HAL
open science

Structures élastomères sous chargement cyclique : comportement, fatigue, durée de vie

Ida Raoult

To cite this version:

Ida Raoult. Structures élastomères sous chargement cyclique : comportement, fatigue, durée de vie. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT : . tel-00521633

HAL Id: tel-00521633

https://theses.hal.science/tel-00521633v1

Submitted on 28 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES SOLIDES
UMR 7649 - CNRS

École Polytechnique
École Nationale Supérieure des Mines de Paris
École Nationale des Ponts et Chaussées

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique du solide

STRUCTURES ÉLASTOMÈRES SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

Comportement - Fatigue - Durée de vie

Ida RAOULT

Thèse soutenue le 24 janvier 2005 devant le jury composé de :

M. François SIDOROFF	Président
M. Jean-Marc ROELANDT	Rapporteur
M. Erwan VERRON	Rapporteur
Me. Myriam BOURGEOIS	Examinatrice
M. Claude STOLZ	Directeur de thèse

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique. Je remercie Bernard Halphen, son directeur, de m'y avoir accueillie. Je tiens à remercier Claude Stolz, mon directeur de thèse, d'être venue me chercher jusqu'au Canada pour me proposer ce sujet. Je le remercie également pour ses conseils scientifiques judicieux.

Ce travail a été financé par la société PSA Peugeot Citroën. Une importante partie de ma thèse s'est d'ailleurs déroulée au sein de l'équipe MAST, dirigée par Jean-Jacques Thomas. Je le remercie de m'avoir donné la possibilité d'une part, de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions, sous la forme d'un contrat CIFRE et d'autre part, de poursuivre ces travaux (entre autres) en m'embauchant dans son équipe à l'issue de ma thèse.

Je remercie Myriam Bourgeois, qui a assidûment suivi mon travail du début jusqu'à la fin. Je la remercie pour son soutien scientifique, mais également pour son agréable compagnie. Elle a su me consacrer beaucoup de temps malgré un emploi du temps chargé, et ceci particulièrement pendant la période de rédaction de ce mémoire.

J'exprime toute ma gratitude à François Sidoroff, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury, ainsi qu'à Jean-Marc Roelandt et Erwan Verron qui ont accepté la pénible tâche de rapporteurs.

Cette étude n'aurait pas été possible sans données expérimentales. Je remercie donc vivement Elisabeth Ostoja-Kuckzynski et Pierre Charrier pour le temps qu'ils ont passé à réaliser tous ces essais, pour le soin avec lequels ils les ont réalisés, mais aussi pour leur réactivité, leur bonne humeur, et pour les nombreux échanges scientifiques qui m'ont permis d'avancer plus vite dans ce travail. Leur expérience de caoutchoutiers m'a parfois été précieuse. Je garderai un excellent souvenir de notre collaboration, et j'espère qu'elle se poursuivra lors de futures études. J'invite le lecteur de ce mémoire à se procurer également la thèse d'Elisabeth.

Je voudrais également remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont apporté leur contribution à ce travail, en particulier Alexandre Selouma, qui m'a initiée au calcul avec Abaqus, et les stagiaires Serge Pires et Eric Albin. Ce travail a également bénéficié de discussions fructueuses avec les différents membres du GTFE (Groupement de Travail sur la Fatigue des Elastomères) et mes collègues du LMS et de PSA.

Ce travail s'est déroulé dans la meilleure ambiance qui soit, et ceci grâce aux thésards du LMS. Je les remercie donc pour leur présence, leur bonne humeur, nos discussions sur tout et sur rien et même (voire surtout) pour leur humour de mauvais goût.

Je remercie aussi ma famille et mes amis, qui ont passé beaucoup de temps au fourneau pour m'offrir un copieux pot de thèse (vive la tarte au dégeuli de pompier !).

Enfin, je souhaite remercier Renaud, pour son soutien quotidien et la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

Résumé/Abstract

Français

L'industrie automobile utilise de nombreuses pièces en caoutchouc aux fonctions anti-vibratoires, dont il faut garantir la tenue en service. L'objectif de ce travail de thèse est de proposer une méthode pour prévoir la durée de vie en fatigue d'une structure en caoutchouc naturel chargé au noir de carbone. La démarche proposée consiste à découpler l'évolution du comportement mécanique et l'endommagement sous chargement cyclique. On suppose qu'il existe un cycle stabilisé et que la durée de vie, définie comme l'amorçage d'une fissure détectable, ne dépend que des grandeurs mécaniques évaluées sur celui-ci.

Les élastomères soumis à un chargement cyclique présentent un adoucissement associé à l'effet Mullins, qui se produit surtout pendant les premiers cycles, après lesquels la réponse du matériau reste identique. On propose un modèle capable de décrire cette réponse stabilisée, ne dépendant que des variables mécaniques en régime établi. Ses paramètres sont les élongations maximales dans un nombre fini de directions matérielles, de façon à décrire l'anisotropie induite par l'effet Mullins.

Ce modèle est ensuite utilisé pour analyser un grand nombre d'essais d'endurance uniaxiaux et multiaxiaux, réalisés sur éprouvettes axisymétriques. On montre qu'il permet de prendre en compte efficacement l'influence du type de contrôle ou d'une précharge. L'analyse des essais multiaxiaux ne mettant pas en jeu de renforcement, c'est-à-dire passant par l'état de déformation nul, montre que la contrainte principale maximale est suffisante pour représenter tous les cas de chargement, à l'exception de ceux qui font intervenir des phénomènes de cumul multi-plans. On propose alors une loi de cumul d'endommagement pour représenter ce type de chargement.

English

The automotive industry must ensure the service life of numerous rubber components used for anti vibratory purposes. This work aims at proposing a method to predict the fatigue life of a carbon-black reinforced natural rubber structure. The approach proposed here consists in uncoupling the evolution of the mechanics behaviour and damage under cyclic loading. We make the assumption that the behaviour tends to stabilize and that the lifetime, defined as the initiation of a crack, depends only on the mechanical variables in the stabilized state.

Upon cyclic loading, elastomers experience a stress-softening phenomenon known as the Mullins' effect. This phenomenon occurs mostly during the first few cycles, after which the response of the material remains unchanged by additional reloading. We propose a model to represent this stabilized state, supposed to depend only on some cyclic variables. The parameters are the maximum stretches reached in a finite number of material directions, in order to describe the anisotropy induced by the Mullins' effect.

This model is used to analyse a large number of uniaxial and multixial fatigue tests realised with cylindrical dumbbell specimens. We show its ability to take into account the type of control (force or displacement) and the influence of an initial overload. The analysis of the multiaxial data indicates that the maximum principal stress is well correlated with lifetime for all types of solicitations, excepting those which involve multi-plane cumulative damage. A cumulative damage law is proposed to account for these types of loading.

Sommaire

Résumé/abstract **5**

Notations **19**

Introduction **21**

I Approches de la réponse cyclique d'un élastomère **27**

1 Description expérimentale du comportement des élastomères **29**
1.1 Physico-chimie des élastomères 29
1.2 Protocole expérimental 30
1.2.1 Matériau étudié 30
1.2.2 Essais de caractérisation quasi-statiques 30
1.3 Élasticité non-linéaire 32
1.4 Incompressibilité 34
1.5 Phénomènes dissipatifs 34
1.5.1 Viscosité 34
1.5.2 Effet Mullins 35
1.6 Vieillissement 38
1.7 Conclusion 39

2 Étude bibliographique **41**
2.1 Rappel sur les grandes transformations 41
2.1.1 Cinématique 42
2.1.2 Description des efforts 42
2.2 Modèles hyperélastiques 43
2.2.1 Modèles physiques 43
2.2.2 Modèles phénoménologiques 48
2.3 Incompressibilité 50
2.4 Effet Mullins 51
2.4.1 Modèles physiques 52
2.4.2 Modèles phénoménologiques 54
2.4.3 Anisotropie 55

2.4.4 Conclusion et discussion 56

3 Proposition d'un modèle de comportement cyclique 59
3.1 Description du modèle 59
3.2 Comparaison avec d'autres modèles 61
3.2.1 Modèle de Martin-Borret 63
3.2.2 Modèle de Gent 63
3.3 Identification des coefficients du modèle 64
3.4 Discussion sur le choix de la mesure de l'endommagement 66
3.5 Anisotropie 70
3.6 Conclusion et perspectives 71

4 Comportement cyclique d'une structure 75
4.1 Position du problème 75
4.2 Détermination des élongations maximales 77
4.2.1 Courbe de charge 77
4.2.2 Phénomènes de redistribution 78
4.2.3 Algorithme de résolution 78
4.3 Robustesse de la méthode 79
4.4 Validation expérimentale : comportement global des éprouvettes diabolo . . 82
4.5 Conclusion et perspectives 83

II Estimation de la durée de vie 85

5 Présentation de l'étude et analyses préliminaires 87
5.1 Protocole expérimental 87
5.1.1 Éprouvettes 87
5.1.2 Banc d'essai 88
5.1.3 Définition de la durée de vie d'une structure 89
5.1.4 Localisation de l'amorçage des fissures 90
5.1.5 Mesure de l'orientation des fissures 91
5.2 Essais 93
5.2.1 Types d'essais 93
5.2.2 Calculs numériques 95
5.2.3 Caractéristiques d'un trajet de chargement 99
5.2.4 Analyse des trajets de chargement obtenus 104
5.3 Conclusion 108

6 Sur l'amorçage et la propagation de défauts 109
6.1 Propagation 109
6.1.1 Taux de restitution d'énergie et force de déchirabilité 110
6.1.2 Intégrales de contour invariantes 111
6.1.3 Régimes de propagation de fissure sous sollicitation cyclique 112

6.2 Amorçage 112
6.2.1 Mécanismes d'amorçage 113
6.2.2 L'amorçage vu comme la propagation d'un défaut 114
6.2.3 L'amorçage vu selon la mécanique de l'endommagement 116
6.2.4 Influence de l'état de distorsion 118
6.2.5 Influence de la rotation du repère principal 119
6.2.6 Influence de l'amplitude et de la moyenne 120
6.2.7 Influence d'une précharge 127
6.2.8 Influence de l'environnement 127
6.3 Cumul d'endommagement pour un chargement d'amplitude variable 128
6.4 Conclusion et discussion 131

7 Prévision de la durée de vie 133
7.1 Essais de traction uniaxiale 133
7.1.1 Influence de l'amplitude 135
7.1.2 Influence d'un passage en compression 136
7.1.3 Essais en traction/traction 136
7.1.4 Conclusion 137
7.2 Comportement accommodé 137
7.2.1 Influence du type de contrôle 140
7.2.2 Influence d'une précharge 140
7.2.3 Conclusion 142
7.3 Multiaxialité 142
7.3.1 Orientation des fissures 142
7.3.2 Influence de l'état de distorsion 146
7.3.3 Influence de la rotation du repère principal 150
7.3.4 Loi de cumul d'endommagement 152
7.3.5 Discussion sur le choix de la grandeur à cumuler 154
7.3.6 Conclusion 158
7.4 Renforcement 158
7.5 Application à une suspente d'échappement 161
7.6 Conclusion 163

Conclusions générales et perspectives 165

Bibliographie 169

Annexes 176

A Caractéristiques du matériau 179
A.1 Formulation 179
A.2 Caractéristiques mécaniques 180

B Représentation des essais de caractérisation **181**
B.1 Généralités 181
B.2 Lois en invariants 182
B.2.1 Traction et compression uniaxiales 182
B.2.2 Cisaillement pur 182
B.2.3 Glissement simple 183
B.3 Lois discrétisées sur plusieurs directions fixes 184
B.3.1 Traction et compression uniaxiales 184
B.3.2 Cisaillement pur 184
B.3.3 Glissement simple 184

C Description d'un tenseur symétrique par sa projection sur 6 directions **185**

D Anisotropie **187**

E Implantation de la loi de comportement dans Abaqus **189**
E.1 Implantation d'une loi de comportement en grandes déformations dans Abaqus 189
E.2 Cas du comportement compressible 190
E.3 Gestion de l'incompressibilité 190
E.3.1 Cas des contraintes planes 190
E.3.2 Cas général tridimensionnel 191
E.3.3 Éléments à formulation mixte 193

F Plans des éprouvettes diabolo **195**

G Maillages des éprouvettes diabolo **197**

Table des figures

1 Pièces antivibratoires utilisées dans l'industrie automobile. 22
2 Signal (effort ou déplacement) vu par la pièce, enregistré sur piste en fonction du temps. 22
3 Signal enregistré sur un axe en fonction du signal enregistré sur un autre axe. On voit qu'il existe une direction de sollicitation privilégiée, mais les deux signaux sont globalement décorrélés. 22
4 Fissures dans une articulation de triangle soumise à un chargement complexe. 23
5 Exemple de banc triaxe utilisé pour la validation des articulations de triangle. 23
6 On distingue trois types de comportement pour un matériau sollicité cycliquement : (a) la réponse dérive jusqu'à la rupture ; (b) la réponse se stabilise après une période transitoire de quelques cycles, mais reste dissipative ; (c) après une période transitoire, la réponse adaptée est élastique. 24

1.1 Les chaînes macromoléculaires sont liées entre elles par des liaisons covalentes et des ponts soufre. 30
1.2 Les propriétés mécaniques d'un élastomère diminuent fortement au passage de la transition vitreuse T_g. 30
1.3 a) Éprouvette haltère de type H2, utilisée pour les essais de traction. b) Plot de compression. c) Éprouvette de cisaillement pur. d) Éprouvette double de cisaillement simple. Les dimensions sont données en millimètres. 31
1.4 Éprouvette AE2. 32
1.5 Éprouvette AE42. 32
1.6 Courbe de traction à rupture. 33
1.7 Essai de traction de type charge/décharge. 33
1.8 Cristallisation sous contrainte. 33
1.9 Courbe de traction cyclique. Cinq cycles de chargements sont imposés entre effort nul et une déformation maximale de 300%. 35
1.10 Courbe de traction cyclique. Chaque cycle de chargement est effectué à un niveau de déformation supérieur à celui du cycle précédent. 35
1.11 Courbe de traction à rupture pour deux vitesses de déplacement de la traverse, 5 et 500 mm/min, correspondant respectivement à des vitesses de déformation de 0,004 et 0,4 s^{-1}. 36

1.12 Des éprouvettes haltère sont prélevées dans une éprouvette de cisaillement pur préalablement soumise à cinq cycles de traction. On suppose que l'éprouvette est homogène : seul l'angle de prélèvement (et non la position du prélèvement dans la longueur de la bande) peut avoir une influence sur le comportement. 38
1.13 Courbe de traction pour des éprouvettes prélevées dans une éprouvette de cisaillement pur, accommodée selon différents angles par rapport à la direction d'accommodation, de gauche à droite : 0°, 30°, 45°, 60° et 90°. 39
1.14 Courbe de traction pour des éprouvettes prélevées dans une éprouvette de cisaillement pur vierge, selon les mêmes directions que pour la plaque accommodée. 39

2.1 Transformation d'un système matériel. 41
2.2 Une chaîne libre est caractérisée par les coordonnées de l'une de ses extrémités dans un repère prenant comme origine l'autre de ses extrémités. . . . 44
2.3 Il n'existe que 5 polyèdres réguliers (tetraèdre, hexaèdre ou cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre), correspondant à 4 ensembles de directions régulièrement réparties dans l'espaces. 47
2.4 L'effet Mullins est souvent représenté de manière idéalisée : lors de la première charge jusqu'à un chargement donné, la réponse suit la courbe en gras (1) ; les décharges et recharges suivantes s'effectuent selon la courbe (2) de façon réversible tant que le chargement maximal précédemment atteint n'est pas dépassé ; lorsque le chargement devient supérieur à celui-ci, la réponse du matériau revient sur la courbe de première charge (3). 51
2.5 Modèle de Bueche [10] : les chaînes étirées au delà de leur extension maximale rompent ou se désorbent de la surface. 53
2.6 Modèle de Govindjee et Simo [37, 38] : l'endommagement se produit uniquement par la rupture des liaisons gomme/charge. 53
2.7 Modèle de Marckmann [57] : la déformation provoque une altération du réseau moléculaire par la rupture de liaisons inter-chaînes. 53

3.1 Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 3 directions. 62
3.2 Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 4 directions. 62
3.3 Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 6 directions. 62
3.4 Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 10 directions. 62
3.5 Essai de traction accommodée à 300% et les modèles de Gent et d'Arruda-Boyce avec les meilleurs coefficients possibles au sens des moindres carrés. 64
3.6 Comparaison entre le comportement aux petites déformations du matériau accommodé à 300% et le modèle néo-hookéen ajusté sur l'intervalle de déformations 0 - 50%. 64
3.7 Évolution de l'effort maximal pour un essai contrôlé en déplacement sur éprouvette AE42. 65

3.8 Évolution du déplacement maximal pour un essai contrôlé en effort sur éprouvette AE42. 65
3.9 Traction uni-axiale. 67
3.10 Compression uni-axiale. 67
3.11 Cisaillement pur. 67
3.12 Glisssement simple. 67
3.13 Traction et compression uni-axiales. 68
3.14 Cisaillement pur cyclique contrôlé en déplacement. 69
3.15 Cisaillement pur cyclique contrôlé en effort. 69
3.16 Comparaison entre les recharges obtenues par un contrôle en déplacement et un contrôle en effort à cinq cycles. 69
3.17 Effort et déplacement maximaux à mi-vie enregistrés pendant les essais d'endurance sur éprouvette AE42. 69
3.18 Le comportement est accommodé jusqu'à λ_m^α puis retrouve le comportement monotone. 70
3.19 Essais de traction monotone sur éprouvettes préalablement accommodées, selon plusieurs angles. 71
3.20 Simulation de l'essai ci-contre. 71
3.21 Enveloppe des simulations de la traction sur éprouvette prélevée à 45° pour un calcul avec 3, 4, 6, 10 et 90 directions. 72

4.1 Système mécanique. 75
4.2 On considère une structure soumise à un chargement cyclique global de traction décrit par le couple effort/déplacement (F, U). L'extension limite atteinte dans la zone 1 est plus importante que celle atteinte dans la zone 2 du fait de la réduction de section. La zone 1 présente donc un comportement plus souple que la zone 2. 77
4.3 L'enveloppe du comportement stabilisé correspond à la courbe en pointillés (et non à la courbe en gras qui est la courbe de première charge). 78
4.4 Obtention de l'état cyclique de la structure. 79
4.5 Maillage grossier de l'éprouvette AE2. Les éléments 43 et 49 sont indiqués. 80
4.6 Évolution de l'élongation maximale λ_{loi} dans la direction où elle est maximale, prise au centre de l'élément 43 (le plus sollicité). 81
4.7 Évolution de l'élongation maximale λ_{loi} dans la direction où elle est maximale, prise au centre de l'élément 49 (un élément quelconque). 81
4.8 Illustration de deux trajets de chargement possibles pour aller de la configuration de référence (au repos) vers un cycle de traction/torsion hors-phase : (1) à traction nulle ; (2) à torsion nulle. 82
4.9 Évolution de l'élongation maximale λ_{loi} dans la direction où elle est maximale, prise au centre de l'élément 43 pour le chargement 1 et le chargement 2. 82
4.10 Traction sur éprouvette AE42. Essai (cinquième charge) et simulation. . . . 83
4.11 Traction sur éprouvette AE2. Essai (cinquième charge) et simulation. . . . 83

5.1 Schéma du montage expérimental de traction/torsion. L'enceinte thermique n'est pas représentée. 89
5.2 L'amorçage de la première fissure peut se situer soit en surface, à l'équateur, soit à cœur, sous l'insert métallique. Ceci conduit à deux types de rupture différentes. 91
5.3 Faciès de rupture caractéristique d'un amorçage en surface à l'équateur. . 92
5.4 Faciès de rupture caractéristique d'un amorçage à cœur sous l'insert métallique. 92
5.5 Fissures apparues sur une éprouvette de type AE2 soumise à une torsion simple de 80° à 4Hz. Une légère torsion a été appliquée pour la photographie, afin d'ouvrir suffisamment les fissures pour les rendre visibles. 92
5.6 Méthode de mesure des angles de fissures. Le signe de l'angle est défini par rapport au sens de rotation positif. 93
5.7 Chargements appliqués aux éprouvettes de cette étude, représentés dans un diagramme torsion (R)/traction (T) appliquées. 94
5.8 Elongation principale maximale pour une torsion de 175° en fonction de la taille des éléments. 98
5.9 Contrainte principale maximale pour une torsion de 175° en fonction de la taille des éléments. 98
5.10 Effort sur la surface libre pour une torsion de 175° en fonction de la taille des éléments. 98
5.11 Contrainte principale maximale pour une torsion de 175° après prise en compte de la condition de surface libre. 98
5.12 Maillage de l'éprouvette AE42. 99
5.13 Maillage de l'éprouvette AE2. 99
5.14 Représentation dans un diagramme (I_1, I_2) de plusieurs trajets de chargement possibles du cylindre en traction/torsion : traction/compression uniaxiale, torsion, traction à angle de torsion fixé et torsion à élongation fixée. On remarque que la torsion correspond à un état de distorsion de glissement. 101
5.15 Angle entre la direction la plus étirée et l'axe e_Θ au cours d'un chargement de torsion en fonction de l'intensité de cette torsion. 102
5.16 Déformation principale maximale pour une torsion alternée de $-\pi$ à π dans le plan de la surface de l'éprouvette. 102
5.17 Pour un matériau incompressible, la traction équibiaxiale (à gauche) et la compression uniaxiale (à droite) génèrent le même état de déformation, mais des états de pression différents. 103
5.18 Trajets de chargement passant par l'état de repos (traction et torsion nulles). 105
5.19 Trajets de chargement ne passant pas par l'état de repos. 105
5.20 Trajets de chargement avec une faible rotation du repère principal. 106
5.21 Trajets de chargement avec rotation importante du repère principal. 106
5.22 Trajets de chargement symétriques en torsion. 106
5.23 Contrainte principale maximale en fonction de l'élongation principale maximale, tous essais confondus. 107

6.1 Éprouvettes plates classiquement utilisées pour les études de propagation de fissure : (a) éprouvette lanière ; (b) éprouvette de cisaillement pur ; (c) éprouvette pantalon. Il existe pour ces éprouvettes une expression analytique de la force de déchirabilité. 111
6.2 Contour pour l'intégrale de Rice 112
6.3 Les quatre régimes de propagation d'une fissure en fonction de l'énergie de déchirure T dans une éprouvette lanière en caoutchouc naturel (NR) ou synthétique (SBR). Essais publiés par Lake [49]. 113
6.4 Vitesse de propagation d'une fissure en fonction de l'énergie de déchirure T pour différentes éprouvettes de caoutchouc naturel. Essais publiés par Gent [35]. 113
6.5 Mécanismes d'endommagement à proximité d'une inclusion. 114
6.6 Mécanisme de propagation de fissure par coalescence de cavités. Le sens de traction est vertical. (a) des cavités se forment en avant du front de fissure, faisant apparaître des ligaments ; (b) les ligaments se rompent, les cavités les plus proches coalescent avec la fissure ; (c) les ligaments rompus se relâchent pour former les stries caractéristiques du faciès de rupture. 114
6.7 Durée de vie en fonction de l'élongation principale maximale pour un caoutchouc naturel chargé ou non. Essais publiés par Roberts et Benzies [71]. 119
6.8 Durée de vie en fonction de l'élongation principale maximale pour un SBR chargé ou non. Essais publiés par Roberts et Benzies [71]. 119
6.9 Durée de vie pour un chargement d'amplitude de 25% de déformation en fonction du minimum de la déformation. Essais publiés par Cadwell [11]. . 120
6.10 Taux de cristallinité en fonction de l'élongation [89]. 121
6.11 (a) La fissure est fermée ; (b) la fissure est ouverte ; (c) les chaînes s'alignent en fond de fissure et forment une cristallite qui se développe dans la direction de traction ; (d) la fissure branche pour contourner la cristallite. 122
6.12 Durée de vie pour des chargements d'amplitude constante en fonction du minimum de la déformation. Essais publiés par Cadwell [11]. 123
6.13 Durée de vie pour un chargement d'amplitude de 75% de déformation en fonction du minimum de la déformation. Essais publiés par Beatty [5]. . . 123
6.14 A droite, un schéma indique la localisation expérimentale des fissures par tomographie X telle qu'elle est décrite par Legorju et Bathias [54]. A droite, un calcul aux éléments finis permet de visualiser la répartition des contraintes principales maximale. Les contraintes sont d'autant plus importantes que la teinte est sombre. L'échelle est adaptée à chaque cas de calcul. L'endommagement généré par un essai de torsion simple (R) n'est pas décrit dans l'article ; le calcul est montré ici pour comparaison avec les autres cas de chargement. 125
6.15 Torsion appliquée sur éprouvette torique. 128
6.16 Contrainte de cisaillement mesurée pour les signaux décrits figure 6.16 en fonction du nombre de cycle. Essais publiés par Mars [59]. 128
6.17 Effort mesuré en entrée d'une pièce de liaison au sol en conditions réelles. 129

6.18 Un chargement en deux séquences est réalisé : une séquence S_1 d'extension λ_1, et une autre, S_2, d'extension λ_2. Les contraintes correspondant à λ_2 sont égales à σ_2. Les contraintes correspondants à λ_1 correspondent à σ_1 lorsque le chargement est réalisé dans l'ordre $S_1 - S_2$ et σ_1' lorsque le chargement est réalisé dans l'ordre $S_2 - S_1$. 130

7.1 Courbe de Wöhler type. 133
7.2 Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement imposé pour des essais de traction de rapport de charge nul. L'éprouvette mesure 30 mm de long. 134
7.3 Distribution des durées de vie obtenues pour un essai de traction sur AE42 de déplacement imposé entre 0 et 20 mm. La courbe représente la distribution normale ajustée aux essais, de moyenne égale à 4,97 et d'écart type égal à 0,095. 136
7.4 Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement maximal imposé. Trois séries d'essais sont représentées, selon la valeur du déplacement minimal imposé : 0, -5 ou -10 mm. 137
7.5 Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement minimal imposé pour un déplacement maximal imposé égal à 20 mm. 137
7.6 Durée de vie en fonction de la déformation maximale locale pour les deux éprouvettes, avec ou sans passage en compression. 138
7.7 Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement maximal imposé, selon la valeur du déplacement minimal imposé. 139
7.8 Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction de l'amplitude de déplacement imposée, selon la valeur du déplacement minimal imposé. 139
7.9 Pour les rapports de charge négatifs ou nul, l'endommagement E varie comme l'amplitude de la partie positive du déplacement. Pour des rapports de charge positifs, l'endommagement est inférieur à celui obtenu pour un essai de rapport de charge nul de même amplitude. 139
7.10 Durée de vie en fonction du déplacement au premier cycle et à mi-vie pour des essais de traction réalisés sur l'éprouvette AE42. 141
7.11 Durée de vie en fonction de la déformation principale maximale calculée au point de rupture pour des essais de traction réalisés sur l'éprouvette AE42. 141
7.12 Durée de vie en fonction du déplacement appliqué ou mesuré à mi-vie pour des essais de traction, réalisés sur l'éprouvette AE42. 143
7.13 Durée de vie en fonction de l'effort appliqué ou mesuré à mi-vie, pour des essais de traction réalisés sur l'éprouvette AE42. 143
7.14 Durée de vie en fonction de la déformation principale maximale, pour des essais de traction avec ou sans précharge, réalisés sur l'éprouvette AE42. . 143
7.15 Durée de vie en fonction de la contrainte principale maximale, pour des essais de traction, avec ou sans précharge, réalisés sur l'éprouvette AE42. . 143
7.16 Déformations principales maximales représentées sur la configuration non déformée pour une traction de 20 mm. Les résultats sont présentés sous la forme d'une valeur moyenne par élément. 144

7.17 Déformations principales maximales représentées sur la configuration non déformée pour une traction de 20 mm postérieure à une traction de 70 mm. On remarque que la distribution est différente du cas sans précharge. 144
7.18 Evolution de l'effort maximal mesuré au cours du cycle en fonction du nombre de cycle pour des essais de traction entre 0 et 20 mm sur AE42, avec ou sans précharge. 144
7.19 Rotation de la déformation principale maximale au cours du cycle. Chaque série est rapportée à son maximum pour une meilleure lisibilité. 147
7.20 Déformation moyenne atteinte en surface de l'éprouvette au cours du cycle. Chaque série est rapportée à son maximum pour une meilleure lisibilité. . . 147
7.21 Probabilité de rupture en fonction de la direction. Chaque série est rapportée à son maximum pour une meilleure lisibilité. Les angles sont représentés par des droites tous les 10°. On rappelle que l'axe e_Z est l'axe de révolution de l'éprouvette. 147
7.22 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la déformation principale maximale. 148
7.23 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte principale maximale. 148
7.24 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction du glissement maximal. . . . 148
7.25 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte de cisaillement maximale. 148
7.26 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de l'énergie de déformation maximale. 150
7.27 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de l'énergie de déformation directionnelle maximale. 150
7.28 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la déformation principale maximale. 151
7.29 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte principale maximale. 151
7.30 Durée de vie en fonction de la torsion minimale imposée pour deux séries d'essais de torsions maximales respectives de 120° et 90°. Tous les essais sont représentés ; leur moyenne est indiquée par la ligne pointillée. 152
7.31 Évolution de l'élongation dans la direction voyant l'élongation maximale, pour des essais de torsion alternée de rapports de charge différents ($R = 0$: torsion simple, $R = -1$: torsion alternée symétrique). 153
7.32 Évolution de la contrainte normale sur la facette voyant la contrainte normale maximale, pour des essais de torsion alternée de rapports de charge différents (légende identique à celle de la figure 7.31). 153
7.33 Directions choisies pour le calcul de la variable cumulée. 154
7.34 Durée de vie en fonction de la déformation normale cumulée dans la direction la plus sollicitée. 155
7.35 Durée de vie en fonction de la contrainte normale cumulée sur la facette la plus sollicitée. 155
7.36 Durée de vie en fonction de la déformation principale maximale cumulée . 155

7.37 Durée de vie en fonction de la contrainte principale maximale cumulée . . . 155
7.38 La fissure est petite devant le volume élémentaire à l'échelle duquel les grandeurs sont calculées par éléments finis. Elle ne modifie donc par la raideur de ce volume élémentaire. 156
7.39 Contrainte principale maximale au voisinage de la fissure, représentée sur la configuration non déformée. On compare le cas de la fissure ouverte par un chargement de glissement de $0,65$ et cisaillée par un chargement de glissement de $-0,65$. On constate que les valeurs maximales atteintes sont du même ordre de grandeur. 157
7.40 Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte principale maximale équivalente. 159
7.41 Durée de vie (échelle de couleur en $\log(N)$) en fonction du maximum et du minimum au cours du cycle de la contrainte principale maximale. 160
7.42 Durée de vie (échelle de couleur en $\log(N)$) en fonction du maximum et du minimum au cours du cycle de la contrainte principale maximale. 160
7.43 Suspente vue de côté. 161
7.44 Suspente vue de face. 161
7.45 La moitié de la suspente est maillée. Une condition de symétrie est imposée sur le plan médian. On impose un déplacement vertical à l'un des deux cyclindres rigides emmanchés dans le caoutchouc. Les chargements sont analysés aux nœuds marqués d'un point noir, référencés C (bras central) et E (bras extérieur). 162
7.46 Durée de vie de la suspente en fonction de la contrainte cumulée, superposée au nuage de point obtenu avec l'ensemble des essais sur éprouvette AE2. . 163

D.1 Une éprouvette de traction est découpée dans une éprouvette de cisaillement pur préalablement accommodée dans la direction Y. La découpe est réalisée selon un angle θ. 187

F.1 Éprouvette de type AE2. 195
F.2 Éprouvette de type AE42. 196

G.1 Maillage 1 de l'éprouvette AE2. 198
G.2 Maillage 2 de l'éprouvette AE2. 199
G.3 Maillage 3 de l'éprouvette AE2. 200
G.4 Maillage 4 de l'éprouvette AE2. 201
G.5 Maillage 5 de l'éprouvette AE2. 202

Notations

Formats

x	Scalaire
x	Vecteur de composantes x_i
$\boldsymbol{X}$	Tenseur d'ordre 2 de composantes X_{ij}
$\mathbb{X}$	Tenseur d'ordre 4 de composantes X_{ijkl}

Grandeurs mathématiques

δ_{ij}	Symbole de Kronecker	
$\boldsymbol{I}$	Tenseur unité d'ordre 2	$I_{ij} = \delta_{ij}$
$\mathbb{I}$	Tenseur unité d'ordre 4	$I_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}$

Opérateurs

$\cdot$	Produit simplement contracté	$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})_{ij} = A_{ia}B_{aj}$
$:$	Produit doublement contracté	$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = A_{ij}B_{ji}$
		$(\mathbb{A} : \boldsymbol{B})_{ij} = A_{ijab}B_{ba}$
		$(\boldsymbol{A} : \mathbb{B})_{ij} = A_{ab}B_{baij}$
$\otimes$	Produit tensoriel	$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$
	Dérivée par rapport à un tenseur d'ordre 2	$\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{A}}\right)_{ij} = \frac{\partial V}{\partial A_{ji}}$
∇	Gradient	$(\nabla V)_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial X_j}$

Grandeurs mécaniques

$\boldsymbol{F}$	Gradient de la transformation	
J	Variation de volume	$J = \det \boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{C}$	Dilatations de Cauchy Green droit	$\boldsymbol{C} = {}^t\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{G}$	Dilatations de Cauchy Green gauche	$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F} \cdot {}^t\boldsymbol{F}$
λ	Élongation (dans une direction D)	$\lambda = \sqrt{\mathrm{D} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{D}}$
I_1	Premier invariant de $\boldsymbol{C}$	$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{C}$
I_2	Deuxième invariant de $\boldsymbol{C}$	$I_2 = \frac{1}{2}((\mathrm{tr}\boldsymbol{C})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2)$
I_3	Troisième invariant de $\boldsymbol{C}$	$I_3 = \det \boldsymbol{C} = J^2$
$\boldsymbol{E}$	Déformations de Lagrange	$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$
$\boldsymbol{d}$	Taux de déformations Eulérien	
$\boldsymbol{\Pi}$	Contraintes de Piola-Lagrange	
$\boldsymbol{\sigma}$	Contraintes de Cauchy	$J\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{B}$	Contraintes de Boussinesq	
$\mathbb{E}^l$	Matrice tangente lagrangienne	
$\mathbb{E}^e$	Matrice tangente eulérienne	
$\mathbb{E}^{abq}$	Matrice tangente lagrangienne réactualisée	

Introduction

Contexte

L'industrie automobile utilise de nombreuses pièces en caoutchouc pour assurer des fonctions antivibratoires (*cf.* figure 1). Parmi elles, on peut citer les cales de support de moteur, les articulations de liaison au sol ou les suspentes d'échappement. La majorité de ces pièces est réalisée en caoutchouc naturel contenant des charges de noir de carbone. En effet, le caoutchouc naturel est un matériau peu coûteux et offrant de bonnes propriétés amortissantes. Il est également très performant vis-à-vis de la tenue en endurance. Son principal défaut est sa mauvaise tenue à haute température, ce qui explique l'utilisation de caoutchoucs synthétiques dans les zones très chaudes comme celles qui sont proches de la ligne d'échappement.

Ces pièces sont soumises à des sollicitations vibratoires ayant pour origine les irrégularités de la chaussée, les basculements du moteur et les accélérations du véhicule. Ce sont des chargements mécaniques complexes : l'intensité du chargement varie de façon aléatoire (voir figure 2) et plusieurs degrés de liberté de la pièce sont sollicités de manière indépendante les uns des autres (voir figure 3). De plus, la géométrie des pièces est souvent complexe. Ainsi, les sollicitations vues par les pièces ont des caractéristiques multiaxiales très variées et localement complexes. La figure 4 montre le type de fissures qui peuvent apparaître dans des pièces soumises à ce type de chargement.

La tenue en service de ces pièces est garantie par un certain nombre d'essais « constructeur » caractéristiques. Le constructeur automobile réalise des mesures d'efforts et/ou de déplacements en entrée de la pièce concernée en situation réelle, c'est-à-dire montée sur un véhicule roulant sur une piste. Le fournisseur doit alors appliquer à la pièce ce signal temporel enregistré et vérifier ainsi sa tenue. Cet essai de validation nécessite des moyens d'essais sophistiqués et donc coûteux (*cf.* figure 5). Par ailleurs, la durée de l'essai est importante ; elle peut aller jusqu'à un mois. Cet essai « piste » n'est donc réalisé que lorsque la pièce est complètement définie.

Pendant la phase de conception, la tenue des prototypes est évaluée en utilisant un signal plus court et plus simple, qui se veut équivalent au signal piste en terme d'endommagement. Celui-ci est en général élaboré à partir de méthodes empiriques, fondées sur une importante base de données expérimentales. On construit ainsi des signaux dits « réduits » en ne conservant que certains tronçons du signal temporel, d'amplitude plus importante que le reste du signal. On construit également des signaux dits « équivalents » qui sont souvent des combinaisons de signaux sinusoïdaux.

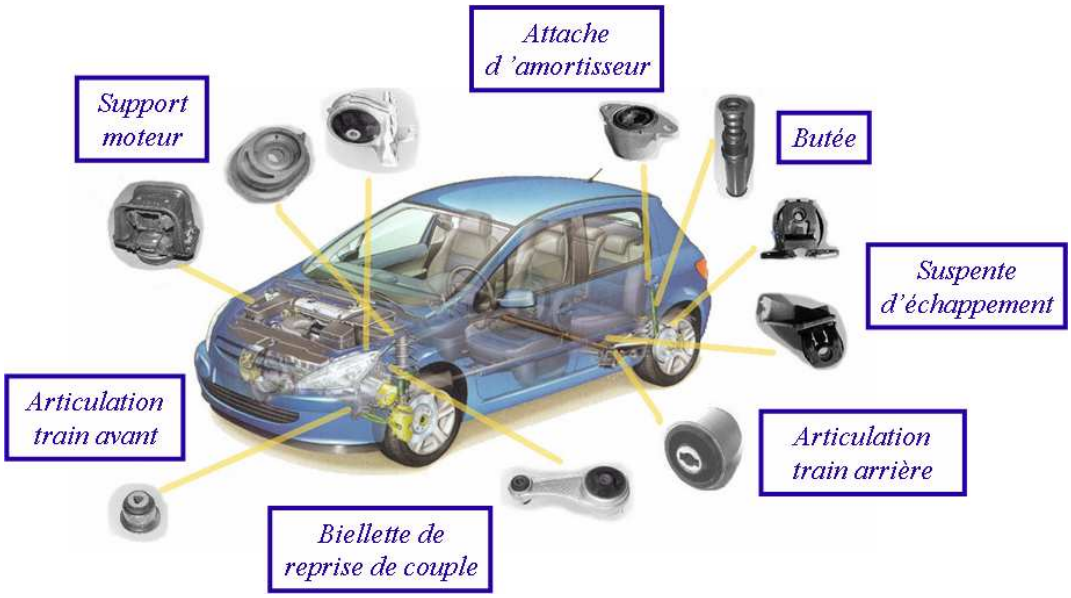


FIG. 1 – Pièces antivibratoires utilisées dans l'industrie automobile.

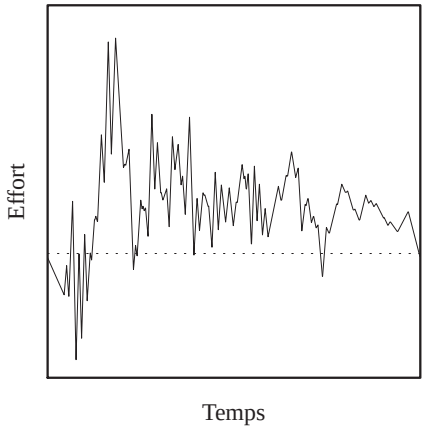


FIG. 2 – Signal (effort ou déplacement) vu par la pièce, enregistré sur piste en fonction du temps.

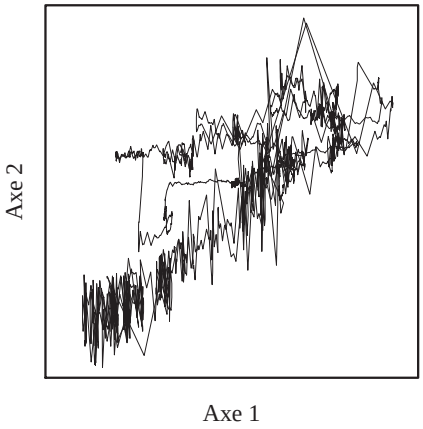


FIG. 3 – Signal enregistré sur un axe en fonction du signal enregistré sur un autre axe. On voit qu'il existe une direction de sollicitation privilégiée, mais les deux signaux sont globalement décorrélés.

FIG. 4 – Fissures dans une articulation de triangle soumise à un chargement complexe.

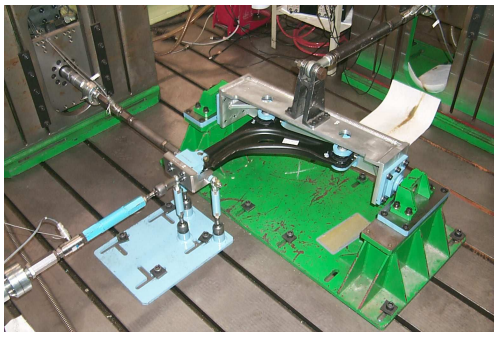


FIG. 5 – Exemple de banc triaxe utilisé pour la validation des articulations de triangle.

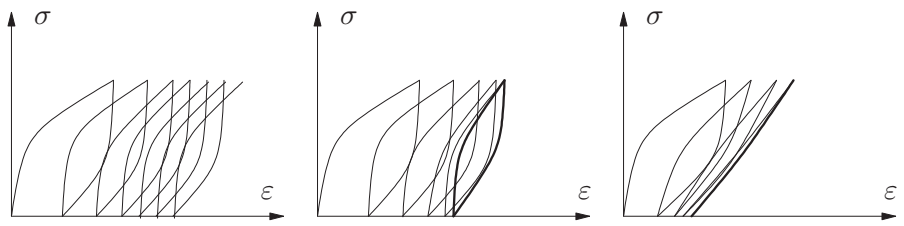
Ces méthodes de réduction de signal ne sont pas fiables : elles trouvent souvent leur origine dans les modèles consacrés aux métaux, dont les mécanismes d'endommagement sont très différents de ceux des polymères et des élastomères. Par ailleurs, cette méthode de dimensionnement demande encore la réalisation d'un grand nombre de prototypes et d'essais. Constructeurs et fournisseurs désirent donc améliorer leurs connaissances de l'endommagement des caoutchoucs, afin de mettre en place une méthode robuste d'estimation par le calcul de la durée de vie d'une structure soumise à un chargement donné, et d'évaluer la sévérité d'un signal par rapport à un autre pour cette structure.

Les enjeux industriels de cette étude sont à la fois la spécification des caractéristiques des pièces par le constructeur au fournisseur et la conception des dites pièces, laquelle est du ressort du fournisseur. Réunis par des intérêts communs, les sociétés PSA Peugeot Citroën et Modyn-Trelleborg, une entreprise spécialisée dans l'antivibratoire automobile, se sont donc associées pour financer une vaste campagne d'essais d'endurance. Ainsi, les essais présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein de la société Modyn-Trelleborg. Cette collaboration a conduit par la suite à la formation d'un groupe d'échanges scientifiques, le Groupe de Travail sur la Fatigue des Elastomères (GTFE), constitué de partenaires industriels (PSA Peugeot Citroën, Modyn-Trelleborg, Allevard-Rejna, et le CETIM de Nantes) et universitaires (le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique et le Laboratoire de Mécanique des Matériaux de l'École Centrale de Nantes).

Objectifs

L'objectif de ce travail de doctorat est de proposer une méthode pour prévoir la durée de vie d'une structure en caoutchouc soumise à un chargement mécanique multiaxial cyclique. La durée de vie est définie ici par l'amorçage d'une fissure visible à l'œil nu. Cette méthode doit être suffisament simple et efficace pour être appliquée dès le bureau d'études de conception.

Une fois les phénomènes d'endommagement compris et modélisés, le constructeur aura



(a) Effet Rochet (b) Accommodation (c) Adaptation

FIG. 6 – On distingue trois types de comportement pour un matériau sollicité cycliquement : (a) la réponse dérive jusqu'à la rupture ; (b) la réponse se stabilise après une période transitoire de quelques cycles, mais reste dissipative ; (c) après une période transitoire, la réponse adaptée est élastique.

tous les outils nécessaires pour assurer des réductions d'essais d'endurance fiables dans ses spécifications aux fournisseurs.

Démarche

La fatigue multiaxiale des caoutchoucs est un sujet complexe et encore très mal documenté. Une difficulté majeure réside dans l'évolution du comportement avec le chargement, et ceci pour deux raisons. Premièrement, l'endommagement du matériau à l'instant t dépend *a priori* de toute l'histoire des déformations et contraintes jusqu'à cet instant t. Il est donc nécessaire de connaître la loi d'évolution du comportement. Cette évolution est plus ou moins importante, selon le comportement du matériau et l'intensité de la sollicitation (*cf.* figure 6). Deuxièmement, cette évolution peut dépendre complètement ou partiellement de l'endommagement. Ce couplage entre le comportement et l'endommagement requiert le calcul de tout le trajet de chargement entre l'instant initial où le matériau est sain et l'instant actuel pour connaître cet endommagement. Cette démarche est donc extrêmement coûteuse en temps de calcul, un inconvénient rédhibitoire dans un contexte industriel.

