Options exotiques dans les modèles exponentiels de Lévy

El Hadj Aly Dia

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

présentée par

El Hadj Aly DIA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Options exotiques dans les modèles exponentiels de Lévy

Soutenue le 01 juillet 2010 devant le jury :

Rama CONT	Rapporteur
Damien LAMBERTON	Directeur de thèse
Bernard LAPEYRE	Examinateur
Martijn R. PISTORIUS	Rapporteur
Peter TANKOV	Examinateur

A mes parents,

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de la valorisation des options exotiques dans les modèles exponentiels de Lévy.
Dans le premier chapitre nous définissons les processus de Lévy, et nous présentons leurs différentes propriétés.
Dans le deuxième chapitre nous rappellons d'abord les résultats sur l'existence et la régularité de densité des processus de Lévy. Pour le processus supremum d'un processus de Lévy, nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence et la régularité de densité (théorèmes 2.17, 2.19 et 2.23).
Dans le troisième chapitre nous étudions les erreurs entre le supremum continu d'un processus de Lévy et sa version discrète. Dans la première partie du chapitre, nous nous interéssons à l'erreur L_1 (théorèmes 3.4, 3.8 et 3.11) en utilisant une reformulation de l'identité de Spitzer pour les processus de Lévy (proposition 3.2). Dans la deuxième partie, nous étendons le théorème d'Asmussen-Glynn-Pitman aux processus de Lévy à activité finie et à variation infinie (théorème 3.14). La dernière partie de ce chapitre étudie le cas particulier des processus de Poisson composé (théorème 3.15).
Dans le quatrième chapitre nous nous intéressons aux erreurs d'approximation des petits sauts des processus de Lévy à activité infinie. La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'étude de la troncation des petits sauts. Dans la troisième partie nous étudions l'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien en utilisant le théorème 4.23, qui résulte de l'application du théorème de plongement de Skorokhod. Dans la dernière partie, nous comparons les deux méthodes d'approximation des petits sauts.
Dans le cinquième chapitre nous appliquons les résultats des chapitres précédents à la valorisation des options exotiques (barrière, lookback et asiatique). Nous étudions d'abord le comportements asymptotique des erreurs dues à la discrétisation. Nous montrons que, dans les cas des options lookback et barrière, des corrections sont possibles. Le résultat principal permettant la correction des options à barrière est le théorème 5.1. Nous étudions également les erreurs dues à l'approximation des petits sauts. Dans la dernière partie de ce chapitre, en utilisant le théorème 5.60 et le lemme 5.61 (qui est une conséquence du théorème 2.23), nous évaluons les options lookback et barrière digitale (continues) par des formules semi-fermées, sous l'hypothèse d'absence de saut positif.
Enfin, dans le sixième chapitre nous proposons des méthodes de Monte-Carlo pour calculer les prix de certaines options exotiques. Dans le cas activité finie, nous appliquons les corrections obtenues dans le cinquième chapitre, et nous utilisons des techniques de réduction de variance. Dans le cas activité infinie, nous proposons une méthode pour calculer les prix de ces options de façon approchée. Dans le cas des options asiatiques, nous donnons des formules simples qui permettent de simuler ces options lorsque le processus de Lévy initiale n'a pas de partie Brownienne.

Remerciements

Je voudrais d'abord exprimer toute ma gratitude au professeur Damien Lamberton, mon directeur de thèse, pour sa disponibilité, son soutien et ses encouragements tout au long de cette thèse. Je le remercie aussi pour tout le temps qu'il a consacré à la correction de ce mémoire de thèse.

Je remercie également Rama Cont et Martijn Pistorius pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Je tiens aussi à remercier Bernard Lapeyre et Peter Tankov pour avoir accepté de faire partie du jury. Je leur suis reconnaissant, à tous, pour leurs précieuses remarques et commentaires.

Merci à l'ensemble du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'Université Paris-Est. Notamment, tous les doctorants que j'ai côtoyés durant cette thèse.

Je remercie enfin l'équipe Mathfi, notamment Agnès Sulem et Antonino Zanette, de m'avoir permis d'implémenter, dans le logiciel Premia, les méthodes numériques developpées dans cette thèse.

Table des matières

Introduction

L'observation des prix des actifs financiers sur les marchés organisés montre la présence, à certaines dates, de grandes variations de prix entre deux instants d'observation. Ces variations de prix sont d'autant plus grandes que l'échelle de temps est réduite. Ce phénomène n'est pas explicable par les modèles continus, à moins de considérer des valeurs de la volatilité extrêmement grande. L'usage de tels modèles conduit aussi à la redondance des options. Dans un marché où les modèles sont continus, les options peuvent être en général répliquées. La présence de discontinuités dans les modèles permet de justifier l'existence des options et d'expliquer les grandes variations de prix observées sur les marchés.

Inaugurés par Merton en 1976 ([34]), les modèles financiers discontinus ont depuis engendré d'innombrables articles et ouvrages en tout genre. Parmi les modèles discontinus, le plus connu est sans aucun doute le modèle exponentiel de Lévy. Dans ce modèle, le prix d'un actif de valeur initiale S_0 est donné à un instant t par

$$S_t = S_0 e^{X_t},$$

où X est un processus de Lévy. Les propriétés des processus de Lévy sont étudiées dans [8] et [43]. Les méthodes de valorisation des actifs dérivés utilisant les modèles exponentiels de Lévy sont étudiées dans [17], [16], [4], [23], [31], [36] et [29]. Les modèles exponentiels de Lévy ont l'avantage d'être relativement simples pour permettre une valorisation rapide des principaux actifs dérivés liquides, et sont assez riches pour capturer d'importants phénoménes empiriques observés sur le marché, notamment la présence de queues de distributions épaisses sur les lois des taux de rendement des actifs et le phénomène de *smile* (*ou skew*) observé sur le marché des options.

Le marché des options a, par ailleurs, vu ces dernières années l'émergence de certains produits dérivés dits exotiques, notamment, les options barrière, lookback et asiatique. Ces produits dérivés dépendent de la trajectoire (jusqu'à la maturité) de l'actif sous-jacent. La valorisation de ces options est en général beaucoup plus complexe que dans le cadre du célèbre modèle de Black-Scholes. Lorsque les options considérées sont discrètes, ne dépendant de la trajectoire du sous-jacent qu'à certaines dates prédeterminées, des techniques basées sur la FFT donnent de bons résultats pour certains modèles dans le cas des options barrière et lookback. Nous pouvons citer par exemple [12], [13], [19], [20], [40] et [47]. Le cas continu a été étudié par [38]. Cependant leurs résultats sont difficilement exploitables numériquement. Une méthode basée sur les équations intégro-différentielles est proposée dans [18]. Deux nouvelles méthodes d'évaluation des options barrières continues sont étudiées dans [23] et [36]. L'évaluation des options asiatiques discrètes est étudiée dans [15] et [21].

La valorisation des options exotiques continues de façon "exacte" est très difficile (voir impossible) dans les modèles exponentiels de Lévy. Comme exemples de payoffs d'options exotiques, nous avons

– le call barrière *Up and Out*

$$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\sup_{0\leq t\leq T} S_t < H\}},$$

– le put lookback (à strike flottant)

$$\left(\sup_{0\leq t\leq T} S_t - S_T\right),$$

– le call asiatique à moyenne arithmétique et à *strike* fixe

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)^+$$

La constante T désigne la maturité de l'option. Dans le premier et dernier cas, K est appelé le *strike* de l'option. Dans le premier cas, H est la barrière de l'option. La complexité des payoffs rend difficile la valorisation de ces options par des formules fermées ou semi-fermées (numériquement exploitable). Sous l'hypothèse que les sauts de l'actif sous-jacent sont tous négatifs, nous montrerons que pour les options lookback et barrière digitale, nous avons des formules semi-fermées. Dans le cas où le processus de Lévy X est à activité finie et à variation infinie, une technique que l'on retrouve dans *[Cont-Tankov(2004), exemple 6.1]*permet de simuler exactement le payoff des options à barrière continue par des méthodes de Monte-Carlo. En général, il faut recourir à des techniques qui permettent d'approcher les prix de ces dérivés, ce qui engendre des erreurs. Nous étudierons le comportement asymptotique de ces erreurs. Dans certains cas ces erreurs peuvent être corrigées de sorte à obtenir une convergence plus rapide vers la valeur "exacte" recherchée. Nous proposons aussi des méthodes permettant d'évaluer les prix des options exotiques par des techniques de Monte-Carlo. Cette thèse est divisée en six chapitres.

Le premier chapitre introduit les processus de Lévy. Nous verrons comment nous pouvons les caractériser, notamment par la représentation de Lévy-Khintchine et la décomposition d'Itô-Lévy. A la fin de ce chapitre, nous nous intéresserons au cas particulier des processus de Lévy réels qui sont utilisés dans cette thèse. Nous donnons notamment quelques notations et définitions qui nous seront utiles pour la suite.

Le deuxième chapitre traite de la distribution des processus de Lévy. Nous rappellerons d'abord les résultats de [43] sur l'existence et la régularité de densité des processus de Lévy. Pour le processus supremum d'un processus de Lévy, seule la continuité de la loi a été démontrée par [43]. Rappelons que pour un processus de Lévy réel X, son processus supremum est défini par

$$M_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s,\ \forall t \geq 0$$

Nous montrons que sous certaines conditions classiques, la densité de M_t existe pour tout $t > 0$ (théorème 2.17). Et que cette densité est bornée lorsque X est un processus à variation infinie et activité finie (théorème 2.19). Nous établissons aussi la régularité de la densité sous l'hypothèse d'absence de saut positif (théorème 2.23).

Le troisième chapitre est consacré à l'estimation des erreurs entre le supremum M_t d'un processus de Lévy et sa version discrète définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $M_t^n = \sup_{0\leq k\leq n} X_{\frac{kt}{n}}$. Nous nous intéressons d'abord à la quantité $\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right)$. Asmussen-Glynn-Pitman (1995) et Broadie-Glasserman-Kou (1999) ont traité le cas Brownien en utilisant l'identité de Spitzer. Nous reformulerons d'abord cette identité, pour les processus de Lévy (proposition 3.2), et nous l'utilisons pour trouver un développement limité de l'erreur considérée sous certaines conditions (théorèmes 3.4, 3.8 et 3.11). Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous allons étendre le théorème d'Asmussen-Glynn-Pitman à certains processus de Lévy. Ce théorème stipule que lorsque X est un mouvement Brownien la suite $\sqrt{n}\left(M_t - M_t^n\right)$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire. Nous démontrerons que ce résultat reste vrai pour les processus de Lévy à activité finie dont le coefficient de diffusion est non nul (théorème 3.14). La dernière partie de ce chapitre étudie le cas particulier des processus de Poisson composé. Le résultat principal de cette partie est que, si f est une fonction bornée dérivable avec une dérivée bornée, alors

$$\mathbb{E}\left(f\left(M_t\right) - f\left(M_t^n\right)\right) = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où α est une constante que nous expliciterons (théorème 3.15).

Le quatrième chapitre s'intéresse aux erreurs d'approximations des petits sauts des processus de Lévy à activité infinie. Un tel processus a, sur chaque intervalle de temps fini, une infinité de (petits) sauts. Simuler exactement ce processus est en général impossible. Un moyen de remédier à ce problème est de *tronquer* les petits sauts ou de les remplacer par un mouvement Brownien (Asmussen-Rosinsky(2001)). En fait nous allons nous donner un seuil $\varepsilon > 0$, et enlever tous les sauts de X plus petit que ε en valeur absolue. Et ensuite remplacer X par ce nouveau processus ou ajouter en plus un mouvement Brownien avec un coefficient bien choisi. Ce qui introduit un biais. Nous étudions les majorations de ces erreurs, et nous obtenons un développement limité dans le cas non *path-dependent*. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée au cas de la troncation des petits sauts. Dans la troisième partie nous allons estimer les erreurs d'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien, en utilisant le théorème 4.23 qui résulte de l'application du théorème de plongement de Skorokhod. Dans la dernière partie nous comparerons les différentes méthodes d'approximation des petits sauts.

Le cinquième chapitre est divisé en trois parties. La première étudie les relations entre les options continues et les options discrètes pour les options barrière, lookback et asiatique. C'est l'application financière du troisième chapitre. Nous étudions donc les comportements asymptotiques des erreurs dues à la discrétisation. Nous montrons que, dans les cas des options lookback et barrière, des corrections sont possibles lorsque le processus de Lévy est un processus *jump-diffusion*. Ces corrections sont similaires à celles obtenues par Broadie-Glasserman-Kou ([10], [11], [27]) dans le modèle de Black-Scholes. Le résultat principal permettant la correction des options à barrière est le théorème 5.1. Dans la quatrième partie, nous étudions les erreurs dues à la troncation des petits sauts ou leur approximation par un mouvement Brownien. Nous nous intéresserons aux options barrière, lookback, asiatique et américaine. Dans la dernière partie de ce chapitre, en utilisant le théorème 5.60 et le lemme 5.61 (qui est une conséquence du théorème 2.23), nous évaluons les options lookback et barrière digitale (continues) par des formules semi-fermées, sous l'hypothèse d'absence de saut positif.

Le sixième chapitre est consacré à l'aspect numérique. Nous proposons des méthodes de Monte-Carlo pour calculer certaines options exotiques. Dans le cas activité finie, nous appliquons les corrections obtenues dans le chapitre 5, et nous utilisons des techniques de réduction de variance. Dans le cas activité infinie, nous proposons une méthode pour calculer les prix de ces options de façon approchée. Nous approximons le processus X par un processus à activité finie défini dans le quatrième chapitre. Pour simuler les sauts du processus approché, nous estimons la fonction réciproque de fonction de répartition. Cette estimation dépend du modèle considéré. Nous les expliciterons pour les modèles VG, NIG et CGMY, et donnerons des exemples de simulations pour les options lookback, barrière et asiatique. Dans le cas des options asiatiques, nous donnons des formules simples qui permettent de simuler ces options lorsque le processus de Lévy initiale n'a pas de partie Brownienne.

Chapitre 1

Préliminaires sur les processus de Lévy

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tous les objets aléatoires que nous allons considérer seront, sauf indication contraire, définis par rapport à cet espace. Les définitions et les résultats présentés dans cette partie sont principalement tirés de *[Sato(2005)]*.

1.1 Définition des processus de Lévy

Un processus de Lévy est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, et dont les trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche (càdlàg).

Définition 1.1 *Un processus X défini sur $\mathbb{R}^d$ est un processus de Lévy s'il vérifie les conditions suivantes*

1. *Pour tout $n \geq 1$ et pour tous $t_0, t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^+$ avec $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, les variables aléatoires X_{t_0}, $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes (indépendance des accroissement).*
2. *$X_0 = 0$ p.s.*
3. *La distribution de $X_{t+s} - X_s$ ne dépend pas de s (accroissements stationnaires).*
4. *X est stochastiquement continu.*
5. *Il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ est continu à droite sur $t \geq 0$ et limité à gauche sur $t > 0$ (trajectoires càdlàg).*

La notion de continuité stochastique est définie comme suit.

Définition 1.2 *([Sato(2005), définition 1.5]*) Un processus stochastique X défini sur $\mathbb{R}^d$ est dit stochastiquement continue si pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \to t} \mathbb{P}[|X_t - X_s| > \varepsilon] = 0.$$

Notons que lorsque les conditions (1) à (3) et (5) sont satisfaites alors la condition (4) est automatiquement vérifiée. Un processus stochastique qui vérifie seulement les conditions de (1) à (4) est appelé processus de Lévy en loi. Un processus stochastique qui vérifiant les conditions de (1), (2), (4) et (5) est appelé processus additif. Un processus additif en loi est un processus qui vérifie les condition (1), (2) et (4). Un exemple très connu des processus de Lévy est le processus de Poisson.

Définition 1.3 *Un processus stochastique réel X est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si c'est un processus de Lévy et pour tout $t > 0$, X_t a une distribution de Poisson d'espérance λt.*

Remarque 1.4 *On peut construire un processus de Poisson de la façon suivante. Soient $(z_n)_{n \geq 0}$ des v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. Posons pour tout $n \geq 0$*

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Alors le processus X définit pour tout $t \geq 0$, par

$$X_t(\omega) = n \ si \ W_n(\omega) \leq t < W_{n+1}(\omega),$$

est un processus de Poisson de paramètre λ.

Les processus de Poisson sont des processus à sauts. La taille de leurs sauts est déterministe et vaut 1. Un processus qui généralise les processus de Poisson est le Poisson composé. Un processus de Poisson composé X de paramètre λ et F, est défini pour tout $t \geq 0$ par

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où N est un processus de Poisson de paramètre λ et les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont des v.a. i.i.d. de loi commune F.
Le plus célèbre des processus de Lévy n'est autre que le mouvement Brownien. En effet un processus X défini sur $\mathbb{R}^d$ est un mouvement Brownien ou un processus de Wiener, si c'est un processus de Lévy et si pour tout $t > 0$, X_t a une distribution gaussienne de moyenne 0 et de matrice de covariance tI (I étant la matrice identité de $\mathbb{R}^d$) et il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ est continu en t. Un mouvement Brownien défini sur $\mathbb{R}^d$ est aussi appelé un mouvement Brownien de dimension d.

1.2 Formule de Lévy-Khintchine

Nous allons établir le lien entre processus de Lévy et distribution indéfiniment divisible, et déduire la forme explicite de la fonction caractéristique d'un processus de Lévy. Pour la suite, si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, on désignera par $\hat{\mu}$ sa fonction caractéristique, et μ^n la n-ème puissance de convolution de μ.

Définition 1.5 *Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ est indéfiniment divisible si, pour tout entier $n > 0$, il existe une mesure de probabilité μ_n sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mu = (\mu_n)^n$.*

Voici le lien entre les processus de Lévy et les distributions indéfiniment divisible.

Théorème 1.6 *([Sato(2005), théorème 7.10])*

1. Si X est un pocessus de Lévy en loi sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $t \geq 0$, P_{X_t} (la loi de X_t) est indéfiniment divisible.
2. Inversement, si μ est une distribution indéfiniment divisible sur $\mathbb{R}^d$, alors il existe un pocessus de Lévy en loi tel que $P_{X_1} = \mu$.
3. Si X et X' sont des processus de Lévy en loi sur $\mathbb{R}^d$ tels que $P_{X_1} = P_{X'_1}$, alors les processus X et X' ont même loi.

La représentation de Lévy-Khintchine permet de caractériser les distributions indéfiniment divisible.

Théorème 1.7 *([Sato(2005), théorème 8.1])*

1. Si μ est une distribution indéfiniment divisible sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $z \in \mathbb{R}^d$

$$\hat{\mu}(z) = exp\left[i < \gamma, z > -\frac{1}{2} < z, Az > + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i<z,x>} - 1 - i < z, x > \mathbb{1}_{|x|\leq 1} \right) \nu(dx) \right], \qquad (1.2.1)$$

   où $\gamma \in \mathbb{R}^d$, A est une matrice $d \times d$ symétrique et positive, ν est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant

$$\nu(\{0\}) = 0 \ et \ \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 \wedge |x|^2\right) \nu(dx) < \infty. \qquad (1.2.2)$$

2. La représentation de $\hat{\mu}$ dans (1) par γ, A et ν est unique.
3. Inversement, si $\gamma \in \mathbb{R}^d$, A une matrice $d \times d$ symétrique et positive, et ν une mesure satifaisant (1.2.2), alors il existe une distribution indéfiniment divisible μ dont la fonction caractéristique est donnée par (1.2.1).

On appellera (γ, A, ν) le triplet caractéristique de μ. C'est aussi le triplet caractéristique du processus de Lévy en loi X vérifiant $P_{X_1} = \mu$. Ainsi si X est un processus de Lévy en loi de triplet caractéristique (γ, A, ν), la fonction caractéristique de X_t pour $t \geq 0$ est donnée par

$$\mathbb{E}e^{i<z,X_t>} = e^{t\varphi(z)} \quad \forall z \in \mathbb{R}^d,$$

où φ (appelée exposant caractéristique de X) est donnée par :

$$\varphi(z) = i < \gamma, z > -\frac{1}{2} < z, Az > + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i<z,x>} - 1 - i < z, x > \mathbb{1}_{|x|\leq 1} \right) \nu(dx). \tag{1.2.3}$$

Remarque 1.8 *Si X est un processus additif en loi sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $t > 0$, X_t a une distribution indéfiniment divisible ([Sato(2005), théorème 9.1]).* On associe donc à X_t un triplet caractéristique (γ_t, A_t, ν_t). La famille de triplet $(\gamma_t, A_t, \nu_t)_{t\geq 0}$ est appelé système de triplets caractéristiques du processus X.

1.3 Décomposition de Lévy-Itô

Une autre façon de représenter un processus de Lévy, est de l'écrire sous la forme d'une somme d'un mouvement Brownien, d'un processus de Poisson et d'une martingale de sauts pure de carré intégrable. Commençons par définir une mesure aléatoire de Poisson.

Définition 1.9 *([Sato(2005), définition 19.1])* Soient $(\Theta, \mathcal{B}, \rho)$ un espace mesurable σ-fini. Une famille de v.a. $\{N(B) : B \in \mathcal{B}\}$ definie sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, est appelé une mesure aléatoire de Poisson de mesure d'intensité ρ sur Θ, si les conditons suivantes sont vérifiées

1. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, $N(B)$ a une distribution de Poisson d'espérance $\rho(B)$.
2. Si les ensembles $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ sont disjoints, alors les v.a. $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ sont indépendants.
3. Pour tout $\omega \in \Theta$, $B \to N(B)(\omega)$ est une mesure sur Θ.

Les deux théorèmes que nous allons énoncer sont appelés les décomposition de Lévy-Itô.

Théorème 1.10 *([Sato(2005), théorème 19.2])* Soit X un processus additif sur $\mathbb{R}^d$ de système de triplets caractéristiques (γ_t, A_t, ν_t). On définit la mesure $\tilde{\nu}$ sur $H =]0, +\infty[\times \left\{\mathbb{R}^d / \{0\}\right\}$ par

$$\tilde{\nu}\left(]0, t] \times B\right) = \nu_t(B), \; B \in \mathcal{B}\left(R^d\right). \tag{1.3.4}$$

En utilisant Ω_0 tel que défini dans la définition 1.1, on définit pour tout $B \in \mathcal{B}(H)$

$$J(B, \omega) = \begin{cases} \sharp\left\{s : \; (s, X_s(\omega) - X_{s^-}(\omega)) \in B\right\}, & \omega \in \Omega_0 \\ 0, & \omega \in \Omega_0. \end{cases}$$

Alors on a

1. $\{J(B) : \; B \in \mathcal{B}(H)\}$ est une mesure aléatoire de Poisson sur H de mesure intensité $\tilde{\nu}$.
2. Il existe $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}[\Omega_1] = 1$ tel que, pour tout $\omega \in \Omega_1$

$$X_t^1(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{]0,t]\times(\varepsilon,1]} \left(xJ\left(d(s,x), \omega\right) - \tilde{\nu}\left(d(s,x)\right)\right) + \int_{]0,t]\times]1,+\infty[} xJ\left(d(s,x), \omega\right),$$

   est défini pour tout $t \geq 0$ et la convergence est uniforme en t sur tout intervalle borné. Le processus X^1 est un processus additif de système de triplet $(0, 0, \nu_t)$.
3. On définit

$$X_t^2(\omega) = X_t(\omega) - X_t^1(\omega), \; \omega \in \Omega_1.$$

   Il existe Ω_2 avec $\mathbb{P}[\Omega_2] = 1$ tel que, pour tout $\omega \in \Omega_2$, X^2 est continu en t. Le processus X^2 est un processus de système de triplet $(\gamma_t, A_t, 0)$. additif

4. Les processus X^1 et X^2 sont indépendants.

Théorème 1.11 *([Sato(2005), théorème 19.3])* Supposons que le processus additif X défini dans le théorème 1.10 vérifie $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu_t(dx) < \infty$ pour tout $t > 0$. Posons $\gamma_0(t) = \gamma_t - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\nu_t(dx)$ pour tout $t \geq 0$. Alors il existe Ω_3 avec $\mathbb{P}[\Omega_3] = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_3$

$$X_t^3(\omega) = \int_{]0,t]\times]0,+\infty[} xJ\left(d(s,x),\omega\right),$$

est défini pour tout $t \geq 0$. Le processus X^3 est un processus additif sur $\mathbb{R}^d$ tel que

$$e^{i<z,X_t^3>} = \exp\left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i<z,x>} - 1\right)\nu_t(dx)\right].$$

On définit

$$X_t^4(\omega) = X_t(\omega) - X_t^3(\omega),\ \omega \in \Omega_3.$$

Alors pour tout $\omega \in \Omega_2 \cap \Omega_3$, $X^4(\omega)$ est continu en t et X^4 est un processus additif sur $\mathbb{R}^d$ tel que

$$e^{i<z,X_t^4>} = \exp\left[i < \gamma_0(t), z > -\frac{1}{2} < z, A_t z >\right].$$

Les processus X^3 et X^4 sont indépendants.

1.4 Processus de Lévy réels

Dans toute la suite, nous considérons uniquement des processus de Lévy réels. Nous allons ainsi réecrire la représentation de Lévy-Khintchine et la décomposition d'Itô-Lévy dans le cas réel. Soient donc $(\gamma,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, et ν une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^*$ qui vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right)\nu(dx) < \infty.$$

On considère X un processus de Lévy réel de triplet caractéristique (γ,σ^2,ν). C'est à dire que X peut s'écrire sous la forme (décomposition de Lévy-Itô)

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + X_t^l + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \widetilde{X}_t^\varepsilon, \tag{1.4.5}$$

avec

$$X_t^l = \int_{|x|>1, s\in[0,t]} xJ_X(ds\times dx) \equiv \sum_{0\leq s\leq t}^{|\Delta X_s|\geq 1} \Delta X_s$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t^\varepsilon &= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1, s\in[0,t]} x(J_X(ds\times dx) - \nu(dx)dt) \\
&\equiv \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1, s\in[0,t]} x\widetilde{J}_X(ds\times dx) \\
&\equiv \sum_{0\leq s\leq t}^{\varepsilon\leq|\Delta X_s|<1} \Delta X_s - t\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} x\nu(dx).
\end{aligned}$$

Où J est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}\times[0,\infty[$ d'intensité $\nu(dx)dt$ et B un mouvement Brownien standard. Par la représentation de Lévy-Khinchine on a aussi

$$\mathbb{E}e^{iuX_t} = e^{t\varphi(u)} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

où φ est donnée par

$$\varphi(u) = i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx). \tag{1.4.6}$$

Pour $\varepsilon \in]0,1[$ on définit les processus R^ε par

$$R_t^\varepsilon = -\widetilde{X}_t^\varepsilon + \lim_{\delta\downarrow 0} \widetilde{X}_t^\delta, \tag{1.4.7}$$

et X^ε par

$$X_t^\varepsilon = \gamma t + \sigma B_t + X_t^l + \widetilde{X}_t^\varepsilon. \tag{1.4.8}$$

On a ainsi

$$X_t = X_t^\varepsilon + \mathbb{R}_t^\varepsilon. \tag{1.4.9}$$

Le processus X^ε n'est autre que le processus X tronqué des sauts compensés de taille plus petite que ε. Si X est à activité finie (c'est à dire si $\nu(\mathbb{R}) < \infty$), alors on l'écrira sous la forme

$$X_t = \gamma_0 t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{1.4.10}$$

avec N un processus de Poisson de paramètre $\lambda = \nu(\mathbb{R})$, $(Y_i)_{i\geq 1}$ des v.a. i.i.d. de loi commune $\frac{\nu(dx)}{\nu(\mathbb{R})}$ et

$$\gamma_0 = \gamma - \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx). \tag{1.4.11}$$

Par construction le processus X^ε est un processus à activité finie. Donc on a

$$X_t^\varepsilon = \gamma_0^\varepsilon t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t^\varepsilon} Y_i^\varepsilon, \tag{1.4.12}$$

avec N^ε un processus de Poisson de paramètre $\lambda_\varepsilon = \nu(]-\infty,-\varepsilon[\cup]\varepsilon,+\infty[)$, $(Y_i^\varepsilon)_{i\geq 1}$ des v.a. i.i.d. de loi commune $\frac{\nu_\varepsilon(dx)}{\lambda_\varepsilon}$ (où ν^ε est la restriction de ν sur $]-\infty,-\varepsilon[\cup]\varepsilon,+\infty[$) et

$$\gamma_0^\varepsilon = \gamma - \int_{\varepsilon<|x|\leq 1} x\nu(dx). \tag{1.4.13}$$

Si la partie à sauts du processus X est à variation finie ($\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$), alors on écrira X sous la forme

$$X_t = \gamma_0 t + \sigma B_t + \int_{x\in\mathbb{R}, s\in[0,t]} xJ_X(ds\times dx), \tag{1.4.14}$$

avec $\gamma_0 = \gamma - \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx)$. Notons que (par *[Cont-Tankov, proposition 3.18]*) X est une martingale si et seulement si

$$\gamma + \int_{|x|>1} x\nu(dx) = 0, \tag{1.4.15}$$

et e^X est une martingale si et seulement si

$$\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\right)\nu(dx) = 0. \tag{1.4.16}$$

[Sato (2005)] classifie les processus de Lévy en trois groupes.

Définition 1.12 *X est dit de*
- *Type A : si $\sigma = 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ (Poisson composé + drift) ;*

- *Type B : si* $\sigma = 0$*,* $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ *et* $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ *(activité infinie + variation finie) ;*
- *Type C : si* $\sigma > 0$ *ou* $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) = \infty$ *(variation infinie).*

Les notations suivantes (reprises de *[Sato(2005)]*) seront utiles pour la suite.

Définition 1.13 *On note*

$$\begin{aligned} M_t^X &= \sup_{0\leq s\leq t} X_s \\ m_t^X &= \inf_{0\leq s\leq t} X_s \\ \tilde{X} &= -X \\ \tilde{M}_T^X &= \sup_{0\leq t\leq T} \tilde{X}_t \\ \tilde{m}_T &= \inf_{0\leq t\leq T} \tilde{X}_t. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} R_x^X &= \inf\{s > 0, \quad X_s > x\} \\ R_x^{'X} &= \inf\{s > 0, \quad X_s \geq x\} \\ R_x^{''X} &= \inf\{s > 0, \quad X_s \vee X_{s^-} \geq x\} \\ \Lambda_t^X &= \inf\{s \in [0,t]\,, \quad X_s \vee X_{s^-} = M_t\} \\ \Lambda_t^{'X} &= \sup\{s \in [0,t]\,, \quad X_s \vee X_{s^-} = M_s\}. \end{aligned}$$

Avec par convention $\inf(\emptyset) = \infty$ et $X_{0^-} = X_0$. On écrira M_t au lieu de M_t^X s'il n'y a pas de confusion. De même pour les autres notations.

Remarque 1.14 *Signalons que par [Sato (2005), formule* 49.7*]*, pour tout $x > 0$

$$R_x^{'} = R_x^{''} \ p.s.$$

Ceci découle de la quasi-continuité à gauche de X. Et de plus si X est de type B ou C on a par *[Sato (2005), lemme* 49.6*]* pour tout $x > 0$,

$$R_x = R_x^{'} = R_x^{''} \ p.s.$$

Remarque 1.15 *([Sato (2005), remarque* 45.9*])* Notons que

$$\begin{aligned} M_t &=^d X_t - m_t \\ m_t &=^d X_t - M_t. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Régularité des distributions des processus de Lévy

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et la régularité de densité pour les processus de Lévy et les processus supremum associés. Dans la première section nous rappelons les résultats d'existence et de régularité des densités des processus de Lévy, ainsi qu'un résultat sur la continuité de la loi des processus supremum. Ces résultats peuvent être trouvés en detail dans *[Sato (2005)]*. Dans la deuxième section nous donnons des critères d'existence de densité pour le processus supremum (théorème 2.17), et nous montrons que, dans le cas activité finie et variation infinie, cette densité est bornée (théorème 2.19). Dans la dernière section nous montrons que sous l'hypothèse d'absence de saut positif, la densité du processus supremum est régulière (théorème 2.23).

2.1 Résultats généraux

La continuité de la loi d'un processus de Lévy, ou l'existence d'une densité pour cette loi ont largement été étudié dans la littérature. Nous compléterons les rappels sur les résultats existants, par une étude du cas du processus supremum. La continuité de la loi d'un processus de Lévy est vraie dès celui-ci n'est pas un processus de poisson composé.

Théorème 2.1 *([Sato (2005), théorème 27.4]) Soit X un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ de triplet (γ, A, ν), alors si X est de type B ou C, X_t a une loi diffuse pour tout $t > 0$.*

Pour l'existence de densité, différents types d'hypothès permettent de la justifier. Regardons d'abord les hypothèses sur la mesure de Lévy.

Théorème 2.2 *([Sato (2005), théorème 27.7]) Soit X un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ de triplet (γ, A, ν) avec $\nu\left(\mathbb{R}^d\right) = \infty$. On définit $\tilde{\nu}$ par*

$$\tilde{\nu}(B) = \int_B 1 \wedge |x|^2 \nu(dx), \quad B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Si $\tilde{\nu}^l$ (la l^{ieme} puissance de convolution de ν) est absolument continue pour un certain $l \in \mathbb{N}$, alors pour tout $t > 0$, X_t a une loi absolument continue.

Une autre façon de vérifier qu'une loi est absolument continue est d'étudier sa fonction caratéristique. Commençons par énoncer quelques définitions.

Définition 2.3 *([Sato (2005), définition 27.9]) Une mesure ν sur $\mathbb{R}^d$ est radialement absolument continue, s'il existe une mesure finie μ sur la sphère unité S et une fonction mesurable positive g sur $S\times]0,+\infty[$ telles que*

$$\nu(B) = \int_S \mu(d\theta) \int_0^{+\infty} g(\theta, r)\, \mathbb{1}_B(r\theta)\, dr \quad B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Une mesure ν radialement absolument continue satisfait la condition de divergence, si ν et g satisfont la condition

$$\int_0^{+\infty} g(\theta, r)\, dr = +\infty \quad \nu - p.s.$$

Définition 2.4 *([Sato (2005), définition 15.1]) Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. ν est de classe L* (ou *selfdecomposable*) si pour tout $b > 1$ il existe une mesure de probabilité ρ_b sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\hat{\nu}(z) = \hat{\nu}\left(b^{-1}z\right)\hat{\rho}_b(z),$$

où $\hat{\nu}$ et $\hat{\rho}_b$ sont respectivement les transformées de Fourrier de ν et de ρ_b.

Notons qu'un processus de Lévy correspondant à une mesure de *classe L* est dit processus de *classe L*. Et tout processus de Lévy stable est de *classe L*. Nous allons maintenant introduire la notion de dégénérescence des processus des processus de Lévy.

Définition 2.5 *([Sato (2005), page 148]) Soit ρ une mesure sur $\mathbb{R}^d$. Son support $S_\rho = S(\rho)$ est défini par*

$$S_\rho = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ / \ \forall G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } x \in G \text{ alors } \rho(G) > 0\right\}.$$

Pour une variable aléatoire X, le support de P_X (la loi de X) est appelé le support de X et est noté $S_X = S(X)$.

A noter que le support S_ρ de ρ est fermé, et que le support S_X est le plus petit fermé qui vérifie $\mathbb{P}[X \in F] = 1$. On dit que le support de ρ est supporté par un ensemble B, si $S_\rho \subset B$.

Définition 2.6 *([Sato (2005), définition 24.17]) Une mesure ρ sur $\mathbb{R}^d$ est dit dégénérée si il existe $a \in \mathbb{R}^d$ et un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^d$ de dimension $d-1$, tel que $S_\rho \subset a + V$. Sinon ρ est dit non-dégénérée.*

Dans le cas des mesures de probabilité, le résultat suivant donne une condition équivalente de non dégńrescence.

Proposition 2.7 *([Sato (2005), proposition 24.19]) Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tel que*

$$|\hat{\mu}(z)| \leq 1 - c|z|^2 \text{ pour } |z| < \varepsilon,$$

si et seulement si μ est non-dégénérée.

Théorème 2.8 *([Sato (2005), théorème 27.10]) Soit X un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ non dégénéré avec une mesure ν radialement absolument continue qui satisfait la condition de divergence, alors pour tout $t > 0$ la loi de X_t est absolument continue.*

Théorème 2.9 *([Sato (2005), théorème 27.13]) Soit X un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ non dégénéré et de classe L* (ou *seldecomposable*), alors pour tout $t > 0$ la loi de X_t est absolument continue.

Le resultat suivant caractérise les processus de Lévy de classe L sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.10 *([Sato (2005), corollaire 15.11]) Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) sur $\mathbb{R}$, alors X est de classe L* si et seulement si

$$\nu(dx) = \frac{k(x)}{|x|}dx, \tag{2.1.1}$$

où k est une fonction positive croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.

Des conditions supplémentaires sur la fonction k ci-dessus permettent d'obtenir une meilleure régularité des densités des processus de Lévy. Remarquons que si X est de classe L et de mesure de Lévy non nulle, la fonction k apparaissant dans (2.1.1) vérifie $k(0_+) + k(0_-) > 0$.

Théorème 2.11 *([Sato (2005), theorérème 28.4]) Soit X un processus de Lévy de classe L sur $\mathbb{R}$, d'exposant caractéristique*

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\right) \frac{k(x)}{|x|} dx + i\gamma u,$$

avec k une fonction positive continue à droite et croissante sur $]-\infty, 0[$ et continue à gauche et décroissante sur $]0, +\infty[$. Soit $c = k(0_+) + k(0_-)$. On suppose que $c > 0$, alors

- *Si $c < \infty$. Definissons $N \in \mathbb{Z}$ par $N < c \leq N+1$. Alors X_1 a une densité f continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\gamma_0\}$, et la fonction g définie par*

$$g(x) = \begin{cases} (x-\gamma_0)f(x), & x \neq \gamma_0 \\ 0, & x = \gamma_0. \end{cases}$$

  est continue sur $\mathbb{R}$. Si $c \leq 1$, alors f ne peut pas être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si $c > 1$, alors f peut être prolongée en une fonction $C^{N-1}(\mathbb{R})$ et g est $C^N(\mathbb{R})$.
- *Si $c = +\infty$, alors X_1 à une densité $C^\infty(\mathbb{R})$.*

En présence d'un mouvement Brownien, ou sous une hypothèse assez forte sur la mesure de Lévy, on a une densité indéfiniment dérivable.

Proposition 2.12 *([Sato (2005), proposition 28.3]) Si $\sigma > 0$ ou ν vérifie :*

$$\exists \beta \in]0,2[, \quad \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-(2-\beta)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x|^2 d\nu(x) > 0, \tag{2.1.2}$$

alors $\forall t > 0$, X_t admet une densité $p_t(.)$ telle que

$$p_t \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall n \geq 1 \quad \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial^n p_t}{\partial x^n}(x) = 0.$$

Dans le cas du processus supremum d'un processus de Lévy, les résultats sur la régularité de sa loi sont rares. Le résultat principal concerne la continuité.

Lemme 2.13 *([Sato (2005), lemme 49.3]) Soit X un processus de Lévy de type B avec $R_0 = 0$ p.s. ou de type C, alors $\forall t > 0$, M_t a une loi diffuse.*

Les théorèmes suivants donnent des hypothèses sous lesquelles la condition $R_0 = 0$ *p.s.* est satisfaite.

Théorème 2.14 *([Sato (2005), théorème 47.2]) On a $R_0 = 0$ p.s. si et seulement si*

$$\int_0^1 t^{-1}\mathbb{P}\left[X_t > 0\right] dt = +\infty.$$

Et on a $R_0 > 0$ p.s. si et seulement si

$$\int_0^1 t^{-1}\mathbb{P}\left[X_t > 0\right] dt < \infty.$$

Théorème 2.15 *([Sato (2005), théorème 47.5])*

1. *Si X est de type A et $\gamma_0 > 0$ alors $R_0 = 0$ p.s.;*
2. *Si X est de type A et $\gamma_0 \leq 0$ alors $R_0 > 0$ p.s.;*
3. *Si X est de type B et $\gamma_0 > 0$ alors $R_0 = 0$ p.s.;*
4. *Si X est de type B et $\gamma_0 < 0$ alors $R_0 > 0$ p.s.;*
5. *Si X est de type B, $\gamma_0 = 0$ et $\nu(]-\infty, 0[) < \infty$ alors $R_0 = 0$ p.s.;*
6. *Si X est de type B, $\gamma_0 = 0$ et $\nu(]0, +\infty[) < \infty$ alors $R_0 > 0$ p.s.;*

7. *Si X est de type B, $\gamma_0 = 0$, $\nu(]-\infty, 0[) = \infty$ et $\nu(]0, +\infty[) = \infty$ alors il y a des cas où $R_0 = 0$ p.s. et des cas où $R_0 > 0$ p.s. ;*
8. *Si X est de type C alors $R_0 = 0$ p.s..*

Dans le cas des processus de Lévy stables, on peut déduire à partir de leurs paramètres si $R_0 = 0$ *p.s.* ou si $R_0 > 0$ *p.s.* Rappelons qu'un processus de Lévy est dit $\alpha-$stable (avec $\alpha \in]0, 2]$) si

$$\forall a > 0,\ \exists c \in \mathbb{R}^d \ : \quad (X_{at})_{t\geq 0} =^d \left(a^{\frac{1}{\alpha}} X_t + ct\right)_{t\geq 0}$$

Le seul processus de Lévy 2$-$stable est le processus Brownien. Pour $\alpha \in]0, 2[$ l'exposant caractéristique d'un processus $\alpha - stable$ est donné par

$$\varphi(u) = \begin{cases} i\tau u - c|u|^\alpha \left(1 - i\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) sgn(u)\right), & si\ \alpha \neq 1 \\ i\tau u - c|u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} sgn(u) \log|u|\right), & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Où $\beta \in [-1, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$, $c > 0$, et sgn est la fonction qui vaut 1 si $u > 0$, 0 en 0, et -1 sinon. Donc pour $0 < \alpha < 2$, un processus de Lévy stable est déterminé par ses paramètres (α, β, τ, c).

Théorème 2.16 *([Sato (2005), théorème 47.6]) Soit X un processus de Lévy α-stable non trivial avec $0 < \alpha \leq 2$. Alors*
- *Si $0 < \alpha < 1$, $-1 < \beta \leq 1$, et $\tau < 0$, alors $R_0 > 0$ p.s.*
- *Si $0 < \alpha < 1$, $\beta = -1$, et $\tau \leq 0$, alors $R_0 > 0$ p.s.*
- *Dans tous les autres cas $R_0 = 0$ p.s.*

Remarquons que si $\alpha \in [1, 2]$, $R_0 = 0$ *p.s.*

2.2 Existence de densité pour le processus supremum

Nous allons maintenant établir une condition suffisante d'absolue-continuité de la loi du processus supremum. L'existence de densité pour la loi du supremum d'un processus de Lévy, est liée directement à l'existence de densité pour la loi de ce dernier.

Théorème 2.17 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν). Si X_t a une loi absolument continue pour tout $t > 0$, alors pour tout $t > 0$, la restriction de la loi de M_t à $]0, +\infty[$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Corollaire 2.18 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν). Si X_t a une loi absolument continue pour tout $t > 0$ et si $R_0 = 0$ p.s., alors pour tout $t > 0$ M_t à une loi absolument continue.*

Ce corollaire résulte du théorème 2.17 et du fait que si $R_0 = 0$ *p.s.*, alors $M_t > 0$ *p.s.* pour tout $t > 0$.

Démonstration. Cette démonstration est inspirée de *[Sato(2005), section* 49*]*. Soit $A \subset]0, +\infty[$ un ensemble de mesure de Lesbesgue nulle, on va montrer que $\mathbb{P}[M_t \in A] = 0$. Soit $Z_s := X_{(t-s)^-} - X_{t^-}$ pour tout $s \in [0, t)$. Le processus Z est un processus de Lévy sur $[0, t)$ de triplet caractéristique $(\sigma, -\gamma, \check{\nu})$ et $(Z_s)_{0\leq s\leq t} =^d (-X_s)_{0\leq s\leq t}$ (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\check{\nu}(x) = \nu(-x)$ par [Sato (2005), proposition 41.8]). On a donc

$$\begin{aligned} M_t &= \sup_{o\leq s\leq t} X_s \\ &= \sup_{o\leq s\leq t} X_{s^-} \\ &= \sup_{o\leq s\leq t} X_{(t-s)^-} \\ &= \sup_{o\leq s\leq t} Z_s + X_{t^-} \\ &= M_t^Z - Z_{t^-}. \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\mathbb{P}[M_t \in A] \quad = \quad \mathbb{P}\left[M_t^Z \in A + Z_t\right].$$

Sur $\left\{M_t^Z \in A + Z_t\right\}$ on a $M_t^Z \neq Z_t$ car les éléments de A sont strictement positifs. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_t \in A] &= \mathbb{P}\left[M_t^Z \in A + Z_t, \Lambda_t^Z < t\right] \\ &= \lim_{s \uparrow t} \mathbb{P}\left[M_t^Z \in A + Z_t, \Lambda_t^Z < s\right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[M_t^Z \in A + Z_t, \Lambda_t^Z < s\right] &= \mathbb{P}\left[M_t^Z = M_s^Z \in A + Z_t, \Lambda_t^Z < s\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[M_s^Z \in A + Z_t\right] \\ &= \mathbb{P}\left[Z_t - Z_s \in M_s^Z - Z_s - A\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\left[(Z_s, M_s) \in d(y,z)\right] \mathbb{P}\left[Z_{t-s} \in z - y - A\right]. \end{aligned}$$

Les deux dernères égalités découlent respectivement de l'indépendance de $Z_t - Z_s$ et de (Z_s, M_s), et de la stationnarité des acrroissements. Or Z_{t-s} a une densité (car X_{t-s} a une densité par hypothèse). D'où

$$\mathbb{P}[Z_{t-s} \in z - y - A] = 0.$$

Et par suite

$$\mathbb{P}[M_t \in A] = 0.$$

Donc, d'après le théorème de Radon-Nikodym, la loi de M_t est absolument continue (sur $]0, +\infty[$) par rapport à la mesure de Lebesgue. $\diamond$

Dans le cas jump-diffusion, on peut montrer que la densité du processus supremum d'un processus de Lévy est bornée.

Théorème 2.19 *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (γ, σ^2, ν). Si X vérifie $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ et $\sigma > 0$, alors pour tout $t > 0$, M_t a une densité bornée.*

La bornitude de la densité du processus supremum dans le cas jump-diffusion est liée, à la dépendance de la borne de la densité du processus de Lévy par rapport au temps, qui elle même dépend de la décroissance à l'infini de sa fonction caratéristique.

Lemme 2.20 *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (γ, σ^2, ν). Supposons que $\sigma > 0$ ou* (2.1.2) *est vrai. Alors pour $t > 0$*

$$\left|\mathbb{E}e^{iuX_t}\right| \leq e^{-ct|u|^\alpha},$$

où $c > 0$ ($c = \frac{\sigma^2}{2}$ si $\sigma > 0$) et $\alpha = 2$ si $\sigma > 0$, sinon $\alpha = \beta$ avec β donné par (2.1.2).

Lemme 2.21 *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (γ, σ^2, ν). Supposons que $\sigma > 0$ ou (2.1.2) est vrai. Si on désigne par f_t la densité de X_t (pour $t > 0$), alors*

$$\|f_t\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-c|u|^\alpha} du\right) \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où $c > 0$ et α sont donnés par le lemme 2.20.

Lemme 2.22 *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique $(\gamma, \sigma^2, 0)$. Supposons que $\sigma > 0$ la densité f_t de M_t (pour $t > 0$) est donnée par*

$$f_t(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{t}}\phi\left(\frac{y - \gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{2\gamma}{\sigma^2} e^{\frac{2\gamma y}{\sigma^2}} \Phi\left(-\frac{y + \gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad \forall y \geq 0, \tag{2.2.3}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite, et ϕ sa densité. De plus pour $t > 0$

$$\|f_t\|_\infty \leq \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi t}} + \frac{2|\gamma|}{\sigma^2}.$$

Démonstration du lemme 2.20. On a par la formule (1.4.6)

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}e^{iuX_t}\right| &= \left|e^{i\gamma ut-\frac{\sigma^2u^2}{2}t+t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1-iux\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx)}\right| \\ &= e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}t}\left|e^{t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1-iux\mathbb{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx)}\right|.\end{aligned}$$

Si $\sigma > 0$, le terme au-dessus entre les valeurs absolue à droite de l'égalité est fonction caractéristique du processus de Lévy de triplet caractéristique $(0,0,\nu)$ dont le module est par conséquent ≤ 1. Donc on a bien

$$\left|\mathbb{E}e^{iuX_t}\right| \leq e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}t}.$$

Si $\sigma = 0$, par *[Sato (2005), propostion 28.3]*

$$\left|\mathbb{E}e^{iuX_t}\right| \leq e^{-ct|u|^\beta}.$$

◇

Démonstration du lemme 2.21. On a par le lemme 2.20

$$\left|\mathbb{E}e^{iuX_s}\right| \leq e^{-cs|u|^\alpha}.$$

Donc

$$\begin{aligned}|f_t(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\mathbb{E}e^{iuX_t}du\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ct|u|^\alpha}du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-c|u|^\alpha}}{t^{\frac{1}{\alpha}}}du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-c|u|^\alpha}du\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}.\end{aligned}$$

◇

Démonstration du lemme 2.22. En remarquant que conditionnellement à X_t, le processus $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ est un pont Brownien et la loi du processus ne dépend pas du drift (voir *[Borodin-Salminen(1996)]*), on obtient pour tout $y \geq 0$

$$\mathbb{P}\left[M_t \leq y\right] = \int_{-\infty}^{y}\left(1-e^{-\frac{2y(y-u)}{\sigma^2 t}}\right)\frac{e^{-\frac{(u-\gamma t)^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}du. \tag{2.2.4}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left[M_t \leq y\right] = \Phi\left(\frac{y-\gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\gamma y}{\sigma^2}}\Phi\left(-\frac{y+\gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right). \tag{2.2.5}$$

Et en dérivant on obtient

$$\begin{aligned}f_t(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\phi\left(\frac{y-\gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right)+e^{\frac{2\gamma y}{\sigma^2}}\phi\left(\frac{y+\gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right) - \frac{2\gamma}{\sigma^2}e^{\frac{2\gamma y}{\sigma^2}}\Phi\left(-\frac{y+\gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{t}}\phi\left(\frac{y-\gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{2\gamma}{\sigma^2}e^{\frac{2\gamma y}{\sigma^2}}\Phi\left(-\frac{y+\gamma t}{\sigma\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

D'autre part si $\gamma \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}f_s(y) &\leq \frac{2}{\sigma\sqrt{s}}\phi\left(\frac{y-\gamma s}{\sigma\sqrt{s}}\right) \\ &\leq \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi s}}.\end{aligned}$$

Sinon si $\gamma < 0$ on a

$$\begin{aligned} f_s(y) &= \frac{2}{\sigma\sqrt{s}}\phi\left(\frac{y-\gamma s}{\sigma\sqrt{s}}\right) + \frac{2|\gamma|}{\sigma^2}e^{\frac{2\gamma y}{\sigma^2}}\Phi\left(-\frac{y+\gamma s}{\sigma\sqrt{s}}\right) \\ &\leq \frac{2}{\sigma\sqrt{s}}\phi\left(\frac{y-\gamma s}{\sigma\sqrt{s}}\right) + \frac{2|\gamma|}{\sigma^2}e^{\frac{2\gamma y}{\sigma^2}} \\ &\leq \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi s}} + \frac{2|\gamma|}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

◇

Démonstration du théorème 2.19. On peut écrire X sous la forme (voir (1.4.10))

$$X_t = \gamma_0 t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \;\; \forall t \geq 0.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ avec $y > x$ (le cas $x \geq y$ est trivial). Pour montrer l'existence d'une densité bornée, il suffit de montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}\left[x < M_t \leq y\right] \leq C\left|x - y\right|.$$

On a

$$\mathbb{P}\left[x < M_t \leq y\right] = \mathbb{P}\left[x < M_t \leq y, N_t = 0\right] + \mathbb{P}\left[x < M_t \leq y, N_t > 0\right].$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[x < M_t \leq y, N_t = 0\right] &= \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\leq s\leq t}\left(\gamma_0 s + \sigma B_s + \sum_{i=1}^{N_s} Y_i\right) \leq y, N_t = 0\right] \\ &= \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\leq s\leq t}\left(\gamma_0 s + \sigma B_s + \sum_{i=1}^{N_s} Y_i\right) \leq y / N_t = 0\right]\mathbb{P}\left[N_t = 0\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\leq s\leq t}\left(\gamma_0 s + \sigma B_s\right) \leq y\right]. \end{aligned}$$

Donc par le lemme 2.22, on a

$$\exists C_{0,t} > 0 \;/\; \mathbb{P}\left[x < M_t \leq y, N_t = 0\right] \leq C_{0,t}(y - x).$$

D'autre part, en notant $(T_i)_{i\geq 1}$ les instants de saut du processus $(N_s)_{s\geq 0}$, on a

$$\mathbb{P}\left[x < M_t \leq y, N_t > 0\right] \leq \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\leq s<T_1} X_s \leq y, N_t > 0\right] + \mathbb{P}\left[x < \sup_{T_1\leq s\leq t} X_s \leq y, N_t > 0\right].$$

Or, en posant pour tout $s \geq 0$ $Z_s = \gamma_0 s + \sigma B_s$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\leq s<T_1} X_s \leq y, N_t > 0\right] &= \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\leq s<T_1} X_s \leq y, T_1 < t\right] \\ &= \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\leq s<T_1} Z_s \leq y, T_1 < t\right]. \end{aligned}$$

Soit f_τ la densité de $\sup_{0\leq s<\tau} Z_s$, donc en utilisant le lemme 2.22, $\exists C_1 > 0$ tel que

$$|f_\tau| \leq \frac{C_1}{\sqrt{\tau}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[x < \sup_{0\le s<T_1} X_s \le y, N_t > 0\right] &= \int_0^t \mathbb{P}\left[x < \sup_{0\le s<\tau} Z_s \le y\right] \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau \\ &\le C_1(y-x)\int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau.\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie. Notons alors $C_{1,t} = C_1 \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau$. On a aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[x < \sup_{T_1\le s\le t} X_s \le y, N_t > 0\right] &= \mathbb{P}\left[x < \sup_{T_1\le s\le t} X_s \le y, T_1 < t\right] \\ &= \mathbb{P}\left[x < X_{T_1} + \left(\sup_{T_1\le s\le t} X_s - X_{T_1}\right) \le y, T_1 < t\right].\end{aligned}$$

Les v.a. X_{T_1} et $\left(\sup_{T_1\le s\le t} X_s - X_{T_1}\right)$ sont indépendantes conditionnellement à T_1. De plus

$$X_{T_1} = Z_{T_1} + \Delta X_{T_1}.$$

Donc en utilisant le lemme 2.21 on a

$$\mathbb{P}\left[x < \sup_{T_1\le s\le t} X_s \le y, N_t > 0\right] \le K\int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau (y-x).$$

Avec $K = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2} du\right)$. On note $C_{2,t} = K \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau$. Et on conclut que

$$\mathbb{P}\left[x < M_t \le y\right] \le \max\left(C_{0,t}, C_{1,t}, C_{2,t}\right)(y-x).$$

$\diamond$

2.3 Cas des processus de Lévy sans saut positif

Dans cette section, on fait les hypothèses de *[Sato(2005), section 46]* suivantes : Ω désigne l'ensemble des fonctions continues à droite et limitées à gauche de $[0,+\infty)$ dans $\mathbb{R}$ (que l'on note $D([0,+\infty),\mathbb{R})$) et

$$\mathbb{P}\left[X_t \le X_{t-},\ \forall t > 0\right] = 1 \tag{2.3.6}$$

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{t\to+\infty} X_t = \infty\right] = 1. \tag{2.3.7}$$

Notons que la condition (2.3.6) est équivalente à $\nu\left(]0,+\infty[\right) = 0$. Et si (2.3.6) est vérifiée alors (2.3.7) est vrai si et seulement si $0 < \mathbb{E}|X_t| < \infty$ et $\mathbb{E}X_t \ge 0$ $\forall t > 0$ (*[Sato (2005), remarque 46.1]*).

Nous allons montrer que, sous les hypothèse mentionnées ci-dessus, la densité du supremum d'un processus de Lévy est indéfiniment dérivable. Le comportement du temps d'atteinte du processus de Lévy est la clé de ce résultat. En fait, sous les hypothèses (2.3.6) et (2.3.7), le processus $(R_x)_{x\ge 0}$ est un processus de Lévy, ses trajectoires sont strictement croissantes *p.s.*, et

$$\mathbb{P}\left[X_{R_x} = x \quad \forall x \ge 0\right] = 1.$$

Et par ailleurs par *[Sato (2005), théorème 46.4]* il existe, pour $x > 0$ et $t > 0$, une relation entre la densité de X_t en x et celle de R_x en t. Cette relation est essentielle pour démontrer le théorème 2.23.

Théorème 2.23 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ,σ^2,ν). On suppose (2.3.6) et (2.3.7) et, que $\sigma > 0$ ou que ν vérifie* (2.1.2). *Alors pour tout $t > 0$, la restriction de la loi de M_t sur $]0,+\infty[$ a une densité f_t^M qui se prolonge en une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ et vérifie*

$$\frac{\partial^n f_t^M}{\partial x^n}(x) = \int_t^{+\infty}\left((n+1)\frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) + x\frac{\partial^{n+1} m}{\partial x^{n+1}}(s,x)\right)\frac{ds}{s} \quad \forall x > 0, \quad \forall n \ge 0,$$

et

$$\exists C_n > 0, \quad \left|\frac{\partial^n f_t^M}{\partial x^n}\right| \le C_n \left(\frac{1}{\frac{n+1}{\alpha} t^{\frac{n+1}{\alpha}}} + \frac{1}{\left(\frac{n+3}{\alpha} - 1\right) t^{\frac{n+3}{\alpha}-1}}\right), \quad \forall n \ge 0,$$

où $x \to m(s,x)$ est la densité de X_s, et $\alpha = 2$ si $\sigma = 0$, sinon $\alpha = \beta$.
De plus, si $\int_{|y|>1} |y|^2 \nu(dy) < \infty$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\partial^n f_t^M}{\partial x^n}(x) = 0 \quad \forall n \ge 0. \tag{2.3.8}$$

Remarque 2.24 *Si on suppose en plus des hypothèses du théorème 2.23 que $R_0 = 0$ p.s., on voit que M_t a une densité sur $\mathbb{R}^+$ donnée par la fonction f_t^M.*

Pour démontrer le théorème 2.23, nous aurons besoins des deux lemmes suivants.

Lemme 2.25 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν). Si $\sigma > 0$ ou si (2.1.2) est vraie alors $m \in C^\infty([t,+\infty) \times \mathbb{R})$ et $\int_t^{+\infty} m(s,.)\frac{ds}{s} \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall t > 0$ avec :*

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_t^{+\infty} m(s,x)\frac{ds}{s} = \int_t^{+\infty} \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x)\frac{ds}{s} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \ge 0.$$

Si en plus $\int_{|y|>1} |y|^2 \nu(dy) < \infty$ alors

$$\lim_{|x| \to +\infty} x \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) = 0 \quad \forall n \ge 0, \quad \forall s > 0. \tag{2.3.9}$$

Lemme 2.26 *([Voltchkova, lemme 3.5.3 et lemme 3.5.4])*
Si X est de type B ou C alors :

$$\forall t \ge 0, \quad \forall x > 0, \quad \mathbb{P}\left[M_t = x\right] = 0 \tag{2.3.10}$$

$$\forall t \ge 0, \quad \forall x \ge 0, \quad (t,x) \ne (0,0) \quad \mathbb{P}\left[R_x = t\right] = 0. \tag{2.3.11}$$

Remarque 2.27 *Une conséquence du lemme 2.26 est que si X est de type B ou C alors*

$$\mathbb{P}\left[M_t < x\right] = \mathbb{P}\left[R_x > t\right] \quad \forall x > 0.$$

Démonstration du lemme 2.25. Soit $t > 0$. Sous l'hypothèse $\sigma > 0$ ou (2.1.2), on sait que pour tout $s > 0$ X_s a une densité de classe C^∞. Donc $x \to m(s,x)$ est $C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $s > 0$ (voir la proposition 2.12). On a (voir le lemme 2.20)

$$\left|\mathbb{E}e^{iuX_s}\right| \le e^{-cs|u|^\alpha}, \tag{2.3.12}$$

avec $c > 0$ et un exposant $\alpha = 2$ si $\sigma > 0$, et égale β si $\sigma = 0$ (et si on a (2.1.2)). Remarquons qu'on a $\mathbb{E}e^{iuX_s} = e^{s\varphi(u)}$ (voir (1.4.6)). Donc on peut écrire m comme suit :

$$m(s,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\mathbb{E}e^{iuX_s} du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iux} e^{s\varphi(u)} du \quad \forall s \ge 0, x \in \mathbb{R}. \tag{2.3.13}$$

On va maintenant démontrer le lemme 2.25
Etape 1 : montrons que $m \in C^\infty([t,+\infty) \times \mathbb{R})$ et que $\int_t^{+\infty} m(s,.)\frac{ds}{s} \in C^\infty(\mathbb{R})$.
On sait que
$(u,s,x) \in \mathbb{R} \times [t,+\infty) \times \mathbb{R} \to e^{-iux}\mathbb{E}e^{iuX_s} = e^{-iux}e^{s\varphi(u)}$ est $C^{0,\infty,\infty}(\mathbb{R} \times [t,+\infty) \times \mathbb{R})$ et que

$$\frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial s^p}\left(e^{-iux}\mathbb{E}e^{iuX_s}\right) = \frac{(-iu)^n}{2\pi}\left(\varphi(u)\right)^p e^{-iux}\mathbb{E}e^{iuX_s} \quad \forall n,p \in \mathbb{N}.$$

Il est facile de voir que $\exists K_1 > 0, \quad |\varphi(u)| \le K_1\left(1 + |u|^2\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\left|(-iu)^n\left(\varphi(u)\right)^p e^{-iux}\mathbb{E}e^{iuX_s}\right| &\le K_1^p|u|^n\left(1+|u|^2\right)^p e^{-cs|u|^\alpha} \\ &\le K_1^p|u|^n\left(1+|u|^2\right)^p e^{-ct|u|^\alpha} \quad \forall s \ge t.\end{aligned}$$

D'où $m \in C^{\infty}([t,+\infty) \times \mathbb{R})$ et

$$\frac{\partial^{n+p} m}{\partial x^n \partial s^p}(s,x) = \int_{\mathbb{R}} (-iu)^n \left(\varphi(u)\right)^p e^{-iux} \mathbb{E} e^{iuX_s} du \quad \forall n,p \in \mathbb{N}.$$

D'après ce qui précéde on a $(s,x) \to \frac{m(s,x)}{s}$ est $C^{0,\infty}([t,+\infty) \times \mathbb{R})$, et pour tout $n \geq 0$

$$\left| \frac{1}{s} \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u|^n}{s} e^{-cs|u|^{\alpha}} du.$$

Reste à savoir si $s \to \int_{\mathbb{R}} \frac{|u|^n}{s} e^{-cs|u|^{\alpha}} du$ est intégrable sur $[t,+\infty)$. Par le changement de variable $y = us^{\frac{1}{\alpha}}$ on obtient :

$$\int_t^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u|^n}{s} e^{-cs|u|^{\alpha}} du ds = \int_t^{+\infty} \frac{ds}{s^{\frac{n+1}{\alpha}+1}} \int_{\mathbb{R}} |y|^n e^{-c|y|^{\alpha}} dy < \infty.$$

Donc

$$\int_t^{+\infty} \left| \frac{1}{s} \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) \right| ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_t^{+\infty} \frac{ds}{s^{\frac{n+1}{\alpha}+1}} \int_{\mathbb{R}} |y|^n e^{-c|y|^{\alpha}} dy. \tag{2.3.14}$$

D'où $\int_t^{+\infty} m(s,.) \frac{ds}{s} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_t^{+\infty} m(s,x) \frac{ds}{s} = \int_t^{+\infty} \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) \frac{ds}{s} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 0.$$

Etape 2 : montrons qu'avec l'hypothèse $\int_{|y|>1} |y|^2 \nu(dy) < \infty$, $\lim_{|x| \to +\infty} x \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) = 0 \quad \forall n \geq 0$. Sous cette hypothèse, on sait (voir [Voltchkova, proposition 3.4.2])

$$\exists c_1, c_2 \geq 0 \quad \left|\varphi^{'}(u)\right| \leq c_1(1+|u|), \quad \left|\varphi^{''}(u)\right| \leq c_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Soit $n \geq 0$. Par 2 intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) &= \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iux}}{(-ix)} \frac{d}{du} \left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) du \\ &= \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iux}}{(-ix)^2} \frac{d^2}{du^2} \left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| x \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) \right| \leq \frac{1}{2\pi|x|} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^2}{du^2} \left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) \right| du,$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) &= \left(n(n-1) f_{n-1}(u) + ns f_n(u) \varphi^{'}(u)\right) e^{s\varphi(u)} \\ \frac{d^2}{du^2}\left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) &= \left(n(n-1) f_{n-2}(u) + 2ns f_{n-1}(u) \varphi^{'}(u) + s f_n(u) \left(\varphi^{''}(u) + \left(\varphi^{'}(u)\right)^2\right)\right) e^{s\varphi(u)}, \end{aligned}$$

avec $\forall k \in \mathbb{Z} \quad f_k(u) = u^k$ si $k \geq 0$ et 0 sinon. Donc $\exists K_2, K_3 \geq 0$ tels que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{du}\left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) \right| &\leq K_2 \left(|f_{n-1}(u)| + |f_{n+1}(u)| s\right) e^{-cs|u|^{\alpha}} \\ \left| \frac{d^2}{du^2}\left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) \right| &\leq K_3 \left(|f_{n-2}(u)| + |f_{n-1}(u)| s + |f_n(u)| s + |f_{n+2}(u)| s\right) e^{-cs|u|^{\alpha}}. \end{aligned}$$

On a donc bien $\lim_{|u|\to+\infty} \frac{d}{du}\left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) = 0$. Ce qui justifie le resultat de l'intégration par parties et on a aussi :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^2}{du^2}\left(u^n e^{s\varphi(u)}\right) \right| du < \infty \\ \Rightarrow &\lim_{|x|\to+\infty} x \frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) = 0. \end{aligned}$$

◇

Démonstration du théorème 2.23. Sous les hypothèses du théorème 2.23, $\forall s > 0$, X_s a une densité $m(s,.) \in C^\infty(\mathbb{R})$ (voir proposition 2.12). Et on a pour tout $t > 0$, et pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_t \le x] &= \mathbb{P}[M_t < x], \text{ par la proposition 2.17} \\ &= \mathbb{P}[R_x > t], \text{ par la remarque 2.27} \\ &= \int_t^{+\infty} \frac{x}{s} m(s,x) ds, \text{ par } \textit{[Sato (2005), théorème 46.4]} \\ &= x \int_t^{+\infty} m(s,x) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

La fonction $x \to \int_t^{+\infty} m(s,x)\frac{ds}{s}$ est $C^\infty(\mathbb{R})$ (lemme 2.25), donc il en est de mï¿$\frac{1}{2}$me de $x \to x\int_t^{+\infty} m(s,x)\frac{ds}{s}$. Donc $x \to \mathbb{P}[M_t \le x]$ est $C^\infty]0,+\infty[$. D'où l'existence d'une densité pour M_t sur $]0,+\infty[$ que l'on note f_t^M. On a alors pour tout $x > 0$, pour tout $n \ge 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n f_t^M}{\partial x^n}(x) &= \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \mathbb{P}[M_t \le x] \\ &= (n+1)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_t^\infty m(s,x)\frac{ds}{s} + x\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\int_t^\infty m(s,x)\frac{ds}{s} \\ &= \int_t^\infty \left((n+1)\frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) + x\frac{\partial^{n+1} m}{\partial x^{n+1}}(s,x)\right)\frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse $\int_{|y|>1} |y|^2 \nu(dy) < \infty$ on a d'après le lemme 2.25

$$\lim_{x\to+\infty} \left((n+1)\frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x) + x\frac{\partial^{n+1} m}{\partial x^{n+1}}(s,x)\right) = 0 \quad \forall n \ge 0.$$

On a besoin, pour conclure, d'un argument de domination pour faire passer la limite dans l'intègrale. On sait que $\frac{1}{s}\frac{\partial^n m}{\partial x^n}(s,x)$ est dominée par $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u|^n}{s} e^{-cs|u|^\alpha} du$. On doit donc dominée $\frac{x}{s}\frac{\partial^{n+1} m}{\partial x^{n+1}}(s,x)$. Par une intégration par partie, on obtient

$$\frac{\partial^{n+1} m}{\partial x^{n+1}}(s,x) = \frac{(-iu)^{n+1}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iux}}{(-ix)} \frac{d}{du}\left(u^{n+1} e^{s\varphi(u)}\right) du$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{x}{s}\frac{\partial^{n+1} m}{\partial x^{n+1}}(s,x)\right| &\le \frac{1}{2\pi s}\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{du}\left(u^{n+1} e^{s\varphi(u)}\right)\right| du \\ &\le \frac{K_2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u|^n + s|u|^{n+2}}{s} e^{-cs|u|^\alpha} du. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $y = us^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient

$$\left| \frac{x}{s}\frac{\partial^{n+1} m}{\partial x^{n+1}}(s,x)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|y|^n}{s^{\frac{n+1}{\alpha}+1}} + \frac{|y|^{n+2}}{s^{\frac{n+3}{\alpha}}}\right) e^{-c|y|^\alpha} dy. \tag{2.3.15}$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\partial^n f_t^M}{\partial x^n}(x) = 0 \quad \forall n \ge 0.$$

En combinant 2.3.14 et (2.3.15), on obtient le deuxième resultat du théorème. ◇

Chapitre 3

Etude asymptotique du supremum d'un processus de Lévy

Dans ce chapitre nous cherchons à contrôler l'erreur commise lorqu'on remplace le supremum d'un processus de Lévy par son supremum discret.

Définition 3.1 *On pose*

$$M_t^{X,n} = \max_{0\leq k\leq n} X_{\frac{kt}{n}}$$
$$m_t^{X,n} = \min_{0\leq k\leq n} X_{\frac{kt}{n}}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguité on omettra l'exposant X. Dans la première partie nous allons donner des développements de $\mathbb{E}(M_t - M_t^n)$, en utilisant l'identité de Spitzer que nous reformulons dans le cas des processus de Lévy. Dans la deuxième partie, nous étendons le théorème d'Asmussen-Glynn-Pitman (1995) sur la convergence de $\sqrt{n}(M_t - M_t^n)$, au cas des processus de Lévy à activité finie et à variation infinie. Dans la troisième partie, nous montrons que dans le cas des processus de Poisson composé nous avons un développement de $\mathbb{E}(f(M_t) - f(M_t^n))$, lorsque f est bornée dérivable avec une dérivée bornée.

3.1 Identité de Spitzer et applications

L'identité de Spitzer, permet d'exprimer l'éspérance du maximum d'une marche aléatoire par une somme dépendant des éspérances des termes composant ce maximum. Définissons la marche aléatoire suivante

$$S_0 = 0$$
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1,$$

avec $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. i.i.d. intégrables. Soient

$$M_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k$$
$$M_\infty = \sup_{0\leq k\leq +\infty} S_k.$$

Alors par *[Asmussen (1987), proposition 4.5, page 177]*, on a

$$\mathbb{E}M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} S_k^+$$
$$\mathbb{E}M_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} S_k^+.$$

Ce résultat transposé dans le cadre des processus de Lévy, nous donne des outils que nous utiliserons tout au long de ce chapitre.

Proposition 3.2 *Si X est un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) verifiant $\int_{x>1} x\nu(dx) < \infty$, alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}X^+_{k\frac{t}{n}}}{k} = \int_0^t \frac{\mathbb{E}X^+_s}{s} ds$$

$$\mathbb{E}M^n_t = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}X^+_{k\frac{t}{n}}}{k}$$

$$\mathbb{E}M_t = \int_0^t \frac{\mathbb{E}X^+_s}{s} ds.$$

Pour démontrer ce résultat on a besoin de connaître la dépendance de $\mathbb{E}M_t$ par rapport à t.

Proposition 3.3 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) verifiant $\int_{x>1} x\nu(dx) < \infty$.*

– *Si $\int_{|x|\le 1} |x|\nu(dx) < \infty$, alors*

$$\mathbb{E}M_t \le \left(\gamma_0^+ + \int_{\mathbb{R}^+} x\nu(dx)\right) t + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}.$$

– *Si $\int_{|x|\le 1} |x|\nu(dx) = +\infty$, alors*

$$\mathbb{E}M_t \le \left(\gamma^+ + \int_{x>1} x\nu(dx)\right) t + \left(\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2\sqrt{\int_{|x|\le 1} x^2\nu(dx)}\right)\sqrt{t}.$$

Démonstration de la proposition 3.3. Si $\int_{|x|\le 1} |x|\nu(dx) < \infty$, alors on a (voir (1.4.14))

$$\begin{aligned}\sup_{0\le s\le t} X_s &= \sup_{0\le s\le t}\left(\gamma_0 s + \sigma B_s + \int_{x\in\mathbb{R},\tau\in[0,s]} xJ_X(dx\times d\tau)\right)\\ &\le \gamma_0^+ t + \sigma \sup_{0\le s\le t} B_s + \int_{x\in\mathbb{R}^+,\tau\in[0,t]} xJ_X(dx\times d\tau).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t} X_s \le \gamma_0^+ t + \sigma\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t} B_s + t\int_{\mathbb{R}^+} x\nu(dx).$$

Par le théorème de réflexion, on sait que $\sup_{0\le s\le t} B_s$ a même loi que $|B_t|$. Si on désigne par ϕ la densité de la v.a. gaussienne centrée réduite alors un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t} B_s &= \mathbb{E}|B_t|\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t} X_s\right) \le \left(\gamma_0^+ + \int_{\mathbb{R}^+} x\nu(dx)\right) t + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}.$$

Considérons maintenant le cas où$\int_{|x|\le 1} |x|\nu(dx) = +\infty$. On définit le processus $(R_t)_{t\ge 0}$ par

$$R_t := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \widetilde{X}^\varepsilon_t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon\le|x|\le 1, s\in[0,t]} x\widetilde{J}_X(dx\times ds).$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t} X_s\right) &= \mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left(\gamma s+\sigma B_s+X_s^l+R_s\right)\\ &\le \mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left(\gamma s+\sigma B_s+X_s^l\right)+\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}(R_s).\end{aligned}$$

Le processus $\left(\gamma s+\sigma B_s+X_s^l\right)_{t\ge 0}$ est à activité finie (et sa mesure de Lévy ne charge pas $[-1,1]$), donc

$$\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left(\gamma s+\sigma B_s+X_s^l\right)\le\left(\gamma^+ +\int_{x>1}x\nu(dx)\right)t+\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}.$$

D'autre part, en utilisant Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Doob (car R est une martingale) on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}(R_s) &\le \sqrt{\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}|R_s|\right)^2}\\ &\le 2\sqrt{\mathbb{E}R_t^2}\\ &= 2\sqrt{t\int_{|x|\le 1}x^2\nu(dx)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t} X_s\right)\le\left(\gamma^+ +\int_{x>1}x\nu(dx)\right)t+\left(\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}+2\sqrt{\int_{|x|\le 1}x^2\nu(dx)}\right)\sqrt{t}.$$

◇

Démonstration de la proposition 3.2. Par la proposition 3.3 on a

$$\exists c_1,c_2>0,\quad \mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}X_s\le c_1t+c_2\sqrt{t},\quad \forall t\ge 0. \tag{3.1.1}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} &\le \frac{\mathbb{E}\sup_{0\le\tau\le s}X_\tau}{s}\\ &\le c_1+\frac{c_2}{\sqrt{s}}.\end{aligned}$$

Or $s\to\frac{1}{\sqrt{s}}$ est intégrable sur $[0,t]$. Donc il en est de même de $s\to\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}$. Notons

$$\begin{aligned}&f: s\in]0,t]\to\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}\\ &f_m: s\in[0,t]\to\sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{\left(\frac{(k-1)t}{m},\frac{kt}{m}\right]}(s)f\left(\frac{kt}{m}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m\frac{\mathbb{E}X^+_{k\frac{t}{m}}}{k\frac{t}{m}}\frac{t}{m} &= \sum_{k=1}^m f\left(\frac{kt}{m}\right)\frac{t}{m}\\ &= \int_0^t f_m(s)ds.\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $(0,t]$. En effet le processus X a des trajectoires continues à droite et $\sup_{0\le s\le t}X_s$ est intégrable (voir (3.1.1)),donc $s\in[0,t]\to\mathbb{E}X_s^+$ est continue à droite. D'autre part on a $X_s^+=X_{s^-}^+$ $p.s.$.

