



HAL
open science

Modèle dynamique et assimilation de données de la variation séculaire du champ magnétique terrestre

Elisabeth Canet

► **To cite this version:**

Elisabeth Canet. Modèle dynamique et assimilation de données de la variation séculaire du champ magnétique terrestre. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT: . tel-00521437

HAL Id: tel-00521437

<https://theses.hal.science/tel-00521437>

Submitted on 27 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Joseph-Fourier de Grenoble
Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble
Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph-Fourier de Grenoble
spécialité : géophysique

par

Élisabeth Canet

Modèle dynamique et assimilation de données de la variation séculaire du champ magnétique terrestre

Thèse soutenue le 10 Décembre 2009 devant le jury composé de :

Gauthier HULOT	Institut de Physique du Globe (Paris)	Rapporteur
Olivier TALAGRAND	École Normale Supérieure (Paris)	Rapporteur
Emmanuel COSME	Université Joseph-Fourier (Grenoble)	Examineur
Christopher FINLAY	Institute of Geophysics, ETH (Zurich)	Examineur
Philippe ROUX	Université Joseph-Fourier (Grenoble)	Examineur
Alexandre FOURNIER	Institut de Physique du Globe (Paris)	Directeur de thèse
Dominique JAULT	Université Joseph-Fourier (Grenoble)	Directeur de thèse

Modèle dynamique et assimilation de données de la variation séculaire du champ magnétique terrestre

Résumé Les changements du champ magnétique terrestre sur une grande gamme d'échelles spatiales et temporelles reflètent les processus variés de la géodynamo. Je propose un modèle simplifié de la dynamique rapide du noyau, adapté à l'étude des variations du champ magnétique de l'année au siècle ; la variation séculaire. L'hypothèse quasi-géostrophique du modèle est basée sur la prépondérance des forces de rotation par rapport aux forces magnétiques à ces échelles de temps. La partie axisymétrique correspond au formalisme d'ondes de torsion d'Alfvén. La dynamique se place dans le plan équatorial. À la frontière noyau-manteau, l'écoulement interagit avec le champ magnétique radial via la composante radiale de l'équation d'induction. Cette partie du modèle connecte la dynamique et les observations. L'assimilation variationnelle de données permet d'interpréter la variation séculaire en terme de dynamique. Une fonction objectif est minimisée en calculant sa sensibilité par rapport aux variables de contrôle via l'intégration du modèle adjoint. J'illustre cette inversion par des expériences jumelles pour un écoulement stationnaire dans le noyau et pour des ondes de torsion. On accède ainsi à des variables d'état qui ne sont pas directement observées. En utilisant comme observations des écoulements reconstruits à la surface du noyau, cette méthode permet de déduire que la tension magnétique dans le noyau, force de rappel des ondes de torsion, correspond à un champ magnétique fort, au minimum 3-4 mT. De telles ondes de torsion rapides sont cohérentes avec un signal à 6 ans dans les données de variations de la longueur du jour.

Dynamical model and variational assimilation of the geomagnetic secular variation

Abstract The changes in the Earth's magnetic field on a wide range of time and space scales reflect the various time and space scales of core processes. I propose a simplified model of the rapid dynamics of the Earth's core, tailored to the study of the rapid variations of the geomagnetic field ranging from years to centuries, referred to as the geomagnetic secular variation. The quasi-geostrophic approximation used in the model relies on the prevalence of rotation forces over magnetic forces on short timescales. The axisymmetric component of the model corresponds to the formalism of Alfvén torsional waves. Within this framework, the magnetohydrodynamics takes place in the equatorial plane. At the core-mantle boundary, the equatorial flow interacts with the radial magnetic field through the radial component of the magnetic induction equation. This component of the model connects the dynamics with the observations. Variational data assimilation allows for the interpretation of the secular variation in terms of the underlying dynamics. It seeks to minimize an objective function by computing its sensitivity to its control variables through the integration of the adjoint model. I illustrate this inversion scheme with twin experiments, performed for a steady flow and in a torsional wave scenario. It enables the retrieval of core state variables which are not directly measured. By assimilating core flow models at the core surface, the inferred magnetic tension (the restoring force of torsional waves) yields a large magnetic field inside the core, at least on the order of 3-4 mT. Such fast torsional waves are consistent with a 6-year signal in the length-of-day variation timeseries.

Merci !!

J'ai apprécié le sujet de ma thèse, je suis contente de contribuer à ce ce travail novateur et passionnant. J'ai appris à travailler en équipe et j'ai profité de nombreux échanges scientifiques le tout dans une ambiance très chaleureuse. Tout n'a pas été toujours rose dans cette aventure et j'ai toujours pu compter sur de nombreuses personnes dans les moments moins faciles. Pour toutes ces raisons, j'ai beaucoup de monde à remercier !

Je remercie Dominique et Alex, mes deux directeurs de thèse, d'avoir eu l'idée du sujet et pour m'avoir accompagnée dans sa réalisation. Vous m'avez beaucoup aidée dans la réalisation de ce travail par votre expertise, votre compréhension, vos précieux conseils et vos encouragements. J'ai beaucoup appris avec vous, et ça a été un plaisir pour moi de travailler avec vous.

En y incluant Nicolas Gillet avec qui j'ai eu également la chance de travailler, j'ai eu le plaisir d'avoir toujours devant moi des personnes enthousiastes, curieuses et disponibles. J'espère que nous aurons encore l'occasion de travailler tous ensemble.

Je remercie Philippe Roux, Olivier Talagrand, Gauthier Hulot, Emmanuel Cosme et Chris Finlay d'avoir accepté de faire partie de mon jury, j'ai été très honorée de la présence de chacun. Je remercie Olivier et Gauthier d'avoir lu mon manuscrit et de m'avoir fait part de leurs commentaires et questions. Chris et Emmanuel ont suivi mon travail pendant ces trois années puisque nous avons mis en place un comité de thèse auquel ils ont accepté de prendre part. J'ai beaucoup apprécié ces deux séances de discussions stimulantes (une par an, en plus de la soutenance) au cours desquelles j'ai profité de commentaires constructifs et de suggestions pertinentes. Merci Phillippe d'avoir accepté d'assurer la présidence du jury !

De manière générale, j'ai été vraiment bien entourée pour mon travail, pour des interactions scientifiques dans une atmosphère conviviale. Je remercie ainsi toutes les personnes avec qui j'ai apprécié discuter, travailler, échanger des conseils. En particulier, je remercie :

- les autres membres de l'ANR VSQG : Alexandra Pais, Nathanaël, Thierry, Philippe,
- l'ensemble de l'équipe geodynamo j'ai apprécié être dans cette équipe si soudée, dans laquelle je n'aurais jamais manqué d'interlocuteur. Je souhaite bonne chance aux thésards qui mon précédés Marine, Renaud, Nadège et à Céline qui suit !
- mes nombreux co-bureaux au cours de ces trois années, Olivier, Guillaume, Farok, Renaud, Manu, Gwenaëlle, Grégory et Lucille,
- mais également les thésard et stagiaires du lgit et de l'observatoire, merci à ceux qui à divers titres ont compté durant cette thèse. Paola, Lucille, Céline, Pierre, Stéphanie, Renaud, Albanne, Romain, Aloé, Florence, merci pour ces moments chaleureux dans ou en dehors du labo !
- le LGIT, Jean Virieux, je te remercie pour les discussions généreuses et enrichissantes que nous avons eu ensemble, l'équipe administrative, Jacques, France, Cécile, Zoubida, Karine, Gaëlle, Sophie pour une aide avec le sourire
- à l'école doctorale : Sylvianne Flammier puis Christine Bigot, Anne-marie puis Etienne furent des interlocuteurs sympathiques.

J'ai eu la chance de suivre des cours, école d'été, visites, colloques passionnants, par exemple mon travail à Coimbra avec Alexandra, le cours d'assimilation de données, une mission de terrain en Italie (pour la thèse d'Aloé), l'école d'été "dynamo" des Houches, le colloque du programme LEFE-ASSIM, l'AGU, le colloque ISSI sur le magnétisme terrestre.

De façon plus formelle, ma thèse était financée par une bourse MENRT du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique et le sujet faisait partie du projet ANR VSQG.

De façon moins formelle, je remercie simplement mon entourage pour les moments de détente et de simplicité qui ont bien équilibré cette aventure. Et pour finir en beauté, merci Nico!!

Table des matières

Table des matières	vii
Liste des figures	x
1 Introduction générale	1
2 Dynamique du noyau	11
2.1 Observations et modèles du champ magnétique	11
2.1.1 Les mesures du champ magnétique	11
2.1.2 Les différentes sources du champ géomagnétique	16
2.1.3 Les modèles du champ magnétique	20
2.1.4 Le champ magnétique à la frontière noyau-manteau	23
2.2 La dynamique du noyau	27
2.2.1 Lois de conservation et effet dynamo	27
2.2.2 Modélisation de la géodynamo	30
2.3 Modèle physique de la variation séculaire	33
2.3.1 Étude de la variation séculaire	33
2.3.2 Dynamique rapide et hypothèse quasi-géostrophique	35
2.3.3 Modèle quasi-géostrophique de la variation séculaire	37
2.3.4 Fonction flux magnétique	42
3 Problème inverse	43
3.1 Inversion des données géomagnétiques	43
3.2 Objectifs et méthodes d'assimilation de données	49
3.3 Méthodologie de l'assimilation variationnelle	52
3.3.1 Problème de contrôle optimal	52
3.3.2 Le calcul du gradient	55
3.3.3 Les codes adjoints	57
3.3.4 L'optimisation	60
3.4 Expériences jumelles	62
3.4.1 Modèles directs et adjoints	62
3.4.2 Expériences jumelles	66
4 Ondes de torsion rapides dans le noyau terrestre	73
4.1 Contexte des études d'ondes de torsion	73
4.2 Modèles direct et adjoint des ondes de torsion	77
4.2.1 Modèle direct	77
4.2.2 Modèle adjoint	80

4.3	Expériences jumelles	83
4.4	Application géophysique : ondes de torsion dans le noyau terrestre	87
4.4.1	Inversions d'ensemble pour l'obtention d'écoulements	87
4.4.2	<i>Pseudo</i> -observations	88
4.4.3	Modèle et estimations initiales des variables de contrôle	92
4.5	Résultats d'assimilation	94
4.5.1	Importance de la dissipation	94
4.5.2	Compromis entre conductance et intensité rms du champ magnétique	95
4.5.3	Variabilité par rapport à l'estimation initiale de la conductance G^g	98
4.5.4	Variabilité par rapport à l'estimation initiale de $\{B_s^2\}^g$	99
4.5.5	Assimilation sur la condition à la graine	99
4.5.6	Importance du conditionnement	100
4.6	Résumé des résultats	100
4.7	Discussion	101
5	Conclusions et perspectives	105
5.1	Conclusions	105
5.2	Perspectives	108
A	Notations	111
A.1	Coordonnées spatiales et temporelles	111
A.2	Physique du noyau	111
A.3	Adimensionnement	112
A.4	Observations du champ magnétique	112
A.5	Unités	113
A.6	Harmoniques sphériques et séries de Fourier	113
A.7	Problème inverse et assimilation	113
B	Annexes pour le modèle quasi-géostrophique	115
B.1	Équation d'induction au premier ordre	115
B.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz	115
C	Développements pour le modèle « SCALP »	119
D	Obtention de codes adjoints	121
E	Erratum sur le test du gradient	133
E.1	L'erreur	133
E.2	Test d'un modèle simple	133
E.3	Ondes de torsion rapides	135
E.4	Ondes de torsion complet	136
F	Article : Forward and adjoint quasi-geostrophic models of the geomagnetic secular variation (Canet et al, 2009)	137

G Article : Fast torsional waves and strong magnetic field within the Earth's core (Gillet et al, 2009)	153
Bibliographie	169

Liste des figures

1.1	Cartes de la déclinaison du champ magnétique en 1590 et 1990	2
1.2	Schéma de la structure interne de la Terre	3
1.3	Cartes du champ magnétique radial à la surface de la Terre et à la frontière noyau-manteau	4
1.4	Schéma des cylindres géostrophiques dans le noyau	7
2.1	Composantes du champ magnétique	12
2.2	Moyennes mensuelles des composantes du champ magnétique	12
2.3	Mise en évidence de l'amélioration de la mesure magnétique	13
2.4	Distribution spatiale des observatoires et trace au sol du satellite Ørsted	14
2.5	Nombre de données satellites, historiques et archéomagnétiques par siècle	14
2.6	Sources de courants qui contribuent au champ magnétique mesuré .	16
2.7	Echelle des variations temporelles du champ magnétique terrestre . .	18
2.8	Carte du champ magnétique à la surface de la Terre	24
2.9	Carte du champ magnétique à la frontière noyau-manteau	24
2.10	Spectre d'énergie du champ magnétique	25
2.11	Diagramme temps/longitude du champ magnétique radial à l'équateur	26
2.12	Carte de la variation séculaire du champ magnétique à la surface de la Terre	26
2.13	Exemple de géométrie de fine ou d'épaisse couche de fluide	35
2.14	Invariance axiale de l'écoulement pour des calculs axisymétriques . .	36
2.15	Invariance axiale de l'écoulement pour un champ magnétique non- axisymétrique	36
2.16	Géométrie du système et notations du problème	37
3.1	Résultat d'inversion cinématique : contours de la fonction courant dans le plan équatorial du noyau	47
3.2	Schéma pour l'assimilation variationnelle de données	50
3.3	Schéma pour l'assimilation séquentielle de données	51
3.4	Exemples de tests de gradient	59
3.5	Exemples de tests de gradient	60
3.6	Carte du champ principal à la frontière noyau-manteau	68
3.7	Résultats d'assimilation : cartes de fonction courant dans le plan équatorial	69
3.8	Effet de la période d'assimilation sur la solution	69

3.9	Effet de la période d'assimilation sur la forme de la fonction coût . . .	70
4.1	Profils de $\sqrt{\{B_s^2\}}$ en mT en fonction du rayon cylindrique.	76
4.2	Schémas d'une grille en quinconce régulière dans le plan équatorial et sa projection à la frontière noyau-manteau.	81
4.3	Résultat d'expériences jumelles avec des ondes de torsion	83
4.4	Résultat d'expériences jumelles avec des ondes de torsion	84
4.5	Résultat d'expériences jumelles avec des ondes de torsion	84
4.6	Résultat d'expériences jumelles avec des ondes de torsion	84
4.7	Résultat d'expériences jumelles avec des ondes de torsion	85
4.8	Résultat d'expériences jumelles avec des ondes de torsion, observa- tions bruitées	86
4.9	Contours de vitesse azimutale dans le noyau	88
4.10	Contours de vitesse azimutale dans le noyau (observations et prédic- tions)	89
4.11	Cohérence entre moment cinétique du noyau et données de variation de longueur du jour à 6 ans	90
4.12	Pseudo-observations : mesure de l'amplitude des coefficients de vi- tesse et de leur erreur	91
4.13	Résultats d'assimilation sans dissipation	95
4.14	Résultats d'assimilation sans dissipation	95
4.15	Résultats d'assimilation	96
4.16	Contours de la fonction coût du problème	97
4.17	Résultats d'assimilation	97
4.18	Résultats d'assimilation : condition à la graine en fonction du temps	100
4.19	Profil du champ magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation in- tégré en longitude	101
4.20	<i>Pseudo</i> -observations et résultats d'assimilation	102
E.1	Test de gradient	134
E.2	Détermination de ϵ^J	135
E.3	Tests de gradient	135
E.4	Tests de gradient	136

Introduction générale



Les séries temporelles de mesures du champ magnétique datent des premiers observatoires magnétiques ; la déclinaison -angle entre le Nord magnétique et le Nord géographique- est mesurée à Paris depuis la fin du 16^{ème} siècle (Alexandrescu et al. 1996). On dispose également depuis cette époque de cahiers de mesures de la déclinaison et de l'inclinaison par les navigateurs qui se servent du champ magnétique pour se diriger. Depuis ces premières observations, des mesures de l'intensité ou des trois composantes du vecteur champ magnétique ont complété ces séries. Afin de synthétiser les mesures, on peut les interpoler pour en faire des cartes du champ magnétique. Lorsqu'on dispose de mesures de plusieurs composantes, on peut utiliser la théorie de Gauss pour calculer un potentiel géomagnétique d'origine interne. La figure 1.1 représente des cartes construites de cette façon de la déclinaison du champ magnétique à la surface de la Terre en 1590 et en 1990. Le champ magnétique n'est uniforme ni en espace, ni en temps. Ces figures mettent en particulier en évidence une dérive vers l'Ouest de la ligne de déclinaison nulle du champ surtout au niveau de l'équateur.

Le champ magnétique terrestre varie sur des échelles de temps très nombreuses. Les plus courtes, de la seconde à l'année, sont supposées correspondre aux variations du champ magnétique d'origine externe : le vent solaire pénètre dans la magnétosphère et l'ionosphère et y produit des courants électriques. Le terme variation séculaire regroupe les variations du champ magnétique d'origine interne de l'ordre de l'année au siècle. C'est, tout d'abord, une diminution de deux degrés de la déclinaison en une dizaine d'années qui a été remarquée par Gellibrand en 1635 (voir Pumfrey (1989) pour une analyse sociologique des coïncidences qui permettent de faire une découverte bien qu'elle contredise l'idée, à l'époque, que le champ magnétique était stationnaire). La dérive vers l'Ouest des structures du champ magnétique fait partie de la variation séculaire mais le raffinement des observations montre également des secousses géomagnétiques (Courillot et Le Mouél 1984) : il s'agit de discontinuités dans la dérivée seconde du champ magnétique sur des échelles de temps de l'ordre de l'année. Les variations du champ magnétique concernent aussi son intensité. Depuis que Carl Friedrich Gauss a trouvé une méthode pour la mesure absolue du champ il y a 150 ans, l'intensité du dipôle axial a diminué de 9%. Enfin, les renversements irréguliers du dipôle géomagnétique se produisent sur des échelles de temps bien plus longues que la variation séculaire, de l'ordre de quelques centaines de milliers d'années.

Gauss a mis au point la décomposition en harmoniques sphériques du potentiel magnétique et a ainsi montré que la très grande majorité (environ 97%) du champ

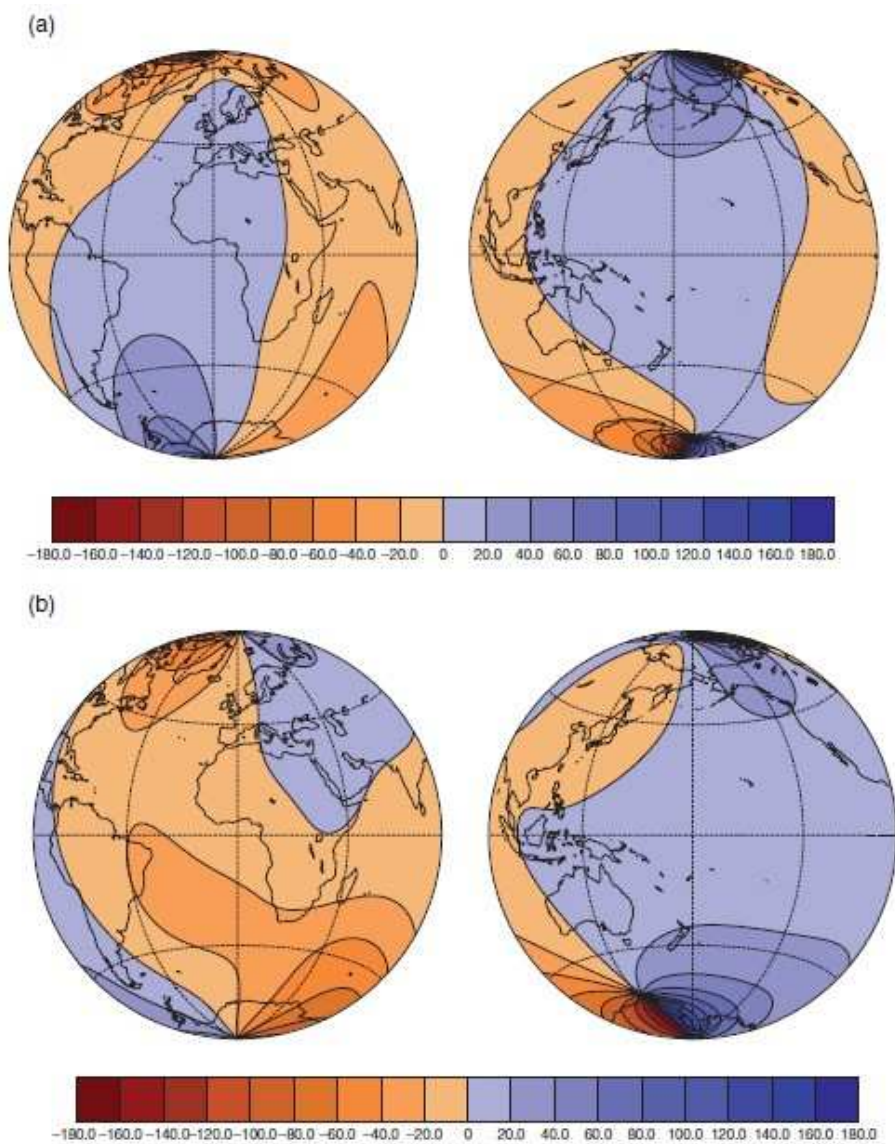


FIG. 1.1 – Cartes de la déclinaison du champ magnétique en degrés à la surface de la Terre (a) en 1590, (b) en 1990 à partir du modèle *gufm1* de Jackson et al. (2000). La déclinaison est l'angle entre le Nord magnétique et le Nord géographique. Figure tirée de Jackson et Finlay (2007, p. 167)

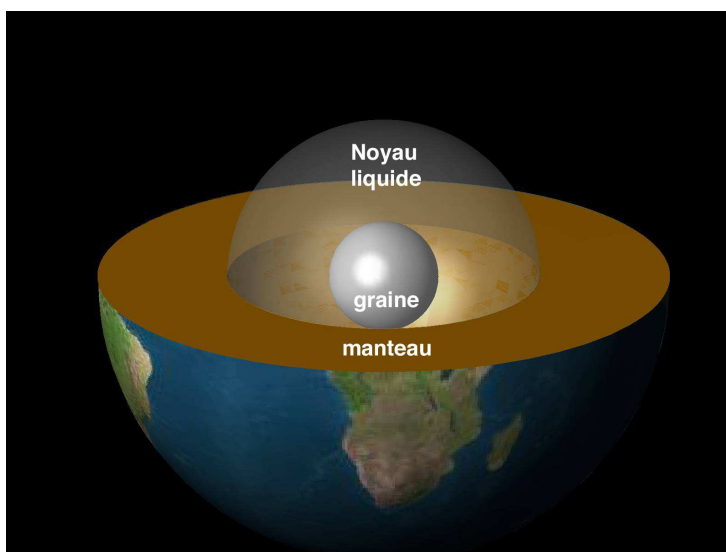


FIG. 1.2 – Schéma de la structure interne de la Terre. La graine a un rayon de 1220 km, le noyau liquide a un rayon de 3480 km et le rayon de la Terre est 6371 km. Le manteau a une épaisseur de 2900 km. Communication de J. Aubert.

mesuré est d'origine interne. Cette décomposition rend possible l'analyse du spectre d'énergie du champ magnétique, le carré de son intensité intégrée sur une surface particulière (la surface de la Terre ou la frontière noyau-manteau), en fonction du degré harmonique. Le degré harmonique est une mesure de la longueur d'onde spatiale des structures. L'étude du spectre d'énergie du champ mesuré à la surface de la Terre met en évidence deux sources internes très distinctes : le champ crustal dominant aux petites échelles spatiales, de tailles inférieures à 3000 km, et le champ du noyau, appelé également champ principal, dominant à grande échelle.

La structure de la Terre, schématisée dans la figure 1.2, est caractérisée par l'étude de la propagation des ondes sismiques. Le noyau liquide a un rayon de 3480 ± 5 km. En raison de l'augmentation de la pression avec la profondeur, une graine solide de 1220 km de rayon se trouve au centre. L'ensemble se situe sous un manteau composé de roches silicatées d'une épaisseur de 2900 km. Le noyau est composé de fer liquide et de nickel et d'éléments plus légers pour environ 10% de sa composition en masse. Sous les conditions de température et de pression du noyau, le fer liquide est supposé avoir une très faible viscosité (une viscosité cinématique d'environ 10^7 m²/s), et c'est aussi un excellent conducteur d'électricité (conductivité d'environ 5×10^5 S/m). Si l'aimantation de la croûte est une source de champ magnétique observé, on a, en revanche, peu d'éléments sur la conductivité électrique du manteau (au minimum 10^{-6} S/m pour les roches silicatées). Elle dépend de la température, de la pression, de la composition chimique du manteau mais aussi de la présence d'eau dans le manteau (Kelbert et al. 2009). Pourtant, la conductivité électrique du manteau a un impact sur la connaissance du champ principal observé en faisant diffuser les structures du champ magnétique ce qui aboutit à un retard ou un filtrage des observations. La détection des secousses géomagnétiques, variations d'origine interne sur des échelles de temps de l'année, a ainsi diminué la limite maximale de la valeur efficace de la conductivité du manteau

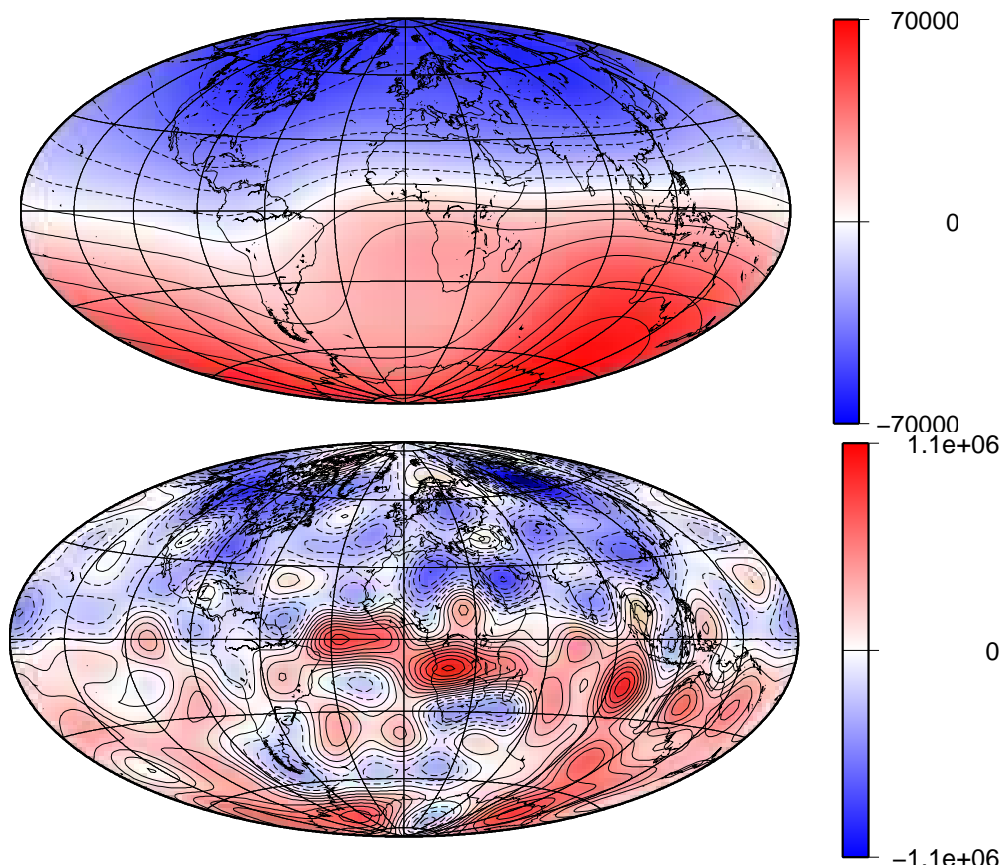


FIG. 1.3 – Cartes du champ magnétique radial en 2003. Haut : à la surface de la Terre (maximum 66000 nT), contours tous les 10000 nT et bas : à la frontière noyau-manteau (maximum 1 mT), contours tous les 0.1 mT. Ces cartes sont réalisées avec le modèle χ CHAOS d’observations satellitaires (Olsen et Manda 2008) tronqué au degré harmonique $n = 14$.

profond. La réponse du manteau à des variations de champ magnétique externe permet de remonter à la structure de la conductivité (Kuvshinov 2008, par exemple). On considère généralement que la conductivité du manteau est inférieure à 1 S/m dans le manteau supérieur et peut augmenter en profondeur pour atteindre 10 à 100 S/m à la frontière noyau-manteau. Ainsi on peut considérer que le manteau est isolant en première approximation lorsqu’on s’intéresse au champ magnétique du noyau.

Dans ces conditions, on peut extrapoler les observations du champ magnétique vers la frontière noyau-manteau afin d’avoir une description de sa configuration au plus près de sa source. La figure 1.3 compare deux cartes du champ magnétique radial à la surface de la Terre et à la frontière noyau-manteau. Les structures présentes à la surface du noyau sont d’autant plus atténuées avec la distance que leur échelle spatiale est petite. Ceci se traduit par une dominance encore plus forte du dipôle à la surface de la Terre. Au niveau de l’équateur de la surface du noyau (figure 1.3 en bas) on distingue des structures de forte intensité, alors qu’à cet endroit le dipôle axial est le plus faible. D’autres régions de flux intense se situent

aux hautes latitudes et semblent symétriques par rapport au plan équatorial. On cherche à comprendre la dynamique dans le noyau à l'origine de telles structures et des variations temporelles du champ magnétique.

Les variations temporelles du champ magnétique, couplées à sa longévité, justifient un mécanisme dynamique pour sa génération (par exemple Stacey et Davis 2008, section 24.1). La dynamo est un phénomène qui convertit de l'énergie cinétique en énergie magnétique par induction à partir d'un champ magnétique initial. La convection à l'origine des mouvements de fluide est due au refroidissement séculaire de la Terre et à la libération d'éléments légers lors de la cristallisation de la graine. Tout comme pour les enveloppes fluides externes, la dynamique du noyau est dominée par la rotation de la Terre. Les forces de Coriolis y jouent donc un rôle plus important que les forces d'Archimède et de Lorentz (due à la présence de champ magnétique).

Le phénomène dynamo est étudié sous des aspects théoriques, expérimentaux et numériques. On a d'abord cherché à comprendre le phénomène cinématique en caractérisant le type d'écoulement pouvant produire un effet dynamo. Les premières expériences de dynamo fluides (en 2001), avaient ainsi un écoulement fortement contraint selon les prédictions théoriques de Ponomarenko (1973, pour l'expérience de Riga) ou de G.O. Roberts (1972, pour l'expérience de Karlsruhe). L'étude du phénomène dynamique prend en compte la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse. Les défis expérimentaux et numériques sont alors plus ambitieux. Une dynamo expérimentale a été obtenue dans un écoulement turbulent et non contraint de Von Kármán (Monchaux et al. 2007). D'autres études numériques ou expérimentales cherchent à comprendre les équilibres de forces en jeu dans le noyau en présence de rotation et d'un champ magnétique fort (expérience DTS à Grenoble, par exemple, Schmitt et al. 2008, et les références à l'intérieur).

Les premiers modèles numériques de géodynamo ont été obtenus il y a une quinzaine d'années en renforçant les procédés diffusifs par rapport à ce qu'ils représentent réellement dans le noyau (voir par exemple la revue de Christensen et Wicht 2007). Ces modèles reproduisent des structures typiques du champ magnétique terrestre mais fonctionnent certainement dans des régimes dynamiques différents de ceux du noyau. Par exemple, mettre beaucoup de poids sur les procédés diffusifs aboutit à mélanger des échelles de temps courtes et donc à une distinction délicate des phénomènes rapides.

Ainsi, si on souhaite étudier la variation séculaire il faut des modèles spécialement adaptés à l'étude de la dynamique rapide. On propose de prendre en compte le fait qu'elle est portée par des échelles de temps bien plus courtes, le siècle par exemple, que les temps de diffusion magnétique, thermochimique ou visqueuse ; le temps de diffusion magnétique, le plus court des trois, est de l'ordre de 10^4 ans dans le noyau pour des échelles spatiales de la taille du noyau.

C'est d'ailleurs en supposant que la diffusion magnétique est négligeable dans le noyau aux échelles de temps de la variation séculaire -elle agit sur des structures de taille 100 km pour des périodes de 100 ans- et que, par conséquent, les changements du champ magnétique observé sont dus uniquement à l'advection du champ par le fluide à la surface du noyau, que l'on inverse des données géomagnétiques en vue

de l'obtention de l'écoulement de grande échelle capable de réorganiser le champ observé (Holme 2007, pour une revue)

On peut vérifier la qualité des champs de vitesse ainsi calculés grâce à une série temporelle indépendante, les données de variations de la longueur du jour. La Terre est un système dynamique global dans lequel on inclut également les océans et l'atmosphère. Les procédés internes et les forces gravitationnelles externes exercent un couple sur la Terre solide ce qui entraîne des fluctuations de la période de rotation de la Terre par rapport à une rotation uniforme. Ces écarts correspondent à des changements de la longueur du jour de l'ordre de quelques millisecondes, et ce sur des échelles de temps saisonnières à interannuelles (Gross 2007). Les variations de la longueur du jour sont dues à des échanges de moment cinétique entre la Terre solide et l'atmosphère, les océans ou le noyau. On étudie ces déviations en appliquant le principe de conservation du moment cinétique pour le système Terre. À cause du faible moment d'inertie de l'atmosphère par rapport à celui du manteau, on attribue les fluctuations saisonnières à des changements du moment cinétique de l'atmosphère, les fluctuations sur des échelles de temps géologiques étant attribuées au manteau. L'éloignement de la Lune entraîne une augmentation de la longueur du jour de l'ordre de 2,7 ms/siècle tandis que les changements du moment d'inertie de la Terre à cause du rebond post-glaciaire compensent d'une milliseconde par siècle cette augmentation.

L'interprétation des variations de longueur du jour dues à l'atmosphère a profité des nombreuses observations disponibles qui couvrent des périodes plus longues que la période caractéristique des procédés atmosphériques (variations annuelles ou événements El-Niño). Les modèles obtenus par assimilation de ces données ont contribué à améliorer la description des transferts de moments cinétique entre les enveloppes fluides externes (Chen 2005).

Bien que de courtes échelles de temps, les variations décennales de longueur du jour sont de trop grande amplitude (variations d'amplitude 7 ms environ) pour être attribuées à l'atmosphère. L'exemple que donne Gross (2007) est que si les mouvements de l'atmosphère s'arrêtaient complètement alors la longueur du jour ne diminuerait que de 3 ms. On cherche alors d'autres causes à ces variations décennales de longueur du jour.

Le noyau a un moment d'inertie bien plus grand que l'atmosphère et pourrait générer des variations de longueur du jour d'une telle amplitude. Les mécanismes de couplage noyau-manteau sont supposés importants aux échelles de temps décennales et on cherche à attribuer les variations décennales de longueur du jour à des mouvements dépendant du temps dans le noyau liquide. On calcule ainsi le moment cinétique porté par l'écoulement calculé à partir des observations géomagnétiques. Seule la partie symétrique par rapport à l'axe de rotation transporte du moment cinétique. Par ailleurs, on la suppose invariante dans la direction de l'axe de rotation.

De tels écoulements invariants sur des surfaces cylindriques appelées cylindres géostrophiques -schématisés sur la figure 1.4- peuvent être interprétés par des ondes de torsion. Une approche par des ondes est aussi motivée par l'aspect apparemment ondulatoire de la variation de longueur du jour mesurée depuis une centaine d'années (Braginsky 1970).

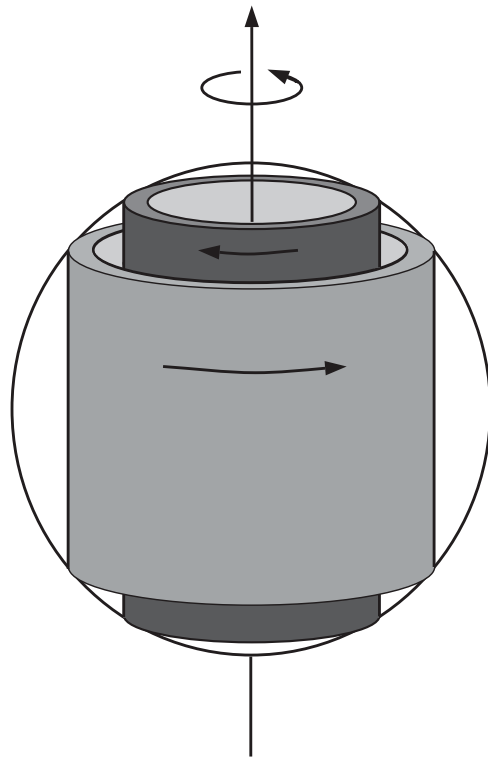


FIG. 1.4 – Schéma des cylindres géostrophiques représentatifs de la structure des ondes de torsion. Le cercle représente la surface du noyau et l'axe vertical correspond à l'axe de rotation de la Terre. Figure tirée de Holme (2007, p. 121).

Ces ondes ont des propriétés de propagation qui dépendent de l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du noyau, une quantité inaccessible avec seulement les données de champ magnétique puisque l'analyse de Gauss n'est valable qu'en dehors des régions contenant les sources de champ magnétique. En particulier les lignes de forces du champ magnétique toroïdal sont confinées à l'intérieur du noyau.

Obtenir une estimation de l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du noyau est une motivation et un résultat du travail présenté dans ce mémoire.

Dans les inversions évoquées ci-dessus où les données de champ géomagnétique sont inversées pour l'obtention de l'écoulement correspondant, le temps a été récemment inclu comme un paramètre (Jackson 1997, Pais et Hulot 2000, Gillet et al. 2009b, par exemple). Il ne reste qu'un pas à faire pour remplacer cette paramétrisation mathématique par des lois physiques. L'inversion devient alors une inversion dynamique. Les similarités de notre océan de fer liquide avec les enveloppes fluide externes nous amènent naturellement à considérer les techniques d'assimilation de données, mises au point pour l'étude de l'atmosphère (par exemple Talagrand 1997, Kalnay 2003).

Cette technique d'inversion utilise deux ingrédients - un modèle de la dynamique d'un système et un jeu d'observations de ce système - pour produire des estimations de l'état du système cohérentes du point de vue dynamique. L'objectif est d'ajuster les prédictions d'un modèle à un jeu d'observations en minimisant l'écart entre les deux. Comme le modèle est dynamique, les variables sont couplées entre elles et on accède ainsi également aux variables qui ne sont pas directement mesurées. Ceci s'adapte bien à la thématique du noyau terrestre où seule une partie du champ magnétique n'est pas enfermée dans le noyau. Comme la trajectoire complète du système est déterminée par la condition initiale, l'assimilation de données réduit la dimension du problème inverse en ne cherchant que la condition initiale qui produit une trajectoire qui s'accorde au mieux aux observations. Dans l'assimilation variationnelle, l'estimation à une époque est calculée en utilisant l'ensemble des observations disponibles pour toute la période considérée. Lors d'une analyse historique, la contrainte apportée par les nombreuses observations de bonne qualité sur les époques récentes, peut être propagée vers le passé à travers la dynamique (Fournier et al. 2007).

Dans cette thèse, je propose un modèle adapté à l'étude de la dynamique rapide du noyau aux échelles de temps annuelles à décennales de la variation séculaire, dans l'optique de l'inclure au cœur d'un procédé d'assimilation de données géomagnétiques. Cette méthode me permet de déduire que la tension magnétique dans le noyau, force de rappel des ondes de torsion, correspond à un champ magnétique fort. Des ondes de torsion rapides sont alors cohérentes avec un signal à 6 ans dans les données de longueur du jour.

Plan du manuscrit

Dans la partie 2, je présente le problème de l'étude de la variation séculaire tout d'abord du point de vue des observations - les quantités observées, les paramétrisations de ces mesures - puis du point de vue de la magnétohydrodynamique. J'y développe les équations principales et met en avant les difficultés numériques

de la modélisation globale de la géodynamo. Dans cette partie, je propose un modèle quasi-géostrophique de la dynamique rapide du noyau adapté à l'étude de la variation séculaire. Dans la partie 3, je présente le problème inverse qui consiste à retrouver des informations sur l'état du noyau à partir de données géomagnétiques. Je présente également la méthodologie de l'assimilation de données qui consiste à introduire un modèle dynamique dans le problème inverse. Je montre également des résultats d'expériences de validation avec des données synthétiques. La partie 4 est consacrée à l'étude des ondes de torsion dans le noyau, ondes pouvant exister dans le modèle quasi-géostrophique décrit dans la partie 2. La partie 5 regroupe les conclusions et quelques perspectives issues de ce travail. L'annexe A synthétise les notations du mémoire. Les annexes B et C décrivent des variantes du modèle de la dynamique rapide du noyau proposé dans la partie 2. L'annexe D donne des exemples pratiques pour construire les codes adjoints. Deux articles portant sur les travaux de ce mémoire sont joints en annexes E et F.

2.1 Les observations et les modèles du champ magnétique

2.1.1 Les mesures du champ magnétique

Les observations du champ magnétique terrestre sont directes et indirectes (mesures de l'aimantation rémanente de roches ou de poteries). Il y a 400 ans, les navigateurs faisaient des mesures directes de la déclinaison (D) du champ magnétique, angle entre le Nord magnétique et le Nord géographique, et de son inclinaison (I), angle entre le vecteur champ magnétique et l'horizontale, lors de traversées marines pour se diriger. Les mesures plus récentes sont effectuées avec des magnétomètres dans des observatoires terrestres, lors de campagnes de mesures marines ou aériennes, ou embarqués dans des satellites depuis les années 1960. Kono (2007) retrace un historique de la découverte du champ magnétique terrestre et Turner et al. (2007) détaillent l'instrumentation. Le champ magnétique est un champ vectoriel, il est donc défini par trois composantes, ou plus généralement trois scalaires indépendants.

Les mesures terrestres consistent en moyennes annuelles ou horaires, puis plus récemment en moyennes à la seconde des composantes Nord (X), Est (Y), verticale vers le bas (Z), inclinaison, déclinaison, et des intensités horizontale (H) et totale (F) en approximant le géoïde par une ellipsoïde. La figure 2.1 replace ces composantes dans un repère de coordonnées locales. Les mesures d'intensité du champ magnétique ont été mises au point par Gauss il y a 150 ans. Avant cette période, la connaissance de deux scalaires sur trois (D et I) fait que l'on connaît la morphologie du champ mesuré, à une constante multiplicative près. La figure 2.2 regroupe des séries temporelles de moyennes mensuelles des composantes X , Y et Z du champ magnétique à Chambon-la-Forêt entre 1930 et 2008. On remarque d'une part que le champ magnétique varie en fonction du temps; la variation séculaire regroupe les fluctuations non-périodiques du champ sur des échelles de temps de l'année au siècle. Sur cette figure, on remarque également que la dispersion des mesures est plus importante sur les composantes X ou Z que sur la composante Y : ceci est dû au champ magnétique d'origine externe, en particulier à cause de l'anneau de courant équatorial qui produit un champ magnétique dipolaire aligné avec celui d'origine interne. On comprend donc déjà que l'étude de la variation séculaire sera obscurcie par la présence d'autres sources de champ magnétique.

Gauss et ses collègues ont mis en place en 1834 le premier réseau d'observatoires magnétiques, dont le nombre a bien augmenté au début du vingtième siècle.

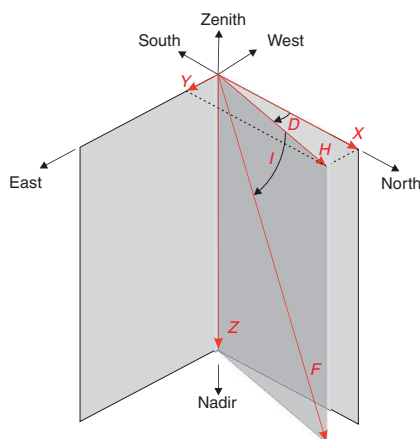


FIG. 2.1 – Les composantes X et Y sont dirigées vers le Nord géographique et l'Est. Z est la composante verticale vers le bas. $H = \sqrt{X^2 + Y^2}$ est la norme du champ horizontal et F est la norme totale du champ magnétique. Les angles I et D sont l'inclinaison (angle entre le vecteur champ magnétique et l'horizontale) et la déclinaison (angle entre le Nord magnétique et le Nord géographique). Figure tirée de Hulot et al. (2007, p. 35).

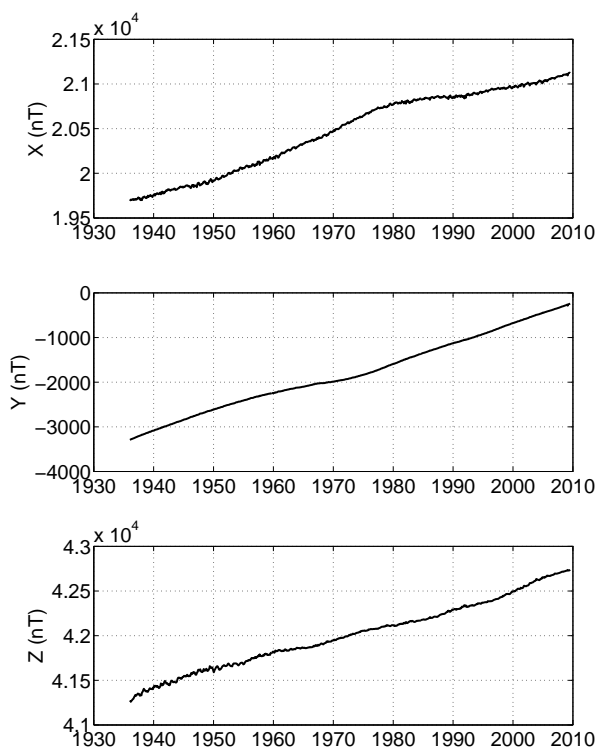


FIG. 2.2 – Moyennes mensuelles des composantes Nord (X), Est (Y) et verticale (Z) du champ magnétique mesuré à Chambon-la-Forêt en fonction du temps. Le champ magnétique varie en fonction du temps en années. La petite oscillation sur la composante Nord est due au champ d'origine externe. La composante Est est la moins polluée par le champ externe.

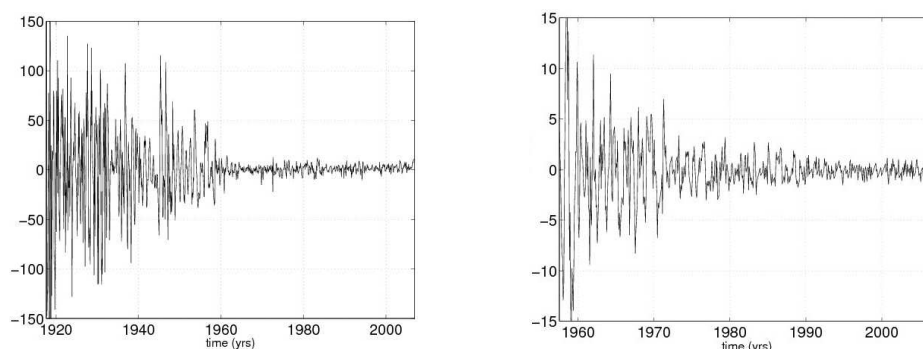


FIG. 2.3 – Différence en nT, en fonction du temps en années, entre la composante Z mesurée en deux observatoires (Gauche : Sitka - Meanook, droite : Chambon-la-Forêt - Dourbes) à laquelle la moyenne du champ magnétique a été retirée. La figure de gauche commence en 1920 et celle de droite en 1960. On montre la diminution du bruit, amélioration des mesures. Communication de N. Gillet.

Depuis, la qualité des observations du champ magnétique de la Terre s'est beaucoup améliorée en profitant d'avancées techniques dans les années 1960-1970 (voir Turner et al. 2007, pour plus de précision sur les techniques de mesures et les magnétomètres). L'introduction de la statistique dans la prise des mesures avait déjà fortement contribué à diminuer les erreurs d'observation au 19^{ème} siècle, d'autres bonnes pratiques de mesures ont été officialisées par l'établissement du réseau Intermagnet d'observatoires qui les partagent depuis 1990. Cette amélioration de la qualité des mesures est particulièrement mise en évidence lorsque l'on regarde la différence de la composante Nord du champ magnétique entre deux observatoires. Dans la figures 2.3, on mesure la différence en nT, en fonction du temps, entre la composante Z mesurée à deux observatoires (Gauche : Sitka (Alaska) - Meanook (Canada), droite : Chambon-la-Forêt (France) - Dourbes (Belgique)) à laquelle la moyenne du champ magnétique a été retirée. Ces figures mettent en évidence une diminution du bruit, d'un ordre de grandeur (figure 2.3 à gauche), entre 1920 et les années 1960 grâce aux nouveaux magnétomètres et d'un autre ordre de grandeur (figure 2.3 à droite) depuis les années 1960 grâce aux avancées techniques et au réseau Intermagnet. L'amélioration de la mesure donne plus de précision pour la compréhension des phénomènes à l'origine des observations de champ magnétique.

Comme le montrent les points rouges de la figure 2.4, les observatoires sont très nombreux en Europe, et au contraire très peu nombreux dans l'hémisphère Sud ou dans les océans. Inégalement réparties sur la surface du globe, les mesures terrestres sont pourtant parfaitement adaptées pour couvrir la variation temporelle du champ magnétique. En effet, les mesures couvrent des échelles temporelles allant de la cadence d'acquisition jusqu'à la durée de vie de l'observatoire c'est-à-dire neuf ordres de grandeur. Love (2008) précise qu'elles ont changé de rôle depuis qu'il existe des mesures satellitaires puisqu'elles sont passées de seules données pour décrire le champ à une utilisation plus restreinte pour la description des variations temporelles du champ. Ces variations temporelles sont en effet moins facilement accessibles pour les satellites du fait de leur mouvement. La figure 2.5 représente le nombre de données par siècle, en fonction de l'âge des données, provenant d'observatoires (bleu), des satellites (rouge) ou de mesures archéomagnétiques (vert).

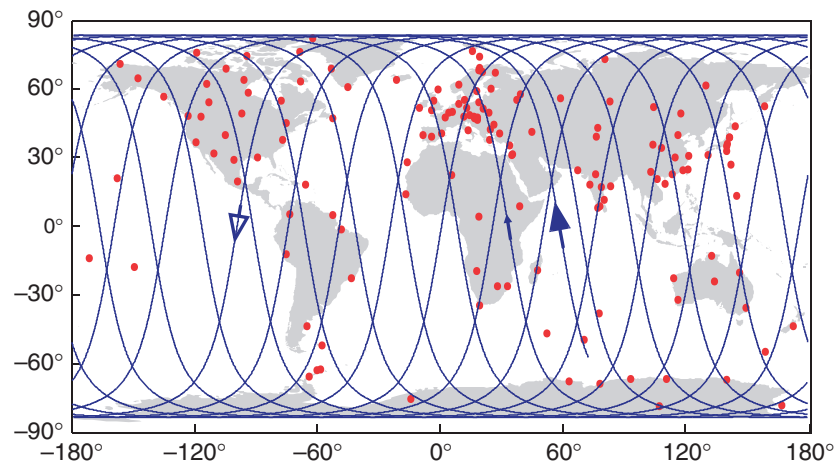


FIG. 2.4 – Carte sur laquelle figurent la distribution spatiale des observatoires, ayant fournit des moyennes mensuelles entre 1995 et 2004, (points rouges) et la trace au sol du satellite Ørsted pendant 24 h (ligne bleue). Figure tirée de Hulot et al. (2007, p. 38).

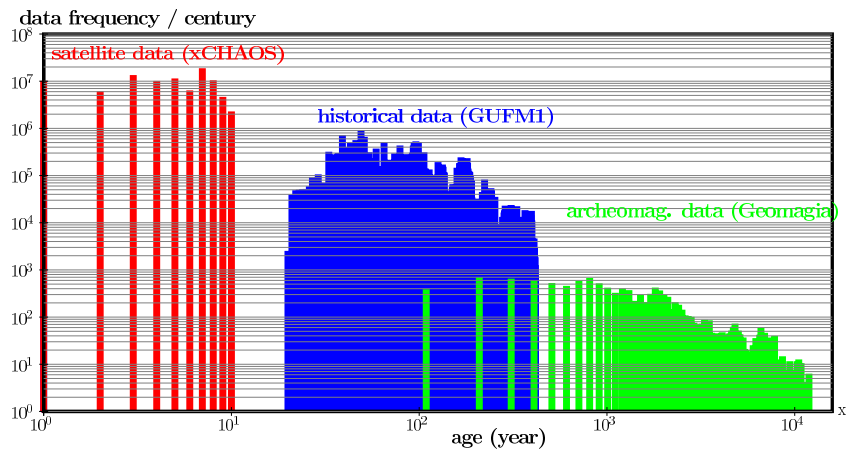


FIG. 2.5 – Nombre de données par siècle, en fonction de l'âge des données (en années, les époques récentes sont donc 10^0). Les différentes couleurs correspondent aux données satellitaires (rouge, nombre de données utilisées pour le modèle de champ magnétique xCHAOS (Olsen et Mandeia 2008)), aux données historiques (bleu, nombre de données utilisées pour le modèle de champ magnétique gufm (Jackson et al. 2000)) et aux données archéomagnétiques (vert, pour la base de données Geomagia Korhonen et al. (2008)). L'obtention de modèles de champ est décrite dans la section 2.1.3. Communication de N. Gillet.

On bénéficie de mesures satellitaires depuis la série de satellites, POGO (1965-1972) et MAGSAT (1979). Les mesures satellitaires peuvent être uniquement scalaires pour l'intensité du champ magnétique (POGO) ou vectorielles (MAGSAT) : ils mesurent alors B_r, B_θ, B_ϕ dans leur référentiel à réorienter en coordonnées géocentriques. Les observations des satellites ont une couverture spatiale globale hormis les calottes polaires (voir la trace en bleu de l'orbite de Ørsted sur la figure 2.4) et c'est le même instrument qui prend toutes les mesures, ce qui rend plus facile la description et l'interprétation des erreurs de mesure. En revanche, à cause du mouvement du satellite, les mesures ne sont pas effectuées plusieurs fois au même endroit, et deux mesures proches spatialement ne sont pas faites au même moment. La distinction entre les variations spatiales ou temporelles du champ est donc plus compliquée. De plus, les périodes de fonctionnement des différents satellites se recouvrant peu, peu de mesures sont disponibles à un temps donné. Gillet et al. (2009a) fournissent des détails sur les mesures des différents satellites, l'erreur de mesure associée variant globalement entre 2 et 8 nT selon les missions. Les erreurs les plus élevées sont dues à des difficultés initiales d'orientation du satellite Ørsted et à un problème de rigidité du bras de CHAMP portant le magnétomètre. Olsen et al. (2006) proposent une méthode pour co-estimer les angles d'Euler qui connectent le système de contrôle d'attitude du satellite au magnétomètre vectoriel.

Depuis le lancement de trois satellites basse orbite -Ørsted, CHAMP et SAC-C- qui fournissent des données géomagnétiques, une série temporelle continue de mesures satellites dure maintenant depuis presque 10 ans (voir également la figure 2.5). La mission Ørsted fera très probablement le lien jusqu'à la future mission SWARM de l'ESA (par exemple Olsen et al. 2006, Friis-Christensen et al. 2006), une constellation de trois satellites qui fournira des données d'une qualité sans précédent à partir de 2011.

Les mesures directes du champ magnétique terrestre ne nous renseignent que sur un instant très bref de l'histoire de ce champ. C'est pourquoi la gamme temporelle offerte par l'archéomagnétisme et le paléomagnétisme est si importante. Les mesures archéomagnétiques et paléomagnétiques sont des mesures indirectes du champ magnétique et permettent de remonter actuellement jusque 3,5 milliards d'années. Les mesures archéomagnétiques donnent l'intensité et la direction de l'aimantation thermorémanente des oxydes de Fer acquises par les poteries après cuisson. Les mesures paléomagnétiques proviennent des roches ayant enregistré le champ ambiant au moment de leur formation. Les roches sédimentaires possèdent une aimantation rémanente par orientation de leurs minéraux magnétiques au moment de leur dépôt et les sédiments lacustres donnent ainsi des mesures continues temporellement. Les roches volcaniques atteignent une aimantation thermorémanente lors de leur mise en place. On mesure ainsi l'intensité du champ ancien de façon presque instantanée puisque l'époque correspond au refroidissement de la roche en dessous de sa température de Curie. Le nombre de ces mesures anciennes est faible (voir la figure 2.5) mais leur intérêt réside dans le fait qu'elles permettent de remonter très loin dans le temps. Ce sont par exemple des mesures sur des laves dont l'aimantation rémanente est de direction opposée au champ actuel qui ont permis de découvrir le renversement de polarité du champ sur des échelles de temps du million d'années. Ces successions de polarité directe ou inverse sont également inscrites sur le plan-

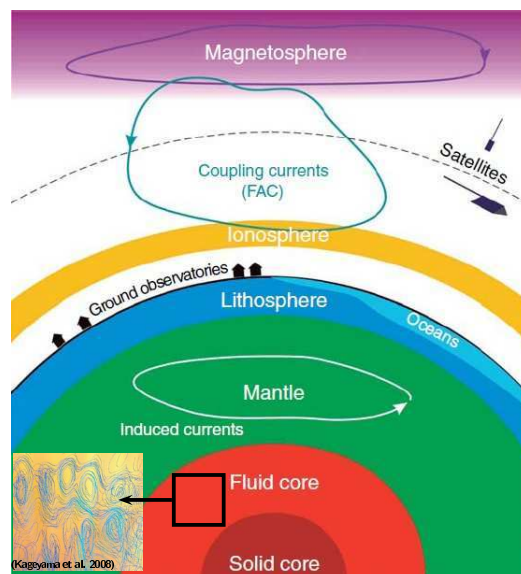


FIG. 2.6 – Schéma des sources de courants qui contribuent au champ magnétique mesuré par les observatoires terrestres et les satellites. Ce schéma donne une idée des différentes origines du champ magnétique mesuré mais n'est pas représentatif des épaisseurs relatives des différentes enveloppes sphériques représentées. Modifiée de Hulot et al. (2007).

cher océanique. La possibilité de périodes stables de polarité opposée s'explique par la symétrie des équations qui gouvernent la dynamique du noyau.

2.1.2 Les différentes sources du champ géomagnétique

Le champ magnétique terrestre connecte la Terre et l'espace proche jusqu'à la magnétopause. Que ce soit en profondeur ou dans l'atmosphère, des courants électriques génèrent des champs magnétiques qui contribuent à la totalité du champ magnétique observé. La situation est schématisée sur la figure 2.6. Le champ magnétique, résultant des différentes sources, a des intensités variées et évolue sur de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Ceci contribue à identifier les différentes sources de champ, mais il reste des échelles spatiales ou temporelles où les phénomènes sont imbriqués. La figure 2.7 regroupe les échelles temporelles caractéristiques de quelques phénomènes d'origine interne ou externe.

Le champ d'origine interne correspond en majeure partie au champ généré par le procédé de géodynamo, dans le noyau externe. Son intensité, estimée à la surface de la Terre, est de 60000 nT aux pôles et 30000 nT à l'équateur. On l'appelle le champ principal. L'étude de sa source est l'objet de ce travail.

En moindre proportion, le champ d'origine interne correspond également à l'aimantation de la croûte. La lithosphère est aimantée si sa température ne dépasse pas celle de Curie au-delà de laquelle une roche perd ses propriétés magnétiques. Comme ce champ est d'origine interne, tout comme le champ principal, on souhaite bien l'identifier pour mieux le soustraire des données afin de n'étudier que la partie interne due au noyau. Le champ crustal est d'intensité de l'ordre de 100 nT, très inférieure à celle du champ principal. Il est majoritaire sur les petites échelles spatiales inférieures à 3000 km mais, à plus grande échelle, son intensité est plus grande

au dessus des continents qu'au dessus des océans. Ceci introduit une difficulté lors de l'étude des données de champ magnétique pour paramétrer le champ principal. Au regard des constantes de temps du noyau, le champ crustal peut être considéré comme stationnaire dans le temps, on peut donc s'en affranchir en étudiant la dérivée temporelle du champ magnétique. Cependant, l'étude de Hulot et al. (2009) donne des limites à cette pratique en précisant que les variations temporelles du champ crustal (induites par la variation séculaire du champ principal de grande échelle) deviennent plus importantes que celles du champ du noyau au delà du degré harmonique 22 (~ 1800 km). Les observatoires terrestres mesurent toujours la même composante crustale, ce qui induit alors plutôt un biais dans les observations. En revanche, les satellites détectent difficilement la partie crustale s'ils sont à trop haute altitude puisque l'intensité diminue rapidement avec l'altitude ce qui rend son étude difficile. La modélisation du champ crustal bénéficie actuellement d'une coïncidence positive. Le satellite CHAMP était programmé pour voler à 450 km d'altitude et rester en orbite basse (les orbites des autres satellites qui mesurent le champ magnétique se situaient plutôt autour de 700 km d'altitude). En 2006 il est descendu sur une orbite à 350 km d'altitude et pourra voler jusque mi-2010. D'autre part, le cycle solaire est actuellement à un minimum ce qui limite la pollution (de notre point de vue) des données par le champ externe. Les mesures prises actuellement par CHAMP sont donc particulièrement bien adaptées pour une bonne identification du champ crustal (voir, par exemple, Maus et al. 2007).

Dans le cadre de l'étude du champ principal, le champ crustal est traité comme une erreur d'observation (Jackson 1990, par exemple), ou bien co-estimé avec le champ principal.

D'autres sources de champ géomagnétique sont externes à la Terre. Le milieu interplanétaire est balayé par un vent de particules chargées électriquement, le vent solaire. Le vent solaire confine le champ magnétique de la Terre dans une cavité appelée la magnétosphère. La magnétosphère n'est pas une structure statique mais est constamment en mouvement. Par exemple, l'orientation par rapport au soleil de l'axe du dipôle du champ magnétique interne varie avec la rotation de la Terre et sa révolution autour du soleil. D'autre part, le vent solaire a une variabilité temporelle allant de la seconde à plusieurs années. Un effet de cette variabilité est le mouvement oscillant de la magnétopause pour rétablir l'équilibre entre la pression du vent solaire et la pression magnétosphérique.

Dans la magnétosphère terrestre, la distribution des courants électriques n'est pas uniforme mais surtout localisée dans la magnétopause, et dans l'anneau de courant équatorial. L'intensité de ce champ (40 à 2000 nT) varie en fonction de l'activité solaire. Les courants magnétosphériques et ionosphériques varient dans le temps en réponse aux marées thermiques dans l'ionosphère, aux interactions entre magnétosphère et vent solaire, et aux variations de l'activité du soleil (voir, par exemple, Légaut 2005, Gubbins et Herrero-Bervera 2007, (chapitres ionosphère et magnétosphère) pour des descriptions des courants ionosphériques et magnétosphériques). En conséquence, les échelles de temps considérées sont celles de la variabilité et de l'activité du soleil. Les échelles de temps typiques sont la journée, l'année, le cycle à 11 ans des taches solaires (voir également la figure 2.7), ces phé-

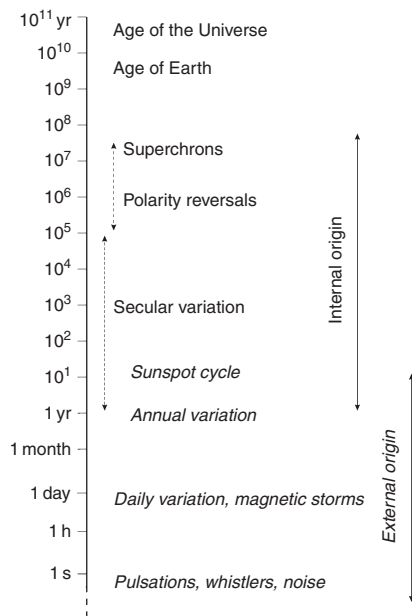


FIG. 2.7 – Variations temporelles du champ magnétique terrestre en comparaison avec l'âge de la Terre et de l'Univers. Les phénomènes d'origines interne et externe se recoupent. Figure tirée de Turner et al. (2007).

nomènes recoupent donc les échelles de temps de la variation séculaire du champ magnétique.

Dans le cadre de l'étude du champ d'origine interne, on souhaite s'affranchir du signal externe. D'une part, la sélection des données permet de limiter la contribution externe des mesures du champ magnétique. On choisit alors des données de jours calmes et des données du côté nuit. Pourtant, cette sélection se fait toujours en compromis avec un échantillonnage spatial et temporel homogène. D'autre part, une description du champ magnétique observé par des harmoniques sphériques permet de réaliser cette séparation (voir encadré 1). Cette méthode est plus adéquate pour les mesures en observatoires, pour lesquelles le champ ionosphérique est externe, que pour les mesures des satellites effectuées dans la ionosphère. Cependant la décomposition est quand même envisageable pour des données satellites effectuées dans la ionosphère.

Comme le présentent Olsen et al. (2009) dans leur article de revue consacré à la séparation des champs externe et interne, une solution alternative à la séparation par décomposition sur la base des harmoniques sphériques consiste à modéliser la physique du champ externe, et ensuite à soustraire ces effets des données géomagnétiques pour n'en tirer que le champ d'origine interne.

Utiliser la physique du système est précisément une des motivations de notre travail (consacré à la partie interne du champ). Comme ici où l'on remarque que décrire le champ externe avec de la physique est plus complet qu'une sélection de données ou une paramétrisation simple, le champ du noyau sera également décrit plus précisément si on inclut la physique du noyau à la description.

Tsyganenko et Sitnov (2007) modélisent les sources de courants magnétosphériques comme une somme de plusieurs courants : l'anneau de courant -dont les effets

Dans une zone sans courants (manteau, basse atmosphère au premier ordre), le champ magnétique peut être exprimé comme dérivant d'un potentiel $\mathbf{B} = -\nabla V$. L'absence de monopole magnétique $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implique également que ce potentiel V est solution de l'équation de Laplace $\nabla^2 V = 0$. Les harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien sur une sphère. On suppose que la région $r_1 < r < r_2$ est sans courants mais qu'il y a donc des sources de champ à l'intérieur de la coquille sphérique de rayon r_1 (par exemple, le noyau liquide) et à l'extérieur de la coquille sphérique de rayon r_2 (par exemple, la magnétosphère). Les solutions de l'équation de Laplace en harmoniques sphériques sont composées de termes dont la dépendance radiale est $1/r^{n+1}$ et r^n

$$\begin{aligned}
 V^{total}(r, \theta, \varphi) &= R_T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_T}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)] \\
 &+ R_T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_T} \right)^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [q_n^m \cos(m\varphi) + s_n^m \sin(m\varphi)] \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Dans cette équation, g_n^m, h_n^m, s_n^m et q_n^m en nT sont les coefficients de Gauss définis à la surface de la Terre en $r = R_T$. Les harmoniques sphériques de degré n et d'ordre m utilisent les fonctions associées de Legendre $P_n^m(\cos \theta)$ avec une semi-normalisation de Schmidt en géomagnétisme (voir, par exemple, Langel 1987).

L'équation 2.1 décrit l'ensemble du potentiel magnétique de la région sans courants. Elle contient des termes en $1/r^{n+1}$ et r^n pour décrire un champ d'origine interne qui doit s'annuler à l'infini ou un champ d'origine externe qui doit rester fini dans le volume d'étude.

Pour $r > r_1$, les solutions significatives sont celles en $1/r^{n+1}$ et conduisent à la description des sources d'origine interne par les coefficients harmoniques g_n^m et h_n^m . Pour $r < r_2$, en revanche, les solutions significatives sont celles en r^n et les coefficients s_n^m et q_n^m décrivent le champ magnétique d'origine externe. Séparer les champs externe et interne consiste à déterminer les coefficients g_n^m, h_n^m et q_n^m, s_n^m à partir des composantes du champ magnétique mesuré. Langel (1987, p. 263) précise qu'il faut au moins la composante verticale du champ magnétique et une composante horizontale pour réaliser la séparation.

Encadré 1 – Description d'un champ potentiel sur la base des harmoniques sphériques.

se voient sur la composante X du champ magnétique mesuré à Chambon-la-Forêt dans la figure 2.2-, les courants de queue à des distances plus éloignées (supérieures à huit rayons terrestres), les courants alignés dont un rôle est de transférer le moment cinétique du vent solaire à la haute ionosphère et le système de courants de la magnétopause qui confine le champ dans la limite de la magnétosphère (voir également Tsyganenko (2002) et Olsen et al. (2009)).

L'étude des courants ionosphériques se fait par assimilation de données, par exemple, GAIM (Global Assimilation of Ionospheric Measurements) par Scherliess et al. (2006) est un modèle récent de l'ionosphère et de la plasmasphère. L'assimilation de données pour les courants magnétosphériques est plus récente et consacrée principalement à l'étude de la ceinture de radiation par le filtre de Kalman (Koller et al. 2007, par exemple).