On propose ici une démarche simplifiée, qui consiste à découpler l'évolution du comportement et celle de l'endommagement. Celle-ci est fondée sur l'existence d'un comportement cyclique stabilisé (cas (b) ou (c) sur la figure 6), atteint après une période de transition relativement courte devant le temps d'apparition d'une fissure. Ainsi, le comportement du matériau est identique pendant la plus grande partie de sa vie. On fait l'hypothèse que l'endommagement créé pendant la période transitoire où le comportement évolue est négligeable devant l'endommagement créé en régime stabilisé. La durée de vie du matériau dépend donc uniquement des grandeurs mécaniques déterminées sur un cycle de chargement en régime stabilisé. La méthode de détermination de la durée de vie se décompose alors en deux parties distinctes et indépendantes :

- dans un premier temps, on détermine l'état stabilisé de la structure ;
- dans un second temps, on détermine la durée de vie de la structure à partir du cycle stabilisé.

De la même manière, ce document est organisé en deux grandes parties. La première partie propose un modèle de comportement qui permet d'obtenir l'état cyclique de la structure. La seconde partie s'attache à la détermination d'une variable d'endommagement multiaxiale corrélée à la durée de vie.

La première partie est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre présente des généralités sur le comportement des élastomères, abordé sous un angle expérimental, et plus spécifiquement le comportement du caoutchouc naturel chargé au noir de carbone choisi pour cette étude. On montre que le comportement s'adoucit pendant les cinq premiers cycles de chargement, après lesquels on considère que le comportement n'évolue plus de façon notable (cas (b) sur la figure 6). On remarque que cet adoucissement, appelé « effet Mullins », ne se produit que dans la direction du chargement. Le deuxième chapitre est une étude bibliographique des lois de comportement susceptibles de décrire les phénomènes identifiés dans le premier chapitre. On constate que la plupart des modèles décrivent uniquement l'adoucissement au premier cycle, et non l'état stabilisé. L'anisotropie du phénomène n'est presque jamais prise en compte. Dans un troisième chapitre, on propose un modèle de comportement capable de représenter l'effet Mullins et l'anisotropie induite. Bien que la réponse réelle du matériau présente une boucle d'hystérèse, on fait le choix d'une représentation non dissipative (cas (c) de la figure 6), jugée suffisante pour répondre au problème d'endurance. On fait l'hypothèse que le comportement cyclique dépend uniquement des variables cycliques. Autrement dit, le comportement en régime établi est indépendant du régime transitoire. Cette hypothèse permet de s'affranchir de la description du régime transitoire pour aller directement à l'état stabilisé. En revanche, elle fait apparaître une autre difficulté : le paramètre d'endommagement de la loi de comportement doit être déterminé en même temps que l'état stabilisé de la structure. Le quatrième chapitre propose une méthode pour résoudre ce problème implicite de manière incrémentale. On valide enfin le modèle en l'appliquant au calcul de l'état stabilisé d'une éprouvette structure.

La seconde partie est divisée en trois chapitres. Le premier chapitre décrit les essais réalisés et propose une première analyse de leur pertinence vis-à-vis de l'étude de l'influence de la multiaxialité. Le deuxième chapitre contient une étude critique des modèles de durée de vie proposés par la littérature. Le sujet, bien que relativement ancien, n'a pas été très développé comme c'est le cas pour les matériaux métalliques. En particulier, aucune variable d'endommagement *multiaxiale* ne fait l'unanimité. Dans le troisième chapitre, on expose les résultats de durée de vie obtenus pour les différents types d'essais. On montre l'intérêt de la description du comportement stabilisé pour prévoir correctement la durée de vie. On propose ensuite une variable multiaxiale simple dont le maximum est corrélé de façon satisfaisante avec la durée de vie. On montre que pour des chargements plus complexes, pour lesquels le repère principal tourne beaucoup, il est possible d'obtenir localement deux cycles de chargement pour un seul cycle appliqué à la structure. Dans ce cas, il est nécessaire de tenir compte, non pas uniquement du maximum atteint au cours du cycle, mais bien de tout le trajet de chargement décrit au cours du cycle. Une loi de cumul d'endommagement linéaire est alors proposée pour décrire au mieux ces cas de chargement. Enfin, on montre que le modèle proposé est satisfaisant pour décrire la durée de vie d'une structure industrielle type.

Plus que sur les résultats obtenus, on insiste sur la démarche employée et mise en œuvre dans un contexte industriel de dimensionnement et de garantie de la tenue de la pièce en service.

Première partie

Approches de la réponse cyclique d’un élastomère

Chapitre 1

Description expérimentale du comportement des élastomères

Ce premier chapitre a pour objectif de mettre en évidence les principales caractéristiques du comportement mécanique des élastomères, à partir d'une part, de résultats d'essais réalisés spécifiquement pour cette étude et d'autre part, issus de la littérature.

1.1 Physico-chimie des élastomères

Les élastomères sont constitués de chaînes carbonées liées entre elles par des liaisons physiques (enchevêtrements) et chimiques (type liaisons covalentes) appelées aussi points de réticulation (voir figure 1.1). Ce sont des polymères de la famille des thermodurcissables, qui présentent la particularité de se trouver dans un état caoutchouteux[1] à température ambiante. La figure 1.2 montre l'évolution des propriétés mécaniques des élastomères avec la température. En dessous de la température de transition vitreuse T_g, les chaînes sont immobilisées les unes par rapport aux autres par des liaisons faibles. Au delà de T_g, ces dernières sont détruites et la cohésion du matériau n'est plus assurée que par les nœuds de réticulation : c'est ce qu'on appelle l'état caoutchoutique. Les propriétés mécaniques restent stables juqu'à ce que la température soit suffisamment importante pour briser les liaisons covalentes et décomposer le matériau.

Le polymère de base peut être d'origine naturelle (sève d'hévéa) ou synthétique (dérivés d'hydrocarbures). La réticulation est souvent renforcée par vulcanisation, c'est-à-dire par la formation à chaud (170-200°C) de ponts soufre entre les chaînes. D'autres agents de vulcanisation couramment utilisés sont les peroxydes. Les propriétés mécaniques sont également renforcées par l'ajout de charges, dont les plus courantes sont les noirs de carbone et certaines charges blanches d'origine minérale comme la craie, la silice ou le kaolin. De multiples autres additifs entrent dans la composition du caoutchouc : plastifiants aidant à la mise en forme, activateur, accélérateur, agents anti-oxydants ou anti-UV. La composition exacte d'un caoutchouc industriel est en général tenue secrète et fait partie du savoir faire

[1] dit aussi « caoutchoutique », probablement par mimétisme avec le terme anglo-saxon

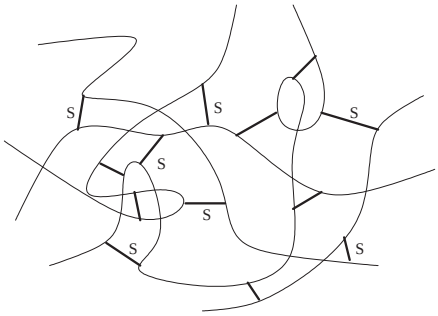


FIG. 1.1 – Les chaînes macromoléculaires sont liées entre elles par des liaisons covalentes et des ponts soufre.

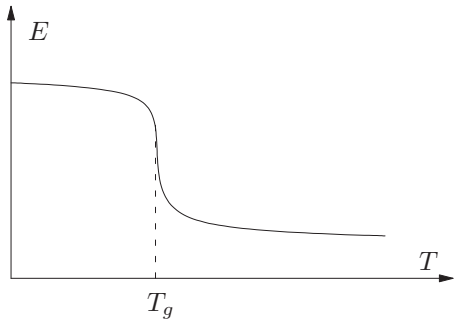


FIG. 1.2 – Les propriétés mécaniques d'un élastomère diminuent fortement au passage de la transition vitreuse T_g.

du manufacturier.

1.2 Protocole expérimental

1.2.1 Matériau étudié

Le matériau utilisé dans cette étude est un caoutchouc naturel chargé en noir de carbone à hauteur de 22% environ. Il s'agit d'un matériau couramment utilisé pour les applications visées. Sa formulation et ses caractéristiques mécaniques sont en annexe A. Toutes les éprouvettes sont moulées par injection, de façon à éviter des dispersions dues à des mises en formes différentes d'une éprouvette à l'autre. Ce procédé est en outre représentatif de la mise en forme des pièces antivibratoires utilisées pour l'automobile.

1.2.2 Essais de caractérisation quasi-statiques

Afin de décrire différents modes de déformation, quatre types d'essais ont été réalisés :
- traction uniaxiale sur éprouvette haltère de type H2 ;
- compression uniaxiale sur plot cylindrique ;
- glissement simple sur éprouvette double ;
- cisaillement pur sur éprouvette du même nom.

Les éprouvettes utilisées sont décrites figure 1.3. Les déplacements mesurés sont ceux des traverses sur lesquelles sont fixés les mors serrant l'éprouvette, sauf dans le cas de l'essai de traction où un système optique suit le déplacement de deux pastilles collées sur la partie centrale de l'éprouvette. Les efforts appliqués sont également mesurés au niveau des traverses. Sauf indication contraire, les essais sont réalisés à température ambiante et pour une vitesse de traverse de quelques centaines de millimètres par minute.

Aux effets de bord près, les déformations sont homogènes. Elles sont de plus supposées isochores. La description de ces transformations est disponible en annexe B.

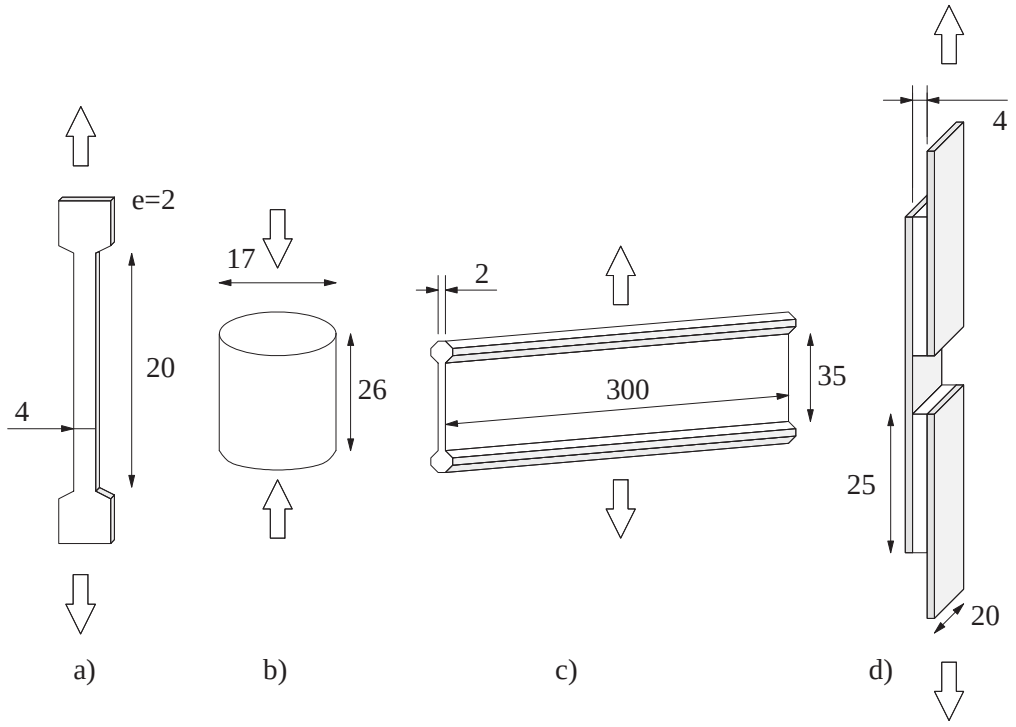


FIG. 1.3 – a) Éprouvette haltère de type H2, utilisée pour les essais de traction. b) Plot de compression. c) Éprouvette de cisaillement pur. d) Éprouvette double de cisaillement simple. Les dimensions sont données en millimètres.

FIG. 1.4 – Éprouvette AE2.

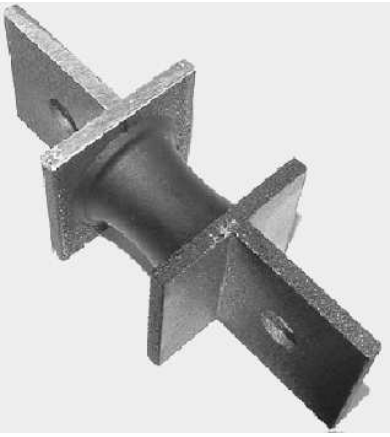


FIG. 1.5 – Éprouvette AE42.

Les éprouvettes utilisées pour les essais d'endurance de la partie II ont également été caractérisées de manière quasi-statique en traction. Ce sont des éprouvettes moulées axi-symétriques de section variable appellées ici éprouvettes « diabolo » ou éprouvettes « structure » (voir figures 1.4 et 1.5). Elles sont référencées AE (pour Axi-symétrique Entaillée) suivi du rayon d'entaille en millimètres. Elles ne se déforment pas de façon homogène ; il faut donc recourir à un calcul de structure pour déterminer l'état de déformations et de contraintes locales. Le choix de ces éprouvettes et leurs caractéristiques sont discutées plus en détail dans la partie II, page 87.

1.3 Élasticité non-linéaire

La première caractéristique d'un élastomère est sa capacité à subir de grandes déformations. Les caoutchoucs naturels peuvent s'étendre jusqu'à 10 fois leur taille d'origine avant de rompre. La figure 1.6 représente un essai de traction à rupture sur le mélange de notre étude. Sa déformation à rupture est d'environ 600%.

La deuxième caractéristique du comportement est sa non linéarité. On verra par la suite que les modèles physiques permettent d'expliquer et de simuler cette particularité en décrivant l'évolution de la conformation des chaînes macromoléculaires. En particulier, la rigidification du comportement aux grandes déformations s'explique par deux phénomènes :

- lorsque les chaînes sont suffisamment stéréo-régulières (c'est le cas des caoutchoucs naturels), elles peuvent en s'alignant former des motifs ordonnés appelés cristallites (voir figure 1.8) qui agissent comme des charges renforçantes ;
- les chaînes atteignent leur extension maximale.

La troisième caractéristique importante du comportement mécanique des élastomères est leur capacité à retrouver leur géométrie initiale presque intégralement. C'est la raison pour laquelle on parle souvent d'« élasticité caoutchoutique ». Cependant, ceci n'est vrai que pour les élastomères non chargés et soumis à de faibles déformations. La figure 1.7 représente un essai de traction du type charge/décharge sur le matériau - chargé au noir

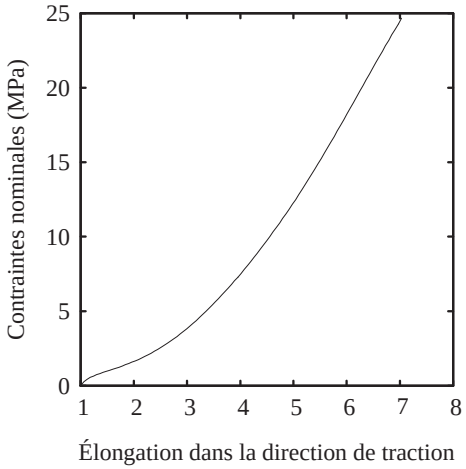


FIG. 1.6 – Courbe de traction à rupture.

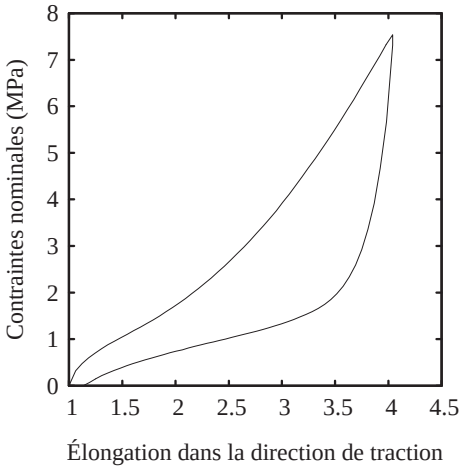


FIG. 1.7 – Essai de traction de type charge/décharge.

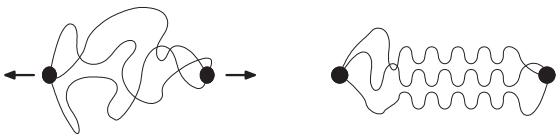


FIG. 1.8 – Cristallisation sous contrainte.

de carbone - de cette étude. Les déformations rémanentes sont d'environ 15% pour une déformation maximale atteinte de 300%, ce qui reste relativement faible. En revanche, les trajets de charge et de décharge sont très différents ; le matériau s'adoucit de façon non négligeable. Ainsi, on constate que l'hypothèse de réversibilité est discutable dans ce cas.

1.4 Incompressibilité

La plupart des caoutchoucs sont considérés comme incompressibles, c'est-à-dire qu'ils se déforment à volume constant. En réalité, un essai de compression hydrostatique montre qu'ils sont très légèrement compressibles. Cependant, le module de compressibilité est relativement grand devant le module de cisaillement : Chagnon [16] mesure un module de compressibilité de 231 MPa sur le même matériau que celui de cette étude. L'hypothèse de transformation isochore est alors justifiée pour des essais de chargement monotone.

Cette propriété n'est plus vérifiée dans le cas d'un essai de traction, pour des niveaux de déformation élevés et/ou des chargements répétés : Layouni [51] rapporte des variations de volume de l'ordre de 15% pour une élongation de 4,5. Cette variation de volume en traction est accompagnée par l'apparition de cavités dans le matériau, soit à l'interface entre gomme et charges, soit dans la gomme elle même. L'origine de ces fissures internes est mal connue [33] ; on suppose qu'elles s'amorcent sur des défauts pré-existants comme des défauts d'adhérence entre charge et matrice ou bien dans des zones peu réticulées de la gomme. Dans le cas de chargement cyclique, ces cavités pourraient se multiplier jusqu'à entraîner la rupture de l'éprouvette. En effet, les observations de Le Cam [52] montrent que la fissure se propage par coalescence avec une cavité située en avant du front de fissure, ce qui confirme le mécanisme proposé par Saintier dans sa thèse [73].

Ce point assez mal connu n'a pas fait ici l'objet d'une étude particulière. Dans un souci d'efficacité, nous adoptons donc l'hypothèse classique d'incompressibilité. Cette hypothèse ne met pas en cause la démarche de dimensionnement et pourrait donc être levée au besoin.

1.5 Phénomènes dissipatifs

Les figures 1.9 et 1.10 représentent des essais de traction cyclique. On constate que le matériau présente un comportement hystérétique. Autrement dit, il dissipe de l'énergie à chaque cycle. Cette dissipation a plusieurs origines, parmi lesquelles l'effet Mullins et la viscosité.

1.5.1 Viscosité

Le comportement du caoutchouc dépend de la vitesse de sollicitation. Cette viscosité est particulièrement visible autour de la température de transition vitreuse T_g, et a une influence moindre sur le plateau caoutchoutique. Elle est attribuée au glissement des chaînes les unes sur les autres. Des essais de relaxation (ou fluage) et des essais de viscoélasticité dynamique[2]

[2] Le viscoanalyseur permet de réaliser une spectrographie mécanique du matériau : on mesure le retard de la réponse d'une éprouvette soumise à une sollicitation harmonique de faible amplitude, en fonction de

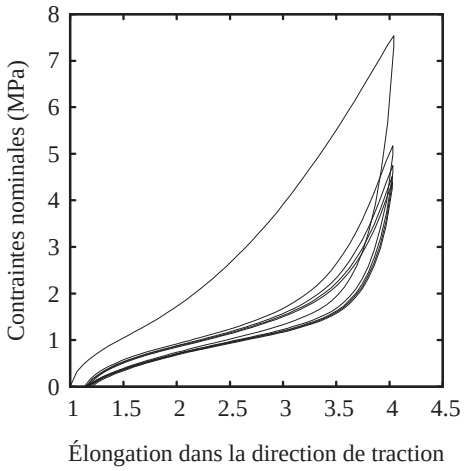


FIG. 1.9 – Courbe de traction cyclique. Cinq cycles de chargements sont imposés entre effort nul et une déformation maximale de 300%.

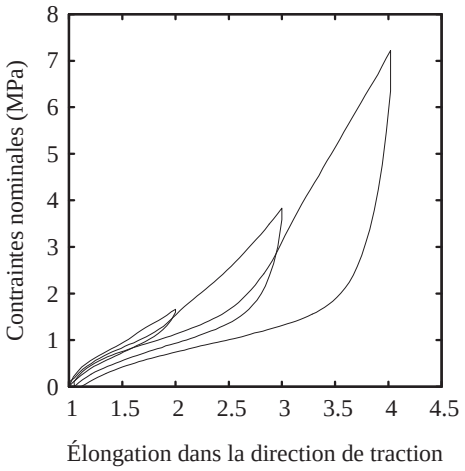


FIG. 1.10 – Courbe de traction cyclique. Chaque cycle de chargement est effectué à un niveau de déformation supérieur à celui du cycle précédent.

montrent une dépendance de la viscosité vis-à-vis du niveau de déformation ; ce phénomène est appelé effet Payne.

Dans cette étude, on ne s'intéressse qu'à des vitesses de déformation assez faibles (inférieures à 0,5 s^{-1}), lesquelles correspondent à ce que subissent effectivement les pièces de l'automobile. La figure 1.11 montre deux essais de traction monotone réalisés à des vitesses différentes selon deux ordres de grandeur. On constate que la rigidification du matériau avec l'augmentation de la vitesse est minime. Des essais cycliques réalisés à différentes vitesses conduisent à la même conclusion. Ainsi, la vitesse de sollicitation a très peu d'influence sur le comportement quasi-statique du matériau. On considère donc que le matériau n'est pas visqueux dans le domaine de chargement envisagé.

La viscosité peut pourtant provoquer des effets secondaires indésirables. L'énergie produite est dissipée sous forme de chaleur, ce qui provoque une forte élévation de température, car ces matériaux ont une faible conductivité thermique. Or les variations de température modifient les propriétés mécaniques de façon notable. De plus, pour des chargements répétés à vitesse élevée, il est possible d'atteindre des échauffements suffisants pour détruire le matériau. Dans cette étude, on veillera donc à limiter les vitesses de déformation, de façon à ne pas trop échauffer le matériau.

1.5.2 Effet Mullins

Accommodation

L'effet Mullins est associé à une dissipation quasi-statique, c'est-à-dire indépendante de la vitesse du chargement. Il se traduit par une diminution de la rigidité du matériau lors de

la fréquence du signal.

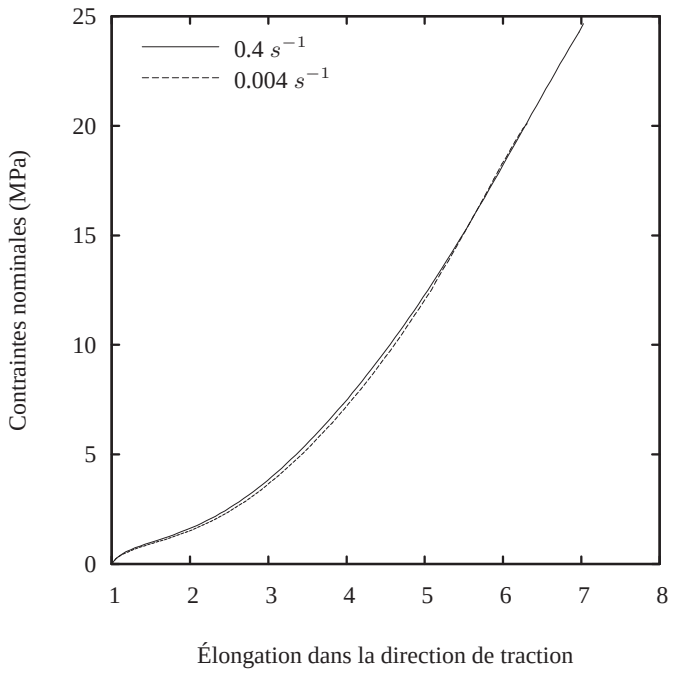


FIG. 1.11 – Courbe de traction à rupture pour deux vitesses de déplacement de la traverse, 5 et 500 mm/min, correspondant respectivement à des vitesses de déformation de 0,004 et 0,4 s^{-1}.

chargements consécutifs. Il serait dû à plusieurs phénomènes physiques différents :

- la décohésion entre la gomme et les charges sous l'effet du chargement mécanique ;
- des ruptures de chaînes ;
- une réorganisation des chaînes provoquant une orientation préférentielle du réseau ;
- et pour les élastomères cristallisables, la cristallisation sous contrainte, à relier au phénomène précédent [84].

La dissipation attribuée à l'effet Mullins apparaît essentiellement pendant les premiers cycles. Selon les auteurs, l'effet Mullins désigne la perte de raideur soit entre la première et la deuxième charge seulement, soit entre la première et la $n^{\text{ième}}$ charge, n étant généralement choisi inférieur à 10. Dans cette étude, on considère que cinq cycles sont suffisants pour s'en affranchir. Pendant les cycles de chargement suivants, le comportement n'évolue presque plus.

Une caractéristique de l'effet Mullins est d'être piloté par l'intensité de la déformation. La figure 1.10 illustre ce phénomène. Si on déforme le matériau à un niveau supérieur au niveau maximum atteint précédemment au cours de sa vie, la courbe de réponse rejoint la courbe de première charge et tout se passe comme si l'histoire du matériau était « effacée ».

Définition *On dit que le matériau est* accommodé à une certaine élongation λ *lorsque son comportement n'est pas modifié pour toute élongation inférieure à* λ*. Autrement dit, son comportement jusqu'à* λ *reste identique.*

L'effet Mullins est souvent assimilé à un endommagement dans la mesure où il représente une dégradation permanente du matériau accompagnée de déformations rémanentes. En fait, cet « endommagement » n'est pas complètement irréversible. Le matériau a une capacité de restauration, très lente à température ambiante, plus rapide à température élevée. Ceci permet parfois de considérer l'effet Mullins comme résultant d'une viscosité à très grande échelle de temps. Des essais de recouvrement (total ou partiel) issus de la thèse de Chagnon [16] montrent que plusieurs mois à température ambiante sont nécessaires pour que le matériau recouvre son comportement à la première charge. A l'échelle de temps des sollicitations appliquées aux éprouvettes commes aux pièces réelles concernées par l'étude, on pourra donc considérer l'effet Mullins comme une modification permanente du comportement.

Anisotropie induite par le chargement

L'accommodation est anisotrope. Seules les directions d'allongement voient leur comportement modifié. Les directions transverses ne sont pas (ou peu) affectées.

L'essai suivant (reproduit d'après la thèse de Chagnon [16]) permet de mettre ce phénomène en évidence. Des éprouvettes de traction sont prélevées dans une éprouvette plate de cisaillement pur (voir figure 1.3) préalablement soumise à cinq cycles de chargement. Le prélèvement est effectué à l'emporte-pièce, selon plusieurs angles (voir la figure 1.12). Un prélèvement similaire est effectué dans une éprouvette non sollicitée.

Les éprouvettes prélevées dans la plaque non sollicitée présentent le même comportement quel que soit l'angle de prélèvement (voir la figure 1.14), ce qui permet d'affirmer

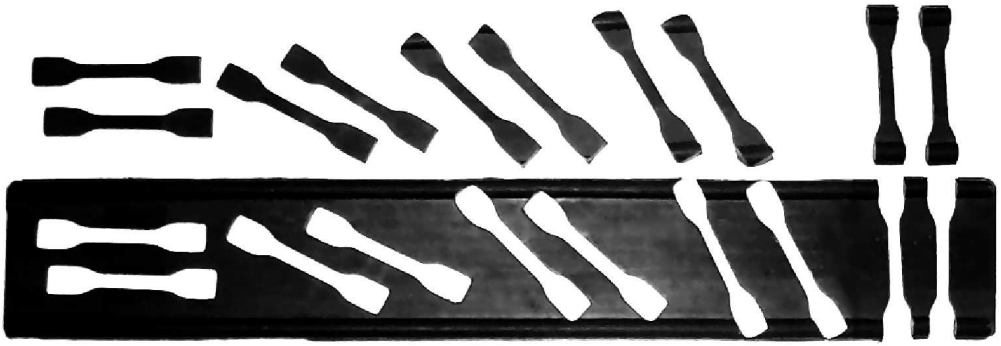


FIG. 1.12 – Des éprouvettes haltère sont prélevées dans une éprouvette de cisaillement pur préalablement soumise à cinq cycles de traction. On suppose que l'éprouvette est homogène : seul l'angle de prélèvement (et non la position du prélèvement dans la longueur de la bande) peut avoir une influence sur le comportement.

que l'éprouvette vierge est bien isotrope. Elle présente de plus un comportement conforme à l'essai de référence effectué sur éprouvette de traction moulée.

La figure 1.13 montre le comportement en traction uniaxiale des éprouvettes prélevées dans la plaque accommodée. On constate que l'éprouvette prélevée dans la direction perpendiculaire à la direction de sollicitation présente un comportement proche de celui d'une éprouvette vierge tandis que celle prélevée dans la direction de sollicitation présente un comportement plus souple tant que l'élongation reste inférieure à l'élongation d'accommodation. Les éprouvettes prélevées selon des directions intermédiaires présentent un comportement lui aussi intermédiaire.

Remarque *L'éprouvette prélevée dans la direction transverse présente un léger raidissement par rapport au matériau vierge. Ce phénomène est peu marqué mais reproductible. Il n'est pas expliqué pour l'instant.*

1.6 Vieillissement

L'environnement peut être à l'origine de dégradations physico-chimiques de la structure des élastomères. Ceci se répercute sur leur comportement mécanique, entraînant en général une rigidification et une fragilisation du matériau. Les élastomères sont particulièrement sensibles :

- à l'ozone (oxydation) ;
- aux rayonnements ultra-violets ;
- à la chaleur qui accélère les réactions chimiques.

L'influence de ces paramètres n'a pas été étudiée ici.

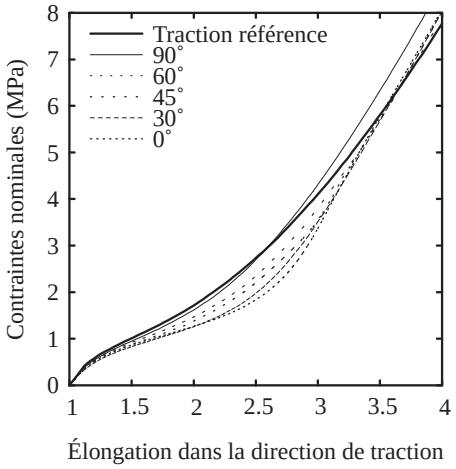


FIG. 1.13 – Courbe de traction pour des éprouvettes prélevées dans une éprouvette de cisaillement pur, accommodée selon différents angles par rapport à la direction d'accommodation, de gauche à droite : 0°, 30°, 45°, 60° et 90°.

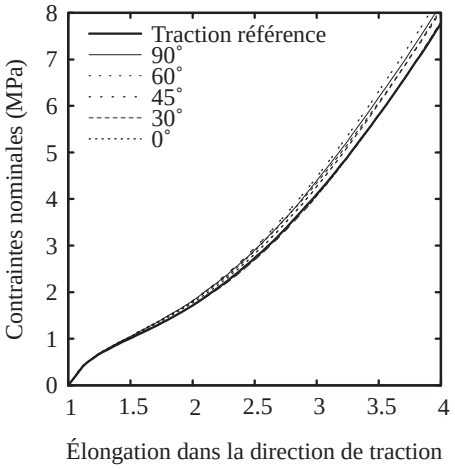


FIG. 1.14 – Courbe de traction pour des éprouvettes prélevées dans une éprouvette de cisaillement pur vierge, selon les mêmes directions que pour la plaque accommodée.

1.7 Conclusion

Les élastomères présentent un comportement complexe qu'il serait ambitieux de vouloir représenter dans sa totalité. Certaines caractéristiques sont d'ailleurs encore mal comprises. En particulier, les phénomènes physiques responsables de la boucle d'hystérésis en régime stabilisé ne sont pas encore tous identifiés ; il pourrait s'agir de viscosité (frottement des chaînes l'une sur l'autre), d'une réorganisation du réseau macromoléculaire (rupture et rétablissement de liaisons faibles) ou bien encore d'un phénomène de cristallisation/décristallisation.

Par ailleurs, certains phénomènes comme la viscosité ou l'existence de déformations rémanentes sont peu marqués dans le domaine d'utilisation concerné. On ne retiendra donc pour la suite que les phénomènes du premier ordre pour notre étude, c'est-à-dire l'élasticité non-linéaire du comportement, l'incompressibilité, l'effet Mullins et l'anisotropie qu'il génère.

Chapitre 2

Étude bibliographique

Les différents phénomènes à représenter ont été identifiés. Ce chapitre propose maintenant une analyse critique des modèles proposés dans la littérature pour représenter ces mêmes phénomènes. Avant d'aborder les lois de comportement proprement dites, on rappelle les bases de la mécanique des grandes déformations, qui sont à l'origine de bien des difficultés de la mécanique des élastomères. Ensuite, on s'intéresse aux principaux modèles de comportement hyperélastique avant d'aborder la représentation de l'effet Mullins.

Cette étude bibliographique ne se veut pas exhaustive ; on retrace uniquement les grands courants de pensée proposés par la communauté scientifique.

2.1 Rappel sur les grandes transformations

Les caoutchoucs sont utilisés dans un domaine de déformations où les hypothèses des petites transformations ne sont pas vérifiées [76, 74]. En particulier, les configurations initiale et actuelle ne sont pas superposables. Par conséquent, il existe plusieurs façons de décrire une même quantité, selon la configuration à laquelle elle fait référence. Les différentes écritures sont équivalentes entre elles, mais il est parfois plus commode de choisir l'une plutôt que l'autre.

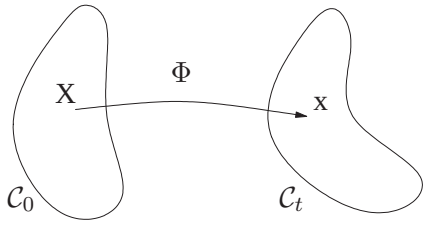


FIG. 2.1 – Transformation d'un système matériel.

2.1.1 Cinématique

Soit X la position d'un point matériel à l'instant initial t_0 et $\mathrm{x} = \Phi(\mathrm{X}, t)$ sa position à l'instant t. La transformation Φ est en général une application continue et dérivable en espace et en temps, ce qui exprime la continuité du milieu.

Si l'on prend comme référence la configuration initiale $\mathcal{C}_0$, on parle de coordonnées lagrangiennes (notées ici en lettres majuscules), tandis que si l'on prend comme référence la configuration actuelle $\mathcal{C}_t$, on parle de coordonnées eulériennes (notées ici en lettres minuscules).

Transport d'un vecteur matériel

Le tenseur gradient de transformation $\boldsymbol{F} = \nabla\Phi$ permet de transporter les grandeurs d'une configuration à l'autre. Un vecteur matériel est transporté selon :

$$\mathrm{dx} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{dX} \quad .$$

Le produit scalaire est transporté selon la relation suivante :

$$\mathrm{dx} \cdot \mathrm{dy} = \mathrm{dX} \cdot {}^t\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{dY} \quad .$$

Le tenseur des dilatations de Cauchy droit $\boldsymbol{C} = {}^t\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}$ est ainsi associé à un produit scalaire sur $\mathcal{C}_0$, qui détermine les variations de longueur et d'angle entre les états initial et actuel.

Transport d'un élément de volume matériel

L'élément de volume dV est transporté en l'élément de volume dv selon la relation :

$$dv = J\,dV \quad \text{où} \quad J = \det F \quad .$$

Transport d'une surface matérielle

Soit une surface matérielle définie par sa surface dS et son vecteur normal N. Elle est transportée en une surface de surface ds et de vecteur normal n :

$$ds\,\mathrm{n} = J dS\, {}^t\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \mathrm{N} \quad .$$

Remarque *La normale à une surface ne se transporte pas comme un vecteur matériel !*

2.1.2 Description des efforts

Décrire les contraintes consiste à donner un effort par unité de surface. Il existe donc *a priori* quatre descriptions possibles selon que l'on considère les descriptions eulérienne ou lagrangienne des efforts et des éléments de surface 2.1.

	Lagrange	Euler
Lagrange	dF $= dS\,\mathbf{\Pi} \cdot$ N Tenseur de Piola-Lagrange	df $= dS\,\boldsymbol{B} \cdot$ N Tenseur de Boussinesq
Euler	dF $= ds\,\boldsymbol{b} \cdot$ n Second tenseur mixte, inutilisé	df $= ds\,\boldsymbol{\sigma} \cdot$ n Tenseur de Cauchy

TAB. 2.1 – Mesure des contraintes selon les différents choix de configuration de référence pour l'expression des éléments de surface (lignes) et des efforts (colonnes).

2.2 Modèles hyperélastiques

Les modèles hyperélastiques décrivent un comportement réversible, non-linéaire. Il en existe deux grandes familles pour les élastomères : les modèles physiques et les modèles purement phénoménologiques.

2.2.1 Modèles physiques

Ces modèles relient le comportement de l'élastomère aux changements de conformation des chaînes macromoléculaires. Ils font donc intervenir une description de la structure microscopique du matériau.

L'élasticité caoutchoutique a un caractère essentiellement entropique. En effet, si on considère une transformation isotherme, réversible et isochore, le travail dW associé à la déformation est égal à la variation d'énergie libre dF. On a alors les égalités suivantes :

$$f \cdot dl = dW = dF = dU - TdS,$$

avec f la force exercée pour allonger l'échantillon d'une distance dl. On en déduit :

$$f = \left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T \quad .$$

Le premier terme est un terme d'énergie interne, et le second un terme entropique. Dans le cas des élastomères, des essais de traction à différentes températures montrent que la courbe $f(T)_l$ est une droite qui passe par zéro, ce qui signifie que le terme d'énergie interne est négligeable devant le terme entropique. Cette constatation est à l'origine des modèles statistiques. En effet, la loi de Boltzmann permet de relier l'entropie S à la statistique des configurations du système Ω :

$$S = k \ln \Omega,$$

où k est la constante de Boltzmann.

La structure microscopique de l'élastomère est représentée par un ensemble de chaînes linéaires. Chaque chaîne est constituée de n segments rigides de longueur a (représentant les monomères) reliés entre eux par leurs extrémités avec une entière liberté de rotation de l'un par rapport à l'autre et sans autre interaction. Une chaîne de n segments est caractérisée par son rayon r et sa direction, définis par ses deux extrémités (voir figure 2.2).

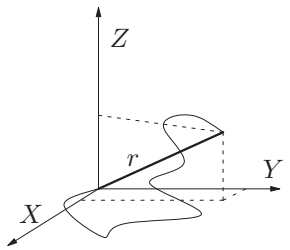


FIG. 2.2 – Une chaîne libre est caractérisée par les coordonnées de l'une de ses extrémités dans un repère prenant comme origine l'autre de ses extrémités.

L'énergie d'un volume élémentaire Ω, choisi comme étant la sphère unité, est alors la somme de l'énergie des chaînes qu'il contient :

$$W = \int_{\Omega} \int_{n} p(n, d\Omega) w(n, \lambda) dn d\Omega, \tag{2.1}$$

où $p(n, d\Omega)$ est la probabilité de trouver une chaîne de longueur n dans l'angle solide $d\Omega$ et $w(n, \lambda)$ l'énergie libre d'une chaîne de longueur n soumise à une élongation λ.

Modèle à distribution gaussienne

La conformation au repos d'une seule chaîne libre de n monomères est aléatoire. On calcule son rayon quadratique moyen :

$$\langle R^2 \rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \sum_i a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j = n a^2,$$

les termes rectangles s'annulant puisque les orientations des segments sont indépendantes les unes des autres. Toutes les directions de l'espace étant équivalentes, on peut raisonner sur une seule direction et reporter le résultat sur les autres. On est ainsi ramené à un problème unidirectionnel où la longueur d'un segment est $a/\sqrt{3}$. Sur les n segments, n_+ pointent dans un sens et les n_- restant dans l'autre sens. La distance entre les deux extrêmités de la chaîne s'écrit alors :

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} \Delta n \quad \text{où} \quad \Delta n = (n_+ - n_-) \quad .$$

Il y a $C_{n_+}^n$ configurations possibles à Δn segments. La probabilité d'obtenir une chaîne à Δn segments est donc :

$$p(\Delta n) = \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{n!}{n_+! \, n_-!} \quad .$$

Dans la mesure où n, n_+ et n_- sont grands (la chaîne est longue), l'approximation de Stirling permet d'écrire :

$$\ln p(\Delta n) = -\frac{n}{2} (\ln(1 + \frac{\Delta n}{n}) + \ln(1 - \frac{\Delta n}{n})) \quad .$$

Si Δn reste petit devant n (la distance entre les deux extrémités de la chaîne reste petite devant sa longueur étirée na), le développement du logarithme donne :

$$\ln p(\Delta n) = -n\ln(2) + n\ln(n) - n_+\ln(n_+) - n_-\ln n_- = -\frac{(\Delta n)^2}{2n} \quad .$$

Autrement dit, la longueur courante r de la chaîne suit une distribution gaussienne :

$$p(r) = p_0 \exp\left(-\frac{3r^2}{2\langle R^2\rangle}\right) \quad .$$

On en déduit l'énergie de la chaîne libre :

$$w(r) = -T\,\Delta S = \frac{3kTr^2}{2\langle R^2\rangle} \quad .$$

Pour allonger la chaîne selon les élongations λ_x, λ_y et λ_z exprimées dans trois directions orthogonales, il faut donc apporter l'énergie :

$$w = \frac{kT}{2}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3) \quad .$$

Les chaînes sont en fait reliées entre elles par leurs extrémités (on suppose donc que les chaînes ayant une extrémité libre ne participent pas à l'énergie libre). Ces points de jonction (qui représentent les points de réticulation ou bien des inclusions) forment un réseau dont le déplacement est supposé affine du déplacement macroscopique. On fait l'hypothèse supplémentaire que la distance d'équilibre entre deux nœuds de réticulation est égale à la distance entre les deux extrémités de la chaîne libre correspondante. On suppose de surcroît que l'état de repos est isotrope (c'est-à-dire $p(n, d\Omega) = p(n)d\Omega$). En utilisant toutes ces hypothèses, l'équation 2.1 donne la densité d'énergie :

$$W = \frac{\nu kT}{2}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3),$$

où ν désigne le nombre de chaînes par unité de volume. Il s'agit du modèle dit « néo-hookéen ».

Modèle à distribution non gaussienne

Le caractère gaussien de la distribution de la longueur des chaînes suppose que ces dernières peuvent supporter un allongement infini. En réalité, une chaîne a une longueur finie égale à na, soit une élongation maximale λ_l égale à $\sqrt{n}$. Lorsque les chaînes approchent leur élongation limite λ_l, le comportement du matériau présente un raidissement que le modèle néo-hookéen ne décrit pas. On enrichit alors le modèle en choisissant une statistique non gaussienne de la longueur des chaînes, qui fait intervenir l'inverse de la fonction de Langevin, introduite par Kuhn et Grün [47]. La densité d'énergie s'écrit alors :

$$W = \int_\Omega \int_{\lambda_l} p(\lambda_l, d\Omega) w(\lambda_l, \lambda) d\lambda_l d\Omega,$$

où :

$$w(\lambda_l, \lambda) = {\lambda_l}^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_l} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_l}\right) + \ln \frac{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_l}\right)}{\sinh \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_l}\right)} \right),$$

$\mathcal{L}$ désignant la fonction de Langevin :

$$\mathcal{L}(x) = \coth x - \frac{1}{x} \quad .$$

La description du modèle est lagrangienne ; les domaines d'intégration sont fixes. Les contraintes s'obtiennent donc très facilement :

$${}^t\boldsymbol{B} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} = \int_\Omega \frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{F}} \int_{\lambda_l} p(\lambda_l, d\Omega) \lambda_l \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_l}\right) d\lambda_l d\Omega \quad .$$

Ce modèle est équivalent au modèle à distribution gaussienne lorsque l'élongation reste petite devant l'extension limite de la chaîne.