D'où $s \in [0,t] \to \mathbb{E}X_s^+$ est continue sur $[0,t]$. Et par conséquent f est continue sur (0,t]. On en déduit que $\lim_{m\to+\infty} f_m = f$ *p.p.* On a aussi pour tout $s \in (0,t]$

$$\begin{aligned}
|f_m(s)| &\leq \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{\left(\frac{(k-1)t}{m},\frac{kt}{m}\right]}(s)\left|f\left(\frac{kt}{m}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{\left(\frac{(k-1)t}{m},\frac{kt}{m}\right]}(s)\left(c_1+\frac{c_2}{\sqrt{\frac{kt}{m}}}\right) \\
&\leq c_1+\frac{c_2}{\sqrt{s}}.
\end{aligned}$$

Donc par convergence dominée on a $\lim_{m\to+\infty}\int_0^t f_m(s)ds = \int_0^t f(s)ds$. D'où le premier résultat de la proposition. D'autre part

$$\begin{aligned}
\max_{k=0,\dots,m} X_{k\frac{t}{m}} &= \max\left(0, X_{\frac{t}{m}}, X_{2\frac{t}{m}},\dots,X_t\right) \\
&= \max\left(X^+_{\frac{t}{m}}, X^+_{2\frac{t}{m}},\dots,X^+_t\right).
\end{aligned}$$

Remarquons que $\forall k \geq 1 \quad X_{k\frac{t}{m}} = \sum_{j=1}^{k}\left(X_{j\frac{t}{m}} - X_{(j-1)\frac{t}{m}}\right)$ et que les v.a. $\left(X_{j\frac{t}{m}} - X_{(j-1)\frac{t}{m}}\right)_{j\geq 1}$ sont i.i.d. Donc par l'identité de Spitzer (*[Asmussen (1987), proposition 4.5, page 177]*), on a

$$\mathbb{E}\max_{k=0,\dots,m} X_{k\frac{t}{m}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\mathbb{E}X^+_{k\frac{t}{m}}.$$

Or la suite $\left(\max_{k=0,\dots,m} X_{k\frac{t}{m}}\right)_{m\geq 0}$ est dominée par $\sup_{0\leq s\leq t} X_s$, donc en utilisant le théorème de convergence dominée on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} X_s &= \mathbb{E}\lim_{m\to+\infty}\max_{k=0,\dots,m} X_{k\frac{t}{m}} \\
&= \lim_{m\to+\infty}\mathbb{E}\max_{k=0,\dots,m} X_{k\frac{t}{m}} \\
&= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\mathbb{E}X^+_{k\frac{t}{m}} \\
&= \int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}ds.
\end{aligned}$$

◇

3.1.1 Cas des processus de Lévy à activité finie

L'utilisation de l'identité de Spitzer dans le cas des processus de Lévy permet d'extraire ce premier resultat.

Théorème 3.4 *Soient X un processus de Lévy à activité finie intégrable, $t > 0$, et $n \in \mathbb{N}$. Le processus X s'écrit sous la forme* (1.4.10) *et on a*

1. Si $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) &= \frac{1}{2n}\left(\frac{\gamma_0 t}{2} + \lambda t\mathbb{E}Y_1^+ - \sigma\sqrt{t}\mathbb{E}\phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}\sqrt{t} + \frac{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2n}\mathbb{E}\left(\gamma_0 t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right)\Phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}\sqrt{t} + \frac{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
&\quad -\frac{\sigma\sqrt{t}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$. La fonction ζ est la fonction zeta de Riemann et, ϕ et Φ représentent la densité et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2. *Si $\sigma = 0$, alors $s \to \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}$ est absolument continue sur $[0,t]$ et on a*

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = \frac{1}{2n}\left(\gamma_0^+ t + \lambda t \mathbb{E}Y_1^+ - \mathbb{E}X_t^+\right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

lorsque $n \to +\infty$. De plus

(a) *Si Y_1 a une densité $f_{Y_1} \in C_b(\mathbb{R})$*

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = \frac{1}{2n}\left(\gamma_0^+ t + \lambda t \mathbb{E}Y_1^+ - \mathbb{E}X_t^+\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

lorsque $n \to +\infty$.

(b) *Si $\gamma_0 = 0$*

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = \frac{1}{2n}\left(\lambda t \mathbb{E}Y_1^+ - \mathbb{E}X_t^+\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

lorsque $n \to +\infty$.

Rappelons que dans le cas où X est un mouvement brownien, *([Brodie-Glasserman-Kou (1999), lemme 3])* montre un résultat simulaire au point 1 du théorème (dans lequel on annule les Y_i). Pour démontrer le théorème ci-dessus, nous allons utiliser les lemmes suivants.

Lemme 3.5 *Si $f \in C^2[0,t]$, alors*

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} f(\sqrt{s})ds &= \frac{t}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{kt}{n}}} f\left(\sqrt{\frac{kt}{n}}\right) - \frac{\sqrt{t}\zeta\left(\frac{1}{2}\right) f(0)}{\sqrt{n}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{t}f(\sqrt{t}) - tf'(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Lemme 3.6 *Soit f une fonction absolument continue sur $[0,t]$, alors on a*

$$\int_0^t f(s)ds - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{kt}{n}\right) = \frac{t}{2n}\left(f(0) - f(t)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour démontre le lemme 3.6 on utilise le résultat suivant.

Lemme 3.7 *Soit $h \in L^1([0,t])$, on définit la suite $(I_m(h))_{m\geq 1}$ par*

$$I_m(h) = \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\frac{t}{m}}^{k\frac{t}{m}} h(u)\left(u - (k-1)\frac{t}{m}\right)du.$$

Alors on a

$$\lim_{m\to +\infty} m I_m(h) = \frac{t}{2}\int_0^t h(u)du.$$

Démonstration du lemme 3.7. Considérons d'abord le cas où $h \in C([0,t])$. Par les changements de variable $v = u - (k-1)\frac{t}{m}$, puis $w = mv$ on obtient

$$\begin{aligned}I_m(h) &= \sum_{k=1}^m \int_0^{\frac{t}{m}} h\left(v + (k-1)\frac{t}{m}\right) v dv \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^t h\left(\frac{w}{m} + (k-1)\frac{t}{m}\right)\frac{w}{m}\frac{dw}{m} \\ &= \frac{1}{m}\int_0^t \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m h\left(\frac{w}{m} + (k-1)\frac{t}{m}\right) w dw.\end{aligned}$$

Or h est continue et pour tout $w \in [0,t]$ on a $\frac{w}{m} + (k-1)\frac{t}{m} \in \left[(k-1)\frac{t}{m}, k\frac{t}{m}\right]$, donc

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{t}{m} \sum_{k=1}^{m} h\left(\frac{w}{m} + (k-1)\frac{t}{m}\right) = \int_0^t h(s)ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{m \to +\infty} mI_m(h) &= \int_0^t \left(\frac{1}{t}\int_0^t h(s)ds\right) wdw \\ &= \frac{t}{2}\int_0^t h(s)ds. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où h est intégrable sur $[0,t]$. Il existe alors une suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 0}$ de $C([0,t])$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^t |h(u) - h_n(u)|du = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_m^n : &= \left| mI_m(h_n) - m\sum_{k=1}^{m} \int_{(k-1)\frac{t}{m}}^{k\frac{t}{m}} h(u)\left(u - (k-1)\frac{t}{m}\right) du \right| \\ &= \left| m\sum_{k=1}^{m} \int_{(k-1)\frac{t}{m}}^{k\frac{t}{m}} (h_n(u) - h(u))\left(u - (k-1)\frac{t}{m}\right) du \right|. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} u_m^n &\leq m\sum_{k=1}^{m} \int_{(k-1)\frac{t}{m}}^{k\frac{t}{m}} |h_n(u) - h(u)| \left|u - (k-1)\frac{t}{m}\right| du \\ &\leq t\sum_{k=1}^{m} \int_{(k-1)\frac{t}{m}}^{k\frac{t}{m}} |h_n(u) - h(u)|du \\ &\leq t\int_0^t |h_n(u) - h(u)|du. \end{aligned}$$

La convergence (en m) de $mI_m(h_n)$ est uniforme par rapport à m. D'où par le théorème d'inversion des limites

$$\begin{aligned} &\lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} mI_m(h_n) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} mI_m(h_n) \\ &\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} mI_m(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{t}{2}\int_0^t h_n(u)du \\ &\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} mI_m(h) = \frac{t}{2}\int_0^t h(u)du. \end{aligned}$$

◇

Démonstration du lemme 3.6. Soit h la derivée p.p. de f. On a

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s)ds - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kt}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\frac{t}{n}}^{k\frac{t}{n}} \left(f(s) - f\left(\frac{kt}{n}\right)\right) ds \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\frac{t}{n}}^{k\frac{t}{n}} \int_s^{k\frac{t}{n}} h(u)duds \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\frac{t}{n}}^{k\frac{t}{n}} \int_{(k-1)\frac{t}{n}}^{u} h(u)dsdu, \text{ par Fubini.} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s)ds - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{kt}{n}\right) &= -\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\frac{t}{n}}^{k\frac{t}{n}} h(u)\left(u-(k-1)\frac{t}{n}\right)du \\ &= -\frac{t}{2n}\int_0^t h(u)du + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ par le lemme 3.7.}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s)ds - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{kt}{n}\right) &= -\frac{t}{2n}\left(f(t)-f(0)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{t}{2n}\left(f(0)-f(t)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

$\diamond$

Démonstration du lemme 3.5. On va prendre $t = 1$. Le cas $t \neq 1$ se déduit par un changement de variable. On a

$$\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x}) = \frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \frac{f(\sqrt{x})-f(0)}{\sqrt{x}}.$$

Posons

$$g(x) = \frac{f(\sqrt{x})-f(0)}{\sqrt{x}}.$$

Donc g est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, avec $\lim_{x\to 0} g(x) = f'(0)$. D'autre part g est dérivable et

$$g'(x) = \frac{f(0)-f(\sqrt{x})+\sqrt{x}f'(\sqrt{x})}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction g' est intégrable sur $[0,1]$. Donc g est absolument continue. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) &= \int_0^1 \frac{f(0)}{\sqrt{x}}dx + \int_0^1 g(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{f(0)}{\sqrt{\frac{k}{n}}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= f(0)\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\right) \\ &\quad + \left(\int_0^1 g(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

En utilisant *[Knopp(1990), p.538]et le lemme 3.6, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) &= f(0)\left(-\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{g(0)}{2n} - \frac{g(1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}}f(0) - \frac{f(0)}{2n} - \frac{f(1)-f'(0)-f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)f(0)}{\sqrt{n}} - \frac{f(1)-f'(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Maintenant regardons le cas $t \neq 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{kt}{n}}}f\left(\sqrt{\frac{kt}{n}}\right) &= \sqrt{t}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{tx})dx - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{kt}{n}}}f\left(\sqrt{\frac{kt}{n}}\right) \\ &= \sqrt{t}\left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{tx})dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}f\left(\sqrt{\frac{kt}{n}}\right)\right).\end{aligned}$$

La première égalité est obtenu par un simple changement de variable. On définit la fonction h par

$$h(x) = f\left(\sqrt{t}x\right)$$

Donc, par ce qui précéde

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})dx - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{kt}{n}}} f\left(\sqrt{\frac{kt}{n}}\right) &= \sqrt{t}\left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}} h(\sqrt{x})dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} h\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right)\\ &= -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}f(0)}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{t}f(1) - tf'(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

◇

Démonstration du théorème 3.4. On sait d'après la proposition 3.2 que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t} X_s - \max_{k=0,\ldots,m} X_{k\frac{t}{m}}\right) = \int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\mathbb{E}X^+_{k\frac{t}{m}}}{\frac{kt}{m}}.$$

On va alors etudier la régularité de la fonction $s \in [0,t] \to \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}$ et conclure avec les lemmes 3.5 et 3.6 et *[Asmussen-Glynn-Pitman (1995), lemme 5]*.

Cas 1 : $\sigma > 0$ et $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$

Soit $U \sim N(m, \sigma^2)$. Par un calcul simple on obtient

$$\mathbb{E}U^+ = \sigma\phi\left(\frac{m}{\sigma}\right) + m\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right).$$

Donc pour tout $s > 0$

$$\mathbb{E}\frac{X_s^+}{s} = \mathbb{E}\frac{\sigma}{\sqrt{s}}\phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}\sqrt{s} + \frac{\sum_{i=1}^{N_s} Y_i}{\sigma\sqrt{s}}\right) + \mathbb{E}\left(\gamma_0 + \frac{\sum_{i=1}^{N_s} Y_i}{s}\right)\Phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}\sqrt{s} + \frac{\sum_{i=1}^{N_s} Y_i}{\sigma\sqrt{s}}\right).$$

Soient f et g les fonctions définies sur $(0,t]$ comme suit

$$\begin{aligned} f(s) &= \mathbb{E}\phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}s + \frac{\sum_{i=1}^{N_{s^2}} Y_i}{\sigma s}\right)\\ g(s) &= \mathbb{E}\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}s + \frac{\sum_{i=1}^{N_{s^2}} Y_i}{\sigma s}\right)\Phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}s + \frac{\sum_{i=1}^{N_{s^2}} Y_i}{\sigma s}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\frac{X_s^+}{s} = \frac{\sigma}{\sqrt{s}} f\left(\sqrt{s}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{s}} g\left(\sqrt{s}\right).$$

Si f et g se prolongent en fonctions $C^2[0,t]$ alors, en utilisant le lemme 3.5, on prouve la première partie du théorème. Par *[Cont-Tankov(2004), proposition 9.5]*,

$$f(s) = \mathbb{E}s^{2N_1}e^{-\lambda(s^2-1)}\phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}s + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma s}\right).$$

La fonction f a donc la même régularité que la fonction $\tilde{f}$ définie comme suit

$$\tilde{f}(s) = \mathbb{E}s^{2N_1}\phi\left(\mu s + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma s}\right),$$

où $\mu = \frac{\gamma_0}{\sigma}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction

$$s \to h(s,x) = \phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right).$$

Donc

$$\tilde{f}(s) = \mathbb{E} s^{2N_1} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right).$$

Remarquons que

$$0 \leq h(s,x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

et

$$\begin{aligned} h(s,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mu s + \frac{x}{s}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2 s^2}{2}\right) \exp\left(-\mu x - \frac{x^2}{2s^2}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} -\mu x &= \left(-\mu \frac{s}{\varepsilon}\right)\left(x \frac{\varepsilon}{s}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\left(\mu \frac{s}{\varepsilon}\right)^2 + \left(x \frac{\varepsilon}{s}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$-\mu x \leq \mu^2 s^2 + \frac{x^2}{4s^2}.$$

D'où

$$h(s,x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{\frac{\mu^2 s^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{4s^2}} \wedge 1\right). \tag{3.1.2}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} h(s,x) &= \left(\mu - \frac{x}{s^2}\right) \phi'\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{s^3} - \mu^2 s\right) \phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{s^3} - \mu^2 s\right) h(s,x), \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} h(s,x) = \left(-\frac{3x^2}{s^4} - \mu^2\right) \phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) + \left(\frac{x^2}{s^3} - \mu^2 s\right)^2 \phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right).$$

En utilisant (3.1.2), on obtient

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial s} h(s,x)\right| &\leq \frac{\mu^2 s}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{x^2}{s^3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\mu^2 s^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{4s^2}} \\ &\leq \frac{\mu^2 s}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{C_1 \mathbb{1}_{\{x \neq 0\}}}{s} e^{\frac{\mu^2 s}{2}}, \end{aligned}$$

avec $C_1 = \sup_{y>0}\left(\frac{y^2 e^{-\frac{y^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\right)$. En utilisant toujours (3.1.2) et le fait que $\left(\frac{x^2}{s^3} - \mu^2 s\right)^2 \leq 2\left(\frac{x^4}{s^6} + \mu^4 s^2\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2}{\partial s^2} h(s,x)\right| &\leq \left(\mu^2 + 2\mu^4 s^2\right) h(s,x) + \left(\frac{3x^2}{s^4} + 2\frac{x^4}{s^6}\right) h(s,x) \\
&\leq \frac{\mu^2 + 2\mu^4 s^2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{C_2 \mathbb{1}_{x\neq 0}}{s^2} e^{\frac{\mu^2 s^2}{2}},
\end{aligned}$$

avec $C_2 = \sup_{y>0}\left(\frac{3y^2+2y^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}\right)$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(s^{2N_1} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right) = 2N_1 s^{2N_1-1} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right) + s^{2N_1}\frac{\partial}{\partial s} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right).$$

Donc

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(s^{2N_1} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right)\right| \leq \frac{2N_1 s^{2N_1-1}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\mu^2 s^{2N_1-1}}{\sqrt{2\pi}} + C_1 \mathbb{1}_{\{N_1>0\}} s^{2N_1-1} e^{\frac{\mu^2 s^2}{2}}.$$

On en déduire que $\tilde{f}$ est dérivable et

$$\tilde{f}'(s) = \mathbb{E}\left[2N_1 s^{2N_1-1} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right) + s^{2N_1}\frac{\partial}{\partial s} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right].$$

De même

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^{2N_1} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right) &= 2N_1(2N_1-1) s^{2N_1-2} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right) + 4N_1 s^{2N_1-1}\frac{\partial}{\partial s} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right) \\
&\quad + s^{2N_1}\frac{\partial^2}{\partial s^2} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left|2N_1(2N_1-1) s^{2N_1-2} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right| &\leq \frac{2N_1(2N_1-1) s^{2N_1-2}}{\sqrt{2\pi}} \\
\left|4N_1 s^{2N_1-1}\frac{\partial}{\partial s}\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right| &\leq \frac{4N_1(2N_1-1) s^{N_1}}{\sqrt{2\pi}} + 4N_1(2N_1-1) s^{2N_1-2} C_1 \mathbb{1}_{\{N_1>0\}} e^{\frac{\mu^2 s^2}{2}} \\
\left|s^{2N_1}\frac{\partial^2}{\partial s^2} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right| &\leq \frac{\mu^2 + 2\mu^4 s^2}{\sqrt{2\pi}} s^{2N_1} + C_2 \mathbb{1}_{N_1>0} s^{2N_1-2} e^{\frac{\mu^2 s^2}{2}}.
\end{aligned}$$

On en déduire que $\tilde{f}$ est 2 fois dérivable et

$$\begin{aligned}
\tilde{f}''(s) &= \mathbb{E}\left[2N_1(2N_1-1) s^{2N_1-2} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right) + 4N_1 s^{2N_1-1}\frac{\partial}{\partial s} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[s^{2N_1}\frac{\partial^2}{\partial s^2} h\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'où f est $C^2[0,t]$ et on vérifie que $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $f'(0) = 0$. D'autre part la fonction g peut sécrire sous la forme suivante (voir *[Cont-Tankov(2004), proposition 9.5]*)

$$g(s) = \mathbb{E} s^{2N_1} e^{-\lambda(s^2-1)}\left(\frac{\gamma_0}{\sigma} s + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma s}\right)\Phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma} s + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma s}\right).$$

On définit alors la fonction $\tilde{g}$ comme suit

$$\tilde{g}(s) = \mathbb{E}s^{2N_1}\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}s + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma s}\right)\Phi\left(\frac{\gamma_0}{\sigma}s + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma s}\right).$$

La fonction g a la même régularité que la fonction $\tilde{g}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la fonction

$$s \to k(s,x) := \left(\mu s + \frac{x}{s}\right)\Phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right),$$

avec $\mu = \frac{\gamma_0}{\sigma}$. Donc

$$\tilde{g}(s) = \mathbb{E}s^{2N_1}k\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}k(s,x) &= \left(\mu - \frac{x}{s^2}\right)\Phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) + \left(\mu^2 s - \frac{x^2}{s^3}\right)\phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right)\\ &= \left(\mu - \frac{x}{s^2}\right)\Phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) + \left(\mu^2 s - \frac{x^2}{s^3}\right)h\left(s,x\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2}k(s,x) &= \frac{2x}{s^3}\Phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) + \left(2\mu^2 - \mu^4 s^2 + \frac{2\mu^2 x^2}{s^2} - \frac{2\mu x}{s^2} + \frac{4x^2}{s^4} - \frac{x^4}{s^6}\right)\phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right)\\ &= \frac{2x}{s^3}\Phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) + \left(2\mu^2 - \mu^4 s^2 + \frac{2\mu^2 x^2}{s^2} - \frac{2\mu x}{s^2} + \frac{4x^2}{s^4} - \frac{x^4}{s^6}\right)h\left(s,x\right).\end{aligned}$$

Notons que $\Phi\left(\mu s + \frac{x}{s}\right) \leq 1$. Donc par le même raisonnement que dans le cas de $\tilde{f}$, on déduit que $\tilde{g}$ est $C^2[0,t]$. Et on a

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{'}(s) &= \mathbb{E}\left[2N_1 s^{2N_1-1}k\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right) + s^{2N_1}\frac{\partial}{\partial s}k\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right]\\ \tilde{g}^{''}(s) &= \mathbb{E}\left[2N_1\left(2N_1-1\right)s^{2N_1-2}k\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right) + 4N_1 s^{2N_1-1}\frac{\partial}{\partial s}k\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right]\\ &\quad + \mathbb{E}\left[s^{2N_1}\frac{\partial^2}{\partial s^2}k\left(s, \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Y_i}{\sigma}\right)\right].\end{aligned}$$

Donc g est $C^2[0,t]$, et on vérifie que $g(0) = 0$ et $g^{'}(0) = \frac{\lambda \mathbb{E}Y_1^+}{\sigma} + \frac{\gamma_0}{2\sigma}$.

Cas 2 : $\sigma = 0$ et $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$

On a

$$\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} = \gamma_0^+ e^{-\lambda s} + e^{-\lambda s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n s^{n-1}}{n!}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^+.$$

Si $\gamma_0 = 0$, voir le cas 4. Sinon, soit μ^n la loi de $-\frac{1}{\gamma_0}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^+ &= \gamma_0 \mathbb{E}\left(s + \frac{1}{\gamma_0}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^+\\ &= \gamma_0 \mathbb{E}\left(s - \left(-\frac{1}{\gamma_0}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right)^+.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{+} &= \gamma_0 \int_{-\infty}^{s} (s-x)\mu^n(dx)\\ &= \gamma_0 \int_{-\infty}^{s}\int_{x}^{s} du\mu^n(dx)\\ &= \gamma_0 \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{u} \mu^n(dx)du.\end{aligned}$$

Donc $s \to \mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{+}$ est absolument continue. Il en est donc de même de $s \to \frac{\lambda^n s^{n-1}}{n!}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{+}$. Si on note h_n sa derivée p.p. alors pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned}& h_n(s) = -\gamma_0 \frac{\lambda^n s^{n-1}}{n!}\int_{-\infty}^{s} d\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq -\gamma_0 x\right] + \frac{n-1}{n!}\lambda^n s^{n-2}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{+}\\ & \Rightarrow |h_n(s)| \leq |\gamma_0|\frac{\lambda^n t^{n-1}}{n!} + \frac{n-1}{n!}\lambda^n t^{n-2}\left(|\gamma_0|t + n\mathbb{E}|Y_1|\right) \quad \forall s\in[0,t].\end{aligned}$$

D'où la convergence normale de $\sum h_n$ sur $[0,t]$, et par conséquent l'absolue continuité de $\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}$ sur $[0,t]$. Donc par la proposition 3.2 et le lemme 3.6

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s - \max_{k=0,\ldots,n} X_{k\frac{t}{n}}\right) &= \int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}ds - \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{E}X_{k\frac{t}{n}}^+}{\frac{kt}{n}}\\ &= \frac{t}{2n}\left(\lim_{s\to 0^+}\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} - \frac{\mathbb{E}X_t^+}{t}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\left(\gamma_0^+ + \lambda\mathbb{E}Y_1^+\right)t - EX_t^+\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\left(\gamma_0^+ t + \lambda t\mathbb{E}Y_1^+ - EX_t^+\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Cas 3 : $\sigma = 0$, $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$ et $f_{Y_1} \in C_b(\mathbb{R})$
Dans ce cas

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} &= \frac{1}{s}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{N_s} Y_i\right)^{+}\\ &= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{+}\\ &= \gamma_0^+ e^{-\lambda s} + e^{-\lambda s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n s^{n-1}}{n!}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{+}.\end{aligned}$$

Si on note f_{n,Y_1} pour $n \geq 1$, la n-ième convolution de f_{Y_1}, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s+\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{+} &= \int_{-\gamma_0 s}^{+\infty} (\gamma_0 s + x) f_{n,Y_1}(x)dx\\ &= \gamma_0^2 \int_{-\infty}^{s} (s-x) f_{n,Y_1}(-\gamma_0 x)dx\\ &= \gamma_0^2 \int_{-\infty}^{s}\int_{x}^{s} f_{n,Y_1}(-\gamma_0 x)dudx\\ &= \gamma_0^2 \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{u} f_{n,Y_1}(-\gamma_0 x)dxdu.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par Fubini. La fonction $s \to \mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^n Y_i\right)^+$ est bien $C^2([0,t])$. Et on a

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^n Y_i\right)^+ = \gamma_0^2 \int_{-\infty}^s f_{n,Y_1}(-\gamma_0 x)dx$$
$$\frac{d^2}{ds^2}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^n Y_i\right)^+ = \gamma_0^2 f_{n,Y_1}(-\gamma_0 s).$$

Et on verifie que pour tout $s \in [0,t]$

$$\left|\mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^n Y_i\right)^+\right| \leq |\gamma_0|t + n\mathbb{E}|Y_1|$$
$$\left|\frac{d}{ds}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^n Y_i\right)^+\right| \leq \gamma_0^2$$
$$\left|\frac{d^2}{ds^2}\mathbb{E}\left(\gamma_0 s + \sum_{i=1}^n Y_i\right)^+\right| \leq \gamma_0^2 K_2,$$

où K_2 est un majorant de f_{Y_1}. Ce qui nous permet de conclure que $s \to \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}$ se prolonge en une fonction $C^2[0,t]$. On conclut en utilisant *[Asmussen-Glynn-Pitman (1995), lemme 5]*.

Cas 4 : $\sigma = 0$, $\gamma_0 = 0$ et $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$

On a

$$\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} = e^{-\lambda s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n s^{n-1}}{n!}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^+.$$

Or $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^+ \leq n\mathbb{E}|Y_1|$. On en déduit comme précédemment que $s \to \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}$ se prolonge en une fonction $C^2([0,t])$. D'où par *[Asmussen-Glynn-Pitman (1995), lemme 5]*, on obtient la dernière partie du théorème. $\diamond$

3.1.2 Cas général pour les processus de Lévy

Lorsqu'on relâche la condition activité finie, le processus de Lévy considéré ne s'écrit plus sous la forme (1.4.10). Et donc les techniques utilisées pour démontrer le théorème 3.4 ne sont plus valables. Nous allons donc utiliser une autre approche.

Théorème 3.8 *Soit X un processus de Lévy intégrable de triplet (γ, σ^2, ν).*

1. *Si $\sigma > 0$*
$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
2. *Si $\sigma = 0$*
$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
3. *Si $\sigma = 0$ et $\int_{|x|\leq 1}|x|\nu(dx) < \infty$*
$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = O\left(\frac{\log(n)}{n}\right).$$

Le résultat du point 2 du théorème 3.8 est optimal dans le sens suivant.

Proposition 3.9 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un processus de Lévy X sans partie Brownienne tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = +\infty.$$

Pour le résultat du point 2, on utilise le lemme ci-dessous.

Lemme 3.10 *Soit X un processus de Lévy intégrable de triplet $(\gamma, 0, \nu)$. Alors on a*

$$\mathbb{E}|X_t| = o\left(\sqrt{t}\right),$$

lorsque $t \to 0$.

Démonstration de la proposition 3.9. Soit X un processus de Lévy $\alpha-$stable intégrable de triplet $(\gamma, 0, \nu)$. Le processus X intégrable implique $1 < \alpha < 2$ (voir *[Cont-Tankov (2004), formule (3.33)]*). De plus pour tout $a > 0$, on a (voir *[Cont-Tankov (2004), formule (3.31)]*)

$$\left(\frac{X_{at}}{a^{\frac{1}{\alpha}}}\right)_{t\geq 0} =^d \left(X_t\right)_{t\geq 0}.$$

Et on obtient facilement que pour $s > 0$

$$X_s =^d s^{\frac{1}{\alpha}} X_1.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) &= \int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}X_{k\frac{t}{n}}^+}{k}, \text{ par la proposition 3.2} \\
&= \int_0^t \frac{s^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}X_1^+}{s} ds - \sum_{k=1}^n \frac{\left(k\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}X_1^+}{k} \\
&= \mathbb{E}X_1^+ \left(\int_0^t \frac{ds}{s^{1-\frac{1}{\alpha}}} - \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\alpha}}}\right) \\
&= \mathbb{E}X_1^+ \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\alpha}}}\right).
\end{aligned}$$

Or par *[Abromowitz-Stegun (1972), formule (23.2.9)]*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\alpha}}}\right) = -\zeta\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann. Donc

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = -\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}\zeta\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\mathbb{E}X_1^+}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

D'autre part on sait que $\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < 1$. Donc pour $\varepsilon > 0$, on choisit α tel que $\frac{1}{\alpha}$ soit dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$. Et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) = +\infty.$$

◇

Démonstration du lemme 3.10. On peut écrire X sous cette forme.

$$X_t = X_t^1 + R_t^1,$$

avec

$$\begin{aligned} X_t^1 &= \gamma t + \int_{|x|>1, s\in[0,t]} x J_X(ds, dx) \\ R_t^1 &= \int_{|x|\leq 1, s\in[0,t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\frac{|X_t|}{\sqrt{t}} \leq \mathbb{E}\frac{|X_t^1|}{\sqrt{t}} + \mathbb{E}\frac{|R_t^1|}{\sqrt{t}}.$$

Comme X_t^1 est un processus de Lévy à activité finie, alors par la proposition 3.3 on a

$$\mathbb{E}\frac{|X_t^1|}{\sqrt{t}} = O\left(\sqrt{t}\right).$$

D'autre part on sait que $\lim_{t\to 0} \frac{|R_t^1|}{\sqrt{t}} = 0$ (c'est une limite en probabilité), et de plus

$$\mathbb{E}\left(\frac{|R_t^1|}{\sqrt{t}}\right)^2 = \int_{|x|\leq 1} x^2 \nu(dx).$$

On en déduit par uniforme intégrabilité que

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\frac{|R_t^1|}{\sqrt{t}} = 0.$$

D'où

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\frac{|X_t|}{\sqrt{t}} = 0.$$

◇

Démonstration du théorème 3.8. On pose $\delta = \frac{t}{n}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) &= \int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}X_{k\delta}^+}{k}, \text{par la proposition 3.2} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} - \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \frac{\mathbb{E}X_{k\delta}^+}{k\delta} ds \\ &= \int_0^\delta \left(\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} - \frac{\mathbb{E}X_\delta^+}{\delta}\right) ds + \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \left(\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} - \frac{\mathbb{E}X_{k\delta}^+}{k\delta}\right) ds. \end{aligned}$$

On note $u(\delta)$ (respectivement $v(\delta)$) le premier (respectivement le deuxième) terme à droite de la dernière égalité. On pose $f(s) = \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s^p}$ pour tout $s \geq 0$, où

$$p = \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma = 0 \textit{ et } \displaystyle\int_{|x|\leq 1} |x| \nu(dx) < \infty \\ \dfrac{1}{2} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Donc, lorsque s tend vers 0, on a

$$f(s) = \begin{cases} O(1) & si\ p = 1\ ou\ \sigma > 0, \text{ par la proposition 3.3} \\ o(1) & si\ \sigma = 0, \text{ par le lemme 3.10} \end{cases}$$

Par un simple changement de variable on a

$$\begin{aligned} u(\delta) &= \delta \int_0^1 \left(\frac{\mathbb{E}X_{s\delta}^+}{s\delta} - \frac{\mathbb{E}X_\delta^+}{\delta} \right) ds \\ &= \delta^p \int_0^1 \left(\frac{f(s\delta)}{s^{1-p}} - f(\delta) \right) ds. \end{aligned}$$

Par la proposition 3.3, on sait que f est bornée sur $[0,t]$. Donc il en est de même de $\frac{u(\delta)}{\delta^p}$. Lorsque $\sigma = 0$, on a par convergence dominée

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \frac{u(\delta)}{\sqrt{\delta}} &= \lim_{\delta \to 0} \int_0^1 \left(\frac{f(s\delta)}{s^{1-p}} - f(\delta) \right) ds \\ &= \int_0^1 \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(s\delta)}{s^{1-p}} - f(\delta) \right) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$u(\delta) = \begin{cases} O(\delta) & si\ p = 1 \\ O\left(\sqrt{\delta}\right) & si\ \sigma > 0 \\ o\left(\sqrt{\delta}\right) & si\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Posons maintenant $\tilde{X}_s = X_s - \alpha s$ pour tout $s \geq 0$, avec $\alpha = \mathbb{E}X_1$. Alors $\tilde{X}$ est une martingale. Et pour $s \geq 0$ fixé, $\left(\tilde{X}_\tau + \alpha s\right)_{\tau \geq 0}^+$ est une sous-martingale. Car $x \to x^+$ est convexe. Donc pour $s \in [(k-1)\delta, k\delta]$

$$\begin{aligned} X_s^+ &= \left(\tilde{X}_s + \alpha s\right)^+ \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha s\right)^+ / X_s\right). \end{aligned}$$

Et par suite

$$\mathbb{E}X_s^+ \leq \mathbb{E}\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha s\right)^+.$$

Donc

$$\begin{aligned} v(\delta) &= \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \left(\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} - \frac{\mathbb{E}X_{k\delta}^+}{k\delta} \right) ds \\ &= \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \left(\frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} - \frac{\mathbb{E}\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha k\delta\right)^+}{k\delta} \right) ds \\ &\leq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \left(\frac{\mathbb{E}\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha s\right)^+}{s} - \frac{\mathbb{E}\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha k\delta\right)^+}{k\delta} \right) ds \\ &= \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \mathbb{E}\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha k\delta\right)^+ \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{k\delta} \right) ds \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \frac{\mathbb{E}\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha s\right)^+ - E\left(\tilde{X}_{k\delta} + \alpha k\delta\right)^+}{s} ds. \end{aligned}$$

En remarquant que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$, on obtient

$$\begin{aligned} v(\delta) &\leq \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}X_{k\delta}^{+}\left(\log\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n}\int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \frac{|\alpha|\,(k\delta - s)}{s} ds \\ &= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}X_{k\delta}^{+}\left(\log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right) ds + \sum_{k=2}^{n}\int_{(k-1)\delta}^{k\delta} |\alpha|\left(\frac{k\delta}{s} - 1\right) ds \\ &\leq \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}X_{k\delta}^{+}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n} |\alpha|\delta\left(k\log\left(\frac{k}{k-1}\right) - 1\right) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v(\delta) &\leq \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}X_{k\delta}^{+}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + |\alpha|\delta\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k-1} - 1\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (k\delta)^p f(k\delta)\frac{1}{k(k-1)} + |\alpha|\delta\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} \\ &\leq \delta^p \sum_{k=2}^{n} \frac{f(k\delta)}{k^{1-p}(k-1)} + |\alpha|\delta\log(n) \\ &= \delta^p \sum_{k=2}^{n} \frac{f(k\delta)}{k^{1-p}(k-1)} + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right). \end{aligned}$$

Soit C, la borne supérieure de f. Dans le cas $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ et $\sigma = 0$ (donc $p = 1$), on a

$$\begin{aligned} v(\delta) &\leq \delta\sum_{k=2}^{n}\frac{f(k\delta)}{(k-1)} + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \\ &\leq C\delta\log(n) + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \\ &= O\left(\frac{\log(n)}{n}\right). \end{aligned}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, notons $w_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}$. On a

$$w_n \leq C\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

La série $\sum \frac{1}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}$ converge. Donc w_n est bornée. Si $\sigma = 0$ on a

$$w_n \leq \sum_{k=2}^{N}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{n}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}} &\leq C\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{(k-1)^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq C\sum_{k>N}\frac{1}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

La série $\sum \frac{1}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, donc pour $\varepsilon > 0$ donné

$$\exists N_1^{\varepsilon} \in \mathbb{N} \;/\; N \geq N_1^{\varepsilon} \;\Rightarrow\; C\sum_{k>N}\frac{1}{(k-1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{N_1^\varepsilon}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}} &= \sum_{k=2}^{N_1^\varepsilon}\lim_{n\to+\infty}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\exists N_2^\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ n\geq N_2^\varepsilon\ \Rightarrow\ \sum_{k=2}^{N_1^\varepsilon}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N^\varepsilon=\max\left(N_1^\varepsilon,N_2^\varepsilon\right)$. Alors si $n\geq N^\varepsilon$

$$\begin{aligned}w_n &= \sum_{k=2}^{N_1^\varepsilon}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}+\sum_{k=N_1^\varepsilon+1}^{n}\frac{f(k\delta)}{(k-1)^{\frac{3}{2}}}\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

En definitive

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N^\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ n\geq N^\varepsilon\ \Rightarrow\ w_n<\varepsilon.$$

D'où $w_n=o(1)$. Ce qui nous donne finalement

$$v(\delta)=\begin{cases}O\left(\dfrac{\log(n)}{n}\right) & si\ p=1\\ O\left(\sqrt{\delta}\right) & si\ \sigma>0\\ o\left(\sqrt{\delta}\right) & si\ \sigma=0.\end{cases}$$

◇

Dans le cas variation finie, avec une hypothèse un peu plus forte, on étend les résultats sur les processus de Poisson composé, obtenus dans le paragraphe précédent, au cas activité infinie.

Théorème 3.11 *Soit X un processus de Lévy intégrable de triplet $(\gamma,0,\nu)$. Supposons que $\int_{|x|\leq1}|x|\left|\log\left(|x|\right)\right|\nu(dx)<\infty$ et $\nu(\mathbb{R})=+\infty$, alors*

$$\mathbb{E}\left(M_t-M_t^n\right)=\left(\left(\gamma_0^++\int_{\mathbb{R}}x^+\nu(dx)\right)t-\mathbb{E}X_t^+\right)\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Lemme 3.12 *Si X est de type B et $\gamma_0\neq0$, alors*

$$\int_0^t ds\int_0^1 du\frac{1}{s}\left|\mathbb{P}\left[X_s\geq0\right]-\mathbb{P}\left[X_{su}\geq0\right]\right|<\infty. \tag{3.1.3}$$

Démonstration du lemme 3.12. Considérons d'abord le cas où $\gamma_0<0$

$$\int_0^t ds\int_0^1 du\frac{1}{s}\left|\mathbb{P}\left[X_s\geq0\right]-\mathbb{P}\left[X_{su}\geq0\right]\right| \ \leq\ \int_0^t\frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s\geq0\right]ds+\int_0^t ds\int_0^1 du\frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_{su}\geq0\right].$$

D'une part

$$\begin{array}{rcl} u_1 & := & \int_0^t \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] ds \\ & \leq & \int_0^1 \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] ds + \mathbb{1}_{t>1}\int_1^t \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] ds \\ & \leq & \int_0^1 \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] ds + |t-1| \\ & \leq & \int_0^1 \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s > 0\right] ds + |t-1|, \text{par le théorème 2.1} \\ & < & \infty, \text{ par le théorème 2.14.} \end{array}$$

D'autre part

$$\begin{array}{rcl} u_2 & := & \int_0^t ds \int_0^1 du \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_{su} \geq 0\right] \\ & = & \int_0^t ds \int_0^s du \frac{1}{s^2}\mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] \\ & = & \int_0^t \frac{1}{s^2}\left(\int_0^s \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] du\right) ds \\ & = & \left[-\frac{1}{s}\left(\int_0^s \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] du\right)\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] ds. \end{array}$$

Or pour tout $s > 0$

$$\left|\frac{1}{s}\left(\int_0^s \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] du\right)\right| \leq 1.$$

et comme on l'a montré plus haut

$$\int_0^t \frac{1}{s}\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] ds < \infty.$$

Alors

$$u_2 < \infty.$$

Et par suite

$$\int_0^t ds \int_0^1 du \frac{1}{s}\left|\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] - \mathbb{P}\left[X_{su} \geq 0\right]\right| < \infty.$$

Si maintenant $\gamma_0 > 0$. Soit $\tilde{X}$ le processus dual de X (e.g. $\tilde{X} = -X$). Alors clairement $\gamma_0^{\tilde{X}} = -\gamma_0$, et donc $\gamma_0^{\tilde{X}} < 0$. D'autre part

$$\begin{array}{rcl} \int_0^t ds \int_0^1 du \frac{1}{s}\left|\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] - \mathbb{P}\left[X_{su} \geq 0\right]\right| & = & \int_0^t ds \int_0^1 du \frac{1}{s}\left|\mathbb{P}\left[X_s < 0\right] - \mathbb{P}\left[X_{su} < 0\right]\right| \\ & = & \int_0^t ds \int_0^1 du \frac{1}{s}\left|\mathbb{P}\left[\tilde{X}_s \geq 0\right] - \mathbb{P}\left[\tilde{X}_{su} \geq 0\right]\right| \\ & < & \infty. \end{array}$$

◇

Démonstration du théorème 3.11. Par la proposition 3.2, on a

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^n\right) \quad = \quad \int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}X_{k\delta}^+}{k}.$$

Posons

$$h(s) = \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}$$

Pour montrer le théorème on va montrer que h est dérivable et que $\int_0^t |h^{'}(s)|ds < \infty$. Et on conclut avec le lemme 3.6. On va d'abord montrer montrer que

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}(X_s)^+ = \gamma_0 \mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left((X_s + y)^+ - (X_s)^+\right) \nu(dy).$$

Soit f une fonction dérivable avec une dérivée bornée. Comme X est à variation finie, alors par Itô (*[Cont-Tankov (2004), proposition 8.17]*) on a

$$f(X_s) = f(0) + \gamma_0 \int_0^s f^{'}(X_\tau)\, d\tau + \sum_{0 \leq \tau \leq s} \left(f(X_\tau) - f(X_{\tau^-})\right).$$

Donc

$$\mathbb{E}f(X_s) = f(0) + \gamma_0 \mathbb{E}\int_0^s f^{'}(X_\tau)\, d\tau + \mathbb{E}\sum_{0 \leq \tau \leq s} \left(f(X_\tau) - f(X_{\tau^-})\right).$$

La formule de compensation de [8] (voir les préliminaires) implique que si $\mathbb{E}\left[\int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} |f(X_\tau + y) - f(X_\tau)|\, \nu(dy)\right] < \infty$, alors

$$\mathbb{E}\sum_{0 \leq \tau \leq s} \left(f(X_\tau) - f(X_{\tau^-})\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} \left(f(X_\tau + y) - f(X_\tau)\right) \nu(dy)\right].$$

La condition ci-dessus est bien vérifiée car f est lipschitzienne et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} |f(X_\tau + y) - f(X_\tau)|\, \nu(dy)\right] &\leq \left\|f^{'}\right\|_\infty \int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} |y|\, \nu(dy) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_s) &= f(0) + \gamma_0 \mathbb{E}\int_0^s f^{'}(X_\tau)\, d\tau + \mathbb{E}\left[\int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} \left(f(X_\tau + y) - f(X_\tau)\right) \nu(dy)\right] \\ &= f(0) + \mathbb{E}\left[\gamma_0 \int_0^s f^{'}(X_\tau)\, d\tau + \int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} \left(f(X_\tau + y) - f(X_\tau)\right) \nu(dy)\right].\end{aligned}$$

D'efinissons maintenant, pour $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon + x^2}}{2}, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que f_ε est dérivable avec

$$f_\varepsilon^{'}(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon + x^2}}, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\left\|f_\varepsilon^{'}\right\|_\infty \leq 1.$$

La fonction f_ε est donc dérivable avec une dérivée bornée, par ce qui précéde on a

$$\mathbb{E}f_\varepsilon(X_s) = \frac{1}{2} + \mathbb{E}\left[\gamma_0 \int_0^s f_\varepsilon^{'}(X_\tau)\, d\tau + \int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} \left(f_\varepsilon(X_\tau + y) - f_\varepsilon(X_\tau)\right) \nu(dy)\right].$$

La fonction f_ε converge uniformèment vers $x \to x^+$ lorsque ε tend vers 0. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon^{'}(x) = \mathbb{1}_{x\geq 0}.$$

De plus pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$, $X_\tau \neq 0$ $p.s.$ (car X est à activité infinie), et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &\leq \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon} + |x|}{2} \\ &\leq |x| + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}. \end{aligned}$$

Par convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s)^+ &= \frac{1}{2} + \mathbb{E}\left[\gamma_0 \int_0^s \mathbb{1}_{\{X_\tau\geq 0\}} d\tau + \int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} \Big((X_\tau + y)^+ - (X_\tau)^+\Big)\nu(dy)\right] \\ &= \frac{1}{2} + \gamma_0 \int_0^s \mathbb{P}\left[X_\tau \geq 0\right] d\tau + \int_0^s ds \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big((X_\tau + y)^+ - (X_\tau)^+\Big)\nu(dy). \end{aligned}$$

Et par suite

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}(X_s)^+ = \gamma_0 \mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big((X_s + y)^+ - (X_s)^+\Big)\nu(dy).$$

Donc

$$\begin{aligned} h(s) - \int_{\mathbb{R}} y^+ \nu(dy) &= \frac{\mathbb{E}(X_s)^+}{s} - \int_{\mathbb{R}} y^+ \nu(dy) \\ &= \frac{1}{s}\int_0^s \left(\gamma_0 \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big((X_u + y)^+ - X_u^+\Big)\nu(dy)\right) du \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} y^+ \nu(dy) \\ &= \frac{\gamma_0}{s}\int_0^s \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] du + \frac{1}{s}\int_0^s \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big((X_u + y)^+ - X_u^+ - y^+\Big)\nu(dy) du. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (X_u + y)^+ - X_u^+ - y^+ &= (X_u + y)\,\mathbb{1}_{\{X_u+y>0\}} - X_u \mathbb{1}_{\{X_u>0\}} - y\mathbb{1}_{\{y>0\}} \\ &= (X_u + y)\,\mathbb{1}_{\{X_u+y>0\}} - X_u \mathbb{1}_{\{X_u>0\}} - y\mathbb{1}_{\{y>0\}} \\ &= X_u\left(\mathbb{1}_{\{X_u+y>0\}} - X_u \mathbb{1}_{\{X_u>0\}}\right) \\ &\quad -y\left(\mathbb{1}_{\{X_u+y>0\}} - X_u \mathbb{1}_{\{y>0\}}\right) \\ &= -|X_u|\mathbb{1}_{\{yX_u<0, |y|>|X_u|\}} - |y|\mathbb{1}_{\{yX_u<0, |y|\leq|X_u|\}} \\ &= -|X_u| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_u<0\}}. \end{aligned}$$

Donc

$$h(s) - \int_{\mathbb{R}} y^+ \nu(dy) = \frac{\gamma_0}{s}\int_0^s \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] du - \frac{1}{s}\int_0^s \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[|X_u| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_u<0\}}\right]\nu(dy) du.$$

On vérifie que h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$h^{'}(s) = u_s + v_s + w_s,$$

avec

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{\gamma_0}{s}\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] - \frac{\gamma_0}{s^2}\int_0^s \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] du \\ v_s &= -\frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[|X_s| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_s<0\}}\right]\nu(dy) \\ w_s &= \frac{1}{s^2}\int_0^s \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[|X_u| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_u<0\}}\right]\nu(dy) du. \end{aligned}$$

La continuité est évidente. Pour la dérivabilité, on a besoin de montrer que les fonctions suivantes sont continues

$$\begin{aligned} f_1 &: s \to P\left[X_s \geq 0\right] \\ f_2 &: s \to \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[|X_s| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_s<0\}}\right] \nu(dy). \end{aligned}$$

Soient $s, t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} f_1(t) - f_1(s) &= \mathbb{P}\left[X_t \geq 0\right] - \mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] \\ &= \mathbb{P}\left[X_s \leq 0\right] - \mathbb{P}\left[X_t \leq 0\right]. \end{aligned}$$

Or $\lim_{t\to s} X_t - X_s = 0$ $p.s.$ Donc X_t converge en loi vers X_s, et par suite

$$\lim_{t\to s} f_1(t) - f_1(s) = 0.$$

D'où la continuité de f_1. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f_2(t) - f_2(s) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[|X_t| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_t<0\}}\right] \nu(dy) - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[|X_s| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_s<0\}}\right] \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(|X_t| - |X_s|) \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_t<0\}}\right] \nu(dy) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[|X_s| \wedge |y| \left(\mathbb{1}_{\{yX_t<0\}} - \mathbb{1}_{\{yX_s<0\}}\right)\right] \nu(dy). \end{aligned}$$

Par convergence dominée

$$\lim_{t\to s} f_2(t) - f_2(s) = 0.$$

La fonction f_2 est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le changement de variable $v = \frac{u}{s}$, on obtient

$$h(s) - \int_{\mathbb{R}} y^+ \nu(dy) = \gamma_0 \int_0^1 \mathbb{P}\left[X_{sv} \geq 0\right] dv - \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}|X_{sv}| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_{sv}<0\}} \nu(dy) dv.$$

Or par convergence dominée

$$\lim_{s\to 0} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}|X_{sv}| \wedge |y| \mathbb{1}_{\{yX_{sv}<0\}} \nu(dy) dv = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \int_0^1 \mathbb{P}\left[X_{sv} \geq 0\right] dv &= \int_0^1 \lim_{s\to 0} \mathbb{P}\left[X_{sv} \geq 0\right] dv \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}\left[R_0 = 0\right] dv \\ &= \mathbb{1}_{\{\gamma_0>0\}}, \text{ par le théorème 2.15.} \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{s\to 0} h(s) = \int_{\mathbb{R}} y^+ \nu(dy) + \gamma_0^+.$$

La fonction h est donc prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$. Nous allons montrer maintenant que

$$\int_0^t |h'(s)| ds < \infty.$$

On a $u_s = 0$ si $\gamma_0 = 0$, sinon

$$\begin{aligned}
|u_s| &= \left| \frac{\gamma_0}{s} \mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] - \frac{\gamma_0}{s^2} \int_0^s \mathbb{P}\left[X_u \geq 0\right] du \right| \\
&\leq \frac{|\gamma_0|}{s} \int_0^1 \left|\mathbb{P}\left[X_s \geq 0\right] - \mathbb{P}\left[X_{su} \geq 0\right]\right| du.
\end{aligned}$$

D'où par le lemme 3.12

$$\int_0^t |u_s| ds < \infty.$$

Par ailleurs, en utilisant la concavité de la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \to x \wedge |y|$ et la proposition 3.3, on a

$$\begin{aligned}
|v_s| &\leq \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(|X_s| \wedge |y|\right) \mathbb{1}_{yX_s<0} \nu(dy) \\
&\leq \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(|X_s| \wedge |y|\right) \nu(dy).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
|v_s| &\leq \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{E}|X_s|) \wedge |y| \nu(dy) \\
&\leq \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} (cs) \wedge |y| \nu(dy).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^t |v_s| ds &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{1}{s} (cs) \wedge |y| ds \nu(dy), \text{ par Fubini} \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\frac{|y|}{c}} ds \nu(dy) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{|y|}{c}}^t \frac{1}{s} |y| \mathbb{1}_{\{|y| \leq ct\}} ds \nu(dy).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^t |v_s| ds &\leq \int_{\mathbb{R}} |y| \nu(dy) + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{ct}{|y|}\right) |y| \mathbb{1}_{\{|y| \leq ct\}} \nu(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |y| \nu(dy) + \int_{|y| \leq ct} \log\left(\frac{ct}{|y|}\right) |y| \nu(dy) \\
&< \infty, \text{ par hypothèse.}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
|w_s| &\leq \frac{1}{s^2} \int_0^s \int_{\mathbb{R}} (cu) \wedge |y| \nu(dy) du \\
&\leq \frac{1}{s^2} \int_0^s \int_{\mathbb{R}} (cs) \wedge |y| \nu(dy) du \\
&\leq \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} (cs) \wedge |y| \nu(dy).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^t |w_s| ds \quad < \quad \infty.$$

Et donc finalement

$$\int_0^t |h^{'}(s)| ds \quad < \quad \infty$$

Ce qui conclut le théorème. $\diamond$

3.2 Extension du théorème d'Asmussen Glynn et Pitman

Nous avons noté dans le paragraphe précédent, que dans le cas Brownien le point 1 du théorème 3.4 pouvait être obtenu grâce à un résultat de *[Brodie-Glasserman-Kou(1999)]*. Pour un développement à $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ près, on peut aussi utiliser une reformulation du théorème 1 de *[Asmussen-Glynn-Pitman(1995)]*. Cette dernière peut être déduite d'une lecture attentive de la démonstrartion du théorème 1 dans [3] (voir particulièrement les pages 879 à 883, et la remarque 2).

Théorème 3.13 *([Asmussen-Glynn-Pitman(1995)])* Considérons quatre réels a, b, x and y, avec $0 \leq a < b$. Soient $\beta = (\beta_t)_{a \leq t \leq b}$ un pont Brownien partant de x et arrivant en y dans l'intervalle $[a, b]$ (càd $\beta_a = x$ et $\beta_b = y$) et t un réel strictement positif. Notons M le supremum de β et, pour tout entier positif n, par M^n le supremum discret associé au pas de discrétisation $\frac{t}{n}$

$$M = \sup_{a \leq t \leq b} \beta_t \quad \text{and} \quad M^n = \sup_{k \in I_n} \beta_{\frac{kt}{n}}, \text{ où } I_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{kt}{n} \in [a, b] \right\}.$$

Alors, lorsque n tend vers l'infini, le couple $(\sqrt{n}\,(M - M^n)\,, \beta)$ converge en loi vers le couple $(\sqrt{t}R, \beta)$ où R est indépendant de β et s'écrit sous la forme

$$R = \min_{\{j \in \mathbb{Z}\}} \check{R}(U + j). \tag{3.2.4}$$

Le processus $(\check{R}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est un double processus de Bessel de dimension 3 (i.e. $\check{R}(t) = R_1(t)$ pour $t \geq 0$ et $\check{R}(t) = R_2(-t)$ pour $t < 0$, où R_1 et R_2 sont deux processus de Bessel de dimension 3 indépendants, issus de 0) et U est uniformèment distribuée sur $[0, 1]$ et est indépendante de $\check{R}$.

Ce résultat se généralise aux processus de Lévy à activité finie possédant un coefficient de diffusion non nul (jump-diffusion).

Théorème 3.14 *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à activité finie de triplet (γ, σ^2, ν) vérifiant $\sigma^2 > 0$. Pour un réel $t > 0$ donné, considérons le supremum continu de X sur $[0, t]$ et, pour tout entier $n > 0$, le supremum discret associé au pas de discrétisation $\frac{t}{n}$*

$$M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \quad \textit{and} \quad M_t^n = \sup_{k = 0, 1, \ldots, n} X_{\frac{kt}{n}}.$$

Alors, lorque n tend vers l'infini, le couple $\left(\sqrt{n}\,(M_t - M_t^n)\,, X^{(t)} = (X_s)_{0 \leq s \leq t}\right)$ converge en loi vers le couple $(\sigma\sqrt{t}R, X^{(t)})$ où R est indépendant de $X^{(t)}$ et est donné par (3.2.4).

Notons que, dans l'énoncé ci-dessus, $X^{(t)}$ est vu comme une v.a. à valeurs dans l'espace des fonctions càd-làg definies sur l'intérvalle $[0, t]$, qui peuvent être représentées par la topologie de Skorohod.

Démonstration du théorème 3.14. On va montrer que, pour toute fonction continue bornée f et pour toute v.a. bornée Z qui est mésurable par rapport à la tribu générée par X_s, $0 \leq s \leq t$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\sigma\sqrt{t}R\right)\right)\mathbb{E}(Z). \tag{3.2.5}$$

Le processus X étant à activité finie, il peut sécrire sous la forme suivante (voir (1.4.10))

$$X_s = \gamma_0 s + \sigma B_s + \sum_{j=1}^{N_s} Y_j, \quad s \geq 0.$$

En conditionnant par rapport à N_t, on a

$$\mathbb{E}\left(f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z \mid N_t = m\right) \mathbb{P}(N_t = m).$$

Notons que conditionnellement à $\{N_t = 0, X_t = y\}$, le processus $\frac{X^{(t)}}{\sigma}$ est un pont Brownien de 0 à $\frac{y}{\sigma}$. Donc en utilisant le théorème 3.13

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z \mid N_t = 0\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\sigma\sqrt{t}R\right)\right) \mathbb{E}\left(Z \mid N_t = 0\right).$$

Pour l'espérance contionnelle sachant $\{N_t = m\}$, $m \geq 1$, on conditionne encore par rapport aux instants de saut, aux valeurs de X et à ses valeurs limites à gauches aux instants de saut. Notons T_1, T_2,..., T_j,... les instants de saut du processus N. Pour tout réels $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t$, x_1,..., x_m, y_1,...,y_m, y_{m+1}, Soit

$$A_m = \left\{N_t = m, T_i = t_i, X_{T_i^-} = x_i, X_{T_i} = y_i, i = 1, \ldots, m, X_t = y_{m+1}\right\}.$$

On remarque que conditionnellement à A_m, les processus β^0, ..., β^m définis par

$$\beta_s^j = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} X_s & \text{if } s \in [t_j, t_{j+1}) \\ \dfrac{1}{\sigma} X_{t_{j+1}^-} & \text{if } s = t_{j+1} \end{cases}$$

avec $t_0 = 0$ et $t_{m+1} = t$, sont des ponts Browniens indépendant sur les intervalles $[t_j, t_{j+1}]$. Introduisons les v.a.

$$M^j = \sup_{t_j \leq s \leq t_{j+1}} \beta_s^j, \quad M^{j,n} = \sup_{k \in I_n^j} \beta_{\frac{kt}{n}}^j,$$

où $I_n^j = \{k \in \mathbb{N} \mid t_j \leq \frac{kt}{n} \leq t_{j+1}\}$. Conditionnellement à A_m, les v.a. M^j sont indépendantes et chacune admet une densité. Donc l'une d'entre elles et strictement plus grand que les autres *p.s.*. Pour $j = 0$,..., m, posons

$$A_m^j = \{M^j > M^i \text{ pour } i \neq j \text{ et } i \leq m + 1\}.$$

Conditionnellement à A_m, on a

$$f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{1}_{A_m^j} f\left(\sqrt{n}(\sigma M^j - M_t^n)\right) G_j(\beta^0, \ldots, \beta^m),$$

pour une fonction borélienne bornée G_j definie sur l'espace $\prod_{j=0}^m C([t_j, t_{j+1}])$. Sur l'ensemble A_m^j, on a, pour n assez grand, $M_t^n = \sigma M^{j,n}$. Ceci est du au fait que le maximum de β^j à un point intérieur de l'intervalle (t_j, t_{j+1}) et que pour n assez grand, certains points de I_n^j sont arbitrairement proche de ce point. Donc, pour n assez grand, on a

$$f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{1}_{A_m^j} f\left(\sigma\varepsilon_n^j\right) G_j(\beta^0, \ldots, \beta^m),$$

avec $\varepsilon_n^j = \sqrt{n}(M^j - M_t^{j,n})$. On déduit du théorème 3.13 et de l'indépendance des ponts Browniens que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z \mid A_m\right) &= \sum_{j=0}^{m} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{A_m^j} f\left(\sigma\varepsilon_n^j\right) G_j(\beta^0, \ldots, \beta^m) \mid A_m\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \mathbb{E}\left(f\left(\sigma\sqrt{t}R\right)\right) \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{A_m^j} G_j(\beta^0, \ldots, \beta^m) \mid A_m\right) \\
&= \mathbb{E}\left(f\left(\sigma\sqrt{t}R\right)\right) \mathbb{E}(Z \mid A_m).
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $m \geq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\sqrt{n}(M_t - M_t^n)\right) Z \mid N_t = m\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\sigma\sqrt{t}R\right)\right) \mathbb{E}(Z \mid N_t = m),$$

On en déduit facilement (5.1.5). $\diamond$

3.3 Processus de Poisson composé

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et X un processus de Lévy de triplet $(\gamma, 0, \nu)$ intégrable à activité finie avec $\sigma = 0$. Alors X peut s'écrire sous la forme

$$X_t = \gamma_0 t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

On notera λ l'intensité de N. On se place sur $\{N_t = m\}$ (avec $m \geq 1$). On note T_k le k^{ieme} temps de saut de N. Sur chaque sous-intervalle $[0, T_1)$, $[T_1, T_2)$,..., $[T_{m-1}, T_m)$, $[T_m, t]$ la trajectoire de X est affine, donc atteint son sup aux extrémités. Plus précisément, si $\gamma_0 \geq 0$

$$\begin{aligned} M_t &= \max\left(X_{T_1^-}, \ldots, X_{T_m^-}, X_t\right) \\ &= \max\left(\gamma_0 T_1, \ldots, \gamma_0 T_k + \sum_{i=1}^{k-1} Y_i, \ldots, \gamma_0 T_m + \sum_{i=1}^{m-1} Y_i, \gamma_0 t + \sum_{i=1}^{m} Y_i\right), \end{aligned}$$

et si $\gamma_0 < 0$

$$\begin{aligned} M_t &= \max\left(0, X_{T_1}, \ldots, X_{T_m}\right) \\ &= \max\left(0, \gamma_0 T_1 + Y_1, \ldots, \gamma_0 T_k + \sum_{i=1}^{k} Y_i, \ldots, \gamma_0 T_m + \sum_{i=1}^{m} Y_i\right). \end{aligned}$$

Dans les deux cas on peut écrire

$$M_t = \max\left(\hat{X}_0, \hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_m\right).$$

Soient donc

$$\begin{aligned} &\nu_m = \inf\left\{j \in \{0, \ldots, m\},\ \hat{X}_j = M_t\right\} \\ &\hat{X} = \left(\hat{X}_0, \hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_m\right) \\ &S_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i \\ &\hat{X}_{t_1,\ldots,t_m} = \begin{cases} \left(\gamma_0 t_1, \gamma_0 t_2 + S_1, \ldots, \gamma_0 t_m + S_{m-1}, \gamma_0 t + S_m\right), & si\ \gamma \geq 0 \\ \left(0, \gamma_0 t_1 + S_1, \gamma_0 t_2 + S_2, \ldots, \gamma_0 t_m + S_m\right), & si\ \gamma < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On définit également

$$\begin{aligned} &\mu_m \ :\ x = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \to \max_{0 \leq i \leq m} x_i \\ &\mu_m^{'} \ :\ x = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \to \max_{0 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq m} (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \\ &\tau_m \ :\ x = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \to \inf\left\{j \in \{0, \ldots, m\},\ x_j = \max_{0 \leq i \leq m} x_i\right\} \\ &\chi_j^m \ :\ x = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \to \begin{cases} 1, & si\ j = \tau_m(x) \\ 0, & sinon \end{cases} \\ &f_j^m(t_1, \ldots, t_m) = \mathbb{E}\left(f\left(\mu_m\left(\hat{X}_{t_1,\ldots,t_m}\right)\right) - f\left(\mu_m^{'}\left(\hat{X}_{t_1,\ldots,t_m}\right)\right)\right) \chi_j^m\left(\hat{X}_{t_1,\ldots,t_m}\right). \end{aligned}$$

Pour $m \geq 2$, $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ et $1 \leq j \leq m-1$, notons

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{t}_{j-1} = (t_1, \ldots, t_{j-1}) \\
&\overleftarrow{t}^{m}_{j+2} = (t_{j+2}, \ldots, t_m) \\
&H_s(\overrightarrow{t}_{j-1}) = \mathbb{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_{j-1}<s\}} \\
&H_{s,t}(\overleftarrow{t}^{m}_{j+2}) = \mathbb{1}_{\{s<t_{j+1}<\cdots<t_m<t\}} \\
&\hat{f}_m(a,b) = \int_{[0,t]^{m-2}} \frac{m!}{t^m} d\overrightarrow{t}_{j-1}\, d\overleftarrow{t}^{m}_{j+2} \sum_{j=1}^{m-1} f_j^m\left(\overrightarrow{t}_{j-1}, a, b, \overleftarrow{t}^{m}_{j+2}\right) \\
&\qquad \times \mathbb{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_{j-1}<a\leq b<t_{j+2}<\cdots<t_m<t\}} \\
&\tilde{f}_m(a,b) = \int_{[0,t]^{m-2}} \lambda^m e^{-\lambda t} d\overrightarrow{t}_{j-1}\, d\overleftarrow{t}^{m}_{j+2} \sum_{j=1}^{m-1} f_j^m\left(\overrightarrow{t}_{j-1}, a, b, \overleftarrow{t}^{m}_{j+2}\right) \\
&\qquad \times \mathbb{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_{j-1}<a\leq b<t_{j+2}<\cdots<t_m<t\}}.
\end{aligned}$$

Le théorème que nous allons énocer, à défaut de généraliser le théorème 3.4 dans le cas des processus de Poisson composé, la compléte.

Théorème 3.15 *On suppose que $f \in C_b^1(\mathbb{R})$, alors si $\gamma_0 \geq 0$, on a*

$$\mathbb{E}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right) = \frac{\gamma_0 t}{2n} \mathbb{E} f'(M_t) \sum_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \mathbb{1}_{\{\nu_m = m\}}\right) \mathbb{1}_{\{N_t = m\}} + \frac{t}{2n} \sum_{m=2}^{+\infty} \int_0^t \tilde{f}_m(s,s)ds + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et si $\gamma_0 < 0$, on a

$$\mathbb{E}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right) = -\frac{\gamma_0 t}{2n} \mathbb{E} f'(M_t) \sum_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \mathbb{1}_{\{\nu_m = 0\}}\right) \mathbb{1}_{\{N_t = m\}} + \frac{t}{2n} \sum_{m=2}^{+\infty} \int_0^t \tilde{f}_m(s,s)ds + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Des résultats intermédiaire sont nécessaire pour démontrer ce théorème. Nous verrons leurs intérêts dans la démonstration du théorème.