2.1.3 Les modèles du champ magnétique

Contexte

Un modèle de champ magnétique est une interpolation et une paramétrisation des mesures du champ magnétique. L'objectif de la modélisation du champ magnétique est de faciliter la description de ses structures spatiales et de ses variations temporelles.

Dans la partie précédente, j'ai insisté sur le fait que les mesures du champ magnétique ne sont pas régulièrement distribuées en temps et en espace. Par exemple, les mesures satellites semblent avoir une distribution spatiale idéale mais les calottes polaires sont toujours en dehors des orbites. De plus, même si les zones de haute latitude ont une densité de données plus importante qu'à l'équateur, la plupart des auteurs ne retiennent, pour ces hautes latitudes, que les données d'intensité du fait de fortes perturbations créées par le signal externe (les courants électriques alignés avec le champ magnétique font peu varier l'intensité du champ total). Une mesure vectorielle est pourtant nécessaire pour déterminer complètement le champ magnétique. Temporellement, les lacunes dans les observations traduisent le choix de ne prendre que des données de nuit, pour lesquelles le signal externe est moins fort ; on a alors des données pendant 6 mois sur 12 aux hautes latitudes. D'autre part, la série continue de données satellites depuis 10 ans paraît courte pour étudier des mouvements dans le noyau dont l'échelle de temps caractéristique est environ la durée de cette série : le lancement prochain de la mission SWARM (Friis-Christensen et al. 2006), en plus de son originalité du fait de la présence de trois satellites, va prolonger cette série. Le lancement est pourtant prévu pour 2011, alors que le satellite CHAMP circulera certainement jusqu'à mi-2010. Ørsted pourra probablement faire le lien jusqu'à la mission SWARM mais il ne fait plus que des mesures scalaires depuis 2006. L'objectif de la modélisation du champ magnétique est alors de pallier ces différentes lacunes dans les données. Le modèle doit aussi tenir compte de la variabilité en qualité et quantité des données au cours du temps. Par ailleurs, le champ magnétique du noyau trouve son origine environ 3000 km sous nos pieds. Pour le comprendre, il est judicieux de le décrire là où sont effectuées les observations mais aussi à la frontière noyau-manteau, au plus proche possible des sources.

Les modèles actuels du champ interne appellent *vraies données* des mesures déjà

remaniées. Par exemple, les données *ajustées* du réseau Intermagnet sont des données brutes auxquelles ont été ajoutées des lignes de bases, des pics ayant également été enlevés. On a donc déjà là une première supposition des caractéristiques spatio-temporelles du champ magnétique. Ces données sont ensuite sélectionnées pour ne garder que les moins polluées par le champ externe. Pour le champ principal, le modèle sera ensuite la paramétrisation la plus simple, celle présentant le minimum de complexité, qui reflète au mieux les données.

Une des perspectives de cette thèse est d'utiliser une modélisation de la dynamique du noyau, dont la sortie est le champ magnétique principal, comme paramétrisation pour expliquer les données. Nous pensons que cette paramétrisation dynamique peut mieux pallier les lacunes temporelles ou spatiales des données évoquées ci-dessus. Par la dynamique, l'information des zones riches en données se propage aussi vers les zones pauvres en données.

Par ailleurs, à l'image de ce qui se fait pour les autres sources de champ magnétique comme le champ externe, utiliser un modèle de la dynamique du noyau pour décrire le champ principal l'isole mieux du champ crustal et des autres sources de champ magnétique. Isoler et comprendre une des sources du champ magnétique mesuré permet de mieux isoler et comprendre les autres dont la physique est différente mais complémentaire.

Dans la suite du manuscrit je parlerai de modèle (quasi-géostrophique) de la dynamique du noyau, à ne pas confondre avec les interpolations/paramétrisation du champ magnétique observé qui sont l'objet de cette partie. Ces paramétrisations du champ magnétique observé sont le résultat d'un problème inverse que je décris dans le paragraphe suivant.

Problèmes direct et inverse

Le manteau est considéré comme un isolant électrique aux échelles de temps de la variation séculaire, le champ magnétique peut alors être prolongé vers la frontière noyau-manteau. De plus, dans le cas d'un fluide parfaitement conducteur, seul le champ magnétique radial B_r est continu à la frontière noyau-manteau. On va donc s'intéresser uniquement à la paramétrisation de B_r .

Une donnée magnétique γ à l'altitude r correspond à la convolution du vrai champ magnétique B_r à la frontière noyau-manteau en $r = r_o$ avec la fonction de Green $G(r, r_o)$

$$\gamma(r, \theta, \varphi, t) = \int_{\Sigma} G(r, r_o) B_r(r_o, \theta, \varphi, t) d\Sigma + \epsilon, \quad (2.2)$$

où ϵ est ici l'erreur d'observation. Cette équation signifie qu'une mesure donnée est une moyenne pondérée du champ B_r sur la surface du noyau Σ (voir Bloxham et al. 1989, pour une représentation de la fonction de Green selon les composantes).

Le problème se précise en cherchant une paramétrisation pour B_r . Dans l'encadré 1, on a vu que le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire dans une zone sans courants électriques. Ce potentiel peut se développer sur la base des harmoniques sphériques. Le potentiel magnétique d'origine interne se résume à

$$V(r, \theta, \varphi) = R_T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_T}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)], \quad (2.3)$$

où g_n^m et h_n^m en nT sont les coefficients de Gauss définis à la surface de la Terre en $r = R_T$.

On peut donc décrire B_r , à une époque donnée, comme une somme de coefficients de Gauss :

$$B_r(r_o, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_T}{r_o} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)]. \quad (2.4)$$

Pour les modèles dépendant du temps (voir également Jackson et Finlay 2007, section 5.05.3), le choix de la paramétrisation temporelle $\Phi_p(t)$ dépend des modèles (B-splines de plusieurs niveaux, séries de Taylor, interpolation linéaire), on écrit

$$g_n^m(t) = \sum_p g_n^{m,p} \Phi_p(t), \quad (2.5)$$

$$h_n^m(t) = \sum_p h_n^{m,p} \Phi_p(t). \quad (2.6)$$

Qu'il y ait ou non paramétrisation temporelle, le problème inverse correspond à la recherche du jeu de coefficients de Gauss g_n^m et h_n^m ou $g_n^{m,p}$ et $h_n^{m,p}$ qui expliquent le mieux les données.

On retrouve ici toutes les caractéristiques des problème inverses telles que la non-unicité des solutions puisque le nombre de données est fini (Backus 1970), le besoin, en conséquence, d'une contrainte supplémentaire pour l'inversion. Dans sa thèse, Jackson (1989) détaille ce problème inverse et montre qu'on se ramène à un problème d'optimisation qui se résoud avec une méthode de minimisation (voir également Bloxham et al. 1989).

Quelques modèles de champ

Les modélisations du champ magnétique sont nombreuses. Les articles de Hulot et al. (2007), Jackson et Finlay (2007), par exemple, contiennent des revues des modèles de champ principal et de variation séculaire, et Gillet et al. (2009a) passent en revue les modèles construits à partir de données satellitaires. Dans les modèles dépendants du temps, on distingue pour l'instant les modélisations du champ interne uniquement (avec ou sans co-estimation du champ crustal) et les modèles globaux (comprehensive models en anglais) qui modélisent les champs interne et externe. Utilisé de façon indirecte dans la dernière partie de ce mémoire, le modèle gufm (Jackson et al. 2000) regroupe des données d'observatoires et de navigateurs pour les quatre derniers siècles. D'autres modèles n'utilisent que des données satellites, je montre quelques cartes des modèles satellitaires CHAOS (Olsen et al. 2006) et xCHAOS (Olsen et Manda 2008) dans la section suivante.

Ce premier problème inverse n'est pas directement l'objet du travail présenté dans cette thèse. Pourtant son produit fini, un modèle (ou paramétrisation) du champ magnétique, est un des objectifs à plus long terme de notre travail : nous souhaitons dériver des modèles pour le champ magnétique interne pour lesquels les problèmes liés aux lacunes de la répartition non-uniforme des données en temps ou en espace, leur qualité variable, ainsi qu'aux choix arbitraires de régularisation spatiale ou temporelle sont partiellement résolues par la dynamique du noyau.

Des déductions sur la dynamique du noyau à partir de ces observations constitue un deuxième problème inverse (décrit dans le chapitre 3) et s'étudie généralement en considérant ces modèles de champs (coefficients de Gauss) comme des « observations ».

2.1.4 Le champ magnétique à la frontière noyau-manteau

Les modèles de champ ont rendues plus faciles les descriptions du champ magnétique à la surface de la Terre, et les ont rendues possibles à la frontière noyau-manteau. Les modèles dépendant du temps mettent en évidence la variation séculaire globale du champ magnétique.

La figure 2.8 montre un modèle de champ magnétique radial à la surface de la Terre pour l'année 2003. Le champ est principalement dipolaire avec une inclinaison de l'axe du dipole de 11 degrés environ par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Sa projection à la frontière noyau-manteau (figure 2.9) met en évidence de plus petites échelles spatiales qui étaient atténuées par l'éloignement entre source et mesures sur la carte 2.8. Bien que toujours dominant, le dipôle est moins important relativement aux autres contributions de plus petite échelle. On remarque deux régions de grande intensité dans chaque hémisphère et aux hautes latitudes. Ces structures semblent symétriques par rapport au plan équatorial. Elles peuvent être la signature d'une convection en colonnes parallèles à l'axe de rotation dans le noyau. Plus près de l'équateur, on remarque deux autres régions de flux intenses ; l'une d'elles se situe à côté d'une autre région de flux inverse, au niveau de l'Afrique du Sud.

L'augmentation de la quantité et de la qualité des données contribue à raffiner les structures du champ magnétique que l'on peut voir sur ce type de cartes. Celles de la figure 2.9 ont été tronquées au degré $n = 14$ à partir du modèle xCHAOS (Olsen et Mandea 2008).

Les degrés harmoniques sont une mesure de la longueur d'onde spatiale des structures et on peut analyser le champ magnétique en traçant son énergie, carré de son intensité B^2 intégré sur une surface sphérique de rayon r , en fonction du degré harmonique n

$$R(n, t) = (n + 1) \left(\frac{R_T}{r} \right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n [g_n^m(t)^2 + h_n^m(t)^2]. \quad (2.7)$$

La figure 2.10 montre ces spectres d'énergie à la frontière noyau-manteau (courbe noire) ou à la surface de la Terre (courbe rouge) à partir du modèle GRIMM (Lesur et al. 2008) pour l'année 2003.5. À la surface de la Terre, le spectre logarithmique présente deux branches avec deux pentes différentes. La transition entre ces deux branches se trouve entre les degrés harmoniques 13 et 16 (échelles spatiales de 3000 à 2500 km). Pour les degrés faibles, le champ du noyau est majoritaire, et l'ensemble est dominé par le degré harmonique $n = 1$, qui représente le dipôle. Pour les hauts degrés, le spectre est plat ce qui signifie que la source est proche et sur toutes les échelles spatiales. Le spectre est dominé par le champ crustal.

On peut donc envisager de séparer le champ principal du champ crustal en étudiant le champ principal jusqu'au degré 14 uniquement. Le champ crustal est pourtant existant, mais de faible intensité, pour les bas degrés. Mais surtout, se

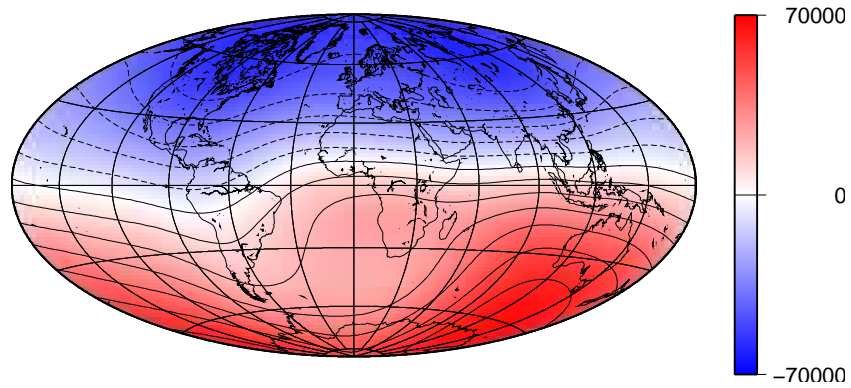


FIG. 2.8 – Carte du champ à la surface de la Terre (maximum 66000 nT), contours tous les 10000 nT. Cette carte est réalisée avec le modèle xCHAOS (Olsen et Manda 2008) en 2003.0 tronqué au degré $n = 14$.

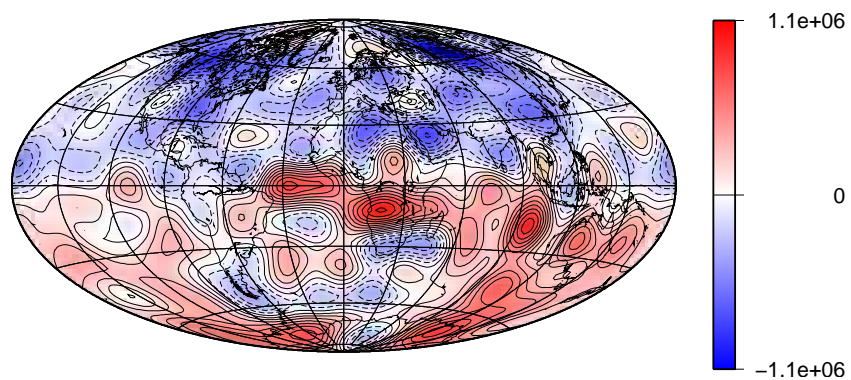


FIG. 2.9 – Carte du champ à la frontière noyau-manteau (maximum 1 mT), contours tous les 0.1 mT. Cette carte est réalisée avec le modèle xCHAOS (Olsen et Manda 2008) en 2003.0 tronqué au degré $n = 14$.

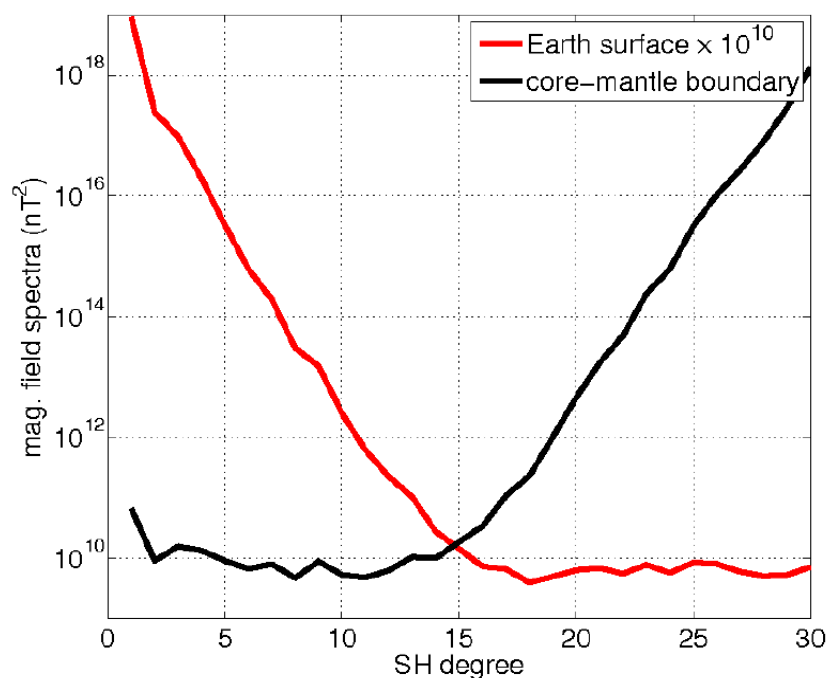


FIG. 2.10 – Spectre d'énergie du champ magnétique, carré de son intensité B^2 intégrée sur une surface particulière : la surface de la Terre (rouge) ou la frontière noyau-manteau (noir), en fonction de degré harmonique. Figure tirée de Gillet et al. (2009a), réalisée à partir du modèle de données satellitaires GRIMM (Lesur et al. 2008) pour l'année 2003.5.

limiter aux 14 premiers degrés du champ signifie que l'on aura toujours une image floue du noyau, ce qui est un problème pour l'étude de la dynamique du noyau associée à cette image. Cette limitation concerne surtout le champ principal lui-même. Sa dérivée temporelle peut être évaluée à des degrés supérieurs à 14 puisque le champ crustal est principalement stationnaire.

Le spectre à la frontière noyau-manteau est plat pour les bas degrés conformément à la proximité de la source dans l'hypothèse d'un spectre blanc. En revanche il remonte pour les hauts degrés. Cette partie de la courbe n'est pas significative puisque l'on a prolongé vers la frontière noyau-manteau les mesures du champ magnétique en considérant que le manteau ne contenait pas de sources de champ.

L'obtention de cartes du champ magnétique pour plusieurs époques met en évidence une dérive vers l'Ouest des motifs équatoriaux aux échelles de temps de la variation séculaire. Dans la figure 2.11, Finlay (2005) a mis cet effet en évidence en traçant l'intensité du champ radial à l'équateur, en fonction de la longitude en abscisse et du temps en ordonnée. Le signal semble se propager vers l'Ouest à une vitesse de 17 km/an et sa structure ondulatoire laisse Finlay et Jackson (2003) suggérer que son explication est liée à des ondes hydromagnétiques dans le noyau.

La figure 2.12 est une carte de la variation séculaire du champ magnétique calculée à la surface de la Terre à partir du modèle xCHAOS en 2003. D'après cette carte, l'amplitude maximale de la variation séculaire est de 180 nT/an. Si la dérive vers l'Ouest est une structure plutôt lente et a été observé sur l'ensemble des données historiques, les secousses magnétiques, elles, ont une échelle caractéristiques

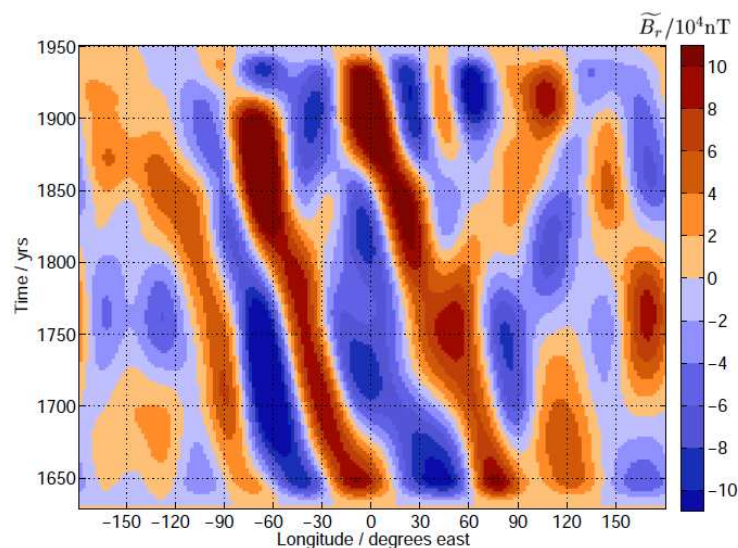


FIG. 2.11 – Champ magnétique radial à l'équateur, en fonction de la longitude en abscisse et du temps en ordonnée. (La moyenne temporelle de B_r a été soustraite et les périodes supérieures à 400 ans ont été filtrées.) Cette carte est réalisée à partir du modèle *gufm1* (Jackson et al. 2000). Figure tirée de Finlay (2005).

de l'ordre de l'année. Elles se repèrent dans les données d'observatoire par des changements brusques de la pente de la variation séculaire dY/dt , composante la moins bruitée par le signal externe.

Les observations satellitaires ont permis de connaître les bas degrés de l'*accélération séculaire*, la seconde dérivée temporelle du champ magnétique radial. En connaissant la variation séculaire, on estimait l'accélération séculaire mais la surprise est venue de l'évolution très rapide de ces cartes. Il suffit de quelques années pour que le champ d'accélération séculaire soit complètement bouleversé (par exemple Lesur et al. 2008).

Holme et Olsen (2004) tracent le spectre de puissance de la variation séculaire et en déduisent qu'il n'y a pas de raison d'imaginer une source de variation sécu-

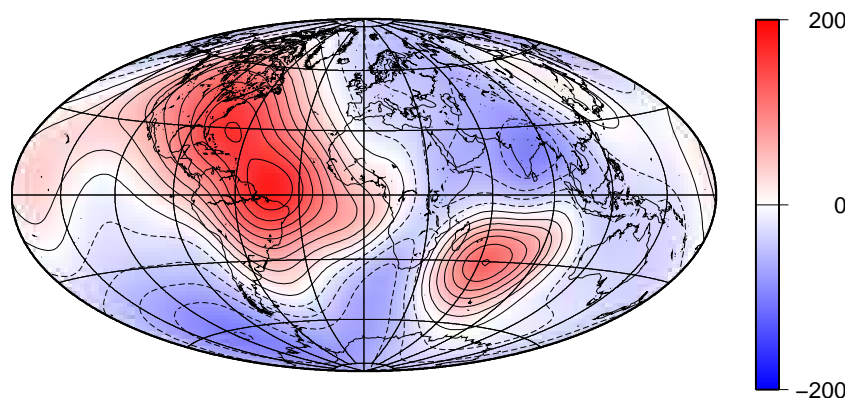


FIG. 2.12 – Carte de la variation séculaire du champ magnétique à la surface de la Terre (extrema $-101; 179$ nT/an), contours tous les 20 nT/an. Cette carte est réalisée avec le modèle xCHAOS (Olsen et Mandaia 2008) en 2003.0 tronqué au degré $n = 14$.

laire différente de celle du champ principal. Hulot et Le Mouél (1994) définissent l'échelle de temps caractéristique τ_n^{SV} de la variation séculaire du champ historique en fonction du degré harmonique n (voir aussi Hongre et al. (1998) pour une étude similaire des données archéomagnétiques)

$$\tau_n^{SV} = \sqrt{\frac{R(n, t)}{\dot{R}(n, t)}}, \quad (2.8)$$

où $R(n, t)$ est l'énergie de la variation séculaire du champ magnétique de degrés n et sommé sur tous les ordres m . τ_n^{SV} mesure le temps nécessaire à une structure du champ magnétique de taille n pour changer complètement. On trouve que τ_n^{SV} est de l'ordre de 100 – 200 ans pour les degrés de 2 à 7, τ_n^{SV} diminue quand n augmente. Pour le dipôle axial τ_n^{SV} est plutôt de l'ordre de 400 ans.

Les motifs du champ magnétique présentés dans cette partie sont caractéristiques de la variation séculaire du champ magnétique. Dans ce travail, on s'intéresse à la dynamique du noyau à l'origine de la variation séculaire du champ magnétique.

2.2 La dynamique du noyau

2.2.1 Lois de conservation et effet dynamo

Les observations paléomagnétiques attestent la présence d'un champ magnétique sur Terre depuis au moins 3,5 milliards d'années. Pourtant on peut estimer de l'ordre de quelques dizaines de milliers d'années le temps que mettrait un champ magnétique à s'éteindre par dissipation ohmique uniquement. Par ailleurs, le champ magnétique observé n'est pas le champ d'un aimant permanent, comme l'indiquent les hautes températures au centre de la Terre, bien supérieures à la température de Curie. Enfin, les mesures magnétiques témoignent d'un champ magnétique non-uniforme et qui fluctue dans le temps. Toutes ces observations jouent en faveur d'un mécanisme d'un champ magnétique auto-entretenu. La possibilité d'un effet dynamo pour la Terre a été discutée par Larmor dès 1919, mais le premier mécanisme de dynamo magnétohydrodynamique a été élaboré par Elsasser (1946). L'effet dynamo est un mécanisme qui convertit de l'énergie cinétique en énergie magnétique. Au cœur d'un champ magnétique préexistant (par exemple le champ magnétique interplanétaire), des mouvements dans le noyau liquide, conducteur d'électricité, vont générer des courants électriques qui produisent un champ magnétique qui renforce le champ magnétique initial. Si l'auto-induction du champ magnétique dépasse sa dissipation ohmique, alors on a une dynamo auto-entretenu.

De la chaleur est extraite du noyau par le manteau ce qui fournit, par le phénomène de convection thermique, une source d'énergie cinétique capable d'entretenir le champ magnétique malgré sa dissipation ohmique. Le fluide du noyau est soumis à une convection vigoureuse dont la principale source d'énergie, aux longues échelles de temps comme celles de la génération de champ magnétique, est le refroidissement séculaire du noyau, ce qui entraîne la nucléation puis la croissance d'une graine de fer solide au centre. La croissance de la graine libère de la chaleur latente (solidification du fer) et des éléments légers ce qui contribue à une convection thermique et compositionnelle. Les couplages entre le noyau et le manteau, le forçage des marées

$$\rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u}] = -\nabla \Pi' - C \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

$$\partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \kappa \nabla^2 C + S_{T/\chi}, \quad (2.10)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.13)$$

TAB. 2.1 – Équations de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie, de l'induction magnétique, et de la masse. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ traduit l'absence de monopole magnétique. Ces équations sont écrites dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de l'approximation de la magnétohydrodynamique. La définition des variables et des différents termes est précisée dans le corps du texte.

ou la précession, sur des échelles de temps diurnes, sont à l'origine de mouvements susceptibles de contribuer également au mécanisme dynamo.

À cause de la rotation de la Terre, et parce que le fluide est très peu visqueux, ces mouvements convectifs sont dominés par la force de Coriolis. Les interactions non-linéaires indirectes entre la force de Coriolis, le champ magnétique et la force d'Archimède produisent un écoulement sur de nombreuses échelles spatiales et temporelles.

L'étude des procédés physiques qui entrent en jeu dans le noyau nécessite de traiter le système d'un fluide conducteur d'électricité en rotation à l'intérieur d'une coquille sphérique. Les lois physiques qui régissent son mouvement sont les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, le tout dans le cadre des lois de l'électromagnétisme (voir, par exemple, Braginsky et Roberts 1995, pour un traitement théorique détaillé). On suppose que le fluide est homogène, visqueux et incompressible mais dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Le fluide est caractérisé par son champ magnétique \mathbf{B} , son champ de vitesse \mathbf{u} , sa co-densité C et sa pression Π . Les équations sont regroupées dans le tableau 2.1.

La conservation de la quantité de mouvement du fluide en rotation uniforme est régie par l'équation de Navier-Stokes (équation 2.9). Dans l'approximation de Boussinesq (voir Spiegel et Veronis 1960, pour des compléments sur les conditions d'application), les variations de la masse volumique du fluide ρ sont négligées sauf pour les forces d'Archimède. La formulation en co-densité regroupe en une seule variable C les sources de flottabilité thermiques ($\alpha \rho T'$, où α est le coefficient d'expansion thermique et T' un champ de température défini par rapport à un état isentropique) et chimiques (produit de la différence de densité entre le fer pur et les éléments légers avec un champ de concentration défini par rapport à un état de base homogène) (Braginsky et Roberts 1995, Aubert 2009). Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, la conservation de la masse se réduit à une condition d'incompressibilité du fluide (équation 2.12). L'équation de Navier-Stokes (2.9) signifie qu'une particule de fluide est soumise à l'action des forces d'inertie, de la force de Coriolis (on se place dans le repère en rotation), du gradient de pression, et des forces volumiques : poussée d'Archimède, force de Lorentz, et friction visqueuse. Le gradient de pression contient ici les forces gravitationnelle et centrifuge.

La poussée d'Archimède fait intervenir la co-densité et le champ de gravité pris à la surface du noyau \mathbf{g} . La force de Lorentz est produite par l'interaction entre les courants électriques \mathbf{j} et le champ magnétique et reflète la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement.

L'équation d'évolution de la co-densité traduit la conservation de l'énergie, elle s'exprime par l'équation (2.10) dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Dans cette équation on suppose que les deux sources (thermiques et compositionnelle) ont la même diffusivité κ . Par ailleurs, $S_{T/\chi}$ est un terme source qui décrit le refroidissement séculaire du noyau et son enrichissement en éléments légers (Aubert et al. 2008, Aubert 2009).

On se place, de plus, dans le cadre de l'approximation de la magnétohydrodynamique qui néglige les courants de déplacement, et filtre ainsi les ondes électromagnétiques. L'évolution de l'induction magnétique \mathbf{B} est régie par l'équation d'induction (2.11) qui se déduit des équations de Maxwell. Dans cette équation, $\eta = (\mu_0\sigma)^{-1}$ est la diffusivité magnétique du fluide, σ sa diffusivité électrique, et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

L'équation d'induction est un équilibre entre la création et la dissipation de champ magnétique. Le premier terme du membre de droite de l'équation (2.11) représente l'effet d'induction électromagnétique par lequel des courants électriques sont générés par les mouvements (\mathbf{u} est le champ de vitesse) d'un conducteur électrique à travers un champ magnétique. Le second terme correspond à la dissipation du champ magnétique par effet Joule, conséquence de la circulation de courants électriques dans un matériel de résistivité électrique non-nulle. L'effet relatif de ces deux procédés se mesure avec le nombre de Reynolds magnétique

$$R_m = Ul/\eta, \quad (2.14)$$

avec U une vitesse caractéristique et l une taille caractéristique des structures. Si on voit ce rapport en terme de temps, on a un effet dynamo si le temps d'advection du fluide l/U est plus court que le temps de diffusion électromagnétique l^2/η . L'équation (2.11) sans diffusion, indique que le champ magnétique est gelé dans le fluide : c'est l'approximation de flux gelé qu'on rencontrera également en section 3.1. Les lignes de champ se comportent comme des lignes matérielles et le champ de vitesse crée ainsi un champ magnétique en étirant ces lignes de champ. Le système d'équations se complète par la condition d'un champ magnétique solénoïdal qui traduit l'absence de monopole magnétique (équation 2.13).

L'ensemble de ces équations doit être résolu en accord avec des conditions aux limites. Les limites (graine et frontière noyau-manteau) sont considérées comme des surfaces rigides, impénétrables. Le champ magnétique se raccorde à un champ potentiel dans le manteau (Christensen et Wicht 2007, section 8.08.2.3, résume les conditions aux limites typiques sur les variables du problème). Par ailleurs, si la convection est limitée à la convection thermique, alors les conditions aux limites pour la température sont, par exemple, une température constante ou un flux de chaleur constant à la frontière noyau-manteau (Sakuraba et Roberts 2009).

Les équilibres de la magnétohydrodynamique font intervenir des procédés diffusifs qui agissent sur des échelles de temps assez longues par rapport à celles de la variation séculaire. Le tableau 2.2 regroupe les ordres de grandeurs des diffusivités

diffusivité	ordre de grandeur	l pour $T_D = 100$ ans
magnétique	$\eta = 2 \text{ m}^2/\text{s}$	$\sim 80 \text{ km}$
thermique	$\kappa = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$\sim 180 \text{ m}$
visqueuse	$\nu = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	$\sim 18 \text{ m}$

TAB. 2.2 – Ordre de grandeur des procédés diffusifs dans le noyau liquide et taille caractéristique l associée à ces processus sur une échelle de temps de 100 ans ($T_D = l^2/D$, $D = [\eta; \kappa; \nu]$). Pour comparaison, le rayon du noyau r_o est 3480 km.

magnétique, thermique et visqueuse, ainsi qu'une échelle spatiale caractéristique associée à une échelle de temps typique de la variation séculaire de 100 ans. On remarque que la taille des structures sur lesquelles agissent les procédés diffusifs sont négligeables par rapport à la taille du noyau r_o pour les échelles de temps de la variation séculaire.

Dans l'équation (2.9) l'effet de la force de Coriolis relativement aux forces visqueuses, et aux forces inertielles se caractérise par deux nombres sans dimension, le nombre d'Ekman E et le nombre de Rossby Ro

$$E = \frac{\nu}{\Omega l^2}, \quad (2.15)$$

$$Ro = \frac{U}{\Omega l}. \quad (2.16)$$

Le nombre de Rossby mesure les effets inertiels par rapport à la force de Coriolis. Avec $l = r_o$ et $U = 15 \text{ km/an}$ (vitesse typique des écoulements calculés à la surface du noyau), $Ro \sim 2 \cdot 10^{-6}$ pour la Terre ce qui indique que la rotation l'emporte sur les forces inertielles et centrifuges. D'autre part, $E \sim 10^{-15}$.

Avec une viscosité aussi faible, l'écoulement ressent fortement la rotation. Il suit principalement l'équilibre géostrophique dans lequel le gradient de pression est équilibré par la force de Coriolis

$$2\rho\Omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla\Pi. \quad (2.17)$$

En prenant le rotationnel de cette équation, on trouve le théorème de Proudman-Taylor

$$\partial_z \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

où z correspond à la direction de l'axe de rotation dans un système de coordonnées cylindriques ($O, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$). Cette équation, combinée à la condition de non-pénétration du fluide, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, signifie que l'écoulement géostrophique est axisymétrique selon \mathbf{e}_φ , en colonnes organisées en cylindres emboîtés, centrés sur l'axe de rotation.

2.2.2 Modélisation de la géodynamo

Le fait que les diffusivités soient très petites pour le noyau pose des problèmes pour les calculs car les ordinateurs actuels ne sont pas assez puissants pour résoudre toutes les petites échelles et couches limites associées aux procédés dissipatifs (par

exemple Christensen et Wicht 2007, Zhang et Gubbins 2000). Pourtant ces procédés sont nécessaires. D'une part, la dissipation visqueuse est particulièrement importante dans la couche limite d'Ekman et le pompage du fluide dans cette couche limite a une rétroaction sur l'écoulement dans l'ensemble de la sphère. D'autre part, l'équilibre du champ magnétique ne peut se faire sans dissipation magnétique puisque la saturation résulte d'un équilibre entre l'induction du champ et sa dissipation ohmique. Cependant la dynamique se fait également sur de grandes échelles spatio-temporelles. Le traitement numérique de ces grandes disparités d'échelle est difficile actuellement.

Une première approche considère que la limite $\nu \rightarrow 0$ n'est pas singulière et est donc équivalente à $\nu = 0$. Cela consiste à négliger les forces visqueuses sauf éventuellement dans des couches limites. Taylor (1963) a montré que si les effets de l'inertie sont négligeables par rapport aux forces de rotation, le système a une solution sous une condition de morphologie pour le champ magnétique

$$\int_{S_{CG}} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_{\varphi} dS_{CG} = 0, \quad (2.19)$$

où S_{CG} est la surface d'un cylindre géostrophique dans le noyau et d'axe, l'axe de rotation. Malgré les tentatives, les codes construits sous ces conditions n'ont pas encore produit de dynamo.

La seconde approche remplace cette petite viscosité par une plus grande. C'est sous cette condition que les codes géodynamo produisent des dynamos, à la suite du travail pionnier de Glatzmaier et Roberts (1995) qui, dans ce premier modèle, utilisaient l'hyperviscosité comme il est d'usage dynamique atmosphérique. Ces dynamos reproduisent certains motifs du champ magnétique observé comme le caractère principalement dipolaire, et surtout les renversements non-périodiques du dipôle magnétique aux échelles de temps géologiques (Christensen et Wicht 2007, section 8.08.4). Ces résultats donnent confiance dans le fait que la dynamo est bien un problème de convection en présence de rotation et de champ magnétique, dans une géométrie sphérique. Pourtant, en donnant un rôle majeur aux forces visqueuses, on prend le risque que la dynamique reproduite soit dans un régime différent de celui de la Terre.

Le problème dynamo est caractérisé par 4 paramètres d'entrée : le nombre d'Ekman qui mesure le poids de la viscosité par rapport aux effets de rotation, les nombres de Prandtl Pr et de Prandtl magnétiques P_m qui sont les rapports des trois diffusivités, magnétique, thermique et visqueuse du problème et le nombre de Rayleigh Ra qui mesure le flux de flottabilité (ou plus généralement de co-densité). Les nombres de Rayleigh et de Prandtl sont les seuls paramètres d'entrée dont l'estimation peut être similaire à celle de la Terre, E et P_m sont en revanche surestimés de plusieurs ordres de grandeur. Après saturation, les caractéristiques de sortie sont le transport de chaleur par convection (nombre de Nusselt), l'intensité du champ de vitesse, mesurée par le nombre de Rossby, et celle du champ magnétique (nombre de Lehnert). En se basant sur une étude systématique des paramètres d'entrée du problème dynamo, Christensen et Aubert (2006) établissent des lois d'échelles asymptotiques qui montrent qu'au premier ordre, les paramètres caractéristiques de sortie dépendent du nombre de Rayleigh et non pas des trois paramètres diffusifs E, Pr, P_m . On peut donc penser que, comme Ra est étudié dans une vaste gamme

représentative du noyau, la dynamique de saturation du champ magnétique est étudiée dans le bon régime par les codes dynamo. D'autre part, cette vision des choses permet de diminuer le nombre de degrés de liberté du problème. Ces lois d'échelles ont en plus l'avantage d'unifier le comportement des dynamos de plusieurs planètes et étoiles (Christensen et al. 2009). De telles lois estiment l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du noyau non pas à partir d'un équilibre de forces mais à partir de la puissance disponible pour équilibrer la dissipation ohmique (Christensen et Aubert 2006, Christensen et al. 2009). La dernière estimation de l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du noyau est de 2 mT (Christensen et al. 2009).

Pourtant d'autres études récentes qui recherchent toujours à se rapprocher des valeurs des paramètres diffusifs du noyau montrent que les motifs de la convection semblent dépendre des diffusivités. Par exemple, Kageyama et al. (2008) voient les colonnes axiales de convection se modifier en nappes de courants axiales lorsqu'ils procèdent à un calcul à $E = 10^{-7}$ au lieu des valeurs jusqu'alors typiques de $10^{-5} - 10^{-6}$ ($E = 10^{-15}$ pour le noyau). Le champ magnétique radial résultant est plutôt non-dipolaire, en conséquence une dynamo dont un paramètre (E) est plus proche du cas terrestre produit un champ moins comparable au champ terrestre (Christensen 2008). Les conditions aux limites sont aussi primordiales dans le type de convection comme le montrent Sakuraba et Roberts (2009). La convection est de petite échelle lorsque que la température de surface du noyau est imposée comme uniforme. Sakuraba et Roberts (2009) imposent un flux de chaleur uniforme, qui autorise donc des gradients latéraux de température de surface. Leur motif de convection est alors de bien plus grande échelle. Dans une étude plus directement pertinente pour mon travail, Takahashi et al. (2008) contrastent l'échelle caractéristique du champ de vitesse, de plus en plus petite au fur et à mesure que l'on décroît le nombre d'Ekman, et l'échelle caractéristique du champ magnétique qui reste de l'ordre de la taille du noyau.

Dans ces codes, on augmente le rapport entre la viscosité et la diffusivité magnétique, à travers l'augmentation du nombre de Prandtl magnétique afin de rendre possible l'effet dynamo. En conséquence, les échelles temporelles courtes ou de l'ordre du temps de diffusion magnétique T_η se mélangent et il est difficile de différencier les phénomènes.

Dans les systèmes sans rotation, les ondes d'Alfvén résultent d'un équilibre entre les forces inertielles et les forces magnétiques. Braginsky (1970) a montré que si le système est en rotation, des ondes d'Alfvén ne peuvent exister que sur des mouvements axisymétriques. L'écoulement zonal de ces ondes de torsion est organisé en cylindres orientés selon l'axe de rotation. Leur période, $T_A = l \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{B_0^2}}$, dépend d'une mesure B_0 de l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du noyau. Si le champ magnétique a une valeur rms (pour root mean square en anglais, c'est-à-dire valeur efficace en français) de 2 mT, et pour $l = r_o$, T_A est de l'ordre de 6 ans. Ces ondes sont donc bien distinctes des phénomènes de l'ordre du temps de diffusion magnétique $T_\eta \sim 10^4$ ans.

Pourtant dans les codes géodynamo, si on modifie les aspect diffusifs pour l'obtention d'une dynamo, alors le rapport entre le temps de diffusion magnétique et la période des ondes d'Alfvén, mesuré par le nombre de Lundquist, décroît. En effet, le nombre de Lundquist peut être réécrit en fonction des nombres de Prandtl

magnétique et d'Elsasser

$$S = \sqrt{\Lambda P_m E^{-1}}. \quad (2.20)$$

Le nombre d'Elsasser Λ est une mesure des forces magnétiques par rapport aux forces de rotation en sortie des codes géodynamo. Pour la Terre, le nombre de Lundquist est de l'ordre de 10^4 mais n'est que de l'ordre de 400 dans les codes dynamo récents à bas- P_m , en se basant sur les estimations les plus faibles actuellement de Sakuraba et Roberts (2009), ce qui complique la distinction entre les différents phénomènes. Jault (2003) précise également que le renforcement des aspect dissipatifs rend les ondes de torsion difficiles à repérer dans les codes géodynamo. En effet, le rapport entre la période des ondes de torsion T_A et leur temps d'atténuation par dissipation visqueuse T_E

$$\frac{T_A}{T_E} = P_m^{1/2} \Lambda^{-1/2} \quad (2.21)$$

est de l'ordre de $0.75 - 1$ pour les calculs de Sakuraba et Roberts (2009), alors qu'il est de l'ordre de 10^{-3} pour le noyau. Si ce rapport est supérieur à 1 cela signifie que les ondes de torsion sont trop dissipées pour être détectées dans leur signature géomagnétique induite par l'interaction de l'écoulement avec le champ magnétique radial à la frontière noyau-manteau.

Pour étudier la dynamique rapide, on ne va donc pas utiliser un code géodynamo mais développer un modèle dynamique adapté aux échelles de temps courtes, c'est-à-dire peu dissipatives.

2.3 Modèle physique de la variation séculaire du champ magnétique

2.3.1 Étude de la variation séculaire

Aux échelles de temps de la variation séculaire, la diffusion magnétique agit sur des échelles spatiales plus grandes que les diffusions thermique ou visqueuse comme le suggère le tableau 2.2. Cependent ces échelles ne sont que de l'ordre de la centaine de kilomètres (degré harmonique ~ 500), bien inférieures à ce qu'on étudie ici. Les mouvements de courte échelle de temps peuvent être étudiées en l'absence de procédés diffusifs. On se dispense ainsi des problèmes numériques relatifs à leur description, et on travaille avec les nombres sans dimension du noyau.

Les procédés dans le noyau à l'origine de la variation séculaire sont généralement étudiés par un problème inverse qui consiste à inverser les données de champ magnétique et de variation séculaire pour obtenir les mouvements de grande échelle qui en sont à l'origine. Par exemple, Bullard et al. (1950) ont estimé à 12 km/an la vitesse de l'écoulement nécessaire à la surface du noyau à l'origine de la dérive vers l'Ouest des structures magnétiques. Ce problème cinématique introduit la méthode d'assimilation de données que je présente dans le chapitre 3. En conséquence, ces inversions sont détaillées dans la section 3.1.

Une approche alternative, dynamique, consiste à s'intéresser à la réponse des équations de la géodynamo à une perturbation des variables du système. Les condi-

tions d'instabilité convective d'un fluide conducteur ont été étudiées par Chandrasekhar (1961) sur des systèmes en rotation et Braginsky (1964) a mis en avant l'importance de mouvements de ce type pour l'étude du noyau terrestre. La proposition d'ondes hydromagnétiques dans le noyau pour expliquer la variation séculaire a été soutenue par Hide (1966). En considérant la géométrie sphérique du noyau, il a montré que des ondes de Rossby magnétiques pouvaient avoir des périodes de l'ordre de celles de la variation séculaire. La propagation vers l'Ouest de ces ondes est due à l'épaisseur de la couche de fluide (les ondes de Rossby de l'atmosphère, fine couche de fluide, se propagent vers l'Est, voir également figure 2.13). Dans le cas d'une géométrie d'épaisse couche de fluide le signe du paramètre β , qui mesure la variation de la force de Coriolis avec la latitude est de signe opposé au cas où l'épaisseur de fluide est fine (voir aussi Acheson et Hide 1973). Il donnait ainsi une alternative à l'hypothèse d'advection grande échelle pour expliquer la dérive vers l'Ouest par inversion de données. En effet, avec son estimation de la dérive vers l'Ouest (environ 3 km/an) et de la taille caractéristiques des structures, les ondes de Rossby magnétiques ont une période de l'ordre de quelques centaines d'années pour un champ magnétique de 10 mT dans le noyau. Il remarque également qu'un autre mode d'oscillation, inertiel, est présent mais que sa fréquence est trop importante pour que les variations de champ magnétique qu'il engendre arrivent jusqu'à la surface de la Terre à cause de la conductivité non-nulle du manteau. Plusieurs types d'ondes sont susceptibles d'avoir des périodes correspondant avec celles de la variation séculaire (voir par exemple Finlay 2005). En particulier, dans le cadre d'un équilibre magnétostrophique -forces de Coriolis, d'Archimède et de Lorentz- des ondes lentes (le terme d'advection non-linéaire est négligé), appelées ondes MAC, voient leur période dépendre du gradient de densité dans le noyau. Dans le cas où les forces d'Archimèdes peuvent être négligées, les ondes Magnéto-Coriolis ont une force de rappel faible puisque les forces magnétiques et de Coriolis agissent de façon presque opposée. Les ondes d'Alfvén font aussi partie des ondes dont la force de rappel est la tension magnétique. En présence de rotation, ces ondes de torsion ne se propagent que sur les mouvements zonaux (Braginsky 1970; 1984). Pour toutes ces ondes, la période est fonction de l'inverse de l'intensité du champ magnétique dans le noyau. D'autre part, certaines de ces ondes sont dispersives, si les structures du champ magnétique observé le sont aussi, cela peut contribuer à trouver un mécanisme ondulatoire responsable de son origine. Finlay (2005, section 3.7, sa figure 3.18) a recherché dans la dérive vers l'Ouest du champ magnétique une preuve de dispersion en traçant la vitesse azimutale des structures du champ magnétique (auquel on a soustrait sa moyenne temporelle) en fonction du nombre d'onde, mais la dispersion éventuelle est incluse dans les barres d'erreur des vitesses. L'hypothèse d'ondes dans le noyau est également soutenue par une étude des observations du champ magnétique, en particulier de la dérive vers l'Ouest des structures équatoriales du champ magnétique étudiées récemment par Finlay et Jackson (2003) (voir la figure 2.11).

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons un modèle dynamique, dans l'hypothèse quasi-géostrophique, de la variation séculaire du champ magnétique. Ce modèle est en particulier capable de reproduire certaines de ces ondes comme les ondes d'Alfvén.

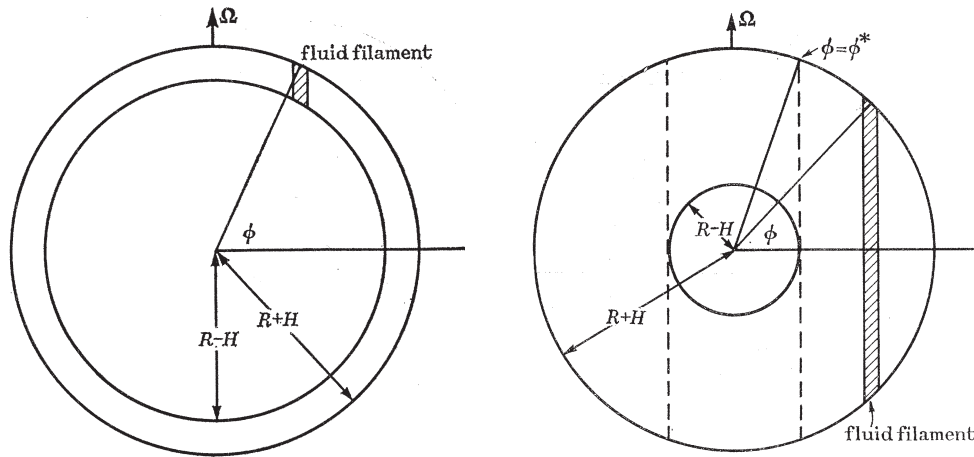


FIG. 2.13 – Exemple de géométrie de fine (gauche) ou d'épaisse couche de fluide (droite). Dans le cas de gauche, la hauteur de colonne augmente depuis l'axe de rotation et vers l'équateur, à l'inverse du cas de droite. Dans le cas fine couche de fluide, la plupart du fluide se trouve à l'intérieur du cylindre tangent à la sphère interne, à l'inverse de la géométrie d'épaisse couche de fluide. Figures tirées de Hide (1966).

2.3.2 Dynamique rapide et hypothèse quasi-géostrophique

Jault (2008) a montré que dans l'optique où les procédés rapides sont non-diffusifs, on compare le poids de la force de Coriolis par rapport à celui de la force de Lorentz avec le nombre de Lehnert (Lehnert 1954), ratio entre la période des ondes inertielles et celle des ondes d'Alfvén

$$\lambda_l = \frac{B_0}{\Omega(\mu_0\rho)^{1/2}l} \quad ; \quad \lambda_{r_o} = \frac{1}{\Omega T_A}, \quad (2.22)$$

Si $\lambda \gg 1$, alors les ondes d'Alfvén ne sont presque pas modifiées par la rotation. Si au contraire $\lambda \ll 1$, alors l'écoulement, dominé par la rotation, est invariant dans la direction parallèle à l'axe de rotation (cela correspond au théorème de Proudman-Taylor, équation 2.18). Jault (2008) illustre cette invariance axiale avec des calculs axisymétriques. Dans ses calculs, l'écoulement est invariant dans la direction parallèle à l'axe de rotation si $\lambda_l \ll 1$. Pour le noyau, avec B_0 de l'ordre de 2 mT (Christensen et al. 2009) et $l \approx 10^6$ m, $\lambda_l \approx 10^{-4}$. La figure 2.14 montre un exemple de ses résultats. Ces résultats sont complétés par des calculs non-axisymétriques, les résultats de ces calculs, sur la figure 2.15, montrent toujours une invariance axiale pour les faibles nombres de Lehnert.

L'approximation quasi-géostrophique permet de simplifier l'étude de la dynamique rapide, pour laquelle $\lambda \ll 1$, en profitant du fait que l'écoulement est quasiment bidimensionnel pour travailler non plus en trois dimensions mais en deux dimensions.

Cette hypothèse a été beaucoup utilisée pour l'étude de la convection thermique sans champ magnétique (Aubert et al. 2003, Gillet et Jones 2006). Des comparaisons entre simulations numériques et expériences (par exemple Cardin et Olson 1994, Aubert et al. 2001, Gillet et al. 2007) ont justifié son utilisation en dehors de la limite de pente faible dans une sphère, alors que la pente tend vers l'infini vers l'équateur.

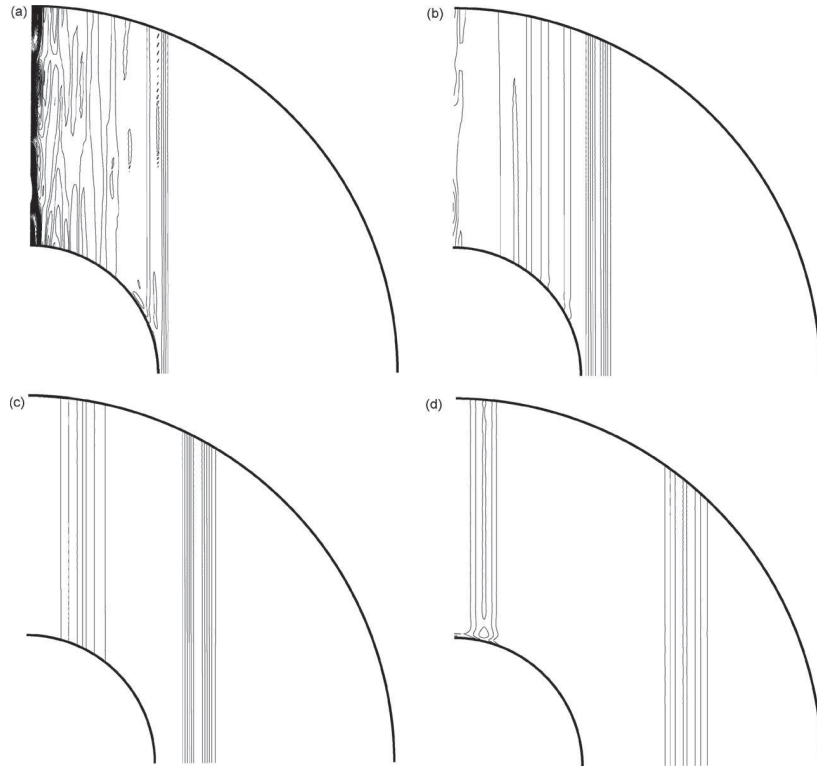


FIG. 2.14 – Illustration d’invariance axiale de l’écoulement à faible nombre de Lehnert λ pour des calculs axisymétriques. Vue méridienne limitée à l’hémisphère nord. Le petit (resp. grand) quart de cercle représente l’interface graine-noyau (resp. frontière noyau-manteau). Contours de vitesse angulaire géostrophique pour $\lambda = 1.72 \times 10^{-4}$ pour (a) $t = 8.6 \times 10^{-2}T_A$, (b) $t = 0.26T_A$, (c) $t = 0.52T_A$ et (d) $t = 1.03T_A$ après une impulsion de rotation de la graine. Figure tirée de Jault (2008).

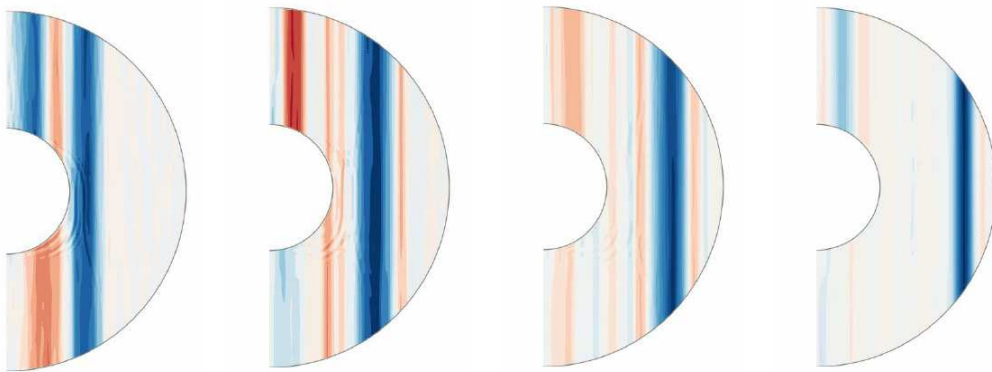


FIG. 2.15 – Illustration d’invariance axiale de l’écoulement à faible nombre de Lehnert λ pour un champ magnétique non-axisymétrique (degré harmonique $m = 1$). Vue méridienne de vitesse angulaire pour $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, le petit (resp. grand) demi-cercle représente l’interface graine-noyau (resp. frontière noyau-manteau). Les vitesses négatives, vers l’Ouest, sont en bleu et positives, vers l’Est, sont en rouge. Les figures de gauche à droite montrent l’évolution avec le temps à partir d’une impulsion de la vitesse de rotation de la graine. Communication de N. Schaeffer.

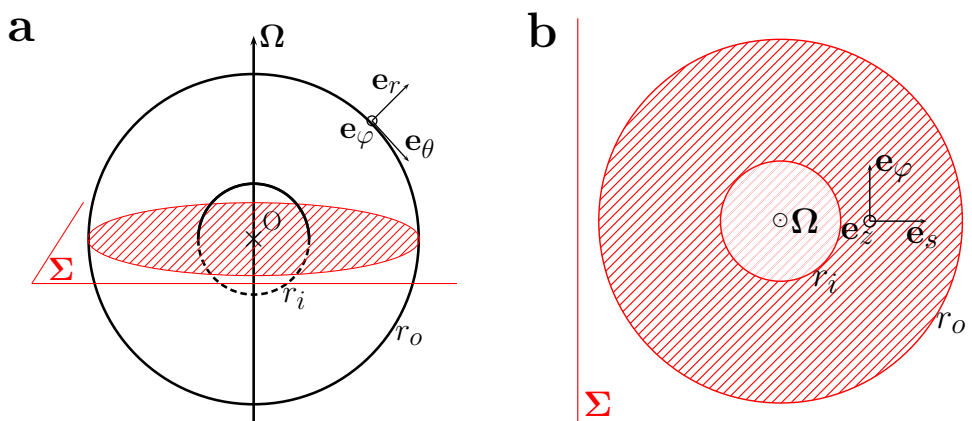


FIG. 2.16 – Géométrie du système et notations du problème; a : Vue de côté, b : Section équatoriale. Σ est le plan équatorial et la sphère externe représente la frontière noyau-manteau, située en $r = r_o$. r_i est le rayon de la graine. Les systèmes de coordonnées sphériques ($O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$) et cylindriques ($O, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$) sont définis respectivement à la frontière noyau-manteau et dans le plan Σ .

Des simulations dynamo récentes montrent également un écoulement invariant selon l'axe de rotation (Kageyama et al. 2008, Sakuraba et Roberts 2009).

Si l'écoulement quasi-géostrophique est invariant selon l'axe de rotation, il n'est toutefois pas limité à un écoulement géostrophique zonal. D'ailleurs des inversions de données géomagnétiques (voir section 3.1) pour l'obtention du champ de vitesse correspondant dans le noyau qui utilisent l'hypothèse quasi-géostrophique montrent que l'écoulement est agéostrophique (non-axisymétrique) comme le montrera la figure 3.1. On a donc bien besoin de forces qui peuvent infléchir la contrainte géostrophique, comme les forces de Lorentz et d'Archimède.

2.3.3 Modèle quasi-géostrophique de la variation séculaire

Cette partie correspond à la section 2 de l'article Canet et al. (2009), joint au manuscrit en annexe F. Les parties 3.4 et 4.2 (expériences jumelles d'assimilation de données) sont également reprises de cet article.

Le noyau terrestre est approximé par une coquille sphérique de rayon interne r_i et de rayon externe r_o . Le fluide, conducteur d'électricité, est de masse volumique ρ et de diffusivité magnétique η . Le système est en rotation autour d'un axe z à la vitesse angulaire Ω . La figure 2.16 schématise la géométrie et synthétise les notations.

Le fluide est défini par son champ magnétique \mathbf{B} , sa vitesse \mathbf{u} et la pression réduite Π , qui inclut la pression et le potentiel centrifuge. Soient r_o l'échelle caractéristique de longueur, B_0 une intensité typique du champ magnétique à l'intérieur du noyau, l'échelle du champ magnétique. Les vitesses sont mises à l'échelle par la vitesse des ondes d'Alfvén

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}, \quad (2.23)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. L'échelle de pression est alors ρV_A^2 , et l'échelle de temps est la période des ondes d'Alfvén : $T_A = r_o/V_A$.

L'évolution du champ dans le noyau est régie par l'équation de l'induction sans dimension

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + S^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.24)$$

Le nombre de Lundquist S est le ratio entre le temps de diffusion magnétique et la période des ondes d'Alfvén (e.g. Roberts 1967),

$$S = \frac{r_o V_A}{\eta}. \quad (2.25)$$

Pour la Terre, S est de l'ordre de 10^4 à 5×10^4 (Jault 2008). Pour les échelles de temps de la variation séculaire, la diffusion devient négligeable par rapport à l'induction du champ magnétique, d'où la valeur importante de S qui conduit à l'approximation du flux gelé.

En supposant que le manteau est un isolant électrique aux échelles de temps de la variation séculaire, le champ magnétique peut être prolongé vers la surface du noyau. Dans le cas d'un fluide parfaitement conducteur (la limite du flux gelé), la composante radiale du champ magnétique B_r est la seule composante magnétique continue à travers la frontière noyau-manteau. À la surface du noyau, B_r interagit avec le fluide selon la composante radiale de l'équation d'induction (2.24), sans diffusion

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u} B_r), \quad (2.26)$$

dans laquelle l'opérateur de divergence horizontal est défini par

$$\nabla_H \cdot \mathbf{v} = (\sin \theta)^{-1} \partial_\theta (\sin \theta v_\theta) + (\sin \theta)^{-1} \partial_\varphi v_\varphi, \quad (2.27)$$

où (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques. C'est cette équation, à la frontière noyau-manteau, qui relie le modèle aux observations. La composante B_r peut être vue comme un traceur passif (un dériveur) puisqu'il interagit avec le champ de vitesse à la surface du noyau mais n'affecte pas la dynamique qui se place dans l'intérieur du noyau (voir plus bas).

Aux échelles de temps de la variation séculaire, les forces de rotation sont bien plus importantes que les forces magnétiques dans le volume du fluide. Dans la partie 2.3.2, on a vu que Jault (2008) propose que les mouvements rapides d'une échelle spatiale l sont invariants par rapport à l'axe de rotation si le nombre de Lehnert, λ_l (voir équation 2.22), est suffisamment petit. Comme $\lambda_{r_o} \approx 10^{-4}$ pour le noyau de la Terre, on suppose que l'écoulement est géostrophique à l'ordre principal. Les coordonnées cylindriques, (s, φ, z) , sont donc adaptées à l'étude des mouvements résultants organisés en colonnes dans le plan équatorial Σ (hachuré dans la figure 2.16).

L'équilibre principal est un équilibre entre les forces de Coriolis et le gradient de pression

$$2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^0 = -\nabla \Pi^0, \quad (2.28)$$

dans lequel l'exposant 0 définit l'ordre principal. On retrouve le théorème de Proudman-Taylor, c'est-à-dire l'invariance selon z de l'écoulement (voir équation 2.18), si on prend le rotationnel de l'équation (2.28).

Dans une sphère, \mathbf{u}^0 ne satisfait pas la condition de non-pénétration à la frontière noyau-manteau sauf s'il consiste en un écoulement organisé en cylindres autour de l'axe de rotation. On doit donc ajouter la contribution de la force de Coriolis au premier ordre en λ_{r_o} , ce qui conduit à

$$\mathbf{D}_t \mathbf{u}^0 + 2\lambda_{r_o}^{-1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^1 = -\nabla \Pi^1 + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2.29)$$

où \mathbf{D}_t est la dérivée matérielle $\mathbf{D}_t = \partial_t + (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla)$. Au premier ordre, les forces magnétiques sont un candidat naturel pour entraîner des écarts à la géostrophie puisque l'énergie magnétique est plus grande que l'énergie cinétique dans le noyau terrestre. Les forces d'Archimède sont un autre candidat, que nous pourrions prendre en compte mais on les laisse de côté dans un premier temps pour des raisons de simplicité. Les forces visqueuses sont négligées. L'équation (2.29) montre que la force de Coriolis est mise à l'échelle par l'inverse du nombre de Lehnert λ_{r_o} .

La condition de non-pénétration à la frontière noyau-manteau : $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$ en $z = \pm h$, où $h = \sqrt{r_o^2 - s^2}$ est la demi-hauteur de colonne au rayon s , implique une dépendance en z de \mathbf{u}^1 que nous choisirons linéaire :

$$u_z^1(s > r_i, \varphi, z) = z\beta u_s^0(s, \varphi). \quad (2.30)$$

À la frontière noyau-manteau, la pente de la surface dépend de s et vaut dh/ds , et on définit

$$\beta(s) = h^{-1} dh/ds. \quad (2.31)$$

La notation β a été choisie en référence à l'approximation de plan β . Cette approximation -avec β uniforme- est classique en dynamique des fluides géophysiques (e.g. Vallis 2006, section 2.3). On étudie généralement les ondes de Rossby planétaires en supposant que le paramètre de Coriolis ($f_0 = 2\Omega \cos \theta$) varie linéairement avec la latitude ; β est le gradient du paramètre de Coriolis compté positivement vers le Nord.

D'après notre approche quasi-géostrophique, l'écoulement dans le noyau est presque à deux-dimensions, il est donc naturel de prendre la moyenne verticale de l'équation de Navier-Stokes (2.29).

La moyenne verticale $\langle \cdot \rangle$ d'une quantité X est définie par

$$\langle X \rangle (s, \varphi) = \frac{1}{2h(s)} \int_{-h}^h X(s, \varphi, z) dz. \quad (2.32)$$

Dans notre domaine d'étude (une enveloppe de fluide par comparaison à une sphère pleine), la moyenne longitudinale de l'équation de vorticit   n'est pas   quivalente    la moyenne longitudinale de l'  quation de Navier-Stokes (Plaut 2003). Par cons  quent, nous d  crivons l'  volution de la vitesse non-zonale \mathbf{u}^{NZ} avec l'  quation de vorticit   axiale alors que l'  quation de conservation de la quantit   de mouvement moyenn  e en φ nous fournit directement l'  volution temporelle de la vitesse zonale $\mathbf{u}^Z = u_\varphi^Z \mathbf{e}_\varphi$. Dans la suite de la description du mod  le, l'exposant Z repr  sente les quantit  s zonales (   ne pas confondre avec z qui fait r  f  rence    la direction de la rotation d'ensemble).

Le champ de vitesse non-zonal (NZ) \mathbf{u}^{NZ} peut s'écrire comme le rotationnel d'une fonction de courant Ψ non-zonale et indépendante de z ,

$$\mathbf{u}^{NZ}(s, \varphi) = \nabla \times \Psi(s, \varphi) \mathbf{e}_z. \quad (2.33)$$

Le champ de vorticité non-zonal ζ est défini par $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}^{NZ}$, et sa composante verticale s'écrit

$$\zeta_z(s, \varphi) = -\nabla_E^2 \Psi(s, \varphi), \quad (2.34)$$

où l'opérateur Laplacien équatorial est défini par

$$\nabla_E^2 = s^{-1} \partial_s (s \partial_s) + s^{-2} \partial_\varphi^2. \quad (2.35)$$

Si on prend le rotationnel de la partie non-zonale de l'équation de Navier-Stokes (2.29) moyennée verticalement, on trouve que la composante verticale de l'équation de vorticité est identique à l'équation (17) de Pais et Jault (2008), dont le membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned} D_t \zeta_z - 2\lambda_{r_o}^{-1} \beta s^{-1} \partial_\varphi \Psi &= (s^{-1} \partial_s \partial_\varphi + s^{-2} \partial_\varphi) (\langle B_\varphi^2 \rangle - \langle B_s^2 \rangle) \\ &+ (3s^{-1} \partial_s - s^{-2} \partial_\varphi^2 + \partial_s^2) \langle B_s B_\varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2.36)$$

On néglige les termes de surface magnétique, qui apparaissent lorsqu'on prend la moyenne verticale de la force de Lorentz, parce qu'on suppose que le champ magnétique à la surface du noyau est de bien plus faible amplitude que dans le volume du noyau. La condition de non-pénétration en $s = r_o$ et au cylindre tangent $s = r_i$, impose $\Psi = 0$ aux deux limites.

L'évolution temporelle de la vitesse zonale $u_\varphi^Z(s) = s\omega_g(s)$ est régie par

$$D_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \langle B_s B_\varphi \rangle). \quad (2.37)$$

Les deux équations du mouvement (2.36) et (2.37) contiennent des quantités magnétiques quadratiques et moyennées verticalement $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ et $\langle B_s B_\varphi \rangle$, dont l'évolution temporelle est dérivée de la version sans diffusion de l'équation d'induction (2.24)

$$\partial_t \langle B_s^2 \rangle = -[\mathbf{u}^0 \cdot \nabla] \langle B_s^2 \rangle + 2 \langle B_s^2 \rangle \partial_s u_s^0 + 2s^{-1} \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_\varphi u_s^0, \quad (2.38)$$

$$\partial_t \langle B_\varphi^2 \rangle = -[\mathbf{u}^0 \cdot \nabla] \langle B_\varphi^2 \rangle - 2 \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_s u_s^0 + 2s \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi^0), \quad (2.39)$$

$$\partial_t \langle B_s B_\varphi \rangle = -[\mathbf{u}^0 \cdot \nabla] \langle B_s B_\varphi \rangle + s \langle B_s^2 \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi^0) + s^{-1} \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_\varphi u_s^0 \quad (2.40)$$

dans lesquelles on a utilisé la propriété solénoïdale de \mathbf{B} et \mathbf{u} ($\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$).

La moyenne verticale place la magnétohydrodynamique dans le plan équatorial (Figure 2.16b). L'écoulement est ensuite projeté à la frontière noyau-manteau, où il interagit avec le champ magnétique radial B_r via l'équation (2.26). L'encadré 2 synthétise l'ensemble du modèle.

Un modèle alternatif est proposé en annexe B.1. Dans cette variante, le champ de vitesse qui entre dans les équations (2.38)   (2.40) possède une composante verticale donnée par l'équation (2.30) et sa composante azimutale est modifiée pour assurer la conservation de la masse. Une discussion sur un comportement empirique des quantités magnétiques quadratiques se trouve également en annexe B.2.

