s'appliquent sur un système supraconducteur sans centre d'inversion, la relation Josephson (3.18) contient donc un terme  $\chi_0$  qui ne dépend plus que du poids de l'invariant de Lifshitz, *i.e.* de l'addition des effets spin-orbite et paramagnétique présents naturellement dans ce genre de composé. Cet effet a été prédit très récemment dans deux publications indépendantes, l'une essentiellement numérique [58], l'autre analytique [57], et n'a toujours pas été observé expérimentalement.

Pour être complet, il nous faut discuter d'une petite subtilité apparaissant entre les deux traitements [58] et [57]. En effet, la présence de la phase  $\chi_0$  n'a été vérifiée numériquement qu'à la condition supplémentaire de mixage des trajectoires [58]. En d'autre terme, la compétition des effets supraconducteurs, spin-orbite et paramagnétique n'a pas l'air d'être suffisante pour obtenir une phase  $\chi_0$ , et il faut rajouter un point quantique à l'intérieur de la jonction bidimensionnelle pour obtenir ce décalage de phase. Ce point quantique agit comme un mixeur de différentes trajectoires, et c'est ce mixage qui

permet de générer la phase  $\chi_0$ . Dans l'étude analytique [57], sont traités les deux cas uni- et bi-dimensionnels. Ces deux cas présentent la phase  $\chi_0$ . Le cas unidimensionnel ne pose vraisemblablement pas de souci, puisque dans ce cas il n'est pas nécessaire d'introduire de point quantique. Il y a alors équivalence des deux études [58] et [57]. En revanche, dans le cas bidimensionnel, il n'est pas clair que la phase  $\chi_0$  soit visible sans point quantique. De plus amples investigations sont donc requises à l'heure actuelle pour mieux comprendre l'origine de cette phase  $\chi_0$ .

Quoi qu'il en soit, une phase  $\chi_0$  existe dans les systèmes S/F<sub>s.o.</sub>/S lorsque le composé ferromagnétique présente un effet spin-orbite non-négligeable (F<sub>s.o.</sub>). Qu'il soit ou non indispensable d'introduire un point quantique au sein de cette jonction n'influence pas la portée des résultats théoriques obtenus dans cette section et dans la suivante, où l'on se contentera de l'expression courant-phase obtenue en (3.18).

### 3.3 Couplage intrinsèque entre phase et aimantation

Depuis l'expression (3.20), il est clair que le décalage de phase  $\chi_0$  va avoir des propriétés à la frontière entre les effets magnétiques et électriques. Autrement dit, l'application d'un courant Josephson peut influencer les propriétés magnétiques du ferromagnétique, et *vice-versa*. C'est ce que l'on va étudier au cours de ce paragraphe.

Passons donc maintenant à l'étude du couplage intrinsèque entre aimantation et phase supraconductrice qu'il existe dans les hétérojonctions Josephson associant deux supraconducteurs conventionnels à un ferromagnétique sans centre d'inversion. Absence de centre d'inversion étant synonyme d'interaction de type Rashba, on peut utiliser l'expression courant-phase obtenue précédemment :

$$I = I_c \sin(\chi - \chi_0) \quad (3.21)$$

qui n'est normalement valide qu'à proximité de la température critique. Dans l'expression (3.21), on a posé  $I_c(L) \sim \cos(4hL/\hbar v_F)$ , qui représente la partie oscillante de la relation courant-phase en présence d'un champ d'échange. Cette partie oscillante n'apparaît pas dans l'expression (3.18) puisque l'on a négligé, dans l'étude du courant, le terme  $\partial_x^4 \Psi$  qui apparaît à fort champ d'échange (comparer l'expression (3.15) avec l'expression (3)).

Pour étudier ce couplage, on va se placer dans la géométrie de la figure 3.3. Dans cette dernière, le couplage intrinsèque  $\chi_0 \propto \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M} \wedge \nabla \Psi)$  couple uniquement la composante de l'aimantation  $M_y$  au gradient de la phase dirigée selon l'axe  $x$ .

Pour discuter des interactions entre les deux sous-systèmes, on va partir de l'expression de l'énergie totale :

$$E_{\text{tot}} = E_s(\chi, \chi_0) + E_M(\chi_0) = E_J [1 - \cos(\chi - \chi_0)] - \frac{K\mathcal{V}}{2} \left( \frac{M_z}{M_0} \right)^2 \quad (3.22)$$

où le premier terme  $E_s$  représente l'énergie supraconductrice associée à la jonction S/F<sub>s.o.</sub>/S alors que le second terme  $E_M$  représente l'énergie magnétique d'un système d'aimantation facile le long de l'axe  $z$  [11]. On a posé dans cette dernière expression  $E_J = \Phi_0 I_c / 2\pi$  pour l'énergie dite de Josephson,  $K$  la constante d'anisotropie du composé magnétique,  $\mathcal{V}$  son volume,  $M_z$  son aimantation le long de l'axe  $z$  et  $M_0 = \|\mathbf{M}\|$  son aimantation de saturation.

Dans la suite, on va se concentrer sur l'effet que produit le courant supraconducteur sur l'aimantation du ferromagnétique. Normalement, on s'attend à ce qu'une hétérojonction possède deux types d'effets de proximité : la modification du gap supraconducteur en

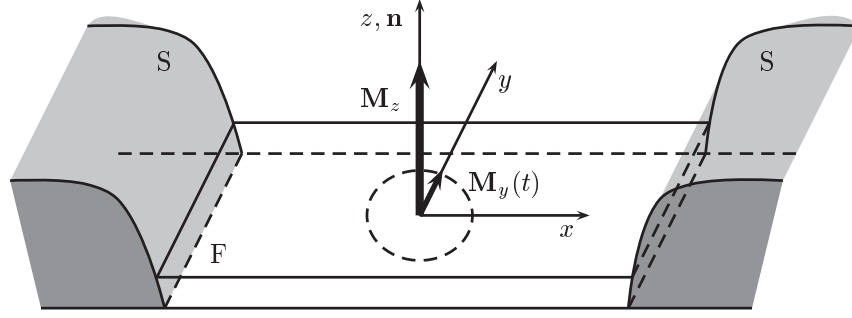


FIG. 3.3: Géométrie de la jonction  $\chi_0$  considérée dans ce paragraphe. Le ferromagnétique est supposé être bidimensionnel et de type aimantation facile suivant l'axe  $z$  (perpendiculaire au plan formé par le composé), qui représente également la direction  $\mathbf{n}$  de l'effet Rashba. Le couplage intrinsèque  $\chi_0 \propto \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M} \wedge \nabla \Psi)$  entre l'aimantation  $\mathbf{M}$  et le paramètre d'ordre supraconducteur  $\Psi$  fera donc intervenir la composante  $M_y$  de l'aimantation ( $\nabla \Psi$  est dirigé le long de l'axe  $x$ , pris comme axe de la jonction dans cette géométrie).

contact avec le pont de la jonction et la modification des propriétés du pont induite par la proximité du métal supraconducteur. Ici, on se limitera à l'action du condensat supraconducteur sur le système ferromagnétique, et l'on regardera l'effet inverse couplant la dynamique du ferromagnétique à la dynamique du courant de Josephson comme une petite perturbation<sup>8</sup>.

Pour étudier l'effet d'un courant supraconducteur sur l'aimantation, on peut utiliser deux approches. Dans la première, la jonction est parcourue par un courant alors qu'aucune tension n'existe entre les deux bornes de la jonction Josephson. Dans la seconde, on impose une différence de potentiel entre les deux électrodes supraconductrices pour générer un supercourant oscillant temporellement.

Dans la première configuration d'une jonction avec courant imposé, on doit rajouter l'énergie générée par le courant dans l'expression (3.22) sous la forme  $-\Phi_0 \chi I / 2\pi$  et calculer le minimum d'énergie. Celui-ci sera donné par la condition

$$\sin \theta = \frac{I}{I_c} \Gamma \quad (3.23)$$

où  $\theta$  est défini comme l'angle que fait la composante  $M_y = M_0 \sin \theta$  avec l'axe d'aimantation facile. Dans cette dernière expression, on a posé

$$\Gamma = \frac{E_J}{K\mathcal{V}} \frac{4hL}{\hbar v_F} \frac{v_{s.o.}}{v_F} \quad (3.24)$$

qui représente le rapport de l'énergie supraconductrice  $E_J$  sur l'énergie magnétique  $K\mathcal{V}$  pondéré par le nombre d'oscillations du courant critique dans le ferromagnétique  $4hL/\hbar v_F$  et par le poids de l'interaction spin-orbite au niveau de Fermi  $v_{s.o.}/v_F$ . Dans des systèmes S/F/S avec centre d'inversion, le ratio  $E_J/K\mathcal{V} \sim 100$  est très important, puisqu'en quelque sorte, les effets supraconducteurs doivent être importants pour que le courant de Josephson franchisse la barrière ferromagnétique. En revanche, dans les composés avec centre

<sup>8</sup>Le lecteur désireux de connaître les effets inverses peut consulter [179] prédisant la transition entre courant d'origine singulet et courant d'origine triplet en fonction de la fréquence d'excitation du champ magnétique externe, ou [180], où le couplage entre les ondes plasmas de Josephson et les modes de magnons est étudié.

d'inversion (mais sans aimantation), la valeur typique de  $v_{s.o.}/v_F \sim 0,1$  n'est jamais très importante. Le ratio  $4hL/\hbar v_F \sim (1-10)$  vaut quant à lui quelques unités. En faisant varier astucieusement l'un ou l'autre de ces ratios, on s'attend donc à pouvoir obtenir tous les types de couplages, allant de configurations où l'énergie supraconductrice domine  $\Gamma \gg 1$  à des configurations où l'énergie magnétique domine  $\Gamma \ll 1$ . L'angle  $\theta$  de l'aimantation sera donc d'autant plus grand que le couplage  $\Gamma$  sera important. De plus, à faible courant, le couplage est ici linéaire, alors qu'il est quadratique dans le cas S/F/S avec centre d'inversion [181].

Si l'on applique plutôt une tension à la jonction  $\chi_0$  considérée, on s'attend à retrouver la caractéristique de toutes les jonctions Josephson : la tension induit un supercourant oscillant à la fréquence de Josephson  $\omega_J = 2eV/\hbar$ . Cela s'explique simplement puisque le condensat supraconducteur peut être modélisé comme une fonction d'onde macroscopique. Or, appliquer une tension constante à une fonction d'onde ne lui impose qu'un décalage énergétique  $\Delta E = V$  compensé par un changement de jauge  $\exp[i2eVt/\hbar]$  [182]. On se place donc maintenant dans la configuration de la figure 3.3 lorsqu'une différence de potentiel électrostatique est appliquée à la jonction. Cela revient à remplacer dans la relation courant-phase  $\chi \rightarrow \omega_J t$ . Normalement, une phase constante est également présente, et on devrait plutôt remplacer  $\chi \rightarrow \chi_{\text{éq.}} + \omega_J t$ , où  $\chi_{\text{éq.}}$  serait la phase à l'équilibre, *i.e.* la phase lorsqu'aucune tension n'est appliquée. Ici, prendre en compte la différence  $\chi_{\text{éq.}}$  des phases supraconductrices à l'équilibre n'apporte qu'un décalage de phase de toute la dynamique que l'on étudiera par la suite. Or, ce décalage est sans conséquence, et on peut négliger  $\chi_{\text{éq.}}$ .