Remarque *Il n'existe pas d'expression analytique de la fonction de Langevin inversée. La plupart des modèles existants font donc intervenir des approximations. Arruda et Boyce [4], par exemple, utilisent un développement polynomial proposé par Treloar [90] tandis que Perrin [69] propose une approximation sous forme de fraction rationnelle.*

L'hypothèse de transformation réversible sur laquelle repose le modèle implique que le matériau ne s'endommage pas. Le comportement est élastique, ce qui signifie que les chaînes sont suffisamment longues pour ne jamais atteindre leur extension limite. Autrement dit, le modèle suppose que les extensions limites des chaînes sont supérieures à une valeur minimale grande devant les élongations subies pendant le chargement. En pratique, on simplifie souvent le modèle en supposant que toutes les chaînes ont la même extension limite $\lambda_l = \sqrt{n}$, et ceci quelque soit la direction. La densité d'énergie devient alors :

$$W = \int_\Omega w(\lambda_l, \lambda) d\Omega \quad .$$

Discrétisation de l'espace des directions

La forme intégrale de la densité d'énergie interdit son implantation dans un code de calcul. Pour résoudre ce problème, l'intégrale sur le volume est approchée par une somme discrète sur un nombre fini α de directions convenablement choisies :

$$W = \int_\Omega w(\lambda, \lambda_l) d\Omega \simeq \sum_\alpha p^\alpha w(\lambda^\alpha, \lambda_l),$$

où p^α désigne le poids attribué à la direction D^α. *A priori*, le modèle est d'autant plus précis que le nombre de directions est important. En fait, Elata et Rubin [25] montrent que six directions suffisent pour décrire complètement un tenseur symétrique (la démonstration est disponible en annexe C). Ainsi la mesure des dilatations dans six directions indépendantes au sens d'Elata et Rubin suffit pour décrire exactement un comportement fonction d'un ou

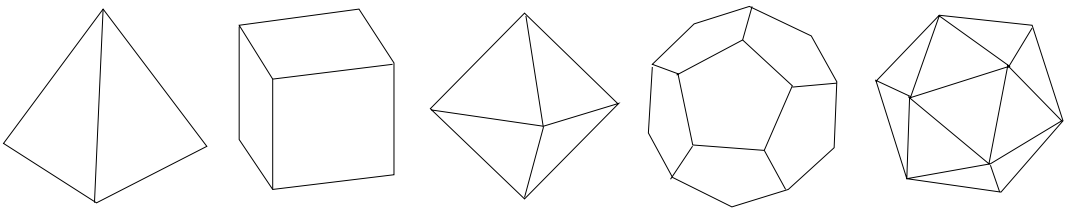


FIG. 2.3 – Il n'existe que 5 polyèdres réguliers (tetraèdre, hexaèdre ou cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre), correspondant à 4 ensembles de directions régulièrement réparties dans l'espaces.

Auteurs	Directions
Flory et Rehner [31]	4
James et Guth [44]	3
Wang et Guth [93]	3
Treloar [90]	3
Arruda et Boyce [4]	4
Wu et van der Giessen [94]	3 et 4
Elata et Rubin [25]	6
Martin Borret [60]	3 et 4
Diani [20]	3 et 4

TAB. 2.2 – Modèles à chaînes.

plusieurs tenseurs, ce qui comprend, entre autres, les comportements hyperélastiques non linéaires, éventuellement anisotropes. Ici, on se place dans un cadre différent car on impose *a priori* une forme particulière au comportement.

Dans le cas où on choisit un ensemble de directions quelconque, on peut identifier les poids p^α en choisissant une fonction intégrable, proche de l'énergie qui nous intéresse. Par exemple, Martin-Borret [60] propose de choisir les poids d'intégration tels que l'intégration d'une forme quadratique soit exacte. Une autre solution consiste à choisir des directions régulièrement réparties dans l'espace, pour lesquelles les poids seront tous égaux entre eux. Ces ensembles de directions correspondent aux normales des faces de polyèdres réguliers. Ceux-ci sont au nombre de cinq (voir figure 2.3), ce qui correspond à un choix de 3 ,4, 6 ou 10 directions.

La plupart des modèles de la littérature correspondent à ce cas de figure. Le tableau 2.2 résume les principaux d'entre eux. Le repère de référence des directions de discrétisation est généralement lié aux directions propres de la transformation, bien que ce ne soit pas nécessaire. Ce repère n'étant pas fixe par rapport à la matière, il n'est pas adapté à la description d'un matériau anisotrope. Diani [20] propose de considérer les poids sur les différentes directions comme autant de paramètres matériau à identifier pour représenter un matériau anisotrope, que l'anisotropie soit due à la mise en forme ou à l'histoire du chargement.

La discrétisation en un nombre fini de directions permet d'exprimer les contraintes analytiquement. Elle présente cependant un inconvénient : elle peut introduire une perte d'isotropie liée au choix de l'orientation de l'ensemble des directions par rapport au repère de référence. Pour éviter cette discrétisation, Perrin [69] propose de remplacer la fonction de Langevin inversée par son approximant de Padé :

$$g(x) = \frac{x(3-x^2)}{1-x^2} = x - \frac{2}{x - \frac{1}{x}} \quad .$$

Comme le choix de la fonction de Langevin repose sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui ne sont pas exactement satisfaites en réalité [18], il est acceptable de s'en écarter légèrement. Le modèle isotrope (où les extensions limites sont égales dans toutes les directions) devient alors intégrable sur l'ensemble des directions, ce qui permet d'obtenir une expression analytique du comportement.

Conclusion

Les modèles statistiques ont l'avantage d'être fondés sur une description microscopique du matériau. Cette description repose sur un grand nombre d'hypothèses simplificatrices, mais décrit pourtant relativement bien la composante élastique du comportement des élastomères chargés ou non.

La plupart des caoutchoucs industriels contiennent des charges en proportion importante. Ils ont donc un comportement composite *a priori* plus complexe que celui décrit par les modèles statistiques. En fait, l'ajout de charges a pour principales conséquences d'augmenter la composante dissipative du comportement et de rigidifier le matériau. Il ne modifie donc pas beaucoup la forme du comportement à première charge, ce qui justifie l'utilisation de ce type de modèle même pour des élastomères fortement chargés.

La plupart des modèles conduisent à des formes d'énergie dont l'expression n'est pas analytique, ce qui complique leur implantation dans les codes de calcul. Ils sont donc peu utilisés dans l'industrie.

2.2.2 Modèles phénoménologiques

Cette démarche propose des expressions mathématiques du comportement pour décrire au mieux les phénomènes observés sans se soucier de leur interprétation physique sous-jacente.

Le potentiel de déformation élastique W est *a priori* une fonction du tenseur des dilatations de Cauchy $\boldsymbol{C}$. Le caoutchouc (vierge de tout chargement mécanique) étant un matériau isotrope, le principe d'indifférence matérielle permet d'écrire W de manière équivalente comme une fonction des trois invariants I_1, I_2 et I_3 de $\boldsymbol{C}$ ou comme une fonction des dilatations principales λ_1, λ_2 et λ_3. Dans le cas où on fait de plus l'hypothèse de transformation isochore, $I_3 = 1$ et W ne dépend alors que de deux variables indépendantes.

Les coefficients de ces différentes lois ne sont pas quelconques. En effet, ils doivent assurer un comportement physique raisonnable pour le matériau considéré. Par exemple, la polyconvexité de W assure l'existence d'une solution du problème d'équilibre. D'autres

restrictions peuvent être imposées selon d'autres propriétés constitutives du matériau considéré.

Formulations polynomiales

On cherche à exprimer l'énergie W sous la forme de fonctions mathématiques simples. Les polynômes de I_1 et I_2, souvent appelés « séries de Rivlin » sont couramment employés, et en particulier :

- le modèle néo-hookéen $W = C_{10}(I_1 - 3)$;
- le modèle de Mooney-Rivlin $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$;
- le modèle de Treloar $W = \frac{\mu}{n}(I_1 - 3)^n$.

D'autres préfèrent utiliser les élongations principales λ. L'hypothèse simplificatrice (dite de Valanis-Landel [91]) consiste à supposer la séparabilité des variables :

$$W = \sum_{i=0}^{3} w(\lambda_i),$$

où w est une fonction à déterminer. Parmi ce type de modèles, on retiendra le développement en série d'Ogden :

$$W = \frac{\mu_n}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{3} (\lambda_i^{\alpha_n} - 3) \quad .$$

Ces modèles sont faciles à implanter dans les codes de calcul ; ils sont d'ailleurs largement utilisés. Les polynômes d'ordre un ou deux sont très appréciés pour leur simplicité d'utilisation et d'identification, mais ne représentent le comportement des élastomères que de manière partielle. Par exemple, la loi de Mooney-Rivlin ne décrit que la première courbure de la courbe de traction et est incapable de reproduire le comportement aux grandes déformations (au delà de 100%). Les polynômes d'ordre plus élevé permettent une description précise du comportement, aussi bien aux petites qu'aux grandes déformations. Cependant, l'identification de leurs paramètres est sujette à caution car la stabilité du comportement n'est pas assurée pour toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ces paramètres. Par ailleurs, ces modèles ne garantissent pas une bonne description multiaxiale ; ils peuvent donc conduire à une réponse simulée éloignée de la réponse expérimentale pour un type de chargement absent de la base d'essais d'identification des coefficients.

Autres formulations

De nombreux auteurs ont proposé des formulations moins générales, décrivant de manière plus spécifique chaque caractéristique du comportement. Ces formulations font souvent apparaître deux termes distincts permettant de représenter d'une part le raidissement aux grandes déformations et d'autre part la courbure à l'origine. Nous ne citons ici que les deux qui nous paraissent les plus intéressantes. Hart-Smith [41] propose la fonction suivante :

$$W(I_1, I_2) = C_1 \int \exp\left(C_3(I_1 - 3)^2\right) dI_1 + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right),$$

où le raidissement est représenté par une fonction exponentielle et la courbure à l'origine par un logarithme.

Gent représente le raidissement en choisissant une fonction présentant une asymptote verticale à un certain niveau de déformation $I_1 = J_m + 3$ (ce qui est cohérent avec l'hypothèse de l'existence d'une extension limite des chaînes). Il s'agit de la fonction :

$$W(I_1) = -\frac{G}{2} J_m \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}\right),$$

équivalente au modèle néo-hookéen au voisinage de l'état initial. Boyce [9] montre par ailleurs que le modèle de Gent et le modèle d'Arruda et Boyce sont équivalents, ce qui permet de relier les paramètres du modèle à des paramètres physiques :

$$G = nkT \quad \text{et} \quad J_m = 3(n-1),$$

où n désigne le nombre de segments par chaîne et k la constante de Boltzmann. On pourrait ainsi parler de modèle semi-physique.

Ces formulations plus riches que les formulations polynomiales permettent de décrire correctement le comportement global du caoutchouc avec un nombre limité de paramètres. Malheureusement, cela contraint le domaine de pertinence de la forme de comportement adoptée. On montrera que ce type de modèle décrit mal le comportement « stabilisé » du matériau choisi pour cette étude.

Conclusion

Les modèles phénoménologiques décrivent relativement bien le comportement hyperélastique des élastomères chargés ou non et sont faciles à implanter dans les codes de calcul. En revanche, leurs paramètres sont délicats à mesurer car ils ne sont pas reliés à des valeurs physiques parfaitement identifiées. Certains modèles plus récents, comme celui de Gent, sont prometteurs, mais pas encore disponibles dans les codes de calcul.

2.3 Incompressibilité

Les élastomères sont généralement considérés comme incompressibles. Autrement dit, le matériau est contraint par la liaison interne : $\det \boldsymbol{F} = 1$. La loi de comportement est alors modifiée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange, noté η :

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} - \eta \boldsymbol{C}^{-1} \quad .$$

Dans les cas où la compressibilité ne peut pas être négligée, le troisième invariant I_3, qui correspond à la variation de volume, intervient dans le potentiel W au même titre que les deux premiers invariants.

Une démarche courante, en particulier dans le cas où le matériau est peu compressible, consiste à supposer que le potentiel peut se décomposer en un terme dit « déviatorique » et un terme dit « hydrostatique » [63] :

$$W = W_D(\overline{I_1}, \overline{I_2}) + W_H(I_3),$$

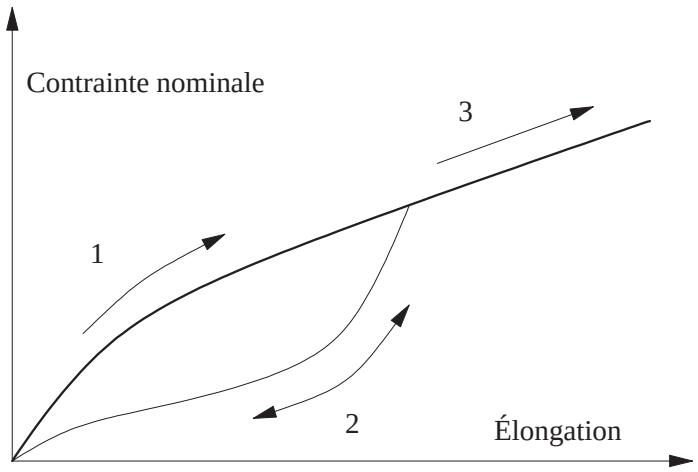


FIG. 2.4 – L'effet Mullins est souvent représenté de manière idéalisée : lors de la première charge jusqu'à un chargement donné, la réponse suit la courbe en gras (1) ; les décharges et recharges suivantes s'effectuent selon la courbe (2) de façon réversible tant que le chargement maximal précédemment atteint n'est pas dépassé ; lorsque le chargement devient supérieur à celui-ci, la réponse du matériau revient sur la courbe de première charge (3).

où $\overline{I_1}$ et $\overline{I_2}$ sont les invariants du tenseur de Cauchy déviatorique, c'est-à-dire $\overline{I_1} = I_1\, I_3^{-2/3}$ et $\overline{I_2} = I_2\, I_3^{-2/3}$. Les mesures de compressibilité réalisées par Penn [68] contredisent cette hypothèse.

Plusieurs auteurs ont proposé de décrire la réponse volumique des élastomères chargés comme une conséquence d'un endommagement (le matériau sain étant alors considéré incompressible) ; Farris [28] propose un modèle statistique fondé sur la description de la distribution des cavités tandis que plus tard Andrieux [3] adopte une démarche fondée sur le formalisme des matériaux standards généralisés.

2.4 Effet Mullins

Comme pour les modèles hyperélastiques, les modèles qui représentent l'accommodation due à l'effet Mullins peuvent être classés en deux catégories : ceux qui sont fondés sur une description physique de l'endommagement et ceux qui sont fondés sur la mécanique de l'endommagement [55] mais qui ne cherchent pas à expliquer les mécanismes de cet endommagement.

Pour la plupart des modèles, l'effet Mullins s'entend comme la perte de raideur entre la première et la deuxième charge uniquement (voir figure 2.4). L'adoucissement qui se produit pendant les cycles suivants n'est donc pas représenté. Par ailleurs, les déformations rémanentes et l'anisotropie qui accompagnent l'effet Mullins sont elles aussi rarement représentées.

2.4.1 Modèles physiques

Les causes physiques de l'effet Mullins sont encore très mal connues. Cependant, un certain nombre d'auteurs proposent des modèles de comportement fondées sur une description (hypothétique, donc) du phénomène physique. Ces approches sont regroupées ici.

Modèles biphasiques

Mullins et Tobin [62] ont proposé de représenter le caoutchouc comme un mélange de deux phases, l'une rigide et l'autre souple. La proportion de la phase rigide diminue sous l'effet d'une élongation. Plus tard, Johnson et Beatty [45], puis Beatty et Krishnaswamy [6] reprennent ce modèle pour lui donner une interprétation physique. Les zones rigides seraient constituées de chaînes fortement liées entre elles (par des enchevêtrements, liaisons covalentes ou intermoléculaires) et se disloqueraient sous l'effet d'un étirement. Les auteurs proposent de représenter la progression de la zone souple soit par un facteur d'amplification des déformations soit par une fonction d'accommodation correctrice des contraintes. L'endommagement est piloté par la déformation maximale définie en fonction des invariants de $\boldsymbol{C}$:

$$M = \sup_{s \in]-\infty, t]} \sqrt{I_1^2(t) - 2I_2(t)} \quad .$$

Modèles de décohésion charge/matrice

Le modèle uni-directionnel de Bueche [10] explique l'endommagement par la rupture ou la décohésion des chaînes qui lient les charges entre elles (*cf.* figure 2.5). Ce modèle est généralisé au cas tri-dimensionnel par Govindjee et Simo [37, 38]. Le matériau est représenté comme un matériau composite constitué d'une matrice (la gomme) et de charges non déformables qui amplifient les contraintes dans la matrice (*cf.* figure 2.6). L'endommagement est ici piloté par la plus grande élongation vue dans la matrice au cours du temps. L'utilisation de ce modèle est limitée par le nombre élévé de ses paramètres. Par ailleurs, l'interprétation physique de ces modèles est contestée car si l'effet Mullins est certes bien plus marqué dans le cas des élastomères chargés, il existe également dans les élastomères non chargés. Ceci conduit à penser que l'effet Mullins a lieu également (ou uniquement ?) dans la gomme, sous forme d'un réarrangement du réseau macromoléculaire.

Modèles de réarrangement du réseau macromoléculaire

Marckmann [57] adopte ce dernier point de vue et représente l'effet Mullins sous forme d'une altération du réseau macromoléculaire. Sous l'effet d'une extension, les chaînes les plus courtes sont rompues, ainsi que certaines liaisons faibles (*cf.* figure 2.7). Par conséquent, la longueur moyenne des chaînes augmente et leur densité diminue (de façon à assurer la conservation de la masse). Son modèle reprend le modèle à huit chaînes d'Arruda et Boyce, où la longueur et la densité des chaînes sont paramétrées par l'élongation maximale. Chagnon [16] améliore par la suite ce paramétrage et propose de remplacer la loi d'Arruda et Boyce par celle de Gent ou de Hart-Smith pour augmenter la rapidité de calcul. Horgan [43]

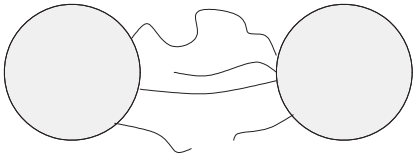


FIG. 2.5 – Modèle de Bueche [10] : les chaînes étirées au delà de leur extension maximale rompent ou se désorbent de la surface.

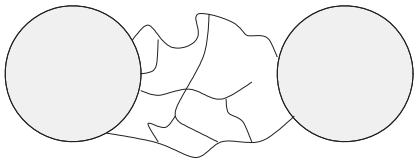


FIG. 2.6 – Modèle de Govindjee et Simo [37, 38] : l'endommagement se produit uniquement par la rupture des liaisons gomme/charge.

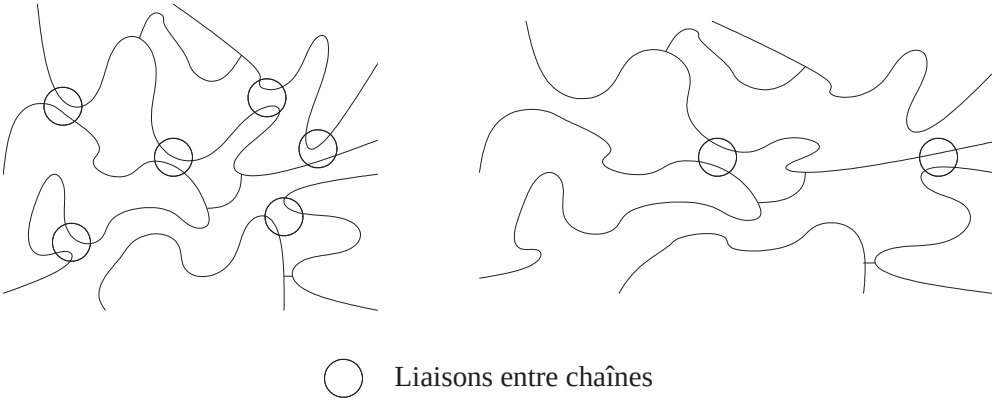


FIG. 2.7 – Modèle de Marckmann [57] : la déformation provoque une altération du réseau moléculaire par la rupture de liaisons inter-chaînes.

reprend ce type d'approche pour proposer une loi d'évolution des paramètres légèrement différente. Tous ces modèles décrivent correctement l'effet Mullins avec peu de paramètres.

Modèles particulaires

Il existe une troisième classe de modèles fondés sur la description de la structure moléculaire du caoutchouc qu'on appellera ici modèles particulaires. Le modèle de Besdo et Ihlmann [8], par exemple, décrit des chaînes constituées de nœuds reliés par des segments. Ces nœuds représentent aussi bien des points de réticulation que des charges. Ces chaînes opposent une résistance à la flexion modélisée par un ressort linéaire. De plus, des liaisons temporaires représentées par un ressort linéaire peuvent apparaître lorsque deux nœuds se trouvent proches l'un de l'autre ou disparaître lorsqu'ils s'éloignent. Le résultat obtenu dépend beaucoup de la distribution initiale des particules (nœuds) et des liaisons. Aussi faut-il multiplier les configurations ou augmenter la taille du modèle pour obtenir un résultat ayant une valeur statistique. La puissance de calcul nécessaire interdit donc pour l'instant d'utiliser de ce type de modèle dans les codes aux éléments finis. Cependant, la qualité des simulations obtenues (représentation entre autres de l'effet Mullins, de la stabilisation du

comportement en quelques cycles et des déformations rémanentes) suggère que la représentation physique est pertinente. On remarquera là encore que l'adoucissement est lié à la géométrie de la microstructure, ce qui étaie l'utilisation des élongations maximales comme mesure de l'endommagement dans les modèles précédents.

2.4.2 Modèles phénoménologiques

L'effet Mullins est souvent représenté comme un endommagement permanent. Beaucoup de modèles s'appuient pour cela sur le cadre classique de la mécanique de l'endommagement mise en place pour les métaux : l'énergie libre du matériau endommagé W s'obtient à partir de l'énergie libre du matériau non endommagé W_0, en multipliant par une fonction d'endommagement f :

$$W = f(D)W_0,$$

où D est une variable d'endommagement, généralement scalaire.

Le modèle de Simo [78] appartient à cette catégorie, avec $f(D) = 1 - D$. L'endommagement est piloté par le niveau de déformation maximal atteint au cours de la vie du matériau, défini par la mesure :

$$\Xi(t) = \sqrt{2W_0(\boldsymbol{E}(t))} \quad .$$

Le critère d'endommagement correspond donc à :

$$\varphi = \Xi(t) - \Xi^m(t) \leq 0 \quad \text{avec} \quad \Xi^m(t) = \sup_{s \in]-\infty, t]} (\Xi(s))$$

et $\varphi = 0$ définit une surface d'endommagement où, comme dans le cas de la plasticité, l'état de charge ou de décharge est défini par le signe de $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{E}} : \dot{\boldsymbol{E}}$. L'évolution de l'endommagement est alors définie par une fonction h telle que :

$$\frac{dD}{dt} = \begin{cases} h(\Xi, D)\dot{\Xi}, & \text{si } \varphi = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{E}} : \dot{\boldsymbol{E}} > 0\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction d'endommagement proposée :

$$f(\Xi^m) = \beta + (1 - \beta)\frac{1 - \exp(-\frac{\Xi^m}{\alpha})}{\frac{\Xi^m}{\alpha}}$$

n'a que deux paramètres, $\beta \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, +\infty[$, et représente correctement l'effet Mullins.

Miehe [61] propose un modèle où l'endommagement est séparé en deux parties :

- une partie discontinue, pilotée par l'énergie maximale atteinte au cours de la vie du matériau
- une partie cumulative, pilotée par l'intégrale de l'énergie sur tout le trajet de chargement

L'évolution de ces deux types d'endommagement est pilotée par une exponentielle décroissante. La forme de la partie discontinue du modèle est couramment utilisée, parfois avec une mesure de la déformation différente. Robisson [72] propose d'utiliser l'élongation principale maximale, Chagnon [16] le premier invariant de $\boldsymbol{C}$.

Parmi les modèles récents, on peut citer celui d'Ogden et Roxburgh [64] et ses développements par Dorfmann et Ogden [23] [24]. Le comportement est donné par la pseudo-énergie de déformation :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = \eta W_0(\lambda_1, \lambda_2) + \phi(\eta), \quad \phi(1) = 0,$$

où W_0 est l'énergie de déformation du matériau « de référence » et où le terme de dissipation ϕ vérifie :

$$\phi'(\eta) = -W_0(\lambda_1, \lambda_2) \quad .$$

Ce type de développement permet de représenter l'effet Mullins (W_0 représentant le comportement à première charge) mais également la boucle d'hystérésis du matériau stabilisé (W_0 représentant alors le comportement de la charge à partir de l'état relâché). La forme du comportement endommagé est donné par η. Ogden propose la forme suivante :

$$\eta = 1 - \text{erf}\left(\frac{W_m - W_0(\lambda_1, \lambda_2)}{m}\right),$$

tandis que Dorfmann propose une tangente hyperbolique :

$$\eta = 1 - \frac{1}{r}\text{th}\left(\frac{W_m - W_0(\lambda_1, \lambda_2)}{\mu m}\right),$$

où μ est le module de cisaillement à l'origine associé à W_0, et où r et m sont des constantes matériau. L'endommagement est ici piloté par W_m, la valeur maximale atteinte par W_0.

2.4.3 Anisotropie

Tous ces modèles présentent l'inconvénient de représenter l'endommagement de manière isotrope car la variable d'endommagement est toujours choisie scalaire. Afin de représenter l'anisotropie, il est nécessaire d'utiliser une variable d'endommagement directionnelle.

Martin Borret [60] propose d'enregistrer les élongations maximales selon sept directions choisies D^α. Le comportement s'écrit alors comme la somme sur ces directions de l'énergie libre unidirectionnelle :

$$w(\lambda^\alpha, \lambda_m^\alpha) = G(\lambda^\alpha - \frac{b}{{\lambda^\alpha}^3})(1 - c(\lambda_m^\alpha - 1))\left(\frac{1}{1 - \mu\frac{{\lambda^\alpha}^2}{{\lambda_m^\alpha}^2 + a}} + R\exp(-k(\lambda^\alpha - 1)^{2n})\right),$$

a, b, c, μ, R, k et n étant des paramètres matériau à identifier. L'exponentielle permet de représenter les déformations rémanentes.

Très récemment, Horgan [43] a proposé un comportement orthotrope utilisant des invariants de $\boldsymbol{C}$ d'ordre plus élevé pour décrire la transformation. L'énergie de déformation est alors une fonction des différents invariants :

$$I_1, \quad I_2 \quad \text{et} \quad I_{n+2}^{i,j} = \mathrm{M}_i \cdot \boldsymbol{C}^n \cdot \mathrm{M}_j \quad i,j = 1,2,3 \quad n = 1,2$$

où M_i désigne la $i^{\text{ième}}$ direction principale de $\boldsymbol{C}$. Ce modèle n'a pour l'instant pas été confronté à des résultats expérimentaux. Par ailleurs, il suppose que les directions principales du chargement ne tournent pas.

2.4.4 Conclusion et discussion

Les modèles physiques utilisent l'origine entropique de l'énergie de déformation pour proposer des modèles fondés sur la description des configurations statistiques des chaînes macromoléculaires. Ils sont assez efficaces et leurs paramètres matériau sont à la fois peu nombreux et reliés à des paramètres physiques comme le nombre de segments par chaîne ou la température (bien qu'en général ils soient identifiés pour obtenir la meilleure correspondance à l'essai plutôt que par une analyse de la microstructure du matériau étudié). Ils sont malheureusement peu utilisés car ils font intervenir des expressions non analytiques qui compliquent leur introduction dans les codes de calcul. Par exemple, le seul modèle de ce type disponible dans le code Abaqus est celui d'Arruda et Boyce et utilise un développement en série entière de la fonction de Langevin, au détriment de la qualité de la description du raidissement.

Les modèles phénoménologiques du type séries de Rivlin ou d'Ogden sont suffisamment souples pour convenir à un grand nombre de matériaux, ce qui explique leur succès par rapport à des modèles à nombre réduit de paramètres. On leur préfère pourtant ces derniers car l'identification des (nombreux) paramètres des fonctions polynomiales est particulièrement peu fiable, ce qui peut donner lieu à des aberrations dans certains cas de sollicitations multiaxiales. Les modèles du type polynomiaux sont disponibles dans la plupart des codes de calcul. Parmi les modèles à raidissement (type Hart-Smith), seuls les plus anciens sont disponibles.

La plupart des modèles de comportement hyperélastique, qu'ils soient physiques où phénoménologiques, sont incapables de reproduire la courbure à l'origine du comportement. Certains auteurs [36] ont proposé comme solution d'ajouter un terme dépendant du deuxième invariant de $\boldsymbol{C}$ aux lois classiques souvent exprimées uniquement en fonction du premier invariant. Cette correction n'apporte pas toujours les résultats escomptés et peut, de surcroît, donner des résultats fantaisistes pour des sollicitations différentes de celles à partir desquelles les paramètres ont été identifiés. Le lecteur pourra se reporter à la thèse de Chagnon [16] pour une étude plus détaillée de ce problème particulier. Il semble qu'il n'existe pas à ce jour de modèle universel permettant de décrire précisément les deux courbures du comportement de tous les caoutchoucs. Ceci explique la multitude des modèles existants dans la littérature, chacun proposant la forme mathématique convenant au mélange de sa propre étude.

L'effet Mullins est généralement représenté par une fonction d'endommagement qui vient corriger l'énergie de déformation du matériau sain. Elle est souvent discontinue et

dépend de manière plus ou moins simple de la déformation maximale atteinte au cours de la vie du matériau, en général par l'intermédiaire de l'énergie de déformation du matériau sain. Quelques modèles physiques sont également disponibles, mais ils sont souvent plus complexes. On retiendra toutefois les modèles à altération de réseau qui représentent bien le phénomène avec peu de paramètres. Presque tous les modèles représentent l'accommodation de façon isotrope.

Remarque *La quasi-totalité des modèles de comportement présentés dans la littérature sont fondés sur deux hypothèses fondamentales :*

– *la transformation s'effectue de manière* isotherme *;*
– *l'élasticité caoutchoutique a une origine purement* entropique.

La première hypothèse est discutable car la viscosité entraîne un échauffement du matériau pouvant atteindre plusieurs degrés. Quant à l'hypothèse de l'élasticité entropique, Chadwick [13, 15] montre qu'elle est incompatible avec certains phénomènes observés comme celui de l'inversion thermoélastique (lorsqu'on chauffe un élastomère soumis à une tension supérieure à un certain seuil, il se rétracte au lieu de s'allonger). Il conviendrait donc de construire un modèle de comportement thermoélastique complet. Ici pourtant, pour des raisons de simplicité du modèle, nous conservons ces hypothèses classiques. Dans la mesure où les essais ont été réalisés de manière à limiter l'auto-échauffement du matériau à des températures suffisamment proches de l'ambiante pour ne pas modifier son comportement, on peut considérer que la première hypothèse est vérifiée. A priori, la seconde ne l'est pas ; on ne pourra donc décrire que des phénomènes purement mécaniques.

Chapitre 3

Proposition d'un modèle de comportement cyclique

A déformation maximale imposée, le comportement de l'élastomère évolue surtout pendant les quelques premiers cycles. Au delà, il n'évolue presque plus. C'est ce comportement à grand nombre de cycles qu'on se propose de représenter.

Dans un premier temps, on présente le modèle et les hypothèses sur lesquelles il repose. Il est ensuite comparé à des modèles similaires issus de la littérature. La méthode de détermination des coefficients du modèle est ensuite présentée et certaines hypothèses discutées. Enfin, on montre la capacité du modèle à décrire les phénomènes voulus.

3.1 Description du modèle

Le comportement cyclique des élastomères de notre étude est peu dissipatif. On choisit donc de le représenter par un comportement hyperélastique, ce qui permet de se placer dans le cadre des modèles statistiques décrits dans la partie précédente. Le modèle à statistique non gaussienne prend en compte l'extension limite des chaînes, ce qui donne une densité d'énergie de la forme (*cf.* équation 2.1 page 44) :

$$W = \int_{\Omega} \int_{\lambda_l} p(\lambda_l, d\Omega) w(\lambda_l, \lambda) d\lambda_l d\Omega \quad .$$

On simplifie l'expression de W en supposant que dans une direction donnée, toutes les chaînes ont la même extension limite. La densité d'énergie devient alors :

$$W = \int_{\Omega} w(\lambda_l(d\Omega), \lambda(d\Omega)) d\Omega \quad .$$

On en déduit les contraintes :

$${}^t\boldsymbol{B} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{F}} \frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_l) d\Omega,$$

soit, si on appelle D_Ω le vecteur directeur d'une chaîne contenue dans le petit angle solide $d\Omega$:

$$\boldsymbol{B} = \int_\Omega \frac{1}{\lambda}\frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_l)(\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{D}_\Omega) \otimes \mathrm{D}_\Omega \, d\Omega \quad . \tag{3.1}$$

On ne fait pas ici l'hypothèse d'isotropie du comportement. Au contraire, on suppose que l'extension limite des chaînes dépend de la direction. En effet, si le matériau vierge de toute sollicitation peut raisonnablement être considéré comme isotrope, nous avons vu que ce n'est plus le cas pour un matériau qui a déjà été sollicité mécaniquement (*cf.* 1.5.2).

Les données expérimentales suggèrent que le comportement stabilisé d'un élastomère dépend essentiellement du chargement maximal vu tout au cours de sa vie. Cependant, l'élastomère aurait également une certaine capacité de restauration à condition d'attendre suffisamment longtemps. Ainsi, il parait raisonnable de faire l'hypothèse que seul le chargement maximal vu au cours du régime établi a une influence sur le comportement cyclique. Autrement dit, le comportement en régime établi est indépendant du régime transitoire. Dans le cas d'un chargement aléatoire, il conviendra donc de déterminer, en fonction des capacités de recouvrement du matériau étudié, le chargement maximal vu « suffisamment souvent » pour entretenir l'accommodation du matériau.

Il reste encore à choisir une mesure de ce chargement maximal. Ce choix est motivé par des considérations physiques similaires à celles évoquées par Marckmann [57]. Le raidissement apparaît lorsque les chaînes atteignent leur extension limite λ_l. Au delà, certaines liaisons se rompent et la longueur moyenne des chaînes intactes augmente. Ainsi, l'extension limite moyenne des chaînes résulte de l'élongation maximale qu'elles ont vu. On peut donc écrire l'extension limite des chaînes dans une direction comme une fonction des élongations maximales vue en régime établi :

$$\lambda_l(\mathrm{D}_\Omega) = f\left(\sup_{cycle}\left(\lambda(\mathrm{D}_\Omega{}')\right), \quad \forall \mathrm{D}_\Omega{}'\right) \quad .$$

On fait une hypothèse supplémentaire de découplage entre les directions matérielles. On considère que l'extension limite des chaînes dans une direction donnée dépend uniquement de l'élongation maximale vue dans cette *même* direction :

$$\lambda_l(\mathrm{D}_\Omega) = f\left(\sup_{cycle}\left(\lambda(\mathrm{D}_\Omega)\right)\right) \quad . \tag{3.2}$$

On obtient ainsi l'expression de la densité d'énergie sous la forme :

$$W(t) = \int_\Omega w(\sup_{t' \in cycle}\left(\lambda(t', \mathrm{D}_\Omega)\right), \lambda(t, \mathrm{D}_\Omega)) d\Omega \quad .$$

Il reste à choisir la densité d'énergie w. Le modèle à statistique non gaussienne :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_l) = \lambda_l \, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_l}\right)$$

décrit bien le raidissement mais présente l'inconvénient de ne pas s'écrire explicitement. Par ailleurs, il ne décrit pas très bien le matériau de cette étude dont le comportement présente

des courbures importantes. On propose donc ici de remplacer la fonction de Langevin inversée par une autre fonction, aux propriétés similaires. Le choix de cette fonction repose uniquement sur des arguments phénoménologiques. Il s'agit de la fonction :

$$w(\lambda) = -\frac{G}{2}\left(\lambda_l - \frac{1}{\lambda_l}\right)\ln\left(\frac{\lambda_l - \lambda}{\lambda_l + \lambda}\frac{\lambda_l + 1}{\lambda_l - 1}\right) \quad .$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_l) = \frac{G}{1 - \frac{\lambda^2 - 1}{{\lambda_l}^2 - 1}} \quad .$$

Elle présente une asymptote verticale (jamais atteinte) lorsque λ atteint la valeur d'extension limite λ_l. On propose pour λ_l la loi d'évolution suivante en fonction de l'élongation maximaleλ_m atteinte au cours du cycle :

$$\lambda_l = \sqrt{{\lambda_m}^2 + a} \quad .$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_m) = \frac{G}{1 - \frac{\lambda^2 - 1}{{\lambda_m}^2 + a - 1}} \quad . \tag{3.3}$$

Cette fonction décrit de façon satisfaisante (mieux que la fonction de Langevin inversée) le comportement du matériau de cette étude.

Remarque *La courbe définie par :*

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda^\alpha}(\lambda^\alpha, \lambda_m^\alpha = \lambda^\alpha) = \frac{G}{a}(\lambda^{\alpha 2} - 1 + a) \tag{3.4}$$

ne décrit pas la courbe à première charge comme c'est le cas pour les modèles décrits dans le chapitre précédent. Cette courbe est l'enveloppe supérieure du comportement du matériau à n cycles ($n = 5$ ici), mais ne représente en aucun cas le comportement réel du matériau. Elle peut se définir comme la courbe de traction cyclique stabilisée.

L'intégrale sur la sphère unité est approximée par une somme discrète. On choisit ici des directions régulièrement réparties dans l'espace, de façon à faciliter la détermination des poids attribués à chaque direction. Le nombre de directions est choisi égal à six. En effet, on constate que pour la loi proposée, un nombre de directions inférieur entraîne une dépendance importante de la réponse à l'orientation de l'ensemble de directions par rapport aux directions principales du chargement. Ce phénomène est illustré par les figures 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 qui représentent l'enveloppe de la réponse en traction uniaxiale lorsque cette orientation varie, simulée avec une discrétisation du comportement sur 3, 4, 6 et 10 directions.

3.2 Comparaison avec d'autres modèles

On compare ici le modèle de cette étude à deux modèles présentant des similitudes et qui ont inspiré son écriture.

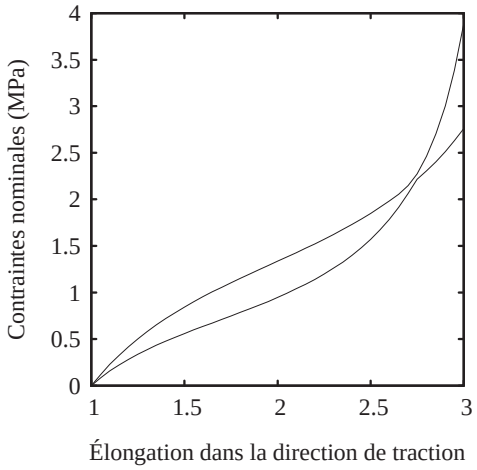


FIG. 3.1 – Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 3 directions.

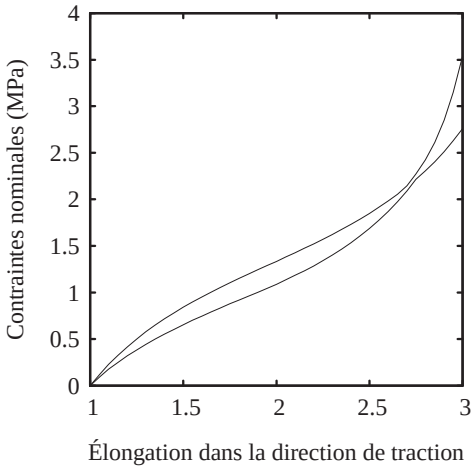


FIG. 3.2 – Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 4 directions.

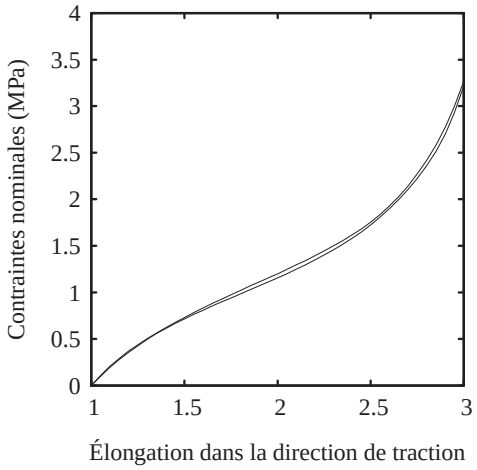


FIG. 3.3 – Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 6 directions.

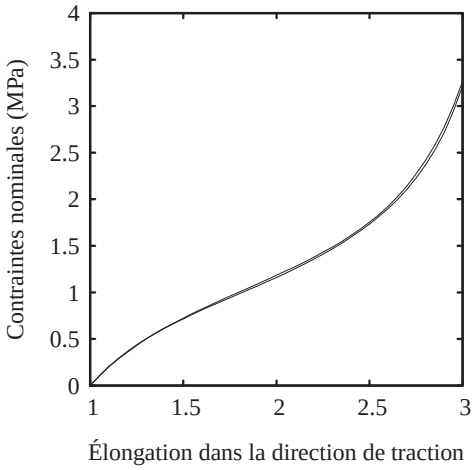


FIG. 3.4 – Enveloppe de la réponse pour un calcul sur 10 directions.

3.2.1 Modèle de Martin-Borret

Le modèle proposé est très proche du modèle de Martin-Borret [60]. En effet, sa loi s'écrit elle aussi comme la somme sur un nombre fini de directions d'une loi uni-axiale paramétrée par l'élongation maximale vue dans la direction considérée. On remarque cependant que la signification physique des deux modèles est de nature très différente. En effet, son modèle décrit un comportement quasi-statique, avec endommagement à la première charge et comportement hyperélastique pour les décharges et recharges suivantes. Ici le comportement est entièrement hyperélastique. On suppose que l'endommagement a eu lieu pendant la période transitoire, non décrite par le modèle, et que le matériau stabilisé ne s'endommage pas davantage. L'élongation maximale est donc un *paramètre* de la loi de comportement plus qu'une *variable* d'endommagement.

3.2.2 Modèle de Gent

Plusieurs auteurs proposent des lois de comportement hyperélastiques, généralement isotropes, paramétrées par les extensions maximales des chaînes. C'est le cas du modèle d'Arruda et Boyce [4] et de celui de Gent [34], deux modèles qui donnent d'ailleurs des résultats similaires [9].

Gent propose le modèle isotrope suivant :

$$W(I_1) = \frac{G}{2}(I_{1l} - 3)\ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_{1l} - 3}\right) \quad .$$

On peut transposer son modèle au cas anisotrope en écrivant l'énergie d'une chaîne libre, d'extension limite λ_l, de la façon suivante :

$$w(\lambda) = \frac{G}{2}({\lambda_l}^2 - 1)\ln\left(1 - \frac{\lambda^2 - 1}{{\lambda_l}^2 - 1}\right),$$

de dérivée :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = \frac{G\lambda}{1 - \frac{\lambda^2 - 1}{{\lambda_l}^2 - 1}} \quad .$$

On trouve une expression très proche du modèle proposé ici en 3.3.

Ce modèle présente l'avantage de tendre vers le modèle néo-hookéen aux petites déformations, ce qui n'est pas le cas de notre modèle. Malheureusement, ce type de loi n'est pas capable de décrire les importantes courbures mesurées dans le cas du comportement accommodé. La figure 3.5 montre que les écarts entre l'essai et ces modèles sont importants. Par ailleurs, même aux petites déformations, le modèle néo-hookéen décrit mal le comportement accommodé (voir par exemple [90], page 87). Ceci est illustré sur la figure 3.6. Ceci explique que l'équivalence avec le modèle néo-hookéen aux petites déformations n'ait pas été recherchée dans le cadre de cette étude.

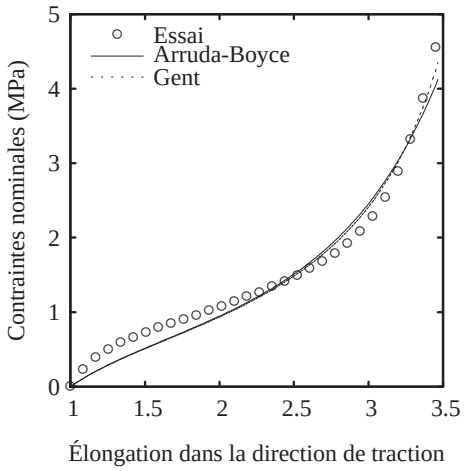


FIG. 3.5 – Essai de traction accommodée à 300% et les modèles de Gent et d'Arruda-Boyce avec les meilleurs coefficients possibles au sens des moindres carrés.

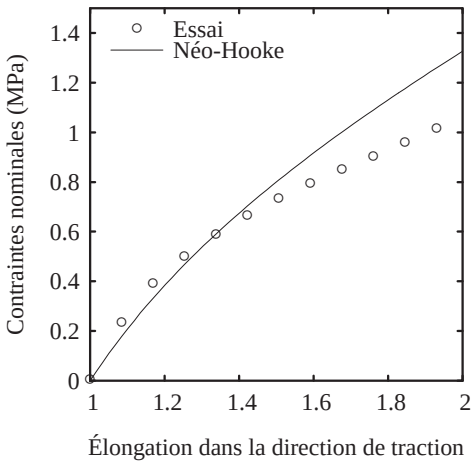


FIG. 3.6 – Comparaison entre le comportement aux petites déformations du matériau accommodé à 300% et le modèle néo-hookéen ajusté sur l'intervalle de déformations 0 - 50%.

3.3 Identification des coefficients du modèle

Les essais utilisés pour cette identification sont des essais cyclés entre effort nul et un déplacement imposé. La propriété d'effacement de l'histoire du matériau par dépassement du chargement maximal atteint précédemment permet d'utiliser la même éprouvette pour différents degrés d'accommodation, à condition de réaliser les essais dans un ordre de niveau d'accommodation croissant, comme sur la figure 3.14.

Le matériau est dit accommodé pour un niveau de chargement lorsque son comportement n'évolue plus (autrement dit, lorsque la courbe enveloppe du comportement décrite ici par l'équation 3.4 dépend peu du nombre de cycles choisi pour déterminer les coefficients du modèle). Les essais de caractérisation ont montré que cette évolution était très faible après les cinq premiers cycles de chargement, ce qui a conduit a choisir le cinquième cycle pour réaliser l'identification. Toutefois, les essais à grand nombre de cycles réalisés par la suite sur éprouvette structure (et qui font l'objet de la partie II) montrent que l'hypothèse de stabilité du comportement à cinq cycles n'est jamais réalisée exactement. La figure 3.7 donne l'évolution de l'effort maximal avec le nombre de cycles pour un essai contrôlé en déplacement. On distingue trois phases :

1. tout d'abord, un fort adoucissement qui correspond à l'effet Mullins ;
2. ensuite, un plateau pendant lequel cet adoucissement reste mesurable mais faible ;
3. enfin, une brusque chute de la raideur due à la rupture de l'éprouvette.