Le système d'équation complet correspond aux équations (2.36) à (2.40) dans le volume du noyau. Il est complété par l'équation (2.26) à la frontière noyau-manteau qui connecte la dynamique avec les observations. L'ensemble du système peut se résumer à :

Dans le volume :

$$\begin{aligned}
D_t(-\nabla_E^2 \Psi) - 2\lambda_{r_o}^{-1} \beta s^{-1} \partial_\varphi \Psi &= f(\langle B_s^2 \rangle, \langle B_\varphi^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle), \\
D_t \omega_g &= (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \langle B_s B_\varphi \rangle), \\
\partial_t \langle B_s^2 \rangle &= F_1(\Psi, \omega_g, \langle B_s^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle), \\
\partial_t \langle B_\varphi^2 \rangle &= F_2(\Psi, \omega_g, \langle B_\varphi^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle), \\
\partial_t \langle B_s B_\varphi \rangle &= F_3(\Psi, \omega_g, \langle B_s^2 \rangle, \langle B_\varphi^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle),
\end{aligned}$$

À la frontière noyau-manteau :

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}^{NZ} B_r) - \nabla_H \cdot (\mathbf{u}^Z B_r).$$

Dans ces équations, Ψ est la fonction de courant non-zonale, ω_g est la vitesse angulaire zonale et $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ et $\langle B_s B_\varphi \rangle$ sont des quantités magnétiques quadratiques et moyennées verticalement. Dans l'équation d'induction radiale à la frontière noyau-manteau, \mathbf{u}^{NZ} et \mathbf{u}^Z désignent les vitesses non-zonale et zonale respectivement.

Ce système servira dans la suite du manuscrit à décrire la façon dont les sous-parties de ce modèle, utilisées dans les sections 3.4 et 4.2, sont obtenues à partir du modèle.

Encadré 2 – Résumé synthétique des équations du modèle quasi-géostrophique.

2.3.4 Fonction flux magnétique

J'évoque dans cette partie une alternative pour décrire le problème magnétique analysé dans le paragraphe précédent. En effet, les interactions entre les forces magnétiques et les forces de rotation dans un modèle à deux dimensions ont été étudiées dans d'autres contextes. Tobias et al. (2007) ont étudié récemment un modèle numérique avec un plan β local pour montrer l'impact d'un champ magnétique de grande échelle et de faible intensité sur la dynamique de la tachocline solaire. Au lieu d'utiliser les produits quadratiques du champ magnétique, $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_s B_\varphi \rangle$ et $\langle B_\varphi^2 \rangle$, ils écrivent le champ magnétique comme une fonction d'un potentiel scalaire A :

$$\mathbf{B}(s, \varphi) = \nabla \times [A(s, \varphi) \mathbf{e}_z]. \quad (2.41)$$

Dans ce cas, le terme magnétique de l'équation de vorticité axiale s'écrit

$$D_t \zeta_z - 2\lambda_{r_o}^{-1} \beta s^{-1} \partial_\varphi \Psi = [\nabla \times (A \mathbf{e}_z)] \cdot \nabla [\nabla_E^2 A] \quad (2.42)$$

(à comparer avec le membre de droite de l'équation (2.36)), et l'équation de l'induction devient

$$\partial_t A = -\mathbf{u} \cdot \nabla A + S^{-1} \nabla_E^2 A. \quad (2.43)$$

La description (2.41) est restrictive puisqu'elle suppose l'invariance axiale du champ magnétique. En revanche, elle rend possible l'inclusion de la diffusion magnétique, dont l'effet ne peut pas être pris rigoureusement en compte dans les équations (2.38) à (2.40). Le modèle donné par les équations (2.41) à (2.43) est attractif puisqu'il permet malgré tout de décrire une grande quantité de situations physiques. Par exemple, Diamond et al. (2005) mentionnent la transition de la turbulence magnétohydrodynamique à deux-dimensions aux petites échelles spatiales, à la turbulence contrôlée par des ondes de Rossby aux plus grandes échelles. Les solutions de (2.41) et (2.43) (sans le terme de diffusion) sont également des solutions permises par les équations (2.36) à (2.40).

Une telle hypothèse ne permet pas de calculer un champ dipolaire à l'intérieur du noyau car il n'est pas symétrique par rapport à l'équateur. Ceci est pourtant en accord avec notre approche de considérer le champ magnétique radial, possiblement dipolaire, comme un traceur modifié par l'écoulement à la frontière noyau-manteau. Tandis que le champ magnétique dans le volume du noyau, d'amplitude plus importante que B_r , est découplé de B_r . Les conditions aux limites magnétiques sont alors $A = 0$ en $s = r_i$ et, en $s = r_o$, $A^{NZ} = 0$ et $\partial_s A^Z = 0$.

L'étude de ce modèle, comme étape préliminaire dans la construction du modèle complet de la section 2.3.3 fait partie de mes projets en cours (voir l'annexe C).

Problème inverse

3

3.1 Inversion des données géomagnétiques

Dans cette partie, je présente le problème inverse qui consiste à inverser des données géomagnétiques (ou des modèles de champ magnétique à la frontière noyau-manteau) pour aboutir à des connaissances sur la dynamique du noyau capable de réorganiser le champ observé. Le procédé passe généralement par deux inversions, la première des données vers des modèles de champ magnétique (évoquée section 2.1.3) et la seconde des modèles vers le champ de vitesse, objet central de ce paragraphe.

Les interactions entre le champ magnétique et le champ de vitesse sont décrites par l'équation de l'induction radiale à la surface du noyau

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h B_r) + S^{-1} r^{-1} \nabla^2 (r B_r). \quad (3.1)$$

On inverse généralement cette équation pour retrouver le champ de vitesse horizontal \mathbf{u}_h associé aux observations $\partial_t B_r$ en négligeant la diffusion. Roberts et Scott (1965) ont suggéré cette approximation, dite du flux gelé, pour réaliser ces inversions sur la base des échelles spatio-temporelles considérées. Cette hypothèse se justifie sur des périodes de temps assez courtes par rapport au temps de diffusion magnétique et pour des mouvements d'échelles spatiales relativement grandes par rapport aux échelles spatiales sur lesquelles agit la diffusion (la diffusion magnétique agit sur des structures d'une vingtaine de km pour des périodes d'études de 10 ans, voir également le tableau 2.2). Dans la section 2.3.3, on a estimé le nombre de Lundquist S de l'ordre de 10^4 pour la Terre. Les variations du champ magnétique sont alors dues à l'advection du champ par les mouvements de fluide. On valide cette hypothèse en étudiant le comportement du champ magnétique. En effet, cette approximation a des conséquences sur le champ magnétique observé, indépendamment du champ de vitesse, et les auteurs étudient alors, à partir de modèles de champ, la validité de l'approximation. Par exemple, l'hypothèse rend impossible la création ou la suppression de lignes $B_r = 0$ (null flux curves en anglais) à la frontière noyau-manteau. Jackson et Finlay (2007) font une revue récente des conséquences de l'approximation du flux gelé, de ses inconvénients et des situations dans lesquelles elle ne peut pas être validée.

L'équation d'induction radiale, à la frontière noyau-manteau, se résume dans l'approximation du flux gelé à

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h B_r). \quad (3.2)$$

Le problème inverse correspond à retrouver le champ de vitesse $\mathbf{x} = \mathbf{u}_h$ tangent à la frontière noyau-manteau en accord avec un modèle de champ principal ($\mathbf{m} = B_r$) et un modèle de variation séculaire $\mathbf{y} = \partial_t B_r$. En parallèle, on cherche des relations entre cette vitesse à la frontière noyau-manteau et des interprétations en termes de vitesses dans le volume du noyau.

Discretisée, l'équation (3.2) correspond au problème direct instantané

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A} [\mathbf{m}_i] \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.3)$$

l'indice i correspond à une époque donnée, \mathbf{A} est une matrice qui dépend du modèle de champ principal \mathbf{m} , et \mathbf{y} sont les données à inverser avec leur erreur associée $\boldsymbol{\epsilon}$. L'ensemble des vecteurs peut se décomposer sur la base des harmoniques sphériques et l'exercice est d'inverser des coefficients de Gauss (ou plus précisément dans ce cas, leur dérivée temporelle \dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m , voir la section 2.1.3) et d'obtenir des coefficients harmoniques pour la vitesse. La décomposition spectrale du champ de vitesse est obtenu en utilisant la description de Helmholtz du champ de vitesse tangentiel, qui fait intervenir deux scalaires toroïdal T et poloïdal S

$$\mathbf{u} = \nabla_H S - \mathbf{e}_r \times (\nabla_H T), \quad (3.4)$$

où $\nabla_H = \nabla - \partial_r$ est le gradient tangent à la surface du noyau. Ces deux scalaires se décomposent sur la base des harmoniques sphériques, ce qui fait intervenir les coefficients poloïdaux ($s_n^{m,c}, s_n^{m,s}$) et toroïdaux ($t_n^{m,c}, t_n^{m,s}$). Les notations $s_n^{m,c}, s_n^{m,s}$ pour le scalaire poloïdal S ne doivent pas être confondues avec les coefficients de Gauss pour le champ magnétique externe (voir encadré 1), dans ce mémoire elles ne sont présentes que dans cette équation.

Pourtant, malgré l'hypothèse de flux gelé, déduire le champ de vitesse à la surface du noyau qui est à l'origine d'observations du champ magnétique est un problème inverse non unique (Backus 1968). On ajoute alors des hypothèses supplémentaires sur le type d'écoulement, par exemple un écoulement stationnaire Voorhies et Backus (1985), Waddington et al. (1995) (Waddington et al. (1995) ont surtout montré qu'un écoulement stationnaire ne suffisait pas à expliquer l'ensemble de la variation séculaire), purement toroïdal, tangentiellement géostrophique (Eymon et Hulot 2005, Pais et al. 2004) (Pais et al. (2004) ont plutôt implémenté cette contrainte en pénalisant les composantes non-géostrophiques), ou des écoulements ayant une hélicité donnée (Amit et Olson 2004). Holme (2007) décrit ce problème inverse et fait une revue des hypothèses qui ont été faites sur le type d'écoulement. Récemment, Pais et Jault (2008) et Gillet et al. (2009b) ont utilisé l'approximation quasi-géostrophique (voir section 2.3.3). Cette dernière approximation apporte une information sur l'écoulement en volume, et non plus uniquement en surface (voir également plus bas). De telles contraintes peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{G} \mathbf{w}_i, \quad (3.5)$$

ce qui transporte le problème de recherche de \mathbf{x} en recherche de \mathbf{w} . \mathbf{w} représente l'écoulement dans une base qui satisfait automatiquement une des contraintes décrites ci-dessus.

Enfin, pour des raisons pratiques et à cause du nombre fini de données à inverser, on inverse seulement pour les grandes échelles spatiales du champ de vitesse

et on le régularise. En conséquence, on tronque les modèles de variation séculaire au degré harmonique $n_{\mathbf{y}} = 14$ (cette valeur correspond au moment où le champ du noyau est masqué par le champ crustal), le champ de vitesse au degré $n_{\mathbf{x}}$ (souvent 26, suffisamment grand pour tenir compte de la variation séculaire de degré $n \leq n_{\mathbf{y}}$ générée par les interactions entre \mathbf{m} et \mathbf{x}) et le modèle de champ principal au degré $n_{\mathbf{m}}$. Les régularisations associées consistent à pénaliser la complexité du champ de vitesse plus ou moins fortement selon que les régularisations sont proportionnelles à n^1, n^3 ou n^5 , où n est le degré harmonique. En faisant cela, certes on simplifie le problème mais on cherche aussi à expliquer toute la variation séculaire par l'interaction d'un champ de grande échelle avec un écoulement de grande échelle. On verra plus bas comment tenir compte du fait que les petites échelles du champ magnétique, masquées par le champ crustal, interagissent avec le champ de vitesse pour contribuer aussi à la variation séculaire de grande échelle.

La solution du problème est alors obtenue en minimisant la fonction objectif

$$J(\mathbf{w}) = (\mathbf{y} - \mathbf{A}[\mathbf{m}]\mathbf{G}\mathbf{w})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}[\mathbf{m}]\mathbf{G}\mathbf{w}) + \xi \mathbf{w}^T \mathbf{W}\mathbf{w}, \quad (3.6)$$

où le premier terme est l'écart entre les prédictions et les observations, dans lequel \mathbf{R} est la matrice de covariance des erreurs d'observations et l'exposant T spécifie la transposée. Le second terme correspond à la régularisation d'amplitude ξ , \mathbf{W} étant la matrice de régularisation. Ici le problème est linéaire et la solution est

$$\mathbf{w} = [\mathbf{G}^T \mathbf{A}_{\mathbf{m}}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_{\mathbf{m}} \mathbf{G} + \xi \mathbf{W}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{A}_{\mathbf{m}}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}, \quad (3.7)$$

dans laquelle j'ai condensé l'écriture $\mathbf{A}(\mathbf{m})$ par $\mathbf{A}_{\mathbf{m}}$.

Au départ, la motivation de ces inversions fut de connaître la vitesse de l'écoulement capable de provoquer la dérive vers l'Ouest (Bullard et al. 1950). Les structures de l'écoulement à la frontière noyau-manteau généralement retrouvées sont un écoulement vers l'Ouest à l'équateur, surtout sous l'océan Atlantique, et une vitesse rms de 15 km/an, c'est-à-dire 0,5 mm/s.

Ces inversions évoluent depuis peu dans des directions complémentaires (je les présente séparément mais les auteurs font généralement tout en même temps). Une première évolution est de s'affranchir de la première inversion (inversion des données réelles pour l'obtention de coefficients de Gauss), pour retrouver directement l'écoulement de surface à partir des données réelles de type $X(t), Y(t), Z(t)$ moyennées mensuellement. C'est ce que font Waddington et al. (1995) avec un écoulement stationnaire, en montrant toutefois que cette hypothèse ne suffit pas à expliquer l'ensemble des observations. Beggan et Whaler (2008) inversent des données d'observatoires car la séparation du champ interne est plus facile que pour les données satellites où une partie du champ externe est considérée comme interne puisque sous l'orbite du satellite. Même si on n'utilise pas de modèle de champ, il faut bien paramétrer les autres contributions des mesures du champ magnétique. Un des avantages, pour l'étude de la variation séculaire, est de s'affranchir d'une hypothèse supplémentaire sur la paramétrisation temporelle du champ magnétique. D'autre part, cela permet de mieux identifier les incertitudes sur les données (Beggan et Whaler 2008).

Dans le même ordre d'idée, on recherche à faire des inversions simultanées pour retrouver le champ magnétique et le champ de vitesse à la surface du noyau à

partir d'observations (Lesur et al. 2009, Fanjat 2009). On garde donc les avantages évoqués juste au dessus des inversions directes des données magnétiques, et on a en sortie un modèle du champ magnétique à la frontière noyau manteau qui est un compromis entre les observations d'une part, et une contrainte sur la source du champ magnétique d'autre part. Du point de vue du modèle de champ magnétique, la régularisation ne prend plus en compte la seule pénalisation de normes mais également la physique du noyau. On sépare alors l'équation (3.3) en deux équations

$$\mathbf{y}_i = H_i[\mathbf{m}_i] + \epsilon, \quad (3.8)$$

$$\partial_t \mathbf{m}_i = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h \mathbf{m}_i) = \mathbf{A}[\mathbf{m}_i] + \epsilon_M, \quad (3.9)$$

la première équation relie les coefficients de Gauss d'un modèle de champ magnétique \mathbf{m} aux observations réelles \mathbf{y} , la seconde est l'équation d'induction sans diffusion (3.3), avec l'erreur modèle associée ϵ_M . En conséquence, la fonction objectif (3.6) est réécrite en séparant le premier terme en un terme d'écart du modèle de champ prédit et des observations réelles et un terme correspondant à la minimisation de l'équation de l'induction radiale (3.9)

$$J_{H,M} = [\mathbf{y} - H(\mathbf{m})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y} - H(\mathbf{m})] + [\partial_t \mathbf{m} - \mathbf{A}(\mathbf{m})]^T \mathbf{Q}^{-1} [\partial_t \mathbf{m} - \mathbf{A}(\mathbf{m})], \quad (3.10)$$

dans laquelle \mathbf{Q} est la matrice de covariance des erreurs modèle $\epsilon_{\mathbf{m}}$. Le problème de minimisation devient non-linéaire par les deux équations (les données d'intensité H, F sont reliées de façon non-linéaire au vrai champ magnétique) et on le résout itérativement à l'aide du Hessien de J .

Une seconde direction que prend le problème d'inversion est dans la recherche des hypothèses concernant le type d'écoulement, et l'incorporation de critères qui permettent d'évoquer la dynamique (volumique) du système. En effet, on a fait jusqu'ici une hypothèse sur l'écoulement de surface, mais plusieurs types d'écoulement volumique peuvent avoir la même trace en surface. Par exemple, l'hypothèse quasi-géostrophique (détaillée dans la section 2.3.3) est plus restrictive que l'écoulement tangentiellement géostrophique qu'elle impose en surface (Pais et Jault 2008). En effet, l'hypothèse quasi-géostrophique impose en plus une symétrie par rapport à l'équateur à l'extérieur du cylindre tangent et une interdiction au fluide de traverser le cylindre tangent. La vitesse du fluide est imposée nulle au cylindre tangent dans le travail de Pais et Jault (2008). La fonction objectif contient alors un terme de plus qui tient compte de ces deux contraintes supplémentaires. On peut dès lors représenter le champ de vitesse (ou plus précisément la fonction courant) dans le plan équatorial, plutôt qu'à la surface dans chacun des deux hémisphères, et on ajoute ainsi une indication sur l'écoulement en volume. Pais et Jault (2008) et Gillet et al. (2009b) utilisent cette contrainte et retrouvent comme motif principal un grand jet agéostrophique qui encercle le cylindre tangent et porte la majorité du moment cinétique de l'écoulement.

La figure 3.1 montre la fonction courant de ce jet dans une vue du plan équatorial. Le jet n'est pas symétrique par rapport à l'axe de rotation ce qui impose deux régions de forts gradients radiaux, preuve d'agéostrophie (la géostrophie impose l'absence de gradient radiaux). Ceci leur permet de calculer une estimation du

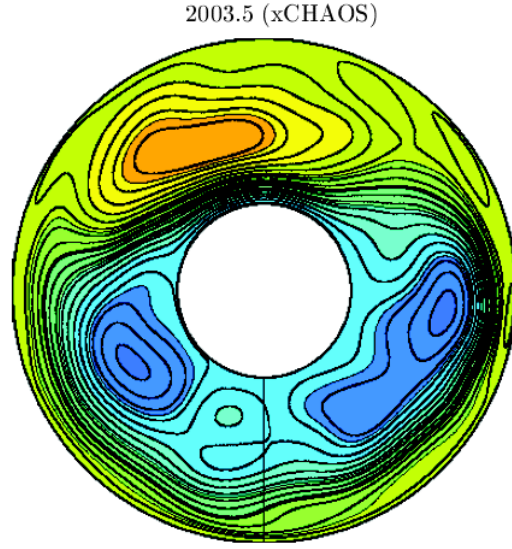


FIG. 3.1 – Contours de la fonction courant Ψ , dans le plan équatorial du noyau, obtenue pour l'année 2003.5 par inversion de données du modèle xCHAOS avec l'hypothèse quasi-géostrophique. Les régions bleues (res. jaunes) correspondent à une circulation anticyclonique (res. cyclonique). La fine ligne noire correspond au méridien de Greenwich. L'échelle de couleur varie entre ± 8 (la vitesse est mise sans dimension par V_A et les longueurs par R_o , la fonction courant est donc mise à l'échelle par $r_o V_A$) et les contours sont tracés tous les 0, 4. Figure tirée de Gillet et al. (2009b).

champ magnétique à l'intérieur du noyau de 3 mT en supposant que l'agéostrophie est due au champ magnétique. Ils trouvent en plus des tourbillons de petite échelle spatiale dont la variabilité en terme d'amplitude et de position semble plus importante. Ils cherchent à les expliquer en réalisant que les petites échelles spatiales du champ magnétique, masquées par le champ crustal, peuvent interagir avec le champ de vitesse, et produire de la variation séculaire de grande échelle.

Dans le cadre de la modélisation de ces petites échelles du champ magnétique, Gillet et al. (2009b) écrivent le champ magnétique comme la somme d'un champ de grande échelle \overline{B}_r et d'un champ de petite échelle \tilde{B}_r tel que $B_r = \overline{B}_r + \tilde{B}_r$. L'équation d'induction (3.2) s'écrit alors

$$\partial_t \overline{B}_r + \partial_t \tilde{B}_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h \overline{B}_r) - \nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h \tilde{B}_r). \quad (3.11)$$

On observe uniquement les grandes échelles de la variation séculaire

$$\partial_t \overline{B}_r = -\overline{\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h \overline{B}_r)} - \overline{\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h \tilde{B}_r)}. \quad (3.12)$$

Dans les inversions classiques, on ne considère que le premier terme du membre de droite. Le second correspond à l'interaction des petites échelles du champ magnétique avec le champ de vitesse, pour former une variation séculaire de grande échelle.

Hulot et al. (1992) ont cherché à évaluer l'erreur commise par ces troncatures en estimant les petites échelles du champ magnétique et du champ de vitesse. Ils montrent que la prise en compte des petites échelles du champ magnétique ne

modifie pas trop les grandes échelles de l'écoulement (degrés et ordres inférieurs à 5) mais bien plus les degrés supérieurs à 8. En testant les procédés d'inversion avec des données synthétiques issues d'un code de géodynamo, Rau et al. (2000) et Amit et al. (2007) ont étudié les conséquences d'une résolution spatiale limitée. Ils trouvent en particulier que l'écoulement inversé avec des données synthétiques tronquées à l'ordre 14 consiste en un courant équatorial vers l'Ouest de plus forte intensité que pour les solutions d'inversions à résolution complète. Il est donc important d'évaluer les petites échelles pour le champ magnétique. Eymin et Hulot (2005), Pais et Jault (2008) et Gillet et al. (2009b) utilisent les propriétés du spectre du champ magnétique, pour un modèle de champ magnétique donné. Ils cherchent à accorder la partie non-dipolaire du spectre avec des lois statistiques (loi exponentielle, loi de puissance) jusqu'au degré 13. Puis ils extrapolent pour le spectre des petites échelles masquées par le champ crustal. Eymin et Hulot (2005) et Pais et Jault (2008) montrent ainsi que le bilan des erreurs est dominé, pour les bas degrés harmoniques, par la variation séculaire créée par l'écoulement et le champ de petite échelle \tilde{B}_r . Pais et Jault (2008) incluent alors ces interactions dans leur erreur modèle par un procédé itératif. L'estimation des petites échelles du champ repose sur la statistique du spectre du ratio du champ principal et de la variation séculaire. C'est dans ce cadre que les méthodes d'ensemble prennent toute leur importance (par exemple Evensen 1994, Kalnay 2003). Gillet et al. (2009b) utilisent une méthode d'ensemble afin de tenir compte de la variabilité temporelle de \tilde{B}_r . Cette méthode d'ensemble permet d'obtenir la matrice de covariance des coefficients calculés du champ de vitesse. Cette information s'avisera précieuse quand j'utiliserai ces coefficients comme « observations » dans le cadre d'un autre problème inverse décrit dans la partie 4.4.2.

La prise en compte des petites échelles devient également plus cruciale maintenant que les observations sont de très bonne qualité et décrivent mieux que jamais les petites échelles du champ magnétique et de sa variation séculaire.

La troisième direction que prend le problème inverse consiste à paramétrer temporellement le champ de vitesse afin d'envisager des inversions dépendant du temps. Dans ce cadre, la question était notamment de savoir si ces inversions conduisaient à des écoulements capables de rendre compte des secousses géomagnétiques. Gillet et al. (2009b) (voir également Jackson (1997)) suivent cette approche et posent

$$\mathbf{w}(t) = \sum_p \Phi_p(t) \mathbf{w}^p, \quad (3.13)$$

dans leur description, $\Phi_p(t)$ sont des B-spline d'ordre 4. Ces fonctions d'interpolation sont définies sur une fenêtre temporelle et par un espace entre les nœuds de la fonction (voir par exemple, De Boor 2001, Jackson et Finlay 2007, section 5.05.3.1.3). Ces fonctions ont une bonne réactivité face au système puisqu'elles permettent de rendre compte des secousses magnétiques faisant parties des données à inverser.

L'approche dépendant du temps couplée aux inversions conjointes des données de champ magnétique pour l'obtention d'un modèle de champ et d'un modèle de champ de vitesse peut être poussée plus loin.

Tout comme l'équation de l'induction radiale à la frontière noyau-manteau est déjà prise en compte dans le deuxième terme du membre de droite de la fonction

coût (équation 3.10), on pourrait envisager d'inclure les équations de l'ensemble d'un modèle dynamique tel que

$$\partial_t \mathbf{x}_i = M_i(\mathbf{x}_i) + \epsilon_M. \quad (3.14)$$

La fonction coût s'écrirait alors de façon plus générale

$$J_{H,M} = [\mathbf{y} - H(\mathbf{m})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y} - H(\mathbf{m})] + [\partial_t \mathbf{x}_i - M_i(\mathbf{x}_i)]^T \mathbf{Q}^{-1} [\partial_t \mathbf{x}_i - M_i(\mathbf{x}_i)] \quad (3.15)$$

Cette approche ne prend pas en compte la dynamique et le temps doit toujours être paramétré. Le choix d'une paramétrisation a des conséquences sur l'écoulement retrouvé et on peut chercher à s'en dispenser.

L'objectif de cette thèse n'est plus de considérer une paramétrisation temporelle du champ de vitesse mais dynamique, en incluant un modèle de dynamique du noyau au procédé d'inversion. L'inclusion de la dynamique dans l'inversion (assimilation de données), à la place d'une paramétrisation, allège le problème. Puisque la trajectoire du système ne dépend que de sa condition initiale, la minimisation de la fonction coût porte sur la recherche de la meilleure condition initiale uniquement. Les petites échelles sont incluses dans l'approche dynamique puisqu'elles sont générées par les non-linéarités du modèle. Les observations peuvent être des coefficients de Gauss (comme définis dans l'équation 2.3) ou des observations magnétiques (X, Y, Z, I, D, H, F).

3.2 Objectifs et méthodes d'assimilation de données

Assimilation de données

La proximité physique entre le noyau et les enveloppes fluides externes nous amène naturellement à utiliser des méthodologies mathématiques identiques. En dynamique atmosphérique, la motivation était de décrire de façon optimale la situation à un instant donné pour s'en servir comme condition initiale dans un modèle de dynamique atmosphérique dans l'objectif de prévoir l'état futur de l'atmosphère (par exemple, Kalnay 2003). Dans ce cadre, la qualité des prévisions s'est améliorée avec l'ajout d'un modèle physique aux interpolations des observations. La prévision de l'état futur du système se perfectionne au fur et à mesure des corrections sur l'état initial. Par ailleurs, à partir du moment où on utilise un modèle d'évolution du système, d'autres objectifs sont rendus possibles. La ré-analyse consiste en l'assimilation de données passées : le but est d'améliorer la connaissance de l'état du système, à un temps donné ou sur une fenêtre temporelle. L'assimilation rend possible la vérification d'hypothèses physiques et l'évaluation de leur pouvoir prédictif. L'assimilation dépend de la qualité des modèles physiques mais aussi de la qualité et de la nature des observations ; ainsi certaines missions spatiales, dans le cadre de l'étude de l'atmosphère, peuvent être conçues pour répondre à un besoin de l'assimilation, par exemple la mesure d'une nouvelle quantité pour mieux contraindre le système.

Méthodes d'assimilation de données

Les méthodes d'assimilation peuvent être regardées selon leurs objectifs. Les méthodes de lissage estiment l'évolution d'un système sur un temps passé, en utilisant

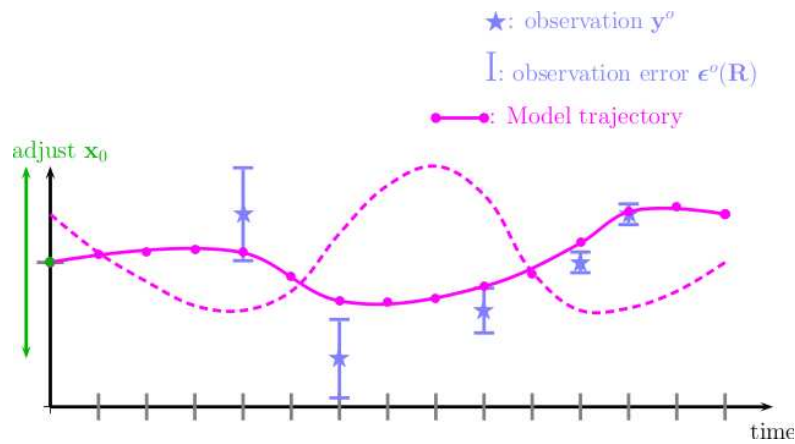


FIG. 3.2 – Schéma pour l'assimilation variationnelle de données. Les observations sont représentées par des étoiles avec des barres d'erreur. La trajectoire du modèle est représentée en fonction du temps pendant la période d'assimilation. Les tirets schématisent la trajectoire de l'estimation initiale.

des mesures sur toute une fenêtre temporelle. Elles sont donc appropriées pour l'analyse historique d'observations passées, les tests d'hypothèses physiques et les études de sensibilité du système. La prévision d'observation futures est également possible.

La figure 3.2 schématise l'idée principale de l'assimilation variationnelle. On considère un jeu d'observations sur une période d'assimilation T (étoiles + barres d'erreurs). Un modèle dynamique fournit une trajectoire sur cette période qui n'est fonction que de sa condition initiale \mathbf{x}_0 . Pour cette raison, l'algorithme ne cherche que la condition initiale \mathbf{x}_0 à l'origine de la trajectoire qui minimise l'écart quadratique entre prédictions et observations.

Les méthodes de filtrage reposent sur la détermination de l'état optimal présent (ou futur) au moyen d'observations passées. Elles sont donc particulièrement adaptées à l'assimilation de données en temps réel. La trajectoire d'un système est corrigée au vu des observations passées et présentes. En effet, les méthodes de filtrage s'appuient sur l'étude statistique des états possibles du système afin de déterminer celui qui sera le plus probable au vu des observations.

La figure 3.3 schématise la méthodologie des méthodes de filtrage. Comme précédemment, on considère un jeu d'observations sur une période d'assimilation T (étoiles + barres d'erreurs) et on dispose d'un modèle dynamique. On part d'une condition initiale et on intègre le modèle. Comme ce modèle est imparfait, l'erreur de prédiction augmente au fur et à mesure de l'intégration. Lorsqu'il y a une observation, on procède à une étape d'analyse qui vise à calculer la position la plus probable pour \mathbf{x} compte tenu de la position de l'observation et de son erreur et de l'état actuel et de son erreur de prédiction. On repart alors de la nouvelle position pour poursuivre l'intégration.

Ces deux grands types de méthodes ont des objectifs différents mais aboutissent à la même estimation à la fin de la période d'assimilation dans le cadre d'un modèle linéaire (Bouttier et Courtier 2002). La comparaison des avantages et limites des différentes méthodes est à l'origine du développement d'une grande partie des va-

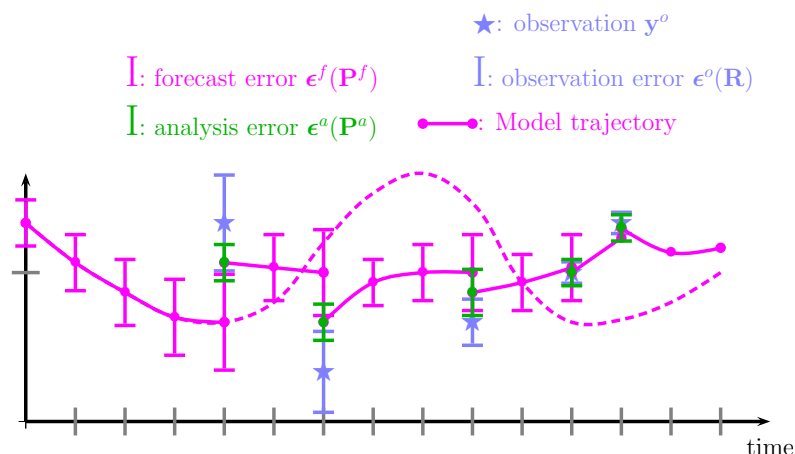


FIG. 3.3 – Schéma pour l'assimilation séquentielle de données. Les observations sont représentées par des étoiles avec des barres d'erreur. Les tirets schématisent la trajectoire de l'estimation initiale. L'erreur de prévision (forecast en anglais) augmente lors de l'intégration du modèle, à chaque fois qu'une observation est disponible, l'étape d'analyse calcule une nouvelle condition initiale, à la même époque, dont l'erreur d'analyse est plus faible.

riantes de chacune des approches. Par exemple, on va chercher à pouvoir introduire l'erreur modèle dans les méthodes d'assimilation variationnelle qui impliquent que le modèle est parfait dans leur version traditionnelle. L'autre grande partie des variantes est la réduction de la dimension du problème ; l'objectif de la réduction de la taille du système est soit un gain de temps, soit de pouvoir augmenter la résolution du modèle, améliorer la connaissance des paramètres physiques, la statistique des erreurs de mesure, prendre en compte l'erreur modèle sans trop pénaliser la résolution numérique.

De nombreux articles, souvent complémentaires, traitent le développement et la comparaison du filtre de Kalman et de l'assimilation variationnelle, par exemple Talagrand (1997), Courtier (1997b) sont des articles fondamentaux. Ide et al. (1997) sont souvent cités parce qu'ils regroupent les notations d'usage, mais ils décrivent également très bien la problématique. Holm (2003) a ajouté des schémas explicatifs à propos des erreurs et des modèles parfaits et imparfaits, il dérive les méthodes d'assimilation en montrant les simplifications de l'inverse généralisé qu'elles entraînent. Daget (2007) fait une revue des méthodes principales mais aussi de nombreuses variantes. Les livres de Evensen (2007) et Kalnay (2003) sont récents et complets.

Assimilation de données en géomagnétisme

Dans ce travail, nous introduisons un modèle de la dynamique de la variation séculaire au cœur d'un procédé d'assimilation variationnelle. La dynamique ainsi introduite nous permet d'avoir une information sur des variables du noyau qui ne sont connectées qu'indirectement aux observations, par le biais de la dynamique ; c'est le cas du champ magnétique à l'intérieur du noyau puisque seul B_r est continu à la frontière noyau-manteau. Nous souhaitons également avoir la possibilité de faire une analyse historique des mouvements dans le noyau et de son champ magnétique, et se rendre compte dans quelle mesure la qualité et la quantité des observations

satellites, et donc une meilleure contrainte, peut se rétropropager vers le passé à travers la dynamique (Fournier et al. 2007, pour une étude avec un modèle jouet). En géomagnétisme, d'autres auteurs utilisent un algorithme séquentiel avec un code géodynamo. Les modèles géodynamo ont l'intérêt de chercher à inclure l'ensemble de la dynamique du noyau. Ces modèles reproduisent quelques caractéristiques importantes du champ magnétique terrestre comme la prédominance du dipôle ou les inversions de champ magnétique. L'inconvénient réside dans les limitations actuelles de moyens de calculs ; on est obligé de les faire fonctionner avec des paramètres de contrôle parfois assez éloignés de leur valeur terrestre (revoir section 2.2.2). En plus d'avoir l'effet de filtrer une partie de la dynamique rapide, cela fait fonctionner le système dans un régime dynamique différent de celui du noyau. Ceci rend la comparaison des sorties de ces modèles avec des observations audacieuse. Pourtant, ces codes sont très riches et sont bien adaptés pour comprendre ce que la technique d'inversion permet de retrouver. En testant les techniques d'inversion cinématiques avec des données synthétiques issues de codes géodynamo, Rau et al. (2000) et Amit et al. (2007) ont utilisé des codes de géodynamo pour réaliser à quel point les contraintes supplémentaires que l'on ajoute sur l'écoulement permettent de réduire l'espace nul du problème défini par l'équation 3.2 dans des situations où de la dissipation magnétique peut être faible mais présente. Ces études quantifient également l'effet de l'absence de connaissance des petites échelles du champ magnétique, masquées par la champ lithosphérique, sur l'écoulement retrouvé et sa précision. Avec un algorithme séquentiel et un code de géodynamo (Kuang et Bloxham 1997), Kuang et al. (2008) travaillent sur la formation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche en suivant deux méthodes. La première cherche des simplifications, la seconde (Sun et al. 2007) utilise les méthodes d'ensemble en assimilation (Evensen 1994) avec des données synthétiques et plus récemment avec des modèles de champ magnétique (Kuang et al. 2009) (voir également l'article de revue de Fournier et al. (2009)). Par ailleurs, Liu et al. (2007) et Kuang et al. (2008) cherchent à quantifier avec des expériences jumelles le gain obtenu en contraignant le modèle avec des observations, synthétiques ou magnétiques, sur les autres variables d'état du système qui ne sont pas observées comme la vitesse radiale dans le noyau. Leur algorithme d'interpolation optimale leur permet de prendre en compte l'erreur du modèle (le nombre de Rayleigh avec lequel ils font l'assimilation vaut 97% de celui qui leur sert pour construire l'état vrai). Par ailleurs, on a vu que pour pallier cet inconvénient, on recherche des lois d'échelles dont le but est de déterminer quels sont les paramètres de contrôle ou combinaison de ces paramètres (revoir section 2.2.2) qui régissent la dynamique du noyau. L'assimilation de données peut être utilisée pour atteindre le même objectif, c'est-à-dire étudier la sensibilité du système par rapport aux paramètres de contrôle du modèle en contraignant le modèle géodynamo avec les observations du champ magnétique.

3.3 Méthodologie de l'assimilation variationnelle

3.3.1 Problème de contrôle optimal

On suivra dans cette partie les notations de Ide et al. (1997).

On considère ici le noyau de la Terre ; le système étudié est un fluide conducteur

d'électricité en rotation à l'intérieur d'une coquille sphérique. Il est caractérisé par la connaissance de son champ de vitesse et de son champ magnétique à l'intérieur du volume et à la surface du noyau comme décrit dans la section 2.3.3. On peut définir l'état réel de ce système \mathbf{x}^t (t pour true en anglais).

La dynamique du système est décrite par un modèle numérique M_i (par exemple les équations (2.36) à (2.40) pour notre système)

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} &= M_i(\mathbf{x}_i), \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.16)$$

pour lequel \mathbf{x}_i est le vecteur décrivant l'état du modèle à l'instant i . Ce modèle direct évolue avec le temps $t_i, i \in \{0, \dots, n\}$. La trajectoire de l'état \mathbf{x} du système est entièrement définie par la connaissance de son état initial, noté \mathbf{x}_0 .

Le modèle est généralement imparfait, et quand bien même il serait sans défaut, il a une résolution moindre que la réalité (à cause de la discrétisation) : les erreurs engendrées sont des erreurs modèle.

Cependant l'assimilation variationnelle classique considère implicitement que le modèle est parfait, le modèle est donc d'une contrainte forte au problème d'optimisation. Cette hypothèse peut être relaxée en ajoutant un paramètre de contrôle supplémentaire dans le membre de droite de l'équation du modèle (3.16) et en résolvant le problème, plus coûteux numériquement et faisant intervenir la matrice de covariance des erreurs modèle \mathbf{Q} , par la méthode des représentateurs (Bennett et Thorburn 1992, Egbert et al. 1994, voir également Courtier (1997a)).

On a, par ailleurs, des observations \mathbf{y}_i^O de la variable d'état \mathbf{x} . Elles appartiennent à l'espace des observations. On définit donc un opérateur H_i , possiblement non-linéaire, qui permet, à chaque pas de temps i de passer de l'espace des calculs à l'espace des observations. On a ainsi

$$\mathbf{y}_i = H_i(\mathbf{x}_i^t) + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (3.17)$$

où \mathbf{x}_i^t est l'état vrai du système et $\boldsymbol{\epsilon}$ sont les erreurs d'observations.

L'espace des observations est généralement plus petit que celui du système ; toutes les variables ne sont pas observées directement mais connectées aux observations par le biais de la dynamique.

En géomagnétisme, l'opérateur d'observation prend en compte l'éloignement entre la source du champ magnétique et le lieu des observations. Cette partie correspond alors au problème inverse décrit en section 2.1.3.

Par ailleurs, il y a souvent plusieurs façons équivalentes de représenter l'état du système. D'une part, les variables peuvent être des quantités physiques ou spectrales, la différence est que la solution spectrale est filtrée puisqu'elle est tronquée. Dans la section 4.4, les variables du modèle sont des quantités physiques mais les observations sont des coefficients d'harmoniques sphériques, l'opérateur d'observation contient alors également le passage des unes aux autres. D'autre part, suivant la variable observée -la vitesse angulaire, la vitesse azimutale ou le moment cinétique, la fonction de courant ou la vorticités- on met de façon artificielle des poids différents à certaines parties du système. Ces différentes représentations ne vont pas changer le problème d'analyse lui-même mais seulement sa représentation. Il est important

de définir une bonne représentation du problème, qui peut être différente entre les observations et le modèle.

L'erreur d'observation est la somme de l'erreur de mesure et de l'erreur de représentation (due à la discrétisation du problème, les mesures sont des phénomènes locaux et ne traduisent pas la valeur de l'observation sur l'ensemble de la maille). La matrice de covariance des erreurs d'observations est notée $\mathbf{R} = E(\boldsymbol{\epsilon}_i \boldsymbol{\epsilon}_i^T)$. Dans la section 4.4.2, je montre la construction de la matrice d'erreur d'observations (équation (4.44)) dans un problème inverse où les observations sont des coefficients harmoniques d'un champ de vitesse, résultats d'une inversion précédente, et dont la statistique des erreurs est connue.

La fonction coût

Dans l'espace des observations, on calcule l'écart entre les observations et les prédictions du modèle numérique sur toute la fenêtre d'assimilation. Cet écart est mesuré par une fonction coût, quadratique si H est linéaire, basée sur l'hypothèse que les erreurs sont gaussiennes :

$$J_H(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i]^T \mathbf{R}_i^{-1} [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i]. \quad (3.18)$$

Par ailleurs, on définit une fonction coût associée à l'écart entre l'état initial et l'ébauche

$$J_B(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^b]^T \mathbf{P}_0^{b-1} [\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^b], \quad (3.19)$$

\mathbf{P}^b est la matrice de covariance des erreurs d'ébauche. En météorologie, l'ébauche considère la climatologie, ou une prédiction précédente lorsqu'on fait des cycles d'assimilation. Dans ce travail, on n'a pas utilisé d'ébauche étant donné le peu d'information ou même de statistiques sur l'état du système. Pourtant si on dispose d'un résultat d'assimilation avec un code plus simple (sous-partie linéaire ou de dimension moindre par exemple), il sera probablement judicieux d'ajouter ce terme d'ébauche.

Il se peut que l'on recherche une certaine complexité pour le vecteur \mathbf{x} . On y associe la fonction coût :

$$J_C = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \mathbf{x}_i^T \mathbf{W} \mathbf{x}_i, \quad (3.20)$$

pour laquelle \mathbf{W} est la matrice qui représente les contraintes. La dimension temporelle est présente ou non selon le type de contrainte que l'on souhaite imposer.

Plusieurs auteurs utilisent ce terme, qui pénalise la complexité de la solution (Sasaki 1970, pour une vision théorique). Courtier et Talagrand (1987) évitent ainsi un bruit sur la solution qui se développe si on prolonge l'optimisation.

Dans ce cas, la fonction coût totale est $J = J_H + J_B + \alpha_C J_C$. Le scalaire α_C traduit le poids que l'on accorde aux contraintes par rapport à la confiance aux observations ou à l'ébauche qui, elles, sont déjà prises en compte dans \mathbf{R} et \mathbf{Q} .

Problème de minimisation sans contrainte

Le problème de minimisation *sous* contrainte consisterait à chercher à minimiser la fonction coût tout en cherchant à satisfaire le modèle. En remarquant qu'avec l'utilisation d'un modèle dynamique, la trajectoire complète est contrainte par la condition initiale, le problème d'assimilation se résume à chercher quel vecteur d'état initial \mathbf{x}_0^* minimise J . Comme on n'a pas de contrainte sur l'état initial, il s'agit bien d'un problème de minimisation sans contrainte.

La solution \mathbf{x}_0^* est caractérisée par $J(\mathbf{x}_0^*) = \min_{\mathbf{x}_0} J(\mathbf{x}_0)$. \mathbf{x}_0^* vérifie alors la condition d'Euler-Lagrange :

$$\nabla_{\mathbf{x}_0} J(\mathbf{x}_0^*) = 0 \quad (3.21)$$

où $\nabla_{\mathbf{x}_0} J(\cdot)$ est le gradient de la fonction coût dans la direction \mathbf{x}_0 . Cette équation décrit la condition nécessaire d'optimalité du système.

On voit donc apparaître ici deux sous problèmes qui font l'objet des deux paragraphes suivants :

- i) le calcul du gradient de J , d'une part,
- ii) et la définition d'un algorithme d'optimisation pour chercher \mathbf{x}_0^* d'autre part.

3.3.2 Le calcul du gradient

Méthodes pour le calcul du gradient

On peut calculer le gradient de J de plusieurs façons différentes, faisant intervenir le code direct, le code linéaire tangent ou bien le code adjoint.

Le code direct est la discrétisation et la mise en œuvre d'un modèle physique, toute la trajectoire spatiale et temporelle de l'état du système dépendant de l'état initial \mathbf{x}_0 . On peut obtenir le gradient de J en calculant la limite

$$\langle \nabla J(\mathbf{x}_0), \delta \mathbf{x}_0 \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{x}_0 + \alpha \delta \mathbf{x}_0) - J(\mathbf{x}_0)}{\alpha}. \quad (3.22)$$

Les problèmes sont nombreux puisqu'il faut calculer $\delta \mathbf{x}_0$ dans chaque direction caractérisant l'espace de contrôle. Donc, si \mathbf{x}_0 vient d'un espace de grande dimension, la masse de calculs sera trop importante. De plus ce calcul donne une approximation du gradient puisque la limite dépendra de ce qu'on appelle « α petit ». Enfin les algorithmes de minimisation supportant mal les gradients approchés, cette méthode n'est généralement pas utilisée de manière opérationnelle.

Le code linéaire tangent permet de calculer directement la perturbation $\hat{J}(\mathbf{x}_0, \delta \mathbf{x}_0)$ associée à $\delta \mathbf{x}_0$. Si on fait cela pour chaque direction possible de l'espace de contrôle, on calcule un gradient exact mais cher de la fonction coût.

Avec le code adjoint, le gradient est calculé avec seulement une intégration directe et rétrograde des modèles direct et adjoint respectivement. On calcule donc rapidement un gradient exact. Cette méthode est détaillée dans le paragraphe suivant.

Calcul du gradient avec l'adjoint

L'utilisation du modèle adjoint pour le calcul d'un gradient local provient de la théorie du contrôle optimal. Le Dimet et Talagrand (1986) et Talagrand et Courtier

(1987) donnent une présentation générale de la méthode. Les méthodes adjointes sont également beaucoup utilisées dans le cadre de l'inversion de la forme d'onde sismique (Fichtner et al. 2006, Tromp et al. 2005), pour les modèles de circulation du manteau (Bunge et al. 2003), ou pour l'étude de la conductivité du manteau par induction électromagnétique (Kuvshinov et al. 2006, Martinec et Velínský 2009).

Par définition, si $\hat{J}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})$ peut s'écrire sous la forme

$$\hat{J}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \langle \nabla_{\mathbf{x}} J, \delta\mathbf{x} \rangle \quad (3.23)$$

alors $\nabla_{\mathbf{x}} J$ s'appelle le gradient de J . Dans cette définition, $\hat{J}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})$ est la dérivée fonctionnelle de la fonction coût dans la direction $\delta\mathbf{x}$ et vaut

$$\hat{J}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{x} + \alpha\delta\mathbf{x}) - J(\mathbf{x})}{\alpha}. \quad (3.24)$$

Pour calculer $\nabla_{\mathbf{x}_0} J$ en utilisant l'adjoint, on distingue donc deux étapes :

1. le calcul de la dérivée fonctionnelle dans la direction $\delta\mathbf{x}_0$
2. la mise en évidence de la linéarité par rapport à $\delta\mathbf{x}_0$

Si on applique une petite perturbation $\delta\mathbf{x}_0$ à \mathbf{x}_0 , alors la différentielle $\hat{\mathbf{x}}$ suit l'évolution du modèle linéaire tangent M'

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{i+1} &= M'_i(\hat{\mathbf{x}}_i), \\ \hat{\mathbf{x}}_0 &= \delta\mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour illustration, j'écris l'équation linéaire tangente d'une partie du système physique de variation séculaire dans la section 3.4.1 (équation 3.42).

De même, la différentielle dans la direction $\delta\mathbf{x}_0$ de la fonction coût vaut, dans un cas sans ébauche mais avec une contrainte, sur la condition initiale ($n = 0$ dans l'équation (3.20)) uniquement comme cela sera le cas dans les applications présentées dans le mémoire

$$\hat{J}(\mathbf{x}_0, \delta\mathbf{x}_0) = \sum_{i=0}^n [\mathbf{H}'_i \hat{\mathbf{x}}_i]^T \mathbf{R}_i^{-1} [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i] + \alpha_C \delta\mathbf{x}_0^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0 \quad (3.26)$$

Pour mettre en évidence la linéarité par rapport à $\delta\mathbf{x}_0$, on remarque que \hat{J} dépend de $\delta\mathbf{x}_0$ par le biais de $\hat{\mathbf{x}}$. L'idée est donc déliminer $\hat{\mathbf{x}}$ des équations. On réécrit d'abord,

$$\begin{aligned} \hat{J}_H(\mathbf{x}_0, \delta\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{H}'_i \prod_{j=1}^{i-1} M'_{j-1} \delta\mathbf{x}_0 \right]^T \mathbf{R}_i^{-1} [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i] \\ &+ [\mathbf{H}'_0 \delta\mathbf{x}_0]^T \mathbf{R}_0^{-1} [H_0(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_0] + \alpha_C \delta\mathbf{x}_0^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \delta\mathbf{x}_0^T \left[\prod_{j=1}^{i-1} M'_{j-1} \right]^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i] \\ &+ \delta\mathbf{x}_0^T \mathbf{H}_0^T \mathbf{R}_0^{-1} [H_0(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_0] + \alpha_C \delta\mathbf{x}_0^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dans ces expressions, j'ai condensé la notation du modèle direct 3.16 par

$$\mathbf{x}_i = \prod_{j=1}^i M_{j-1} \mathbf{x}_0. \quad (3.29)$$

L'équation (3.28) est plutôt de la forme $\hat{J}_H(\mathbf{x}_0, \delta\mathbf{x}_0) = \langle \delta\mathbf{x}_0^T, (\nabla_{\mathbf{x}_0} J_H)^T \rangle$, d'où

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{x}_0} J_H)^T &= \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1}^{i-1} M'_{j-1} \right]^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i] \\ &\quad + \mathbf{H}_0^T \mathbf{R}_0^{-1} [H_0(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_0] + \alpha_C \mathbf{W} \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si on définit l'état adjoint \mathbf{a} , de même dimension que \mathbf{x} , solution du système

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i &= M_i'^T \mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i], \\ \mathbf{a}_{n+1} &= 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

alors (voir également l'annexe D)

$$(\nabla_{\mathbf{x}_0} J_H)^T = \mathbf{a}_0 + \alpha_C \mathbf{W} \mathbf{x}_0 \quad (3.32)$$

Pour calculer le gradient, il faut donc

– intégrer le modèle direct de 0 à n

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} &= M_i(\mathbf{x}_i), \\ \mathbf{x}_0 &= x_0, \end{cases} \quad (3.33)$$

– intégrer le modèle adjoint de n à 0

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i &= M_i'^T \mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} [H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i], \\ \mathbf{a}_{n+1} &= 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

– la transposée du gradient étant donnée par

$$(\nabla_{\mathbf{x}_0} J_H)^T = \mathbf{a}_0 + \alpha_C \mathbf{W} \mathbf{x}_0 \quad (3.35)$$

3.3.3 Les codes adjoints

Mise en œuvre

L'intégration de l'adjoint passe par le calcul de $M_i'^T = \left[\frac{\partial M_i}{\partial x} \right]^T$. Ceci nécessite une différentiation puis une transposition. Dans ce travail, les espaces vectoriels sont de dimension finie. Dans ce cas particulier, l'opérateur adjoint est le transposé : $L^* = L^T$.

Comme l'adjoint d'une suite d'opérateur ABC est la suite des transposées des opérateurs prise dans le sens opposé $C^T B^T A^T$, on détermine donc un code adjoint en partant de la dernière instruction du code direct et en écrivant l'adjoint de chaque instruction. Giering et Kaminski (1998) donnent des informations pratiques pour la construction du code et de nombreux exemples de petites séquences de code direct et leurs adjoints. Talagrand et Courtier (1987) regroupent d'autres informations pratiques dans leurs annexes. L'obtention du code adjoint a été présentée ici par une approche discrète mais on le dérive aussi de façon continue ce que décrivent par exemple Leredde et al. (1998) sur l'équation de Burger, ou bien Martinec et Velínský (2009) dans le cadre des études d'induction électromagnétique.

Ils expliquent avec beaucoup d'étapes utiles l'obtention des conditions aux limites du modèle adjoint.

Dans un but pédagogique et dans le cadre spécifique de travail lié au modèle dynamique de la variation séculaire, je fournis dans l'annexe D les codes adjoints de quelques séquences directes simples. Leur but est de faciliter la compréhension de l'obtention du code adjoint (équations 3.48 à 3.56) dans la section 3.4.1, à partir des équations linéaires tangentes (équations (3.45) à (3.47) eux même obtenus à partir des codes directs (3.41). D'autres équations adjointes figurent dans la section 4.2.2.

Outils de différentiation automatique

Au cours de mon travail, j'ai eu l'occasion de vérifier des parties de codes adjoints avec l'outil de différentiation automatique TAPENADE de l'INRIA (Hascoët et Pascual 2004). Cet outil calcule de façon automatique le code adjoint d'une série d'instructions. Ce logiciel qui prend en entrée un ou plusieurs sous-programmes du code direct, a plusieurs modes de fonctionnement selon que l'on veut le code linéaire tangent ou le code adjoint associé à ce sous-programme. Il prend en entrée le sous-programme dont on souhaite déterminer l'adjoint, et les variables d'état et de contrôle du problème considéré.

Vérification des codes adjoints

Test du gradient *Ce paragraphe est complété par un erratum situé dans l'annexe E.* Pour vérifier l'exactitude du vecteur gradient de la fonctionnelle J , le test du gradient consiste à employer un développement de Taylor au point \mathbf{x}_0 . En notant $\alpha\delta\mathbf{x}$ une perturbation autour de l'état \mathbf{x}_0 , on a

$$J(\mathbf{x}_0 + \alpha\delta\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}_0) + \alpha \langle \nabla_{\mathbf{x}_0} J, \delta\mathbf{x} \rangle + \alpha^2 O(\|\delta\mathbf{x}^2\|) \quad (3.36)$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire et α permet de régler l'intensité de la perturbation.

Si pour toutes les directions de perturbation $\delta\mathbf{x}$, la limite quand α tend vers zéro de :

$$F(\alpha) = J(\mathbf{x}_0 + \alpha\delta\mathbf{x}_0) - J(\mathbf{x}_0) - \alpha \langle \nabla_{\mathbf{x}_0} J, \delta\mathbf{x}_0 \rangle \quad (3.37)$$

tend vers zéro plus rapidement qu' α , c'est à dire en α^2 , alors le test du gradient est satisfait.

En pratique, sur des exemples de petite taille et très simples j'ai pu effectivement retrouver ce comportement. Cependant, le résultat de la plupart de mes tests de gradients dépendait de la direction de perturbation, et la fonction se comportait en α^2 tant qu' α n'est pas très faible puis elle se comportait en α au voisinage de 0 comme le montre la figure E.1. Dans cette figure, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^t$ (l'état vrai), la perturbation est dans une direction donnée et le test du gradient est effectué pour trois cas : en faisant varier la taille de la fenêtre d'assimilation T (voir légende de la figure E.1). Si T est court, alors $F(\alpha)$ se comporte comme α^2 pour des valeurs de α supérieures à 10^{-3} (courbe orange parallèle à la courbe verte), puis $F(\alpha)$

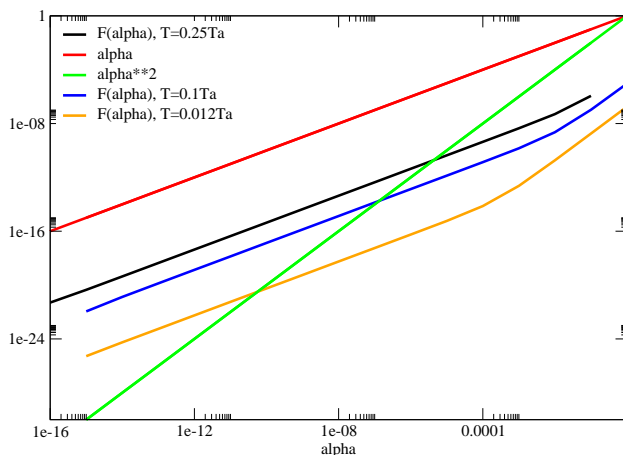


FIG. 3.4 – Exemples de tests de gradient pour les ondes de torsion des sections 4.2.2 et 4.3. Effet de la durée d'intégration T (mesurée en T_A) sur le test du gradient. La courbe noire est $F(\alpha)$ pour $T = 0.25 T_A$, la courbe bleue $F(\alpha)$ pour $T = 0.1 T_A$, la courbe orange pour $T = 0.012 T_A$. Pour référence, la courbe rouge montre $F(\alpha) = \alpha$, et la courbe verte montre $F(\alpha) = \alpha^2$.

tend vers zéro comme α (courbe orange parallèle à la courbe rouge). Cette tendance disparaît si on augmente la durée d'intégration, et $F(\alpha)$ tend toujours vers zéro comme α (courbe noire parallèle à la courbe rouge). À durée d'intégration T fixée, la figure E.4 montre l'impact de l'écart entre l'estimation initiale \mathbf{x}_0 et l'état vrai \mathbf{x}_0^t sur le test du gradient. On compare ici une réalisation du test avec $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^t [(1 + 10^{-1} f(s, \varphi))]$ (courbe bleue) et une autre réalisation du test avec $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^t [(1 + 10^{-3} f(s, \varphi))]$ (courbe noire). Dans les deux cas, la fonction $f(s, \varphi)$ est la même fonction, de l'espace uniquement. De plus, pour la réalisation du test du gradient, j'utilise dans les deux cas, la même fonction de perturbation $\delta \mathbf{x}$. On voit dans la figure E.4 que si \mathbf{x}_0 est plus proche de \mathbf{x}_0^t (courbe noire) alors le test du gradient est mieux réussi. Malgré ces complications, des tests avec des expériences jumelles me permettent cependant de retrouver les variables de contrôle. J'ai donc considéré que les expériences jumelles étaient également une façon de tester un code adjoint.

Pour réaliser des expériences jumelles, on crée un jeu de données synthétiques avec ou sans erreur d'observation avec le modèle direct avec la condition initiale qu'on voudra retrouver. On part d'une autre estimation initiale pour réaliser ensuite l'inversion de ces données synthétiques. J'ai réalisé de nombreuses expériences jumelles dont les procédés et les résultats sont dans les sections 3.4.2 et 4.3.

Versatilité du code adjoint

Le calcul du gradient par rapport à la condition initiale ou par rapport à une variable stationnaire (par exemple $\{B_s^2\}(s)$) se fait par le biais du même modèle adjoint (voir également Leredde et al. 1998, par exemple). Les gradients diffèrent cependant (voir la séquence 6 de l'annexe D).

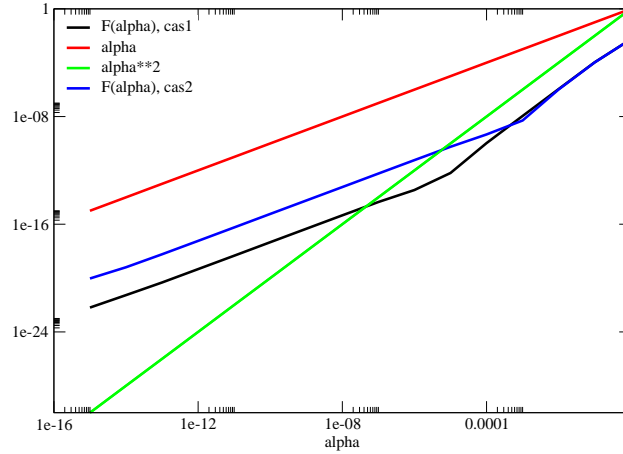


FIG. 3.5 – Exemples de tests de gradient pour les ondes de torsion des sections 4.2.2 et 4.3. Effet de l'écart entre l'estimation \mathbf{x}_0 et l'état vrai \mathbf{x}_0^t sur le test du gradient. La courbe noire est $F(\alpha)$ pour $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^t [1 + 10^{-3}f(s, \varphi)]$, la courbe bleue $F(\alpha)$ pour $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^t [1 + 10^{-1}f(s, \varphi)]$. Pour référence, la courbe rouge montre $F(\alpha) = \alpha$, et la courbe verte montre $F(\alpha) = \alpha^2$.

Checkpointing

L'intégration de l'adjoint de T à 0 nécessite la connaissance de la trajectoire directe.

Il existe alors deux stratégies extrêmes : (i) stocker tous les \mathbf{x}_i , état du système à l'instant i , lors de l'intégration du modèle direct, (ii) à chaque pas de temps du modèle adjoint, recalculer le modèle direct jusqu'à i pour avoir le \mathbf{x}_i correspondant.

La stratégie intermédiaire utilisée dans ce travail, appelée **checkpointing** (par exemple, Hersbach 1998), est un compromis entre les deux méthodes précédentes. On intègre le modèle direct en stockant un état \mathbf{x}_i tous les ndt pas de temps. Puis on intègre le modèle adjoint et quand on a besoin d'un \mathbf{x}_i dans l'adjoint, on repart seulement de l'état sauvegardé le plus proche pour intégrer le modèle direct.

3.3.4 L'optimisation

Idée générale

On veut résoudre la condition nécessaire d'optimalité (3.21), $\nabla_{\mathbf{x}_0} J(\mathbf{x}_0^*) = 0$, non-linéaire si le modèle l'est. Pour ce faire, on va utiliser des méthodes itératives, appelées algorithmes de descente, qui doivent résoudre la suite définie par :

$$\mathbf{x}_0^{l+1} = \mathbf{x}_0^l + \rho^l \mathbf{d}^l \quad (3.38)$$

l est l'itération de l'optimisation, ρ^l un scalaire appelé pas de descente et la direction de descente \mathbf{d}^l est un vecteur de même dimension que \mathbf{x}_0^l .

Le pas de descente est tel que, si la direction de descente \mathbf{d}^l est fixée, ρ^l doit minimiser J le long de la direction de descente. On le calcule avec des méthodes de recherche linéaire. Plusieurs algorithmes permettent de calculer la direction de descente (voir par exemple Nocedal et Wright 2000). La direction la plus évidente est la direction opposée au gradient $\mathbf{d}^l = -(\nabla_{\mathbf{x}_0^l} J)^T$. Le problème est qu'elle

converge lentement (selon la forme du Hessien). Les autres méthodes sont le gradient conjugué ou des méthodes de type Newton, dont les variantes sont Newton tronqué, quasi-Newton.

En pratique : il existe des bibliothèques gratuites d'algorithmes. Pour ce travail, j'ai utilisé des algorithmes de plus grande pente et de gradient conjugué mais j'ai ensuite principalement utilisé la routine `M1QN3` de Gilbert et Lemaréchal (1989) décrite dans le paragraphe suivant.

Le module d'optimisation `M1QN3`

La routine `M1QN3` utilise un algorithme quasi-Newton à mémoire limitée (Gilbert et Lemaréchal 2008, Gilbert 2008, Gilbert et Lemaréchal 1989).

Les algorithmes de Newton sont itératifs et basés sur le calcul de la direction de descente à partir du Hessien (dérivée seconde de J). On écrit ainsi que

$$d_k = -H(J)_k^{-1} \cdot \nabla J(x_k), \quad (3.39)$$

où $H(J)_k$ est la matrice hessienne de J . On complète alors cette direction de descente par une recherche linéaire du pas de descente.

En pratique le Hessien est peu utilisé car non-défini ou très coûteux (matrice carrée de taille [vecteur de contrôle]²). Son inversion est alors impossible. La méthode de quasi-Newton consiste à remplacer l'inverse du Hessien par une suite W_k d'approximations symétriques définies positives (pour sa variante `bfgs`). Pour des problèmes de grande taille, on cherche à limiter le besoin de mémoire en utilisant un algorithme à mémoire limitée (`l-bfgs`) qui ne stocke que les m dernières mises à jour de W_k (Nocedal 1980, Gilbert et Lemaréchal 2008).

L'algorithme de minimisation s'arrête lorsque la norme du gradient calculée atteint un certain seuil relatif à la norme du gradient calculé par la première itération. Gilbert (2008, p. 216) explique le risque qu'on prend en arrêtant la convergence sur le fait que J ne diminue plus beaucoup d'une itération à l'autre. En effet, il peut y avoir plusieurs zones pour lesquelles le gradient ne varie pas beaucoup d'une itération à l'autre bien que la solution \mathbf{x}_0^* ne soit pas atteinte. En effet, si on note k l'indice de l'itération de l'optimisation, $J(\mathbf{x}_0^{l+1}) \sim J(\mathbf{x}_0^l)$ signifie (équation 3.38) que $\rho^l \langle \nabla_{\mathbf{x}_0^l} J, \mathbf{d}^l \rangle \sim 0$, ce qui peut être obtenu si la solution \mathbf{x}_0^* est atteinte mais également si ρ^l est très petit ou si la direction de descente est presque perpendiculaire au gradient. Même si ces deux situations peuvent être identifiées, ce critère d'arrêt n'est alors pas pertinent. Gilbert (2008) ajoute alors un exemple plus quantitatif avec une fonction quadratique.

Utilisation : Il est très facile d'introduire le module dans son code si celui-ci est également modulaire. La subroutine s'appelle `m1qn3` et fait appel à la routine `simul` que l'on crée soit-même. Dans un module appelé `simulator`, la routine `simul` prend en entrée le vecteur de contrôle et sa taille et sort la valeur de la fonction coût et son gradient. Cette subroutine contient donc une intégration directe du modèle, avec calcul du coût J associé, et une intégration du modèle adjoint.

Dans sa thèse sur l'assimilation d'observations de télédétection, Lauvernet (2005) a écrit une description détaillée de l'utilisation de `m1qn3`, des signes pré-curseurs d'une non-convergence et les modes d'arrêts de l'optimisateur. J'ajouterais

ici seulement que la sortie en mode 1 correspond au critère de convergence écrit ci-dessus. Le mode de sortie que j'ai obtenu le plus fréquemment est la sortie en mode 6. Elle signifie que l'algorithme ne trouve plus de direction de descente plus adaptée que celle qu'il a déjà à l'itération précédente. Cela peut venir d'un critère de convergence trop sévère, ou bien d'un mauvais conditionnement du problème. Dans mon travail, j'ai fait beaucoup de tests qui m'ont amené à ne pas systématiquement refuser un résultat d'une sortie en mode 6, s'il y a eu décroissance significative de l'écart aux observations.

Estimations initiales

Puisque l'optimisation est une méthode itérative, il faut une estimation initiale de la solution. Si la variable est une des quantités observées (par exemple, le champ magnétique radial à la frontière noyau-manteau ou, dans la section 4.4, le champ de vitesse), alors il s'agit d'une représentation de cette quantité dans l'espace du modèle. Cette partie nous paraît la plus simple actuellement car, dans nos exemples qui utilisent des harmoniques sphériques, si la quantité est observée, alors elle l'est en de nombreux points d'espace en même temps. Mais s'il s'agit d'observations satellitaires, on n'a qu'une observation locale à un temps donné. On peut considérer que dans la plupart des cas la quantité n'est pas observée. Dans ce cas, l'estimation initiale est une estimation de la variable par une autre méthode. Par exemple, le champ magnétique à la frontière noyau-manteau obtenu par les inversions de la section 2.1.3 ou le champ de vitesse produit par la résolution du problème inverse décrit dans la section 3.1. Pour d'autres variables, l'estimation initiale ne portera peut être que sur une partie de la variable (par exemple sa partie zonale, ou le respect d'une intensité typique de cette variable).

3.4 Expériences jumelles : un écoulement stationnaire dans le noyau

En guise de premier exemple, je reprends dans cette section l'inversion réalisée par Waddington et al. (1995), qui propose de rechercher un écoulement stationnaire à la frontière noyau-manteau qui expliquerait les observations de B_r . Ils ont montré qu'un tel écoulement ne suffisait pas à expliquer les données mais dans l'inversion que je réalise ici, les données sont synthétisées à partir d'un écoulement purement stationnaire.