Pour déduire les propriétés magnétiques induites par la présence d'un supraconducteur, on utilise les équations dite de Landau et Lifshitz :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \frac{\alpha}{M_0} \left( \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) \quad (3.25)$$

qui prennent en compte l'évolution de l'aimantation macroscopique  $\mathbf{M}(t)$  d'un système magnétique soumis à l'action d'un champ magnétique effectif  $\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\delta F/\mathcal{V}\delta\mathbf{M}$  induit par la variation de l'énergie libre  $F$  associée au système et lorsque cette aimantation est amortie au cours du temps par la constante d'amortissement dite de Gilbert  $\alpha$  [110, 183]. Dans notre cas, le champ magnétique effectif s'écrit, à partir de l'expression (3.22) :

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \frac{K}{M_0} \left[ \Gamma \sin \left( \omega_J t - r \frac{M_y}{M_0} \right) \hat{\mathbf{y}} + \frac{M_z}{M_0} \hat{\mathbf{z}} \right], \quad (3.26)$$

qui dépend donc explicitement du courant Josephson  $\sin \omega_J t$  appliqué au système. Dans cette dernière expression, on a posé  $r = (4hL/\hbar v_F) (v_{s.o.}/v_F)$ .

La présence d'un terme oscillant à la fréquence  $\omega_J$  dans  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  rappelle clairement les expressions de la dynamique magnétique en présence d'un champ magnétique externe dépendant du temps. Lorsqu'un champ magnétique oscillant temporellement est appliqué à un système magnétique d'aimantation facile comme étudié ici, on s'attend en effet à ce que la dynamique propre de l'aimantation se couple à la dynamique de ce champ externe, produisant des phénomènes de résonance lorsque les deux dynamiques oscillent à la même fréquence [106, 184]. Ici, on s'attend à obtenir des phénomènes de résonance également, puisque la structure des équations est la même. Sauf qu'il n'y a pas dans notre cas de champ magnétique externe, et le couplage entre l'aimantation et la partie dynamique du courant Josephson se fait *via* la présence du terme spin-orbite dans le pont de la jonction uniquement.

Naturellement, on s'attend à ce qu'à de faibles couplages  $\Gamma \ll 1$  soit associée une dynamique réduite de l'aimantation, puisqu'alors cette dernière est très rigide, et le courant supraconducteur n'aura que peu d'influence sur elle. Dans le cas contraire des forts couplages  $\Gamma \gg 1$ , l'aimantation devient très molle relativement à la rigidité de la phase supraconductrice et le courant supraconducteur peut la perturber dans une large mesure.

Injectant le champ magnétique effectif (3.2) dans les équations de Landau et Lifshitz (3.25), on obtient comme système adimensionné :

$$\begin{cases} \dot{m}_x = m_z(\tau) m_y(\tau) - \Gamma m_z(\tau) \sin(\omega\tau - r m_y) \\ \dot{m}_y = -m_z(\tau) m_x(\tau) \\ \dot{m}_z = \Gamma m_x(\tau) \sin(\omega\tau - r m_y) \end{cases} \quad (3.27)$$

avec  $m_i = M_i/M_0$ ,  $\tau = \omega_F t$  où  $\omega_F = \gamma K/M_0^2$  représente la fréquence d'oscillation propre de l'aimantation. Dans notre étude, le paramètre  $r = (4hL/\hbar v_F)(v_{so}/v_F)$  peut être considéré comme petit, puisque l'on peut poser  $v_{s.o.}/v_F \sim 0,1$  comme dans la plupart des matériaux avec effet spin-orbite. Enfin, le terme d'amortissement  $\alpha$  a été volontairement omis dans le système précédent, mais peut être éventuellement rajouté sous une forme linéarisée (voir [184] et les solutions ci-dessous).

Dans le cas d'un faible couplage  $\Gamma \ll 1$ , on peut supposer que la composante  $M_z$  est constante au cours du temps. En posant  $r = 0$  dans le système (3.27), on supprime toutes les non-linéarités. Le système à résoudre est alors celui d'un oscillateur forcé à deux composantes couplées, dont les solutions s'expriment comme :

$$m_y(t) = \frac{\omega_+ - \omega_-}{r} \sin \omega_J t + \frac{\alpha_- - \alpha_+}{r} \cos \omega_J t \quad (3.28)$$

avec

$$\omega_{\pm} = \frac{\Gamma r}{2} \frac{\omega \pm 1}{(\omega \pm 1)^2 + \alpha^2} \text{ et } \alpha_{\pm} = \frac{\Gamma r}{2} \frac{\alpha}{(\omega \pm 1)^2 + \alpha^2}, \quad (3.29)$$

pour la composante  $M_y(t)$ . On a donc explicitement tenu compte de l'amortissement pour écrire les solutions (3.28). Ainsi, la simple présence d'une tension constante aux bornes d'un système supraconducteur contenant une jonction Josephson aimantée et sans centre d'inversion permet de générer la dynamique de précession de l'aimantation.

La signature expérimentale de cette précession peut se mesurer directement sur le supercourant traversant la jonction. En effet, en gardant en mémoire que  $r$  reste petit dans notre système, on peut injecter l'expression (3.28) obtenue pour la composante  $M_y$  de l'aimantation directement dans la relation courant-phase (3.21), qui s'écrira

$$\begin{aligned} I(t) \approx & I_c \sin \omega_J t + I_c \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \sin 2\omega_J t + \\ & + I_c \frac{\alpha_- - \alpha_+}{2} \cos 2\omega_J t + \frac{\alpha \Gamma r}{4} \left( \frac{1}{(\omega - 1)^2 + \alpha^2} - \frac{1}{(\omega + 1)^2 + \alpha^2} \right) + \mathcal{O}(r^2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

et qui porte donc plusieurs caractéristiques directement issues du couplage entre les deux systèmes. Si le premier terme n'est qu'une réécriture de la relation courant-phase (3.21) lorsque  $r \ll 1$ , le second est associé au doublement de fréquence à proximité de la résonance définie par  $\omega \rightarrow 1$  dans l'expression (3.29). Le troisième terme de l'expression (3.30) vient directement de l'amortissement, et produit des termes en quadrature de phase par rapport à la fréquence d'excitation  $\omega_J$ . Enfin, le dernier terme est un courant constant et dissipatif, qui croît à mesure que l'on s'approche de la résonance. Comme tous

les termes dans l'expression (3.30) sauf le premier s'amplifient à la résonance, la mesure de l'un d'entre eux suffit à savoir que le système subit une résonance ferromagnétique due au couplage entre dynamique supraconductrice et ferromagnétique.

Dans le cas contraire d'un fort couplage  $\Gamma \gg 1$ , on s'attend à influencer encore plus la dynamique magnétique. Dans ce cas, on peut réécrire le système (3.27) sous la forme simplifiée

$$\begin{cases} \dot{m}_x = -\Gamma m_z(\tau) \sin(\omega\tau - rm_y) \\ \dot{m}_z = \Gamma m_x(\tau) \sin(\omega\tau - rm_y) \end{cases} \quad (3.31)$$

alors que  $M_y$  est une constante vis-à-vis du temps. Bien que non-linéaire, on peut toujours écrire les solutions de ce système sous la forme, dans la limite d'un amortissement négligeable<sup>9</sup> :

$$\begin{cases} m_x(t) = \sin\left[\frac{\Gamma}{\omega}(1 - \cos\omega_J t)\right] \\ m_z(t) = \cos\left[\frac{\Gamma}{\omega}(1 - \cos\omega_J t)\right] \end{cases} \quad (3.32)$$

qui représentent des oscillations à la fréquence  $\omega_J$  de l'aimantation dans le plan  $m_y = 0$ . Toutefois, lorsque  $\Gamma/\omega > \pi/2$ , ce ne sont plus seulement des oscillations qui apparaissent, mais un renversement total de l'aimantation, qui passe de la position  $m_z = 1$  à la position  $m_z = -1$ . Curieusement, ces solutions ne décrivent pas d'effet de seuil brutal pour un tel renversement de l'aimantation, mais plutôt une transition douce entre états non-renversés et états renversés, alors qu'un seuil est attendu pour un tel phénomène dans les systèmes micromagnétiques [185, 186, 187]. Notons également que dans ce cas, aucune signature n'est attendu dans le supercourant, puisque les solutions (3.32) ne prennent pas en compte l'évolution de la composante  $M_y$  qui est la seule à apparaître dans la relation courant-phase (3.21).

Pour vérifier l'approche simplificatrice que nous avons utilisée tout au long de cette section, nous avons également étudié le système (3.27) numériquement. Pour cela, nous n'avons fait aucune approximation sur  $r$  ou  $\alpha$ . Les résultats de cette analyse numérique sont représentés sur la figure 3.4. On voit alors que le cas limite  $\Gamma \gg 1$  (Éq.(3.32)) est bien vérifié. Surtout, on vérifie que le cas général n'est en fait qu'une superposition plus ou moins complexe des deux mouvements de précession (Éq.(3.28)) et de renversement (Éq.(3.32)). L'aimantation peut donc être complètement manipulée par la simple action d'une tension constante appliquée à une jonction Josephson dont le pont est constitué d'un métal ferromagnétique sans centre d'inversion.

## 3.4 Conclusion

Cette dernière partie était dévolue aux effets liés à l'absence de centre d'inversion dans les composés supraconducteurs. Dans ces systèmes, l'appariement de Cooper est influencé par la présence d'une interaction spin-orbite. L'effet spin-orbite est un terme générique regroupant une grande variété de formes d'interactions différentes, donnant lieu à des modifications assez variées de la structure de bande. On s'est concentré ici sur une interaction de type Rashba, bien adaptée aux problèmes sans centre d'inversion. Dans ce

---

<sup>9</sup>En fait, des solutions analytiques existent pour le cas avec amortissement, mais elles sont réellement horribles et détruisent la simplicité des solutions (3.32)!