Lemme 3.16 *Pour tout $g \in C(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^{m+1} \to \left(g \circ \mu_m(x) - g \circ \mu_m'(x)\right) \chi_j^m(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Lemme 3.17 *Soient $t_k^n = \frac{kt}{n}$ et $(T_i)_{i\geq 1}$ les instants de saut de N, désignons par $\mathbb{E}_m$ l'éspérance conditionnelle à $\{N_t = m\}$ et notons*

$$U_n = \mathbb{E}\left(\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} f_j^m(T_1, \ldots, T_m) \mathbb{1}_{\{t_{k-1}^n < T_j < T_{j+1} < t_k^n\}} \mathbb{1}_{\{N_t = m\}}\right).$$

Alors on a

$$U_n = \frac{t}{2n} \sum_{m=2}^{+\infty} \int_0^t \tilde{f}_m(s,s)ds + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Lemme 3.18 *Si U est une v.a. à valeurs dans $[0,t]$ à densité f_U continue, alors $n\left(U - \left[\frac{nU}{t}\right]\frac{t}{n}\right)$ converge en loi vers une v.a. uniforme sur $[0,t]$, et elle est indépendante de U.*

Démonstration du lemme 3.16. On sait que $\mu_m, \mu_m' \in C(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R})$. Donc on a aussi $g \circ \mu_m - g \circ \mu_m' \in C(\mathbb{R})$. Remarquons également que $\tau(x)$ désigne le premier indice maximisant de x.
Cas 1 : Soit x tel que $\mu_m(x) > \mu_m'(x)$. Alors il existe un voisinage de x $(V(x))$, tel que pour tout $y \in V(x)$,

$\mu_m(y) > \mu'_m(y)$. Et d'autre part, il existe un seul indice maximisant pour x, qui est aussi l'indice maximisant pour y, pour tout $y \in V(x)$. Donc χ_j^m est constante sur $V(x)$ et soit c sa valeur. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x}\Big(g\circ\mu_m(y) - g\circ\mu'_m(y)\Big)\,\chi_j^m\,(y) &= \lim_{y\to x}\Big(g\circ\mu_m(y) - g\circ\mu'_m(y)\Big)\,c\\ &= \Big(g\circ\mu_m(x) - g\circ\mu'_m(x)\Big)\,c\\ &= \Big(g\circ\mu_m(x) - g\circ\mu'_m(x)\Big)\,\chi_j^m\,(x)\,.\end{aligned}$$

Cas 2 : Soit x tel que $\mu_m(x) = \mu'_m(x)$. Alors

$$\begin{aligned}&g\circ\mu_m(x) - g\circ\mu'_m(x) = 0\\ &\Rightarrow \lim_{y\to x}\Big(g\circ\mu_m(y) - g\circ\mu'_m(y)\Big) = 0.\end{aligned}$$

Et comme χ_j^m est bornée, alors

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x}\Big(g\circ\mu_m(y) - g\circ\mu'_m(y)\Big)\,\chi_j^m\,(y) &= 0\\ &= \Big(g\circ\mu_m(x) - g\circ\mu'_m(x)\Big)\,\chi_j^m\,(x)\,.\end{aligned}$$

Ce qui montre le lemme. ◇

Démonstration du lemme 3.17. Rappelons que conditionnellement à $\{N_t = m\}$, $(T_1,\ldots,T_m)$ est un réarrangement de v.a. uniformes sur $[0,t]$. Donc

$$\begin{aligned}v_{m,n} : &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} f_j^m\,(T_1,\ldots,T_m)\,\mathbb{1}_{\{t_{k-1}^n<T_j<T_{j+1}<t_k^n\}}\mathbb{1}_{\{N_t=m\}}\right)\\ &= \mathbb{E}_m\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} f_j^m\,(T_1,\ldots,T_m)\,\mathbb{1}_{\{t_{k-1}^n<T_j<T_{j+1}<t_k^n\}}\right)\mathbb{P}\,[N_t=m]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{[0,t]^m}\frac{m!}{t^m}dt_1\ldots dt_m\sum_{j=1}^{m-1} f_j^m\,(t_1,\ldots,t_m)\,\mathbb{1}_{\{t_{k-1}^n<t_j<t_{j+1}<t_k^n\}}\\ &\quad\times H_{t_j}(\overrightarrow{t}_{j-1})H_{t_{j+1},t}(\overleftarrow{t}^m_{j+2})\mathbb{P}\,[N_t=m]\,.\end{aligned}$$

On fait deux changements de variables, $t_j = t_{k-1}^n + u$ et $t_{j+1} = t_{k-1}^n + v$. Donc

$$\begin{aligned}v_{m,n} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{m!}{t^m}\int_{[0,t]^m} d\,\overrightarrow{t}_{j-1}\,dudvd\,\overleftarrow{t}^m_{j+2}\sum_{j=1}^{m-1} f_j^m\left(\overrightarrow{t}_{j-1}, t_{k-1}^n+u, t_{k-1}+v,\,\overleftarrow{t}^m_{j+2}\right)\\ &\quad\times\mathbb{1}_{\{0<u<v<\frac{t}{n}\}}H_{t_{k-1}^n+u}(\overrightarrow{t}_{j-1})H_{t_{k-1}+v,t}(\overleftarrow{t}^m_{j+2})\mathbb{P}\,[N_t=m]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\{0<u<v<\frac{t}{n}\}} dudv\hat{f}_m\left(t_{k-1}^n+u, t_{k-1}^n+v\right)\mathbb{P}\,[N_t=m]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\int_{\{0<u<v<t\}} dudv\hat{f}_m\left(t_{k-1}^n+\frac{u}{n}, t_{k-1}^n+\frac{v}{n}\right)\mathbb{P}\,[N_t=m]\\ &= \frac{1}{nt}\int_{\{0<u<v<t\}} dudv\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{f}_m\left(t_{k-1}^n+\frac{u}{n}, t_{k-1}^n+\frac{v}{n}\right)\mathbb{P}\,[N_t=m]\,.\end{aligned}$$

Or $\hat{f}_m$ est continue sur $\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ 0<a\le b<t\right\}$, car f_j- est continue (par le lemme 3.16). Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{f}_m\left(t_{k-1}^n+\frac{u}{n}, t_{k-1}^n+\frac{v}{n}\right) = \int_0^t \hat{f}_m\,(s,s)\,ds.$$

De plus $\sum_{j=1}^{m} f_j^m$ est bornée (indépendemment de m), donc $\hat{f}_m$ est bornée (avec une borne dependant de m). Donc par convergence dominée

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} nv_{m,n} &= \frac{1}{t}\int_{\{0<u<v<t\}} dudv \int_0^t \hat{f}_m(s,s)\,ds\mathbb{P}[N_t=m] \\
&= \frac{t}{2}\int_0^t \hat{f}_m(s,s)\,ds\mathbb{P}[N_t=m] \\
&= \frac{t}{2}\int_0^t \tilde{f}_m(s,s)\,ds.
\end{aligned}$$

De plus du fait que f_j^m est bornée (indépendemment de j et de m), on a (en notant $C=\left\|f_j^m\right\|_\infty$)

$$\begin{aligned}
|v_{m,n}| &\leq \frac{Cm!}{t^m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\int_{[0,t]^m}\frac{m!}{t^m}dt_1\dots dt_m \mathbb{1}_{\{t_{k-1}^n<t_j<t_{j+1}<t_k^n\}} \\
&\quad \times \mathbb{1}_{\{0<t_1<t_2<\dots<t_{t_m}<t\}}\mathbb{P}[N_t=m] \\
&= \frac{Cm!}{t^m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1}\dots\int_0^{t_{j+3}} dt_{j+2}\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n\wedge t_{j+2}} dt_{j+1}\int_{t_{k-1}^n}^{t_{j+1}} dt_j \\
&\quad \times \int_0^{t_j} dt_{j-1}\dots\int_0^{t_2} dt_1\mathbb{P}[N_t=m].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|v_{m,n}| &\leq \frac{Cm!}{t^m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1}\dots\int_0^{t_{j+3}} dt_{j+2}\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} dt_{j+1}\int_{t_{k-1}^n}^{t_{j+1}} dt_j \\
&\quad \times \int_0^{t_j} dt_{j-1}\dots\int_0^{t_2} dt_1\mathbb{P}[N_t=m].
\end{aligned}$$

Or

$$\int_{t_{k-1}^n}^{t_{j+1}} dt_j \int_0^{t_j} dt_{j-1}\dots\int_0^{t_2} dt_1 = \frac{(t_{j+1})^j-\left(t_{k-1}^n\right)^j}{j!}.$$

D'où

$$\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} dt_{j+1}\int_{t_{k-1}^n}^{t_{j+1}} dt_j \int_0^{t_j} dt_{j-1}\dots\int_0^{t_2} dt_1 = \frac{1}{j!}\left[\frac{(t_k^n)^{j+1}-\left(t_{k-1}^n\right)^{j+1}}{j+1}-\frac{t}{n}\left(t_{k-1}^n\right)^j\right].$$

D'autre part

$$\int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1}\dots\int_0^{t_{j+3}} dt_{j+2} = \frac{t^{m-j-1}}{(m-j-1)!}.$$

Donc

$$|v_{m,n}| \leq \frac{Cm!}{t^m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{t^{m-j-1}}{j!(m-j-1)!}\left[\frac{(t_k^n)^{j+1}-\left(t_{k-1}^n\right)^{j+1}}{j+1}-\frac{t}{n}\left(t_{k-1}^n\right)^j\right]\mathbb{P}[N_t=m].$$

Or

$$a^l-b^l=(a-b)\sum_{q=0}^{l-1}a^{l-1-q}b^q,\quad \forall l\geq 1,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{(t_k^n)^{j+1}-\left(t_{k-1}^n\right)^{j+1}}{j+1}\leq \frac{t}{n}\left(t_k^n\right)^j.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|v_{m,n}| &\leq \frac{Cm!}{t^m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{t^{m-j-1}}{j!(m-j-1)!}\frac{t}{n}\left[(t_k^n)^j-\left(t_{k-1}^n\right)^j\right]\mathbb{P}\left[N_t=m\right]\\
&\leq \frac{Cm!}{t^m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{t^{m-j-1}}{j!(m-j-1)!}\left(\frac{t}{n}\right)^2\left[jt^{j-1}\right]\mathbb{P}\left[N_t=m\right].
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
|v_{m,n}| &\leq \frac{Cm!}{t^m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{t^m}{(j-1)!(m-j-1)!}\frac{1}{n^2}\mathbb{P}\left[N_t=m\right]\\
&= \frac{C}{n}\mathbb{P}\left[N_t=m\right]\sum_{j=1}^{m-1}\frac{m!}{(j-1)!(m-j-1)!}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|v_{m,n}| &\leq \frac{C}{n}\mathbb{P}\left[N_t=m\right]\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m}{j-1}\\
&= \frac{C}{n}\mathbb{P}\left[N_t=m\right]\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m}{j}\\
&\leq \frac{C}{n}\mathbb{P}\left[N_t=m\right]\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\\
&= \frac{C2^m}{n}\mathbb{P}\left[N_t=m\right].
\end{aligned}$$

On a alors

$$|nv_{m,n}| \leq C2^m\mathbb{P}\left[N_t=m\right].$$

D'où par convergence dominèe

$$\sum_{m=2}^{+\infty}v_{m,n}=\frac{t}{2n}\sum_{m=2}^{+\infty}\int_0^t\tilde{f}_m(s,s)\,ds+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

◇

Démonstration du lemme 3.18. Remarquons que $n\left(U-\left[\frac{nU}{t}\right]\frac{t}{n}\right)=t\left(\frac{nU}{t}-\left[\frac{nU}{t}\right]\right)\in[0,t]$. Soient $x,y\in\mathbb{R}$. Posons

$$p_n(x,y)=\mathbb{P}\left[n\left(U-\left[\frac{nU}{t}\right]\frac{t}{n}\right)\leq x, U\leq y\right].$$

Si $x<0$ ou $y<0$

$$p_n(x,y)=0,$$

et si $x>t$ ou $y>t$

$$p_n(x,y)=1.$$

Supposons maintenant que $x,y\in[0,t]$.

$$\begin{aligned}
p_n(x,y) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left[n\left(U-\left[\frac{nU}{t}\right]\frac{t}{n}\right)\leq x, k-1\leq\frac{nU}{t}<k, U\leq y\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left[U-\frac{(k-1)t}{n}\leq\frac{x}{n},\frac{(k-1)t}{n}\leq U<\frac{kt}{n}, U\leq y\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
p_n(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left[U \le \frac{x}{n} + \frac{(k-1)t}{n}, \frac{(k-1)t}{n} \le U < \frac{kt}{n}, U \le y\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left[\frac{(k-1)t}{n} \le U \le \frac{x}{n} + \frac{(k-1)t}{n}, U \le y\right].
\end{aligned}$$

Soit $n_y = \left[\frac{ny}{t}\right]$, alors $\frac{n_y t}{n} \le y < \frac{(ny+1)t}{n}$. De plus

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n_y}{n} = \frac{y}{t}. \tag{3.3.6}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p_n(x,y) &= \sum_{k=1}^{n_y} \int_{\frac{(k-1)t}{n}}^{\frac{x}{n}+\frac{(k-1)t}{n}} f_U(u)du \\
&= \sum_{k=1}^{n_y} \frac{1}{n} \int_0^x f_U\left(\frac{u}{n} + \frac{(k-1)t}{n}\right) du.
\end{aligned}$$

La fonction f_U étant continue, alors $\lim_{n\to+\infty} f_U\left(\frac{u}{n} + \frac{(k-1)t}{n}\right) - f_U\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) = 0$, et la limite est uniforme sur $[0,t]$. Donc

$$\begin{aligned}
p_n(x,y) &= \sum_{k=1}^{n_y} \frac{1}{n} \left(\int_0^x f_U\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) du + o(1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n_y} \frac{x}{n} f_U\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) du + o(1) \\
&= \frac{n_y x}{ny} \sum_{k=1}^{n_y} \frac{y}{n_y} f_U\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(k-1)t}{n} - \frac{(k-1)y}{n_y}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(k-1)t}{n} \left|1 - \frac{ny}{n_y t}\right| \\
&\le \lim_{n\to+\infty} \left|1 - \frac{ny}{n_y t}\right| \\
&= 0, \text{ par la formule (3.3.6)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[n\left(U - \left[\frac{nU}{t}\right]\frac{t}{n}\right) \le x, U \le y\right] &= \frac{n_y x}{ny} \sum_{k=1}^{n_y} \frac{y}{n_y} f_U\left(\frac{(k-1)y}{n_y}\right) + o(1) \\
&= \frac{x}{t} \int_0^y f_U(u)du + o(1) \\
&= \frac{x}{t} \mathbb{P}\left[U \le y\right] + o(1).
\end{aligned}$$

$\diamond$

Démonstration du théorème 3.15. On a

$$\mathbb{E}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right) \mathbb{1}_{\{N_t=m\}} = \sum_{j=0}^{m} \mathbb{E}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right) \mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right) &= \mathbb{E}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{m}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} \\ &= \mathbb{E}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{m}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}.\end{aligned}$$

Remaquons que comme f est bornée, un simple argument de domination justifie qu'on peut permuter somme et espérance.
Cas 1 *:* $\gamma_0 \geq 0$
Sur $\{\nu_m = 0\}$, on a $M_t = \gamma_0 T_1$. De plus

$$M_t^n = \sum_{k=1}^{n} M_t^n \mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n}\right\}}.$$

Donc sur $\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n}\right\}$

$$\begin{aligned}M_t^n &\geq X_{(k-1)\frac{t}{n}} \\ &= \gamma_0(k-1)\frac{t}{n} \\ &= M_t - \gamma_0\left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n}\right).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=0\}} &= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\left(f(M_t) - f\left(M_t - \gamma_0\left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n}\right)\right)\right) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=0,(k-1)\frac{t}{n}<T_1\leq\frac{kt}{n}\right\}} \\ &+ \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(M_t - \gamma_0\left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n}\right)\right) - f(M_t^n)\right) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=0,(k-1)\frac{t}{n}<T_1\leq\frac{kt}{n}\right\}}.\end{aligned}$$

Notons $u_{n,m}$ (resp. $v_{n,m}$) le premier (resp. le deuxième) terme droite de l'égalité ci-dessus. On a

$$\begin{aligned}v_{n,m} &= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(M_t - \gamma_0\left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n}\right)\right) - f(M_t^n)\right) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=0,(k-1)\frac{t}{n}<T_1\leq\frac{kt}{n},M_t^n\neq M_t-\gamma_0\left(T_1-(k-1)\frac{t}{n}\right)\right\}}.\end{aligned}$$

Si $\gamma_0 = 0$ alors $v_{n,m} = 0$, sinon sur $\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n}, M_t^n \neq M_t - \gamma_0\left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n}\right)\right\}$ on a

$$\begin{aligned}&M_t^n > M_t - \gamma_0\left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n}\right) \\ &\Rightarrow \exists p \in \{0,\ldots,n\},\ \gamma_0\frac{pt}{n} + \sum_{j=1}^{N_{\frac{pt}{n}}} Y_j > \gamma_0(k-1)\frac{t}{n}.\end{aligned}$$

Si $N_{\frac{pt}{n}} = 0$, on a $\frac{pt}{n} < T_1$. Donc $p \leq k-1$, et

$$\gamma_0\frac{pt}{n} + \sum_{j=1}^{N_{\frac{pt}{n}}} Y_j = \gamma_0\frac{pt}{n} \leq \gamma_0(k-1)\frac{t}{n}.$$

C'est qui est absurde. Donc il existe $p \in \{1, \dots, n\}$ tel que $N_{\frac{pt}{n}} \geq 1$ et

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 \frac{pt}{n} + \sum_{j=1}^{N_{\frac{pt}{n}}} Y_j > \gamma_0 T_1 - \gamma_0 \frac{t}{n} \\
&\Rightarrow \exists l \in \{1, \dots, n\},\ \gamma_0 T_{l+1} \wedge t + \sum_{j=1}^{N_{\frac{pt}{n}}} Y_j > \gamma_0 T_1 - \gamma_0 \frac{t}{n} \\
&\Rightarrow \exists l \in \{1, \dots, n\},\ \hat{X}_l > \gamma_0 T_1 - \gamma_0 \frac{t}{n}.
\end{aligned}$$

Or lorsque $\gamma_0 \neq 0$ on a $\hat{X}_l < \hat{X}_0$ *p.s.*, pour $l \neq 0$ sur $\{\nu_m = 0\}$. On a ainsi

$$B_{n,m} \cap \left\{ (k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n} \right\} \subset A_{n,m} \cap \left\{ (k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n} \right\},$$

où

$$\begin{aligned}
B_{n,m} &= \left\{ M_t \neq M_t - \gamma_0 \left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n} \right) \right\} \cap \{\nu_m = 0, N_t = m\} \\
A_{n,m} &= \left\{ \exists l \in \{1, \dots, m\},\ \hat{X}_l > \hat{X}_0 - \gamma_0 \frac{t}{n} \right\} \cap \{\nu_m = 0, N_t = m\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} v_{n,m} &\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{E} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(M_t - \gamma_0 \left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n} \right) \right) - f\left(M_t^n \right) \right) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{\left\{ (k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n} \right\} \cap A_{n,m}} \\
&\leq C \frac{t}{n} \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left[A_{n,m} \right].
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}\left[A_{n,m}\right] \leq \mathbb{P}\left[N_t = m\right]$. Donc par convergence dominée on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left[A_{n,m} \right] &= \sum_{m=1}^{+\infty} \lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}\left[A_{n,m} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Car $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left[A_{n,m}\right] = 0$. D'où

$$\sum_{m=1}^{+\infty} v_{n,m} = o\left(\frac{1}{n} \right).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
u_{n,m} &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^{n} \left(f(M_t) - f\left(M_t - \gamma_0 \left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n} \right) \right) \right) \mathbb{1}_{\left\{ N_t = m, \nu_m = 0, (k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n} \right\}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} \left(f(M_t) - f\left(M_t - \gamma_0 \left(T_1 - (k-1)\frac{t}{n} \right) \right) \right) \mathbb{1}_{\left\{ N_t = m, \nu_m = 0, (k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n} \right\}}.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\mathbb{P}\left[(k-1)\frac{t}{n} < T_1 \leq \frac{kt}{n}\right] = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et si on note $x^{(n)} = \left[\frac{nx}{t}\right]\frac{t}{n}$, on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(f(M_t) - f\left(M_t - \gamma_0\left(T_1 - T_1^{(n)}\right)\right)\right)\mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=0,T_1^n=(k-1)\frac{t}{n}\right\}} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\gamma_0\left(T_1 - T_1^{(n)}\right)f^{'}(M_t) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=0,T_1^n=(k-1)\frac{t}{n}\right\}} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\gamma_0\left(T_1 - T_1^{(n)}\right)f^{'}(M_t)\mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=0,T_1^n=(k-1)\frac{t}{n}\right\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{E}\gamma_0\left(T_1 - T_1^{(n)}\right)f^{'}(M_t)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=0\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\gamma_0 t}{2n}\mathbb{E}f^{'}(M_t)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=0\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\gamma_0 t}{2n}\mathbb{E}f^{'}(M_t)\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=0\}} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

L'avant dernière égalité est obtenue en utilisant la convergence dominé, car $n\left(T_1 - T_1^{(n)}\right)$ est bornée, et le lemme 3.18. D'où

$$
\mathbb{E}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=0\}} = \frac{\gamma_0 t}{2n}\mathbb{E}f^{'}(M_t)\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=0\}} + o\left(\frac{1}{n}\right).
$$

Sur $\{\nu_m = j\}$ avec $j \in \{1,\ldots,m-1\}$ et $m \geq 2$, on a $M_t = \gamma_0 T_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} Y_i$. On a

$$
\begin{aligned}
M_t^n &= \sum_{k=1}^{n} M_t^n \mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_{j+1} \leq \frac{kt}{n}\right\}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} M_t^n\left(\mathbb{1}_{\left\{T_j<(k-1)\frac{t}{n}<T_{j+1}\leq\frac{kt}{n}\right\}} + \mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}\leq\frac{kt}{n}\right\}}\right).
\end{aligned}
$$

Sur $\left\{T_j < (k-1)\frac{t}{n} < T_{j+1} \leq \frac{kt}{n}\right\}$, on a alors

$$
\begin{aligned}
M_t^n &\geq X_{(k-1)\frac{t}{n}} \\
&= \gamma_0(k-1)\frac{t}{n} + \sum_{i=1}^{j} Y_i \\
&= M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - (k-1)\frac{t}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Et par consèquent $M_t - M_t^n \leq \gamma_0\frac{t}{n}$. Notons

$$
\begin{aligned}
u_{n,m}^{k,j} &= \mathbb{E}\left(f(M_t) - f\left(M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right)\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{T_j<(k-1)\frac{t}{n}<T_{j+1}\leq\frac{kt}{n}\right\}} \\
v_{n,m}^{k,j} &= \mathbb{E}\left(f\left(M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right)\right) - f\left(M_t^n\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{T_j<(k-1)\frac{t}{n}<T_{j+1}\leq\frac{kt}{n}\right\}} \\
w_{n,m}^{k,j} &= \mathbb{E}\left(f(M_t) - f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{T_j<(k-1)\frac{t}{n}<T_{j+1}\leq\frac{kt}{n}\right\}}.
\end{aligned}
$$

On a bien $w_{n,m}^{k,j} = u_{n,m}^{k,j} + v_{n,m}^{k,j}$. D'autre part

$$
|v_{n,m}^{k,j}| \leq \frac{\|f^{'}\|_\infty \gamma_0 t}{n}\mathbb{E}\mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=j,T_j<(k-1)\frac{t}{n}<T_{j+1}<\frac{kt}{n},M_t^{(n)}>M_t-\gamma_0\left(T_{j+1}-T_{j+1}^{(n)}\right)\right\}}.
$$

Sur $\{N_t = m, \nu_m = j\}$

$$\begin{aligned} M_t^{(n)} > M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right) &\Rightarrow \gamma_0 > 0\ ,\ M_t^{(n)} > M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right) \\ &\Rightarrow \exists p \in \{0,\dots,n\}\ X_{\frac{pt}{n}} > M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right) \\ &\Rightarrow \exists p \in \{0,\dots,n\}\ \gamma_0 \frac{pt}{n} + \sum_{i=1}^{N_{\frac{pt}{n}}} Y_i > M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right). \end{aligned}$$

Or $M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right) = \gamma_0 T_{j+1}^{(n)} + \sum_{i=1}^{j} Y_i$, Donc on a nècessairement $N_{\frac{pt}{n}} \neq j$. Car sinon on aurait $T_j < p\frac{t}{n} < T_{j+1}$ et $\gamma_0 \frac{pt}{n} + \sum_{i=1}^{N_{\frac{pt}{n}}} Y_i \leq \gamma_0 T_{j+1}^{(n)} + \sum_{i=1}^{j} Y_i$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists l \neq j,\ T_l \leq \frac{pt}{n} \leq T_{l+1},\ \gamma_0 T_{l+1} \wedge t + \sum_{i=1}^{l} Y_i > M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right) \geq M_t - \frac{\gamma_0 t}{n} \\ &\Rightarrow \exists l \neq j,\ \hat{X}_l > \hat{X}_j - \frac{\gamma_0 t}{n}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} |v_{n,m}^{k,j}| \leq \frac{\|f'\|_\infty \gamma_0 t}{n} \mathbb{P}\left[N_t = m, \nu_m = j, \exists l \neq j, \hat{X}_l > \hat{X}_j - \frac{\gamma_0 t}{n}, \gamma_0 > 0\right].$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}\left[N_t = m, \nu_m = j, \exists l \neq j, \hat{X}_l > \hat{X}_j - \frac{\gamma_0 t}{n}, \gamma_0 > 0\right] &\leq \sum_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}\left[N_t = m\right] \\ &\leq (m-1)\mathbb{P}\left[N_t = m\right]. \end{aligned}$$

Et donc par convergence dominée on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \mathbb{P}\left[N_t = m, \nu_m = j, \exists l \neq j, \hat{X}_l > \hat{X}_j - \frac{\gamma_0 t}{n}, \gamma_0 > 0\right] = 0.$$

D'où

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} v_{n,m}^{k,j} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc en notant $a_{j,n} = \mathbb{E}\left(f(M_t) - f\left(M_t - \gamma_0\left(T_{j+1} - T_{j+1}^{(n)}\right)\right)\right)$

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} w_{n,m}^{k,j} &= \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} a_{j,n} \mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\left\{T_j<(k-1)\frac{t}{n}<T_{j+1}\leq\frac{kt}{n}\right\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\left\{T_j<(k-1)\frac{t}{n},T_{j+1}^{(n)}=(k-1)\frac{t}{n}\right\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} a_{j,n} \mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\left\{T_{j+1}^{(n)}=(k-1)\frac{t}{n}\right\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} a_{j,n} \mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\gamma_0 t}{2n} \mathbb{E} f'(M_t) \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

La troisème égalité provient du fait que

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1} a_{j,n}\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}\le T_j<T_{j+1}\le\frac{kt}{n}\right\}}=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et la dernière égalité est obtenue en faisant d'abord du Taylor-Young à l'ordre 1, puis en utilisant le lemme 3.18. Reste à étudier

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f(M_t)-f\left(M_t^n\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}}.$$

Notons

$$\begin{aligned}
\hat{M}_t^{(n,m,j)} &= \max\left\{\gamma_0T_1^{(n)},\ldots,\gamma_0T_{j-1}^{(n)}+S_{j-2},\gamma_0T_j^{(n)}+S_{j-1},\gamma_0T_{j+2}^{(n)}+S_{j+1},\ldots,\gamma_0t+S_m\right\}\\
\hat{M}_t^{m,j} &= \max\left\{\gamma_0T_1,\ldots,\gamma_0T_{j-1}+S_{j-2},\gamma_0T_j+S_{j-1},\gamma_0T_{j+2}+S_{j+1},\ldots,\gamma_0t+S_m\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{n,m}^{j,k} &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f(M_t)-f\left(\hat{M}_t^{m,j}\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}}\\
V_{n,m}^{j,k} &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f\left(\hat{M}_t^{(n,m,j)}\right)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{n,m}^{j,k} &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f\left(\hat{M}_t^{m,j}\right)-f\left(\hat{M}_t^{(n,m,j)}\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}}\\
W_{n,m}^{j,k} &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f(M_t)-f\left(M_t^n\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}}.
\end{aligned}$$

On a bien

$$U_{n,m}^{j,k}+V_{n,m}^{j,k}+R_{n,m}^{j,k}=W_{n,m}^{j,k}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\left|V_{n,m}^{j,k}\right| &\le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}2\|f\|_\infty\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}\cap\left\{\exists l\neq k,\ N_{\frac{lt}{n}}-N_{(l-1)\frac{t}{n}}\ge 2\right\}}\\
&\le 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ l\neq k}}\mathbb{P}\left[N_{\frac{kt}{n}}-N_{(k-1)\frac{t}{n}}\ge 2\right]\mathbb{P}\left[N_{\frac{lt}{n}}-N_{(l-1)\frac{t}{n}}\ge 2\right]\\
&\le 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{1\le l,k\le n\\ l\neq k}}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^4\\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On remarque aussi que

$$\left|\sum_{j=1}^{m-1}V_{n,m}^{j,k}\right| \le (m-1)\mathbb{P}\left[N_t=m\right].$$

Par convergence dominée on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1} V_{n,m}^{j,k} = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1} V_{n,m}^{j,k} = o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
\left|R_{n,m}^{j,k}\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\|f^{'}\|_\infty \left|\hat{M}_t^{m,j} - \hat{M}_t^{(n,m,j)}\right| \mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}} \\
&\leq \frac{\|f^{'}\|_\infty \gamma_0 t}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left[N_{\frac{kt}{n}} - N_{(k-1)\frac{t}{n}} \geq 2\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|R_{n,m}^{j,k}\right| \leq \frac{\|f^{'}\|_\infty \gamma_0 t}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Et donc

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1} R_{n,m}^{j,k} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1} W_{n,m}^{j,k} &= \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(f(M_t) - f\left(\hat{M}_t^{m,j}\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} \\
&\quad \times \mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(f\left(\mu_m\left(\hat{X}^m\right)\right) - f\left(\mu_m^{'}\left(\hat{X}^m\right)\right)\right)\chi_j^m\left(\hat{X}^m\right) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{\{N_t=m\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1} W_{n,m}^{j,k} &= \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(f\left(\mu_m\left(\hat{X}^m\right)\right) - f\left(\mu_m^{'}\left(\hat{X}^m\right)\right)\right)\chi_j^m\left(\hat{X}^m\right) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}}\mathbb{1}_{\{N_t=m\}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} f_j^m\left(T_1,\ldots,T_m\right)\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}<\frac{kt}{n}\right\}} \\
&\quad \times \mathbb{1}_{\{N_t=m\}} + o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

avec μ_m et $\mu_m^{'}$ définies dans le lemme 3.16. En utilisant les lemmes 3.16 et 3.17, on déduit que

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1} W_{n,m}^{j,k} = \frac{t}{2n}\sum_{m=2}^{+\infty}\int_0^t \tilde{f}_m(s,s)ds + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\left(f(M_t)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} &= \frac{\gamma_0 t}{2n}\mathbb{E}f^{'}(M_t)\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\\ &+\frac{t}{2n}\sum_{m=2}^{+\infty}\int_0^t \tilde{f}_m(s,s)ds+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Et enfin sur $\{\nu_m=m\}$, on a $M_t=X_t$ et donc nèccessairement $M_t^n=X_t$ (car $M_t^n\geq X_t$), d'où

$$\mathbb{E}\left(f(M_t)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=m\}}=0.$$

Ce qui permet de déduire la première partie du théorème.
Cas 2 : $\gamma_0<0$
On a alors $M=\max\{0,\gamma_0T_1+S_1,\ldots,\gamma_0T_m+S_m\}$. Donc Sur $\{\nu_m=0\}$, on a $M_t=\hat{X}_0=0$. Or $M_t^n\geq 0$, ce qui entraîne que $M_t^n=0$. Et par conséquent

$$\mathbb{E}\left(f(M_t)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=0\}}=0.$$

Sur $\{\nu_m=j\}$ avec $j\in\{1,\ldots,m-1\}$ et $m\geq 2$, on a $M_t=\gamma_0T_j+\sum_{i=1}^{j}Y_i$. On a

$$\begin{aligned}M_t^n &= \sum_{k=1}^{n}M_t^n\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j\leq\frac{kt}{n}\right\}}\\ &= \sum_{k=1}^{n}M_t^n\left(\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j\leq\frac{kt}{n}<T_{j+1}\right\}}+\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j<T_{j+1}\leq\frac{kt}{n}\right\}}\right).\end{aligned}$$

Sur $\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j\leq\frac{kt}{n}<T_{j+1}\right\}$, on a alors

$$\begin{aligned}M_t^n &\geq X_{\frac{kt}{n}}\\ &= \gamma_0\frac{kt}{n}+\sum_{i=1}^{j}Y_i\\ &= M_t+\gamma_0\left(\frac{kt}{n}-T_j\right).\end{aligned}$$

Donc $M_t-M_t^n\leq\left|\gamma_0\frac{t}{n}\right|$. Notons maintenant

$$\begin{aligned}u_{n,m}^{k,j} &= \mathbb{E}\left(f(M_t)-f\left(M_t+\gamma_0\left(\frac{kt}{n}-T_j\right)\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j\leq\frac{kt}{n}<T_{j+1}\right\}}\\ v_{n,m}^{k,j} &= \mathbb{E}\left(f\left(M_t+\gamma_0\left(\frac{kt}{n}-T_j\right)\right)-f\left(M_t^n\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j\leq\frac{kt}{n}<T_{j+1}\right\}}\\ w_{n,m}^{k,j} &= \mathbb{E}\left(f(M_t)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n}<T_j\leq\frac{kt}{n}<T_{j+1}\right\}}.\end{aligned}$$

On a bien $w_{n,m}^{k,j}=u_{n,m}^{k,j}+v_{n,m}^{k,j}$. D'autre part

$$|v_{n,m}^{k,j}|\leq\frac{\|f^{'}\|_\infty\gamma_0 t}{n}\mathbb{E}\mathbb{1}_{\left\{N_t=m,\nu_m=j,(k-1)\frac{t}{n}<T_j\leq\frac{kt}{n}<T_{j+1},M_t^{(n)}>M_t-\gamma_0\left(T_{j+1}-T_{j+1}^{(n)}\right)\right\}}.$$

Sur $\{N_t=m,\nu_m=j\}$

$$\begin{aligned}M_t^{(n)}>M_t+\gamma_0\left(\frac{kt}{n}-T_j\right) &\Rightarrow \exists p\in\{0,\ldots,n\}\ X_{\frac{pt}{n}}>M_t+\gamma_0\left(\frac{kt}{n}-T_j\right)\\ &\Rightarrow \exists p\in\{0,\ldots,n\}\ \gamma_0\frac{pt}{n}+\sum_{i=1}^{N_{\frac{pt}{n}}}Y_i>M_t+\gamma_0\left(\frac{kt}{n}-T_j\right).\end{aligned}$$

Or $M_t + \gamma_0\left(\frac{kt}{n} - T_j\right) = \gamma_0\frac{kt}{n} + \sum_{i=1}^{j} Y_i$, donc on a nècessairement $N_{\frac{pt}{n}} \neq j$. Car sinon ou aurait $T_j \leq p\frac{t}{n} < T_{j+1}$ et

$$\begin{aligned}\gamma_0\frac{pt}{n} + \sum_{i=1}^{N_{\frac{pt}{n}}} Y_i &= \gamma_0\frac{pt}{n} + \sum_{i=1}^{j} Y_i\\ &\leq \gamma_0\frac{kt}{n} + \sum_{i=1}^{j} Y_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad \exists l \neq j,\ T_l \leq \frac{pt}{n} \leq T_{l+1},\ \gamma_0 T_{l+1} \wedge t + \sum_{i=1}^{l} Y_i > M_t + \gamma_0\left(\frac{kt}{n} - T_j\right) \geq M_t + \frac{\gamma_0 t}{n}\\ &\Rightarrow \quad \exists l \neq j,\ \hat{X}_l > \hat{X}_j + \frac{\gamma_0 t}{n}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}|v_{n,m}^{k,j}| &\leq \frac{\|f'\|_\infty\gamma_0 t}{n}\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\mathbb{P}\left[N_t = m, \nu_m = j, \exists l \neq j, \hat{X}_l > \hat{X}_j + \frac{\gamma_0 t}{n}, \gamma_0 > 0\right]\\ &= o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} w_{n,m}^{k,j} &= \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f(M_t) - f\left(M_t + \gamma_0\left(\frac{kt}{n} - T_j\right)\right)\right)\\ &\quad \times \mathbb{1}_{\{N_t = m, \nu_m = j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_j \leq \frac{kt}{n} < T_{j+1}\right\}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= -\frac{\gamma_0 t}{2n}\mathbb{E}f'(M_t)\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\mathbb{1}_{\{N_t = m, \nu_m = j\}} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Reste à étudier

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f(M_t) - f\left(M_t^n\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t = m, \nu_m = j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_j < T_{j+1} < \frac{kt}{n}\right\}}.$$

Posons

$$\begin{aligned}\hat{M}_t^{(n,m,j)} &= \max\left\{0, \gamma_0 T_1^{(n)} + S_1, \ldots, \gamma_0 T_{j-1}^{(n)} + S_{j-1}, \gamma_0 T_{j+1}^{(n)} + S_{j+1}, \ldots, \gamma_0 T_m^{(n)} + S_m\right\}\\ \hat{M}_t^{m,j} &= \max\{0, \gamma_0 T_1 + S_1, \ldots, \gamma_0 T_{j-1} + S_{j-1}, \gamma_0 T_{j+1} + S_{j+1}, \ldots, \gamma_0 T_m + S_m\}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement que dans le cas $\gamma_0 \geq 0$ montre que

$$\begin{aligned}&\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f(M_t) - f\left(M_t^n\right)\right)\mathbb{1}_{\{N_t = m, \nu_m = j\}}\mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_j < T_{j+1} < \frac{kt}{n}\right\}}\\ = &\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(f\left(\mu_m\left(\hat{X}^m\right)\right) - f\left(\mu_m'\left(\hat{X}^m\right)\right)\right)\chi_j^m\left(\hat{X}^m\right) \times \mathbb{1}_{\left\{(k-1)\frac{t}{n} < T_j < T_{j+1} < \frac{kt}{n}\right\}}\mathbb{1}_{\{N_t = m\}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ = &\frac{t}{2n}\sum_{m=2}^{+\infty}\int_0^t \tilde{f}_m(s,s)ds + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\left(f(M_t)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}} &= -\frac{\gamma_0 t}{2n}\mathbb{E}f^{'}(M_t)\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=j\}}\\ &\quad+\frac{t}{2n}\sum_{m=2}^{+\infty}\int_0^t\tilde{f}_m(s,s)ds+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Sur $\{\nu_m=m\}$, on a $M_t=X_{T_m}$. Posons $\tilde{T}_m^{(n)}=\sum_{k=1}^n\frac{kt}{n}\mathbb{1}_{(k-1)\frac{t}{n}<T_m\le\frac{kt}{n}}$ Donc on a

$$\begin{aligned}M_t^n &\geq X_{\tilde{T}_m^{(n)}}\\ &= \gamma_0\tilde{T}_m^{(n)}+\sum_{i=1}^m Y_i\\ &= M_t+\gamma_0\left(\tilde{T}_m^{(n)}-T_m\right).\end{aligned}$$

En particulier $|M_t-M_t^n|\le\frac{|\gamma_0|t}{n}$. Notons

$$V_{n,m}=\mathbb{E}\left(f\left(M_t+\gamma_0\left(\tilde{T}_m^{(n)}-T_m\right)\right)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=m\}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{+\infty}|V_{n,m}| &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{n}\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left[M_t+\gamma_0\left(\tilde{T}_m^{(n)}-T_m\right)>M_t^n,N_t=m,\nu_m=m\right]\\ &= o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(f(M_t)-f(M_t^n)\right)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=m\}} &= \sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(f(M_t)-f\left(M_t+\gamma_0\left(\tilde{T}_m^{(n)}-T_m\right)\right)\right)\\ &\quad\times\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=m\}}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left[-\gamma_0\left(\tilde{T}_m^{(n)}-T_m\right)f^{'}(M_t)\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=m\}}\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= -\frac{\gamma_0 t}{2n}\mathbb{E}f^{'}(M_t)\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{N_t=m,\nu_m=m\}}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Ce qui permet de déduire la deuxième partie du théorème. ◇

Chapitre 4

Approximation des petits sauts

Le but de cette partie est d'établir l'erreur d'approximation (dans un sens à préciser) d'un processus de Lévy à activité infinie par un processus de Lévy à activité finie. Cette approche est intéressante du fait qu'en général la simulation d'un processus de Lévy à activité finie est plus commode que celle d'un processus de Lévy à activité infinie. Dans la première partie nous allons donner des majorations des moments des petits sauts du processus de Lévy X (R^ε) par rapport à leur variance $\sigma(\varepsilon)^2$. Dans la deuxième partie nous allons établir les estimations des erreurs dues à la troncation des petits sauts. Dans la troisième partie nous établirons les estimations des erreurs résultant de l'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien, en utilisant le théorème de plongement de Skorokhod. Dans la dernière partie nous ferons une comparaison des méthodes d'approximations des petits sauts.

4.1 Préliminaires

La simulation d'un processus de Lévy X est relativement aisée dans le cas à activité finie. Lorsque X est un processus de Lévy à activité infinie, la simulation d'une trajectoire (discrète) de X est possible si on peut simuler la loi de X_t pour tout $t > 0$ comme dans les cas stable, Gamma et inverse Gaussien. En général, la loi de X_t est difficilement simulable dans le cas activité infinie. En pratique, on approxime X par un processus à activité finie X^ε (défini en (1.4.8)), obtenu en enlevant les sauts (compensés) de X plus petit que ε. Une autre méthode consiste à remplacer ces petits sauts par $\sigma(\varepsilon)W$, où W est un mouvement Brownien standard indépendant de X, et $\sigma(\varepsilon)^2$ est la variance des petits sauts (à l'instant 1). Cette méthode a été introduite par Asmussen et Rosinsky (voir *[Asmussen-Rosinsky (2001)]*). On verra que sous certaines conditions, cette méthode permet de réduire l'erreur d'approximation.

Définition 4.1 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ, ν). On note*

$$\begin{aligned}
\sigma^X(\varepsilon) &= \sqrt{\int_{|x|<\varepsilon} x^2 \nu(dx)} \\
\sigma_0^X(\varepsilon) &= \sigma^X(\varepsilon) \vee \varepsilon \\
\beta^X(\varepsilon) &= \frac{\int_{|x|<\varepsilon} x^4 \nu(dx)}{\left(\sigma_0^X(\varepsilon)\right)^4} \\
M_t^{\varepsilon,X} &= \sup_{0\le s\le t} X_s^\varepsilon \\
m_t^{\varepsilon,X} &= \inf_{0\le s\le t} X_s^\varepsilon.
\end{aligned}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra l'exposant X. Rappelons que pour $t \geq 0$

$$X_t = X_t^\varepsilon + R_t^\varepsilon,$$

et

$$\begin{aligned} Var\left(R_t^{\varepsilon}\right) &= \mathbb{E}\left(R_t^{\varepsilon}\right)^2 \\ &= \left(\sigma(\varepsilon)\right)^2 t. \end{aligned}$$

On peut trouver des majorations pour les moments de R^{ε}. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.2 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν). Et R_t^{ε} tel que défini en* (1.4.7). *On a alors*

$$\mathbb{E}\left|R_t^{\varepsilon}\right|^4 = t\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^4 \nu(dx) + 3\left(t\sigma(\varepsilon)^2\right)^2.$$

Et de plus pour tout réel $q > 0$

$$\mathbb{E}\left|R_t^{\varepsilon}\right|^q \leq K_{q,t}\sigma_0(\varepsilon)^q,$$

où $K_{q,t}$ est une constante qui dépend de q et de t.

Démonstration de la proposition 4.2. On utilise ici les mêmes notations que dans *[Cont-Tankov(2004), paragraphe 2.2.5]* (en remplaçant X par R_t^{ε}). On pose

$$\Phi_{\varepsilon}(u) = \mathbb{E}e^{iuR_t^{\varepsilon}}.$$

Remarquons que $\mathbb{E}R_t^{\varepsilon} = 0$. On a

$$\Phi_{\varepsilon}(u) = e^{\Psi_{\varepsilon}},$$

avec $\Psi_{\varepsilon} = t\int_{|y|\leq\varepsilon}\left(e^{iuy} - 1 - iuy\right)\nu(dy)$. Posons

$$c_n(\varepsilon) = \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n \Psi_{\varepsilon}}{\partial u^n}(0).$$

En utilisant *[Cont-Tankov(2004), proposition 3.13]*

$$c_n(\varepsilon) = t\int_{|x|\leq\varepsilon} x^n \nu(dx), \ \forall n \geq 2.$$

On sait que d'une part

$$\mathbb{E}\left(R_t^{\varepsilon}\right)^n = \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n \Phi_{\varepsilon}}{\partial u^n}(0).$$

Et d'autre part par simple dérivation on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\varepsilon}}{\partial u}(u) &= \frac{\partial \Psi_{\varepsilon}}{\partial u}(u)\Phi_{\varepsilon}(u) \\ \frac{\partial^2 \Phi_{\varepsilon}}{\partial u^2}(u) &= \left(\left(\frac{\partial \Psi_{\varepsilon}}{\partial u}(u)\right)^2 + \frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon}}{\partial^2 u}(u)\right)\Phi_{\varepsilon}(u), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_{\varepsilon}}{\partial u^3}(u) &= \left(\left(\frac{\partial \Psi_{\varepsilon}}{\partial u}(u)\right)^3 + 3\frac{\partial \Psi_{\varepsilon}}{\partial u}(u)\frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon}}{\partial^2 u}(u) + \frac{\partial^3 \Psi_{\varepsilon}}{\partial u^3}(u)\right)\Phi_{\varepsilon}(u) \\ \frac{\partial^4 \Phi_{\varepsilon}}{\partial u^4}(u) &= \left(\left(\frac{\partial \Psi_{\varepsilon}}{\partial u}(u)\right)^4 + 6\left(\frac{\partial \Psi_{\varepsilon}}{\partial u}(u)\right)^2\frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon}}{\partial^2 u}(u) + 4\frac{\partial \Psi_{\varepsilon}}{\partial u}(u)\frac{\partial^3 \Psi_{\varepsilon}}{\partial^3 u}(u)\right. \\ &\quad \left. +3\left(\frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon}}{\partial^2 u}(u)\right)^2 + \frac{\partial^4 \Psi_{\varepsilon}}{\partial u^4}(u)\right)\Phi_{\varepsilon}(u). \end{aligned}$$

Or, comme $\mathbb{E}R_t^\varepsilon = 0$, on a $\frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial u}(0) = 0$. D'où

$$\frac{\partial^4 \Phi_\varepsilon}{\partial u^4}(0) = 3\left(\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon}{\partial^2 u}(0)\right)^2 + \frac{\partial^4 \Psi_\varepsilon}{\partial u^4}(0).$$

Et par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(R_t^\varepsilon\right)^4 &= \frac{1}{i^4}\frac{\partial^4 \Phi_\varepsilon}{\partial u^4}(0) \\
&= 3\left(\frac{1}{i^2}\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon}{\partial^2 u}(0)\right)^2 + \frac{1}{i^4}\frac{\partial^4 \Psi_\varepsilon}{\partial u^4}(0) \\
&= 3\left(c_2(\varepsilon)\right)^2 + c_4(\varepsilon) \\
&= 3\left(t\int_{|x|\le\varepsilon} |x|^2\nu(dx)\right)^2 + t\int_{|x|\le\varepsilon} |x|^4\nu(dx) \\
&= 3t^2\sigma(\varepsilon)^4 + t\int_{|x|\le\varepsilon} |x|^4\nu(dx).
\end{aligned}$$

D'où le premier point de la proposition. Par ailleurs on peut écrire

$$\Phi_\varepsilon^{(2n)}(0) = \sum_{\{j,k,p,q\}\in E_n} a_{j,k,p,q}\left(\Psi_\varepsilon^{(j)}(0)\right)^k\left(\Psi_\varepsilon^{(p)}(0)\right)^q.$$

Avec E_n un ensemble fini, $(a_{j,k,p,q})_{\{j,k,p,q\}\in E_n}$ des réels positifs qui peuvent être déterminés explicitement. Notons que l'on doit avoir $\forall\{j,k,p,q\}\in E_n$

$$\begin{aligned}
&j > 1 \\
&p > 1 \\
&jk + pq = 2n
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left|\Phi_\varepsilon^{(2n)}(0)\right| \le \sum_{\{j,k,p,q\}\in E_n} a_{j,k,p,q}\left|\Psi_\varepsilon^{(j)}(0)\right|^k\left|\Psi_\varepsilon^{(p)}(0)\right|^q.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|R_t^\varepsilon\right|^{2n} &= \left|\Phi_\varepsilon^{(2n)}(0)\right| \\
&\le \sum_{\{j,k,p,q\}\in E_n} a_{j,k,p,q}\left|c_j(\varepsilon)\right|^k\left|c_p(\varepsilon)\right|^q.
\end{aligned}$$

Or

$$|c_j(\varepsilon)| \le t\int_{|x|\le\varepsilon} |x|^j\nu(dx),\ j\ge 2.$$

Pour $j \ge 2$, on a alors

$$\begin{aligned}
|c_j(\varepsilon)| &\le t\varepsilon^{j-2}\int_{|x|\le\varepsilon} |x|^2\nu(dx) \\
&= t\varepsilon^{j-2}\sigma(\varepsilon)^2 \\
&\le \sigma_0(\varepsilon)^j t.
\end{aligned}$$

De même pour $p \ge 2$

$$|c_p(\varepsilon)| \le \sigma_0(\varepsilon)^p t.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{2n} &\leq \sum_{\{j,k,p,q\}\in E_n, j>1, p>1} a_{j,k,p,q}\left|\sigma_0(\varepsilon)^j t\right|^k |\sigma_0(\varepsilon)^p t|^q \\
&= \sum_{\{j,k,p,q\}\in E_n} a_{j,k,p,q} t^{k+q} \sigma_0(\varepsilon)^{jk+pq} \\
&= \sum_{\{j,k,p,q\}\in E_n} a_{j,k,p,q} t^{k+q} \sigma_0(\varepsilon)^{2n}.
\end{aligned}$$

On note $K_{n,t} = \sqrt{\sum_{\{j,k,p,q\}\in E_n} a_{j,k,p,q} t^{k+q}}$, et on obtient

$$\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{2n} \leq K_{n,t}^2 \sigma_0(\varepsilon)^{2n}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{n} &\leq \left(\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_{n,t}\sigma_0(\varepsilon)^n.
\end{aligned}$$

Soit maintenant un réel $q \geq 1$. Si q n'est pas un entier alors il existe un entier $n_q > 1$ tel que $n_q - 1 < q < n_q$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{q} &\leq (\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{n_q})^{\frac{q}{n_q}}, \text{ par Hölder} \\
&\leq \left(K_{n_q,t}\sigma_0(\varepsilon)^{n_q}\right)^{\frac{q}{n_q}} \\
&\leq \left(K_{n_q,t}\right)^{\frac{q}{n_q}} \sigma_0(\varepsilon)^q.
\end{aligned}$$

On pose $K_{q,t} = \left(K_{n_q,t}\right)^{\frac{q}{n_q}}$, et on obtient

$$\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{q} \leq K_{q,t}\sigma_0(\varepsilon)^q.$$

Si $q < 1$, on sait que la fonction $x \to x^q$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par Jensen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|^{q} &\leq (\mathbb{E}\,|R_t^\varepsilon|)^q \\
&\leq t^{\frac{q}{2}}\sigma_0(\varepsilon)^q.
\end{aligned}$$

◇

4.2 Troncation des petits sauts

L'idée dans cette partie, est de remplacer X_t par X_t^ε et donc d'ignorer le terme R_t^ε. Il s'agit en fait des petits sauts compensés. Cette méthode semble judicieuse lorsque (sans vraiment être rigoureux) R^ε tend rapidement vers 0 avec ε, C'est à dire son écart-type $\sigma(\varepsilon)\sqrt{t}$ tend rapidement vers 0. Dans le cas où X est à variation finie, une alternative à cette méthode est de tronquer les petits sauts non compensés. On remplacera alors X par le processus $\bar{X}^\varepsilon$ qui est défini par

$$\bar{X}_t^\varepsilon = X_t - \sum_{0\leq s\leq t} \Delta X_s \mathbb{1}_{|\Delta X_s|\leq\varepsilon}, \quad \forall t \geq 0.$$

On verra qu'en général il vaut mieux tronquer les petits sauts compensés.

4.2.1 Estimation des fonctions régulières

Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ, ν) et f une fonction C-lipschitzienne avec $C > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|f\left(X_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right| &\leq C\mathbb{E}\left|X_t-X_t^{\varepsilon}\right| \\ &= C\mathbb{E}\left|R_t^{\varepsilon}\right| \\ &\leq C\sqrt{\mathbb{E}\left|R_t^{\varepsilon}\right|^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}\left|f\left(X_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right| \leq C\sqrt{t}\sigma(\varepsilon). \tag{4.2.1}$$

Remarquons qu'on a pas besoin que $f\left(X_t\right)$ soit intégrable. Si f est un peu plus régulière, on obtient les résultats suivants.

Proposition 4.3 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ, ν) à activité infinie et $t > 0$,*

1. *Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec une dérivée bornée, on a alors*
$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)=o\left(\sigma(\varepsilon)\right).$$
2. *Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec une dérivée seconde bornée, et vérifiant $\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right| < \infty$, alors on a*
$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)=\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{2}\mathbb{E}f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)+o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

Rappelons que la troncation des sauts se fait dans le cas où $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$. On s'attend donc moralement à ce que $\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ne converge pas vers 0. En d'autres termes que $\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}$ soit minoré. Dans ce cas $o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right)$ correspond en fait à $o\left(\sigma(\varepsilon)^2\right)$. Les processus de Lévy dont la mesure de Lévy a une densité qui se comporte au voisinage de 0 comme $x^{-\alpha}$ avec $\alpha \geq 1$, vérifient cette condition. On peut citer comme exemples, les processus VG, NIG et CGMY.

Démonstration de la proposition 4.3. On a

$$\begin{aligned} f\left(X_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right) &= \int_{X_t^{\varepsilon}}^{X_t} f^{'}(x)\,dx \\ &= \int_0^1 f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\left(X_t-X_t^{\varepsilon}\right)\right)\left(X_t-X_t^{\varepsilon}\right)d\theta \\ &= \int_0^1 f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta R_t^{\varepsilon}\right)R_t^{\varepsilon}d\theta. \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité est obtenue par le changement de variable $\theta = \frac{x-X_t^{\varepsilon}}{X_t-X_t^{\varepsilon}}$, et de plus on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[X_t-X_t^{\varepsilon}=0\right] &= \mathbb{P}\left[R_t^{\varepsilon}=0\right] \\ &= 0, \text{ car } \nu(\mathbb{R})=+\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(\varepsilon)}\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right) &= \int_0^1 \mathbb{E}\left(f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta R_t^{\varepsilon}\right)-f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)\frac{R_t^{\varepsilon}}{\sigma(\varepsilon)}d\theta \\ &\quad +\int_0^1 \mathbb{E}f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\frac{R_t^{\varepsilon}}{\sigma(\varepsilon)}d\theta \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}\left(f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta R_t^{\varepsilon}\right)-f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)\frac{R_t^{\varepsilon}}{\sigma(\varepsilon)}d\theta. \end{aligned}$$

Car R_t^ε et X_t^ε sont indépendants et $\mathbb{E}R_t^\varepsilon = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\left(f^{'}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\right)\frac{R_t^\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)}\right| &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(f'\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f'\left(X_t^\varepsilon\right)\right)^2}\sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{R_t^\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)}\right)^2} \\
&= \sqrt{t}\sqrt{\mathbb{E}\left(f'\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f'\left(X_t^\varepsilon\right)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(f^{'}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\right)^2 &= \mathbb{E}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(f^{'}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\right)^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La première égalité est obtenu par convergence dominée ($f^{'}$ est bornée), et la dernière par continuité de $f^{'}$ et convergence de X_t^ε vers X_t. D'où

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) - f\left(X_t^\varepsilon\right)\right) = o\left(\sigma(\varepsilon)\right).$$

D'autre part par le théorème de Taylor avec reste intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) - f\left(X_t^\varepsilon\right)\right) &= \mathbb{E}f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\left(X_t - X_t^\varepsilon\right) + \int_{X_t^\varepsilon}^{X_t} f^{''}(x)\left(X_t - x\right)dx \\
&= \mathbb{E}f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)R_t^\varepsilon + \int_0^1 f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right)(1-\theta)\left(R_t^\varepsilon\right)^2 d\theta.
\end{aligned}$$

Or R_t^ε et X_t^ε sont indépendants et $\mathbb{E}R_t^\varepsilon = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) - f\left(X_t^\varepsilon\right)\right) &= \int_0^1 f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right)(1-\theta)\left(R_t^\varepsilon\right)^2 d\theta \\
&= \int_0^1 f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)(1-\theta)\left(R_t^\varepsilon\right)^2 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \left(f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right)(1-\theta)\left(R_t^\varepsilon\right)^2 d\theta.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) - f\left(X_t^\varepsilon\right)\right) = \frac{t}{2}\mathbb{E}f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\sigma(\varepsilon)^2 + \int_0^1 \mathbb{E}\left(f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right)(1-\theta)\left(R_t^\varepsilon\right)^2 d\theta.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|\left(R_t^\varepsilon\right)^2 &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(f'\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f'\left(X_t^\varepsilon\right)\right)^2}\sqrt{\mathbb{E}\left(R_t^\varepsilon\right)^4} \\
&\leq C\sqrt{\mathbb{E}\left(f''\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f''\left(X_t^\varepsilon\right)\right)^2}\sigma_0(\varepsilon)^2.
\end{aligned}$$

La dernère inégalité est obtenue grâce à la proposition 4.2. Pour les mêmes raisons que dans le cas de $f^{'}$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right)^2 = 0.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) - f\left(X_t^\varepsilon\right)\right) = \frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{2}\mathbb{E}f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right) + o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

◇

Remarquons que dans la proposition 4.3, on a imposé que $f^{'}$ soit borné dans le premier point et $f^{''}$ dans le deuxième, uniquement pour pouvoir faire de la domination et donc permuter limite et espérance. En fait on pourrait remplacer les conditions de bornitude par des conditions plus faibles, à savoir d'uniforme intégrabilité.

Proposition 4.4 *Soient X un processus de Lévy de triplet $\left(\gamma,\sigma^2,\nu\right)$ à activité infinie et $t>0$,*

1. *Si f est une fonction $C^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|<\infty$ et si il existe $\beta>0$ tel que $\left(\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^\varepsilon+\theta R_t^\varepsilon\right)-f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$ soit finie et intégrable par rapport à θ sur $[0,1]$, alors*
$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(X_t^\varepsilon\right)\right)=o\left(\sigma_0(\varepsilon)\right).$$

2. *Si f est une fonction $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|+\mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|<\infty$, et si il existe $\beta>0$ tel que $\left(\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^\varepsilon+\theta R_t^\varepsilon\right)-f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$ soit finie et intégrable par rapport à θ sur $[0,1]$, alors*
$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(X_t^\varepsilon\right)\right)=\frac{\sigma(\varepsilon)^2t}{2}\mathbb{E}f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)+o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

Cette proposition se démontre de la même façon que la proposition 4.3. La seule différence c'est qu'au lieu d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on va utiliser les inégalités de Hölder et la proposition 4.2. La proposition 4.4 permet de montrer par exemple, que si il exite $\beta>0$ tel que $\mathbb{E}e^{(1+\beta)X_t}<\infty$ alors

$$\mathbb{E}\left(e^{X_t}-e^{X_t^\varepsilon}\right)=\frac{\sigma(\varepsilon)^2t}{2}\mathbb{E}e^{X_t^\varepsilon}+o\left(\sigma(\varepsilon)^2\right).$$

Nous utiliserons ce résultat dans la partie simulation. Si on choisit $f^{'}$ lipschitzienne, on obtient un développement plus faible.

Proposition 4.5 *Soient X un processus de Lévy intégrable de triplet (γ,σ,ν) à activité infinie et $t>0$, Si f est une fonction $C^1(\mathbb{R})$ avec $f^{'}$ lipschitzienne, alors on a*

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(X_t^\varepsilon\right)\right)=O\left(\sigma(\varepsilon)^2\right).$$

La démonstration est similaire à celle de la proposition 4.3. On notera C la constante de Lipschitz de $f^{'}$ et $f^{''}$ sa dérivée presque partout. On a donc $\left|f^{''}\right|\leq C$. Ce qui permet de montrer que

$$\mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^\varepsilon+\theta R_t^\varepsilon\right)-f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|\left(R_t^\varepsilon\right)^2\leq 2Ct\sigma(\varepsilon)^2.$$

Lorsqu'on considére des fonctions dépendant de la trajectoire de X, les erreurs dans le cas lipschitzien sont similaires à celles obtenues ci-dessus.

Proposition 4.6 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ,σ^2,ν), $\varepsilon\in(0,1]$, $t>0$ et f une fonction de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ K-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Alors*

$$\left|\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}}\mathbb{E}f\left(\tau,X_\tau\right)-\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}}\mathbb{E}f\left(\tau,X_\tau^\varepsilon\right)\right|\leq 2K\sqrt{t}\sigma(\varepsilon),$$

où $\mathcal{T}_{[0,t]}$ designe l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0,t]$.

Démonstration de la proposition 4.6. Soit $\theta\in\mathcal{T}_{[0,t]}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f\left(\theta,X_\theta\right) &= \mathbb{E}f\left(\theta,X_\theta^\varepsilon\right)+\mathbb{E}\left(f\left(\theta,X_\theta\right)-f\left(\theta,X_\theta^\varepsilon\right)\right)\\ &\leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}}\mathbb{E}f\left(\tau,X_\tau^\varepsilon\right)+\mathbb{E}\left|f\left(\theta,X_\theta\right)-f\left(\theta,X_\theta^\varepsilon\right)\right|\\ &\leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}}\mathbb{E}f\left(\tau,X_\tau^\varepsilon\right)+K\mathbb{E}\left|X_\theta-X_\theta^\varepsilon\right|\\ &\leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}}\mathbb{E}f\left(\tau,X_\tau^\varepsilon\right)+K\mathbb{E}\left|R_\theta^\varepsilon\right|.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f(\theta, X_\theta) &\le \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau^\varepsilon) + K\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|R_s^\varepsilon| \\
&\le \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau^\varepsilon) + K\sqrt{\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|R_s^\varepsilon|^2} \\
&\le \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau^\varepsilon) + 2K\sqrt{\mathbb{E}|R_s^\varepsilon|^2}, \text{par Doob} \\
&= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau^\varepsilon) + 2K\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).
\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau) \le \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau^\varepsilon) + 2K\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).$$

Le même raisonnement, nous donne

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau^\varepsilon) \le \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau) + 2K\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).$$

Et par suite

$$\left|\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau) - \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau^\varepsilon)\right| \le 2K\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).$$

$\diamond$

Proposition 4.7 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ, ν), f une fonction K-lipschitzienne et $t > 0$, on a alors*

$$\mathbb{E}|f(M_t) - f(M_t^\varepsilon)| \le 2K\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).$$

Démonstration de la proposition 4.7. Soit R^ε défini en (1.4.7). Donc R^ε est une martingale. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|f\left(\sup_{0\le s\le t} X_s\right) - f\left(\sup_{0\le s\le t} X_s^\varepsilon\right)\right| &\le K\mathbb{E}\left|\sup_{0\le s\le t} X_s - \sup_{0\le s\le t} X_s^\varepsilon\right| \\
&\le K\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|X_s - X_s^\varepsilon| \\
&\le K\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|R_s^\varepsilon| \\
&\le K\sqrt{\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}|R_s^\varepsilon|\right)^2} \\
&\le 2K\sqrt{\mathbb{E}|R_s^\varepsilon|^2}, \text{ par Doob} \\
&= 2K\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).
\end{aligned}$$

$\diamond$

Dans les applications financières, la fonction f définie dans la proposition 4.7 n'est pas toujours Lipschitz, comme dans le cas du call lookback où la fonction est une exponentielle (croissante). D'où la proposition suivante.

Proposition 4.8 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν), $p > 1$ et $t > 0$. On suppose que, $\mathbb{E}e^{pM_t} < \infty$, alors*

$$\mathbb{E}\left|e^{M_t} - e^{M_t^\varepsilon}\right| \le C_p\sigma_0(\varepsilon),$$

où C_p est une constante indépendante de ε.

Remarque 4.9 *On peut aussi montrer (plus facilement) que si il existe $p>1$ tel que $\int_{x>1} e^{px}\nu(dx)<\infty$, alors*

$$\mathbb{E}\left|e^{X_t}-e^{X_t^\varepsilon}\right| \leq C_p\sigma_0(\varepsilon),$$

où C_p est une constante indépendante de ε.

En fait on doit s'assurer que $\mathbb{E}e^{pM_t^\varepsilon}$ est bornée par une constante indépendant de ε.

Lemme 4.10 *Soit un réel $p>0$ et $\varepsilon\in]0,1]$. Si $\mathbb{E}e^{pM_t}<\infty$, alors*

$$\sup_{0\leq\delta\leq 1}\mathbb{E}e^{pM_t^\delta}<\infty.$$

Remarque 4.11 *Pour $p>0$, $\mathbb{E}e^{pM_t}<\infty$ est équivalent à $\int_{x>1} e^{px}\nu(dx)<\infty$.*

Démonstration du lemme 4.10. Soient $\delta\in]0,1]$,

$$\begin{aligned}
X_s^1 &= \gamma s+\sigma B_s+\int_{0\leq\tau\leq s,|x|>1} J_X(ds\times dx)\\
\bar{R}_s^\delta &= \int_{0\leq\tau\leq s,\delta<|x|\leq 1}\tilde{J}_X(ds\times dx).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{pM_t^\delta} &\leq \mathbb{E}e^{p\sup_{0\leq s\leq t}X_s^1+\sup_{0\leq s\leq t}\bar{R}_s^\delta}\\
&\leq \mathbb{E}e^{p\sup_{0\leq s\leq t}X_s^1}\mathbb{E}e^{\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|}.
\end{aligned}$$

Par hyposthèse et la remarque 4.11, $\mathbb{E}e^{p\sup_{0\leq s\leq t}X_s^1}<\infty$. On va donc majorer $\mathbb{E}e^{p\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|}$ indépendamment de δ. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{p\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|} &= \mathbb{E}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(p\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|\right)^n}{n!}\\
&= \mathbb{E}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p^n}{n!}\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p^n}{n!}\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|^n\\
&= 1+p\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{p^n}{n!}\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|^n.
\end{aligned}$$

Donc par Doob ($\bar{R}^\delta$ est une martingale)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{p\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|} &\leq 1+p\sqrt{\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|^2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{p^n}{n!}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^n\\
&\leq 1+2p\sqrt{\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{p^n}{n!}2^n\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^n\\
&= 2p\left(\sqrt{\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^2}-\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^np^n}{n!}\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^n.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{p\sup_{0\le s\le t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|} &\le 2p\left(\sqrt{\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^2}-\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|\right)+\mathbb{E}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^np^n}{n!}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^n \\
&= 2p\left(\sqrt{\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^2}-\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|\right)+\mathbb{E}e^{2p\left|\bar{R}_t^\delta\right|} \\
&\le 2p\left(\sqrt{\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^2}-\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|\right)+\mathbb{E}e^{2p\bar{R}_t^\delta}+\mathbb{E}e^{-2p\bar{R}_t^\delta}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right| &\le \sqrt{\mathbb{E}\left|\bar{R}_t^\delta\right|^2} \\
&\le \sqrt{t\int_{\delta<|x|\le 1}x^2\nu(dx)} \\
&\le \sqrt{t\int_{|x|\le 1}x^2\nu(dx)}.
\end{aligned}$$

Et on peut montrer que pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, $\left(e^{\beta\bar{R}_t^\delta}\right)_{0\le\delta\le 1}$ est uniformément intégrable. D'où

$$\sup_{0\le\delta\le 1}\mathbb{E}e^{p\sup_{0\le s\le t}\left|\bar{R}_s^\delta\right|} < \infty.$$

◇

Démonstration de la proposition 4.8. Par le théorème des accroissements finis, on a

$$e^{M_t}-e^{M_t^\varepsilon}=(M_t-M_t^\varepsilon)\,e^{\bar{M}_t^\varepsilon},$$

où $\bar{M}_t^\varepsilon$ est compris entre M_t et M_t^ε. Soit q le conjugué de p (e.g. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Dans la suite C_p désignera une constante dépendant de p.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|e^{M_t}-e^{M_t^\varepsilon}\right| &\le \mathbb{E}\left|M_t-M_t^\varepsilon\right|e^{\bar{M}_t^\varepsilon} \\
&\le \mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left|R_t^\varepsilon\right|e^{\bar{M}_t^\varepsilon} \\
&\le \left(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left|R_t^\varepsilon\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mathbb{E}e^{p\bar{M}_t^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|e^{M_t}-e^{M_t^\varepsilon}\right| &\le \frac{q}{q-1}\left(\mathbb{E}\left|R_t^\varepsilon\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mathbb{E}e^{p\bar{M}_t^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{par Doob} \\
&\le C_p\sigma_0(\varepsilon)\left(\mathbb{E}\left(e^{pM_t}+e^{pM_t^\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{par la proposition 4.2} \\
&\le C_p\sigma_0(\varepsilon),\ \text{par le lemme 4.10.}
\end{aligned}$$

◇

4.2.2 Estimation des fonctions de répartition

Si la fonction f ci-dessus est la fonction indicatrice, on s'attend à ce que les erreurs de la troncature soit moins précises. Cependant sous certaines conditions sur le processus de Lévy, nous obtenons des résultats assez intéressants. Commençons par énoncer une proposition qui nous sera utile pour la suite.

Proposition 4.12 *Soient X et Y deux v.a. On suppose que X a une densité bornée au voisinage de $x \in \mathbb{R}$, et qu'il existe $p \geq 1$ tel que $\mathbb{E}|X-Y|^p < \infty$. Alors il existe une constante $K_x > 0$, telle que pour tout $\delta > 0$*

$$|\mathbb{P}[X \geq x] - \mathbb{P}[Y \geq x]| \leq K_x \delta + \frac{\mathbb{E}|X-Y|^p}{\delta^p}.$$

Remarque 4.13 *S'il existe $\alpha > 0$ et $K_x > 0$ tels que au voisinage de x on a pour tout $\delta > 0$*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x \leq X < x + \delta] &\leq K_x \delta^\alpha \\ \mathbb{P}[x - \delta \leq X < x] &\leq K_x \delta^\alpha. \end{aligned}$$

Alors

$$|\mathbb{P}[X \geq x] - \mathbb{P}[Y \geq x]| \leq K_x \delta^\alpha + \frac{\mathbb{E}|X-Y|^p}{\delta^p}.$$

Démonstration de la proposition 4.12. On a

$$|\mathbb{P}[X \geq x] - \mathbb{P}[Y \geq x]| = |\mathbb{P}[X \geq x, Y < x] - \mathbb{P}[X < x, Y \geq x]|.$$

Etudions les termes à droite de la dérnière inégalité.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \geq x, Y < x] &= \mathbb{P}[x \leq X < x + (X - Y)] \\ &= \mathbb{P}[x \leq X < x + (X - Y), |X - Y| \leq \delta] \\ &\quad + \mathbb{P}[x \leq X < x + (X - Y), |X - Y| > \delta] \\ &\leq \mathbb{P}[x \leq X < x + \delta] + \mathbb{P}[|X - Y| > \delta]. \end{aligned}$$

Or la densité de X est bornée au voisinage de x, donc il existe une constante $K_x^1 > 0$ telle que

$$\mathbb{P}[x \leq X < x + \delta] \leq K_x^1 \delta.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \geq x, Y < x] &\leq K_x^1 \delta + \mathbb{P}[|X - Y| > \delta] \\ &\leq K_x^1 \delta + \frac{\mathbb{E}|X-Y|^p}{\delta^p}, \text{ par Markov.} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X < x, Y \geq x] &= \mathbb{P}[x - (X - Y) \leq X < x] \\ &= \mathbb{P}[x - (X - Y) \leq X < x, |X - Y| \leq \delta] \\ &\quad + \mathbb{P}[x - (X - Y) \leq X < x, |X - Y| > \delta] \\ &\leq \mathbb{P}[x - \delta \leq X < x] + \mathbb{P}[|X - Y| > \delta]. \end{aligned}$$

La bornitude de la densité de X au voisinage de x implique qu'il existe une constante $K_x^2 > 0$ telle que

$$\mathbb{P}[x - \delta \leq X < x] \leq K_x^2 \delta.$$

D'où

$$\mathbb{P}[X < x, Y \geq x] \leq K_x^2 \delta + \frac{\mathbb{E}|X-Y|^p}{\delta^p}.$$

Et par conséquent

$$|\mathbb{P}[X \geq x] - \mathbb{P}[Y \geq x]| \leq \max\left(K_x^1, K_x^2\right) \delta + \frac{\mathbb{E}|X-Y|^p}{\delta^p}.$$

◇

Une hypothèse d'existence d'une densité localement bornée pour le processus X ou M permet d'affiner le contrôle de l'erreur de troncature. On verra plus loin que sans une telle hypothèse le contrôle est moins précis.

Proposition 4.14 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν), $\varepsilon \in (0,1]$ et $t > 0$.*

1. Si $\sigma > 0$, alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}[X_t \geq x] - \mathbb{P}[X_t^\varepsilon \geq x]| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma(\varepsilon).$$

2. Si X_t a une densité localement bornée, alors pour tout $q \in]0,1[$

$$|\mathbb{P}[X_t \geq x] - \mathbb{P}[X_t^\varepsilon \geq x]| \leq C_{x,t,q} \sigma_0(\varepsilon)^{1-q}.$$

3. Si M_t a une densité localement bornée sur $(0, +\infty)$, alors pour tout $q \in]0,1[$

$$|\mathbb{P}[M_t \geq x] - \mathbb{P}[M_t^\varepsilon \geq x]| \leq C_{x,t,q} \sigma_0(\varepsilon)^{1-q}.$$

Où $C_{x,t,q}$ désigne une constante ne dépendant que de x, q et t.

Démonstration de la proposition 4.14. On a

$$|\mathbb{P}[X_t \geq x] - \mathbb{P}[X_t^\varepsilon \geq x]| = |\mathbb{P}[X_t \geq x, X_t^\varepsilon < x] - \mathbb{P}[X_t < x, X_t^\varepsilon \geq x]|.$$

Or, dans le cas $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t \geq x, X_t^\varepsilon < x] &= \mathbb{P}[x - (X_t - X_t^\varepsilon) \leq X_t^\varepsilon < x] \\ &= \mathbb{P}[x - R_t^\varepsilon \leq \sigma B_t + (X_t^\varepsilon - \sigma B_t) < x]. \end{aligned}$$

Par construction, les v.a. σB_t, $(X_t^\varepsilon - \sigma B_t)$ et R_t^ε sont indépendants. Remarquons que $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma}$ est un majorant de la densité de σB_t, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t \geq x, X_t^\varepsilon < x] &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \mathbb{E}|R_t^\varepsilon| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \sqrt{\mathbb{E}|R_t^\varepsilon|^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma(\varepsilon). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t < x, X_t^\varepsilon \geq x] &= \mathbb{P}[x \leq X_t^\varepsilon < x + (X_t - X_t^\varepsilon)] \\ &= \mathbb{P}[x \leq \sigma B_t + (X_t^\varepsilon - \sigma B_t) < x + R_t^\varepsilon] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma(\varepsilon). \end{aligned}$$

Donc

$$|\mathbb{P}[X_t \geq x] - \mathbb{P}[X_t^\varepsilon \geq x]| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma(\varepsilon).$$

Regardons maintenant la deuxième partie de la proposition. Par la proposition 4.12, il existe une constante $K_{x,t} > 0$ telle que pour tout $p > 1$, on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}[X_t \geq x] - \mathbb{P}[X_t^\varepsilon \geq x]| &\leq K_{x,t}\delta + \frac{\mathbb{E}|X_t - X_t^\varepsilon|^p}{\delta^p} \\ &= K_{x,t}\delta + \frac{\mathbb{E}|R_t^\varepsilon|^p}{\delta^p}. \end{aligned}$$

Or par la proposition 4.2, il existe une constante $K_{p,t} > 0$ telle que

$$\mathbb{E}|R_t^\varepsilon|^p \leq K_{p,t} \sigma_0(\varepsilon)^p.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}[X_t \geq x] - \mathbb{P}[X_t^\varepsilon \geq x]| &\leq K_{x,t}\delta + K_{p,t}\frac{\sigma_0(\varepsilon)^p}{\delta^p} \\
&\leq \max(K_{x,t}, K_{p,t})\left(\delta + \frac{\sigma_0(\varepsilon)^p}{\delta^p}\right) \\
&\leq \max(K_{x,t}, K_{p,t})\,\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{p}{p+1}}, \textit{en choisissant } \delta = \sigma(\varepsilon)^{\frac{p}{p+1}}.
\end{aligned}$$

Et par suite pour tout $q \in]0,1[$, on a

$$|\mathbb{P}[X_t \geq x] - \mathbb{P}[X_t^\varepsilon \geq x]| \leq C_{x,t,q}\sigma(\varepsilon)^{1-q}.$$

Notons maintenant

$$I = |\mathbb{P}[M_t \geq x] - \mathbb{P}[M_t^\varepsilon \geq x]|.$$

Par la proposition 4.12, il existe une constante $K'_{x,t} > 0$ telle que

$$I \leq K'_{x,t}\delta + \frac{\mathbb{E}(M_t - M_t^\varepsilon)^p}{\delta^p}.$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t - M_t^\varepsilon)^p &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s - X_s^\varepsilon|\right)^p \\
&\leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|R_s^\varepsilon|\right)^p \\
&\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|R_t^\varepsilon|^p, \text{ par Doob} \\
&\leq K_{p,t}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sigma_0(\varepsilon)^p, \quad \text{par ce qui précède.}
\end{aligned}$$

Et par suite

$$I \leq \max\left(K'_{x,t}, K_{p,t}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\right)\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{p}{p+1}}, \text{ en prenant } \delta = \sigma(\varepsilon)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Donc pour $q \in]0,1[$, on a

$$I \leq C_{x,t,q}\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}.$$

◇

Proposition 4.15 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) de carré intégrable, $x > 0$, $\varepsilon \in (0,1]$ et $t > 0$. On suppose que $\sigma > 0$ ou (2.1.2) est vérifié. On note $\alpha > 0$ le réel défini dans le lemme 2.20. Alors pour tout $\theta > 0$*

$$|\mathbb{P}[M_t \geq x] - \mathbb{P}[M_t^\varepsilon \geq x]| \leq C_\theta \sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha}{(1+\theta)\alpha+1}}.$$

Si $\sigma > 0$ alors

$$|\mathbb{P}[M_t \geq x] - \mathbb{P}[M_t^\varepsilon \geq x]| \leq C\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{2}{3}}.$$

Les constantes C et C_θ sont indépendantes de ε.

La condition $\sigma > 0$ ou (2.1.2) nous assure en fait que la loi de M_t est localement Hölderienne, comme le montre le résultat suivant.

Lemme 4.16 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) de carré intégrable, $x > 0$, $\delta > 0$ et $t > 0$. On suppose que $\sigma > 0$ ou (2.1.2) est vérifié. On note $\alpha > 0$ Le réel défini dans le lemme 2.20. Alors*

$$\mathbb{P}\left[x \leq M_t \leq x + \delta\right] \leq C\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Et de plus si $\sigma > 0$ alors

$$\mathbb{P}\left[x \leq M_t^{\varepsilon} \leq x + \delta\right] \leq C\delta^{\frac{2}{3}},$$

où C designe une constante indépendante de δ (et de ε dans le deuxième cas, mais dépendant de x) qu'on explicitera dans la démonstration.

Démonstration du lemme 4.16. On a

$$\mathbb{P}\left[x \leq M_t \leq x + \delta\right] \leq I_1 + I_2,$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{P}\left[x \leq \sup_{0 \leq s \leq \theta} X_s \leq x + \delta\right] \\ I_2 &= \mathbb{P}\left[x \leq \sup_{\theta \leq s \leq t} X_s \leq x + \delta\right], \end{aligned}$$

avec $\theta \in [0, t]$. On a d'une part

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq s \leq \theta} X_s \geq x\right] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left|\sup_{0 \leq s \leq \theta} X_s\right|^2}{x^2} \\ &\leq \frac{8}{x^2}\left(\gamma^2\theta^2 + \sigma^2\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq \theta} B_s\right)^2 + \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq \theta} X_s^l\right)^2 + \mathbb{E}\sup_{0 \leq s \leq \theta}\left|\tilde{X}_\theta^0\right|^2\right) \\ &\leq \frac{8}{x^2}\left(\gamma^2\theta^2 + \sigma^2\theta + \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq \theta} X_s^l\right)^2 + 4\theta\int_{|y| \leq 1} y^2\nu(dy)\right). \end{aligned}$$

Dans l'avant dernière inégalité, on utilise l'inégalité de Doob. D'autre part, on a

$$X_s^l = \sum_{i=1}^{N_s} Y_i$$

Où N est un processus de Poisson de paramètre $\lambda = \int_{|x|>1} \nu(dx)$ et les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont des v.a. i.i.d. de loi commune $\frac{\nu_1(dx)}{\lambda}$, avec ν_1 la restriction de ν sur $(1, +\infty)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq \theta} X_s^l\right)^2 &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_\theta} |Y_i|\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^n}{n!}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |Y_i|\right)^2 \\ &\leq e^{-\lambda\theta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda\theta)^n}{n!}2^{n-1}\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} |Y_i|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le\theta} X^l_s\right)^2 &\le \lambda\theta e^{-\lambda\theta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2\lambda\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{E}|Y_1|^2\\ &= \lambda\theta e^{\lambda\theta}\mathbb{E}|Y_1|^2\\ &= \theta e^{\lambda\theta}\int_{|y|>1} y^2\nu(dy).\end{aligned}$$

On pose

$$c_1 = 8\left(\gamma^2 t + \sigma^2 + e^{\lambda t}\int_{|y|>1} y^2\nu(dy) + 4\int_{|y|\le 1} y^2\nu(dy)\right).$$

Donc

$$I_1 \le \frac{c_1}{x^2}\theta.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}I_2 &\le \mathbb{P}\left[x \le \left(\sup_{\theta\le s\le t} X_s - X_\theta\right) + X_\theta \le x+\delta\right]\\ &\le \frac{c_2}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\delta,\end{aligned}$$

avec $c_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-c|u|^\alpha}du\right)\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$ (voir le lemme 2.21). D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[x \le M_t \le x+\delta\right] &\le \max\left(\frac{c_1}{x^2}, c_2\right)\left(\theta + \frac{\delta}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\\ &\le 2\max\left(\frac{c_1}{x^2}, c_2\right)\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

On obtient la dernière inégalité en choisissant $\theta = \delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$. Dans le deuxième cas, on pose de même

$$I_1 = \mathbb{P}\left[x \le \sup_{0\le s\le\theta} X^\varepsilon_s \le x+\delta\right]$$

$$I_2 = \mathbb{P}\left[x \le \sup_{\theta\le s\le t} X^\varepsilon_s \le x+\delta\right].$$

Et on obtient, d'une part

$$I_1 \le \frac{8}{x^2}\left(\gamma^2\theta^2 + \sigma^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le\theta} B_s\right)^2 + \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le\theta} X^l_s\right)^2 + \mathbb{E}\sup_{0\le s\le\theta}\left|\tilde{X}^\varepsilon_s\right|^2\right).$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{0\le s\le\theta}\left|\tilde{X}^\varepsilon_s\right|^2 &\le \mathbb{E}\sup_{0\le s\le\theta}\left|\tilde{X}^0_s - R^\varepsilon_s\right|^2\\ &\le 4\mathbb{E}\left|\tilde{X}^0_\theta - R^\varepsilon_\theta\right|^2, \text{ par Doob}\\ &= 4\theta\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}|y|^2\nu(dy)\\ &\le 4\theta\int_{|y|\le 1}|y|^2\nu(dy).\end{aligned}$$

Donc

$$I_1 \le \frac{c_1}{x^2}\theta.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \mathbb{P}\left[x \leq \left(\sup_{\theta\leq s\leq t} X^\varepsilon_s - X^\varepsilon_\theta\right) + X^\varepsilon_\theta \leq x+\delta\right] \\ &\leq \frac{c_2}{\theta^{\frac{1}{2}}}\delta, \end{aligned}$$

avec $\alpha = 2$ dans ce cas. On obtient donc comme dans le premier cas

$$\mathbb{P}\left[x \leq M^\varepsilon_t \leq x+\delta\right] \leq 2\max\left(\frac{c_1}{x^2}, c_2\right)\delta^{\frac{2}{3}}.$$

◇

Démonstration de la proposition 4.15. Par le lemme 4.16 et la remarque 4.13, il existe une constante $K_{x,t} > 0$ telle que, pour tout $p > 0$, on a

$$\begin{aligned} I &:= \left|\mathbb{P}\left[M_t \geq x\right] - \mathbb{P}\left[M^\varepsilon_t \geq x\right]\right| \\ &\leq K_{x,t}\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \frac{\mathbb{E}\left(M_t - M^\varepsilon_t\right)^p}{\delta^p}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(M_t - M^\varepsilon_t\right)^p &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s - X^\varepsilon_s\right|\right)^p \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|R^\varepsilon_s\right|\right)^p \\ &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left|R^\varepsilon_t\right|^p, \text{ par Doob.} \end{aligned}$$

Par la proposion 4.2, on sait qu'il existe une constante $K_{p,t} > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\left|R^\varepsilon_t\right|^p \leq K_{p,t}\sigma_0(\varepsilon)^p.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(M_t - M^\varepsilon_t\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p K_{p,t}\sigma_0(\varepsilon)^p.$$

D'où

$$\begin{aligned} I &\leq \max\left(K_{x,t}, K_{p,t}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\right)\left(\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \frac{\sigma_0(\varepsilon)^p}{\delta^p}\right) \\ &= 2\max\left(K_{x,t}, K_{p,t}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\right)\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha p}{\alpha(p+1)+p}}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en choisissant $\delta = \sigma_0(\varepsilon)^{\frac{(\alpha+1)p}{\alpha(p+1)+p}}$. Par la suite on notera par C toute constante ne dépendant pas de ε. Dans le deuxième cas on notera qu'on peut écrire I sous la forme

$$I := \left|\mathbb{P}\left[x - (M^\varepsilon_t - M^\varepsilon_t) \leq M^\varepsilon_t < x\right] - \mathbb{P}\left[x \leq M^\varepsilon_t < x - (M^\varepsilon_t - M^\varepsilon_t)\right]\right|.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[x - (M^\varepsilon_t - M^\varepsilon_t) \leq M^\varepsilon_t < x\right] &\leq \mathbb{P}\left[x - \sup_{0\leq s\leq t}\left|R^\varepsilon_s\right| \leq M^\varepsilon_t < x\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|R^\varepsilon_s\right|\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}, \text{ par le lemme 4.16} \\ &\leq C\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|R^\varepsilon_s\right|\right)^{\alpha+1}\right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}} \\ &\leq C\left(\mathbb{E}\left(\left|R^\varepsilon_t\right|\right)^{\alpha+1}\right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}}, \text{ par Doob} \\ &\leq C\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}, \text{ par la proposition 4.2.} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire que

$$\mathbb{P}\left[x \leq M_t^\varepsilon < x - (M_t^\varepsilon - M_t^\varepsilon)\right] \quad \leq \quad C\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Et donc

$$I \quad \leq \quad C\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Notons que dans le cas $\sigma > 0$, on a $\alpha = 2$. D'où

$$I \quad \leq \quad C\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{2}{3}}.$$

◇

4.3 Approximation des petits sauts par un mouvement Brownien

Cette deuxième approche consite à remplacer R^ε par un mouvement Brownien. Cette technique se révèle particulièrement efficace, sous réserve de la condition de convergence que nous allons énoncer. En effet Asmussen et Rosinski (2001) ont montré que si X est un processus de Lévy, alors le processus $\sigma(\varepsilon)^{-1}R^\varepsilon$ converge en loi vers un mouvement Brownien standard, lorsque ε tend vers 0, si et seulement si pour tout $k > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma\left(k\sigma(\varepsilon) \wedge \varepsilon\right)}{\sigma\left(\varepsilon\right)} = 1. \tag{4.3.2}$$

Une condition suffisante pour que ce résultat soit vérifié est que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty. \tag{4.3.3}$$

Les conditions (4.3.2) et (4.3.3) sont équivalentes si ν n'a pas d'atome dans un certain voisinage de 0 (*[Asmussen-Rosinski (2001), proposition 2.1]*).