3.4.1 Modèles directs et adjoints

L'hypothèse d'un écoulement stationnaire a été utilisée par Voorhies et Backus (1985) puis Waddington et al. (1995) pour compléter la non-unicité du problème d'inversion cinématique. On étudie ici l'effet d'un écoulement stationnaire non-zonal et symétrique par rapport à l'équateur sur l'évolution du champ magnétique, plus précisément sa variation séculaire $\dot{B}_r = \partial_t B_r$, (L'encadré 3 rappelle le modèle quasi-géostrophique complet afin de mettre en évidence la sous-partie considérée dans cette section)

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}^{NZ} B_r). \quad (3.40)$$

Le résumé synthétique des équations du modèle quasi-géostrophique est le suivant (voir également les équations (2.36) à (2.40) et (2.26)) :

Dans le volume :

$$\begin{aligned} D_t (-\nabla_E^2 \Psi) - 2\lambda_{r_o}^{-1} \beta s^{-1} \partial_\varphi \Psi &= f(\langle B_s^2 \rangle, \langle B_\varphi^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle), \\ D_t \omega_g &= (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \langle B_s B_\varphi \rangle), \\ \partial_t \langle B_s^2 \rangle &= F_1(\Psi, \omega_g, \langle B_s^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle), \\ \partial_t \langle B_\varphi^2 \rangle &= F_2(\Psi, \omega_g, \langle B_\varphi^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle), \\ \partial_t \langle B_s B_\varphi \rangle &= F_3(\Psi, \omega_g, \langle B_s^2 \rangle, \langle B_\varphi^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle), \end{aligned}$$

À la frontière noyau-manteau :

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}^{NZ} B_r) - \nabla_H \cdot (\mathbf{u}^Z B_r).$$

Dans ces équations, Ψ est la fonction de courant non-zonale, ω_g est la vitesse angulaire zonale et $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ et $\langle B_s B_\varphi \rangle$ sont des quantités magnétiques quadratiques et moyennées verticalement. Dans l'équation d'induction radiale à la frontière noyau-manteau, \mathbf{u}^{NZ} et \mathbf{u}^Z désignent les vitesses non-zonale et zonale respectivement.

On s'intéresse ici uniquement à la trace à la frontière noyau-manteau d'un écoulement non-zonal à travers son interaction avec le champ magnétique radial à la surface du noyau. L'écoulement est également stationnaire. Le modèle se simplifie donc en l'étude de l'évolution temporelle de B_r :

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}^{NZ} B_r).$$

Encadré 3 – Lien entre le modèle complet et l'étude de l'impact d'un écoulement non-zonal stationnaire sur l'évolution du champ magnétique radial à la frontière noyau-manteau.

La symétrie par rapport à l'équateur assure l'unicité de la solution lorsque B_r et \dot{B}_r sont parfaitement connus. L'échelle de temps qui caractérise le problème est le temps d'advection, t_{adv} . La vitesse non-zonale entre dans l'équation (3.41) via la fonction courant non-zonale $\Psi(s, \varphi)$ (voir l'équation (2.33)), projetée à la frontière noyau-manteau. L'état du système comprend alors un paramètre, la fonction de courant Ψ , et une variable le champ magnétique radial B_r . Dans cette expérience, on dit que Ψ est un paramètre car il est stationnaire. On recherche le profil de $\Psi(s, \varphi)$ qui explique au mieux les observations de la variation séculaire synthétique \dot{B}_r^o à la surface du noyau.

Le modèle direct se précise lorsque l'on prend en compte le fait (i) que les observations synthétiques sont des observations de variation séculaire $\dot{B}_r = \partial_t B_r$, et (ii) que Ψ , défini dans le plan équatorial, doit être exprimé à la frontière noyau

manteau pour interagir avec B_r . Par conséquent le modèle direct comporte trois équations

$$\begin{aligned}\Psi_o &= M_s^\theta \Psi, \\ \dot{B}_r &= (\sin \theta \cos \theta)^{-1} [\partial_\theta \Psi_o \partial_\varphi B_r - \partial_\varphi \Psi_o \partial_\theta B_r] + (\cos \theta)^{-2} \Psi_o \partial_\varphi B_r, \\ \partial_t B_r &= \dot{B}_r.\end{aligned}\quad (3.41)$$

L'opérateur M_s définit Ψ_o , à la surface du noyau, à partir de Ψ dans le plan équatorial (l'écoulement est invariant suivant \mathbf{e}_z).

Le modèle linéaire tangent de (3.41) s'écrit

$$\begin{aligned}\delta \Psi_o &= M_s^\theta \delta \Psi, \\ \delta \dot{B}_r &= (\sin \theta \cos \theta)^{-1} [\partial_\theta \Psi_o \partial_\varphi \delta B_r + \partial_\theta \delta \Psi_o \partial_\varphi B_r] \\ &\quad - (\sin \theta \cos \theta)^{-1} [\partial_\varphi \Psi_o \partial_\theta \delta B_r + \partial_\varphi \delta \Psi_o \partial_\theta B_r], \\ &\quad + (\cos \theta)^{-2} \Psi_o \partial_\varphi \delta B_r + (\cos \theta)^{-2} \delta \Psi_o \partial_\varphi B_r, \\ \partial_t \delta B_r &= \delta \dot{B}_r.\end{aligned}\quad (3.42)$$

dans laquelle $\delta \Psi$, $\delta \Psi_o$, δB_r et $\delta \dot{B}_r$ sont les différentielles de Ψ , Ψ_o , B_r et \dot{B}_r , respectivement.

Ψ est discrétisé sur un rayon cylindrique $s = i_s \Delta_s(s); i_s \in [0, N_s]$. La partie latitudinale de B_r est discrétisées sur un méridien et chaque point de grille est le projeté sur la frontière noyau-manteau d'un point de grille du plan équatorial Σ , sauf à l'équateur où il n'y a pas de point. En conséquence $\theta = i_\theta \Delta_\theta(\theta); i_\theta \in [0, 2N_s - 1]$. La partie azimutale des variables est exprimée en séries de Fourier

$$\Psi(s, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{m_{max}} [a_m(s, t) \cos(m\varphi) + b_m(s, t) \sin(m\varphi)], \quad (3.43)$$

$$B_r(\theta, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{m_{max}} [c_m(\theta, t) \cos(m\varphi) + d_m(\theta, t) \sin(m\varphi)], \quad (3.44)$$

où le nombre maximum de modes de Fourier, m_{max} , est relié au nombre de points équidistant en longitude, $N_\varphi : m_{max} = (N_\varphi - 1)/2$.

Le temps est discrétisé avec des différences finies $t = j \Delta_t; j \in [0, N_t]$, où Δ_t est le pas de temps. Les dérivées spatiales sont construites par différences finies en s et θ . Les dérivées longitudinales sont calculées dans l'espace spectral en utilisant la transformée de Fourier rapide.

Le nombre de points de grille est spécifié dans le corps du texte page 67.

Encadré 4 – Résolution numérique du modèle d'écoulement stationnaire dans le noyau.

En faisant le choix d'un schéma d'intégration temporelle, ici un schéma d'Euler explicite, et de discrétisation spatiale (voir encadré 4), l'écriture d'une itération temporelle du modèle linéaire tangent facilite la formulation du problème adjoint.

Une itération en temps du modèle linéaire tangent s'écrit

$$\delta\Psi_o(i) = M_s^\theta \delta\Psi(i), \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{B}_r(i) &= (\sin\theta \cos\theta)^{-1} [\partial_\theta \Psi_o(i) \partial_\varphi \delta B_r(i) + \partial_\theta \delta\Psi_o(i) \partial_\varphi B_r(i)] \\ &\quad - (\sin\theta \cos\theta)^{-1} [\partial_\varphi \Psi_o(i) \partial_\theta \delta B_r(i) + \partial_\varphi \delta\Psi_o(i) \partial_\theta B_r(i)] \\ &\quad + (\cos\theta)^{-2} \Psi_o(i) \partial_\varphi \delta B_r(i) + (\cos\theta)^{-2} \delta\Psi_o(i) \partial_\varphi B_r(i), \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\delta B_r(i+1) = \delta B_r(i) + \Delta_t \delta\dot{B}_r(i). \quad (3.47)$$

Soient Ψ^T, Ψ_o^T, B_r^T et \dot{B}_r^T les variables adjointes de Ψ, Ψ_o, B_r et \dot{B}_r . Le modèle linéaire tangent contient trois équations (3.45) à (3.47). Le modèle adjoint correspondra alors à la résolution de l'adjoint de la troisième équation (3.47), suivie par la résolution de l'adjoint de la seconde équation (3.46), suivie par la résolution de l'adjoint de la première équation (3.45). J'ai donné des détails sur l'obtention de l'adjoint dans l'annexe D. L'adjoint de la première équation correspond alors à l'adjoint de la séquence 1 de cette annexe où $A = \Psi_o$ et $B = \Psi$, l'adjoint de la troisième équation correspond à l'adjoint de la séquence 6 de cette annexe où $A = B_r$ et $B = \dot{B}_r$. L'adjoint de la seconde équation est plus compliqué et fait en conséquence l'objet de la séquence 7 de cette même annexe. En utilisant ces éléments, mis en annexe pour fluidifier la lecture du manuscrit, le modèle adjoint des l'équations (3.45) à (3.47) commence alors par le forçage dû à l'écart entre prédictions du modèle et observations (voir également la séquence 4 de l'annexe D) :

$$\dot{B}_r^T(i) = \dot{B}_r^T(i) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\dot{B}_r - \dot{B}_r^o), \quad (3.48)$$

puis le modèle se complète par l'adjoint de l'équation (3.47)

$$\dot{B}_r^T(i) = \dot{B}_r^T(i) + \Delta_t B_r^T(i+1) \quad (3.49)$$

$$B_r^T(i) = B_r^T(i) + B_r^T(i+1) \quad (3.50)$$

$$B_r^T(i+1) = 0. \quad (3.51)$$

puis par l'adjoint de l'équation (3.46)

$$\begin{aligned} \Psi_o^T(i) &= \Psi_o^T(i) + \partial_\theta^T [(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\varphi B_r \dot{B}_r^T(i)] - \partial_\varphi^T [(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\theta B_r \dot{B}_r^T(i)] \\ &\quad + (\cos\theta)^{-2} \partial_\varphi B_r \dot{B}_r^T(i) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} B_r^T(i) &= B_r^T(i) + \partial_\varphi^T [(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\theta \Psi_o \dot{B}_r^T(i)] - \partial_\theta^T [(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\varphi \Psi_o \dot{B}_r^T(i)] \\ &\quad + \partial_\varphi^T [(\cos\theta)^{-2} \Psi_o \dot{B}_r^T(i)], \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\dot{B}_r^T(i) = \dot{B}_r^T(i), \quad (3.54)$$

où ∂_φ^T et ∂_θ^T sont les adjoints de ∂_φ et ∂_θ (voir également la séquence 2 de l'annexe D). Enfin l'adjoint de l'équation (3.45) est (voir l'obtention de l'équation D.98 dans l'annexe)

$$\Psi^T(i) = M_s^{\theta,T} \Psi_o^T(i) \quad (3.55)$$

$$\Psi_o^T(i) = 0. \quad (3.56)$$

Ce modèle allant de l'équation (3.48) à (3.56) représente une itération vers le passé du modèle adjoint (l'intégration du modèle adjoint se fait vers le passé d'après l'équation 3.31).

3.4.2 Expériences jumelles

J'ai réalisé de nombreuses expériences jumelles ce qui a eu pour intérêt, outre de tester le code adjoint, de me familiariser avec la réponse du système d'assimilation.

Au lieu d'être des données de satellites et d'observatoires, les observations dans le cadre d'expériences jumelles sont créées à partir d'un état vrai synthétique, résultat d'une intégration du modèle direct pour un jeu donné de conditions initiales, \mathbf{x}_0^t . Les données synthétiques ont l'avantage de représenter uniquement la physique qui entre en jeu dans le modèle, et sont donc appropriées, dans un premier temps, au test de l'implémentation de l'algorithme d'assimilation variationnelle de données.

Une base de données d'observations est produite avec l'équation (3.17). Ensuite, on commence l'assimilation avec un jeu différent de conditions initiales, l'estimation initiale, \mathbf{x}_0^g . Après une intégration directe, la prédiction de l'observable est comparée avec les observations (sur l'ensemble de la fenêtre temporelle). Dans la suite de la thèse les observables sont la variation séculaire $\mathbf{H}\dot{B}_r^f$ dans la section 3.4, le champ magnétique radial $\mathbf{H}B_r^f$ dans la section 4.2 et des coefficients de vitesse zonale dans l'application géophysique 4.4. Après assimilation et dans le cadre d'expérience jumelles, la décroissance de l'écart entre prédiction et observations avant et après assimilation, ainsi que la différence relative entre \mathbf{x}^t et \mathbf{x}^a au sens l^2 sont utilisés pour qualifier la qualité de la solution.

Une vision floue du noyau

Pour construire le catalogue d'observations, on prend en compte la réalité géophysique qui ne nous permet de voir seulement les grandes échelles de l'état à la frontière noyau-manteau. La fonction moyenne que nous utilisons correspond à la convolution à la frontière noyau-manteau de l'état vrai avec un polynôme de Jacobi de degré L (Backus et al. 1996, paragraphe 4.4.4) :

$$(\mathbf{H}\mathbf{x}^t)(\theta^o, \varphi^o) = \frac{L+1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbf{x}^t(\theta, \varphi) P_L^{(1,0)}(\cos \alpha) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (3.57)$$

où (θ^o, φ^o) sont les coordonnées des lieux d'observations, α est la distance angulaire entre deux points (θ^o, φ^o) et (θ, φ) , et $P_L^{(1,0)}$ est le polynôme de Jacobi (Abramowitz et Stegun 1964, p. 773). Dans les expériences suivantes, on pose $L = 15$ et les observations sont faites à une fréquence donnée d'observation, notée f_y .

Construction de l'opérateur d'observation : L'action de l'opérateur d'observation sur le vecteur d'état est décrit par l'équation 3.57. Pour faciliter l'écriture de son adjoint je construis la matrice correspondante explicitement puis je prends sa transposée. D'une part le vecteur d'observation ne contient que des observations de B_r et pas d'observations de la fonction courant Ψ . Sous forme matricielle, l'équation 3.57 correspond donc à

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}\Psi^t \\ \mathbf{H}B_r^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi^t \\ B_r^t \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Si les vecteurs B_r^t et HB_r^t se discrétisent de la façon suivante

$$B_r^t = \begin{bmatrix} B_r^t(\theta_1, \varphi_1) \\ \vdots \\ B_r^t(\theta_{N_\theta}, \varphi_1) \\ \vdots \\ B_r^t(\theta_i, \varphi_j) \\ \vdots \\ B_r^t(\theta_1, \varphi_{N_\varphi}) \\ \vdots \\ B_r^t(\theta_{N_\theta}, \varphi_{N_\varphi}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad HB_r^t = \begin{bmatrix} HB_r^t(\theta_1^o, \varphi_1^o) \\ \vdots \\ HB_r^t(\theta_{N_\theta}^o, \varphi_1^o) \\ \vdots \\ HB_r^t(\theta_k^o, \varphi_1^o) \\ \vdots \\ HB_r^t(\theta_1^o, \varphi_{N_\varphi}^o) \\ \vdots \\ HB_r^t(\theta_{N_\theta}^o, \varphi_{N_\varphi}^o) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

alors la matrice M est définie par

$$M_{[ij][kl]} = \frac{L+1}{4\pi} P_L^{(1,0)}(\cos \alpha_{ijkl}) \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_j, \quad (3.60)$$

où $\cos \alpha_{ijkl} = \cos \theta_i \cos \theta_k^o + \sin \theta_i \sin \theta_k^o \cos(\varphi_j - \varphi_l^o)$.

L'adjoint de l'opérateur d'observation est alors la transposée : $\mathbf{H}^T = \text{transpose}(\mathbf{H})$.

Écoulement stationnaire à la surface du noyau

La trajectoire de l'état vrai est calculé à partir des conditions initiales suivantes

1. $B_r^t(\theta, \varphi, t=0)$ est obtenu à partir du modèle de champ magnétique principal CHAOS (Olsen et al. 2006) pour les époques 2002, et tronqué au degré et à l'ordre harmonique 12. On le prend à l'extérieur du cylindre tangent et on le multiplie par une fonction sinus en θ pour assurer $B_r^t(\theta, \varphi, t=0) = 0$ au cylindre tangent (voir la figure 3.6),
2. $\Psi^t(s, \varphi)$ est montré dans la figure 3.7a, il s'agit de la partie non-zonale d'un écoulement inversé par Pais et al. (2004) et tronqué au degré et à l'ordre 4, et multiplié par $\cos^2 \theta = (1 - s^2)$ et une fonction de s , $(s - r_i)$, pour satisfaire les conditions aux limites de l'écoulement en $s = r_i, r_o$. Il est mis à l'échelle pour avoir une vitesse rms sans dimension d'ordre 1 ; la mise à l'échelle V_{adv} est telle que $\int_0^{2\pi} \int_{\theta_c}^{\pi - \theta_c} (u_s^2 + u_\varphi^2) \sin \theta d\theta d\varphi = V_{adv}^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_c}^{\pi - \theta_c} \sin \theta d\theta d\varphi$, with $\theta_c = \text{asin}(r_i/r_o)$.

On considère des observations parfaites en posant $\epsilon = \mathbf{0}$ dans l'équation (3.17). Pour les simulations suivantes, le pas de temps numérique vaut $6 \times 10^{-5} t_{adv}$ et les temps d'intégrations vont de $0.03 t_{adv}$ à $0.57 t_{adv}$.

Dans ce problème où l'on recherche la fonction courant stationnaire qui explique au mieux les observations de variation séculaire, on souhaite mettre en avant l'apport de la dimension temporelle sur la solution.

On considère, tout d'abord, les solutions obtenues lorsqu'on n'a qu'une seule époque d'observation et moins de lieux d'observations ($N_\theta^O = 50, N_\varphi^O = 11$) que de points de grille ($N_\theta = 200, N_\varphi = 15$). Dans ce cas, on a $50 \times 11 = 550$ observations par époque d'observation alors que le nombre de paramètres de contrôle est de

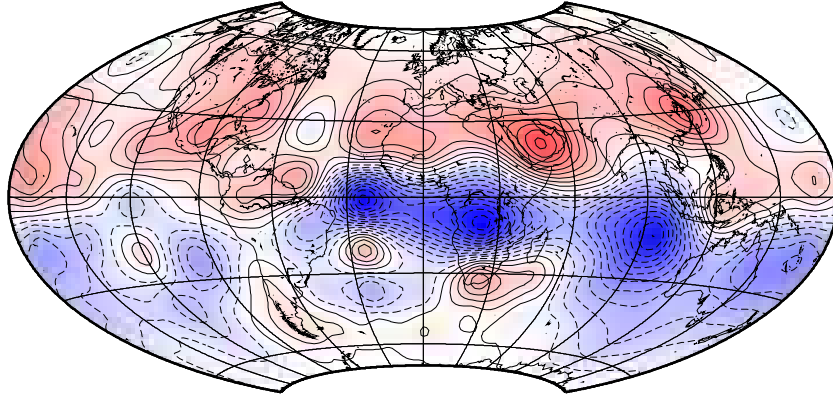


FIG. 3.6 – Carte du champ principal à l'époque 2002 et tronqué au degré et à l'ordre harmoniques 12 modifié à partir du modèle CHAOS (Olsen et al. 2006). Dans le cadre de nos expériences jumelles, ce vecteur est la composante radiale du vrai champ magnétique B_r^t à l'instant initial. Les contours sont tracés tous les $0.5B_r^{rms}$ (trait plein (resp. tirets) pour les valeurs positives (resp. négatives)). L'échelle de couleur est arbitraire puisque le problème est linéaire en B_r .

$99 \times 15 = 1485$ (Ψ est dans le plan équatorial). On commence l'assimilation avec une première estimation de Ψ^g qui correspond à une hypothèse minimale : $\Psi^g = 0$.

La solution que nous obtenons donne une information sur ce qui peut être réalisé dans un cadre un peu extrême mais qui était cependant celui des premières inversions, cinématiques, pour l'étude des écoulements du noyau. La figure 3.7b montre en particulier que l'état vrai (Figure 3.7a) n'est pas complètement retrouvé, à cause de la troncature utilisée dans la construction de l'opérateur d'observation \mathbf{H} avec les polynômes de Jacobi, et à cause du nombre limité de lieux d'observations par rapport au nombre de points de grille.

On va utiliser cette solution obtenue avec une seule époque pour montrer le bénéfice d'avoir une série temporelle d'observations, par rapport à un cliché instantané. En d'autres termes, on se demande si le sous-échantillonnage spatial peut être compensé par l'addition de la dimension temporelle au problème. Dans cette optique, on procède à des expériences d'assimilation sur des périodes temporelles allant de $0.03 t_{adv}$ à $0.57 t_{adv}$, la fréquence d'échantillonnage temporelle restant $f_y = 175 t_{adv}^{-1}$.

Un résultat typique d'expérience jumelle est montré dans la figure 3.7c, pour lequel $T = 0.57 t_{adv}$. Le motif de grande échelle est retrouvé mais la solution est polluée par des petites échelles spatiales (il n'y a pas de terme supplémentaire de lissage dans la fonction coût). D'après l'ensemble des expériences, nous trouvons que la prise en compte de la dimension temporelle améliore la solution. La distance entre la vraie fonction courant et les prédictions diminue lorsque la fenêtre temporelle d'assimilation est plus grande (voir la figure 3.8).

Taille de la fenêtre d'assimilation, choix de la première estimation

La figure 3.9 représente l'écart aux données, avant assimilation, en fonction du décalage en longitude entre la position d'un tourbillon (estimation initiale) dans le plan équatorial et le tourbillon de l'état vrai. Les trois courbes correspondent à

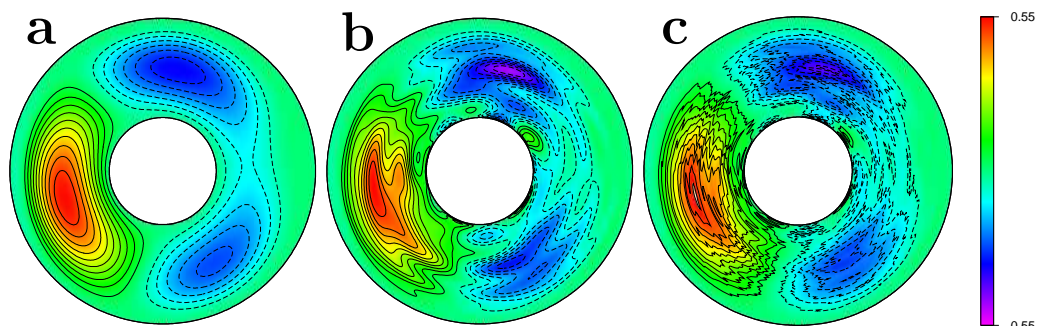


FIG. 3.7 – Cartes de fonction courant Ψ dans le plan équatorial Σ : a : état vrai, b : solution avec une inversion d'une seule époque, c : solution avec $T = 0.57 t_{adv}$. Les contours sont tracés tous les 0.05 (courbe pleine (resp. tiretée) pour les valeurs positives (resp. négatives)). Les extrema sont $-0.33; 0.54$ (a), $-0.49; 0.54$ (b) et $-0.43; 0.56$ (c).

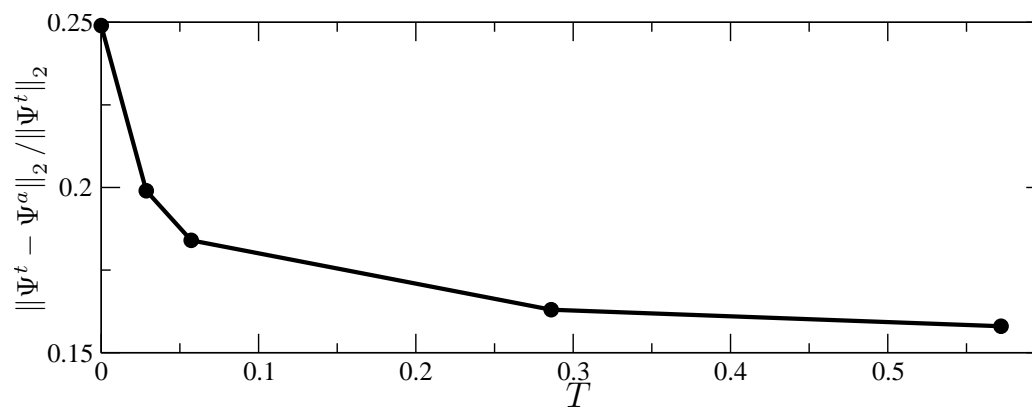


FIG. 3.8 – Effet de la période d'assimilation T sur la solution pour une fréquence d'observation fixe $f_y = 175 t_{adv}^{-1}$. On mesure la norme de l'erreur relative $\|\Psi^t - \Psi^\alpha\|_2 / \|\Psi^t\|_2$. Cette norme est égale à 1 lorsque l'estimation initiale est $\Psi^g = 0$. La simulation à $T = 0$ réfère à l'inversion avec une seule époque d'observations.

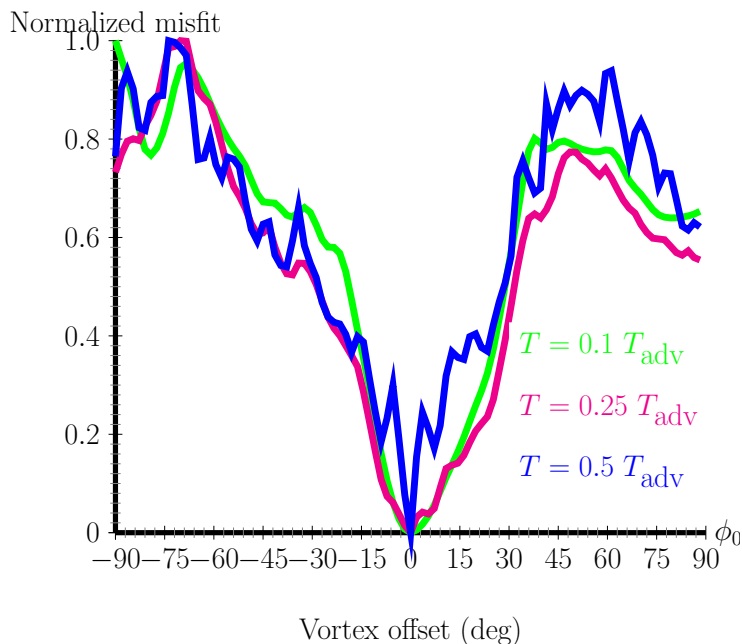


FIG. 3.9 – Écart aux données, avant assimilation, en fonction du décalage en longitude entre la position d’un tourbillon (estimation initiale) dans le plan équatorial et le tourbillon de l’état vrai. Les trois courbes, verte, rose, bleu, correspondent à trois tailles de fenêtres d’assimilation $T = 0.1, 0.25$ et $0.5 t_{adv}$, respectivement. L’écart aux données est normalisé pour chaque T par sa valeur maximale sur les longitudes.

trois tailles de fenêtres d’assimilation $T = 0.1, 0.25$ et $0.5 t_{adv}$. Cette figure montre que si on augmente la fenêtre d’assimilation alors la fonction coût présente de plus en plus de pics et de minima, ce que décrit également Evensen (2007, chapitre 6). On remarque en particulier que la fonction coût se resserre autour du minimum global si on augmente T . Dans ces conditions, la convergence vers le minimum global demande une très bonne estimation initiale. Pour pallier ce problème, on a décidé, pour construire la figure 3.8, d’utiliser les résultats obtenus sur des fenêtres d’assimilation plus courtes comme estimations initiales des expériences avec une fenêtre d’assimilation plus longue. Cette stratégie est analogue à l’approche utilisée en assimilation variationnelle pour l’atmosphère qui consiste à résoudre une série de problèmes inverses en contrainte forte, définis sur des sous-intervalles du temps d’étude considéré (e.g. Evensen 2007).

Résumé des résultats

Les expériences jumelles avec ce modèle d’écoulement stationnaire dans le noyau interagissant à la frontière noyau-manteau avec le champ magnétique radial ont mis en avant la possibilité de retrouver une fonction courant à deux dimensions spatiales. Les petites échelles présentes dans la solution témoignent de l’absence de terme de lissage ainsi que de l’absence de contraintes imposées à ces petites échelles par les observations. En effet, pour se rapprocher de la réalité physique, l’opérateur d’observation est une fonction moyenne du champ magnétique vrai. L’impact de la dimension temporelle au problème est positif, puisque la durée d’observation

permet d'augmenter le nombre d'observations et de mieux retrouver la fonction courant, mais a également des conséquences non-négligeables. En effet, si la période temporelle augmente, alors la fonction coût, sans terme de régularisation ou d'ébauche, devient de moins en moins lisse, et l'estimation initiale doit être suffisamment proche de la solution pour permettre une convergence vers le minimum global.

Ondes de torsion rapides dans le noyau terrestre

4

4.1 Contexte des études d'ondes de torsion

Les observations des variations de la longueur du jour nous renseignent sur les échanges de moment cinétique entre les différentes enveloppes de la Terre : Terre solide, atmosphère, océans et noyau liquide. Aux échelles de temps décennales, ces variations sont attribuées à la dynamique du noyau.

Pour comprendre ces variations, on distingue deux types d'approches. La première consiste à déterminer les mécanismes de couplages à l'origine de ces variations de longueur du jour (Jault 2003, par exemple) et leurs proportions. La dérivée temporelle des variations de longueur du jour mesure alors la somme des couples appliqués au manteau par les systèmes extérieurs. Les candidats sont un couplage par friction visqueuse à la frontière noyau-manteau mais il a été jugé généralement trop faible (voir cependant Deleplace et Cardin 2005, qui l'utilisent en combinaison avec un couplage électromagnétique pour expliquer la dissipation estimée à partir de données de nutation), un couplage électromagnétique qui n'existe que si le manteau n'est plus complètement isolant mais aurait à sa base une fine couche conductrice de forte conductivité par rapport au manteau. Le couplage gravitationnel consiste à prendre en compte les hétérogénéités de densité dans le fluide et le manteau. Des hétérogénéités de densité dans le manteau peuvent également coupler le manteau avec la graine. Le couplage topographique est dû à l'effet de variations de la pression dynamique du fluide sur la frontière noyau-manteau qui n'est alors plus considérée comme sphérique (voir, par exemple, Buffett 2007, sur les interactions entre le manteau et le noyau).

Dans la seconde approche, on calcule le moment cinétique axial de l'écoulement dans le noyau

$$J_z = \int_V s^2 \omega_g dV \quad (4.1)$$

et la variation de période de rotation δT que ses variations engendrent

$$\delta T = \frac{T_0^2}{2\pi} \frac{\delta J_z}{I_c + I_m}. \quad (4.2)$$

Dans cette expression I_c et I_m sont les moments d'inertie du noyau et du manteau respectivement, calculés par rapport à l'axe vertical, et $T_0 = 86400$ s est la durée

moyenne du jour. La quantité δT doit expliquer les observations. Il s'agit donc d'un contrôle qualité de l'écoulement construit puisqu'on utilise les variations décennales de la longueur du jour comme observations indépendantes.

Seule la partie zonale de l'écoulement porte du moment cinétique mais pour calculer ce terme, on a besoin de connaître l'écoulement dans le volume. En se basant sur le faible nombre de Lehnert, $\lambda \sim 10^{-4}$, dans le noyau (Jault 2008), on suppose que ces mouvements sont invariants dans la direction de l'axe rotation de la Terre. La décomposition d'un champ de vitesse en parties poloïdale et toroïdale (voir l'équation 3.4) permet d'assurer la conservation de la masse. La partie zonale de ce champ de vitesse ne fait alors intervenir que les coefficients toroïdaux zonaux t_n^0 , et la symétrie par rapport à l'équateur ne fait intervenir que les degrés toroïdaux zonaux impairs. L'équation (4.1) se simplifie et on remarque, de plus, que seuls les coefficients t_1^0 et t_3^0 entrent en jeu (des étapes supplémentaires de ces calculs se trouvent par exemple dans Jackson et al. (1993) ou Pais et Hulot (2000)). On a alors pour des variations δT en ms et des coefficients t_1^0 et t_3^0 en km/an (Jault 1990, Jackson et al. 1993)

$$\delta T = 1.138 \left(\delta t_1^0 + \frac{12}{7} \delta t_3^0 \right). \quad (4.3)$$

Les variations δt_1^0 et δt_3^0 des coefficients sont estimées à partir d'un écoulement constant dans le noyau. On estime donc plutôt δT à une constante arbitraire près à partir des coefficients t_1^0 et t_3^0 eux-mêmes. Jault et al. (1988) puis Jackson et al. (1993) et Pais et Hulot (2000) ont calculé le moment cinétique associé à l'écoulement obtenu à la surface du noyau par inversion des données de champ magnétique entre 1969 et 1985, entre 1900 et 1985, et de 1840 à 1990 respectivement. Ils ont trouvé un bon accord entre leur prédiction et les observations de la période de rotation de la Terre.

Depuis ces premiers travaux, les reconstructions de champ de vitesse dans le noyau sont de plus en plus élaborées (voir aussi section 3.1) et Gillet et al. (2009b) montrent avec des inversions d'ensemble que cette prédiction de variation de la longueur du jour ne dépend pas fortement des poids des régularisations introduites dans l'inversion. Pourtant, ils remarquent que le grand jet illustré sur la figure 3.1 se structure et s'intensifie fortement pendant la décennie 1985-1995. Cela correspond à une augmentation du moment cinétique dans le noyau sans contrepartie visible dans les variations de la durée du jour sur cette période. Les champs de vitesses construits dépendent du modèle de champ magnétique qui a été inversé mais ce problème se retrouve dans d'autres études.

Les mouvements géostrophiques qui entrent en jeu dans le calcul des variations de longueur du jour peuvent être de plusieurs origines. Si le système est dans un état de Taylor, c'est-à-dire si le champ magnétique suit la condition de morphologie de l'équation 2.19, le champ de vitesse non-zonal se déduit à chaque instant de l'équation de Navier-Stokes dans l'approximation magnétostrophique, et l'écoulement zonal est alors la solution d'une équation du second degré dont les coefficients sont fonction du champ magnétique et du champ de vitesse non-zonal (Taylor 1963). Si le système n'est pas exactement dans un état de Taylor, les écarts à cet état sont compensés par un terme d'inertie. Les solutions sont oscillantes, ce sont les ondes

de torsion dont la force de rappel est la tension magnétique qui couple les cylindres géostrophiques (voir le schéma de la figure 1.4).

Braginsky (1970) a été le premier à exploiter le mécanisme des ondes de torsion dans le noyau dans l'objectif d'expliquer les variations de la longueur du jour. Mais l'idée alternative d'expliquer la variation séculaire, en commençant par la dérive vers l'Ouest du champ magnétique, par des mouvements ondulatoires non-zonaux est due à Hide (1966). En prolongeant le champ magnétique à la frontière noyau-manteau, on peut avoir une estimation de l'intensité des grandes échelles du champ poloidal B_r à la surface du noyau de 0,3 mT. Ces estimations ne peuvent pas être extrapolées à l'intérieur du noyau sans hypothèses supplémentaires. Braginsky (1970) calcule une période à 60 ans des ondes de torsion dans le noyau correspondant à une intensité du champ magnétique de 0,2 mT.

La possibilité d'ondes de torsion dans le noyau ouvre des perspectives intéressantes sur l'étude du noyau puisque les propriétés de propagation de ces ondes sont fonction de l'intensité rms du champ magnétique B_s à l'intérieur du noyau, selon un rayon cylindrique. Cette quantité est en grande partie inaccessible puisque seul le champ radial est continu à la frontière noyau-manteau lorsqu'on suppose le noyau parfaitement conducteur d'électricité. D'autre part, l'étude des mécanismes d'excitation et d'atténuation des ondes apporte des connaissances ou des contraintes supplémentaires sur la dynamique du noyau. En effet, si le lien est clair entre l'écoulement et les variations de longueur du jour, les mécanismes qui permettent cet échanges de moment cinétique entre le noyau et le manteau sont moins connus.

Zatman et Bloxham (1997), Bloxham et al. (2002) et Amit et Olson (2006) ont expliqué les écoulements zonaux reconstruits par inversion par une superposition d'ondes amorties. Zatman et Bloxham (1997) ont représenté l'écoulement zonal entre 1900 et 1990 par deux ondes stationnaires de périodes 76,2 et 52,7 ans. Bloxham et al. (2002) prennent en compte un écoulement stationnaire et trois ondes de périodes 45, 20 et 13 ans entre 1957 et 2001, et avancent que les ondes de torsion peuvent aussi expliquer les secousses géomagnétiques. Avec deux ondes, Amit et Olson (2006) expliquent mieux entre 1890 et 1990 qu'en commençant en 1840 les écoulements zonaux reconstruits par inversion de modèles magnétiques. Les périodes de leurs deux ondes sont grandes 110.8 ans et 53.5 ans.

Les oscillations libres des ondes de torsion suivent l'équation d'onde (le modèle est donné avec plus de détails dans la section suivante)

$$\partial_t^2 \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g) - s^{-1} \partial_t f_\varphi \quad (4.4)$$

où ω_g est la vitesse angulaire du fluide et $\{B_s^2\}$ dont dépend la tension magnétique qui couple les cylindres géostrophiques. Dans cette expression, f_φ est la somme des forces qu'un cylindre géostrophique exerce sur la frontière noyau-manteau. Les propriétés des ondes contraignent donc $\{B_s^2\}$, le carré de la composante perpendiculaire à l'axe de rotation moyenné sur les cylindres géostrophiques. De plus, l'information sur f_φ contraint le mécanisme de couplage entre le noyau et le manteau (voir par exemple Buffett 1998).

Zatman et Bloxham (1997) ont utilisé les propriétés de ces ondes pour obtenir un premier modèle radial de $\{B_s^2\}$. Ce profil, représenté par un trait gris sur la figure 4.1, présente un fort gradient à proximité du cylindre tangent et une singularité en

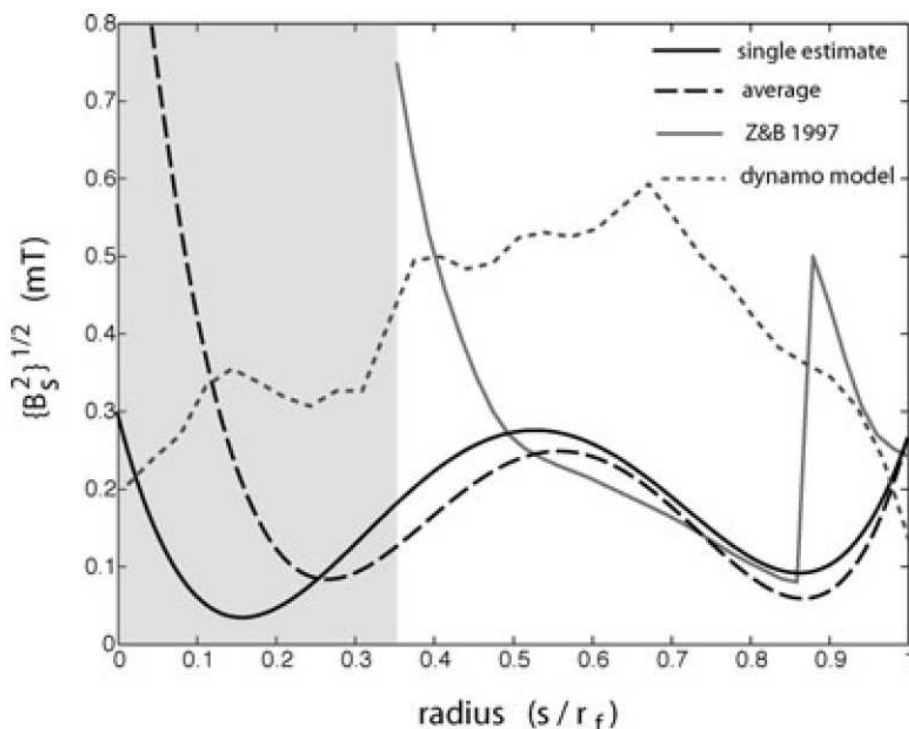


FIG. 4.1 – Profils de $\sqrt{\{B_s^2\}}$ en mT en fonction du rayon cylindrique. Profils de $\sqrt{\{B_s^2\}}$ en mT en fonction du rayon cylindrique. Résultats des calculs de Buffett et al. (2009) (trait plein : inversion sur 1850-1990, tirets larges : moyenne de trois inversions sur des sous-parties de 60 ans de la fenêtre temporelle), trait plein gris : solution de Zatman et Bloxham (1997), tirets gris : estimation d'un modèle de geodynamo (Matsui et Okuda 2004). Figure tirée de Buffett et al. (2009).

$s = 0.85 r_o$. L'intensité rms de B_s est de l'ordre de 0.4 mT. Au modèle d'ondes de torsion était ajouté un terme de friction à la frontière noyau-manteau qui servait pour l'atténuation et l'excitation des ondes.

Buffett et Mound (2005) développent un formalisme pour calculer les fonctions de Green en étudiant la réponse impulsionnelle du système noyau-graine-manteau. L'objectif est d'isoler les propriétés de propagation des ondes du mécanisme d'excitation. Buffett et al. (2009) utilisent cette approche pour séparer les propriétés de propagation des ondes de leur excitation. Ils considèrent des ondes de torsion et un couplage gravitationnel entre la graine et le manteau. Ils remarquent qu'on ne connaît pas parfaitement le champ de vitesse géostrophique mais seulement sa projection sur les plus bas degrés harmoniques ($n = 1, 3, 5$). Par conséquent, ces données ne sont pas assez discriminantes pour valider un modèle physique. Leur étude inclut le cylindre tangent à proximité duquel leur modèle de $\{B_s^2\}$ présente un gradient important. À l'extérieur du cylindre tangent, ce modèle a son maximum autour de $s = 0.55r_o$ à 0.3 mT, comme le montrent les courbes noires de la figure 4.1. Ils se servent d'une estimation du champ magnétique à la frontière noyau-manteau de 0.3 mT pour contraindre leur modèle de $\{B_s^2\}$ à l'intérieur du noyau. Ils trouvent de plus que le couplage gravitationnel entre la graine et le manteau est important.

Des hypothèses similaires (ondes de torsion, couplage gravitationnel) avaient été proposées par Mound et Buffett (2003) pour expliquer un signal à 6 ans dans les variations de longueurs du jour. Ce signal a été mis en évidence par Abarca del Rio et al. (2000). En effet, ils considèrent des ondes de torsion lentes, dont le mode fondamental a une période de 60 ans, ils pensent que le couplage gravitationnel excite un mode à 6 ans.

Dans ce travail, nous proposons une autre explication pour ce signal à 6 ans avec des ondes de torsion, basée sur une méthodologie différente, qui permet de lever un paradoxe : les lois d'échelles relient le champ dipolaire à la surface obtenu par des codes de dynamo à l'intensité rms du champ magnétique plus forte dans le volume du fluide et donnent ainsi une estimation de 2 mT (Christensen et al. 2009). Avec un champ magnétique de cet ordre de grandeur, les ondes de torsion associées sont alors plus rapides et l'écoulement associé peut porter un moment cinétique dont les variations expliquent le signal à 6 ans dans les variations de longueur du jour. Par rapport à Buffett et al. (2009), nous aurons l'avantage de disposer d'une statistique d'erreur sur les coefficients de la vitesse géostrophique.

Contexte de cette étude Cette partie fait l'objet d'un article soumis avec Nicolas Gillet (CNRS Grenoble), Dominique Jault et Alexandre Fournier (cet article est en annexe G). Un signal à 6 ans dans les observations de la longueur du jour est bien expliqué par l'inversion de Gillet et al. (2009b), avec l'hypothèse quasi-géostrophique, des observations de variation séculaire telles que je les ai décrites dans la section 3.1. Ensuite, l'écoulement résultant de cette inversion a été filtré à 6 ans. L'écoulement zonal ainsi obtenu est représenté en fonction du temps sur la figure 4.9. Il indique une propagation radiale depuis la graine vers l'équateur et, à l'intérieur du cylindre tangent, depuis la graine vers l'axe de rotation, ce qui fait penser à un scénario d'ondes progressives de torsion.

Avec une modélisation dynamique des ondes de torsion dans le noyau, on vérifie ce scénario à l'extérieur du cylindre tangent. Cela nous permet de proposer une intensité rms du champ magnétique compatible avec les observations, ainsi que son profil radial.

Le modèle d'ondes de torsion et le modèle adjoint sont présentés dans la section 4.2 comme sous-partie du modèle décrit par les équations 2.36 à 2.40 de la section 2.3.3. Je montre ensuite des expériences jumelles de validation (section 4.3) avant de procéder à l'assimilation de données d'écoulement dans le noyau pour l'obtention d'une intensité et d'un profil pour le champ magnétique $\{B_s^2\}$ à l'intérieur du noyau, en accord avec des ondes de torsion rapides dans le noyau (sections 4.3 et suivantes).

4.2 Modèles direct et adjoint des ondes de torsion

4.2.1 Modèle direct

Les ondes de torsion peuvent être étudiées comme une sous-partie du modèle dynamique complet (on garde également l'adimensionnement des variables présenté dans la partie 2.3.3), mais comme ces ondes sont des mouvements géostrophiques et axisymétriques, on abandonne l'écoulement non-zonal des équations (2.36) to

(2.40) (L'encadré 5 rappelle le modèle quasi-géostrophique complet afin de mettre en évidence la sous-partie considérée dans cette section).

Le résumé synthétique des équations du modèle quasi-géostrophique (équations (2.36) à (2.40) et (2.26)) est rappelé dans l'encadré 2 page 40.

Les ondes de torsion sont des mouvements géostrophiques, on abandonne donc l'écoulement non-zonal dans les équations du modèle ; il reste

$$\begin{aligned}\partial_t \omega_g &= (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \langle B_s B_\varphi \rangle), \\ \partial_t \langle B_s^2 \rangle &= -u_\varphi \partial_\varphi \langle B_s^2 \rangle, \\ \partial_t \langle B_\varphi^2 \rangle &= -u_\varphi \partial_\varphi \langle B_\varphi^2 \rangle + 2s \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi^0), \\ \partial_t \langle B_s B_\varphi \rangle &= -u_\varphi \partial_\varphi \langle B_s B_\varphi \rangle + s \langle B_s^2 \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi^0).\end{aligned}\quad (4.5)$$

On s'intéresse à la projection du système sur ces cylindres géostrophiques en appliquant la moyenne sur un cylindre géostrophique définie par l'équation 4.6

$$\begin{aligned}\partial_t \omega_g &= (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \{B_s B_\varphi\}), \\ \partial_t \{B_s^2\} &= 0, \\ \partial_t \{B_\varphi^2\} &= 2s \{B_s B_\varphi\} \partial_s \omega_g, \\ \partial_t \{B_s B_\varphi\} &= s \{B_s^2\} \partial_s \omega_g,\end{aligned}$$

À la frontière noyau-manteau, l'équation d'induction radiale se résume à l'interaction entre l'écoulement zonal et le champ magnétique radial :

$$\partial_t B_r = -\omega_g \partial_\varphi B_r.$$

Encadré 5 – Lien entre le modèle complet et l'étude des ondes de torsion.

En plus de la moyenne verticale, $\langle \cdot \rangle$, introduite dans l'équation (2.32), on définit la moyenne sur un cylindre géostrophique, $\{ \cdot \}$, par

$$\{X\}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle X \rangle(s, \varphi) d\varphi. \quad (4.6)$$

On applique la moyenne sur un cylindre géostrophique $\{ \cdot \}$ à l'équation (2.37), ce qui donne

$$\partial_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \{B_s B_\varphi\}). \quad (4.7)$$

Par le même procédé, les équations d'évolution des quantités magnétiques deviennent

$$\partial_t \{B_s^2\} = 0, \quad (4.8)$$

$$\partial_t \{B_s B_\varphi\} = s \{B_s^2\} \partial_s \omega_g. \quad (4.9)$$

Écrite en termes de vitesse angulaire géostrophique ω_g , l'équation des ondes de torsion est

$$\partial_t^2 \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g). \quad (4.10)$$

L'équation du second ordre (4.10) peut se réécrire comme deux équations du premier ordre

$$\partial_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s \tau, \quad (4.11)$$

$$\partial_t \tau = s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g, \quad (4.12)$$

dans lesquelles $\tau = s^2 h \{B_s B_\varphi\}$ est une variable auxiliaire.

Projetés à la frontière noyau-manteau, ces mouvements interagissent avec B_r via l'équation d'induction radiale sans diffusion (2.26), qui se simplifie ici sous la forme

$$\partial_t B_r = -\omega_g \partial_\varphi B_r. \quad (4.13)$$

Dans ce chapitre, j'utilise le modèle d'ondes de torsion d'une part pour réaliser des expériences jumelles, d'autre part pour assimiler des pseudo-observations de champ de vitesse à la surface du noyau. Les conditions aux limites du modèle sont différentes pour ces deux applications.

Pour les expériences jumelles de la section 4.3, la condition à la frontière noyau-manteau est en effet

$$\partial_s \omega_g = 0, \quad \text{en } s = r_o. \quad (4.14)$$

Dans ce cas, la condition au cylindre tangent

$$\partial_s \omega_g = 0, \quad \text{en } s = r_i, \quad (4.15)$$

assure la conservation du moment cinétique total porté par le fluide dans le domaine d'étude.

Dans le cadre de l'application géophysique de la section 4.4, la condition à la frontière noyau-manteau sera

$$\tau = 0, \quad \text{en } s = r_o. \quad (4.16)$$

On ajoutera un couple au cylindre tangent présent à travers la condition au cylindre tangent

$$\partial_s \omega_g = (\partial_s \omega_g)^{obs}, \quad \text{en } s = r_i \text{ et quelque soit } t. \quad (4.17)$$

Je décris en détail comment obtenir $(\partial_s \omega_g)^{obs}$ dans la section 4.4.3.

L'état du système est composé de la vitesse angulaire géostrophique ω_g , de la variable τ , de la moyenne cylindrique de la composante dans la direction s du du champ magnétique, $\{B_s^2\}$, et de la composante radiale du champ magnétique à la frontière noyau-manteau, B_r .

Influence d'une couche conductrice à la base du manteau La présence d'une couche conductrice à la base du manteau implique un couplage entre le noyau fluide et le manteau. À la frontière noyau-manteau, les mouvements zonaux cisailent le champ méridien. Des courants électriques résultants bouclent dans cette couche ce qui crée le couplage électromagnétique noyau-manteau dont l'intensité dépend

de la conductance de cette couche et du profil du champ magnétique radial à la surface du noyau. La force de Lorentz associée à ces courants est fonction du champ magnétique \mathbf{b}_Δ à l'intérieur de la couche.

Soit σ_m la conductivité de la couche et Δ sa taille. La conductance de la couche est alors $G = \sigma_m \Delta$.

En utilisant la continuité de la composante horizontale du champ électrique de part et d'autre de la frontière noyau-manteau, ainsi que les approximations de couche limite, on montre que la composante azimutale $b_{\Delta\varphi}$ qui intervient dans le calcul de la force de Lorentz s'exprime sous forme adimensionnée (le calcul est détaillé p. 111-112 de la thèse de Légaut (2005))

$$b_{\Delta\varphi} = -Gs\omega_g B_r. \quad (4.18)$$

Le système d'équation des ondes de torsion devient alors

$$\partial_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s \tau + T_A G_o \frac{r_o G \tilde{B}_r^2}{h^2} \omega_g, \quad (4.19)$$

$$\partial_t \tau = s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g. \quad (4.20)$$

La période des ondes d'Alfvén T_A est utilisée pour écrire cette équation sans dimension ; de même on a choisi $G_o = 10^8$ S comme échelle caractéristique de conductance (cette valeur correspond à la valeur minimale nécessaire pour Buffett et al. (2002) pour expliquer l'atténuation d'un signal de période diurne comme la nutation par un couple électromagnétique). La quantité

$$\tilde{B}_r^2 = \frac{1}{4\pi} \oint [B_r^2(s, \varphi, h) + B_r^2(s, \varphi, -h)] d\varphi \quad (4.21)$$

sera calculée avec un champ magnétique radial uniforme de 0,5 mT.

La présence d'une couche conductrice à la base du manteau implique l'existence d'un couple électromagnétique à la frontière noyau-manteau. Si on l'ajoute un couple au cylindre tangent présent à travers la condition au cylindre tangent $\partial_s \omega_g(r_i, t)$, l'évolution temporelle de la somme de ces deux couples doit correspondre à dérivée temporelle des observations de variations de longueur du jour à 6 ans.

Le système d'équation (4.45) et (4.46), avec la condition au cylindre tangent $\partial_s \omega_g(r_i, t)$, est celui qui va être utilisé dans le cadre de l'application géophysique de la section 4.4.

4.2.2 Modèle adjoint

Dans ce paragraphe, je décris une itération du modèle linéaire tangent associé au modèle des ondes de torsion, puis je développe une itération vers le passé du modèle adjoint. Tout comme lors de la description du modèle adjoint dans la section 3.4.1, j'utilise ici de nombreuses séquences simples de l'annexe D.

La description d'une itération du modèle repose sur le choix d'une discrétisation temporelle et spatiale. Comme dans le cas stationnaire (voir encadré 4 page 64), j'utilise des différences finies en temps et en espace sauf pour les dérivées longitudinales de B_r , calculées dans l'espace spectral en utilisant la transformée de Fourier rapide. Cependant, les variables du modèle des ondes de torsion sont discrétisées

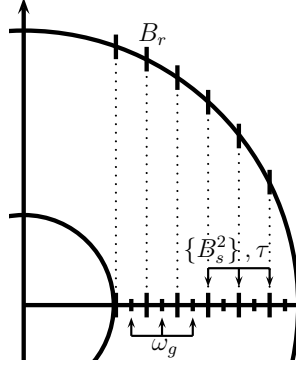


FIG. 4.2 – Schémas d'une grille en quinconce régulière dans le plan équatorial et sa projection à la frontière noyau-manteau.

sur une grille en quinconce irrégulière (la figure 4.2 montre la grille en quinconce régulière et la répartition des variables sur cette grille), $s = i_s \Delta_s(s); i_s \in [0, N_s]$; $\omega_g(i_s + 1/2, j)$ et $\tau(i_s, j)$. $\{B_s^2\}$ et τ sont calculés sur la même grille spatiale ($\{B_s^2\}$ n'est pas défini sur les points aux bords).

Une itération du modèle linéaire tangent (la prise en compte d'une couche conductrice est réalisée dans le paragraphe suivant), i désignant une itération temporelle, s'écrit

$$\delta\omega_g(i+1) = \delta\omega_g(i) + \Delta_t (s^3 h)^{-1} \partial_s \delta\tau(i) \quad (4.22)$$

$$\delta\tau(i+1) = \delta\tau(i) + \Delta_t s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \delta\omega_g(i) + \Delta_t s^3 h \delta \{B_s^2\} \partial_s \omega_g(i), \quad (4.23)$$

$$\delta B_r(i+1) = \delta B_r(i) - \Delta_t M_s^\theta \delta\omega_g(i) \partial_\varphi B_r(i) - \Delta_t M_s^\theta \omega_g(i) \partial_\varphi \delta B_r(i) \quad (4.24)$$

où l'opérateur M_s^θ projette ω_g du plan équatorial vers la frontière noyau-manteau et $\delta\omega_g, \delta\tau, \delta \{B_s^2\}$ et δB_r sont les différentielles de $\omega_g, \tau, \{B_s^2\}, B_r$ respectivement.

On définit $\omega_g^T, \tau^T, \{B_s^2\}^T, B_r^T$ les variables adjointes de $\omega_g, \tau, \{B_s^2\}, B_r$ respectivement.

Le modèle adjoint des équations (4.22) à (4.24) commence par le forçage dû à l'écart entre prédictions du modèle et observations (voir également la séquence 4 de l'annexe D) :

$$B_r^T(i) = B_r^T(i) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} B_r - B_r^o), \quad (4.25)$$

puis le modèle se complète par l'adjoint de l'équation (4.24) :

$$\omega_g^T(i) = \omega_g^T(i) - \Delta_t M_s^{\theta, T} [\partial_\varphi B_r(i) B_r^T(i)], \quad (4.26)$$

$$B_r^T(i) = B_r^T(i+1) - \Delta_t \partial_\varphi^T [M_s^\theta \omega_g(i) B_r^T(i)], \quad (4.27)$$

$$B_r^T(i+1) = 0, \quad (4.28)$$

puis l'adjoint de l'équation (4.23),

$$\omega_g^T(i) = \omega_g^T(i+1) + \Delta_t \partial_s^T [s^3 h \{B_s^2\} \tau^T(i)], \quad (4.29)$$

$$\tau^T(i) = \tau^T(i), \quad (4.30)$$

$$\{B_s^2\}^T = \{B_s^2\}^T + \Delta_t s^3 h \partial_s \omega_g(i) \tau^T(i). \quad (4.31)$$

L'adjoint de l'équation (4.22) s'écrit

$$\omega_g^T(i) = \omega_g^T(i), \quad (4.32)$$

$$\tau^T(i) = \tau^T(i+1) + \Delta_t \partial_s^T \left[(s^3 h)^{-1} \omega_g^T(i) \right] \quad (4.33)$$

Dans ces équations, ∂_s^T et ∂_φ^T sont les adjoints des opérateurs différentiels ∂_s and ∂_φ (voir également la séquence 2 de l'annexe D).

Pour assurer sa positivité pendant la phase d'optimisation, $\{B_s^2\}$ est écrit $\{B_s^2\} = \exp[F(s)]$, avec $F \in \mathbb{R}$, et l'équation 4.31 est remplacée par

$$F^T = F^T + \Delta_t s^3 h \partial_s \omega_g(i) \tau^T(i) \{B_s^2\}, \quad (4.34)$$

car

$$F^T(s) = \{B_s^2\} \{B_s^2\}^T. \quad (4.35)$$

Nous ajoutons une contrainte qui vise à pénaliser la dérivée seconde de la fonction $F : \mathbf{W} = \partial_s^T \partial_s$ dans l'équation (3.20). L'obtention de la condition associée à cette contrainte dans le calcul du gradient est détaillée à partir de l'équation (3.20) pour l'obtention de l'équation 3.32. D'après cette équation, on ajoute $\alpha_C \mathbf{W}F(s)$ à la variable $F^T(s)$ à la fin de l'intégration du modèle adjoint :

$$F^T(s) = F^T(s) + \alpha_C \partial_s^T \partial_s F(s). \quad (4.36)$$

Le modèle commence par le forçage due aux écarts entre prédictions et observations (équation (3.26) et annexe D). Les conditions aux limites pour le modèle adjoint sont $\tau^T = 0$, en $s = r_i$ et $s = r_o$.

Traitement de l'influence d'une couche conductrice à la base du manteau

Si on ne considère ici que la partie de code directe associée à la présence de la couche conductrice à la base du manteau, cette dernière s'écrit

$$\partial_t \omega_g = T_A G_o \frac{r_o G \tilde{B}_r^2}{h^2} \omega_g. \quad (4.37)$$

L'adjoint de cette séquence lorsque la conductance G et la vitesse angulaire ω_g sont des variables de contrôle est

$$\omega_g^T(i) = \omega_g^T(i+1) + \Delta_t T_A G_o \frac{r_o G \tilde{B}_r^2}{h^2} \omega_g^T(i+1), \quad (4.38)$$

$$\omega_g^T(i+1) = 0, \quad (4.39)$$

$$G^T = \sum_{j=0}^T \sum_{i=0}^{N_s} \Delta_t T_A G_o \frac{r_o \tilde{B}_r^2}{h_i^2} \omega_g \omega_g^T, \quad (4.40)$$

dans laquelle G^T est la variable adjointe de G .

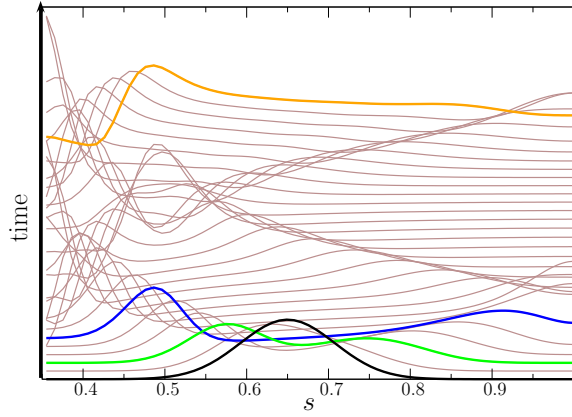


FIG. 4.3 – Résultat d’expériences jumelles avec des ondes de torsion : profils successifs de vitesse angulaire ω_g , montrant la propagation d’une onde de torsion à travers le domaine d’étude $s \in [0.35, 1]$ pendant 1.16 temps d’Alfvén T_A . Condition initiale (noir) pour ω_g , et instantanés aux temps 0.12 (vert), 0.18 (bleu) et 1.16 T_A (orange).

4.3 Expériences jumelles

Cette série d’expériences jumelles a le même objectif et le même mode opératoire que les expériences de la section 3.4 et le même opérateur d’observations H qui prend en compte notre vision uniquement grande échelle du champ magnétique du noyau (voir le paragraphe 3.4.2).

Dans les expériences suivantes, le jeu d’estimations initiales qui définissent l’état vrai est

1. le même $B_r^t(\theta, \varphi, t = 0)$ que dans les expériences de la section 3.4.2,
2. une fonction Gaussienne pour la vitesse angulaire : $\omega_g^t(s, 0) = \omega_0 \exp[-\sigma_\omega^{-2}(s - s_\omega)^2]$, avec $\sigma_\omega^{-2} = 150$ et $s_\omega = 0.65$; elle satisfait les conditions aux limites (4.14) et (4.17), son intensité est mise à l’échelle par ω_0 (voir également plus bas),
3. $\tau^t(s, 0) = 0$,

4. une fonction arbitraire $\{B_s^2\}^t$ (voir la courbe noire sur la figure 4.4, à droite) donnée par :

$$\{B_s^2\}^t(s) = c_1 + c_2 \sin(\pi/2 - L) + c_3 \exp\left[-\sigma_B^{-2}(s - s_B)^2\right], \text{ avec } c_1 = 0.1, \\ c_2 = 0.02, c_3 = 1, \sigma_B^{-2} = 20, s_B = 0.8 \text{ et } L = 14s. \text{ Il est mis à l'échelle pour avoir un champ magnétique rms sans dimension d'ordre 1; la mise à l'échelle } B_0 \text{ est telle que } \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} B_s^2 ds d\varphi = B_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} ds d\varphi.$$

Comme les vitesses sont mises à l’échelle par la vitesse des ondes d’Alfvén, ω_0 est le rapport entre la période des ondes d’Alfvén et le temps d’advection $\omega_0 = T_A/t_{adv}$.

Dans ce problème on recherche à la fois le profil stationnaire de champ magnétique $\{B_s^2\}$ et le profil initial pour le champ de vitesse ω_g qui expliquent au mieux la base de données synthétique de B_r^o . Nos premières estimations sont des profils plats : $\omega_g^g(s, 0) = 0.1\omega_0$ et $\{B_s^2\}^g = 0.6$ (voir les courbes rouges de la figure 4.4).

On montre ici des expériences avec une fréquence fixée d’observations $f_y = 27,8 T_A^{-1}$ et autant d’observations que de points de grille ($N_\theta = 100, N_\phi =$

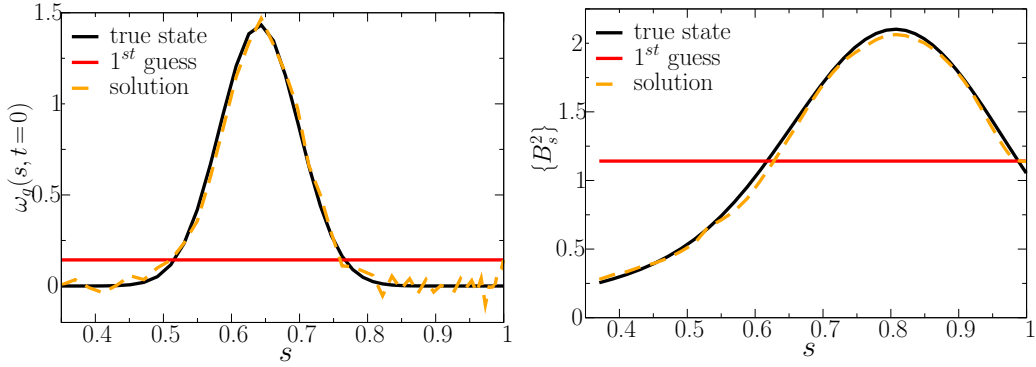


FIG. 4.4 – Résultat d’expériences jumelles avec des ondes de torsion : état vrai (noir), profil avant assimilation (rouge) et solution après assimilation (tirets orange) pour ω_g (gauche) et $\{B_s^2\}(s)$ (droite). Les paramètres de cette référence sont $\omega_0 = 0.34$ and $T = 1.16 T_A$. On pénalise la dérivée spatiale de $\{B_s^2\}$, l’amplitude de cette pénalisation est $\alpha_C = 10^{-8}$ dans la fonction coût (compléments d’information dans le texte).

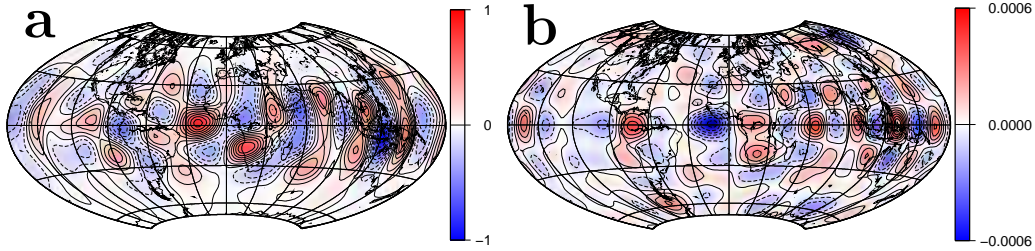


FIG. 4.5 – Différence relative entre les observations et les prédictions HB_r au temps final, $[B_r^o(T) - \text{HB}_r^f(T)] / \|B_r^o(T)\|_2$ avant assimilation (a) et après assimilation (b) pour le cas de référence (paramètres identiques à la figure 4.4). Les contours sont dessinés tous les 0.1 (a) et 10^{-4} (b) (solide (resp. tirets) pour les valeurs positives (resp. négatives)). Les extrema sont $[-0.94; 0.86]$ (a) et $[-6.4; 7.2] \times 10^{-4}$ (b).

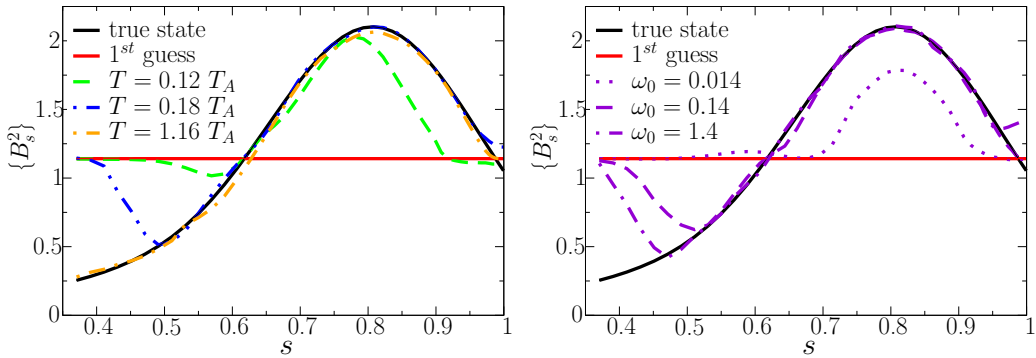


FIG. 4.6 – Effet de la taille de la fenêtre d’assimilation T (gauche) et de l’amplitude de la vitesse initiale ω_0 (droite). Gauche : état vrai (noir), profil avant assimilation (rouge) et solution après assimilation (tirets verts, tirets-double-point bleus, tiret-point orange) pour $\{B_s^2\}(s)$, pour différentes valeurs de T (0.12, 0.18 et $1.16 T_A$ respectivement) pour $\omega_0 = 0.34$ fixé. Droite : état vrai (noir), profil avant assimilation (rouge) et solution après assimilation (violet) pour $\{B_s^2\}(s)$, Les courbes violettes pointillé, tiretées, tiret-point correspondent à des valeurs de l’amplitude de la vitesse initiale $\omega_0 = 0.014, 0.14$ et 1.4 , respectivement. T est fixé à $0.18 T_A$.

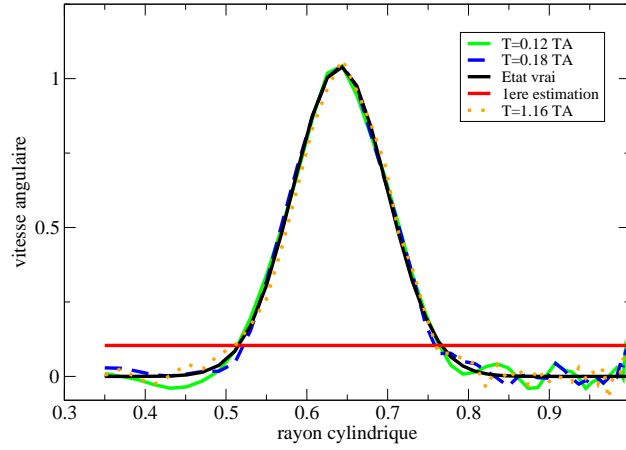


FIG. 4.7 – Effet de la taille de la fenêtre d’assimilation T . État vrai (noir), profil avant assimilation (rouge) et solution après assimilation (trait plein verts, tirets bleus, pointillé orange) pour la vitesse angulaire $\omega_g(s)$, pour différentes valeurs de T (0.12, 0.18 et 1.16 T_A respectivement). ω_0 est fixé à 0.34.