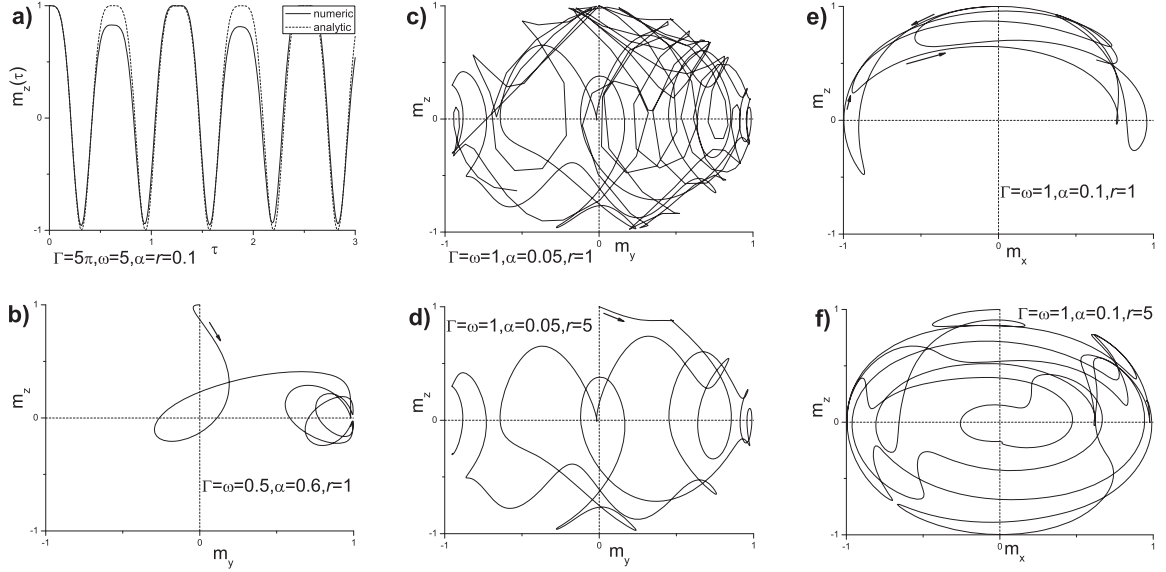


FIG. 3.4: Analyse numérique du système d'équations (3.27). a) Renversement de  $m_z$  selon l'expression analytique (Éq.(3.32) (trait pointillé) et numérique (trait plein). On voit donc que la limite analytique est très bien définie pour ce problème. Les autres courbes représentent les trajectoires de l'aimantation  $\mathbf{M}(t)$  dans les plans  $(M_yOM_z)$  pour les courbes b,c et d, et dans le plan  $(M_xOM_y)$  pour les deux dernières courbes. La courbe b représente le cas sous fort amortissement, qui correspond globalement au cas statique étudié depuis l'expression (3.23). Les courbes c et d montrent que la dynamique évoluent quantitativement peu lorsque l'on change le paramètre  $r$  pour de faibles amortissement. Les courbes e et f montrent que l'on peut atteindre l'état de renversement sans vérifier l'effet de seuil  $\Gamma/\omega > \pi/2$  prédit depuis les expression (3.32), mais simplement en changeant le paramètre  $r$  à relativement fort amortissement.



cas, la structure de bande parabolique du gaz d'électrons libres se scinde en deux sous-bandes décalées. Après diagonalisation du terme d'interaction Rashba, cette structure de bande se comporte comme deux nouvelles sous-bandes qui ne sont plus paraboliques (voir Fig.3.1), chacune relative à une projection du spin différente.

Ainsi, dans les systèmes sans centre d'inversion, l'appariement de Cooper se fera de façon privilégiée au sein de chacune de ces sous-bandes. Néanmoins, du fait de l'interaction spin-orbite, le spin n'est plus un bon nombre quantique. Cela signifie pratiquement que le paramètre d'ordre supraconducteur va se comporter comme une superposition des deux états, caractérisée par les formes singulet et triplet de la partie spinorielle de la fonction d'onde du condensat. Les systèmes supraconducteurs sans centre d'inversion ont donc comme première particularité de posséder un paramètre d'ordre à deux composantes, l'une singulet  $S = 0$ , l'autre triplet  $S = 1$ .

Or, cette superposition de deux fonctions d'ondes impose de prendre en compte correctement de nouveaux effets, tous liés à l'apparition d'invariants de Lifshitz dans les développements de type Ginzburg-Landau de la superconductivité. Si la forme exacte de ces invariants de Lifshitz dépend profondément des propriétés de symétrie du matériaux considéré, elle se mettent toutes sous la forme de termes dérivatifs en gradient du paramètre d'ordre, sous la forme  $\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi$ . Cette forme donne alors des comportements typiques associés à l'absence de centre d'inversion. En tout premier lieu, elles permettent la présence d'effets magnéto-électriques, pour lesquels un champ magnétique influence les effets électriques et *vice-versa*. Les invariants de Lifshitz créent également des comportements interférentiels nouveaux dans les hétérojonctions.

De plus, associer un champ magnétique au système crée des invariants de Lifshitz intrinsèques qui conservent un comportement interférentiel. L'effet de ce type d'invariant de Lifshitz se matérialise de façon surprenante si l'on considère une jonction Josephson dont le pont ferromagnétique ne présente pas de centre d'inversion ( $F_{s.o.}$ ). On a ainsi vu au paragraphe 3.2 que la relation courant-phase de cette jonction Josephson s'écrivait sous la forme générique  $I = I_c \sin(\chi - \chi_0)$ , où  $\chi_0$  est un décalage de phase uniquement associé au couplage entre l'effet spin-orbite et l'aimantation de la jonction.

Nous avons alors calculé l'effet d'un courant Josephson sur la dynamique de l'aimantation du pont ferromagnétique. En particulier, on a vu au paragraphe 3.3 qu'il existait deux types de régimes dynamiques que l'on peut traiter analytiquement.

Le premier régime correspond à un faible couplage entre la dynamique de l'aimantation et la dynamique d'oscillation du courant Josephson. Ce régime est alors caractérisé par la notion de résonance magnétique, dans laquelle l'aimantation subit un mouvement de précession autour de son axe d'aimantation facile. Ce système est donc équivalent à un système magnétique sur lequel on applique un champ magnétique externe et oscillant. Sauf que, dans le cas d'une jonction  $S/F_{s.o.}/S$ , c'est l'application d'une simple tension constante qui induit un supercourant oscillant. Et c'est ce courant oscillant seul qui vient créer la dynamique de l'aimantation. Si la dynamique de l'aimantation est perturbée par la présence d'un supercourant, la relation courant-phase se trouve en retour perturbée par le couplage des deux dynamiques d'aimantation et du supercourant. Ainsi, ce régime de faible couplage se caractérise par une réponse en courant de la jonction dans laquelle des harmoniques d'ordre supérieur  $\sin 2\chi, \dots$  viennent s'ajouter à la relation courant-phase conventionnelle  $\sin \chi$  lorsque la fréquence d'oscillation de Josephson s'approche de la fréquence propre de l'aimantation. De plus, des termes en quadrature de phase  $\cos 2\chi$  viennent également signer l'approche de la résonance magnétique. Enfin, une partie du supercourant est convertie en courant dissipatif lorsque l'on s'approche de cette résonance. Le couplage entre les dynamiques magnétique et supraconductrice pourrait donc être assez

facilement identifiable dans des composés ferromagnétiques sans centre d'inversion.

Le second régime est caractérisé par un fort couplage entre les deux dynamiques. Dans ce cas, les équations de la dynamique magnétique restent non-linéaires, mais on peut quand même trouver une solution dans un cas limite. Cette solution prédit alors que pour des couplages suffisamment important, l'aimantation se retourne sous l'action du supercourant. En quelque sorte, l'aimantation devient très molle par rapport à la différence de phase supraconductrice qui reste rigide. Faire osciller la phase fait donc osciller l'aimantation sans contrainte. Du fait de la limite utilisée pour obtenir ces solutions analytiques, nous n'avons pas pu prédire de modification de la relation courant-phase perturbée par ce renversement.

Si les deux cas limites d'un fort et d'un faible couplage donne la possibilité d'un renversement de l'aimantation et de la résonance ferromagnétique, on s'attend naturellement à ce que les cas généraux soient une association de ces deux mouvements. C'est ce que l'on a vérifié numériquement en résolvant les équations de la dynamique magnétique lorsqu'aucun effet n'est négligé. L'accord avec les deux comportements analytiques prédits est alors très bon, et laisse espérer que le travail effectué au cours de cette thèse dans le cadre des jonctions supraconducteur / systèmes magnétiques sans centre d'inversion ne soit qu'une première étape, et que de nouveaux effets importants seront encore prédits dans ce type de système.

En particulier, les études faites jusqu'à présent ne se sont pas clairement penchées sur le problème du mixage des composantes singulet et triplet du paramètre d'ordre. De même, on a vu que les nouveaux effets interférentiels étaient de nature purement géométriques, ce qui laisse une large place à des propositions de jonctions dont la nature géométrique donnerait de nouveaux effets. Surtout, le rôle des interactions spin-orbite sur les propriétés de transport dans les systèmes mésoscopique a vu exploser le nombre de nouveaux concepts ces dernières années. Je pense en particulier aux isolants topologiques, à l'effet Hall de spin, aux phases de Berry dans les anneaux métalliques ou à proximité de points diaboliques, ... qui sont autant de pistes de réflexions permettant de générer de nouveaux effets en physique mésoscopique.

# Conclusion générale

On a donc étudié au cours de cette thèse l'importance des effets de spin sur la supraconductivité. Nous nous sommes concentrés sur l'interaction paramagnétique, qui tend à aligner les spin électroniques dans une seule direction d'espace, et sur l'effet spin-orbite, qui couple ce spin avec le potentiel cristallin du système. Comme l'état supraconducteur singulet est défini par la condensation de paires de Cooper liant deux électrons de spin opposés, il est sensible à la combinaison des effets Zeeman et spin-orbite.

On a ainsi vu dans la première partie qu'un effet paramagnétique important induisait une oscillation du condensat supraconducteur dans l'espace. Cette nouvelle phase supraconductrice est connue sous le nom de phase FFLO. D'anciens travaux théoriques montrent clairement que cette phase est difficile à observer lorsqu'elle est en compétition avec des effets orbitaux. Il y a alors compétition entre le réseau d'Abrikosov induit par les effets orbitaux et la modulation FFLO. Cette phase est également connue pour être extrêmement sensible aux impuretés, qui la détruisent rapidement. Cette extrême fragilité explique sans doute l'absence d'observation de la phase FFLO dans les systèmes supraconducteurs répertoriés jusqu'à présent. Toutefois, même si l'on découvrait un composé supraconducteur caractérisé par une phase FFLO, il n'est pas garanti que l'on saurait l'identifier correctement. En effet, la richesse d'interaction entre les ordres supraconducteurs et magnétiques est telle que caractériser pleinement la phase FFLO est une tâche ardue. Pour donner des outils permettant de révéler de façon claire la présence de cette phase FFLO, nous avons étudié au cours de cette thèse les fluctuations supraconductrices à proximité de la transition vers une phase modulée.

Nous avons plus spécifiquement étudié les fluctuations gaussiennes dans l'état normal. Ces fluctuations s'étudient à l'aide d'une fonctionnelle de Ginzburg-Landau modifiée pour tenir compte des effets paramagnétiques. Or, cette fonctionnelle fait apparaître de nouveaux termes, correspondant aux dérivées spatiales d'ordre supérieurs. On peut alors écrire le spectre des fluctuations sous la forme  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha + gk^2 + \gamma k^4$ . Ce sont ces dérivées d'ordres supérieurs, proportionnelles à  $\gamma k^4$ , qui induisent des comportements spécifiques des fluctuations. En effet, la phase FFLO apparaît lorsque le coefficient  $g$  change de signe, donnant naissance à la modulation proprement dite. Ainsi, tant que  $g$  reste positif, le terme  $\gamma k^4$  n'est pas nécessaire, et le spectre des fluctuations se réécrit simplement  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha + gk^2$ . On retrouve alors le comportement associé aux supraconducteurs sans champ d'échange (cas BCS). Lorsque le coefficient  $g$  devient négatif, il faut prendre en compte le terme  $\gamma$ . Comme on l'a démontré au cours de ce manuscrit, les fluctuations de la chaleur spécifique, de l'aimantation et de la supraconductivité portent alors les marques de la transition vers un état FFLO. En particulier, les exposants gaussiens sont radicalement différents à proximité d'un système FFLO en comparaison du cas à proximité d'un système BCS. Comme ces exposants gaussiens décrivent la façon dont les fluctuations vont diverger à la transition de phase, il est relativement facile de les observer. Il est donc également facile de savoir vers quel état supraconducteur (FFLO ou BCS) transite le système.