L'existence d'un plateau confirme bien l'hypothèse du comportement stabilisé, mais la durée de la première phase (quelques centaines de cycles) laisse penser que le nombre de cinq

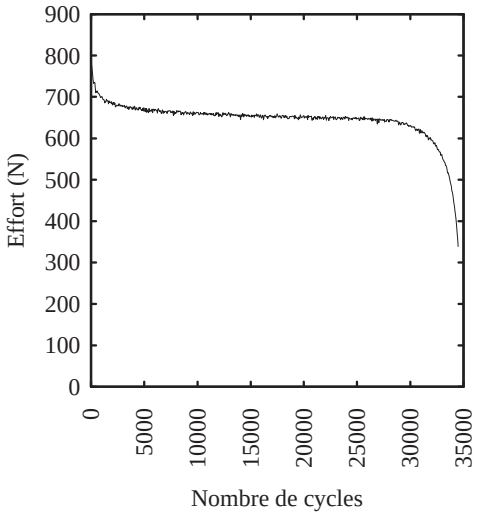


FIG. 3.7 – Évolution de l'effort maximal pour un essai contrôlé en déplacement sur éprouvette AE42.

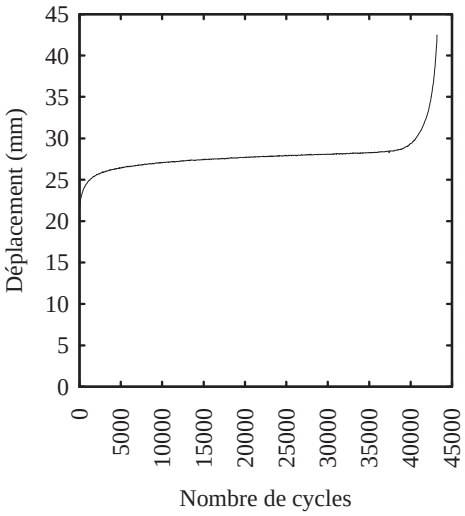


FIG. 3.8 – Évolution du déplacement maximal pour un essai contrôlé en effort sur éprouvette AE42.

cycles choisi pour l'identification du comportement est trop petit. Pour confirmer ou infirmer cette analyse, il serait nécessaire de réaliser des essais à grand nombre de cycles sur éprouvettes de caractérisation, pour lesquelles les champs de déformation sont uniformes. En effet, dans le cas des éprouvettes structures, des phénomènes de redistribution d'un cycle à l'autre peuvent retarder la mise en place du comportement stabilisé local et/ou global.

Le matériau accommodé présente une hystérèse faible, mais suffisante pour que se pose la question de savoir si le modèle élastique proposé doit être identifié sur les courbes de charge, de décharge ou bien encore sur une courbe moyenne. Ce sont les courbes de charge qui ont été retenues pour l'identification, car un matériau accommodé à un chargement donné présente ensuite la même courbe de charge pour tous les niveaux de chargement inférieurs, tandis que les courbes de décharge dépendent du maximum atteint. Ce sont les courbes de charge qui sont liées au niveau d'accommodation.

Le comportement proposé est hyperélastique, c'est-à-dire sans déformations rémanentes, une approximation raisonnable pour les niveaux de déformation inférieure à 100% mais contestable aux plus grandes déformations. Dans les applications visées, des déformations importantes n'apparaissent que très localement, la plus grande partie de la pièce travaillant à des niveaux de déformation inférieure à 50 %. Ainsi l'hypothèse de comportement élastique est justifiée presque partout, et n'est mise en défaut qu'aux endroits très sollicités, précisément où une fissure est susceptible d'apparaître. L'apparition de ces fissures étant pilotée par les grandes déformations, il n'est pas nécessaire de décrire précisément le comportement proche de zéro et les déformations rémanentes. Afin d'être cohérent avec la démarche élastique proposée, on identifie la loi sur la partie réversible des déformations ; autrement dit, de l'élongation mesurée Λ, seule la composante $\lambda = \frac{\Lambda}{\Lambda_{remanent}}$ est prise en compte pour

le calcul du comportement.

Les coefficients matériau du modèle ont été identifiés à l'aide d'un programme interne à PSA Peugeot Citroën appelé SICLOP et développé sous Matlab. Il s'agit d'une optimisation classique par moindres carrés. Quatre types d'essais sont disponibles (ils sont décrits au chapitre 1) :

- traction uniaxiale ;
- compression uniaxiale ;
- cisaillement pur ;
- glissement simple.

Ceci correspond à trois états de déformation différents seulement, car les essais de cisaillement pur et de glissement simple sont théoriquement équivalents. Ces deux derniers se sont donc vu attribuer un poids de un demi pour l'identification. Les essais de compression n'ont pas été utilisés. En effet, il a été constaté que le comportement proposé était incapable de simuler correctement à la fois les essais de traction et les essais de compression (*cf.* figure 3.13). Plusieurs causes possibles peuvent justifier cette différence. Premièrement, le modèle proposé n'est peut-être pas capable de représenter tous les états multiaxiaux. Deuxièmement, les phénomènes physiques qui ont lieu en compression (réarrangement du réseau ?) peuvent être différents de ceux qui ont lieu en traction. Pour déterminer les causes exactes de cette insuffisance du modèle, il faudrait disposer d'un essai de traction équi-biaxiale, identique à l'essai de compression du point de vue des déformations mais de pression hydrostatique de signe opposé. Les essais d'endurance présentés en deuxième partie sont surtout des essais en traction. Ainsi, on a délibérément écarté les essais de compression de la base d'expérience pour caractériser au mieux l'endurance[1].

Les coefficients ainsi identifiés valent :

$$G = 2,54\text{MPa} \quad \text{et} \quad a = 2,13$$

Les figures 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 permettent de comparer les courbes expérimentales et simulées. On constate que, sauf pour le cas de la compression, la simulation représente l'essai de manière satisfaisante.

Remarque *La loi de comportement proposée ne contient aucun coefficient matériau chargé de paramétrer la multiaxialité des contraintes. Il n'est donc pas nécessaire de réaliser plusieurs types de chargement pour identifier ces coefficients. Un simple essai de traction uni-axiale est suffisant. L'utilisation de plusieurs types d'essais permet toutefois de répartir les erreurs d'identification sur les différents états de multiaxialité.*

3.4 Discussion sur le choix de la mesure de l'endommagement

Des considérations physiques ont conduit à choisir l'élongation maximale comme mesure de l'endommagement du matériau : le raidissement apparaît lorsque les chaînes atteignent leur extension limite. Dans cette hypothèse, l'endommagemment est donc lié à une

[1] On discute cette hypothèse au chapitre 7, dans une comparaison entre des essais en traction et en compression.

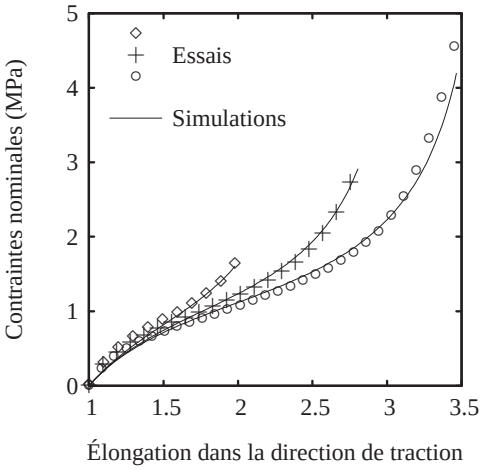


FIG. 3.9 – Traction uni-axiale.

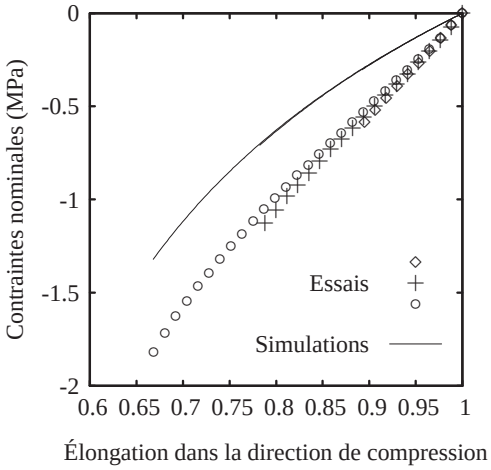


FIG. 3.10 – Compression uni-axiale.

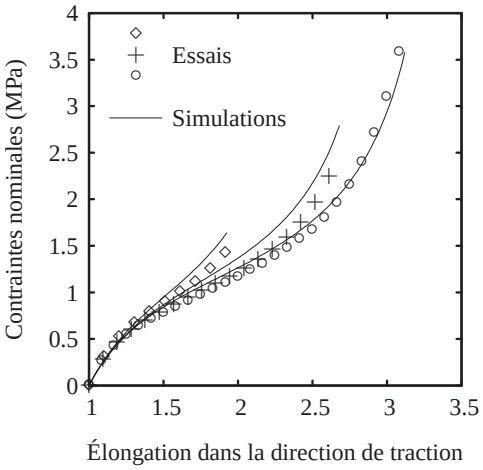


FIG. 3.11 – Cisaillement pur.

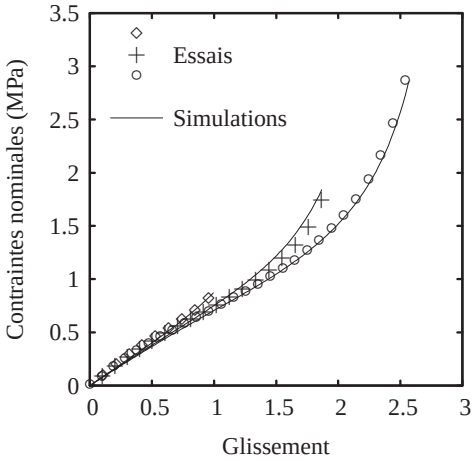


FIG. 3.12 – Glisssement simple.

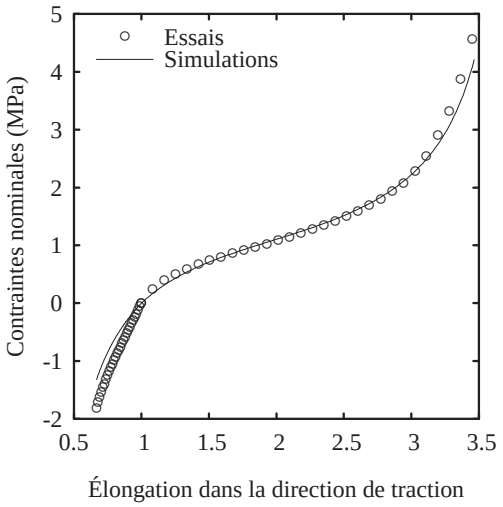


FIG. 3.13 – Traction et compression uni-axiales.

variable géométrique. C'est d'ailleurs le choix qui a été fait par plusieurs auteurs, notamment Govindgee et Simo [37, 38], ou plus récemment Markmann [57] et Chagnon [16].

Afin d'éprouver ce choix, on désire comparer les deux essais cycliques dont le chargement maximal est imposé respectivement en déplacement et en effort. Les courbes stabilisées correspondantes sont représentées figure 3.16. On constate que les courbes en efforts sont légèrement plus raides que celles des courbes en déplacement. Les figures 3.14 et 3.15, qui représentent la totalité de l'essai, expliquent ce phénomène. Le nombre de cycles nécessaires à la stabilisation du comportement est plus grand dans le cas d'un contrôle en effort que dans le cas d'un contrôle en déplacement. Ainsi, après cinq cycles de chargement contrôlés en effort, le comportement évolue encore de façon non négligeable. Le comportement stabilisé en effort est donc plus souple que celui représenté sur la figure 3.16, et donc plus proche du comportement obtenu par un essai contrôlé en déplacement. Le choix effectué pour la mesure de l'endommagement semble donc pertinent. Toutefois, il serait intéressant de réaliser ces mêmes essais à plus grand nombre de cycles pour confirmer cette tendance.

Au cours des essais d'endurance sur éprouvettes structure (décrits au chapitre 5), l'évolution de l'effort maximal pour les essais contrôlés en déplacement et du déplacement maximal pour les essais controlés en effort a été enregistrée. La figure 3.17 montre le point (déplacement max, effort max) enregistré pour chacun de ces essais à mi-vie de l'éprouvette. Les points des deux types d'essais sont situés sur une même courbe. Le comportement accommodé semble donc dépendre de façon équivalente de l'élongation maximale ou de la contrainte maximale.

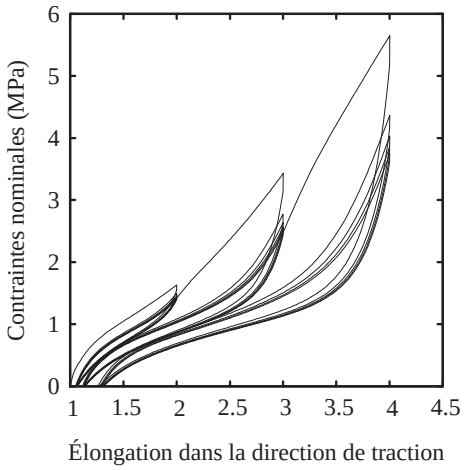


FIG. 3.14 – Cisaillement pur cyclique contrôlé en déplacement.

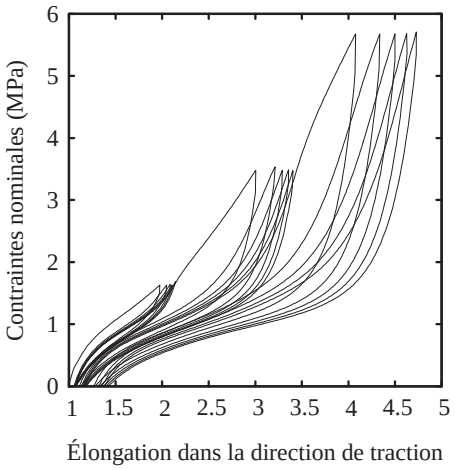


FIG. 3.15 – Cisaillement pur cyclique contrôlé en effort.

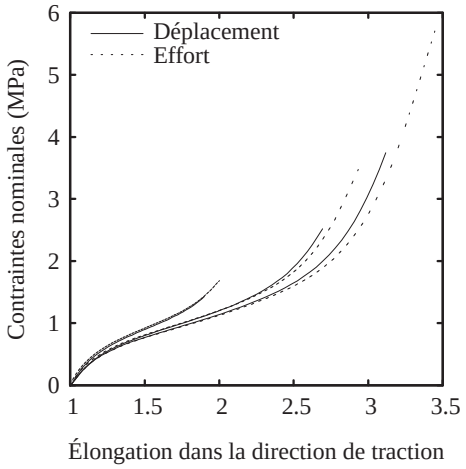


FIG. 3.16 – Comparaison entre les recharges obtenues par un contrôle en déplacement et un contrôle en effort à cinq cycles.

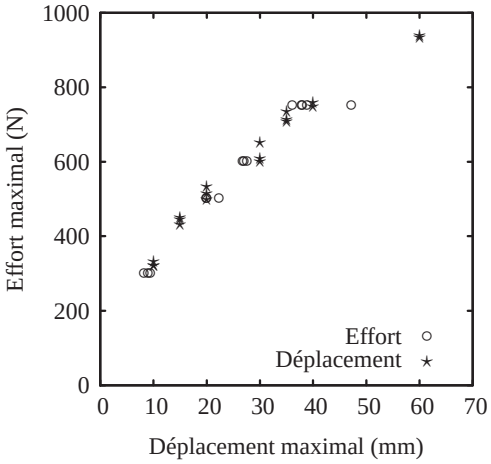


FIG. 3.17 – Effort et déplacement maximaux à mi-vie enregistrés pendant les essais d'endurance sur éprouvette AE42.

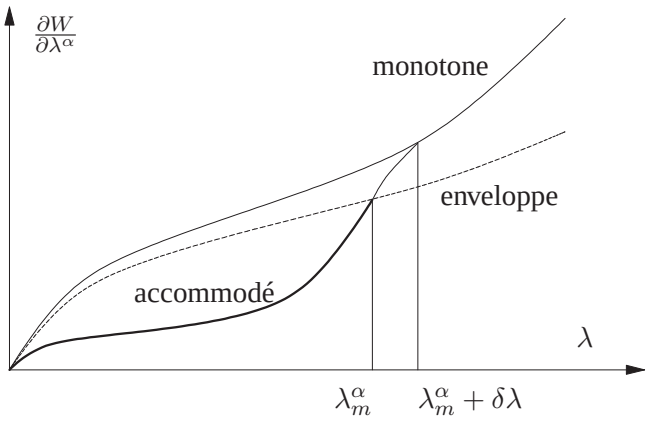


FIG. 3.18 – Le comportement est accommodé jusqu'à λ_m^α puis retrouve le comportement monotone.

3.5 Anisotropie

On se propose de montrer que le modèle décrit plus haut permet effectivement de représenter l'anisotropie induite par le chargement de façon satisfaisante. On commence par simuler la cinématique de l'essai de cisaillement pur, pour obtenir les élongations maximales sur chacune des directions. On simule ensuite l'essai de traction. Dans chaque direction le matériau est accommodé jusqu'à l'élongation λ_m^α obtenue au cours du cisaillement. Au delà de λ_m^α, le matériau retrouve son comportement monotone.

Notre modèle de comportement ne permet pas de décrire cette transition vers le comportement monotone du matériau mais uniquement le comportement accommodé. Afin de représenter cet essai en particulier nous proposons de modifier l'énergie de déformation comme décrit sur la figure 3.18. Le comportement accommodé est simulé avec la loi proposée. Le comportement monotone est simulé à l'aide d'une loi hyperélastique classique. La transition entre le comportement accommodé et le comportement monotone est simplement réalisée par un polynôme assurant une certaine régularité de la courbe contrainte-déformation ; plus précisement, on assure la continuité de W et de ses dérivées simple et double par rapport à λ^α. On suppose que cette transition s'effectue sur un intervalle de déformation compris entre λ_m et $\lambda_l = \sqrt{{\lambda_m^\alpha}^2 + a}$. En effet, l'asymptote verticale que présente le comportement stabilisé en λ_l correspond à la limite d'extension des chaînes. Au delà, des liaisons se rompent, et l'extension limite des chaînes dépend alors de l'extension courante. Il est donc naturel de retrouver le comportement à première charge en λ_l. On notera que la transition entre le comportement accommodé et le comportement monotone n'est pas nécessaire pour décrire l'état de contrainte d'une structure soumise à un chargement cyclique. Ainsi cet aspect n'a pas fait l'objet d'une étude approfondie.

Le détail du calcul est disponible en annexe D.

Lorsqu'on simule l'essai en intégrant la loi sur un grand nombre de directions (voir la figure 3.20), on retrouve bien l'allure de la courbe expérimentale, ce qui permet de valider

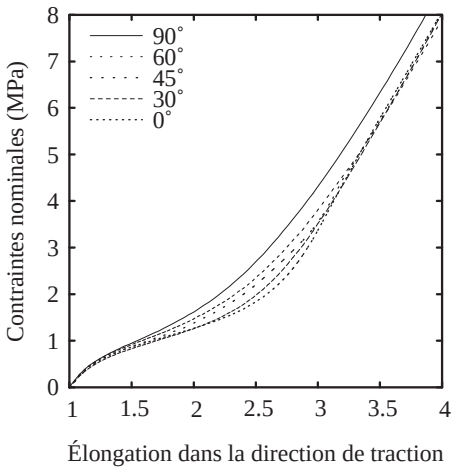


FIG. 3.19 – Essais de traction monotone sur éprouvettes préalablement accommodées, selon plusieurs angles.

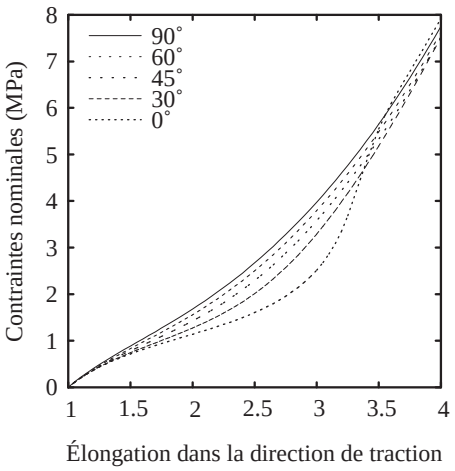


FIG. 3.20 – Simulation de l'essai ci-contre.

l'hypothèse simplificatrice 3.2 qui suppose que l'accommodation dans une direction donnée ne dépend que de l'élongation maximale atteinte dans cette même direction. Les écarts entre la simulation et le comportement réel peuvent s'expliquer de la façon suivante. L'essai de cisaillement pur entraîne une déformation permanente du matériau pouvant atteindre 15% dans la direction de traction. Celle-ci est difficilement mesurable car les conditions aux limites changent pendant l'opération de prélèvement. Ainsi, les déformations mesurées pendant l'essai de traction ne prennent pas pour référence l'état vierge du matériau. On peut supposer que la déformation rémanente est d'autant plus importante que la direction de prélèvement est proche de la direction d'accommodation. Ainsi, pour être comparables à la simulation (qui elle prend pour référence le matériau vierge), les courbes présentées figure 3.19 doivent être décalées vers la droite d'une valeur d'autant plus importante que l'angle de prélèvement par rapport à la direction d'accommodation est petit.

Nous avons vu précédemment que six directions de discrétisation suffisent pour que la réponse à un chargement soit inchangée lorsque l'orientation de l'ensemble des directions tourne par rapport aux directions principales du chargement. La figure 3.21 présente l'enveloppe de la réponse lorsqu'on simule la traction sur l'éprouvette prélevée à 45° avec différents nombres de directions de discrétisation. On constate qu'il faut un nombre élevé de directions pour obtenir un résultat qui dépende peu du choix de l'orientation de l'ensemble des directions par rapport aux directions principales. Le choix de six directions pourrait donc être discutable si une grande précision était requise.

3.6 Conclusion et perspectives

Un modèle de comportement hyperélastique anisotrope a été proposé à partir de considérations semi-physiques, semi-phénoménologiques. L'accommodation est représentée comme

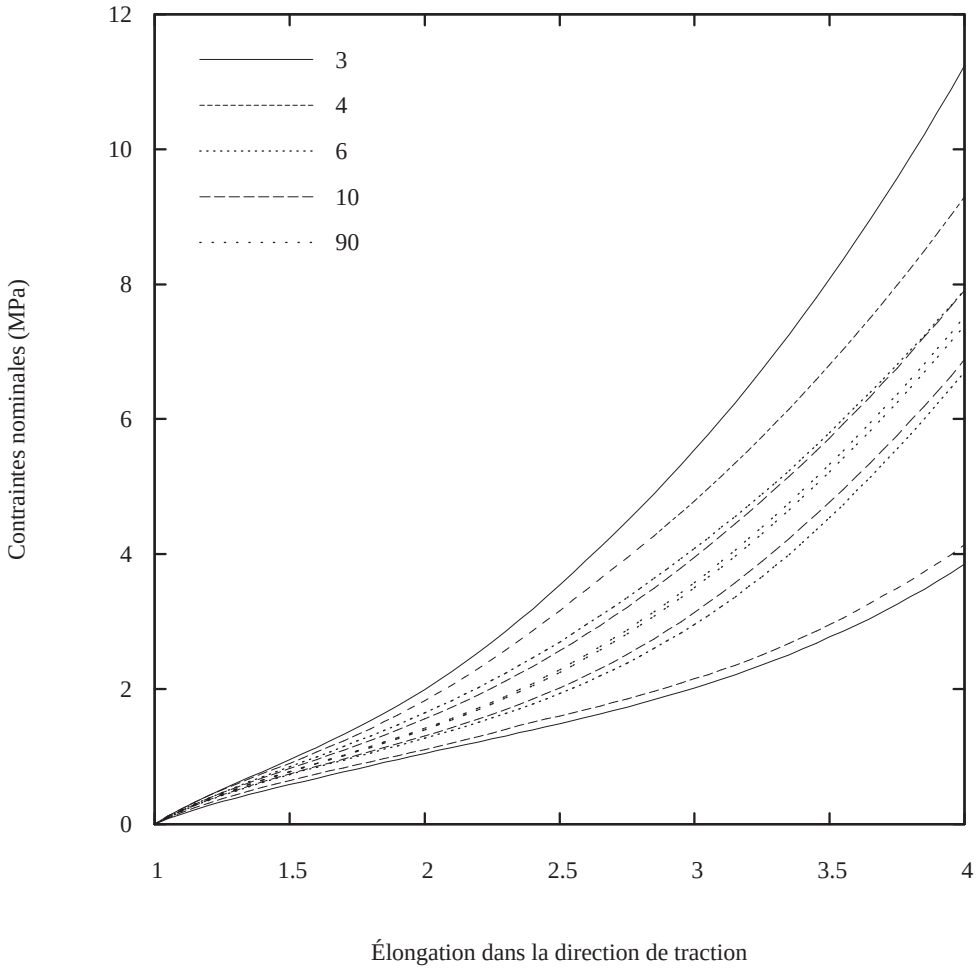


FIG. 3.21 – Enveloppe des simulations de la traction sur éprouvette prélevée à 45° pour un calcul avec 3, 4, 6, 10 et 90 directions.

un endommagement conséquence d'un chargement préalable : la variable d'endommagement est constante et n'est donc plus qu'un paramètre du modèle. La mesure de l'endommagement a été choisie égale à l'élongation maximale, pour être en accord avec les modèles physiques. Cette mesure est réalisée dans six directions réparties régulièrement dans l'espace, afin de décrire l'anisotropie induite par cet endommagement. L'originalité de ce modèle est d'une part, de décrire une accommodation à $n > 1$ cycles, d'autre part de ne faire dépendre le comportement accommodé que des variables cycliques en supposant qu'il est indépendant du régime transitoire. On verra dans le chapitre suivant que la détermination des paramètres cycliques de la loi n'est pas triviale.

Les résultats obtenus avec ce modèle sont satisfaisants en traction et en cisaillement, mais pas en compression. Les effets d'anisotropie induite par le chargement sont correctement représentés. La courbure à l'origine obtenue avec ce modèle est meilleure qu'avec les modèles de la littérature mais n'est pas encore satisfaisante.

Chapitre 4

Comportement cyclique d'une structure

On présente la formulation du problème d'accommodation cyclique d'une structure. On propose une méthode de résolution pour obtenir l'état stabilisé d'une pièce tridimensionnelle sous chargement cyclique quelconque.

4.1 Position du problème

Soit $\mathcal{S}$ un solide occupant le volume Ω de frontière $\partial\Omega$ (voir figure 4.1). A chaque instant t, on impose à ce solide un chargement défini par :

- des forces surfaciques $T_i^d(t)$ définies sur $S_{T_i}(t)$;
- des déplacements $u_i^d(t)$ définies sur $S_{u_i}(t)$;

et éventuellement (bien que ce ne soit pas le cas dans cette étude) :

- des forces volumiques $f^d(t)$ définies sur $\partial\Omega$;
- des températures $\Theta^d(t)$ définies sur $\partial\Omega$;

où i désigne l'indice de trois directions orthogonales entre elles et où :

$$S_{u_i} \cup S_{Ti}(t) = \partial\Omega \quad \text{et} \quad S_{u_i} \cap S_{Ti}(t) = \emptyset \quad i = 1, 2, 3$$

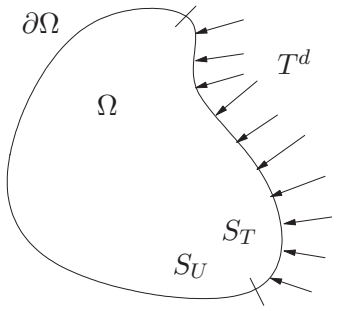


FIG. 4.1 – Système mécanique.

Le système est régi par les équations de champ suivantes :

$$\begin{cases} \text{l'équation d'équilibre :} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} + \rho f^d = 0 \quad ; \\ \text{la loi de comportement :} \quad {}^t\boldsymbol{B} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} - \eta \boldsymbol{F}^{-1} \quad ; \\ \text{la liaison interne d'incompressibilité :} \quad \det \boldsymbol{F} = 1 \quad ; \\ \text{l'équation thermique s'il y a lieu ;} \end{cases}$$

et par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_{ij}(t) \cdot N_j = T_i^d(t) \quad \text{sur} \quad S_{T_i}(t); \\ u_i(t) = u_i^d(t) \quad \text{sur} \quad S_{u_i}(t); \\ \text{et} \quad \Theta(t) = \Theta^d(t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \text{s'il y a lieu.} \end{cases}$$

Dans cette étude, on réduit l'espace des chargements aux chargements cycliques, dont la période est notée T.

$$\exists\, T \quad \text{tel que} \quad \forall t \in [0, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} T^d(t+nT) = T^d(t) \\ u^d(t+nT) = u^d(t) \\ f^d(t+nT) = f^d(t) \\ \Theta^d(t+nT) = \Theta^d(t) \end{cases} .$$

On suppose qu'après une courte période de transition, l'évolution des champs de contrainte et de déformation est également cyclique :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \boldsymbol{B}(t+nT) = \boldsymbol{B}(t) \\ \boldsymbol{F}(t+nT) = \boldsymbol{F}(t) \end{cases} .$$

Dans cet état « stabilisé », l'énergie de déformation W est donnée par le modèle proposé au chapitre précédent. Le comportement au point X et à l'instant t est donc une fonction des dilatations actuelles $\boldsymbol{C}(\mathrm{X}, t)$ mais également de leur histoire sur un cycle stabilisé par l'intermédiaire des élongations maximales atteintes au cours du cycle $\lambda_m^\alpha = \sup_{t\in[0,T]} \lambda^\alpha$. Comme cette histoire est différente d'un point à l'autre, les élongations maximales λ_m^α le sont aussi. Ceci est illustré par la figure 4.2 : aux points où la structure se déforme beaucoup, le comportement est moins raide qu'aux points où la structure se déforme peu car le modèle décrit un adoucissement d'autant plus important que les élongations maximales atteintes sont importantes.

On voit alors qu'obtenir l'état stabilisé en tout point de la structure est un problème implicite, puisqu'il faut déterminer en même temps le champ de déformation à tout instant et le champ des élongations maximales qui paramètrent la loi. En effet, les couplages sont les suivants :

- $\forall t \in [0, T] \quad \boldsymbol{C}(t)$ vérifie les équations de champ (qui font intervenir λ_{loi}^α) et les conditions aux limites ;
- $\forall t \in [0, T] \quad \lambda^\alpha(t) = \sqrt{\mathrm{D}^\alpha \cdot \boldsymbol{C}(t) \cdot \mathrm{D}^\alpha} \quad i = 1, \ldots, \alpha$;
- et $\lambda_{loi}^\alpha = \sup_{t\in[0,T]} \lambda_m^\alpha \quad i = 1, \ldots, \alpha$;

où les λ_{loi}^α désignent les élongations maximales qui apparaissent dans le modèle de comportement, de façon à éviter la confusion avec les élongations maximales λ_m^α effectivement

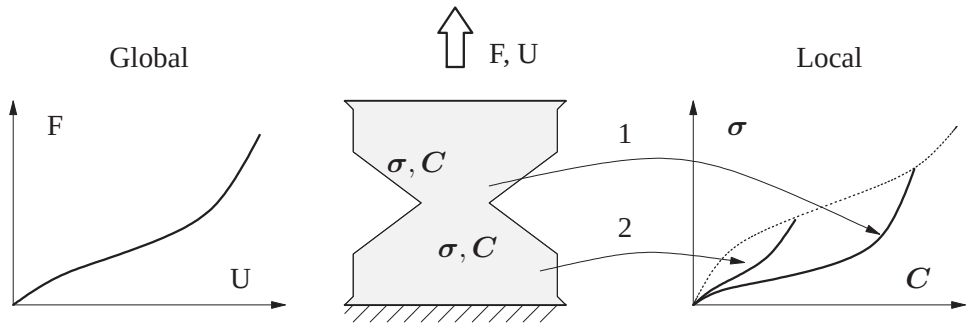


FIG. 4.2 – On considère une structure soumise à un chargement cyclique global de traction décrit par le couple effort/déplacement (F, U). L'extension limite atteinte dans la zone 1 est plus importante que celle atteinte dans la zone 2 du fait de la réduction de section. La zone 1 présente donc un comportement plus souple que la zone 2.

atteintes. Par la suite, pour alléger les notations, les indices relatifs aux directions seront omis car le nombre de paramètres d'endommagement n'a aucune importance dans cette analyse.

Dans le chapitre précédent, seules des transformations homogènes connues ont été envisagées ; la détermination des élongations maximales atteintes était donc immédiate. Pour une structure quelconque, la détermination des λ_{loi} est au contraire un problème complexe. Pour ce type de comportement, il n'existe actuellement aucune étude et analyse concernant l'existence et l'unicité d'une solution. Ni résultat d'existence, ni résultat d'unicité du champ des λ_{loi} n'a pu être démontré.

4.2 Détermination des élongations maximales

4.2.1 Courbe de charge

Le chapitre précédent a mis en évidence l'existence d'une courbe maîtresse (*cf.* équation 3.4) correspondant à l'enveloppe supérieure des courbes de réponse à une sollicitation. Cette courbe maîtresse donne la contrainte maximale en fonction de l'élongation maximale atteinte au cours du cycle (voir figure 4.3). Elle décrit l'état d'un matériau hyperélastique d'énergie de déformation vérifiant :

$$\frac{\partial w_m}{\partial \lambda} = \frac{\partial w}{\partial \lambda}\left(\lambda, \lambda_m = \lambda\right) \quad .$$

On propose ici d'utiliser cette courbe comme une courbe de charge (courbe cyclique de traction). Ainsi, au cours d'un cycle de chargement, on détermine les champs de contrainte et de déformation en faisant dans le comportement :

$$\lambda_{loi}(t) = \sup_{s\in[0,t]} \left(\lambda(s)\right),$$

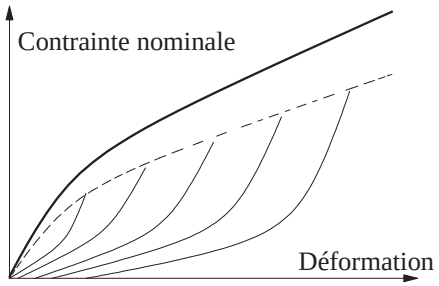


FIG. 4.3 – L'enveloppe du comportement stabilisé correspond à la courbe en pointillés (et non à la courbe en gras qui est la courbe de première charge).

c'est-à-dire en autorisant λ_{loi} à varier dans le temps. Il s'agit d'une charge virtuelle qui n'est *pas* la courbe de première charge et qui doit permettre d'obtenir directement une mesure de l'extension limite des chaînes en régime stabilisé. La variation de λ_{loi} selon cette courbe ne correspond en aucun cas à l'évolution réelle de la longueur des chaînes au cours du temps, qui augmente pendant les premiers cycles de chargement (endommagement) et diminue pendant les temps de repos (recouvrement, restauration).

4.2.2 Phénomènes de redistribution

La plupart des auteurs représentent une accommodation au premier cycle. La courbe maîtresse est alors la courbe de première charge du matériau, et le paramètre λ_{loi} une variable d'endommagement croissante puisque décrivant un phénomène souvent considéré comme irréversible. Ici, les λ_{loi} déterminés à partir d'un cycle de chargement décrit par la courbe maîtresse ne correspondent pas aux élongations maximales vues par le matériau tout au cours de sa vie, car le modèle ne représente pas la période transitoire d'accommodation. On ne cherche d'ailleurs pas à déterminer celles-ci car le matériau à une capacité de recouvrement suffisamment importante pour que seules les élongations maximales vues de manière répétée aient une influence sur le comportement. Malheureusement, l'utilisation de la courbe maîtresse comme courbe de charge ne garantit pas non plus l'obtention de ces élongations maximales cycliques. En effet, la modification du comportement en cours de chargement entraîne des phénomènes de redistribution de contraintes et de déformations. Il est alors possible que des élongations maximales atteintes localement pendant une première étape de chargement ne le soient plus lors du deuxième chargement.

4.2.3 Algorithme de résolution

On propose de résoudre le problème de manière itérative, comme décrit sur la figure 4.4. On se donne un champ initial des élongations maximales $\lambda_m = \lambda_{loi}$. Le comportement en tout point est alors complètement défini. On réalise un calcul de structure pour obtenir le champ des déplacements au cours d'un cycle de chargement, dont on déduit les élongations maximales λ_m effectivement obtenues au cours du cycle. On réactualise alors le champ des

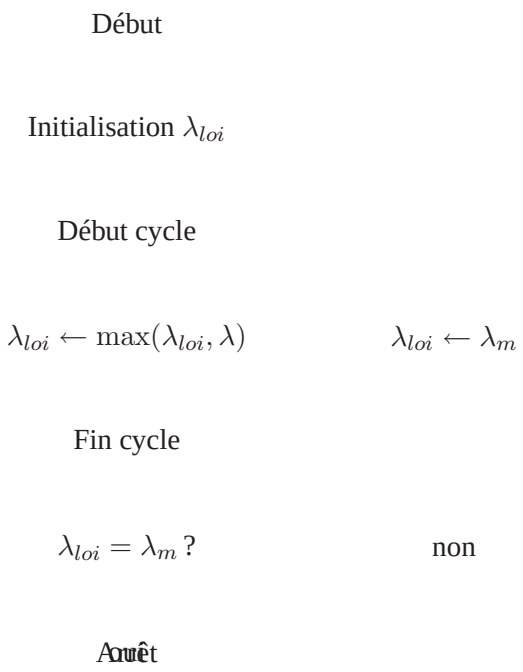


FIG. 4.4 – Obtention de l'état cyclique de la structure.

élongations maximales λ_{loi} en fonction du résultat du calcul. On répète cette opération jusqu'à ce que l'écart entre deux calculs soit inférieur à un certain critère d'arrêt. En pratique, ce critère d'arrêt est de l'ordre de grandeur de la précision du calcul.

La loi de comportement a été introduite dans le code Abaqus sous la forme d'un programme utilisateur appelé UMAT. L'incompressibilité est imposée par une fonction de pénalisation. L'implantation numérique d'une telle loi est un travail long et fastidieux mais relativement classique. Le détail de la méthode n'est donc pas exposé ici. Le lecteur trouvera ces indications en annexe E.

4.3 Robustesse de la méthode

En l'absence de résultat d'existence et d'unicité de solution, on désire éprouver la robustesse de la démarche sur quelques exemples.

On compare sur un cas test les résultats obtenus en partant de deux champs de λ_{loi} (uniformes) différents : $\lambda_{loi} = 1$ et $\lambda_{loi} = 5$. La structure choisie est une éprouvette axi-symétrique en forme de diabolo. Elle est soumise à un chargement de traction et de torsion combinées hors phase, de façon à ce que les élongations maximales soient atteintes à des instants différents dans les différentes directions. Le chargement de traction est imposé sous forme d'un effort et le chargement de torsion sous la forme d'un déplacement angulaire. Le modèle éléments finis, représenté figure 4.5, est constitué d'éléments axi-symétriques acceptant la torsion. Seul un demi-diabolo est représenté ; une condition de symétrie est appliquée

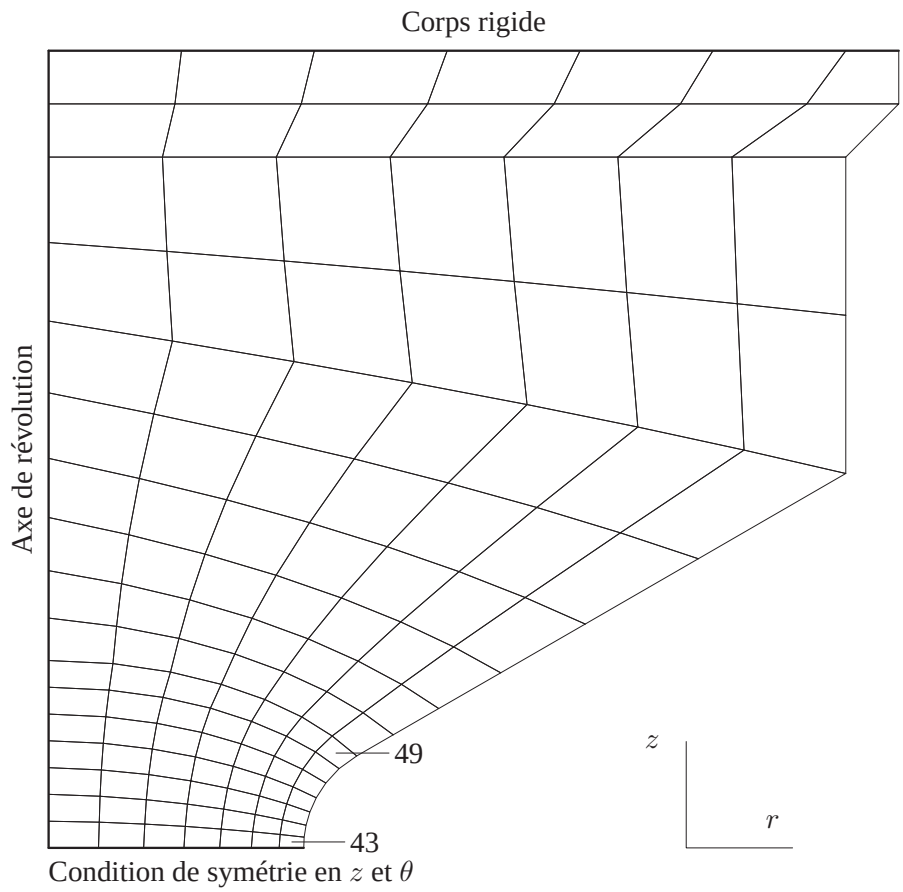


FIG. 4.5 – Maillage grossier de l'éprouvette AE2. Les éléments 43 et 49 sont indiqués.

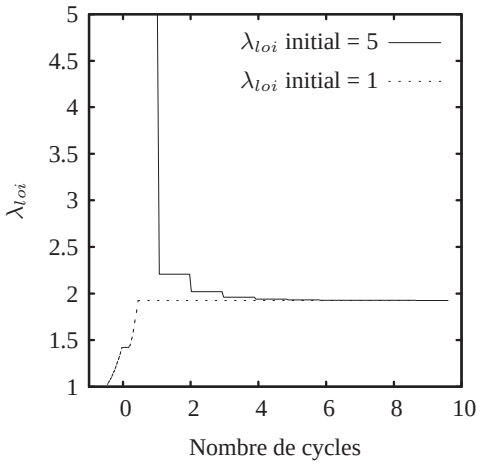


FIG. 4.6 – Évolution de l'élongation maximale λ_{loi} dans la direction où elle est maximale, prise au centre de l'élément 43 (le plus sollicité).

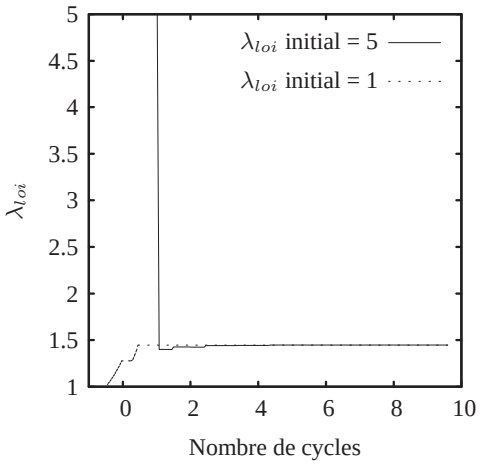


FIG. 4.7 – Évolution de l'élongation maximale λ_{loi} dans la direction où elle est maximale, prise au centre de l'élément 49 (un élément quelconque).

sur les nœuds situés dans le plan médian. Les figures 4.6 et 4.7 permettent de comparer l'évolution des λ_{loi} cycle après cycle dans deux éléments représentatifs de l'évolution des λ_{loi} sur toute la structure. Le trajet de chargement pour un nombre de cycle négatif correspond au trajet de chargement initial pour amener l'éprouvette de son état de repos au cycle de traction/torsion hors phase (qui ne passe pas par zéro). On constate plusieurs choses :

- les deux champs initiaux de λ_{loi} conduisent à la même solution, et ceci malgré un choix initial ($\lambda_{loi} = 5$) très éloigné de la solution (puisque le λ_{loi} maximal sur toute la structure est de l'ordre de deux) ;
- le choix initial de $\lambda_{loi} = 1$ permet d'obtenir les λ_{loi} beaucoup plus rapidement que le choix $\lambda_{loi} = 5$;
- la comparaison de l'évolution des λ_{loi} pour la condition initiale $\lambda_{loi} = 5$ dans les deux éléments choisis met en évidence le phénomène de redistribution des contraintes avec cette évolution, et par conséquent l'importance de représenter l'accommodation dans la loi de comportement pour obtenir des résultats locaux corrects.

Par ailleurs, la méthode de détermination des λ_{loi} est dépendante du trajet suivi pour arriver à un certain état de chargement. Si on reprend l'exemple précédent, on peut proposer deux trajets simples pour atteindre le trajet de chargement cyclique hors-phase. Ceci est illustré par la figure 4.8. Le trajet 1 consiste à aller au point de torsion maximale à traction nulle, tandis que le trajet 2 consiste à aller au point de traction maximale à torsion nulle. La courbe 4.9 montre qu'après un cycle de calcul complet, les élongations maximales obtenues sont les mêmes dans les deux cas de trajet initial. En réalité, un deuxième cycle a été nécessaire pour que la variation des λ_{loi} soit plus petite que la précision de la machine.