33). Dans ce cas, on a $100 \times 33 = 3300$ observations par époque d’observation alors que le nombre de paramètres de contrôle est de $49 + 50 = 99$ (on recherche ω_g et $\{B_s^2\}$ qui sont zonaux et dans le plan équatorial). Les observations correspondent à une vision floue de l’état vrai en correspondance avec l’utilisation d’une fonction moyenne (équation (3.57)), ce qui cause des erreurs. En conséquence, la solution peut développer des petites échelles qui ne sont pas contraintes par les observations. L’ajout d’un terme de lissage dans la fonction coût permet de réduire la complexité de la solution : on prend $\alpha_C = 10^{-8}$ dans l’équation (3.18). On pénalise ici seulement les forts gradients de $\{B_s^2\}$. Le cas de référence (avec $\omega_0 = 0.34$ et $T = 1.16 T_A$, voir les figures 4.4 et 4.5) montre que la vitesse angulaire et le champ magnétique à l’intérieur du noyau sont bien retrouvés. Comme montré sur la figure 4.5, les erreurs d’analyse sont bien plus faibles après assimilation.

L’algorithme M1QN3 (Gilbert et Lemaréchal 1989) utilisé pour l’optimisation s’arrête dans ce cas lorsque l’écart au données initial est divisé par un facteur 4×10^5 , ce qui est atteint en 214 itérations.

Pour comprendre l’effet de la longueur de la fenêtre d’assimilation T sur les solutions, on la fait varier entre 0.12 et 1.16 T_A , en gardant ω_0 constant, égal à 0.34 comme ci-dessus. La vitesse angulaire géostrophique est complètement retrouvée dans tous les cas, comme montré sur la figure 4.7, avec des oscillations parasites près de la frontière externe. D’autre part, la zone sur laquelle $\{B_s^2\}$ est correctement retrouvée augmente avec T , ce qui indique que la zone d’assimilation dépend de la distance sur laquelle la gaussienne initiale s’est propagée (Figure 4.6, à gauche). La figure 4.3 montre que, si $T = 1.16 T_A$, l’onde a suffisamment de temps pour explorer le domaine entier. En revanche, si $T = 0.12$ ou 0.18 T_A , une plus petite partie du domaine est visité par l’onde, sur laquelle $\{B_s^2\}$ a été effectivement retrouvé. La vitesse angulaire est mieux retrouvée que $\{B_s^2\}$ parce qu’elle est directement connectée aux observations au contraire de $\{B_s^2\}$. Cela peut se voir dans les équations adjointes : ω_g^T (équation (4.26)) dépend de B_r^T qui contient B_r^o , la quantité

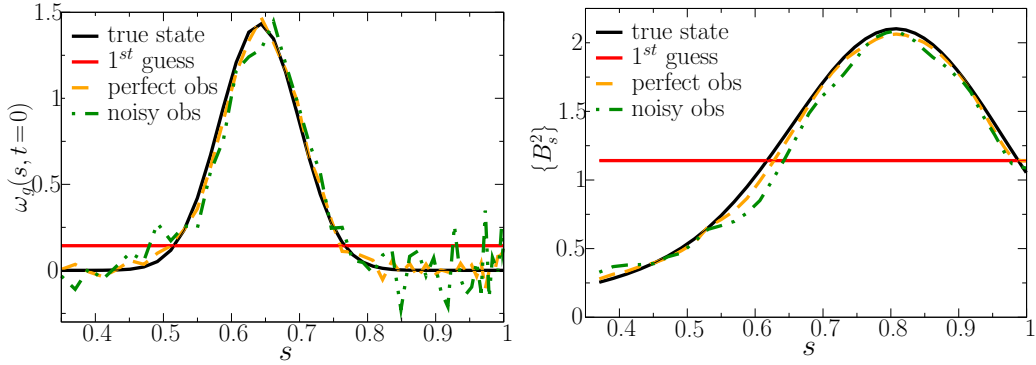


FIG. 4.8 – Résultat d’expériences jumelles avec des ondes de torsion, en présence de données bruitées : état vrai (noir), profil avant assimilation (rouge) et solution après assimilation (orange, vert) pour ω_g (gauche) et $\{B_s^2\}$ (droite). Les courbes en tiret-orange sont calculées avec des observations parfaites, les courbes tiret-point-verts avec des erreurs d’observations gaussiennes, centrées, selon une distribution normale, de déviation standard $10^{-1}B_r^{rms}$. On pénalise des forts gradient spatiaux de $\{B_s^2\}$, avec une amplitude $\alpha_C = 10^{-8}$. La fenêtre d’assimilation est $T = 1.16 T_A$, et $\omega_0 = 0.34$.

observée, alors que $\{B_s^2\}^T$ (équation (4.31)) n’est connecté directement qu’à τ^T . Ensuite, τ^T voit ω_g^T , qui est finalement relié aux observations.

Pour une longueur T fixée à $0.18 T_A$, on a étudié la dépendance des solutions à l’amplitude ω_0 (Figure 4.6, à droite). Pour $\omega_0 = 0.014$, ω_g et $\{B_s^2\}$ ne sont pas correctement retrouvés. En partant de $\omega_0 = 0.14$, en revanche, augmenter ω_0 de plus d’un ordre de grandeur n’a que peu d’effet sur $\{B_s^2\}$ et pas d’effet sur ω_g^a .

Les solutions sont sensibles au profil de conditions initiales (pour l’état vrai et la première estimation) et à la quantité de mesures, comme dans le cas stationnaire de la section 3.4.

Jusqu’à maintenant on a supposé des observations parfaites : $\epsilon = \mathbf{0}$ dans l’équation (3.17). En vu d’applications géophysiques futures, l’erreur d’observation doit être prise en compte. Dans l’expérience suivante, on assimile des observations contaminées par des erreurs. On ajoute donc à la base de données précédente, des erreurs d’observation gaussiennes, de déviation standard $10^{-1}B_r^{rms}$. Cette expérience est réalisée avec une fenêtre d’assimilation de $1.16 T_A$. Même avec cette base de données, on retrouve la forme et l’intensité de l’état vrai (voir la figure 4.8). $\{B_s^2\}$ semble moins sensible aux erreurs d’observations que ω_g parce qu’il y a toujours le terme de lissage dans la fonction coût. Plus globalement la présence d’erreur dégrade la solution de chacune des variables.

En diminuant la fréquence temporelle d’observations, nous avons observé qu’il est possible de retrouver l’état vrai si la fréquence d’observations, f_y , est plus grande que $4 T_A^{-1}$.

Dans ces expériences, on a montré qu’il était possible de retrouver une quantité $\{B_s^2\}$ cachée dans le noyau, connectée aux observations par le biais de la dynamique. En étudiant la qualité de la solution en fonction de la taille de la fenêtre d’assimilation, on a mis en avant qu’il fallait qu’il y ait suffisamment de dynamique pour que la solution soit bien retrouvée. La pénalisation des gradients spatiaux de

$\{B_s^2\}$ s'est avérée être un moyen efficace pour produire des analyses avec un niveau modéré de complexité.

4.4 Application géophysique : ondes de torsion dans le noyau terrestre

Dans l'étude géophysique qui suit, on n'utilise plus des observations synthétiques de B_r à la surface noyau-manteau, mais un champ de vitesse géophysique à la frontière noyau-manteau, résultat d'une inversion précédente. En conséquence, les « données » ou « observations » dans la suite de cette section sont plutôt des *pseudo*-observations.

4.4.1 Inversions d'ensemble pour l'obtention d'écoulements

Ces inversions sont décrites de façon générale dans le chapitre 3.1, et cette inversion en particulier est réalisée et décrite dans leur article par Gillet et al. (2009b). Il s'agit de l'inversion de modèles du champ magnétique pour l'obtention de modèle de champ de vitesse à la frontière noyau-manteau. Comme l'écoulement est supposé quasi-géostrophique, l'écoulement inversé n'est pas limité à la surface du noyau mais décrit les mouvements en volume en relation avec l'hypothèse d'invariance axiale (voir la figure 3.1). L'écoulement est décrit par deux scalaires, un scalaire poloïdal et un scalaire toroïdal, eux-mêmes décomposés sur la base des harmoniques sphériques et tronqués au degré et à l'ordre 22. La dépendance en temps est paramétrée comme indiqué dans l'équation 3.13. De plus, il s'agit d'inversions d'ensemble, l'ensemble comportant $K = 20$ membres. La solution est alors l'écoulement obtenu par moyenne d'ensemble (représenté dans la figure 3.1), tandis que les erreurs sur les solutions sont estimées à partir de la dispersion de chaque membre autour de la moyenne.

On étudiera la capacité de sa composante zonale à prédire les variations de longueur du jour. Or, les mesures de période de rotation de la Terre ont gagné en précision avec l'utilisation de l'horloge atomique en 1955 qui a pris le relais des horloges astronomiques réglées par la révolution de la Terre ou de Vénus autour du soleil, et de la lune autour de la Terre. D'autre part, les prédictions des écoulements calculés à partir de modèles de champ ne sont pas bien reproduites à partir des années 1980-1985 (voir la discussion de ce problème ci-dessus section 4.1). En conséquence, les inversions sont restreintes à la fenêtre temporelle 1955-1985.

La figure 4.9 montre l'écoulement géostrophique, filtré autour de 6 ans en fonction du temps et du rayon cylindrique. Les couleurs correspondent aux vitesses vers l'Ouest (bleu) ou vers l'Est (rouge). Cette figure montre une propagation qui part de la graine vers l'équateur de la surface du noyau, et vers l'axe ($s = 0$).

Cet écoulement porte un moment cinétique qui s'accorde bien avec les données de longueur du jour comme en témoigne la figure 4.11. Cette figure regroupe trois graphes visant à montrer la bonne corrélation entre ces deux séries temporelles. Les graphes en haut de la figure 4.11 correspondent aux spectres de cohérence et de décalage de phase entre les deux séries. Les zones vertes correspondent aux fréquences pour lesquelles le décalage de phase est inférieur à 30 degrés. Le spectre

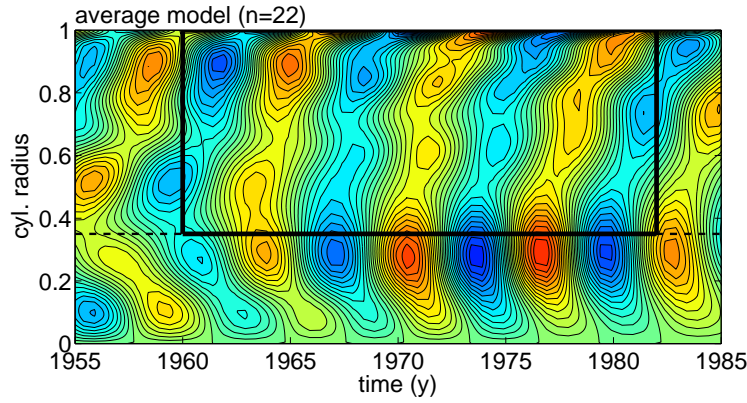


FIG. 4.9 – Contours de vitesse azimutale en fonction du temps en abscisse et du rayon cylindrique en ordonnée. Les couleurs correspondent aux vitesses azimutales vers l’Ouest (bleu) ou vers l’Est (rouge). Les extrema de l’échelle de couleur sont -3×10^{-4} ; 3×10^{-4} et les contours sont tracés tous les 2×10^{-5} . Les vitesses sont adimensionnées par $V_A = 10^3$ km/an. Les extrema sont $-2,8 \times 10^{-4}$; $2,6 \times 10^{-4}$ (zone encadrée). Solution moyenne de l’inversion d’ensemble jusqu’au degré 22, filtrée à 6 ans. La zone encadrée délimite la zone de l’étude : extérieur du cylindre tangent entre 1960 et 1982.

de cohérence a deux pics, pour les basses fréquences et pour les périodes de 6 ans. La figure du bas regroupe les données et les prédictions des variations de longueur du jour en fonction du temps. Les observations sont en noir, les prédictions par les écoulements de la méthode d’ensemble sont en vert, trait fin pour chaque membre et trait épais pour la moyenne. La courbe rouge est une prédiction après optimisation (voir plus bas).

L’accord sur la longueur du jour étant particulièrement réussi entre 1960 et 1982, c’est sur cette période que j’utilise l’écoulement zonal comme *pseudo*-observations pour l’étude des ondes de torsion dans le noyau. La zone d’étude correspond à la zone encadrée d’un trait épais sur la figure 4.9.

4.4.2 *Pseudo*-observations

Les données utilisées sont des coefficients d’harmoniques sphériques d’un champ de vitesse quasi-géostrophique. Par ailleurs, on ne s’intéresse qu’à la partie filtrée autour de 6 ans de ce signal, et à sa partie zonale.

Les données résultantes sont des coefficients toroïdaux zonaux et de degrés harmoniques impairs (symétrie par rapport à l’équateur). De toute façon, comme la symétrie par rapport à l’équateur était imposée dans la première inversion, les coefficients toroïdaux zonaux pairs sont quasiment nuls.

En résumé, le vecteur d’observation est

$$\mathbf{y}(t) = [t_1^0(t), t_3^0(t), t_5^0(t), \dots, t_{n_{max}}^0(t)]^T, \quad (4.41)$$

filtré à 6 ans. Ces coefficients sont reliés à la vraie vitesse géostrophique u_φ^t par l’opérateur d’observations \mathbf{H}

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}u_\varphi^t(s, t) + \epsilon, \quad (4.42)$$

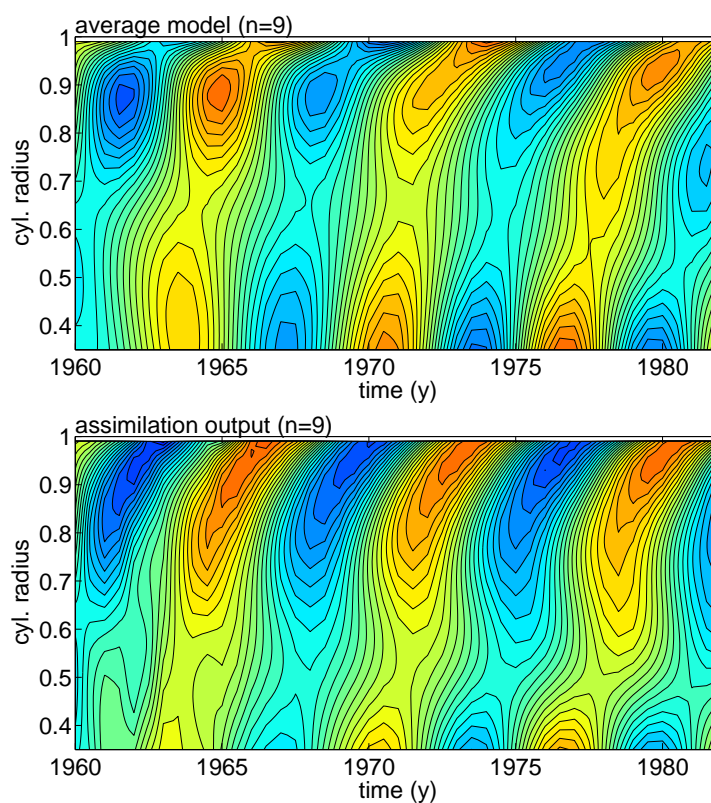


FIG. 4.10 – Contours de vitesse azimutale en fonction du temps en abscisse et du rayon cylindrique en ordonnée. Les couleurs correspondent aux vitesses azimutales vers l'Ouest (bleu) ou vers l'Est (rouge). Les extrema de l'échelle de couleur sont -3×10^{-4} ; 3×10^{-4} et les contours sont tracés tous les 2×10^{-5} . Les vitesses sont adimensionnées par $V_A = 10^3$ km/an. Les extrema sont $-2,7 \times 10^{-4}$; $2,7 \times 10^{-4}$. Haut : solution moyenne de l'inversion d'ensemble jusqu'au degré harmonique $n = 9$, filtrée autour de 6 ans, à l'extérieur du cylindre tangent entre 1960 et 1982. Il s'agit donc du champ de vitesse dont les coefficients toroïdaux zonaux impairs sont utilisés comme *pseudo*-observations dans l'étude d'assimilation. Bas : Prédiction de vitesse azimutale après assimilation, jusqu'au degré $n = 9$ (voir la section résultats).

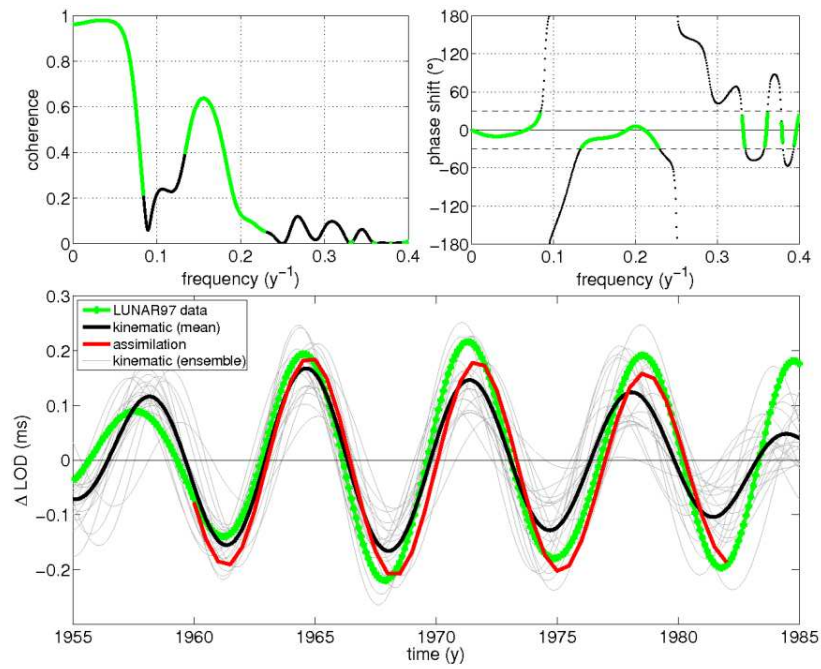


FIG. 4.11 – Haut : Spectre de cohérence (gauche) et de décalage de phase (droite) entre les observations de variations de longueur du jour et les prédictions de l'inversion d'ensemble filtrées autour de 6 ans. Les zones vertes sont celles où les deux séries sont en phase (déphasage inférieur à 30 degrés). Les séries sont cohérentes et en phase pour des fréquences autour de 0.15 (6 ans). Bas : observations (courbe noire) et prédiction des variations de la longueur du jour à partir des inversions d'ensemble (vert : membre, rouge : solution moyenne et *pseudo*-observations) filtrés à 6 ans. Courbe rouge : prédiction après assimilation (voir la section 4.6).

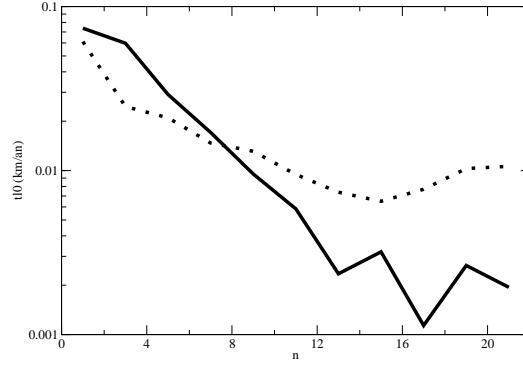


FIG. 4.12 – Pseudo-observations. Mesure de l'amplitude des coefficients, $\sqrt{[N_{t_{obs}}^{-1} \sum_{t_i} t_n^0(t_i)]^2}$ (trait plein), et des variances des erreurs \mathbf{R}_{nn} (pointillés), en fonction du degré harmonique. Les coefficients sont filtrés à 6 ans et en km/an.

l'opérateur d'observations \mathbf{H} relie la vitesse en coordonnées cylindriques aux coefficients spectraux, en utilisant les propriétés des harmoniques sphériques (voir par exemple Langel 1987, section 4.2). Ces propriétés concernent un champ défini sur une sphère alors que la vitesse prédite est dans le plan équatorial et à l'extérieur du cylindre tangent. Comme la vitesse géostrophique est indépendante de z , la vitesse dans le plan équatorial est la même qu'à la frontière noyau-manteau. De plus, comme les observations sont les coefficients d'un champ de vitesse, leur projection sur la partie à l'intérieur du cylindre tangent complète la prédiction de champ de vitesse. On se retrouve ainsi avec un champ de vitesse sur toute la surface du noyau, rendant possible la détermination des coefficients spectraux correspondants avec

$$\frac{2n+1}{4} t_n^0(t) = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} u_{\varphi}(s, t) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (4.43)$$

La matrice de covariance d'erreur d'observations est estimée à partir de la dispersion moyennée des solutions de l'inversion d'ensemble $\{t_n^0\}_{k=1, \dots, K}$

$$\mathbf{R}_{nn'} = \frac{1}{T_e - T_s} \int_{T_e}^{T_s} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\{t_n^0\}^k - t_n^0] [\{t_{n'}^0\}^k - t_{n'}^0] dt. \quad (4.44)$$

Les corrélations $\rho_{nn'} = \mathbf{R}_{nn'} / \sqrt{\mathbf{R}_{nn} \mathbf{R}_{n'n'}}$ sont élevées, par exemple $(\rho_{13}, \rho_{15}, \rho_{35}) = (-0,49; 0,29; -0,44)$, ce qui indique que les erreurs ne sont pas indépendantes.

L'intérêt d'utiliser les coefficients d'harmoniques sphériques comme données (ce que font également Buffett et al. (2009)), à la place de la vitesse géostrophique recalculée à partir de ces mêmes coefficients sur les points de grilles est de pouvoir tenir compte de la confiance variable en les coefficients selon le degré harmonique. Ceci n'empêche pas la vitesse physique prédite d'avoir des plus petites échelles spatiales, mais elles n'entreront pas en compte dans le calcul de l'écart entre prédictions et observations.

La figure 4.12 représente les coefficients toroïdaux zonaux impairs filtrés à 6 ans en km/an en fonction du degré harmonique (trait plein) et les erreurs associées (pointillés). Entre les degrés 7 et 9, les variances des erreurs deviennent

plus grandes que le signal. Cela signifie que les grandes échelles de l'écoulement sont les mieux résolues, mais les covariances sont importantes. En conséquence, les pseudo-observations seront ces coefficients toroïdaux zonaux impairs jusqu'au degré $n_{max} = 9$.

La figure 4.10 (haut) représente les contours de vitesse géostrophique en fonction du temps et du rayon cylindrique. Ce champ de vitesse est tronqué au degré 9. On remarque que le temps de propagation depuis la graine jusqu'à l'équateur de la frontière noyau-manteau est de l'ordre de 4-5 ans. Par ailleurs, on peut séparer la propagation de l'onde en trois tronçons de vitesse en fonction du rayon cylindrique. Les vitesses les plus élevées sont au milieu du noyau entre 0.55 et 0.75 et la vitesse décroît fortement vers la frontière noyau-manteau. Or la vitesse des ondes de torsion dépend de la forme de $\{B_s^2\}$. Le champ magnétique est donc plus fort dans le milieu du domaine spatial et diminue à proximité de la surface du noyau. Ceci nous donne une première indication sur le profil du champ magnétique en fonction du rayon cylindrique.

4.4.3 Modèle et estimations initiales des variables de contrôle

Le modèle, et son adjoint, ont été décrits dans la section 4.2. Cependant, comme les observations sont des coefficients harmoniques sphériques de vitesse angulaire, ω_g , et non pas le champ magnétique radial je réécris les équations utilisées ici :

$$\partial_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s \tau + T_A G_o \frac{r_o G \tilde{B}_r^2}{h^2} \omega_g, \quad (4.45)$$

$$\partial_t \tau = s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g, \quad (4.46)$$

résolues avec comme première condition aux limites

$$\tau = 0, \quad \text{en } s = r_o, \quad (4.47)$$

en accord avec la définition $\tau = s^2 h \{B_s B_\varphi\}$ puisque h , la demi-hauteur de colonne s'annule en $s = r_o$.

D'après l'écoulement calculé avec les *pseudo*-observations, l'excitation des ondes semble se situer au niveau du cylindre tangent. Nous souhaitons rendre compte de cette excitation et prenons comme condition aux limites ajustable la valeur de la dérivée de ω_g au cylindre tangent, $\partial_s \omega_g$, qui est proportionnelle au couple transféré au système au niveau du cylindre tangent. L'oscillation présente dans les observations $(\partial_s \omega_g)^{obs}$ est obtenue en construisant la vitesse angulaire observée à partir des *pseudo*-observations (coefficients toroïdaux zonaux), et en la dérivant spatialement. D'après ce calcul, $(\partial_s \omega_g)^{obs}$ oscille en fonction du temps avec une amplitude variable et une période d'environ 6 ans (voir la courbe épaisse de la figure 4.18). Mais nous n'avons qu'une vision grande échelle des vitesses et le calcul de cette valeur est de ce fait imprécise. Ajouter cette quantité dans le vecteur de contrôle pour le problème d'optimisation met moins de poids sur notre ignorance des petites échelles du champ de vitesse. Plutôt que de chercher tout le profil $\partial_s \omega_g(r_i, t)$, nous cherchons à nous raccorder à une sinusoïde d'amplitude A_{BC} , de période T_{BC} et de phase Φ_{BC} , et posons en $s = r_i$

$$\partial_s \omega_g = A_{BC} \cos \left(\frac{2\pi}{T_{BC}} t + \Phi_{BC} \right), \quad (4.48)$$

et on recherche A_{BC}, T_{BC} et Φ_{BC} avec l'algorithme d'assimilation de données.

Dans ces équations, la prise en compte des effets d'une fine couche conductrice de conductance G à la base du manteau n'a pas été réalisée dès le début de l'étude mais s'est avérée nécessaire pour expliquer les données.

Le modèle et son adjoint ont été validés par des expériences jumelles spécifiques puisque celles présentées dans la section 4.3 ne contiennent ni le terme de dissipation due à la couche de conductance G ni la condition oscillante au cylindre tangent.

Problème d'assimilation

On recherche l'intensité du champ magnétique dans le volume $\{B_s^2\}(s)$, un terme de forçage à la graine $\partial_s \omega_g(r_i, t)$ et la conductance G de la couche conductrice à la base du manteau nécessaire pour expliquer les données t_n^0 .

La fonction coût $J(\mathbf{x}) = J_H + J_C$ du problème contient une mesure quadratique de l'écart J_H entre la prédiction $t_n^{0,f}$ et les observations t_n^0

$$J_H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{T_y} [\mathbf{H}_i u_\varphi(i) - \mathbf{y}(i)]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{H}_i u_\varphi(i) - \mathbf{y}(i)], \quad (4.49)$$

et une pénalisation des caractéristiques indésirables de la solution J_C

$$J_C = \frac{\alpha_G}{2} G^2 + \frac{\alpha_B}{2} \sum_{i_s} (F_{i_s}'')^2. \quad (4.50)$$

Le premier terme du membre de droite limite la valeur de la conductance, avec un poids α_G . Dans ce problème, comme pour les expériences jumelles, on assure la positivité de $\{B_s^2\}$ en posant $\{B_s^2\}(s) = \exp[F(s)]$ où F est une fonction du rayon cylindrique dans \mathbb{R} . Le second terme du membre de droite, limite les gradients spatiaux de cette fonction F . On pénalise la dérivée seconde avec un poids α_B .

Comme les observations ne sont pas parfaites, nous cherchons le minimum de $J(\mathbf{x})$ mais pas le minimum de J_H . Si J_H était nul, cela signifierait qu'on a donné une trop grande confiance aux données alors qu'elles ont des erreurs. Dans les calculs présentés ensuite, l'écart aux observations est compris entre $J_H = 0.5$ et 1.

Estimation initiale des variables

Il nous faut une estimation initiale pour la vitesse angulaire et pour τ (nous n'assimilons pas sur ces deux variables), et sur les variables sur lesquelles nous assimilons $\{B_s^2\}$, G et la condition à la graine $\partial_s \omega_g(s = r_i)$ -plus précisément, comme indiqué ci-dessus, sur son amplitude, période et phase-. L'estimation initiale de ω_g est calculée avec les coefficients toroïdaux zonaux (observations) à l'époque de départ et avec le même degré de troncature que ce qui a été choisi pour les observations. L'estimation initiale de τ se calcule à partir l'équation (4.45) :

$$\tau(s, 0) = \int_{s=r_i}^{s=r_o} s^3 h \left\{ [\partial_t \omega_g]_{t=0} + \frac{T_A G_o r_o G B_r^2}{h^2} \omega_g(s, 0) \right\} ds. \quad (4.51)$$

La constante d'intégration est la seconde condition aux limites, $\tau = 0$ en $s = r_o$. Puisque la technique d'inversion utilisée pour obtenir les coefficients de ω_g (Gillet

et al. 2009b) est dépendante du temps, la dépendance temporelle du champ de vitesse étant paramétrée par des splines, l'obtention de la dérivée temporelle de cette vitesse à l'époque de départ est directe, et on la prend avec la même troncature que le champ de vitesse. Le calcul de $\tau(s, 0)$ prend aussi en compte l'estimation initiale de la conductance. En conséquence, même sans assimiler sur $\tau(s, 0)$, cette variable sera mise à jour à chaque itération d'optimisation, en accord avec les changements sur la conductance.

L'estimation initiale de la conductance G^g correspond à la valeur minimale estimée nécessaire par Buffett et al. (2002) pour expliquer l'atténuation d'un signal de période diurne comme la nutation, soit 10^8 Siemens. La conductance a été mise sans dimension par cette valeur, $G = G^*G_0$, avec $G_0 = 10^8$ Siemens. Je préciserai dans la section 4.5.6 que le choix d'adimensionnement s'est révélé être assez important pour l'optimisation. Avec une telle estimation initiale, les ondes ne sont pas assez atténuées. On a donc étudié la variabilité de l'analyse avec des estimations de $G^* = 1$ à 5.

Un profil initial de $\{B_s^2\}$ peut se déduire de la forme des ondes sur la carte de vitesse azimutale en fonction du temps puisque la vitesse des ondes est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique dans le noyau. Le pincement des contours et le fait qu'il n'y ait pas de réflexion indique que le profil de $\{B_s^2\}$ doit diminuer vers l'équateur. Ceci est en accord avec l'hypothèse que nous faisons que le champ magnétique est plus fort à l'intérieur du noyau et peut être découplé du champ, plus faible, vu par les observations. Mais pour ne pas introduire d'a priori trop fort, le profil initial de $\{B_s^2\}$ est choisi presque plat partant de $(2,5 \text{ mT})^2$ en $s = r_i$ et dont le maximum en $s = 0.5$ est très légèrement supérieur à cette valeur, avant de décroître doucement jusqu'à une valeur de $(0.6 \text{ mT})^2$ à l'équateur. L'estimation initiale est représentée en tirets-pointillés sur la figure 4.15 à droite.

Enfin le profil, fonction du temps, de la condition à la graine $s = r_i$ a été obtenu en essayant d'accorder à l'œil l'oscillation présente dans les observations $(\partial_s \omega_g)^{obs}$ (voir la courbe épaisse de la figure 4.18), avec une amplitude, période et phase. On obtient $A_{BC} = 3 \times 10^{-3}$, $T_{BC} = 2,1$ et $\Phi_{BC} = 4,4$ (ces quantités sont sans dimension).

4.5 Résultats d'assimilation

4.5.1 Importance de la dissipation

L'absence dans les observations d'une onde réfléchie n'est pas en contradiction avec un scénario d'onde de torsion. En effet, cela peut être dû à des grands gradients spatiaux dans la vitesse des ondes d'Alfvén (dont on n'a pas conscience avec notre vision de l'écoulement limitée aux grandes échelles) ou par exemple à la présence d'une couche conductrice à la base du manteau. Je montre tout d'abord quelques résultats d'assimilation sans couche conductrice.

En partant des estimations initiales décrites dans la section 4.4.3, mais sans conductance, la figure 4.13 montre les cartes de vitesse azimutale en fonction du temps avant et après assimilation. L'absence de procédé dissipatif se traduit dans ces cartes par un accroissement de l'amplitude des ondes au cours du temps. La solution en vitesse (figure 4.13 à droite) montre des réflexions à la frontière noyau-

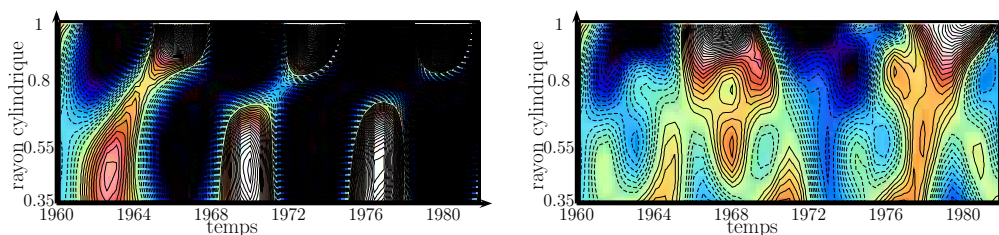


FIG. 4.13 – Prédiction du champ de vitesse géostrophique avant (gauche) et après (droite) assimilation. Les couleurs correspondent aux vitesses azimutales vers l'Ouest (bleu) ou vers l'Est (rouge). L'échelle de couleur est entre -3×10^{-4} ; 3×10^{-4} , ces calculs sont les seuls qui la saturent. Les extrema sont -3×10^{-3} ; 3×10^{-3} (gauche), -8×10^{-4} ; 8×10^{-4} (droite) et les contours sont tracés tous les 2×10^{-5} . Les vitesses sont mises aux dimensions par la vitesse d'Alfvén V_A . Les observations sont représentées sur la figure 4.10(haut).

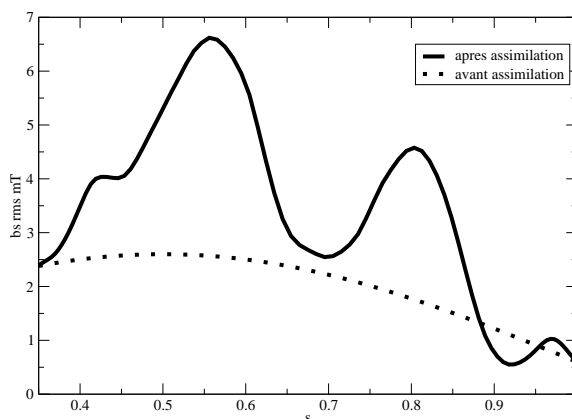


FIG. 4.14 – Estimation initiale de $\sqrt{\{B_s^2\}}$ (pointillés) et solution après assimilation (trait plein).

manteau. L'écart aux observations, J_H , après assimilation reste grand (supérieur à 2). La solution pour le champ magnétique (trait épais sur la figure 4.14) montre deux maxima, dont un en $s = 0,8$, qui n'est pas présent dans les solutions avec dissipation (montrées plus bas). Augmenter le gradient de champ magnétique à proximité de l'équateur tente de pallier l'absence de procédés dissipatifs. J'anticipe un peu en précisant que ce type de calcul est le seul où la période, $T_{BC} = 8$ ans, de la condition à la graine (voir équation 4.48) n'est plus autour de 6 ans après assimilation mais plus longue. Le déphasage et le changement d'amplitude de la condition à la graine sont des caractéristiques présentes pour toutes les simulations (voir aussi plus bas).

4.5.2 Compromis entre conductance et intensité rms du champ magnétique

Les résultats suivants sont obtenus en présence de dissipation par l'action d'une couche conductrice de conductance G à la base du manteau. Pour une estimation initiale du profil de $\{B_s^2\}$ et une pénalisation de sa dérivée seconde ($\alpha_B = 10^{-7}$), données. On fait varier la pénalisation sur la norme de la conductance ($\alpha_G \in [10^{-3} - 10^2]$). Je réfère à cette série de calculs en l'appelant série « étoile ». De

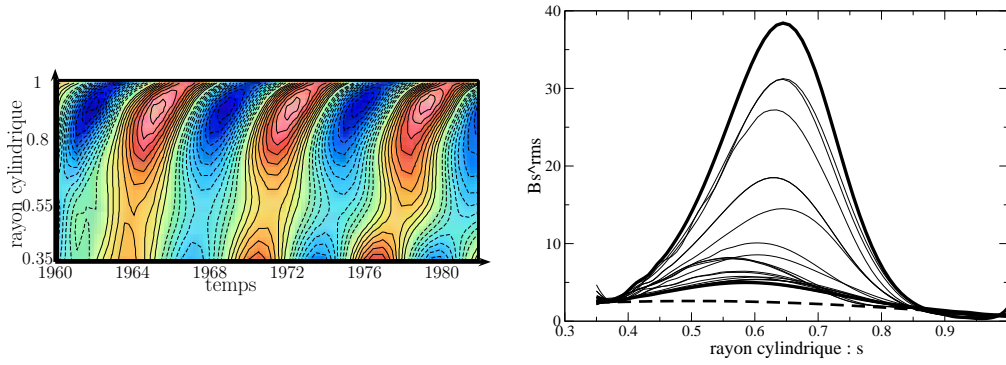


FIG. 4.15 – Gauche : carte de vitesse azimutale après assimilation en fonction du temps entre 1960 et 1982 (mêmes échelles que pour la figure 4.10, sur laquelle figurent les observations en haut). Droite : profils de champ magnétique $\sqrt{\{B_s^2\}}$ en fonction du rayon cylindrique. Estimation initiale (tiret) et résultats après assimilation (trait plein) pour la série de simulations « étoile » (voir le texte). L'intensité maximale du champ magnétique n'est pas contrainte par le système.

façon attendue, moins on pénalise la conductance, plus sa valeur après assimilation a la possibilité d'être grande. Si on ne la pénalise pas, alors elle atteint le même type de valeur que lorsque $\alpha_G = 10^{-3}$. On réalise cette série de calculs pour des conductances initiales de $G^g = 1, 2.5, 3$ ou 5×10^8 S.

La figure 4.15 montre les résultats typiques de ce type d'expérience, la figure de gauche montre la carte de vitesse azimutale après assimilation en fonction du temps entre 1960 et 1982. On y retrouve une propagation depuis la graine vers la frontière noyau-manteau, sans réflexion à cette interface. Pour ce calcul, l'écart aux observations, mesuré par J_H est de 0,54 pour une conductance de $3,6 \times 10^8$ S et une intensité rms de B_s de 4,7 mT. La figure de droite regroupe tous les profils de champ magnétique $\sqrt{\{B_s^2\}}$ de cette série de calculs en fonction du rayon cylindrique, après assimilation en trait plein et avant assimilation pour les tiret-pointillé. La solution semble bien contrainte au delà des rayons $s = 0,85r_o$. En revanche, si la solution présente un maximum d'intensité du champ magnétique entre $s = (0,55 - 0,65)r_o$, son amplitude n'est pas contrainte par le système dynamique.

Après assimilation, il y a un compromis entre la valeur de conductance et l'intensité rms de $\sqrt{\{B_s^2\}}$ pour expliquer les observations de façon similaire en terme d'écart aux observations comme le montre la figure 4.16. Cette figure représente les contours de J_H , l'écart aux observations, en fonction de $\sqrt{\{B_s^2\}}^{rms}$ en abscisse et de la valeur de la conductance en ordonnée. Cette figure met en évidence le flanc d'une vallée longue et escarpée. Ainsi si la conductance est trop faible (inférieure à 2×10^8 S) parce que fortement pénalisée, alors il faut un $\sqrt{\{B_s^2\}}^{rms}$ très fort (supérieur à 10 mT) pour obtenir un misfit entre 0,6 et 0,8 (voir la figure 4.17 gauche). Si on pénalise moins la conductance, on l'autorise à être plus forte (de l'ordre de 3 ou 5×10^8 S). En conséquence, le $\sqrt{\{B_s^2\}}^{rms}$ peut être de l'ordre de 3 ou 4 mT pour un misfit entre 0,5 et 0,6 (voir la figure 4.17 droite). Toutefois, J_H augmente si G est trop grand.

Les différents motifs de cette figure 4.16 correspondent à différentes séries de calculs. Les étoiles sont les calculs évoqués jusqu'à maintenant (série « étoile ») : une estimation fixée de $\{B_s^2\}$, la pénalisation de ses gradients également fixée et

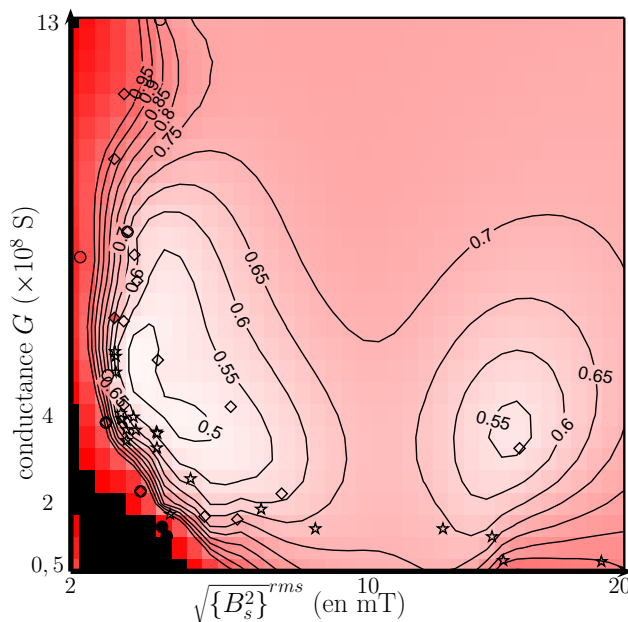


FIG. 4.16 – Contours de J_H (écarts aux observations uniquement) en fonction de $\sqrt{\{B_s^2\}^{rms}}$ en abscisse et de G^a en ordonnée, après assimilation. L'échelle de couleur est entre $J_H = 0,45$ (blanc) et $J_H = 1,3$ (rouge puis noir). Les différents motifs sur la figure correspondent à différentes séries de calculs (voir dans le texte). Interpolation réalisée par le logiciel Generic Mapping Tool (GMT, Wessel et Smith 1991)

on fait varier la pénalisation de la conductance pour plusieurs estimations initiales de conductance. Ces calculs mettent déjà en évidence la vallée principale sur la figure mais j'ai voulu y faire figurer l'ensemble des calculs pour tracer la figure pour contraindre le plus possible l'interpolation que fait le logiciel GMT (Wessel et Smith 1991) pour tracer les contours. Ainsi les cercles correspondent à ce type de calculs mais avec d'autres estimations initiales de $\{B_s^2\}$ (dont je parle en section 4.5.4). Les points représentés par des diamants sont des calculs pour lesquels l'amplitude α_B de la pénalisation des gradients du champ magnétique a été modifiée.

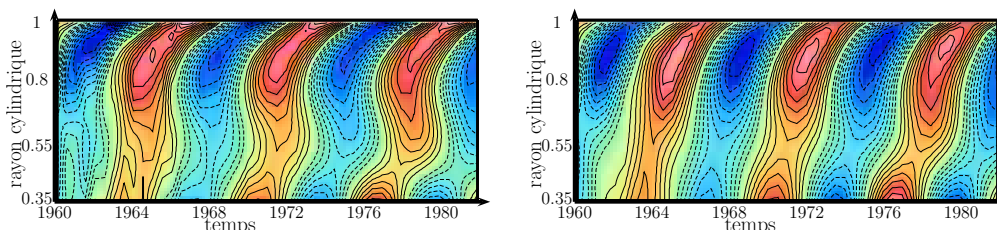


FIG. 4.17 – Cartes de vitesse azimutale après assimilation en fonction du temps entre 1960 et 1982 (mêmes échelles que pour la figure 4.10, sur laquelle figurent les observations en haut). Gauche : conductance faible ($1,9 \times 10^8$ S) compensée par un champ magnétique élevé (8 mT) pour un écart aux données de 0,61. Droite : effet d'une conductance élevée (5×10^8 S), et d'un champ magnétique de 3,4 mT pour un écart aux données de 0,57.

Comportements limites de l'analyse

Les prédictions de champ de vitesse dont le misfit est compris entre 0,5 et 0,6 diffèrent peu comme le montre la figure 4.17 qui regroupe deux cas extrêmes. On remarque que le champ de vitesse d'un calcul pour lequel une trop faible conductance est compensée par une grande intensité de champ magnétique (cas conductance faible, figure 4.17 à gauche) présente un maximum à l'équateur plutôt qu'à $s = 0,8$ comme les observations entre 1970 et 1980. De plus, la forme en boomerang des contours est plus accentuée dans ce cas que dans les autres simulations ou les observations. La figure 4.17 à droite représente la solution pour le cas conductance élevée (5×10^8 S). Cette figure s'accorde mieux aux observations au début de la période (1960 – 1970).

Les observations montrent un maximum de vitesse angulaire un peu éloigné de l'équateur au début de la période (1960 – 1970) et au niveau de l'équateur à la fin de la période d'assimilation (1970 – 1980). Par conséquent ces deux comportements sont possibles dans les prédictions. Le calcul avec une conductance faible a un écart aux données plus faible à la fin de la période d'assimilation à l'opposé du cas conductance élevée, pour un écart aux données global similaire. Pour les calculs de la série « étoile » les différences dans l'écart entre les prédictions et les observations concernent surtout les degrés 7 et 9, sur lesquels l'erreur d'observation est la plus importante. Ces degrés sont mal contraints par la physique.

J'ai montré jusqu'à maintenant que la fonction coût semble présenter une vallée étirée, ne permettant pas de discriminer une valeur de conductance ou une intensité rms du champ magnétique. Regarder la solution produite en vitesse azimutale montre que certains coefficients toroïdaux zonaux s'accordent mieux aux observations pour certains couples $(G, \{B_s^2\})$, ou pour un sous-ensemble des observations (début/fin de la période temporelle, proximité de la graine/de l'équateur). Cependant comme on s'intéresse à l'écart global entre les prédictions et les observations (écarts sommés en espace et en temps), on ne contraint pas un type de configuration. Calculer la longueur du jour prédite avec l'écoulement après assimilation aurait pu permettre de valider ou refuser certaines solutions, mais comme indiqué plus haut, les solutions ne diffèrent quasiment pas sur les coefficients t_1^0 et t_3^0 , la longueur du jour prédite ne varie pas significativement entre les différentes simulations (voir la figure 4.11 pour une prédiction des variations de longueur du jour typique des calculs comparée avec les données).

On ne garde quand même pas les calculs de conductance inférieure à 2×10^8 S dont les écarts aux données sont les plus importants (supérieurs à 0,6).

4.5.3 Variabilité par rapport à l'estimation initiale de la conductance G^g

Les considérations suivantes ne concernent que des calculs dont l'écart aux observations après assimilation est compris entre 0.5 et 0.6.

Pour $G^g = 1, 2.5$ ou 3×10^8 S, les valeurs finales de conductance varient entre 3.2 et 4×10^8 S pour des $\sqrt{\{B_s^2\}^{rms}}$ entre 3.5 ou 5 mT, en fonction de la pénalisation de la conductance. Pourtant si $G^g = 5 \times 10^8$ S, alors la conductance après assimilation est comprise entre 4 et 5×10^8 S et l'intensité rms du champ magnétique reste inférieure à 4 mT. Ces valeurs de conductance sont plus élevées car j'ai

gardé les mêmes amplitudes de pénalisation pour ces calculs. Le poids relatif de la pénalisation est donc plus faible si $G^g = 5 \times 10^8$ S.

J'en conclus que la solution (prédiction de champ de vitesse, conductance) dépend peu de l'estimation initiale de la conductance si l'écart aux observations après assimilation est inférieur à 0,6. En revanche, on a vu, par exemple sur la figure 4.16, que la variabilité de la solution de champ magnétique est grande dans cette même gamme d'écart aux observations.

4.5.4 Variabilité par rapport à l'estimation initiale de $\{B_s^2\}^g$

Il est possible d'anticiper le profil du champ magnétique d'après le changement de la vitesse de propagation de l'onde (voir la section 4.4.3). Par conséquent, les possibilités de tests d'estimations initiales de $\{B_s^2\}$ sont assez limitées. En particulier, si on ne respecte pas la diminution de $\{B_s^2\}$ vers l'équateur de la frontière noyau-manteau (par exemple en partant d'un profil constant : $\{B_s^2\} = (2 \text{ mT})^2$), l'optimisation s'arrête très rapidement sans avoir fait décroître l'écart aux observations. Je propose donc de tester des estimations initiales de $\{B_s^2\}$ dont la forme change peu par rapport à celle représentée en tiret-pointillé sur la figure 4.15 à droite, mais dont les intensités doivent quand même pouvoir varier. La figure 4.15 montre que l'intensité du champ est assez peu contrainte par le modèle puisqu'elle fait l'objet d'un compromis avec la valeur de la conductance. En conséquence, dès que l'estimation initiale de $\{B_s^2\}$ se trouve incluse entre les deux traits épais de cette figure (figure 4.15), l'optimisation ne change pas son profil. J'ai donc testé des profils plus faibles que celui en pointillé sur la figure 4.15, qui lui-même est déjà bien en dessous des solutions (traits pleins de la figure 4.15). J'ai également fait varier la pénalisation des gradients du champ magnétique. Beaucoup de ces calculs se sont arrêtés en mode 6 (M1QN3 ne trouve plus de direction plus adéquate que la précédente), ou ont explosé si je ne pénalisais pas suffisamment les gradients spatiaux de $\{B_s^2\}$. Je n'ai donc gardé qu'une minorité de simulations. En revanche, les simulations réussies du point de vue des critères d'optimisation présentaient les mêmes caractéristiques pour $\{B_s^2\}$ et la conductance que les résultats présentés ci-dessus, en termes d'amplitudes et de compromis entre conductance et intensité du champ magnétique après assimilation.

4.5.5 Assimilation sur la condition à la graine

Pour tous les calculs, on a également recherché l'amplitude, la période et la phase pour le calcul de la condition à la graine qui contribue aussi au minimum de la fonction coût. Cette condition est reliée au forçage des ondes de torsion à la graine.

Au début de l'étude, l'estimation initiale sur ces valeurs a été déterminée en accordant à vue la sinusoïde (équation 4.48) de $(\partial_s \omega_g)^g$ au calcul de cette quantité d'après les observations (trait épais de la figure 4.18). Pourtant les solutions après les diverses assimilations sont toujours similaires mais différentes du profil initial comme le montre la figure 4.18. La période T_{BC} est comprise entre 5 et 7 ans pour l'ensemble des calculs avec dissipation mais la sinusoïde n'est pas en phase avec ce qu'on peut reconstruire d'après les observations et cette différence de phase ne dépend pas des pénalisations. L'amplitude du forçage augmente si la pénalisation

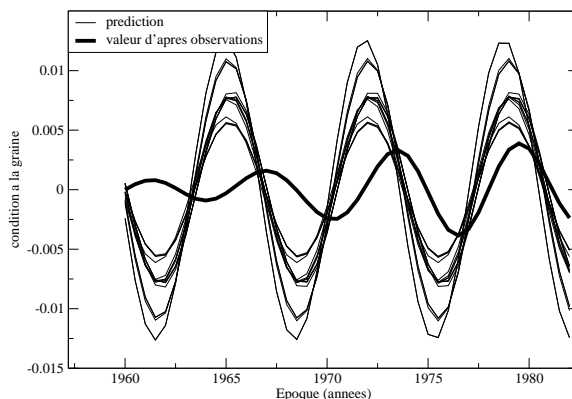


FIG. 4.18 – Condition à la graine, $\partial_s \omega_g$ en $s = r_i$, en fonction du temps. Le trait plein correspond au calcul de cette quantité d’après les observations, les traits fins correspondent aux sinusôides reconstruites avec les valeurs d’amplitude, de période et de phase après assimilation pour les calculs de la série « étoiles ».

de la conductance diminue ; dans tous les cas, elle est beaucoup plus grande que ce que semblent indiquer les observations.

Ces solutions restent les mêmes si on annule l’amplitude et la phase de l’estimation initiale ($(\partial_s \omega_g)^g$), ou si on utilise une des solutions comme estimation initiale ce qui était le cas des calculs présentés dans cette section.

La quantité $\partial_s \omega_g$ à la graine est reliée au couplage avec le cylindre tangent, qui tient compte des échanges de moment cinétique entre l’écoulement à l’intérieur du cylindre tangent et celui à l’extérieur du cylindre tangent. Il faudrait donc vérifier si des amplitudes aussi importantes impliquent des vitesses importantes à l’intérieur du cylindre tangent à prendre en compte.

4.5.6 Importance du conditionnement

J’ai été amenée à essayer une autre échelle caractéristique pour les conductances. Dans les calculs de cette partie, on a posé $G = G^* G_0$, où $G_0 = 10^8$ S et on a cherché et trouvé des conductances de l’ordre de 3 – 5. Pourtant si on pose $G_0 = 10^9$ S, et qu’on choisit de refaire les calculs avec des estimations initiales de G^* dix fois plus petites, et une pénalisation cent fois plus grande (la pénalisation prend le carré de la conductance), le problème semble moins bien posé et l’optimisation s’arrête très tôt (en mode 6), sans que le misfit ait vraiment décréu.

4.6 Résumé des résultats

La figure 4.19 représente la valeur rms de l’intensité du champ magnétique en fonction du rayon cylindrique qui explique les observations de vitesse azimutale. La partie grisée du graphe délimite la zone des solutions possibles par assimilation des coefficients toroïdaux zonaux de l’écoulement. Comme l’intensité du maximum est mal contrainte par le système, on indique plutôt une borne minimale de 3 – 4 mT pour l’intensité rms du champ magnétique dans le noyau. La décroissance du champ magnétique à proximité de l’équateur semble plus robuste et correspond à une

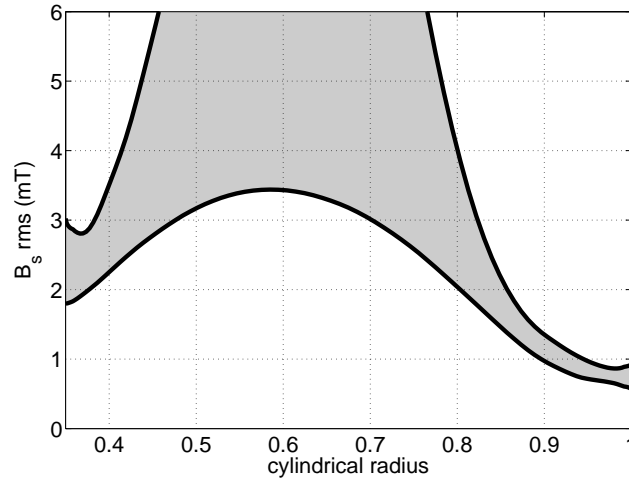


FIG. 4.19 – Profil du champ magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation intégré en longitude : $\sqrt{\{B_s^2\}}$ en fonction du rayon cylindrique. La zone grisée indique la zone des solutions possibles.

caractéristique à laquelle on s'attend d'après les observations : sur la figure 4.10 (haut) on retrouve bien une diminution des vitesses à proximité de la frontière noyau-manteau.

Dans la figure 4.20, on compare les prédictions (en rouge) et les observations (en noir) en terme de mesure de l'amplitude des coefficients toroïdaux zonaux (en km/an) ainsi que les erreurs d'observations et d'analyse. Le coefficient t_1^0 est sur-estimé dans toutes les simulations et les différences entre les calculs sont souvent portées pas t_7^0 et t_9^0 . Le profil de l'erreur d'analyse a la même forme que celui des erreurs d'observation, ce qui est un caractère recherché pour une inversion.

Les conductances associées à ces solutions sont comprises entre 3 et 5×10^8 S. Le profil de dissipation a été calculé avec un profil uniforme du champ magnétique radial à la frontière noyau-manteau $B_r = 0.5$ mT. La figure 4.18 montre que le système se dirige vers des solutions pour lesquelles les transferts de moments cinétiques au cylindre tangent sont importants puisque les amplitudes sont plus grandes après assimilation que ce que nous suggèrent les observations. La figure 4.11(bas) regroupe les données et les prédictions des variations de longueur du jour en fonction du temps. Les observations sont en noir, la prédiction par les écoulements de la méthode d'ensemble sont en vert. La courbe rouge correspond à une prédiction typique après assimilation. De façon intéressante, cette prédiction après assimilation s'accorde mieux aux observations (noir) qu'à la prédiction de l'écoulement moyen, qui pourtant a été utilisé comme *pseudo*-observation dans l'optimisation.

4.7 Discussion

Dans cette étude on a caractérisé des ondes de torsion progressives rapides dans le noyau terrestre pour expliquer un signal à 6 ans dans les données de variations de longueur du jour. Ces ondes se propagent à travers le noyau en 4 – 5 ans ce qui est compatible avec le champ magnétique relativement fort que nous proposons.

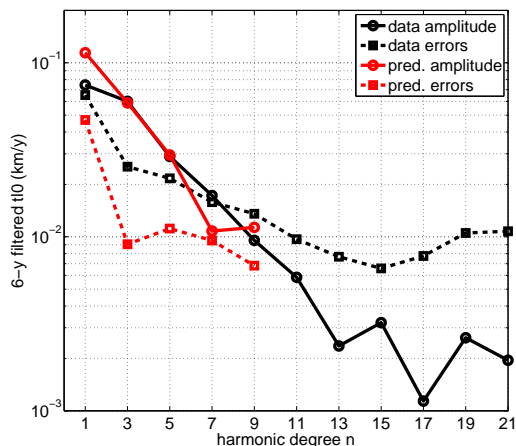


FIG. 4.20 – Mesure de l’amplitude des coefficients, $\sqrt{[N_{t_{obs}}^{-1} \sum_{t_i} t_n^0(t_i)]^2}$ (traits pleins) en fonction du degré harmonique, pour les observations (noir) et pour la prédiction après assimilation (rouge). En pointillé : variances des erreurs \mathbf{R}_{nn} (pointillé noirs), et mesure des erreurs de prédiction $N_{t_{obs}}^{-1} \sum_{t_i} [t_n^{0,f}(t_i) - t_n^0(t_i)]^2$ (pointillé rouges) en fonction du degré harmonique.

D’ailleurs, nous proposons plutôt une borne inférieure pour l’intensité du champ puisque la borne supérieure n’est pas contrainte par le modèle. Le profil rms de la composante perpendiculaire à l’axe de rotation et intégrée sur les cylindres géostrophiques a un maximum entre les rayons $s = 0.5 r_o$ et $s = 0.75 r_o$, puis elle décroît vers les rayons plus grands pour arriver à des valeurs inférieures au milliTesla à la frontière noyau-manteau. Au niveau de la graine, l’intensité est comprise entre 2 et 3 mT.

Cette description d’un champ fort à l’intérieur du noyau est en accord avec les calculs de geodynamo ou les lois d’échelles dérivées à partir de ces codes (Christensen et al. 2009) et avec les observations du champ poloïdal. Les premiers annoncent un champ dans le noyau de l’ordre de quelques mT alors que l’extrapolation vers la surface noyau-manteau des mesures de champ magnétique donnent des valeurs de l’ordre de la fraction du mT. Ces observations ont été inversées pour l’obtention de l’écoulement qui a été lui-même inversé avec l’assimilation de données pour l’estimation du profil de $\{B_s^2\}$ d’intensité rms plus élevée.

L’algorithme d’assimilation de données utilisé dans cette étude a rendu possible une inversion conjointe du profil stationnaire de $\{B_s^2\}$, de la condition à la graine $\partial_s \omega_g$, sous forme d’une sinusoïde, et aussi de la conductance d’une fine couche conductrice à la base du manteau. Un procédé de dissipation s’est avéré en effet nécessaire pour expliquer les données.

Des estimations de la conductance d’une telle couche d’environ 10^8 S ont été proposées pour rendre compte des données de nutation de la Terre (Buffett et al. 2002) ou des variations décennales de la longueur du jour (Holme 1998). Dumberry et Mound (2008) craignaient que cette valeur, multipliée avec une intensité du champ radial à la frontière noyau-manteau de 0,69 mT, n’atténue trop les ondes de torsion lentes, estimées avec un champ magnétique faible $B_s^{rms} = 0,2$ mT.

Ce problème ne se pose pas dans l'optique où les ondes de torsion sont rapides, comme je le propose ici, même si les solutions de conductance sont plus élevées, de l'ordre de $3 - 5 \times 10^8$ S pour un champ magnétique radial uniforme à la frontière noyau-manteau de 0.5 mT. Ces valeurs semblent assez élevées mais l'écoulement prédit explique bien les données de variations à 6 ans de longueur du jour. Des conductances de ce type ne sont toutefois pas assez élevées pour retarder le signal magnétique. En effet, cette couche filtrerait les périodes sub-annuelles du champ magnétique du noyau si son épaisseur était de 350 km, et la conductivité à la frontière noyau-manteau était de 150 S/m. Cette estimation se base sur la figure 2 p.101 de la thèse de Jault (1990) en prenant un couple électromagnétique entre 2 et 5×10^{17} N.m et α de l'ordre de 10, la droite en tireté-pointillé correspond au filtrage des périodes annuelles. Si on suppose que la conductivité de la couche conductrice est la même que celle du noyau, $\sigma = 5 \times 10^5$ S/m, cette couche a une épaisseur de $\Delta = 1$ km, et ce même graphe nous indique que les périodes filtrées dans ces circonstances sont de quelques semaines.

La dissipation visqueuse peut imiter les effets dissipatifs du couplage électromagnétique. Si la dissipation visqueuse est négligeable dans le volume du fluide aux échelles de temps courtes que nous considérons, elle reprend de l'importance aux bords de la surface du noyau dans une fine couche afin d'ajuster l'écoulement principal du fluide avec les conditions de non-pénétration. Les mouvements géostrophiques suivent alors (Greenspan 1968, Légaut 2005)

$$\partial_t \omega_g = -\frac{E^{1/2}}{\lambda} \frac{\omega_g}{h^{3/2}}. \quad (4.52)$$

Cette équation sans dimension fait intervenir le nombre de Lehnert λ , et la racine du nombre d'Ekman. Ce nombre, qui intervenait déjà plus haut dans les équations de la géodynamo pour caractériser la dissipation visqueuse, est le rapport entre les effets visqueux et inertiels. On peut le voir également comme une mesure de la viscosité du noyau. Des calculs préliminaires, où on a remplacé les effets dissipatifs du couplage électromagnétique par la dissipation visqueuse, et pour lesquels on recherche $E^{1/2}$ (à la place de la conductance), donnent des résultats similaires pour $\{B_s^2\}$ et $\partial_s \omega_g(r_i, t)$ mais conduisant à un nombre d'Ekman élevé, de l'ordre de 10^{-7} , en regard de $E = 2 - 4 \times 10^{-11}$ que proposent Deleplace et Cardin (2005). Cette étude nous permet de commencer à relier des considérations sur les couplages à la frontière noyau-manteau à la dynamique dans le noyau et aux observations de champ magnétique et de variations de la période de rotation de la Terre. En revanche, on ne propose pas de mécanisme d'excitation des ondes de torsion rapides. La condition à la graine sur $\partial_s \omega_g$ est une mesure des échanges de moment cinétique du fluide au cylindre tangent. De façon intéressante, le résultat de l'assimilation sur cette quantité est assez robuste dans la mesure où elle ne dépend pas du choix de l'estimation initiale. La solution $(\partial_s \omega_g)^a$ n'est pourtant pas la valeur que l'on peut calculer à partir des bas degrés des coefficients toroïdaux zonaux de l'écoulement.

L'explication du signal à 6 ans des variations de longueur du jour avec des ondes de torsion laisse le signal à 60 ans sans explication. L'estimation du champ magnétique dans le noyau revoit à la baisse les périodes caractéristiques des ondes hydromagnétiques, comme par exemple les ondes Magneto-Coriolis, et il se peut qu'une autre onde hydromagnétique soit à l'origine de ce signal. Alors, les vitesses

géostrophiques s'ajusteraient au champ magnétique et au champ de vitesse non-zonal puisque l'écoulement doit être dans un état de Taylor pour ces plus longues périodes de temps si la période des ondes de torsion d'Alfvén est aussi courte que je le propose.

Enfin, une estimation d'un champ fort dans le noyau conforte notre approche quasi-géostrophique où les écarts à la géostrophie sont équilibrés par les forces de Lorentz et inertielles (voir les équations 2.36 et 2.37). De plus, un champ fort rend les forces inertielles peu importantes par rapport aux forces de Lorentz ce qui justifie d'étudier dans un premier temps un équilibre magnétostrophique pour lequel le champ de vitesse est essentiellement mis à jour par les changements du champ magnétique.

Conclusions et perspectives

5

5.1 Conclusions

Aussi bien la précision que la quantité des observations géomagnétiques se sont beaucoup accrues récemment. Avec les satellites qui mesurent le champ magnétique l'arrivée des données est quasiment continue. On souhaite pouvoir utiliser au mieux ces données pour l'étude du champ magnétique qui trouve son origine dans le noyau de la Terre. La variation séculaire concerne les variations du champ magnétique sur des échelles de temps de l'année au siècle, ou des échelles de temps inférieures au temps de diffusion magnétique.

Ma thèse repose sur l'hypothèse que la dynamique du noyau aux échelles de temps de la variation séculaire peut être étudiée dans l'approximation quasi-géostrophique et sans diffusion. En effet, les procédés diffusifs à ces échelles de temps ne concernent que des échelles spatiales très inférieures à la taille du noyau. Pouvoir négliger les aspects diffusifs, pour ces échelles de temps, est un avantage car c'est leur description numérique qui complique actuellement l'étude globale de la geodynamo. La résolution de ce problème, en augmentant les procédés visqueux dans le noyau, fait que les procédés actifs aux échelles de temps de la variation séculaire, courtes devant celles de la génération de champ magnétique, deviennent indiscernables. L'étude de la variation séculaire nécessite donc un développement adapté. L'hypothèse quasi-géostrophique est soutenue par le fait que la description du rapport entre la force de Coriolis et celle de Lorentz, par le nombre de Lehnert, montre que la rotation l'emporte sur le champ magnétique pour le noyau terrestre sur des temps courts. La dynamique résultante est invariante dans la direction de l'axe de rotation de la Terre. L'hypothèse quasi-géostrophique prend en compte cette bi-dimensionnalisation de l'écoulement et la dynamique peut être décrite à deux dimensions dans le plan équatorial. Cette qualité rend la modélisation plus légère, en vue de son inclusion dans un procédé d'assimilation de données. Ainsi, dans ce travail, la méthode d'assimilation variationnelle de données, développée pour des applications météorologiques, a été transposée à l'étude de la dynamique rapide du noyau.

L'assimilation de données utilise les deux types d'ingrédients décrits ci-dessus, observations et lois physiques, pour les combiner de façon optimale afin d'améliorer la description de l'état d'un système physique. L'assimilation introduit la dynamique au problème inverse. D'une part, l'algorithme tient compte du fait que la trajectoire du modèle ne dépend que de sa condition initiale. D'autre part, la condition initiale est corrigée en tenant compte de l'ensemble des observations de

la période d'assimilation. Enfin, c'est la dynamique qui relie les variables d'état en elles, et l'étude est, en conséquence, adaptée aux systèmes où seule une partie des variables est observée.

Appliquée à un modèle d'ondes de torsion dans le noyau, le développement d'un système d'assimilation variationnelle nous a permis d'obtenir une intensité et un profil pour le champ magnétique confiné dans le noyau. L'inversion des données d'écoulement zonaux symétriques par rapport à l'équateur, filtrés autour de 6 ans, a montré que l'on peut expliquer un tel écoulement avec des ondes de torsion si on y inclut un procédé de dissipation. Cette inversion nous donne le profil et l'intensité du champ magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation moyenné en longitude correspondant à une propagation des ondes depuis l'équateur de la graine vers l'équateur à la surface du noyau en 4 – 5 années. Plus précisément, on propose une borne inférieure, de 3 mT, à l'intensité rms du champ magnétique $\sqrt{\{B_s^2\}}$. De plus, la présence d'une couche conductrice à la base du noyau dissipe suffisamment les ondes si sa conductance, le produit de la conductivité de la couche et de son épaisseur, est de l'ordre de $3 - 5 \times 10^8$ S.

Des ondes de torsion plus lentes avaient été évoquées jusqu'à maintenant : la tension magnétique qu'elles mettent en jeu correspond à un champ magnétique très faible, de l'ordre de 0,2 mT, dans le noyau. D'une part, cette estimation est curieusement inférieure à l'intensité du champ à la surface du noyau, de l'ordre de 0,3 – 0,5 mT, obtenue par prolongement des données à travers le manteau isolant, et d'autre part, en opposition avec des prédictions récentes de l'intensité du champ dans le noyau, de l'ordre de 2 mT, par extrapolation de lois d'échelle. Notre prédiction est compatible avec ces différentes estimations. De la même façon que les premières inversions de données pour l'obtention d'un champ de vitesse à la surface du noyau, il y a une vingtaine d'années, ont donné un ordre de grandeur rms des vitesses à la surface du noyau, j'espère avoir donné ici un premier ordre de grandeur de la borne inférieure du champ magnétique à l'intérieur du noyau basé sur les observations.