Si le raisonnement effectué ci-dessus correspond parfaitement au cas isotrope, les cas plus réalistes des systèmes anisotropes demandent un traitement particulier. Ainsi, lorsque l'on prend correctement en compte l'anisotropie, les exposants gaussiens dans les deux cas BCS et FFLO sont identiques. La mesure de ces exposants gaussiens ne permet donc plus d'identifier la présence d'une phase FFLO correctement.

En revanche, du fait de l'anisotropie, il est néanmoins possible de caractériser cette phase inhomogène par la mesure de l'anisotropie de la paraconductivité. En effet, le rapport d'anisotropie de la paraconductivité est directement influencée par le changement de signe du terme  $g$  à proximité d'une phase FFLO. Il est donc encore possible, en mesurant simplement les fluctuations de la paraconductivité le long de deux directions différentes, de caractériser la transition vers un état FFLO. Dans le cas d'un système quasi-bidimensionnel, il est également possible d'appliquer un champ magnétique externe dans le plan supraconducteur. Ce champ a alors tendance à favoriser une direction du vecteur de la modulation FFLO, modifiant ainsi l'anisotropie du système. Dans ce cas, le rapport d'anisotropie de la paraconductivité augmente à la transition. Ce comportement est caractéristique de la présence d'un état FFLO.

Le comportement de l'aimantation se modifie également drastiquement à proximité d'une phase FFLO. Ainsi, on a pu démontrer que les fluctuations de l'aimantation présentaient un comportement tout à fait révélateur de la phase FFLO (§ 1.4). Dans le cas isotrope, les fluctuations de l'aimantation seront paramagnétiques pour les systèmes bidimensionnel, alors qu'elles disparaissent dans le cas tridimensionnel. Dans le cas anisotrope, le comportement de l'aimantation dépend des paramètres cristallographiques du composé étudié. On a illustré ces comportements dans le cadre d'une symétrie tétragonale, bien adaptée au cas du composé  $\text{CeCoIn}_5$ . Dans cette symétrie, on applique le champ magnétique le long de l'axe  $z$ , pris perpendiculairement au plan de base. Dans ce cas, il existe essentiellement deux scénarii de champ moyen, qui se distinguent par la compétition entre le niveau de Landau et la modulation FFLO. Soit la modulation est maximale le long du champ magnétique appliqué alors que le niveau de Landau est toujours  $n = 0$ , soit il y a compétition entre le niveau de Landau le plus élevé et la modulation FFLO. On a démontré que ces deux scénarii pouvaient être distingués en terme de fluctuations de l'aimantation. Ainsi, dans le premier cas d'un niveau de Landau  $n = 0$ , les fluctuations sont extrêmement réduites. Dans le second cas de la compétition entre les niveaux de Landau et la modulation, l'aimantation oscille entre des réponses diamagnétique et paramagnétique. Ces deux comportements (atténuation ou oscillation dia/para) sont caractéristiques des phases FFLO, pour lesquelles d'importants effets paramagnétiques entrent en jeu.

Ainsi, même si les exposants gaussiens des fluctuations à proximité d'une phase FFLO anisotrope sont les mêmes qu'à proximité d'une phase BCS, la mesure du rapport d'anisotropie de la paraconductivité ou la mesure des fluctuations de l'aimantation peuvent encore servir de révélateurs à cette phase FFLO.

Enfin, il existe un dernier régime qui peut être étudié à l'aide du spectre de fluctuation FFLO. En effet, lorsque  $g \rightarrow 0$ , le spectre des fluctuations devient  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha + \gamma k^4$ . Ce spectre n'existe qu'à proximité du point tricritique défini par  $g = 0$  (Fig.1.1). Du fait de la présence des termes  $\gamma k^4$  uniquement, les fluctuations de la chaleur spécifique, de l'aimantation et de la paraconductivité auront un comportement particulier. L'étude des exposants gaussiens révèle donc de façon claire la présence de la phase FFLO.

Il n'y a donc plus un mais trois régimes de fluctuations associés à la présence d'une phase FFLO. De plus, ces trois régimes sont clairement distincts sur le diagramme de phase, les deux régimes FFLO et BCS encadrant le régime tricritique. Étudier expérimentalement les fluctuations supraconductrices à proximité de la phase FFLO pourrait ainsi

être à l'avenir un atout majeur pour déterminer si cette phase est présente ou non dans les matériaux proposés.

Récemment, les phases FFLO ont suscité d'importants travaux, avec la découverte des gaz fermioniques ultra-froids. Si la présence d'une telle phase est encore débattue dans la communauté des gaz ultra-froids, l'étude des fluctuations pourrait s'avérer d'une grande aide, puisque ces gaz sont supposés isotropes.

Les deux dernières parties étaient dédiées aux phénomènes de cohérence modifiés par la présence d'effet de spin. En effet, la notion de modulation du condensat, qui donne lieu aux phases FFLO dans les supraconducteurs en volume a sa contrepartie en terme d'effet de proximité. Là encore, c'est le champ d'échange présent dans un ferromagnétique confiné entre deux supraconducteurs qui agit sur la rigidité de la phase supraconductrice. Ainsi, de nombreuses propriétés supraconductrices se mettent à osciller en fonction de la longueur du pont ferromagnétique ou du champ d'échange. C'est notamment le cas pour le supercourant traversant l'hétérojonction, donnant lieu à la phase  $\pi$ , pour laquelle la différence de phase entre les deux électrodes supraconductrice se décale de  $\pi$ .

En particulier, on a cherché durant les deux dernières années de cette thèse à mettre en évidence ce que l'on a nommé des phases  $\chi_0$  dans ce manuscrit (voir paragraphe 2.3.1). Ce genre de phase  $\chi_0$  induirait des relations courant-phase de la forme  $I = I_c \sin(\chi - \chi_0)$ , ouvrant un nouveau champ d'étude dans le domaine des jonctions Josephson. Partant de la découverte des jonctions  $\pi$  dans les systèmes S/F/S, on a alors tenté de généraliser cette approche à des systèmes où le décalage de phase  $\chi_0$  ne serait pas seulement 0 ou  $\pi$ , mais pourrait prendre l'ensemble des valeurs intermédiaires. Pour se faire, nous avons abordé les systèmes présentant un fort champ d'échange.

Nous avons commencé ce travail par l'étude des systèmes S/F/S dans le cas balistique sous fort champ d'échange (§ 2.3). Cette limite est maintenant réalisable expérimentalement, grâce aux progrès récents obtenus en technique de nanofabrication. On a ainsi mis en évidence que les effets de cohérence dans les jonctions propres sont des effets à longue portée, caractérisés par une décroissance en loi de puissances en  $L^{(1-d)/2}$ , où  $L$  représente la longueur de la jonction ferromagnétique et  $d$  représente la dimensionnalité du système. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'avoir des corrélations triplet pour que le supercourant se propage sur de grandes distances dans le pont ferromagnétique.

De plus, nous avons montré que les systèmes balistiques présentent une transition de phase ( $0 - \pi$ ) induite par la température (§ 2.3.3). Ce phénomène n'était pas clairement assimilé dans la communauté S/F/S, et il était généralement admis que seuls les systèmes sales pouvaient présenter ce genre de transition en température. Cette transition existe bel et bien dans le cas balistique. De plus, elle se réalise sur une plage d'épaisseur de jonction d'autant plus grande que le champ d'échange est petit, et pourrait donc être tout à fait observable à l'avenir. Enfin, si la relation courant-phase des systèmes sales est essentiellement caractérisée par la donnée de la première harmonique, on a montré que les systèmes propres possèdent une part non-négligeables d'harmonique  $n \geq 2$ . Cette propriété apparaît clairement dans les courbes courant-température que l'on a présenté au paragraphe 2.3.3. Ces courbes ne s'annulent jamais, même à la transition  $0-\pi$  induite par la température. Or, cela ne peut être expliqué que par la présence d'harmoniques  $n \geq 2$  qui ne s'annulent pas à cette transition. Les systèmes S/F/S, dans la limite propre, pourraient donc être de bons éléments à inclure dans des systèmes cohérents, où l'on cherche à créer des différences de phase sans perdre trop de supercourant.

Continuant notre étude sur les jonctions S/F/S, on a pu exprimer le comportement de la seconde harmonique dans le cadre des jonctions dans la limite  $\xi_F \ll \ell_e \ll L$ , *i.e.* un

système faiblement désordonnées soumis à de forts champs d'échange (§ 2.4). Ce régime est spécifique des systèmes S/F/S et de la notion d'oscillation du condensat sur la longueur  $\xi_F$ . La prise en compte de cette seconde harmonique est nécessaire si l'on veut mettre en évidence une phase  $\chi_0$ . En effet, c'est le signe de la seconde harmonique qui favorise ou non la présence d'une phase  $\chi_0$  (§ 2.3.1).

Nous avons ainsi obtenu la relation courant-phase pour des systèmes S/F/S où le pont ferromagnétique est supposé long, et caractérisé par un fort champ d'échange et un faible désordre. Nos résultats sont en très bon accord avec les données expérimentales recueillies récemment dans cette limite par le groupe de Cambridge.

Malheureusement, aucune phase  $\chi_0$  n'a pu être mise en évidence, ni dans le cadre des jonctions S/F/S propres, ni dans le cadre des jonctions modérément désordonnées. Le cas diffusif était quant à lui connu depuis longtemps, et ne donnait pas non plus de jonctions  $\chi_0$ .

Toutefois, des jonctions S/F/S aux géométries plus subtiles pourraient relancer le débat sur l'existence de jonctions  $\chi_0$ . Ainsi, très récemment, des études expérimentales utilisant des jonctions doubles  $0 + \pi$  au sein d'une même barrière [157] permettent de réenvisager ce problème sous un jour nouveau. On peut également penser à des systèmes S/F/S dont les supraconducteurs présentent des symétries en ondes  $p, d, \dots$

Dans cette thèse, nous avons envisagé des systèmes comportant un pont ferromagnétique sans centre d'inversion ( $F_{s.o.}$ ). Dans ce cas, on ajoute aux effets liés au champ d'échange un effet spin-orbite de type Rashba. C'est ce type de jonction qu'ont envisagé Buzdin [57] et Reynoso *et al.* [58]. Il a ainsi été démontré récemment que les effets magnéto-électriques connus en terme d'effet en volume avaient une contrepartie en terme d'effet de proximité (§ 3.2). Non seulement les systèmes S/ $F_{s.o.}$ /S présentent un comportement de jonction  $\chi_0$ , mais le décalage de phase généré est directement proportionnel au champ d'échange. En appliquant une simple tension constante aux bornes d'une jonction S/ $F_{s.o.}$ /S, il est donc possible d'appliquer une perturbation oscillante sur l'aimantation.

Au cours de cette thèse, nous avons alors montré que les effets magnéto-électriques de proximité permettaient de générer toute la dynamique magnétique (§ 3.3). En particulier, les deux comportements de précession et de retournement de l'aimantation ont été prédits. Lorsque l'aimantation est trop rigide par rapport à la phase du condensat supraconducteur, seul le mouvement de précession peut être observé. Toutefois, en changeant la tension appliquée au système, on varie la fréquence de l'excitation. On peut alors atteindre la résonance magnétique. À proximité de la résonance, la relation courant-phase est largement modifiée. Ainsi, la résonance magnétique induit des harmoniques supérieures dans la relation courant-fréquence. De plus, du fait de la dissipation magnétique, une partie du supercourant est converti en courant dissipatif. Mesurer le courant peut donc être un bon outil pour vérifier la présence du couplage magnéto-électrique induit par les effets de proximité. Le retournement de l'aimantation s'effectue quant à lui lorsque le condensat supraconducteur devient plus rigide que l'aimantation. Il faut également que la fréquence d'excitation soit supérieure à une valeur seuil pour observer un retournement complet.