En pratique, on constate que pour toutes les structures et les chargements considérés dans cette étude, un ou deux cycles de chargement suffisent pour obtenir l'état stabilisé de

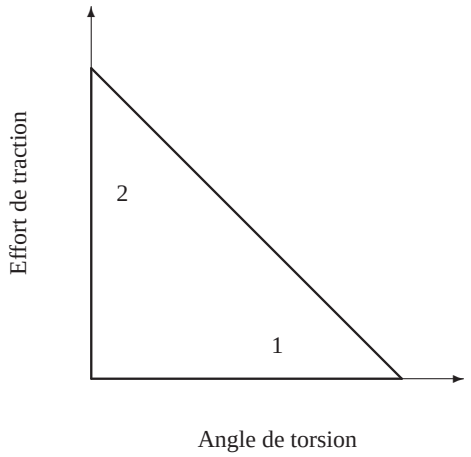


FIG. 4.8 – Illustration de deux trajets de chargement possibles pour aller de la configuration de référence (au repos) vers un cycle de traction/torsion hors-phase : (1) à traction nulle ; (2) à torsion nulle.

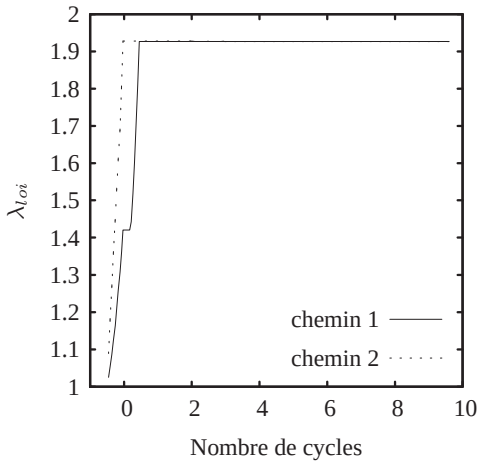


FIG. 4.9 – Évolution de l'élongation maximale λ_{loi} dans la direction où elle est maximale, prise au centre de l'élément 43 pour le chargement 1 et le chargement 2.

la structure et l'indépendance du résultat par rapport au trajet de chargement utilisé pour aller de l'état de repos au cycle de chargement. Toutefois, il convient de remarquer que ces structures et ces chargements sont relativement simples et que ce ne serait peut-être pas le cas pour une structure ou un chargement quelconque.

4.4 Validation expérimentale : comportement global des éprouvettes diabolo

Des essais de traction cycliques ont été réalisés sur les deux éprouvettes AE2 et AE42. La loi de comportement proposée dans ce chapitre a été utilisée pour simuler la réponse globale des diabolos à ce chargement. Les figures 4.10 et 4.11 montrent les comparaisons entre les simulations et les essais.

Le procédé de fabrication des éprouvettes diabolo n'est pas aussi bien maîtrisé que celui des éprouvettes de caractérisation ; le temps et la température de cuisson modifient le taux de réticulation et par conséquent la raideur du matériau. Ce phénomène n'est d'ailleurs pas homogène sur toute l'éprouvette : il dépend de la forme de l'éprouvette et de la position de l'empreinte dans le moule. D'un lot à l'autre, on accepte couramment des écarts de l'ordre de 15%. Les écarts observés peuvent donc provenir de l'élaboration des échantillons.

On peut également avancer le fait que les champs de déformation n'étant pas homogènes pour ces éprouvettes, des phénomènes de redistribution de contrainte peuvent apparaître et retarder l'accommodation. Certaines zones n'ont peut-être pas vu suffisamment de cycles à leur niveau de chargement maximal pour que l'accommodation soit complète.

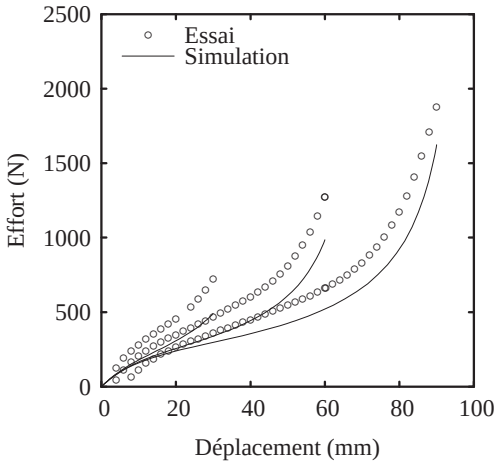


FIG. 4.10 – Traction sur éprouvette AE42. Essai (cinquième charge) et simulation.

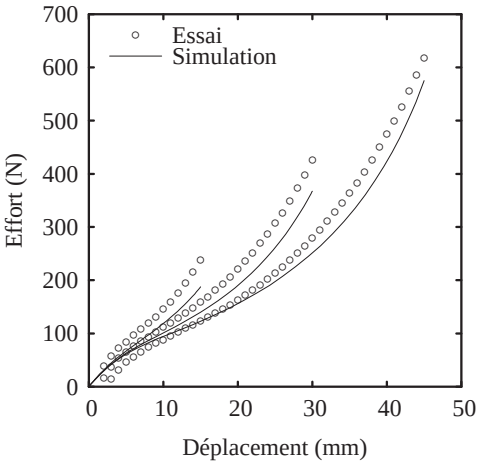


FIG. 4.11 – Traction sur éprouvette AE2. Essai (cinquième charge) et simulation.

Enfin, les déformations rémanentes ne sont pas prises en compte dans le modèle proposé, qui ne décrit que la partie élastique du comportement.

Les résultats obtenus sont donc jugés satisfaisants, compte tenu de la simplicité du modèle et du faible nombre de coefficients matériau à identifier.

4.5 Conclusion et perspectives

Les élongations maximales qui paramètrent la loi sont solutions d'un problème implicite. Elles peuvent être obtenues de façon satisfaisante en utilisant la courbe enveloppe du comportement comme courbe de charge. Entre deux cycles de chargement, ces élongations maximales sont actualisées à la valeur atteinte au cycle précédent. La convergence est obtenue très rapidement, souvent en un seul cycle pour les cas simples de cette étude. Ce résultat est empirique ; il n'a pas été démontré.

La loi de comportement proposée a été implantée dans le code de calcul Abaqus. Elle a ensuite été validée par le calcul de deux éprouvettes diabolo. On estime qu'elle permet de représenter correctement les champs mécaniques pour une éprouvette soumise à un chargement cyclique.

Deuxième partie

Estimation de la durée de vie

Chapitre 5

Présentation de l'étude et analyses préliminaires

Ce chapitre présente les essais d'endurance réalisés pour cette étude et propose une analyse des sollicitations subies par les éprouvettes au cours de ces essais. L'analyse a pour objectif de mettre en évidence les paramètres du chargement susceptibles d'entraîner l'endommagement du matériau.

Remarque *Dans la première partie, le terme d'endommagement s'applique à l'effet Mullins. Celui-ci se produit pendant la période de transition entre le comportement à première charge et le comportement stabilisé. On peut le considérer davantage comme un réarrangement global de la structure du matériau que comme une détérioration menant à la rupture. Il se traduit d'ailleurs par un paramètre (et non une variable) de la loi de comportement. Ici, dans la deuxième partie, le terme d'endommagement désigne la dégradation du matériau engendré par fatigue, qui conduit à la rupture. Il ne s'accompagne pas nécessairement d'une modification des propriétés à l'échelle macroscopique du matériau car il s'agit d'un endommagement très localisé.*

5.1 Protocole expérimental

La totalité des essais présentés dans ce chapitre a été réalisée au sein de la société Modyn-Trelleborg par Elisabeth Ostoja-Kuczynski et Pierre Charrier. La définition de la géométrie des éprouvettes, ainsi que le choix des essais, à fait l'objet d'un travail préparatoire commun. La définition du protocole expérimental sera ici limitée au minimum nécessaire et le lecteur se réfèrera à la thèse d'Ostoja-Kuczynski [65] à paraître et aux différentes publications de Charrier [17] et Ostoja-Kuczynski [66] pour obtenir des informations plus détaillées.

5.1.1 Éprouvettes

Afin d'être représentatif des états multiaxiaux de chargement sur pièce réelle, les éprouvettes choisies pour cette étude sont des éprouvettes axi-symétriques de section variable,

dites « éprouvettes diabolo ». Elles sont référencées AE (pour Axi-symétrique Entaillée) suivi du rayon d'entaille en millimètres. Ce sont des éprouvettes très classiques déjà utilisées par Cadwell en 1940 [11]. La géométrie de ces deux éprouvettes-ci a été reproduite d'après la thèse de Robisson [72]. Elles ont été utilisées dans le cadre de plusieurs mémoires [2, 72, 73, 16], qui constituent une source de comparaison intéressante. Les plans sont disponibles en annexe F.

Le choix d'éprouvettes massives (par opposition à des éprouvettes plates) présente l'intérêt de limiter l'influence de l'atmosphère sur la durée de vie. En effet, les élastomères réagissent avec l'oxygène et l'ozone présents dans l'air. Cette réaction entraîne une diminution de l'élongation à rupture, ce qui provoque un craquèlement de la surface de l'éprouvette [5]. Dans le cas d'une éprouvette plate, le rapport de la surface sur le volume est important, et donc l'oxydation également. Dans le cas d'une pièce massive, les substances oxydantes ne pénètrent pas à cœur, ce qui réduit leur influence. On remarquera que la plupart des applications industrielles, comme les éprouvettes diabolo, sont massives. Une éprouvette massive est également moins sensible à la présence d'un défaut de surface (dû à la mise en forme, par exemple) qu'une éprouvette plate. La durée de vie ainsi obtenue est donc une caractéristique du matériau et non de la technique d'élaboration de l'éprouvette.

Les éprouvettes sont moulées par injection, comme le sont les pièces. Elles sont ensuite congelées à -18°C afin d'éviter tout phénomène de vieillissement. La décongélation se fait simplement en laissant l'éprouvette à température ambiante pendant quelques jours avant de la solliciter.

Le rayon d'entaille des deux éprouvettes est très différent. L'éprouvette AE42 est quasiment cylindrique, ce qui permet d'obtenir des champs de déformation presque homogènes, l'entaille n'ayant pour objectif que de localiser l'apparition des fissures à l'équateur de l'éprouvette. L'éprouvette AE2 est au contraire très entaillée de façon à générer un gradient de déformation dans la hauteur de l'éprouvette et un état de déformation multiaxial en fond d'entaille.

5.1.2 Banc d'essai

Le banc d'essai (représenté figure 5.1) se compose de deux vérins pneumatiques linéaires et d'un moteur électrique rotatif avec lesquels il est possible de réaliser des essais de traction/compression, de torsion ou même d'essais de traction et de torsion combinées. Le système de pilotage permet d'imposer des efforts ou des déplacements. L'éprouvette AE42 est massive et nécessite un couple important pour fissurer, dépassant les limites du moteur. Par conséquent, seule l'éprouvette AE2 est utilisée pour les essais de torsion. L'éprouvettes AE42 sert donc uniquement aux essais de traction.

Les essais sont réalisés dans une enceinte thermique où, sauf indication contraire, la température est maintenue à 23°C. Un capteur infra-rouge permet de mesurer la température à la surface des éprouvettes testées. La fréquence de sollicitation des éprouvettes est choisie de façon à ne pas provoquer un auto-échauffement trop important du matériau. Une élévation de température inférieure à 20°C en surface est acceptée car elle ne modifie ni le comportement ni la durée de vie de l'éprouvette.

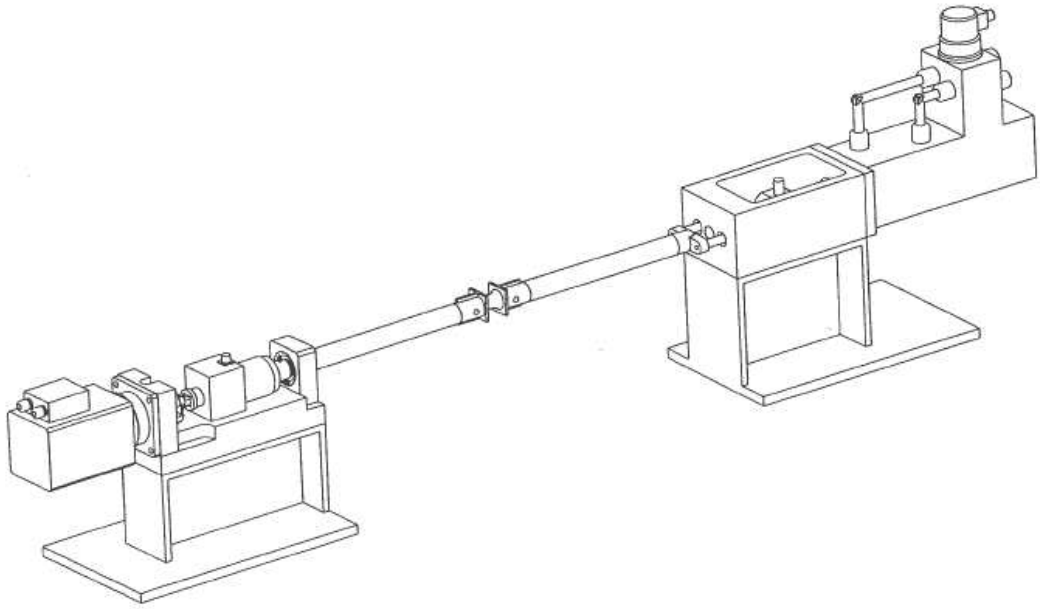


FIG. 5.1 – Schéma du montage expérimental de traction/torsion. L'enceinte thermique n'est pas représentée.

5.1.3 Définition de la durée de vie d'une structure

La défaillance d'une pièce antivibratoire automobile est généralement définie comme une perte de raideur de la structure, car c'est la grandeur qui affecte le bon fonctionnement de la pièce. Cette définition est celle du constructeur. En pratique, on constate que certaines pièces assurent toujours leur fonction avec des fissures de taille importante, pouvant aller jusqu'à un tiers voire la moitié de la section utile de la structure. Ceci s'explique par le fait que ces pièces travaillent souvent en compression ; la fissure refermée affecte peu la raideur de la pièce. Celle-ci dépend donc fortement de la position de la fissure par rapport à la structure d'une part et au chargement d'autre part. Ainsi, répondre à ce cahier des charges suppose de prévoir l'apparition et la propagation d'une fissure dans une structure tridimensionnelle soumise à un chargement complexe. Cet objectif est très ambitieux compte tenu des connaissances actuelles concernant la propagation de fissure dans un élastomère, aussi cette étude se limitera-t-elle à la prévision de l'amorçage de la fissure.

La notion d'amorçage de fissure est associée à la définition d'une échelle d'observation. Plus la fissure que l'on est capable de détecter est petite, plus la durée d'amorçage estimée est courte. En effet, la durée mesurée comprend la phase d'amorçage proprement dite et une phase de propagation plus ou moins longue selon la taille de fissure détectable. Dans le cas du caoutchouc, on explique l'effet Mullins par des ruptures de chaînes et des décohésions charge/matrice. Ainsi, *stricto sensu*, on pourrait même dire que des micro-fissures apparaissent au cours du tout premier cycle de chargement. Dans la mesure où l'on désire

associer l'apparition d'une fissure à une durée de vie d'une structure, il faut choisir une taille critique de fissure suffisamment grande pour que sa propagation puisse entraîner la défaillance de la structure. Par ailleurs, cette taille critique doit rester suffisamment petite devant les dimensions caractéristiques de la structure pour que seul l'état mécanique local ait entrainé l'apparition de la fissure, autrement dit, que le calcul de la structure vierge de toute fissure soit suffisant pour prévoir l'apparition d'une fissure de la taille caractéristique. Ici, cette taille est choisie égale à 2 mm. Ainsi, par la suite et sauf contre-indication, le terme d'amorçage fera référence à l'apparition d'une fissure de cette taille.

La détection d'une fissure de taille donnée nécessite un moyen de détection approprié. Dans notre cas, la fissure est visible à l'oeil nu lorsqu'elle apparaît à la surface de l'éprouvette (ce qui est le plus souvent le cas). Cependant, pour des raisons d'automatisation des tâches, l'apparition des fissures est détectée par le biais de la mesure des contraintes lorsque le chargement est imposé en déplacement et réciproquement. La méthode employée est celle proposée et mise en œuvre par Ostoja-Kuczynski [66]. La raideur efficace de l'éprouvette au $N^{\text{ième}}$ cycle est définie par :

$$K(N) = \frac{F_{max}(N)}{L_{max}(N)},$$

où F_{max} et L_{max} désignent respectivement l'effort et le déplacement maximaux atteint au cours du cycle. On suppose que K présente une décroissance logarithmique due à la visco-élasticité du matériau, c'est-à-dire :

$$N\frac{dK}{dN} = \text{constante}.$$

La durée de vie est alors définie comme le cycle à partir duquel cette relation n'est plus vérifiée. Cette méthode présente l'avantage d'être applicable aussi bien pour des chargements imposés en effort que pour des chargements imposés en déplacement. Ostoja-Kuczynski montre que pour les éprouvettes et les chargements de cette étude, l'apparition d'une fissure de 2 mm est bien corrélée avec la durée de vie estimée par sa méthode.

5.1.4 Localisation de l'amorçage des fissures

Dans la majorité des cas, les fissures apparaissent en surface des éprouvettes, à l'équateur. Une analyse détaillée des faciès de rupture, réalisée par Le Cam [52] dans le cadre de sa thèse, a montré que le lieu d'amorçage se situe en réalité en subsurface, à une profondeur d'environ 500 microns. Ce phénomène est probablement du à l'existence d'une « peau » de moulage aux caractéristiques mécaniques différentes. En effet, on suppose qu'il existe un gradient de température dans la pièce pendant sa mise en forme, qui se traduit par un taux de réticulation inhomogène dans la structure. Les caractéristiques mécaniques de cette peau n'ont pas été déterminées. Dans cette étude, on ne représente donc pas ce phénomène et on considère que le lieu d'amorçage de la fissure se situe exactement à la surface.

Dans certains cas, l'éprouvette AE42 s'est rompue à proximité des inserts métalliques (voir la figure 5.2). L'analyse des faciès de rupture a montré que la tenue de la colle qui lie l'insert au caoutchouc n'était pas en cause : la fissure apparaît bien dans le caoutchouc

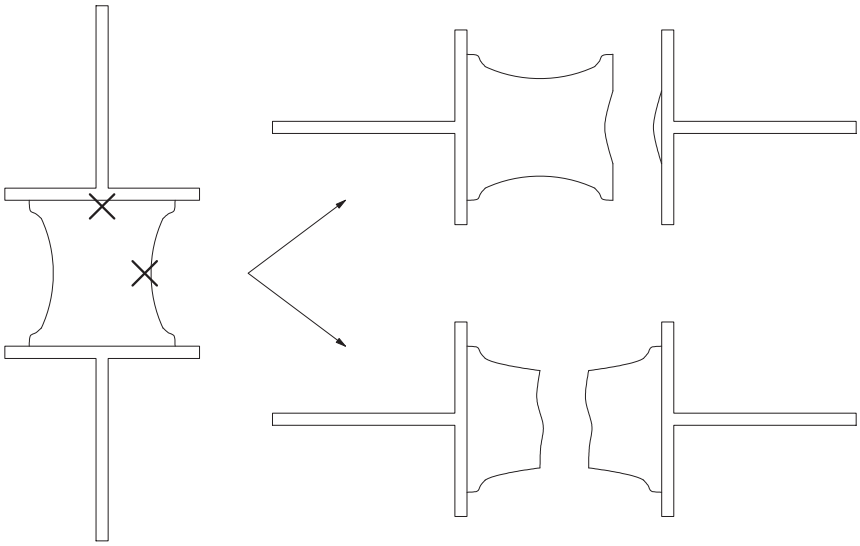


FIG. 5.2 – L'amorçage de la première fissure peut se situer soit en surface, à l'équateur, soit à cœur, sous l'insert métallique. Ceci conduit à deux types de rupture différentes.

même. Elle se propage ensuite le long de la colle et la rupture finale est adhésive. Ce type de rupture est apparu dans les cas de traction de grande amplitude. Le cas de ces éprouvettes n'est pas traité dans ce mémoire, en raison de la difficulté à obtenir une mesure fiable des contraintes et des déformations dans cette zone. Cependant, on peut remarquer que les déformations sont très faibles, puisqu'il existe une liaison de type encastrement entre le caoutchouc et l'insert. En revanche, la condition de transformation isochore fait apparaître des contraintes relativement importantes. Cette constatation suggère que la pression participe à l'endommagement.

Dans les deux cas, l'amorçage se produit sur une inclusion. Toutefois, il n'est pas certain que les mécanismes mis en cause soient les mêmes pour les deux types d'amorçage. On peut voir un faciès de rupture caractéristique de chacun de ces deux types d'amorçage respectivement sur les figures 5.3 et 5.4.

5.1.5 Mesure de l'orientation des fissures

L'orientation des fissures donne des indications sur la nature de la variable d'endommagement. Ostoja-Kuczynski [65] a développé à cet effet une méthode de mesure pour les fissures apparues en surface de l'éprouvette. Celle-ci est illustrée par la figure 5.6. L'éprouvette est photographiée selon huit secteurs angulaires, à l'aide d'un appareil numérique, en position presque relâchée. Les fissures ne sont pas visibles en position complètement relâchée ; on applique alors la torsion juste nécessaire à l'ouverture de la fissure permettant de la voir. On considère que la rotation du plan de la fissure engendrée par cette torsion est négligeable. Sur les photographies obtenues, l'angle de chaque fissure est mesuré par rapport à l'équateur. On estime que la mesure est fiable à 5° près.

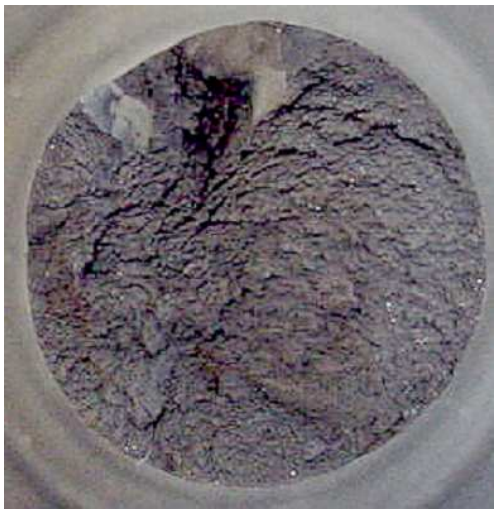


FIG. 5.3 – Faciès de rupture caractéristique d'un amorçage en surface à l'équateur.

FIG. 5.4 – Faciès de rupture caractéristique d'un amorçage à cœur sous l'insert métallique.

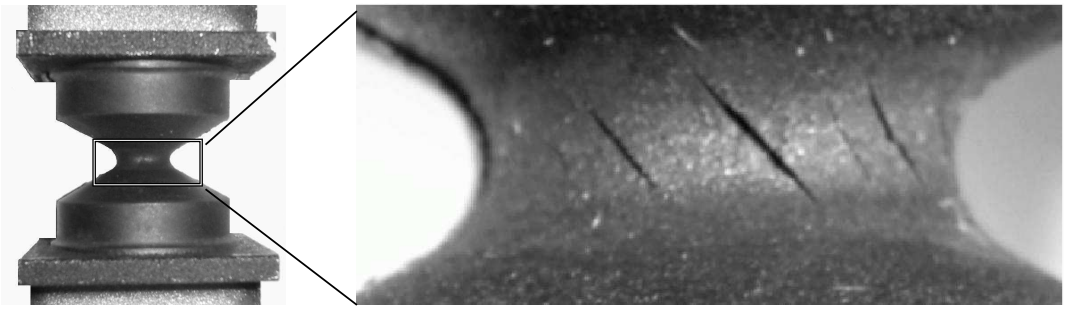


FIG. 5.5 – Fissures apparues sur une éprouvette de type AE2 soumise à une torsion simple de 80° à 4Hz. Une légère torsion a été appliquée pour la photographie, afin d'ouvrir suffisamment les fissures pour les rendre visibles.

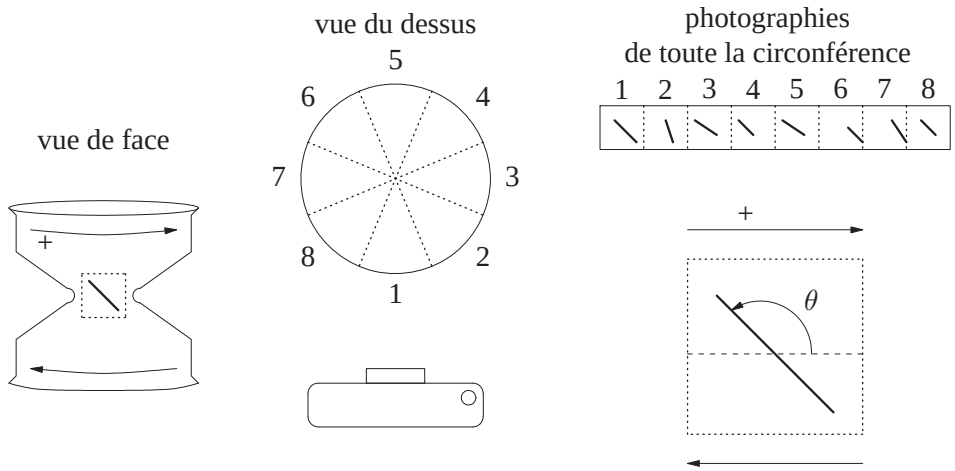


FIG. 5.6 – Méthode de mesure des angles de fissures. Le signe de l'angle est défini par rapport au sens de rotation positif.

5.2 Essais

5.2.1 Types d'essais

Les essais réalisés pour cette étude sont listés dans les tableaux 5.1 et 5.2. Le nom des séries d'essais suit le schéma suivant : type d'éprouvette - type de chargement - type de contrôle. Le type de chargement est codé de la façon suivante :

T traction ;

C compression ;

R torsion ;

RR torsion alternée.

Les différents types de chargement réalisés sont décrits sur la figure 5.7, dans un diagramme torsion/traction. La traction est imposée soit sous la forme d'un déplacement (D) soit sous la forme d'un effort (E) ; de même la torsion est imposée soit en angle (D) soit en couple (E). Par exemple, un essai de traction compression contrôlé en déplacement sur l'éprouvette AE2 est référencé : AE2-TC-D. Le signal imposé est sinusoïdal dans la grande majorité des cas. Exceptionnellement, afin d'améliorer le pilotage de certains essais de traction/torsion, un signal triangulaire a été appliqué, mais on n'a pu constater aucune influence de la forme du signal sur la durée de vie.

Définition *Le rapport de charge R est défini comme le rapport :*

$$R = \frac{\textit{minimum du chargement}}{\textit{maximum du chargement}}$$

où le chargement s'entend en effort ou en déplacement, précision qui ne sera donnée que lorsque la distinction sera nécessaire. Ainsi, un essai de torsion de rapport $R = -1$ est un

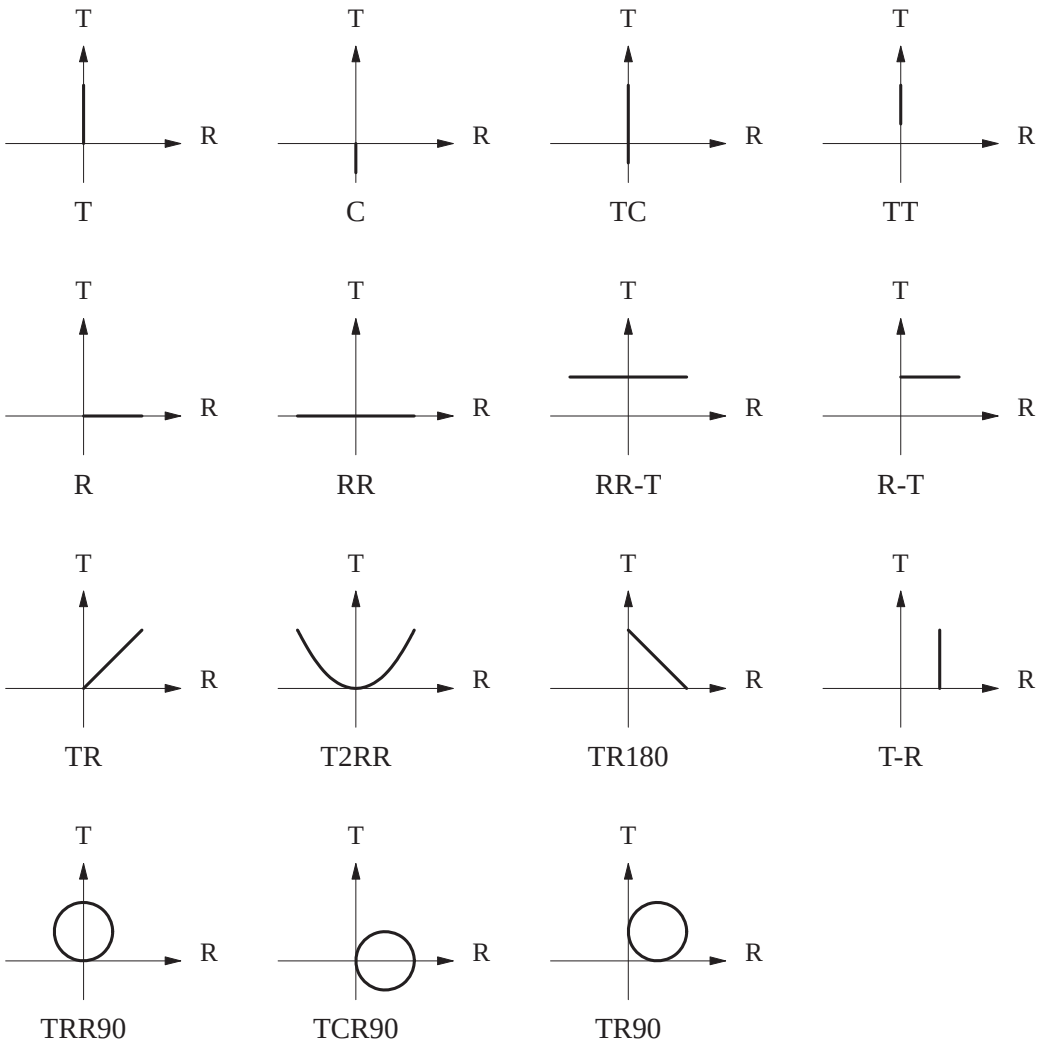


FIG. 5.7 – Chargements appliqués aux éprouvettes de cette étude, représentés dans un diagramme torsion (R)/traction (T) appliquées.

Nom de la série	Type d'essai	Contrôle	Minimum	Maximum	Nombre d'éprouvettes
AE42-T-D	Traction simple	D	0	+	84
AE42-C-D	Compression	D	−	0	3
AE42-TC-D	Traction compression	D	−	+	66
AE42-TT-D	Traction traction	D	+	+	27
AE42-T-A-D	Traction après 5 cycles de niveau plus important	D	0	+	16
AE42-T-E	Traction simple	E	0	+	17
AE42-TC-E	Traction compression	E	−	+	9
AE42-TT-E	Traction traction	E	+	+	7
AE42-T-A-E	Traction après 5 cycles de niveau plus important	E	0	+	17

TAB. 5.1 – Essais de traction réalisés sur éprouvette AE42. La nomenclature des séries est expliquée page 93 et figure 5.7.

essai de torsion alternée et un essai de traction de rapport $R_E = 0$ est un essai pour lequel l'effort de traction varie entre zéro et une valeur positive.

Les essais réalisés sur éprouvette AE42 sont des essais de traction uniaxiale uniquement. Ils ont permis d'étudier les effets de l'amplitude et de la moyenne du signal appliqué, du type de contrôle utilisé pour imposer le signal (déplacement ou effort), et de l'effet d'un chargement préalable à l'essai d'endurance proprement dit. Les essais réalisés sur éprouvette AE2 sont des essais de traction, de torsion, et de traction/torsion. Ils ont permis d'étudier les effets de la multiaxialité de la sollicitation, c'est-à-dire de l'état de distorsion et de la rotation du repère principal des contraintes et des déformations. Ce point est détaillé plus loin, au paragraphe 5.2.4.

5.2.2 Calculs numériques

Les deux éprouvettes de cette étude sont axi-symétriques de section variable. En l'absence de solution analytique, il est nécessaire de réaliser un calcul aux éléments finis pour déterminer les trajets de chargement en tout point de la structure. Ces calculs sont réalisés avec le code Abaqus, en utilisant la loi de comportement décrite dans la partie précédente.

Nom de la série	Type d'essai	Contrôle	Minimum Traction	Maximum Traction	Minimum Torsion	Maximum Torsion	Déphasage	Nombre d'éprouvettes
AE2-T-D	Traction simple	D	0	+				20
AE2-TC-D	Traction compression	D	−	+				15
AE2-TT-D	Traction traction	D	+	+				49
AE2-T-E	Traction simple	E	0	+				3
AE2-TC-E	Traction compression	E	−	+				6
AE2-TT-E	Traction traction	E	+	+				9
AE2-R-D	Torsion simple	D			0	+		35
AE2-RR-D	Torsion alternée	D			−	+		60
AE2-TR-D	Traction Torsion	D	0	+	0	+	0	29
AE2-TR90-D	Traction Torsion hors-phase	D	0	+	0	+	90	25
AE2-TR180-D	Traction Torsion en opposition de phase	D	0	+	0	+	180	16
AE2-TRR90-D	Traction Torsion alternée	D	0	+	−	+	90	27
AE2-TCR90-D	Traction alternée Torsion	D	−	+	0	+	90	22
AE2-T2RR-D	2 cycles de Traction Torsion alternée	D	0	+	−	+		15
AE2-T-R-D	Traction Torsion fixe	D	0	+	cte	cte		11
AE2-R-T-D	Torsion Traction constante	D	cte	cte	0	+		7
AE2-RR-T-D	Torsion alternée Traction constante	D	cte	cte	−	+		6

TAB. 5.2 – Essais réalisés sur éprouvette AE2. La nomenclature des séries est expliquée page 93 et figure 5.7.

Les éléments utilisés sont des éléments quadratiques axi-symétriques à 4 nœuds et à formulation mixte (c'est-à-dire possédant une variable supplémentaire pour la gestion de l'incompressibilité). L'histoire des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et du gradient de déformation $\boldsymbol{F}$ est ensuite analysée au point où on observe expérimentalement l'apparition d'une fissure, situé en fond d'entaille dans la quasi-totalité des cas.

Les chargements appliqués et la forme entaillée des éprouvettes (en particulier l'éprouvette AE2) génèrent d'importants gradients de déformations en fond d'entaille. Aussi est-il nécessaire de choisir un maillage suffisamment fin pour obtenir une valeur réaliste des contraintes et des déformations près de la surface de l'éprouvette. Plusieurs maillages de finesses différentes ont été réalisés pour les deux éprouvettes. Seul le cas de l'éprouvette AE2 est présenté ici car elle subit des gradients de déformation bien plus importants que l'éprouvette AE42. Ceci s'explique par sa forme très entaillée mais aussi par le type de sollicitation qu'on lui impose. Les différents maillages envisagés sont présentés en annexe G.

Les différents maillages sont comparés entre eux pour un cas de chargement sévère, en l'occurence celui d'une torsion de 175°. En effet, la torsion génère un important gradient de déformation selon le rayon de l'éprouvette. On compare alors l'intensité des déformations et des contraintes au nœud situé en fond d'entaille. Il s'agit de valeurs extrapolées à partir des valeurs calculées aux points d'intégration. Ceci permet de comparer les variables au même point géométrique (alors que les points d'intégration changent d'un maillage à l'autre), où les valeurs sont les plus importantes.

Les figures 5.8 et 5.9 représentent les élongations et les contraintes en fonction de la taille caractéristique des éléments dans la zone du fond d'entaille. En pratique, on prend la dimension selon le rayon de l'éprouvette de l'élément le plus extérieur.

On constate que les élongations calculées avec les différents maillages sont très proches, et se stabilisent lorsque le maillage s'affine. Les contraintes, en revanche, augmentent notablement avec la finesse du maillage et ne se stabilisent pas. La figure 5.10 montre la valeur des contraintes sur la surface libre (et qui donc, théoriquement, sont nulles). On les trouve non nulles mais elles tendent bien vers zéro lorsque le maillage s'affine. En effet, dans le cas des éléments à formulation mixte choisis pour effectuer le calcul, la pression est constante sur tout l'élément (alors que les déformations et la partie déviatorique des contraintes est calculée en quatre points d'intégration). La valeur extrapolée au nœud correspond donc en réalité à la valeur de la pression au barycentre de l'élément. On ne compare donc pas vraiment des valeurs du champ au même lieu géométrique d'un maillage à l'autre. On corrige alors le terme hydrostatique des contraintes de manière à obtenir des contraintes nulles en surface (voir figure 5.11) et on retrouve une évolution similaire à celle des élongations, c'est-à-dire beaucoup plus faible et en cours de stabilisation.

Le deuxième maillage le plus grossier permet d'obtenir des écarts inférieurs au pourcent sur les élongations et les contraintes au point d'amorçage. C'est celui qui sera utilisé par la suite pour calculer les trajets de chargement locaux. Le maillage de l'éprouvette AE42 est choisi de la même façon. Les deux maillages sont représentés figures 5.12 et 5.13.

Remarque *Parmi les éléments disponibles dans la bibliothèque Abaqus, il existe des éléments d'ordre plus élevé en pression, par exemple des éléments bilinéaires à pression linéaire. Ces éléments n'ont pas été utilisés ici car ils sont moins performants vis-à-vis de*

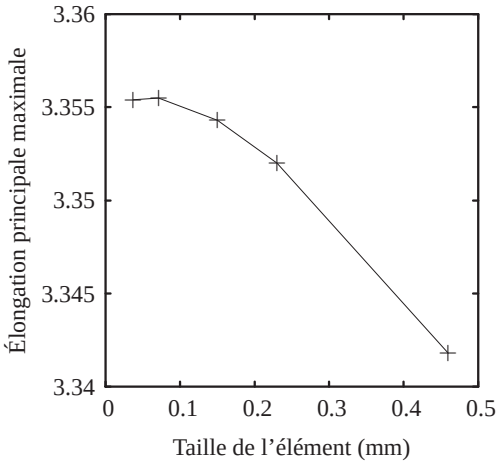


FIG. 5.8 – Elongation principale maximale pour une torsion de 175° en fonction de la taille des éléments.

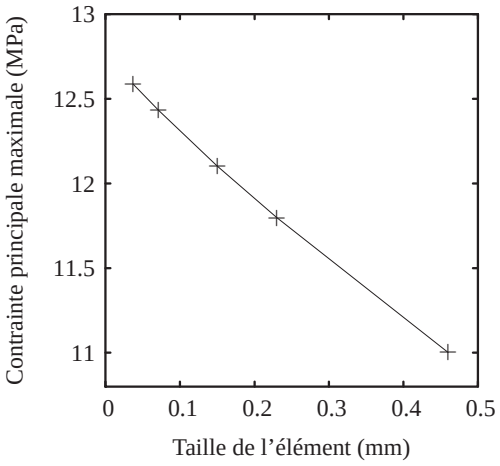


FIG. 5.9 – Contrainte principale maximale pour une torsion de 175° en fonction de la taille des éléments.

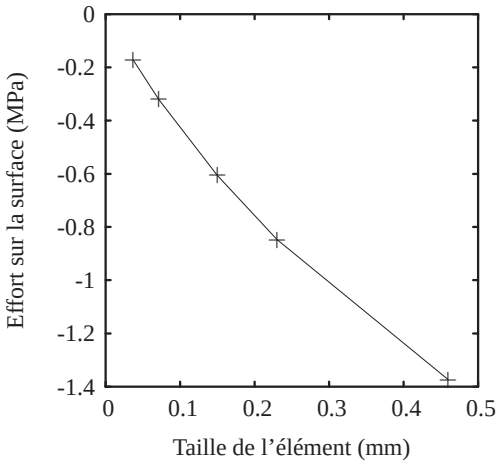


FIG. 5.10 – Effort sur la surface libre pour une torsion de 175° en fonction de la taille des éléments.

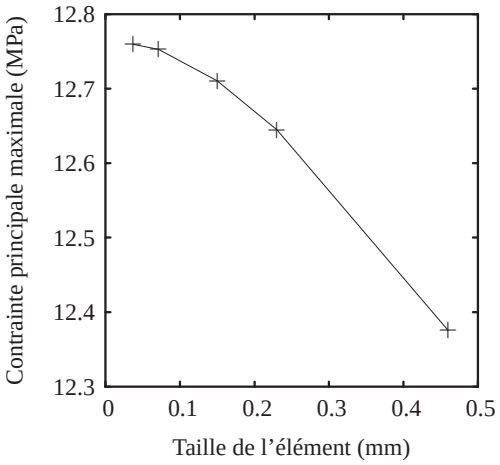


FIG. 5.11 – Contrainte principale maximale pour une torsion de 175° après prise en compte de la condition de surface libre.

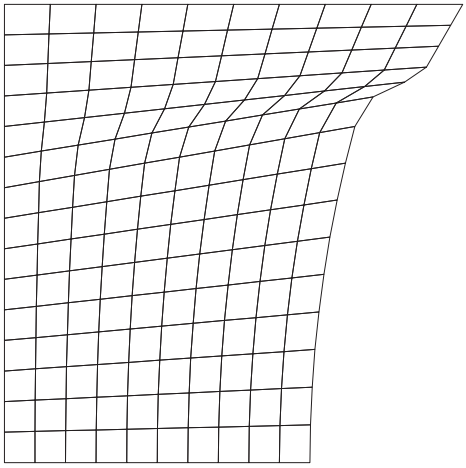


FIG. 5.12 – Maillage de l'éprouvette AE42.

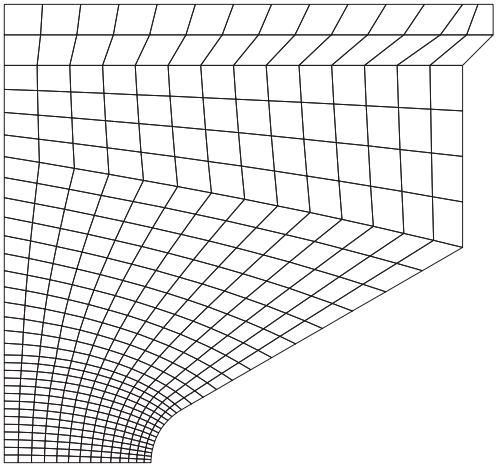


FIG. 5.13 – Maillage de l'éprouvette AE2.

la convergence des calculs.

5.2.3 Caractéristiques d'un trajet de chargement

Ce paragraphe décrit les différents aspects du trajet de chargement qui peuvent avoir une influence sur la durée de vie du matériau, ce qui permettra par la suite de discuter de la pertinence des essais décrits dans la littérature et des essais réalisés. Un « trajet de chargement » est défini comme l'histoire des différentes grandeurs mécaniques (dont les contraintes et les déformations) sur l'intervalle de temps considéré (soit une période T dans le cas d'un chargement cyclique).

Intervalle de chargement

L'intensité du chargement constitue le premier paramètre qui vient à l'esprit pour expliquer la durée de vie d'une structure. Cette « intensité » peut être définie en terme de maximum et minimum, ou bien de moyenne et amplitude d'une grandeur mécanique responsable de la fatigue du matériau. Cette grandeur est à déterminer, à partir de l'état de contraintes et de déformations, dont l'analyse fait l'objet de la suite du paragraphe.

On choisit d'illustrer ces arguments par l'exemple du cylindre plein en traction/torsion car il s'agit d'une structure proche des éprouvettes diabolos et dont on connait la solution exacte[1].

[1] On pourra se reporter au cours de Stolz [82] pour trouver plusieurs exemples de transformations ayant une solution analytique.

Le cylindre, soumis à une élongation λ et un angle de torsion α se transforme selon[2] :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, R, \quad \theta = \Theta + \alpha Z, \quad z = \lambda Z,$$

où (R, Θ, Z) désignent les coordonnées cylindriques dans la configuration de référence et (r, θ, z) les coordonnées dans la configuration actuelle chargée. Le gradient de déformation s'écrit donc :

$$\boldsymbol{F} = 1/\sqrt{\lambda}\,(\mathrm{e}_r \otimes \mathrm{e}_R + \mathrm{e}_\theta \otimes \mathrm{e}_\Theta) + \lambda\, \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_Z + \frac{\alpha R}{\sqrt{\lambda}}\, \mathrm{e}_\theta \otimes \mathrm{e}_Z \quad .$$

Lorsque $\alpha = 0$, on retrouve l'essai de traction uniaxiale, et lorsque $\lambda = 1$, on retrouve l'essai de torsion (et donc un état de déformation local de glissement).

État de distorsion

Les trajets de chargement sont traditionnellement représentés dans un diagramme (I_1, I_2), où I_1 et I_2 sont les deux premiers invariants du tenseur des dilatations de Cauchy droit $\boldsymbol{C}$, le troisième, I_3, étant constant égal à 1 en raison de l'incompressibilité. Cette représentation donne des informations à la fois sur l'intensité du chargement et sur l'état de distorsion à chaque instant. Autrement dit, elle caractérise l'état de déformation indépendamment du repère principal de la transformation. On aurait pu choisir de manière équivalente une représentation selon deux autres invariants du tenseur des dilatations de Cauchy ; par exemple deux des trois valeurs propres.