Les données qui ont été inversées étaient, elles-mêmes, le résultat d'inversions précédentes. La première concernait l'inversion de données réelles (ajustées) vers des modèles de champ magnétique et de variation séculaire dépendant du temps à la frontière noyau-manteau. La seconde était l'inversion de ces modèles pour l'obtention du champ de vitesse correspondant dans le noyau. J'ai procédé à la troisième inversion, l'inversion du champ de vitesse filtré (coefficients toroïdaux zonaux filtrés à 6 ans) pour obtenir le champ magnétique à l'intérieur du noyau.

L'assimilation de données nous paraît prometteuse pour réaliser ces trois inversions en une fois en partant des séries temporelles de mesures magnétiques pour aller directement à l'estimation de l'état du noyau. La réalisation simultanée de ces deux dernières étapes a d'ailleurs été testée et validée avec les expériences jumelles d'ondes de torsion pour lesquelles on observait le champ magnétique radial. Par ailleurs, l'utilisation des polynômes de Jacobi, pour la construction de l'opérateur d'observations, matérialisait, d'une certaine façon, notre vision floue du noyau, à cause de la distance entre la source et les observations et à cause de la magnétisation de la lithosphère.

Dans les études présentées, quelques difficultés relatives à l'assimilation ont

émergées qui me semblent importantes à prendre en compte dans le futur. La difficulté la plus importante est qu'on ne peut pas assimiler sur toutes les variables du système en même temps. En effet, une fois le code adjoint écrit, on peut faire entrer dans le calcul du gradient les conditions initiales, les conditions aux limites (par exemple $\partial_s \omega_g$ à la graine) et d'autres constantes du temps (par exemple $\{B_s^2\}$) et de l'espace (par exemple, la conductance de la couche conductrice à la base du manteau). Dans l'étude des ondes de torsion, l'assimilation portait sur les trois variables réécrites ci-dessus, mais pas sur les conditions initiales. Pourtant, nous aurions pu également rechercher la condition initiale (c'est-à-dire le champ de vitesse lui-même) puisque nous n'avions qu'une connaissance de ses grandes échelles spatiales. La dynamique aurait permis de contraindre ses petites échelles spatiales. Les tests que j'ai réalisés à ce sujet (avec les pseudo-observations ou avec des synthétiques) ont montré que certains effets de la conductance étaient alors attribués à la condition initiale (sur la variable auxiliaire τ). Cette difficulté est probablement liée à la spécificité de notre problème pour lequel peu de contraintes sur l'état du système sont disponibles. En conséquence, il est important d'avoir une bonne estimation de ce que l'on cherche, par des études transverses, ou en ayant des approches progressives. Par exemple, les résultats obtenus par les ondes de torsion, sous-partie zonale d'un modèle non-axisymétrique, peuvent servir de guide pour l'étude complète non-zonale. Un autre exemple, qui a été réalisé pour l'étude des ondes de torsion, a été de pénaliser les valeurs très fortes de la conductance parce que d'autres études proposaient des valeurs plus faibles. En l'occurrence, les valeurs que nous proposons sont malgré tout plus grandes que celles des autres auteurs.

D'autres difficultés mises en avant dans ce mémoire témoignent du peu de recul de l'assimilation de données en géomagnétisme et doivent être étudiées à l'aide des compétences développées en dynamique de l'atmosphère et de l'océan. Je pense au problème de conditionnement (ou d'adimensionnement) mis en évidence dans le dernier chapitre (section 4.5.6), mais aussi au traitement de l'assimilation sur de longues échelles de temps. Ce dernier problème a été montré dans le cadre des expériences jumelles, où la fonction coût présentait un plus grand nombre de pics et de minima si la période d'assimilation augmentait ce qui laissait entendre que dans ces derniers cas, l'estimation initiale devait être de très bonne qualité.

L'absence d'information sur l'état du noyau se traduit également par un grand nombre d'itérations d'optimisation avant une décroissance significative de la fonction coût, contrairement aux quelques dizaines dont parlent plusieurs auteurs (par exemple Courtier et Talagrand 1987, ont 10 – 15 itérations).

J'ai donné, dans ce mémoire, les techniques, les articles qui m'ont aidé à écrire les codes adjoints et j'ai aussi écrit les adjoints dans les sections 3.4.1 et 4.2.2. L'écriture de l'adjoint peut être longue, mais je voudrais mettre en avant que le point critique est plutôt le code direct. En effet il faut que ce dernier soit clair, modulaire, et compris. Le point de départ de la thèse était l'écriture du modèle quasi-géostrophique qui fait intervenir les quantités $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ et $\langle B_s B_\varphi \rangle$ (écrit dans la section 2.3.3, voir également l'annexe B). Ces quantités magnétiques sont intégrées selon l'axe de rotation alors que d'autres modèles quasi-géostrophique traitent la force de Lorentz en trois dimensions. On a cependant manqué d'un peu de recul concernant ces quantités : les conditions aux limites à appliquer au champ magnétique ne sont

par exemple pas évidentes. Elles s'expriment plus facilement lorsqu'on traite une sous-partie de ce problème, avec le potentiel magnétique bi-dimensionnel A (décrit dans la section 2.3.4). Cette description me paraît donc une alternative intermédiaire intéressante, mais temporaire, pour l'étude de la dynamique de la variation séculaire.

5.2 Perspectives

Des développements pour la méthodologie de l'assimilation de données

La méthode variationnelle mise en œuvre dans ce mémoire est fondamentale et pourra être raffinée en prenant en compte l'erreur modèle afin d'avoir une description de la statistique des erreurs de prédiction, et en cherchant à rendre la minimisation plus rapide, à l'aide d'un meilleur conditionnement du problème. Une grande partie du travail concernera également l'opérateur d'observation afin d'assimiler directement les données magnétiques et non plus les modèles de champ du noyau. Cela signifiera en particulier que les données ne seront plus uniformément distribuées à un instant donné mais consisteront plutôt en une arrivée relativement continue de données ponctuelles. La statistique des erreurs d'observations doit également être déterminée lorsqu'elle n'est plus précisée par une inversion précédente comme cela a été le cas pour ce travail.

Une description plus précise de la dynamique du noyau

L'assimilation de données permet une inversion simultanée de l'écoulement et du champ magnétique à l'intérieur du noyau. La prise en compte de la dynamique du noyau, à travers, par exemple, le modèle quasi-géostrophique complet (comme décrit dans la section 2.3.3), permet d'envisager la description temporelle de l'écoulement zonal et non-zonal et du champ magnétique à l'intérieur du noyau aux échelles de temps de la variation séculaire.

De plus, les non-linéarités du système fourniront une information sur les échelles spatiales caractéristiques dans le noyau. En effet, l'étude traditionnelle des écoulements dans le noyau est limitée aux grandes échelles, à cause de la limitation du champ observé aux grandes échelles. Les méthodes d'ensemble et l'étude du spectre d'énergie du champ magnétique permettent de gagner des informations sur les petites échelles du champ magnétique. Dans les inversions par assimilation de données, la description des petites échelles du champ de vitesse et du champ magnétique sera contrainte par la dynamique non-linéaire. La description des mécanismes sur des échelles de temps courtes est également un moyen d'appréhender la compréhension globale de la dynamo.

Les méthodes d'assimilation de données sont adaptées pour quantifier le pouvoir prédictif d'une hypothèse physique, comme ici l'hypothèse quasi-géostrophique. En pratique il s'agit par exemple de réaliser l'étude sur une période donnée, puis de poursuivre l'intégration temporelle au-delà et de comparer avec des observations qui n'ont pas servi à minimiser la fonction coût. D'autres approches pour la dynamique du noyau peuvent être testées, de même, au regard des observations, comme par

exemple la caractérisation des propriétés ondulatoires des ondes hydromagnétiques dans le noyau ou une étude de la dynamique dans l'état de Taylor. Cette approche plus générale permet peut-être d'envisager des études sur des périodes plus longues que celles de la variation séculaire. En effet, le modèle quasi-géostrophique repose sur le fait que les échelles de temps caractéristiques de la variation séculaire, de l'année au siècle, sont petites devant le temps de diffusion magnétique dans le noyau, de l'ordre de 10^4 ans. Dans ce cas, sera-t-on en mesure, avec cette approximation, d'utiliser les observations paléomagnétiques pour étudier la variation séculaire sur les derniers milliers d'années ? On peut également se demander quel est l'impact, sur la dynamique décrite, de l'absence des forces d'Archimède dans la description du modèle et si leur présence sera nécessaire pour améliorer l'accord entre les prédictions du champ magnétique et les observations de variation séculaire. La description des forces d'Archimède se fait en restant dans le cadre quasi-géostrophique mais ajoute une équation d'évolution de la température ou plus généralement de la co-densité. Du côté de l'autre extrême des échelles de temps de la variation séculaire, on espère aller vers une meilleure description de la physique rapide, à l'origine des variations rapides de l'accélération séculaire mises en avant grâce aux modèles de données satellitaires, dont les secousses magnétiques sont une des manifestations. Dans la mesure où l'énergie magnétique est forte par rapport à l'énergie cinétique, de petits changements du champ à l'intérieur du noyau peuvent engendrer des grands changements du champ de vitesse, qui interagissent avec le champ radial, plus faible, à la frontière noyau-manteau en provoquant des changements importants de ce champ.

Les inversions dynamiques permettent également de contraindre la dynamique du noyau au cœur du système Terre. En effet, les couplages entre le noyau et le manteau ou la graine, sont liés à la dynamique du noyau et aux propriétés physiques de la Terre profonde. Tout comme l'inversion de la partie 4 nous a permis de déduire des informations sur la conductance d'une couche conductrice à la base du manteau, on peut espérer arriver à une vision plus globale du système Terre avec l'aide des méthodes d'assimilation de données. Cette étude doit notamment être approfondie au regard du transfert de moment cinétique qui semble se produire au niveau du cylindre tangent, d'après les résultats d'assimilation.

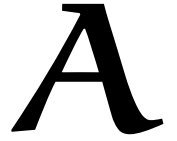
Une meilleure modélisation du champ magnétique du noyau

Du point de vue des données magnétiques, l'assimilation de données connecte les observations par la dynamique du noyau. Les paramétrisations actuelles des observations du champ magnétique du noyau sont de grande échelle parce que les petites échelles sont filtrées par le manteau, et parce que le champ magnétique crustal domine les petites échelles spatiales des observations. De plus, la qualité et la quantité des données, utilisées pour réaliser ces paramétrisations, dépendent du temps. Comme l'état du système à un instant donné est estimé en utilisant les observations de toute la fenêtre temporelle, l'assimilation de données peut être au cœur d'une nouvelle génération de modèles de champ du noyau qui prennent en compte sa dynamique. Dans de tels modèles, l'interpolation spatiale et temporelle des données est contrainte par des lois physiques. De tels modèles d'une source de champ magnétique (ici le champ du noyau) aident également à mieux isoler cette source et donc à isoler et comprendre les autres sources (magnétosphérique, ionosphérique ou

crustale) du champ géomagnétique. Certains modèles magnétiques sont destinés à la prévision du champ magnétique. Ces prévisions concernent l'ensemble des sources de champ géomagnétique. Les extrapolations des mesures magnétiques profiteront de l'incorporation de lois physiques grâce à l'assimilation de données. Cette question doit être toutefois abordée avec celle de la prédictabilité du champ magnétique, qui dépend de la dynamique du noyau.

La mission spatiale SWARM a pour objectif d'améliorer la description de toutes les sources de champ magnétique terrestre. Concernant le champ du noyau, nous bénéficierons encore longtemps de l'extension des séries temporelles des données puisque les données directes ne couvrent actuellement qu'une fois l'ordre de grandeur des échelles de temps caractéristiques de la variation séculaire.

Notations



A.1 Coordonnées spatiales et temporelles

r	rayon sphérique
θ	colatitude
φ	longitude
s	rayon cylindrique
z	direction de l'axe de rotation
\mathbf{e}_s	vecteur unitaire selon s
\mathbf{e}_φ	vecteur unitaire selon φ
\mathbf{e}_z	vecteur unitaire selon z (déterminant l'axe de rotation)
\mathbf{e}_θ	vecteur unitaire selon θ
Σ	plan équatorial du noyau
t	temps

A.2 Physique du noyau

R_T	rayon de la Terre
η	diffusivité magnétique du fluide dans le noyau
σ	conductivité électrique du fluide
ρ	masse volumique du fluide
ν	viscosité du fluide
κ	notation qui regroupe les diffusivités thermique et chimique
Ω	vitesse angulaire de rotation de la Terre
\mathbf{B}	induction magnétique dans le noyau ; (B_s, B_φ, B_z) en coordonnées cylindriques, $(B_r, B_\theta, B_\varphi)$ en coordonnées sphériques
B_r	champ magnétique radial
\dot{B}_r	variation séculaire
A	fonction flux magnétique
\mathbf{u}	vitesse du fluide ; (u_s, u_φ, u_z) en coordonnées cylindriques
\mathbf{u}_H	vitesse du fluide tangente à la surface du noyau
ζ	vorticité du fluide
ζ_z	vorticité axiale du fluide
ω_g	vitesse angulaire géostrophique du fluide
Ψ	fonction de courant pour le fluide

C	co-densité du fluide
Π	champ de pression dans le noyau
Π'	champ de pression modifié (pression fluide et potentiel associé à la force centrifuge)
\mathbf{j}	densité volumique de courants électriques dans le noyau
\mathbf{g}	champ de gravité pris à la surface du noyau
h	demi-hauteur de colonne dans le noyau
$\langle \cdot \rangle$	moyenne dans la direction de l'axe de rotation
$\{ \cdot \}$	moyenne sur un cylindre géostrophique
G	conductivité de la couche conductrice à la base du manteau

A.3 Adimensionnement

B_o	intensité typique du champ magnétique
l	longueur typique
U	vitesse du fluide
r_o	rayon du noyau sans dimension
r_i	rayon de la graine sans dimension
G_o	conductivité typique d'une couche conductrice à la base du manteau
V_A	vitesse des ondes d'Alfvén
T_A	période des ondes d'Alfvén
T_η	temps de diffusion magnétique
T_{adv}	temps d'advection
S	nombre de Lundquist
λ_l	nombre de Lehnert (construit avec la longueur l)
R_m	nombre de Reynolds magnétique
E	nombre d'Ekman
Ro	nombre de Rossby
Pr	nombre de Prandtl
P_m	nombre de Prandtl magnétique
Λ	nombre d'Elsasser

A.4 Observations du champ magnétique

X	composante Nord du champ magnétique terrestre
Y	composante Est du champ magnétique terrestre
Z	composante verticale vers le bas du champ magnétique terrestre
H	norme horizontale du champ magnétique terrestre
F	norme totale du champ magnétique terrestre
I	inclinaison du champ magnétique terrestre (angle entre le vecteur champ magnétique et l'horizontale)
D	déclinaison du champ magnétique terrestre (angle entre le Nord magnétique et le Nord géographique)
V	potentiel magnétique dans une zone sans sources de champ

A.5 Unités

km/an	kilomètres par ans
mT	milliTesla
nT	nanoTesla

A.6 Harmoniques sphériques et séries de Fourier

n	degré harmonique
m	ordre harmonique
P_n^m	polynôme de Legendre avec semi-normalisation de Schmidt
g_n^m, h_n^m	coefficients de Gauss (description du champ magnétique par des harmoniques sphériques)
Φ	fonction représentant la paramétrisation temporelle du champ magnétique ou du champ de vitesse pour le problème inverse cinématique
$P_L^{(1,0)}$	polynôme de Jacobi de degré L
t_n^m	coefficients toroïdaux du champ de vitesse

A.7 Problème inverse et assimilation

J	fonction coût
\mathbf{y}	vecteur d'observation
H	opérateur d'observation
\mathbf{H}	opérateur d'observation linéaire
ϵ	erreur d'observation
\mathbf{R}	matrice de covariance d'erreurs d'observation
f_y	fréquence temporelle des observations
\mathbf{x}	état du système
\mathbf{x}_0	condition initiale
M	modèle numérique
ϵ_M	erreur modèle
\mathbf{Q}	matrice de covariance d'erreur modèle
\mathbf{W}	matrice de régularisation
T	période d'assimilation
$.t$	quantité vraie
$.g$	estimation initiale
$.b$	ébauche
$.f$	quantité prédite
$.a$	solution (analyse)
\mathbf{P}^b	matrice de covariance d'erreur d'ébauche
α_c	amplitude de régularisation
$.T$	opérateur transposé
\mathbf{a}	vecteur adjoint
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire

Annexes pour le modèle quasi-géostrophique

B

B.1 Équation d'induction au premier ordre

Seule la partie d'ordre 0 de l'écoulement a été utilisée pour écrire les équations (2.38) à (2.40). Dans ces équations, on peut souhaiter prendre en compte la composante verticale de l'écoulement. Elle entre dans le terme de Coriolis dans l'équation (2.36) et dans l'équation d'induction à la frontière noyau-manteau (équation (2.26)).

Dans ce cas, l'incompressibilité est assurée en définissant

$$\mathbf{u}_E^{NZ}(s, \varphi) = \gamma(s) [\nabla \times \Psi(s, \varphi) \mathbf{e}_z]; \quad (\text{B.1})$$

et l'équation de continuité pour $\mathbf{u}_E^{NZ} + u_z^1 \mathbf{e}_z$ donne $\gamma(s) = h^{-1}(s)$.

Le champ de vorticité non-zonale ζ est alors défini par $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}_E^{NZ}$, et sa composante verticale est

$$\zeta_z(s, \varphi) = -\nabla_E^2 [h^{-1}(s) \Psi(s, \varphi)]. \quad (\text{B.2})$$

Finalement, le jeu d'équations (2.38) à (2.40) devient

$$\partial_t \langle B_s^2 \rangle = -[\mathbf{u} \cdot \nabla] \langle B_s^2 \rangle - 2s^{-1} \langle B_s^2 \rangle u_s - 2s^{-1} \langle B_s^2 \rangle \partial_\varphi u_\varphi + 2s^{-1} \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_\varphi u_s, \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_t \langle B_\varphi^2 \rangle = -[\mathbf{u} \cdot \nabla] \langle B_\varphi^2 \rangle - 2 \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_s u_s + 2s \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi), \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_s B_\varphi \rangle &= -[\mathbf{u} \cdot \nabla] \langle B_s B_\varphi \rangle + s \langle B_s^2 \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi) + s^{-1} \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_\varphi u_s \\ &\quad - [\nabla_E \cdot \mathbf{u}] \langle B_s B_\varphi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

On s'intéresse ici au comportement des quantités quadratiques, $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ et $\langle B_s B_\varphi \rangle$, du modèle quasi-géostrophique décrit par les équations (2.36), (2.37) et (2.38) à (2.40).

L'approximation quasi-géostrophique profite de la bi-dimensionalisation de l'écoulement, justifiée par la petitesse du nombre de Lehnert, pour placer la dynamique dans le plan équatorial. Dans d'autres modèles quasi-géostrophiques (Schaeffer et Cardin 2006), la force de Lorentz est décrite en trois dimensions alors que

dans notre approche, la force de Lorentz est moyennée verticalement ; les quantités $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ et $\langle B_s B_\varphi \rangle$ sont des intégrales selon l'axe de rotation de quantités quadratiques du champ magnétique.

Dans la partie 2.3.3, nous prenons la moyenne verticale de l'équation de Navier-Stokes, puis le rotationnel de l'équation résultante. Mais si on considère que la quasi-géostrophie est une invariance axiale de la vorticité, on peut préférer prendre le rotationnel, puis intégrer en z .

Ces deux approches diff rent par un terme de volume et les termes de surface que l'intégration en z génère sur les quantités de la force de Lorentz. En effet, on est alors dans le cadre du théorème de Leibniz qui prend en compte la situation de la dérivée en s , par exemple, d'une intégrale dont les bornes, ici la demi-hauteur de colonne h , dépendent de s

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle u \rangle = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{2h} \int_{-h}^h u(s, \varphi, z) dz \right] = -\frac{\beta}{2h} \int_{-h}^h u(s, \varphi, z) dz + \frac{1}{2h} \frac{d}{ds} \int_{-h}^h u(s, \varphi, z) dz.$$

Ceci se r ecrit, avec la notation 2.32

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle u \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial s} \right\rangle + \beta \left[\frac{u(s, \varphi, h) + u(s, \varphi, -h)}{2} - \langle u \rangle \right]. \quad (\text{B.6})$$

Cette dernière équation montre que la dérivée de l'intégrale diffère de l'intégrale de la dérivée par un terme de surface et un terme de volume (le dernier terme du membre de droite) d'amplitude β ( quation 2.31). Cette approche s'étend à la composante verticale du rotationnel

$$(\nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle)_z = \langle (\nabla \times \mathbf{u})_z \rangle + \frac{\beta}{2} [u_\varphi(s, \varphi, h) + u_\varphi(s, \varphi, -h) - 2 \langle u_\varphi \rangle]. \quad (\text{B.7})$$

Dans ce cas, le dernier terme du membre de droite est un terme de volume azimutal.

Ces intégrales faisaient intervenir un très grand nombre de termes de surface que nous avons négligés parce que nous pensons que le champ magnétique à la surface du noyau est de plus faible intensité que le champ dans le volume du noyau.

D'autre part, les quantités quadratiques $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ et $\langle B_s B_\varphi \rangle$ ne sont pas complètement indépendantes. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre de nos équations indique que

$$\langle B_s^2 \rangle \geq 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\langle B_\varphi^2 \rangle \geq 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\langle B_s B_\varphi \rangle \leq \sqrt{\langle B_s^2 \rangle \langle B_\varphi^2 \rangle}. \quad (\text{B.10})$$

Le code direct, décrit par les équations (2.36), (2.37) et (2.38)   (2.40) a été mis en œuvre pendant la thèse. Certains tests numériques ont porté sur les mouvements zonaux ( quations (2.37) et (2.38)   (2.40), sans l'équation (2.36)). De façon empirique, on a remarqué que si les conditions initiales des quantités quadratiques satisfaisaient l'inégalité stricte, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les conditions de positivité des produits quadratiques sont satisfaites sur l'ensemble de l'intégration temporelle. Ce résultat est rassurant compte-tenu des approximations présentées ci-dessus pour aboutir au modèle. En revanche, si   l'état initial

$\langle B_s B_\varphi \rangle = \sqrt{\langle B_s^2 \rangle \langle B_\varphi^2 \rangle}$ alors des entorses à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à la positivité des produits quadratiques peuvent survenir pendant l'intégration temporelle. Ces entorses sont très faibles, mais leur amplitude dépend du pas de temps choisi pour l'intégration. Si la résolution est suffisante, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est satisfaite.

Développements pour le modèle « SCALP »

C

Je décris dans cette partie des développements en cours. Ces développements concernent la variante du modèle quasi-géostrophique faisant intervenir le potentiel magnétique A (décrit dans la section 2.3.4) comme alternative aux quantités quadratiques du champ magnétique (section 2.3.3). Cette alternative impose une invariance axiale du champ magnétique (inclut dans les solutions du modèle de la section 2.3.3) mais permet l'inclusion de diffusion magnétique dans le volume ce qui peut faciliter le travail numérique.

Les résultats obtenus dans le chapitre 4, un champ magnétique fort dans le volume du noyau, nous confortent dans l'idée de travailler dans un premier temps sans les termes d'inertie, dans l'approximation magnétostrophique. Le modèle « SCALP » (pour scalar potential en anglais) est alors le suivant

$$-\frac{2\beta}{\lambda s}\partial_\varphi\Psi = B_s\partial_s\nabla_E^2A + \frac{B_\varphi}{s}\partial_\varphi\nabla_E^2A, \quad (\text{C.1})$$

$$\partial_tA = -\frac{1}{s}\partial_\varphi\Psi\partial_sA + \frac{1}{s}\partial_s\Psi\partial_\varphiA + S^{-1}\nabla_E^2A, \quad (\text{C.2})$$

$$\partial_tBr = -\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\partial_\varphi\Psi\partial_\theta Br + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\partial_\theta\Psi\partial_\varphi Br + \frac{1}{\cos^2\theta}\Psi^{NZ}\partial_\varphi Br, \quad (\text{C.3})$$

avec le Laplacien équatorial

$$\nabla_E^2 = s^{-1}\partial_s(s\partial_s) + s^{-2}\partial_\varphi^2. \quad (\text{C.4})$$

Tout d'abord, l'équation (C.1) seule, ainsi que son adjointe, ont été mises en œuvre pour une étude qui consiste à assimiler des données d'écoulement non-zonal (ces pseudo-observations partent du même type d'inversion que les pseudo-observations du chapitre 4), dans l'objectif de connaître le potentiel magnétique A qui en est à l'origine.

D'une part, cette étude dans laquelle les observations étaient la fonction de courant aux points de grille, et non pas des coefficients harmoniques, nous conforte dans l'idée de ne travailler qu'avec un nombre réduit de modes harmoniques dans un premier temps. En effet, les solutions développent des petites échelles. D'autre part, le champ magnétique retrouvé est également de l'ordre de quelques milliTeslas.

Dans la recherche d'une approche progressive, on va s'intéresser à la version linéarisée du modèle « SCALP » autour d'un état stationnaire du champ de vitesse,

$\bar{\Psi}$ est la fonction de courant stationnaire, et du champ magnétique \bar{A} . On cherchera donc par assimilation de données géomagnétiques, les écarts à cet état stationnaire, $\tilde{\Psi}$ et \tilde{A} , et le champ magnétique radial à la frontière noyau-manteau B_r . Travailler avec une version linéaire, nous assure d'avoir une fonction coût quadratique pour le problème inverse.

Les versions linéarisées des deux premières équations (C.1) et (C.2) sont résolues dans le plan équatorial tandis que B_r évolue à la frontière noyau-manteau. Par ailleurs, on travaille avec une décomposition de Fourier en longitude et une décomposition pseudo-spectrale (noeuds de Gauss-Legendre-Lobatto) en rayon cylindrique dans le plan équatorial ou en latitude à la surface du noyau (par exemple, Fournier et al. 2005). On se donne également la possibilité d'avoir une troncature différente selon les variables. En effet, dans l'équilibre magnétostrophique (C.1), la fonction de courant correspond grossièrement au carré du potentiel magnétique. En conséquence, la connaissance de l'écoulement jusqu'au degré m_Ψ ne permet d'avoir des informations seulement jusqu'au degré $m_A = m_\Psi/2$. Cependant, l'assimilation de données permet justement de pallier cet aspect critique en introduisant la dimension temporelle au problème.

L'écoulement de base stationnaire $\bar{\Psi}$ sera le résultat d'une inversion d'ensemble (Gillet et al. 2009b), moyenné sur la période d'étude. Le potentiel scalaire de base, \bar{A} , sera le résultat de l'inversion de l'équation C.1, seule, à partir de pseudo-observations de $\bar{\Psi}$. Les observations seront tout d'abord des coefficients de Gauss issus d'un modèle de champ magnétique du noyau à la frontière noyau-manteau.

Cette approche, linéaire ou non linéaire, à l'intérêt de réunir deux inversions (modèles de champ magnétique vers modèle de champ de vitesse et modèle de champ de vitesse vers champ magnétique à l'intérieur du noyau). De plus, la dynamique permet d'obtenir l'évolution temporelle du champ magnétique et du champ de vitesse à l'intérieur du noyau sur la période étudiée, cohérents avec les observations du champ magnétique de cette période.

Obtention de codes adjoints

D

Cette annexe décrit l'obtention de codes adjoints à partir de séquences directes simples dans le but d'expliquer l'obtention de codes adjoints plus complets et plus compliqués. On s'intéresse donc principalement à la formulation du modèle adjoint M^T de l'équation (3.31). Le lien avec les observations (second membre de droite de l'équation 3.31) est à la base du calcul du gradient, il est mis en avant dans le corps de la thèse par les équations qui précèdent l'équation (3.31), et dans cette annexe par la séquence 4.

La majorité des exemples suivants concernent l'obtention de l'adjoint d'une séquence linéaire. En effet, si la séquence est non-linéaire, on écrit le code linéaire tangent afin de dériver l'adjoint, en se ramenant à une séquence linéaire à chaque fois.

Dans un premier temps les variables sont des fonctions de l'espace uniquement (et sont discrétisées sur les mêmes points de grille). Je donne ensuite un exemple dépendant du temps, dans le cadre d'un schéma en temps d'Euler explicite d'ordre 1.

Les principales variables de cette annexe sont A, B et C , \tilde{A}, \tilde{B} et \tilde{C} sont leurs différentielles, et ADA, ADB et ADC sont les variables adjointes.

Séquence 1

Code direct :

$$A = B. \tag{D.1}$$

Ce code direct signifie également :

$$A = B \tag{D.2}$$

$$B = B. \tag{D.3}$$

Le code linéaire tangent est identique au code direct dans ce cas simple :

$$\tilde{A} = \tilde{B} \tag{D.4}$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}. \tag{D.5}$$

Il peut s'écrire sous forme matricielle (cette écriture permet de bien anticiper l'adjoint)

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}, \tag{D.6}$$

dans laquelle I est la matrice identité. Soit \tilde{M} la matrice du modèle linéaire tangent ; dans ce premier exemple,

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

La matrice adjointe est la transposée de \tilde{M} dans laquelle chacune des cases est également la transposée. Plus précisément, on a

$$\text{si } \tilde{M} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & K \end{bmatrix}, \text{ alors } M^T = \begin{bmatrix} X^T & Z^T \\ Y^T & K^T \end{bmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

où X, Y, Z et K sont des opérateurs et avec un exposant T pour la transposée.

Dans notre exemple, sachant que $I^T = I$ on a

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & I \end{bmatrix}. \quad (\text{D.9})$$

La séquence adjointe s'écrit donc, en appelant ADA la variable adjoint de A et ADB la variable adjointe de B

$$ADB = ADA + ADB \quad (\text{D.10})$$

$$ADA = 0. \quad (\text{D.11})$$

Cette séquence adjointe ne fait pas intervenir les variables directes ce qui est normal pour une séquence directe linéaire mais ce n'est pas le cas pour une séquence non-linéaire (voir la séquence 5 pour un exemple non-linéaire).

Séquence 2

Code direct :

$$A = DB \quad (\text{D.12})$$

$$B = B, \quad (\text{D.13})$$

dans cette séquence la matrice D n'est pas une variable mais un opérateur (de dérivation, par exemple).

Le code linéaire tangent est dans ce cas :

$$\tilde{A} = D\tilde{B} \quad (\text{D.14})$$

$$\tilde{B} = \tilde{B} \quad (\text{D.15})$$

Il peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.16})$$

Soit \tilde{M} la matrice du modèle linéaire tangent. Dans ce second exemple

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (\text{D.17})$$

La matrice adjointe M^T est la transposée de \tilde{M} dans laquelle chacune des cases est également la transposée :

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix}. \quad (\text{D.18})$$

Remarque : si l'opérateur différentiel continu est auto-adjoint, l'opérateur discret ne l'est pas. En conséquence j'ai écrit D^T pour la transposée de la matrice de dérivation. On obtient D^T après une description précise de la matrice D . Par exemple, en reprenant la partie du modèle direct $A = DB$ alors si on a 4 point de grilles (notés i de 1 à 4) on peut écrire le schéma de dérivation de la façon suivante

$$A(i) = \frac{B(i+1) - B(i)}{\Delta x} \quad (\text{D.19})$$

et si A est défini sur la même grille que B . On a besoin d'une condition pour $B(4)$, par exemple $B(4) = 0$. Dans ce cas l'adjoint de $A(4) = 0$ est $ADA(4) = 0$; cette quantité ($A(4) = 0$) ne peut pas faire partie du vecteur de contrôle puisqu'on la connaît et qu'on l'impose en conséquence. D'ailleurs, $A(4)$ n'est pas inclu dans le calcul de D qui n'est alors plus carrée mais rectangulaire :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(1) \\ \tilde{A}(2) \\ \tilde{A}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 \\ 0 & 0 & -1/\Delta x & 1/\Delta x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{B}(1) \\ \tilde{B}(2) \\ \tilde{B}(3) \\ \tilde{B}(4) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.20})$$

L'adjoint de D est alors

$$D^T = \begin{bmatrix} -1/\Delta x & 0 & 0 \\ 1/\Delta x & -1/\Delta x & 0 \\ 0 & 1/\Delta x & -1/\Delta x \\ 0 & 0 & 1/\Delta x \end{bmatrix}. \quad (\text{D.21})$$

Après cette précision sur la matrice D^T , la séquence adjointe complète est

$$ADB = ADB + D^T ADA, \quad (\text{D.22})$$

$$ADA = 0. \quad (\text{D.23})$$

Séquence 3

Code direct :

$$A = LDA \quad (\text{D.24})$$

$$B = B, \quad (\text{D.25})$$

dans cette séquence la matrice L est un autre opérateur (un laplacien, par exemple).

Le code linéaire tangent est identique au code direct dans ce cas simple :

$$\tilde{A} = LD\tilde{B} \quad (\text{D.26})$$

$$\tilde{B} = \tilde{B} \quad (\text{D.27})$$

Il peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & LD \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.28})$$

Soit \tilde{M} la matrice du modèle linéaire tangent. Dans ce troisième exemple

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & LD \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

La matrice adjointe M^T est la transposée \tilde{M} dans laquelle chacune des cases est également la transposée.

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D^T L^T & I \end{bmatrix}. \quad (\text{D.30})$$

Comme précisé page 57, l'adjoint d'une séquence (LD) d'opérateurs est la séquence prise dans le sens inverse les transposées de ces opérateurs $(D^T L^T)$.

La séquence adjointe s'écrit

$$ADB = ADB + D^T L^T ADA, \quad (\text{D.31})$$

$$ADA = 0. \quad (\text{D.32})$$

Séquence 4 : Lien avec les observations

Je montre deux exemples concernant le lien avec les observations, un troisième exemple reprend l'exemple 2 de façon continue à titre pédagogique.

Exemple 1 : Le premier exemple reprend le code direct de la séquence 1, de plus, on observe la variable A . Le code direct est donc :

$$A = B, \quad (\text{D.33})$$

$$B = B \quad (\text{D.34})$$

Puis on calcule l'écart avec les observations. Les observations y sont reliées à la variable A par l'opérateur d'observations \mathbf{H}

$$y = \mathbf{H}A + \epsilon, \quad (\text{D.35})$$

où ϵ sont les erreurs d'observations.

La fonction coût vaut $J = (\mathbf{H}A - y)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}A - y)$. Le modèle adjoint de la séquence 1 spécifie la partie M'^T de l'équation 3.31, le second membre de droite de cette équation valant $\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}A - y)$, ce qui donne

$$ADB = ADA + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}A - y) \quad (\text{D.36})$$

$$ADA = 0. \quad (\text{D.37})$$

Exemple 2 : le premier exemple réutilisait les équations (3.28) à (3.31). Dans l'exemple suivant, je reprends l'ensemble de ces équation (3.28) à (3.31) pour un cas simple

$$A_{i+1} = kA_i, \quad (\text{D.38})$$

où k est une constante. De plus, $i = [0; 1; 2]$, et on observe la variable A directement ($\mathbf{H} = I$) à chaque instant :

$$\mathbf{y} = [A_0^o, A_1^o, A_2^o]^T + [\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2]^T, \quad (\text{D.39})$$

où ϵ_i sont les erreurs d'observation. La matrice de covariance d'erreur d'observation \mathbf{R} s'écrit dans ce cas

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \epsilon_0^T \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1^T \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^T \epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{00} & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{D.40})$$

Le modèle direct s'écrit

$$A_1 = kA_0, \quad (\text{D.41})$$

$$A_2 = kA_1 = k^2A_0. \quad (\text{D.42})$$

De même le modèle linéaire tangent s'écrit

$$\tilde{A}_1 = k\tilde{A}_0, \quad (\text{D.43})$$

$$\tilde{A}_2 = k\tilde{A}_1 = k^2\tilde{A}_0. \quad (\text{D.44})$$

La fonction coût est la somme

$$\begin{aligned} J_H(A_0) &= \frac{1}{2} [A_0 - A_0^o]^T R_{00}^{-1} [A_0 - A_0^o] + \frac{1}{2} [A_1 - A_1^o]^T R_{11}^{-1} [A_1 - A_1^o] \\ &+ \frac{1}{2} [A_2 - A_2^o]^T R_{22}^{-1} [A_2 - A_2^o]. \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

La différentielle de la fonction coût est alors

$$\hat{J}_H(A_0, \tilde{A}_0) = \tilde{A}_0 R_{00}^{-1} [A_0 - A_0^o] + \tilde{A}_1 R_{11}^{-1} [A_1 - A_1^o] + \tilde{A}_2 R_{22}^{-1} [A_2 - A_2^o]. \quad (\text{D.46})$$

On met en évidence la linéarité par rapport à \tilde{A}_0 en réécrivant $\hat{J}_H(A_0, \tilde{A}_0)$ en utilisant le développement du modèle linéaire tangent

$$\hat{J}_H(A_0, \tilde{A}_0) = \tilde{A}_0 R_{00}^{-1} [A_0 - A_0^o] + k\tilde{A}_0 R_{11}^{-1} [A_1 - A_1^o] + k^2\tilde{A}_0 R_{22}^{-1} [A_2 - A_2^o] \quad (\text{D.47})$$

Par définition, le gradient de J_H dans la direction A_0 est

$$\nabla_{A_0} J_H = R_{00} [A_0 - A_0^o] + kR_{11}^{-1} [A_1 - A_1^o] + k^2R_{22}^{-1} [A_2 - A_2^o]. \quad (\text{D.48})$$

Si je définis la variable adjointe ADA telle que

$$ADA_i = kADA_{i+1} + R_{ii}^{-1} [A_i - A_i^o], \quad (\text{D.49})$$

$$ADA_3 = 0, \quad (\text{D.50})$$

alors

$$\nabla_{A_0} J_H = ADA_0. \quad (\text{D.51})$$

En effet, calculons, de façon rétrograde,

$$\begin{aligned} ADA_3 &= 0, \\ ADA_2 &= kADA_3 + R_{22}^{-1} [A_2 - A_2^o], \\ ADA_1 &= kADA_2 + R_{11}^{-1} [A_1 - A_1^o], \\ ADA_0 &= kADA_1 + R_{00}^{-1} [A_0 - A_0^o], \\ &= k^2 ADA_2 + kR_{11}^{-1} [A_1 - A_1^o] + R_{00}^{-1} [A_0 - A_0^o], \\ &= k^2 R_{22}^{-1} [A_2 - A_2^o] + kR_{11}^{-1} [A_1 - A_1^o] + R_{00}^{-1} [A_0 - A_0^o], \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 3 : Lien entre l'exemple 2 et l'approche continue Il faut tout d'abord reconnaître que le modèle direct de l'exemple 2

$$A_{i+1} = kA_i, \quad (\text{D.52})$$

correspond à l'équation :

$$\partial_t A = \frac{k-1}{\Delta_t} A, \quad (\text{D.53})$$

$$A(0) = A_0, \quad (\text{D.54})$$

si le schéma en temps qui était choisi est un schéma d'Euler explicite d'ordre 1.

Le modèle linéaire tangent est alors

$$\partial_t \tilde{A} = \frac{k-1}{\Delta_t} \tilde{A}, \quad (\text{D.55})$$

$$\tilde{A}(0) = \tilde{A}_0, \quad (\text{D.56})$$

La fonction coût s'écrit de façon continue

$$J_H(A_0) = \frac{1}{2} \int_0^T (A - A^o)^T \mathbf{R}^{-1} (A - A^o) dt. \quad (\text{D.57})$$

La différentielle de J_H est alors

$$\tilde{J}_H(A_0, \tilde{A}_0) = \int_0^T \tilde{A} \mathbf{R}^{-1} (A - A^o) dt. \quad (\text{D.58})$$

Par définition, le gradient de J_H dans la direction A_0 est la quantité X telle que

$$\tilde{J}_H(A_0, \tilde{A}_0) = X \tilde{A}_0. \quad (\text{D.59})$$

Pour mettre en évidence la linéarité de $\tilde{J}_H(A_0, \tilde{A}_0)$ par rapport à \tilde{A}_0 je multiplie scalairement l'équation D.55 par la variable adjointe (ici $P = ADA$, pour alléger

l'écriture des équations suivantes) et on intègre sur le domaine (ici, tout comme dans l'exemple précédent, en temps uniquement) :

$$\int_0^T (\partial_t \tilde{A}) P dt - \int_0^T \frac{k-1}{\Delta_t} \tilde{A} P dt = 0, \quad (\text{D.60})$$

on modifie cette quantité en faisant une intégration par parties

$$\tilde{A}_T P_T - \tilde{A}_0 P_0 - \int_0^T (\partial_t P) \tilde{A} dt - \int_0^T \frac{k-1}{\Delta_t} P \tilde{A} dt = 0. \quad (\text{D.61})$$

Par définition, on se donne $P_T = 0$. Il reste donc

$$-\tilde{A}_0 P_0 - \int_0^T \left(\partial_t P + \frac{k-1}{\Delta_t} P \right) \tilde{A} dt = 0. \quad (\text{D.62})$$

Par ailleurs, \tilde{A}_0 est la quantité dont on souhaite montrer la linéarité de $\tilde{J}_H(A_0, \tilde{A}_0)$. Si on pose

$$\partial_t P + \frac{k-1}{\Delta_t} P = \mathbf{R}^{-1}(A - A^o), \quad (\text{D.63})$$

$$P_T = 0, \quad (\text{D.64})$$

alors l'équation D.62 se réécrit

$$-\tilde{A}_0 P_0 - \int_0^T \mathbf{R}^{-1}(A - A^o) \tilde{A} dt = 0, \quad (\text{D.65})$$

$$-\tilde{A}_0 P_0 = \tilde{J}_H(A_0, \tilde{A}_0), \quad (\text{D.66})$$

en utilisant l'équation D.58. Ceci signifie, d'après la définition D.59, que le gradient vaut $-P_0$.

Le lien avec le code adjoint discret de l'exemple 2 peut se faire en réalisant que l'adjoint d'un schéma d'Euler explicite sera un schéma d'Euler implicite.

Séquence 5 : Non-linéaire

Code direct (A, B, C sont trois variables d'état) :

$$A = B * C \quad (\text{D.67})$$

$$B = B \quad (\text{D.68})$$

$$C = C. \quad (\text{D.69})$$

Le code linéaire tangent est

$$\tilde{A} = \tilde{B} * C + B * \tilde{C} \quad (\text{D.70})$$

$$\tilde{B} = \tilde{B} \quad (\text{D.71})$$

$$\tilde{C} = \tilde{C}. \quad (\text{D.72})$$

Il peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C & B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.73})$$

La matrice adjointe M^T est la transposée

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ B & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (\text{D.74})$$

Dans cette matrice, B et C sont les variables, on ne prend donc pas leur transposée. Elles sont présentes car le code direct était non-linéaire du point de vue des variables de contrôle. Le code adjoint est

$$ADB = ADB + C * ADA \quad (\text{D.75})$$

$$ADC = ADC + B * ADA \quad (\text{D.76})$$

$$ADA = 0 \quad (\text{D.77})$$

Il est logique que l'adjoint de A soit nul puisque dans le code direct, A n'est qu'un produit du modèle direct mais ne rétroagit pas sur B et C .

Notons que dans cet exemple non-linéaire, on a besoin de sauvegarder B et C qui sont utilisées pour l'intégration rétrograde du code adjoint.

Séquence 6 : Dérivée temporelle

Code direct :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B, \quad (\text{D.78})$$

la variable A dépend du temps (indice i) et de l'espace, mais la variable B ne dépend que de l'espace.

On choisit un schéma d'Euler explicite d'ordre 1 pour discrétiser la dérivée en temps (tous les autres schémas en temps sont possibles, il suffit d'écrire à part les adjoints des séquences d'initialisation dans le cas de schémas en temps d'ordres supérieurs). Le code direct s'écrit explicitement

$$A(i+1) = A(i) + \Delta_t B, \quad (\text{D.79})$$

où Δ_t est le pas de temps.

Le code linéaire tangent est le même dans ce cas simple :

$$\tilde{A}(i+1) = \tilde{A}(i) + \Delta_t \tilde{B}, \quad (\text{D.80})$$

ou de façon équivalente

$$\tilde{A}(i+1) = \tilde{A}(i) + \Delta_t \tilde{B}, \quad (\text{D.81})$$

$$\tilde{A}(i) = \tilde{A}(i), \quad (\text{D.82})$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}. \quad (\text{D.83})$$

Il peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(i) \\ \tilde{A}(i+1) \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ I & 0 & \Delta_t I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{A}(i) \\ \tilde{A}(i+1) \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \quad (\text{D.84})$$

La matrice adjointe M^T est la transposée

$$\begin{bmatrix} ADA(i) \\ ADA(i+1) \\ ADB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_t I & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ADA(i) \\ ADA(i+1) \\ ADB \end{bmatrix}. \quad (\text{D.85})$$

Les équation adjointes sont donc

$$ADB = ADB + \Delta_t ADA(i+1) \quad (\text{D.86})$$

$$ADA(i) = ADA(i) + ADA(i+1) \quad (\text{D.87})$$

$$ADA(i+1) = 0. \quad (\text{D.88})$$

Dans cet exemple, je montre l'adjoint de la séquence temporelle. Seul $A(0)$ nous intéresse in fine par définition du gradient. On vide donc $A(i+1)$ à chaque itération.

On voit également dans cet exemple l'adjoint d'un paramètre qui ne dépend pas du temps, B (mais qui peut dépendre de l'espace). Il est nourri par l'ensemble de la trajectoire temporelle de ADA puisqu'à chaque itération on reprend ADB et on lui ajoute $ADA(i+1)$.

Si on observe A dans cet exemple, on calcule les écarts aux observations (de matrice de covariance d'erreur \mathbf{R}) sur l'ensemble de la fenêtre temporelle ($N_{\mathbf{y}}$ époques d'observations)

$$J = \sum_{k=0}^{N_{\mathbf{y}}} [\mathbf{H}A(k) - \mathbf{y}(k)]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{H}A(k) - \mathbf{y}(k)], \quad (\text{D.89})$$

et le modèle adjoint est complété en conséquence par

$$ADB = ADB + \Delta_t ADA(i+1) \quad (\text{D.90})$$

$$ADA(i) = ADA(i) + ADA(i+1) + \delta_{ki} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{H}A(k) - \mathbf{y}(k)] \quad (\text{D.91})$$

$$ADA(i+1) = 0. \quad (\text{D.92})$$

J'ai utilisé un indice différent (k) pour le terme de forçage par les observations pour spécifier que ce terme est dans l'espace des observations mais repasse dans l'espace du modèle par l'opérateur \mathbf{H}^T . Le δ_{ki} signifie qu'il n'y a ce terme qu'aux époques où il y a des observations. La forme de \mathbf{H} en temps peut alors être vue comme un peigne de Dirac.

Séquence 7 : passage de l'équation 3.42 aux équations 3.48 à 3.56

Le membre de droite de l'équation 3.41 du modèle direct est une somme de trois termes. Je ne prends que le premier de façon à clarifier le passage au système adjoint. Le système se résume alors à

$$\begin{aligned}\Psi_o &= M_s^\theta \Psi, \\ \dot{B}_r &= (\sin \theta \cos \theta)^{-1} [\partial_\theta \Psi_o \partial_\varphi B_r] \\ \partial_t B_r &= \dot{B}_r.\end{aligned}\tag{D.93}$$

Les variables d'état sont Ψ et Ψ_o (qui dépendent de l'espace mais pas du temps), B_r et \dot{B}_r . La variable Ψ_o est le projeté de Ψ à la frontière noyau-manteau, la projection étant réalisée par la matrice M_s^θ . Le système est non linéaire du point de vue des variables de contrôle. Une itération du modèle linéaire tangent s'écrit

$$\begin{aligned}\delta \Psi_o(i) &= M_s^\theta \delta \Psi(i), \\ \delta \dot{B}_r(i) &= (\sin \theta \cos \theta)^{-1} [\partial_\theta \Psi_o \partial_\varphi \delta B_r(i) + \partial_\theta \delta \Psi_o \partial_\varphi B_r(i)] \\ \delta B_r(i+1) &= \delta B_r(i) + \Delta_t \delta \dot{B}_r(i).\end{aligned}\tag{D.94}$$

Le modèle linéaire tangent contient trois équations. Le modèle adjoint correspondra alors à la résolution de l'adjoint de la troisième équation, suivie de la résolution de l'adjoint de la seconde équation, elle-même suivie de la résolution de l'adjoint de la première équation.

L'adjoint de la première équation est obtenu en utilisant l'écriture matricielle pour cette équation linéaire tangente

$$\begin{bmatrix} \delta \Psi_o \\ \delta \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_s^\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta \Psi_o \\ \delta \Psi \end{bmatrix}.\tag{D.95}$$

La matrice adjointe est alors

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_s^{\theta,T} & 0 \end{bmatrix},\tag{D.96}$$

et le code adjoint :

$$\Psi^T(i) = M_s^{\theta,T} \Psi_o^T(i)\tag{D.97}$$

$$\Psi_o^T(i) = 0.\tag{D.98}$$

La troisième équation, $\delta B_r(i+1) = \delta B_r(i) + \Delta_t \delta \dot{B}_r(i)$, est identique à la séquence 6 décrite plus haut en prenant $A = B_r$ et $B = \dot{B}_r$. Par conséquent l'adjoint de cette équation est

$$\dot{B}_r^T = \dot{B}_r^T + \Delta_t B_r^T(i+1)\tag{D.99}$$

$$B_r^T(i) = B_r^T(i+1)\tag{D.100}$$

$$B_r^T(i+1) = 0.\tag{D.101}$$

L'adjoint de la seconde équation (celle dont on n'a pris qu'un seul terme par rapport au corps du texte pour faciliter la compréhension) s'obtient de la façon suivante. Je commence par écrire l'équation linéaire tangente sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \delta\Psi(i) \\ \delta B_r(i) \\ \delta \dot{B}_r(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ (\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\varphi B_r \partial_\theta & (\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\theta \Psi \partial_\varphi & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta\Psi(i) \\ \delta B_r(i) \\ \delta \dot{B}_r(i) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.102})$$

On a donc

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ (\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\varphi B_r \partial_\theta & (\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\theta \Psi \partial_\varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.103})$$

La matrice adjointe M^T est la transposée de \tilde{M} dans laquelle chacune des cases est également la transposée :

$$M^T = \begin{bmatrix} I & 0 & \partial_\theta^T \left[(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\varphi B_r \bullet \right] \\ 0 & I & \partial_\varphi^T \left[(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\theta \Psi \bullet \right] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.104})$$

ce qui signifie que le modèle adjoint peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} \Psi^T(i) \\ B_r^T(i) \\ \dot{B}_r^T(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & \partial_\theta^T \left[(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\varphi B_r \bullet \right] \\ 0 & I & \partial_\varphi^T \left[(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\theta \Psi \bullet \right] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi^T(i) \\ B_r^T(i) \\ \dot{B}_r^T(i) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.105})$$

L'écriture matricielle n'est pas très explicite dans ce cas puisqu'à la place du \bullet se trouve la variable adjoint correspondant, multiplié par un produit de Hadamard. Pour préciser, je réécris donc les équations adjointes :

$$\Psi^T(i) = \Psi^T(i) + \partial_\theta^T \left[(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\varphi B_r \dot{B}_r^T(i) \right], \quad (\text{D.106})$$

$$B_r^T(i) = B_r^T(i) + \partial_\varphi^T \left[(\sin\theta \cos\theta)^{-1} \partial_\theta \Psi \dot{B}_r^T(i) \right] \quad (\text{D.107})$$

$$\dot{B}_r^T(i) = \dot{B}_r^T(i). \quad (\text{D.108})$$

Les observations concernent la variable \dot{B}_r .

Erratum sur le test du gradient

E

Dans le paragraphe 3.3.3, je montrais que le test du gradient n'était pas satisfait ce qui signifiait un adjoint erroné. Cette remarque a fait l'objet de discussions avec l'un des rapporteurs. J'ai retravaillé sur ce test après la soutenance ce qui explique la présence de cette annexe.

E.1 L'erreur

Le test du gradient consiste à calculer la quantité

$$F(\alpha) = J(\mathbf{x}_0 + \alpha \delta \mathbf{x}_0) - J(\mathbf{x}_0) - \alpha \langle \nabla_{\mathbf{x}_0} J, \delta \mathbf{x}_0 \rangle \quad (\text{E.1})$$

telle que détaillée dans la section 3.3.3. Pour réaliser ce test, je faisais une erreur dans le calcul de $\langle \nabla_{\mathbf{x}_0} J, \delta \mathbf{x}_0 \rangle$. Il faut faire le produit scalaire de ces deux vecteurs $\nabla_{\mathbf{x}_0} J$ et $\delta \mathbf{x}_0$ qui ont la même taille.

Grâce à cela, j'ai pu réaliser que la partie de mes adjoints la plus imprécise était le passage de l'équateur à la frontière noyau-manteau (une interpolation d'une grille à l'autre). Je donne quelques informations complémentaires à propos de ce test dans la section suivante.

E.2 Test d'un modèle simple

Pour bien comprendre le test du gradient, je pars ici d'un cas très simple :

Le modèle direct prend la condition initiale Y et calcule

$$X = Y, \quad (\text{E.2})$$

X est ensuite relié aux observations par un opérateur identité.

La fonction coût vaut alors

$$J(Y) = \frac{1}{2}(X^f - X^{obs})^2. \quad (\text{E.3})$$

Pour l'état vrai, je choisis $Y^t = 3$, on a alors $X^{obs} = 3$. Pour la première estimation, prenons $Y^g = 0$, alors $X^f = 0$, et $J(Y^g) = 4.5$.

Le gradient de J est calculé avec le modèle adjoint qui se résume dans ce cas à

$$ADX = X^f - X^{obs}, \quad (\text{E.4})$$

$$ADY = ADX, \quad (\text{E.5})$$

$$ADX = 0. \quad (\text{E.6})$$

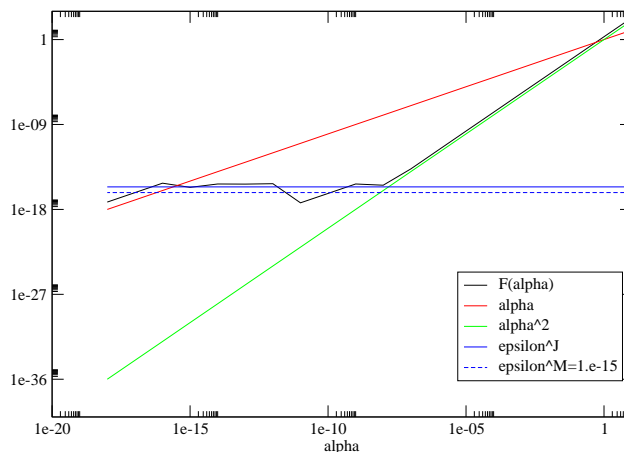


FIG. E.1 – Test de gradient pour un cas très simple, $F(\alpha)$ en fonction de α en noir. Pour référence, la courbe rouge montre $F(\alpha) = \alpha$, la courbe verte montre $F(\alpha) = \alpha^2$ et les droites bleues représentent les précisions machine (tireté, $\epsilon^M = 6 \cdot 10^{-17}$) et de la soustraction (trait plein, $\epsilon^J = 2.5 \cdot 10^{-16}$ pour $J = 4.5$).

On a donc ici $ADY = -3$

Pour procéder au test du gradient, on choisit une direction de descente pour l'une des variables de contrôle, par exemple $dY = 2$. Alors le produit $\langle \nabla_Y J, dY \rangle = -6$.

On va faire varier α de 10 à 10^{-18} .

À chaque fois, on calcule $Y^{pert} = Y^g + \alpha dY$ et la fonction coût associée à cette condition initiale perturbée.

Ceci nous permet de calculer la quantité

$$F(\alpha) = J(Y^g + \alpha dY) - J(Y^g) - \alpha \langle \nabla_Y J, dY \rangle, \quad (\text{E.7})$$

représentée dans la figure E.1. Dans ce graphe log-log, la courbe noire représente $F(\alpha)$ en fonction de α . Le test est réussi si $F(\alpha)$ tend vers zéro comme α^2 , et non pas comme α . Les courbes vertes et rouges représentent les droites correspondants à α^2 et α respectivement. Ici le test est réussi pour des valeurs d' α supérieures à 10^{-9} . Pour les valeurs inférieures, $F(\alpha)$ est constant. Dans le paragraphe suivant, je tente d'expliquer ce plateau.

La quantité $F(\alpha)$ met en œuvre la soustraction de deux nombres potentiellement grands (si le test du gradient est réalisé avec Y^g assez loin de Y^t), $[J(Y^g + \alpha dY) - J(Y^g)]$, puis utilise le résultat de cette soustraction pour une seconde soustraction de nombres petits $[J(Y^g + \alpha dY) - J(Y^g)] - [\alpha \langle \nabla_Y J, dY \rangle]$. Les sources d'erreurs du test sont donc de deux sortes : 1) Erreur dans le calcul du gradient, et 2) Erreur d'arrondi de soustraction (en priorité celle des deux grands nombres).

La précision de ma machine est $\epsilon^M = 6 \cdot 10^{-17}$ (en cherchant le plus grand ϵ^M tel que $1 + \epsilon^M = 1$).

Cependant, je pense que l'on peut également calculer la précision du test du gradient en estimant l'erreur de la soustraction $[J(Y^g + \alpha dY) - J(Y^g)]$, cette précision ϵ^J est le plus grand ϵ^J tel que $J(Y^g) + \epsilon^J = J(Y^g)$ (voir figure E.2). ϵ^J est plus grand que ϵ^M , et est d'autant plus grand que $J(Y^g)$ l'est.

```

epsJ=1.e-9
ref=J
do while ((ref + epsJ) .ne. ref)
epsJ=epsJ*0.5
end do

```

FIG. E.2 – Calcul de ϵ^J (epsJ), par rapport à $J(Y^g)$ (ref), ϵ^J est le plus grand ϵ^J tel que $J(Y^g) + \epsilon^J = J(Y^g)$.

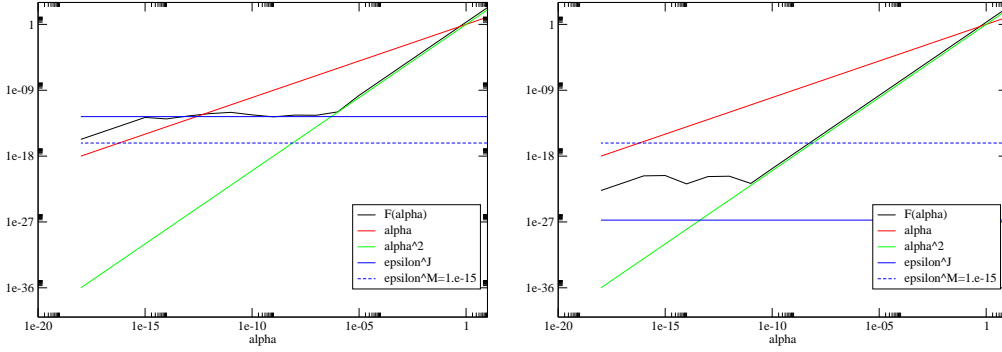


FIG. E.3 – Tests de gradient pour un cas très simple, gauche : $Y^g = 100$, droite $Y^g = 2.99999$. Dans chacune des figures, la courbe noire représente $F(\alpha)$ en fonction de α . Pour référence, la courbe rouge montre $F(\alpha) = \alpha$, la courbe verte montre $F(\alpha) = \alpha^2$ et les droites bleues représentent les précisions machine (tireté, $\epsilon^M = 6 \cdot 10^{-17}$) et de la soustraction (trait plein, Gauche : $\epsilon^J = 2.5 \cdot 10^{-13}$ pour $J = 4700$ et Droite : $\epsilon^J = 5 \cdot 10^{-27}$ pour $J = 5 \cdot 10^{-11}$).

Dans la figure E.1, les deux droites bleues correspondent à ces deux nombres ϵ^M et ϵ^J . Cette figure met en évidence que certes on peut faire le test en diminuant α jusque ϵ^M , cependant si $F(\alpha) \leq \epsilon^J$, alors les erreurs numériques (dues à la précision machine) sont trop grandes. Je considère donc que ce test est réussi.

Si on réalise exactement le même test à la seule différence près que Y^g est plus loin de l'état vrai ($Y^t = 3$), c'est-à-dire $Y^g = 100$, alors le plateau est plus haut que l'erreur machine mais se situe au niveau de l'erreur de soustraction associée à $J(Y^g = 100)$ (voir la figure E.4 gauche).

La figure E.4 (droite) montre le résultat du test pour $Y^g = 2.99999$.

Je considère donc que le test est réussi si $F(\alpha)$ se comporte comme α^2 puis atteint un plateau quand α tend vers zéro. En revanche, si $F(\alpha)$ se comporte comme α^2 puis comme α quand α tend vers zéro, alors le test n'est pas satisfait et il subsiste une erreur dans le calcul du gradient (et donc dans notre cas, dans le modèle adjoint).

E.3 Ondes de torsion rapides

J'utilise ici le modèle des ondes de torsion rapides de la section 4.4, pour lequel les observations sont des observations de vitesse angulaire directement et sur tous les points de grille et dans le plan équatorial.

D'après la figure E.4 (gauche), le test du gradient pour ω_g est réussi. Le test pour la variable auxiliaire est également réussi. En revanche, le test pour $\{B_s^2\}$ est moins bon (figure E.4 à droite). Certes, le coude se produit pour des valeurs

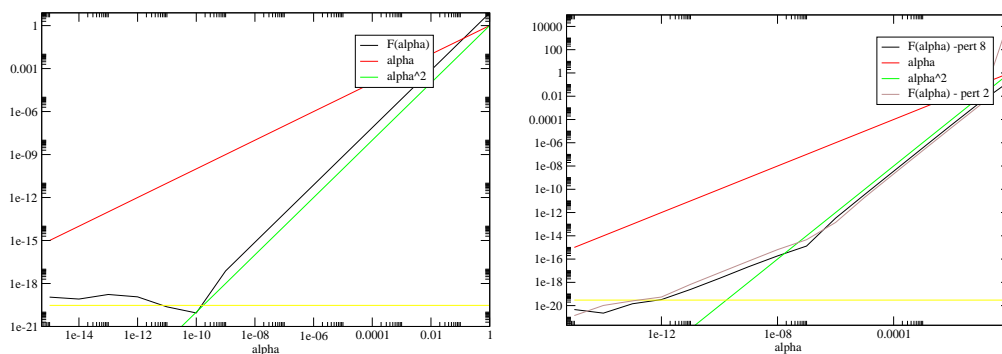


FIG. E.4 – Tests de gradient pour les ondes de torsion dans le plan équatorial. Dans chacune des figures, la courbe noir représente $F(\alpha)$ en fonction de α . Pour référence, la courbe rouge montre $F(\alpha) = \alpha$, la courbe verte montre $F(\alpha) = \alpha^2$. Gauche : test du gradient de J par rapport à ω_g . Droite : test du gradient de J par rapport à $\{B_s^2\}$.

en ordonnées similaires à l'erreur de machine, mais comme $F(\alpha)$ continue à se comporter comme α ensuite et non pas comme une constante, on peut craindre une erreur dans l'adjoint de la quantité $\{B_s^2\}$. Cependant le test est bon pour les autres variables et le gradient de J par rapport à $\{B_s^2\}$ est nourri par ces autres gradients (sans rétroagir sur eux). Le problème pourrait venir de la position de cette ligne dans le code adjoint (des vérifications ont validé cette hypothèse).

E.4 Ondes de torsion complet

On s'intéresse ici au test pour le problème de la section 4.3. La perte de précision dans le calcul du gradient de J par rapport à ω_g se situe soit dans le passage des demi-points aux points (dans le plan équatorial) avant d'être projeté sur les points de la CMB, soit dans le fait (dans le code adjoint) qu'il ne s'agisse que d'un vecteur zonal. Pour information, la projection de la fonction de courant non-zonale du plan équatorial à la CMB est correcte.

Ces travaux m'ont permis d'identifier une perte de précision de mon calcul de gradient. Cependant, comme je l'ai fait après optimisation, je vais m'arrêter là plutôt que trouver une solution puisque ce code ne me servira pas exactement sous cette forme par la suite.

En revanche pour la suite, je ferai le test du gradient plus en amont.

Autres remarques :

- Le test dépend de \mathbf{x}^g et de la perturbation
- Le test ne dépend pas de α_H .

Article : Forward and adjoint
quasi-geostrophic models of the
geomagnetic secular variation
(Canet et al, 2009)

F



Forward and adjoint quasi-geostrophic models of the geomagnetic secular variation

Elisabeth Canet,¹ Alexandre Fournier,² and Dominique Jault¹

Received 3 November 2008; revised 19 June 2009; accepted 5 August 2009; published 6 November 2009.

[1] We introduce a quasi-geostrophic model of core dynamics, which aims at describing core processes on geomagnetic secular variation timescales. It extends the formalism of Alfvén torsional oscillations by incorporating nonzonal motions. Within this framework, the magnetohydrodynamics takes place in the equatorial plane; it involves quadratic magnetic quantities, which are averaged along the direction of rotation of the Earth. In addition, the equatorial flow is projected on the core-mantle boundary. It interacts with the magnetic field at the core surface, through the radial component of the magnetic induction equation. That part of the model connects the dynamics and the observed secular variation, with the radial component of the magnetic field acting as a passive tracer. We resort to variational data assimilation to formally construct the relationship between model predictions and observations. Variational data assimilation seeks to minimize an objective function by computing its sensitivity to its control variables. The sensitivity is efficiently calculated after integration of the adjoint model. We illustrate that framework with twin experiments, performed first in the case of the kinematic core flow inverse problem and then in the case of Alfvén torsional oscillations. In both cases, using the adjoint model allows us to retrieve core state variables which, while taking part in the dynamics, are not directly sampled at the core surface. We study the effect of several factors on the solution (width of the assimilation time window, amount and quality of data), and we discuss the potential of the model to deal with real geomagnetic observations.

Citation: Canet, E., A. Fournier, and D. Jault (2009), Forward and adjoint quasi-geostrophic models of the geomagnetic secular variation, *J. Geophys. Res.*, *114*, B11101, doi:10.1029/2008JB006189.

1. Introduction

[2] Current descriptions of core dynamics rely on two sources of information: observations of the magnetic field, and physical laws governing the evolution of the state of the core. The Earth's magnetic field is assumed to have an internal origin through the process of geodynamo; it is generated and sustained by fluid motions in the metallic liquid outer core, and varies on a wide range of time scales reflecting the various time and space scales of core magnetohydrodynamics.

[3] The quality of observations of the Earth's magnetic field has much improved since the setup of the first network of magnetic observatories by Gauss and coworkers in 1834, which was followed by the large increase in the number of observatories at the beginning of the twentieth century. Other turning points have occurred since: the introduction of the proton precession magnetometer, the development of declination/inclination magnetometers (DIflux) widely used

in observatories by the 1970s, and finally the rise of the Intermagnet network of digital observatories sharing modern measurement practices after 1990 (see, e.g., the review by Turner *et al.* [2007]). The good temporal coverage of observatory data has now been supplemented by the excellent spatial coverage of satellite data. Following the launch of three low Earth orbiting satellites, Oersted, CHAMP and SAC-C, supplying geomagnetic data, a continuous satellite time series extends now to 10 years.

[4] The magnetic field can be downward continued throughout the solid mantle to the fluid core surface. Field models are built, describing the radial component of the main field and its time evolution at the core-mantle boundary (CMB) [Hulot *et al.*, 2007; Jackson and Finlay, 2007]. Calculating the geomagnetic secular variation, the first time derivative of the main field time series, emphasizes rapid changes of the magnetic field, on characteristic time scales ranging from years to centuries. Inversions of a snapshot of the geomagnetic secular variation can be performed using the radial induction equation at the CMB, in order to retrieve the large-scale part of the flow beneath it [Eymin and Hulot, 2005; Holme and Olsen, 2006; Pais and Jault, 2008; Olsen and Manda, 2008]. The root-mean-square (RMS) speed of these flows is typically of the order of 15 km/yr. Such inversions, however, face nonuniqueness problems [Backus, 1968]. Further assumptions are thus

¹Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph-Fourier, CNRS, Grenoble, France.