4.3.1 Estimation des fonctions régulières

Les contôles d'erreur dans le cas des approximations des petits sauts n'ont pas beaucoup étaient étudiés dans la littérature, du moins d'un point de vue théorique. On peut cependant citer un résultat de *[Cont-Tankov (2004)]* allant dans ce sens. Pour un processus de Lévy X, si on définit

$$\begin{aligned} \hat{X}^\varepsilon &= X^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W} \\ \hat{M}_t^\varepsilon &= \sup_{0\leq s\leq t} \hat{X}_s^\varepsilon, \ \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

où $\hat{W}$ est un mouvement Brownien standard indépendant de X (donc de X^ε). Alors (*[Cont-Tankov, proposition 6.2]*), si f est une fonction dérivable vérifiant $|f^{'}| < C$ pour une certaine constante $C > 0$, on a

$$\left|\mathbb{E}f\left(X_t\right) - \mathbb{E}f\left(\hat{X}_t^\varepsilon\right)\right| \leq AC\rho(\varepsilon)\sigma(\varepsilon),$$

où $\rho(\varepsilon) = \frac{\int_{|x|\leq\varepsilon} x^3\nu(dx)}{\sigma(\varepsilon)^3}$ et A est une constante qui vérifie $A < 16.5$.

Si on demande plus de régularité à la fonction f (deux fois dérivable), on obtient un résultat particulièrement intéréssant.

Proposition 4.17 *Soient X un processus de Lévy de triplet $\left(\gamma, \sigma^2, \nu\right)$ à activité infinie, $t > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec une dérivée seconde bornée, alors on a*

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) - f\left(\hat{X}_t^\varepsilon\right)\right) = o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

Démonstration de la proposition 4.17. Par la proposition 4.3, on a

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)=\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{2}\mathbb{E}f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)+o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

D'autre part par le théorème de Taylor avec reste intégrale, on a

$$\begin{aligned}
f\left(\hat{X}_t^{\varepsilon}\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right) &= \mathbb{E}f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t+\int_{X_t^{\varepsilon}}^{X_t^{\varepsilon}+\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t} f^{''}(x)\,(X_t^{\varepsilon}+\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t-x)dx \\
&= \mathbb{E}f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t+\int_0^1 f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)(1-\theta)\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)^2 d\theta \\
&= \int_0^1 f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)(1-\theta)\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)^2 d\theta \\
&= \int_0^1 f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)(1-\theta)\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)^2 d\theta \\
&\quad +\int_0^1\left(f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)(1-\theta)\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)^2 d\theta.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(f\left(\hat{X}_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right) = \frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{2}\mathbb{E}f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)+\int_0^1\mathbb{E}\left(f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)(1-\theta)\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)^2 d\theta.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right|\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)^2 &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)^2}\sqrt{\mathbb{E}\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)^4} \\
&\leq \sqrt{3\mathbb{E}\left(f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)^2}\sigma_0(\varepsilon)^2 t.
\end{aligned}$$

On a, par convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)^2 = 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t^{\varepsilon}+\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right)=\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{2}\mathbb{E}f^{''}\left(X_t^{\varepsilon}\right)+o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(\hat{X}_t^{\varepsilon}\right)\right)=o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

◇

Comme dans la partie précédente, on peut relâcher la condition de la bornitude de la dérivée seconde, et la remplacer par une condition d'uniforme intégrabilité.

Proposition 4.18 *Soient X un processus de Lévy de triplet $\left(\gamma,\sigma^2,\nu\right)$ à activité infinie et $t>0$,*

1. *Si f est une fonction $C^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right|<\infty$ et si il existe $\beta>0$ telles que $\left(\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)-f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right|^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$ et $\left(\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}+\theta R_t^{\varepsilon}\right)-f^{'}\left(X_t^{\varepsilon}\right)\right|^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$ soient finies et intégrables par rapport à θ sur $[0,1]$, alors on a*

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)-f\left(\hat{X}_t^{\varepsilon}\right)\right)=o\left(\sigma_0(\varepsilon)\right).$$

2. *Si f est une fonction $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbb{E}\left|f^{'}\left(X_t^\varepsilon\right)\right| + \mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right| < \infty$, et si il existe $\beta > 0$ telles que $\left(\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right) - f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$ et $\left(\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \mathbb{E}\left|f^{''}\left(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon\right) - f^{''}\left(X_t^\varepsilon\right)\right|^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$ soient finies et intégrables par rapport à θ sur $[0,1]$, alors on a*

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right) - f\left(\hat{X}_t^\varepsilon\right)\right) = o\left(\sigma_0(\varepsilon)^2\right).$$

La démonstration est similaire à celle des proposition 4.3 et 4.17. On remplacera les inégalité de Cauchy-Schwartz par les inégalités de Hölder. En combinant l'estimation de la proposition 6.2 de [16] et l'identité de Spitzer, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.19 *Soient X un processus de Lévy intégrable de triplet (γ, σ^2, ν) vérifiant $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$, on a alors*

$$\left|\mathbb{E}M_t - \mathbb{E}\hat{M}_t^\varepsilon\right| \leq 4\max\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}, A\right)\sigma(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\left(1 + \log\left(\frac{\sqrt{t}}{2\rho(\varepsilon)}\right)\right),$$

où A est une constante < 16.5.

Démonstration de la proposition 4.19. Par la proposition 3.2 on sait que

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} X_s = \int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s}ds$$
$$\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right) = \int_0^t \frac{\mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+}{s}ds.$$

Notons

$$I^\varepsilon = \left|\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} X_s - \mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)\right|.$$

Soit $\delta > 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
I^\varepsilon &= \left|\int_0^t \frac{\mathbb{E}X_s^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+}{s}ds\right| \\
&= \left|\int_0^\delta \frac{\mathbb{E}X_s^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+}{s}ds + \int_\delta^t \frac{\mathbb{E}X_s^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+}{s}ds\right| \\
&\leq \left|\int_0^\delta \frac{\mathbb{E}X_s^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+}{s}ds\right| + \left|\int_\delta^t \frac{\mathbb{E}X_s^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+}{s}ds\right| \\
&\leq \int_0^\delta \left|\mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + R_s^\varepsilon\right)^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+\right|\frac{ds}{s} + \int_\delta^t \left|\mathbb{E}X_s^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+\right|\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

On notera I_1^ε (resp. I_2^ε) le premier (resp. le deuxième) terme de la dernière expression. la fonction $x \to x^+$ étant lipschitzienne de coefficient 1, donc par *[Cont-Tankov(2004), proposition 6.2]* , on a

$$\left|\mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + R_s^\varepsilon\right)^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+\right| \leq A\sigma(\varepsilon)\rho(\varepsilon),$$

où $A < 16.5$. Donc

$$\begin{aligned} I_2^\varepsilon &\le A\sigma(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\int_\delta^t \frac{ds}{s} \\ &= A\sigma(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\log\left(\frac{t}{\delta}\right). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\,(X_s^\varepsilon + R_s^\varepsilon)^+ - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+\right| &\le \mathbb{E}\left|(X_s^\varepsilon + R_s^\varepsilon)^+ - \left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)^+\right| \\ &\le \mathbb{E}\left|(X_s^\varepsilon + R_s^\varepsilon) - \left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)\right| \\ &= \mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon - \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right| \\ &\le \mathbb{E}\,|R_s^\varepsilon| + \sigma(\varepsilon)\mathbb{E}\left|\hat{W}_s\right| \\ &\le \sqrt{\mathbb{E}\,|R_s^\varepsilon|^2} + \sigma(\varepsilon)\mathbb{E}\left|\hat{W}_s\right| \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sqrt{s}\sigma(\varepsilon). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon &\le \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sigma(\varepsilon)\int_0^\delta \frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &= 2\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sigma(\varepsilon)\sqrt{\delta} \\ &= A_1\sigma(\varepsilon)\sqrt{\delta},\ \textit{avec}\ A_1 = 2\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right). \end{aligned}$$

Et en définitive on a

$$I^\varepsilon \le A \vee A_1\sigma(\varepsilon)\left(\sqrt{\delta} + \rho(\varepsilon)\log\left(\frac{t}{\delta}\right)\right).$$

Le terme à droite de l'inégalité est minimal pour $\delta = 4\rho(\varepsilon)^2$. Donc

$$I^\varepsilon \le 2A \vee A_1\sigma(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\left(1 + \log\left(\frac{\sqrt{t}}{2\rho(\varepsilon)}\right)\right).$$

D'où la proposition. ◇

4.3.2 Estimation par plongement de Skorokhod

On va utiliser un outil assez puissant pour démontrer les résultats de ce paragraphe, c'est le théorème de plongement de Skorokhod. Enonçons maintenant quelques notations qui nous serons utiles par la suite. Rappelons d'abord que

$$\beta(\varepsilon) = \frac{\int_{|x|<\varepsilon} x^4\nu(dx)}{(\sigma_0(\varepsilon))^4}$$

Définition 4.20 *On note*

$$\begin{aligned}
\beta_1(\varepsilon) &= \beta(\varepsilon)^{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{\log\left(\frac{t}{\beta(\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}+3\right)}+1\right)\\
\beta_2(\varepsilon) &= \beta(\varepsilon)^{\frac{1}{4}}\left(\log\left(\frac{t}{\beta(\varepsilon)^{\frac{1}{4}}}+3\right)+1\right)\\
\beta_{p,\theta}(\varepsilon) &= \beta(\varepsilon)^{\frac{p\theta}{p+4\theta}}\left(\log\left(\frac{1}{\beta(\varepsilon)^{\frac{p\theta}{p+4\theta}}}\right)\right)^p.
\end{aligned}$$

Remarque 4.21 *On notera que sous la condition* (4.3.3)*, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta(\varepsilon) = 0. \tag{4.3.4}$$

La démonstration de la proposition 4.19 ne peut plus être étendu au cas des fonctions lipschitziennes, car l'identité de spitzer ne peut être appliquée. Nous allons alors utiliser une autre méthode.

Théorème 4.22 *Soient X un processus de Lévy intégrable de triplet (γ,σ^2,ν) vérifiant $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$, $\varepsilon \in]0,1]$, $t > 0$ et f une fonction lipschitzienne, on a alors*

$$\left|\mathbb{E}f\left(M_t\right) - \mathbb{E}f\left(\hat{M}_t^\varepsilon\right)\right| \leq C\sigma_0(\varepsilon)\beta_1(\varepsilon),$$

où C designe une constante indépendante de ε qu'on explicitera dans la démonstration.

Démonstration du théorème 4.22. Notons

$$\begin{aligned}
I_f^\varepsilon &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s\right) - f\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left(X_s^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_s\right)\right)\right)\right|\\
I_f^\varepsilon(n) &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\sup_{0\leq k\leq n} X_{\frac{kt}{n}}\right) - f\left(\sup_{0\leq k\leq n}\left(X_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kt}{n}}\right)\right)\right)\right|.
\end{aligned}$$

La fonction f étant lipschitzienne (de constante K), on a

$$\begin{aligned}
I_f^\varepsilon(n) &\leq K\mathbb{E}\left|\sup_{0\leq k\leq n} X_{\frac{kt}{n}} - \sup_{0\leq k\leq n}\left(X_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kt}{n}}\right)\right|\\
&= K\mathbb{E}\left|\sup_{0\leq k\leq n}\left(X_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon + R_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon\right) - \sup_{0\leq k\leq n}\left(X_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kt}{n}}\right)\right|\\
&\leq K\mathbb{E}\sup_{0\leq k\leq n}\left|R_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon - \sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kt}{n}}\right|\\
&\leq K\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq k\leq n}\left|R_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon\right| + \sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq k\leq n}\left|\hat{W}_{\frac{kt}{n}}\right|\right)\\
&\leq K\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|R_s^\varepsilon\right| + \sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq s\leq t}\left|\hat{W}_s\right|\right).
\end{aligned}$$

La dernière expression étant intégrable, par convergence dominée on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_f^\varepsilon(n) = I_f^\varepsilon.$$

On va donc s'intéresser à $I_f^\varepsilon(n)$. On sait que pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$R_{\frac{kt}{n}}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k} V_j^n,$$

où

$$V_j^n = \sqrt{n}\left(R^\varepsilon_{\frac{jt}{n}} - R^\varepsilon_{(j-1)\frac{t}{n}}\right).$$

Les v.a. $\left(V_j^n\right)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ sont i.i.d. et de même loi que $\sqrt{n}R^\varepsilon_{\frac{t}{n}}$. Or $\mathbb{E}V_1 = 0$, et $var\,(V_1) = \sigma(\varepsilon)^2 t$, donc par le théorème de Skorokhod ([Skorokhod (1965), Theorem 1, pp. 163]), il existe des v.a. positives i.i.d., $(\tau_j)_{j\in 1,\dots,n}$, et un mouvement Brownien standard, $\hat{B}$, tels que $\left(\sum_{j=1}^k V_j^n, k\in\{1,\dots,n\}\right)$ et $\left(\hat{B}_{\tau_1+\dots+\tau_k}, k\in\{1,\dots,n\}\right)$ ont la même loi jointe. Donc $\left(R^\varepsilon_{\frac{kt}{n}}, k\in\{1,\dots,n\}\right)$ et $\left(\hat{B}_{\frac{\tau_1+\dots+\tau_k}{n}}, k\in\{1,\dots,n\}\right)$ ont la même loi jointe. De plus

$$\mathbb{E}\tau_1 = var(V_1), \tag{4.3.5}$$

et pour tout $q \geq 1$, il existe une constante $L_q > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\tau_1^q \leq L_q \mathbb{E}V_1^{2q}. \tag{4.3.6}$$

On a également

$$\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kt}{n}}, k\in\{1,\dots,n\}\right) =^d \left(\hat{B}_{\frac{\sigma(\varepsilon)^2 kt}{n}}, k\in\{1,\dots,n\}\right).$$

Posons

$$T_k = \frac{\tau_1+\dots+\tau_k}{n}$$
$$T_k^\varepsilon = \frac{\sigma(\varepsilon)^2 kt}{n}.$$

On a alors

$$I_f^\varepsilon(n) \quad\leq\quad K\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|.$$

Le théorème suivant conclut la démonstration. ◇

Théorème 4.23 *1. On a*

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right| \leq C\sigma_0(\varepsilon)\beta_1(\varepsilon).$$

2. Et

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^2 \leq C\sigma_0(\varepsilon)^2\beta_2(\varepsilon).$$

3. Pour tout réel $p\geq 1$ et pour tout $\theta\in]0,1[$, on a

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^p \leq C_{p,\theta}\sigma_0(\varepsilon)^p\beta_{p,\theta}(\varepsilon).$$

Où C et $C_{p,\theta}$ désignent des constantes indépendantes de ε que l'on déterminera dans la démonstration.

Ce théorème est le résultat principal de cette partie. L'autre outil important dont nous aurons besoin par la suite est le lemme suivant.

Lemme 4.24 *Soit $\delta > 0$, on a*

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right] \quad\leq\quad \frac{4L_2 t\sigma_0(\varepsilon)^4\beta(\varepsilon)}{\delta^2}.$$

Démonstration du lemme 4.24. On a

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right] \leq \frac{\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon|^2}{\delta^2} \text{ par Markov.}$$

D'autre part $(T_k - T_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ est une martingale, donc par Doob on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right] &\leq \frac{4\mathbb{E}\,|T_n - T_n^\varepsilon|^2}{\delta^2} \\
&\leq \frac{4}{\delta^2}\frac{var\,(\tau_1)}{n} \\
&\leq \frac{4}{\delta^2}\frac{\mathbb{E}\tau_1^2}{n} \\
&\leq \frac{4L_2\mathbb{E}V_1^4}{n\delta^2},\ \text{par (4.3.6)} \\
&= \frac{4L_2 n\mathbb{E}\left(R^\varepsilon_{\frac{t}{n}}\right)^4}{\delta^2}.
\end{aligned}$$

Or par la proposition 4.2

$$\mathbb{E}\left|R^\varepsilon_{\frac{t}{n}}\right|^4 = \frac{t}{n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^4\nu(dx) + 3\left(\frac{t}{n}\sigma(\varepsilon)^2\right)^2.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{E}\left(R^\varepsilon_{\frac{t}{n}}\right)^4 = t\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}|x|^4\nu(dx).$$

Et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{E}\left(R^\varepsilon_{\frac{t}{n}}\right)^4 = \sigma_0(\varepsilon)^4\beta(\varepsilon)t. \tag{4.3.7}$$

Donc

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right] \leq \frac{4L_2 t\sigma_0(\varepsilon)^4\beta(\varepsilon)}{\delta^2}.$$

◇

Démonstration du théorème 4.23. On a, pour $\delta > 0$ fixé,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right| &\leq \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon|\leq\delta\}} \\
&\quad +\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon|>\delta\}}.
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon|\leq\delta\}} \\
I_2 &= \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon|>\delta\}}.
\end{aligned}$$

Sur $\{\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| \leq \delta\}$, notons, pour k fixé

$$\begin{aligned}
s_1 &= T_k^\varepsilon \wedge T_k \\
s_2 &= T_k^\varepsilon \vee T_k.
\end{aligned}$$

On a $s_1 \leq s_2 \leq s_1 + \delta$. Soit j tel que $j\delta \leq s_1 < (j+1)\delta$. On a $s_1 \leq s_2 \leq (j+2)\delta$.
Si $j\delta \leq s_1 \leq s_2 \leq (j+1)\delta$ on a

$$\begin{aligned} \left|\hat{B}_{s_1} - \hat{B}_{s_2}\right| &\leq \left|\hat{B}_{s_1} - \hat{B}_{j\delta}\right| + \left|\hat{B}_{j\delta} - \hat{B}_{s_2}\right| \\ &\leq 2 \sup_{0 \leq j \leq \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+1} \sup_{j\delta \leq u \leq (j+1)\delta} \left|\hat{B}_u - \hat{B}_{j\delta}\right|. \end{aligned}$$

Si $j\delta \leq s_1 \leq (j+1)\delta \leq s_2 \leq (j+2)\delta$ on a

$$\begin{aligned} \left|\hat{B}_{s_1} - \hat{B}_{s_2}\right| &\leq \left|\hat{B}_{s_1} - \hat{B}_{j\delta}\right| + \left|\hat{B}_{j\delta} - \hat{B}_{(j+1)\delta}\right| + \left|\hat{B}_{(j+1)\delta} - \hat{B}_{s_2}\right| \\ &\leq 3 \sup_{0 \leq j \leq \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+2} \sup_{j\delta \leq u \leq (j+1)\delta} \left|\hat{B}_u - \hat{B}_{j\delta}\right|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 3\mathbb{E} \sup_{0 \leq j \leq \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+2} \sup_{j\delta \leq u \leq (j+1)\delta} \left|\hat{B}_u - \hat{B}_{j\delta}\right| \\ &= 3\mathbb{E} \sup_{1 \leq j \leq \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3} \sup_{(j-1)\delta \leq u \leq j\delta} \left|\hat{B}_u - \hat{B}_{j\delta}\right|. \end{aligned}$$

Les v.a. $\left(\sup_{(j-1)\delta \leq u \leq j\delta} \left|\hat{B}_u - \hat{B}_{j\delta}\right|\right)_{1 \leq j \leq \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3}$ sont i.i.d. de même loi que $\sup_{0 \leq u \leq \delta} \left|\hat{B}_u\right| \sim \sqrt{\delta} \sup_{0 \leq u \leq 1} \left|\hat{B}_u\right|$. On a alors

$$I_1 \leq 3\sqrt{\delta}\mathbb{E} \sup_{1 \leq j \leq \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3} V_j,$$

avec $(V_j)_{1 \leq j \leq \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3}$ des v.a. i.i.d. de même loi que $\sup_{0 \leq u \leq 1} \left|\hat{B}_u\right|$. D'autre part, on sait que si on a $(V_j)_{1 \leq j \leq m}$ des v.a. i.i.d. vérifiant $\mathbb{E}e^{\alpha V_1^2} < \infty$ avec $\alpha > 0$, alors

$$\mathbb{E} \sup_{1 \leq j \leq m} V_j \leq g\left(m\mathbb{E}e^{\alpha V_1^2}\right),$$

avec $g : x \in [1, +\infty) \to \sqrt{\frac{1}{\alpha}\log(x)}$. En effet g étant concave, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{1 \leq j \leq m} V_j &= \mathbb{E} \sup_{1 \leq j \leq m} g\left(e^{\alpha V_j^2}\right) \\ &= \mathbb{E}g\left(\sup_{1 \leq j \leq m} e^{\alpha V_j^2}\right), \text{ car g est croissante} \\ &\leq g\left(\mathbb{E} \sup_{1 \leq j \leq m} e^{\alpha V_j^2}\right), \text{ par Jensen} \\ &\leq g\left(\mathbb{E}\sum_{j=1}^{m} e^{\alpha V_j^2}\right), \text{ car g est croissante} \\ &\leq g\left(m\mathbb{E}e^{\alpha V_1^2}\right). \end{aligned}$$

Dans notre cas $V_1 = \sup_{0\le u\le 1}\left|\hat{B}_u\right|$. Donc

$$\begin{aligned}
& V_1 \le \sup_{0\le u\le 1}\hat{B}_u + \sup_{0\le u\le 1}\left(-\hat{B}_u\right) \\
& \Rightarrow V_1^2 \le 2\left(\left(\sup_{0\le u\le 1}\hat{B}_u\right)^2 + \left(\sup_{0\le u\le 1}\left(-\hat{B}_u\right)\right)^2\right) \\
& \Rightarrow e^{\alpha V_1^2} \le e^{2\alpha\left(\left(\sup_{0\le u\le 1}\hat{B}_u\right)^2+\left(\sup_{0\le u\le 1}\left(-\hat{B}_u\right)\right)^2\right)} \\
& \Rightarrow \mathbb{E}e^{\alpha V_1^2} \le \left(\mathbb{E}e^{4\alpha\left(\sup_{0\le u\le 1}\hat{B}_u\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}e^{4\alpha\left(\sup_{0\le u\le 1}\left(-\hat{B}_u\right)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \Rightarrow \mathbb{E}e^{\alpha V_1^2} \le \mathbb{E}e^{4\alpha\left(\sup_{0\le u\le 1}\hat{B}_u\right)^2}.
\end{aligned}$$

Or la densité de $\sup_{0\le u\le 1}\hat{B}_u$ est $2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{x\ge 0}$, donc un calcul simple nous donne que pour tout $\beta < \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}e^{\beta\left(\sup_{0\le u\le 1}\hat{B}_u\right)^2} = (1-2\beta)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.3.8}$$

Donc en choisissant $\alpha < \frac{1}{8}$, on obtient

$$\mathbb{E}e^{\alpha V_1^2} \le (1-8\alpha)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'où pour $\alpha \in (0, \frac{1}{8})$

$$\begin{aligned}
I_1 &\le 3\sqrt{\delta}\sqrt{\frac{1}{\alpha}\log\left(\left(\left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3\right)\mathbb{E}e^{\alpha V_1^2}\right)} \\
&\le 3\sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\log\left(\mathbb{E}e^{\alpha V_1^2}\right)}{\log(3)}\right)}\sqrt{\delta\log\left(\left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3\right)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &\le 3\sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\log(1-8\alpha)}{2\log(3)}\right)}\sqrt{\delta\log\left(\left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3\right)} \\
&= C_\alpha\sqrt{\delta\log\left(\left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3\right)} \\
&\le C_\alpha\sqrt{\delta\log\left(\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}+3\right)}.
\end{aligned}$$

On notera que $C_\alpha = 3\sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\log(1-8\alpha)}{2\log(3)}\right)}$ et que la deuxième inégalité provient du fait que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ on a $\log(x+3)+y \le \left(1+\frac{y}{\log(3)}\right)\log(x+3)$. Regardons maintenant le cas de I_2.

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \left(\mathbb{E}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k}-\hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\le k\le n}|T_k-T_k^\varepsilon|>\delta\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\mathbb{E}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k}\right|+\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\le k\le n}|T_k-T_k^\varepsilon|>\delta\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\left(\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbb{P}\left[\sup_{0\le k\le n}|T_k-T_k^\varepsilon|>\delta\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left(\left(\mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| R^{\varepsilon}_{\frac{kt}{n}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^2 \frac{kt}{n}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbb{P} \left[\sup_{0\leq k\leq n} |T_k - T_k^{\varepsilon}| > \delta \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left(\mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq t} |R^{\varepsilon}_s|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E} \sup_{0\leq s\leq \sigma(\varepsilon)^2 t} \left| \hat{B}_s \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbb{P} \left[\sup_{0\leq k\leq n} |T_k - T_k^{\varepsilon}| > \delta \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \left(\left(\mathbb{E} \left| R^{\varepsilon}_t \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E} \left| \hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^2 t} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbb{P} \left[\sup_{0\leq k\leq n} |T_k - T_k^{\varepsilon}| > \delta \right] \right)^{\frac{1}{2}} \text{ par Doob.}
\end{aligned}$$

D'où

$$I_2 \leq 4\sqrt{t}\sigma(\varepsilon) \left(\mathbb{P} \left[\sup_{1\leq k\leq n} |T_k - T_k^{\varepsilon}| > \delta \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or par le lemme 4.24, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P} \left[\sup_{0\leq k\leq n} |T_k - T_k^{\varepsilon}| > \delta \right] \leq \frac{4L_2 t \sigma_0(\varepsilon)^4 \beta(\varepsilon)}{\delta^2}.$$

Donc

$$\limsup_{n\to+\infty} I_2 \leq 4\sqrt{t}\sigma(\varepsilon) \left(\frac{4L_2 t \sigma_0(\varepsilon)^4 \beta(\varepsilon)}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^{\varepsilon}} \right| &\leq C_\alpha \sqrt{\delta \log\left(\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta} + 3 \right)} + \frac{8\sqrt{L_2} t}{\delta} \sigma(\varepsilon) \sigma_0(\varepsilon)^2 \sqrt{\beta(\varepsilon)} \\
&\leq C_\alpha \sqrt{\delta \log\left(\frac{\sigma_0(\varepsilon)^2 t}{\delta} + 3 \right)} + \frac{8\sqrt{L_2} t}{\delta} \sigma_0(\varepsilon)^3 \sqrt{\beta(\varepsilon)} \\
&= C_{\alpha,t} \left(\sqrt{\delta \log\left(\frac{\sigma_0(\varepsilon)^2 t}{\delta} + 3 \right)} + \frac{1}{\delta} \sigma_0(\varepsilon)^3 \sqrt{\beta(\varepsilon)} \right),
\end{aligned}$$

avec $C_{\alpha,t} = \max\left(C_\alpha, 8\sqrt{L_2} t\right)$. En choisissant $\delta = \sigma_0(\varepsilon)^2 \beta(\varepsilon)^{\frac{1}{3}}$, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^{\varepsilon}} \right| \leq C_{\alpha,t} \sigma_0(\varepsilon) \beta(\varepsilon)^{\frac{1}{6}} \left(\sqrt{\log\left(\frac{t}{\beta(\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} + 3 \right)} + 1 \right).$$

Pour la deuxième partie du théorème, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^{\varepsilon}} \right|^2 &\leq \mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^{\varepsilon}} \right|^2 \mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n} |T_k - T_k^{\varepsilon}| \leq \delta\}} \\
&\quad + \mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^{\varepsilon}} \right|^2 \mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n} |T_k - T_k^{\varepsilon}| > \delta\}},
\end{aligned}$$

avec $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On appelera I_1 (resp. I_2) le premier (resp. le deuxième) terme à droite de l'inégalité ci-dessus. Par le même raisonnement que pour $I_f^{\varepsilon}(n)$ (en prenant cette fois $g : x \in [1, +\infty) \to \frac{1}{\alpha}\log(x)$ et $\alpha \in (0, \frac{1}{8})$), on obtient

$$I_1 \leq C_\alpha \delta \log\left(\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta} + 3 \right),$$

avec $C_\alpha = 3^2 \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\log(1-8\alpha)}{2\log(3)}\right)$, et

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left(\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k}\right| + \sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k}\right|^4\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left(\left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|R^\varepsilon_{\frac{kt}{n}}\right|^4\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^4\frac{kt}{n}}\right|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2\left(\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left(\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}|R_s^\varepsilon|^4\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq \sigma(\varepsilon)^2 t}\left|\hat{B}_s\right|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2\left(\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\left(\mathbb{E}|R_t^\varepsilon|^4\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\mathbb{E}\left|\hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^2 t}\right|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2\left(\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{\frac{1}{2}} \text{ par Doob.}
\end{aligned}$$

Or par la proposition 4.2

$$\mathbb{E}|R_t^\varepsilon|^4 = t\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^4\nu(dx) + 3\left(t\sigma(\varepsilon)^2\right)^2,$$

et

$$\mathbb{E}\left|\hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^2 t}\right|^4 = 3\sigma(\varepsilon)^4 t^2.$$

On sait aussi par le lemme 4.24 que

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right] \leq \frac{4L_2 t\sigma_0(\varepsilon)^4\beta(\varepsilon)}{\delta^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} I_2 &\leq \sigma_0(\varepsilon)^2 t\left(\left(\frac{\beta(\varepsilon)}{t} + 3\right)^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right)^2\left(\frac{4L_2 t\sigma_0(\varepsilon)^4\beta(\varepsilon)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C_t}{\delta}\sigma_0(\varepsilon)^4\sqrt{\beta(\varepsilon)},
\end{aligned}$$

avec $C_t = \sqrt{L_2}t\left(\left(\frac{\sup_{0\leq\theta\leq 1}\beta(\theta)}{t} + 3\right)^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right)^2$. D'où

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^2 \leq C_{\alpha,t}\left(\delta\log\left(\frac{\sigma_0(\varepsilon)^2 t}{\delta} + 3\right) + \frac{1}{\delta}\sigma_0(\varepsilon)^4\sqrt{\beta(\varepsilon)}\right),$$

avec $C_{\alpha,t} = \max(C_\alpha, C_t)$. En choisissant $\delta = \sigma_0(\varepsilon)^2\beta(\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^2 \leq C_{\alpha,t}\sigma_0(\varepsilon)^2\beta(\varepsilon)^{\frac{1}{4}}\left(\log\left(\frac{t}{\beta(\varepsilon)^{\frac{1}{4}}} + 3\right) + 1\right).$$

Pour la troisième partie du lemme, on définit g comme suit

$$g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\log(x)\right)^p,$$

avec $\alpha > 0$. Ce qui nous donne

$$g^{''}(x) = \frac{p}{\alpha^p x^2}\left(\log(x)\right)^{p-2}\left(p-1-\log(x)\right).$$

La fonction g est concave sur $\left\{x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq e^{p-1}\right\}$. De plus g est croissante. Posons

$$I_1 = \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^p \mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon|\leq\delta\}}$$
$$I_2 = \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^p \mathbb{1}_{\{\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon|>\delta\}}.$$

On a alors (voir plus haut)

$$I_1 \leq 3^p\delta^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\sup_{1\leq j\leq\left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right]+3} V_j^p,$$

avec $m = \left[\frac{\sigma(\varepsilon)^2 t}{\delta}\right] + 3$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{1\leq j\leq m} V_j^p &= \mathbb{E}\sup_{1\leq j\leq m} g\left(e^{\alpha V_j}\right) \\
&= \mathbb{E}g\left(\sup_{1\leq j\leq m} e^{\alpha V_j}\right), \text{ car g est croissante} \\
&\leq \mathbb{E}g\left(\sup_{1\leq j\leq m} e^{\max(\alpha V_j, p-1)}\right), \text{ car g est croissante.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{1\leq j\leq m} V_j^p &\leq g\left(\mathbb{E}\sup_{1\leq j\leq m} e^{\max(\alpha V_j, p-1)}\right), \text{ par Jensen} \\
&\leq g\left(\mathbb{E}\sum_{j=1}^m e^{\max(\alpha V_j, p-1)}\right), \text{ car g est croissante} \\
&\leq g\left(m\mathbb{E}e^{\max(\alpha V_1, p-1)}\right).
\end{aligned}$$

Notons que $\mathbb{E}e^{\max(\alpha V_1, p-1)} < \infty$ pour tout $\alpha > 0$. Il existe une constante $C_{\alpha,p} > 0$ tel que

$$I_1 \leq C_{\alpha,p}\delta^{\frac{p}{2}}\left(\log\left(\frac{\sigma^2}{\delta}\right)\right)^p.$$

Soit $q > 1$, on pose $I^q = 1 - \frac{1}{q}$. Donc on a par Hölder

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left(\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\right)^{pq}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{I^q} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k}\right| + \sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|\right)^{qp}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{I^q} \\
&\leq \left(\left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k}\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}} + \left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}}\right)^p\left(\mathbb{P}\left[\sup_{1\leq k\leq n}|T_k - T_k^\varepsilon| > \delta\right]\right)^{I^q}.
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \left(\left(\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n}\left|R^{\varepsilon}_{\frac{kt}{n}}\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}} + \left(\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^2\frac{kt}{n}}\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}}\right)\left(\mathbb{P}\left[\sup_{0\le k\le n}|T_k - T^{\varepsilon}_k| > \delta\right]\right)^{I^q} \\
&\le \left(\left(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|R^{\varepsilon}_s|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}} + \left(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le \sigma(\varepsilon)^2 t}\left|\hat{B}_s\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}}\right)^p \left(\mathbb{P}\left[\sup_{0\le k\le n}|T_k - T^{\varepsilon}_k| > \delta\right]\right)^{I^q} \\
&\le \left(\frac{qp}{qp-1}\right)^p \left((\mathbb{E}|R^{\varepsilon}_t|^{qp})^{\frac{1}{qp}} + \left(\mathbb{E}\left|\hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^2 t}\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}}\right)^p \left(\mathbb{P}\left[\sup_{0\le k\le n}|T_k - T^{\varepsilon}_k| > \delta\right]\right)^{I^q} \quad \text{par Doob.}
\end{aligned}
$$

On sait que

$$
\left(\mathbb{E}\left|\hat{B}_{\sigma(\varepsilon)^2 t}\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}} = \sigma(\varepsilon)\sqrt{t}\left(\mathbb{E}\left|\hat{B}_1\right|^{qp}\right)^{\frac{1}{qp}}.
$$

Donc en utilsant la proposition 4.2 et lemme 4.24, on sait qu'il existe une constante $C_{q,p}$ tel que

$$
\limsup_{n\to+\infty} I_2 \le C_{q,p}\sigma_0(\varepsilon)^p\left(\frac{\sigma_0(\varepsilon)^4\beta(\varepsilon)}{\delta^2}\right)^{I^q}.
$$

D'où, en notant $C_{\alpha,q,p} = \max\left(C_{q,p}, C_\alpha\right)$

$$
\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T^{\varepsilon}_k}\right|^p \le C_{\alpha,q,p}\left(\delta^{\frac{p}{2}}\left(\log\left(\frac{\sigma_0(\varepsilon)^2}{\delta}\right)\right)^p + \sigma_0(\varepsilon)^p\left(\frac{\sigma_0(\varepsilon)^4\beta(\varepsilon)}{\delta^2}\right)^{I^q}\right).
$$

En choisissant $\delta = \sigma_0(\varepsilon)^2\beta(\varepsilon)^{\frac{2I^q}{p+4I^q}}$, on obtient

$$
\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T^{\varepsilon}_k}\right|^p \le C_{\alpha,n,p}\sigma_0(\varepsilon)^p\beta(\varepsilon)^{\frac{pI^q}{p+4I^q}}\left(\left(\log\left(\frac{1}{\beta(\varepsilon)^{\frac{pI^q}{p+4I^q}}}\right)\right)^p + 1\right).
$$

Ceci est vrai pour tout $q > 1$. Et donc il existe $C_{p,\theta} > 0$ tel que pour tout $\theta \in]0,1[$

$$
\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T^{\varepsilon}_k}\right|^p \le C_{p,\theta}\sigma_0(\varepsilon)^p\beta(\varepsilon)^{\frac{p\theta}{p+4\theta}}\left(\log\left(\frac{1}{\beta(\varepsilon)^{\frac{p\theta}{p+4\theta}}}\right)\right)^p.
$$

◇

La méthode de plongement utilisée ci-dessus nous permet de montrer d'autres résultats intéréssants qui pourront être appliqués à l'approximation des options vanilles américaines lookbacks et barrières.

Proposition 4.25 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν), $t > 0$, $\varepsilon \in]0,1]$ et f une fonction lipschitzienne. Alors*

$$
\left|\mathbb{E}f(X_t) - \mathbb{E}f\left(\hat{X}^{\varepsilon}_t\right)\right| \le C\beta_1(\varepsilon)\sigma_0(\varepsilon),
$$

où C est une constante > 0 qu'on explicitera dans la démonstration.

Si on remplaçe maintenant la condition $f^{'}$ bornée par $f^{'}$ lipschitzienne, alors en utilisant une technique du type extrapolation de Richardson, on arrive à très bien approcher $\mathbb{E}f(X_t)$.

Proposition 4.26 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν), f une fonction dérivable vérifiant $f^{'}$ est lipschitzienne. Alors*

$$
\left|\mathbb{E}f(X_t) - \mathbb{E}\left(2f(X^{\varepsilon}_t) - f\left(\hat{X}^{\varepsilon}_t\right)\right)\right| \le C\beta_2(\varepsilon)\sigma_0(\varepsilon)^2,
$$

où C est une constante > 0 qu'on explicitera dans la démonstration.

Proposition 4.27 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) vérifiant $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$, $\varepsilon \in]0,1]$, $t > 0$ et f une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ K-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. On suppose que $\frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)}$ est bornée. Alors*

$$\left| \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E} f(\tau, X_\tau) - \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E} f\left(\tau, \hat{X}^\varepsilon_\tau\right) \right| \leq C \sigma_0(\varepsilon) \beta_1(\varepsilon),$$

où $\mathcal{T}_{[0,t]}$ designe l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0,t]$, et C est une constante indépendante de ε.

Proposition 4.28 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν), $p > 1$, $t > 0$ et $\varepsilon \in]0,1]$. On suppose que $\mathbb{E} e^{pM_t} < \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout réel $\theta \in]0,1[$*

$$\left| \mathbb{E}\left(e^{M_t} - x\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{\hat{M}^\varepsilon_t} - x\right)^+ \right| \leq C_{p,\theta} \sigma_0(\varepsilon) \left(\beta_{\frac{p}{p-1},\theta}(\varepsilon)\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

où $C_{p,\theta}$ est une constante > 0 indépendante de ε.

Pour démontrer les propositions ci-dessus, on considére $\hat{B}$ un mouvement Brownien standard et, $(T_k, T^\varepsilon_k, k \in \{1, \ldots, n\})$ et $(V_j, j \in \{1, \ldots, n\})$ définis comme dans la démonstration du théorème 4.22. Alors $\left(\hat{B}_{T_k}, k \in \{1, \ldots, n\}\right)$ et $\left(R^\varepsilon_{k\frac{t}{n}}, k \in \{1, \ldots, n\}\right)$ ont la même loi jointe. De même pour $\left(\hat{B}_{T^\varepsilon_k}, k \in \{1, \ldots, n\}\right)$ et $\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}^\varepsilon_{k\frac{t}{n}}, k \in \{1, \ldots, n\}\right)$.

Démonstration de la proposition 4.25. On a

$$\begin{aligned} R^\varepsilon_t &=^d \hat{B}_{T_n} \\ \sigma(\varepsilon)\hat{W}_t &=^d \hat{B}_{T^\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Donc, si f est K-lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} f(X_t) - \mathbb{E} f\left(X^\varepsilon_t + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right) \right| &= \left| \mathbb{E} f\left(X^\varepsilon_t + \hat{B}_{T_n}\right) - f\left(X^\varepsilon_t + \hat{B}_{T^\varepsilon_n}\right) \right| \\ &\leq K \mathbb{E} \left| \hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T^\varepsilon_n} \right|. \end{aligned}$$

On conclut avec le théorème 4.23. ◇

Démonstration de la proposition 4.26. On a toujours

$$\begin{aligned} R^\varepsilon_t &=^d \hat{B}_{T_n} \\ \sigma(\varepsilon)\hat{W}_t &=^d \hat{B}_{T^\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

On a déjà montré dans la démonstration de la proposition 4.3 que

$$\mathbb{E} f(X_t) - \mathbb{E} f(X^\varepsilon_t) = \int_0^1 \mathbb{E} f'\left(X^\varepsilon_t + \theta R^\varepsilon_t\right) R^\varepsilon_t d\theta.$$

Et donc par indépendance de R^ε par rapport à X^ε et $\hat{W}$, on a

$$\mathbb{E} f(X_t) - \mathbb{E} f(X^\varepsilon_t) = \int_0^1 \mathbb{E}\left(f'\left(X^\varepsilon_t + \theta R^\varepsilon_t\right) - f'\left(X^\varepsilon_t + \theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)\right) R^\varepsilon_t d\theta.$$

De la même façon on aura

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f\left(\hat{X}^\varepsilon_t\right) - \mathbb{E} f(X^\varepsilon_t) &= \int_0^1 \mathbb{E} f'\left(X^\varepsilon_t + \theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right) \sigma(\varepsilon)\hat{W}_t d\theta \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}\left(f'\left(X^\varepsilon_t + \theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right) - f'\left(X^\varepsilon_t + \theta R^\varepsilon_t\right)\right) \sigma(\varepsilon)\hat{W}_t d\theta. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_t) - \mathbb{E}\left(2f(X_t^\varepsilon) - f\left(\hat{X}_t^\varepsilon\right)\right) &= \mathbb{E}\left(f(X_t) - f(X_t^\varepsilon)\right) + \mathbb{E}\left(f\left(\hat{X}_t\right) - f(X_t^\varepsilon)\right) \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}\left(f'(X_t^\varepsilon + \theta R_t^\varepsilon) - f'\left(X_t^\varepsilon + \theta\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)\right)\left(R_t^\varepsilon - \sigma(\varepsilon)\hat{W}_t\right)d\theta \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}\left(f'\left(X_t^\varepsilon + \theta\hat{B}_{T_n}\right) - f'\left(X_t^\varepsilon + \theta\hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right)\right)\left(\hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right)d\theta.\end{aligned}$$

Et par suite, si f est K-lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}f(X_t) - \mathbb{E}\left(2f(X_t^\varepsilon) - f\left(\hat{X}_t^\varepsilon\right)\right)\right| &\leq \int_0^1 K\theta\mathbb{E}\left(\hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right)^2 d\theta \\ &= \frac{K}{2}\mathbb{E}\left(\hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right)^2.\end{aligned}$$

On conclut avec le théorème 4.23. ◇

Démonstration de la proposition 4.27. Posons $t_k = \frac{kt}{n}$ et

$$\begin{aligned}p(t) &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau) \\ p^\varepsilon(t) &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}} \mathbb{E}f\left(\tau, \hat{X}_\tau^\varepsilon\right) \\ p_n(t) &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}^n} \mathbb{E}f(\tau, X_\tau) \\ p_n^\varepsilon(t) &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,t]}^n} \mathbb{E}f\left(\tau, \hat{X}_\tau^\varepsilon\right),\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}_{[0,t]}^n$désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{t_k,\ k = 1, \ldots, n\}$. On sait que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} p_n(t) &= p(t) \\ \lim_{n\to+\infty} p_n^\varepsilon(t) &= p^\varepsilon(t).\end{aligned}$$

Soit $\theta \in \mathcal{T}_{[0,t]}^n$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(\theta, X_\theta) &= \mathbb{E}f(\theta, X_\theta^\varepsilon) + \mathbb{E}\left(f(\theta, X_\theta) - f\left(\theta, \hat{X}_\theta^\varepsilon\right)\right) \\ &\leq p_n^\varepsilon(t) + \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left(f(t_k, X_{t_k}) - f\left(t_k, \hat{X}_{t_k}^\varepsilon\right)\right) \\ &= p_n^\varepsilon(t) + \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left(f\left(t_k, X_{t_k}^\varepsilon + R_{t_k}^\varepsilon\right) - f\left(t_k, X_{t_k}^\varepsilon + \sigma(\varepsilon)\hat{W}_{t_k}\right)\right) \\ &= p_n^\varepsilon(t) + \mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left(f\left(t_k, X_{t_k}^\varepsilon + B_{T_k}\right) - f\left(t_k, X_{t_k}^\varepsilon + B_{T_k^\varepsilon}\right)\right) \\ &\leq p_n^\varepsilon(t) + K\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|B_{T_k} - B_{T_k^\varepsilon}\right|.\end{aligned}$$

Donc

$$p_n(t) \leq p_n^\varepsilon(t) + K\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|B_{T_k} - B_{T_k^\varepsilon}\right|.$$

Par le même raisonnement, on a

$$p_n^\varepsilon(t) \leq p_n(t) + K\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|B_{T_k} - B_{T_k^\varepsilon}\right|.$$

Et par suite

$$|p_n(t) - p_n^\varepsilon(t)| \quad \leq \quad K\mathbb{E} \sup_{1\leq k\leq n} \left| B_{T_k} - B_{T_k^\varepsilon} \right|.$$

Et on conclut avec le théorème 4.23. $\diamond$

Démonstration de la proposition 4.28. On définit

$$\begin{aligned} M_t^n &= \sup_{0\leq k\leq n} \left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + R^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} \right) \\ \hat{M}_t^{\varepsilon,n} &= \sup_{0\leq k\leq n} \left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + \sigma(\varepsilon)\hat{W}^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} \right). \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} M_t^n &= M_t \quad p.s. \\ \lim_{n\to+\infty} \hat{M}_t^{\varepsilon,n} &= \hat{M}_t^\varepsilon \quad p.s. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} U_t^n &= \sup_{0\leq k\leq n} \left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + \hat{B}_{T_k} \right) \\ \hat{U}_t^{\varepsilon,n} &= \sup_{0\leq k\leq n} \left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + \hat{B}_{T_k^\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} M_t^n &=^d U_t^n \\ \hat{M}_t^{\varepsilon,n} &=^d \hat{U}_t^{\varepsilon,n}. \end{aligned}$$

Par le théorème des accroisssements finis, on a

$$e^{U_t^n} - e^{\hat{U}_t^{\varepsilon,n}} = \left(U_t^n - \hat{U}_t^{\varepsilon,n} \right) e^{\bar{U}_t^{\varepsilon,n}},$$

où $\bar{U}_t^{\varepsilon,n}$ est compris entre U_t^n et $\hat{U}_t^{\varepsilon,n}$. Donc

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}\left(e^{U_t^n} - x \right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{\hat{U}_t^{\varepsilon,n}} - x \right)^+ \right| &\leq \mathbb{E}\left| e^{U_t^n} - e^{\hat{U}_t^{\varepsilon,n}} \right| \\ &\leq \mathbb{E}\left| U_t^n - \hat{U}_t^{\varepsilon,n} \right| e^{\bar{U}_t^{\varepsilon,n}} \\ &\leq \mathbb{E} \sup_{0\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon} \right| e^{\bar{U}_t^{\varepsilon,n}} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \sup_{0\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E} e^{p\bar{U}_t^{\varepsilon,n}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \sup_{0\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left(e^{pM_t^n} + e^{p\hat{M}_t^{\varepsilon,n}} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \sup_{0\leq k\leq n} \left| \hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left(e^{pM_t} + e^{p\hat{M}_t^\varepsilon} \right) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{pM_t} + e^{p\hat{M}_t^\varepsilon} \right) &\leq \mathbb{E}\left(e^{pM_t} + e^{p\sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq s\leq t}\hat{W}_s} e^{pM_t^\varepsilon} \right) \\ &\leq \mathbb{E}e^{pM_t} + 2e^{\frac{p^2}{2}\sigma(\varepsilon)^2 t}\mathbb{E}e^{pM_t^\varepsilon} \\ &\leq 2e^{\frac{p^2}{2}\sigma(\varepsilon)^2 t}\mathbb{E}\left(e^{pM_t} + e^{pM_t^\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Donc en utlisant la convergence dominée, le théorème 4.23 et le lemme 4.10, on a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(e^{M_t}-x\right)^+-\mathbb{E}\left(e^{\hat{M}_t^\varepsilon}-x\right)^+\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\mathbb{E}\left(e^{M_t^n}-x\right)^+-\mathbb{E}\left(e^{\hat{M}_t^{\varepsilon,n}}-x\right)^+\right| \\ &= \limsup_{n\to+\infty}\left|\mathbb{E}\left(e^{U_t^n}-x\right)^+-\mathbb{E}\left(e^{\hat{U}_t^{\varepsilon,n}}-x\right)^+\right| \\ &\leq C_{p,\theta}\sigma_0(\varepsilon)\left(\beta_{\frac{p}{p-1},\theta}(\varepsilon)\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

◇

4.3.3 Estimation des fonctions de répartition

Les majorations d'erreurs obtenues dans cette section, comme dans le cas des fonctions régulières, sont meilleures que dans le cas de la troncation, à condition bien sûr que la condition (4.3.3) soit vérifiée.

Proposition 4.29 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ,σ^2,ν) vérifiant $\nu(\mathbb{R})=+\infty$, $x>0$, $t>0$ et $\varepsilon\in]0,1]$. Notons*

$$\tilde{\beta}_{\rho,\theta}(\varepsilon)=\beta_{\frac{1}{\rho}-1,\theta}(\varepsilon).$$

1. *Si $\sigma>0$, alors*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left[X_t\geq x\right]-\mathbb{P}\left[\hat{X}_t^\varepsilon\geq x\right]\right|\leq C\sigma_0(\varepsilon)\beta_1(\varepsilon).$$

2. *Si X_t a une densité localement bornée, alors pour tout réels $\theta,\rho\in]0,1[$*

$$\left|\mathbb{P}\left[X_t\geq x\right]-\mathbb{P}\left[\hat{X}_t^\varepsilon\geq x\right]\right|\leq C_{\rho,\theta}\sigma_0(\varepsilon)^{1-\rho}\left(\tilde{\beta}_{\rho,\theta}(\varepsilon)\right)^\rho.$$

3. *Si M_t a une densité localement bornée sur $(0,+\infty)$, alors pour tout réels $\theta,\rho\in]0,1[$*

$$\left|\mathbb{P}\left[M_t\geq x\right]-\mathbb{P}\left[\hat{M}_t^\varepsilon\geq x\right]\right|\leq C_{\rho,\theta}\sigma_0(\varepsilon)^{1-\rho}\left(\tilde{\beta}_{\rho,\theta}(\varepsilon)\right)^\rho.$$

Les constantes C et $C_{\rho,\theta}$ designent des constante indépendante de ε.

Démonstration de la proposition 4.29. Soient $\hat{B}$ un mouvement Brownien standard et $(T_k,T_k^\varepsilon,k\in\{1,\dots,n\})$ et $(V_j,j\in\{1,\dots,n\})$ définis comme dans la démonstration du théorème 4.22. Alors $\left(\hat{B}_{T_k},k\in\{1,\dots,n\}\right)$ et $\left(R^\varepsilon_{k\frac{t}{n}},k\in\{1,\dots,n\}\right)$ ont la même loi jointe. De même pour $\left(\hat{B}_{T_k^\varepsilon},k\in\{1,\dots,n\}\right)$ et $\left(\sigma(\varepsilon)\hat{W}^\varepsilon_{k\frac{t}{n}},k\in\{1,\dots,n\}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}&R_t^\varepsilon=^d\hat{B}_{T_n}\\&\sigma(\varepsilon)\hat{W}_t=^d\hat{B}_{T_n^\varepsilon}.\end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned}&Y_t=X_t^\varepsilon+\hat{B}_{T_n}\\&\hat{Y}_t^\varepsilon=X_t^\varepsilon+\hat{B}_{T_n^\varepsilon}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}\left[X_t\geq x\right]-\mathbb{P}\left[\hat{X}_t^\varepsilon\geq x\right]\right| &= \left|\mathbb{P}\left[Y_t\geq x\right]-\mathbb{P}\left[\hat{Y}_t^\varepsilon\geq x\right]\right| \\ &= \left|\mathbb{P}\left[Y_t\geq x,\hat{Y}_t^\varepsilon<x\right]-\mathbb{P}\left[Y_t<x,\hat{Y}_t^\varepsilon\geq x\right]\right|.\end{aligned}$$

Or, dans le cas $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[Y_t \geq x, \hat{Y}_t^\varepsilon < x\right] &= \mathbb{P}\left[x - \left(Y_t - \hat{Y}_t^\varepsilon\right) \leq \hat{Y}_t^\varepsilon < x\right] \\
&= \mathbb{P}\left[x - \left(\hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right) \leq \sigma B_t + \left(\hat{Y}_t^\varepsilon - \sigma B_t\right) < x\right].
\end{aligned}$$

Par construction, σB_t est indépendante de $\left(\hat{Y}_t^\varepsilon - \sigma B_t\right)$ et de $\left(\hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right)$. On sait que $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}$ est un majorant de la densité de σB_t, donc

$$\mathbb{P}\left[Y_t \geq x, \hat{Y}_t^\varepsilon < x\right] \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\mathbb{E}\left|\hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right|.$$

On obtient le point 1 de la proposition par le théorème 4.23. Regardons le cas 2 de la proposition. Par la proposition 4.12, on sait qu'il existe $K_x > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left[Y_t \geq Y\right] - \mathbb{P}\left[\hat{Y}_t^\varepsilon \geq x\right]\right| &\leq K_x\delta + \frac{\mathbb{E}\left|Y_t - \hat{Y}_t^\varepsilon\right|^p}{\delta^p} \\
&= K_x\delta + \frac{\mathbb{E}\left|\hat{B}_{T_n} - \hat{B}_{T_n^\varepsilon}\right|^p}{\delta^p}.
\end{aligned}$$

Par le théorème 4.23, on sait qu'il existe $C_{p,\theta} > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left[Y_t \geq Y\right] - \mathbb{P}\left[\hat{Y}_t^\varepsilon \geq x\right]\right| &\leq K_x\delta + C_{p,\theta}\frac{\sigma_0(\varepsilon)^p\beta_{p,\theta}(\varepsilon)}{\delta^p} \\
&\leq \max\left(K_x, C_{p,\theta}\right)\left(\delta + \frac{\sigma_0(\varepsilon)^p\beta_{p,\theta}(\varepsilon)}{\delta^p}\right) \\
&\leq 2\max\left(K_x, C_{p,\theta}\right)\sigma_0(\varepsilon)^{1-\frac{1}{p+1}}\beta(\varepsilon)^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenu en choisissant $\delta = \sigma_0(\varepsilon)^{1-\frac{1}{p+1}}\beta_{p,\theta}(\varepsilon)^{\frac{1}{p+1}}$. On note

$$I = \left|\mathbb{P}\left[M_t \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\hat{M}_t^\varepsilon \geq x\right]\right|.$$

Posons

$$I^n = \left|\mathbb{P}\left[M_t^n \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\hat{M}_t^{\varepsilon,n} \geq x\right]\right|,$$

avec

$$\begin{aligned}
M_t^n &= \sup_{0\leq k\leq n}\left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + R^\varepsilon_{k\frac{t}{n}}\right) \\
\hat{M}_t^{\varepsilon,n} &= \sup_{0\leq k\leq n}\left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + \sigma(\varepsilon)\hat{W}^\varepsilon_{k\frac{t}{n}}\right).
\end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} M_t^n &= M_t \quad p.s. \\
\lim_{n\to+\infty} \hat{M}_t^{\varepsilon,n} &= \hat{M}_t^\varepsilon \quad p.s.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I^n = I.$$

Posons

$$\begin{aligned}
U_t^n &= \sup_{0\leq k\leq n}\left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + \hat{B}_{T_k}\right) \\
\hat{U}_t^{\varepsilon,n} &= \sup_{0\leq k\leq n}\left(X^\varepsilon_{k\frac{t}{n}} + \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$I^n = \left|\mathbb{P}\left[U_t^n \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\hat{U}_t^{\varepsilon,n} \geq x\right]\right|.$$

Par la proposition 4.12 (voir la démonstration)

$$\begin{aligned} I^n &\leq \mathbb{P}\left[x \leq U_t^n < x+\delta\right] + \frac{\mathbb{E}\left|U_t^n - \hat{U}_t^{\varepsilon,n}\right|^p}{\delta^p} \\ &\leq \mathbb{P}\left[x \leq U_t^n < x+\delta\right] + \frac{\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}_{T_k^\varepsilon}\right|^p}{\delta^p}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[x \leq U_t^n < x+\delta\right] &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[x \leq M_t^n < x+\delta\right] \\ &= \mathbb{P}\left[x \leq M_t < x+\delta\right] \\ &\leq C_x\delta. \end{aligned}$$

où C_x est une constante > 0 dont l'existence est justifiée par la proposition 4.12. Donc par le théorème 4.23

$$\begin{aligned} I &\leq C_x\delta + \frac{C_{p,\theta}}{\delta^p}\sigma_0(\varepsilon)^p\beta_{p,\theta}(\varepsilon) \\ &\leq 2\max(C_x, C_{p,\theta})\sigma_0(\varepsilon)^{1-\frac{1}{p+1}}\beta_{p,\theta}(\varepsilon)^{\frac{1}{p+1}} \end{aligned}$$

La dernère inégalité est obtenue en prenant $\delta = \sigma_0(\varepsilon)^{1-\frac{1}{p+1}}\beta_2(\varepsilon)^{\frac{1}{p+1}}$. ⋄

Proposition 4.30 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) de carré intégrable, $x > 0$, $\varepsilon \in]0,1]$ et $t > 0$. On suppose que $\sigma > 0$ ou (2.1.2) est vérifié. On note $\alpha > 0$ Le réel défini dans le lemme 2.20. Alors pour tout $\theta, \rho \in]0,1[$*

$$\left|\mathbb{P}\left[M_t \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\hat{M}_t^\varepsilon \geq x\right]\right| \leq C_{\rho,\theta}\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha}{(1+\rho)\alpha+1}}\left(\beta_{\frac{1}{\rho},\rho}(\varepsilon)\right)^{\frac{\alpha\rho}{\alpha(1+\rho)+1}}.$$

La constante $C_{\rho,\theta}$ est indépendante de ε.

Démonstration de la proposition 4.30. Le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 4.29 et la remarque 4.13, nous donne pour tout $p > 1$

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{P}\left[M_t \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\hat{M}_t^\varepsilon \geq x\right]\right| &\leq C_x\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \frac{C_{p,\theta}}{\delta^p}\sigma_0(\varepsilon)^p\beta_{p,\theta}(\varepsilon) \\ &\leq 2\max(C_x, C_{p,\theta})\sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha}{(1+\frac{1}{p})\alpha+1}}\left(\beta_{p,\theta}(\varepsilon)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha(1+p)+p}}. \end{aligned}$$

La dernère inégalité est obtenue en prenant

$$\delta = \sigma_0(\varepsilon)^{\frac{\alpha+1}{(1+\frac{1}{p})\alpha+1}}\left(\beta_{p,\theta}(\varepsilon)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha(1+p)+p}}.$$

On déduit facilement la proposition. ⋄

4.4 Discussion sur les méthodes d'approximation des petits sauts

On se donne un processus de Lévy X à variation finie. Comme nous l'avons souligné plus haut, une alternative à la troncation des petits sauts compensés, est de tronquer les petits sauts non compensés. On remplace X par le processus $\bar{X}^\varepsilon$ défini par

$$\bar{X}_t^\varepsilon = X_t - \sum_{0\leq s\leq t}\Delta X_s \mathbb{1}_{|\Delta X_s|\leq\varepsilon}, \quad \forall t \geq 0.$$

Pour illustrer le fait qu'en général il est préférable de tronquer les sauts compensés, on considére le cas où la mesure de Lévy ν du processus X est définie comme suit

$$\nu(dx) = \frac{e^{-x}}{x}\mathbb{1}_{x\geq 0}dx.$$

On note J la mesure de Poisson d'intensité $\nu(dx)dt$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t - \bar{X}_t^\varepsilon\right) &= \mathbb{E}\int_{0\leq x\leq \varepsilon, s\in[0,t]} xJ(dx\times ds) \\
&= t\int_0^\varepsilon x\nu(dx) \\
&= t\int_0^\varepsilon e^{-x}dx \\
&= t(1-e^{-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\sigma(\varepsilon)^2 &= \int_0^\varepsilon x^2\nu(dx) \\
&= \int_0^\varepsilon xe^{-x}dx \\
&= 1-(1+\varepsilon)e^{-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On remarque facilement que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t - \bar{X}_t^\varepsilon\right) &\underset{0}{\sim} \varepsilon t \\
\sigma(\varepsilon) &\underset{0}{\sim} \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(X_t - \bar{X}_t^\varepsilon\right) \underset{0}{\sim} \sigma(\varepsilon)t.$$

En termes de vitesse de convergence, on ne peut faire mieux que $O\left(\sigma(\varepsilon)\right)$. Si on considére maintenant que

$$X_t = \int_{x\geq 0, s\in[0,t]} xJ(dx\times ds), \quad \forall t\geq 0.$$

Alors le processus X est croissant, et par suite si on note $\bar{M}_t^\varepsilon = \sup_{0\leq s\leq t}\bar{X}_s^\varepsilon$

$$\mathbb{E}\left(M_t - \bar{M}_t^\varepsilon\right) = \mathbb{E}\left(X_t - \bar{X}_t^\varepsilon\right) \underset{0}{\sim} \sigma(\varepsilon)t.$$

En clair de manière général on peut obtenir

$$\left|\mathbb{E}\left(M_t - \bar{M}_t^\varepsilon\right)\right| \leq C\sigma(\varepsilon).$$

Et on ne peut pas faire mieux en terme de vitesse de convergence. L'inéquation précédente se généralise ainsi

Proposition 4.31 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ,σ,ν) vérifiant $\int_{|x|\leq 1}|x|\nu(dx)$, f une fonction K-lipschitzienne et $t>0$, on a alors*

$$\mathbb{E}\left|f\left(M_t\right) - f\left(\bar{M}_t^\varepsilon\right)\right| \leq K(2\sqrt{t}+t)\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).$$

Démonstration de la proposition 4.31. Soit R^ε défini en (1.4.7). On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|f\left(\sup_{0\le s\le t} X_s\right)-f\left(\sup_{0\le s\le t}\bar{X}^\varepsilon_s\right)\right| &\le K\mathbb{E}\left|\sup_{0\le s\le t} X_s-\sup_{0\le s\le t}\bar{X}^\varepsilon_s\right| \\
&\le K\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left|X_s-\bar{X}^\varepsilon_s\right| \\
&\le K\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left|R^\varepsilon_s+s\int_{|x|\le\varepsilon} x\nu(dx)\right| \\
&\le K\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|R^\varepsilon_s|+Kt\int_{|x|\le\varepsilon}|x|\nu(dx) \\
&\le K\sqrt{\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}|R^\varepsilon_s|\right)^2}+Kt\sqrt{\int_{|x|^2\le\varepsilon}|x|\nu(dx)} \\
&\le 2K\sqrt{\mathbb{E}\,|R^\varepsilon_s|^2}+Kt\sigma(\varepsilon),\ \text{par Doob} \\
&= K(2\sqrt{t}+t)\sqrt{t}\sigma(\varepsilon).
\end{aligned}$$

◇

L'autre question qui se pose est l'optimalité des majorations obtenues dans le cas de la troncation des petits sauts (compensés). A t-on vraiment intérêt à remplacer les petits sauts par un mouvement Brownien lorsque certaines conditions le justifient ? Dans le cas *non path-dependent* les résultats des paragraphes précédents montrent que l'on a de meilleures approximations quand on remplace les petits sauts par un Brownien (sous les hypothèses justifiant ce remplacement). Dans le cas *path-dependent* cette discussion est justifiée par le résultat suivant.

Théorème 4.32 *Soient X un processus de Lévy intégrable de triplet (γ,σ^2,ν) vérifiant $\nu(\mathbb{R})=+\infty$, $\varepsilon\in]0,1]$ et $t>0$, on a alors*

$$0\le\mathbb{E}\left(M_t-M^\varepsilon_t\right)=o\left(\sigma(\varepsilon)\right).$$

Démonstration du théorème 4.32. On a par la proposition 3.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_t-M^\varepsilon_t\right) &= \int_0^t\frac{\mathbb{E}X^+_s}{s}ds-\int_0^t\frac{\mathbb{E}\left(X^\varepsilon_s\right)^+}{s}ds \\
&= \int_0^t\mathbb{E}\left(X^+_s-(X^\varepsilon_s)^+\right)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Posons $I^\varepsilon_s=\mathbb{E}\left(X^+_s-(X^\varepsilon_s)^+\right)$. On a

$$\begin{aligned}
I^\varepsilon_s &= \mathbb{E}\left(X^+_s-(X^\varepsilon_s)^+\right) \\
&= \mathbb{E}\left((X^\varepsilon_s+R^\varepsilon_s)^+-(X^\varepsilon_s)^+\right) \\
&= \mathbb{E}X^\varepsilon_s\left(\mathbb{1}_{X^\varepsilon_s+R^\varepsilon_s>0}-\mathbb{1}_{X^\varepsilon_s>0}\right)+\mathbb{E}R^\varepsilon_s\mathbb{1}_{X^\varepsilon_s+R^\varepsilon_s>0} \\
&= \mathbb{E}X^\varepsilon_s\left(\mathbb{1}_{-R^\varepsilon_s<X^\varepsilon_s\le 0}-\mathbb{1}_{0<X^\varepsilon_s\le -R^\varepsilon_s}\right)+\mathbb{E}R^\varepsilon_s\mathbb{1}_{X^\varepsilon_s>-R^\varepsilon_s} \\
&= \mathbb{E}X^\varepsilon_s\left(\mathbb{1}_{-R^\varepsilon_s<X^\varepsilon_s\le 0}-\mathbb{1}_{0<X^\varepsilon_s\le -R^\varepsilon_s}\right)+\mathbb{E}R^\varepsilon_s\mathbb{1}_{-R^\varepsilon_s<X^\varepsilon_s\le 0}+\mathbb{E}R^\varepsilon_s\mathbb{1}_{X^\varepsilon_s>-R^\varepsilon_s,X^\varepsilon_s>0} \\
&= \mathbb{E}X^\varepsilon_s\left(\mathbb{1}_{-R^\varepsilon_s<X^\varepsilon_s\le 0}-\mathbb{1}_{0<X^\varepsilon_s\le -R^\varepsilon_s}\right)+\mathbb{E}R^\varepsilon_s\mathbb{1}_{-R^\varepsilon_s<X^\varepsilon_s\le 0}+\mathbb{E}R^\varepsilon_s\left(\mathbb{1}_{X^\varepsilon_s>0}-\mathbb{1}_{0<X^\varepsilon_s\le -R^\varepsilon_s}\right).
\end{aligned}$$

On sait par ailleurs que R^ε et X^ε sont indépendant et $\mathbb{E}R^\varepsilon = 0$, donc

$$\begin{aligned}
I_s^\varepsilon &= \mathbb{E}X_s^\varepsilon \left(\mathbb{1}_{-R_s^\varepsilon < X_s^\varepsilon \le 0} - \mathbb{1}_{0 < X_s^\varepsilon \le -R_s^\varepsilon}\right) + \mathbb{E}R_s^\varepsilon \mathbb{1}_{-R_s^\varepsilon < X_s^\varepsilon \le 0} + \mathbb{E}R_s^\varepsilon \mathbb{1}_{0 < X_s^\varepsilon \le -R_s^\varepsilon} \\
&= \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + R_s^\varepsilon\right) \mathbb{1}_{-R_s^\varepsilon < X_s^\varepsilon \le 0} - \mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon + R_s^\varepsilon\right) \mathbb{1}_{0 < X_s^\varepsilon \le -R_s^\varepsilon} \\
&= \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon| - |X_s^\varepsilon|\right) \mathbb{1}_{-R_s^\varepsilon < X_s^\varepsilon \le 0} - \mathbb{E}\left(|X_s^\varepsilon| - |R_s^\varepsilon|\right) \mathbb{1}_{0 < X_s^\varepsilon \le -R_s^\varepsilon} \\
&= \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon| - |X_s^\varepsilon|\right) \left(\mathbb{1}_{-R_s^\varepsilon < X_s^\varepsilon \le 0} + \mathbb{1}_{0 < X_s^\varepsilon \le -R_s^\varepsilon}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon| - |X_s^\varepsilon|\right)^+ \left(\mathbb{1}_{-R_s^\varepsilon < X_s^\varepsilon \le 0} + \mathbb{1}_{0 < X_s^\varepsilon \le -R_s^\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

On voit facilement que

$$\mathbb{1}_{-R_s^\varepsilon < X_s^\varepsilon \le 0} + \mathbb{1}_{0 < X_s^\varepsilon \le -R_s^\varepsilon} = \mathbb{1}_{R_s^\varepsilon X_s^\varepsilon < 0} + \mathbb{1}_{X_s^\varepsilon = 0, R_s^\varepsilon < 0}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_s^\varepsilon &= \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon| - |X_s^\varepsilon|\right)^+ \left(\mathbb{1}_{R_s^\varepsilon X_s^\varepsilon < 0} + \mathbb{1}_{X_s^\varepsilon = 0, R_s^\varepsilon < 0}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon| - |X_s^\varepsilon|\right)^+ \mathbb{1}_{R_s^\varepsilon X_s^\varepsilon < 0} + \mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right| \mathbb{1}_{X_s^\varepsilon = 0, R_s^\varepsilon < 0} \\
&= \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon| - |X_s^\varepsilon|\right)^+ \mathbb{1}_{R_s^\varepsilon X_s^\varepsilon < 0} + \mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right| \mathbb{1}_{R_s^\varepsilon < 0} \mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right] \\
&= \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon| - |X_s^\varepsilon|\right)^+ \mathbb{1}_{R_s^\varepsilon X_s^\varepsilon < 0} + \mathbb{E}\left(R_s^\varepsilon\right)^- \mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right].
\end{aligned}$$

On voit bien que $I_s^\varepsilon \ge 0$ donc on a aussi

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^\varepsilon\right) \ge 0$$

D'autre part, par Cauchy-Scwartz

$$\begin{aligned}
I_s^\varepsilon &\le \left(\mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{|X_s^\varepsilon|}{|R_s^\varepsilon|}\right)^+\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right] \\
&\le \sigma(\varepsilon)\sqrt{s} \left(\left(\mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{|X_s^\varepsilon|}{|R_s^\varepsilon|}\right)^+\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right]\right).
\end{aligned}$$

Notons que comme $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$ on a $R_s^\varepsilon \neq 0$ *p.s.* On obtient ainsi

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^\varepsilon\right) \le \sigma(\varepsilon) \int_0^t \left(\left(\mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{|X_s^\varepsilon|}{|R_s^\varepsilon|}\right)^+\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right]\right) \frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Par ailleurs, par convergence dominée on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{|X_s^\varepsilon|}{|R_s^\varepsilon|}\right)^+\right)^2 = 0.$$

En effet $R_s^\varepsilon \to 0$ *p.s.* et $X_s^\varepsilon \to X_s$ *p.s.* avec $X_s \neq 0$ *p.s.* On a aussi

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right] &= \mathbb{P}\left[X_s = 0\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\left(\mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{|X_s^\varepsilon|}{|R_s^\varepsilon|}\right)^+\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right] \le 2.$$

Donc par convergence dominée on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left(\left(\mathbb{E}\left(\left(1-\frac{|X_s^\varepsilon|}{|R_s^\varepsilon|}\right)^+\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon=0\right]\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}=0.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(M_t-M_t^\varepsilon\right)=o\left(\sigma(\varepsilon)\right).$$

$\diamond$

Le théorème 4.32 est optimal dans le sens où nous ne pouvons pas avoir une meilleure puissance pour $\sigma(\varepsilon)$.