Dans le cas général d'une rigidité de la phase et de l'aimantation quelconque, on ne peut pas étudier analytiquement le système S/ $F_{s.o.}$ /S puisque le couplage intrinsèque entre aimantation et phase supraconductrice rend les équations auto-consistantes et non-linéaires. On a donc également étudié numériquement ce type de jonction. On a tout d'abord vérifié que nos solutions analytiques étaient en très bon accord avec les résultats numériques. De plus, dans le cas général, le mouvement de l'aimantation correspond à la superposition compliquée des deux mouvements de précession et de retournement.

Notons finalement que cette étude laisse espérer de nombreuses applications des effets magnéto-électriques de proximité dans les hétérojonctions supraconductrices.





# Liste des publications

- *Anomalous fluctuation regimes at FFLO transition.* François KONSCHELLE, Jérôme CAYSSOL and Alexandre I. BUZDIN. Europhys. Lett. **71** 67001 (2007).
- *Nonsinusoidal current-phase relation in strongly ferromagnetic and moderately disordered SFS junctions.* François KONSCHELLE, Jérôme CAYSSOL and Alexandre I. BUZDIN. Phys. Rev. B **78** 134505 (2008).
- *Oscillations of magnetization and conductivity in anisotropic Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconductors.* François KONSCHELLE, Jérôme CAYSSOL and Alexandre I. BUZDIN. Phys. Rev. B **79** 224526 (2009).
- *Magnetic moment manipulation by a Josephson current.* François KONSCHELLE and Alexandre I. BUZDIN. Phys. Rev. Lett. **102** 017001 (2009).
- *Superconducting fluctuations near the FFLO phase.* François KONSCHELLE, Jérôme CAYSSOL and Alexandre I. BUZDIN. J. Phys. : Conf. Ser. **150** 052121 (2009).



# Bibliographie

- [1] H. KAMMERLING ONNES. *Further experiments with liquid helium. C. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. IV. The resistance of pure mercury at helium temperatures.* KNAW / Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **14 I**, 1274–1276, Comm. 120b (1911).
- [2] H. KAMMERLING ONNES. *Further experiments with liquid helium. C. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. V. The disappearance of the resistance of mercury.* KNAW / Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **14 I**, 115–122, Comm. 122b (1911).
- [3] H. KAMMERLING ONNES. *Further experiments with liquid helium. IX. The appearance of galvanic resistance in superconductor, which are brought into a magnetic field at a threshold value of the field.* KNAW / Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **16 II**, 987–992, Comm. 139f (1914).
- [4] W. MEISSNER AND R. OCHSENFELD. *Ein neuer effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit.* Naturwissenschaften **21**, 787 (1933).
- [5] F. LONDON AND H. LONDON. *Supraleitung und Diamagnetismus.* Physica **2**, 341 (1935).
- [6] F. LONDON AND H. LONDON. *The electromagnetic equations of the superconductor.* Proc. Roy. Soc. Lond. **A 149**, 71–88 (1935).
- [7] VITALY L. GINZBURG AND LEV D. LANDAU. *On the theory of superconductivity.* Sov. Phys. JETP **20**, 1064 (1950).
- [8] LEV D. LANDAU. *On the theory of phase transition.* Sov. Phys. JETP **7**, 19 (part I) and 627 (part II) (1937).
- [9] PIERRE-GILLES DE GENNES. *Superconductivity of metals and alloys.* Advanced Book Classics, Westview Press (1999).
- [10] MICHAEL TINKHAM. *Introduction to superconductivity, Second edition.* Dover Publications, Inc (1996).
- [11] LEV. D. LANDAU AND E. M. LIFCHITZ. *Électrodynamique des milieux continus.* Éditions Mir (1990).
- [12] ALEXEI A. ABRIKOSOV. *Magnetic properties of superconductors of the second group.* Sov. phys. JETP **5**, 1174 – 1182 (2008).
- [13] LEON N. COOPER. *Bounds electron pairs in a degenerate Fermi gas.* Phys. Rev. **104**, 1189–1190 (1956).
- [14] J. BARDEEN, L. N. COOPER, AND J. R. SCHRIEFFER. *Microscopic theory of superconductivity.* Phys. Rev. **106**, 162–164 (1957).
- [15] J. BARDEEN, L. N. COOPER, AND J. R. SCHRIEFFER. *Theory of superconductivity.* Phys. Rev. **108**, 1175–1204 (1957).

- [16] M. R. SCHAFFROTH. *Superconductivity of a charged ideal Bose gas*. Phys. Rev. **100**(2), 463–475 Oct (1955).
- [17] LEV P. GOR'KOV. *On the energy spectrum of superconductors*. Sov. Phys. JETP **7**, 505–508 (1958).
- [18] LEV P. GOR'KOV. *Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity*. Sov. Phys. JETP **9**, 1364–1367 (1959).
- [19] N. N. BOGOLIUBOV. *New method in the theory of superconductivity. III*. Sov. Phys. JETP **7**, 51–55 (1958).
- [20] J. G. VALATIN. *Comment on the theory of superconductivity*. Nuovo Cim. **7**, 843–857 (1958).
- [21] N. N. BOGOLIUBOV. *On the theory of superfluidity*. J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
- [22] LEV DAVIDOVITCH LANDAU AND EVGENNI MIKHAILOVICH LIFSHITZ. *Physique quantique, Troisième édition*. Éditions Mir (1975).
- [23] PETER FULDE AND RICHARD A. FERRELL. *Superconductivity in a strong spin-exchange field*. Phys. Rev. **135**, A550–A563 (1964).
- [24] A.I. LARKIN AND YU.N. OVCHINNIKOV. *Inhomogeneous state of superconductors*. Sov. Phys. JETP **20**, 762–769 (1965).
- [25] ALEXANDRE I. BUZDIN AND HAMID KACHKACHI. *Generalized Ginzburg-Landau theory for nonuniform FFLO superconductors*. Phys. Lett. A **225**, 341–348 (1997).
- [26] MANUEL HOUZET AND VLADIMIR P. MINEEV. *Interplay of paramagnetic, orbital, and impurity effects on the phase transition of a normal metal to the superconducting state*. Phys. Rev. B **74**, 144501 (2006).
- [27] G. R. STEWART. *Heavy-fermion systems*. Rev. Mod. Phys. **56**(4), 755–787 Oct (1984).
- [28] LAURENT-PATRICK LÉVY. *Magnétisme et supraconductivité*. InterÉditions / CNRS Éditions (1997).
- [29] N.R. WHERTAMER, E. HELFAND, AND P.C. HOHENBERG. *Temperature and purity dependence of the superconducting critical field,  $H_{c2}$ . III. Electron spin and spin-orbits effects*. Phys. Rev. **147**, 295–302 (1966).
- [30] LEONARD W. GRUENBERG AND LEON GUNTHER. *Fulde-Ferrell effect in type-II superconductors*. Phys. Rev. Lett. **16**, 996–998 (1966).
- [31] L. G. ASLAMASOV. *Influence of impurities on the existence of an inhomogeneous state in a ferromagnetic superconductor*. Sov. Phys. JETP **28**, 773–775 (1969).
- [32] L. BALICAS, J.S. BROOKS, K. STORR, S. UJI, M. TOKUMOTO, H. TANAKA, H. KOBAYASHI, A. KOBAYASHI, V. BARZYKIN, AND L.P. GOR'KOV. *Superconductivity in an organic insulator at very high magnetic fields*. Phys. Rev. Lett. **87**, 067002 (2001).
- [33] ANDREA BIANCHI, ROMAN MOVSHOVICH, N. OESCHLER, P. GEGENWART, F. STEGLICH, J.D. THOMPSON, P.G. PAGLIUSO, AND J.L. SARRAO. *First-order superconductivity phase transition in CeCoIn*. Phys. Rev. Lett. **89**, 137002 (2002).
- [34] ANDREA BIANCHI, ROMAN MOVSHOVICH, CIGDEM CAPAN, P.G. PAGLIUSO, AND J.L. SARRAO. *Possible Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconducting state in CeCoIn*. Phys. Rev. Lett. **91**, 187004 (2003).

- [35] R. LORTZ, Y. WANG, A. DEMUER, P. H. M. BÖTTGER, B. BERGK, G. ZWICKNAGL, Y. NAKAZAWA, AND J. WOSNITZA. *Calorimetric evidence for a Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconducting state in the layered organic superconductor  $\kappa$ -(BEDT-TTF) $_2$ Cu(NCS) $_2$* . Phys. Rev. Lett. **99**(18), 187002 (2007).
- [36] A. BIANCHI, R. MOVSHOVICH, I. VEKHTER, P. G. PAGLIUSO, AND J. L. SARRAO. *Avoided antiferromagnetic order and quantum critical point in CeCoIn $_5$* . Phys. Rev. Lett. **91**(25), 257001 Dec (2003).
- [37] K. IZAWA, H. YAMAGUCHI, YUJI MATSUDA, H. SHISHIDO, R. SETTAI, AND Y. ONUKI. *Angular position of nodes in the superconducting gap of quasi-2D heavy-fermion superconductor CeCoIn*. Phys. Rev. Lett. **87**, 057002 (2001).
- [38] H.A. RADOVAN, N.A. FORTUNE, T.P. MURPHY, S.T. HANNAHS, E.C. PALM, S.W. TOZER, AND D. HALL. *Magnetic enhancement of superconductivity from electron spin domain*. Nature **425**, 51–55 (2003).
- [39] ALEXANDRE I. BUZDIN AND J.P. BRISON. *New solution for the superconducting order parameter in a high magnetic field*. Phys. Lett. A **218**, 359–366 (1996).
- [40] ALEXANDRE I. BUZDIN AND J.P. BRISON. *Non uniform state in 2D superconductors*. Europhys. Lett. **35**, 707–712 (1996).
- [41] P. G. DE GENNES. *Boundary effects in superconductors*. Rev. Mod. Phys. **36**(1), 225–237 Jan (1964).
- [42] BRIAN DAVID JOSEPHSON. *Possible new effects in superconductive tunnelling*. Phys. Lett. **1**, 251–253 (1962).
- [43] PHILIP W. ANDERSON. *Lectures on the many-body problem, vol. 2* chapter : Special effects in superconductivity, pages 113 – 135. Caianiello Ed. New York, Academic Press (1964).
- [44] P.A.M. DIRAC. *Les principes de la mécanique quantique*. Jacques Gabay (2000).
- [45] L. N. BULAEVSKII, V. V. KUZII, AND A. A. SOBYANIN. *Superconducting system with weak coupling to the current in the ground state*. JETP Lett. **25**, 290–294 (1977).
- [46] ALEXANDRE I. BUZDIN, L. N. BULAEVSKII, AND S. V. PANYUKOV. *Critical-current oscillations as a function of the exchange field and thickness of the ferromagnetic metal(F) in an S-F-S Josephson junction*. Sov. Phys. JETP **35**, 178–181 (1982).
- [47] L. N. BULAEVSKII, A. I BUZDIN, AND S. V. PANYUKOV. *The oscillation dependence of the critical-current on the exchange field of ferromagnetic metal(F) in Josephson junction S-F-S*. Solid. State Comm. **44**, 539–542 (1982).
- [48] V. V. RYAZANOV, V. A. OBOZNOV, A. YU. RUSANOV, A. V. VERETENNIKOV, A. A. GOLUBOV, AND J. AARTS. *Coupling of two superconductors through a ferromagnet : Evidence for a  $\pi$  junction*. Phys. Rev. Lett. **86**(11), 2427–2430 Mar (2001).
- [49] A. A. GOLUBOV, M. YU. KUPRIYANOV, AND E. IL'CHEV. *The current-phase relation in Josephson junctions*. Rev. Mod. Phys. **76**, 411–469 (2004).
- [50] ALEXANDRE I. BUZDIN. *Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures*. Rev. Mod. Phys. **77**, 935–976 (2005).
- [51] F. S. BERGERET, A. F. VOLKOV, AND K. B. EFETOV. *Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures*. Rev. Mod. Phys. **77**(4), 1321 (2005).