²Équipe de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, Université Paris Diderot, INSU, CNRS, Paris, France.

required to remove the nonuniqueness, and a great part of the work consists in finding constraints and regularizations to specify the flow [Holme, 2007, section 8.04.2]. Alongside these kinematic inversions, numerical models of the geodynamo have been available for more than 10 years, since the pioneering work of Glatzmaier and Roberts [1995]. The magnetic field generated by those dynamical models explains features of the Earth's magnetic field (dipolar geometry, spatial spectrum); yet their parameters are far from those of the Earth's core [Christensen and Wicht, 2007, section 8.08.4]. Rau et al. [2000] and Amit et al. [2007] tried to connect these two approaches (core flow inversion and forward numerical modelling) when inverting synthetic data from dynamo models. They found their core flow inversion method and the additional regularization to be adequate for the retrieval of large-scale flow and magnetic field patterns.

[5] A quality control of core flow models is the angular momentum they carry [Jault et al., 1988]. Comparison of these estimates with core angular momentum changes inferred from decadal length-of-day variations is encouraging, yet discrepancies remain. Angular momentum series are also derived from atmospheric and oceanic flow models, based upon the data assimilation methodology [Kalnay et al., 1996]. Those variations of angular momentum account very well for the observed seasonal and interannual changes in length of day [Chen, 2005; Gross, 2007, section 3.09.4].

[6] Data assimilation, routinely used in atmospheric science and more recently in oceanography, is now in early stages of use in the field of core physics. Applied to the core, this technique should allow us to interpret the secular variation in terms of dynamics, thereby enlarging the work done on kinematic core flow inversion. Resorting to a toy model, Fournier et al. [2007] assimilated synthetic data in a one-dimensional model that retains characteristic features of the induction and Navier-Stokes equations. They concluded that a good knowledge of the observed magnetic field can be translated into a good knowledge of core flow, through the process of data assimilation, which takes explicitly into account the dynamical relationship that exists between magnetic and velocity fields. This conclusion was also drawn by Sun et al. [2007], using a much similar toy model and a different implementation of data assimilation (sequential as opposed to variational). In a preliminary study, Liu et al. [2007] applied an optimal interpolation scheme to a three-dimensional dynamo model, using a synthetic set of observations. They showed in particular that assimilation of observations could partially alleviate the negative impact of wrong model parameter values. Still, the values of the parameters used typically in that class of simulations are far from being Earth-like, due to the numerical cost of their integration. There is hope, however, that systematic and appropriate exploration of the parameter space of those models will eventually yield scaling laws of the kind proposed by Christensen and Aubert [2006], which will ultimately permit a reliable extrapolation between their output and the observed secular variation. In the context of geomagnetic data assimilation, the current situation is even worse, though, since one assimilation run requires several tens of forward realizations.

[7] A solution to this conundrum is to construct a simplified dynamical model, tailored to the study of the

secular variation. In this paper, we introduce a model which relies on quasi-geostrophic dynamics. As a matter of fact, on rapid time scales as those characterizing the secular variation, rotational forces prevail on magnetic forces in the bulk of the fluid [Jault, 2008]. The resulting two-dimensional flow interacts with the radial component of the magnetic field (in that instance, a passive tracer) at the core-mantle boundary. The quasi-geostrophic assumption has recently been used in the framework of kinematic core flow inversions [Pais and Jault, 2008; Gillet et al., 2009]. It also provides us with the tools necessary to build a dynamical model of the geomagnetic secular variation.

[8] Being quasi-geostrophic, this model comprises the equations for torsional Alfvén waves, for which the dynamics is axisymmetric; Alfvén torsional waves are associated with geostrophic (zonal) motions in the core [Braginsky, 1970]. The frequency of these oscillations is proportional to the RMS strength of the magnetic field B_s perpendicular to the rotation axis (s denotes the cylindrical radius). Accordingly, using a database of computed core flows, Zatman and Bloxham [1997, 1999] and Buffett et al. [2009] have calculated radial profiles of the quadratic cylindrical radial component of the magnetic field averaged on geostrophic cylinders, $\{B_s^2\}$, within the core.

[9] Our quasi-geostrophic model generalizes that axisymmetric approach by adding nonzonal motion and magnetic field. Theoretical solutions of the model include various families of diffusionless hydromagnetic waves, some of which were first studied by Hide [1966] in order to explain the observed secular variation.

[10] The goal of this paper is thus to describe a quasi-geostrophic forward model of the Earth's core fast dynamics, and to place it at the heart of a geomagnetic data assimilation process. In section 2, we derive that quasi-geostrophic model, along with its link to the observations at the CMB. Variational data assimilation is introduced in section 3, and its principles are illustrated in section 4 with twin experiments. That section begins with the study of the classical kinematic inversion of a steady core flow, set within that framework. A second illustration is dedicated to the retrieval of the magnetic field sheared by Alfvén torsional waves. Results are summarized and discussed in section 5.

2. Quasi-Geostrophic Forward Model

[11] We shall model the Earth's outer core as a spherical fluid shell of inner radius r_i and outer radius r_o . The fluid has density ρ , and it is electrically conducting. Its magnetic diffusivity is η . The system is rotating at angular velocity Ω around the z axis. Figure 1 sketches the geometry and summarizes the notations.

[12] The fluid is characterized by its magnetic field \mathbf{B} , its velocity \mathbf{u} , and the reduced pressure Π , that includes pressure and the centrifugal potential. We choose r_o as length scale and B_0 , a typical magnetic field intensity in the core interior, as the magnetic field scale. Velocities are scaled with the Alfvén waves speed

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}, \quad (1)$$

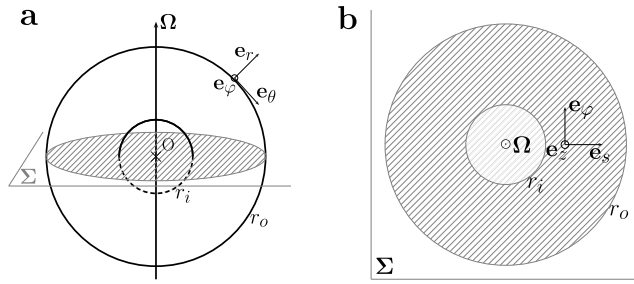


Figure 1. Geometry of the system and notations. (a) Side view. (b) Equatorial section. Σ is the equatorial plane, and the CMB is the outer sphere, located at $r = r_o$; r_i is the radius of the inner core. Spherical ($O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$) and cylindrical ($O, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$) coordinate system bases are defined at the core surface and in Σ , respectively.

in which μ_0 is the magnetic permeability of free space. The pressure scale is ρV_A^2 , and the time scale is the Alfvén waves period: $T_A = r_o/V_A$.

[13] The evolution of the magnetic field in the core is governed by the induction equation, which has the dimensionless form

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + S^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2)$$

The Lundquist number S characterizes the ratio between the magnetic diffusion time and the period of Alfvén waves [e.g., Roberts, 1967]:

$$S = \frac{r_o V_A}{\eta}. \quad (3)$$

[14] For the Earth’s core, S is of the order of 10^4 to 5×10^4 [Jault, 2008]. On secular variation time scales, diffusion becomes negligible compared to induction, hence the large value of S , which yields the frozen flux approximation.

[15] Assuming that the mantle is electrically insulating on secular variation time scales, the magnetic field can be downward continued to the core-mantle boundary. In the case of a perfectly conducting fluid (the frozen flux limit), the radial component of the magnetic field B_r is the sole magnetic component continuous across the spherical CMB. At the top of the core, B_r interacts with core motions by means of the radial component of the diffusionless version of equation (2) at $r = r_o$,

$$\partial_t B_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u} B_r), \quad (4)$$

with the horizontal divergence operator ∇_H defined as

$$\nabla_H \cdot \mathbf{v} = (\sin \theta)^{-1} \partial_\theta (\sin \theta v_\theta) + (\sin \theta)^{-1} \partial_\phi v_\phi, \quad (5)$$

where (r, θ, ϕ) are the spherical coordinates. It is that equation at the core-mantle boundary that connects our model to the observations. The time-varying B_r acts as a passive tracer (a drifting buoy), because it interacts with the velocity field at the core surface and does not affect the dynamics that sets up in the interior of the core (see below).

[16] On secular variation time scales rotation forces are much larger than magnetic forces in the bulk of the fluid. Jault [2008] suggests that rapidly rotating motions of length scale l are axially invariant if the nondimensional Lehnert number, λ_l , is small enough. That number measures the ratio between the period of inertial waves, $1/\Omega$, and the period of Alfvén waves, l/V_A [Lehnert, 1954]:

$$\lambda_l = \frac{B_0}{\Omega (\mu_0 \rho)^{1/2} l}; \quad \lambda_{r_o} = \frac{1}{\Omega T_A}. \quad (6)$$

Note that λ_l is a decreasing function of l . In his calculations, the flow appears to be invariant in the direction parallel to the rotation axis, provided $\lambda_l \ll 1$. For the Earth’s core, with B_0 of the order of 2 mT [Christensen et al., 2009] and $l \approx 10^6$ m, $\lambda_l \approx 10^{-4}$. Therefore, we shall assume that the flow is geostrophic at leading order. Working in the equatorial plane Σ (crosshatched in Figure 1), a cylindrical set of coordinates (s, ϕ, z) , with \mathbf{e}_z parallel to the axis of rotation, is well suited to study the resulting columnar patterns.

[17] The main force balance involves the Coriolis force and the pressure gradient

$$2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^0 = -\nabla \Pi^0, \quad (7)$$

where the superscript zero denotes the main order. Taking the curl of equation (7) yields the Proudman-Taylor theorem, namely, the z invariance of the flow.

[18] Within a spherical container, \mathbf{u}^0 does not satisfy the nonpenetration boundary condition at the CMB, except if it consists of cylindrical flows organized around the rotation axis. Thus we have to add the first-order contribution in λ_{r_o} of the Coriolis force, leading to

$$D_t \mathbf{u}^0 + 2\lambda_{r_o}^{-1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^1 = -\nabla \Pi^1 + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

where D_t denotes the material derivative $D_t = \partial_t + (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla)$. At first order, magnetic forces are a natural candidate to trigger a departure from geostrophy, since magnetic energy is large compared to kinetic energy in Earth’s core. Buoyancy forces are another candidate that we could additionally take into account, which we discard for now for the sake of simplicity. Viscous forces are neglected, while equation (8) shows that the Coriolis force is scaled with the inverse of the Lehnert number λ_{r_o} . The nonpenetration boundary condition at the CMB: $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$ at $z = \pm h$, yields a linear dependence of \mathbf{u}^1 with respect to z

$$u_z^1(s > r_i, \phi, z) = z \beta u_s^0(s, \phi). \quad (9)$$

If $h = \sqrt{r_o^2 - s^2}$ denotes the half height of the column located at a given cylindrical radius s , the slope of the upper surface is dh/ds , and we can define

$$\beta(s) = h^{-1} dh/ds. \quad (10)$$

The notation β has been chosen in reference to the β plane approximation. This approximation, with uniform β , is ubiquitous in geophysical fluid dynamics [e.g., Vallis, 2006, section 2.3]. It is convenient, indeed, to study planetary

Rossby waves assuming that the Coriolis parameter ($f_0 = 2\Omega \cos\theta$) varies linearly with latitude; β is then the northward gradient of the Coriolis parameter.

[19] According to our quasi-geostrophic approach, the flow in the outer core is nearly two-dimensional, which makes it natural to take the vertical average of the Navier-Stokes equation (8). The vertical average $\langle \cdot \rangle$ of a quantity X is defined as

$$\langle X \rangle(s, \varphi) = \frac{1}{2h(s)} \int_{-h}^h X(s, \varphi, z) dz. \quad (11)$$

[20] In a multiply connected domain, the φ -averaged vorticity equation is not equivalent to the φ -averaged Navier-Stokes equation [Plaut, 2003], as the former does not ensure the existence of the pressure field; accordingly, we describe the evolution of the nonzonal flow \mathbf{u}^{NZ} by means of the axial vorticity equation, while the φ -averaged momentum equation directly provides us with the time changes of the zonal velocity $\mathbf{u}^Z = u_\varphi^Z \mathbf{e}_\varphi$. In the remainder of this paper, the superscript capital Z marks zonal quantities. It should not be confused with lowercase z , which refers to the direction of rotation.

[21] The nonzonal (NZ) velocity field \mathbf{u}^{NZ} is written as the curl of a z -independent nonzonal stream function Ψ ,

$$\mathbf{u}^{NZ}(s, \varphi) = \nabla \times \Psi(s, \varphi) \mathbf{e}_z. \quad (12)$$

The nonzonal vorticity field ζ is defined by $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}^{NZ}$, and its vertical component is

$$\zeta_z(s, \varphi) = -\nabla_E^2 \Psi(s, \varphi), \quad (13)$$

in which the equatorial Laplacian operator is defined by

$$\nabla_E^2 = s^{-1} \partial_s (s \partial_s) + s^{-2} \partial_\varphi^2. \quad (14)$$

[22] If we now curl the nonzonal part of the z -averaged Navier-Stokes equation (8), we find that the vertical component of the vorticity equation is then identical to equation (17) of Pais and Jault [2008], with an explicit right-hand side term,

$$\begin{aligned} D_t \zeta_z - 2\lambda_{r_o}^{-1} \beta s^{-1} \partial_\varphi \Psi &= (s^{-1} \partial_s \partial_\varphi + s^{-2} \partial_\varphi) \left(\langle B_\varphi^2 \rangle - \langle B_s^2 \rangle \right) \\ &+ \left(3s^{-1} \partial_s - s^{-2} \partial_\varphi^2 + \partial_s^2 \right) \langle B_s B_\varphi \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

[23] The magnetic surface terms, which appear when taking the z average of the Lorentz force, are neglected because we assume the magnetic field at the core surface to be much smaller than in the bulk of the fluid. The non-penetration boundary condition, at $s = r_o$ and at the tangent cylinder $s = r_{is}$, imposes $\Psi = 0$ at both boundaries.

[24] The time evolution of the zonal velocity $u_\varphi^Z(s) = s\omega_g(s)$ is governed by

$$D_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \langle B_s B_\varphi \rangle). \quad (16)$$

The two flow equations (15) and (16) contain z -averaged squared magnetic quantities $\langle B_s^2 \rangle$, $\langle B_\varphi^2 \rangle$ and $\langle B_s B_\varphi \rangle$, whose

time evolution is in turn derived from the diffusionless version of the induction equation (2)

$$\partial_t \langle B_s^2 \rangle = -[\mathbf{u}^0 \cdot \nabla] \langle B_s^2 \rangle + 2 \langle B_s^2 \rangle \partial_s u_s^0 + 2s^{-1} \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_\varphi u_s^0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_\varphi^2 \rangle &= -[\mathbf{u}^0 \cdot \nabla] \langle B_\varphi^2 \rangle - 2 \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_s u_s^0 + 2s \langle B_s B_\varphi \rangle \\ &\cdot \partial_s (s^{-1} u_\varphi^0), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_s B_\varphi \rangle &= -[\mathbf{u}^0 \cdot \nabla] \langle B_s B_\varphi \rangle + s \langle B_s^2 \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi^0) \\ &+ s^{-1} \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_\varphi u_s^0, \end{aligned} \quad (19)$$

where we have made use of the solenoidal character of \mathbf{B} and \mathbf{u} .

[25] The vertical averaging naturally sets the magnetohydrodynamics in the equatorial plane Σ (Figure 1b). The flow is then projected at the CMB, where it interacts with the radial magnetic field B_r via equation (4).

[26] An alternative model, where the velocity field entering the set of equations (17) to (19) has a z component given by (9) and a φ component modified in order to ensure that the total velocity field remains solenoidal, is discussed in appendix A.

3. Variational Data Assimilation Framework

[27] In this section, we introduce the geomagnetic secular variation data assimilation problem with the notations suggested by Ide *et al.* [1997]. In comparison with the 4DVar label commonly used in data assimilation [e.g., Courtier, 1997], our framework is 1 + 2DVar, since state variables are defined in two-dimensional spaces to which a third (temporal) dimension is added: the 3DVar label is traditionally reserved for three-dimensional (in space) static problems [Courtier, 1997].

[28] The state vector \mathbf{x} for the Earth's core gathers the variables involved in the description of the system state

$$\mathbf{x} = [\omega_g, \Psi, \langle B_s^2 \rangle, \langle B_\varphi^2 \rangle, \langle B_s B_\varphi \rangle, B_r]^T, \quad (20)$$

where superscript T means transpose. Observations \mathbf{y} are available at T_y different epochs and N_y spatial locations during the assimilation time window $[0, T]$; the size of \mathbf{y} is typically smaller than the dimension of \mathbf{x} . The observation vector is related to the true core state \mathbf{x}^t via the observation operator \mathbf{H} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}^t + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (21)$$

in which $\boldsymbol{\epsilon}$ is the observation error. Variational data assimilation aims at adjusting a model solution \mathbf{x}^f to the observations [Talagrand, 1997] by minimizing a misfit function which comprises the quadratic discrepancy, if \mathbf{H} is linear and errors are Gaussian, between the true observa-

tions and those predicted by the computed state, J_H [Courtier, 1997]:

$$J_H = \sum_{j=1}^{T_y} [\mathbf{H}_j \mathbf{x}_j^f - \mathbf{y}_j]^T \mathbf{R}_j^{-1} [\mathbf{H}_j \mathbf{x}_j^f - \mathbf{y}_j], \quad (22)$$

where j is the discrete time index and $\mathbf{R} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T)$ is the observation error covariance matrix, $\mathbf{E}(\cdot)$ denoting statistical expectation. The matrix \mathbf{R} describes the level of confidence we set in the observations.

[29] It might be necessary to constrain the solution sought in order to enforce its uniqueness, especially if the problem is nonlinear. Constraining the assimilation refers to either adding a background state \mathbf{x}^b from which the estimate shall not strongly deviate, or applying additional constraints on the core state. Imposing a penalty, the goal of which is to favor a solution with a moderate level of complexity [e.g., Courtier and Talagrand, 1987], described by a matrix \mathbf{C} applied to the state vector, consists in adding a second term to the objective function, of the form

$$J_C = \sum_{j=0}^T \mathbf{x}_j^T \mathbf{W}_j \mathbf{x}_j, \quad (23)$$

where $\mathbf{W} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$. The total misfit function J to minimize is then given by the sum

$$J = \frac{\alpha_H}{2} J_H + \frac{\alpha_C}{2} J_C, \quad (24)$$

in which the two contributions are weighted by two scalars, α_H and α_C [Fournier et al., 2007].

[30] In practice, \mathbf{x}^f is the solution of a numerical nonlinear model \mathbf{M} , that describes the temporal evolution of \mathbf{x} at any discrete time $t_j \in [0, T]$,

$$\mathbf{x}_{j+1}^f = \mathbf{M}_j \mathbf{x}_j^f; \quad (25)$$

that notation symbolically summarizes the set of equations developed in section 2. Since the temporal history of the state is constructed with a dynamical model that couples its various components, we can, in principle, retrieve information about every state variable, even if only part of the state vector is directly probed by the observations on hand [Fournier et al., 2007]. Moreover, the initial condition \mathbf{x}_0 , termed the control vector, uniquely defines the model trajectory in state space. That reduces the dimension of the associated inverse problem: we only seek the initial condition, \mathbf{x}_0 , starting from which the temporal evolution \mathbf{x}^a will best fit the observations; in assimilation parlance, this best solution is called the analysis. The minimization of J (that is the search for \mathbf{x}^a) is performed with a descent algorithm that involves the sensitivity of J to its control variables, \mathbf{x}_0 : $\nabla_{\mathbf{x}_0} J$. Its transpose is efficiently estimated with the use of the adjoint model \mathbf{M}^T [Le Dimet and Talagrand, 1986]. For a given \mathbf{x}_0 , one couples a forward integration of \mathbf{M} with a backward integration of \mathbf{M}^T to express the gradient of J . The adjoint model is that of the local tangent linear equations [see, e.g., Talagrand and

Courtier, 1987; Giering and Kaminski, 1998]. Introducing the adjoint variable \mathbf{a} of \mathbf{x} , the adjoint equation imposed by the cost function (equation (24)) is [Fournier et al., 2007]

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{j-1} = & \mathbf{M}_{j-1}^T \mathbf{a}_j + \alpha_H \mathbf{H}_{j-1}^T \mathbf{R}_{j-1}^{-1} (\mathbf{H}_{j-1} \mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{y}_{j-1}) \\ & + \alpha_C \mathbf{W}_{j-1} \mathbf{x}_{j-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

where \mathbf{H}^T is the transpose of the observation operator (equation (21)), which projects a vector from observation space to state space. Through equation (26), the adjoint field is fed by observation residuals (the difference $\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}$), as soon as there is an observation available.

[31] The backward integration requires the knowledge of the model trajectory over the assimilation time window. The storage of the complete trajectory may cause memory issues, which are traditionally resolved using a checkpointing strategy. The state of the system is stored at a limited number of discrete times, termed checkpoints. Over the course of the backward integration of the adjoint model, these checkpoints are used to recompute local portions of the trajectory on the fly, whenever those portions are needed [e.g., Hersbach, 1998].

[32] Nonlinear optimization is performed with the M1QN3 routine [Gilbert and Lemaréchal, 1989], which implements a limited memory quasi-Newton algorithm that approximates the inverse Hessian (second derivative) of J .

4. Applications

[33] We show two illustrations of variational data assimilation applied to fast core dynamics, as described by our quasi-geostrophic model, with synthetic data. The methodology of twin experiments is explained and applied to a steady nonzonal flow problem and, in a second step, to a dynamical zonal model of torsional Alfvén waves. These two problems correspond to two subsets of the model presented in section 2.

4.1. Twin Experiments

[34] Instead of being satellite or observatory data, observations in our twin experiments are created from a synthetic true state, which is the result of the integration of the forward model for a given set of initial conditions, \mathbf{x}_0^f . Synthetic data have the advantage of representing only the physics involved in the model and are, in a first step, appropriate to test the implementation of the variational data assimilation algorithm. A database of observations is produced with equation (21).

[35] To construct the observation catalog, we include some geophysical realism by averaging the state at the core-mantle boundary. We choose the averaging window so that it corresponds to the ignorance of the spherical harmonic coefficients of degree $n > L$. Then, the product $\mathbf{H}\mathbf{x}^f$ corresponds to the convolution over the core-mantle boundary of the true state with a Jacobi polynomial of degree L [Backus et al., 1996, paragraph 4.4.4]:

$$(\mathbf{H}\mathbf{x}^f)(\theta_o, \varphi_o) = \frac{L+1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbf{x}^f(\theta, \varphi) P_L^{(1,0)}(\cos \alpha) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (27)$$

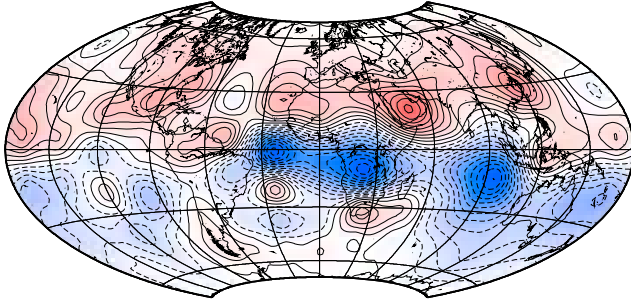


Figure 2. Map of the main field at epoch 2002 truncated at spherical harmonic degree and order 12 modified from the CHAOS model [Olsen *et al.*, 2006]. True radial component of the magnetic field B_r^t at initial time for the twin experiments. Contours are drawn every $0.5B_r^{t,ms}$ (solid and dashed for positive and negative values, respectively). The scaling is arbitrary since the problem is linear in B_r .

in which (θ_o, φ_o) are the coordinates of the observation locations, α is the angular distance between the points (θ_o, φ_o) and (θ, φ) , and $P_L^{(1,0)}$ is a Jacobi polynomial [Abramowitz and Stegun, 1964, p. 773]. In the following experiments, we set $L = 15$ and observations are made at a fixed temporal frequency.

[36] Next, we start the assimilation with a different set of initial conditions, called initial guess, \mathbf{x}_0^g . After a forward integration, the computed observable, $\mathbf{H}\dot{B}_r^f$ in section 4.2 and $\mathbf{H}B_r^f$ in section 4.3, is compared (over the entire time window) with the observations, and the discrepancy between the two gives the initial misfit (see equation (24)). After assimilation, the decrease of the misfit and the relative difference between \mathbf{x}^t and \mathbf{x}^a , in the l^2 sense, are used to assess the quality of the recovered state.

4.2. Kinematic Core Flow Problem

[37] In this section, a connection is made between core flow kinematic inversions and data assimilation. The steady flow hypothesis has been previously used by Voorhies and Backus [1985] and Waddington *et al.* [1995] to break the nonuniqueness of the kinematic inversion problem. Here, we study the effect of a steady nonzonal and equatorially symmetric flow on the evolution of the radial magnetic field, and more particularly its secular variation \dot{B}_r ,

$$\dot{B}_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}^{NZ} B_r). \quad (28)$$

Symmetry with respect to the equator ensures uniqueness of the solution when B_r and \dot{B}_r are perfectly known. The time scale characterizing this problem is the advection time, t_{adv} . The nonzonal velocity effectively enters equation (28) via the nonzonal stream function $\Psi(s, \varphi)$ (see equation (12)), projected at the core-mantle boundary. The state vector \mathbf{x} includes a parameter, the stream function Ψ , and a variable, the radial magnetic field B_r . Here, Ψ is called a parameter because it is steady in that experiment. We seek the distribution of $\Psi(s, \varphi)$ which best explains the observed synthetic database of secular variation \dot{B}_r^o at the top of the core.

[38] The tangent linear form of (28) is

$$\delta\dot{B}_r = \mathbf{P}(\delta\Psi, B_r) + \mathbf{Q}(\Psi, \delta B_r), \quad (29)$$

$$\partial_t \delta B_r = \delta\dot{B}_r, \quad (30)$$

where $\delta\Psi$, δB_r and $\delta\dot{B}_r$ are the differentials of Ψ , B_r and \dot{B}_r , respectively, and \mathbf{P} and \mathbf{Q} the differentials of the right-hand side term of equation (28) with respect to Ψ and B_r , respectively (they are developed in appendix C). Let us introduce Ψ^T , B_r^T and \dot{B}_r^T as the adjoint variables of Ψ , B_r and \dot{B}_r . The adjoint model of equations (29) and (30) is then

$$\dot{\Psi}^T = \sum_{j=0}^T \mathbf{P}^T(\dot{B}_r^T, B_{rj}), \quad (31)$$

$$B_r^T = \mathbf{Q}^T(\dot{B}_r^T, \Psi), \quad (32)$$

in which \mathbf{P}^T , \mathbf{Q}^T are the adjoint functions of \mathbf{P} and \mathbf{Q} (see detailed equations in appendix C). The link to the observations has been obtained from equation (24), and is computed at each time step as in equation (26):

$$\dot{B}_r^T = \alpha_H (\mathbf{H}^T \mathbf{H} \dot{B}_r - \mathbf{H}^T \dot{B}_r^o). \quad (33)$$

[39] The trajectory of the true state is computed from the following set of initial conditions:

[40] 1. $B_r^t(\theta, \varphi, t = 0)$ is obtained from the CHAOS main field model [Olsen *et al.*, 2006] for epoch 2002, truncated at spherical harmonic degree and order 12. It is taken outside the tangent cylinder and multiplied by a sine function of θ in order to have $B_r^t(\theta, \varphi, t = 0) = 0$ at the tangent cylinder (see Figure 2),

[41] 2. $\Psi^t(s, \varphi)$ is shown in Figure 3a, it is the nonzonal part of an inverted flow from Pais *et al.* [2004] truncated at degree and order 4, and multiplied by $\cos^2\theta = (1 - s^2)$ and a function of s , $(s - r_i)$, in order to satisfy the flow boundary conditions at $s = r_i, r_o$. It is normalized in order to have a dimensionless RMS velocity of order 1; the scaling V_{adv} is such that $\int_0^{2\pi} \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} (u_s^2 + u_\varphi^2) \sin\theta d\theta d\varphi = V_{adv}^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sin\theta d\theta d\varphi$, with $\theta_c = \text{asin}(r_i/r_o)$.

[42] We consider perfect observations, setting $\epsilon = \mathbf{0}$ in equation (21). For the following simulations, the numerical time step is $6 \times 10^{-5} t_{adv}$ for integration times ranging from $0.03 t_{adv}$ to $0.57 t_{adv}$. Other numerical parameters relative to the simulations are given in Appendix B.

[43] In this problem of seeking a steady stream function that explains the observations, we want to show the benefit of including the temporal dimension (data assimilation) instead of relying on a single observation epoch, as it is the case for a standard kinematic inversion.

[44] We first consider solutions obtained with only one observation epoch and less observation locations ($N_\theta^O = 50$, $N_\varphi^O = 11$) than grid points ($N_\theta = 200$, $N_\varphi = 15$). We start the assimilation with a first guess Ψ^g corresponding to the minimal hypothesis: $\Psi^g = 0$. The solution we obtain gives us some information about what could be achieved within the kinematic framework in that configuration. Figure 3b shows

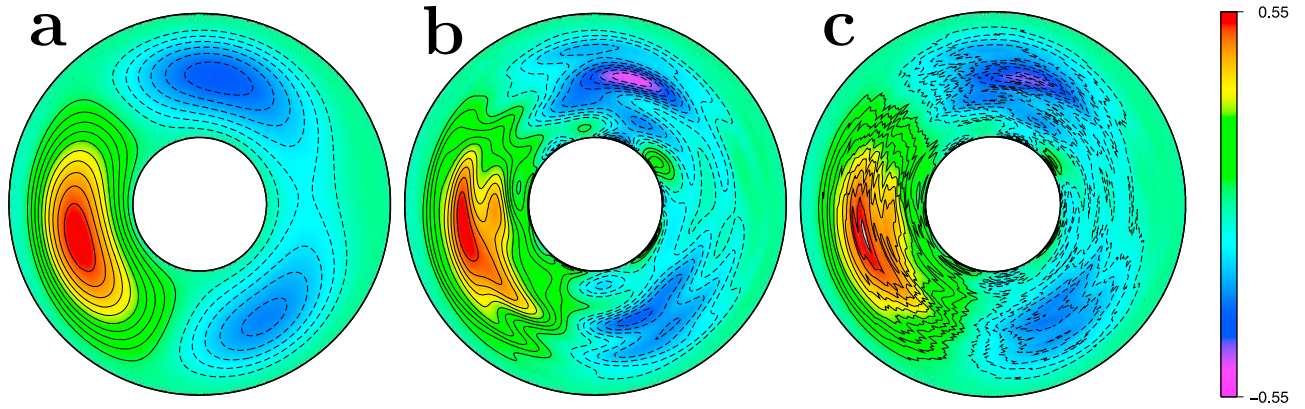


Figure 3. Maps in the equatorial plane Σ of the steady stream function Ψ . (a) True state. (b) Analyzed state with a single epoch inversion. (c) Analyzed state with $T = 0.57 t_{adv}$. Contours are drawn each 0.05 (solid and dashed for positive and negative values, respectively). Extrema are $-0.33;0.54$ (Figure 3a), $-0.49;0.54$ (Figure 3b) and $-0.43;0.56$ (Figure 3c).

in particular that the true state (Figure 3a) is not completely recovered, due to the truncation used in the construction of H and the limited number of observation locations, compared to the total number of grid points.

[45] Using this solution obtained from a single epoch inversion as a reference solution, we can study the benefit we get resorting to a time series of observations, as opposed to a single snapshot. In other words, we investigate whether the issue of spatial subsampling can be partially fixed by considering the temporal dimension. To that end, we do experiments with assimilation time windows ranging from $0.03 t_{adv}$ to $0.57 t_{adv}$, at a given temporal frequency of observation $f_y = 100 t_{adv}^{-1}$, keeping the same number of virtual magnetometers.

[46] Results of a typical experiment are shown in Figure 3c, for which $T = 0.57 t_{adv}$. The large-scale pattern is retrieved, but the solution is polluted by small spatial scales (no extra smoothing term is added to the misfit function). We find, however, that the consideration of the temporal dimension improves the solution. Moreover, the distance between the true stream function and the retrieved stream function becomes smaller when the assimilation time window is widened (see Figure 4).

[47] As described by Evensen [2007, chapter 6], if one enlarges the width of the assimilation time window in a nonlinear context, the misfit function presents more and

more spikes and minima. A very good first guess is thus needed to converge to the global minimum. To circumvent this issue, we decided to use the results obtained over short assimilation time windows as initial guesses for assimilation over longer time windows. That strategy is analogous to the approach used in the atmospheric variational assimilation community, which consists in solving a series of strong constraint inverse problems, defined for separate subintervals in time [e.g., Evensen, 2007].

4.3. Forward and Adjoint Modeling of Alfvén Torsional Waves

[48] In nonrotating magnetized flows, classical Alfvén waves result from the balance between inertial and magnetic forces. In the Earth’s core, where the Coriolis force is large, Braginsky [1970] showed that a special class of Alfvén waves comes into play, in which only the component of the magnetic field normal to the axis of rotation, B_s , participates. Associated motions are geostrophic; they are organized in axial cylinders about the axis of rotation, hence the name torsional oscillations. The period of torsional waves depends on the strength and distribution of B_s inside the core.

[49] In order to study these waves, one can consider a subset of the complete dynamical model. Since torsional waves are geostrophic and axisymmetric motions, let us

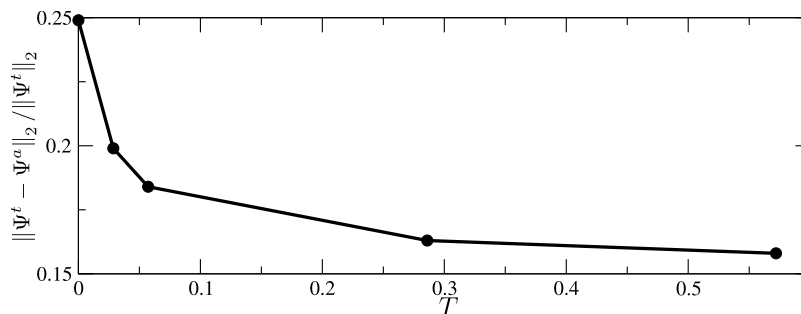


Figure 4. Effect of the assimilation time T on the analyzed state at a fixed observation frequency $f_y = 100 t_{adv}^{-1}$, measured with the norm of the relative error $\|\Psi^t - \Psi^a\|_2 / \|\Psi^t\|_2$. This norm is equal to one when the initial guess $\Psi^g = 0$. The simulation at $T = 0$ is referred in the text as the single epoch inversion.

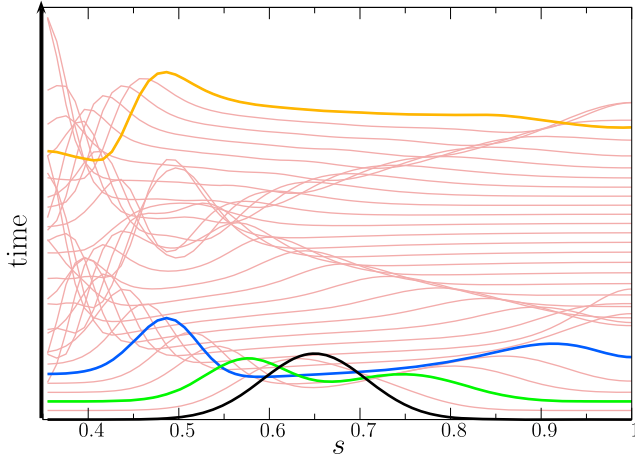


Figure 5. Torsional wave twin experiments results. Successive profiles of the angular velocity ω_g , showing the propagation of a torsional wave in the computational domain $s \in [0.35, 1]$ during 1.16 Alfvén time T_A . Initial condition (black curve) for ω_g , and snapshots, at 0.12 (green curve), 0.18 (blue curve) and 1.16 T_A (orange curve).

discard the nonzonal part of the flow and magnetic induction in equations (15) to (19).

[50] In addition to the vertical average, $\langle \cdot \rangle$, introduced in equation (11), we now define the average on a geostrophic cylinder, $\{ \cdot \}$, by

$$\{X\}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle X \rangle(s, \varphi) d\varphi. \quad (34)$$

In the following, we will not indicate explicitly the dependence on s of quantities averaged on a geostrophic cylinder. Application of $\{ \cdot \}$ to equation (16) yields

$$\partial_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^2 h \{B_s B_\varphi\}). \quad (35)$$

[51] Similarly, the equations governing the evolution of magnetic quantities become

$$\partial_t \{B_s^2\} = 0, \quad (36)$$

$$\partial_t \{B_s B_\varphi\} = s \{B_s^2\} \partial_s \omega_g. \quad (37)$$

Written in terms of the geostrophic angular velocity ω_g , the torsional wave equation is

$$\partial_t^2 \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s (s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g). \quad (38)$$

Equation (38) can be transformed into a set of two first-order equations

$$\partial_t \omega_g = (s^3 h)^{-1} \partial_s \tau, \quad (39)$$

$$\partial_t \tau = s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g, \quad (40)$$

in which $\tau = s^2 h \{B_s B_\varphi\}$ is an auxiliary variable.

[52] We have taken as boundary condition for the angular velocity:

$$\partial_s \omega_g = 0, \text{ at } s = r_o. \quad (41)$$

Then, the boundary condition,

$$\partial_s \omega_g = 0, \text{ at } s = r_i, \quad (42)$$

ensures the conservation of the total angular momentum carried by the fluid in the computational domain.

[53] Projected at the CMB, those motions interact with B_r through equation (4), which simplifies here into

$$\partial_t B_r = -\omega_g \partial_\varphi B_r. \quad (43)$$

The system state gathers the geostrophic angular velocity ω_g , the variable τ , the cylindrical average of the s component of the magnetic field, $\{B_s^2\}$, and the radial component of the magnetic field B_r at the CMB.

[54] We define $\omega_g^T, \tau^T, \{B_s^2\}^T, B_r^T$ as the adjoint variables of $\omega_g, \tau, \{B_s^2\}, B_r$, respectively. The torsional oscillations adjoint model is

$$-\partial_t \omega_g^T = \partial_s^T [s^3 h \{B_s^2\} \tau^T] - B_r^T \partial_\varphi B_r, \quad (44)$$

$$-\partial_t \tau^T = \partial_s^T [(s^3 h)^{-1} \omega_g^T], \quad (45)$$

$$\{B_s^2\}^T(s) = \sum_{j=0}^T s^3 h (\partial_s \omega_g)_j \tau_j^T + \alpha_C \mathbf{W} \{B_s^2\}, \quad (46)$$

$$-\partial_t B_r^T = -\partial_\varphi^T [\omega_g B_r^T], \quad (47)$$

where ∂_s^T and ∂_φ^T are the adjoints of the differential operators ∂_s and ∂_φ (see appendix D for more details on the adjoint system). The link to the constraint on $\{B_s^2\}$ has been obtained from equation (24). The model is completed by the information supplied by the observations, as in equation (33). The boundary conditions for the adjoint model are $\tau^T = 0$, at both $s = r_i$ and $s = r_o$. The temporal and spatial discretizations of this problem are described in appendix B.

[55] For the experiments that follow, the set of initial profiles, which define the true state, is (1) the same $B_r^t(\theta, \varphi, t = 0)$ as in the kinematic core flow problem of section 4.2, (2) a Gaussian function for the angular velocities: $\omega_g^t(s, 0) = \omega_0 \exp[-\sigma_\omega^{-2}(s - s_\omega)^2]$, with $\sigma_\omega^{-2} = 150$ and $s_\omega = 0.65$ (see Figure 5); it satisfies the boundary conditions (41) and (42), its amplitude being scaled by ω_0 (discussed hereafter), (3) $\tau^t(s, 0) = 0$, and (4) an arbitrary function $\{B_s^2\}^t$ (see the black curve in Figure 6, right) given by $\{B_s^2\}^t(s) = c_1 + c_2 \sin(\pi/2 - L) + c_3 \exp[-\sigma_B^{-2}(s - s_B)^2]$, with $c_1 = 0.1, c_2 = 0.02, c_3 = 1, \sigma_B^{-2} = 20, s_B = 0.8$ and $L = 14s$. It is normalized in order to have a dimensionless RMS magnetic field of unity inside the core; the scaling B_0 is such that $\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} B_s^2 ds d\varphi = B_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} ds d\varphi$. As the velocity has

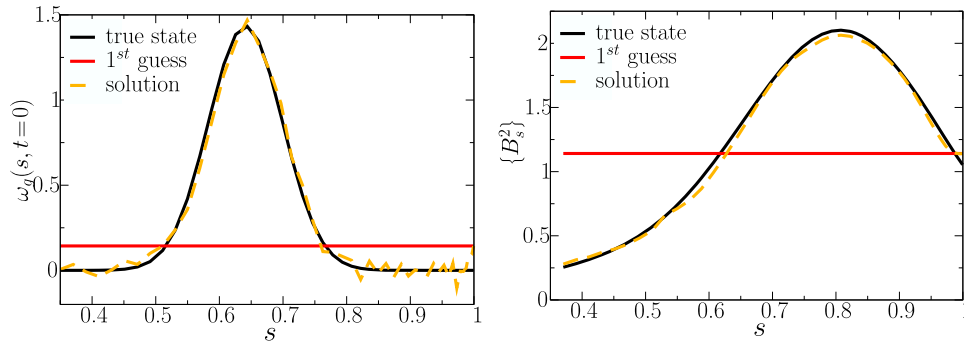


Figure 6. Torsional wave twin experiments results: true state (black curve), profile before assimilation (red curve) and solution after assimilation (dashed orange curve) for (left) ω_g and (right) $\{B_s^2\}(s)$. The parameters for that reference case are $\omega_0 = 0.34$ and $T = 1.16 T_A$. Regularization has been added to the spatial derivative of $\{B_s^2\}$, of amplitude $\alpha_C = 10^{-8}$ (see text for details).

been scaled by the Alfvén velocity, ω_0 is the ratio between the Alfvén time and the advection time, $\omega_0 = T_A/t_{adv}$.

[56] Assimilation is performed on both ω_g and $\{B_s^2\}$. We seek the steady profile of $\{B_s^2\}$ and the initial profile of ω_g which best explain the synthetic database of B_r^o . Our first guess consists of flat profiles: $\omega_g^o(s, 0) = 0.1\omega_0$ and $\{B_s^2\}^o = 0.6$ (see the red curves in Figure 6).

[57] We show here experiments with a fixed frequency of observations $f_y = 20 T_A^{-1}$ and as many observations locations as grid points. The observations are blurred by the averaging kernel (equation (27)), which causes errors. Consequently, the analysis can develop small scales, which are not very well constrained by the observations. We choose to reduce the complexity of the solution by adding a smoothing term to the cost function, taking $\alpha_C = 10^{-8}$ in equation (24). Here we penalize only the strong spatial gradients of $\{B_s^2\}$. The reference case (with $\omega_0 = 0.34$ and $T = 1.16 T_A$, see Figures 6 and 7) shows that both the angular velocity and interior magnetic field are well recovered. As shown in Figure 7, the error field is substantially weaker after assimilation.

[58] On a technical note, the M1QN3 algorithm [Gilbert and Lemaréchal, 1989], used in the optimization loop, stops in that case when the initial misfit is divided by a factor of 4×10^5 , which is reached in 214 iterations.

[59] In order to assess the effect of the width of the assimilation window on the retrieved state variables, we vary the assimilation time T between 0.12 and 1.16 T_A , keeping ω_0 constant, equal to 0.34 as above. The geostrophic angular velocity is in all cases completely recovered (not shown) with similar spurious oscillations as in Figure 6 (left) near the outer boundary. On the other hand, the area over which $\{B_s^2\}$ is correctly retrieved increases with T , indicating that the assimilated area is controlled by the distance over which the initial pulse has propagated (Figure 8, left). Figure 5 shows that, if $T = 1.16 T_A$, the wave has enough time to explore the whole domain. On the contrary, if $T = 0.12$ or $0.18 T_A$, a lesser portion of the domain is sampled by the wave, over which $\{B_s^2\}$ has been effectively retrieved. The angular velocity is better recovered than $\{B_s^2\}$ because it is directly connected to the observations, as opposed to $\{B_s^2\}$. That can be seen in the adjoint equations: ω_g^T (equation (44)) depends on B_r^T that contains B_r^o , the observed quantity, whereas $\{B_s^2\}^T$ (equation (46)) is only directly connected to τ^T . In turn, τ^T sees ω_g^T , which is ultimately linked to the observations.

[60] For a fixed T , the dependence on the amplitude ω_0 has been studied (Figure 8, right). For $\omega_0 = 0.014$, ω_g and $\{B_s^2\}$ are not well recovered. Starting from $\omega_0 = 0.14$, however, increasing ω_0 by more than 1 order of magnitude

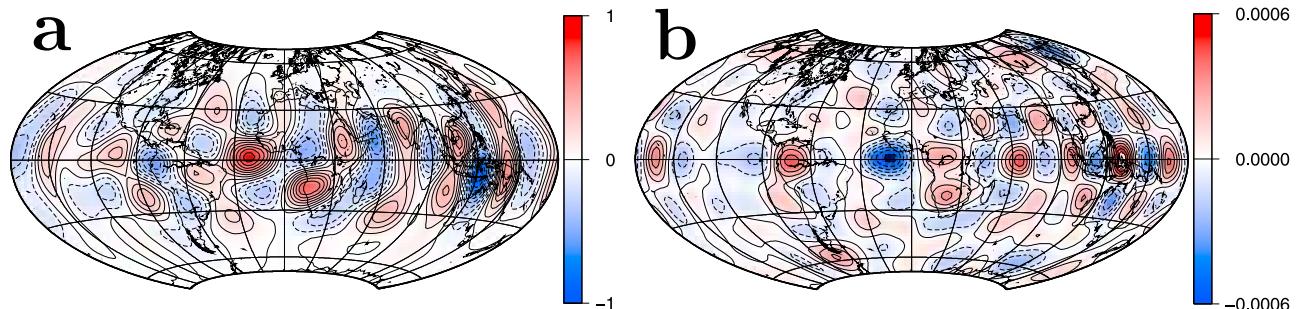


Figure 7. Relative difference between observed and computed HB_r at final time, $[B_r^o(T) - HB_r^f(T)]/\|B_r^o(T)\|_2$ (a) before assimilation and (b) after assimilation for the reference case (same parameters as in Figure 6). Contours are drawn each 0.1 (Figure 7a) and 10^{-4} (Figure 7b) (solid and dashed for positive and negative values, respectively). Extrema are $-0.94; 0.86$ (Figure 7a) and $[-6.4; 7.2] \times 10^{-4}$ (Figure 7b).

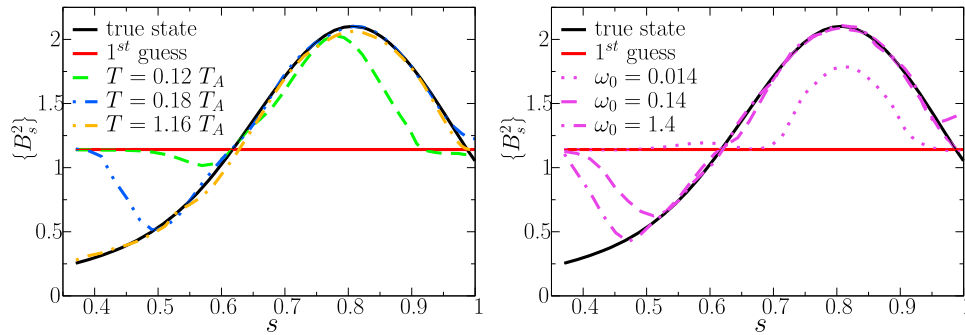


Figure 8. Effect on the analysis (left) of the assimilation time window of width T and (right) of the amplitude of the initial pulse ω_0 . In Figure 8 (left), true state (black curve), profile before assimilation (red curve) and solution after assimilation (dashed green, dashed double-dotted blue, dash-dotted orange curves) for $\{B_s^2\}$ (s), for different values of T (0.12, 0.18 and $1.16 T_A$, respectively) for a fixed $\omega_0 = 0.34$. In Figure 8 (right), true state (black curve), profile before assimilation (red curve) and solution after assimilation (violet curve) for $\{B_s^2\}$ (s). Dotted, dashed, and dash-dotted violet curves are obtained for different values of the amplitude of the initial pulse ω_0 (0.014, 0.14, and 1.4, respectively), keeping T fixed, equal to $0.18 T_A$.

has little effect on the retrieval of $\{B_s^2\}$ and no effect at all on ω_g^a .

[61] Let us stress that the convergence of the calculations presented here is also sensitive to the profile of the initial condition (for both true state and first guess), and to the amount of measurements, as in the steady case of section 4.2. Moreover, we have observed in other instances (not shown) that convergence is sped up if the acceleration τ is not zero at initial time. More generally, that particular example shows that the success of assimilation is controlled by the intrinsic dynamics of the system under study, as well as a good guess of its state.

[62] Until now, we have assumed perfect observations: $\epsilon = \mathbf{0}$ in equation (21). In the prospect of future applications, observation error should be considered. In the next experiments, observations contaminated by errors are assimilated. Centered, normally distributed Gaussian observation errors of standard deviation $10^{-1} B_r^{rms}$ are added to the previous database. That experiment is carried out with an assimilation window width of $1.16 T_A$. Even with a database contaminated by observation errors, it is still possible to

recover the shape and strength of the true state (see Figure 9). $\{B_s^2\}$ seems less sensitive to observation errors than ω_g : we still have an extra penalty term in the misfit function as in the perfect observations case, but the overall effect of small scales is actually to degrade the solution for both fields.

[63] For completeness, we have also decreased the temporal frequency of observation and observed that the recovering of the true state was possible provided that the frequency of observation, f_s , was greater than $3 T_A^{-1}$.

5. Discussion

[64] We have derived a quasi-geostrophic model of core dynamics, which aims at describing core processes on geomagnetic secular variation timescales. Under the quasi-geostrophic assumption, the magnetohydrodynamics takes place in the equatorial plane and is written outside the tangent cylinder. The flow is defined by its zonal velocity and nonzonal axial vorticity. The magnetic induction appears through z -averaged quadratic magnetic quantities,

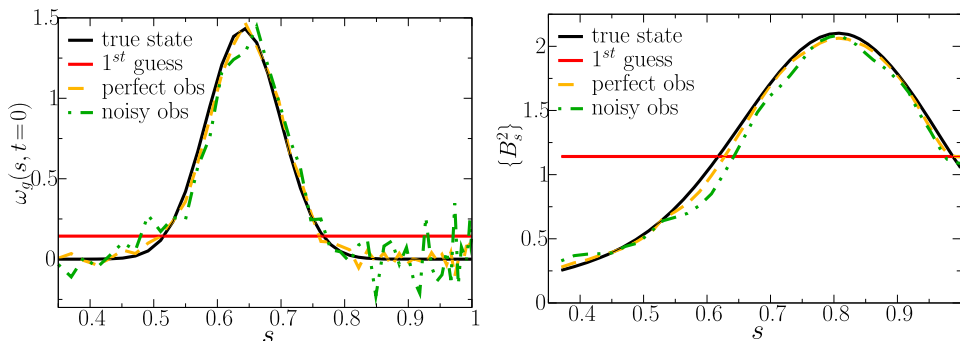


Figure 9. Torsional wave twin experiments results obtained with noisy data. True profiles (black curve), profile before assimilation (red curve) and solution after assimilation (orange, green curves) for (left) ω_g and (right) $\{B_s^2\}$. Dashed orange curves have been computed with perfect observations, and dash-dotted green curves considering centered, normally distributed Gaussian observation errors of standard deviation $10^{-1} B_r^{rms}$ added to the database. Regularization has been added on the spatial derivative of $\{B_s^2\}$, of amplitude $\alpha_C = 10^{-8}$. The assimilation window width is $T = 1.16 T_A$, and $\omega_0 = 0.34$.

while we assume that the magnitude of the magnetic field at the core surface is smaller than in the core interior. In addition, the equatorial flow is projected on the core-mantle boundary. It interacts with the magnetic field at the core surface, through the radial component of the magnetic induction equation, in the frozen flux approximation. That part of the model connects the dynamics and the observed secular variation, with the radial component of the magnetic field acting as a passive tracer. We have resorted to variational data assimilation to construct formally the relationship between model predictions and observations. The use of an imperfect observation operator mimics our truncated vision of the reality. We have extensively tested the variational data assimilation algorithm with twin experiments owing to the nonprohibitive numerical costs of the computations. Assimilation was controlled by the initial state and possibly some static model parameters.

[65] Let us stress some important results from our numerical simulations. In our time-dependent framework, we have found that increasing the time window width T always improves the solution. In the steady core flow experiment case, that property has proven useful in constraining intermediate flow length scales otherwise unconstrained by a sparse distribution of observations. Here, the benefit originates from the dynamical relationship which exists between successive observations through the radial component of the magnetic induction equation. In the torsional oscillation case (an illustration of the dynamical model presented in this study), the same property allowed us to retrieve the z -averaged quadratic product of B_s (which is only remotely linked to the observed quantity) over the entire domain provided that T was large enough for the wave to propagate over (and effectively sample) the whole domain. Interestingly, it has not been necessary to include a dissipation term in the forward model. We have investigated the sensitivity of the solution to the frequency of observation in the presence of observation errors. Adding an extra smoothing term to the cost function proved an efficient way to produce analyses with a moderate level of complexity.

[66] From the geophysical point of view, with a typical estimate of the magnetic field strength in the core interior, 2 mT, one Alfvén time, T_A , amounts to 6 years. We have varied the frequency of observation from 2.5 to 20 T_A^{-1} , 3 T_A^{-1} appearing as a minimum to recover the fields, which represents a 2-year interval between observations. Therefore, we expect that we may be able to resolve properly torsional waves using the last 10 years of satellite measurements, since the most recent magnetic field models have a resolution of a fraction of a year [Olsen and Manda, 2008].

[67] Pais and Jault [2008] and Gillet *et al.* [2009] have recently used magnetic field models obtained from satellite data in kinematic inversions of quasi-geostrophic core flows. Their calculated core flows are dominated by a giant retrograde gyre. Gillet *et al.* [2009] suspect that the weaker momentum of the gyre for the period 1960–1980, compared to the period 1990–2008, is an artifact produced by the lesser data quality before 1980. Resorting to a toy model, Fournier *et al.* [2007] have demonstrated that the benefit due to the existence of a denser network at the end of an assimilation window, is manifest over a substantial part of the window, thanks to the variational data assimilation

approach. In other words, the recent high quality of observational and satellite measurements can be in principle backward propagated in order to re-assimilate historical data series. It is then possible to imagine that the refined series could contribute to a more precise description of both small and large scales of the fluid circulation in the core.

[68] The interplay between magnetic and rotation forces in a two-dimensional model has been investigated in other contexts. Tobias *et al.* [2007] have recently studied a local two-dimensional β plane numerical model to show the impact of a weak large-scale magnetic field on the dynamics of the solar tachocline. Instead of using quadratic products of the magnetic field as variables, they have written the magnetic field as a function of a unique scalar potential A :

$$\mathbf{B}(s, \varphi) = \nabla \times [A(s, \varphi)\mathbf{e}_z]. \quad (48)$$

Then, the magnetic term in the vorticity equation becomes $[\nabla \times (A\mathbf{e}_z)] \cdot \nabla[\nabla_E^2 A]$ (compare with the right-hand side term of equation (15)), and the induction equation is

$$\partial_t A = -\mathbf{u} \cdot \nabla A + S^{-1} \nabla_E^2 A. \quad (49)$$

The ansatz (48) is restrictive, as axial invariance of the magnetic field is assumed. It enables the inclusion of magnetic diffusion, the effect of which cannot be rigorously introduced in the set of equations (17) to (19). The model given by equations (48) and (49) is also attractive, since it is still able to describe a variety of physical situations. As an example, Diamond *et al.* [2005] mention the transition from two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence at small length scales, to turbulence controlled by Rossby wave interactions at larger length scales. Solutions of (48) and (49) (without the diffusion term) are also solutions permitted by our equations (15) to (19). Investigating that simplified set of equations thus appears as an appealing intermediate step before the actual implementation of the less restrictive equations based upon quadratic magnetic quantities.

Appendix A: A First-Order Variant of the Induction Equation

[69] To write equations (17) to (19), we have retained only the zeroth-order part of the flow. We may wish to take into account, in these equations, the z component of the flow that enters in the Coriolis term in equation (15) and in the induction equation at the core-mantle boundary (equation (4)). Thus, in order to ensure incompressibility, we define

$$\mathbf{u}_E^{NZ}(s, \varphi) = \gamma(s)[\nabla \times \Psi(s, \varphi)\mathbf{e}_z]; \quad (A1)$$

the continuity equation for $\mathbf{u}_E^{NZ} + u_z^1 \mathbf{e}_z$ yields $\gamma(s) = h^{-1}(s)$.

[70] The nonzonal vorticity field ζ is then defined by $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}_E^{NZ}$, and its vertical component is

$$\zeta_z(s, \varphi) = -\nabla_E^2 [h^{-1}(s)\Psi(s, \varphi)]. \quad (A2)$$

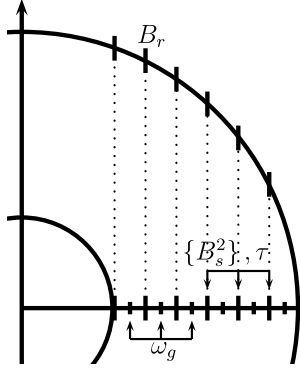


Figure B1. Sketch of a regular staggered radial grid in the equatorial plane and its projection on the CMB.

Finally, the set of equations (17) to (19) becomes

$$\partial_t \langle B_s^2 \rangle = -[\mathbf{u} \cdot \nabla] \langle B_s^2 \rangle - 2s^{-1} \langle B_s^2 \rangle u_s - 2s^{-1} \langle B_s^2 \rangle \partial_\varphi u_\varphi + 2s^{-1} \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_\varphi u_s, \quad (\text{A3})$$

$$\partial_t \langle B_\varphi^2 \rangle = -[\mathbf{u} \cdot \nabla] \langle B_\varphi^2 \rangle - 2 \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_s u_s + 2s \langle B_s B_\varphi \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi), \quad (\text{A4})$$

$$\partial_t \langle B_s B_\varphi \rangle = -[\mathbf{u} \cdot \nabla] \langle B_s B_\varphi \rangle + s \langle B_s^2 \rangle \partial_s (s^{-1} u_\varphi) + s^{-1} \langle B_\varphi^2 \rangle \partial_\varphi u_s - [\nabla_E \cdot \mathbf{u}] \langle B_s B_\varphi \rangle. \quad (\text{A5})$$

Appendix B: Numerical Model

[71] Fields are discretized in radius on a (possibly irregular) staggered grid (see Figure B1), $s = i_s \Delta_s(s)$; $i_s \in [0, N_s]$; $\omega_g(i_s + 1/2, j)$ and $\tau(i_s, j)$. Ψ , $\{B_s^2\}$ and τ are calculated on the same spatial grid (note that $\{B_s^2\}$ is not defined on the endpoints). The latitudinal part of B_r is discretized on a meridian and every grid point is mapped on the CMB from the grid point on Σ , except at the equator (see Figure B1); thus $\theta = i_\theta \Delta_\theta(\theta)$; $i_\theta \in [0, 2N_s - 1]$.

[72] The ψ and B_r are expanded in Fourier series in longitude:

$$\Psi(s, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{m_{\max}} [a_m(s, t) \cos(m\varphi) + b_m(s, t) \sin(m\varphi)], \quad (\text{B1})$$

$$B_r(\theta, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} [c_m(\theta, t) \cos(m\varphi) + d_m(\theta, t) \sin(m\varphi)], \quad (\text{B2})$$

in which the number of azimuthal Fourier mode, m_{\max} , is related to the number of equidistant grid points in longitude, N_φ : $m_{\max} = (N_\varphi - 1)/2$.

[73] The time step being Δ_t , time is discretized using finite differences $t = j\Delta_t$; $j \in [0, N_t]$. Spatial derivatives are computed with a finite difference scheme, except for the longitudinal derivatives for which we use the Fast Fourier Transform in order to compute them in spectral space. For

the simulations, the cylindrical radius is discretized in $N_s = 100$ grid points (including the boundaries), the CMB in $N_\theta = 200$ grid points in latitude and $N_\varphi = 33$ (unless otherwise specified) grid points in longitude.

Appendix C: Steady Nonzonal Flow Model

[74] We define the stream function at the top of the core, Ψ_o , as $\Psi_o = \mathbf{M}_s^o \Psi$, where subscript o refers to the outer boundary. Let \mathbf{M}_s^o be the operator which projects a vector from the equatorial plane to the top of the core, and let \mathbf{M}_o^s be its transpose. The forward model is the radial component of the induction equation at the top of the core,

$$\dot{B}_r = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}^{NZ} B_r), \quad (\text{C1})$$

$$\dot{B}_r = (\sin \theta \cos \theta)^{-1} [\partial_\theta \Psi_o \partial_\varphi B_r - \partial_\varphi \Psi_o \partial_\theta B_r] + (\cos \theta)^{-2} \Psi_o \partial_\varphi B_r. \quad (\text{C2})$$

The tangent linear equation is

$$\delta \dot{B}_r = (\sin \theta \cos \theta)^{-1} [\partial_\theta \Psi_o \partial_\varphi \delta B_r - \partial_\varphi \Psi_o \partial_\theta \delta B_r] + (\cos \theta)^{-2} \Psi_o \partial_\varphi \delta B_r + (\sin \theta \cos \theta)^{-1} \cdot [\partial_\theta \delta \Psi_o \partial_\varphi B_r - \partial_\varphi \delta \Psi_o \partial_\theta B_r] + (\cos \theta)^{-2} \delta \Psi_o \partial_\varphi B_r, \quad (\text{C3})$$

$$\partial_t \delta B_r = \delta \dot{B}_r. \quad (\text{C4})$$

We introduce the adjoint variables Ψ^T , B_r^T and \dot{B}_r^T for Ψ , B_r and \dot{B}_r , respectively. The adjoint model is

$$\Psi^T = \mathbf{M}_\theta^s \sum_{j=0}^T \left\{ \partial_\theta^T \left[(\sin \theta \cos \theta)^{-1} \partial_\varphi B_{r_j} \dot{B}_{r_j}^T \right] - \partial_\varphi^T \left[(\sin \theta \cos \theta)^{-1} \partial_\theta B_{r_j} \dot{B}_{r_j}^T \right] + (\cos \theta)^{-2} \partial_\varphi B_{r_j} \dot{B}_{r_j}^T \right\} \cos^2 \theta, \quad (\text{C5})$$

$$B_r^T = \partial_\varphi^T \left[(\sin \theta \cos \theta)^{-1} \partial_\theta \Psi_o \dot{B}_r^T \right] - \partial_\theta^T \left[(\sin \theta \cos \theta)^{-1} \partial_\varphi \Psi_o \dot{B}_r^T \right] + \partial_\varphi^T \left[(\cos \theta)^{-2} \Psi_o \dot{B}_r^T \right], \quad (\text{C6})$$

$$\dot{B}_r^T = -\partial_t B_r^T, \quad (\text{C7})$$

where ∂_φ^T and ∂_θ^T are the adjoints of ∂_φ and ∂_θ , and $-\partial_t$ indicates that the integration is performed backward in time.

Appendix D: Alfvén Wave Model

[75] The forward equations are

$$\partial_t \omega_g = [s^3 h]^{-1} \partial_s \tau, \quad (\text{D1})$$

$$\partial_t \tau = s^3 h \{B_s^2\} \partial_s \omega_g, \quad (\text{D2})$$

$$\partial_t B_r = -\mathbf{M}_s^o \mathbf{M}_{\text{zonal}}^{\text{total}} \omega_g \partial_\varphi B_r, \quad (\text{D3})$$

where $\mathbf{M}_{\text{zonal}}^{\text{total}}$ transforms a one-dimensional zonal vector into a two-dimensional one, by duplicating it in each meridional plane. Let $\mathbf{M}_{\text{total}}^{\text{zonal}}$ be its transpose. The forward model is completed by the boundary conditions (41) and (42).

[76] We define the adjoint variables ω_g^T , τ^T , $\{B_s^2\}^T$, B_r^T for ω_g , τ , $\{B_s^2\}$, B_r , respectively. The adjoint model is

$$\partial_t \omega_g^T = \partial_s^T [s^3 h \{B_s^2\} \tau^T] - \mathbf{M}_{\text{total}}^{\text{zonal}} \mathbf{M}_{\theta}^s [\partial_{\phi} B_r B_r^T], \quad (\text{D4})$$

$$\partial_t \tau^T = \partial_s^T [(s^3 h)^{-1} \omega_g^T], \quad (\text{D5})$$

$$F^T(s) = \sum_j s^3 h \tau_j^T \{B_s^2\} (\partial_s \omega_g)_j + \alpha_C \mathbf{W} \{B_s^2\}, \quad (\text{D6})$$

$$\partial_t B_r^T = -\partial_{\phi}^T [\mathbf{M}_{\theta}^s \mathbf{M}_{\text{zonal}}^{\text{total}} \omega_g B_r^T], \quad (\text{D7})$$

where ∂_s^T is the adjoint of the operator ∂_s and the term in α_C corresponds to the extra penalty term in the misfit function (see also equation (23)); $\mathbf{W} = \partial_s^T \partial_s$ in the experiments. In order to enforce its positivity during the optimization phase, $\{B_s^2\}$ is rather written $\{B_s^2\} = \exp[F(s)]$, with $F \in \mathbb{R}$ and F^T computed as indicated in equation (D6).

[77] **Acknowledgments.** We thank the reviewers A. Tangborn and A. De Santis for their constructive comments on the manuscript. We thank E. Cosme, C. Finlay, M. Nodet, and O. Talagrand for fruitful discussions. We also thank N. Gillet, N. Schaeffer, and A. Pais for many exchanges at different stages of this work. The manuscript has benefited from the suggestions received from C. Finlay and N. Gillet, who read an earlier draft of the manuscript. A. Pais has provided a core flow model [Pais et al., 2004]. The MIQN3 routine has been provided by Gilbert and Lemaréchal [1989]. Maps have been produced with GMT free software [Wessel and Smith, 1991]. This work has been supported by a grant from the Agence Nationale de la Recherche (“white” research program VS-QG, grant reference BLAN06-2 15316) and by INSU, under the LEFE ASSIM program (Les Enveloppes Fluides et l’Environnement volet Assimilation).