Dans le cas du cylindre, les invariants de $\boldsymbol{C}$ s'écrivent :

$$I_1 = \frac{2}{\lambda} + \lambda^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{\lambda} \quad I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda + \frac{\alpha^2 R^2}{\lambda} \quad .$$

On remarque que les deux invariants sont liés par la relation :

$$I_2 = I_1 + f(\lambda) \quad \text{où} \quad f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda - \frac{2}{\lambda} - \lambda^2 \quad .$$

La fonction $\lambda \rightarrow f(\lambda)$ est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ et la fonction $\alpha^2 \rightarrow I_1(\lambda, \alpha^2)$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[2/\lambda + \lambda^2, +\infty[$ pour tout λ. Autrement dit, en faisant varier α et λ, on peut atteindre tout l'espace (I_1, I_2) compris entre la traction et la torsion. Par ailleurs, chaque point de l'espace (I_1, I_2) correspond à une condition unique de traction/torsion à la symétrie en torsion près. La figure 5.14 représente les courbes obtenues pour quelques cas particuliers de chargement (λ, α).

Cette représentation décrit l'état de distorsion du matériau au cours du temps mais ne suffit pas à décrire complètement le chargement.

[2] Cette transformation est une solution universelle au sens d'Ericksen et Rivlin [26] : elle est réalisable quelque soit le comportement, à condition que celui-ci soit hyperélastique, isotrope transverse, incompressible et homogène sur toute la structure.

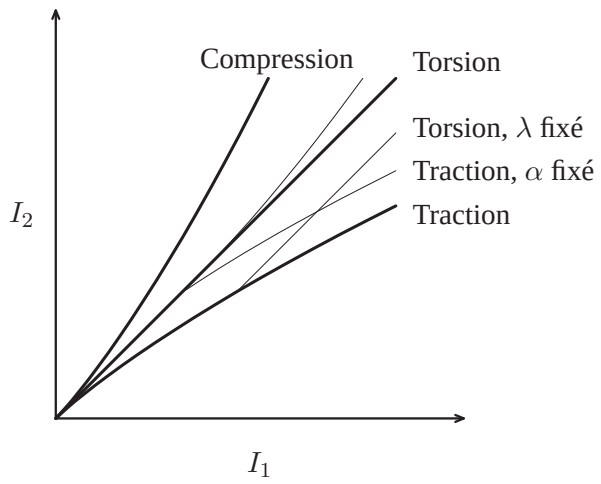


FIG. 5.14 – Représentation dans un diagramme (I_1, I_2) de plusieurs trajets de chargement possibles du cylindre en traction/torsion : traction/compression uniaxiale, torsion, traction à angle de torsion fixé et torsion à élongation fixée. On remarque que la torsion correspond à un état de distorsion de glissement.

Rotation du repère principal au cours du temps

Il faut tenir compte du fait que les directions principales du chargement peuvent tourner au cours du temps. Ainsi, même si l'état de distorsion ne change pas, la direction la plus sollicitée peut varier. On choisit d'illustrer cet aspect du trajet de chargement en représentant la déformation principale maximale. Autrement dit, on représente dans l'espace l'extrémité du vecteur principal au cours du temps. Ceci n'est possible que lorsque ce vecteur reste dans un même plan, ce qui sera le cas ici. Cette représentation permet de visualiser à la fois la direction la plus sollicitée et l'intensité de la sollicitation en question (ici mesurée par la valeur propre maximale des déformations). On choisit de ne pas représenter la rotation des deux autres vecteurs principaux, qui sont associés à des valeurs de déformations moins importantes. On suppose que l'influence de celles-ci sur la durée de vie est minime.

Dans le cas du cylindre en torsion , par exemple, les valeurs propres $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ et les vecteurs propres associés (U_1, U_2, U_3) de $\boldsymbol{C}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 &= 1, & U_1 &= \mathrm{e}_R, \\
\lambda_2^2 &= \frac{1}{2}\left(2 + \alpha^2 R^2 - \alpha R\sqrt{4 + \alpha^2 R^2}\right), & U_2 &= \frac{1}{2}\left(-\alpha R - \sqrt{4 + \alpha^2 R^2}\right)\mathrm{e}_\Theta + \mathrm{e}_Z, \\
\lambda_3^2 &= \frac{1}{2}\left(2 + \alpha^2 R^2 + \alpha R\sqrt{4 + \alpha^2 R^2}\right), & U_3 &= \frac{1}{2}\left(-\alpha R + \sqrt{4 + \alpha^2 R^2}\right)\mathrm{e}_\Theta + \mathrm{e}_Z.
\end{aligned}$$

Sur les figures 5.15 et 5.16, on voit que deux des vecteurs propres évoluent avec le niveau de torsion α. Ainsi, pour un chargement de torsion alternée, on sollicite deux directions très

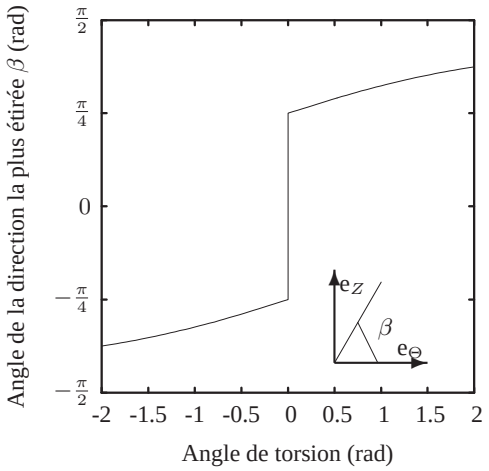


FIG. 5.15 – Angle entre la direction la plus étirée et l'axe e_Θ au cours d'un chargement de torsion en fonction de l'intensité de cette torsion.

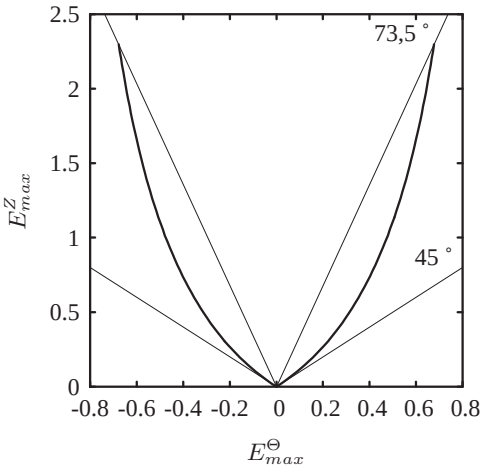


FIG. 5.16 – Déformation principale maximale pour une torsion alternée de $-\pi$ à π dans le plan de la surface de l'éprouvette.

différentes dans les sens de rotation positif et négatif. Pour le cylindre en traction/torsion, l'expression des valeurs et des vecteurs propres est plus complexe, mais mène à la même conclusion : à l'exception du cas particulier de traction/compression uniaxiale, la direction la plus étirée change avec λ et α.

Remarque *Distorsion et rotation des directions principales sont souvent regroupées sous le terme de multiaxialité. Bien que ces deux paramètres soient* a priori *indépendants, le choix d'une éprouvette contraint souvent l'évolution de l'une à celle de l'autre. Par exemple, dans le cas du cylindre en traction/torsion, un état de distorsion donné est associé à un unique couple* (λ, α) *(à la symétrie en* α *près), pour lequel les directions principales sont complètement déterminées.*

Pression

L'hypothèse d'incompressibilité implique que deux transformations géométriques identiques peuvent générer des états de contrainte différents du fait du terme de pression. C'est le cas par exemple de la compression uniaxiale et de la traction équibiaxiale (voir schémas 5.17). Dans les deux cas, le gradient de la transformation s'écrit :

$$\boldsymbol{F} = 1/\sqrt{\lambda}\,(\mathrm{e}_r \otimes \mathrm{e}_R + \mathrm{e}_\theta \otimes \mathrm{e}_\Theta) + \lambda\,\mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_Z,$$

mais les conditions aux limites, qui permettent de déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange, sont différentes. Dans le cas de la compression uniaxiale, la condition de bord libre s'applique sur le pourtour du cylindre : $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{e}_r = 0$. Pour un matériau au comportement

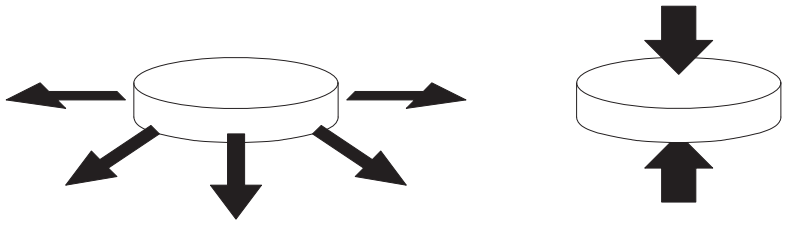


FIG. 5.17 – Pour un matériau incompressible, la traction équibiaxiale (à gauche) et la compression uniaxiale (à droite) génèrent le même état de déformation, mais des états de pression différents.

isotrope, les contraintes s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\sigma}_{Comp} = \left(2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\ \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_z \quad .$$

Dans le cas de la traction équibiaxiale, le chargement est imposé sur le pourtour et les bords libres sont les deux extrêmités du cylindre : $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{e}_z = 0$. Le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{Trac_{eq}} &= -\left(2\tfrac{\partial W}{\partial I_1}\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{\lambda}\right) + 2\tfrac{\partial W}{\partial I_2}\left(\lambda - \tfrac{1}{\lambda^2}\right)\right)\ (\mathrm{e}_r \otimes \mathrm{e}_r + \mathrm{e}_\theta \otimes \mathrm{e}_\theta) \\ &= -\sigma_{Comp_z}\,(\mathrm{e}_r \otimes \mathrm{e}_r + \mathrm{e}_\theta \otimes \mathrm{e}_\theta) \quad .\end{aligned}$$

Ainsi, bien que l'état de déformation soit le même pour les deux transformations, la pression hydrostatique est très différente, et même de signe opposé.

Pour le cylindre en traction/torsion, la partie hydrostatique des contraintes à la surface vaut :

$$P = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = -\frac{2}{3}\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) \quad .$$

Considérons le cas d'un matériau dont le comportement est décrit par le modèle de Mooney-Rivlin. $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ sont alors des constantes caractéristiques du matériau et la pression est indépendante du niveau de torsion. Ainsi, pour faire varier l'état de déformation à pression constante, il faut jouer sur la torsion. Inversement, si on se donne un état de déformation défini par sa position dans le diagramme (I_1, I_2), la pression est complètement déterminée. On ne peut donc pas faire varier la pression à déformation constante. En réalité, on décrit souvent le comportement des élastomères par des modèles plus complexes que celui de Mooney-Rivlin, pour lesquels ces considérations ne tiennent pas. Cependant, elle donnent des indications sur les tendances approximatives que l'on pourra observer.

De manière plus générale, pour une géométrie donnée (mais un comportement quelconque), la pression en surface du solide est directement donnée par l'état de distorsion. Par exemple, si n désigne la normale d'un bord libre, les contraintes s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} - \mathrm{n} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{n}\,\boldsymbol{I} \quad .$$

Ainsi, les contraintes et les déformations sont liées uniquement par le comportement pour tous les essais réalisés sur l'éprouvette AE2.

Conclusion

On a identifié ici trois aspects du trajet de chargement, indépendants les uns des autres, et susceptibles d'avoir une influence sur la durée de vie : l'état de distorsion, la rotation du repère principal et la pression hydrostatique. L'état de distorsion est représenté dans un diagramme (I_1, I_2) et la rotation du repère principal est représentée par l'évolution de la déformation principale maximale.

5.2.4 Analyse des trajets de chargement obtenus

L'éprouvette AE42 est sollicitée uniquement en traction. Les champs de déformations et de contraintes sont presque homogènes et correspondent au cas de traction uniaxiale. L'éprouvette AE2 permet au contraire d'atteindre une assez grande partie de l'espace des trajets de chargement. Ce paragraphe propose une analyse des trajets de chargement obtenus au lieu d'amorçage sur l'éprouvette AE2. Ils sont illustrés à l'aide d'un essai représentatif de chaque série d'essais.

État de distorsion

Les figures 5.18 et 5.19 représentent les différents types de chargement appliqués à l'éprouvette AE2 dans un diagramme (I_1, I_2). Une grande partie de l'espace (I_1, I_2) est atteinte. Certains essais, comme la traction (T), la traction/torsion en phase (TR) ou la torsion (R), génèrent un état de distorsion constant au cours du cycle alors que d'autres essais, comme la traction/torsion hors phase (TR180), génèrent un état de distorsion allant de celui de la traction à celui de la torsion. On remarquera que tous les essais qui génèrent un état de distorsion constant (sauf la compression uniaxiale) sont dans la partie inférieure du diagramme. Les états de distorsion compris entre la traction équibiaxiale et le glissement n'ont pas pu être réalisés avec ces éprouvettes.

Rotation du repère principal au cours du temps

La déformation principale maximale est représentée en projection sur la surface de l'éprouvette, dans un souci de représentation en deux dimensions. Dans le cas d'un matériau isotrope, la condition de bord libre entraîne donc que deux directions principales sont dans le plan de la surface. La troisième, perpendiculaire à la surface, n'est maximale qu'en compression. Bien que la loi de comportement utilisée ici ne soit pas isotrope, les directions principales des déformations sont presque dans le plan de la surface. La représentation choisie est donc bien suffisante pour quantifier l'intensité de la rotation du repère principal.

Les essais peuvent être classés qualitativement en trois groupes :

1. ceux pour lesquels il existe essentiellement une seule direction très sollicitée (figure 5.20) ;
2. ceux pour lesquels il existe tout un intervalle de directions sollicitées avec des intensités comparables (figure 5.21) ;

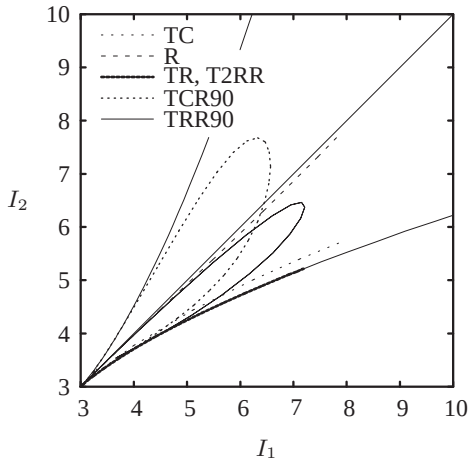


FIG. 5.18 – Trajets de chargement passant par l'état de repos (traction et torsion nulles).

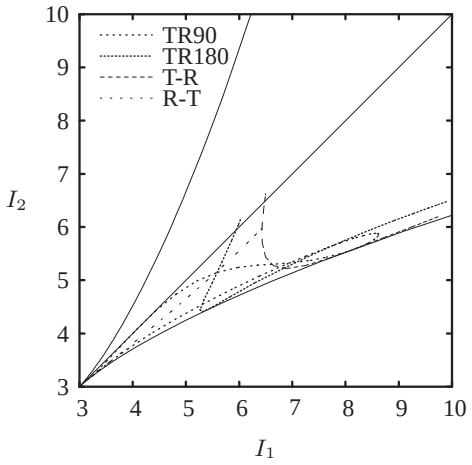


FIG. 5.19 – Trajets de chargement ne passant pas par l'état de repos.

3. ceux pour lesquels il existe essentiellement deux directions très sollicitées, symétriques par rapport à l'axe e_Z, et qui correspondent aux essais ayant une composante de torsion alternée (figure 5.22).

Les essais du groupe 1 devraient permettre de déterminer l'influence de la distorsion, puisqu'ils correspondent à des essais exempts de rotation du repère principal. Les essais des groupes 2 et 3 devraient permettre de déterminer l'influence de la rotation du repère principal.

Remarque *Les essais d'extension/torsion en phase (TR et T2RR) engendrent le même état de distorsion qu'un essai d'extension uniaxiale, comme on a pu obtenir avec l'éprouvette AE42. En revanche, les directions principales tournent, ce qui n'est pas le cas de la traction uniaxiale pour laquelle les directions principales sont rigoureusement constantes. On constate donc que distorsion et rotation du repère principal sont des aspects indépendants de la multiaxialité, qui peuvent êtres décorrellés en utilisant plusieurs types d'éprouvettes. Malheureusement, dans le cas présent, la rotation du repère principal est minime ; on ne s'attend donc pas à un effet notable de cette rotation.*

Pression

La figure 5.23 représente la contrainte principale maximale en fonction de l'élongation maximale atteintes au cours du trajet de chargement pour tous les essais réalisés. On constate que ces deux grandeurs sont corrélées.

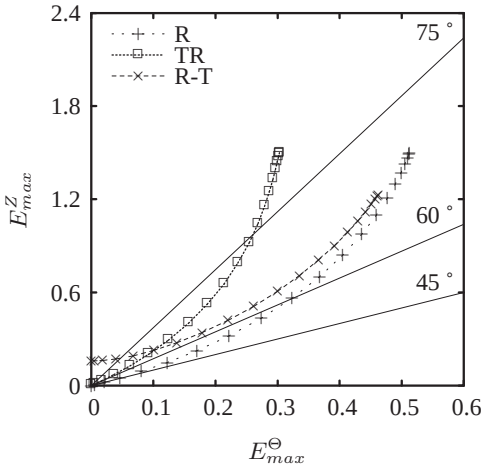


FIG. 5.20 – Trajets de chargement avec une faible rotation du repère principal.

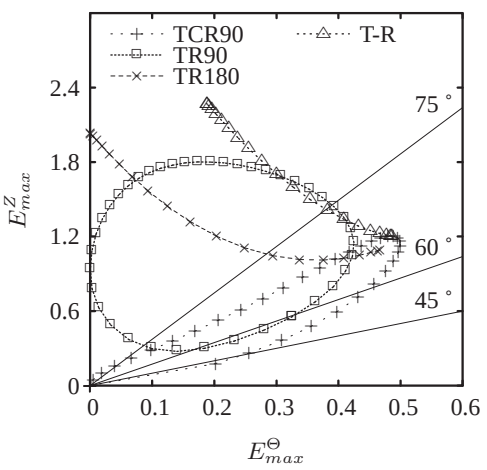


FIG. 5.21 – Trajets de chargement avec rotation importante du repère principal.

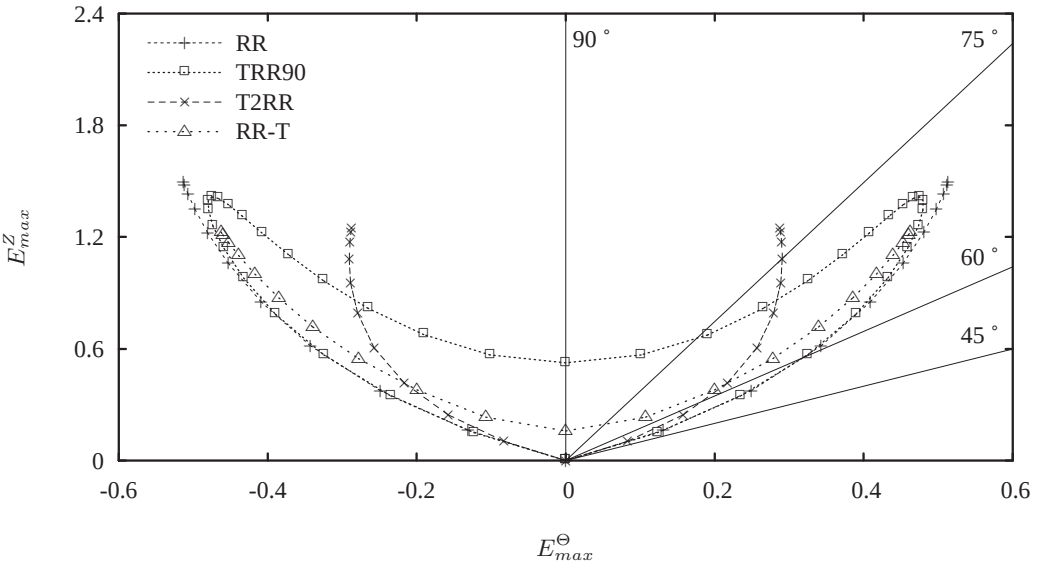


FIG. 5.22 – Trajets de chargement symétriques en torsion.

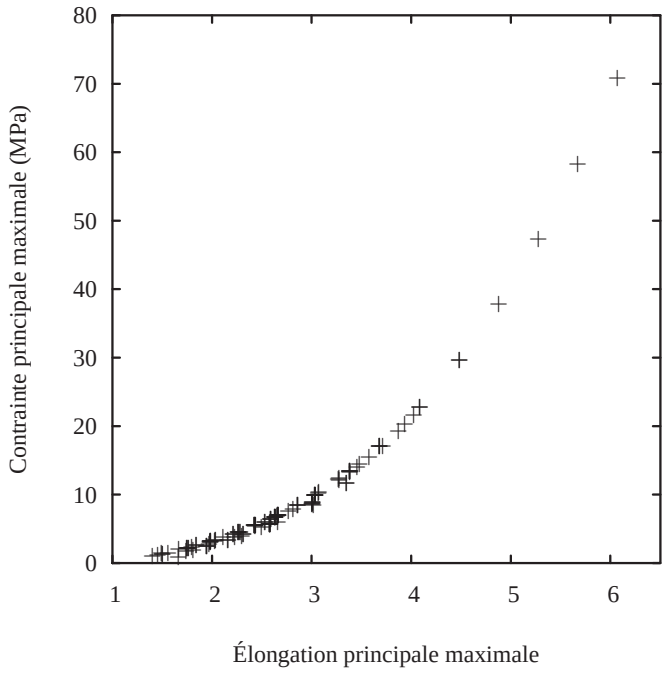


FIG. 5.23 – Contrainte principale maximale en fonction de l'élongation principale maximale, tous essais confondus.

Conclusion

L'analyse des trajets de chargement donne des indications quant aux différents paramètres dont on doit éprouver l'influence sur la durée de vie. Les différents états de distorsion compris entre l'extension uniaxiale et le glissement sont largement décrits ; les états compris entre l'extension équibiaxiale et le glissement n'ont pas pu être atteints autrement que par une composante de compression. L'orientation du repère principal est un aspect bien décrit par la base d'essais réalisés. L'état de pression est lié à l'état de distorsion. L'influence de ce paramètre ne peut pas être déterminée avec ces essais.

5.3 Conclusion

Plus de 600 essais d'endurance ont été réalisés par Ostoja-Kuczynski et Charrier au sein de la société Modyn-Trelleborg. Les essais ont été préparés de façon à couvrir un maximum de cas de trajets de chargement possibles. L'histoire des différentes grandeurs mécaniques locales au cours d'un cycle de chargement en régime stabilisé est obtenue par un calcul aux éléments finis avec la loi de comportement proposée dans la première partie. Leur analyse a permis de statuer *a priori* sur les paramètres dont l'influence sur la durée de vie doit être quantifiée à l'aide des essais réalisés.

Chapitre 6

Sur l'amorçage et la propagation de défauts

On sépare généralement le processus de rupture en endurance des élastomères en deux phases : une première phase pendant laquelle une fissure s'amorce, puis une seconde phase pendant laquelle elle se propage. Parallèlement, les modèles de prédiction de la durée de vie des élastomères consistent à déterminer soit les conditions d'amorçage d'une fissure (considérant qu'alors la rupture est imminente) soit la vitesse de propagation d'une fissure grâce à la mécanique de la rupture.

L'approche par calcul de la propagation de fissure se heurte à plusieurs obstacles. Tout d'abord, il faut savoir où est la fissure et comment elle est orientée. Autrement dit, le problème de l'amorçage doit être résolu au préalable. Par ailleurs, la plupart des modèles supposent que la fissure est autosimilaire, c'est-à-dire qu'elle conserve la même géométrie au cours de sa propagation. Enfin, ce type de modèle est difficile à mettre en œuvre dans un code de calcul car le maillage doit s'adapter à la géométrie variable du problème. On voit donc qu'il s'agit d'une approche qui n'est pas applicable dans un contexte industriel, du moins pas dans l'état actuel des connaissances. Toutefois, dans la mesure où l'approche par propagation est à l'origine de certains modèles d'amorçage, on juge utile d'en rappeler les grandes lignes dans une première partie.

Dans une seconde partie, on décrit le comportement à l'amorçage des caoutchoucs, ainsi que les quelques modèles qui le représentent. On pourra trouver une étude semblable dans [58].

6.1 Propagation

Griffith [40] propose en 1921 un critère de propagation de fissure, en effectuant un bilan d'énergie entre l'énergie potentielle de l'échantillon et l'énergie de surface créée par l'avancée de la fissure. Cette idée est ensuite étendue au cas des élastomères par Rivlin et Thomas [70] et Greensmith [39].

6.1.1 Taux de restitution d'énergie et force de déchirabilité

Dans le cas d'un matériau élastique qui se rompt de manière fragile, la seule source de dissipation est la propagation de la fissure[1]. Un bilan d'énergie donne alors :

$$\partial U_{ext} = \partial U_{elas} + \partial U_d + \partial U_K, \tag{6.1}$$

avec ∂U_{ext}, ∂U_{elas}, ∂U_d et ∂U_K les quantités d'énergie apportée, emmagasinée, dissipée et variation d'énergie cinétique. Le taux de restitution d'énergie G introduit par Griffith [40], qui correspond à une variation de l'énergie potentielle du système, est alors défini par :

$$G = \frac{\partial U_d}{\partial A} + \frac{\partial U_K}{\partial A},$$

où A désigne la surface de la fissure. La fissure ne se propage que si $G > \frac{\partial U_K}{\partial A}$.

Pour un matériau dissipatif (plastique et/ou visqueux), la fissure n'est plus la seule source de dissipation et le raisonnement précédent n'est plus valable. Dans le cas où cette anélasticité est confinée dans une petite zone autour de la fissure, on peut encore considérer qu'il s'agit d'une caractéristique de la propagation de la fissure. Ceci conduit à modifier le bilan d'énergie précédent 6.1 pour introduire un terme de dissipation locale ∂U_f :

$$\partial U_{ext} = \partial U_{elas} + \partial U_d + \partial U_f + \partial U_K \quad .$$

On définit alors de taux de restitution d'énergie modifié J :

$$J = \frac{\partial U_d}{\partial A} + \frac{\partial U_f}{\partial A} + \frac{\partial U_K}{\partial A} \quad .$$

Dans le cas où la dissipation se produit sur toute la structure et non plus seulement en pointe de fissure, l'énergie dissipée ne mesure plus uniquement l'avancée de la fissure mais aussi la déformation de toute la structure.

La force de déchirabilité T correspond à la variation dU de l'énergie mécanique emmagasinée dans le matériau pour une augmentation dA de l'aire de la fissure, soit :

$$T = -\frac{dU}{dA} \quad .$$

Dans le cas d'une éprouvette plate, la largeur de la fissure correspond à l'épaisseur e de l'éprouvette, ce qui permet d'écrire T en fonction de la longueur de la fissure c :

$$T = -\frac{1}{e}\frac{dU}{dc} \quad .$$

Pour un comportement élastique, elle correspond donc au taux de restitution d'énergie.

Dans le cas d'un chargement statique, Rivlin et Thomas [70] ont pu montrer qu'il existait une valeur critique du taux de restitution d'énergie en dessous de laquelle la fissure ne se propageait pas. Ce seuil étant le même pour les différents échantillons testés (*cf.* figure 6.1), ils en ont déduit qu'il s'agissait d'une propriété intrinsèque du matériau. Dans le cas d'un chargement cyclique, Gent, Lindley et Thomas [35] ont pu montrer que le taux de restitution d'énergie contrôlait la vitesse de propagation de fissure : pour $R = 0$, on peut corréler la vitesse de propagation de la fissure à la valeur maximum de T atteinte.

[1] Toutes ces considérations sont exposées de manière claire et concise dans la thèse de Martin Borret [60]. Elles sont donc reprises ici presque telles quelles.

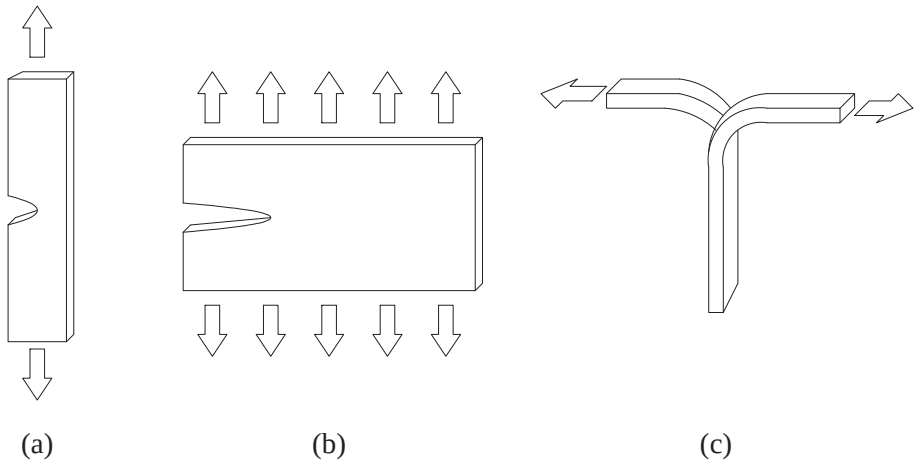


FIG. 6.1 – Éprouvettes plates classiquement utilisées pour les études de propagation de fissure : (a) éprouvette lanière ; (b) éprouvette de cisaillement pur ; (c) éprouvette pantalon. Il existe pour ces éprouvettes une expression analytique de la force de déchirabilité.

6.1.2 Intégrales de contour invariantes

Intégrale de Rice

On peut montrer qu'il existe une relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement local en pointe de fissure. Cette relation, établie expérimentalement, a aussi été démontrée par Rice, puis généralisée au cas des grandes déformations par Knowles et Sternberg [46]. L'intégrale suivante :

$$J = \int_{\Gamma} (W \mathrm{n} \cdot \mathrm{e}_x - \mathrm{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}) ds$$

correspond à un bilan d'énergie dans un volume Γ contenant la pointe de la fissure, de normale extérieure n (voir la figure 6.2). Sa valeur est indépendante du contour d'intégration choisi, à condition qu'elle reste dans le domaine élastique. Autrement dit, l'anélasticité du matériau doit rester confinée dans une petite zone autour de la pointe de fissure. On peut aussi bien choisir un contour qui encadre juste la pointe de la fissure que les frontières de l'échantillons. Dans ce dernier cas, le résultat de l'intégrale est équivalent au taux de restitution d'énergie. On montre alors que le taux de restitution d'énergie est une mesure des conditions locales du chargement en pointe de fissure.

Généralisation - tenseur d'Eshelby

Eshelby [27] introduit le tenseur moment d'énergie défini par :

$$P = W \boldsymbol{I} - {}^t\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{F}$$

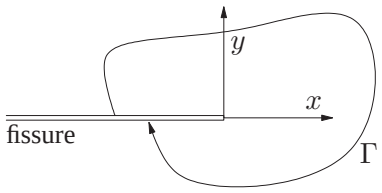


FIG. 6.2 – Contour pour l'intégrale de Rice

et dont la divergence est nulle. L'intégrale de sa composante normale sur une surface fermée correspond donc à la force exercée sur les défauts présents dans le volume délimité par la surface, à condition que le comportement soit homogène sur le volume en question. Il montre que l'intégrale de Rice en est un cas particulier, en deux dimensions. Chadwick [14] applique la théorie au cas des grandes déformations, et montre que le tenseur d'Eshelby possède les mêmes propriétés vis-à-vis de la transformation inverse $\boldsymbol{F}^{-1}$ que celui des contraintes de Cauchy vis-à-vis de $\boldsymbol{F}$. Cette idée a été récemment reprise par Steinmann [79, 80] pour être appliquée à la mécanique de la rupture.

6.1.3 Régimes de propagation de fissure sous sollicitation cyclique

Lake et Lindley [50] observent quatre régimes de propagation (voir figure 6.3), pour des cycles de chargement à rapport de charge nul :

1. En dessous d'un seuil T_0 la propagation s'effectue à vitesse presque constante, indépendamment du chargement mécanique. Elle est due essentiellement à une attaque chimique. Ce seuil correspond donc à la limite d'endurance mécanique du matériau.
2. Suit un deuxième régime de propagation régi par une loi linéaire de la force de déchirabilité T.
3. La vitesse de propagation est ensuite régie par une loi en puissance de la force de déchirabilité T :
$$\frac{dA}{dN} = BT^F$$
Des essais publiés par Gent [35] (voir figure 6.4), avec du caoutchouc naturel, et Lake [48, 49], avec du SBR, un caoutchouc synthétique, montrent que B et F sont indépendants du type d'éprouvette (et donc du type de sollicitation), ce qui conduit à les considérer comme des coefficients caractéristiques du matériau.
4. Enfin, le quatrième régime correspond à la rupture brutale de l'éprouvette et dépend fortement de la vitesse de sollicitation.

6.2 Amorçage

La durée de vie du caoutchouc correspond ici au nombre de cycles nécessaires à l'apparition d'une fissure d'une certaine taille. On considère qu'elle est déterminée par l'histoire

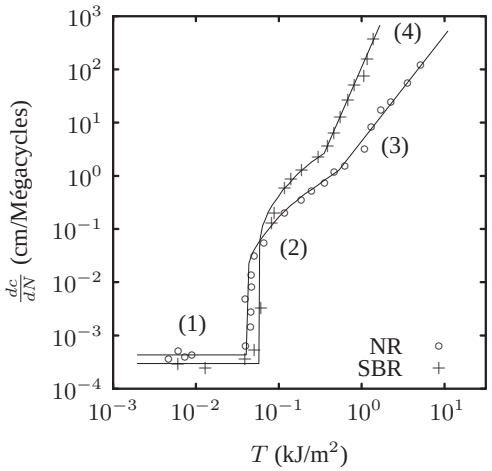


FIG. 6.3 – Les quatre régimes de propagation d'une fissure en fonction de l'énergie de déchirure T dans une éprouvette lanière en caoutchouc naturel (NR) ou synthétique (SBR). Essais publiés par Lake [49].

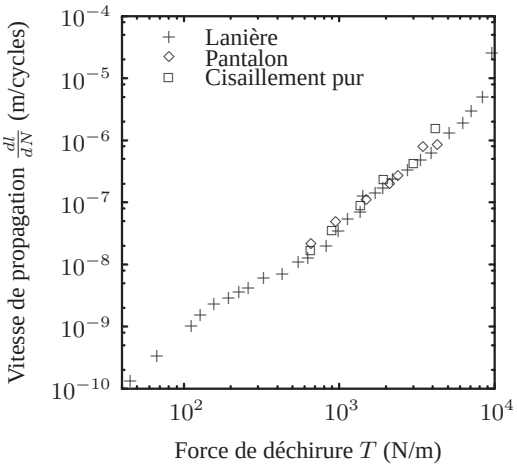


FIG. 6.4 – Vitesse de propagation d'une fissure en fonction de l'énergie de déchirure T pour différentes éprouvettes de caoutchouc naturel. Essais publiés par Gent [35].

d'un certain nombre de variables mécaniques locales, comme les contraintes ou les déformations. Ainsi, on peut s'intéresser à la distribution spatiale de la variable considérée et localiser l'apparition d'une fissure.

6.2.1 Mécanismes d'amorçage

Des essais de traction *in situ* dans un microscope électronique à balayage (MEB) réalisés à l'École des Mines [73, 72] ont permis d'observer les mécanismes d'endommagement pour des élastomères chargés soumis à une traction monotone. Trois types d'endommagement ont été identifiés, tous liés à la présence d'une inclusion (talc, oxydes, agglomérats de noirs de carbone). Ils sont illustrés figure 6.5.

1. Une inclusion se rompt brutalement, perpendiculairement à la direction de traction. Elle se propage dans la matrice lorsque cette dernière atteint sa limite de résistance à la déchirure.
2. Une microfissure apparaît au pôle d'une inclusion, là encore perpendiculairement à la direction de traction.
3. L'inclusion se désolidarise de la matrice, préférentiellement aux pôles de la particule.

Des échantillons prélevés sur des éprouvettes ayant été préalablement soumises à un essai d'endurance présentent les mêmes types d'endommagement. Ces observations indiquent que la fissure apparaît perpendiculairement à la direction de traction macroscopique. Les observations des faciès de rupture réalisées par Le Cam [52] sur les éprouvettes de cette étude confirment le fait que l'amorçage en endurance se produit sur les inclusions.

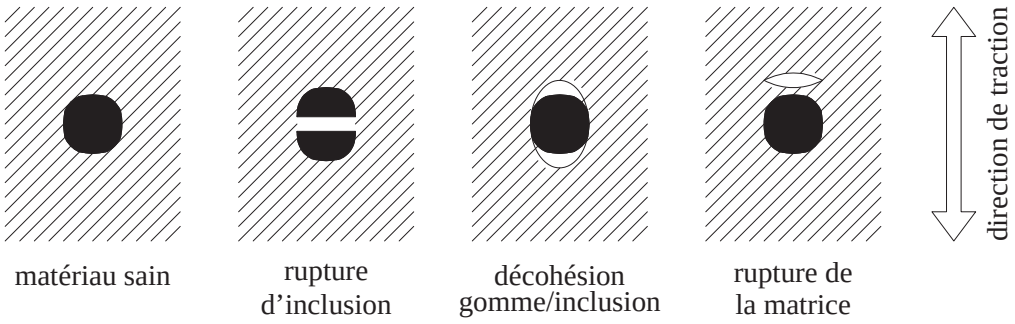


FIG. 6.5 – Mécanismes d'endommagement à proximité d'une inclusion.

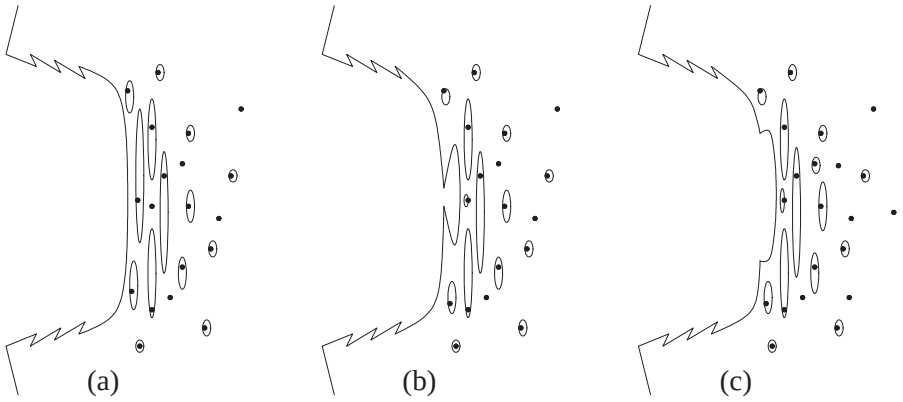


FIG. 6.6 – Mécanisme de propagation de fissure par coalescence de cavités. Le sens de traction est vertical. (a) des cavités se forment en avant du front de fissure, faisant apparaître des ligaments ; (b) les ligaments se rompent, les cavités les plus proches coalescent avec la fissure ; (c) les ligaments rompus se relâchent pour former les stries caractéristiques du faciès de rupture.

Le Cam a également réalisé des observations au MEB d'une fissure amorcée préalablement par un essai d'endurance. Par une technique de micro-découpe, il montre que la fissure avance par coalescence avec des cavités présentes en avant du fond de fissure (voir figure 6.6). C'est une hypothèse qui avait été émise précédemment par Saintier [73].

6.2.2 L'amorçage vu comme la propagation d'un défaut

Il existe naturellement des défauts dans le matériau (bulles d'air, charges, défauts de surface dûs à la mise en forme), que l'on peut considérer comme des micro-fissures. L'apparition d'une fissure visible découle alors de la propagation de l'une de ces micro-fissures. Par conséquent, les modèles de propagation doivent permettre de représenter également l'amorçage [49, 35], dans la mesure ou celui-ci est défini comme l'apparition d'une fissure de taille donnée.

La durée de vie d'un composant est définie comme le temps nécessaire pour que la fissure qui se propage le plus vite passe de sa taille initiale a_0 à sa taille critique ou finale a_f. On l'obtient simplement en intégrant la vitesse de propagation entre ces deux points :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{dA}{dN}\, da \quad .$$

En première approximation, on considère que la propagation est régie par une loi puissance de la taille initiale à la taille finale (il est possible d'affiner la description en considérant plusieurs régimes de propagation différents) :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{1}{BT^F}\, da \quad .$$

Il reste à écrire la relation entre T et le type de chargement. Celle-ci n'existe sous une forme explicite que pour quelques cas d'école, comme illustré par la figure 6.1. Dans le cas d'une éprouvette de traction uniaxiale entaillée, $T = 2kWa$, et cela donne :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{1}{B(2kWa)^F}\, da = \frac{1}{F-1}\,\frac{1}{B(2kW)^F}\left(\frac{1}{a_0^{F-1}} - \frac{1}{a_f^{F-1}}\right),$$

soit, en considérant que la taille critique du défaut est grande devant sa taille initiale :

$$N_f = DW^{-F} \quad \text{où} \quad D = \frac{1}{F-1}\,\frac{1}{B(2kW)^F}\,\frac{1}{a_0^{F-1}} \quad \text{et} \quad F > 1 \quad . \tag{6.2}$$

On en déduit que la relation entre le nombre de cycles à rupture N_f et l'énergie de déformation W est une droite de pente $-F$ dans un diagramme en échelle logaritmique. Par ailleurs, la constante D permet de remonter à la taille a_0 du plus grand défaut initial.

Gent [35] et Lake [49] obtiennent avec cette méthode d'assez bons résultats pour des essais de traction uniaxiale sur lanières : la pente obtenue pour la droite est correcte et la taille estimée du défaut initial est de l'ordre de grandeur des imperfections de surfaces présentes sur les bords de découpe de l'éprouvette, soit quelques dizaines de microns.

Roberts et Benzies [71] appliquent cette méthode pour comparer des essais de traction uniaxiale et de traction équibiaxiale réalisés sur un caoutchouc naturel et sur un caoutchouc synthétique (SBR), chargés et non chargés. Pour ces deux états de déformation la force de déchirure est proportionnelle à l'énergie de déformation ; aussi s'attendent-ils à trouver des droites de même pente pour les deux types d'essais. Ils trouvent en fait des pentes différentes, et en concluent que la méthode n'est pas applicable pour décrire différents états de distorsion.

Cette démarche présente l'intérêt de représenter le phénomène physique conduisant à l'apparition d'une fissure macroscopique, mais elle n'est possible que lorsque l'expression de T est explicite, ce qui n'est malheureusement pas le cas en général. Par ailleurs, elle suppose la forme de la loi de propagation pour des très petites fissures, dans un domaine où on ne sait pas la mesurer précisement. Enfin, elle est mise en défaut lorsqu'elle doit décrire des états de distorsion différents.

6.2.3 L'amorçage vu selon la mécanique de l'endommagement

Wang [92] propose de représenter le phénomène de l'amorçage en utilisant la mécanique de l'endommagement de Lemaître et Chaboche [55]. Il ne traite que le cas de la traction uniaxiale. Le matériau non endommagé est décrit par le modèle d'Ogden d'ordre 1, mais le raisonnement peut être tenu avec n'importe quel autre modèle hyperélastique. On note l'énergie de déformation du matériau sain W_0. Les contraintes dans la direction de traction sont données par :

$$B = \frac{\partial W}{\partial \lambda} \quad .$$

La réponse du matériau endommagé s'obtient en remplaçant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{B}$ par un tenseur de contraintes effectives $\boldsymbol{B}_0$:

$$\boldsymbol{B}_0 = \frac{1}{1-D}\boldsymbol{B}, \tag{6.3}$$

où D désigne la variable d'endommagement. Dans l'hypothèse où l'endommagement est isotrope, la loi d'évolution de l'endommagement est donnée par la loi de normalité :

$$\dot{D} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial y},$$

où φ^* est le potentiel de dissipation et y le taux de restitution élastique défini par :

$$y = -\frac{\partial W}{\partial D} \quad . \tag{6.4}$$

Wang fait une supposition supplémentaire (proposée par Sidoroff [77]) : l'énergie de déformation du matériau endommagé est de la même forme que celle du matériau sain, en remplaçant les contraintes par les contraintes effectives :

$$W(\boldsymbol{B}, D) = W_0(\boldsymbol{B}_0) \quad . \tag{6.5}$$

On suppose ensuite la loi d'évolution suivante [55] :

$$\varphi^* = \frac{S_0}{s_0+1}\left(\frac{-y}{S_0}\right)^{s_0+1},$$

où S_0 et s_0 désignent des coefficients matériau. Il obtient alors :

$$\dot{D} = \left(\frac{-y}{S_0}\right)^{s_0} \quad . \tag{6.6}$$

Des équations 6.3, 6.4, et 6.6, il déduit l'évolution de l'endommagement :

$$\dot{D} = \left(\frac{1}{S_0(1-D)}\frac{\left(\frac{\partial W_0}{\partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 W_0}{\partial \lambda^2}}\right)^{s_0} \quad .$$

Il obtient donc une équation de la forme :

$$(S_0(1-D(t)))^{s_0}\dot{D}(t) = f(W_0(\lambda(t))) \quad .$$

En intégrant sur le temps, en supposant que le matériau est sain à l'état initial ($D(0) = 0$), et en remarquant que le membre de droite est périodique de période T (le temps d'un cycle de chargement) on obtient, pour un nombre entier de cycles :

$$S_0^{s_0}(1-(1-D)^{s_0}) = N\int_0^T f(W_0(\lambda(t)))dt \quad . \tag{6.7}$$

Il simplifie cette expression en remplaçant l'intégrale par $f(W_0(\Delta\lambda))$, où $\Delta\lambda$ est l'amplitude de l'élongation principale maximale. Le nombre de cycles à l'amorçage N_f est obtenu pour $D = 1$:

$$N_f = S_0^{s_0}\left(f(W_0(\Delta\lambda))\right)^{-1} \quad . \tag{6.8}$$

Les résultats obtenus avec ce modèle pour des essais de traction uniaxiale sont satisfaisants.