Théorème 4.33 *Pour tout $\beta>1$ il existe un processus de Lévy X à activité infinie vérifiant*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma(\varepsilon)^{-\beta}\mathbb{E}\left(M_t-M_t^\varepsilon\right)=0.$$

Démonstration. Rappelons que par la proposition 3.2 on a

$$\mathbb{E}\left(M_t-M_t^\varepsilon\right) \quad = \quad \int_0^t \mathbb{E}\left(X_s^+-(X_s^\varepsilon)^+\right)\frac{ds}{s}.$$

Dans la démonstration du théorème 4.32, on a montré que

$$\mathbb{E}\left(X_s\right)^+-\mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon\right)^+ \quad = \quad \mathbb{E}\left(|R_s^\varepsilon|-|X_s^\varepsilon|\right)^+\mathbb{1}_{R_s^\varepsilon X_s^\varepsilon<0}+\mathbb{E}\left(R_s^\varepsilon\right)^-\mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon=0\right].$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_s\right)^+-\mathbb{E}\left(X_s^\varepsilon\right)^+ &\geq \mathbb{E}\left(R_s^\varepsilon\right)^-\mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon=0\right]\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right|\mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon=0\right].\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}R_s^\varepsilon=0$. Supposons que X a pour triplet $(0,0,\nu)$ avec

$$\nu(dx)=\alpha\mathbb{1}_{0<|x|<1}\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}},$$

où $\alpha\in]0,2[$. Remarquons que pour tout $y\in\mathbb{R}$

$$|y|=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(\xi y)}{\xi^2}d\xi.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(\xi y)}{\xi^2}d\xi &= |y|\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx\\ &= |y|\left[\frac{cos(x)-1}{x}\right]_0^{+\infty}+|y|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx\\ &= \frac{|y|\pi}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}|R_s^\varepsilon|=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathbb{E}\cos(\xi R_s^\varepsilon)}{\xi^2}d\xi.$$

Or R_s^ε est symétrique (car ν est symétrique), donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\cos(\xi R_s^\varepsilon) &= \mathbb{E}e^{i\xi R_s^\varepsilon} \\ &= \exp\left(2s\int_0^\varepsilon (\cos(\xi x)-1)\nu(dx)\right).\end{aligned}$$

Soit $\rho \in]0,1[$ tel que $|y| \leq \rho$, donc

$$\frac{y^2}{4} \leq 1-\cos(y) \leq \frac{y^2}{2}.$$

Pour $\xi \in [0,\rho/\varepsilon]$ et $x \in [0,\varepsilon]$, on a $|\xi x| \leq \rho$. D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|R_s^\varepsilon| &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\rho}{\varepsilon}} \frac{1-\exp\left(-2s\int_0^\varepsilon \frac{\xi^2x^2}{4}\nu(dx)\right)}{\xi^2}d\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\rho}{\varepsilon}} \frac{1-\exp\left(-\frac{s}{4}\xi^2\sigma(\varepsilon)^2\right)}{\xi^2}d\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{s}\sigma(\varepsilon)\int_0^{\frac{\rho\sqrt{s}\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}} \frac{1-e^{-\frac{y^2}{4}}}{\xi^2}d\xi.\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en faisant le changement de variable $y = \sqrt{s}\sigma(\varepsilon)\xi$. D'autre part

$$\mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right] = e^{-s\lambda(\varepsilon)},$$

où $\lambda(\varepsilon) = \int_{|x|>\varepsilon}\nu(dx)$. On obtient

$$\mathbb{E}|R_s^\varepsilon|\mathbb{P}\left[X_s^\varepsilon = 0\right] \geq \frac{2}{\pi}\sqrt{s}\sigma(\varepsilon)e^{-s\lambda(\varepsilon)}\int_0^{\frac{\rho\sqrt{s}\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}} \frac{1-e^{-\frac{y^2}{4}}}{\xi^2}d\xi.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_t - M_t^\varepsilon\right) &\geq \frac{\sigma(\varepsilon)}{\pi}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}}e^{-s\lambda(\varepsilon)}\int_0^{\frac{\rho\sqrt{s}\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}} \frac{1-e^{-\frac{y^2}{4}}}{\xi^2}d\xi \\ &= \frac{\sigma(\varepsilon)}{\pi\sqrt{\lambda(\varepsilon)}}\int_0^{t\lambda(\varepsilon)} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}e^{-\mu}\int_0^{\frac{\rho\sqrt{\mu}\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{\lambda(\varepsilon)}}} \frac{1-e^{-\frac{y^2}{4}}}{\xi^2}d\xi.\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en posant $\mu = s\lambda(\varepsilon)$. Par ailleurs un simple calcul nous donne

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon) &= \left(\frac{2\alpha}{2-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{1-\frac{\alpha}{2}} \\ \lambda(\varepsilon) &= 2\left(\varepsilon^{-\alpha}-1\right).\end{aligned}$$

Donc on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{\lambda(\varepsilon)}} = \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

D'où

$$\frac{\sigma(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda(\varepsilon)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-\alpha}{2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}-\alpha}\sigma(\varepsilon)^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

Donc il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\left(M_t - M_t^\varepsilon\right) \geq C_\alpha\sigma(\varepsilon)^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

Ce qui montre le théorème. $\diamond$

On peut alors trouver un α assez petit tel que la majoration d'erreur obtenue dans le cas de l'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien (proposition 4.19) soit meilleure que dans le cas de la troncation. La conséquence de ce résultat est que dans le cas des fonctions régulières, la vitesse de convergence obtenue par l'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien est meilleure que dans le cas de la troncation. Pour les fonctions de repartition, les résultats obtenus dans les paragraphes précédents montrent que nous obtenons de meilleures majorations d'erreurs dans le cas où les petits sauts sont approximés par un mouvement Brownien. S'il est vrai que nous n'avons pas pu prouver l'optimalité de tels résultats, il semble peut probable que l'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien puisse engendrer des erreurs plus grande que dans le cas de la troncation comme le laisse supposer les travaux de *[Levendorskii-Kudryavtsev(2009)]* et *[Powers(2008)]*. En effet les majorations d'erreurs obtenues dans cette section permettent de déduire les majorations d'erreurs similaires (dans la section 5.4) pour les options lookback, barrière, américaine et asiatique.

Chapitre 5

Applications financières

Considérons $(S_t)_{t\in[0,T]}$ le prix d'un actif financier modelisé comme un processus stochastique sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$. La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information historique sur le prix jusqu'à l'instant t. Dans les modèles de Lévy exponentiels, la dynamique de S est l'exponentielle d'un processus de Lévy.

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

Le processus X est un processus de Lévy de triplet caractéristique (γ, σ^2, ν) sous $\mathbb{P}$. On notera r le taux d'intérêt sans risque, et δ le taux de dividende. Les options que nous allons considérer par la suite auront pour sous-jacent l'actif financier de prix S. On notera K le prix d'exercice d'une option (*strike*) et H sa barrière (si elle existe). Trois types d'options nous intéresserons dans cette partie : les options barrière, lookback et asiatique.

5.1 Options barrières

Les différents types d'options barrières (à barrière continue ou discrète) sont résumés par les tableaux de payoffs suivants.

Barrière	Continue	Discrète
Up Out	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_0 e^{M_T} < H\}}$	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{M^n_T} < H\right\}}$
Up In	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_0 e^{M_T} \geq H\}}$	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{M^n_T} \geq H\right\}}$
Down Out	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_0 e^{m_T} > H\}}$	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{m^n_T} > H\right\}}$
Down In	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_0 e^{m_T} \leq H\}}$	$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{m^n_T} \leq H\right\}}$

FIGURE 5.1.1 – Payoffs des options call barrière

Dans cette section, nous allons d'abord montrer que la correction de continuité est possible dans le cas des processus *jum-diffusion*. Ensuite nous allons donner des estimations de l'erreur entre les options barrières continue et discrète dans le cas général.

5.1.1 Correction de continuité

La correction de continuité dans le cadre du modèle de Black-Scholes est étudiée dans *[Broadie-Glasserman-Kou(1997)]* et *[Kou(2003)]*. Nous allons montrer que ces corrections sont toujours valables pour les processus de Lévy à activité finie et à variation infinie. Notons $UOC(H)$ le prix d'un call *Up and Out* continue de barrière H, on a

$$UOC = \mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0 e^{X_T} - K\right)^+ \mathbb{1}_{\sup_{0\leq t\leq T} S_0 e^{X_t} < H}.$$

Barrière	Continue	Discrète
Up Out	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{M_T}<H\}}$	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{M_T^n}<H\}}$
Up In	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{M_T}\geq H\}}$	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{M_T^n}\geq H\}}$
Down Out	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{m_T}>H\}}$	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{m_T^n}>H\}}$
Down In	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{m_T}\leq H\}}$	$(K-S_T)^+\mathbb{1}_{\{S_0e^{m_T^n}\leq H\}}$

FIGURE 5.1.2 – Payoffs des options put barrière

Posons

$$k = \log\left(\frac{K}{S_0}\right)$$
$$h = \log\left(\frac{H}{S_0}\right).$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} UOC(H) &= S_0\mathbb{E}e^{-rT}e^{X_T}\mathbb{1}_{M_T<h,X_T>k} - Ke^{-rT}\mathbb{P}\left[M_T<h,X_T>k\right] \\ &= S_0e^{-\delta T}\mathbb{E}e^{-(r-\delta)T}e^{X_T}\mathbb{1}_{M_T<h,X_T>k} - Ke^{-rT}\mathbb{P}\left[M_T<h,X_T>k\right]. \end{aligned}$$

La condition d'absence d'arbitrage implique que le processus $\left(e^{-(r-\delta)t}e^{X_t}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale. Soit $\bar{\mathbb{P}}$ la probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, de densité de Radon

$$\left.\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-(r-\delta)t+X_t},\ \forall t\geq 0.$$

Par *[Kyprianou(2006), théorème* 3.9*]*, X est un processus de Lévy sous $\bar{\mathbb{P}}$ de triplet $(\bar\gamma,\bar\sigma,\bar\nu)$ défini par

$$\begin{aligned} \bar\gamma &= r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^x-1-x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\right)\bar\nu(dx) \\ \bar\sigma &= \sigma \\ \bar\nu(dx) &= e^x\nu(dx). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$UOC(H) = S_0e^{-\delta T}\bar{\mathbb{P}}\left[M_T<h,X_T>k\right] - Ke^{-rT}\mathbb{P}\left[M_T<h,X_T>k\right].$$

Si on note UOC^n le prix d'un call *Up and Out* discrète de barrière H, comportant n date de fixing (de pas $\frac{T}{n}$), alors on a de même

$$UOC^n(H) = S_0e^{-\delta T}\bar{\mathbb{P}}\left[M_T^n<h,X_T>k\right] - Ke^{-rT}\mathbb{P}\left[M_T^n<h,X_T>k\right].$$

Trouver une correction de continuité entre les options barrières continue et discrète, revient en fait à trouver une correction entre les probabilités ci-dessus. C'est l'objet des résultats suivants.

Théorème 5.1 *Soit X un processus de Lévy à activité finie intégrable de triplet (γ,σ^2,ν) vérifiant $\sigma>0$, et $x\in\mathbb{R}$. Alors*

$$\mathbb{P}\left[M_T\geq x\right]-\mathbb{P}\left[M_T^n\geq x\right] = \mathbb{P}\left[M_T\geq x>M_T-\frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}\right]+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Avec $\beta_1=\mathbb{E}R$, et R est la variable aléatoire définie dans le théorème 3.13. Le résultat précédent peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{P}\left[M_T<x+\frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}\right] = \mathbb{P}\left[M_T^n<x\right]+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Remarque 5.2 *La démonstration du théorème 5.1, montre que le théorème reste vrai si on remplace x par une suite x_n qui converge vers x lorsque $n \to +\infty$, ou si on ajoute une condition sur X_T. Donc, sous les hypotthèses du théorème 5.1, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[M_T < x + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}, X_T > y\right] &= \mathbb{P}\left[M_T^n < x, X_T > y\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ \mathbb{P}\left[M_T < x, X_T > y\right] &= \mathbb{P}\left[M_T^n < x - \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}, X_T > y\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

La conséquence directe de la remarque 5.2 est la relation entre les options barrières continue et discrète.

Proposition 5.3 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) vérifiant $\sigma > 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, $V(H)$ le prix d'une option à barrière continue H et $V^n(H)$ le prix de l'option à barrière discrète correspondante. On suppose que le processus $\left(e^{X_t-(r-\delta)t}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale. Alors*

$$\begin{aligned}V^n(H) &= V\left(He^{\pm\frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ V(H) &= V^n\left(He^{\mp\frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Où dans $\pm$ et $\mp$, le cas supérieur est pour les options Up *et le cas inférieur pour les options* Down.

Démonstration de la proposition 5.3. Le théorème 5.1 et la remarque 5.1 entrainent évidemment que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[M_T < y + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}, X_T \leq x\right] &= \mathbb{P}\left[M_T^n < y, X_T \leq x\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ \mathbb{P}\left[M_T \geq y + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}, X_T \leq x\right] &= \mathbb{P}\left[M_T^n \geq y, X_T \leq x\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ \mathbb{P}\left[M_T < y + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}, X_T < x\right] &= \mathbb{P}\left[M_T^n < y, X_T < x\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Les prix des options barrières peuvent s'écrire en fonction des probalités ci-dessus (comme dans le cas du call *Up and Out* étudié au début du paragraphe). Rappelons que pour le cas *Down*, le processus minimun m de X vérifie

$$\begin{aligned}m_t &:= \inf_{0\leq s\leq t} X_s \\ &= -\sup_{0\leq s\leq t}(-X_s).\end{aligned}$$

On en déduit facilement le premier point la proposition. Pour la deuxième partie de la proposition, on procéde de la même façon en utilisant le deuxième point de la remarque 5.2. $\diamond$

Toute la suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème 5.1. Rappelons qu'un processus de Lévy à activité finie et à variation infinie (*jump-diffusion*) peut s'écrire sous la forme

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{j=1}^{N_t} Y_j.$$

On note $T_1,\ldots,T_n,\ldots$ les temps de sauts du processus $(N_t)_{t\geq 0}$.

La démonstration du théorème 5.1 consiste à conditionner par rapport aux temps de saut et aux valeurs du processus aux instants de saut, puis à représenter le maximum du processus sur les intervalles de temps entre les sauts à l'aide du processus de Bessel, dans l'esprit de l'article de Asmussen-Glynn-Pitman(1995).

On a ensuite à étudier les probabilités conditionnelles, puis à en déduire le comportement asymptotique de la probabilité inconditionnelle.

Le plan de l'étude est le suivant : dans la suite de cette section, on donne des résultats préliminaires élémentaires sur les temps de saut d'un processus de Poisson. On établit ensuite quelques résultats sur le conditionnement par les temps de sauts. Le conditionnement par rapport aux valeurs de X aux instants de saut est développé dans le paragraphe suivant, où la représentation par le processus de Bessel est précisée. Puis on donnera quelques lemmes techniques sur le noyau de transition du processus de Bessel. On établira ensuite des estimations de domination qui permettront de passer des probabilités conditionnelles à la probabilité inconditionnelle. Et on terminera par l'étude asymptotique des probabilités conditionnelles pour en déduire le théorème 5.1.

Les propositions suivantes permettront d'assurer des conditions de domination dans la convergence d'espérances.

Proposition 5.4 *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson homogène, de temps de saut $(T_l)_{l\geq 1}$. Pour $t>0$ fixé et pour tout entier $l \geq 1$, on a, pour $i = 0, \ldots, l-1$,*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{T_{i+1}-T_i}} \mid N_t = l\right) \leq \frac{2l}{\sqrt{t}}$$

et

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{t-T_l}} \mid N_t = l\right) \leq \frac{2l}{\sqrt{t}}.$$

Démonstration. En utilisant la loi conditionnelle des temps de saut sachant $\{N_t = l\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{T_{i+1}-T_i}} \mid N_t = l\right) &= \int_{0<t_1<\ldots<t_l<t} \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \frac{l!}{t^l} dt_1 \ldots dt_l \\
&= \int_{u_1>0,\ldots,u_l>0, \sum_{j=1}^{l} u_j < t} \frac{1}{\sqrt{u_i}} \frac{l!}{t^l} du_1 \ldots du_l \\
&\leq \frac{2l}{\sqrt{t}} \int_{u_1>0,\ldots,u_l>0, \sum_{j\neq i} u_j < t} \frac{(l-1)!}{t^{l-1}} du_1 \ldots \cancel{du}_i \ldots du_l \\
&= \frac{2l}{\sqrt{t}},
\end{aligned}$$

où dans la dernière intégrale, la variable u_i est omise. La démonstration de l'autre inégalité est analogue. ◇

Proposition 5.5 *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson homogène, de temps de saut $(T_l)_{l\geq 1}$. Pour $t>0$ fixé et pour tout entier $l \geq 1$, on a, pour $i = 0, \ldots, l-1$ et pour tout $A > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(T_{i+1}-T_i \leq \frac{At}{n} \mid N_t = l\right) \leq l\frac{A}{n}$$

et

$$\mathbb{P}\left(t-T_l \leq \frac{At}{n} \mid N_t = l\right) \leq l\frac{A}{n}.$$

Démonstration. On peut supposer $A < n$ et écrire, pour $i = 0, \ldots, l-1$, en utilisant la loi conditionnelle des temps de saut sachant $\{N_t = l\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_{i+1} - T_i \leq \frac{At}{n} \mid N_t = l\right) &= \int_{0<t_1<\ldots<t_l<t} \mathbf{1}_{\{t_{i+1}-t_i \leq At/n\}} \frac{l!}{t^l} dt_1 \ldots dt_l \\
&= \int_{u_1>0,\ldots,u_l>0,\sum_{j=1}^{l} u_j<t} \mathbf{1}_{\{u_i \leq At/n\}} \frac{l!}{t^l} du_1 \ldots du_l \\
&\leq \frac{lA}{n} \int_{u_1>0,\ldots,u_l>0,\sum_{j\neq i} u_j<t} \frac{(l-1)!}{t^{l-1}} du_1 \ldots \cancel{du}_i \ldots du_l \\
&= \frac{lA}{n},
\end{aligned}$$

où dans la dernière intégrale, la variable u_i est omise. La démonstration de l'autre inégalité est analogue. $\diamond$

5.1.1.1 Conditionnement par rapport aux temps de saut

Soit $x > 0$ et $t > 0$ fixés. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_t \geq x) - \mathbb{P}(M_t^n \geq x) &= \mathbb{P}(M_t \geq x > M_t^n) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(M_t \geq x > M_t^n \mid N_t = l)\mathbb{P}(N_t = l).
\end{aligned}$$

Conditionnellement à $\{N_t = 0\}$, on a $X_s = \gamma s + \sigma B_s$ pour $s \in [0, t]$ et

$$\mathbb{P}(M_t \geq x > M_t^n \mid N_t = 0) = P(M^0 \geq x > M^{0,n} \mid N_t = 0),$$

avec $M^0 = \sup_{0\leq s\leq t}(\gamma s + \sigma B_s)$, $M^{0,n} = \max_{k=0,\ldots,n} X_{kt/n}$.

Conditionnellement à $\{N_t = l\}$ et $\{T_1 = t_1, \ldots, T_l = t_l\}$, avec $0 < t_1 < \ldots < t_l < t$, on pose $t_{l+1} = t$ et, pour $j = 0, \ldots, l$,

$$M_t^j = \sup_{s\in[t_j,t_{j+1}[} X_s, \quad M_t^{j,n} = \max_{k, kt/n\in[t_j,t_{j+1}[} X_{kt/n},$$

avec, par convention $M_t^{j,n} = -\infty$ s'il n'existe pas d'entier k tel que $kt/n \in [t_j, t_{j+1}[$. Dans la suite on désigne par θ le vecteur $(t_1, \ldots, t_l)$ et par $\mathbb{P}_{l,\theta}$ la probabilité conditionnelle sachant $\{N_t = l, T_1 = t_1, \ldots, T_l = t_l\}$. Conditionnellement aux valeurs de X aux instants t_j, les variables aléatoires M^j sont indépendantes et admettent une densité. Elles sont donc presque sûrement deux à deux distinctes et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{l,\theta}(M_t \geq x > M_t^n) &= \sum_{j=0}^{l} \mathbb{P}_{l,\theta}(M_t \geq x > M_t^n \text{ et } M^j > \max_{i\neq j} M^i) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \mathbb{P}_{l,\theta}(M^j \geq x > M_t^n \text{ et } M^j > \max_{i\neq j} M^i).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}_{l,\theta}(M_t \geq x > M_t^n) = \sum_{j=0}^{l} \left(\alpha_l^{j,n}(\theta) - \beta_l^{j,n}(\theta)\right),$$

avec

$$\alpha_l^{j,n}(\theta) = \mathbb{P}_{l,\theta}\left(M^j \geq x > M^{j,n} \text{ et } M^j > \max_{i\neq j} M^i\right)$$

et

$$\beta_l^{j,n}(\theta) = \mathbb{P}_{l,\theta}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > \max_{i\neq j} M^i, \max_{i\neq j} M^{i,n} \geq x\right).$$

En intégrant par rapport aux temps de sauts, on obtient

$$\mathbb{P}(M_t \geq x > M_t^n) = \mathbb{E}\left(\alpha_{N_t}^n(T_1, \ldots, T_{N_t}) - \beta_{N_t}^n(T_1, \ldots, T_{N_t})\right),$$

où, pour $l \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_l^n(t_1,\ldots,t_l) = \sum_{j=0}^{l} \alpha_l^{j,n}(t_1,\ldots,t_l)$$

et

$$\beta_l^n(t_1,\ldots,t_l) = \sum_{j=0}^{l} \beta_l^{j,n}(t_1,\ldots,t_l).$$

Avec ces notations, on peut établir la proposition suivante.

Proposition 5.6 *On a* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\mathbb{E}\left(\beta_{N_t}^n(T_1,\ldots,T_{N_t})\right) = 0$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\beta_l^{j,n}(\theta) &\leq \sum_{i\neq j} \mathbb{P}_{l,\theta}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > M^i \geq M^{i,n} \geq x\right) \\
&\leq \sum_{i\neq j} \mathbb{P}_{l,\theta}\left(x \leq M^j < x + (M^j - M^{j,n}), x \leq M^i < x + (M^j - M^{j,n})\right).
\end{aligned}$$

Conditionnellement à $\{N_t = l\}$, $\{(T_1,\ldots,T_l) = \theta\}$ et $\{X_{T_i} = x_i, i = 1,\ldots l\}$, les processus $(X_s - X_{t_i})_{t_i \leq s < t_{i+1}}$ et $(X_s - X_{t_j})_{t_j \leq s < t_{j+1}}$ sont des mouvements browniens indépendants. Les couples de variables aléatoires $(M^j - x_j, M^j - M^{j,n})$ et $(M^i - x_i, M^i - M^{i,n})$ sont indépendants et on a

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{x\leq M^i \leq x+M^j-M^{j,n}\}} \mid M^j, M^{j,n}\right) = \int_{x-x_i}^{x-x_i+M^j-M^{j,n}} f_i(u)du,$$

où f_i est la densité de la variable aléatoire $\sup_{0\leq s\leq t_{i+1}-t_i}(\gamma s + \sigma B_s)$. On sait (lemme 2.22) que la fonction f_i est bornée par $C/\sqrt{t_{i+1}-t_i}$, où la constante C ne dépend que de γ, σ et de t. On en déduit que, avec $A_j^n = \{x \leq M^j < x + (M^j - M^{j,n})\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{l,\theta}\left(x \leq M^j < x + (M^j - M^{j,n}), x \leq M^i < x + (M^j - M^{j,n})\right) &\leq \frac{C}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \mathbb{E}_{l,\theta}\left((M^j - M^{j,n})\mathbf{1}_{A_j^n}\right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\sqrt{\frac{t}{n}},
\end{aligned}$$

pour une constante C ne dépendant que de σ et γ. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{l} \beta_l^{j,n}(\theta) &\leq \sum_{j=0}^{l}\sum_{i\neq j} \frac{C}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\sqrt{\frac{t}{n}} && (5.1.1) \\
&\leq Cl\sqrt{\frac{t}{n}} \sum_{i=0}^{l} \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}. && (5.1.2)
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite de variables aléatoires $\sqrt{n}\beta_{N_t}^n(T_1,\ldots,T_{N_t})$ est dominée par une variable aléatoire qui est intégrable d'après la Proposition 5.4 ◇

5.1.1.2 Représentation à l'aide du processus de Bessel

On a

$$\alpha_l^{j,n}(t_1,\ldots,t_l) = \mathbb{P}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > \max_{i\neq j} M^i \mid N_t = l, T_1 = t_1,\ldots,T_l = t_l\right).$$

Pour $j = 0,\ldots,l$, on pose

$$\hat\beta_u^j = \frac{X_{t_j+u(t_{j+1}-t_j)}}{\sigma\sqrt{t_{j+1}-t_j}}, \text{ pour } u \in [0,1[, \quad \text{et } \hat\beta_1^j = \frac{X_{t_{j+1}^-}}{\sigma\sqrt{t_{j+1}-t_j}}.$$

On a, en posant $\sigma_j = \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}$,

$$M^j = \sigma_j \hat{M}^j \quad \text{et} \quad M^{j,n} = \sigma_j \hat{M}^{j,n},$$

où

$$\hat{M}^j = \sup_{u\in[0,1]} \hat{\beta}^j_u \quad \text{et} \quad \hat{M}^{j,n} = \sup_{k\in I^j_n} \hat{\beta}^j_{\frac{\lambda_j k}{n} - \hat{t}_j},$$

avec les notations $\lambda_j = t/(t_{j+1} - t_j)$, $\hat{t}_j = t_j/(t_{j+1} - t_j)$ et $I^j_n = \{k \in \mathbb{N} \mid t_j \leq kt/n < t_{j+1}\}$ pour $j = 0, \dots, l-1$ et $I^j_l = \{k \in \mathbb{N} \mid t_j \leq kt/n \leq t_{j+1}\}$.

Si, dans le calcul de la probabilité conditionnelle définisant $\alpha^{j,n}_l(t_1, \dots, t_l)$, on ajoute le conditionnement par $\{X_{T_1} = x_1, \dots, X_{T_l} = x_l\}$, les variables aléatoires $(M^j, M^{j,n})$ d'une part et M^i pour $i \neq j$ d'autre part sont indépendantes et, avec les notations

$$\theta = (t_1, \dots, t_l), \quad \xi = (x_1, \dots, x_l), \quad \mathbb{P}_{l,\theta,\xi} = \mathbb{P}\left(\cdot \mid N_t = l, T_k = t_k, X_{T_k} = x_k, k = 1, \dots, l\right),$$

on peut écrire

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > \max_{i\neq j} M^i\right) = \mathbb{E}_{l,\theta,\xi}\left(\mathbf{1}_{\{M^j\geq x>M^{j,n}\}}\alpha_{l,j}(M^j, \theta, \xi)\right),$$

où

$$\alpha_{l,j}(m, \theta, \xi) = \mathbb{P}_{l,\theta,\xi}(\max_{i\neq j} M^i < m).$$

Posons $\tau^j = \sup\{u \in [0,1] \mid \hat{\beta}^j_u = \hat{M}^j\}$. Conditionnellement à $\tau^j = s$ et $\hat{M}^j = m$, on pose $R^j_1(u) = m - \hat{\beta}^j(s-u)$, pour $u \in [0,s]$ et $R^j_2(v) = m - \hat{\beta}^j(s+v)$, pour $v \in [0, 1-s]$. On sait que, conditionnellement à $\{\tau^j = s, \hat{M}^j = m, \hat{\beta}^j_1 = y\}$, les processus R^j_1 et R^j_2 sont des ponts de Bessel indépendants. On peut écrire, conditionnellement à $\{\tau^j = s, \hat{M}^j = m\}$,

$$\hat{M}^j - \hat{M}^{j,n} = \min_{k\in I^-_n} R^j_1(s + \hat{t}_j - \lambda_j(k/n)) \wedge \min_{k\in I^+_n} R^j_2(\lambda_j(k/n) - \hat{t}_j - s),$$

avec

$$I^-_n = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq s + \hat{t}_j - \lambda_j(k/n) \leq s\}, \quad I^+_n = \{k \in \mathbb{N} \mid s \leq \lambda_j(k/n) - \hat{t}_j \leq 1\}.$$

D'où

$$\hat{M}^j - \hat{M}^{j,n} = \min_{0\leq k\leq N^1_n} R^j_1(d^j_n(s) + \lambda_j(k/n)) \wedge \min_{1\leq k\leq N^2_n} R^j_2(\lambda_j(k/n) - d^j_n(s)), \tag{5.1.3}$$

avec $d^j_n(s) = \hat{t}_j + s - \frac{\lambda_j}{n}\left[\frac{n(\hat{t}_j+s)}{\lambda_j}\right]$ (où $[x]$ est la partie entière de x ; notons que $0 \leq d^j_n(s) \leq \lambda_j/n$) et

$$\begin{aligned} N^1_n &= \max\{k \in \mathbb{N} \mid d^j_n(s) + \lambda_j(k/n) \leq s\}, \\ N^2_n &= \max\{k \in \mathbb{N} \mid -d^j_n(s) + \lambda_j(k/n) \leq 1 - s\}. \end{aligned}$$

Notons que N^1_n ne définit un entier naturel que si I^-_n est non vide et que N^2_n ne définit un entier strictement positif que si I^+_n est non vide. Quand l'un des deux ensembles est vide et pas l'autre, le minimum dans (5.1.3) est pris sur l'ensemble non vide. Si les deux ensembles son vides (ce qui n'arrive que si $\lambda_j/n > 1$), le minimum est par convention égal à $+\infty$. Dans la proposition suivante, on utilise aussi les notations

$$\gamma_j = \gamma\sqrt{t_{j+1} - t_j}/\sigma, \quad \tilde{x}_j = \frac{x - x_j}{\sigma_j} \quad .$$

Proposition 5.7 *On a*

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > \max_{i\neq j} M^i\right) \quad = \quad \int_0^1 ds \mathbb{E}\left(L^j_s \alpha_j(R_1(s))\mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)\leq \tilde{x}_j + R^{j,n}_s\right\}}\right),$$

où

$$L^j_s = \frac{1}{2}\frac{e^{\gamma_j(R_1(s)-R_2(1-s))-(\gamma_j^2/2)}}{R_1(s)R_2(1-s)}, \quad \alpha_j(m) = \mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(\max_{i\neq j} M^i < \sigma_j(m + x_j)\right),$$

R_1 et R_2 sont des processus de Bessel tri-dimensionnels indépendants, issus de 0 *et*

$$R_s^{j,n} = \min_{-N_n^2 \leq k \leq N_n^1} \check{R}(d_n^j(s) + \lambda_j(k/n)),$$

avec $\check{R}(u) = R_1(u)$ *pour* $u \geq 0$ *et* $\check{R}(u) = R_2(-u)$ *pour* $u < 0$.

Notons que par convention $R_s^{j,n} = +\infty$ si l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ ne contient pas de multiple entier de t/n.

Démonstration. On a $\{M^j \geq x > M^{j,n}\} = \{x/\sigma_j \leq \hat{M}^j < (x/\sigma_j) + \hat{M}^j - \hat{M}^{j,n}\}$. Sous la probabilité $\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}$ le processus $(\hat{\beta}_u^j)_{u\in[0,1]}$ est un mouvement Brownien issu de $\hat{x}_j = x_j/\sigma_j$, de coefficient de dérive γ_j et de coefficient de diffusion 1. Il en résulte que la densité du couple $(\tau^j, \hat{M}^j)$ sachant $\hat{\beta}_1^j = y$ est donnée par

$$\mathbb{P}(\tau^j \in ds, \hat{M}^j \in dm \mid \hat{\beta}_1^j = y) = \frac{u(s, m - \hat{x}_j)u(1-s, m-y)}{n(y - \hat{x}_j)},$$

où n est la densité de la loi normale centrée réduite et

$$u(s,m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m}{s^{3/2}} e^{-m^2/(2s)}, \quad m > 0.$$

Cette expression de la loi conditionnelle de $(\tau^j, \hat{M}^j)$ résulte de *[Karatzas-Shreve, proposition 2.8.15]*. On en déduit, en notant $\bar{x}_j = x/\sigma_j$,

$$\mathbb{E}_{l,\theta,\xi}\left(\mathbf{1}_{\{M^j \geq x > M^{j,n}\}}\alpha_{l,j}(M^j,\theta,\xi)\right) = \mathbb{E}_{l,\theta,\xi}\left(\mathbf{1}_{\{\bar{x}_j \leq \hat{M}^j < \bar{x}_j + \hat{M}^j - \hat{M}^{j,n}\}}\alpha_{l,j}(\sigma_j\hat{M}^j,\theta,\xi)\right).$$

On remarque que

$$\mathbb{P}\left(\bar{x}_j \leq \hat{M}^j < \bar{x}_j + \hat{M}^j - \hat{M}^{j,n} \mid \tau^j = s, \hat{M}^j = m, \hat{\beta}_1^j = y\right) = p(m, m-\hat{x}_j, m-y),$$

avec

$$p(m, m-\hat{x}_j, m-y) = \mathbb{P}\left(\bar{x}_j \leq m \leq \bar{x}_j + R_s^{j,n} \mid R_1^j(s) = m - \hat{x}_j, R_2^j(1-s) = m-y\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{l,\theta,\xi}\left(\mathbf{1}_{\{\bar{x}_j \leq \hat{M}^j < \bar{x}_j + \hat{M}^j - \hat{M}^{j,n}\}}\alpha_{l,j}(\sigma_j\hat{M}^j,\theta,\xi)\right) = \\ &\quad\int \mathbb{P}(\hat{\beta}_1^j \in dy)\int_0^1 ds \int_{\hat{x}_j\vee y}^{\infty} \frac{dm}{n(y-\hat{x}_j)}\alpha_{lj}(\sigma_j m,\theta,\xi)\phi(s,m,m-\hat{x}_j,m-y),\end{aligned}$$

avec

$$\phi(s,m,m-\hat{x}_j,m-y) = u(s,m-\hat{x}_j)u(1-s,m-y)p(m,m-\hat{x}_j,m-y).$$

Comme $\mathbb{P}(\hat{\beta}_1^j \in dy) = n\,(y - \hat{x}_j - \gamma_j)\,dy$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{l,\theta,\xi}\left(\mathbf{1}_{\{\bar{x}_j \leq \hat{M}^j < \bar{x}_j + \hat{M}^j - \hat{M}^{j,n}\}}\alpha_{l,j}(\sigma_j\hat{M}^j,\theta,\xi)\right) = \\ &\quad\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\gamma_j(y-\hat{x}_j)-(\gamma_j^2/2)}\int_0^1 ds\int_{\hat{x}_j\vee y}^{\infty} dm\ \alpha_{lj}(\sigma_j m,\theta,\xi)\phi(s,m,m-\hat{x}_j,m-y) \\ &= \int_0^1 ds\int_0^{\infty} dm'\int_0^{\infty} dz e^{\gamma_j(m'-z)-(\gamma_j^2/2)}\alpha_{lj}(\sigma_j(m'+\hat{x}_j),\theta,\xi)\phi(s,m'+\hat{x}_j,m',z),\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du changement de variables $m' = m - \hat{x}_j$, $z = m - y$. On a donc

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{l,\theta,\xi}\left(\mathbf{1}_{\{\bar{x}_j \leq \hat{M}^j < \bar{x}_j + \hat{M}^j - \hat{M}^{j,n}\}}\alpha_{l,j}(\sigma_j\hat{M}^j,\theta,\xi)\right) = \\ &\quad\int_0^1 ds\int_0^{\infty} dm\int_0^{\infty} dz e^{\gamma_j(m-z)-(\gamma_j^2/2)}\alpha_{lj}(\sigma_j(m+\hat{x}_j),\theta,\xi)\phi(s,m+\hat{x}_j,m,z),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\phi(s, m+\hat{x}_j, m, z) &= u(s,m)u(1-s,z)p(m+\hat{x}_j, m, z)\\ &= u(s,m)u(1-s,z)\mathbb{P}\left(\tilde{x}_j \le m \le \tilde{x}_j + R_s^{j,n} \mid R_1^j(s)=m, R_2^j(1-s)=z\right),\end{aligned}$$

avec $\tilde{x}_j = \bar{x}_j - \hat{x}_j = (x-x_j)/\sigma_j$. Rappelons maintenant que la densité de transition du processus de Bessel tri-dimensionnel est donnée par

$$\tilde{q}_t(x,y) = \frac{1}{x} q_t(x,y) y, \quad x, y > 0, t > 0,$$

où $q_t(x,y)$ est la densité du Brownien tué en 0, qui s'écrit

$$q_t(x,y) = g_t(x-y) - g_t(x+y),$$

où g_t est la densité de la loi normale centrée de variance t. Pour ces propriétés du processus de Bessel, voir *[Revuz-Yor(1994), chapitre VI, section* 3*]*. Pour $x = 0$, on a

$$\tilde{q}_t(0,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y^2}{t^{3/2}} e^{-y^2/(2t)}, \quad y > 0, t > 0.$$

On remarque que, pour tout $m > 0$ et pour tout $t > 0$,

$$u(s,m) = \frac{1}{m\sqrt{2}} \tilde{q}_s(0,m).$$

D'où

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{l,\theta,\xi}\left(\mathbf{1}_{\{\bar{x}_j \le \hat{M}^j < \bar{x}_j + \hat{M}^j - \hat{M}^{j,n}\}} \alpha_{l,j}(\sigma_j \hat{M}^j, \theta, \xi)\right) =\\ &\quad \frac{1}{2}\int_0^1 ds \int_0^\infty dm \int_0^\infty dz \mathbb{P}(R_1^j(s) \in dm, R_2^j(1-s) \in dz) \frac{e^{\gamma_j(m-z)-(\gamma_j^2/2)}}{mz} \alpha_{l,j}\left(\sigma_j(m+\hat{x}_j), \theta, \xi)\right) \bar{p}(m,m,z),\end{aligned}$$

avec

$$\bar{p}(m,m,z) = \mathbb{P}\left(\tilde{x}_j \le m \le \tilde{x}_j + R_s^{j,n} \mid R_1^j(s) = m, R_2^j(1-s) = z\right).$$

D'où la proposition. ◇

5.1.1.3 Densité de transition du processus de Bessel

On donne dans cette section quelques estimations concernant la densité de transition $(\tilde{q}_t(x,y))_{t>0}$, $x, y \ge 0$ du processus de Bessel de dimension 3. Comme rappelé précédemment, on a

$$\tilde{q}_t(x,y) = \frac{1}{x} q_t(x,y) y, \quad x, y > 0, t > 0,$$

où $q_t(x,y)$ est la densité du Brownien tué en 0, qui s'écrit

$$q_t(x,y) = g_t(x-y) - g_t(x+y),$$

où g_t est la densité de la loi normale centrée de variance t. Pour $x = 0$, on a

$$\tilde{q}_t(0,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y^2}{t^{3/2}} e^{-y^2/(2t)}, \quad y > 0, t > 0.$$

On pose, pour $r > 0$, $m > 0$,

$$\bar{q}_t(r,m) = \frac{\tilde{q}_t(r,m)}{m} = \frac{1}{r} q_t(r,m).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\bar{q}_t(r,m) &= \frac{1}{r}\left(g_t(r-m)-g_t(r+m)\right)\\ &= -\int_{-1}^{+1} g_t'(m+r\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Cette dernière expression permet de prolonger par continuité la définition de $\bar{q}_t(r,m)$ pour $r=0$ ou $m=0$, de sorte que

$$\bar{q}_t(0,m) = -\int_{-1}^{+1} g_t'(m)d\xi = -2g_t'(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m}{t^{3/2}}e^{-m^2/(2t)}.$$

Notons aussi que, pour tout $r\geq 0$, $\bar{q}_t(r,0)=0$.

Proposition 5.8 *On a les estimations suivantes, pour tout réel γ.*

1. *Pour tous $s,r,m>0$,*
$$\bar{q}_s(r,m)e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)} \leq \frac{1}{s}e^{\gamma_+ r}\left(C_1+C_2\gamma_+\sqrt{s}\right),$$
avec $C_1=\sqrt{\frac{2}{\pi e}}$ et $C_2=\sqrt{2/\pi}$.
2. *Pour tous $r,m>0$,*
$$\int_0^1 ds e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}\bar{q}_s(r,m) \leq 2^{3/2}e^{r\gamma_+ +(\gamma_+^2/2)}$$
3. *Pour tous s, $r>0$,*
$$\int_0^{+\infty} dm e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}\bar{q}_s(r,m) \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi s}}e^{r\gamma_+ +(\gamma_+^2 s/2)}$$

Démonstration. Notons qu'on peut supposer $\gamma\geq 0$ car, pour $\gamma<0$, $e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}\leq 1$. On a, en utilisant les égalités $g_t(x)=g_1(x/\sqrt{t})/\sqrt{t}$ et $g_1'(x)=-xg_1(x)$

$$\begin{aligned}\bar{q}_s(r,m) &= -\int_{-1}^{+1} g_s'(m+r\xi)d\xi\\ &= \frac{1}{s}\int_{-1}^{+1}\frac{m+r\xi}{\sqrt{s}}g_1\left(\frac{m+r\xi}{\sqrt{s}}\right)d\xi.\end{aligned}$$

Notons que

$$e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}g_1\left(\frac{m+r\xi}{\sqrt{s}}\right) = e^{-\gamma r\xi}g_1\left(\frac{m+r\xi-\gamma s}{\sqrt{s}}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}\bar{q}_s(r,m) &= \frac{1}{s}\int_{-1}^{+1} e^{-\gamma r\xi}\frac{m+r\xi}{\sqrt{s}}g_1\left(\frac{m+r\xi-\gamma s}{\sqrt{s}}\right)d\xi \qquad (5.1.4)\\ &\leq \frac{e^{r\gamma}}{s}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{m+r\xi-\gamma s}{\sqrt{s}}+\gamma\sqrt{s}\right)g_1\left(\frac{m+r\xi-\gamma s}{\sqrt{s}}\right)d\xi\\ &\leq 2\frac{e^{r\gamma}}{s}\left(\sup_{x>0} xg_1(x)+\gamma\sqrt{s}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right),\end{aligned}$$

ce qui donne la première inégalité.

Pour la deuxième et la troisième inégalité, on part de (5.1.4) et on remarque que

$$\begin{aligned}(m+r\xi-\gamma s)^2 &= (m+r\xi)^2+\gamma^2 s^2-2\gamma s(m+r\xi)\\ &\geq (m+r\xi)^2+\gamma^2 s^2-\left(2\gamma^2 s^2+\frac{(m+r\xi)^2}{2}\right)\\ &= \frac{(m+r\xi)^2}{2}+\gamma^2 s^2.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$g_1\left(\frac{m+r\xi-\gamma s}{\sqrt{s}}\right) \leq e^{\gamma^2 s} g_1\left(\frac{m+r\xi}{\sqrt{2s}}\right)$$

D'où

$$e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}\bar{q}_s(r,m) \leq e^{\gamma r+(\gamma^2 s/2)} \int_{-1}^{+1} \frac{|m+r\xi|}{s^{3/2}} g_1\left(\frac{m+r\xi}{\sqrt{2s}}\right) d\xi, \tag{5.1.5}$$

et, en intégrant par rapport à s,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dse^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}\bar{q}_s(r,m) &\leq e^{\gamma r+(\gamma^2/2)} \int_{-1}^{+1} \left(\int_0^1 \frac{|m+r\xi|}{s^{3/2}} g_1\left(\frac{m+r\xi}{\sqrt{2s}}\right) ds\right) d\xi \\
&= 2^{3/2} e^{r\gamma+(\gamma^2/2)} \int_{-1}^{+1} \left(\int_{|m+r\xi|/\sqrt{2}}^{+\infty} g_1(u)du\right) d\xi \\
&\leq 2^{3/2} e^{r\gamma+(\gamma^2/2)},
\end{aligned}$$

où on a posé $u = |m+r\xi|/\sqrt{2s}$.

En intégrant (5.1.5) par rapport à m, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{\gamma m-(\gamma^2 s/2)}\bar{q}_s(r,m)dm &\leq e^{\gamma r+(\gamma^2 s/2)} \int_{-1}^{+1} \left(\int_0^{+\infty} \frac{|m+r\xi|}{s^{3/2}} g_1\left(\frac{m+r\xi}{\sqrt{2s}}\right) dm\right) d\xi \\
&\leq e^{\gamma r+(\gamma^2 s/2)} \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|m+r\xi|}{s^{3/2}} g_1\left(\frac{m+r\xi}{\sqrt{2s}}\right) dm\right) d\xi \\
&= 4\frac{e^{\gamma r+(\gamma^2 s/2)}}{s^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z| g_1(z)\, dz = 4\sqrt{2}\frac{e^{\gamma r+(\gamma^2 s/2)}}{\sqrt{s\pi}},
\end{aligned}$$

où on a posé $z = (m+r\xi)/\sqrt{2s}$. ◇

Nous complétons cette section par un lemme concernant le minimum du processus de Bessel, inspiré de *[Asmussen-Glynn-Pitman, lemme* 3*]*.

Lemme 5.9 *Soit $(\check{R}(t))_{t\geq 0}$ un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 et soit t_1, t_2, y, m, b des nombres strictement positifs, avec $t_1 < t_2$. On a, en utilisant la notation $\mathbb{R}^\sharp(t_1,t_2) = \min_{u\in[t_1,t_2]} \check{R}(u)$,*

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^\sharp(t_1,t_2) \leq b \mid \check{R}(t_1) = y, \check{R}(t_2) = m\right) \leq \frac{b(m+y)}{ym}.$$

Démonstration. On peut supposer $b < y \wedge m$, car si $b \geq y \wedge m$, le majorant est supérieur ou égal à 1. On a alors, d'après le Lemme 3 d'Asmussen-Glynn-Pitman,

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^\sharp(t_1,t_2) \leq b \mid \check{R}(t_1) = y, \check{R}(t_2) = m\right) = \frac{e^{2(b-y)(m-b)/T} - e^{-2ym/T}}{1-e^{-2ym/T}},$$

avec $T = t_2 - t_1$. D'où, en utilisant la convexité de l'exponentielle et l'inégalité $b(m-b+y) \leq ym$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^\sharp(t_1,t_2) \leq b \mid \check{R}(t_1) = y, \check{R}(t_2) = m\right) &= \frac{e^{2((b-y)(m-b)+ym)/T} - 1}{e^{2ym/T}-1} \\
&= \frac{e^{2b(m-b+y)/T} - 1}{e^{2ym/T}-1} \\
&\leq \frac{b(m-b+y)}{ym} \leq \frac{b(m+y)}{ym}.
\end{aligned}$$

◇

5.1.1.4 Domination de la probabilité conditionnelle

Proposition 5.10 *Il existe une constante $C_{t,\gamma,\sigma}$ (ne dépendant que de t, γ et σ) telle que, pour tous $l \in \mathbb{N}$, $\theta = (0 < t_1 < \ldots < t_l < t) \in \mathbb{R}^l$ et $\xi \in \mathbb{R}^l$, on a, pour $j = 0, \ldots, l$,*

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > \max_{i \neq j} M^i\right) \leq \mathbf{1}_{\{t_{j+1}-t_j \leq 8t/n\}} + \frac{C_{t,\gamma,\sigma}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 5.7, on a, en remarquant que la fonction α_j est bornée par la constante 1,

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > \max_{i \neq j} M^i\right) \quad \leq \quad \int_0^1 ds \mathbb{E}\left(L_s^j \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,n}\right\}}\right).$$

On peut évidemment supposer $t_{j+1} - t_j > 8t/n$, ce qui, avec les notations de la Section 5.1.1.2, s'écrit $\lambda_j/n < 1/8$ et assure que l'un au moins des ensembles I_n^- et I_n^+ est non vide. On peut alors majorer la variable aléatoire $R_s^{j,n}$ par $R^*(\lambda_j/n)$ où, pour $u \in [0,1]$, on pose

$$R^*(u) = \max_{-u \leq v \leq +u} \check{R}(v).$$

D'où

$$P_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M^j > \max_{i \neq j} M^i\right) \quad \leq \quad \int_0^1 ds \mathbb{E}\left(L_s^j \mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)\}}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\lambda_j/n} ds \mathbb{E}\left(L_s^j \mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)\}}\right) &\leq \int_0^{\lambda_j/n} ds \mathbb{E}\left(L_s^j\right) \\
&= \int_0^{\lambda_j/n} ds \mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j R_1(s) - \frac{\gamma_j^2 s}{2}}}{\sqrt{2} R_1(s)}\right) \mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j R_2(1-s) - \frac{\gamma_j^2(1-s)}{2}}}{\sqrt{2} R_2(1-s)}\right).
\end{aligned}$$

Par scaling, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j R_1(s) - \frac{\gamma_j^2 s}{2}}}{\sqrt{2} R_1(s)}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j \sqrt{s} R_1(1) - \frac{\gamma_j^2 s}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{s} R_1(1)}\right) \\
&\leq C_{t,\gamma,\sigma} \frac{1}{\sqrt{s}}.
\end{aligned}$$

De même

$$\mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j R_2(1-s) - \frac{\gamma_j^2(1-s)}{2}}}{\sqrt{2} R_2(1-s)}\right) \leq C_{t,\gamma,\sigma} \frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

On en déduit que

$$\int_0^{\lambda_j/n} ds \mathbb{E}\left(L_s^j \mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)\}}\right) \leq C_{t,\gamma,\sigma} \sqrt{\frac{\lambda_j}{n}} \leq \frac{C_{t,\gamma,\sigma}}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On obtient de la même façon une majoration de $\int_{1-\lambda_j/n}^1 ds \mathbb{E}\left(L_s^j \mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)\}}\right)$. Reste à étudier l'intégrale sur l'intervalle $[\lambda_j/n, 1-\lambda_j/n]$. Notons $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ la filtration naturelle du couple (R^1, R^2). Pour $s \in [\lambda_j/n, 1-\lambda_j/n]$, on a, en conditionnant par $\mathcal{F}_{\lambda_j/n}$,

$$\mathbb{E}\left(L_s^j \mathbf{1}_{\{R_1(s) \in [\tilde{x}_j, \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)]\}}\right) \quad = \quad \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\, \bar{q}_{s-\lambda_j/n}^j (R_1(\lambda_j/n), m) \phi_{1-s-\lambda_j/n}^j (R_2(\lambda_j/n)) \mathbf{1}_{I_j}(m)\right),$$

où I_j désigne l'intervalle (aléatoire) $[\tilde{x}_j, \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)]$,

$$\bar{q}_s^j(r,m) = e^{\gamma_j m - \gamma_j^2/2}\bar{q}_s(r,m) \quad \text{et} \quad \phi_s^j(r) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dm e^{-\gamma_j m}\bar{q}_s(r,m).$$

D'après la Proposition 5.8, on a

$$\phi_s^j(r) \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi s}} e^{r|\gamma_j| + \gamma_j^2} \leq \frac{C_{t,\gamma,\sigma}}{\sqrt{s}} e^{r|\gamma_j|}.$$

On a

$$\int_{\lambda_j/n}^{1-\lambda_j/n} ds\, \bar{q}^j_{s-\lambda_j/n}(R_1(\lambda_j/n), m)\phi^j_{1-s-\lambda_j/n}(R_2(\lambda_j/n)) \quad = \quad \int_0^{1-2\lambda_j/n} ds\, \bar{q}_s^j(R_1(\lambda_j/n), m)\phi^j_{1-s-2\frac{\lambda_j}{n}}(R_2(\lambda_j/n)).$$

Pour $s \in [0, 1/2 - (\lambda_j/n)]$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-s-2\lambda_j/n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1/2 - (\lambda_j/n)}} \leq 2,$$

car $\lambda_j/n < 1/4$. D'où

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_j/n}^{1/2-(\lambda_j/n)} ds\, \bar{q}^j_{s-\lambda_j/n}(R_1(\lambda_j/n), m)\phi^j_{1-s-\lambda_j/n}(R_2(\lambda_j/n)) &\leq C_{t,\gamma,\sigma}\int_0^1 ds\, \bar{q}_s^j(R_1(\lambda_j/n), m)e^{|\gamma_j|R_2(\lambda_j/n)} \\
&\leq C_{t,\gamma,\sigma}e^{|\gamma_j|(R_1(\lambda_j/n)+R_2(\lambda_j/n))},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de la Proposition 5.8. On a d'autre part, pour $s \in [1/2 - (\lambda_j/n), 1 - \lambda_j/n]$, en utilisant la première inégalité de la Proposition 5.8,

$$\bar{q}^j_{s-\lambda_j/n}(r,m) \leq \frac{C_{t,\gamma,\sigma}}{s - \lambda_j/n} e^{r|\gamma_j|} \leq\leq 4C_{t,\gamma,\sigma}e^{r|\gamma_j|},$$

la dernière inégalité résultant de la condition $\lambda_j/n < 1/8$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{1/2-(\lambda_j/n)}^{1-(\lambda_j/n)} ds\, \bar{q}^j_{s-\lambda_j/n}(R_1(\lambda_j/n), m)\phi^j_{1-s-\lambda_j/n}(R_2(\lambda_j/n)) &\leq C_{t,\gamma,\sigma}e^{|\gamma_j|R_1(\lambda_j/n)}\int_{1/2}^1 ds\phi^j_{1-s}(R_2(\lambda_j/n)) \\
&\leq C_{t,\gamma,\sigma}e^{|\gamma_j|(R_1(\lambda_j/n)+R_2(\lambda_j/n))}\int_{1/2}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \\
&\leq C_{t,\gamma,\sigma}e^{|\gamma_j|(R_1(\lambda_j/n)+R_2(\lambda_j/n))}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_j/n}^{1-\lambda_j/n} ds\mathbb{E}\left(L_s^j \mathbf{1}_{\{R_1(s)\in[\tilde{x}_j, \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)]\}}\right) &\leq C_{t,\gamma,\sigma}\mathbb{E}\left(e^{|\gamma_j|(R_1(\lambda_j/n)+R_2(\lambda_j/n))}\int_0^\infty dm\, \mathbf{1}_{I_j}(m)\right) \\
&\leq C_{t,\gamma,\sigma}\mathbb{E}\left(R^*(\lambda_j/n)e^{|\gamma_j|(R_1(\lambda_j/n)+R_2(\lambda_j/n))}\right) \\
&= C_{t,\gamma,\sigma}\sqrt{\lambda_j/n}\mathbb{E}\left(R^*(1)e^{|\gamma_j|\sqrt{\lambda_j/n}(R_1(1)+R_2(2))}\right) \\
&= \frac{C_{t,\gamma,\sigma}}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}}\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

◇

5.1.1.5 Convergence de la probabilité conditionnelle

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant et d'en déduire le Théorème 5.1.

Théorème 5.11 *Pour tout entier $l \geq 1$, et pour tous $\theta = (0 < t_1 < \ldots < t_l < t) \in \mathbb{R}^l$, $\xi = (x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l$, avec $x_j \neq x$, on a, pour chaque $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$,*

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M_j > \max_{i \neq j} M_i\right) = \mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^j - \frac{\mathbb{E}(\sigma\sqrt{t}R)}{\sqrt{n}}, M_j > \max_{i \neq j} M_i\right) + o(1/\sqrt{n}),$$

avec $R = \min_{k \in \mathbb{Z}} \check{R}(U + k)$, où U est uniformément distribuée sur $[0, 1]$, indépendante du processus $\check{R}$.

Montrons d'abord comment le théorème 5.1 se déduit du Théorème 5.11.

Démonstration du théorème 5.1. On déduit d'abord de la Proposition 5.6 que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_t \geq x > M_t^n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{N_t} \mathbf{1}_{\{M^j \geq x > M^{j,n}, M_j > \max_{i \neq j} M_i\}}\right) + o(1/\sqrt{n}) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{N_t} \mathbf{1}_{\{T_{j+1} - T_j > 8t/n\}} \mathbf{1}_{\{M^j \geq x > M^{j,n}, M_j > \max_{i \neq j} M_i\}}\right) + o(1/\sqrt{n}),\end{aligned}$$

la deuxième égalité résultant des Propositions 5.5 et 5.10. La Proposition 5.10 montre aussi, avec la Proposition 5.4 que l'espérance conditionnelle sachant $N_t = l$, $(T_1, \ldots, T_l) = \theta$ et $(X_{T_1}, \ldots, X_{T_l}) = \xi$ de la somme ci-dessus multipliée par $\sqrt{n}$ est dominée par une fonction de l et θ qui est intégrable par rapport à la loi de N_t et des temps de sauts antérieurs à t. Le Théorème 5.1 se déduit donc du Théorème 5.11 par convergence dominée. ◇

Pour la démonstration du Théorème 5.11, on part de la représentation donnée par la Proposition 5.7, qui s'écrit

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M_j > \max_{i \neq j} M_i\right) = \int_0^1 E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds,$$

avec

$$E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s) = \mathbb{E}\left(L^j_s \alpha_j(R_1(s)) \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^{j,n}_s\right\}}\right).$$

Pour tout entier $J \geq 1$, on peut écrire, pour n assez grand,

$$\int_0^1 E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds = \int_0^{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}} E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds + \int_{1-\frac{\lambda_j J}{n}}^1 E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds + \int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds. \tag{5.1.6}$$

Les deux premiers termes de cette décomposition font l'objet du lemme suivant.

Lemme 5.12 *Pour tout entier $J \geq 1$, pour tout (l, θ, ξ), et pour $j = 0, 1 \ldots, l$, on a, si $x_j \neq 0$*

$$\int_0^{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}} E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds + \int_{1-\frac{\lambda_j J}{n}}^1 E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds = o(1/\sqrt{n}).$$

Démonstration. On traite seulement le premier, l'argument étant analogue pour l'autre. Notons que pour n assez grand et $s \in [0, \lambda_j(J+1)/n]$, on a $1 - s > \lambda_j/n$ et on peut donc majorer $R^{j,n}_s$ par $R^*_2(\lambda_j/n)$ (avec $R^*_2(s) = \max_{0 \leq u \leq s} R^*_2(u)$. On a alors

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\int_0^{\lambda_j(J+1)/n} E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds &\leq \sqrt{n}\int_0^{\lambda_j(J+1)/n} ds\mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j(R_1(s)-R_2(1-s))-\frac{\gamma_j^2}{2}}}{2R_1(s)R_2(1-s)}\mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^*_2(\lambda_j/n)\}}\right) \\ &= \int_0^{\lambda_j(J+1)} \frac{ds'}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j(R_1(s'/n)-R_2(1-s'/n))-\frac{\gamma_j^2}{2}}}{2R_1(s'/n)R_2(1-s'/n)}\mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq R_1(s'/n) \leq \tilde{x}_j + R^*_2(\lambda_j/n)\}}\right),\end{aligned}$$

où on a posé $s' = ns$. Par scaling, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\int_0^{\lambda_j(J+1)/n} E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds &\leq \int_0^{\lambda_j(J+1)} ds\mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j(R_1(s)/\sqrt{n}-R_2(1-s/n))}}{2R_1(s)R_2(1-s/n)}\mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)/\sqrt{n}\leq \tilde{x}_j+R_2^*(\lambda_j/n)\}}\right)\\
&= \int_0^{\lambda_j(J+1)} ds\mathbb{E}\left(\frac{e^{\gamma_j(R_1(s)/\sqrt{n}-\sqrt{1-s/n}R_2(1))}}{2R_1(s)\sqrt{1-s/n}R_2(1)}\mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)/\sqrt{n}\leq \tilde{x}_j+\sqrt{1-\frac{s}{n}}R_2^*(\frac{\lambda_j}{(n-s)})\right\}}\right)\\
&\leq \int_0^{\lambda_j(J+1)} ds\mathbb{E}\left(\frac{e^{|\gamma_j|(R_1(s)+R_2(1))}}{2R_1(s)\sqrt{1-s/n}R_2(1)}\mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)/\sqrt{n}\leq \tilde{x}_j+\sqrt{1-\frac{s}{n}}R_2^*(\frac{\lambda_j}{(n-s)})\right\}}\right)\\
&\leq \int_0^{\lambda_j(J+1)} ds\mathbb{E}\left(\frac{e^{|\gamma_j|(R_1(s)+R_2(1))}}{\sqrt{2}R_1(s)R_2(1)}\mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)/\sqrt{n}\leq \tilde{x}_j+R_2^*(\frac{\lambda_j}{2n})\right\}}\right),
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant valide dès que $\lambda_j(J+1)/n < 1/2$ (ce qui assure que l'on a $1 - s/n \geq 1/2$ dans l'intégrale). Il est clair que la dernière intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini, pour vu que $\tilde{x}_j$ soit non nul, c'est-à-dire $x_j \neq x$. $\diamond$

Pour l'étude du troisième terme de (5.1.6), on suppose n assez grand pour que $\lambda_j J/n < 1/4$. On remarque que, pour $s \in [\lambda_j(J+1)/n, 1-\lambda_j J/n]$, on a $N_n^1 \geq J$ et $N_n^2 \geq J$. On a donc

$$R_s^{j,n} \leq R_s^{j,J,n},$$

où

$$R_s^{j,J,n} = \min_{-J\leq k\leq J} \check{R}(d_n^j(s) + \lambda_j(k/n)).$$

Donc, si on pose

$$E^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) = \mathbb{E}\left(L_s^j\alpha_j(R_1(s))\mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)\leq \tilde{x}_j+R_s^{j,J,n}\}}\right),$$

On a $E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s) \leq E^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)$.

Lemme 5.13 *On a, si les x_j sont distincts de x,*

$$\lim_{J\to+\infty}\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}}\left(E^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) - E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s)\right)ds\right) = 0.$$

Démonstration. On remarque que

$$E^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) - E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s) = \mathbb{E}\left(L_s^j\alpha_j(R_1(s))\mathbf{1}_{\Delta_s^{j,J,n}}\right),$$

avec

$$\Delta_s^{j,J,n} = \left\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,J,n} \text{ et } \exists k \in [0,N_n^1]\cup[1,N_n^2], \check{R}(d_n^j(s)+\lambda_j(k/n)) < R_1(s)\right\}.$$

Posons, pour $i = 1, 2$, et pour tous réels s_1, s_2 tels que $0 < s_1 < s_2$,

$$R_i^\sharp(s_1,s_2) = \min_{u\in[s_1,s_2]} R_i(u).$$

On voit que

$$\Delta_s^{j,J,n} \subset \{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,J,n}\} \cap \left\{R_1^\sharp(\lambda J/n, s) < R_s^{j,J,n} \text{ ou } R_2^\sharp(\lambda J/n, 1-s) < R_s^{j,J,n}\right\}.$$

Notons que $R_s^{j,J,n} \leq R_1^*(\lambda_j/n) \wedge R_2^*(\lambda_j/n)$ et que $R_2^\sharp(s_1,s_2) \leq R_2^\sharp(s_1)$, si on pose

$$R_2^\sharp(s) = \min_{u\in[s_1,+\infty[} R_2^\sharp(u), \quad s \geq 0.$$

On a donc

$$E^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) - E^{j,n}_{l,\theta,\xi}(s) \leq F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) + G^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s),$$

où

$$F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) = \mathbb{E}\left(L^j_s \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^*_1(\lambda_j/n), R^\sharp_2(\lambda_j J/n) < R^*_1(\lambda_j/n)\right\}}\right)$$

et

$$G^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) = \mathbb{E}\left(L^j_s \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq R_1(s) \leq \tilde{x}_j + R^*_2(\lambda_j/n), R^\sharp_1(\lambda_j J/n, s) < R^*_2(\lambda_j/n)\right\}}\right).$$

Dans la suite, on note $(\mathcal{F}^i_t)_{t\geq 0}$ $(i = 1, 2)$ la filtration naturelle du processus $(R_i(t))_{t\geq 0}$ et $\mathcal{F}^i$ la tribu engndrée par la réunion des $\mathcal{F}^i_t$, $t \geq 0$.

Pour estimer $F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)$, on écrit

$$L^j_s = \frac{e^{\gamma_j R_1(s) - \frac{\gamma_j^2}{2}(s)}}{R_1(s)} M^j_{1-s},$$

avec

$$M^j_{1-s} = \frac{e^{-\gamma_j R_2(1-s) - \frac{\gamma_j^2}{2}(1-s)}}{2R_2(1-s)}$$

on conditionne par $\mathcal{F}^1$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{e^{-\gamma_j R_2(1-s) - \frac{\gamma_j^2}{2}(1-s)}}{R_2(1-s)} \mathbf{1}_{\left\{R^\sharp_2(\lambda_j J/n) < R^*_1(\lambda_j/n)\right\}} \mid \mathcal{F}^1\right) \quad &\leq \quad ||M^j_{1-s}||_2 \left(\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\left\{R^\sharp_2(\lambda_j J/n) < R^*_1(\lambda_j/n)\right\}} \mid \mathcal{F}^1\right)\right)^{1/2} \\
&= \quad ||M^j_{1-s}||_2 \sqrt{f^{j,n}_J(R^*_1(\lambda_j/n))}, \qquad (5.1.7)
\end{aligned}$$

où $f^{j,n}_J$ désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire $R^\sharp_2(\lambda_j J/n)$. Notons que, par scaling, on a, pour tout $r > 0$,

$$f^{j,n}_J(r) = f_J\left(r\sqrt{n/\lambda_j}\right), \qquad (5.1.8)$$

en notant f_J la fonction de répartition de $R^\sharp_2(1)$. On a d'autre part

$$\begin{aligned}
||M^j_{1-s}||_2 \quad &= \quad \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \left\|\frac{e^{-\gamma_j\sqrt{1-s}R_2(1) - \frac{\gamma_j^2}{2}(1-s)}}{R_2(1)}\right\|_2 \\
&= \quad \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma_j\sqrt{1-s}m - \gamma_j^2(1-s) - \frac{m^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} dm\right)^{1/2} \\
&\leq \quad \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-2\gamma_j\sqrt{1-s}m - \gamma_j^2(1-s) - \frac{m^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} dm\right)^{1/2} \\
&= \quad \frac{1}{2\sqrt{1-s}} \left(2e^{\gamma_j^2(1-s)}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2(1-s)}} e^{\gamma_j^2(1-s)/2}. \qquad (5.1.9)
\end{aligned}$$

On a, en reportant les inégalités (5.1.7) et (5.1.9) dans l'expression de $F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)$, on obtient, après conditionnement par $\mathcal{F}^1_{\lambda_j/n}$,

$$F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) \quad \leq \quad \frac{e^{\gamma_j^2/2}}{\sqrt{2(1-s)}} \mathbb{E}\left(\sqrt{f^{j,n}_J(R^*_1(\lambda_j/n))} \int_0^\infty \bar{q}^j_{s-\lambda_j/n}(R_1(\lambda_j/n), m) \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R^*_1(\lambda_j/n)\right\}} dm\right),$$

avec

$$\bar{q}^j_{s-\lambda_j/n}(r, m) = e^{\gamma_j m - \gamma_j^2/2} \bar{q}_{s-\lambda_j/n}(r, m).$$

On montre (par la méthode utilisée dans la démonstration de la Proposition 5.10) que

$$\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} \bar{q}^j_{s-\lambda_j/n}(r,m)\frac{ds}{\sqrt{2(1-s)}} \leq C_{t,\gamma,\sigma}e^{r|\gamma_j|}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds &\leq C_{t,\gamma,\sigma}\mathbb{E}\left(\sqrt{f^{j,n}_J(R^*_1(\lambda_j/n))}e^{|\gamma_j|R_1(\lambda_j/n)}R^*_1(\lambda_j/n)\right)\\ &= C_{t,\gamma,\sigma}\mathbb{E}\left(\sqrt{f_J(R^*_1(1))}e^{|\gamma_j|\sqrt{\lambda_j/n}R_1(1)}\sqrt{\lambda_j/n}R^*_1(1)\right),\end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de l'invariance par scaling de R_1 et de (5.1.8). On a donc

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds \leq C_{t,\gamma,\sigma}\sqrt{\lambda_j}\mathbb{E}\left(\sqrt{f_J(R^*_1(1))}R^*_1(1)\right).$$

On a $f_J(r) = \mathbb{P}(R^\sharp_2(J) \leq r) = \mathbb{P}(R^\sharp_2(1) \leq r/\sqrt{J})$. Donc, pour tout $r > 0$, $\lim_{J\to\infty} f_J(r) = 0$. On en déduit, par convergence dominée, que

$$\lim_{J\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} F^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds = 0.$$

Reste à montrer la même propriété pour $G^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)$. On a, en conditionnant par $\mathcal{F}^2$ et par le couple $(R_1(\lambda_j J/n), R_1(s))$,

$$\begin{aligned}G^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) &= \mathbb{E}\left(L^j_s\mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)\leq\tilde{x}_j+R^*_2(\lambda_j/n),R^\sharp_1(\lambda_j J/n,s)<R^*_2(\lambda_j/n)\}}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(L^j_s\mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)\leq\tilde{x}_j+R^*_2(\lambda_j/n)\}}\Delta(\lambda_j J/n, s, R_1(\lambda_j J/n), R_1(s), R^*_2(\lambda_j/n))\right),\end{aligned}$$

avec la notation

$$\Delta(t_1,t_2,y,m,b) = \mathbb{P}\left(R^\sharp_1(t_1,t_2) \leq b \mid R_1(t_1) = y, R_1(t_2) = m\right), \text{ pour } 0 < t_1 < t_2 \text{ et } b,y,m > 0.$$

D'après le Lemme 5.9, on a $\Delta(t_1,t_2,y,m,b) \leq \bar{\Delta}(y,m,b)$, avec

$$\bar{\Delta}(y,m,b) = \frac{b(m+y)}{ym}.$$

On a donc

$$G^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) \leq \mathbb{E}\left(L^j_s\mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)\leq\tilde{x}_j+R^*_2(\lambda_j/n)\}}\bar{\Delta}(R_1(\lambda_j J/n), R_1(s), R^*_2(\lambda_j/n))\right).$$

Notons que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{e^{-\gamma_j R_2(1-s)-\frac{\gamma_j^2}{2}(1-s)}}{2R_2(1-s)} \mid \mathcal{F}^2_{\lambda_j/n}\vee\mathcal{F}^1\right) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty dm e^{-\gamma_j m-\frac{\gamma_j^2}{2}(1-s)}\bar{q}_{1-s-\lambda_j/n}(R_2(\lambda_j/n),m)\\ &\leq \frac{C}{\sqrt{1-s-\lambda_j/n}}e^{|\gamma_j|R_2(\lambda_j/n)+\frac{\gamma_j^2}{2}},\end{aligned}$$

en utilisant la troisième estimation de la Proposition 5.8. On conditionne maintenant par $\mathcal{F}^1_{\lambda_j J/n}\vee\mathcal{F}^2$ pour obtenir (en introduisant l'intervalle aléatoire $I^{*j}_n = [\tilde{x}_j, \tilde{x}_j + R^*_2(\lambda_j/n)]$ dans les notations)

$$\begin{aligned}G^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) &\leq C\mathbb{E}\left(\frac{e^{|\gamma_j|(R_2(\lambda_j/n)+R_1(s))+\frac{\gamma_j^2}{2}}}{\sqrt{1-s-\lambda_j/n}R_1(s)}\mathbf{1}_{I^{*j}_n}(R_1(s))\bar{\Delta}(R_1(\lambda_j J/n), R_1(s), R^*_2(\lambda_j/n))\right)\\ &= C\mathbb{E}\left(\frac{e^{|\gamma_j|R_2(\lambda_j/n)+\frac{\gamma_j^2}{2}}}{\sqrt{1-s-\lambda_j/n}}\int_0^\infty dm\,\bar{q}_{s-\lambda_j J/n}(R_1(\lambda_j J/n),m)\bar{\Delta}^j_n(R_1(\lambda_j J/n),m,R^*_2(\lambda_j/n))\right),\end{aligned}$$

où on a posé

$$\bar{\Delta}_n^j(r_1,m,r_2)=e^{|\gamma_j|m}\mathbf{1}_{I_n^{*j}}(m)\bar{\Delta}(r_1,m,r_2).$$

En remarquant (grâce, de nouveau, à la méthode utilisée dans la démonstration de la Proposition 5.10) que

$$\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} e^{|\gamma_j|m}\bar{q}_{s-\lambda_j J/n}(r,m)\frac{ds}{\sqrt{1-s-\lambda_j/n}}\leq C_{t,\gamma,\sigma}e^{r|\gamma_j|},$$

on obient

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} dsG_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) &\leq C_{t,\gamma,\sigma}\mathbb{E}\left(e^{|\gamma_j|(R_2(\lambda_j/n)+R_1(\lambda_j J/n))}\int_0^\infty dm\,\mathbf{1}_{I_n^{*j}}(m)\bar{\Delta}(R_1(\lambda_j J/n),m,R_2^*(\lambda_j/n))\right)\\ &= C_{t,\gamma,\sigma}\mathbb{E}\left(e^{|\gamma_j|\sqrt{\lambda_j/n}(R_1(J)+R_2(1))}\int_0^\infty dm\,\mathbf{1}_{\tilde{I}_n^{*j}}(m)\tilde{\Delta}_n^j(R_1(J),m,R_2^*(1))\right),\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{I}_n^{*j}=\left[\tilde{x}_j,\tilde{x}_j+\sqrt{\lambda_j/n}R_2^*(1)\right],\quad \tilde{\Delta}_n^j(r_1,m,r_2)=\bar{\Delta}\left(\sqrt{\lambda_j/n}r_1,m,\sqrt{\lambda_j/n}r_2\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_n^j(R_1(J),m,R_2^*(1)) &= \left[R_2^*(1)\left(\frac{1}{R_1(J)}+\frac{\sqrt{\frac{\lambda_j}{n}}R_1(J)}{m}\right)\right]\wedge 1\\ &\leq \frac{R_2^*(1)}{R_1(J)}+\left(R_2^*(1)\frac{\sqrt{\frac{\lambda_j}{n}}R_1(J)}{m}\right)\wedge 1.\end{aligned}$$

Par hypothèse, $x_j\neq x$, donc $\tilde{x}_j\neq 0$. Si $\tilde{x}_j>0$, on peut majorer $1/m$, pour $m\in I_n^{*j}$, par $1/\tilde{x}_j$ et écrire

$$\int_0^\infty dm\,\mathbf{1}_{\tilde{I}_n^{*j}}(m)\tilde{\Delta}_n^j(R_1(J),m,R_2^*(1))\leq\sqrt{\lambda_j/n}R_2^*(1)\left(\frac{R_2^*(1)}{R_1(J)}+R_2^*(1)\frac{\sqrt{\frac{\lambda_j}{n}}R_1(J)}{\tilde{x}_j}\right),$$

de sorte que

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} dsG_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)\leq C_{t,\gamma,\sigma}\sqrt{\lambda_j}\mathbb{E}\left(\frac{R_2^*(1)^2}{R_1(J)}\right),$$

et, comme $\lim_{J\to\infty}R_1(J)=0$, on a

$$\lim_{J\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} dsG_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)=0.$$

Si $\tilde{x}_j<0$, on majore $\bar{\Delta}$ par 1 et on remarque que

$$\int_0^\infty dm\,\mathbf{1}_{\tilde{I}_n^{*j}}(m)\tilde{\Delta}_n^j(R_1(J),m,R_2^*(1))\leq\mathbf{1}_{\left\{\sqrt{\lambda_j/n}R_2^*(1)>-\tilde{x}_j\right\}}\sqrt{\lambda_j/n}R_2^*(1).$$

On en déduit facilement que

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\lambda_j(J+1)/n}^{1-\lambda_j J/n} dsG_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)=0.$$

◇

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de $\int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}}E_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)ds$. Notons que, en conditionnant par $\mathcal{F}_{\lambda_j J/n}^1\vee\mathcal{F}_{\lambda_j J/n}^1$, on a

$$\begin{aligned}E_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) &= \mathbb{E}\left(L_s^j\alpha_j(R_1(s))\mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j\leq R_1(s)\leq\tilde{x}_j+R_s^{j,J,n}\right\}}\right)\\ &= \mathbb{E}\int_0^\infty dm\,\bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j\left(R_1\left(\lambda_j J/n\right),m\right)\alpha_j(m)\phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(R_2(\lambda_j J/n))\mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j\leq m\leq\tilde{x}_j R_s^{j,J,n}\right\}},\end{aligned}$$

avec les notations

$$\bar{q}_s^j(r,m) = e^{\gamma_j m - \frac{\gamma_j^2}{2}} \bar{q}_s(r,m), \quad \phi_s^j(r) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dm\, \bar{q}_s(r,m) e^{-\gamma_j m} dm.$$

Lemme 5.14 *On a, pour tout entier $J \geq 1$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \left| E_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) - \hat{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) \right| ds = 0,$$

où

$$\hat{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\, \bar{q}_s^j(0,m) \alpha_j(m) \phi_{1-s}^j(0) \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,J,n}\right\}} \right)$$

Démonstration. On considère d'abord

$$\tilde{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\, \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(0,m) \alpha_j(m) \phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(0) \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,J,n}\right\}} \right)$$

Posons $Z_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) = E_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) - \tilde{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)$ et

$$\zeta_s^j(r_1,r_2,m) = \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(r_1,m)\phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(r_2) - \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(0,m)\phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(0).$$

On a

$$Z_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) \quad = \quad \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\, \alpha_j(m) \mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,J,n}\right\}} \zeta_s^j(R_1(\lambda_j J/n), R_2(\lambda_j J/n), m) \right).$$

On a

$$\begin{aligned} |\zeta_s^j(r_1,r_2,m)| \quad \leq \quad & |\bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(r_1,m) - \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(0,m)|\phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(r_2) \\ & + \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(0,m)|\phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(r_2) - \phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(0)| \end{aligned}$$

Par les techniques de la Proposition 5.8, on montre facilement que

$$\left|\frac{\partial \bar{q}_s^j}{\partial r}(r,m)\right| \leq \frac{C}{s^{3/2}} e^{r|\gamma_j| + \gamma_j^2}, \quad \left|\frac{d\phi_s^j}{dr}(r)\right| \leq \frac{C}{s} e^{r|\gamma_j|+\gamma_j^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |\zeta_s^j(r_1,r_2,m)| \quad \leq \quad & C e^{(r_1+r_2)|\gamma_j| + 2\gamma_j^2} \left(\frac{r_1}{(s-\lambda_j J/n)^{3/2}(1-s-\lambda_j J/n)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{r_2}{(s-\lambda_j J/n)(1-s-\lambda_j J/n)} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| Z_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) \right| \quad & \leq \quad C\mathbb{E}\left(R_s^{i,J,n} e^{|\gamma_j|(R_1(\lambda_j J/n) + R_2(\lambda_j J/n)) + 2\gamma_j^2} R_1(\lambda_j J/n) \vee R_1(\lambda_j J/n) \delta_j^n(s) \right) \\ & \leq \quad C_{t,\gamma,\sigma} \mathbb{E}\left(R^*(\lambda_j/n) e^{|\gamma_j|(R_1(\lambda_j J/n) + R_2(\lambda_j J/n))} R_1(\lambda_j J/n) \vee R_2(\lambda_j J/n) \delta_j^n(s) \right) \\ & = \quad C_{t,\gamma,\sigma} \frac{\lambda_j}{n} \mathbb{E}\left(R^*(1) e^{|\gamma_j|\sqrt{\lambda_j/n}(R_1(J)+R_2(J))} R_1(J) \vee R_2(J) \delta_j^n(s) \right) \end{aligned}$$

avec

$$\delta_j^n(s) = \frac{1}{(s-\lambda_j J/n)^{3/2}(1-s-\lambda_j J/n)^{1/2}} + \frac{1}{(s-\lambda_j J/n)(1-s-\lambda_j J/n)}$$

Pour $\rho \geq 2$, et pour n assez grand, on vérifie que

$$\int_{\frac{\lambda_j \rho J}{n}}^{1-\frac{\lambda_j \rho J}{n}} \delta_j^n(s)ds \quad \leq \quad C\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda_j(\rho-1)J} + \log\left(\frac{n}{\lambda_j(\rho-1)J}\right)\right).$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\frac{\lambda_j \rho J}{n}}^{1-\frac{\lambda_j \rho J}{n}} \left|Z_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)\right| ds \leq \frac{C_{t,\gamma,\sigma}}{\sqrt{\lambda_j(\rho-1)J}}.$$

Mais, on peut montrer (comme dans le Lemme 5.12) que, pour ρ fixé,

$$\int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{\frac{\lambda_j \rho J}{n}} \left|Z_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)\right| ds + \int_{1-\frac{\lambda_j \rho J}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \left|Z_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)\right| ds = o(1/\sqrt{n}).$$

Par suite

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \left|Z_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)\right| ds \leq \frac{C_{t,\gamma,\sigma}}{\sqrt{\lambda_j(\rho-1)J}}$$

et, en faisant tendre n vers l'infini, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \left|E_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) - \tilde{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)\right| ds = 0.$$

Il reste alors à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \left|\hat{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) - \tilde{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)\right| ds = 0.$$

Notons qu'on peut supposer $\tilde{x}_j > 0$ car si $\tilde{x}_j < 0$, chaque terme est un $o(1/\sqrt{n})$, comme le montre l'argument donné dans le lemme précédent. On a

$$\hat{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) - \tilde{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s) \quad = \quad \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\, \eta_j^n(m)\alpha_j(m)\mathbf{1}_{\left\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,J,n}\right\}}\right),$$

avec

$$\begin{aligned}
\eta_j^n(m) &= \bar{q}_s^j(0,m)\phi_{1-s}^j(0) - \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(0,m)\phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(0) \\
&= (\bar{q}_s^j(0,m) - \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(0,m))\phi_{1-s}^j(0) + \bar{q}_{s-\lambda_j J/n}^j(0,m))\left(\phi_{1-s}^j(0) - \phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j(0)\right)
\end{aligned}$$

On a $\bar{q}_s(0,m) = \sqrt{2/\pi}\frac{m}{s^{3/2}}e^{-m^2/2s}$. Sur $\left\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R_s^{j,J,n}\right\}$, on peut majorer $e^{-m^2/2t}$ par $e^{-\tilde{x}_j^2/2t}$ et contrôler ainsi les dérivées par rapport au temps indépendamment de s. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\phi_s^j(0) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty dm\bar{q}_s(0,m) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^\infty dm\sqrt{2/\pi}me^{-m^2/2-\gamma_j\sqrt{s}m}.
\end{aligned}$$

A partir de cette expression, on obtient une domination de $\phi_{1-s-\lambda_j J/n}^j$ par $C/\sqrt{1-s}$ et on en déduit facilement le résultat souhaité. $\diamond$

Lemme 5.15 *On a, si $\tilde{x}_j > 0$,*

$$\int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \hat{E}_{l,\theta,\xi}^{j,J,n}(s)ds = \sqrt{\lambda_j/n}\mathbb{E}(R^J)\int_0^1 ds\bar{q}_s^j(0,\tilde{x}_j)\phi_{1-s}^j(0) + o(1/\sqrt{n}),$$

où

$$R^J = \min_{|k|\leq J} \check{R}(U+k),$$

avec U uniforme sur $[0,1]$, indépendante de $\check{R}$.