References

- Abramowitz, M., and I. A. Stegun (1964), *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York.
- Amit, H., P. Olson, and U. Christensen (2007), Tests of core flow imaging methods with numerical dynamos, *Geophys. J. Int.*, *168*, 27–39, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03175.x.
- Backus, G., R. L. Parker, and C. Constable (1996), *Foundations of Geomagnetism*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K.
- Backus, G. E. (1968), Kinematics of geomagnetic secular variation in a perfectly conducting core, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, *263*, 239–266, doi:10.1098/rsta.1968.0014.
- Braginsky, S. I. (1970), Torsional magnetohydrodynamic vibrations in the Earth’s core and variations in day length, *Geomagn. Aeron.*, *10*, 1–10.
- Buffett, B. A., J. Mound, and A. Jackson (2009), Inversion of torsional oscillations for the structure and dynamics of Earth’s core, *Geophys. J. Int.*, *177*, 878–890, doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04129.x.
- Chen, J. (2005), Global mass balance and the length-of-day variation, *J. Geophys. Res.*, *110*, B08404, doi:10.1029/2004JB003474.
- Christensen, U. R., and J. Aubert (2006), Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophys. J. Int.*, *166*, 97–114, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x.
- Christensen, U. R., and J. Wicht (2007), Numerical dynamo simulations, in *Treatise on Geophysics*, vol. 8, *Core Dynamics*, edited by P. Olson, pp. 245–282, Elsevier, Oxford, U. K.
- Christensen, U. R., V. Holzwarth, and A. Reiners (2009), Energy flux determines magnetic field strength of planets and stars, *Nature*, *457*, 167–169, doi:10.1038/nature07626.
- Courtier, P. (1997), Variational methods, *J. Meteorol. Soc. Jpn.*, *75*, 211–218.
- Courtier, P., and O. Talagrand (1987), Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II: Numerical results, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, *113*(478), 1329–1347, doi:10.1002/gj.49711347813.
- Diamond, P. H., S. I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm (2005), Zonal flows in plasma: a review, *Plasma Phys. Controlled Fusion*, *47*, R35–R161, doi:10.1088/0741-3335/47/5/R01.
- Evensen, G. (2007), *Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter*, Springer, Berlin.
- Eymin, C., and G. Hulot (2005), On core surface flows inferred from satellite magnetic data, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *152*, 200–220, doi:10.1016/j.pepi.2005.06.009.
- Fournier, A., C. Eymin, and T. Alboussière (2007), A case for variational geomagnetic data assimilation: Insights from a one-dimensional, non-linear, and sparsely observed MHD system, *Nonlinear Process. Geophys.*, *14*, 163–180.
- Giering, R., and T. Kaminski (1998), Recipes for adjoint code construction, *Trans. Math. Software*, *24*, 437–474, doi:10.1145/293686.293695.
- Gilbert, J. C., and C. Lemaréchal (1989), Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms, *Math. Program.*, *45*, 407–435, doi:10.1007/BF01589113.
- Gillet, N., M. A. Pais, and D. Jault (2009), Ensemble inversion of time-dependent core flow models, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, *10*, Q06004, doi:10.1029/2008GC002290.
- Glatzmaier, G. A., and P. H. Roberts (1995), A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal, *Nature*, *377*, 203–209, doi:10.1038/377203a0.
- Gross, R. S. (2007), Earth rotation variations-Long period, in *Treatise on Geophysics*, vol. 3, *Geodesy*, edited by T. Herring, pp. 239–294, Elsevier, Oxford, U. K.
- Hersbach, H. (1998), Application of the adjoint of the WAM model to inverse wave modeling, *J. Geophys. Res.*, *103*(C5), 10,469–10,488, doi:10.1029/97JC03554.
- Hide, R. (1966), Free hydromagnetic oscillations of the Earth’s core and the theory of the geomagnetic secular variation, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, *259*, 615–647, doi:10.1098/rsta.1966.0026.
- Holme, R. (2007), Large-scale flow in the core, in *Treatise on Geophysics*, vol. 8, *Core Dynamics*, edited by P. Olson, pp. 107–130, Elsevier, Oxford, U. K.
- Holme, R., and N. Olsen (2006), Core surface flow modelling from high-resolution secular variation, *Geophys. J. Int.*, *166*, 518–528, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03033.x.
- Hulot, G., T. Sabaka, and N. Olsen (2007), The present field, in *Treatise on Geophysics*, vol. 5, *Geomagnetism*, edited by M. Kono, pp. 33–75, Elsevier, Oxford, U. K.
- Ide, K., P. Courtier, M. Ghil, and C. Lorenc (1997), Unified notations for data assimilation: Operational, sequential and variational, *J. Meteorol. Soc. Jpn.*, *75*, 181–189.
- Jackson, A., and C. Finlay (2007), Geomagnetic secular variation and its applications to the core, in *Treatise on Geophysics*, vol. 5, *Geomagnetism*, edited by M. Kono, pp. 147–193, Elsevier, Oxford, U. K.
- Jault, D. (2008), Axial invariance of rapidly varying diffusionless motions in the Earth’s core interior, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *166*, 67–76, doi:10.1016/j.pepi.2007.11.001.
- Jault, D., C. Gire, and J. L. Le Mouél (1988), Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle, *Nature*, *333*, 353–356, doi:10.1038/333353a0.
- Kalnay, E., et al. (1996), The NCEP/NCAR 40-Year Reanalysis Project, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, *77*, 437–471, doi:10.1175/1520-0477(1996)077<0437:TNYRP>2.0.CO;2.
- Le Dimet, F.-X., and O. Talagrand (1986), Variational methods for analysis and assimilation of meteorological observations, *Tellus*, *38*, 97–110.
- Lehnert, B. (1954), Magnetohydrodynamic waves under the action of the Coriolis force, *Astrophys. J.*, *119*, 647–654, doi:10.1086/145869.
- Liu, D., A. Tangborn, and W. Kuang (2007), Observing system simulation experiments in geomagnetic data assimilation, *J. Geophys. Res.*, *112*, B08103, doi:10.1029/2006JB004691.
- Olsen, N., and M. Manda (2008), Rapidly changing flows in the Earth’s core, *Nat. Geosci.*, *1*, 390–394, doi:10.1038/ngeo203.
- Olsen, N., H. Lühr, T. J. Sabaka, M. Manda, M. Rother, L. Tøffner-Clausen, and S. Choi (2006), CHAOS-a model of the Earth’s magnetic field derived from CHAMP, Orsted, and SAC-C magnetic satellite data, *Geophys. J. Int.*, *166*, 67–75, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.02959.x.
- Pais, M. A., and D. Jault (2008), Quasi-geostrophic flows responsible for the secular variation of the Earth’s magnetic field, *Geophys. J. Int.*, *173*, 421–443, doi:10.1111/j.1365-246X.2008.03741.x.
- Pais, M. A., O. Oliveira, and F. Nogueira (2004), Nonuniqueness of inverted core-mantle boundary flows and deviations from tangential geostrophy, *J. Geophys. Res.*, *109*, B08105, doi:10.1029/2004JB003012.

- Plaut, E. (2003), Nonlinear dynamics of traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection: Effects of the boundary conditions and of the topology, *Phys. Rev. E*, *67*, 046303, doi:10.1103/PhysRevE.67.046303.
- Rau, S., U. Christensen, A. Jackson, and J. Wicht (2000), Core flow inversion tested with numerical dynamo models, *Geophys. J. Int.*, *141*, 485–497, doi:10.1046/j.1365-246x.2000.00097.x.
- Roberts, P. H. (1967), *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Longmans, London.
- Sun, Z., A. Tangborn, and W. Kuang (2007), Data assimilation in a sparsely observed one-dimensional modeled MHD system, *Nonlinear Process. Geophys.*, *14*, 181–192.
- Talagrand, O. (1997), Assimilation of observations, an introduction, *J. Meteorol. Soc. Jpn.*, *75*, 191–209.
- Talagrand, O., and P. Courtier (1987), Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I: Theory, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, *113*, 1311–1328, doi:10.1002/qj.49711347812.
- Tobias, S. M., P. H. Diamond, and D. W. Hughes (2007), β -plane magnetohydrodynamic turbulence in the solar tachocline, *Astrophys. J.*, *667*, L113–L116, doi:10.1086/521978.
- Turner, G. M., J. L. Rason, and C. V. Reeves (2007), Observation and measurement techniques, in *Treatise on Geophysics*, vol. 5, *Geomagnetism*, pp. 93–146, edited by M. Kono, Elsevier, Oxford, U. K.
- Vallis, G. K. (2006), *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K.
- Voorhies, C. V., and G. E. Backus (1985), Steady flows at the top of the core from geomagnetic field models: The steady motions theorem, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *32*, 163–173, doi:10.1080/03091928508208783.
- Waddington, R., D. Gubbins, and N. Barber (1995), Geomagnetic field analysis—V. Determining steady core-surface flows directly from geomagnetic observations, *Geophys. J. Int.*, *122*, 326–350, doi:10.1111/j.1365-246X.1995.tb03556.x.
- Wessel, P., and W. H. F. Smith (1991), Free software helps map and display data, *Eos Trans. AGU*, *72*, 441, doi:10.1029/90EO00319.
- Zatman, S., and J. Bloxham (1997), Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's core, *Nature*, *388*, 760–763, doi:10.1038/41987.
- Zatman, S., and J. Bloxham (1999), On the dynamical implications of models of B_s in the Earth's core, *Geophys. J. Int.*, *138*, 679–686, doi:10.1046/j.1365-246x.1999.00909.x.

E. Canet and D. Jault, LGIT, Université Joseph-Fourier, CNRS, BP 53, F-38041 Grenoble CEDEX 9, France. (ecanet@obs.ujf-grenoble.fr; djault@obs.ujf-grenoble.fr)

A. Fournier, Équipe de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, Université Paris Diderot, INSU, CNRS, BP 89, F-75252 Paris CEDEX 5, France. (fournier@ipgp.fr)

Article : Fast torsional waves and strong magnetic field within the Earth's core (Gillet et al, 2009)

G

Cet article est actuellement en révision. La version que je joins ici est la version soumise. Nous y avons déjà repéré une erreur. Le champ magnétique radial à la frontière noyau-manteau, pris constant pour calculer l'impact d'une couche conductrice à la base du manteau, n'était pas de 0.7 mT mais de $4\pi 0.7$ mT. En conséquence, les valeurs des conductances estimées dans l'article sont 4π fois trop élevées. Dans la partie 4.4 (et les sections de résultats qui la suivent), j'ai corrigé la valeur du champ magnétique radial à 0.5 mT et les conductances que je présente sont donc plus faibles que les valeurs erronées de l'article. Les différences entre ces deux calculs, qui sont les mêmes d'un point de vue mathématique du problème direct, résident dans la minimisation et font l'objet de la section 4.5.6.

1 **Fast torsional waves and strong magnetic field within the** 2 **Earth's core**

3 Nicolas Gillet¹, Dominique Jault¹, Elisabeth Canet¹ & Alexandre Fournier²

4 ¹*LGIT, CNRS, Université Joseph Fourier, Grenoble (France)*

5 ²*IPG Paris (France)*

6 **The magnetic field inside the Earth's fluid and electrically conducting outer core cannot be**
7 **directly probed. The root-mean squared (rms) intensity for the resolved part of the radial**
8 **magnetic field at the Core-Mantle boundary (CMB) is 0.3 mT, but further assumptions are**
9 **needed to infer the strength of the field inside the core. Scaling laws relating the strength**
10 **of the dipole field at the surface of a fluid dynamo to the rms field intensity in its interior,**
11 **recently obtained from numerical geodynamo models¹, yield an intensity of the order of 2 mT**
12 **within the Earth's core. However, a 60-year signal found in the variation in the length-of-day²**
13 **(Δ LOD) has long been associated with magneto-hydrodynamic torsional waves carried by a**
14 **much weaker internal field^{3,4}: according to these studies, the rms strength of the field in**
15 **the cylindrical radial direction (calculated for all length scales) is only 0.2 mT, a figure even**
16 **smaller than the rms strength of the large scale (below spherical harmonic degree $n = 13$)**
17 **field visible at the CMB. Here we reconcile numerical geodynamo models with studies of**
18 **geostrophic motions in the Earth's core relying on geomagnetic data. From an ensemble**
19 **inversion of core flow models, we exhibit indeed a torsional wave recurring every 6 years,**
20 **whose angular momentum accounts well for both the phase and the amplitude of the 6-year**

21 Δ LOD signal detected over the second half of the twentieth century⁵. It takes about 5 years
22 for the wave to propagate throughout the fluid outer core: this travel-time translates into a
23 slowness for Alfvén waves which corresponds to a rms field strength in the cylindrical radial
24 direction of approximately 1.5 mT. Assuming isotropy, this yields a rms field strength of 3 mT
25 inside the Earth’s core.

26 The flow at the core surface is responsible for the time variation of the geomagnetic field,
27 and its large-scale features can be inferred from secular variation models. Two innovations have
28 recently been introduced in the calculation of core flows. First, using a time-dependent ensemble
29 inversion scheme⁶, one can account for the spatial resolution errors arising from the unresolved,
30 small-scale magnetic field. Second, assuming that the calculated flows are quasi-geostrophic⁷
31 (QG) in the core interior strongly constrains the flow geometry at the core surface (radius $r = c =$
32 3480 km). Resorting to cylindrical (s, ϕ, z) coordinates, with the z -axis aligned with the Earth’s
33 rotation vector Ω , the equatorial (s, ϕ) component of a QG flow is z -invariant and cannot cross the
34 cylinder parallel to Ω which circumscribes the inner core (the tangent cylinder). That hypothesis is
35 justified when retrieving rapidly changing flows⁸ in the limit of small $\lambda_\ell = B(\Omega\ell\sqrt{\rho\mu_0})^{-1}$, where
36 ρ is the core density, μ_0 is the free space magnetic permeability, ℓ is the length scale of motion, and
37 B is the strength of the internal field \mathbf{B} . This dimensionless number, of order 10^{-4} in the Earth’s
38 core for $\ell \sim 10^6$ m, measures the ratio between inertial and Alfvén⁹ waves periods. Here, we invert
39 the GUFM1 geomagnetic model¹⁰ (for degrees $n \leq 11$ of the secular variation and a noise level of
40 10 (nT/y)^2 at the Earth surface) to obtain a time-dependent QG core flow model spanning 1840 to
41 1990. Its toroidal and poloidal expansion $\{t_{nm}^{s,c}, s_{nm}^{s,c}\}$, truncated at degree $n = 22$, is expanded in

42 time onto a cubic B-spline basis with a knot-spacing of 2.5 y. The impact on the secular variation of
 43 unresolved main field coefficients of degree $n \in [12 \dots 33]$ is accounted for following an ensemble
 44 approach⁶, with ensemble size $K = 20$.

45 Core flow carries angular momentum and confidence in core flow models can be estimated by
 46 the quality of their prediction for the independent ΔLOD data^{11,12}. Our ensemble of QG core flow
 47 models predicts well the decadal ΔLOD variation (here the LUNAR97 time series¹³) over most of
 48 the twentieth century since 1910. Such a good prediction had been obtained before¹⁴, but was then
 49 sensitive to adjustable parameters. We reckon that some of the variations of the zonal motions that
 50 are calculated around 1990⁶ from magnetic field models valid up to 2000 or later are artefactual.
 51 We attribute this difficulty to the sharp increase in the accuracy of models around this epoch. The
 52 core angular momentum variations have been associated to time changes of the geostrophic (i.e.
 53 zonal and z -invariant) motions evolving as Alfvén waves^{3,4,15}. Torsional Alfvén waves consist
 54 in the propagation along the cylindrical radius of a perturbation in both the geostrophic angular
 55 velocity ω_g and the magnetic field. Their period is proportional to their radial length scale and
 56 inversely proportional to the rms value of the cylindrical radial magnetic field calculated on cylin-
 57 ders parallel to the rotation axis, as measured by $\tilde{B}_s(s) = \sqrt{\frac{1}{4\pi h} \int_{-h}^{+h} \int_0^{2\pi} B_s^2(s, \phi, z) d\phi dz}$, where
 58 $h(s) = \sqrt{c^2 - s^2}$ is the half-height of a fluid column. Their travel-time is independent on the
 59 length scale and scales in inverse proportion to $\tilde{B}_s(s)$. As a result, detecting the propagation of a
 60 torsional Alfvén wave enables to constrain the strength of the magnetic field in the core interior.

61 On shorter timescales, a ΔLOD signal, of period 6 years, has been detected^{2,5} and tentatively

62 related to core dynamics¹⁶. One must be aware of the dramatic changes over time in the accuracy
63 of geodetic and magnetic measurements. Interannual variations inferred from lunar occultations
64 are not resolved prior to 1925¹⁷. After the advent of atomic clocks in 1955, the Earth rotation
65 period has been accurately measured from the observation of transit times of stars, which is now
66 superseded by VLBI techniques. Magnetic measurements also drastically improved after 1960
67 when proton magnetometers became widely used. We have thus investigated the prediction of
68 the 6-y signal for a time interval beginning in 1925 and ending in 1990, after when the lower
69 frequency ΔLOD variations are not well reproduced⁶. We concentrate on the period starting in
70 the mid-nineteen-fifties. The coherence and phase shift spectra shown in Figure 1 indicate that the
71 6-y period is well predicted by the ensemble of core flow calculations, as well as by the ensemble
72 average. Both amplitude and phase agree.

73 Accordingly, the observed and predicted ΔLOD time series filtered between 5 and 8 years
74 match. The predictions are particularly successful between 1960 and 1980. The time-cylindrical
75 radius map of geostrophic velocity $u_g(s, t)$, filtered as well between 5 and 8 years (Figure 2, top),
76 indicates a radial propagation from the tangent cylinder ($s_i = 0.35c$) both toward the equator
77 ($s_o = c$) and toward the rotation axis ($s = 0$). It takes close to 4 years for the wave to cross the outer
78 core from the tangent cylinder to the equator. Such a fast propagation is made possible by a large
79 enough magnetic field inside the core, with an amplitude of a few mT. At large cylindrical radii, in
80 the equatorial region, the propagation slows down. In a torsional wave scenario, that observation
81 is coherent with a weaker field close to the equator. Furthermore, the absence of a reflected wave
82 suggests the presence of significant ohmic dissipation. This is due either to large gradients of

83 the induced magnetic field, resulting from inhomogeneities in the Alfvén wave velocity, or to the
 84 presence of a conducting layer at the base of the lower mantle¹⁸. We have explored this second
 85 hypothesis.

86 In order to estimate not only the strength but also the profile of $\tilde{B}_s(s)$, we use a variational
 87 data assimilation framework^{19,20} which rests on the torsional wave equation outside the tangent
 88 cylinder. The observation vector is $\mathbf{y}^o(t) = \{t_{n0}^o(t)\}_{n=1,3,5\dots}$, the time series of the toroidal zonal
 89 coefficients filtered around 6 years, calculated from the ensemble average of the K core flow
 90 solutions $\{t_{n0}^k(t)\}_{n=1,3,5\dots}^{k=1\dots K}$. These coefficients provide a blurred picture of the true geostrophic
 91 velocity u_g^t inside the core, through the forward problem $\mathbf{y}^o(t) = \mathbf{H} u_g^t(s, t) + \mathbf{e}^o$. \mathbf{H} is the observa-
 92 tion operator which relates expressions in cylindrical coordinates to spectral coefficients, whereas
 93 $\mathbf{e}^o = \{e_{n0}^o\}_{n=1,3,5\dots}$ is the error vector. Elements of the error covariance matrix \mathbf{C} are estimated from
 94 the time-average dispersion of the ensemble of kinematic core flow solutions $\{t_{n0}^k(t)\}_{n=1,3,5\dots}^{k=1\dots K}$:

$$95 \quad C_{nn'} = \frac{1}{t_e - t_s} \int_{t_s}^{t_e} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (t_{n0}^k - t_{n0}^o) (t_{n'0}^k - t_{n'0}^o) dt. \quad (1)$$

96 Large correlations $\rho_{nn'} = C_{nn'} / \sqrt{C_{nn} C_{n'n'}}$ are found, with for instance $(\rho_{13}, \rho_{15}, \rho_{35}, \rho_{57}) =$
 97 $(-0.49, 0.29, -0.44, -0.23)$. Errors are consequently not independent, and considering variances
 98 only would reduce the amount of information contained in the observation vector \mathbf{y}^o . Figure 3,
 99 where errors variances are compared with rms amplitudes of the t_{n0}^o , shows that only the large
 100 length-scales are resolved. We thus consider observations limited to spherical harmonic degrees
 101 $n \leq 9$. Nonetheless, the predicted velocity u_g^f is free to exhibit shorter length-scales⁴.

102 As noted above, dissipation is required to successfully assimilate our observations. Taking

103 into account a magnetic drag due to a conducting layer at the bottom of the mantle (of conductance
 104 G), the dynamical system of interest writes

$$105 \quad \frac{\partial \omega_g}{\partial t} = \frac{1}{s^3 h \rho \mu_0} \frac{\partial \tau}{\partial s} - \frac{c G \tilde{B}_r^2}{h^2 \rho} \omega_g, \quad (2)$$

$$106 \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = s^3 h \tilde{B}_s^2(s) \frac{\partial \omega_g}{\partial s}, \quad (3)$$

107 where $\tilde{B}_r^2(s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \{B_r^2(s, \phi, h) + B_r^2(s, \phi, -h)\} d\phi$ and $\tau(s, t) = \frac{s^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{+h} B_s B_\phi dz d\phi$.

108 In the following, the product $G\tilde{B}_r^2$ is chosen uniform for the sake of simplicity. The system of
 109 equations (2,3) requires two boundary conditions. We choose $\tau(s_o, t) = 0$ and, in order to avoid
 110 the boundary conditions on the forecast to be too much influenced by our blurred image of the core

111 state, $\frac{\partial \omega_g}{\partial s}(s_i, t) = A \cos(\gamma t + \varphi)$, which comes down to assimilating on the torque transferred to

112 the system at the tangent cylinder. This excitation can originate from e.g. a thermochemical source
 113 at the inner core surface, an eigen mode of the oscillating inner core¹⁶, or even a conversion of

114 topographic Rossby waves into geostrophic motion close to the tangent cylinder²¹. We seek state

115 vectors $\mathbf{x} = \{\tilde{B}_s(s), G\tilde{B}_r^2, A, \gamma, \varphi\}$ minimizing the cost function

$$116 \quad J(\mathbf{x}) = \frac{1}{t_e - t_s} \int_{t_s}^{t_e} \mathbf{e}^f(t)^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}^f(t) dt + \alpha_B \int_{s_i}^{s_o} \left[\frac{\partial^2 \tilde{B}_s^2}{\partial s^2} \right]^2 ds + \alpha_G [G\tilde{B}_r^2]^2, \quad (4)$$

117 where $\mathbf{e}^f(t) = \mathbf{y}^o(t) - \mathbf{H} u_g^f(t)$ is the forecast error vector. By exploring the parameter space
 118 (α_B, α_G) for several initial guesses \mathbf{x}^i and several periods spanning $[t_s, t_e] \in [1960, 1982]$, we

119 find a range of solutions adequately fitting the data within the error bars. Figure 2 shows one

120 solution example: the time-radius map of the forecast u_g^f (bottom) compares well with that of the

121 observations u_g^o truncated at $n = 9$ (middle). Comparison of the *a priori* and *a posteriori* errors

122 magnitude as a function of degree n is provided in Figure 3, in a case where the normalized data

123 misfit is 0.62.

124 Figure 4 displays the dispersion of the acceptable solutions in terms of profiles of $\tilde{B}_s(s)$.
 125 They all require \tilde{B}_s to be larger than 2 to 3 mT in most of the outer core, except toward the equator
 126 where it decreases toward intensities coherent with the fraction of a mT obtained at the CMB. At
 127 radii between 0.45 and 0.75, we find a wide range of acceptable amplitudes: we thus only provide a
 128 lower bound for the field intensity in that region. Our findings are in line with estimates (i) inferred
 129 from QG core-flow inversions assuming a magnetostrophic balance⁶, (ii) deduced from numerical
 130 geodynamo models¹, and (iii) required to explain core nutations²². Furthermore, as our strong
 131 field estimate yields shorter periods of the torsional waves, the issue concerning their damping²³
 132 vanishes. We find a product $G\tilde{B}_r^2$ for the acceptable solutions of $850 \pm 350 \text{ S.T}^2$. For a rms radial
 133 field of the order of 0.7 mT at the CMB²² (see Figure 4), this yields a conductance G in the range
 134 $[1 - 2.5] \times 10^9 \text{ S.m}$. A 6 y signal probes the entire thickness Δ of the conducting layer at the
 135 bottom of the mantle, of conductivity $\sigma_m = G/\Delta$. For a value of σ_m ten times smaller than (resp.
 136 similar to) the outer core conductivity $\sigma_c \sim 5 \times 10^5 \text{ S}$, this yields gives a thickness $\Delta \sim 35 \text{ km}$
 137 (resp. 3.5 km). That estimate is compatible with the one obtained from the analysis of the daily
 138 nutations²²: these probe a thickness $\delta \sim 200 \text{ m}$ for a conductivity σ_m close to that of the core.

139 In a scenario where they are responsible for the 6 y Δ LOD signal, torsional Alfvén waves no
 140 longer explain the decadal to centennial Δ LOD variation, as was previously thought^{3,4,15}. Hence,
 141 such changes remain to be understood. We envision on periods longer than the Alfvén time a
 142 magnetic field \mathbf{B} inside the core evolving in a Taylor state²⁴, with the flow constantly adapting to
 143 the changes in the magnetic field. One consequence is that geostrophic (zonal) and ageostrophic
 144 (non zonal) motions, coupled together, must present similar amplitudes. The triggering mechanism

145 responsible for the observed torsional waves remains to be understood as well. Only a tiny inner
146 core oscillation is predicted from our study, of order 10^{-2} deg/y. Although difficult to detect from
147 seismological studies²⁵, this almost harmonic signal could constitute a target to focus on. Having
148 an internal field as strong as a 5 mT rms is compatible with magnetic dissipation considerations²⁶.
149 Furthermore, it permits the occurrence of rapid interannual flow variations, as inferred from satel-
150 lite data²⁷. It may also explain the suddenness of geomagnetic jerks²⁸. The link between torsional
151 waves and other components of a time-dependent core flow calls for dynamically consistent mod-
152 els involving the full magnetic field \mathbf{B} inside the core. It requires the extension of geomagnetic
153 data assimilation techniques, based on physical models compatible with the framework of J. B.
154 Taylor²⁰.

155 Detection of fast torsional oscillations helps us acquire a better physical understanding of the
156 geomagnetic variations and reconcile geodynamo models with geomagnetic observations. In addi-
157 tion, better knowledge of the core angular momentum changes on a wider spectral range will also
158 result in a better description of the angular momentum changes of the outer geophysical envelopes
159 (oceans, ice caps, atmosphere). The assimilation technique²⁰ applied in our study is well-suited to
160 analyse long data series. However, recent high-quality satellite data only cover a short period com-
161 pared to that of the physical processes responsible for the geomagnetic secular variation. We must
162 overcome difficulties met when merging together in one model data of very different qualities.
163 This will be achieved only by propagating backward in time the quality of satellite data¹⁹, such
164 as those to come soon from the ESA *Swarm* mission. To this end, we have to develop dynamical
165 models for the evolution of core flows, which include the torsional waves we have focussed on in

166 this study.

- 168 1. Christensen, U. R., Holzwarth, V. & Reiners, A. Energy flux determines magnetic field
169 strength of planets and stars. *Nature* **457**, 167–169 (2009).
- 170 2. Roberts, P. H., Yu, Z. J. & Russel, C. T. On the 60-year signal from the core. *Geophys.*
171 *Astrophys. Fluid Dyn.* **101(1)**, 11–35 (2007).
- 172 3. Zatman, S. & Bloxham, J. Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's
173 core. *Nature* **388**, 760–763 (1997).
- 174 4. Buffett, B. A., Mound, J. & Jackson, A. Inversion of torsional oscillations for the structure and
175 dynamics of Earth's core. *Geophys. J. Int.* doi: 10.1111/j.1365–246X.2009.04129.x (2009).
- 176 5. Abarca del Rio, R., Gambis, D. & Salstein, D. A. Interannual signals in length of day and
177 atmospheric angular momentum. *Ann. Geophysicae* **18**, 347–364 (2000).
- 178 6. Gillet, N., Pais, M. A. & Jault, D. Ensemble inversion of time-dependent core flow models.
179 *Geochem. Geophys. Geosyst.* **10 (6)**, Q06004, doi:10.1029/2008GC002290 (2009).
- 180 7. Pais, M. A. & Jault, D. Quasi-geostrophic flows responsible for the secular variation of the
181 Earth's magnetic field. *Geophys. J. Int.* **173**, 421–443 (2008).
- 182 8. Jault, D. Axial invariance of rapidly varying diffusionless motions in the Earth's core interior.
183 *Phys. Earth Planet. Int.* **166**, 67–76 (2008).
- 184 9. Alfvén, H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature* **150**, 405–406 (1942).

- 185 10. Jackson, A., Jonkers, A. R. T. & Walker, M. R. Four centuries of geomagnetic secular variation
186 from historical records. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **358**, 957–990 (2000).
- 187 11. Jault, D., Gire, C. & Le Mouél, J. Westward drift, core motions and exchanges of angular
188 momentum between core and mantle. *Nature* **333**, 353–356 (1988).
- 189 12. Jackson, A., Bloxham, J. & Gubbins, D. *Time-dependent flow at the core surface and conser-*
190 *vation of angular momentum in the coupled core-mantle system. In Dynamics of the Earth's*
191 *deep interior and Earth rotation*, vol. 72, 97–107 (eds J.-L. LeMouél, D. E. Smylie & T. A.
192 Herring, American Geophysical Union, Washington DC, 1993).
- 193 13. Gross, R. S. A combined length-of-day series spanning 1832–1977: LUNAR97. *Phys. Earth*
194 *Planet. Int.* **123**, 65–76 (2001).
- 195 14. Jackson, A. Time-dependency of tangentially geostrophic core surface motions. *Phys. Earth*
196 *Planet. Inter.* **103**, 293–311 (1997).
- 197 15. Bloxham, J., Zatman, S. & Dumberry, M. The origin of geomagnetic jerks. *Nature* **420**, 65–68
198 (2002).
- 199 16. Mound, J. E. & Buffett, B. Detection of a gravitational oscillation in length of day. *Earth and*
200 *Planetary Science Letters* **243**, 383–389 (2006).
- 201 17. Jordi, C., Morrison, L. V., Rosen, R. D., Salstein, D. A. & Rosselló, G. Fluctuations in the
202 Earth's rotation since 1830 from high-resolution astronomical data. *Geophys. J. Int.* **117**, 811–
203 818 (1994).

- 204 18. Braginsky, S. I. Torsional magnetohydrodynamic vibrations in the Earth's core and variations
205 in day length. *Geomag. Aeron.* **10**, 1–8 (1970).
- 206 19. Fournier, A., Eymin, C. & Alboussière, T. A case for variational geomagnetic data assimila-
207 tion: insights from a one-dimensional, nonlinear and sparsely observed MHD system. *Nonlin.*
208 *Processes Geophys.* **14**, 1–18 (2007).
- 209 20. Canet, E., Fournier, A. & Jault, D. Forward and adjoint quasi-geostrophic models of the
210 geomagnetic secular variation. *J. Geophys. Res.*, *in press* (2009).
- 211 21. Jault, D. *Electromagnetic and Topographic Coupling, and LOD variations. In "Earth's core*
212 *and lower mantle", eds. C. A. Jones, A. M. Soward & K. Zhang, pp 56–76 (Taylor & Francis,*
213 *London, 2003).*
- 214 22. Buffett, B. A., Mathews, P. M. & Herring, T. A. Modeling of nutation and precession: Effects
215 of electromagnetic coupling. *J. Geophys. Res.* **107**, B4, 2070, 10.1029/2000JB000056 (2002).
- 216 23. Dumberry, M. & Mound, J. E. Constraints on core-mantle electromagnetic coupling from
217 torsional oscillation normal modes. *J. Geophys. Res.* **113**, doi:10.1029/2007JB005135 (2008).
- 218 24. Taylor, J. B. The magnetohydrodynamics of a rotating fluid and the Earth's dynamo problem.
219 *Proc. R. Soc. London A* **274**, 274–283 (1963).
- 220 25. Zhang, J., Richards, P. G. & Schaff, D. P. Wide-scale detection of earthquake waveform
221 doublets and further evidence for inner core super-rotation. *Geophys. J. Int.* **174**, 993–1006
222 (2008).

- 223 26. Jackson, A. & Livermore, P. On Ohmic heating in the Earth's core I: nutation constraints.
224 *Geophys. J. Int.* doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.04008.x (2009).
- 225 27. Olsen, N. & Manda, M. Rapidly changing flows in the Earth's core. *Nature geosciences* **1**,
226 390–394 (2008).
- 227 28. Alexandrescu, M., Gibert, D., Hulot, G., Mouël, J.-L. L. & Saracco, G. Worldwide wavelet
228 analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.* **101**, 21975–21994 (1996).
- 229 29. Gilbert, J. & Lemaréchal, C. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton
230 algorithms. *Mathematical Programming* **45**, 407–435 (1989).

231 **Acknowledgements** The authors thank Mathieu Dumberry and Paul Roberts for useful discussions. NG
232 has been funded by a grant from the French Agence Nationale de la Recherche, Research program VS-
233 QG (grant number BLAN06-2.155316). EC has been funded by a MENRT grant of the CNRS. The data
234 assimilation optimization has been performed using the M1QN3 algorithm²⁹. The authors declare that they
235 have no competing financial interests. Correspondence and requests for materials should be addressed to
236 Nicolas Gillet (email: Nicolas.gillet@obs.ujf-grenoble.fr).

237 **Figure 1** Coherence spectrum (top left) and phase shift spectrum (top right), calculated
238 over the time span 1925–1990 for two ΔLOD time series (i) LUNAR97¹³ data and (ii)
239 prediction from the ensemble average QG core flow model. Green curves correspond to
240 the frequency range where the phase shift is smaller than $\pi/6$ (arbitrary threshold). A
241 high coherence is found simultaneously with a small phase shift for both low frequencies
242 and a window centered on 6 y. Bottom: comparison of ΔLOD time series, band-pass
243 filtered between 5 and 8 y, of the LUNAR97 data (green), and the predictions from the
244 ensemble of the kinematic core flow models (grey), its average (black), and the result (red)
245 of the torsional wave assimilation of the flow coefficients $\{t_n^o(t)\}_{n=1,3\dots 9}$ between 1960 and
246 1982.

247 **Figure 2** Angular velocity $u_g(s, t)$ as a function of time and cylindrical radius (in outer
248 core radius c units), band-pass filtered between 5 and 8 y. The colour scale ranges be-
249 tween ± 0.4 km/y, with contours every 0.02 km/y. Top: for the ensemble average kinematic
250 core flow model (truncated at degree $n = 22$) between 1955 and 1985. The horizontal
251 dashed-line at $s = 0.35$ corresponds to the position of the tangent cylinder. The black
252 box corresponds to the domain used for the variational assimilation of torsional waves.
253 Middle: same as inside the black box in Top (outside the tangent cylinder and between
254 1960 and 1982), but truncated at spherical harmonic degree $n = 9$. It corresponds to the
255 observation $u_g^o(s, t)$ used for the data assimilation. Bottom: predictions $u_g^f(s, t)$ resulting
256 from the torsional wave assimilation of the $\{t_n^o(t)\}_{n=1,3\dots 9}$.

257 **Figure 3** Black: comparison, as a function of spherical harmonic degree n , of the rms
258 value of the observations t_{n0}^o (circles) with the magnitude of the observation errors e_{n0}^o
259 (squares) calculated from Equation (1) over $[t_s, t_e] = [1960, 1982]$. Superimposed in red
260 are an example for the rms value of a forecast t_{n0}^f (circles) and that of its associated
261 forecast errors e_{n0}^f (squares). This case, which corresponds to the predicted $u_g^f(s, t)$ in
262 Figure 2 (bottom), presents a normalized misfit of 0.62.

263 **Figure 4** Rms value of the cylindrical radial magnetic field $\tilde{B}_s(s)$, in mT, as a func-
264 tion of the cylindrical radius (in outer core radius c units), obtained by assimilation of
265 the $\{t_n^o(t)\}_{n=1,3,\dots,9}$ using the torsional waves dynamical model (2). The grey shaded area
266 corresponds to the domain in which acceptable solutions have been found.

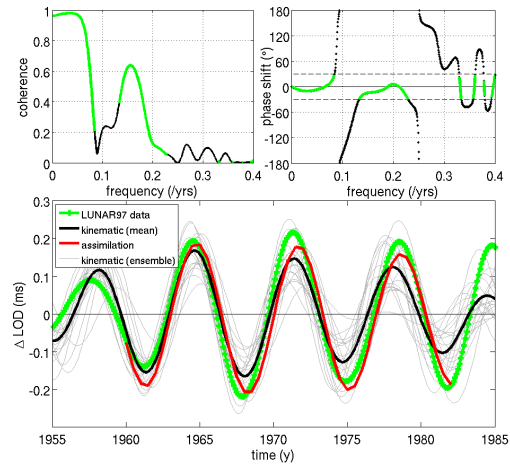


Fig. 1.

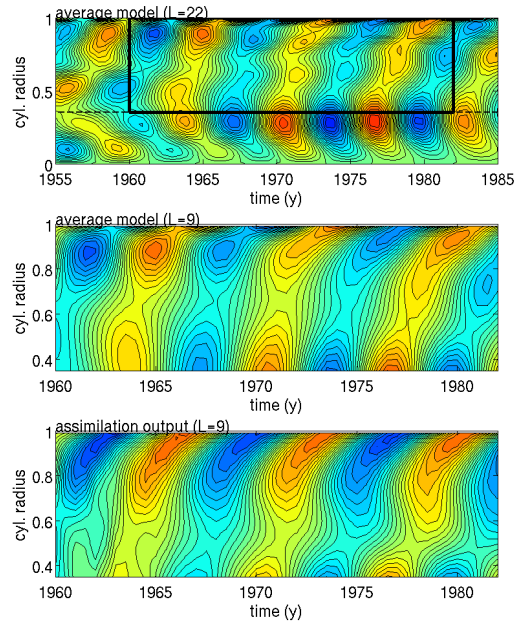


Fig. 2.

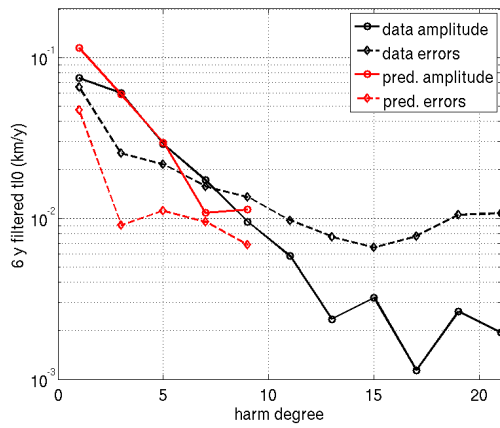


Fig. 3.

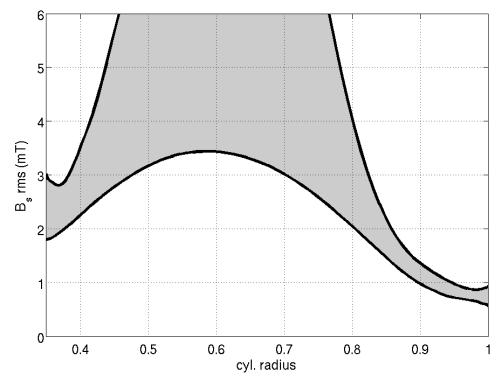


Fig. 4.

Bibliographie

- R. Abarca del Rio, D. Gambis, et DA Salstein. Interannual signals in length of day and atmospheric angular momentum. Dans *Annales Geophysicae*, volume 18, pages 347–364. Springer, 2000. (Cité page 77.)
- M. Abramowitz et I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, 9th Dover printing, 10th GPO printing édition, 1964. (Cité page 66.)
- DJ Acheson et R. Hide. Hydromagnetics of rotating fluids. *Rep. Prog. Phys*, 36 : 159–221, 1973. (Cité page 34.)
- M. Alexandrescu, V. Courtillot, et J.-L. Le Mouél. Geomagnetic field direction in Paris since the mid-sixteenth century. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 98 :321–360, Décembre 1996. (Cité page 1.)
- H. Amit et P. Olson. Helical core flow from geomagnetic secular variation. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 147(1) :1–25, 2004. (Cité page 44.)
- H. Amit et P. Olson. Time-average and time-dependent parts of core flow. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 155(1-2) :120–139, 2006. (Cité page 75.)
- H. Amit, P. Olson, et U. Christensen. Tests of core flow imaging methods with numerical dynamos. *Geophys. J. Int.*, 168 :27–39, 2007. (Cité pages 48 et 52.)
- J. Aubert. *Comprendre et interpréter le signal magnétique : Résultats et perspectives géophysiques de la modélisation numérique de l'effet dynamo*. PhD thesis, Université Paris VII, 2009. (Cité pages 28 et 29.)
- J. Aubert, H. Amit, G. Hulot, et P. Olson. Thermochemical flows couple the Earth's inner core growth to mantle heterogeneity. *Nature*, 454(7205) :758–761, 2008. (Cité page 29.)
- J. Aubert, D. Brito, P. Cardin, HC Nataf, et J.P. Masson. A systematic experimental study of spherical shell rotating convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Int.*, 128 :51, 2001. (Cité page 35.)
- J. Aubert, N. Gillet, et P. Cardin. Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *Geochem. Geophys. Geosyst*, 4 :1052, 2003. (Cité page 35.)
- G. Backus, R.L. Parker, et C. Constable. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, 1996. (Cité page 66.)

- G.E. Backus. Kinematics of geomagnetic secular variation in a perfectly conducting core. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Series A*, 263 :239–266, 1968. (Cité page 44.)
- C. Beggan et K. Whaler. Core flow modelling assumptions. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 167(3) :217–222, 2008. (Cité page 45.)
- A.F. Bennett et M.A. Thorburn. The generalized inverse of a nonlinear quasi-geostrophic ocean circulation model. *Journal of Physical Oceanography*, 22(3) : 213–230, 1992. (Cité page 53.)
- J. Bloxham, D. Gubbins, et A. Jackson. Geomagnetic Secular Variation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, 329 :415–502, 1989. (Cité pages 21 et 22.)
- J. Bloxham, S. Zatman, et M. Dumberry. The origin of geomagnetic jerks. *Nature*, 420 :65–68, 2002. (Cité page 75.)
- F. Bouttier et P. Courtier. Data assimilation concepts and methods, march 1999. *Meteorological Training Course Lecture Series. ECMWF*, 2002. (Cité page 50.)
- SI Braginsky. Magnetohydrodynamics of the Earth's core. *Geomag. Aeron*, 4 : 698–712, 1964. (Cité page 34.)
- S.I. Braginsky. Torsional magnetohydrodynamic vibrations in the Earth's core and variations in day length. *Geomag. Aeron.*, 10 :1–10, 1970. (Cité pages 6, 32, 34 et 75.)
- S.I. Braginsky. Short-period geomagnetic secular variation. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 30 :1–78, 1984. (Cité page 34.)
- S.I. Braginsky et P.H. Roberts. Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 79(1) :1–97, 1995. (Cité page 28.)
- B. A. Buffett et J. E. Mound. A Green's function for the excitation of torsional oscillations in the Earth's core. *J. Geophys. Res.*, 110 :8104–+, 2005. (Cité page 76.)
- B.A. Buffett. Free oscillations in the length of day : inferences on physical properties near the core-mantle boundary. Dans *The core-mantle boundary region*, volume 28, pages 153–165. Gurnis, M., Wysession, M., Knittle, E., and Buffett, B., American Geophysical Union, 1998. (Cité page 75.)
- B.A. Buffett. Core-Mantle Interactions. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 8 : Core Dynamics, pages 345–358. ed. Olson, P., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité page 73.)
- B.A. Buffett, P.M. Mathews, et T.A. Herring. Modeling of nutation and precession : Effects of electromagnetic coupling. *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, 107(B4) :2070, 2002. (Cité pages 80, 94 et 102.)

- B.A. Buffett, J. Mound, et A. Jackson. Inversion of torsional oscillations for the structure and dynamics of Earth's core. *Geophys. J. Int.*, 177 :878–890, 2009. (Cité pages 76, 77 et 91.)
- EC Bullard, C. Freedman, H. Gellman, et J. Nixon. The westward drift of the Earth's magnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243(859) :67–92, 1950. (Cité pages 33 et 45.)
- H.P. Bunge, CR Hagelberg, et BJ Travis. Mantle circulation models with variational data assimilation : Inferring past mantle flow and structure from plate motion histories and seismic tomography. *Geophysical Journal International*, 152(2) : 280–301, 2003. (Cité page 56.)
- E. Canet, A. Fournier, et D. Jault. Forward and adjoint quasi-geostrophic models of the geomagnetic secular variation. *J. Geophys. Res.*, 114 :B11101, 2009. (Cité page 37.)
- P. Cardin et P. Olson. Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 82 : 235–259, 1994. (Cité page 35.)
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic stability*. Dover Pub., New York, 1961. (Cité page 34.)
- J. Chen. Global mass balance and the length-of-day variation. *J. Geophys. Res.*, 110 :8404–+, 2005. (Cité page 6.)
- U.R. Christensen. A sheet-metal geodynamo. *Nature*, 454(7208) :1058–1059, 2008. (Cité page 32.)
- U.R. Christensen et J. Aubert. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophys. J. Int.*, 166 :97–114, 2006. (Cité pages 31 et 32.)
- U.R. Christensen, V. Holzwarth, et A. Reiners. Energy flux determines magnetic field strength of planets and stars. *Nature*, 457 :167–169, 2009. (Cité pages 32, 35, 77 et 102.)
- U.R. Christensen et J. Wicht. Numerical Dynamo Simulations. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 8 : Core Dynamics, pages 245–282. ed. Olson, P., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité pages 5, 29 et 31.)
- P. Courtier. Dual formulation of four-dimensional variational assimilation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 123 :2449–2462, 1997a. (Cité page 53.)
- P. Courtier. Variational methods. *J. of the Meteor. Soc. Jap.*, 75 :211–218, 1997b. (Cité page 51.)
- P. Courtier et O. Talagrand. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II : Numerical results. *Quarterly Journal*

- of the Royal Meteorological Society*, 113(478) :1329–1347, 1987. (Cité pages 54 et 107.)
- V. Courtillot et J.-L. Le Mouél. Geomagnetic secular variation impulses. *Nature*, 311, 1984. (Cité page 1.)
- N. Daget. Revue des méthodes d'assimilation. Rapport technique, CERFAC, Toulouse, 2007. disponible sur la page internet de Nicolas Daget (cerfac). (Cité page 51.)
- C. De Boor. *A practical guide to splines*. Springer Verlag, 2001. (Cité page 48.)
- B. Deleplace et P. Cardin. Viscomagnetic torque at the core mantle boundary. *Geophys. J. Int.*, 167 :557–566, 2005. (Cité pages 73 et 103.)
- P.H. Diamond, S.I. Itoh, K. Itoh, et T.S. Hahm. Zonal flows in plasma : a review. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 47 :35–161, 2005. (Cité page 42.)
- M. Dumberry et JE Mound. Constraints on core-mantle electromagnetic coupling from torsional oscillation normal modes. *Journal of Geophysical Research*, 113 (B3) :3102–+, 2008. (Cité page 102.)
- G.D. Egbert, A.F. Bennett, et M.G.G. Foreman. TOPEX/POSEIDON tides estimated using a global inverse model. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 99 :24821–24852, 1994. (Cité page 53.)
- W.M. Elsasser. Induction effects in terrestrial magnetism Part I. theory. *Physical Review*, 69(3-4) :106–116, 1946. (Cité page 27.)
- G. Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, 99 :10, 143–10, 162, 1994. (Cité pages 48 et 52.)
- G. Evensen. *Data assimilation : The ensemble Kalman filter*. Springer Verlag, 2007. (Cité pages 51 et 70.)
- C. Eymin et G. Hulot. On core surface flows inferred from satellite magnetic data. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 152 :200–220, 2005. (Cité pages 44 et 48.)
- G. Fanjat. Inversion directe de l'état du noyau à partir de données magnétiques. Master's thesis, Université Joseph-Fourier, 2009. (Cité page 46.)
- A. Fichtner, H.P. Bunge, et H. Igel. The adjoint method in seismology I. theory. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 157(1-2) :86–104, 2006. (Cité page 56.)
- C. Finlay. *Hydromagnetic waves in Earth's core and their influence on geomagnetic secular variation*. PhD thesis, University of Leeds, 2005. (Cité pages 25, 26 et 34.)
- CC Finlay et A. Jackson. Equatorially dominated magnetic field change at the surface of Earth's core. *Science(Washington)*, 300(5628) :2084–2086, 2003. (Cité pages 25 et 34.)

- A. Fournier, H.P. Bunge, R. Hollerbach, et J.P. Vilotte. A Fourier-spectral element algorithm for thermal convection in rotating axisymmetric containers. *Journal of Computational Physics*, 204(2) :462–489, 2005. (Cité page 120.)
- A. Fournier, C. Eymin, et T. Alboussière. A case for variational geomagnetic data assimilation : insights from a one-dimensional, nonlinear, and sparsely observed MHD system. *Nonlin. Proc. in Geophysics*, 14 :163–180, 2007. (Cité pages 8 et 52.)
- A. Fournier, G. Hulot, D. Jault, W. Kuang, A. Tangborn, E. Canet, J. Abvert, F. Lhuillier, et N. Gillet. An introduction to data assimilation in geomagnetism. *Space Sci. Rev.*, submitted, 2009. (Cité page 52.)
- E. Friis-Christensen, H. Luhr, et G. Hulot. Swarm : A constellation to study the Earth's magnetic field. *Earth, Planets, and Space*, 58(4) :351–358, 2006. (Cité pages 15 et 20.)
- R. Giering et T. Kaminski. Recipes for adjoint code construction. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 24(4) :437–474, 1998. (Cité page 57.)
- J.-C. Gilbert. *Élément d'Optimisation Différentiable - Théorie et Algorithmes*. 2008. Disponible sur requête : voir sa page internet. (Cité page 61.)
- J.-C. Gilbert et C. Lemaréchal. The module M1QN3 - Version 3.2.c. Rapport technique, 2008. (Cité page 61.)
- J.C. Gilbert et C. Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45 :407–435, 1989. (Cité pages 61 et 85.)
- N. Gillet, D. Brito, D. Jault, et H-C. Nataf. Experimental and numerical studies of convection in a rapidly rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.*, 580 :83–121, 2007. (Cité page 35.)
- N. Gillet et CA Jones. The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 554 :343–369, 2006. (Cité page 35.)
- N. Gillet, V. Lesur, et N. Olsen. Geomagnetic core field secular variation models. *Space Sci. Rev.*, submitted, 2009a. (Cité pages 15, 22 et 25.)
- N. Gillet, M.A. Pais, et D. Jault. Ensemble inversion of time-dependent core flow models. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 10,Q0 :6004–+, 2009b. (Cité pages 8, 44, 46, 47, 48, 74, 77, 87, 93 et 120.)
- G.A. Glatzmaier et P.H. Roberts. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, 377 :203–209, 1995. (Cité page 31.)
- H.P. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, 1968. (Cité page 103.)

- R.S. Gross. Earth Rotation Variations - Long Period. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 03 : Geodesy, pages 239–294. ed. Herring, T., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité page 6.)
- D. Gubbins et E. Herrero-Bervera. *Encyclopedia of geomagnetism and paleomagnetism*. Kluwer Academic Pub, 2007. (Cité page 17.)
- L. Hasco t et V. Pascual. Tapenade 2.1 user’s guide. Technical Report 0300, INRIA, 2004. URL <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0300.html>. (Cité page 58.)
- H. Hersbach. Application of the adjoint of the WAM model to inverse wave modeling. *J. Geophys. Res.*, 103(C5) :10469–10488, 1998. (Cité page 60.)
- R. Hide. Free hydromagnetic oscillations of the Earth’s core and the theory of the geomagnetic secular variation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 259 :615–647, 1966. (Cité pages 34, 35 et 75.)
- E.V. Holm. Assimilation algorithms, march 1999. *Meteorological Training Course Lecture Series. ECMWF*, 2003. Disponible à l’adresse http://www.ecmwf.int/newsevents/training/rcourse_notes/DATA_ASSIMILATION/index.html. (Cité page 51.)
- R. Holme. Electromagnetic core-mantle coupling-I. Explaining decadal changes in the length of day. *Geophys. J. Int.*, 132(1) :167–180, 1998. (Cité page 102.)
- R. Holme. Large-Scale Flow in the Core. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 8 : Core Dynamics, pages 107–130. ed. Olson, P., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité pages 6, 7 et 44.)
- R. Holme et N. Olsen. The spectrum of the magnetic secular variation. Dans *Earth Observation with CHAMP—Results from Three Years in Orbit*, pages 329–334. ed. C. Reigber, H. L hr, P. Schwintzer, and J. Wickert, Springer Verlag, Berlin, 2004. (Cité page 26.)
- L. Hongre, G. Hulot, et A. Khokhlov. An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 106 :311–335, 1998. (Cité page 27.)
- G. Hulot et J.-L. Le Mou l. A statistical approach to the Earth’s main magnetic field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 82(3) :167–184, 1994. (Cité page 27.)
- G. Hulot, J.-L. Le Mou l, et J. Wahr. Taking into account truncation problems and geomagnetic model accuracy in assessing computed flows at the core-mantle boundary. *Geophysical Journal International*, 108(1) :224–246, 1992. (Cité page 47.)
- G. Hulot, N. Olsen, E. Th bault, et K. Hemant. Crustal concealing of small-scale core-field secular variation. *Geophysical Journal International*, 177(2) :361–366, 2009. (Cité page 17.)

- G. Hulot, T. Sabaka, et N. Olsen. The Present Field. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 5 : Geomagnetism, pages 33 – 75. ed. Kono, M., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité pages 12, 14, 16 et 22.)
- K. Ide, P. Courtier, M. Ghil, et C. Lorenc. Unified notations for data assimilation : Operational, sequential and variational. *J. of the Meteor. Soc. Jap.*, 75 :181–189, 1997. (Cité pages 51 et 52.)
- A. Jackson. *The Earth's Magnetic Field at the Core-Mantle Boundary*. PhD thesis, University of Cambridge, 1989. (Cité page 22.)
- A. Jackson. Accounting for crustal magnetization in models of the core magnetic field. *Geophysical Journal International*, 103 :657–673, 1990. (Cité page 17.)
- A. Jackson. Time-dependency of tangentially geostrophic core surface motions. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 103 :293–311, 1997. (Cité pages 8 et 48.)
- A. Jackson, J. Bloxham, et D. Gubbins. Time-dependent flow at the core surface and conservation of angular momentum in the coupled core-mantle system. Dans J.-L. Le Mou l et D. E. Smylie,  diteurs, *Dynamics of Earth's Deep Interior and Earth Rotation*, pages 97–107. 1993. (Cité page 74.)
- A. Jackson et C. Finlay. Geomagnetic Secular Variation and its Applications to the Core. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 5 : Geomagnetism, pages 147–193. ed. Kono, M., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité pages 2, 22, 43 et 48.)
- A. Jackson, A.R.T. Jonkers, et M.R. Walker. Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Philosophical Transactions : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 358(1768) :957–990, 2000. (Cité pages 2, 14, 22 et 26.)
- D. Jault. *Variation séculaire du champ géomagnétique et fluctuations de la longueur du jour*. PhD thesis, Université Paris VI, 1990. disponible sur sa page internet. (Cité pages 74 et 103.)
- D. Jault. Electromagnetic and topographic coupling, and LOD variations. Dans *Earth's core and lower mantle*, volume The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. ed. Jones, C. and Zhang, K., Taylor & Francis, London, 2003. (Cité pages 33 et 73.)
- D. Jault. Axial invariance of rapidly varying diffusionless motions in the Earth's core interior. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 166 :67–76, 2008. (Cité pages 35, 36, 38 et 74.)
- D. Jault, C. Gire, et J.-L. Le Mou l. Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle. *Nature*, 333 :353–356, 1988. (Cité page 74.)
- A. Kageyama, T. Miyagoshi, et T. Sato. Formation of current coils in geodynamo simulations. *Nature*, 454 :1106, 2008. (Cité pages 32 et 37.)

- E. Kalnay. *Atmospheric modeling, data assimilation, and predictability*. Cambridge Univ Pr, 2003. (Cité pages 8, 48, 49 et 51.)
- A. Kelbert, A. Schultz, et G. Egbert. Global electromagnetic induction constraints on transition-zone water content variations. *Nature*, 460(7258) :1003–1006, 2009. (Cité page 3.)
- J. Koller, Y. Chen, G.D. Reeves, R.H.W. Friedel, T.E. Cayton, et J.A. Vrugt. Identifying the radiation belt source region by data assimilation. *Journal of geophysical research*, 112, 2007. (Cité page 20.)
- M. Kono. Geomagnetism in Perspective. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 5 : Geomagnetism, pages 1 – 32. ed. Kono, M., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité page 11.)
- K. Korhonen, F. Donadini, P. Riisager, et LJ Pesonen. GEOMAGIA50 : An archeointensity database with PHP and MySQL. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9 :04029–+, 2008. (Cité page 14.)
- W. Kuang et J. Bloxham. An Earth-like numerical dynamo model. *Nature*, 389 (6649) :371–374, 1997. (Cité page 52.)
- W. Kuang, A. Tangborn, W. Jiang, D. Liu, Z. Sun, J. Bloxham, et Z. Wei. MoSST-DAS : The First Generation Geomagnetic Data Assimilation Framework. *Communications in Computational Physics*, 3 :85–108, 2008. (Cité page 52.)
- W. Kuang, A. Tangborn, Z. Wei, et T. Sabaka. Constraining a numerical dynamo model with 100-years of geomagnetic observations. *Geophys. J. Int.*, accepted, 2009. (Cité page 52.)
- A. Kuvshinov, T. Sabaka, et N. Olsen. 3-D electromagnetic induction studies using the Swarm constellation : Mapping conductivity anomalies in the Earth’s mantle. *Earth, Planets, and Space*, 58(4) :417–427, 2006. (Cité page 56.)
- A.V. Kuvshinov. 3-D global induction in the oceans and solid earth : recent progress in modeling magnetic and electric fields from sources of magnetospheric, ionospheric and oceanic origin. *Surveys in Geophysics*, 29(2) :139–186, 2008. (Cité page 4.)
- R.A. Langel. The main field. Dans *Geomagnetism*, volume 1, pages 249–512. ed. Jacobs, JA, Academic Press, London, 1987. (Cité pages 19 et 91.)
- C. Lauvernet. *Assimilation variationnelle d’observations de télédétection dans les modèles de fonctionnement de la végétation : utilisation du modèle adjoint et prise en compte de contraintes spatiales*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, 2005. (Cité page 61.)
- F-X. Le Dimet et O. Talagrand. Variational methods for analysis and assimilation of meteorological observations. *Tellus*, 38 :97–110, 1986. (Cité page 55.)
- G. Légaut. *Ondes de torsion dans le noyau terrestre*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, 2005. (Cité pages 17, 80 et 103.)

- B. Lehnert. Magnetohydrodynamic waves under the action of the Coriolis force. *Astrophys. J.*, 119 :647–654, 1954. (Cité page 35.)
- Y. Leredde, JM Lellouche, JL Devenon, et I. Dekeyser. On initial, boundary conditions and viscosity coefficient control for Burgers' equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28(1) :113–128, 1998. (Cité pages 57 et 59.)
- V. Lesur, I. Wardinski, S. Asari, B. Minchev, et M. Manda. Modelling the Earth's core magnetic field under flow constraints. *submitted to Earth planet and Space*, 2009. (Cité page 46.)
- V. Lesur, I. Wardinski, M. Rother, et M. Manda. GRIMM : the GFZ Reference Internal Magnetic Model based on vector satellite and observatory data. *Geophysical Journal International*, 173(2) :382–394, 2008. (Cité pages 23, 25 et 26.)
- D. Liu, A. Tangborn, et W. Kuang. Observing system simulation experiments in geomagnetic data assimilation. *J. Geophys. Res.*, 112 :8103–+, 2007. (Cité page 52.)
- J.J. Love. Magnetic monitoring of Earth and space. *Physics Today*, 61(2) :31, 2008. (Cité page 13.)
- Z. Martinec et J. Velínský. The adjoint sensitivity method of global electromagnetic induction for CHAMP magnetic data. *Geophys. J. Int.*, early view, 2009. (Cité pages 56 et 57.)
- H. Matsui et H. Okuda. Development of a simulation code for MHD dynamo processes using the GeoFEM platform. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 18(4) :323–332, 2004. (Cité page 76.)
- S. Maus, H. Lühr, M. Rother, K. Hemant, G. Balasis, P. Ritter, et C. Stolle. Fifth-generation lithospheric magnetic field model from CHAMP satellite measurements. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 8 :5013–+, 2007. (Cité page 17.)
- R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, M. Moulin, P. Odier, J.F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, et al. Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium. *Physical review letters*, 98(4) :44502, 2007. (Cité page 5.)
- JE Mound et BA Buffett. Interannual oscillations in length of day : Implications for the structure of the mantle and core. *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, 108(B7) :2334, 2003. (Cité page 77.)
- J. Nocedal. Updating quasi-Newton matrices with limited storage. *Mathematics of computation*, 35(151) :773–782, 1980. (Cité page 61.)
- J. Nocedal et S.J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 2000. (Cité page 60.)
- N. Olsen, K.-H. Glassmeier, et X. Jia. Separation of the Magnetic Field into External and Internal Parts. *Space Sci. Rev.*, in press, 2009. (Cité pages 18 et 20.)

- N. Olsen, R. Haagmans, T. Sabaka, A. Kuvshinov, S. Maus, E. Purucker, M. Rother, V. Lesur, et Manda M. The Swarm End-to-End mission simulator study : A demonstration of separating the various contributions to Earth's magnetic field using synthetic data. *Earth Planets Space*, 58 :359–370, 2006. (Cité page 15.)
- N. Olsen, H. Lühr, T.J. Sabaka, M. Manda, M. Rother, L. Tøffner-Clausen, et S. Choi. CHAOS-a model of the Earth's magnetic field derived from CHAMP, Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data. *Geophys. J. Int.*, 166 :67–75, 2006. (Cité pages 15, 22, 67 et 68.)
- N. Olsen et M. Manda. Rapidly changing flows in the Earth's core. *Nature Geoscience*, 1(6) :390–394, 2008. (Cité pages 4, 14, 22, 23, 24 et 26.)
- A. Pais et G. Hulot. Length of day decade variations, torsional oscillations and inner core superrotation : evidence from recovered core surface zonal flows. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 118(3-4) :291, 2000. (Cité pages 8 et 74.)
- M.A. Pais et D. Jault. Quasi-geostrophic flows responsible for the secular variation of the Earth's magnetic field. *Geophys. J. Int.*, 173 :421–443, 2008. (Cité pages 40, 44, 46 et 48.)
- M.A. Pais, O. Oliveira, et F. Nogueira. Nonuniqueness of inverted core-mantle boundary flows and deviations from tangential geostrophy. *J. Geophys. Res.*, 109 :8105–+, 2004. (Cité pages 44 et 67.)
- E. Plaut. Nonlinear dynamics of traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : Effects of the boundary conditions and of the topology. *Phys. Rev. E*, 67 :046303, 2003. (Cité page 39.)
- Y.B. Ponomarenko. On the theory of hydromagnetic dynamos. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz*, 6 :47–51, 1973. (Cité page 5.)
- S. Pumphrey. 'O tempora, O magnes!' A Sociological Analysis of the Discovery of Secular Magnetic Variation in 1634. *The British Journal for the History of Science*, pages 181–214, 1989. (Cité page 1.)
- S. Rau, U. Christensen, A. Jackson, et J. Wicht. Core flow inversion tested with numerical dynamo models. *Geophys. J. Int.*, 141 :485–497, 2000. (Cité pages 48 et 52.)
- P. H. Roberts. Kinematic Dynamo Models. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 272 :663–698, 1972. (Cité page 5.)
- P.H. Roberts. *An introduction to magnetohydrodynamics*. Longmans, London, 1967. (Cité page 38.)
- PH Roberts et S. Scott. On analysis of the secular variation. 1. A hydromagnetic constraint : theory. *J. Geomagn. Geoelectr*, 17 :137–151, 1965. (Cité page 43.)
- A. Sakuraba et P.H. Roberts. Generation of a strong magnetic field using uniform heat flux at the surface of the core. *Nature Geosciences*, advance online publication, 2009. (Cité pages 29, 32, 33 et 37.)

- Y. Sasaki. Some basic formalisms in numerical variational analysis. *Monthly Weather Review*, 98(12) :875–883, 1970. (Cité page 54.)
- N. Schaeffer et P. Cardin. Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number. *Earth and Planetary Science Letters*, 245(3-4) :595–604, 2006. (Cité page 115.)
- L. Scherliess, RW Schunk, JJ Sojka, DC Thompson, et L. Zhu. Utah State University Global Assimilation of Ionospheric Measurements Gauss-Markov Kalman filter model of the ionosphere : Model description and validation. *Journal of Geophysical Research-Space Physics*, 111(A11) :A11315, 2006. (Cité page 20.)
- D. Schmitt, T. Alboussiere, D. Brito, P. Cardin, N. Gagniere, D. Jault, et H.C. Nataf. Rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : experimental study of magneto-inertial waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 604 :175–197, 2008. (Cité page 5.)
- EA Spiegel et G. Veronis. On the Boussinesq Approximation for a Compressible Fluid. *The Astrophysical Journal*, 131(2) :442–447, 1960. (Cité page 28.)
- F.D. Stacey et P.M. Davis. *Physics of the Earth*. Cambridge University Press, 4th edition édition, 2008. (Cité page 5.)
- Z. Sun, A. Tangborn, et W. Kuang. Data assimilation in a sparsely observed one-dimensional modeled MHD system. *Nonlin. Proc. in Geophysics*, 14 :181–192, 2007. (Cité page 52.)
- F. Takahashi, M. Matsushima, et Y. Honkura. Scale variability in convection-driven MHD dynamos at low Ekman number. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 167 :168–178, 2008. (Cité page 32.)
- O. Talagrand. Assimilation of observations, an introduction. *J. of the Meteor. Soc. Jap.*, 75 :191–209, 1997. (Cité pages 8 et 51.)
- O. Talagrand et P. Courtier. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113 :1311–1328, 1987. (Cité pages 55 et 57.)
- J.B. Taylor. The magneto-hydrodynamics of a rotating fluid and the Earth's dynamo problem. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 274 :274–283, 1963. (Cité pages 31 et 74.)
- S.M. Tobias, P.H. Diamond, et D.W. Hughes. β -plane magnetohydrodynamic turbulence in the solar tachocline. *Astrophys. J.*, 667 :L113–L116, 2007. (Cité page 42.)
- J. Tromp, C. Tape, et Q. Liu. Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Geophysical Journal International*, 160(1) :195–216, 2005. (Cité page 56.)
- NA Tsyganenko. A model of the near magnetosphere with a dawn-dusk asymmetry 1. Mathematical structure. *J. Geophys. Res.*, 107(A8) :1176, 2002. (Cité page 20.)

- NA Tsyganenko et MI Sitnov. Magnetospheric configurations from a high-resolution data-based magnetic field model. *J. Geophys. Res.*, 112 :6225, 2007. (Cité page 18.)
- G.M. Turner, J.L. Rasson, et C.V. Reeves. Observation and Measurement Techniques. Dans *Treatise on Geophysics*, volume 5 : Geomagnetism, pages 93 – 146. ed. Kono, M., Elsevier, Oxford, 2007. (Cité pages 11, 13 et 18.)
- G. K. Vallis. Atmospheric and oceanic fluid dynamics : Fundamentals and large-scale circulation. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006. (Cité page 39.)
- C.V. Voorhies et G.E. Backus. Steady flows at the top of the core from geomagnetic field models : The steady motions theorem. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 32 : 163–173, 1985. (Cité pages 44 et 62.)
- R. Waddington, D. Gubbins, et N. Barber. Geomagnetic field analysis-V. Determining steady core-surface flows directly from geomagnetic observations. *Geophys. J. Int.*, 122 :326–350, 1995. (Cité pages 44, 45 et 62.)
- P. Wessel et W.H.F. Smith. Free software helps map and display data. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 72 :441–441, 1991. (Cité page 97.)
- S. Zatman et J. Bloxham. Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's core. *Nature*, 388 :760–763, 1997. (Cité pages 75 et 76.)
- K. Zhang et D. Gubbins. Scale disparities and magnetohydrodynamics in the Earth's core. *Philosophical Transactions : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 358(1768) :899–920, 2000. (Cité page 31.)

Modèle dynamique et assimilation de données de la variation séculaire du champ magnétique terrestre

Résumé Les changements du champ magnétique terrestre sur une grande gamme d'échelles spatiales et temporelles reflètent les processus variés de la géodynamo. Je propose un modèle simplifié de la dynamique rapide du noyau, adapté à l'étude des variations du champ magnétique de l'année au siècle ; la variation séculaire. L'hypothèse quasi-géostrophique du modèle est basée sur la prépondérance des forces de rotation par rapport aux forces magnétiques à ces échelles de temps. La partie axisymétrique correspond au formalisme d'ondes de torsion d'Alfvén. La dynamique se place dans le plan équatorial. À la frontière noyau-manteau, l'écoulement interagit avec le champ magnétique radial via la composante radiale de l'équation d'induction. Cette partie du modèle connecte la dynamique et les observations. L'assimilation variationnelle de données permet d'interpréter la variation séculaire en terme de dynamique. Une fonction objectif est minimisée en calculant sa sensibilité par rapport aux variables de contrôle via l'intégration du modèle adjoint. J'illustre cette inversion par des expériences jumelles pour un écoulement stationnaire dans le noyau et pour des ondes de torsion. On accède ainsi à des variables d'état qui ne sont pas directement observées. En utilisant comme observations des écoulements reconstruits à la surface du noyau, cette méthode permet de déduire que la tension magnétique dans le noyau, force de rappel des ondes de torsion, correspond à un champ magnétique fort, au minimum 3-4 mT. De telles ondes de torsion rapides sont cohérentes avec un signal à 6 ans dans les données de variations de la longueur du jour.

Dynamical model and variational assimilation of the geomagnetic secular variation

Abstract The changes in the Earth's magnetic field on a wide range of time and space scales reflect the various time and space scales of core processes. I propose a simplified model of the rapid dynamics of the Earth's core, tailored to the study of the rapid variations of the geomagnetic field ranging from years to centuries, referred to as the geomagnetic secular variation. The quasi-geostrophic approximation used in the model relies on the prevalence of rotation forces over magnetic forces on short timescales. The axisymmetric component of the model corresponds to the formalism of Alfvén torsional waves. Within this framework, the magnetohydrodynamics takes place in the equatorial plane. At the core-mantle boundary, the equatorial flow interacts with the radial magnetic field through the radial component of the magnetic induction equation. This component of the model connects the dynamics with the observations. Variational data assimilation allows for the interpretation of the secular variation in terms of the underlying dynamics. It seeks to minimize an objective function by computing its sensitivity to its control variables through the integration of the adjoint model. I illustrate this inversion scheme with twin experiments, performed for a steady flow and in a torsional wave scenario. It enables the retrieval of core state variables which are not directly measured. By assimilating core flow models at the core surface, the inferred magnetic tension (the restoring force of torsional waves) yields a large magnetic field inside the core, at least on the order of 3-4 mT. Such fast torsional waves are consistent with a 6-year signal in the length-of-day variation timeseries.