Remarque *Le même type de raisonnement peut être fait en écrivant l'endommagement sur l'énergie de déformation et non sur les contraintes. L'énergie de déformation du matériau endommagé, W, s'obtient alors à partir de l'énergie du matériau non endommagé W_0 selon :*

$$W = (1-D)W_0, \tag{6.9}$$

De 6.9, 6.4, et 6.6, on déduit l'évolution de l'endommagement :

$$\dot{D} = \left(\frac{W_0}{S_0}\right)^{s_0} \quad .$$

On fait le même raisonnement que précédemment et on obtient :

$$D = N\int_0^T \frac{W_0}{S_0}^{s_0} dt$$

et :

$$N_f = \left(\int_0^T \frac{W_0}{S_0}^{s_0} dt\right)^{-1}$$

L'expression obtenue n'est pas la même que celle de Wang mais la forme est la même. La durée de vie en fonction de l'endommagement E est une droite dans un diagramme $\log - \log$.

L'intérêt de cette démarche réside dans le fait que les coefficients matériau S_0 et s_0 qui paramètrent l'évolution du comportement gouvernent aussi la durée de vie. Cantournet [12] propose ainsi de représenter la durée de vie à partir d'un modèle à endommagement identifié sur la décroissance des efforts maximaux mesurés cycle après cycle. En pratique, l'évolution du comportement dépend davantage de la viscosité que de l'endommagement. Il est donc imprudent de prétendre identifier les coefficients S_0 et s_0, qui décrivent uniquement la partie de l'évolution du comportement due à l'endommagement, à partir de la totalité de l'évolution du comportement.

6.2.4 Influence de l'état de distorsion

Comme on observe que la fissure apparaît et se propage perpendiculairement à la direction la plus étirée (sur la configuration non fissurée), il semble naturel de considérer qu'il existe un plan dit « critique » correspondant à la facette la plus sollicitée en traction. Ainsi, plusieurs auteurs choisissent comme variable d'endommagement soit la contrainte principale maximale, soit la déformation principale maximale, vues au cours du cycle de chargement. Ainsi, on peut citer Saintier [73], dans la première catégorie, et Robisson [72], dans la deuxième. Des essais de traction et de torsion sont correctement représentés avec ces variables d'endommagement. Mars [59] et récemment Dong [22], qui réalisent des essais multiaxiaux variés, montrent également que les meilleures variables d'endommagement sont l'élongation principale maximale ou les contraintes principales maximales. Ces auteurs ont également essayé de relier la durée de vie à l'énergie de déformation maximale, mais obtiennent avec cette variable une mauvaise corrélation. Le choix d'une variable en déformation ou en contrainte se discute. Les déformations présentent l'intérêt d'être facilement mesurables expérimentalement et par le calcul aux éléments finis. Les contraintes sont moins accessibles et souvent d'une détermination moins précise, mais présentent l'intérêt de tenir compte du terme de pression hydrostatique qui pourrait avoir une influence sur la durée de vie.

Les essais de traction uniaxiale et équibiaxiale effectués par Roberts et Benzies [71] suggèrent pourtant que l'élongation principale maximale n'est pas le bon paramètre pour décrire la durée de vie : à élongation maximale constante, la durée de vie est plus importante pour la traction uniaxiale que pour la traction équibiaxiale. Les résultats de leurs essais sont reproduits figures 6.7 et 6.8. Cette différence est plus marquée pour le caoutchouc naturel que pour le SBR, ce qui pourrait être lié à la capacité de cristallisation sous contrainte du caoutchouc naturel. On verra plus loin que la formation de cristallites renforce le matériau pour allonger sa durée de vie. La structure du cristal formé en traction uniaxiale et en traction équibiaxiale pourrait être différente (structure linéaire ou planaire), ce qui expliquerait la différence de durée de vie. Comme cette différence existe aussi pour le SBR chargé, un caoutchouc synthétique non cristallisable, on pense que ce renforcement en traction uniaxiale pourrait également être dû à un phénomène d'orientation des charges. Le SBR non chargé, à élongation égale, a une durée de vie égale en traction uniaxiale et en traction équibiaxiale.

L'influence du système de charges (c'est à dire du type et de la quantité des inclusions) sur le comportement multiaxial est confirmée par les essais de Bennani [7] avec deux caoutchoucs naturels chargés en silice. Les deux mélanges ont pour base la même gomme mais le type de charges est différent. Le mélange qui présente la meilleure durée de vie en torsion n'est pas le même que celui qui présente la meilleure durée de vie en traction. Ce type de résultat laisse penser qu'une description fine des mécanismes d'endommagement, à l'échelle mésoscopique des charges, est nécessaire pour élaborer un modèle applicable à une large gamme de caoutchoucs. On note toutefois que les caoutchoucs des essais de Bennani sont chargés de particules extrêmement fines ; leur surface spécifique, et donc les interfaces particules/gomme est donc bien plus importante que pour les caoutchoucs qui font l'objet de cette étude.

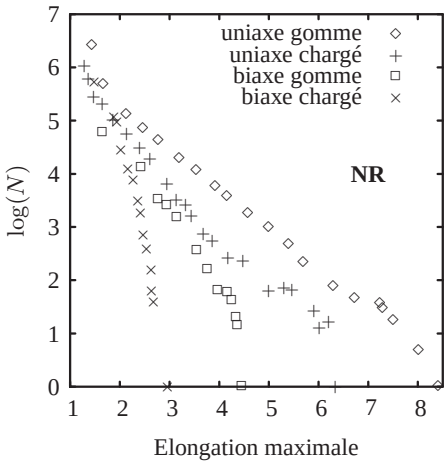


FIG. 6.7 – Durée de vie en fonction de l'élongation principale maximale pour un caoutchouc naturel chargé ou non. Essais publiés par Roberts et Benzies [71].

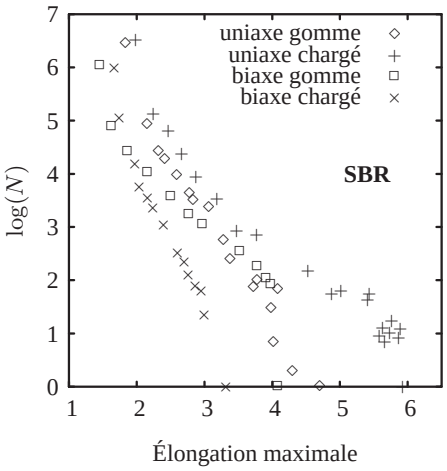


FIG. 6.8 – Durée de vie en fonction de l'élongation principale maximale pour un SBR chargé ou non. Essais publiés par Roberts et Benzies [71].

6.2.5 Influence de la rotation du repère principal

Mars propose une variable d'endommagement [59] qu'il appelle « densité d'énergie de déchirure » (Cracking Energy Density). Elle s'interprète comme l'énergie de déformation qui peut être dissipée par la propagation d'une micro-fissure normale à la direction n. L'auteur suppose qu'il existe suffisamment de défauts pré-existants dans le matériau pour qu'il s'en trouve toujours un au point considéré. Cette énergie, qu'on note W_c, est définie de manière intégrale sur le temps du chargement :

$$W_c(\mathrm{n}) = \int_0^T \mathrm{f} \cdot \mathrm{d}\, dt,$$

où f désigne l'effort qui s'exerce sur la facette définie dans la configuration actuelle par sa normale n :

$$\mathrm{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{n}$$

et d le taux de déformation dans la direction n :

$$\mathrm{d} = \boldsymbol{d} \cdot \mathrm{n} \quad .$$

En appliquant les formules de transport adéquates, on exprime W_c en fonction des grandeurs lagrangiennes, ce qui simplifie l'intégration car la normale à la fissure est alors constante au cours du temps. L'énergie associée à la compression est éliminée. On obtient ensuite le plan dans lequel la fissure est susceptible de s'amorcer en maximisant W_c.

Cette variable d'endommagement a une interprétation physique intéressante mais ne donne pas de meilleurs résultats que les variables simples comme l'élongation ou la contrainte

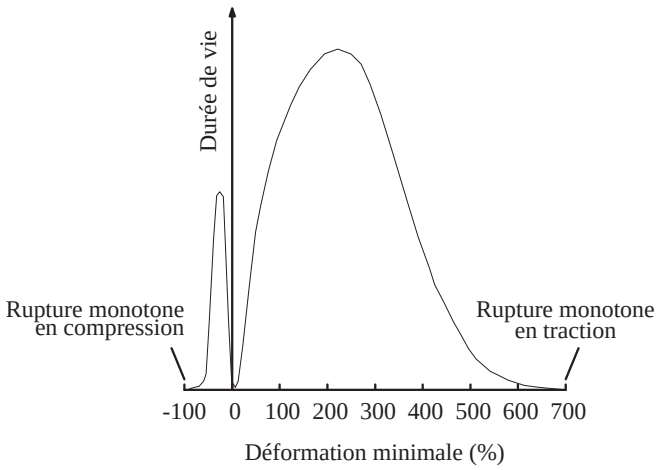


FIG. 6.9 – Durée de vie pour un chargement d'amplitude de 25% de déformation en fonction du minimum de la déformation. Essais publiés par Cadwell [11].

maximale. Par ailleurs, la pertinence des formules de transport utilisées par Mars est discutable. En effet, lorsque n décrit une surface matérielle elle se transporte sur la configuration de référence de la manière suivante :

$$\mathrm{n} = J \frac{{}^t\boldsymbol{F}^{-1}\mathrm{N}}{\| \ {}^t\boldsymbol{F}^{-1}\mathrm{N} \ \|},$$

tandis que Mars la transporte comme une direction matérielle :

$$\mathrm{n} = \frac{\boldsymbol{F}\mathrm{N}}{\| \ \boldsymbol{F}\mathrm{N} \ \|} \quad .$$

Par ailleurs, cette énergie est élastique par construction, et donc indépendante du trajet de chargement suivi pour arriver dans la configuration actuelle. Elle ne peut donc pas tenir compte de la rotation du repère principal.

6.2.6 Influence de l'amplitude et de la moyenne

Dès 1940, Cadwell [11] étudie l'influence de l'amplitude et de la moyenne d'un cycle de traction imposée en déplacement à des éprouvettes haltères axisymétriques en caoutchouc naturel chargé au noir de carbone. Il constate deux phénomènes :

- à déformation minimale constante, la durée de vie diminue lorsque le maximum de la déformation augmente ;
- à amplitude de déformation constante (voir figure 6.9), lorsque la déformation minimale s'éloigne de zéro (en traction ou en compression), la durée de vie commence par augmenter, et ceci jusqu'à un certain point après lequel elle diminue lorsque la déformation maximale approche la déformation à rupture monotone.

Il obtient les mêmes résultats avec des éprouvettes doubles de glissement simple.

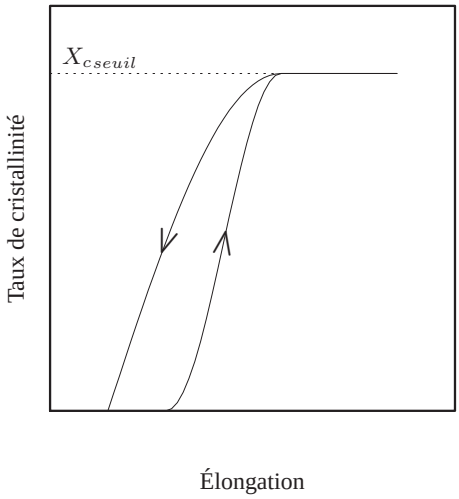


FIG. 6.10 – Taux de cristallinité en fonction de l'élongation [89].

Renforcement en traction/traction et cristallisation sous contrainte

L'augmentation de la durée de vie en traction/traction est caractéristique des caoutchoucs naturels. Elle est souvent attribuée à leur capacité de cristallisation : les macromolécules s'alignent dans la direction de traction et se lient entre elles par des liaisons faibles pour former des cristallites plus rigides que la phase amorphe. Ces cristallites se forment là où les sollicitations sont les plus importantes, et en particulier en fond de fissure.

Quelques auteurs [73, 30, 53, 87, 89, 86] ont étudié la dépendance du taux de cristallinité au chargement mécanique, mais uniquement pour des chargements statiques ou quasi-statiques. Ceci permet toutefois d'émettre certaines hypothèses pour expliquer les mécanismes de renforcement en endurance dus à la cristallisation. Selon la méthode expérimentale utilisée (souvent la diffraction X, parfois des mesures volumétriques) et le matériau, les mesures diffèrent, mais les tendances sont les mêmes. Ceci est illustré par le schémas 6.10. La cristallisation apparaît à partir d'un certain seuil de déformation λ_s puis le taux de cristallinité augmente avec la déformation jusqu'à atteindre une valeur maximale X_{cmax}. Le phénomène est hystérétique [89] : le taux de cristallinité est plus élevé pendant la décharge que pendant la charge. Lee et Donovan [53] ou plus récemment Trabelsi [87] ont réalisé des mesures de cristallinité locales, en pointe de fissure, sur des élastomères naturels. Ils montrent que la zone cristallisée se développe dans la direction de traction, ce qui provoque un émoussement du fond de la fissure (voir la figure 6.11). La concentration de contraintes diminue donc. Outre cet effet géométrique, la cristallite ainsi formée constitue un obstacle à la propagation d'une fissure. Celle-ci tend à se diviser pour contourner la cristallite, ce qui augmente l'énergie nécessaire pour qu'elle se propage.

Lee et Donovan [53] ont montré que la présence de charges, probablement par un effet de concentration de contraintes, augmente le taux de cristallinité et la taille de la zone cristallisée en fond de fissure. Ainsi les charges et la cristallisation auraient un effet conjoint

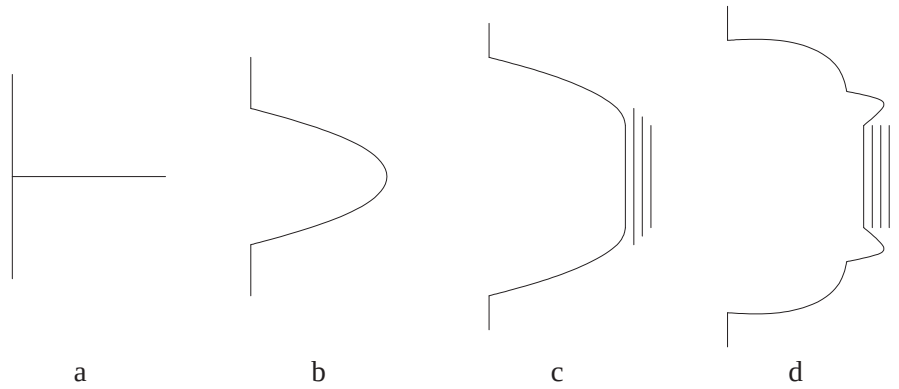


FIG. 6.11 – (a) La fissure est fermée ; (b) la fissure est ouverte ; (c) les chaînes s'alignent en fond de fissure et forment une cristallite qui se développe dans la direction de traction ; (d) la fissure branche pour contourner la cristallite.

bénéfique sur la tenue du matériau.

Il est intéressant de remarquer l'échelle de temps de la cristallisation. Trabelsi [89] mesure environ 15 heures pour obtenir la stabilisation du taux de cristallinité à -25°C. La durée caractéristique de la cristallisation serait donc bien plus importante que celle des sollicitations classiquement appliquées aux pièces antivibratoires (inférieure à la seconde). En réalité, on suppose que la vitesse de cristallisation augmente avec la température. En effet, des mesures de cristallinité réalisées au cours d'un chargement mécanique [88] de vitesse de déformation de 0.033 min^{-1} (possibles à l'aide d'une source synchrotron) font apparaître un taux de cristallinité comparable.

Plusieurs auteurs affirment qu'un phénomène de renforcement similaire se produit pour des caoutchoucs synthétiques, qui sont très peu ou pas du tout cristallisables. Ainsi, dès 1943, Fielding [29] observe un phénomène de renforcement très important dans un matériau type SBR[2]. Abraham [1] observe une augmentation de durée de vie d'un facteur 10 pour un EPDM[3] et un SBR chargés au noir de carbone, qu'il ne retrouve pas pour ces mêmes gommes non chargées. Il en déduit que ce renforcement est une propriété du système de charges. Robisson [72] obtient les mêmes tendances sur un SBR chargé essentiellement en silice (30% environ). Leurs résultats sont en contradiction avec ceux obtenus par Beatty [5] sur un SBR pourtant chargé à 40 pce[4] de noir de carbone (voir figure 6.13). Il est donc difficile de conclure quant à l'existence d'un effet renforçant en traction/traction pour ces matériaux. Quoi qu'il en soit, l'effet renforçant rapporté dans le cas des caoutchoucs naturels est bien plus important que dans le cas des caoutchoucs synthétiques : Cadwell constate des augmentations de durée de vie d'un facteur 100 entre l'essai de rapport de charge nul et l'essai conduisant à la meilleure durée de vie, de rapport de charge $R \simeq 0.9$. Il est donc raisonnable de penser que le phénomène de cristallisation est la cause principale de

[2]SBR : Styrene Butadiene Rubber
[3]EPDM : Ethylene Propyle Diene Monomer
[4]pour cent de gomme. Voir annexe A.

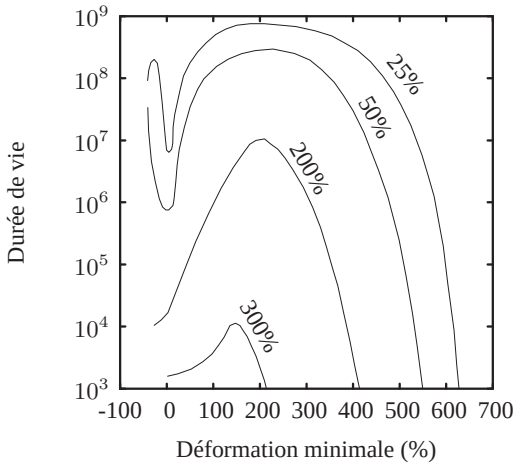


FIG. 6.12 – Durée de vie pour des chargements d'amplitude constante en fonction du minimum de la déformation. Essais publiés par Cadwell [11].

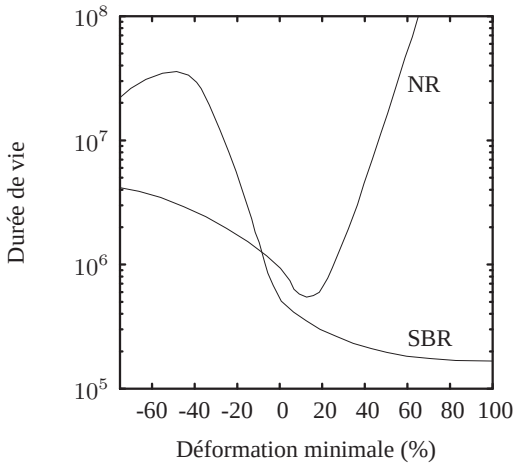


FIG. 6.13 – Durée de vie pour un chargement d'amplitude de 75% de déformation en fonction du minimum de la déformation. Essais publiés par Beatty [5].

cette augmentation de durée de vie. Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas incompatible avec celle d'un effet renforçant des charges minérales car les cristallites peuvent être considérées comme des charges renforçantes qui apparaissent précisément là ou les concentrations de contraintes sont les plus importantes.

Effet de la compression

L'augmentation de la durée de vie en compression peut être interprétée de plusieurs façons. Pour des essais en traction/compression, il est probable que seule la composante de traction participe à ouvrir une fissure ; cette dernière serait alors refermée pendant la compression. Or on compare des essais d'amplitude constante : lorsque le minimum diminue, l'amplitude de la partie positive du cycle diminue également. Il est donc naturel que la durée de vie augmente. La rupture en compression/compression est difficile à interpréter sans connaître le lieu et la direction d'apparition des fissures. On peut supposer que les fissures apparaissent à la surface de l'éprouvette où le matériau est dans un état de traction. En effet, les éprouvettes utilisées pour ces essais sont collées sur des supports métalliques ; ceci conduit à l'apparition d'un effet « tonneau » particulièrement marqué puisque le matériau est incompressible. Lindley [56] et Stevenson [81] montrent d'ailleurs que les fissures s'amorcent effectivement là où la traction est maximale. Les effets de renforcement évoqués précédemment dans le cas de la traction/traction pourraient donc se manifester localement, en surface de l'éprouvette, dans le cas de compression /compression. On peut aussi envisager la possibilité d'une rupture interne, là où l'état de compression est bien réel. Le mécanisme d'amorçage dans ces conditions est alors probablement différent de celui d'un amorçage en traction.

Legorju-Jago et Bathias [54] on étudié la fatigue d'un caoutchouc naturel avec des éprouvettes cylindriques de très faible hauteur devant le diamètre (dite éprouvettes « pancake »), de façon à limiter l'effet tonneau et à créer un état de traction/compression quasi-hydrostatique. Dans ces conditions, les fissures apparaissent à l'intérieur de l'éprouvette et non en surface. La tomographie aux rayons X permet de visualiser l'apparition de cavitées à l'intérieur de l'éprouvette : au centre de l'éprouvette en traction, en subsurface en compression (voir figure 6.14). Le plan d'apparition des fissures n'est pas précisé. Les deux auteurs donnent un seul résultat de calcul ; aussi pour analyser leurs résultats, on simule leurs essais avec le modèle néo-hookéen. Le calcul est réalisé avec le solveur Abaqus, en utilisant des éléments axi-symétriques acceptant la torsion. La géométrie de l'éprouvette est reproduite d'après l'article [54]. La figure 6.14 représente le champ des contraintes principales maximales dans la coupe transversale de l'éprouvette. C'est une variable qui paraît bien localiser l'endommagement observé expérimentalement. D'autres variables, comme l'élongation principale maximale, ou bien encore la pression hydrostatique, ou le cisaillement de Tresca, n'y parviennent pas. Ces essais suggèrent donc que la pression hydrostatique est un paramètre à prendre en compte dans l'analyse de la durée de vie. Ils indiquent également que l'endommagement apparaît là où, localement, le matériau est en traction. Il est donc raisonnable de penser que la compression ne provoque pas d'endommagement.

Modèles de renforcement

Abraham et Alshut [1] ne proposent pas explicitement de modèle de renforcement, mais ils remarquent que la durée de vie est beaucoup mieux corrélée avec l'énergie de déformation qu'avec les contraintes ou les déformations principales maximales. En revanche, l'énergie de déformation décrit mal la multiaxialité des contraintes [22]. Robisson propose un modèle de renforcement empirique : l'endommagement est défini comme une fonction de la déformation principale maximale et de l'amplitude du deuxième invariant du tenseur des déformations. Dans les deux cas, la base d'essais n'est pas assez importante pour estimer la pertinence du modèle. Par ailleurs, ces deux modèles sont appliqués au renforcement des SBR, qui est beaucoup moins marqué, et peut-être d'une nature différente de celui des caoutchoucs naturels.

Saintier [73] propose un modèle de renforcement qui représente le phénomène de cristallisation sous contrainte, caractéristique du caoutchouc naturel. Il définit un endommagement équivalent σ_{eq} comme le rapport d'une variable d'endommagement σ_{endo} et d'une fonction de renforcement σ_{renf}, elle même dépendante du taux de cristallinité :

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_{endo}}{\sigma_{renf}(X_c)} \quad .$$

La variable d'endommagement choisie est la contrainte de Cauchy principale maximale atteinte au cours du cycle, notée $\sigma_{\mathrm{n}\,max}$, et la direction principale associée, notée n_{CP}, définit un plan dit « critique », le plan d'apparition de la fissure. Ce plan est un plan *matériel*, qui s'écrit en configuration de référence :

$$\mathrm{N}_{CP} = \frac{{}^t\boldsymbol{F}^{-1}_{t_{max}} \cdot \mathrm{n}_{CP}}{\parallel {}^t\boldsymbol{F}^{-1}_{t_{max}} \cdot \mathrm{n}_{CP} \parallel},$$

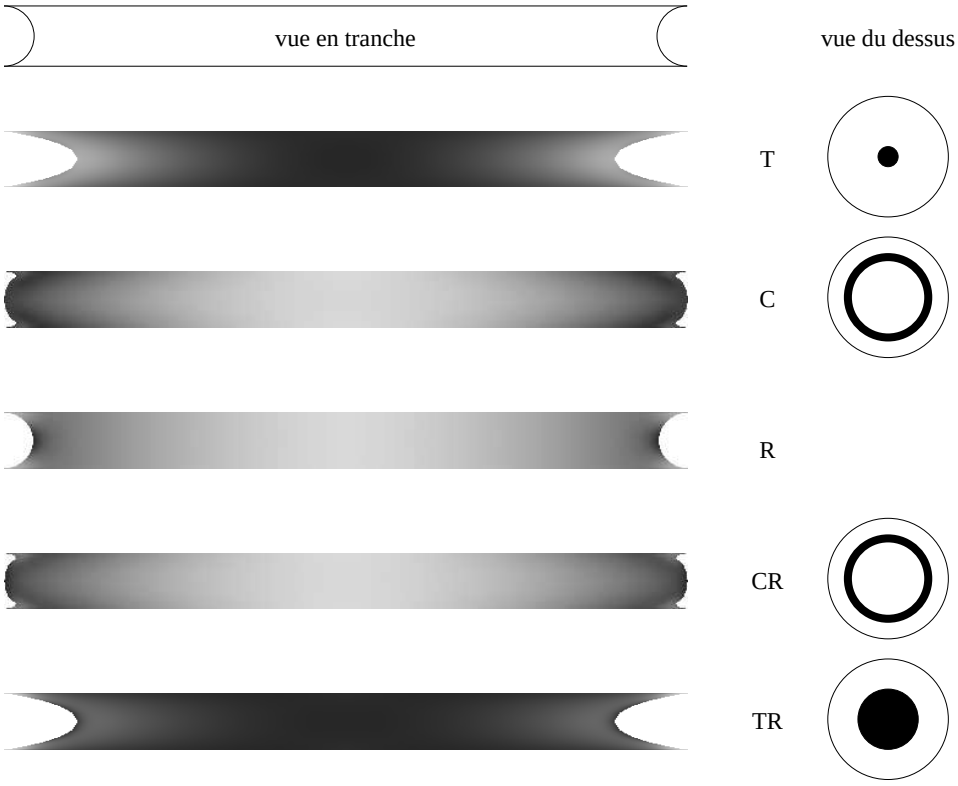


FIG. 6.14 – A droite, un schéma indique la localisation expérimentale des fissures par tomographie X telle qu'elle est décrite par Legorju et Bathias [54]. A droite, un calcul aux éléments finis permet de visualiser la répartition des contraintes principales maximale. Les contraintes sont d'autant plus importantes que la teinte est sombre. L'échelle est adaptée à chaque cas de calcul. L'endommagement généré par un essai de torsion simple (R) n'est pas décrit dans l'article ; le calcul est montré ici pour comparaison avec les autres cas de chargement.

où $\boldsymbol{F}_{t_{max}}$ désigne le gradient de la transformation à l'instant t_{max} auquel la contrainte maximale est atteinte.

Il réalise des mesures de taux de cristallinité X_c par diffraction X au cours d'un chargement quasi-statique et en déduit que son évolution en fonction du niveau de traction est de la forme :

$$X_c(\sigma) = X_{cmax}(1 - \exp(-D.\langle \sigma - \sigma_{seuil} \rangle)),$$

où $\langle \bullet \rangle$ désigne la partie positive et D une constante matériau. La cristallisation n'apparaît qu'au dessus d'un certain seuil de contrainte noté σ_{seuil}. X_{cmax} est le taux de cristallinité maximal qu'on puisse atteindre dans le caoutchouc naturel, estimé ici à 30%. Dans le cas d'un chargement cyclique et non plus quasi-statique, il suppose que le taux de cristallinité reste de la même forme :

$$X_c(\sigma_{renf}) = 0.3(1 - \exp(-D.\langle \sigma_{renf} \rangle)) \quad .$$

Il considère que la cristallisation est liée au minimum de traction atteint dans le plan critique au cours du chargement. Mais comme dans le cas d'un chargement multiaxial, la rotation du repère principal et celle du repère matériel ne sont pas forcément égales, le mode de fermeture de la fissure n'est pas nécessairement le mode I. Il peut donc exister une composante de cisaillement dans le plan critique lorsque le minimum du chargement est atteint. Saintier propose d'écrire sa variable de renforcement comme une fonction de la composante normale des contraintes $\sigma_{CPt_{min}}$ et du cisaillement $\tau_{CPt_{min}}$ au temps t_{min} auquel la composante normale σ_{CP} des contraintes sur la facette critique est minimale :

$$\sigma_{renf} = f(\sigma_{CPt_{min}}, \tau_{CPt_{min}}) - \sigma_{seuil} \quad .$$

Le nombre de cycles à l'amorçage est alors défini de la façon suivante :

$$N_i = \frac{\sigma_r^* - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} - \sigma_l^*} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_r} \right)^{\alpha}$$

où :

$$\sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{1 + A_2.X_c},$$
$$\sigma_l^* = \frac{\sigma_l}{1 + A_3.X_c} \quad .$$

A, A_2, A_3 , α et σ_r sont des constantes matériau. On remarque que cette écriture assure que la durée de vie est infinie en dessous d'une certaine contrainte appliquée σ_l et nulle si on dépasse la contrainte à rupture σ_r.

Ce modèle prend en compte l'aspect multiaxial du renforcement. Les résultats obtenus par Saintier en terme de localisation de fissure sont très intéressants. En effet, le modèle prévoit des amorçages internes, là où les contraintes ne sont pas maximales mais où le renforcement dû à la cristallisation est faible. L'inconvénient principal du modèle est son grand nombre de coefficients matériaux. La détermination du plan critique est discutable. Le plan

critique est déterminé uniquement à partir de la variable d'endommagement et non pas de la variable équivalente σ_{eq}. On pourrait pourtant imaginer des situations où le plan le plus sollicité serait aussi le plan le plus renforcé. Toutefois, l'hypothèse tient si on considère que le renforcement n'intervient qu'après que la fissure est apparue, dans la phase de propagation.

6.2.7 Influence d'une précharge

On a vu dans la partie précédente que le comportement des élastomères, et plus particulièrement des élastomères chargés, dépend de manière importante du chargement maximal vu au cours de la vie du matériau. On peut donc supposer qu'un chargement préalable de quelques cycles d'amplitude supérieure à celle de l'essai d'endurance modifie la durée de vie de l'éprouvette puisqu'il modifie son comportement (voir figure 6.18). Il semble que ce phénomène n'ait été étudié que par Mars [59]. La précharge a pour effet principal d'adoucir considérablement le matériau par effet Mullins (voir figure 6.16). Le petit nombre d'éprouvettes testées ne permet pas de conclure quant à l'influence de la précharge sur la durée de vie. En revanche, un phénomène remarquable apparaît : le matériau, au lieu de s'adoucir pendant l'essai d'endurance (c'est-à-dire après l'étape de précharge) comme c'est le cas sans précharge, a un comportement stable et/ou présente un raidissement. Mars propose deux explications possibles à ce phénomène :

- la précharge provoque la propagation rapide de quelques défauts qui occultent la présence de nombreux autres défauts plus petits ;
- la précharge constitue une réorganisation rapide du réseau macromoléculaire, réorganisation qui pour un essai sans précharge s'effectue de manière graduelle, cycle après cycle.

Le raidissement pourrait s'expliquer par la capacité de recouvrance à l'effet Mullins, éventuellement accentuée par l'échauffement dû à la sollicitation mécanique. Toutes ces explications demeurent toutefois de pures spéculations.

6.2.8 Influence de l'environnement

Température

Lorsque la température augmente, la vitesse et propagation, et donc d'amorçage, au sens où il a été défini au chapitre précédent, augmentent aussi [5, 54]. Dans le cas des élastomères cristallisables, cet effet devrait être encore plus marqué car la capacité du matériau à cristalliser diminue lorsque la température augmente [87]. Cependant, les essais de Greensmith, Mullins et Thomas (réimprimés par Beatty [5]) montrent que la durée de vie du caoutchouc naturel dépend moins de la température que celle du SBR.

Environnement chimique

Les élastomères sont sensibles aux attaques chimiques, en particulier celles des agents oxydants [48] : oxygène gazeux, ozone. Cette sensibilité augmente avec la température et diminue avec la cristallinité [54]. L'ajout de substances anti-oxydantes permet de relever la limite d'endurance du caoutchouc [50].

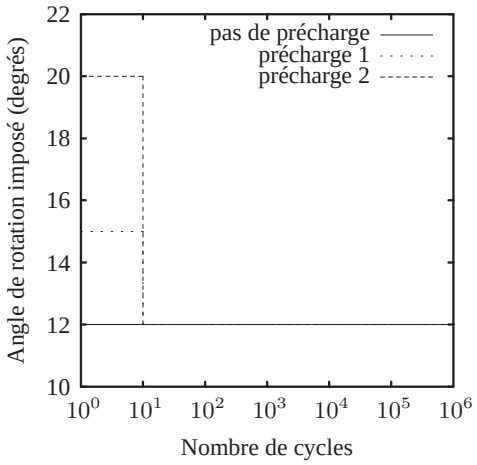


FIG. 6.15 – Torsion appliquée sur éprouvette torique.

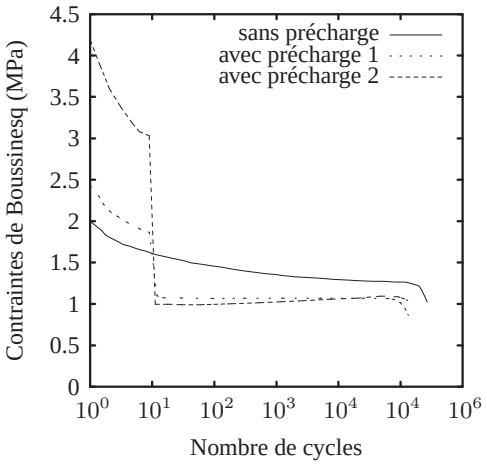


FIG. 6.16 – Contrainte de cisaillement mesurée pour les signaux décrits figure 6.16 en fonction du nombre de cycle. Essais publiés par Mars [59].

6.3 Cumul d'endommagement pour un chargement d'amplitude variable

Tous les travaux cités ci-dessus supposent que le chargement est périodique, généralement sinusoïdal. En réalité, les pièces utilisées dans l'automobile sont soumises à des chargements bien plus complexes, d'amplitude et de moyenne variable. La figure 6.17 est un exemple de chargement mesuré sur une pièce de liaison au sol.

Pour estimer l'endommagement provoqué par ce type de chargement, la méthode couramment employée pour la fatigue des métaux consiste à se ramener au problème du signal périodique simple, de la façon suivante :

1. Le signal est décomposé en cycles simples par la méthode dite du comptage Rainflow (et qui fait l'objet de la norme AFNOR A03-406 [75]). Un cycle est défini par sa moyenne et son amplitude.
2. A chaque type de cycle i est associé un endommagement E_i égal au nombre de cycles de ce type compté dans le signal, n_i, divisé par le nombre de cycles à rupture, N_i, obtenu en réalisant un essai d'endurance de moyenne et d'amplitude du type de cycle en question. C'est en ce sens qu'on se ramène au cas du signal périodique simple, puisque c'est celui qui fait référence.
3. On se donne ensuite une règle de cumul de ces différents endommagements. La règle la plus courante est la règle de cumul linéaire de Miner :

$$E = \sum_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{n_i}{N_i} \right) \quad .$$

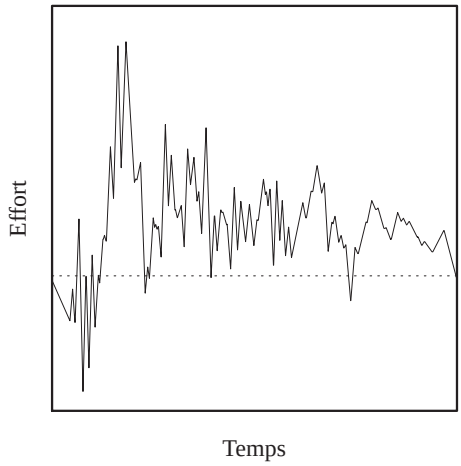


FIG. 6.17 – Effort mesuré en entrée d'une pièce de liaison au sol en conditions réelles.

La ruine de la structure se produit lorsque E dépasse 1.

L'endommagement calculé par cette méthode est indépendant de l'ordre dans lequel les différents niveaux de charge sont appliqués. On suppose que l'endommagement à un instant t ne dépend pas de l'endommagement généré par tout le chargement vu par le matériau jusqu'à cet instant t. En réalité, l'histoire du chargement a souvent une influence non négligeable sur la durée de vie. La relative efficacité de cette méthode réside dans le caractère aléatoire des chargements réels. Il existe d'autres règles de cumul qui permettent de prendre en compte l'histoire du chargement, mais elle sont plus complexes à mettre en œuvre.

Le cas du caoutchouc naturel a très peu été abordé dans la littérature. La méthode décrite ci-dessus a pu être mise en défaut par Sun [83], qui a pu montrer que les chargements d'amplitude croissante étaient plus endommageants que les chargements d'amplitude décroissante. Ce phénomène a au moins deux explications possibles. La première explication est que l'endommagement créé par un cycle dépend de l'état d'endommagement actuel créé par les cycles précédents. Autrement dit, l'histoire du chargement compte. Une seconde explication réside dans l'adoucissement du comportement dû à l'effet Mullins. Ses essais sont réalisés à déformation imposée. Les contraintes vues par le matériau pendant les cycles de petite amplitude pour le chargement décroisssant sont donc inférieures à celles vues pendant le chargement croissant (voir la figure 6.18). On ne compare donc pas des essais équivalents en terme de sollicitations locales.

Cantournet [12] propose une modification de la loi de cumul de Miner en introduisant un seuil d'endommagement. Un type de cycle i n'est endommageant qu'à partir du ${N_{0i}}^{\text{ième}}$ cycle lorsqu'il est appliqué seul. Pour un chargement à deux niveaux (ie n_1 cycles à un premier niveau puis n_2 cycles à un second niveau), la règle de cumul est différente selon que l'endommagement intervient au cours du premier ou au cours du second chargement :

– si $N_{0i} < n_i$, l'endommagement apparaît pendant le premier niveau de chargement et

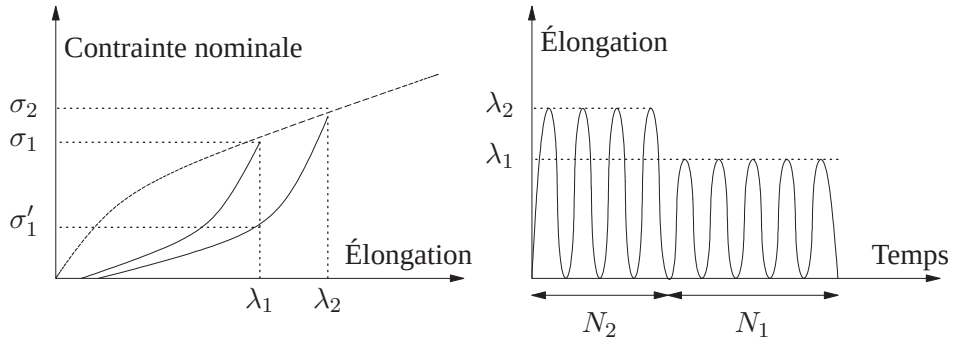


FIG. 6.18 – Un chargement en deux séquences est réalisé : une séquence S_1 d'extension λ_1, et une autre, S_2, d'extension λ_2. Les contraintes correspondant à λ_2 sont égales à σ_2. Les contraintes correspondants à λ_1 correspondent à σ_1 lorsque le chargement est réalisé dans l'ordre $S_1 - S_2$ et σ'_1 lorsque le chargement est réalisé dans l'ordre $S_2 - S_1$.

est donné par la formule :

$$E = 1 = \frac{n_1 - N_{01}}{N_1 - N_{01}} + \frac{n_2}{N_2 - N_{02}} \quad .$$

– si $N_{0i} > n_i$, le premier chargement n'est pas endommageant ; l'endommagement apparaît pendant le second niveau de chargement et est donné par la formule :

$$E = 1 = \frac{n_2 - N_{s2}}{N_2 - N_{02}} \quad .$$

où N_{s2} désigne le seuil pour le chargement 2 modifié par le chargement 1 selon :

$$N_{s2} = \left(1 - \frac{n_1}{N_{01}}\right) N_{02} \quad .$$

Cette démarche est certainement généralisable pour un chargement à p niveaux. Il suffit d'appliquer la règle de cumul linéaire :

$$E = \sum_{i=1}^{p} E_i,$$

où E_i dépend du chargement au cours duquel l'endommagement apparaît.

$$\begin{cases} E_i = 0 & \text{si } n_i < N_{si}\,; \\ E_i = \frac{n_i - N_{si}}{N_i - N_{0i}} & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

le seuil modifié valant :

$$N_{si} = \left(1 - \sum_{j<i} \frac{n_j}{N_{0j}}\right) N_{0i} \quad .$$

6.4 Conclusion et discussion

La fatigue des élastomères est un phénomène encore assez mal connu. Quelques phénomènes importants ont cependant été identifiés. Les principaux sont l'influence de la multiaxialité du chargement et de la contrainte moyenne. Ces deux phénomènes ont été étudié séparémment. Quelques modèles ont été proposés pour décrire l'un ou l'autre, mais il existe peu de modèles couplés, tenant compte à la fois de l'aspect multiaxial de l'endommagement et de l'aspect multiaxial du renforcement.

On note également qu'aucun modèle ne décrit les mécanismes microscopiques ou mésoscopiques, à l'échelle de l'inclusion sur laquelle la fissure s'initie, pour construire une variable d'endommagement. Il n'existe pas pour les élastomères de modèles similaires à ceux de Dang Van [19] ou Papadopoulos [67] qui utilisent un passage macro-méso pour décrire un endommagement microscopique à partir d'un calcul de structure donnant accès aux grandeurs macroscopiques. Une première explication réside certainement dans le fait que les mécanismes d'endommagement sont encore très mal connus pour ces matériaux. Ce type de modèles pourraient cependant voir le jour avec l'amélioration des techniques d'observation. Une deuxième explication réside dans le fait que l'amorçage observé résulte en réalité d'une phase de propagation d'un défaut apparu très tôt dans la vie de la structure. En d'autres termes, le temps d'apparition d'une fissure à l'échelle de l'inclusion est probablement court devant la phase de propagation de ce micro-défaut jusqu'à une taille telle qu'il soit visible à l'œil nu. C'est d'ailleurs l'hypothèse de base de tous les modèles fondés sur la description de la propagation de fissure [35] ou de celui de Mars [59].

Les modèles phénoménologiques, comme l'élongation ou la contrainte principale maximale, fonctionnent aussi bien voire mieux que les modèles fondés sur la description de la propagation. Ils sont également plus faciles à mettre en œuvre.

L'évolution du comportement est généralement mise de côté. Seuls les modèles fondés sur la mécanique de l'endommagement la décrivent. Les autres auteurs se sont en général limités à une loi hyperélastique identifiée à partir d'un essai cyclique à un chargement donné ou même à une courbe de première charge. Les essais d'endurance sont presque toujours effectués à déplacement imposé et non à effort imposé.

Les chargements d'amplitude variable n'ont pas encore suscité de recherche approfondie.

Chapitre 7

Prévision de la durée de vie

Dans ce chapitre, les résultats des essais d'endurance sont décrits et analysés. Un modèle de prévision de durée de vie sous sollicitations multiaxiales est ensuite proposé.

L'objectif de ce travail est de déterminer quelle grandeur E, qu'on appelle aussi ici variable d'endommagement, peut être reliée de façon non équivoque à la durée de vie N exprimée en nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure. On cherche donc E, telle qu'il existe une fonction F, bijective, qui à E associe N (*cf.* figure 7.1).

Remarque *On parle ici de variable d'endommagement et non de critère de fatigue. En effet, les chargements appliqués aux pièces automobiles sollicitent le matériau dans son domaine d'endurance limitée. On ne cherche donc pas à déterminer un critère sur une certaine grandeur, en dessous duquel la structure ne se fatigue pas, mais bien une fonction liant cette grandeur à la durée de vie de la pièce.*

7.1 Essais de traction uniaxiale

Dans ce paragraphe, on présente les résultats obtenus en traction uniaxiale sur l'éprouvette AE42 essentiellement. Le chargement est imposé sous la forme d'un déplacement.

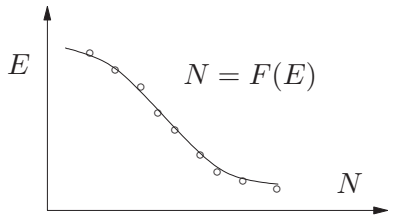


FIG. 7.1 – Courbe de Wöhler type.