Démonstration. Posons

$$\bar{E}^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) = \mathbb{E}(R^{j,J,n}_s)\bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\phi^j_{1-s}(0).$$

On a, pour $s \in]\lambda_j/n, 1-\lambda_j/n[$,

$$\begin{aligned}
\left|\hat{E}^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s) - \bar{E}^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)\right| &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\phi^j_{1-s}\left|\bar{q}^j_s(0,m)\alpha_j(m) - \bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\alpha_j(\tilde{x}_j)\right| \mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R^{j,J,n}_s\}}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\phi^j_{1-s}\left|\bar{q}^j_s(0,m)\alpha_j(m) - \bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\alpha_j(\tilde{x}_j)\right| \mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R^*(\lambda_j/n)\}}\right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{1-s}}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty dm\left|\bar{q}^j_s(0,m)\alpha_j(m) - \bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\alpha_j(\tilde{x}_j)\right| \mathbf{1}_{\{\tilde{x}_j \leq m \leq \tilde{x}_j + R^{j,J,n}_s\}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit facilement, en utilisant la continuité de α_j et de $\bar{q}^j$ que

$$\int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \hat{E}^{j,J,n}_{l,\theta,\xi}(s)ds = \int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} \mathbb{E}(R^{j,J,n}_s)\bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\phi^j_{1-s}(0)ds + o(1/\sqrt{n}).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R^{j,J,n}_s) &= \mathbb{E}\left(\min_{|k|\leq J} \check{R}(d^j_n(s) + \lambda_j k/n)\right) \\
&= \sqrt{\lambda_j/n}\,\mathbb{E}\left(\min_{|k|\leq J} \check{R}(nd^j_n(s)/\lambda_j + k)\right) \\
&= \sqrt{\lambda_j/n}\, f\left(\frac{nd^j_n(s)}{\lambda_j}\right),
\end{aligned}$$

en posant $f(u) = \mathbb{E}\left(\min_{|k|\leq J} \check{R}(u+k)\right)$, pour $u \in [0,1]$. Il est classique de vérifier que, pour toute fonction intégrable g sur $[0,1]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{\lambda_j(J+1)}{n}}^{1-\frac{\lambda_j J}{n}} f\left(\frac{nd^j_n(s)}{\lambda_j}\right) g(s)ds = \int_0^1 g(s)ds \int_0^1 f(u)du.$$

D'où le lemme. ◇

Démonstration du théorème 5.11. On a d'après les résultats des lemmes précédents,

$$\lim_{J\to\infty} \sqrt{n}\left(\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M_j > \max_{i\neq j} M_i\right) - \sqrt{\lambda_j/n}\,\mathbb{E}(R^J)\int_0^1 ds\bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\phi^j_{1-s}(0)\right) = 0.$$

Mais

$$\lim_{J\to\infty} \mathbb{E}(R^J) = \mathbb{E}(R).$$

D'où

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^{j,n}, M_j > \max_{i\neq j} M_i\right) = \sqrt{\lambda_j/n}\,\mathbb{E}(R)\int_0^1 ds\bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\phi^j_{1-s}(0) + o(1/\sqrt{n}).$$

Et, en reprenant la démonstration, on voit que

$$\mathbb{P}_{l,\theta,\xi}\left(M^j \geq x > M^j - \sigma\sqrt{t}\mathbb{E}(R)/\sqrt{n}, M_j > \max_{i\neq j} M_i\right) = \sqrt{\lambda_j/n}\,\mathbb{E}(R)\int_0^1 ds\bar{q}^j_s(0,\tilde{x}_j)\phi^j_{1-s}(0) + o(1/\sqrt{n}).$$

◇

5.1.2 Estimation des erreurs

Dans cette partie nous nous intéresserons à l'erreur entre des options barrières continue et discrète. Nous allons en fait relier cette erreur à la différence entre les probabilités de franchissement (ou non) de la barrière dans le cas continue et dans le cas discret.

Proposition 5.16 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) intégrable. En se référant aux notations des figures 5.1.1 et 5.1.2, on a*

1. *Soit V le prix d'une option barrière call Up, et V^n sa contrepartie discrète.*
$$|V - V^n| \leq e^{-rT} (H-K)^+ \left| \mathbb{P}\left[M_T < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right] - \mathbb{P}\left[M_T^n < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right] \right|.$$
2. *Soit V le prix d'une option barrière put Up, et V^n sa contrepartie discrète.*
$$|V - V^n| \leq e^{-rT} K \left| \mathbb{P}\left[M_T < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right] - \mathbb{P}\left[M_T^n < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right] \right|.$$
3. *Soit V le prix d'une option barrière put Down, et V^n sa contrepartie discrète.*
$$|V - V^n| \leq e^{-rT} (K-H)^+ \left| \mathbb{P}\left[\tilde{M}_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)\right] - \mathbb{P}\left[\tilde{M}_T^n < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)\right] \right|,$$
où $\tilde{M}_T = \sup_{0\leq t\leq T}(-X_t)$.
4. *Soit V le prix d'une option barrière call Down, et V^n sa contrepartie discrète. Supposons que $\left(e^{-(r-\delta)t}e^{X_t}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors*
$$|V - V^n| \leq S_0 \left(1 - \frac{K}{H}\right)^+ e^{-\delta T} \left| \bar{\mathbb{P}}\left[M_T^{\bar{X}} < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)\right] - \bar{\mathbb{P}}\left[M_T^{\bar{X},n} < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)\right] \right|,$$
où $\bar{\mathbb{P}}$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, $\bar{X}$ est un processus de Lévy sous $\bar{\mathbb{P}}$ de triplet $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma}, \bar{\nu})$, avec
$$\begin{aligned} &\bar{\gamma} = \delta - r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\right)\bar{\nu}(dx) \\ &\bar{\sigma} = \sigma \\ &\bar{\nu}(dx) = e^{-x}\nu(-dx). \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 5.16. On démontre le cas des Out. On déduira le cas des *In*, grâce à la relation qui les lie aux *Out* : la somme d'une option In et d'une option *Out* de même type, est égal à une option européenne. On pose $h = \log\left(\frac{H}{S0}\right)$. Dans le cas du call *Up* (voir la figure 5.1.1)

$$\begin{aligned} |V - V^n| &= \left| \mathbb{E}e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H} - \mathbb{E}e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H} \right| \\ &\leq \mathbb{E}e^{-rT}(S_T - K)^+ \left| \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H} \right| \\ &\leq \mathbb{E}e^{-rT}(H - K)^+ \left| \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H} \right| \\ &= e^{-rT}(H-K)^+ \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H}\right) \\ &= e^{-rT}(H-K)^+ \left(\mathbb{P}\left[S_0 e^{M_T^n} < H\right] - \mathbb{P}\left[S_0 e^{M_T} < H\right]\right) \\ &= e^{-rT}(H-K)^+ \left(\mathbb{P}\left[M_T^n < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right] - \mathbb{P}\left[M_T < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right]\right). \end{aligned}$$

Pour le put *Up* on a

$$\begin{aligned}
|V - V^n| &= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H} - \mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H}\right| \\
&\leq \mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \left|\mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H}\right| \\
&\leq \mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \left|\mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H}\right| \\
&\leq \mathbb{E}e^{-rT} K \left|\mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H}\right| \\
&= e^{-rT} K \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{S_0 e^{M_T^n} < H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{M_T} < H}\right) \\
&= e^{-rT} K \left(\mathbb{P}\left[S_0 e^{M_T^n} < H\right] - \mathbb{P}\left[S_0 e^{M_T} < H\right]\right) \\
&= e^{-rT} K \left(\mathbb{P}\left[M_T^n < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right] - \mathbb{P}\left[M_T < \log\left(\frac{H}{S_0}\right)\right]\right).
\end{aligned}$$

Das le cas put *Down* on a

$$\begin{aligned}
|V - V^n| &= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H} - \mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T^n} > H}\right| \\
&\leq \mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \left|\mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T^n} > H}\right| \\
&\leq \mathbb{E}e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+ \left|\mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T^n} > H}\right| \\
&\leq \mathbb{E}e^{-rT}\left(K - H\right)^+ \left|\mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T^n} > H}\right| \\
&= e^{-rT}\left(K - H\right)^+ \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{S_0 e^{m_T^n} > H} - \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H}\right) \\
&= e^{-rT}\left(K - H\right)^+ \left(\mathbb{P}\left[S_0 e^{m_T^n} > H\right] - \mathbb{P}\left[S_0 e^{m_T} > H\right]\right) \\
&= e^{-rT}\left(K - H\right)^+ \left(\mathbb{P}\left[\tilde{M}_T^n < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)\right] - \mathbb{P}\left[\tilde{M}_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)\right]\right).
\end{aligned}$$

Enfin dans le cas call *Down* on a

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{E}e^{-rT}\left(S_T - K\right)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H} \\
&= \mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0 e^{X_T} - K\right)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H} \\
&= \mathbb{E}e^{-rT + X_T}\left(S_0 - K e^{-X_T}\right)^+ \mathbb{1}_{S_0 e^{m_T} > H} \\
&= \mathbb{E}e^{-\delta T} e^{-(r-\delta)T + X_T}\left(S_0 - K e^{\tilde{X}_T}\right)^+ \mathbb{1}_{\tilde{M}_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)}.
\end{aligned}$$

Or $\left(e^{-(r-\delta)T + X_t}\right)_{t \geq 0}$ est une martingale avec

$$\mathbb{E}e^{-(r-\delta)T + X_t} = 1.$$

On définit alors la probabilité $\bar{\mathbb{P}}$, équivalente à $\mathbb{P}$, par

$$\left.\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-(r-\delta)t + X_t}, \ \forall t \geq 0.$$

Par *[Kyprianou(2006), théorème* 3.9*]*, $\tilde{X}$ est un processus de Levy sous $\bar{\mathbb{P}}$ de triplet $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma}, \bar{\nu})$. Où

$$\begin{aligned}
&\bar{\gamma} = \delta - r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x| \leq 1}\right) \bar{\nu}(dx) \\
&\bar{\sigma} = \sigma \\
&\bar{\nu}(dx) = e^{-x}\nu(-dx).
\end{aligned}$$

Et $\bar{\gamma}$ est défini dès que $\int_{|x|>1} e^x \nu(dx)$. Donc

$$V \quad = \quad \bar{\mathbb{E}} e^{-\delta T} \left(S_0 - K e^{\tilde{X}_T} \right)^+ \mathbb{1}_{\tilde{M}_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)}.$$

De même

$$V_n \quad = \quad \bar{\mathbb{E}} e^{-\delta T} \left(S_0 - K e^{\tilde{X}_T} \right)^+ \mathbb{1}_{\tilde{M}^n_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} |V - V_n| &= \bar{\mathbb{E}} e^{-\delta T} \left(S_0 - K e^{\tilde{X}_T} \right)^+ \left| \mathbb{1}_{\tilde{M}_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)} - \mathbb{1}_{\tilde{M}^n_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)} \right| \\ &\leq \bar{\mathbb{E}} e^{-\delta T} \left(S_0 - \frac{K S_0}{H} \right)^+ \left| \mathbb{1}_{\tilde{M}_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)} - \mathbb{1}_{\tilde{M}^n_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right)} \right| \\ &\leq e^{-\delta T} S_0 \left(1 - \frac{K}{H} \right)^+ \left(\bar{\mathbb{P}} \left[\tilde{M}^n_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right) \right] - \bar{\mathbb{P}} \left[\tilde{M}_T < \log\left(\frac{S_0}{H}\right) \right] \right). \end{aligned}$$

◇

Remarque 5.17 *On a*

$$\mathbb{P}\left[M_T < x\right] - \mathbb{P}\left[M^n_T < x\right] = \mathbb{P}\left[M_T \geq x\right] - \mathbb{P}\left[M^n_T \geq x\right] = \mathbb{P}\left[M_T \geq x, M^n_T < x\right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tout l'intérêt de la proposition 5.16 réside alors dans l'éstimation de la quantité $\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M^n_T < x\right]$. Commençons par le cas activité finie.

Théorème 5.18 *Soit X un processus de Lévy à activité finie intégrable de triplet (γ, σ^2, ν), vérifiant $\sigma > 0$. Alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\left[M_T \geq x, M^n_T < x\right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Proposition 5.19 *Soit X un processus de Lévy à activité finie de triplet (γ, σ^2, ν) vérifiant $\sigma = 0$.*

1. *Si $\gamma_0 = 0$*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\left[M_T \geq x, M^n_T < x\right] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. *Si ν a une densité bornée*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\left[M_T \geq x, M^n_T < x\right] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans le cas jump-diffusion, nous allons nous servir du caractère Brownien du processus entre deux instant saut.

Lemme 5.20 *Soient X un processus de Lévy de triplet $(\gamma, \sigma^2, 0)$, $T > 0$, $\tau \leq T$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq s \leq \tau} X_s \geq x \right] - \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq \frac{kT}{n} \leq \tau} X_{\frac{kT}{n}} \geq x \right] \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Où C est une constante > 0.

Ce lemme se démontre en utilisant le théorème 3.2.2 de *[Seumen Tonou(1997)]* que nous énonçons ci-dessous.

Théorème 5.21 *([Seumen Tonou(1997), theoreme 3.2.2])* Soient X un processus de Lévy de triplet $(\gamma, 1, 0)$, $T > 0$, $\tau \leq T$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{T}{n}$, et pour $x > 0$

$$\varepsilon_m(x) = \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq m} X_{kh} \leq x\right] - \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq mh} X_s \leq x\right].$$

Alors pour $h \leq \frac{x}{|\gamma|}$ et $m \leq n$ on a

$$\varepsilon_m(x) \quad \leq \quad \frac{2}{\sqrt{m}} \exp\left\{-\frac{(x - m\gamma h)^2}{2mh}\right\} + |\gamma|\sqrt{2\pi h}.$$

Remarque 5.22 *Une lecture attentive de la démonstration du théorème 5.21 permet de voir que la condition $h \leq \frac{x}{|\gamma|}$ n'est nécessaire que si $\gamma < 0$. Dans le cas $\gamma < 0$ la démonstration par réccurence utilisée dans le théorème montre que*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq m} X_{kh} \leq x\right] \quad \leq \quad \frac{2}{\sqrt{m}} + |\gamma|\sqrt{2\pi h}.$$

Et pour $x < |\gamma|$ on peut montrer que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq mh} X_s \leq x\right] \quad \leq \quad \frac{|\gamma|\sqrt{h}}{\sqrt{2\pi}}.$$

En définitive on a pour $h > \frac{x}{|\gamma|}$ et $m \leq n$

$$\varepsilon_m(x) \quad \leq \quad \frac{2}{\sqrt{m}} + \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right)|\gamma|\sqrt{h}.$$

Démonstration du lemme 5.20. On suppose $\sigma = 1$. Le cas $\sigma \neq 1$ se déduit facilement. On pose $h = \frac{T}{n}$ et

$$\varepsilon_n \quad := \quad \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq \tau} X_s \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq kh\leq \tau} X_{kh} \geq x\right].$$

Notons que si $x \leq 0$ alors $\varepsilon_n = 0$. On considére donc que $x > 0$. Si $\tau < h$, alors $n < \frac{T}{\tau}$. Donc

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\varepsilon_n \quad &= \quad \sqrt{n}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq \tau} X_s \geq x\right] \\ &\leq \quad \sqrt{\frac{T}{\tau}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon_n \quad \leq \quad \sqrt{\frac{T}{n\tau}}.$$

On va donc supposer que $h \leq \tau$. On a

$$\begin{aligned}\varepsilon_n \quad &= \quad \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq \tau} X_s \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n_\tau} X_{\frac{kT}{n}} \geq x\right] \\ &= \quad \varepsilon_n^1 + \varepsilon_n^2.\end{aligned}$$

Où $n_\tau = \left[\frac{n\tau}{T}\right]$ et [ ] désigne la partie entière.

$$\varepsilon_n^1 = \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq n_\tau} X_{\frac{kT}{n}} \geq x\right]$$

$$\varepsilon_n^2 = \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq \tau} X_s \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s \geq x\right].$$

Remarquons que $1 \leq n_\tau \leq n$. On a d'une part

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^2 &= \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq \tau} X_s \geq x\right] - \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s \geq x\right] \\
&= \mathbb{P}\left[x - \left(\sup_{0\leq s\leq \tau} X_s - \sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s\right) \leq \sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s < x\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[x - \left(\sup_{n_\tau h\leq s\leq \tau} X_s - X_{n_\tau h}\right) \leq \sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s < x\right].
\end{aligned}$$

La dérnière inégalité vient du fait que

$$\sup_{0\leq s\leq \tau} X_s - \sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s \leq \sup_{n_\tau h\leq s\leq \tau} X_s - X_{n_\tau h}.$$

Les v.a. $\sup_{0\leq s\leq n_\tau h} X_s$ et $\left(\sup_{n_\tau h\leq s\leq \tau} X_s - X_{n_\tau h}\right)$ étant indépendantes, alors par le lemme 2.22 il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^2 &\leq \frac{C_0}{\sqrt{n_\tau h}}\mathbb{E}\left(\sup_{n_\tau h\leq s\leq \tau} X_s - X_{n_\tau h}\right) \\
&= \frac{C_0}{\sqrt{n_\tau h}}\mathbb{E}\sup_{n_\tau h\leq s\leq \tau} X_{s-n_\tau h} \\
&= \frac{C_0}{\sqrt{n_\tau h}}\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq \tau-n_\tau h} X_s.
\end{aligned}$$

Or

$$\tau - n_\tau h \leq \frac{T}{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^2 &\leq \frac{C_0}{\sqrt{n_\tau h}}\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq h} X_s \\
&= \frac{C_0}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{n\tau}{n_\tau T}}\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq h} X_s \\
&\leq \frac{C_0\sqrt{2}}{\sqrt{\tau}}\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq h} X_s.
\end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\frac{n\tau}{n_\tau T} &= \frac{\frac{n\tau}{T}}{\left[\frac{n\tau}{T}\right]} \\
&\leq 2, \text{ car } \frac{n\tau}{T} \geq 1.
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant la proposition 3.3, il existe $C_1 > 0$ telle que

$$\varepsilon_n^2 \leq \frac{C_1}{\sqrt{n\tau}}.$$

D'autre part, par le théorème 5.21 et la remarque 5.22 il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^1 &\leq C_2\left(\frac{1}{\sqrt{n_\tau}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq C_2\left(\sqrt{\frac{n\tau}{n_\tau T}}\frac{T}{\sqrt{n\tau}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

D'où l'existance d'une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\varepsilon_n^1 \quad \leq \quad \frac{C_3}{\sqrt{\tau}\sqrt{n}}$$

En conclusion, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\varepsilon_n \quad \leq \quad \frac{C}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$\diamond$

Démonstration de la proposition 5.19. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x \leq 0$ alors

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] \quad = \quad 0.$$

On considérera par la suite que $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] &= \mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + (M_T - M_T^n)\right] \\
&= \mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + (M_T - M_T^n), \max_{1 \leq k \leq n} \left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \leq 1\right] \\
&\quad + \mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + (M_T - M_T^n), \max_{1 \leq k \leq n} \left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right].
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\max_{1 \leq k \leq n} \left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right] &= 1 - \mathbb{P}\left[\max_{1 \leq k \leq n} \left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \leq 1\right] \\
&= 1 - \mathbb{P}\left[\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \leq 1, 1 \leq k \leq n\right] \\
&= 1 - \left(\mathbb{P}\left[N_{\frac{T}{n}} \leq 1\right]\right)^n \\
&= 1 - \left(e^{-\frac{\lambda T}{n}} + e^{-\frac{\lambda T}{n}} \frac{\lambda T}{n}\right)^n \\
&= 1 - e^{-\lambda T} \left(1 + \frac{\lambda T}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\max_{1 \leq k \leq n} \left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right] &= 1 - e^{-\lambda T + n \log\left(1 + \frac{\lambda T}{n}\right)} \\
&\sim \lambda T - n \log\left(1 + \frac{\lambda T}{n}\right) \\
&= \lambda T - n \left(\frac{\lambda T}{n} - \frac{\lambda^2 T^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{\lambda^2 T^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left[\max_{1 \leq k \leq n} \left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right] = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.1.10}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + (M_T - M_T^n), \max_{1 \leq k \leq n} \left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right] \quad = \quad O\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, sur $\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \leq 1\right\}$, si $\gamma_0 = 0$ alors $M_T = M_T^n$, et donc

$$\mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + (M_T - M_T^n), \max_{1\leq k\leq n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \leq 1\right] = 0.$$

On obtient le point 1 de la proposition. Sinon si $\gamma_0 \neq 0$, on a $M_T - M_T^n \leq \frac{|\gamma_0|T}{n}$. On a donc

$$\mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + (M_T - M_T^n), \max_{1\leq k\leq n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \leq 1\right] \leq u_n,$$

avec

$$u_n = \mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + \frac{|\gamma_0|T}{n}, N_T > 0\right].$$

En reprenant les notations de la section 3.3, on a en notant $p_m = \mathbb{P}[N_T = m]$

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + \frac{|\gamma_0|T}{n} / N_T = m\right] \mathbb{P}[N_T = m] \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + \frac{|\gamma_0|T}{n}, \nu_m = j / N_T = m\right] p_m \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}\left[x \leq M_T < x + \frac{|\gamma_0|T}{n}, \nu_m = j / N_T = m\right] p_m, \text{ car } x > 0 \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}\left[x \leq \hat{X}_j < x + \frac{|\gamma_0|T}{n}, \nu_m = j / N_T = m\right] p_m.
\end{aligned}$$

Si Y_1 a une densité bornée par une constante C_Y, on peut facilement remarquer que $\hat{X}_j$ a une densité bornée par C_Y^{j-1}, pour $1 \leq j \leq m$. Et par suite

$$\begin{aligned}
u_n &\leq \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m} C_Y^{j-1}\frac{|\gamma_0|T}{n} p_m \\
&\leq \frac{|\gamma_0|T}{n}\sum_{m=1}^{+\infty} m\max\left(1, C_Y^{m-1}\right) p_m \\
&= \frac{|\gamma_0|T}{n}\sum_{m=1}^{+\infty} m\max\left(1, C_Y^{m-1}\right) \frac{(\lambda T)^m}{m!} \\
&= \frac{\lambda|\gamma_0|T^2}{n}\sum_{m=1}^{+\infty} m\max\left(1, C_Y^{m-1}\right) \frac{(\lambda T)^{(m-1)}}{(m-1)!} \\
&= O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui montre le point 2 de la proposition. ◇

Démonstration du théorème 5.18. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x \leq 0$ alors

$$\mathbb{P}[M_T \geq x, M_T^n < x] = 0.$$

On considérera par la suite que $x > 0$. On a

$$\mathbb{P}[M_T \geq x, M_T^n < x] = \mathbb{P}[M_T^n < x] - \mathbb{P}[M_T < x].$$

Soit T_1 le pemier instant de saut de N. Posons, pour tout $\tau > 0$

$$\begin{aligned}
M_\tau &= \sup_{0\leq s<\tau} X_s \\
M_{\tau,T} &= \sup_{\tau\leq s\leq T} X_s \\
M_\tau^n &= \max_{0\leq \frac{kT}{n}<\tau} X_{\frac{kT}{n}} \\
M_{\tau,T}^n &= \max_{\tau\leq \frac{kT}{n}\leq T} X_{\frac{kT}{n}}.
\end{aligned}$$

La v.a. T_1 est une exponentielle de paramètre $\lambda = \nu(\mathbb{R})$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_T < x] &= \mathbb{P}[M_{T_1} < x, M_{T_1,T} < x] \\
&= \mathbb{P}[M_{T_1} < x, (M_{T_1,T} - X_{T_1}) + X_{T_1} < x] \\
&= \mathbb{P}[M_{T_1} < x, X_{T_1} < x - (M_{T_1,T} - X_{T_1})].
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\mathbb{P}[M_T^n < x] = \mathbb{P}\left[M_{T_1}^n < x, X_{T_1} < x - \left(M_{T_1,T}^n - X_{T_1}\right)\right].$$

Notons que conditionnellement à T_1 la v.a. $M_{T_1,T} - X_{T_1}$ est indépendante de X_{T_1} et de $M_{T_1,T}$, de même la v.a. $M_{T_1,T}^n - X_{T_1}$ est indépendante de X_{T_1} et de $M_{T_1,T}^n$. Si on note Z la partie continue de X, on a

$$\begin{aligned}
X_{T_1} &= Z_{T_1} + Y_1 \\
M_{T_1} &= \sup_{0\leq s<T_1} Z_s \\
M_{T_1}^n &= \sup_{0\leq \frac{kT}{n}<T_1} Z_{\frac{kT}{n}}.
\end{aligned}$$

Où Y_1 est la taille des sauts de X. Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_T < x] &= \int_0^T \lambda e^{-\lambda\tau}\mathbb{P}[M_\tau < x, X_\tau < x - (M_{\tau,T} - X_\tau)]\, d\tau \\
&= \int_0^T \lambda e^{-\lambda\tau}\mathbb{P}[M_\tau < x, Z_\tau < x - (M_{\tau,T} - X_\tau) - Y_1]\, d\tau.
\end{aligned}$$

On a également

$$\mathbb{P}[M_T^n < x] = \int_0^T \lambda e^{-\lambda\tau}\mathbb{P}\left[M_\tau^n < x, Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] d\tau.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_T \geq x, M_T^n < x] &= \int_0^T \lambda e^{-\lambda\tau}\mathbb{P}\left[M_\tau^n < x, Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] d\tau \\
&\quad - \int_0^T \lambda e^{-\lambda\tau}\mathbb{P}[M_\tau < x, Z_\tau < x - (M_{\tau,T} - X_\tau) - Y_1]\, d\tau \\
&= \int_0^T \lambda e^{-\lambda\tau}\left(\delta_1^n(\tau) + \delta_1^n(\tau)\right) d\tau,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\delta_1^n(\tau) &= \mathbb{P}\left[M_\tau^n < x, Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] - \mathbb{P}\left[M_\tau < x, Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] \\
\delta_1^n(\tau) &= \mathbb{P}\left[M_\tau < x, Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] - \mathbb{P}[M_\tau < x, Z_\tau < x - (M_{\tau,T} - X_\tau) - Y_1].
\end{aligned}$$

Les fonctions δ_1^n et δ_2^n sont évidemment positives. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\delta_1^n(\tau) &\leq \mathbb{P}\left[M_\tau < x, Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] - \mathbb{P}\left[M_\tau^n < x, Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\tau}\sqrt{n}}, \text{ par le lemme 5.20,}
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de τ. D'autre part

$$\begin{aligned}\delta_2^n(\tau) &\leq \mathbb{P}\left[x - (M_{\tau,T} - X_\tau) - Y_1 \leq Z_\tau < x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[x - \left(M_{\tau,T}^n - X_\tau\right) - Y_1 \leq Z_\tau < x - (M_{\tau,T} - X_\tau) - Y_1\right] \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\tau}} \mathbb{E}\left(M_{\tau,T} - M_{\tau,T}^n\right), \text{ par le lemme 2.22,}\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de τ (qui est différent du précédent). Posons

$$n_\tau = \left[\frac{n\tau}{T}\right] + 1,$$

où [] désigne la partie entière. On pose $h = \frac{T}{n}$. Comme $n_\tau h > \tau$

$$\begin{aligned}M_{\tau,T} - M_{\tau,T}^n &\leq \sup_{\tau \leq s \leq T} X_s - \max_{n_\tau \leq k \leq n} X_{kh} \\ &\leq \left(\sup_{\tau \leq s \leq T} X_s - X_\tau\right) - \left(\max_{n_\tau \leq h \leq n} X_{kh} - X_{n_\tau h}\right) + \left(X_\tau - X_{n_\tau h}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sup_{\tau \leq s \leq T} X_s - X_\tau &=^d \sup_{0 \leq s \leq T-\tau} X_s \\ \max_{n_\tau \leq h \leq n} X_{kh} - X_{n_\tau h} &=^d \max_{0 \leq h \leq n - n_\tau} X_{kh} \\ X_\tau - X_{n_\tau h} &=^d -X_{n_\tau h - \tau}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(M_{\tau,T} - M_{\tau,T}^n\right) \leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq T-\tau} X_s - \mathbb{E} \max_{0 \leq h \leq n-n_\tau} X_{kh} - \mathbb{E}X_{n_\tau h - \tau}.$$

Remarquons que

$$n_\tau h - \tau \leq \frac{T}{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}X_{n_\tau h - \tau}\right| &= \left|\gamma_0 + \int_{|x|>1}\right| (n_\tau h - \tau) \\ &\leq \left|\gamma_0 + \int_{|x|>1}\right| \frac{T}{n}.\end{aligned}$$

On sait aussi, que par la proposition 3.2, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq T-\tau} X_s - \max_{0 \leq h \leq n-n_\tau} X_{kh}\right) &= \int_0^{T-\tau} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \sum_{k=0}^{n-n_\tau} \frac{\mathbb{E}X_{kh}^+}{k} \\ &= \int_0^{(n-n_\tau)h} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds + \int_{(n-n_\tau)h}^{T-\tau} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \sum_{k=0}^{n-n_\tau} \frac{\mathbb{E}X_{kh}^+}{k}.\end{aligned}$$

Par la proposition 3.3, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$\begin{aligned}\int_{(n-n_\tau)h}^{T-\tau} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds &\leq \int_{(n-n_\tau)h}^{T-\tau} \left(c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{s}}\right) ds \\ &= c_1 \left(T - \tau - (n - n_\tau)h\right) + \frac{c_2}{2}\sqrt{T - \tau - (n-n_\tau)h} \\ &= c_1 \left(n_\tau h - \tau\right) + \frac{c_2}{2}\sqrt{n_\tau h - \tau} \\ &\leq c_1 \frac{T}{n} + \frac{c_2}{2}\sqrt{\frac{T}{n}}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_0^{(n-n_\tau)h} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \sum_{k=0}^{n-n_\tau} \frac{\mathbb{E}X_{kh}^+}{k} \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-n_\tau} \int_{(k-1)h}^{kh} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \int_{(k-1)h}^{kh} \sum_{k=0}^{n-n_\tau} \frac{\mathbb{E}X_{kh}^+}{kh}.$$

En reprenant la démonstration du théorème 3.8 on peut voir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_0^{(n-n_\tau)h} \frac{\mathbb{E}X_s^+}{s} ds - \sum_{k=0}^{n-n_\tau} \frac{\mathbb{E}X_{kh}^+}{k} \quad \leq \quad \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

En définitive, il existe une constante $C > 0$ (indépendant de τ et de x) telle que

$$\delta_1^n(\tau) + \delta_1^n(\tau) \quad \leq \quad \frac{C}{\sqrt{\tau}\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] \quad \leq \quad \frac{C}{\sqrt{n}} \int_0^T \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau.$$

◇

Contrairement au cas activité finie, dans le cas activité infinie, la vitesse de convergence de $\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right]$ dépend de x.

Proposition 5.23 *Soit X un processus de Lévy intégrable de triplet (γ, σ^2, ν) et $x > 0$. On suppose aussi que M_T a une densité localement bornée sur $]0, +\infty[$, alors*

1. *Si $\sigma > 0$*

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right).$$

2. *Si $\sigma = 0$*

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right).$$

3. *Si $\sigma = 0$ et $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$*

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

4. *Si $\sigma = 0$ et $\int_{|x|\leq 1} |x \log(|x|)| \nu(dx) < \infty$*

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Démonstration de la proposition 5.23. On a (voir la démonstration du théorème 5.18)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] &\leq C_x\delta + \mathbb{P}\left[|M_T - M_T^n| > \delta\right] \\ &\leq C_x\delta + \frac{\mathbb{E}\left|M_T - M_T^n\right|}{\delta}, \end{aligned}$$

où C_x est un majorant de la densité de M_T au voisinage de x. On choisit $\delta = \sqrt{\mathbb{E}\left|M_T - M_T^n\right|}$, et on obtient

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] \leq (C_x + 1)\sqrt{\mathbb{E}\left|M_T - M_T^n\right|}.$$

On conclut par la proposition 3.8 et la proposition 3.11. ◇

Lorsqu'on suppose l'absence de saut positif, on arrive à améliorer les vitesses de convergence du cas activité infinie.

Proposition 5.24 *Soit X un processus de Lévy à variation finie de triplet (γ, σ^2, ν) et $x > 0$. On suppose aussi que X n'a pas de sauts positifs ($\nu(]0, +\infty[) = 0$) et M_T à une densité localement bornée sur $]0, +\infty[$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

1. *Si $\sigma > 0$*
$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right).$$
2. *Si $\sigma = 0$*
$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right).$$

Remarque 5.25 *Sous les hypothèses de la proposition 5.24, si $\sigma > 0$ ou, $\sigma = 0$ et la condition (2.1.2) est vérifée, alors la condition (2.3.7) est suffisante pour que M_T ait une densité bornée. C'est une conséquence du théorème 2.23. Et dans ce cas les vitesses de convergence sont indépendantes de x.*

La proposition 5.24 repose sur le contrôle des moments de $M_T - M_T^n$, qui est possible dans le cas sans saut positif.

Lemme 5.26 *Soit X un processus de Lévy à variaion finie de triplet (γ, σ^2, ν). On suppose aussi que X n'a pas de sauts positifs ($\nu(]0, +\infty[) = 0$), alors pour tout $\beta > 1$ on a*

1. *Si $\sigma > 0$*
$$\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^\beta = O\left(\left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)^\beta\right).$$
2. *Si $\sigma = 0$*
$$\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^\beta = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Démonstration du lemme 5.26. On a

$$\begin{aligned}
M_T - M_T^n &= \sup_{0 \leq s \leq T} X_s - \max_{0 \leq k \leq n} X_{\frac{kT}{n}} \\
&= \max_{1 \leq k \leq n} \sup_{\frac{(k-1)T}{n} \leq s \leq \frac{kT}{n}} X_s - \max_{0 \leq k \leq n} X_{\frac{kT}{n}} \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} \sup_{\frac{(k-1)T}{n} \leq s \leq \frac{kT}{n}} X_s - \max_{1 \leq k \leq n} X_{\frac{(k-1)T}{n}} \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left(\sup_{\frac{(k-1)T}{n} \leq s \leq \frac{kT}{n}} X_s - X_{\frac{(k-1)T}{n}} \right),
\end{aligned}$$

où les v.a. $\left(\sup_{\frac{(k-1)T}{n} \leq s \leq \frac{kT}{n}} X_s - X_{\frac{(k-1)T}{n}}\right)_{1 \leq k \leq n}$ sont i.i.d. de même loi que $\sup_{0 \leq s \leq \frac{T}{n}} X_s$. Or comme X n'a pas de sauts positifs, on a (voir (1.4.14))

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq s \leq \frac{T}{n}} X_s &\leq \sup_{0 \leq s \leq \frac{T}{n}} (\gamma_0 s + \sigma B_s) \\
&\leq \frac{|\gamma_0| T}{n} + \sigma \sup_{0 \leq s \leq \frac{T}{n}} B_s.
\end{aligned}$$

On déduit facilement la partie 2 du lemme ($\sigma = 0$). Dans le cas $\sigma > 0$, on a donc

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le s\le \frac{T}{n}} X_s &\le \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{|\gamma_0|T}{\sqrt{n}} + \sigma\sqrt{n}\sup_{0\le s\le\frac{T}{n}} B_s\right)\\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}}\left(|\gamma_0|T + \sigma\sqrt{n}\sup_{0\le s\le\frac{T}{n}} B_s\right)\\
&=^d \frac{1}{\sqrt{n}}\left(|\gamma_0|T + \sigma\sup_{0\le s\le T} B_s\right).
\end{aligned}$$

Soient alors $(V_k)_{1\le k\le n}$ des v.a. i.i.d. de même loi que $|\gamma_0|T + \sigma\sup_{0\le s\le T} B_s$. On a alors

$$\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^\beta \le \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\beta \mathbb{E}\max_{1\le k\le n} V_k^\beta.$$

Soit g la fonction définit comme suit

$$g(x) = (\log(x))^\beta.$$

La fonction g est croissante et concave sur $\left\{x\in\mathbb{R}_+,\ x\ge e^{\beta-1}\right\}$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n} V_k^\beta &= \mathbb{E}\sup_{1\le k\le n} g\left(e^{V_k}\right)\\
&= \mathbb{E}g\left(\sup_{1\le k\le n} e^{V_k}\right), \text{ car g est croissante}\\
&\le \mathbb{E}g\left(\sup_{1\le k\le n} e^{\max(V_k,\beta-1)}\right), \text{ car g est croissante}\\
&\le g\left(\mathbb{E}\sup_{1\le k\le n} e^{\max(V_k,\beta-1)}\right), \text{ par Jensen}\\
&\le g\left(\mathbb{E}\sum_{k=1}^n e^{\max(V_k,\beta-1)}\right), \text{ car g est croissante}\\
&\le g\left(n\mathbb{E}e^{\max(V_1,\beta-1)}\right).
\end{aligned}$$

Notons qu'on a $\mathbb{E}e^{\max(V_1,\beta-1)} < \infty$. D'où la partie 1 du lemme. ◇

Démonstration de la proposition 5.24. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[M_T \ge x, M_T^n < x\right] &= \mathbb{P}\left[x \le M_T < x + (M_T - M_T^n)\right]\\
&= \mathbb{P}\left[x \le M_T < x + (M_T - M_T^n), |M_T - M_T^n| \le \delta\right]\\
&\quad + \mathbb{P}\left[x \le M_T < x + (M_T - M_T^n), |M_T - M_T^n| > \delta\right]\\
&\le \mathbb{P}\left[x \le M_T < x + \delta\right] + \mathbb{P}\left[|M_T - M_T^n| > \delta\right]\\
&\le C_x\delta + \mathbb{P}\left[|M_T - M_T^n| > \delta\right],
\end{aligned}$$

où C_x est un majorant de la densité de M_T au voisinage de x. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\left[|M_t - M_t^n| > \delta\right] \le \frac{\mathbb{E}\left|M_t - M_t^n\right|^p}{\delta^p}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left[M_T \ge x, M_T^n < x\right] \le \max(1, C_x)\left(\delta + \tfrac{\mathbb{E}|M_t - M_t^n|^p}{\delta^p}\right).$$

On choisit δ tel que $\delta = \frac{\mathbb{E}|M_t - M_t^n|^p}{\delta^p}$, donc $\delta = \left(\mathbb{E}\left|M_t - M_t^n\right|^p\right)^{\frac{1}{p+1}}$. D'où

$$\mathbb{P}\left[M_T \ge x, M_T^n < x\right] \le 2\max(1, C_x)\left(\mathbb{E}\left|M_t - M_t^n\right|^p\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Et ceci pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Et on conclut avec le lemme 5.26. $\diamond$

Lorsque l'existence de densité localement bornée pour M_T ne peut être vérifié, d'autres hypothès sur X permettent de contrôler la vitesse de convergence de $\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right]$.

Proposition 5.27 *Soit X un processus de Lévy de carré intégrable de triplet (γ, σ^2, ν) et $x > 0$. On suppose dans le cas $\sigma = 0$ que (2.1.2) est vérifié. On note $\alpha > 0$ Le réel défini dans le lemme 2.20. Alors*

1. *Si $\sigma > 0$*
$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4\alpha+2}}}\right).$$
2. *Si $\sigma = 0$*
$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4\alpha+2}}}\right).$$
3. *Si $\sigma = 0$ et $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$*
$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}}\right).$$
4. *Si $\sigma = 0$ et $\int_{|x|\leq 1} |x\log(|x|)|\,\nu(dx) < \infty$*
$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] = O\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}}}\right).$$

Démonstration de la proposition 5.27. On a toujours en utilisant la démonstration du théorème 5.18 et le lemme 4.16

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] &\leq C_0\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \mathbb{P}\left[|M_T - M_T^n| > \delta\right]\\ &\leq C_0\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \frac{\mathbb{E}\left|M_T - M_T^n\right|}{\delta},\end{aligned}$$

où C_0 est défini dans le lemme 4.16. On choisit $\delta = \left(\mathbb{E}\left|M_T - M_T^n\right|\right)^{\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}$, et on obtient

$$\mathbb{P}\left[M_T \geq x, M_T^n < x\right] \leq (C_0 + 1)\left(\mathbb{E}\left|M_T - M_T^n\right|\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}}.$$

Et on conclut par la proposition 3.8 et la proposition 3.11. $\diamond$

5.2 Options lookback et hindsight

Cette partie généralise les résultats de *[Broadie-Glasserman-Kou(1999)]* (qui porte sur le modèle de Black-Scholes) dans le cas des options lookback et hindsight au cas des modèles exponentiels de Lévy. Les différents types d'options lookback et hindsight (à extremum continu ou discret) sont résumés par les tableaux de payoffs suivants.

Lookback	Continue	Discrète
Call	$S_T - S_0 e^{m_T}$	$S_T - S_0 e^{m_T^n}$
Put	$S_0 e^{M_T} - S_T$	$S_0 e^{M_T^n} - S_T$

FIGURE 5.2.3 – Payoffs des options lookback

Hindsight	Continue	Discrète
Call	$\left(S_0 e^{M_T} - K\right)^+$	$\left(S_0 e^{M_T^n} - K\right)^+$
Put	$(K - S_0 e^{m_T})^+$	$\left(K - S_0 e^{m_T^n}\right)^+$

Figure 5.2.4 – Payoffs des options hindsight

5.2.1 Régularité du prix des options lookback continues

On va s'ntéresser à la régularité de l'option lookback continue dans le cas *jump-diffusion.*

Théorème 5.28 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν), $T > 0$ et f et g les fonctions définies par*

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \mathbb{E}\left(e^{M_t + x} - 1\right)^+ \\ g(t,x) &= \mathbb{E}\left(1 - e^{-M_t + x}\right)^+. \end{aligned}$$

On suppose que $\sigma > 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$. Alors $g \in C^{0,1}\left(]0, +\infty[\times\mathbb{R}\right)$. Si $\mathbb{E}e^{M_T} < \infty$, alors $f \in C^{0,1}\left(]0,T] \times \mathbb{R}\right)$. Si de plus $\mathbb{E}e^{M_\infty} < \infty$, alors $f \in C^{0,1}\left(]0, +\infty[\times\mathbb{R}\right)$.

Lemme 5.29 *Soient X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) vérifiant $\sigma > 0$ ou $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$ et $R_0 = 0$ p.s., $T > 0$ et, f et g les fonctions définies dans le théorème 5.28. Alors g est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Si $\mathbb{E}e^{M_T} < \infty$, alors f est aussi continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$. Si de plus $\mathbb{E}e^{M_\infty} < \infty$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$*

Démonstration du lemme 5.29. Nous allons uniquement démontrer la continuité de f. Celle de g se déduira de la même façon. Commençons par la continuité par rapport à t. Soient $t, \tau \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(\tau,x)| &\leq \mathbb{E}\left|e^{M_t + x} - e^{M_\tau + x}\right| \\ &\leq \mathbb{E}e^x \left|e^{M_t} - e^{M_\tau}\right|. \end{aligned}$$

Or

$$\left|e^{M_t} - e^{M_\tau}\right| \leq \mathbb{E}e^{M_T}.$$

Donc par convergence dominée

$$\lim_{\tau \to t} |f(t,x) - f(\tau,x)| = 0.$$

A noter que $t \to M_t$ est càdlàg et que $M_t = M_{t^-}$ *p.s.*. Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$. On a

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq \mathbb{E}\left|e^{M_t + x} - e^{M_t + y}\right| \\ &\leq \mathbb{E}e^{M_t} |e^x - e^y| \\ &\leq \left(\mathbb{E}e^{M_T}\right) |e^x - e^y|. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{y \to x} |f(t,x) - f(t,y)| = 0.$$

Et ceci uniformèment en t. La fonction f est donc continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$. Dans le cas $e^{M_\infty} < \infty$, on remplacera dans la démonstration M_T par M_∞. $\diamond$

Démonstration du théorème 5.28. Par le lemme 5.29, on sait que f et g sont continues. On va montrer que $f \in C^{0,1}(]0,T] \times \mathbb{R})$. Le cas de g se déduira facilement. En fait on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}$. Soit alors $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) &= \mathbb{E} e^{M_t+x} \mathbb{1}_{e^{M_t+x} \geq 1} \\ &= \mathbb{E} e^{M_t+x} \mathbb{1}_{M_t \geq -x}.\end{aligned}$$

Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Soient $t, \tau \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(\tau,x)\right| &= \left|\mathbb{E} e^{M_t+x} \mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{E} e^{M_\tau+x} \mathbb{1}_{M_\tau \geq -x}\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left|e^{M_t+x} - e^{M_\tau+x}\right| \mathbb{1}_{M_t \geq -x} + \mathbb{E} e^{M_t+x} \left|\mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{1}_{M_\tau \geq -x}\right| \\ &\leq e^x \mathbb{E}\left|e^{M_t} - e^{M_\tau}\right| + \mathbb{E} e^{M_t+x} \left|\mathbb{1}_{M_t \leq -x} - \mathbb{1}_{M_\tau \leq -x}\right| \\ &\leq e^x \mathbb{E}\left|e^{M_t} - e^{M_\tau}\right| + \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{M_t \leq -x} - \mathbb{1}_{M_\tau \leq -x}\right|.\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{\tau \to t} \mathbb{E}\left|e^{M_t} - e^{M_\tau}\right| = 0.$$

D'autre part comme $\mathbb{P}[M_t = 0] = 0$, alors par convergence dominée

$$\lim_{\tau \to t} \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{1}_{M_\tau \geq -x}\right| = 0.$$

Donc

$$\lim_{\tau \to t} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(\tau,x)\right| = 0.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$.

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,y)\right| = \left|\mathbb{E} e^{M_t+x} \mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{E} e^{M_t+y} \mathbb{1}_{M_t \geq -y}\right|.$$

Si $y \geq x$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,y)\right| &\leq \mathbb{E} e^{M_t} \left|e^x \mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{E} e^y \mathbb{1}_{M_t \geq -y}\right| \\ &\leq \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| \mathbb{1}_{M_t \geq -x} + \mathbb{E} e^{M_t+y} \left|\mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{1}_{M_t \geq -y}\right| \\ &\leq \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| + \mathbb{E} e^{M_t+y} \left|\mathbb{1}_{M_t \leq -x} - \mathbb{1}_{M_t \leq -y}\right| \\ &\leq \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| + \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{M_t \leq -x} - \mathbb{1}_{M_t \leq -y}\right|.\end{aligned}$$

Si $y \leq x$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,y)\right| &\leq \mathbb{E} e^{M_t} \left|e^x \mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{E} e^y \mathbb{1}_{M_t \geq -y}\right| \\ &\leq \mathbb{E} e^{M_t+x} \left|\mathbb{1}_{M_t \geq -x} - \mathbb{1}_{M_t \geq -y}\right| + \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| \mathbb{1}_{M_t \geq -y} \\ &\leq \mathbb{E} e^{M_t+x} \left|\mathbb{1}_{M_t \leq -x} - \mathbb{1}_{M_t \leq -y}\right| + \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{M_t \leq -x} - \mathbb{1}_{M_t \leq -y}\right| + \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right|.\end{aligned}$$

Donc on a dans tout les cas

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,y)\right| &\leq \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| + \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{M_t \leq -x} - \mathbb{1}_{M_t \leq -y}\right| \\ &= \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| + \mathbb{P}[-y < M_t \leq -x] + \mathbb{P}[-x < M_t \leq -y] \\ &\leq \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| + \frac{C}{\sqrt{t}} |x-y|, \text{ par le lemme 2.21} \\ &\leq \mathbb{E} e^{M_T} \left|e^x - e^y\right| + \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} |x-y|.\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\tau \to t} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,y) \right| = 0.$$

Et ceci uniformèment en t. D'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $]0,T]$. Dans le cas $e^{M_\infty} < \infty$, on remplace dans la démonstration M_T par M_∞. $\diamond$

5.2.2 Correction de continuité pour valorisation à la création

Les relations entre les prix des options continue et discret sont relativement différents, entre l'instant de l'émission de l'option et une date postérieur à celle-ci. Dans le cas de la valorisation à la création qui nous intéresse dans ce paragraphe, le développement peut être obtenu à l'odre de $\frac{1}{n}$. Reste à savoir si le terme de covariance, qui apparaît dans ce développement (voir la proposition qui va suivre), est numériquement exploitable. Dans le cas Brownien *[Broadie-Glasserman-Kou(1999)]* ont remarqué que ce terme est numériquement négligeable. Nous proposons une méthode de calcul de ce terme par simulation dans le chapitre 6. En fait, dans le cas de la valorisation à la création, nous supposerons également que $\left(\mathbb{E}\left(\sqrt{n}(M_T - M_T^n)\right)^2 e^{M_T}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\mathbb{E}\left(\sqrt{n}(m_T^n - m_T)\right)^2 e^{m_T}\right)_{n\geq 0}$ sont uniformèment intégrables. Ces hypothèses semblent se vérifier sous certaines conditions d'intégrabilité. Cependant, nous n'avons pas pu établir de tels résultats. Par contre ces hypothèses ne sont plus nécessaires pour un développement en $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Introduisons maintenant les hypothèses suivantes.

- $(H1)$ X est un processus de Lévy à activité finie, intégrable, vérifiant $\sigma > 0$ et il existe $q > 2$ tel que $\mathbb{E}e^{qM_T} < \infty$.
- $(H1^{'})$ X est un processus de Lévy à activité finie, intégrable, vérifiant $\sigma > 0$, et $\left(\mathbb{E}\left(\sqrt{n}(M_T - M_T^n)\right)^2 e^{M_T}\right)_{n\geq 0}$ est uniformèment intégrable.
- $(H2)$ X est un processus de Lévy à activité finie, intégrable, vérifiant $\sigma > 0$.
- $(H2^{'})$ X est un processus de Lévy à activité finie, intégrable, vérifiant $\sigma > 0$, et $\left(\mathbb{E}\left(\sqrt{n}(m_T - m_T^n)\right)^2 e^{m_T}\right)_{n\geq 0}$ est uniformèment intégrable.

Proposition 5.30 *Soient V le prix d'une option lookback continue à la création, put ou call, V_n sa version discrète (on se réfèrera aux notations de la figure 5.2.3). On note*

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{\gamma_0}{\sigma}\sqrt{T} + \frac{\sum_{i=1}^{N_T} Y_i}{\sigma\sqrt{T}} \\
\theta_+ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_0 T}{2} + \lambda T \mathbb{E}Y_1^+ - \sigma\sqrt{T}\mathbb{E}\phi(Z) - \mathbb{E}\left(\gamma_0 T + \sum_{i=1}^{N_T} Y_i\right)\Phi(Z)\right) \\
\theta_- &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_0 T}{2} + \lambda T \mathbb{E}(Y_1)^- + \sigma\sqrt{T}\mathbb{E}\phi(Z) - \mathbb{E}\left(\gamma_0 T + \sum_{i=1}^{N_T} Y_i\right)\Phi(-Z)\right) \\
\Delta t &= \frac{T}{n}.
\end{aligned}$$

Alors sous l'hypothèse $H1^{'}$, on a, pour le put,

$$\begin{aligned}
V_n &= \left(V + S_0 e^{-\delta T}\right)\left(1 - \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}} + \frac{-\theta_+ + \frac{1}{2}\sigma^2 t \beta_2}{n}\right) \\
&\quad - S_0\left(e^{-\delta T} - e^{-rT} cov\left(e^{M_T}, M_T^n - M_T\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

et sous l'hypothèse $H2^{'}$ on a, pour le call,

$$\begin{aligned} V_n &= \left(V - S_0 e^{-\delta T}\right)\left(1 + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}} + \frac{\theta_- + \frac{1}{2}\sigma^2 t\beta_2}{n}\right) \\ &\quad + S_0\left(e^{-\delta T} + e^{-rT} cov\left(e^{-\tilde{M}_T}, \tilde{M}_T^n - \tilde{M}_T\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Les constantes β_1 et β_2 sont données par

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mathbb{E}R = -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \\ \beta_2 &= \mathbb{E}R^2. \end{aligned}$$

Où R est la variable aléatoire qui apparait dans le théorème 3.13. La relation entre option lookback continue et discret, dépend évidemment de la relation entre les suprema continu et discret du processus de Lévy qui dirige le sous-jacent.

Lemme 5.31 *Si X vérifie $H1^{'}$ alors*

$$\mathbb{E}e^{M_T^n} = \mathbb{E}e^{M_T}\left(1 - \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}} + \frac{-\theta_+ + \frac{1}{2}\sigma^2 t\beta_2}{n}\right) + cov\left(e^{M_T}, M_T^n - M_T\right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

avec θ_+ défini dans la proposition 5.30.

Lemme 5.32 *Si X vérifie $H2^{'}$ alors*

$$\mathbb{E}e^{-M_T^n} = \mathbb{E}e^{-M_T}\left(1 + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}} + \frac{\theta_- + \frac{1}{2}\sigma^2 t\beta_2}{n}\right) + cov\left(e^{-M_T}, M_T - M_T^n\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Avec θ_- définie dans le lemme 5.31.

Démonstration du lemme 5.31. Par la formule de Taylor-Lagrange on a

$$\begin{aligned} & e^{M_T^n} = e^{M_T} + (M_T^n - M_T)e^{M_T} + \frac{1}{2}(M_T^n - M_T)^2 e^{\overline{M}_T^n} \\ & \Rightarrow n\left(e^{M_T^n} - e^{M_T} - (M_T^n - M_T)e^{M_T}\right) = \frac{1}{2}(M_T^n - M_T)^2 e^{\overline{M}_T^n} \\ & \Rightarrow n\mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - e^{M_T} - (M_T^n - M_T)e^{M_T}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}n(M_T^n - M_T)^2 e^{\overline{M}_T^n}. \end{aligned}$$

Avec $\overline{M}_T^n \in (M_T^n, M_T)$. Donc $\left(n(M_T^n - M_T)^2 e^{\overline{M}_T^n}\right)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. Et par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n\mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - e^{M_T} - (M_T^n - M_T)e^{M_T}\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\lim_{n\to+\infty} n(M_T^n - M_T)^2 e^{\overline{M}_T^n} \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 t\beta_2 \mathbb{E}e^{M_T}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\mathbb{E}(M_T^n - M_T)e^{M_T} = cov\left(e^{M_T}, M_T^n - M_T\right) + \mathbb{E}(M_T^n - M_T)\mathbb{E}e^{M_T}$, on obtient

$$\mathbb{E}e^{M_T^n} = \mathbb{E}e^{M_T}\left(1 + \mathbb{E}(M_T^n - M_T) + \frac{\sigma^2 t\beta_2}{2n}\right) + cov\left(e^{M_T}, M_T^n - M_T\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où en utilisant le point 1 du théorème 3.4, on a

$$\mathbb{E}e^{M_T^n} = \mathbb{E}e^{M_T}\left(1 - \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}} + \frac{-\theta_+ + \frac{1}{2}\sigma^2 t\beta_2}{n}\right) + cov\left(e^{M_T}, M_T^n - M_T\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$\diamond$

Démonstration du lemme 5.32. Par la formule de Taylor-Lagrange on a

$$n\mathbb{E}\left(e^{-M_T^n} - e^{-M_T} - (M_T - M_T^n)e^{-M_T}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}n(M_T - M_T^n)^2 e^{-\overline{M}_T^n}.$$

Avec $\overline{M}_T^n \in (M_T^n, M_T)$. Donc $\left(n(M_T - M_T^n)^2 e^{-\overline{M}_T^n}\right)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. Et par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{E}\left(e^{-M_T^n} - e^{-M_T} - (M_T - M_T^n)e^{-M_T}\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\lim_{n\to+\infty} n(M_T - M_T^n)^2 e^{-\overline{M}_T^n} \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 t\beta_2 \mathbb{E}e^{-M_T}.\end{aligned}$$

On a par ailleurs $\mathbb{E}(M_T - M_T^n)e^{-M_T} = cov\left(e^{-M_T}, M_T - M_T^n\right) + \mathbb{E}(M_T - M_T^n)\mathbb{E}e^{-M_T}$, on obtient

$$\mathbb{E}e^{-M_T^n} = \mathbb{E}e^{-M_T}\left(1 + \mathbb{E}(M_T - M_T^n) + \frac{\sigma^2 t\beta_2}{2n}\right) + cov\left(e^{-M_T}, M_T - M_T^n\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où en utilisant le point 1 du théorème 3.4, on a

$$\mathbb{E}e^{-M_T^n} = \mathbb{E}e^{-M_T}\left(1 + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}} + \frac{\theta_+ + \frac{1}{2}\sigma^2 t\beta_2}{n}\right) + cov\left(e^{-M_T}, M_T - M_T^n\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$\diamond$

Démonstration de la proposition 5.30. Pour le put on sait qu'on a

$$\begin{aligned}V &= e^{-rT}\mathbb{E}S_0 e^{M_T} - e^{-\delta t}S_0 \\ V_n &= e^{-rT}\mathbb{E}S_0 e^{M_T^n} - e^{-\delta t}S_0.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{M_T} &= \frac{e^{rT}}{S_0}(V + e^{-\delta t}S_0) \\ \mathbb{E}e^{M_T^n} &= \frac{e^{rT}}{S_0}(V_n + e^{-\delta t}S_0).\end{aligned}$$

On conclut avec le lemme 5.31. Dans le cas du call, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{m_T} &= \frac{e^{rT}}{S_0}(e^{-\delta t}S_0 - V) \\ \mathbb{E}e^{m_T^n} &= \frac{e^{rT}}{S_0}(e^{-\delta t}S_0 - V_n).\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{-\tilde{M}_T} &= \frac{e^{rT}}{S_0}(e^{-\delta t}S_0 - V) \\ \mathbb{E}e^{-\tilde{M}_T^n} &= \frac{e^{rT}}{S_0}(e^{-\delta t}S_0 - V_n).\end{aligned}$$

Et on conclut avec le lemme 5.32. $\diamond$

En réalité, comme nous l'avons souligné plus haut, pour un développement en $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on a besoin d'hypothèses moins contraignantes.

Proposition 5.33 *Soient V le prix d'une option lookback continue à la création, put ou call, V_n sa version discrète. Alors sous l'hypothèse $H1$, on a, pour le put,*

$$V_n = \left(V + S_0e^{-\delta T}\right)\left(1 - \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}\right) - S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

et sous l'hypothèse $H2$ on a, pour le call,

$$V_n = \left(V - S_0e^{-\delta T}\right)\left(1 + \frac{\sigma\sqrt{T}\beta_1}{\sqrt{n}}\right) + S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Par rapport à la proposition 5.30, nous aurons besoin de conditions d'uniforme intégrabilité plus faibles.

Lemme 5.34 *Soit X un processus de Lévy à activité finie de triplet (γ, σ^2, ν) vérifiant $\sigma > 0$. Posons $\varepsilon_n = M_t - M_t^n$.Alors $(\sqrt{n}\varepsilon_n e^{-M_t})_{n\geq 1}$ est uniformèment integrable. Si de plus, il existe $q > 2$ tel que $\mathbb{E}e^{qM_t} < \infty$, alors $(\sqrt{n}\varepsilon_n e^{M_t})_{n\geq 1}$ est uniformèment intégrable.*

Démonstration du lemme 5.34. Nous allons montrer que $(\sqrt{n}\varepsilon_n e^{M_t})_{n\geq 1}$ est uniformèment intégrable. L'autre cas peut se déduire facilement. Nous allons utiliser les mêmes notations que la démonstration du théorème 3.14. Notons que sur l'ensemble $\{N_t = 0\}$, on a $X_s = \gamma_0 s + \sigma B_s$ pour $0 \leq s \leq t$, l'uniforme intégrabilité de $(\sqrt{n}\varepsilon_n e^{M_t}\mathbf{1}_{\{N_t=0\}})_{n\geq 1}$ est une conséquence du lemme 6 de [3]. Sur l'ensemble $\{N_t \geq 1\}$, nous devons tenir compte du cas où il n y a pas de saut entre deux instants de discrétisation. Nous introduisons donc l'événement

$$\Lambda_n = \{N_t \geq 1 \text{ and } \exists j \in \{1, \ldots, N_t\}\ T_j - T_{j-1} \leq t/n\} \cup \{t - T_{N_t} \leq t/n\}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Lambda_n) &\leq \mathbb{P}(t - T_{N_t} \leq t/n) + \mathbb{E}\sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{1}_{\{T_j - T_{j-1} \leq t/n\}} \\ &\leq \mathbb{E}N_t(N_t + 1)/n,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les inégalités $\mathbb{P}(t - T_{N_t} \leq t/n \mid N_t = l) \leq l/n$ et $\mathbb{P}(T_j - T_{j-1} \leq t/n \mid N_t = l) \leq l/n$ (Proposition 5.5).

Donc, on a en utilisant$\varepsilon_n \leq M_t$ et l'inégalité de Hölder,

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\varepsilon_n e^{M_t}\mathbf{1}_{\Lambda_n}\right) \leq \sqrt{n}\left(\mathbb{E}M_t^p e^{pM_t}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{P}(\Lambda_n)\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

pour tout $p > 1$. Du fait que $\mathbb{E}e^{qM_t} < \infty$ pour tout $q > 2$, on peut prendre $p > 2$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sqrt{n}\varepsilon_n e^{M_t}\mathbf{1}_{\Lambda_n}\right) = 0.$$

Nous allons maintenant montrer que $(\sqrt{n}\varepsilon_n e^{M_t}\mathbf{1}_{\{N_t\geq 1\}\cap\Lambda_n^c})_{n\geq 1}$ est uniformèment intégrable.

Soit $m \geq 1$ et $t_1, \ldots, t_m$ vérifiant $0 < t_1 < \ldots < t_m < t$. Sachant $\{N_t = m, T_1 = t_1, \ldots, T_m = t_m\} \cap \Lambda_n^c$, on a *p.s.*,

$$\varepsilon_t^n = \sum_{j=0}^{m} \left(M^j - M_t^n\right) \mathbf{1}_{\{M^j > \max_{i\neq j} M^i\}},$$

où $M^j = \sup_{t_j \leq s < t_{j+1}} X_s$, $t_0 = 0$ et $t_{m+1} = t$. Cependant, en raison de la définition de Λ_n, chaque intervalle $[t_j, t_{j+1})$ contiens au moins un point de discrétisation. Notons

$$k_j = \min\{k \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid kt/n \geq t_j\}, \quad l_j = \max\{k \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid kt/n \leq t_{j+1}\},$$

et soit s^* où X_s atteint son supremum sur $[t_j, t_{j+1})$. Si $s^* \in (t_j, k_j t/n)$, on peut écrire $M^j - M_t^n \leq \sup_{s\in(t_j,k_j t/n)}(X_s - X_{k_j t/n})$. Si $s^* \in (l_j t/n, t_{j+1})$, on a $M^j - M_t^n \leq \sup_{s\in(l_j t/n, t_{j+1})}(X_s - X_{l_j t/n})$. D'où

$$M^j - M_t^n \leq \delta^{n,j} + \varepsilon^{n,j} + \eta^{n,j},$$

où
$$\delta^{n,j} = \sup_{s\in(t_j,k_jt/n)} (X_s - X_{k_jt/n}), \quad \eta^{n,j} = \sup_{s\in(l_jt/n,t_{j+1})} (X_s - X_{l_jt/n}),$$
et
$$\varepsilon^{n,j} = \sup_{k_jt/n\le s\le l_jt/n} X_s - \max_{k_j\le k\le l_j} X_{kt/n}.$$
Remarquons que
$$\begin{aligned}\delta^{n,j} &= \sup_{s\in(t_j,k_jt/n)} \left[\gamma_0 s + \sigma B_s - \left(\gamma_0\frac{k_jt}{n} + \sigma B_{k_jt/n}\right)\right] \\ &\le |\gamma_0|\frac{t}{n} + \sigma \sup_{s\in(t_j,k_jt/n)} \left|B_s - B_{k_jt/n}\right|. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$
De même
$$\eta^{n,j} \le |\gamma_0|\frac{t}{n} + \sigma \sup_{s\in(l_jt/n,t_{j+1})} \left|B_s - B_{l_jt/n}\right|. \tag{5.2.12}$$
Nototons que $|t_j - k_jt/n| \le t/n$ and $t_{j+1} - l_jt/n \le t/n$. Donc, on déduit de (5.2.11) (resp. (5.2.12)) que l'espérance conditionnelle de toute puissance de $\sqrt{n}\delta^{n,j}$ (resp. $\sqrt{n}\eta^{n,j}$) est bornée par une constante indépendante du conditionnement. Nous avons aussi
$$\varepsilon^{n,j} = \sup_{0\le s\le(l_j-k_j)t/n} \beta^j_s - \max_{0\le k\le l_j-k_j} \beta^j_{kt/n},$$
où $\beta^j_s = \gamma_0 s + \sigma(B_{s+k_jt/n} - B_{k_jt/n})$. En utilisant le lemme 6 de [3], on voit que l'espérance conditionnelle de toute puissance de $\sqrt{n}\varepsilon^{n,j}$ est bornée par une constante indépendante du conditionnement. On conclut que pour tout $p > 1$,
$$\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{n}\varepsilon^n \mathbf{1}_{\Lambda_n^c\cap\{N_t\ge1\}}\right)^p \mid N_t\right] \le C_p N_t^p,$$
où C_p est une constante constante (déterministe) ne dépendant que de p, γ_0, σ et t. L'uniforme intégrabilité de $\sqrt{n}\varepsilon^n e^{M_t}$ se déduit facilement. ◇

Démonstration de la proposition 5.33. On va démontrer le cas du put. Le cas du call se fera de la même manière. En se reportant à la dèmonstration de la proposition 5.30, il suffit de démontrer que
$$\begin{aligned} cov\left(e^{M_T}, M_T - M_T^n\right) &= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ \mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^2 e^{M_T} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$
Comme $\left(\sqrt{n}(M_T^n - M_T)e^{M_T}\right)$ est uniformément intégrable, alors
$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} cov\left(e^{M_T}, M_T^n - M_T\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\sqrt{n}(M_T^n - M_T)e^{M_T} \\ &\quad - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\sqrt{n}(M_T^n - M_T)\mathbb{E}e^{M_T} \\ &= \mathbb{E}\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(M_T^n - M_T)e^{M_T} \\ &\quad -\mathbb{E}\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(M_T^n - M_T)\mathbb{E}e^{M_T} \\ &= -\sigma\sqrt{T}\beta_1\mathbb{E}e^{M_T} + \sigma\sqrt{T}\beta_1\mathbb{E}e^{M_T} \\ &= 0. \end{aligned}$$
Donc
$$cov\left(e^{M_T}, M_T^n - M_T\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

D'autre on peut facilement déduire de la démonstration du lemme 5.34 que $\left(\sqrt{n}(M_T^n - M_T)^2 e^{M_T}\right)$ est uniformèment intégrable. Donc on a

$$\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^2 e^{M_T} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Ce qui montre la proposition. $\diamond$

5.2.3 Correction de continuité pour la valorisation dynamique

A un instant $t \in]0, T[$ donné, la valeur d'un put lookback continu est donnée par

$$V\left(S_+\right) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\max\left(S_+, \max_{t\le u\le T} S_u\right) - S_t e^{-\delta(T-T)},$$

où $S_+ = \max_{0\le u\le t} S_u$, est le maximum courant. La valeur du call continue dependra similairement de $S_- = \min_{0\le u\le t} S_u$ (le minimum courant) et de $\min_{t\le u\le T} S_u$. Le prix d'un put lookback discret à la k-ième date de fixing est donné par

$$V_n\left(S_+\right) = e^{-r\Delta(n-k)}\mathbb{E}\max\left(S_+, \max_{k\le j\le n} S_{j\Delta t}\right) - S_{k\Delta t} e^{-\delta(n-k)\Delta t},$$

où $S_+ = \max_{0\le j\le k} S_{j\Delta t}$. La valeur du call discret dépendra similairement de $S_- = \min_{0\le j\le k} S_{j\Delta t}$ et de $\min_{k\le j\le n} S_{j\Delta t}$.

Proposition 5.35 *Le prix d'une option lookback discrète à la k-ième date de fixing et le prix d'une option lookback continue à la date $t = k\Delta t$, sont reliés par les relations suivantes*

$$\begin{aligned}
V_n\left(S_\pm\right) &= e^{\mp\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} V\left(S_\pm e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) \pm \left(e^{\mp\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right) e^{-\delta(T-t)} S_t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
V\left(S_\pm\right) &= e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} V_n\left(S_\pm e^{\mp\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) \pm \left(e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right) e^{-\delta(T-t)} S_t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

où dans $\pm$ et $\mp$, le cas supérieur est pour le put et cas inférieur est pour le call. Les relations sur le put sont vraies sous l'hypothèse $H1$, et celles sur le call sont valables sous l'hypothèse $H2$.

La proposition 5.35 est équivalent aux résultats suivants.