- [52] J. W. A. ROBINSON, S. PIANO, G. BURNELL, C. BELL, AND M. G. BLAMIRE. *Critical current oscillations in strong ferromagnetic  $\pi$  junctions*. Phys. Rev Lett. **97**(17), 177003 (2006).
- [53] J. W. A. ROBINSON, S. PIANO, G. BURNELL, C. BELL, AND M. G. BLAMIRE. *Zero to  $\pi$  transition in superconductor-ferromagnet-superconductor junctions*. Phys. Rev. B **76**(9), 094522 (2007).
- [54] F. S. BERGERET, A. F. VOLKOV, AND K. B. EFETOV. *Josephson current in superconductor-ferromagnet structures with a nonhomogeneous magnetization*. Phys. Rev. B **64**(13), 134506 Sep (2001).
- [55] GERT EILENBERGER. *Transformation of Gorkov's equations for type II superconductors into transport-like equations*. Z. Physik **214**, 195–213 (1968).
- [56] KLAUS D. USADEL. *Generalized diffusion equation for superconducting alloys*. Phys. Rev. Lett. **25**, 507–509 (1970).
- [57] A.I. BUZDIN. *Direct coupling between magnetism and superconducting current in the Josephson  $\varphi_0$  junction*. Phys. Rev. Lett. **101**(10), 107005 (2008).
- [58] A. A. REYNOSO, GONZALO USAJ, C. A. BALSEIRO, D. FEINBERG, AND M. AVIGNON. *Anomalous Josephson current in junctions with spin polarizing quantum point contacts*. Phys. Rev. Lett. **101**(10), 107001 (2008).
- [59] D. SAINT-JAMES, D. SARMA, AND E. J. THOMAS. *Type II superconductivity*. Pergamon, New York (1969).
- [60] A.M. CLOGSTON. *Upper limit for the critical field in hard superconductors*. Phys. Rev. Lett. **9**, 266–267 (1962).
- [61] B.S. CHANDRASEKHAR. *A note on the maximal critical field of high-field superconductors*. Appl. Phys. Lett. **1**, 7–8 (1962).
- [62] Y. MATSUDA AND HIROSHI SHIMAHARA. *Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in heavy fermion superconductors*. J. Phys. Soc. Jap. **76**, 051005 (2007).
- [63] HIROSHI SHIMAHARA. *Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in a quasi-two-dimensional organic superconductor*. J. Phys. Soc. Jap. **66**, 541–544 (1997).
- [64] KUN YANG AND S.L. SONDHI. *Response of a  $d_{x^2-y^2}$  superconductor to a Zeeman magnetic field*. Phys. Rev. B **57**, 8566–8570 (1998).
- [65] A.B. VORONTSOV, J.A. SAULS, AND M.J. GRAF. *Phase diagram and spectroscopy of Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov states of two-dimensional d-wave superconductor*. Phys. Rev. B **72**, 184501 (2005).
- [66] MANUEL HOUZET AND ALEXANDRE I. BUZDIN. *Influence of the paramagnetic effect on the vortex lattice in 2D superconductors*. Europhys. Lett. **50**, 375–381 (2000).
- [67] KUN YANG AND D.F. AGTERBERG. *Josephson effect in Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconductors*. Phys. Rev. Lett. **84**, 4970–4673 (2000).
- [68] U. KLEIN, D. RAINER, AND H. SHIMAHARA. *Interplay of Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov and vortex states in two-dimensional superconductors*. J. Low Temp. **118**, 91–104 (2000).
- [69] MANUEL HOUZET AND ALEXANDRE BUZDIN. *Structure of the vortex lattice in the non-uniform Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state*. Phys. Rev. B **63**, 184521 (2001).

- [70] U. KLEIN. *Two-dimensional superconductors in a tilted magnetic field : states with finite Cooper-pair momentum*. Phys. Rev. B **69**, 134518 (2004).
- [71] KUN YANG AND A.H. MACDONALD. *Vortex-lattice of Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconductors*. Phys. Rev. B **70**, 094512 (2004).
- [72] KAZUMI MAKI. *Effect of Pauli paramagnetism on magnetic properties of high-field superconductors*. Phys. Rev. **148**, 362–369 (1966).
- [73] S. UJI, T. TERASHIMA, M. NISHIMURA, T. KONOIKE, K. ENOMOTO, H. CUI, H. KOBAYASHI, A. KOBAYASHI, H. TANAKI, M. TOKUMOTO, E.S. CHOI, T. TOKUMOTO, D. GRAF, AND J.S. BROKKS. *Vortex dynamics and the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in a magnetic-field induced organic superconductors*. Phys. Rev. Lett. **97**, 157001 (2006).
- [74] M. HOUZET, A. BUZDIN, L. BULAEVSKII, AND M. MALEY. *New superconducting phases in field-induced organic superconductor  $\lambda$ -(BETS) $_2$ FeCl $_4$* . Phys. Rev. Lett. **88**(22), 227001 May (2002).
- [75] L. BULAEVSKII, ALEXANDRE I. BUZDIN, AND M. MALEY. *Intrinsic pinning of vortices as a direct probe of the nonuniform Larkin-Ovchinnikov-Fulde-Ferrell state in layered superconductors*. Phys. Rev. Lett. **90**, 067003 (2003).
- [76] CIGDEM CAPAN, ANDREA BIANCHI, ROMAN MOVSHOVICH, A.D. CHRISTIANSON, A. MALINOWSKI, M.F. HUNDLEY, A. LACERDA, P.G. PAGLIUSO, AND J.L. SARRAO. *Anisotropy of thermal conductivity and possible signature of the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in CeCoIn*. Phys. Rev. B **70**, 134513 (2004).
- [77] JACQUES FLOUQUET, GEORG KNEBEL, DANIEL BRAITHWAITE, D. AOKI, JEAN-PASCAL BRISON, FREDERIC HARDY, ANDREW HUXLEY, STEPHANE RAYMOND, BERNARD SALCE, AND ILYA SHEIKIN. *Magnetism and superconductivity of heavy fermion matter*. C.R. Phys. **7**, 22–34 (2006).
- [78] VICTOR BARZYKIN AND L. P. GOR'KOV. *Gapless Fermi surfaces in superconducting CeCoIn $_5$* . Phys. Rev. B **76**(1), 014509 (2007).
- [79] A. V. CHUBUKOV AND L. P. GOR'KOV. *Spin resonance in three-dimensional superconductors : The case of CeCoIn $_5$* . Phys. Rev. Lett. **101**(14), 147004 (2008).
- [80] ROBERTO CASALBUONI AND GIUSEPPE NARDULLI. *Inhomogeneous superconductivity in condensed matter and QCD*. Rev. Mod. Phys. **76**, 263–320 (2004).
- [81] D.E. SHEEHY AND L. RADZIHOVSKY. *BCS-BEC crossover, phase transitions and phase separation in polarized resonantly-paired superfluids*. Ann. Phys. **322**, 1790–1924 (2007).
- [82] THORSTEN KÖHLER, KRZYSZTOF GÓRAL, AND PAUL S. JULIENNE. *Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances*. Rev. Mod. Phys. **78**(4), 1311 (2006).
- [83] MARTIN W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, CHRISTIAN H. SCHUNCK, S. M. F. RAUPACH, A. J. KERMAN, AND WOLFGANG KETTERLE. *Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance*. Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2005).
- [84] MARTIN W. ZWIERLEIN, J. R. ABO-SHAER, ANDRÉ SCHIROTZEK, CHRISTIAN H. SCHUNCK, AND WOLFGANG KETTERLE. *Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas*. Nature **435**, 1047–1051 (2005).
- [85] MARTIN W. ZWIERLEIN, ANDRÉ SCHIROTZEK, CHRISTIAN H. SCHUNCK, AND WOLFGANG KETTERLE. *Direct observation of the superfluid phase transition in ultracold Fermi gases*. Nature **442**, 54–58 (2006).

- [86] MARTIN W. ZWIERLEIN, ANDRÉ SCHIROTZEK, CHRISTIAN H. SCHUNCK, AND WOLFGANG KETTERLE. *Fermionic superfluidity with imbalanced spin populations*. Science **311**, 492–496 (2006).
- [87] G. ORSO. *Attractive Fermi gases with unequal spin populations in highly elongated traps*. Phys. Rev. Lett. **98**(7), 070402 (2007).
- [88] D.F. AGTERBERG AND KUN YANG. *The effect of impurities on Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconductors*. J. Phys. : Condens. Matter **13**, 9259–9270 (2001).
- [89] D. DENISOV, H. SHIMAHARA, AND ALEXANDRE I. BUZDIN. *Types of Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov states induced by anisotropy effects*. Phys. Rev. B **79**, 064505 (2009).
- [90] MANUEL HOUZET. *Phases non-uniforme dans les supraconducteurs et les systèmes de spin-Peierls*. Thèse de l’Université Bordeaux I (2001).
- [91] SUBIR SACHDEV. *Quantum phase transitions*. Cambridge University Press (1999).
- [92] SUBIR SACHDEV. *Colloquium : Order and quantum phase transitions in the cuprate superconductors*. Rev. Mod. Phys. **75**(3), 913–932 Jul (2003).
- [93] K.V. SAMOKHIN AND M.S. MAR’ENKO. *Quantum fluctuations in Larkin-Ovchinnikov-Fulde-Ferrell superconductors*. Phys. Rev. B **73**, 144502 (2006).
- [94] L. P. KADANOFF. *Scaling laws for Ising model near  $T_c$* . Physics **2**, 263 (1966).
- [95] L. P. KADANOFF. *Spin-spin correlations in the two-dimensional Ising model*. Nuovo Cim. B **44**, 276 – 305 (1966).
- [96] KENNETH G. WILSON. *The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem*. Rev. Mod. Phys. **47**(4), 773–840 Oct (1975).
- [97] A.I. LARKIN AND A.A. VARLAMOV. *The physics of superconductors, Vol. I : Conventional and high- $T_c$  superconductors* chapter 3, Fluctuation phenomena in superconductors, pages 95 – 231. K.H. Bennemann and J.B. Ketterson, Springer-Verlag (2003).
- [98] S. A. BRAZOVSKII. *Phase transition of an isotropic system to a nonuniform state*. Sov. Phys. JETP **41**, 85–89 (1975).
- [99] DENIS DALIDOVICH AND KUN YANG. *Fluctuation-driven first-order transition in Pauli-limited d-wave superconductors*. Phys. Rev. Lett. **93**, 247002 (2004).
- [100] MICHEL LE BELLAC. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*. CNRS Édition - EDP Sciences (1998).
- [101] LEV D. LANDAU AND EVGENNI M. LIFSHITZ. *Physique statistique, première partie*. Éditions Mir - Ellipses Editions (1994).
- [102] VITALY L. GINZBURG. *Some remarks on phase transitions of the second kind and the microscopic theory of ferroelectric materials*. Sov. Solid State **2**, 61 (1960).
- [103] A.P. LEVANYUK. *Contribution to the theory of light scattering near the second order phase-transition points*. Sov. Phys. JETP **36**, 571–576 (1959).
- [104] FRANÇOIS KONSCHELLE, JÉRÔME CAYSSOL, AND ALEXANDRE I. BUZDIN. *Anomalous fluctuation regimes at FFLO transition*. Europhys. Lett. **79**, 67001 (2007).
- [105] R. KUBO, M. TODA, AND N. HOSHITSUME. *Statistical physics II, Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer (1991).
- [106] NOËLLE POTTIER. *Physique statistique hors d’équilibre : Processus irréversibles linéaires*. CNRS Édition - EDP Sciences (2007).