Lemme 5.36 *Si X vérifie $H1$ alors*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - x\right)^+ &= e^{-\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} x\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
\mathbb{E}\left(e^{M_T} - x\right)^+ &= e^{\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - e^{-\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} x\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Lemme 5.37 *Si X vérifie $H2$ alors*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(x - e^{-M_T^n}\right)^+ &= e^{\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{-\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} x - e^{-M_T}\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
\mathbb{E}\left(x - e^{-M_T}\right)^+ &= e^{-\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} x - e^{-M_T^n}\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 5.36. La demonstration est similaire à celle du lemme 4 dans *[Broadie-Glasserman-Kou (1999)]*. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{M_T} - x\right)^+ &= \mathbb{E}\left(e^{M_T} - x\right) \mathbb{1}_{\left\{e^{M_T} > x\right\}} \\
&= \mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) \mathbb{1}_{\left\{e^{M_T} > x\right\}} + \mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - x\right) \mathbb{1}_{\left\{e^{M_T} > x\right\}} \\
&= \mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) \mathbb{1}_{\left\{e^{M_T} > x\right\}} + \mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - x\right)^+ + \mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - x\right) \mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n} \le x < e^{M_T}\right\}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{M_T^n}-x\right)^+ &= \mathbb{E}\left(e^{M_T}-x\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{M_T}-e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>x\right\}} - \mathbb{E}\left(e^{M_T^n}-x\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}}\\ &= A-B-C.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}|C| &\le \mathbb{E}\left(e^{M_T}-e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}}\\ &\le \mathbb{E}\left(M_T-M_T^n\right)e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}}.\end{aligned}$$

De plus on a

$$\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}} \le \sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{M_T}.$$

Donc $\left(\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}}\right)_{m\le 1}$ est uniformèment intégrable (par le lemme 5.34). D'où

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\mathbb{E}\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}} &= \mathbb{E}\lim_{m\to+\infty}\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le x<e^{M_T}\right\}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $C=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. D'autre part

$$\begin{aligned}B &= \mathbb{E}\left(e^{M_T}-e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>x\right\}}\\ &= \sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}\mathbb{E}e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>x\right\}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \text{par les arguments du lemme 5.31.}\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{M_T^n}-x\right)^+ &= \mathbb{E}\left(e^{M_T}-x\right)^+ - \sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}\mathbb{E}e^{M_T}\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>x\right\}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &= \mathbb{E}\left[e^{M_T}\left(1-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}\right)-x\right]\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>x\right\}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &= \mathbb{E}\left[e^{M_T-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-x\right]\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>x\right\}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &= e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{M_T}-xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>x\right\}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &= e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{M_T}-xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\mathbb{1}_{\left\{x<e^{M_T}\le xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right\}}\\ &\quad +e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{M_T}-xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ +o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{M_T}-xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\mathbb{1}_{\left\{x<e^{M_T}\le xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right\}} &\le \mathbb{E}\left(xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-x\right)\mathbb{1}_{\left\{x<e^{M_T}\le xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right\}}\\ &\le \frac{K}{\sqrt{n}}\mathbb{P}\left[x<e^{M_T}\le xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right]\\ &= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\end{aligned}$$

avec K une constante > 0. D'où

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T^n}-x\right)^+ = e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{M_T}-xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Pour la deuxième partie du lemme, on a en utilisant (5.2.13)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{M_T^n}-xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ &= \mathbb{E}\left(e^{M_T}-xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{M_T}-e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T}>xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right\}}\\ &\quad -\mathbb{E}\left(e^{M_T^n}-xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{M_T^n}\le xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}<e^{M_T}\right\}}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement que dans la première partie permet d'aboutir au deuxème resultat du lemme. ◇

Démonstration du lemme 5.37. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(x-e^{-M_T}\right)^+ &= \mathbb{E}\left(x-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}}\\ &= \mathbb{E}\left(e^{-M_T^n}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}} + \mathbb{E}\left(x-e^{-M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}}\\ &= \mathbb{E}\left(e^{-M_T^n}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}}\\ &\quad +\mathbb{E}\left(x-e^{-M_T^n}\right)^+ + \mathbb{E}\left(x-e^{-M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\le e^{-M_T^n}\}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(x-e^{-M_T^n}\right)^+ &= \mathbb{E}\left(x-e^{-M_T}\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{-M_T^n}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}}\\ &\quad -\mathbb{E}\left(x-e^{-M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\le e^{-M_T^n}\}}\\ &= A-B-C.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}|C| &\le \mathbb{E}\left(e^{-M_T^n}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\le e^{-M_T^n}\}}\\ &\le \mathbb{E}\left(M_T-M_T^n\right)e^{-M_T^n}\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\le e^{-M_T^n}\}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{-M_T^n}\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\le e^{-M_T^n}\}}.\end{aligned}$$

De plus on a

$$\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{-M_T}\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\le e^{-M_T^n}\}} \le \sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{-M_T}.$$

Donc $\left(\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{-M_T}\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x<e^{-M_T^n}\}}\right)_{m\le 1}$ est uniformèment intégrable (par le lemme 5.34). D'où

$$\lim_{m\to+\infty}\mathbb{E}\sqrt{n}\left(M_T-M_T^n\right)e^{-M_T}\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x<e^{-M_T^n}\}} = 0.$$

Ce qui implique que $C = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. D'autre part

$$\begin{aligned}B &= \mathbb{E}\left(e^{-M_T^n}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}}\\ &= \sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}\mathbb{E}e^{-M_T}\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \text{par les arguments du lemme 5.32.}\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(x-e^{-M_T^n}\right)^+ &= \mathbb{E}\left(x-e^{-M_T}\right)^+ - \sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}\mathbb{E}e^{-M_T}\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[x-e^{-M_T}\left(1+\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\right]\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[x-e^{-M_T+\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right]\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\{e^{-M_T}<x\}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\left\{xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\le e^{-M_T}<x\right\}} \\
&\quad +e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{-M_T}\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{M_T}\right)\mathbb{1}_{\left\{xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\le e^{-M_T}<x\right\}} &\le \mathbb{E}\left(x-xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\mathbb{1}_{\left\{xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\le e^{-M_T}<x\right\}} \\
&\le \frac{K}{\sqrt{n}}\mathbb{P}\left[xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\le e^{-M_T}<x\right] \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

où K est une constante >0. D'où

$$\mathbb{E}\left(x-e^{-M_T^n}\right)^+ = e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(xe^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{-M_T}\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Pour la deuxième partie du lemme, on a en utilisant (5.2.13)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{-M_T^n}\right)^+ &= \mathbb{E}\left(xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{-M_T}\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{-M_T^n}-e^{-M_T}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{-M_T}<xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right\}} \\
&\quad -\mathbb{E}\left(xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}-e^{-M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{e^{-M_T}<xe^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\le e^{-M_T^n}\right\}}.
\end{aligned}$$

Le même raisonnement permet d'aboutir au deuxème resultat du lemme. ◇

Démonstration de la proposition 5.35. Notons que

$$\begin{aligned}
\max_{k\le j\le n} S_{j\Delta t} &= \max_{k\le j\le n} S_0 e^{X_{j\Delta t}} \\
&= \max_{k\le j\le n} S_0 e^{X_{k\Delta t}} e^{X_{j\Delta t}-X_{k\Delta t}} \\
&= \max_{k\le j\le n} S_{k\Delta t} e^{X_{j\Delta t}-X_{k\Delta t}} \\
&= S_{k\Delta t} e^{\max_{k\le j\le n}\left(X_{j\Delta t}-X_{k\Delta t}\right)} \\
&= S_{k\Delta t} e^{\max_{0\le j\le n-k}\left(\hat{X}_{j\Delta t}\right)}.
\end{aligned}$$

Où $\hat{X}$ est un processus de Lévy indépendant de S_t. De même, comme $k\Delta t = t$, on a

$$\sup_{t\le\tau\le T} S_\tau = S_t e^{\sup_{0\le\tau\le T-t}\left(\hat{X}_\tau\right)}.$$

Donc pour simplifier la démonstration, on se place à $t = 0$ (ou $k = 0$). Le resultat de la proposition se déduira en remplaçant dans les resultats finals, 0 par t, et T par $T - t$, sauf dans l'expression $\frac{T}{n}$ qui représente le pas de discrétisation, donc qui ne change pas. Regardons d'abord le cas du put

$$\begin{aligned}
V_n(S_+) &= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\max\left(S_+, S_0e^{M_T^n}\right) - S_T\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_0e^{M_T^n} - S_+\right)^+ + S_+\right] - S_0e^{-\delta T} \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\left(S_0e^{M_T} - S_+e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ + S_+\right] - S_0e^{-\delta T} \\
&\quad +o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ par le lemme 5.36.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V_n(S_+) &= e^{-rT}e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[\left(S_0e^{M_T} - S_+e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ + S_+e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right] \\
&\quad -S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{-rT}e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[\max\left(S_0e^{M_T}, S_+e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) + -S_T\right] \\
&\quad +\left(e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right)S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}V\left(S_+e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) + \left(e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right)S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
V(S_+) &= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\max\left(S_+, S_0e^{M_T}\right) - S_T\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_0e^{M_T} - S_+\right)^+ + S_+\right] - S_0e^{-\delta T} \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\left(S_0e^{M_T^n} - S_+e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ + S_+\right] - S_0e^{-\delta T} \\
&\quad +o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ par le lemme 5.36.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V(S_+) &= e^{-rT}e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[\left(S_0e^{M_T^n} - S_+e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^+ + S_+e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right] \\
&\quad -S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{-rT}e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[\max\left(S_0e^{M_T^n}, S_+e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) + -S_T\right] \\
&\quad +\left(e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right)S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}V_n\left(S_+e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) + \left(e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right)S_0e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Dans le cas du call

$$\begin{aligned}
V_n(S_-) &= e^{-rT}\mathbb{E}\left[S_T - \min\left(S_-, S_0 e^{m_T^n}\right)\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[S_T - \min\left(S_-, S_0 e^{-\tilde{M}_T^n}\right)\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_- - S_0 e^{-\tilde{M}_T^n}\right)^+ - S_-\right] + S_0 e^{-\delta T} \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\left(S_- e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - S_0 e^{-\tilde{M}_T}\right)^+ - S_-\right] + S_0 e^{-\delta T} \\
&\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ par le lemme 5.37.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V_n(S_-) &= e^{-rT}e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[\left(S_- e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - S_0 e^{-\tilde{M}_T}\right)^+ - S_- e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right] \\
&\quad + S_0 e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{-rT}e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[S_T - \min\left(S_0 e^{m_T}, S_- e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\right] \\
&\quad - \left(e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right) S_0 e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} V\left(S_- e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) - \left(e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right) S_0 e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Et finalement on a

$$\begin{aligned}
V(S_-) &= e^{-rT}\mathbb{E}\left[S_T - \min\left(S_-, S_0 e^{m_T}\right)\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[S_T - \min\left(S_-, S_0 e^{-\tilde{M}_T}\right)\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_- - S_0 e^{-\tilde{M}_T}\right)^+ - S_-\right] + S_0 e^{-\delta T} \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\left(S_- e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - S_0 e^{-\tilde{M}_T^n}\right)^+ - S_-\right] + S_0 e^{-\delta T} \\
&\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ par le lemme 5.37.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V(S_-) &= e^{-rT}e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[\left(S_- e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - S_0 e^{-\tilde{M}_T^n}\right)^+ - S_- e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right] \\
&\quad + S_0 e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{-rT}e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left[S_T - \min\left(S_0 e^{m_T^n}, S_- e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\right] \\
&\quad - \left(e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right) S_0 e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} V_n\left(S_- e^{\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) - \left(e^{-\sigma\beta_1\sqrt{\frac{T}{n}}} - 1\right) S_0 e^{-\delta T} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

$\diamond$

Lorsqu'on enléve le mouvement Brownien, et qu'on se retrouve avec un processus de Poisson composé (avec drift éventuellement), les prix continue et discret sont asymptotiquement proches l'un de l'autre. Notons donc $H3$ l'hypothèse suivante :

– $(H3)$ X est un processus de Poisson composé (éventuellement avec drift) intégrable.

Proposition 5.38 *Sous l'hypothèse $H3$, le prix d'une option lookback discret est relié à sa version continue, à la date $\tau = k\Delta t$, par les relation suivantes*

1. pour le call

$$V_n\left(S_-\right) = V\left(S_-\right) + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. pour le put, si en plus il existe $\beta > 1$ tel que $\mathbb{E}e^{\beta M_T} < \infty$, alors

$$V_n\left(S_+\right) = V\left(S_+\right) + o\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta-1}{\beta}}}\right).$$

Où α est une constante que l'on peut determiner explicitement.

Le premier resultat de la proposition 5.38 est une conséquence de la section 3.3. pour le deuxième point on utilise un autre résultat intérmédiaire.

Lemme 5.39 *On suppose $H3$ et qu'il existe $\beta > 1$ tel que $\mathbb{E}e^{\beta M_T} < \infty$. On a, pour $x > 0$*

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T} - x\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - x\right)^+ = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta-1}{\beta}}}\right).$$

Démonstration du lemme 5.39. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{\max_{1\le k\le n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right\}} \\ &\quad + \mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{\max_{1\le k\le n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \le 1\right\}}.\end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\tilde{M}_T^n \in [M_T^n, M_T]$ tel que

$$\begin{aligned}e^{M_T} - e^{M_T^n} &= \left(M_T - M_T^n\right)e^{\tilde{M}_T^n} \\ &\le \left(M_T - M_T^n\right)e^{M_T}.\end{aligned}$$

Or sur $\left\{\max_{1\le k\le n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \le 1\right\}$ on a $M_T - M_T^n \le \frac{|\gamma_0|T}{n}$, donc

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{\max_{1\le k\le n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) \le 1\right\}} \le \frac{|\gamma_0|T}{n}\mathbb{E}e^{M_T}.$$

D'autre part, par Hölder on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right)\mathbb{1}_{\left\{\max_{1\le k\le n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right\}} &\le \left(\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\quad \times\left(\mathbb{P}\left[\max_{1\le k\le n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right]\right)^{1-\frac{1}{\beta}}.\end{aligned}$$

Or par (5.1.10) on a

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\le k\le n}\left(N_{k\frac{T}{n}} - N_{(k-1)\frac{T}{n}}\right) > 1\right] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right)^\beta = 0.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta-1}{\beta}}}\right).$$

$\diamond$

Démonstration de la proposition 5.38. Soit f la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \to S_t e^{-\delta(T-t)} - e^{-r(T-t)} \min\left(S_-, S_t e^{-x}\right)$. On a

$$V_n\left(S_-\right) = \mathbb{E}f\left(\tilde{M}_t^n\right)$$
$$V\left(S_-\right) = \mathbb{E}f\left(\tilde{M}_t\right).$$

La fonction f est continue bornée et p.p. dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée (p.p.) est bornée. On applique le théorème 3.15, et on obtient le point 1 de la proposition 5.38. Pour le put, on a

$$V\left(S_+\right) - V_n\left(S_+\right) \leq e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right).$$

On déduit le point 2 par le lemme 5.39. $\diamond$

Pour les options hindsight, les résultats sont similaires au cas lookback. Le prix d'un call hindsight continu à l'instant t avec un maximum courant S_+ et de strike K est

$$V\left(S_+, K\right) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left(\max\left(S_+, \max_{t \leq u \leq T} S_u\right) - K\right)^+.$$

Et similairement pour le put on a

$$V\left(S_-, K\right) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left(K - \min\left(S_-, \min_{t \leq u \leq T} S_u\right)\right)^+.$$

Les versions discrètes à la k-ième date de fixing sont

$$V_n\left(S_+, K\right) = e^{-r\Delta t(n-k)} \mathbb{E}\left(\max\left(S_+, \max_{k \leq j \leq n} S_{j\Delta t}\right) - K\right)^+,$$

et

$$V_n\left(S_-, K\right) = e^{-r\Delta t(n-k)} \mathbb{E}\left(K - \min\left(S_-, \min_{k \leq j \leq n} S_{j\Delta t}\right)\right)^+.$$

Proposition 5.40 *Le prix d'une option hindsight discrète à la k-ième date de fixing et le prix d'une option hindsight continue à la date $t = k\Delta t$, sont reliés par les relations suivantes*

$$V_n\left(S_\pm, K\right) = e^{\mp\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} V\left(S_\pm e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, K e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$V\left(S_\pm, K\right) = e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} V_n\left(S_\pm e^{\mp\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, K e^{\mp\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Où dans $\pm$ et $\mp$, le cas supérieur est pour le call et cas inférieur est pour le put. Les relations sur le call sont vraies sous l'hypothèse $H1$, et celles sur le put sont valables sous l'hypothèse $H2$.

Corollaire 5.41 *La proposition 5.38 reste vrai lorsqu'on remplace "lookback" par "hindsight", "call" par "put" et "put" par "call".*

Démonstration de la proposition 5.40. Regardons le cas du call. Par un simple calcul, on a à l'instant t la relation suivante

$$V^c(S_+, K) = V^p(\max(S_+, K)) + e^{-\delta(T-t)}S_t - e^{-r(T-t)}K, \tag{5.2.13}$$

où $V^c(S_+, K)$ est le prix d'un call hindsight continu de maximum courant S_+ et de strike K, et $V^p(\max(S_+, K))$ le prix d'un put lookback continu de maximum courant $\max(S_+, K)$. La version discrète de cette relation s'écrit

$$V_n^c(S_+, K) = V_n^p(\max(S_+, K)) + e^{-\delta(n-k)\Delta t}S_{k\Delta t} - e^{-r(n-k)\Delta t}K, \tag{5.2.14}$$

pour $k \in \{1, \dots, n\}$. On déduit de la proposition 5.35 les resultats du lemme concernant le call. Pour le put, on utilise cette relation entre put hindsight et call lookback

$$V^p(S_-, K) = V^c(\min(S_-, K)) - e^{-\delta(T-t)}S_t + e^{-r(T-t)}K, \tag{5.2.15}$$

où $V^c(S_-, K)$ est le prix d'un put hindsight continu de minimum courant S_- et de strike K, et $V^c(\min(S_-, K))$ le prix d'un call lookback continu de minimum courant $\max(S_-, K)$. La version discrète de cette relation s'écrit

$$V_n^p(S_-, K) = V_n^c(\max(S_-, K)) - e^{-\delta(n-k)\Delta t}S_{k\Delta t} + e^{-r(n-k)\Delta t}K. \tag{5.2.16}$$

De même en utilisant la proposition 5.35 on déduit les resultats sur le put. $\diamond$

Démonstration du corrolaire 5.41. C'est une conséquence des equations (5.2.13), (5.2.14), (5.2.15), et (5.2.16). $\diamond$

5.2.4 Estimation dans le cas activité infinie

Dans le cas activité infinie, mais sans partie Brownienne, les prix des options call continue et discrète sont de bonnes aprroximations l'une de l'autre. Soit $H4$ l'hypothèse suivante :

– $(H4)$ X est un processus de Lévy intégrable et vérifie, $\sigma = 0$ et $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$.

Proposition 5.42 *Sous l'hypothèse $H4$, le prix d'un call lookback discret est relié à sa version continue, à la date $\tau = k\Delta t$, par les relation suivantes*

1. *On a*
$$V_n(S_-) = V(S_-) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
2. *Si $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$*
$$V_n(S_-) = V(S_-) + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right).$$
3. *Si $\int_{|x|\leq 1} |x|\log(|x|)\nu(dx) < \infty$*
$$V_n(S_-) = V(S_-) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans le cas put, l' erreur entre prix continu et discret est intéressante dans le cas variation finie, et sous réserve d'une condition d'intégrabilité.

Théorème 5.43 *On se place sous l'hypothèse $H4$. On suppose qu'il existe $\beta > 1$ tel que $\mathbb{E}e^{\beta M_T} < \infty$. Le prix d'un put lookback discret est relié à sa version continue, à la date $\tau = k\Delta t$, pour tout $\varepsilon > 0$, par les relation suivantes*

1. *On a*

$$V_n(S_+) = V(S_+) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta-1}{2\beta}-\varepsilon}}\right).$$

2. *Si* $\int_{|x|\le 1} |x|\nu(dx) < \infty$

$$V_n(S_+) = V(S_+) + O\left(\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}-\varepsilon}\right).$$

3. *Si* $\int_{|x|\le 1} |x|\log(|x|)\nu(dx) < \infty$

$$V_n(S_+) = V(S_+) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta-1}{\beta}-\varepsilon}}\right).$$

En fait toute la difficulté du théorème 5.43, est de trouver une relation entre $\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right)$ et $\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)$.

Lemme 5.44 *On suppose qu'il existe $\beta > 1$ tel que $\mathbb{E}e^{\beta M_T} < \infty$. Alors on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) \le C\left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}-\varepsilon}.$$

Avec C une constante > 0 indépendante de n.

Démonstration du lemme 5.44. On a par le théorème des accroissements finis, il existe $\tilde{M}_T^n \in [M_T^n, M_T]$ tel que

$$\begin{aligned} e^{M_T} - e^{M_T^n} &= \left(M_T - M_T^n\right) e^{\tilde{M}_T^n} \\ &\le \left(M_T - M_T^n\right) e^{M_T}. \end{aligned}$$

Donc par Hölder

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) \le \left(\mathbb{E}e^{\beta M_T}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}.$$

Notons que $\mathbb{E}e^{\beta M_T} < \infty$ entraine que $\mathbb{E}M_T^q < \infty$ pour tout $q > 0$. Soit $\rho \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} &= \mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^{\rho}\left(M_T - M_T^n\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}-\rho} \\ &= \mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^{\rho}\left(M_T - M_T^n\right)^{\frac{\beta(1-\rho)+\rho}{\beta-1}} \\ &\le \left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)\right)^{\rho}\left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^{\frac{\beta(1-\rho)+\rho}{(\beta-1)(1-\rho)}}\right)^{1-\rho}. \end{aligned}$$

D'où, du fait que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^{\frac{\beta(1-\rho)+\rho}{(\beta-1)(1-\rho)}} = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) &\le C\left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)\right)^{\rho\frac{\beta-1}{\beta}} \\ &= C\left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}-(1-\rho)\frac{\beta-1}{\beta}}. \end{aligned}$$

Et par suite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) \le C\left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}-\varepsilon}.$$

◇

Démonstration de la proposition 5.42 et du théorème 5.43. Pour le call on a

$$\begin{aligned}
|V(S_-) - V_n(S_-)| &\leq e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}\left|e^{m_T} - e^{m_T^n}\right| \\
&\leq e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}\left|e^{-\tilde{M}_T} - e^{-\tilde{M}_T^n}\right| \\
&\leq e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}\left(\tilde{M}_T - \tilde{M}_T^n\right).
\end{aligned}$$

Donc en appliquant les théorèmes 3.8 et 3.11, on obtient la proposition 5.42. Dans le cas du put, on a

$$V(S_+) - V_n(S_+) \leq e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right).$$

On déduit le théorème 5.43 par le lemme 5.44. ◇

Lorsque le processus de Lévy qui dirige le sous-jacent est sans saut positif, les prix du put lookback continu et discret deviennent plus proches .

Proposition 5.45 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν), dont la partie à saut est à variation finie. On suppose aussi que X n'a pas de sauts positifs ($\nu(]0, +\infty[) = 0$) et qu'il existe $\beta > 1$ tel que $\mathbb{E}e^{\beta M_T} < \infty$. Alors le prix d'un put lookback discret est relié à sa version continue, à la date $\tau = k\Delta t$, par les relation suivantes*

1. *Si $\sigma > 0$*

$$V_n(S_+) = V(S_+) + O\left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right).$$

2. *Si $\sigma = 0$*

$$V_n(S_+) = V(S_+) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démonstration de la proposition 5.45. Pour démontrer la proposition 5.45, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) = \begin{cases} O\left(\dfrac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right) & si\ \sigma > 0 \\ O\left(\dfrac{1}{n}\right) & si\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Or par le théorème des accroissements finies on a

$$e^{M_T} - e^{M_T^n} \leq e^{M_T}\left(M_T - M_T^n\right).$$

Donc par Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{M_T} - e^{M_T^n}\right) &\leq \mathbb{E}e^{M_T}\left(M_T - M_T^n\right) \\
&\leq \left(\mathbb{E}e^{\beta M_T}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}.
\end{aligned}$$

Et on conclut avec le lemme 5.26. ◇

Les résultats pour les options hindsight sont similaires à ceux des options lookback.

Corollaire 5.46 *Les propositions 5.42 et 5.45, et le thórème 5.43 restent vrai lorsqu'on remplace "lookback" par "hindsight", "call" par "put" et "put" par "call".*

Démonstration du corrolaire 5.46. C'est une conséquence des equations (5.2.13), (5.2.14), (5.2.15), et (5.2.16). ◇

Call	Strike fixe	Strike flottant
Arithmétique	$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s}ds - K\right)^+$	$\left(S_T - \frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s}ds\right)^+$
Géométrique	$\left(S_0 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right) - K\right)^+$	$\left(S_T - S_0 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right)\right)^+$

FIGURE 5.3.5 – Payoffs des options call asiatique

Put	Strike fixe	Strike flottant
Arithmétique	$\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s}ds\right)^+$	$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s}ds - S_T\right)^+$
Géométrique	$\left(K - S_0 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right)\right)^+$	$\left(S_0 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right) - S_T\right)^+$

FIGURE 5.3.6 – Payoffs des options put asiatique

5.3 Estimation pour les options asiatiques

Les différents types d'options asiatiques (à moyenne continue ou discrète) sont résumés par les tableaux de payoffs suivants.

La convergence des options asiatiques discètes vers leurs contrepartie continue aètè étudiée dans le cas du modèle de Black-Scholes. Elle est en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (où n est le nombre de points de discrètisation). Nous allons voir que dans le cas des processus de Lévy, pour les options à moyenne arithmétique la vitesse de convergence est la même que le cas gaussien. Cependant en absence de partie Brownienne cette vitesse peut être meilleure.

Proposition 5.47 *Soient V une option asiatique continue de moyenne arithmétique et V^n sa contrepartie discrète. On suppose que X est intégrable et $\mathbb{E}e^{M_T} < \infty$. Alors*

– *On a*

$$V = V^n + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

– *Si $\sigma = 0$ et $\int_{|x|\le 1} |x|\nu(dx) < \infty$*

$$V = V^n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démonstration de la proposition 5.47. Posons pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $t_k = \frac{kT}{n}$. On a

$$\begin{aligned}
|V - V^n| &\le \mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s}ds - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n S_0 e^{X_{t_k}}\right| \\
&\le \frac{S_0}{T}\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(e^{X_s} - e^{X_{t_k}}\right) ds\right| \\
&\le \frac{S_0}{T}\mathbb{E}\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|e^{X_s} - e^{X_{t_k}}\right| ds \\
&= \frac{S_0}{T}\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbb{E}e^{X_s}\left|e^{X_s - X_{t_k}} - 1\right| ds \\
&= \frac{S_0}{T}\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbb{E}e^{X_s}\left|e^{X_{s-t_k}} - 1\right| ds.
\end{aligned}$$

Notons que pour $s \in [t_{k-1}, t_k]$, les v.a. X_s et $X_s - X_{t_k}$ sont indépendantes. Donc

$$\begin{aligned} |V - V^n| &\leq \frac{S_0}{T} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbb{E} e^{X_s} \mathbb{E} \left| e^{X_{s-t_k}} - 1 \right| ds \\ &\leq \frac{S_0}{T} \mathbb{E} e^{M_T} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbb{E} \left| e^{X_{s-t_k}} - 1 \right| ds. \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 4.2.3 dans [37] montre que pour un processus de Lévy à variation finie (donc $\sigma = 0$), on a pour tout $t \leq T$

$$\mathbb{E} \left| e^{X_t} - 1 \right| \leq C_0 t,$$

avec $C_0 > 0$ indépendante de t. Si on a toujours $\sigma = 0$, mais sans condition sur la variation de la partie à saut pur, on peut facilement déduire, de la démonstration du lemme 4.2.3 de [37], que

$$\mathbb{E} \left| e^{X_t} - 1 \right| \leq C_1 \sqrt{t},$$

avec $C_1 > 0$ indépendante de t. Si $\sigma > 0$ et la partie saut est à variation finie, on aura

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| e^{X_t} - 1 \right| &= \mathbb{E} \left| e^{\sigma B_t} e^{X_t - \sigma B_t} - 1 \right| \\ &\leq \mathbb{E} e^{\sigma B_t} \left| e^{X_t - \sigma B_t} - 1 \right| + \mathbb{E} \left| e^{\sigma B_t} - 1 \right| \\ &\leq e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} \mathbb{E} \left| e^{X_t - \sigma B_t} - 1 \right| + \mathbb{E} \sigma \left| B_t \right| e^{\sigma B_t^+} \\ &= e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} \mathbb{E} \left| e^{X_t - \sigma B_t} - 1 \right| + \sigma \sqrt{\mathbb{E} B_t^2} \sqrt{e^{2\sigma B_t^+}} \\ &\leq e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} \mathbb{E} \left| e^{X_t - \sigma B_t} - 1 \right| + \sigma \frac{e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}}{2} \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Donc pour $s \in [t_{k-1}, t_k]$, on a

$$\mathbb{E} \left| e^{X_{s-t_k}} - 1 \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

uniformèment en s. Si de plus $\sigma = 0$ et $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ alors on a

$$\mathbb{E} \left| e^{X_{s-t_k}} - 1 \right| = O\left(\frac{1}{n} \right),$$

uniformèment en s. Ce qui conclut la proposition. $\diamond$

Lorsqu'on considére les options asiatiques à moyenne géométrique, les vitesses de convergence obtenues sont moins bonnes que dans le cas arithmétique. En plus les hypothèses sont plus contraignantes. Cependant Si $\sup \left\{ q \in \mathbb{R}^+, \ \mathbb{E} e^{q M_T} < \infty \right\} = +\infty$ (on verra l'utilité de cette condition dans le résultat suivant) on obtient des résultats similaires.

Proposition 5.48 *Soient V une option asiatique continue de moyenne géométrique et V^n sa contrepartie discrète. On suppose que X est intégrable et à variation finie et $\sup \left\{ q \in \mathbb{R}^+, \ \mathbb{E} e^{q M_T} < \infty \right\} > 1$. Si ce dernier est fini on le note p sinon p désignera tout réel> 1. Alors, si $\mathbb{E}|X_1|^{\frac{p}{p-1}} + \mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$*

- *On a*

$$V = V^n + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p-1}{2p}}} \right).$$

- *Si $\sigma = 0$ et $\int_{|x|<1} |x| \nu(dx) < \infty$*

$$V = V^n + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p-1}{p}}} \right).$$

Démonstration de la proposition 5.48. Posons pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $t_k = \frac{kT}{n}$. On a

$$\begin{aligned}
|V - V^n| &\leq S_0 \mathbb{E}\left|\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right) - \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_{t_k}\right)\right| \\
&\leq S_0 \mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_{t_k}\right| \max\left(\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right), \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_{t_k}\right)\right), \text{ par Taylor} \\
&\leq S_0 \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (X_s - X_{t_k})\, ds\right| e^{M_T} \\
&\leq S_0 \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbb{E} e^{M_T} |X_s - X_{t_k}|\, ds.
\end{aligned}$$

Par Hölder, pour $s \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} e^{M_T} |X_s - X_{t_k}| &\leq \left(\mathbb{E} e^{pM_T}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}|X_s - X_{t_k}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\mathbb{E} e^{pM_T}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}|X_{t_k - s}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \left(\mathbb{E} e^{pM_T}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \sigma \left(\mathbb{E}|B_{t_k-s}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \\
&\leq \left(\mathbb{E} e^{pM_T}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \sigma\sqrt{t_k - s} \left(\mathbb{E}|G|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right],
\end{aligned}$$

où G est une v.a. gaussienne standard. Notons que $t_k - s \leq \frac{T}{n}$ et $\frac{p}{p-1} > 1$. Si $1 < \frac{p}{p-1} \leq 2$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}| + \mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^2 \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^2} + \mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^2 \\
&= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx)\,(t_k - s)} + \int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx)\,(t_k - s) \\
&\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx)}\sqrt{\frac{T}{n}} + \int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx)\frac{T}{n}.
\end{aligned}$$

Si $\frac{p}{p-1} > 2$, alors par la démonstration du théorème 1 de *[Luschgy-Pagès(2008)]*, il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^{\frac{p}{p-1}} &\leq C_0\,(t_k - s) \\
&\leq \frac{C_0 T}{n}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{E}|X_{t_k-s} - \sigma B_{t_k-s}|^{\frac{p}{p-1}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

uniformèment en s. D'où la première partie du théorème. Si maintenant $\sigma = 0$ et $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$, alors, comme $\frac{p}{p-1} > 1$, en utilisant toujours la démonstration du théorème 1 de *[Luschgy-Pagès(2008)]* il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_{t_k-s}|^{\frac{p}{p-1}} &\leq C_0\,(t_k - s)\,. \\
&\leq \frac{C_0 T}{n}
\end{aligned}$$

Et on retrouve la deuxième partie de la proposition. $\diamond$

5.4 Erreurs dues à l'approximation des petits sauts

Nous avons plus haut que tronquer ou approximer (par un Brownien) les petits sauts d'un processus de Lévy, engendre une erreur que nous pouvons contrôler. Nous allons voir l'application des résultats obtenus dans le cas de certaines options exotiques. Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe 4.4, et même si nous n'avons pa pu prouver l'optimalité de certains résultats, il est très peut probable que l'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien puisse engendrer des erreurs plus grande que la troncation des petits sauts contrairement aux conclusions de *[Levendorskii-Kudryavtsev(2009)]* et *[Powers(2008)]*. On notera par V^ε le prix d'une option obtenue en remplaçant X par X^ε dans la dynamique du prix du sous-jacent, et par $\hat{V}^\varepsilon$ lorsque X est remplacée par $\hat{X}^\varepsilon$.

5.4.1 Cas des options barrières

L'erreur d'approximation dans le cas options barrières est la plus importante comparée aux autres options que nous étudions ici. Ceci est dû à la présence de l'indicatrice dans le payoff de ce type d'option.

Proposition 5.49 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) intégrable. On suppose que M_T à une densité localement bornée. Alors le prix d'une option barrière continue est reliée à sa valeur approchée par troncation des petits sauts par les relations suivantes*

1. *Pour une barrière put Up ou Down, pour tout $q \in]0,1[$*

$$V = V^\varepsilon + O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}\right)$$

2. *Pour une barrière call Down, si $\left(e^{X_s}\right)_{s\geq 0}$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors pour tout $q \in]0,1[$*

$$V = V^\varepsilon + O\left(\left(\sigma_0^{\bar{X}}(\varepsilon)\right)^{1-q}\right),$$

où $\bar{\mathbb{P}}$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, $\bar{X}$ est un processus de Lévy sous $\bar{\mathbb{P}}$ de triplet $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma}, \bar{\nu})$, avec

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} &= \delta - r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\right)\bar{\nu}(dx) \\
\bar{\sigma} &= \sigma \\
\bar{\nu}(dx) &= e^{-x}\nu(-dx).
\end{aligned}$$

3. *Pour une barrière put Up, si $\left(e^{X_s}\right)_{s\geq 0}$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors pour tout $q \in]0,1[$*

$$V = V^\varepsilon + O\left(\left(\sigma_0^{-\bar{X}}(\varepsilon)\right)^{1-q}\right).$$

Proposition 5.50 *Soit X un processus de Lévy de triplet (γ, σ^2, ν) intégrable. On suppose que M_T à une densité localement bornée, alors pour tout réels $\rho, \theta \in]0,1[$, le prix d'une option barrière continue est reliée à sa valeur approchée par approximation des petits sauts par un movement Brownien, par les relations suivantes*

1. *Pour une barrière put Up ou Down*

$$V = \hat{V}^\varepsilon + O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-\rho}\left(\tilde{\beta}_{\rho,\theta}(\varepsilon)\right)^\rho\right).$$

2. *Pour une barrière call Down, si $\left(e^{X_s}\right)_{s\geq 0}$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors*

$$V = \hat{V}^\varepsilon + O\left(\left(\sigma_0^{\bar{X}}(\varepsilon)\right)^{1-\rho}\left(\tilde{\beta}_{\rho,\theta}^{\bar{X}}(\varepsilon)\right)^\rho\right),$$

où $\bar{\mathbb{P}}$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, $\bar{X}$ est un processus de Lévy sous $\bar{\mathbb{P}}$ de triplet $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma}, \bar{\nu})$ donné dans la proposition précédente.

3. Pour une barrière call Up, si $\left(e^{X_s}\right)_{s\geq 0}$ *est une* $\mathbb{P}$*-martingale alors*

$$V = \hat{V}^\varepsilon + O\left(\left(\sigma_0^{-\bar{X}}(\varepsilon)\right)^{1-\rho}\left(\tilde{\beta}_{\rho,\theta}^{-\bar{X}}(\varepsilon)\right)^{\rho}\right).$$

Démonstration des propositions 5.49 et 5.50. On désignera par C toute constante indépendant de ε. Dans le cas du put Up and Out, on a

$$\begin{aligned}
|V-V^\varepsilon| &\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\mathbb{1}_{S_0e^{M_T}<H} - \mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T^\varepsilon}\right)^+\mathbb{1}_{S_0e^{M_T^\varepsilon}<H}\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{S_0e^{M_T}<H}-\mathbb{1}_{S_0e^{M_T^\varepsilon}<H}\right)\right| \\
&\quad+\left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+-\left(K-S_0e^{X_T^\varepsilon}\right)^+\right)\mathbb{1}_{S_0e^{M_T^\varepsilon}<H}\right|.
\end{aligned}$$

On note I_1 le premier terme à drote de la dernère inégalité, et I_2 le deuxième terme. Posons $h=\log\left(\frac{H}{S_0}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{M_T<h}-\mathbb{1}_{M_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{M_T<h,M_T^\varepsilon\geq h}-\mathbb{1}_{M_T\geq h,M_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&\leq K\mathbb{P}\left[M_T<h,M_T^\varepsilon\geq h\right]+K\mathbb{P}\left[M_T\geq h,M_T^\varepsilon<h\right] \\
&= O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}\right),\ \text{voir la démonstration de la proposition 4.14.}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq S_0\mathbb{E}\left|e^{X_T}-e^{X_T^\varepsilon}\right| \\
&= O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right),\ \text{par la remarque 4.9.}
\end{aligned}$$

D'où

$$|V-V^\varepsilon| = O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}\right).$$

Pour le put Down Out, on a

$$\begin{aligned}
|V-V^\varepsilon| &\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\mathbb{1}_{S_0e^{m_T}>H} - \mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T^\varepsilon}\right)^+\mathbb{1}_{S_0e^{m_T^\varepsilon}>H}\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{S_0e^{m_T}<H}-\mathbb{1}_{S_0e^{m_T^\varepsilon}<H}\right)\right| \\
&\quad+\left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+-\left(K-S_0e^{X_T^\varepsilon}\right)^+\right)\mathbb{1}_{S_0e^{m_T^\varepsilon}<H}\right|.
\end{aligned}$$

On note toujours I_1 le premier terme à drote de la dernère inégalité, et I_2 le deuxième terme, mais cette fois $h=\log\left(\frac{S_0}{H}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq S_0\mathbb{E}\left|e^{X_T}-e^{X_T^\varepsilon}\right| \\
&= O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right),\ \text{par la remarque 4.9.}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{\tilde{M}_T<h}-\mathbb{1}_{\tilde{M}_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(K-S_0e^{X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{\tilde{M}_T<h,\tilde{M}_T^\varepsilon\geq h}-\mathbb{1}_{\tilde{M}_T\geq h,\tilde{M}_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&\leq K\mathbb{P}\left[\tilde{M}_T<h,\tilde{M}_T^\varepsilon\geq h\right]+K\mathbb{P}\left[\tilde{M}_T\geq h,\tilde{M}_T^\varepsilon<h\right] \\
&= O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}\right),\ \text{voir la démonstration de la proposition 4.14.}
\end{aligned}$$

Donc, on a bien

$$|V - V^\varepsilon| \quad = \quad O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}\right).$$

Pour le call Down and Out, on a

$$\begin{aligned}
|V - V^\varepsilon| &\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+ \mathbb{1}_{S_0e^{m_T}>H} - \mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T^\varepsilon} - K\right)^+ \mathbb{1}_{S_0e^{m_T^\varepsilon}>H}\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+\left(\mathbb{1}_{S_0e^{m_T}>H} - \mathbb{1}_{S_0e^{m_T^\varepsilon}>H}\right)\right| \\
&\quad + \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+ - \left(S_0e^{X_T^\varepsilon} - K\right)^+\right)\mathbb{1}_{S_0e^{m_T^\varepsilon}>H}\right|.
\end{aligned}$$

On note I_1 le premier terme à drote de la dernère inégalité, et I_2 le deuxième terme. On garde $h = \log\left(\frac{S_0}{H}\right)$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+\left(\mathbb{1}_{-m_T<h} - \mathbb{1}_{-m_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}e^{X_T-(r-\delta)T}e^{-\delta T}\left(S_0 - Ke^{-X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{-m_T<h,-m_T^\varepsilon\geq h} - \mathbb{1}_{-m_T\geq h,-m_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&= \left|\bar{\mathbb{E}}e^{-\delta T}\left(S_0 - Ke^{\bar{X}_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{\bar{M}_T<h,\bar{M}_T^\varepsilon\geq h} - \mathbb{1}_{\bar{M}_T\geq h,\bar{M}_T^\varepsilon<h}\right)\right|.
\end{aligned}$$

La nouvelle éspérance $\bar{\mathbb{E}}$ est celle sous $\bar{\mathbb{P}}$ qui résulte de la transformation d'Esscher. Le processus $\bar{X}$ est un $\bar{P}$-processus de Lévy de triplet $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma}^2, \bar{\nu})$. Et on a noté $\bar{M}$ son processus supremum. Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq S_0\bar{\mathbb{P}}\left[\bar{M}_T < h, \bar{M}_T^\varepsilon \geq h\right] + S_0\bar{\mathbb{P}}\left[\bar{M}_T \geq h, \bar{M}_T^\varepsilon < h\right] \\
&= O\left(\left(\sigma_0^{\bar{X}}(\varepsilon)\right)^{1-q}\right), \text{ voir la démonstration de la proposition 4.14.}
\end{aligned}$$

On aégalement

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq S_0\mathbb{E}\left|e^{X_T} - e^{X_T^\varepsilon}\right| \\
&= O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right), \text{ par la remarque 4.9.}
\end{aligned}$$

On a donc

$$|V - V^\varepsilon| \quad = \quad O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}\right).$$

Pour le call Up and Out, on a

$$\begin{aligned}
|V - V^\varepsilon| &\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+ \mathbb{1}_{S_0e^{M_T}<H} - \mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T^\varepsilon} - K\right)^+ \mathbb{1}_{S_0e^{M_T^\varepsilon}<H}\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+\left(\mathbb{1}_{S_0e^{M_T}<H} - \mathbb{1}_{S_0e^{M_T^\varepsilon}<H}\right)\right| \\
&\quad + \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+ - \left(S_0e^{X_T^\varepsilon} - K\right)^+\right)\mathbb{1}_{S_0e^{M_T^\varepsilon}<H}\right|.
\end{aligned}$$

On note I_1 le premier terme à drote de la dernère inégalité, et I_2 le deuxième terme. On note ici $h = \log\left(\frac{H}{S_0}\right)$.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\mathbb{E}e^{-rT}\left(S_0e^{X_T} - K\right)^+\left(\mathbb{1}_{M_T<h} - \mathbb{1}_{M_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}e^{X_T-(r-\delta)T}e^{-\delta T}\left(S_0 - Ke^{-X_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{M_T<h,M_T^\varepsilon\geq h} - \mathbb{1}_{M_T\geq h,M_T^\varepsilon<h}\right)\right| \\
&= \left|\bar{\mathbb{E}}e^{-\delta T}\left(S_0 - Ke^{\bar{X}_T}\right)^+\left(\mathbb{1}_{M_T^{-\bar{X}}<h,M_T^{-\bar{X},\varepsilon}\geq h} - \mathbb{1}_{M_T^{-\bar{X}}\geq h,M_T^{-\bar{X},\varepsilon}<h}\right)\right| \\
&\leq S_0\bar{\mathbb{P}}\left[M_T^{-\bar{X}} < h, M_T^{-\bar{X},\varepsilon} \geq h\right] + S_0\bar{\mathbb{P}}\left[M_T^{-\bar{X}} \geq h, M_T^{-\bar{X},\varepsilon} < h\right] \\
&= O\left(\left(\sigma_0^{-\bar{X}}(\varepsilon)\right)^{1-q}\right), \text{ voir la démonstration de la proposition 4.14.}
\end{aligned}$$

La nouvelle éspérance $\bar{\mathbb{E}}$ est celle sous $\bar{\mathbb{P}}$ qui résulte de la transformation d'Esscher. Le processus X est un $\bar{P}$-processus de Lévy de triplet On aégalement

$$\begin{aligned} I_2 &\leq S_0 \mathbb{E}\left|e^{X_T} - e^{X_T^\varepsilon}\right| \\ &= O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right), \text{ par la remarque 4.9.} \end{aligned}$$

On a donc

$$|V - V^\varepsilon| = O\left(\sigma_0(\varepsilon)^{1-q}\right).$$

Le cas des options In se déduit de celui des Out. En effet la somme des prix des options In et Out de même type (c-à-d call ou put) est égale au prix d'une option vanille. Dans le cas de l'approximation par des petits sauts par un mouvement Brownien, la démonstration est similaire au cas ci-dessus. On considérera d'abord les prix discrets, c-à-d que les supremums considérés seront les supremums discrets. Et on s'inspirera de la démonstration du point 3 de la proposition 4.29. ◇

5.4.2 Cas des options lookback et hindsight

On ne s'intéressera en fait qu'au cas des options lookbacks. Le cas des options hindsights se déduira facilement à partir des formules 5.2.13-5.2.16.

Proposition 5.51 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet (γ, σ^2, ν). On suppose qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $\int_{|x|>1} e^{px}\nu(dx) < \infty$. Alors le prix d'un call lookback continu est relié à ses valeurs approchées par approximation des petits sauts par les relations suivantes*

$$V\left(S_-\right) = V^\varepsilon\left(S_-\right) + O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right)$$

$$V\left(S_-\right) = \hat{V}^\varepsilon\left(S_-\right) + O\left(\sigma_0(\varepsilon)\beta_1(\varepsilon)\right), \ \forall\theta \in]0,1[.$$

Démonstration de la proposition 5.51. Pour simplifier la démonstration on suppose que $r = 0$ et $S_0 = 1$. On rappele que $m_T = -\tilde{M}_T$. On a

$$\begin{aligned} \left|V\left(S_-\right) - V^\varepsilon\left(S_-\right)\right| &\leq \mathbb{E}\left|e^{-\tilde{M}_T} - e^{-\tilde{M}_T^\varepsilon}\right| + \mathbb{E}\left|e^{X_T} - e^{X_T^\varepsilon}\right| \\ &= O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right), \text{par la proposition 4.7 et la remarque 4.9.} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left|V\left(S_-\right) - \hat{V}^\varepsilon\left(S_-\right)\right| &\leq \left|\mathbb{E}\left(e^{-\tilde{M}_T} - S_-\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{-\hat{M}_T^{\tilde{X},\varepsilon}} - S_-\right)^+\right| + \left|\mathbb{E}\left(e^{X_T} - e^{\hat{X}_T^\varepsilon}\right)\right| \\ &= O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right), \text{par les proposition 4.22 et 4.18.} \end{aligned}$$

◇

Proposition 5.52 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet (γ, σ^2, ν). On suppose qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $\int_{|x|>1} e^{p|x|}\nu(dx) < \infty$. Alors le prix d'un put lookback continu est relié à ses valeurs approchées par approximation des petits sauts par les relations suivantes*

$$V\left(S_+\right) = V^\varepsilon\left(S_+\right) + O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right)$$

$$V\left(S_+\right) = \hat{V}^\varepsilon\left(S_+\right) + O\left(\sigma_0(\varepsilon)\left(\beta_{\frac{p}{p-1},\theta}(\varepsilon)\right)^{1-\frac{1}{p}}\right).$$

Démonstration de la proposition 5.52. Pour simplifier la démonstration on suppose que $r = 0$ et $S_0 = 1$. On a

$$\begin{aligned} |V(S_-) - V^\varepsilon(S_-)| &\leq \mathbb{E}\left|e^{M_T} - e^{M_T^\varepsilon}\right| + \mathbb{E}\left|e^{X_T} - e^{X_T^\varepsilon}\right| \\ &= O(\sigma_0(\varepsilon)), \text{par la proposition 4.8 et la remarque 4.9.} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left|V(S_-) - \hat{V}^\varepsilon(S_-)\right| &\leq \left|\mathbb{E}\left(e^{M_T} - S_-\right)^+ - \mathbb{E}\left(e^{\hat{M}_T^\varepsilon} - S_-\right)^+\right| + \left|\mathbb{E}\left(e^{X_T} - e^{\hat{X}_T^\varepsilon}\right)\right| \\ &= O(\sigma_0(\varepsilon)), \text{par les proposition 4.28 et 4.18.} \end{aligned}$$

◇

Corollaire 5.53 *Les propositions 5.51 et 5.52 sont valables pour les options hindsight à condition d'y remplacer, call par put, et put par call.*

5.4.3 Cas des options américaines

L'erreur d'approximation pour ce type d'options exotiques est meilleure que dans les autres cas. Le prix d'une option américaine de strike K et de maturité est donné par

$$\begin{aligned} &\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,T]}} \mathbb{E}e^{-r\tau}\left(S_0 e^{X_\tau} - K\right)^+, \text{ pour le call} \\ &\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,T]}} \mathbb{E}e^{-r\tau}\left(K - S_0 e^{X_\tau}\right)^+, \text{ pour le put,} \end{aligned}$$

où $\mathcal{T}_{[0,T]}$ designe l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, T]$.

Proposition 5.54 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet (γ, σ^2, ν). Alors le prix d'une option américaine continue est reliée à sa valeur approchée, par troncation des petits sauts, par les relation suivantes*

1. *Pour le put, on a*

$$V = V^\varepsilon + O(\sigma(\varepsilon)).$$

2. *Pour le call, si $\left(e^{X_s}\right)_{s\geq 0}$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors*

$$V = V^\varepsilon + O\left(\sigma^{\bar{X}}(\varepsilon)\right).$$

Proposition 5.55 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet (γ, σ^2, ν). Alors le prix d'une option américaine continue est reliée à sa valeur approchée, par approximation des petits sauts par un Brownien, par les relation suivantes*

1. *Pour le put, on a*

$$V = \hat{V}^\varepsilon + O(\sigma_0(\varepsilon)\beta_1(\varepsilon)).$$

2. *Pour le call, si $\left(e^{X_s}\right)_{s\geq 0}$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors*

$$V = \hat{V}^\varepsilon + O\left(\sigma_0^{\bar{X}}(\varepsilon)\beta_1^{\bar{X}}(\varepsilon)\right).$$

Le processus $\bar{X}$ est défini dans la démonstration qui suit.

Démonstration des propositions 5.54 et 5.55. Dans le cas du put on utilise les propositions 4.6 et 4.27. Par ailleurs, on sait que par *[Kyprianou(2006), théorème* 3.9*]*, le prix du call est donné par

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,T]}} \bar{\mathbb{E}} e^{-\delta\tau}\left(S_0 - Ke^{\bar{X}_\tau}\right)^+,$$

où $\bar{\mathbb{E}}$ est l'éspérance sous une probabilité $\bar{\mathbb{P}}$ équivalente à $\mathbb{P}$, et $\bar{X}$ est un $\bar{\mathbb{P}}$-processus de Lévy de triplet $(\gamma, \bar{\sigma}^2, \bar{\nu})$. Avec

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} &= \delta - r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\le 1}\right)\bar{\nu}(dx)\\
\bar{\sigma} &= \sigma\\
\bar{\nu}(dx) &= e^{-x}\nu(-dx).
\end{aligned}$$

On applique là encore les propositions 4.6 et 4.27. ◇

5.4.4 Cas des options asiatiques

Les erreurs d'approximation sont, dans ce cas, similaires au cas des options lookback. Les payoffs d'une option asiatique de moyenne arithmétique à strike fixe K sont données par

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s} ds - K\right)^+, \text{ pour le call}\\
&\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s} ds\right)^+, \text{ pour le put.}
\end{aligned}$$

Proposition 5.56 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet (γ, σ^2, ν). On suppose qu'il existe $p > 1$ tel que $\mathbb{E}e^{pM_T} < \infty$. Alors le prix d'une option asiatique de moyenne arithmétique continue à strike fixe est reliée à sa valeur approchée par troncation des petits sauts, par la relation suivante*

$$V = V^\varepsilon + O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right).$$

Démonstration de la proposition 5.56. Pour simplifier la démonstration on suppose que $r = 0$ et $S_0 = 1$. On a

$$\begin{aligned}
|V - V^\varepsilon| &\le \mathbb{E}\frac{1}{T}\int_0^T \left|e^{X_s} - e^{X_s^\varepsilon}\right| ds\\
&= \mathbb{E}\frac{1}{T}\int_0^T \left|X_s - X_s^\varepsilon\right| e^{\bar{X}_s^\varepsilon} ds,
\end{aligned}$$

avec $\bar{X}_s^\varepsilon$ compris entre X_s et X_s^ε. Soit p^* le conjugué de p (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$). On a

$$\begin{aligned}
|V - V^\varepsilon| &\le \mathbb{E}\sup_{0\le s\le T}|R_s^\varepsilon| \max\left(e^{M_T}, e^{M_T^\varepsilon}\right)\\
&\le \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T}|R_s^\varepsilon|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\mathbb{E}\max\left(e^{pM_T}, e^{pM_T^\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \frac{p^*}{p^*-1}\mathbb{E}\left(|R_T^\varepsilon|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\mathbb{E}e^{pM_T} + \mathbb{E}e^{pM_T^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right), \text{ par la proposition 4.2 et le lemme 4.10.}
\end{aligned}$$

◇

Proposition 5.57 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet (γ, σ^2, ν). On suppose qu'il existe $p > 1$ tel que $\mathbb{E}e^{pM_T} < \infty$. Alors le prix d'une option asiatique de moyenne arithmétique continue à strike fixe est reliée à sa valeur approchée, par approximation des petits sauts par un Brownien, par la relation suivante*

$$V = \hat{V}^\varepsilon + O\left(\sigma_0(\varepsilon)\left(\beta_{\frac{p}{p-1},\theta}(\varepsilon)\right)^{1-\frac{1}{p}}\right).$$

Démonstration de la proposition 5.57. Pour simplifier la démonstration on suppose que $r = 0$ et $S_0 = 1$. On note f le payoff de l'option asiatique, et on pose

$$\begin{aligned}
V_n &= \mathbb{E}f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{X_{\frac{kT}{n}}}\right) \\
V_n^\varepsilon &= \mathbb{E}f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{X^\varepsilon_{\frac{kT}{n}}+\sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kT}{n}}}\right).
\end{aligned}$$

Les quantités V_n et V_n^ε convergent respectivement vers V et V^ε. En se référant aux notations de la démonstration du théorème 4.22 on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n e^{X_{\frac{kT}{n}}} &=^d \sum_{k=1}^n e^{X^\varepsilon_{\frac{kT}{n}}+\hat{B}_{T_k}} \\
\sum_{k=1}^n e^{X^\varepsilon_{\frac{kT}{n}}+\sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kT}{n}}} &=^d \sum_{k=1}^n e^{X^\varepsilon_{\frac{ktT}{n}}+\hat{B}^\varepsilon_{T_k}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|V_n - V_n^\varepsilon| &\leq \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left|e^{X^\varepsilon_{\frac{kT}{n}}+\hat{B}_{T_k}} - e^{X^\varepsilon_{\frac{ktT}{n}}+\hat{B}^\varepsilon_{T_k}}\right| \\
&= \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}^\varepsilon_{T_k}\right| e^{\bar{X}^\varepsilon_k}.
\end{aligned}$$

Avec $\bar{X}^\varepsilon_k$ compris entre $X^\varepsilon_{\frac{kT}{n}} + \hat{B}_{T_k}$ et $X^\varepsilon_{\frac{ktT}{n}} + \hat{B}^\varepsilon_{T_k}$. Soit p^* le conjugué de p. On a

$$\begin{aligned}
|V_n - V_n^\varepsilon| &\leq \left(\mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}^\varepsilon_{T_k}\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{p\bar{X}^\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}^\varepsilon_{T_k}\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{p\bar{X}^\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{p\bar{X}^\varepsilon_k} &\leq \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{p\left(X^\varepsilon_{\frac{ktT}{n}}+\hat{B}_{T_k}\right)} + \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{p\left(X^\varepsilon_{\frac{ktT}{n}}+\hat{B}^\varepsilon_{T_k}\right)} \\
&= \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{p\left(X^\varepsilon_{\frac{ktT}{n}}+R^\varepsilon_{\frac{kT}{n}}\right)} + \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{p\left(X^\varepsilon_{\frac{ktT}{n}}+\sigma(\varepsilon)\hat{W}_{\frac{kT}{n}}\right)} \\
&\leq \mathbb{E}e^{pM_T} + \mathbb{E}e^{p\hat{M}^\varepsilon_T} \\
&\leq \mathbb{E}\left(e^{pM_t} + e^{p\sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq s\leq T}\hat{W}_s}e^{pM^\varepsilon_T}\right) \\
&\leq \mathbb{E}e^{pM_T} + 2e^{\frac{p^2}{2}\sigma(\varepsilon)^2T}\mathbb{E}e^{pM^\varepsilon_T} \\
&\leq 2e^{\frac{p^2}{2}\sigma(\varepsilon)^2T}\mathbb{E}\left(e^{pM_T} + e^{pM^\varepsilon_T}\right).
\end{aligned}$$

La dernìere expression à droite de l'inégalité est bornée par une certaine constante C, par le lemme 4.10. Donc

$$|V_n - V_n^\varepsilon| \quad \leq \quad C\left(\mathbb{E}\sup_{1\leq k\leq n}\left|\hat{B}_{T_k} - \hat{B}^\varepsilon_{T_k}\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

D'où, par le théorème 4.23

$$|V - V^\varepsilon| = O\left(\sigma_0(\varepsilon)\left(\beta_{\frac{p}{p-1},\theta}(\varepsilon)\right)^{1-\frac{1}{p}}\right).$$

Ces résultats sur les options à strike fixe, sont évidemment vrai dans le cas où le strike flottant. Et dans le cas où la moyenne consiérée est géométrique, on aura les mêmes résultats que dans le cas arithmétique. $\diamond$

Corollaire 5.58 *Les résultats des propositions 5.56 et 5.57 sont vrais pour toute option asiatique de moyenne arithmétique ou géométrique à strike fixe ou flottant.*

La démonstration est similaire à celles des propostions précédentes.

5.5 Valorisation en absence de saut positif

En absence de saut positif, les prix des options lookback (et donc hindsight) continues peuvent s'écrire de façon explicite et elles sont régulières. On verra que la régularité des options lookback découle de l'existence d'une densité explicite pour le supremum d'un processus de Lévy sans saut positif.

Théorème 5.59 *Soient X un processus de Lévy sans saut positif ($\nu(]0,+\infty[) = 0$) de triplet (γ,σ^2,ν) vérifiant (2.3.7) et $\sigma > 0$ ou (2.1.2), $T > 0$, h une fonction intégrable vérifiant $h(x) = 0$ pour tout $x < 0$, et f la fonction définie par*

$$f(t,x) = \mathbb{E}h\left(M_t + x\right).$$

Alors f est $C^\infty\left(]0,T]\times]-\infty,0]\right)$.

Avant de démontrer le résultats précédent, nous allons énoncer les deux résultats fondamentaux de cette partie.

Théorème 5.60 *Soient X un processus de Lévy sans saut positif ($\nu(]0,+\infty[) = 0$) de triplet (γ,σ^2,ν) vérifiant (2.3.7) et $\sigma > 0$ ou (2.1.2) et $T > 0$. On définit*

$$\theta = \sup\left\{\beta \geq 0,\ \int_{|x|>1} e^{\beta|x|}\nu(dx) < \infty\right\}$$

$$h_T(v) = \frac{v\varphi'(v)}{\varphi(v)}e^{T\varphi(v)},\ Im(v) < \theta.$$

Si $Re(u) < 0$, alors on a

$$\mathbb{E}e^{uM_T} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{h_T(v)}{(u-iv)}dv.$$

Si on suppose que $\theta > 0$. Alors pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(u) < \theta$, on a

$$\mathbb{E}e^{uM_T} = h_T(-iu) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{h_T(v)}{(u-iv)}dv.$$

Lemme 5.61 *Soient X un processus de Lévy sans saut positif ($\nu(]0,+\infty[) = 0$) de triplet (γ,σ^2,ν) vérifiant (2.3.7) et $\sigma > 0$ ou (2.1.2), $T > 0$ et f_T la densité de M_T. Alors pour tout $y > 0$*

$$f_T(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ivy}h_T(v)dv.$$

Nous avons besoin d'un autre résultat intérmédiaire pour démontrer le théorème 5.60.

Lemme 5.62 *Sous les hypothèses du théorème 5.60, on définit la fonction g par*

$$g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ivy} h_T(v)dv, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Et soit

$$U = \{u \in \mathbb{C}, \ -\theta < Re(u) < \theta\}.$$

Si $\theta > 0$ alors les fonctions $u \to \int_{\mathbb{R}^+} e^{-uy} g(-y)dy$, $u \to \mathbb{E}e^{uM_T}$ et $u \to h_T(-iu)$ sont holomorphes sur U.

Démonstration du théorème 5.59. Soit f_{M_t} la densité de M_t et $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^+} h(y+x) f_{M_t}(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} h(y+x) f_{M_t}(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^-} h(-y+x) f_{M_t}(-y)dy. \end{aligned}$$

Notons que $h(x-y) = 0$ si $x - y < 0$, donc si $y > x$. D'où

$$f(t,x) = h * \tilde{f}_{M_t}(x).$$

Avec $\tilde{f}_{M_t}(x) = f_{M_t}(-x)$. Par le lemme 5.61, on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{M_t}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ivx} h_T(v)dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ivx}\frac{v\varphi'(v)}{\varphi(v)} e^{t\varphi(v)}dv. \end{aligned}$$

On montre facilement que $(v,t,x) \to e^{ivx}\frac{v\varphi'(v)}{\varphi(v)}e^{t\varphi(v)}$ est $C^{0,\infty,\infty}(\mathbb{R}\times[\varepsilon,T]\times]-\infty,0])$. De plus on a pour tout $n, p \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial t^p}\left(e^{ivx}\frac{v\varphi'(v)}{\varphi(v)}e^{T\varphi(v)}\right) = e^{ivx} i^n v^{n+1}\varphi'(v)\left(\varphi(v)\right)^{p-1} e^{t\varphi(v)}.$$

Et cette dernière quantité est dominée par $\left|v^{n+1}\varphi'(v)\left(\varphi(v)\right)^{p-1}\right| e^{-c\varepsilon|v|^\alpha}$, qui est intégrable. Donc $(t,x) \to \tilde{f}_{M_t}$ est $C^\infty([\varepsilon,T]\times]-\infty,0])$, et

$$\frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial t^p}\tilde{f}_{M_t}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ivx} i^n v^{n+1}\varphi'(v)\left(\varphi(v)\right)^{p-1} e^{t\varphi(v)}dv.$$

La fonction h étant intégrable, alors f est $C^\infty([\varepsilon,T]\times]-\infty,0])$. D'où le théorème. ◇

Démonstration du lemme 5.61. Par le théorème 2.23 on a

$$f_T(y) = \int_T^{+\infty}\left(m(s,y) + y\frac{\partial m}{\partial y}(s,y)\right)\frac{ds}{s},$$

où $m(s,.)$ est la densité de X_s. Donc

$$f_T(y) = \int_T^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(ym(s,y)\right)\frac{ds}{s}.$$

Or

$$\begin{aligned}
ym(s,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} ye^{-ivy}e^{s\varphi(v)}dv \\
&= \left[\frac{i}{2\pi}e^{-ivy}e^{s\varphi(v)}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ivy}s\varphi^{'}(v)e^{s\varphi(v)} \\
&= -\frac{is}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ivy}\varphi^{'}(v)e^{s\varphi(v)}dv, \text{ par le lemme 2.20.}
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial y}(ym(s,y)) = -\frac{s}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} ve^{-ivy}\varphi^{'}(v)e^{s\varphi(v)}dv.$$

Et par suite

$$\begin{aligned}
f_T(y) &= -\int_T^{+\infty}\frac{s}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} ve^{-ivy}\varphi^{'}(v)e^{s\varphi(v)}dv\frac{ds}{s} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_T^{+\infty} ds\int_{\mathbb{R}} dvve^{-ivy}\varphi^{'}(v)e^{s\varphi(v)} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dv\int_T^{+\infty} dsve^{-ivy}\varphi^{'}(v)e^{s\varphi(v)}, \text{ par Fubini} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ivy}\frac{v\varphi^{'}(v)}{\varphi(v)}e^{T\varphi(v)}dv, \text{ par le lemme 2.20.}
\end{aligned}$$

◇

Démonstration du lemme 5.62. La difficulté du lemme 5.62 est de montrer que $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-uy}g(-y)dy$ et $\int_{\mathbb{R}^+} ye^{-uy}g(-y)dy$ sont bien définies pour tout $u \in U$. Rappelons que la démonstration du lemme 5.61 (lue dans le sens inverse) implique que pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
g(y) &= \int_T^{+\infty}\left(m(s,y) + y\frac{\partial m}{\partial y}(s,y)\right)\frac{ds}{s} \\
&= \int_T^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}(ym(s,y))\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} e^{-uy}g(-y)dy &= \int_{\mathbb{R}^-} e^{uy}g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^-} e^{uy}\int_T^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}(ym(s,y))\frac{ds}{s}dy.
\end{aligned}$$

Comme $Re(u) < \theta$, alors il existe $\theta_0 > 0$ telle que $Re(u) < \theta_0 < \theta$. On reécrit l'expression précédente sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-uy}g(-y)dy = \int_{\mathbb{R}^-} e^{(\theta_0-u)y}\int_T^{+\infty} e^{-\theta_0 y}\frac{\partial}{\partial y}(ym(s,y))\frac{ds}{s}dy.$$

Notons que $Re(\theta_0 - u) > 0$ et qu'on s'intéresse à $y < 0$, et le terme $\int_T^{+\infty} e^{-\theta_0 y}\frac{\partial}{\partial y}(ym(s,y))\frac{ds}{s}$ est évidemment fini (c'est égale à $e^{-\theta_0 y}g(y)$). Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
\theta_0\mathbb{E}(X_s)^- e^{-\theta_0 X_s} &= \theta_0\int_{\mathbb{R}^-} e^{-\theta_0 y}ym(s,y)dy \\
&= \left[-e^{-\theta_0 y}ym(s,y)\right]_{\mathbb{R}^-} + \int_{\mathbb{R}^-} e^{-\theta_0 y}\frac{\partial}{\partial y}(ym(s,y))dy.
\end{aligned}$$

Le fait que $\theta > 0$ (voir sa définition dans le le théorème 5.60) entraîne l'intégrabilité de $e^{-\theta_0 y} ym(s,y)$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}^-$). Et par suite

$$\lim_{y\to-\infty} e^{-\theta_0 y} ym(s,y) \quad = \quad 0.$$

Donc

$$\theta_0 \mathbb{E}(X_s)^- e^{-\theta_0 X_s} \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^-} e^{-\theta_0 y} \frac{\partial}{\partial y} (ym(s,y))\, dy.$$

D'où $\int_{\mathbb{R}^-} e^{-\theta_0 y} \frac{\partial}{\partial y} (ym(s,y))\, dy$ est bien définie et

$$\lim_{y\to-\infty} e^{-\theta_0 y} \frac{\partial}{\partial y} (ym(s,y)) \quad = \quad 0.$$

Donc $y \to \int_T^{+\infty} e^{-\theta_0 y} \frac{\partial}{\partial y} (ym(s,y)) \frac{ds}{s}$ ne peut pas croitre comme une exponentielle lorsque y tend vers $-\infty$. A noter enfin qu'on peut montrer que $y \to \int_T^{+\infty} e^{-\theta_0 y} \frac{\partial}{\partial y} (ym(s,y)) \frac{ds}{s}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car g est continue). Ce qui entraine l'intégrabilté de

$$e^{(\theta_0-u)y} \int_T^{+\infty} e^{-\theta_0 y} \frac{\partial}{\partial y} (ym(s,y)) \frac{ds}{s},$$

et de

$$ye^{(\theta_0-u)y} \int_T^{+\infty} e^{-\theta_0 y} \frac{\partial}{\partial y} (ym(s,y)) \frac{ds}{s}.$$

$\diamond$

Démonstration du théorème 5.60. Par le lemme 5.61, on a pour tout $v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_T(v) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ivy} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{ivy} f_T(y) dy + \int_{\mathbb{R}^-} e^{ivy} g(y) dy \\ &= \mathbb{E}e^{ivM_T} + \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ivy} g(-y) dy. \end{aligned}$$

Par le lemme 5.62 les fonctions $u \in U \to h_T(-iu) - \int_{\mathbb{R}^+} e^{-uy} g(-y)dy$ et $u \in U \to \mathbb{E}e^{uM_T}$ sont holomorphes. Ces deux fonctions sont égales sur l'intersection de U avec l'axe imaginaire pure. Par le prncipe du prolongement analytique, pour tout $u \in U$ avec $Re(u) > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{uM_T} &= h_T(-iu) - \int_{\mathbb{R}^+} e^{-uy} g(-y) dy \\ &= h_T(-iu) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} e^{-uy} e^{ivy} h_T(v) dv dy \\ &= h_T(-iu) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}^+} dy e^{-(u-iv)y} h_T(v) \\ &= h_T(-iu) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h_T(v)}{u-iv} dv. \end{aligned}$$

Si $Re(u) < 0$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{uM_T} &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{uy} f_T(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} e^{uy} e^{-ivy} h_T(v) dv dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}^+} dy e^{(u-iv)y} h_T(v) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h_T(v)}{u-iv} dv. \end{aligned}$$

$\diamond$

Nous allons maintenant voir les applications du théorèm 5.60. Nous avons des expressions explicite pour les prix du put lookback, mais dans le cas du call nous n'avons le prix que à linstant initial. Introduisons les hypothèses suivantes.

- $(H5)$ X est un processus de Lévy intégrable vérifiant (2.3.6), (2.3.7), et $\sigma > 0$ ou (2.1.2), et $\exists \alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}e^{(1+\alpha)M_T} < \infty$.
- $(H6)$ X est un processus de Lévy intégrable vérifiant (2.3.6), (2.3.7) et $\sigma > 0$ ou (2.1.2).

Proposition 5.63 *On se place sous l'hypothèse $H6$, et on suppose de plus que $\left(e^{-(r-\delta)t+X_t}\right)_{t\geq 0}$ est une martinage. Alors le prix d'une option call lookback continue à la création est donné par*

$$V = e^{-\delta T} S_0 \left(1 - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{h}_T(v)}{1+iv} dv\right),$$

où

$$\bar{h}_T(v) = \frac{v\bar{\varphi}'(v)}{\bar{\varphi}(v)} e^{T\bar{\varphi}(v)},$$

et $\bar{\varphi}$ est l'exposant caractéristique du processus de Lévy de triplet $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma}^2, \bar{\nu})$, avec

$$\begin{aligned}
&\bar{\gamma} = r - \delta + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\right)\bar{\nu}(dx)\\
&\bar{\sigma} = \sigma\\
&\bar{\nu}(dx) = e^x \nu(dx).
\end{aligned}$$

Proposition 5.64 *Sous l'hypothèse $H5$, le prix d'une option put lookback continue à la création est donné par*

$$V = e^{-rT} S_0 \left(h_T(-i) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{h_T(v)}{1-iv} dv\right) - e^{-\delta T} S_0.$$

Proposition 5.65 *Sous l'hypothèse $H5$, le prix d'une option put lookback continue à la date t est donné par*

$$\begin{aligned}
V(S_+) &= e^{-r(T-t)} S_t \left(h_{T-t}(-i) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(1-iv)a}}{1-iv} h_{T-t}(v) dv\right)\\
&\quad + e^{-r(T-t)} S_+ \, \mathbb{P}\left[M_T < a\right]\Big|_{a=\log\left(\frac{S_+}{S_t}\right)} - e^{-\delta(T-t)} S_t,
\end{aligned}$$

où $S_+ > S_t$.

Notons que dans le cas $S_+ \leq S_t$, le prix de l'option se déduit de la proposition 5.64.

Démonstration de la proposition 5.63. On a

$$\begin{aligned}
V &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(S_T - \inf_{0\leq t\leq T} S_t\right)\\
&= e^{-\delta T} S_0 - e^{-rT} S_0 \mathbb{E} e^{m_T}\\
&= e^{-\delta T} S_0 - e^{-rT} S_0 \mathbb{E} e^{X_T} e^{m_T - X_T}\\
&= e^{-\delta T} S_0 - e^{-\delta T} S_0 \mathbb{E} e^{X_T - (r-\delta)T} e^{m_T - X_T}\\
&= e^{-\delta T} S_0 - e^{-\delta T} S_0 \bar{\mathbb{E}} e^{\bar{m}_T - \bar{X}_T},
\end{aligned}$$

où $\bar{\mathbb{E}}$ est l'éspérance sous la probabilité $\bar{P}$ équivalente à la probabilité $\mathbb{P}$ et de densité de Radon

$$\left.\frac{\partial \bar{\mathbb{P}}}{\partial \mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{X_T - (r-\delta)T}.$$

De plus $\bar{X}$ est un $\bar{\mathbb{P}}$-processus de Lévy de triplet $(\bar{\gamma}, \bar{\sigma}^2, \bar{\nu})$ (voir*[Kyprianou(2006), théorème* 3.9*]*), et $\bar{m}$ est son processus infimum. On notera $\bar{M}$ son processus supremum. Donc

$$\begin{aligned} V &= e^{-\delta T} S_0 \left(1 - \bar{\mathbb{E}} e^{-\bar{M}_T}\right), \text{ par la remarque 1.15} \\ &= e^{-\delta T} S_0 \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{h}_T(v)}{1+iv} dv\right), \text{ par le théorème 5.60.} \end{aligned}$$

◇

Démonstration de la proposition 5.64. On a

$$\begin{aligned} V &= e^{-rT} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \le t \le T} S_t - S_T\right) \\ &= e^{-rT} S_0 \mathbb{E} e^{M_T} - e^{-\delta T} S_0 \\ &= e^{-rT} S_0 \left(h_T(-i) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h_T(v)}{1-iv} dv\right) - e^{-\delta T} S_0, \text{ par le théorème 5.60.} \end{aligned}$$

◇

Démonstration de la proposition 5.65. On a

$$\begin{aligned} V(S_+) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left(\max\left(\sup_{t \le \tau \le T} S_\tau, S_+\right) - S_T / \mathcal{F}_t\right) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left(\max\left(\sup_{t \le \tau \le T} S_\tau, S_+\right) / \mathcal{F}_t\right) - e^{-\delta(T-t)} S_t \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left(\max\left(S_0 e^{\sup_{t \le \tau \le T} X_\tau}, S_+\right) / \mathcal{F}_t\right) - e^{-\delta(T-t)} S_t \\ &= e^{-r(T-t)} \ \mathbb{E}\left(\max\left(x e^{M_{T-t}}, S_+\right)\right)\Big|_{x=S_t} - e^{-\delta(T-t)} S_t. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V(S_+) &= e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E} e^{M_{T-t}} \mathbb{1}_{M_{T-t} \ge a}\Big|_{a=\log\left(\frac{S_+}{S_t}\right)} \\ &\quad + e^{-r(T-t)} S_+ \ \mathbb{P}\left[M_T < a\right]\Big|_{a=\log\left(\frac{S_+}{S_t}\right)} - e^{-\delta(T-t)} S_0 \\ &= e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E} e^{M_{T-t}} - e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E} e^{M_{T-t}} \mathbb{1}_{M_{T-t} < a}\Big|_{a=\log\left(\frac{S_+}{S_t}\right)} \\ &\quad + e^{-r(T-t)} S_+ \ \mathbb{P}\left[M_T < a\right]\Big|_{a=\log\left(\frac{S_+}{S_t}\right)} - e^{-\delta(T-t)} S_0. \end{aligned}$$

Or en utilisant le lemme 5.61

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{M_{T-t}} \mathbb{1}_{M_{T-t} < a} &= \int_0^a e^y f_{T-t}(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a dy e^y \int_{\mathbb{R}} dv e^{-ivy} h_{T-t}(v) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dv \int_0^a dy e^{(1-iv)y} h_{T-t}(v) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dv \frac{e^{(1-iv)a} - 1}{1-iv} h_{T-t}(v). \end{aligned}$$

D'où en utilisant le théorème 5.60

$$\begin{aligned} V(S_+) &= e^{-r(T-t)} S_t \left(h_{T-t}(-i) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(1-iv)a}}{1-iv} h_{T-t}(v) dv\right) \\ &\quad + e^{-r(T-t)} S_+ \ \mathbb{P}\left[M_T < a\right]\Big|_{a=\log\left(\frac{S_+}{S_t}\right)} - e^{-\delta(T-t)} S_t. \end{aligned}$$

$\diamond$

L'expression de la probabilité qui apparaît dans la proposition précédente est dooné par le résultat suivant.

Proposition 5.66 *Sous l'hypothèse $H5$, On a pour tout $x \geq 0$*

$$\mathbb{P}\left[M_T \leq x\right] = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ivx}-1}{v} h_T(v)dv.$$

Ce dernier résultat permet de déduire les prix des options barrière digitale Up.