- [107] NIKOLAI B. KOPNIN. *Theory of nonequilibrium superconductivity*. Oxford University Press (2001).
- [108] ALEXANDRE I. BUZDIN, Y. MATSUDA, AND T. SHIBAUCHI. *FFLO state in thin superconducting films*. Europhys. Lett. **80**, 67004 (2007).
- [109] FRANÇOIS KONSCHELLE, JÉRÔME CAYSSOL, AND ALEXANDRE I. BUZDIN. *Oscillations of magnetization and conductivity in anisotropic Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconductors*. Phys. Rev. B **79**(22), 224526 (2009).
- [110] LEV D. LANDAU, EVGENNI M. LIFSHITZ, AND LEV P. PITAEVSKII. *Physique statistique, Deuxième partie : Théorie de l'état condensé*. Éditions Mir (1990).
- [111] M. HOUZET AND V. P. MINEEV. *Electrodynamics of Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconducting state*. Phys. Rev. B **76**(22), 224508 (2007).
- [112] JEAN ZINN-JUSTIN. *Transition de phase et groupe de renormalisation*. CNRS Édition - EDP Sciences (2005).
- [113] A. A. ZYUZIN AND A. YU. ZYUZIN. *Anomalous transition temperature oscillations in the Larkin-Ovchinnikov-Fulde-Ferrell state*. Phys. Rev. B **79**(17), 174514 (2009).
- [114] MANFRED SIGRIST AND T. M. RICE. *Paramagnetic effect in high  $t_c$  superconductors - a hint for d-wave superconductivity*. J. Phys. Soc. Jap. **61**(12), 4283–4286 (1992).
- [115] C.C. TSUEI AND J.R. KIRTLEY. *Pairing symmetry in cuprate superconductors*. Rev. Mod. Phys. **72**, 969–1016 (2000).
- [116] J. J. A. BASELMANS, A. F. MORPURGO, B. J. VAN WEES, AND T. M. KLAPWIJK. *Reversing the direction of the supercurrent in a controllable Josephson junction*. Nature **397**, 43–45 (1999).
- [117] J. J. A. BASELMANS, B. J. VAN WEES, AND T. M. KLAPWIJK. *Controllable  $\pi$  SQUID*. Appl. Phys. Lett. **79**(18), 2940–2942 (2001).
- [118] A. F. VOLKOV AND A. ANISHCHANKA. *Alternative mechanism for the sign-reversal effect in superconductor-ferromagnet-superconductor Josephson junctions*. Phys. Rev. B **71**(2), 024501 (2005).
- [119] A. BAUER, J. BENTNER, M. APRILI, M. L. DELLA ROCCA, M. REINWALD, W. WEGSCHEIDER, AND C. STRUNK. *Spontaneous supercurrent induced by ferromagnetic  $\pi$  junctions*. Phys. Rev. Lett. **92**(21), 217001 (2004).
- [120] HERMANN SELLIER, CLAIRE BARADUC, FRANÇOIS LEFLOCH, AND ROBERTO CALEMCZUK. *Half-integer Shapiro steps at the  $0-\pi$  crossover of a ferromagnetic Josephson junction*. Phys. Rev. Lett. **92**(25), 257005 (2004).
- [121] T. KONTOS, M. APRILI, J. LESUEUR, F. GENÊT, B. STEPHANIDIS, AND R. BOURSIER. *Josephson junction through a thin ferromagnetic layer : Negative coupling*. Phys. Rev. Lett. **89**(13), 137007 Sep (2002).
- [122] J. S. JIANG, D. DAVIDOVIĆ, DANIEL H. REICH, AND C. L. CHIEN. *Oscillatory superconducting transition temperature in Nb/Gd multilayers*. Phys. Rev. Lett. **74**(2), 314–317 Jan (1995).
- [123] V. V. RYAZANOV, V. A. OBOZNOV, A. S. PROKOFIEV, V. V. BOLGINOV, AND A. K. FEOFANOV. *Superconductor-ferromagnet-superconductor  $\pi$ -junctions*. J. Low Temp. Phys. **136**(5), 385–400 (2004).
- [124] A. YU. RUSANOV, M. HESSELBERTH, J. AARTS, AND A. I. BUZDIN. *Enhancement of the superconducting transition temperature in Nb/permalloy bilayers by*

- controlling the domain state of the ferromagnet.* Phys. Rev. Lett. **93**(5), 057002 Jul (2004).
- [125] A. YU. RUSANOV, M. HESSELBERTH, AND J. AARTS. *Inverse spin switch effects in ferromagnet-superconductor-ferromagnet trilayers with strong ferromagnets.* Phys. Rev. B **73**(6), 060505 (2006).
- [126] SUPRIYO DATTA. *Electronic transport in mesoscopic systems.* Cambridge University press (1997).
- [127] R. S. KEIZER, S. T. B. GOENNENWEIN, T. M. KLAPWIJK, G. MIAO, AND A. GUPTA. *A spin triplet supercurrent through the half-metallic ferromagnet CrO<sub>2</sub>.* Nature **439**(16), 825–827 Feb (2006).
- [128] A. I. LARKIN AND YU. N. OVCHINNIKOV. *Quasiclassical method in the theory of superconductivity.* Sov. Phys. JETP **28**, 1200–1205 (1969).
- [129] ALBERT MESSIAH. *Mécanique quantique.* Édition Dunod (2003).
- [130] ALEXEI A. ABRIKOSOV, LEV P. GOR'KOV, AND I.E. DZIALOSHINSKY. *Methods of quantum field theory in statistical physics.* Prentice Hall (1963).
- [131] A. L. SHELANKOV. *On the derivation of quasiclassical equations for superconductors.* J. Low Temp. Phys. **60**, 29–44 (1985).
- [132] VENKAT CHANDRASEKHAR. *The physics of superconductors, Vol. II : Superconductivity in Nanostructures, high-T<sub>c</sub> and novel superconductors, Organic superconductors* chapter 3, Proximity-coupled systems : quasiclassical theory of superconductivity. K.H. Bennemann and J.B. Ketterson, Springer-Verlag (2003).
- [133] K. K. LIKHAREV. *Superconducting weak links.* Rev. Mod. Phys. **51**(1), 101–159 Jan (1979).
- [134] A. F. ANDREEV. *The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors.* Sov. Phys. JETP **19**, 1228–1231 (1964).
- [135] D. SAINT-JAMES. *Excitations élémentaires au voisinage de la surface de séparation d'un métal normal et d'un métal supraconducteur.* J. Phys. (Paris) **25**, 899–905 (1964).
- [136] G. E. BLONDER, M. TINKHAM, AND T. M. KLAPWIJK. *Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions : Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion.* Phys. Rev. B **25**(7), 4515–4532 Apr (1982).
- [137] ÉRIC AKKERMANS AND GILLES MONTAMBAUX. *Physique mésoscopique des électrons et des photons.* CNRS Éditions - EDP Sciences (2004).
- [138] PING SHENG. *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena.* Springer (2006).
- [139] I. O. KULIK. *Macroscopic quantization and the proximity effect in SNS junctions.* Sov. Phys. JETP **30**, 944 (1970).
- [140] C.W.J. BEENAKKER. *Special effects in superconductivity* chapter Three "universal" mesoscopic Josephson effects. H. Fukuyama and T. Ando (Springer, Berlin, 1992) (1992).
- [141] C. W. J. BEENAKKER. *Random-matrix theory of quantum transport.* Rev. Mod. Phys. **69**(3), 731–808 Jul (1997).
- [142] A.V. ZAITSEV. *Quasiclassical equations of the theory of superconductivity for contiguous metals and the properties of constricted microcontacts.* Sov. Phys. JETP **59**, 1015–1024 (1984).

- [143] F. S. BERGERET, A. F. VOLKOV, AND K. B. EFETOV. *Enhancement of the Josephson current by an exchange field in superconductor-ferromagnet structures.* Phys. Rev. Lett. **86**(14), 3140–3143 Apr. (2001).
- [144] JÉRÔME CAYSSOL AND GILLES MONTAMBAUX. *Exchange-induced ordinary reflection in a single-channel superconductor-ferromagnet-superconductor junction.* Phys. Rev. B **70**(22), 224520 (2004).
- [145] JÉRÔME CAYSSOL AND GILLES MONTAMBAUX. *Incomplete Andreev reflection in a clean superconductor-ferromagnet-superconductor junction.* Phys. Rev. B **71**(1), 012507 (2005).
- [146] J. LINDER AND A. SUDBØ. *Signatures of retroreflection and induced triplet electron-hole correlations in ferromagnet-s-wave-superconductor structures.* Phys. Rev. B **75**(13), 134509 (2007).
- [147] MATTHIAS ESCHRIG AND TOMAS LÖFWANDER. *Triplet supercurrents in clean and disordered half-metallic ferromagnets.* Nature Physics **4**(2), 138 – 143 (2008).
- [148] B. BÉRI, J. N. KUPFERSCHMIDT, C. W. J. BEENAKKER, AND P. W. BROUWER. *Quantum limit of the triplet proximity effect in half-metal–superconductor junctions.* Phys. Rev. B **79**(2), 024517 (2009).
- [149] N. M. CHTCHELKATCHEV, W. BELZIG, YU. V. NAZAROV, AND C. BRUDER.  *$\pi$ -0 transition in superconductor-ferromagnet-superconductor junctions.* JETP Lett. **74**, 323–327 (2001).
- [150] ALEXANDRE I. BUZDIN. *Non-uniform superconductivity in S/F nanostructures.* J. Phys. IV **131**, 213–216 (2005).
- [151] A. I. BUZDIN AND A. E. KOSHELEV. *Periodic alternating 0- and  $\pi$ -junction structures as realization of  $\varphi$ -Josephson junctions.* Phys. Rev. B **67**(22), 220504 Jun (2003).
- [152] E. GOLDOBIN, D. KOELLE, R. KLEINER, AND A. BUZDIN. *Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation : Properties of  $\varphi$  junctions.* Phys. Rev. B **76**(22), 224523 (2007).
- [153] R. ZIKIC, L. DOBROSAVLJEVIĆ-GRUJIĆ, AND B. VUJIČIĆ. *Temperature-induced 0- $\pi$  coexistence in clean superconductor-ferromagnet-superconductor Josephson junctions.* Phys. Rev. B **79**(5), 052503 (2009).
- [154] M. J. M. DE JONG AND C. W. J. BEENAKKER. *Andreev reflection in ferromagnet-superconductor junctions.* Phys. Rev. Lett. **74**(9), 1657–1660 Feb (1995).
- [155] BRIAN DAVID JOSEPHSON. *Superconductivity (in two volumes), vol. 1* chapter 9, Weakly coupled superconductors, pages 423 – 448. R.D Parks, Marcel Dekker, Inc. (1968).
- [156] FRANÇOIS KONSCHELLE, JÉRÔME CAYSSOL, AND ALEXANDRE I. BUZDIN. *Nonsinusoidal current-phase relation in strongly ferromagnetic and moderately disordered SFS junctions.* Phys. Rev. B **78**(13), 134505 (2008).
- [157] J. PFEIFFER, M. KEMMLER, D. KOELLE, R. KLEINER, E. GOLDOBIN, M. WEIDES, A. K. FEOFANOV, J. LISENFELD, AND A. V. USTINOV. *Static and dynamic properties of 0,  $\pi$ , and 0- $\pi$  ferromagnetic Josephson tunnel junctions.* Phys. Rev. B **77**(21), 214506 (2008).
- [158] R. ZIKIC AND L. DOBROSAVLJEVIĆ-GRUJIĆ. *Superharmonic Josephson relations in unconventional superconductor junctions with a ferromagnetic barrier.* Phys. Rev. B **75**(10), 100502 (2007).

- [159] LESLIE L. FOLDY AND SIEGFRIED A. WOUTHUYSEN. *On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit*. Phys. Rev. **78**(1), 29–36 Apr (1950).
- [160] R. J. ELLIOTT. *Theory of the effect of spin-orbit coupling on magnetic resonance in some semiconductors*. Phys. Rev. **96**(2), 266–279 Oct (1954).
- [161] R. J. ELLIOTT. *Spin-orbit coupling in band theory - character tables for some "double" space groups*. Phys. Rev. **96**(2), 280–287 Oct (1954).
- [162] MILDRED S. DRESSELHAUS, ADO JORIO, AND GENE DRESSELHAUS. *Group theory : application to the physics of condensed matter*. Springer-Verlag (2008).
- [163] R. WINKLER. *Spin-orbit coupling effects in two-dimensional electron and hole systems*. Springer, New York (2003).
- [164] V. P. MINEEV AND M. SIGRIST. *Introduction to superconductivity in metals without inversion center*. arXiv :0904.2962 (2009).
- [165] G. DRESSELHAUS. *Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures*. Phys. Rev. **100**(2), 580–586 (1955).
- [166] E.I. RASHBA. *Properties of semiconductors with an extremum loop*. Sov. Phys. Solid State (1960).
- [167] V. P. MINEEV AND K. V. SAMOKHIN. *Helical phases in superconductors*. JETP **78**(3), 401–409 (1994).
- [168] E. BAUER, G. HILSCHER, H. MICHOR, CH. PAUL, E. W. SCHEIDT, A. GRIBANOV, YU. SEROPEGIN, H. NOËL, M. SIGRIST, AND P. ROGL. *Heavy fermion superconductivity and magnetic order in noncentrosymmetric CePt<sub>3</sub>Si*. Phys. Rev. Lett. **92**(2), 027003 Jan (2004).
- [169] V. M. EDELSTEIN. *Gap splitting in a two-dimensional superconductor without an inversion center*. JETP Lett. **48**, 395–397 (1988, note that the author name is Édel'shtein in the published version).
- [170] V. M. EDELSTEIN. *Characteristic of the Cooper pairing in two-dimensional non-centrosymmetric electron systems*. Sov. Phys. JETP **68**(6), 1244–1249 (1989, note that the author name is Édel'shtein in the published version).
- [171] LEV P. GOR'KOV AND EMMANUEL I. RASHBA. *Superconducting 2D system with lifted spin degeneracy : Mixed singlet-triplet state*. Phys. Rev. Lett. **87**(3), 037004 Jul (2001).
- [172] K. V. SAMOKHIN AND V. P. MINEEV. *Gap structure in noncentrosymmetric superconductors*. Phys. Rev. B **77**(10), 104520 (2008).
- [173] I. A. SERGIENKO AND S. H. CURNOE. *Order parameter in superconductors with nondegenerate bands*. Phys. Rev. B **70**(21), 214510 Dec (2004).
- [174] VICTOR BARZYKIN AND LEV P. GOR'KOV. *Inhomogeneous stripe phase revisited for surface superconductivity*. Phys. Rev. Lett. **89**(22), 227002 Nov (2002).
- [175] K. V. SAMOKHIN. *Magnetic properties of superconductors with strong spin-orbit coupling*. Phys. Rev. B **70**(10), 104521 Sep (2004).
- [176] R. P. KAUR, D. F. AGTERBERG, AND M. SIGRIST. *Helical vortex phase in the noncentrosymmetric CePt<sub>3</sub>Si*. Phys. Rev. Lett. **94**(13), 137002 Apr (2005).
- [177] V. P. MINEEV AND K. V. SAMOKHIN. *Introduction to unconventional superconductivity*. Gordon and Breach Science Publishers (1998).

- [178] V. P. MINEEV AND K. V. SAMOKHIN. *Nonuniform states in noncentrosymmetric superconductors : Derivation of Lifshitz invariants from microscopic theory*. Phys. Rev. B **78**(14), 144503 (2008).
- [179] MANUEL HOUZET. *Ferromagnetic Josephson junction with precessing magnetization*. Phys. Rev. Lett. **101**(5), 057009 (2008).
- [180] A. F. VOLKOV AND K. B. EFETOV. *Hybridization of spin and plasma waves in Josephson tunnel junctions containing a ferromagnetic layer*. Phys. Rev. Lett. **103**(3), 037003 (2009).
- [181] S. HIKINO, M. MORI, S. TAKAHASHI, AND S. MAEKAWA. *FMR induced Josephson current in a superconductor/ferromagnet/superconductor junction*. J. Phys. Soc. Jap. **77**, 053707 (2008).
- [182] RICHARD P. FEYNMAN. *Le cours de physique de Feynman, tome 3. Mécanique quantique*. Édition Dunod (2003).
- [183] THOMAS L. GILBERT. *A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials*. IEEE Trans. magn. **40**, 3443–3449 (2004).
- [184] CHARLES KITTEL. *Physique de l'état solide*. Dunod (1998).
- [185] BURKARD HILLEBRANDS AND KAMEL OUNADJELA. *Spin dynamics in confined magnetic structures I*. Springer (2002).
- [186] BURKARD HILLEBRANDS AND KAMEL OUNADJELA. *Spin dynamics in confined magnetic structures II*. Springer (2003).
- [187] BURKARD HILLEBRANDS AND ANDRÉ THIAVILLE. *Spin dynamics in confined magnetic structures III*. Springer (2002).

## Supraconductivité en présence de forts effets paramagnétique et spin-orbite.

L'état supraconducteur étant un condensat de paires de Cooper constitué d'électrons de moments et de spins opposés, il peut être fortement influencé par des effets de spin. Au cours de cette thèse, nous étudions l'effet d'un fort champ d'échange et d'un effet spin-orbite de type Rashba sur les propriétés supraconductrices.

Dans une première partie, on étudie les effets associés à l'interaction entre supraconductivité et fort champ d'échange, se caractérisant par une transition de phase vers un état supraconducteur inhomogène découvert par Fulde, Ferrell, Larkin et Ovchinnikov (FFLO). On étudie tout particulièrement les fluctuations supraconductrices à l'approche de la transition de phase. On montre que ces fluctuations peuvent servir de révélateur à cette phase. Notamment, la capacité calorifique et la paraconductivité divergent de façon caractéristique à la transition vers un état modulé. On décrit également comment les effets paramagnétiques modifient les fluctuations de l'aimantation, annulant la réponse diamagnétique ou produisant des oscillations entre réponse para- et dia-magnétique.

La seconde partie est dévolue aux jonctions supraconducteur-ferromagnétique (S/F). Dans les jonctions Josephson S/F/S, le champ d'échange donne lieu à des oscillations du courant critique en fonction de la longueur de la jonction, caractérisées par une alternance des états  $0$  et  $\pi$ . On prédit une transition entre les états  $0$  et  $\pi$  induite par la température, même dans la limite ballistique. Dans cette limite ballistique, on montre également que le courant de Josephson s'atténue sous la forme de lois de puissance en fonction de la longueur de la jonction, alors que le cas diffusif présente une atténuation exponentielle. On étudie ensuite la seconde harmonique de la relation courant-phase en présence d'une faible quantité d'impuretés.

La dernière partie traite des effets de proximité lorsque les deux effets paramagnétique et spin-orbite sont présents dans une jonction Josephson. On montre que l'association d'une interaction Rashba et d'un champ d'échange induit un couplage direct entre les ordres magnétique et supraconducteur. En particulier, ce couplage permet de générer toute la dynamique magnétique par l'application d'une simple tension électrique.

**Mots-clefs :** supraconductivité, effet paramagnétique, phase FFLO, effet de proximité supraconducteur-ferromagnétique, jonction  $\pi$ , interaction spin-orbite.

## Superconductivity under strong paramagnetic and spin-orbit effects.

The superconducting state being a Cooper pair condensate built on opposite spin and momentum electrons, it can be strongly influenced by any spin effect. In this thesis, we investigate the roles of strong paramagnetic and spin-orbit effects on superconducting properties.

In a first part, the interplay between paramagnetic effect and bulk superconductivity is studied, leading to the modulated Fulde, Ferrell, Larkin and Ovchinnikov phase (FFLO phase). We focus on superconducting fluctuations near to the FFLO state. We show that these fluctuations can serve as a smoking gun for this phase. Noticeably, the fluctuation heat capacity and paraconductivity diverge in a characteristic way when approaching the phase transition towards a modulated state. Moreover, the fluctuation induced magnetization is predicted to be drastically quenched or to oscillate between dia- and para-magnetic responses.

The second part is devoted to superconductor-ferromagnetic (S/F) junctions. In S/F/S Josephson junctions, the exchange field is responsible for the critical current oscillation, characterized by alternative  $0$ - and  $\pi$ -states, with respect to the junction length. We predict a temperature induced ( $0 - \pi$ ) state transition, even in the ballistic case. Moreover, the ballistic case exhibits some power law decays of the Josephson current, in contrast to the exponentially decaying current in dirty limit. The moderately dirty limit is then investigated, and the second harmonic of the current-phase relation is established.

The last part deals with proximity effects when both paramagnetic and spin-orbit interactions are present in a Josephson junction. We show that the association of both Rashba interaction and exchange field induces a direct coupling between magnetic and superconducting orders. Particularly, this coupling generates the complete magnetization dynamics by applying an appropriate d.c. voltage.

**Keywords :** superconductivity, paramagnetic effect, FFLO phase, superconductor-ferromagnet proximity effect,  $\pi$ -junction, spin-orbit interaction.