Corollaire 5.67 *On se place sous l'hypothèse $H5$. On pose $a = \log\left(\frac{H}{S_0}\right)$. Alors le prix d'une option barrère digitale est donné par*

1. *Pour le put Up and Out*

$$V = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iva}-1}{v} h_T(v)dv$$

2. *Pour le call Up and In*

$$V = 1 - \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iva}-1}{v} h_T(v)dv.$$

Démonstration de la proposition 5.66. Par le lemme 5.61, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[M_T < x\right] &= \int_0^x f_T(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^x dy \int_{\mathbb{R}} dv e^{-ivy} h_T(v) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dv \int_0^x dy e^{(-iv)y} h_T(v) \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ivx}-1}{v} h_T(v)dv.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Chapitre 6

Etudes numériques

Nous nous intéresserons dans cette partie à définir des techniques de Monté Carlo pour la valorisation des options exotiques. Ces techniques ont vocation à être générales. Nous montrerons quelques applications dans certains modèles très populaires en Finance.

6.1 Options lookback et barrière dans le cas jump-diffusion

On se place dans le cas où X est un processus de Lévy à activité finie de triplet (γ, σ^2, ν) avec $\sigma > 0$. Le processus X s'écrit alors sous cette forme (voir (1.4.10)

$$X_t = \gamma_0 t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \ \forall t \geq 0.$$

6.1.1 Valorisation d'une option lookback

Nous avons vu dans la partie 5.2, que nous pouvons approcher le prix d'une option lookback continue, par le prix de l'option discrète correspondante. Dans le cas de la valorisation à la création, un terme de covariance ($cov\left(e^{M_T}, M_T - M_T^n\right)$) apparait dans la formule. Nous allons donner une méthode de calcul de ce terme.

6.1.1.1 Approximation du terme de covariance de la correction des options lookback

En fait c'est $cov\left(e^{M_T^n}, M_T - M_T^n\right)$ que nous allons calculer. En effet en utilisant les techniques de la partie 5.2, on peut montrer que

$$cov\left(e^{M_T}, M_T - M_T^n\right) = cov\left(e^{M_T^n}, M_T - M_T^n\right) + \sigma^2 T \frac{\beta_2 - \beta_1^2}{n} \mathbb{E} e^{M_T} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Les constantes β_1 et β_2 sont définies après la proposition 5.30. Noter que le terme $\mathbb{E}e^{M_T}$ s'écrit en fonction V, le prix de l'option lookback. On a évidemment

$$cov\left(e^{M_T^n}, M_T - M_T^n\right) = \mathbb{E} e^{M_T^n}\left(M_T - M_T^n\right) - \mathbb{E} e^{M_T^n} \mathbb{E}\left(M_T - M_T^n\right).$$

On va s'intéresser d'abord au terme $\mathbb{E}e^{M_T^n}\left(M_T - M_T^n\right)$. Soient $t_k = \frac{kT}{n}$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, et $(T_j)_{j\geq 1}$ les instants de sauts du processus X. Conditionnellement à $N_T = m$, on définit les $\left(\hat{T}_j\right)_{0\leq j\leq m+n}$ comme le réarrangement croissant des $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ et des $(T_j)_{1\leq j\leq m}$. Posons, pour $1 \leq j \leq m+n$

$$M_j = \sup_{\hat{T}_{j-1} \leq s < \hat{T}_j} X_s.$$

Et soit A_m l'événement défini par

$$A_m = \left\{ N_T = m, \hat{T}_j = \tau_j, X_{\hat{T}_j} = x_j, Y_i = y_i, M_T^n = z_n, 1 \leq j \leq m+n, 1 \leq i \leq m \right\}.$$

On posera $\tau_0 = 0$. Remarquons que Conditionnellement à A_m, on peut déterminer les $\left(X_{\tau_j^-}\right)_{1\leq j\leq m+n}$. On notera $\left(x_j^-\right)_{1\leq j\leq m+n}$ leurs valeurs. Conditionnellement à A_m, le terme à éstimer est donc $\mathbb{E}\left(M_T - z_n/A_m\right)$. On a par ailleurs, pour $x \geq 0$

$$\mathbb{P}\left[M_T \leq x\right] = \mathbb{P}\left[M_j \leq x, 1 \leq j \leq m+n\right].$$

Or conditionnellement à A_m les $\left(M_j\right)_{1\leq j\leq m+n}$ sont indépendants. Donc

$$\mathbb{P}\left[M_T \leq x\right] = \prod_{j=1}^{m+n} \mathbb{P}\left[M_j \leq x\right].$$

Sur $[\tau_{j-1}, \tau_j[$, conditionnellement à A_m, le processus X est un pont Brownien (issu de x_j). Donc

$$\mathbb{P}\left[M_j \leq x\right] = \left(1 - \exp\left(-\frac{2(x - x_{j-1})(x - x_j^-)}{\sigma^2(\tau_j - \tau_{j-1})}\right)\right) \mathbb{1}_{x_{j-1}<x} \mathbb{1}_{x_j^-<x}.$$

Posons

$$\bar{z} = \max\left(\max_{1\leq j\leq m} x_j, \max_{1\leq j\leq m} x_j^-\right).$$

Donc conditionnellement à A_m, $M_T \geq \max\left(\bar{z}, z_n\right)$. Pour tout $x \geq \max\left(\bar{z}, z_n\right)$, on a donc

$$\mathbb{P}\left[M_j \leq x\right] = 1 - \exp\left(-\frac{2(x - x_{j-1})(x - x_j^-)}{\sigma^2(\tau_j - \tau_{j-1})}\right).$$

D'où pour tout $x \geq \max\left(\bar{z}, z_n\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[M_T > x\right] &= 1 - \prod_{j=1}^{m+n} \mathbb{P}\left[M_j \leq x\right] \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{m+n} \left(1 - \exp\left(-\frac{2(x - x_{j-1})(x - x_j^-)}{\sigma^2(\tau_j - \tau_{j-1})}\right)\right).
\end{aligned}$$

Le dernier terme ci-dessus s'écrit comme la somme de fonctions à décroissance exponentielle. Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_T - z_n/A_m\right) &= \int_{\max(\bar{z},z_n)}^{+\infty} (x - z_n) d\mathbb{P}\left[M_T \leq x\right] \\
&= -\left[\mathbb{P}\left[M_T > x\right](x - z_n)\right]_{\max(\bar{z},z_n)}^{+\infty} + \int_{\max(\bar{z},z_n)}^{+\infty} \mathbb{P}\left[M_T \leq x\right] dx \\
&= z_n - \max\left(\bar{z}, z_n\right) + \int_{\max(\bar{z},z_n)}^{+\infty} \mathbb{P}\left[M_T \leq x\right] dx \\
&= -\left(\bar{z} - z_n\right)^+ + \int_{\max(\bar{z},z_n)}^{+\infty} \left[1 - \prod_{j=1}^{m+n} \left(1 - \exp\left(-\frac{2(x - x_{j-1})(x - x_j^-)}{\sigma^2(\tau_j - \tau_{j-1})}\right)\right)\right] dx.
\end{aligned}$$

Calculer explicitement língtégrale ci-dessus lorsque m et n sont petits est possible. Cependant une approximation est souhaitable pour obtenir des résultats rapides. On fait l'approximation (du 1er ordre) suivante

$$1 - \prod_{j=1}^{m+n} \left(1 - \exp\left(-\frac{2(x - x_{j-1})(x - x_j^-)}{\sigma^2(\tau_j - \tau_{j-1})}\right)\right) \approx \sum_{j=1}^{m+n} \exp\left(-\frac{2(x - x_{j-1})(x - x_j^-)}{\sigma^2(\tau_j - \tau_{j-1})}\right).$$

Notons que

$$\exp\left(-\frac{2(x-x_{j-1})(x-x_j^-)}{\sigma^2(\tau_j-\tau_{j-1})}\right) = \exp\left(-\frac{(x_j^- - x_{j-1})^2}{2\sigma^2(\tau_j-\tau_{j-1})}\right)\exp\left(-\frac{2\left(x-\frac{1}{2}(x_j^-+x_{j-1})\right)^2}{\sigma^2(\tau_j-\tau_{j-1})}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_T - z_n/A_m\right) &\approx -\left(\bar{z}-z_n\right)^+ + \sum_{j=1}^{m+n}\exp\left(-\frac{(x_j^- - x_{j-1})^2}{2\sigma^2(\tau_j-\tau_{j-1})}\right)\times \\ &\quad \int_{\max(\bar{z},z_n)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{2\left(x-\frac{1}{2}(x_j^-+x_{j-1})\right)^2}{\sigma^2(\tau_j-\tau_{j-1})}\right)dx \\ &= -\left(\bar{z}-z_n\right)^+ + \sum_{j=1}^{m+n}\exp\left(-\frac{(x_j^- - x_{j-1})^2}{2\sigma^2(\tau_j-\tau_{j-1})}\right)\frac{\sigma}{2}\sqrt{\tau_j-\tau_{j-1}}\sqrt{2\pi}\times \\ &\quad \Phi\left(-\frac{\max\left(\bar{z},z_n\right)-\frac{1}{2}(x_j^-+x_{j-1})}{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\tau_j-\tau_{j-1}}}\right),\end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard. En définitive pour calculer *cov* $\left(e^{M_T^n}, M_T - M_T^n\right)$, on procéde comme suit :

- On simule N_T et les (T_j).
- On simule les (Y_i) et les $\left(X_{\hat{T}_j}\right)$.
- On calcul l'approximation de $\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n/A_m\right)$.

Pour q tirages, si on note $M_T^{n,i}$ le i-ème tirage de même loi que M_T^n, et ε_i^n l'approximation de $\mathbb{E}\left(M_T - M_T^n/A_m\right)$ correspondante, alors

$$\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\left(e^{M_T^{n,i}} - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}e^{M_T^{n,j}}\right)\varepsilon_i^n$$

est une approximation de *cov* $\left(e^{M_T^n}, M_T - M_T^n\right)$.

6.1.1.2 Méthode de Monte-Carlo pour les options lookback

Nous avons évaluer les prix discret. Pour passer au prix continue on utilise les corrections de la partie 5.2.3. Nous allons évaluer des quantités de ce type

$$\begin{aligned}V_n\left(S_+\right) &= e^{-rT}\mathbb{E}\max\left(S_+, S_0e^{\max_{0\le j\le n}X_{j\Delta t}}\right) - S_0e^{-\delta T} \\ V_n\left(S_-\right) &= S_0e^{-\delta T} - e^{-rT}\mathbb{E}\min\left(S_-, S_0e^{\min_{0\le j\le n}X_{j\Delta t}}\right).\end{aligned}$$

Notre but est de trouver des techniques de réduction de variance pour simuler ces objets. Nous allons nous intéresser au premier terme ci-dessus, le deuxième ce traitera de la même manière. On a

$$V_n\left(S_+\right) = e^{-rT}\mathbb{E}\left(S_0e^{\max_{0\le j\le n}X_{j\Delta t}} - S_+\right)^+ + e^{-rT}S_+ - S_0e^{-\delta T}.$$

Sans perte de généralité, notre but revient à simuler un objet du type

$$p = \mathbb{E}\left(e^{M_T^n} - x\right)^+.$$

Une première technique permettant de réduire la variance est la technique des variables antithétiques. Ainsi par la remarque 1.15, on a

$$p = \mathbb{E}\frac{1}{2}\left(\left(e^{M_T^n} - x\right)^+ + \left(e^{X_T - m_T^n} - x\right)^+\right).$$

Numériquement, le gain en variance est relativement faible. Nous avons aussi une variable de contrôle qui s'impose naturellement, c'est e^{X_T}, d'autant plus que l'on connait explicitement son espérance. En effet, du fait de la condition de non-arbitrage, on a

$$\mathbb{E}e^{X_T} = e^{(r-\delta)T}.$$

La réduction de variance est d'autant plus importante que la probabilité et l'occurence des "grands" sauts positives sont plus grandes que celles des sauts négatives. On observera, bien entendu, le phénomène inverse lorsqu'on considére $\mathbb{E}\left(x - e^{m_T^n}\right)^+$ (terme qui intervient dans le calcul de $V(S_-)$). Lorsque la partie continue de X "domine" sa partie saut, on s'attend à ce que M_T^n soit proche du maximun discret de la partie continue. Nous entendons par "domine", le fait que le nombre de sauts soit relativement petit, ou que la probabilité d'avair de "grands" soit petite, ou bien que la volatilité de la partie continue soit grande. Si on note

$$Z_t = \gamma_0 t + \sigma B_t,\ t \geq 0.$$

La deuxème variable de contrôle que nous utiliserons sera alors

$$Y = \frac{1}{2}\left(\left(e^{M_T^{Z,n}} - x\right)^+ + \left(e^{Z_T - m_T^{Z,n}} - x\right)^+\right),$$

avec

$$\begin{aligned} M_T^{Z,n} &= \max_{0\leq j\leq n} Z_{j\Delta t} \\ m_T^{Z,n} &= \min_{0\leq j\leq n} Z_{j\Delta t}. \end{aligned}$$

L'espérance de Y ne peut pas être determiné de manière explicite. Cependant par le lemme 5.36, on a

$$\mathbb{E}Y = e^{\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\mathbb{E}\left(e^{M_T^Z} - e^{-\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}x\right)^+ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Reste à calcuer $\mathbb{E}\left(e^{M_T^Z} - e^{-\beta_1\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}x\right)^+$. Rappelons que par le lemme 2.22, on a

$$\partial_y \mathbb{P}\left[M_T^Z \leq y\right] = \frac{2}{\sigma\sqrt{T}}\phi\left(\frac{y-\gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{2\gamma_0}{\sigma^2}e^{\frac{2\gamma_0 y}{\sigma^2}}\Phi\left(-\frac{y+\gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Posons

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\gamma_0 + \sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ e_2 &= \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right) + \gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ e_3 &= \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right) - \gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbb{E}\left(e^{M_T^Z} - x\right)^+ = \begin{cases} e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}+\gamma_0\right)T}\Phi(e_1)\left(1 + \frac{1}{1+\frac{2\gamma_0}{\sigma^2}}\right) - x\Phi(e_2) - \frac{1}{1+\frac{2\gamma_0}{\sigma^2}}x^{1+\frac{2\gamma_0}{\sigma^2}}\Phi(e_3), & x > 1 \\ e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}+\gamma_0\right)T}\Phi(e_1)\left(1 + \frac{1}{1+\frac{2\gamma_0}{\sigma^2}}\right) + \frac{1}{1+\frac{2\gamma_0}{\sigma^2}}\Phi(e_3) - x, & x \leq 1. \end{cases}$$

On sait alors calculer $\mathbb{E}Y$. Nous pouvons donc écrire

$$p = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\left(e^{M_T^n} - x\right)^+ + \left(e^{X_T - m_T^n} - x\right)^+\right) - b^{tr}\left(\begin{pmatrix} Y \\ e^{X_T} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}Y \\ e^{(r-\delta)T} \end{pmatrix}\right)\right],$$

avec b un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et l'exposant tr désigne la transposée. Notons

$$H = \frac{1}{2}\left(\left(e^{M_T^n} - x\right)^+ + \left(e^{X_T - m_T^n} - x\right)^+\right)$$
$$U = \begin{pmatrix} Y \\ e^{X_T} \end{pmatrix}.$$

Soit n_s le nombre de simulations utilisées pour estimer p. Notons

$$\bar{H} = \frac{1}{n_s}\sum_{i=1}^{n_s} H_i$$
$$\bar{U} = \frac{1}{n_s}\sum_{i=1}^{n_s} U_i,$$

où les $(H_i)_{1\leq i\leq n_s}$ sont des v.a. i.i.d. de même loi que H, et les $(U_i)_{1\leq i\leq n_s}$ sont des v.a. i.i.d. de même loi que U. Les paires $(H_i, U_i)_{1\leq i\leq n_s}$ sont supposées indépendantes avec comme matrice de variance-covariance

$$\begin{pmatrix} \Sigma_U & \Sigma_{UH} \\ \Sigma_{UH}^{tr} & \sigma_H^2 \end{pmatrix},$$

où $\Sigma_U$est la matrice de covariance de U, $\Sigma_{UH} = \left(cov\left(U^{(i)}, H\right)\right)_{1\leq i\leq 2}$ et $\sigma_H^2 = var(H)$. Alors pour $b \in \mathbb{R}^2$ fixé, un estimateur de p est

$$\bar{p}(b) = \bar{H} - b^{tr}\left(\bar{U} - \mathbb{E}U\right),$$

et la variance par simulation est donnée par

$$var\left[\bar{H} - b^{tr}\left(\bar{U} - \mathbb{E}U\right)\right] = \sigma_H^2 - 2b^{tr}\Sigma_{UH} + b^{tr}\Sigma_U b.$$

Cette variance est minimale en (*[Glasserman(2004), formule 4.13]*)

$$b^* = \Sigma_U^{-1}\Sigma_{UH}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} var\left[\bar{H} - (b^*)^{tr}\left(\bar{U} - \mathbb{E}U\right)\right] &= \sigma_H^2 - \Sigma_{UH}^{tr}\Sigma_U^{-1}\Sigma_{UH} \\ &= (1 - R^2)\sigma_H^2, \end{aligned}$$

avec

$$R^2 = \frac{1}{\sigma_H^2}\Sigma_{UH}^{tr}\Sigma_U^{-1}\Sigma_{UH}.$$

En pratique b^* n'est pas connu, il estimé par (*[Glasserman(2004), formule 4.16]*)

$$\hat{b}_{n_s} = S_U^{-1}S_{UH}$$

Où S est une matrice 2×2 dont la composante jk est donné par

$$\frac{1}{n_s - 1}\left(\sum_{i=1}^{n_s} U_i^{(j)}U_i^{(k)} - n_s\bar{U^{(j)}}\bar{U^{(k)}}\right),$$

et S_{UH} est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont la composante j est donné par

$$\frac{1}{n_s - 1}\left(\sum_{i=1}^{n_s} U_i^{(j)}H_i - n_s\bar{U^{(j)}}\bar{H}\right).$$

Le nouveau estimateur de p, est $\bar{p}(\hat{b}_{n_s})$. L'utilisation de $\hat{b}_{n_s}$ introduit un biais, du fait que $\hat{b}_{n_s}$ et $\bar{U}$ ne sont pas indépensant. Cependant ce biais est de l'ordre de $O\left(\frac{1}{n_s}\right)$ (*[Glasserman(2004), paragraphe 4.1.3]*), alors que l'erreur standards est de l'ordre $O\left(\frac{1}{\sqrt{n_s}}\right)$. Pour tester notre méthode, nous considérons le modèle double-exponentiel (ou modèle de Kou) introduit par *[Kou(2002)]*. On a dans ce cas $\sigma > 0$ et les $(Y_i)_{i\geq 1}$ suivent une loi double-exponentielle de densité

$$f_Y(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x}\mathbb{1}_{x\geq 0} + (1-p)\eta_2 e^{-\eta_2 x}\mathbb{1}_{x<0},\ x \in \mathbb{R},$$

où $\eta_1, \eta_2 > 0$, et $0 \leq p \leq 1$. Le prix "exacte", dans le tableau 6.1.1, est obtenu en utilisant la méthode de Kou

n	erreur statistique	erreur totale
1	0.2%	10.97%
2	0.18%	4.85%
3	0.17%	3.05%
4	0.17%	1.45%
5	0.17%	1.69%
6	0.17%	1.45%
7	0.169%	1.05%
8	0.167%	0.74%
9	0.165%	0.67%
10	0.161%	0.49%

Table 6.1.1 – Approximation du prix du put lookback dans le modèle double-exponentiel. Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0$, $T = 1$, $S_+ = 100$, $\sigma = 0.3$, $\lambda = 7$, $p = 0.6$, $\eta_1 = 50$, $\eta_2 = 25$, $n_s = 100000$. La valeur "exacte" du put lookback continu est 24.8859.

(*[Kou-Wang(2004)]*). Et les erreurs sont considérées relativement au prix "exact". Pour observer la reduction de variance, on introduit également le modèle de Merton introduit par *[Merton(1976)]*. Dans ce modèle les $(Y_i)_{i\geq 1}$ suivent une loi normale de moyenne a et de variance v^2. Les paramètres utilisés pour le modèle de Kou sont les mêmes que dans le tableau 6.1.1. Pour le modèle de Merton on utilise les paramètres suivants : $\sigma = 0.3$, $a = 0$, $v = 0.4$ et $\lambda = 0.1$. La technique de réduction de variance que nous utilisons permet de réduire considérablement la variance (voir tableau 6.1.2).

6.1.2 Valorisation d'une option barrière

Dans le cas des options barrières, il y a une technique que l'on retrouve dans *[Cont-Tankov(2004), exemple 6.1]*, qui permet d'éviter la discrétation des trajectoires du prix du sous-jacent. Cette technique est valable dès que le processus de Lévy utilisé est un *jump-diffusion*. Ce qui est le cas qui nous intéresse dans ce paragraphe. On veut donc calculer une quantité de ce type.

$$C = \mathbb{E}f\left(X_T\right)\mathbb{1}_{M_T<b}$$

où f est une fonction vérifiant des hypothèses de régularité suffisantes et $b > 0$. Toutes les options barrières peuvent se ramener sous cette forme, si bien sûr la loi de M_T est continue, ce qui est le cas dans le cas *jump-diffusion*. On note $(\tau_i)_{i\geq 1}$ les instants de saut de X, $\mathcal{F}^*$ la tribu des instants de saut, du nombre de

Modèle	$var\left(\left(S_0 e^{M_T} - S_+\right)^+\right)$	$var\left(H\right)$	$var\left(H - b^{tr}U\right)$
Kou	591.09	517.36	39.54
Merton	703.82	630.45	45.57

Table 6.1.2 – Réduction de variance obtenu par utilisation de variable antithétiques puis de variable de contrôle. Les paramètres sont $S_0 = 100$, $T = 1$, $S_+ = 100$, $n = 10$ et $n_s = 100000$.

sauts, des tailles des sauts et des valeurs aux instant sauts et en T de X. On note également $\bar{\tau}_0 = 0$ et pour $i \geq 1$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i &= T_i \wedge t \\ M_i &= \max_{\bar{\tau}_{i-1} \leq t < \bar{\tau}_i} X_t. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}\left(f\left(X_T\right) \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{M_T < b} / \mathcal{F}^*\right]\right) \\ &= \mathbb{E}\left(f\left(X_T\right) \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N_T+1} \mathbb{1}_{M_i < b} / \mathcal{F}^*\right]\right). \end{aligned}$$

Donc par *[Cont-Tankov(2004), exemple 6.1]* , on obtient

$$C = \mathbb{E}\left[f\left(X_T\right) \prod_{i=1}^{N_T+1} \mathbb{1}_{X_{\bar{\tau}_i} < b, X_{\bar{\tau}_i^-} < b} \left\{1 - exp\left(-\frac{2\left(X_{\bar{\tau}_i^-} - b\right)\left(X_{\bar{\tau}_{i-1}} - b\right)}{\left(\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_{i-1}\right)\sigma^2}\right)\right\}\right].$$

Pour un cadre un peu plus général voir *[Metwally-Atiya(2002)]*. Pour réduire la variance, on peut utiliser les deux variables de contrôle suivantes : S_T (où S désigne le processus prix du sous-jacent) et l'option barrière correspondant à la partie continue de X, qu'on va noter Z. Notons que pour tout $t \geq 0$

$$Z_t = \gamma_0 t + \sigma B_t.$$

Rappelons que par (2.2.5), on a

$$\mathbb{P}\left[M_T^Z \leq y\right] = \Phi\left(\frac{y - \gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\gamma_0 y}{\sigma^2}} \Phi\left(-\frac{y + \gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Et que pour $x < y$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[M_T^Z \leq y, Z_T \leq x\right] &= \int_{-\infty}^{x} \left(1 - e^{-\frac{2y(y-u)}{\sigma^2 t}}\right) \frac{e^{-\frac{(u-\gamma t)^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} du \\ &= \Phi\left(\frac{y - \gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\gamma_0 y}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{(x - 2y) - \gamma_0 T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Ces deux expressions permettent de determiner de façon exacte les prix des options barrières dans un modèle Black-Scholes (même si la condition martingale n'est pas vérifiée). A titre d'exemple le prix d'une option *Up and Out* put (voir le tableau5.1.2), lorsque le processus prix du sous-jacent est $\left(S_t = S_0 e^{Z_t}\right)_{t \geq 0}$, est donnée par

$$Ke^{-rT}\mathbb{P}\left[M_T^Z \leq \log\left(\frac{H}{S_0}\right), Z_T \leq \log\left(\frac{K}{S_0}\right)\right] - S_0 e^{\left(\gamma_0 - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \mathbb{P}\left[M_T^{\bar{Z}} \leq \log\left(\frac{H}{S_0}\right), \bar{Z}_T \leq \log\left(\frac{K}{S_0}\right)\right].$$

Les constantes K et H désigne respectivement le strike et la barrière de l'option, et

$$\bar{Z}_t =^d (\gamma_0 + \sigma^2)t + \sigma B_t, \ \forall t \geq 0.$$

La méthode de réduction de variance par variables de contrôle est expliquée dans le paragraphe précédent. Nous allons observer maintenant la vitesse de convergence des options barrières discrètes vers les options barrières continues dans les modèles de Kou et de Merton. L'option considérée sera la UOP. Pour différentes valeurs de n qui désignera le nombre de dates d'observations pour l'option UOP discrète, nous allons calculer le produit entre la valeur absolue de l'erreur entre les options continue et discrète, et $\sqrt{n}$. Les paramètres du modèle de Merton seront les mêmes que dans le tableau 6.1.2. Les paramètres du modèle de Kou sont : $\sigma = 0.2$, $\lambda = 7$, $p = 0.6$, $\eta_1 = 50$, $\eta_2 = 25$, $n_s = 100000$. Nous prenons comme paramètres de l'option : $S_0 = 100$, $r = 0.09531$, $\delta = 0$, $T = 1$, $K = 100$, une barrière$= 110$ et un *rebate*$= 10$. Le prix "exacte"

n	Kou	Merton
100	0.873	1.922
1000	1.219	2.118
2000	1.508	2.167
3000	1.706	2.213
4000	1.828	2.106
5000	1.959	2.199
6000	2.234	2.130
7000	2.202	2.176
8000	2.399	2.166
9000	2.533	2.110
10000	2.626	2.149

TABLE 6.1.3 – Erreur entre les options UOP continue et discrète.

n	prix discret	prix corrigé
10	10.588	10.579
20	10.697	10.703
30	10.741	10.751
40	10.766	10.777
50	10.779	10.794
60	10.793	10.806
70	10.802	10.815
80	10.808	10.822
90	10.813	10.827
100	10.818	10.832

TABLE 6.1.4 – Prix des options UOP discrètes.

dans le modèle de Kou est obtenu par la méthode de *[Kou-Wang(2003)]*, dans le modèle de Merton on fait une simulation de Monté Carlo comme suggérée ci-dessus. L'erreur est bornée, comme on l'a montrée dans le paragraphe 5.1. La simulation des options barrières discrètes est cependant couteuse en temps de calcul lorsque n devient grand. Il est alors plus judicieux de l'approximer par la méthode de correction proposée dans le paragraphe 5.1. Nous observons la precision de cette méthode dans le tableau 6.1.4. Le prix corrigé désigne, le prix discret résultant de la correction de continuité. Et le prix continue est de 10.9034. L'erreur relative maximale est de 0.13%.

6.2 Options éxotiques dans le cas activité infinie

Un processus de Lévy à activité infinie peut être approximé par un processus de Lévy à activité finie. Les erreurs qui en résultent sont contrôlées dans la partie 5.4. Dans cette partie nous allons voir comment, une fois l'approximation faite, peut-on évaluer les prix des options lookback, barrière et asiatique.

6.2.1 Méthode de simulation

On s'intéresse à la simulation d'une option *path-dependent* de maturité T, dans le cas où le processus de Lévy est à activité infinie sans partie Brownienne. Notre objectif est de simuler une v.a. dépendant de la trajectoire de X sur $[0, T]$. En fait il est très difficile (voir impossible dans certains cas) de simuler une telle v.a., on va alors l'approximer. Ce qui introduit un biais (voir la partie 5.4). Designons par J la mesure de

Poisson sur $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ d'intensité $\nu(dx)dt$, alors pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
X_t^\varepsilon &= X_t - R_t^\varepsilon \\
&= \gamma t + \int_{|x|>1, s\in[0,t]} x J_X(dx \times ds) + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1, s\in[0,t]} x J_X(dx \times ds) \\
&= \left(\gamma - \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} x\nu(dx)\right) t + \int_{|x|>\varepsilon, s\in[0,t]} x J_X(dx \times ds) \\
&= \left(\gamma - \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} x\nu(dx)\right) t + \int_{x>\varepsilon, s\in[0,t]} x J_X(dx \times ds) \\
&\quad + \int_{x<-\varepsilon, s\in[0,t]} x J_X(dx \times ds) \\
&= \gamma_0^\varepsilon t + \sum_{i=1}^{N_t^+} Y_i^+ - \sum_{i=1}^{N_t^-} Y_i^-.
\end{aligned}$$

Où $\gamma_0^\varepsilon = \gamma - \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} x\nu(dx)$, les v.a. $\left(Y_i^+\right)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\frac{\nu_\varepsilon^+(dx)}{\nu(]\varepsilon,+\infty[)}$, les v.a. $\left(Y_i^-\right)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\frac{\nu_\varepsilon^-(-dx)}{\nu(]-\infty,\varepsilon[)}$. Les mesures ν_ε^+ et ν_ε^- sont respectivement les restrictions de ν sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$. Le processus X^ε est un processus de Poisson composé. Le probème qui se pose, c'est étant donné que le nombre saut sur $[0, T]$ est relativement grand, comment faire pour simuler rapidement la taille des sauts. La simulation des temps de saut étant relativement simple, nous allons nous concentrer sur la simulation des sauts, notamment des $\left(Y_i^+\right)_{i\geq 1}$. La simulation des $\left(Y_i^-\right)_{i\geq 1}$ se fera de manière identique. Notons $\lambda_+^\varepsilon = \nu(]\varepsilon, +\infty[)$. La fonction de répartition de Y_1^+ ne peut donc pas être déterminé de façon explicite, et par suite la fonction de répartition inverse non plus. Donc une façon de simuler Y_1^+ est d'utiliser une méthode de rejet. Cette dernière est couteuse en temps, d'autant plus on devra faire en moyenne, $\lambda_+^\varepsilon T$ simulations. L'alternative est donc de faire une *inversion discrète* de la fonction de répartition de Y_1^+ qu'on notera F_+. On a, pour tout $x > \varepsilon$

$$F_+(x) = \frac{1}{\lambda_+^\varepsilon} \int_\varepsilon^x \nu(dx).$$

Nous définissons un réel positif A de sorte que $\nu(]A, +\infty[)$ soit très petit, de l'odre de 10^{-16} par exemple (c'est ce que nous considèrons dans nos simulations). On suppose alors que la variable aléatoire évolue dans $[\varepsilon, A]$. Posons pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}
x_k &= k\frac{A-\varepsilon}{n} + \varepsilon \\
y_k &= \frac{F_+(x_k)}{F_+(A)},
\end{aligned}$$

où n est le nombre de points de discrèstisation que l'on choisit sur $[\varepsilon, A]$. A noter que $y_0 = 0$. Comment évaluer les $(F_+(x_k))_{1\leq k\leq n}$? Remarquons que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$F_+(x_k) = \sum_{j=1}^{k} \left(F_+(x_j) - F_+(x_{j-1})\right),$$

avec

$$\left(F_+(x_j) - F_+(x_{j-1})\right) = \frac{1}{\lambda_+^\varepsilon} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \nu(dx).$$

En fonction de la mesure de Lévy, on définira des techniques d'approximation de l'intégrale $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \nu(dx)$. On définit également la fonction G_+ par, pour tout $y \in [0, 1]$

$$G_+(y) = x$$

Où x est l'unique réel qui vérifie $\frac{F_+(x)}{F_+(A)} = y$. Soit donc $y \in [0,1]$ fixé, pour calculer $G_+(y)$, on procéde de la façon suivante. On identifie d'abord l'entier $k > 1$ qui vérifie $y_{k-1} \leq y < y_k$. On a alors

$$yF_+(A) = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{G_+(y)} \nu(dy).$$

Il faut donc approximer l'intégrale ci-dessus en fonction de $G_+(y)$, et exprimer cette dernière en fonction de y. Nous appelerons la fonction G_+, la *fonction réciproque discrète* de F_+. En faisant tendre n et A vers l'infini, on obtient la fonction réciproque de F_+. Pour nos simulations, on supposera que Y_1^+ est égale en loi à $G_+(U)$, où U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$. Nous utiliserons comme variables de contôle, $e^{X_T^\varepsilon}$ ou $e^{\hat{X}_T^\varepsilon}$. Les espérances ces v.a. sont connues à une erreur de $o\left(\sigma(\varepsilon)^2\right)$ près (voir le chapitre 4).

6.2.2 Estimation de la fonction de répartition réciproque des sauts

Nous allons, pour certains modèles, estimer la fonction G_+. Les modèles auxquels nous nous intéresserons dans ce paragraphe, sont les modèle VG, CGMY et NIG. Pour d'autres types de modèles on pourra utiliser les mêmes techniques.

6.2.2.1 Le cas Variance-Gamma

Le modèle Variance-Gamma (VG) a été d'abord introduit par *[Madan-Seneta(1990)]*, puis étendu plus tard par *[Madan et al.(1998)]*. C'est un processus à saut pur. Il se définit comme suit. Soit W un mouvement Brownien de la forme

$$W_t = \theta t + \sigma B_t,\ t \geq 0,$$

où B est un mouvement Brownien standard, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$. On se donne ǵalement un processus gamma, G, de paramètres $(\mu, \kappa) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Rappelons qu'une distribution gamma de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, est une distribution définie sur $\mathbb{R}_+^*$ de densité de probabilité

$$f_G(x) = x^{a-1}\frac{e^{-\frac{x}{b}}}{b^a\Gamma(a)},\ x > 0.$$

Et le processus gamma G, de paramètres $(\mu, \kappa) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, vérifie, $G_0 = 0$ et pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$, $G_{t+h} - G_t$ à un distribution gamma de paramètres $\left(h\frac{\mu^2}{\kappa}, \frac{\kappa}{\mu}\right)$. En fait on choisit $\mu = 1$, et le processus $(W_{G_t})_{t\geq 0}$ est alors un processus VG de paramètres (θ, σ, κ). Son exposant caractéristique est donnée par

$$\varphi(u) = \log\left(\left(1 - i\theta\kappa u + \frac{\sigma^2}{2}\kappa u^2\right)^{-\frac{1}{\kappa}}\right)$$

Le processus $(W_{G_t})_{t\geq 0}$, peut être défini par sa mesure de Lévy ν. Et c'est cette définition que nous allons adopter. En effet

$$\nu(dx) = C\frac{e^{-Mx}}{x}\mathbb{1}_{x>0}dx + C\frac{e^{-G|x|}}{|x|}\mathbb{1}_{x<0}dx,$$

avec

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\kappa} \\ M &= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\kappa} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}} - \frac{\theta}{\sigma^2} \\ G &= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\kappa} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}} + \frac{\theta}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Le processus VG peut être donc vu comme un cas particulier des processus CGMY en considérant $Y = 0$ (voir *[Carr-Madan-Geman-Yor(2002)]*). La densité de Y_1^+ est alors

$$f_+(x) = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \frac{e^{-Mx}}{x}, \ x > \varepsilon.$$

On a donc, pour tout $x > \varepsilon$

$$F_+(x) = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \int_\varepsilon^x \frac{e^{-My}}{y} dy.$$

D'où

$$F_+(x_k) - F_+(x_{k-1}) = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{e^{-My}}{y} dy.$$

On approxime cette dernière intégrale par

$$\frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} e^{-Mx_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dy}{y} dy = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} e^{-Mx_{k-1}} \log\left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right).$$

La fonction G_+ vérifie, dans lemodèle VG, cette equation

$$yF_+(A) = y_{k-1} + \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \int_{x_{k-1}}^{G_+(y)} \frac{e^{-My}}{y} dy.$$

Comme précedemment on approxime l'intégrale ci-dessus par

$$\frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} e^{-Mx_{k-1}} \log\left(\frac{G_+(y)}{x_{k-1}}\right).$$

D'où l'approximation suivante pour $G_+(y)$

$$x_{k-1} \exp\left[\frac{\lambda_+^\varepsilon}{C} \left(yF_+(A) - y_{k-1}\right) e^{-Mx_{k-1}}\right]. \tag{6.2.1}$$

6.2.2.2 Le cas CGMY

Le modèle CGMY (Carr, Madan, Geman et Yor), version simplifiée du modèle stable tempérée, a été introduit par *[Carr-Madan-Geman-Yor(2002)]*. C'est un processus de Lévy à saut pur de mesure de Lévy

$$\nu(dx) = C \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} \mathbb{1}_{x>0} dx + C \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} \mathbb{1}_{x<0} dx.$$

Ou les réels C, G et M sont strictement positifs, et $Y \in]0, 2[$. Lorsque $Y = 0$, on retrouve le modèle Variance-Gamma. Sa fonction exponentielle caractéristique est donné par

$$\varphi(u) = \begin{cases} C\left((M - iu)\log\left(1 - \frac{iu}{M}\right) + (G + iu)\log\left(1 + \frac{iu}{G}\right)\right), & si\ Y = 1 \\ C\Gamma(-Y)\left[M^Y\left(\left(1 - \frac{iu}{M}\right)^Y - 1 + \frac{iuY}{M}\right) + G^Y\left(\left(1 + \frac{iu}{G}\right)^Y - 1 - \frac{iuY}{G}\right)\right], & sinon. \end{cases}$$

Dans le cas du modèle CGMY, la densité de Y_1^+ s'écrit sous la forme

$$f_+(x) = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \frac{e^{-Mx}}{x^{1+x}}, \ x > \varepsilon.$$

Ce qui nous donne comme fonction de répartition

$$F_+(x) = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \int_\varepsilon^x \frac{e^{-My}}{y^{1+Y}} dy.$$

D'où

$$F_+(x_k) - F_+(x_{k-1}) = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{e^{-My}}{y} dy.$$

On approxime alors $F_+(x_k) - F_+(x_{k-1})$ par

$$\frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} e^{-Mx_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} y^{1+Y} dy = \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon Y} e^{-Mx_{k-1}} \left(\frac{1}{x_{k-1}^Y} - \frac{1}{x_k^Y} \right).$$

Donc G_+ est solution de l'équation

$$yF_+(A) = y_{k-1} + \frac{C}{\lambda_+^\varepsilon} \int_{x_{k-1}}^{G_+(y)} \frac{e^{-My}}{y^{1+Y}} dy.$$

On approxime l'intégrale ci-dessus par

$$\frac{C}{\lambda_+^\varepsilon Y} e^{-Mx_{k-1}} \left(\frac{1}{x_{k-1}^Y} - \frac{1}{(G_+(y))^Y} \right).$$

D'où l'approximation suivante pour $G_+(y)$

$$\left[\frac{1}{x_{k-1}^Y} - \frac{\lambda_+^\varepsilon Y}{C} e^{Mx_{k-1}} \left(yF_+(A) - y_{k-1} \right) \right]^{-\frac{1}{Y}}. \tag{6.2.2}$$

6.2.2.3 Le cas NIG

Introduit par *[Bandorff-Nielsen(1995)]*, le modèle NIG (Normal Inverse Gaussian) est, comme le modèle VG, un cas particulier des modèles hyperboliques. Il est caractérisé par quatre paramètres : α, β, $\tilde{\delta}$ et μ. Avec $0 \leq |\beta| \leq \alpha$, $\tilde{\delta} > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. La densité de transition d'un processus NIG est donné pour $t > 0$, par

$$f_t^{NIG}(x) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{K_1\left(\alpha\tilde{\delta}_t \sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu_t}{\tilde{\delta}_t} \right)^2} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu_t}{\tilde{\delta}_t} \right)^2}} \exp\left(\tilde{\delta}_t \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \left(\frac{x - \mu_t}{\tilde{\delta}_t} \right) \right) \right),$$

où $\mu_t = \mu t$, $\tilde{\delta}_t = \tilde{\delta} t$ et K_λ désigne la fonction de Bessel modifée de troisième type, avec

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} y^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2} z \left(y + \frac{1}{y} \right) \right) dy.$$

Son exposant caractéristique est définie comme suit, pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi(u) = i\mu u + \tilde{\delta} \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right).$$

Dans la représentation de Lévy-Khintchine le triplet associé au processus NIG est $(\gamma, 0, \nu)$, avec

$$\begin{aligned} \gamma &= \mu + 2\frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi} \int_0^1 \sinh(\beta x) K_1(\alpha x) \\ \nu(dx) &= \frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi|x|} K_1(\alpha|x|) e^{\beta x} dx. \end{aligned}$$

Notons que le processus NIG peut être représenté comme un mouvement Brownien de drift β et de variance 1, subordonné par un processus IG (Inverse Gaussian) de paramètres $(\tilde{\delta}, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$. Rappelons qu'un processus IG de paramètres (a, b) à pour densité de transition pour tout $t > 0$

$$f_t^{IG}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{b^2}{x}\left(x - \frac{a}{b}\right)^2\right).$$

Dans les applications financières, on prend $\mu = 0$. Le processus NIG que nous considérons est alors représenté par trois paramètres : $(\alpha, \beta, \tilde{\delta})$. La densité des sauts positifs (donc de Y_1^+) est la suivante

$$f_+(x) = \frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi x} K_1(\alpha x) e^{\beta x}, \ x > \varepsilon.$$

Ce qui nous donne la loi de Y_1^+

$$F_+(x) = \frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi} \int_\varepsilon^x \frac{K_1(\alpha y)}{y} e^{\beta y} dy.$$

Et par suite

$$F_+(x_k) - F_+(x_{k-1}) = \frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{K_1(\alpha y)}{y} e^{\beta y} dy.$$

Pour approximer l'intégrale ci-dessus, on a besoin de connaître le comportement asymptotique de K_1. On a (voir *[Abramowitz-Stegun(1972), formules* 9.7.2 *et* 9.8.7*]*)

$$K_1(x) \underset{x \downarrow 0}{\sim} \frac{C}{x}, \text{ pour un certain C>0}$$

$$K_1(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

D'où l'approximation suivante

$$\frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi} x_{k-1} K_1(\alpha x_{k-1}) e^{\beta x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dy}{y^2} = \frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi} x_{k-1} K_1(\alpha x_{k-1}) e^{\beta x_{k-1}} \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right).$$

Dans le cas NIG G_+ vérifie

$$yF_+(A) = y_{k-1} + \frac{\alpha\tilde{\delta}}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{G_+(y)} \frac{K_1(\alpha y)}{y} e^{\beta y} dy.$$

D'où cette approximation de $G_+(y)$

$$\left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{\pi}{\alpha\tilde{\delta}} \frac{yF_+(A) - y_{k-1}}{x_{k-1} K_1(\alpha x_{k-1})} e^{-\beta x_{k-1}}\right)^{-1}. \tag{6.2.3}$$

Le cas Y_1^- se traite exactement de la même façon, on remplace juste β par $-\beta$.

6.2.3 Valorisation d'une option asiatique

Nous allons nous interésser à la simulation d'une option put asiatique à strike fixe. Le cas call pourra être facilement déduit. Pour les options à strike flottant, il existe des techniques permettant de les ramener au cas fixe. Considérons les payoffs suivants

$$\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s} ds\right)^+, \text{ put asiatique de moyenne arithmétique}$$

$$\left(K - S_0 e^{\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds}\right)^+, \text{ put asiatique de moyenne géométrique.}$$

On notera alors

$$\begin{aligned} V_a &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s}ds\right)^+ \\ V_g &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-S_0 e^{\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds}\right)^+. \end{aligned}$$

Le processus X a pour triplet $(\gamma,0,\nu)$. En réalité ce sont les quantités V_a^ε, $\hat{V}_a^\varepsilon$, V_g^ε et $\hat{V}_g^\varepsilon$ que nous allons évaluer. Ce sont les quantités obtenues en remplaçant X par X^ε où $\hat{X}^\varepsilon$. Dans le paragraphe 5.4.4 nous avons étudié les erreurs résultant de ces approximations. Soient $\left(T_j^\varepsilon\right)_{j\geq 1}$ les instants de saut de X^ε. On pose

$$\begin{aligned} T_0^\varepsilon &= 0 \\ T_j^\varepsilon &= T_j^\varepsilon \wedge T. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} V_a^\varepsilon &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X_s^\varepsilon}ds\right)^+ \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{X_s^\varepsilon}ds\right)^+ \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{\gamma_0^\varepsilon s+\sum_{i=1}^{j-1}Y_i^\varepsilon}ds\right)^+, \text{ (voir (1.4.13)).} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_a^\varepsilon &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\sum_{i=1}^{j-1}Y_i^\varepsilon}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{\gamma_0^\varepsilon s}ds\right)^+ \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\sum_{i=1}^{j-1}Y_i^\varepsilon}\frac{e^{\gamma_0^\varepsilon\hat{T}_j^\varepsilon}-e^{\gamma_0^\varepsilon\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}}{\gamma_0^\varepsilon}\right)^+ \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} \frac{e^{\gamma_0^\varepsilon\hat{T}_j^\varepsilon+\sum_{i=1}^{j-1}Y_i^\varepsilon}-e^{\gamma_0^\varepsilon\hat{T}_{j-1}^\varepsilon+\sum_{i=1}^{j-1}Y_i^\varepsilon}}{\gamma_0^\varepsilon}\right)^+. \end{aligned}$$

Dóu

$$V_a^\varepsilon = e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1}\frac{e^{X^\varepsilon_{\hat{T}_j^\varepsilon-}}-e^{X^\varepsilon_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}}}{\gamma_0^\varepsilon}\right)^+. \tag{6.2.4}$$

De même on montre que

$$V_g^\varepsilon = e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-S_0\exp\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1}\sum_{i=1}^{j-1}Y_i^\varepsilon+\frac{1}{2}\left(\left(\hat{T}_j^\varepsilon\right)^2-\left(\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)^2\right)\right)\right)^+. \tag{6.2.5}$$

Dans le cas géométrique si on ajoute un Brownien W (en remplaçant X^ε par $\hat{X}^\varepsilon$), on obtient

$$\hat{V}_g^\varepsilon = e^{-rT}\mathbb{E}\left(K-S_0\exp\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1}\sum_{i=1}^{j-1}Y_i^\varepsilon+\frac{1}{2}\left(\left(\hat{T}_j^\varepsilon\right)^2-\left(\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)^2\right)+\sigma(\varepsilon)\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon}W_s ds\right)\right)^+. \tag{6.2.6}$$

Et sachant N_T^ε et $\left(\hat{T}_j^\varepsilon\right)_{1\le j\le N_T^\varepsilon}$, les v.a. $\left(\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} W_s ds\right)_{1\le j\le N_T^\varepsilon+1}$ sont indépendantes de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\frac{1}{3}\left(\hat{T}_j^\varepsilon - \hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)^3$. Dans le cas arithmétique en utilisant le théorème de Taylor on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 6.1 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet $(\gamma, 0, \nu)$ et f une fonction lipschitzienne. On suppose que $\mathbb{E}e^{M_T} < \infty$. Alors on a*

$$\mathbb{E}f\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{\hat{X}_s^\varepsilon} ds\right) = \mathbb{E}f\left(\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\hat{X}_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^\varepsilon}\left(\frac{e^{\gamma_0^\varepsilon\left(\hat{T}_j^\varepsilon-\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)}-1}{\gamma_0^\varepsilon} + \sigma(\varepsilon)g_j^\varepsilon\right)\right) + O\left(\sigma(\varepsilon)^2\right).$$

avec

$$g_j^\varepsilon = \int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{\gamma_0^\varepsilon\left(s-\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)}\left(W_s - W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right) ds.$$

Démonstration de la proposition 6.1. Posons

$$Z^\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{\hat{X}_s^\varepsilon} ds.$$

On a

$$\begin{aligned}
Z^\varepsilon &= \frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\sum_{i=1}^{j-1} Y_i^\varepsilon}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{\gamma_0^\varepsilon s+\sigma(\varepsilon)W_s} ds \\
&= \frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\sum_{i=1}^{j-1} Y_i^\varepsilon+\gamma_0^\varepsilon\hat{T}_{j-1}^\varepsilon+\sigma(\varepsilon)W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{\gamma_0^\varepsilon\left(s-\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)+\sigma(\varepsilon)\left(W_s-W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)} ds \\
&= \frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\hat{X}_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^\varepsilon}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{\gamma_0^\varepsilon\left(s-\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)+\sigma(\varepsilon)\left(W_s-W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)} ds.
\end{aligned}$$

Remarquons que par le théorème de Taylor avec reste intégrale, on a

$$e^{\sigma(\varepsilon)\left(W_s-W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)} = 1+\sigma(\varepsilon)\left(W_s - W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right) + \int_0^{\sigma(\varepsilon)\left(W_s-W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)} e^y\left(\sigma(\varepsilon)\left(W_s - W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)-y\right) dy.$$

Donc, en notant α la constante de lipschitz de f, on a

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon &:= \left|\mathbb{E}f\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{\hat{X}_s^\varepsilon} ds\right) - \mathbb{E}f\left(\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\hat{X}_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^\varepsilon}\left(\frac{e^{\gamma_0^\varepsilon\left(\hat{T}_j^\varepsilon-\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)}-1}{\gamma_0^\varepsilon}+\sigma(\varepsilon)g_j^\varepsilon\right)\right)\right| \\
&\le \alpha\mathbb{E}\frac{S_0}{T}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\hat{X}_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^\varepsilon}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon} e^{\gamma_0^\varepsilon\left(s-\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)}\left|\int_0^{\sigma(\varepsilon)\left(W_s-W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)} e^y\left(\sigma(\varepsilon)\left(W_s - W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)-y\right) dy\right| ds \\
&\le \alpha\frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2}\frac{S_0}{T}\mathbb{E}\sum_{j=1}^{N_T^\varepsilon+1} e^{\hat{X}_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^\varepsilon}\int_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}^{\hat{T}_j^\varepsilon}\left(W_s - W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)^2 e^{\gamma_0^\varepsilon\left(s-\hat{T}_{j-1}^\varepsilon\right)+\sigma(\varepsilon)\left(W_s-W_{\hat{T}_{j-1}^\varepsilon}\right)^+} ds.
\end{aligned}$$

Remarquons que pour s dans $[\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}, \hat{T}^{\varepsilon}_{j}]$

$$\begin{aligned}
\hat{X}^{\varepsilon}_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}} + \gamma^{\varepsilon}_0 \left(s - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right) + \sigma(\varepsilon)\left(W_s - W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}\right)^+ &= \sum_{i=1}^{j-1} Y^{\varepsilon}_i + \gamma^{\varepsilon}_0 s + \sigma(\varepsilon) W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}} + \sigma(\varepsilon)\left(W_s - W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}\right)^+ \\
&\leq \sum_{i=1}^{j-1} Y^{\varepsilon}_i + \gamma^{\varepsilon}_0 s + \sigma(\varepsilon) \sup_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1} \leq \tau \leq \hat{T}^{\varepsilon}_{j}} W_\tau \\
&\leq \sum_{i=1}^{j-1} Y^{\varepsilon}_i + \gamma^{\varepsilon}_0 s + \sigma(\varepsilon) \sup_{0 \leq \tau \leq T} W_\tau .
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon &\leq \alpha \frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2} \frac{S_0}{T} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}_T+1} e^{\sum_{i=1}^{j-1} Y^{\varepsilon}_i} \int_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}^{\hat{T}^{\varepsilon}_{j}} e^{\gamma^{\varepsilon}_0 s} \left(\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau - \inf_{0\leq\tau\leq T} W_\tau\right)^2 e^{\sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau} ds \\
&\leq \alpha \frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2} \frac{S_0}{T} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}_T+1} e^{\sum_{i=1}^{j-1} Y^{\varepsilon}_i} \left(e^{\gamma^{\varepsilon}_0 \hat{T}^{\varepsilon}_{j}} + e^{\gamma^{\varepsilon}_0 \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}\right) \int_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}^{\hat{T}^{\varepsilon}_{j}} ds \mathbb{E} \left(\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau - \inf_{0\leq\tau\leq T} W_\tau\right)^2 e^{\sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau} \\
&\leq \alpha \frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2} \frac{S_0}{T} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}_T+1} \left(e^{X^{\varepsilon}_{\hat{T}^{\varepsilon -}_{j}}} + e^{X^{\varepsilon}_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}}\right) \left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right) \mathbb{E} \left(\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau - \inf_{0\leq\tau\leq T} W_\tau\right)^2 e^{\sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau} .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon &\leq \alpha\sigma(\varepsilon)^2 \frac{S_0}{T} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}_T+1} e^{M^{\varepsilon}_T} \left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right) \mathbb{E} \left(\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau - \inf_{0\leq\tau\leq T} W_\tau\right)^2 e^{\sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau} \\
&\leq \alpha\sigma(\varepsilon)^2 S_0 \mathbb{E} e^{M^{\varepsilon}_T} \mathbb{E} \left(\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau - \inf_{0\leq\tau\leq T} W_\tau\right)^2 e^{\sigma(\varepsilon)\sup_{0\leq\tau\leq T} W_\tau} .
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 4.10 on conclut que

$$\delta_\varepsilon = O\left(\sigma(\varepsilon)^2\right).$$

$\diamond$

Sachant N^{ε}_T et $\left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j}\right)_{1\leq j\leq N^{\varepsilon}_T}$ les v.a. $\left(g^{\varepsilon}_j\right)_{1\leq j\leq N^{\varepsilon}_T+1}$ sont indépendantes de loi gaussienne de moyenne nulle et

$$var\left(g^{\varepsilon}_j\right) = \frac{1}{2\left(\gamma^{\varepsilon}_0\right)^3}\left(\left(2\gamma^{\varepsilon}_0\left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right) - 3\right) e^{2\gamma^{\varepsilon}_0\left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right)} + 4 e^{\gamma^{\varepsilon}_0\left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right)} - 1\right). \tag{6.2.7}$$

Cependant les v.a. $\left(g^{\varepsilon}_j\right)_{1\leq j\leq N^{\varepsilon}_T+1}$ ne sont pas indépendants de tous les autres objet aléatoires apparaissant dans la proposition 6.1. Notamment g^{ε}_j dépend de $W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j}} - W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}$. On a par ailleurs

$$cov\left(g^{\varepsilon}_j, W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j}} - W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}\right) = \frac{\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}{\gamma^{\varepsilon}_0} e^{\gamma^{\varepsilon}_0\left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right)} - \frac{e^{\gamma^{\varepsilon}_0\left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j} - \hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}\right)} - 1}{\left(\gamma^{\varepsilon}_0\right)^2}. \tag{6.2.8}$$

Pour évaluer $\hat{V}^{\varepsilon}_a$, on procéde de la manère suivante

- On simule N^{ε}_T.
- On simule $\left(\hat{T}^{\varepsilon}_{j}\right)_{1\leq j\leq N^{\varepsilon}_T}$.
- On simule pour tout $j \in \{1, \ldots, N^{\varepsilon}_T + 1\}$ le vecteur gaussien $\left(g^{\varepsilon}_j, W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j}} - W_{\hat{T}^{\varepsilon}_{j-1}}\right)$ dont la matrice peut être déduite des formules ci-dessus.

La variable de contrôle naturelle pour $\hat{V}^{\varepsilon}_a$ (resp. V^{ε}_a) est $\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{\hat{X}^{\varepsilon}_s} ds$ (resp. $\frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{X^{\varepsilon}_s} ds$). Il faut alors approximer leurs espérances.

Proposition 6.2 *Soit X un processus de Lévy à activité infinie de triplet (γ, σ^2, ν) et f une fonction lipschitzienne. On suppose que $\int_{|x|>1} e^x \nu(dx) < \infty$. Alors on a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T e^{X_s} ds - \mathbb{E}\int_0^T e^{X_s^\varepsilon} ds &= \frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2}\int_0^T s\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon} ds + O\left(\sigma_0(\varepsilon)^3\right) \\
\mathbb{E}\int_0^T e^{X_s} ds - \mathbb{E}\int_0^T e^{\hat{X}_s^\varepsilon} ds &= O\left(\sigma_0(\varepsilon)^3\right).
\end{aligned}$$

Rappelons que dans le cas où l'on remplace X_s par X_s^ε, l'erreur sur les prix des options asiatiques est de $O\left(\sigma_0(\varepsilon)\right)$. Donc il n'est pas nécessaire de connaitre le terme $\int_0^T s\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon} ds$. Par ailleurs sous la condition $\left(e^{(r-\delta)s+X_s}\right)_{s\geq 0}$ est une martingale, on a

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{X_s} ds = \begin{cases} \dfrac{e^{(r-\delta)T}-1}{r-\delta} & si\ r-\delta \neq 0 \\ T & sinon. \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 6.1. On a

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon &:= \mathbb{E}\int_0^T e^{X_s} ds - \mathbb{E}\int_0^T e^{X_s^\varepsilon} ds \\
&= \int_0^T \mathbb{E}\left(e^{X_s} - e^{X_s^\varepsilon}\right) ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la deuxième partie de la démonstration de la proposition 4.3, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{X_s} - e^{X_s^\varepsilon}\right) &= \frac{\sigma(\varepsilon)^2 s}{2}\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon} + \int_0^1 \mathbb{E}\left(e^{X_s^\varepsilon+\theta R_s^\varepsilon} - e^{X_s^\varepsilon}\right)(1-\theta)\left(R_s^\varepsilon\right)^2 d\theta \\
&= \frac{\sigma(\varepsilon)^2 s}{2}\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon} + \mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon}\left(\mathbb{E}e^{R_s^\varepsilon} - 1 - R_s^\varepsilon - \frac{\left(R_s^\varepsilon\right)^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par simple intégration. D'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon}\left|\mathbb{E}e^{R_s^\varepsilon} - 1 - R_s^\varepsilon - \frac{\left(R_s^\varepsilon\right)^2}{2}\right| &\leq \mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon}\mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right|^3 e^{\sup_{0\leq u\leq s} R_u^\varepsilon} \\
&\leq \mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon}\left(\mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right|^4\right)^{\frac{3}{4}}\left(\mathbb{E}e^{4\sup_{0\leq u\leq s} R_u^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon}\left(\mathbb{E}\left|R_s^\varepsilon\right|^4\right)^{\frac{3}{4}}\left(\mathbb{E}e^{4\sup_{0\leq u\leq T} R_u^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

De la proposition 4.2, on conclut que

$$\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon}\left|\mathbb{E}e^{R_s^\varepsilon} - 1 - R_s^\varepsilon - \frac{\left(R_s^\varepsilon\right)^2}{2}\right| = O\left(\sigma_0(\varepsilon)^3\right).$$

uniformèment en $s \in [0, T]$. D'où

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{X_s} ds - \mathbb{E}\int_0^T e^{X_s^\varepsilon} ds = \frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2}\int_0^T s\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon} ds + O\left(\sigma_0(\varepsilon)^3\right).$$

En remplaçant dans ce qui précéde X_s par $\hat{X}_s^\varepsilon$, on obtiendra $\sigma(\varepsilon)W_s$ à la place de R_s^ε. Et donc

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{\hat{X}_s^\varepsilon} ds - \mathbb{E}\int_0^T e^{X_s^\varepsilon} ds = \frac{\sigma(\varepsilon)^2}{2}\int_0^T s\mathbb{E}e^{X_s^\varepsilon} ds + O\left(\sigma_0(\varepsilon)^3\right).$$

Et par suite

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{X_s} ds - \mathbb{E}\int_0^T e^{\hat{X}_s^\varepsilon} ds = O\left(\sigma_0(\varepsilon)^3\right).$$

$\diamond$

6.2.4 Exemples numériques

Pour valoriser une option lookback on doit simuler M_T, que l'on va alors en réalité approximer par M_T^ε ou $\hat{M}_T^\varepsilon$. Quant à la variable aléatoire $\hat{M}_T^\varepsilon$, on doit l'approximer par sa version discrète dans le cas des options lookback. Dans le tableau 6.2.5 on s'interésse au cas VG. La v.a. M_T est approché par M_T^ε. Pour simuler M_T^ε, il suffit en fait de simuler X aux instants de sauts et en T, et prendre le maximum. On observe que pour $\varepsilon = 10^{-3}$, on obtient des résultats relativement précis. Pour une erreur statistique de l'ordre de 0.05% et $\varepsilon = 10^{-3}$, le temps d'exécution est de l'ordre de la seconde. Notons que les erreurs considérées sont relatives,

ε	prix	erreur statistique	erreur totale
10^{-1}	7.076	0.05%	24.7%
10^{-2}	9.347	0.05%	0.50%
10^{-3}	9.401	0.05%	0.04%

Table 6.2.5 – Approximation du prix du call lookback continue dans modèle VG. Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $r = 0.0548$, $\delta = 0$, $T = 0.40504$, $S_+ = 100$, $\theta = -0.2859$, $\kappa = 0.2505$, $\sigma = 0.1927$ et $n = 100000$. La valeur "benchmark" du call est 9.3982.

et on désigne par valeur "benchmark" du call celle obtenu par *[Becker(2008)]*. Dans le cas CGMY, pour avoir un temps d'exécution et une erreur statistique similaires on choisira $\varepsilon = 10^{-2}$. La valeur de ε est plus petite que dans le VG, Ceci est dû au fait que dans ce cas on approxime M_T par $\hat{M}^\varepsilon$, et donc la convergence du prix du lookback ainsi approximé est plus rapide. En terme de temps de calcul, la rapidité est la même que dans le cas VG (de l'ordre de la seconde), car ce qu'on gagne en prenant ε plus petit, on le perd par la discrétisation de la trajéctoire de X. En fait dans le tableau 6.2.6, on a les prix du lookback discret. Pour passer au continu, il suffit d'appliquer les techniques du paragraphe 5.2.3. Les erreurs sont relatives, et on désigne par valeur

ε	prix	erreur statistique	erreur totale
10^{-1}	14.120	0.05%	1.88%
10^{-2}	13.869	0.05%	0.06%
10^{-3}	13.860	0.05%	0.00%

Table 6.2.6 – Approximation du prix du put lookback discret (où le nombre de points de discrétisation est $N = 252$) dans modèle CGMY. Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.02$, $T = 1$, $S_+ = 100$, $C = 4$, $G = 50$, $M = 60$, $Y = 0.7$ et $n = 100000$. La valeur "benchmark" du put est 13.8600.

"benchmark" du put celle obtenu par *[Feng-Linetsky(2009)]*. Dans le modèle NIG, on approche M_T par $\hat{M}_T^\varepsilon$. Les prix du tableau 6.2.7, sont les prix d'options lookback discret. La relation avec le prix continu est donnée au paragraphe 5.2.3. Prendre $\varepsilon = 10^{-2}$ donne des temps d'exécution similaires par rapport aux modèles précédents. Les erreurs sont relatives comme dans les précédent, et la valeur "benchmak" est la valeur du

ε	prix	erreur statistique	erreur totale
10^{-1}	12.89	0.05%	5.46%
10^{-2}	12.24	0.05%	0.15%
10^{-3}	12.21	0.05%	0.01%

Table 6.2.7 – Approximation du prix du put lookback discret (où le nombre de points de discrétisation est $N = 252$) dans le modèle NIG. Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.02$, $T = 1$, $S_+ = 100$, $\alpha = 15$, $\beta = -5$, $\tilde{\delta} = 0.5$ et $n = 100000$. La valeur "benchmark" du put est 12.2224.

put obtenue par *[Feng-Linetsky(2009)]*.

Le tableau 6.2.8 montre la valorisation d'une option asiatique dans les odèles NIG et CGMY. Nous utilisons ici la technique proposée dans le paragraphe 6.2.3. Les paramètres pour le modèle NIG sont : $\alpha = 6.1882$, $\beta = -3.8941$, $\delta = 0.1622$ et $r = 0.0387$. Les paramètres pour le modèle CGMY sont : $C = 0.2703$,

ε/Modèle	NIG	CGMY
10^{-1}	12.624	11.624
10^{-2}	12.673	11.642
10^{-3}	12.675	11.642

Table 6.2.8 – Approximation du prix d'un call asiatique à strike fixe et de moyenne arithmétique. Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $\delta = 0$, $T = 1$ et $n = 1000000$. L'erreur statistique est de 0.03%

$G = 17.56$, $M = 54.82$, $Y = 0.8$ et $r = 0.04$. Les autres paramètres sont précisés dans le tableau 6.2.8. Ces résultats peuvent être comparés aux valeurs du call asiatique discret obtenues par Fusai-Meucci (2008, pour le cas NIG) et Cerny-Kyriakou (2009, pour le cas CGMY). Pour une erreur relative de l'ordre de celle considérée pour les options lookback, le temps de calcul est plus rapide, particulièrement dans le cas VG (car on ne remplace pas les petits sauts par un mouvement Brownien).

Dans le tableau 6.2.9, on approxime les prix des options barrières continues par la méthode décrite dans les paragraphes 6.2.1 et 6.1.2 pour les modèles CGMY ($C = 4$, $G = 50$, $M = 60$ et $Y = 08$), NIG ($\alpha = 15$, $\beta = -5$ et $\hat{\delta} = 0.5$), VG ($\sigma = 0.16$, $\theta = -0.2$ et $\kappa = 0.1$) et DEVG ($\sigma^{'}$, $\sigma = 0.16$, $\theta = -0.2$ et $\kappa = 0.1$). Le modèle DEVG (*diffusion extended variance gamma*) est le modèle VG (de paramètres σ, θ et κ) auquel on ajoute un mouvement Brownien standard de coefficient de diffusion $\sigma^{'}$. Notons que le seul biais provient de l'approximation des petits sauts. Nous utilisons les mêmes paramètres que Feng-Linetsky (2008). Les prix "benchmak" (pour les modèles DEVG, NIG et CGMY) sont naturellement ceux obtenus par Feng-Linetsky pour les options discrètes. Comparé aux options précédentes, le temps de calcul est moins rapide pour une

Modèle/ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
VG	5.228	7.964	8.057
DEVG	6.729	8.962	9.039
NIG	8.959	8.961	8.965
CGMY	9.107	9.093	9.107

Table 6.2.9 – Approximation du prix d'une option DOC. Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.02$, $T = 1$ et $n = 1000000$. L'erreur statistique est de 0.02%

erreur relative similaire. Le temps de calcul reste cependant raisonnable, de l'ordre de 5 secondes pour une erreur relative infèrieure à 1%.

Bibliographie

[1] Abramowitz, M. et I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions, 9th ed. Dover Publications, New York (1972).

[2] Asmussen, S. Applied probability and queues. Chichester, England : Wiley (1987).

[3] Asmussen, S., P. Glynn et J. Pitman. Discretization error in simulation of one-dimensional reflecting brownian motion. The Annals of Applied Probability 1995, Vol. 3, No. 4, 875-896 (1995).

[4] Asmussen, S., D. Madan et M.R. Pistorius. Pricing Equity Default Swaps under an approximation to the CGMY Lévy Model, Journal of Computational Finance, Vol. 11, 79-93, (2008).

[5] Asmussen, S. et J. Rosinski. Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. J. Appl. Probab., 38 (2001). pp. 482-493 (2001).

[6] Barndorff-Nielsen, 0. E. Normal Inverse Gaussian Processes and the Modelling of Stock Returns. Scand. J. Statistics, 24, 1-13, (1996).

[7] Becker, M. Unbiased Monte Carlo Valuation of Lookback, Swing and Barrier Options Under Variance Gamma Model. Pre-print, May 19, (2008).

[8] Bertoin, J. Lévy Processes. Cambridge University Press, Reprint Edition (1996).

[9] Borodin, A. N. et P. Salminen. Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae. Birkhauser Verlag : Basel, (1996).

[10] Broadie, M., P. Glasserman et S. G. Kou. Connecting discrete and continuous path-dependent options. Finance Stochast. 3, 55-82, (1999).

[11] Broadie, M., P. Glasserman et S. G. Kou. A Continuity Correction For Discrete Barrier Options. Mathematical Finance, Vol. 7, No. 4, 325-348, October (1997).

[12] Broadie, M. et Y. Yamamoto. A double-exponential fast Gauss transform algorithm for pricing discrete path-dependent options. Operations Research, 53, 764-779 (2005).

[13] Broadie, M. et Y. Yamamoto. Application of the Fast Gauss Transform to Option Pricing. Management Science, 49 (8), 1071-1088 (2003).

[14] Carr, P. P., H. Geman, D. B. Madan et M. Yor. The fine structure of asset returns : An empirical investigation. Journal of Business, 75, pp. 305-332 (2002).

[15] Cerny, A. et I. Kyriakou. An Improved Convolution Algorithm for Discretely Sampled Asian Options. $http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\_id = 1323252$ (2009).

[16] Cont, R. et P. Tankov. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, Boca Raton 2004, xvi, 535 pp., (2004).

[17] Cont, R. et E. Voltchkova. Integro-differential equations for option prices in exponential Léy models. Finance & Stochastics, Vol. 3, pp. 299-325, (2005).

[18] Cont, R. et E. Voltchkova. Finite difference methods for option pricing in jump-diffusion and exponential Lévy models, SIAM J. Numer. Anal. 43 (4), pp. 1596-1626, (2005).

[19] Feng, L. et V. Linetsky. Computing Exponential Moments of the Discrete Maximum of a Lévy process and Lookback Options. Finance and Stochastics 13(4), 501-529 (2009).

[20] Feng, L. et V. Linetsky. Pricing Discretely Monitored Barrier Options and Defaultable Bonds in Lévy Process Models : a Fast Hilbert Transform Approach. Mathematical Finance, 18(3), 337-384 (2008).

[21] Fusai, G. et A. Meucci. Pricing discretely monitored Asian options under Lévy processes, Journal of Banking & Finance 32, 2076-2088 (2008).

[22] Glasserman, P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. New York Springer cop. 2004, vol. 1, XIII, 596 pp, (2004).

[23] Jeannin, M. et M.R. Pistorius. A transform approach to compute prices and greeks of barrier options driven by a class of Lévy processes. Quantitative Finance 1469-7696, (2009).

[24] Karatzas, I. et S.E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, Springer (1988).

[25] Knopp, K. Theory and applications of infinite series. New York : Dover (1990).

[26] Kou, S. G. A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. Management Science Vol. 48(8), pp. 1086-1101, August (2002).

[27] Kou, S. G. On Pricing Of Discrete Barrier Options. Statistica Sinica 13, pp. 955-964, (2003).

[28] Kou, S. G. et H. Wang. First Passage Time of a Jump Diffusion Process. Adv. App. Proba. 35, pp. 504-531, (2003).

[29] Kou, S. G. et H. Wang. Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model. Management Science 50(9) 1178-1192, (2004).

[30] Kyprianou, A. E. Indroductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Berlin : Springer-Verlag, (2006).

[31] Kyprianou, A.E., W. Schoutens et P. Wilmott (Eds.). Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models, Wiley, Chichester, (2005).

[32] Madan, D. B., P. P. Carr et E. C. Chang. The Variance Gamma Process and Option Pricing. European Finance Review, 2(1), pp. 79-105 (1998).

[33] Madan, D. B. et E. Seneta. The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns. Journal of Business, 63(4), pp. 511-524 (1990).

[34] Merton, R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous. Journal of Financial Economics, Vol. 3, No. 1-2, (January-March 1976), pp. 125-144 (1976).

[35] Metwally, S. et A. Atiya. Using Brownian Bridge for Fast Simulation of Jump-Diffusion Processes and Barrier Options. Journal of Derivatives, 10 (2002), pp. 43-54 (2002).

[36] Mijatovic, A. et M.R. Pistorius. Continuously monitored barrier options under Markov processes. Quantitative Finance Papers 0908.4028, arXiv.org, (2009).

[37] Mikou, M. Options Américaines dans le Modèle Exponentiel de Lévy. Thèse de Doctorat, Université Paris-Est, (2009).

[38] Nguyen-Ngoc, L. et M. Yor. Lookback and Barrier Options under General Lèvy Processes. Handbook of Financial Econometrics, Y. Ait-Sahalia and L. Hansen (Eds.), Elsevier, North-Holland (2005).

[39] Luschgy, H. et G. Pagès. Moment Estimates for Lévy Processes. Elect. Comm. in Probab. 13, 422-434 (2008).

[40] Kou, S.G. et G. Petrella. Numerical Pricing of Discrete Barrier and Lookback Options via Laplace Transforms. Journal of Computational Finance, 8, 1-37 (2004).

[41] Powers, L. A Numerical Study of Small-Jump Regularization on Exotic Contracts in Lévy Markets. $http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id = 1354661$ (2009).

[42] Revuz, D. et M. Yor. Continuous martingales and Brownian motion, 2nd edition, Springer, (1994).

[43] Sato, K. Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge university press, cop., vol. 1, XII,486 pp., (2005).

[44] Seumen Tonou, P. Méthodes Numériques Probabilistes pour la Résolution d'Equations du Transport et pour l'Evaluation d'Options Exotiques. Thèse de Doctorat, université de Provence, (1997).

[45] Skorokhod, A. V. Studies in the Theory of Random Processes. Reading, Mass., Addison-Wesley – cop., (1965).

[46] Voltchkova, E. Equations intégro-différentielles d'évolution : méthodes numériques et applications en finance. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, (2005).

[47] Yamamoto, Y. Double-Exponential Fast Gauss Transform Algorithms for Pricing Discrete Lookback Options. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 41, 989-1006 (2005).

NOM : El Hadj Aly DIA

TITRE : Options exotiques dans les modèles exponentiels de Lévy

L'objet de cette thèse est l'étude de la valorisation des options exotiques dans les modèles exponentiels de Lévy.
Dans le premier chapitre nous définissons les processus de Lévy, et nous présentons leurs différentes propriétés. Dans le deuxième chapitre nous rappellons d'abord les résultats sur l'existence et la régularité de densité des processus de Lévy. Pour le processus supremum d'un processus de Lévy, nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence et la régularité de densité (théorèmes 2.17, 2.19 et 2.23).
Dans le troisième chapitre nous étudions les erreurs entre le supremum continu d'un processus de Lévy et sa version discrète. Dans la première partie du chapitre, nous nous interéssons à l'erreur L_1 (théorèmes 3.4, 3.8 et 3.11) en utilisant une reformulation de l'identité de Spitzer pour les processus de Lévy (proposition 3.2). Dans la deuxième partie, nous étendons le théorème d'Asmussen-Glynn-Pitman aux processus de Lévy à activité finie et à variation infinie (théorème 3.14). La dernière partie de ce chapitre étudie le cas particulier des processus de Poisson composé (théorème 3.15).
Dans le quatrième chapitre nous nous intéressons aux erreurs d'approximation des petits sauts des processus de Lévy à activité infinie. La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'étude de la troncation des petits sauts. Dans la troisième partie nous étudions l'approximation des petits sauts par un mouvement Brownien en utilisant le théorème 4.23, qui résulte de l'application du théorème de plongement de Skorokhod. Dans la dernière partie, nous comparons les deux méthodes d'approximation des petits sauts.
Dans le cinquième chapitre nous appliquons les résultats des chapitres précédents à la valorisation des options exotiques (barrière, lookback et asiatique). Nous étudions d'abord le comportements asymptotique des erreurs dues à la discrétisation. Nous montrons que, dans les cas des options lookback et barrière, des corrections sont possibles. Le résultat principal permettant la correction des options à barrière est le théorème 5.1. Nous étudions également les erreurs dues à l'approximation des petits sauts. Dans la dernière partie de ce chapitre, en utilisant le théorème 5.60 et le lemme 5.61 (qui est une conséquence du théorème 2.23), nous évaluons les options lookback et barrière digitale (continues) par des formules semi-fermées, sous l'hypothèse d'absence de saut positif.
Enfin, dans le sixième chapitre nous proposons des méthodes de Monte-Carlo pour calculer les prix de certaines options exotiques. Dans le cas activité finie, nous appliquons les corrections obtenues dans le cinquième chapitre, et nous utilisons des techniques de réduction de variance. Dans le cas activité infinie, nous proposons une méthode pour calculer les prix de ces options de façon approchée. Dans le cas des options asiatiques, nous donnons des formules simples qui permettent de simuler ces options lorsque le processus de Lévy initiale n'a pas de partie Brownienne.

DISCIPLINE : Mathématiques Appliquées

MOTS CLÉS : Options exotiques, modèles exponentiels de Lévy, erreur de discrétisation, erreur d'approximation des petits sauts, identité de Spitzer, plongement de Skorokhod.

CLASSIFICATION AMS : 60J75, 65C20, 91G20, 91G60

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
UMR CNRS 8050
Université Paris-Est