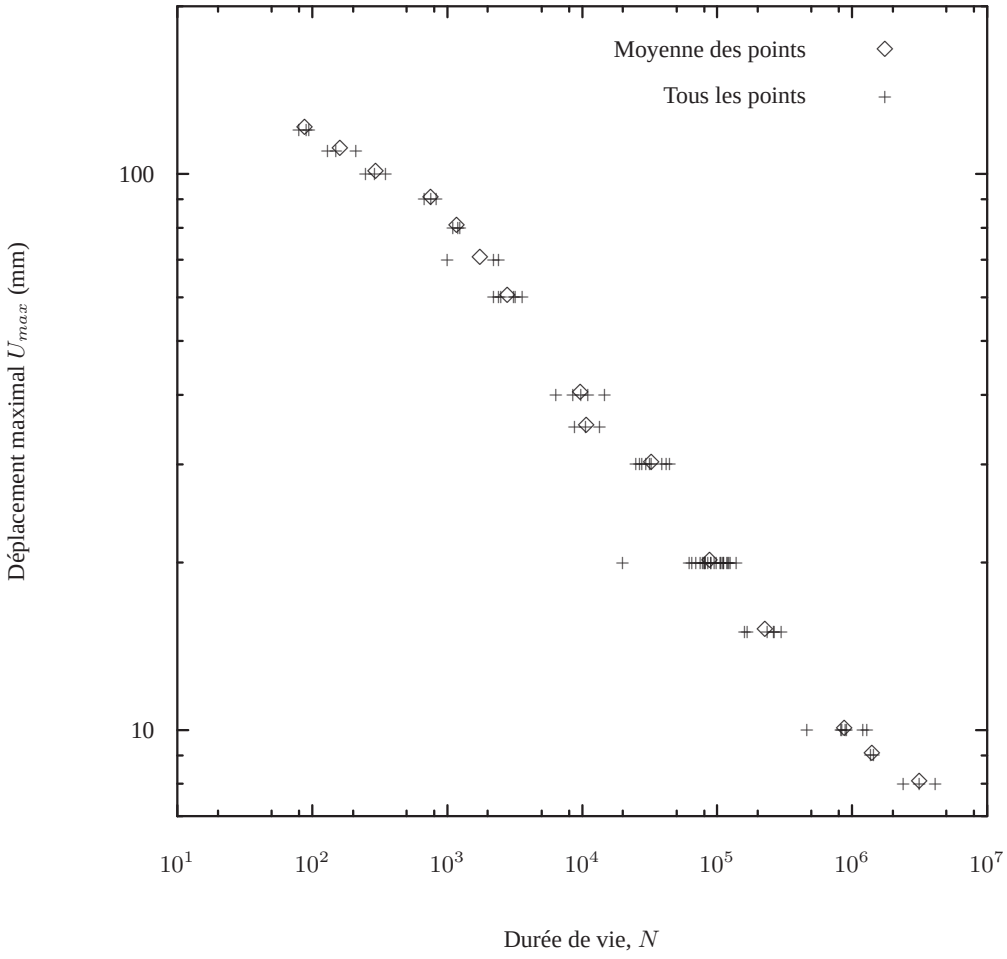


FIG. 7.2 – Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement imposé pour des essais de traction de rapport de charge nul. L'éprouvette mesure 30 mm de long.

7.1.1 Influence de l'amplitude

La figure 7.2 représente la durée de vie en fonction du déplacement imposé à l'éprouvette. Comme il est d'usage pour les courbes de Wöhler, la durée de vie est en abscisse et la variable d'endommagement choisie en ordonnée.

Définition *On désigne ici par le terme « courbe de Wöhler » une série de points dont l'abscisse correspond à la durée de vie mesurée et l'ordonnée une variable à préciser. Cette variable peut correspondre à une condition d'essai, comme par exemple le déplacement maximal imposé, ou l'effort moyen mesuré pour chaque condition d'essai. Il peut aussi s'agir d'une variable locale obtenue par un calcul de structure au point où la fissure est apparue.*

On distingue les trois régimes usuellement identifiés pour les essais d'endurance :

1. Entre 1 et 10^3 cycles, il s'agit de fatigue oligocyclique (à très petit nombre de cycles). Les mécanismes responsables de l'endommagement sont intermédiaires entre les mécanismes de fatigue et de ceux de rupture monotone.
2. Entre 10^3 et 10^6 cycles, la pente de la courbe est constante ; c'est le domaine de l'endurance limitée.
3. A partir de 10^6 cycles, il semble que la courbe commence à s'incurver ; on suppose que l'on tend vers la limite d'endurance mécanique, où la durée de vie est uniquement liée à des attaques chimiques. Il est probable que cette limite d'endurance ne soit atteinte que pour des chargements d'intensité encore plus faible que ceux réalisés.

Les pièces automobiles sont sollicitées dans le domaine de l'endurance limitée. Dans ce domaine, on voit que la relation entre le nombre de cycles et l'amplitude du chargement est linéaire dans un diagramme logarithmique. Autrement dit, on peut envisager de la représenter par un modèle de type Basquin, qu'on écrira ici :

$$KNE^{\beta} = 1$$

où K et β sont des coefficients matériau.

Il existe des modèles permettant de représenter également les inflexions de la courbe aux petits et grands nombre de cycle. On ne les retient pas ici, car hormis les essais de traction simple présentés à la figure 7.2, tous les essais réalisés pour cette étude décrivent le domaine de l'endurance limitée. On ne dispose donc pas de données expérimentales suffisantes pour identifier les paramètres de ces modèles de façon robuste.

Gehman [32] montre que la distribution de la durée de vie pour une condition d'essai donnée est du type lognormale. Dans cette étude, le nombre de répétitions de chaque condition d'essai n'est pas aussi important, mais les durées de vie obtenues sur une condition d'essai répétée plus de 20 fois (voir la figure 7.3) présentent effectivement une distribution proche d'une distribution lognormale. Les écarts types mesurés ici sont de l'ordre de 0,1 (sur $\log N$). Par la suite, dans un souci de lisibilité des graphiques, on présente en général des résultats moyens pour chaque condition d'essai. Il s'agit de la moyenne d'au moins 3 essais, obtenue selon :

$$\log N_{moyen} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \log N_i \quad .$$

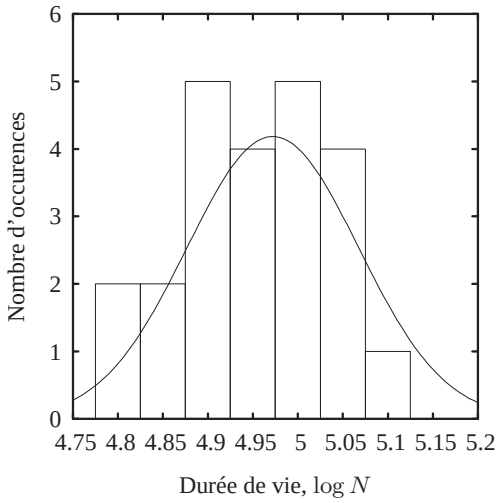


FIG. 7.3 – Distribution des durées de vie obtenues pour un essai de traction sur AE42 de déplacement imposé entre 0 et 20 mm. La courbe représente la distribution normale ajustée aux essais, de moyenne égale à 4,97 et d'écart type égal à 0,095.

7.1.2 Influence d'un passage en compression

La figure 7.4 montre les courbes de Wöhler obtenues en déplacement maximal pour trois séries d'essais, de déplacement minimal constant par série (négatif ou nul) et de déplacement maximal variable d'une condition d'essai à l'autre. On constate que les essais de traction/compression se superposent aux essais de traction simple. Cela suggère que le passage en compression n'endommage pas le matériau. Pour confirmer ce résultat, une série d'essais à déplacement maximal constant et à déplacement minimal variable est réalisée. La figure 7.5 montre que la durée de vie est indépendante du niveau de compression atteint. Ces essais permettent de conclure que, au moins dans l'intervalle testé, la compression ne provoque pas d'endommagement dans le matériau. On peut même remarquer une très légère augmentation de la durée de vie pour les sollicitations de petite amplitude, plus prononcée pour l'éprouvette AE2 (voir la figure 7.6), et ceci bien que les déformations atteintes localement soit du même ordre de grandeur. Toutefois, ce phénomène reste peu marqué. La raison pour laquelle il est plus prononcé pour l'éprouvette AE2 que pour l'éprouvette AE42 n'est pas expliquée. Dans la mesure où les résultats obtenus en traction simple sont les mêmes pour les deux types d'éprouvettes, on pense que les hypothèses d'une différence de matériau entre les éprouvettes dûe au mode d'élaboration d'une part, d'une incertitude sur le seuil de détection des fissures, d'autre part, sont à écarter.

7.1.3 Essais en traction/traction

Les figures 7.7 et 7.8 illustrent le renforcement en traction/traction caractéristique du caoutchouc naturel. Plus le minimum est élevé, plus la durée de vie est importante, et ceci à

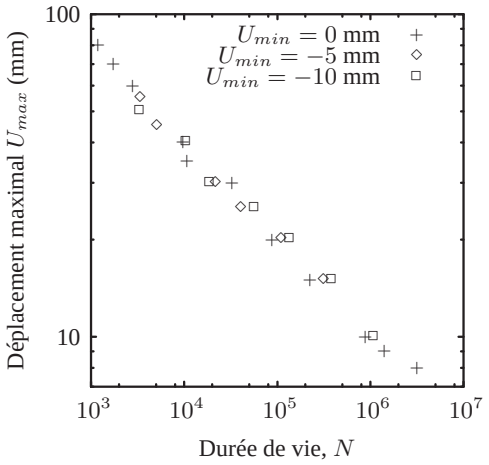


FIG. 7.4 – Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement maximal imposé. Trois séries d'essais sont représentées, selon la valeur du déplacement minimal imposé : 0, -5 ou -10 mm.

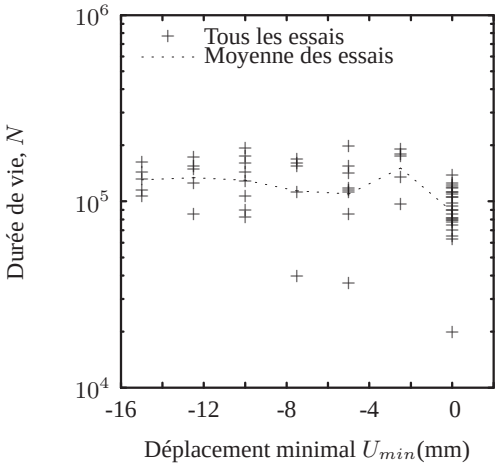


FIG. 7.5 – Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement minimal imposé pour un déplacement maximal imposé égal à 20 mm.

maximum imposé (figure 7.7) comme à amplitude imposée (figure 7.8).

7.1.4 Conclusion

Tous ces résultats, obtenus en traction uniaxiale, sont en accord avec la littérature. Dans la mesure où la compression ne provoque pas d'endommagement, un critère en maximum rassemble tous les essais de rapport de charge nul ou négatif. Pourtant, il est raisonnable de supposer qu'un chargement d'amplitude nulle, même de moyenne positive (autrement dit, un maintien dans un état de traction) ne provoque pas d'endommagement (tant que cette moyenne est loin de la limite à rupture monotone du matériau). Une mesure en amplitude est donc probablement plus adéquate, à condition de tronquer la composante de compression lorsqu'il y a lieu. La figure 7.9 résume l'effet du rapport de charge sur la durée de vie.

7.2 Comportement accommodé

Ce paragraphe met en évidence l'importance d'une description correcte du comportement sur la prévision de la durée de vie. Dans la première partie, un modèle de comportement en régime stabilisé a été développé. On montre ici son intérêt pour la description des essais d'endurance.

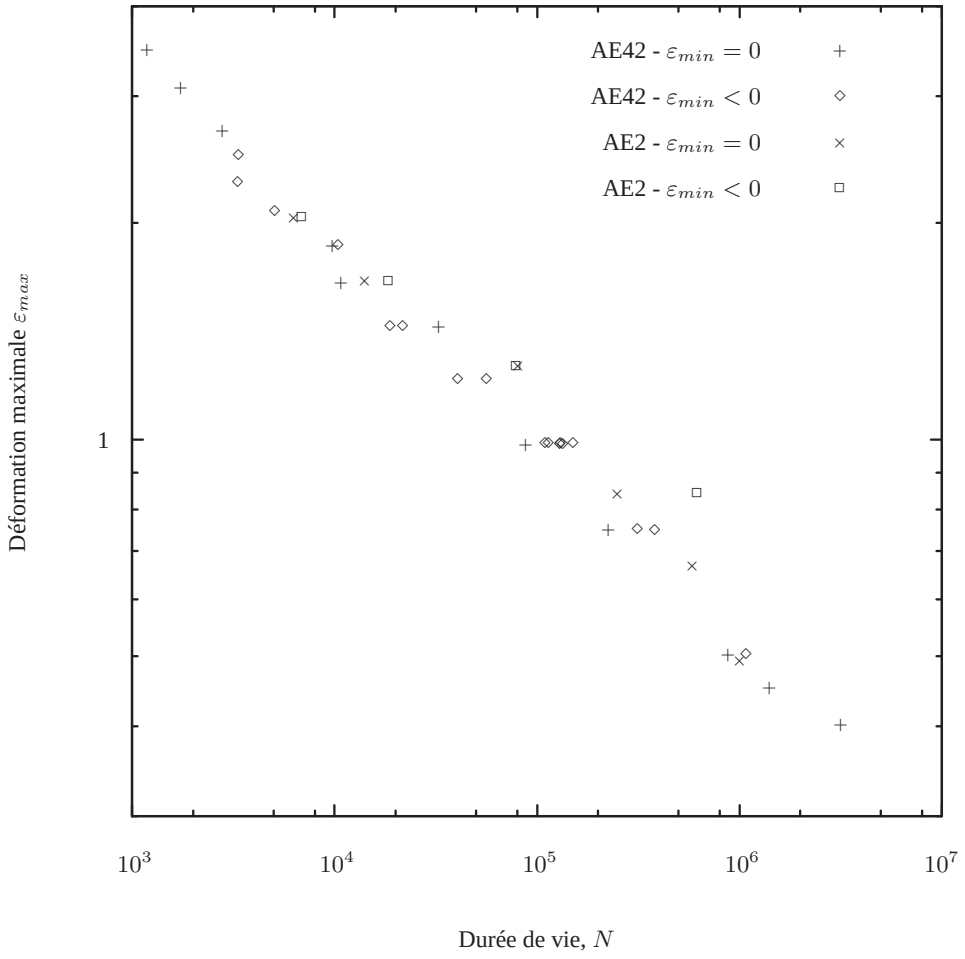


FIG. 7.6 – Durée de vie en fonction de la déformation maximale locale pour les deux éprouvettes, avec ou sans passage en compression.

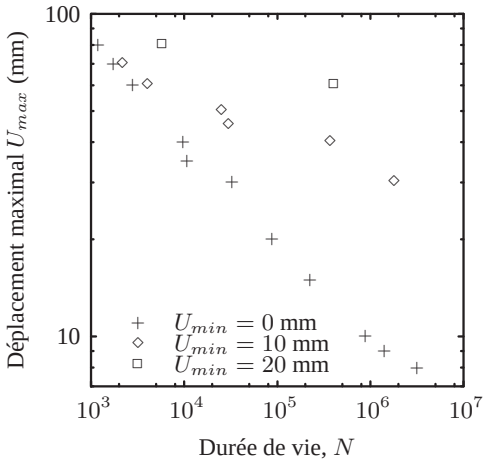


FIG. 7.7 – Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction du déplacement maximal imposé, selon la valeur du déplacement minimal imposé.

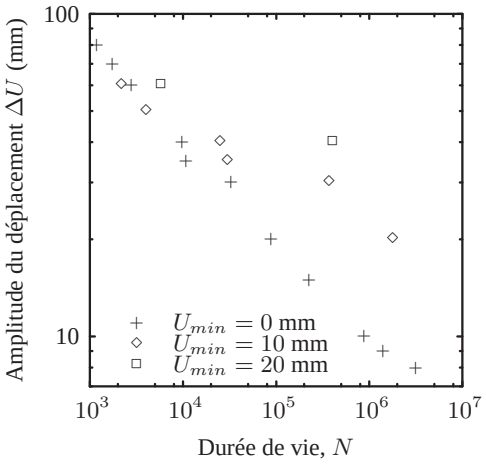


FIG. 7.8 – Durée de vie de l'éprouvette AE42 en fonction de l'amplitude de déplacement imposée, selon la valeur du déplacement minimal imposé.

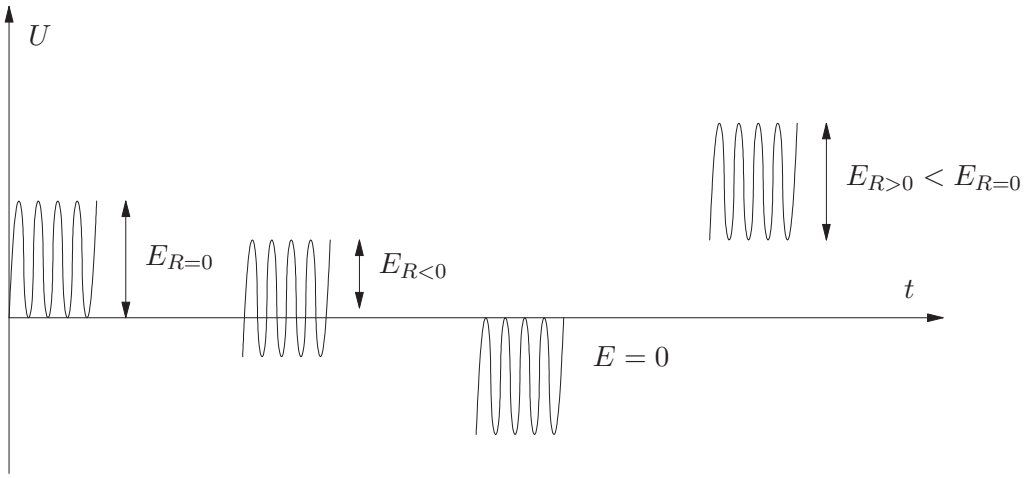


FIG. 7.9 – Pour les rapports de charge négatifs ou nul, l'endommagement E varie comme l'amplitude de la partie positive du déplacement. Pour des rapports de charge positifs, l'endommagement est inférieur à celui obtenu pour un essai de rapport de charge nul de même amplitude.

7.2.1 Influence du type de contrôle

Un essai dont le chargement est imposé sous la forme d'un effort constant F conduit à une durée de vie inférieure à un essai dont le chargement est imposé sous la forme d'un déplacement U tel que l'effort résultant au premier cycle vaille F. Ceci est illustré par la figure 7.10. Le déplacement au premier cycle est le déplacement imposé pour les essais contrôlés en déplacement et le déplacement correspondant à l'effort imposé pour les essais controlés en effort. La correspondance est obtenue grâce à la courbe de traction monotone expérimentale de l'éprouvette.

Ce résultat s'explique simplement par l'adoucissement du comportement dû à l'effet Mullins. On en déduit que l'utilisation d'une loi hyperélastique identifiée sur la première charge n'est pas suffisante pour représenter correctement les essais contrôlés indifféremment en effort ou en déplacement. En revanche, on a montré dans la première partie, chapitre 3, section 3.4, figure 3.17, que le comportement en régime stabilisé est unique pour les deux types de contrôle. Et de fait, on constate qu'un essai dont le chargement est imposé sous la forme d'un effort constant F tel que le déplacement en régime stabilisé vaille U conduit à la même durée de vie qu'un essai dont le chargement est imposé sous la forme d'un déplacement U. Le déplacement en régime stabilisé est défini ici comme le déplacement mesuré à la moitié du nombre de cycles à l'amorçage, et appellé déplacement à mi-vie. La figure 7.10 démontre donc de manière expérimentale que la durée de vie est liée au comportement en régime stabilisé.

La figure 7.11 montre que la loi de comportement proposée en première partie permet de décrire correctement les deux types de contrôle, et ceci bien qu'elle ait été identifiée sur le cinquième cycle, alors que le comportement n'est pas encore complètement stabilisé. En effet, les deux séries d'essais (en effort imposé ou en déplacement imposé) sont superposées. On voit ici l'importance de bien décrire le comportement en régime stabilisé pour prévoir efficacement la durée de vie.

7.2.2 Influence d'une précharge

Le comportement dépend fortement de l'histoire du chargement. Il s'adoucit, et ceci d'autant plus que l'amplitude maximale vue au cours de sa vie est importante. Ce phénomène, appelé effet Mullins, a été analysé dans la première partie. Les chargements qui sont appliqués aux pièces automobiles sont des chargements de type aléatoire, d'amplitude et de moyenne variable. Une grande partie des pièces est équipée de systèmes visant à limiter les débattements, qui impose l'ordre de grandeur des élongations maximales vues par la pièce. Celles-ci sont atteintes au premier événement d'amplitude importante. On peut donc raisonnablement considérer que le maximum atteint au cours du signal détermine la forme du comportement sur tout le chargement.

Afin d'estimer l'influence de cet adoucissement, on réalise l'essai suivant en deux étapes (voir la figure 6.18 page 130) :

1. l'éprouvette est d'abord soumise à quelques cycles de traction, suffisamment pour accommoder le matériau, mais suffisamment peu pour que l'endommagement imputable à ce chargement soit nul ; en pratique, ce nombre est choisi égal à une vingtaine de

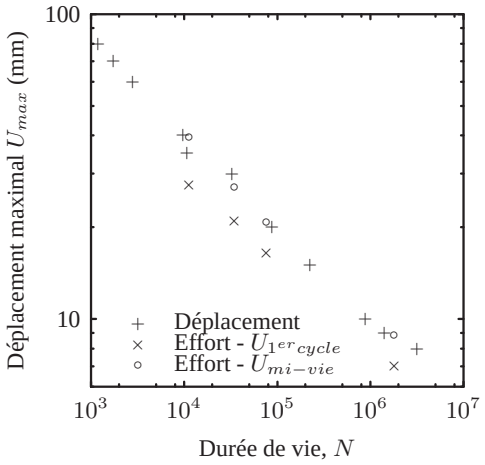


FIG. 7.10 – Durée de vie en fonction du déplacement au premier cycle et à mi-vie pour des essais de traction réalisés sur l'éprouvette AE42.

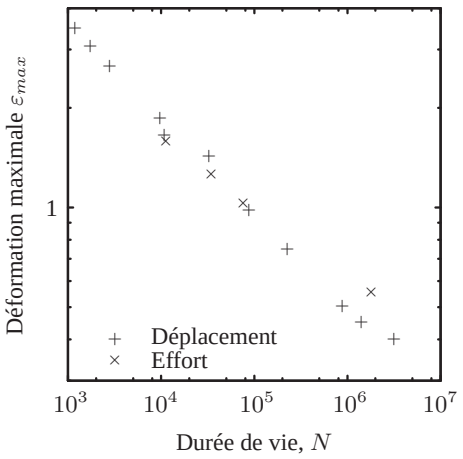


FIG. 7.11 – Durée de vie en fonction de la déformation principale maximale calculée au point de rupture pour des essais de traction réalisés sur l'éprouvette AE42.

cycles environ ;

2. l'éprouvette est ensuite soumise à l'essai d'endurance proprement dit : une traction inférieure à celle de l'étape de précharge, et jusqu'à la ruine de l'éprouvette.

Ainsi, le comportement est bien celui déterminé par l'étape 1 et l'endommagement par l'étape 2. Le comportement s'adoucit d'autant plus que la précharge est importante (voir la figure 7.18).

Ce type d'essai est réalisé en déplacement imposé, mais aussi en effort imposé. Les figures correspondantes sont respectivement les figures 7.12 et 7.13. On constate qu'une précharge augmente la durée de l'essai contrôlé en déplacement, tandis qu'elle diminue la durée de l'essai contrôlé en effort. La différence est d'autant plus marquée que la précharge est importante.

Les essais sont également analysés comme précédemment, c'est-à-dire que pour les essais contrôlés en déplacement, les efforts à mi-vie sont reportés dans la figure en effort (7.13) et réciproquement, pour les essais contrôlés en effort, les déplacements à mi-vie sont reportés dans la figure en déplacement (7.12). On constate qu'aucune des deux représentations ne permet de prévoir correctement la durée de vie de tous les types d'essais. Ceci peut s'expliquer par un phénomène de redistribution de contraintes. En effet, les non-linéarités de la courbe de comportement sont différentes selon le niveau d'accommodation ; la relation entre les grandeurs globales et locales n'est donc pas la même pour les essais avec ou sans précharge, et dépend de l'intensité de la précharge (voir les figures 7.16 et 7.17).

On propose donc une description locale de la sollicitation. La détermination des paramètres λ_{loi}^{α} de la loi de comportement est obtenue par le calcul de l'étape de précharge. Les figures 7.14 et 7.15 montrent respectivement les déformations et les contraintes principales maximales calculées en fonction de la durée de vie obtenue pour les deux types d'essais.

Les résultats en contraintes sont bien corrélés avec la durée de vie, tandis que les résultats en déformation la surestiment. On en déduit, d'une part, qu'une variable d'endommagement en contrainte est préférable à une variable en déformation, et d'autre part, que la prise en compte de l'accommodation du comportement permet une meilleure description de la durée de vie.

Toutefois, il convient de rester prudent quant à ces déductions, car les grandeurs locales sont très sensibles à la description des non-linéarités de la loi de comportement. Les figures 7.16 et 7.17 permettent d'observer l'influence de cette non linéarité sur la répartition spatiale des déformations, sur l'éprouvette AE42, celle qui pourtant est la plus proche du cas du cylindre où les déformations sont homogènes sur tout le volume. Par ailleurs, l'évolution du comportement après une précharge est différente du cas sans précharge : le matériau s'adoucit moins et peut même se raidir, et ceci d'autant plus que la précharge est importante (voir la figure 7.18). C'est un phénomène qui a déjà été observé par Mars [59] sur un petit nombre d'essai et qui est confirmé à plus grande échelle par cette étude. Cette évolution inverse du comportement n'est pas décrite par le modèle de comportement proposé, c'est pourquoi elle peut fausser les résultats obtenus localement par le calcul de structure.

7.2.3 Conclusion

Une bonne description du comportement en régime cyclique est essentielle pour prévoir la durée de vie de façon satisfaisante. Le comportement proposé, quoique relativement simple, permet de s'affranchir du type de contrôle utilisé pour l'essai et de prendre en compte les effets d'une précharge.

Remarque *Seule la capacité à décrire correctement la dépendance du comportement au chargement maximal est utilisée ici. La nécessité de décrire l'anisotropie induite n'a pas été démontrée. On pourrait éventuellement utiliser une loi isotrope de la littérature, à condition d'identifier les coefficients matériau sur des essais cycliques stabilisés et non sur la première décharge comme c'est classiquement le cas. La démarche peut donc être étendue à toute une classe de comportements.*

7.3 Multiaxialité

Dans ce paragraphe, on désire étudier l'influence de la multiaxialité du chargement sur la durée de vie, et ceci à l'exclusion de tout autre paramètre. On s'intéresse donc ici à des essais réalisés sur la même géométrie d'éprouvette (AE2, en l'occurence), avec le même type de contrôle (déplacement) et surtout, pour lesquels le phénomène de renforcement observé en traction/traction ne se manifeste pas, c'est-à-dire des essais décrivant le point de traction et de torsion nulle (l'état de repos).

7.3.1 Orientation des fissures

Le plan d'apparition des fissures, confronté à l'analyse des grandeurs mécaniques locales au point de rupture, donne des informations intéressantes concernant le type de solli-

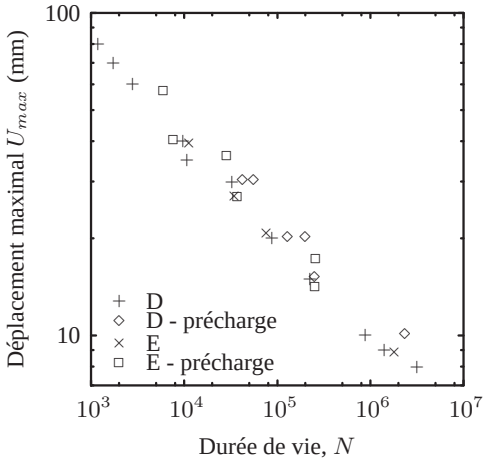


FIG. 7.12 – Durée de vie en fonction du déplacement appliqué ou mesuré à mi-vie pour des essais de traction, réalisés sur l'éprouvette AE42.

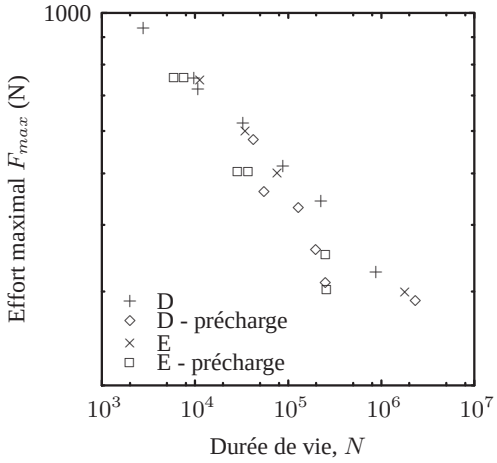


FIG. 7.13 – Durée de vie en fonction de l'effort appliqué ou mesuré à mi-vie, pour des essais de traction réalisés sur l'éprouvette AE42.

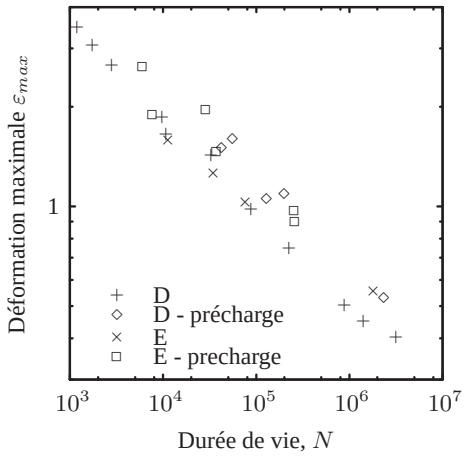


FIG. 7.14 – Durée de vie en fonction de la déformation principale maximale, pour des essais de traction avec ou sans précharge, réalisés sur l'éprouvette AE42.

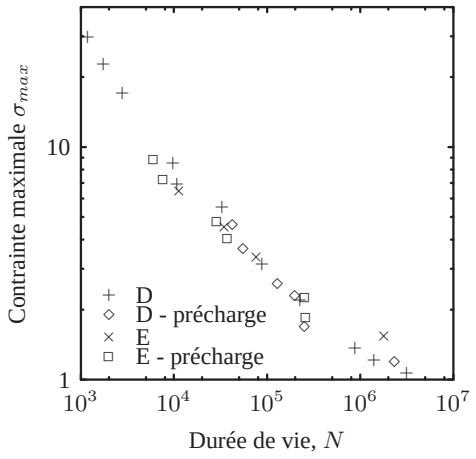


FIG. 7.15 – Durée de vie en fonction de la contrainte principale maximale, pour des essais de traction, avec ou sans précharge, réalisés sur l'éprouvette AE42.

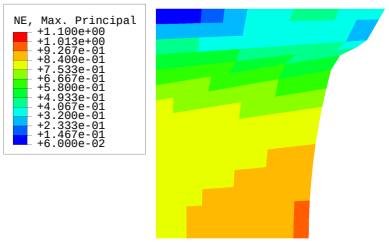


FIG. 7.16 – Déformations principales maximales représentées sur la configuration non déformée pour une traction de 20 mm. Les résultats sont présentés sous la forme d'une valeur moyenne par élément.

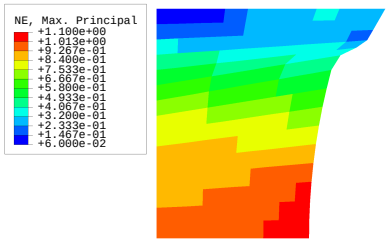


FIG. 7.17 – Déformations principales maximales représentées sur la configuration non déformée pour une traction de 20 mm postérieure à une traction de 70 mm. On remarque que la distribution est différente du cas sans précharge.

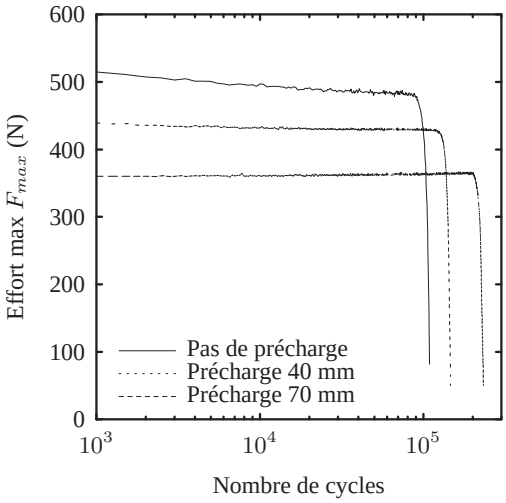


FIG. 7.18 – Evolution de l'effort maximal mesuré au cours du cycle en fonction du nombre de cycle pour des essais de traction entre 0 et 20 mm sur AE42, avec ou sans précharge.

Nom de la série	Type d'essai	Moyenne	Ecart type	Nombre de mesures
T	Traction simple	0		
R	Torsion simple	-28	6	97
TR	Traction Torsion en phase	-10.5	6	113
TRR90	Traction simple Torsion alternée	± 23	7	65
TCR90	Traction compression Torsion simple	-29.5	18	138
TR90	Traction Torsion hors phase	-7	10	151
TR180	Traction Torsion hors phase	49	11.5	49

TAB. 7.1 – Mesures d'angles de fissuration réalisées sur éprouvette AE2.

citation qui entraîne la rupture du matériau.

L'angle d'apparition des fissures est mesuré comme décrit dans le paragraphe 5.1.5 du chapitre 5, pour certaines séries seulement. Les éprouvettes qui ont été menées jusqu'à rupture n'ont pas été mesurées. La dispersion est assez importante. L'angle mesuré au sein d'une même série ne dépend pas de l'intensité de la sollicitation, ou du moins, dans une proportion beaucoup moins importante que la dispersion de la mesure. On ne retient donc qu'un angle moyen et un écart type par rapport à cet angle pour chaque série (*cf.* tableau 7.1). Ceux-ci sont identifiés en approchant au mieux la distribution des angles effectivement mesurés par une distribution gaussienne paramétrée par ces mêmes moyenne et écart type.

Les mesures n'ont pas été réalisées précisément pour les séries T et RR. Dans le cas de la traction simple, l'angle observé était toujours proche de zéro, mais l'écart type n'a pas été estimé. Dans le cas de la torsion alternée symétrique (de rapport de charge $R_D = -1$), l'angle macroscopique observé est également proche de zéro, mais les faciès de rupture sont matés (y compris lorsque l'essai est interrompu avant la rupture finale). On suppose qu'il existe deux angles symétriques d'apparition de la fissure, car l'essai TRR90, qui est également symétrique vis-à-vis du sens de rotation, fait apparaître un angle de fissuration proche de l'essai de torsion simple R, et non l'angle nul. Ceci nécessite toutefois une confirmation. D'autre part, les essais de torsion alternée de rapport de charge $R_D \neq -1$ (dissymétriques), qui n'ont pas non plus fait l'objet de mesures détaillées, font apparaître des angles de fissuration similaires à ceux obtenus en torsion simple.

La figure 7.21 représente la probabilité de fissuration en fonction de la direction normale au plan de la fissure pour les différents types de chargement qui ont fait l'objet de mesures d'angle. Cette probabilité est simplement une représentation de la distribution normale identifiée pour chaque série. On désire comparer ces mesures expérimentales à des grandeurs locales calculées sur la géométrie saine, non encore fissurée. La figure 7.19 représente la déformation maximale vue dans chaque direction (dans la représentation présentée dans le chapitre 5, paragraphe 5). Dans le cas présent, celle-ci est rapportée à la valeur maximale atteinte au cours du cycle. Il s'agit pour chaque série d'une moyenne des trajets de chargement obtenus pour toutes les conditions d'essais, de façon à obtenir un trajet caractéristique par série. En comparant les figures 7.21 et 7.19, on remarque que dans la plupart des cas, la

direction qui cède expérimentalement est celle qui voit la déformation maximale au cours du cycle. La figure 7.20 représente la déformation moyenne vue dans chaque direction. Le traitement des données est le même que précédemment : les valeurs sont rapportées à la valeur maximale de chaque essai, puis tous les essais d'une même série sont moyennés. Lorsque le repère principal tourne beaucoup, la direction la plus sollicitée dans cette représentation n'est pas la même que dans la représentation précédente. Dans le cas des essais symétriques en torsion (TRR90 par exemple), la direction prévue est la verticale, une direction pour laquelle la déformation maximale atteinte est relativement faible. Cette deuxième représentation est moins bien corrélée aux orientations effectivement mesurées que la représentation en déformation maximale.

Remarque *Le cas de l'essai de traction/torsion en opposition de phase se distingue des autres types d'essais : l'angle mesuré est très différent des angles prévus par la déformation maximale ou moyenne. Il s'agit d'un cas où le matériau ne passe jamais par son état de repos ; il est donc susceptible de cristalliser, ou du moins de se renforcer, quelque soit le mécanisme physique du renforcement en question. Les durées de vie obtenues sont d'ailleurs très importantes. On suppose que la propagation des fissures est perturbée par le phénomène de renforcement. La fissure macroscopique observée n'est donc peut-être pas représentative de la fissure qui apparaît à une plus petite échelle.*

L'analyse des angles de fissuration obtenus dans cette étude, ainsi que ceux obtenus par d'autres auteurs comme Mars [59], indique que la fissure apparaît presque toujours normalement à la direction matérielle la plus étirée ou dans le plan qui voit la plus grande contrainte normale.

7.3.2 Influence de l'état de distorsion

Les essais qui sont étudiés ici sont les essais où le repère principal tourne peu ou pas du tout, de façon à étudier uniquement l'influence de la distorsion sur la durée de vie. Ainsi, la direction la plus sollicitée ne varie pas de manière conséquente au cours du cycles. Il s'agit des essais de :

- traction simple (T) ;
- torsion simple (R) ;
- traction/torsion simple (TR).

Dans la mesure où les fissures apparaissent et se propagent (dans un premier temps, tout du moins) perpendiculairement à la direction de traction principale, il est naturel de proposer comme variable d'endommagement la déformation principale maximale ou la contrainte principale maximale. Cela correspond à identifier la facette sur laquelle la déformation ou la contrainte normale est maximale. La littérature désigne ces variables comme les plus appropriées. Les figures 7.22 et 7.23 montrent les résultats obtenus avec ces critères.

Pour comparer, on montre également les résultats obtenus avec le maximum de glissement, figure 7.24, et de cisaillement, figure 7.25. Les résultats obtenus en terme de durée de vie sont également satisfaisants. En revanche, l'angle de fissuration prévu (correspondant à la facette la plus cisaillée) est très différent (à 45°) de l'angle de fissuration observé.

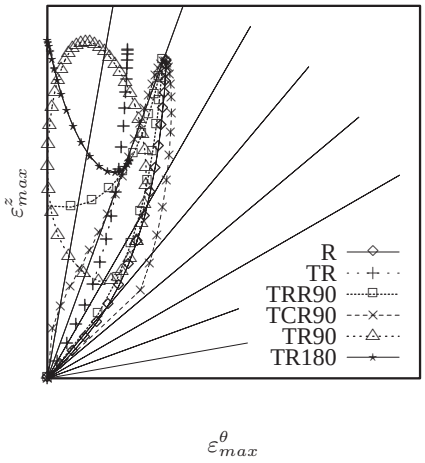


FIG. 7.19 – Rotation de la déformation principale maximale au cours du cycle. Chaque série est rapportée à son maximum pour une meilleure lisibilité.

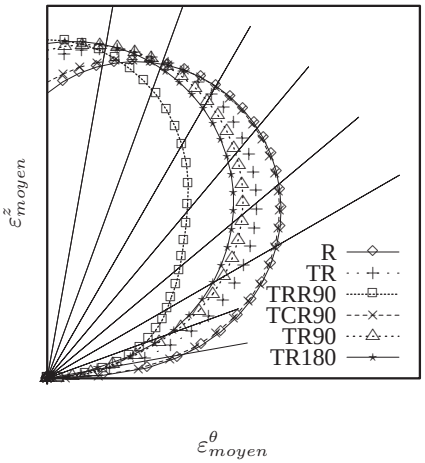


FIG. 7.20 – Déformation moyenne atteinte en surface de l'éprouvette au cours du cycle. Chaque série est rapportée à son maximum pour une meilleure lisibilité.

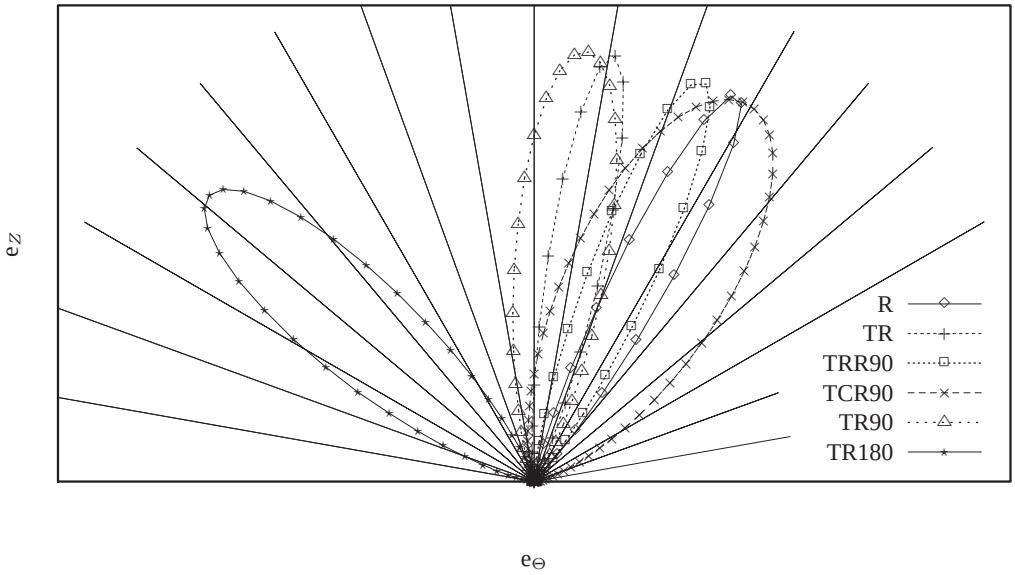


FIG. 7.21 – Probabilité de rupture en fonction de la direction. Chaque série est rapportée à son maximum pour une meilleure lisibilité. Les angles sont représentés par des droites tous les 10°. On rappelle que l'axe e_Z est l'axe de révolution de l'éprouvette.

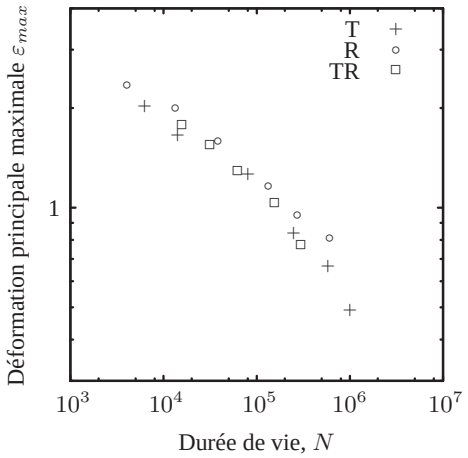


FIG. 7.22 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la déformation principale maximale.

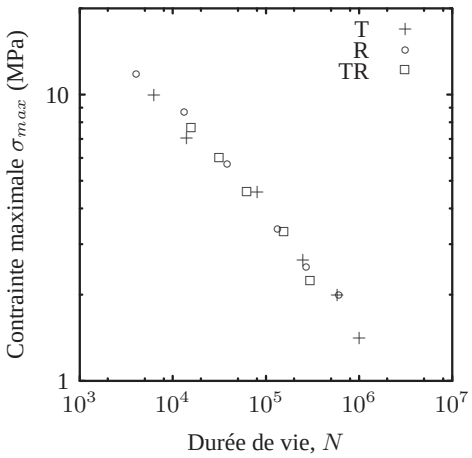


FIG. 7.23 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte principale maximale.

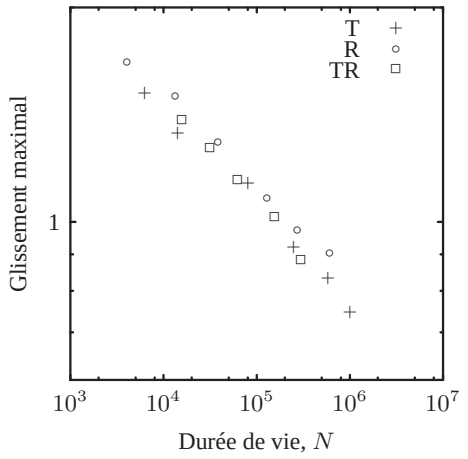


FIG. 7.24 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction du glissement maximal.

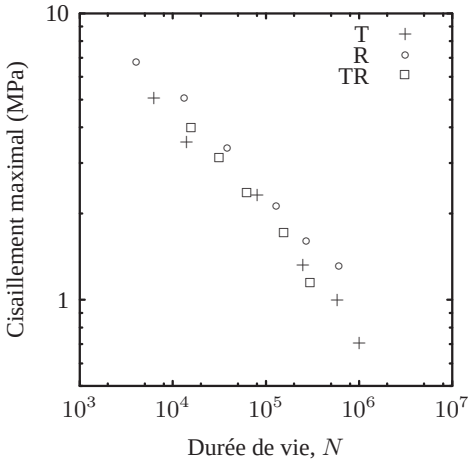


FIG. 7.25 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte de cisaillement maximale.

Ces critères donnent de bons résultats et sont faciles à mettre en œuvre, ce qui est un avantage déterminant dans un contexte d'application industrielle. En revanche, s'ils représentent bien le phénomène, ils ne représentent guère son mécanisme.

Un critère énergétique aurait l'avantage d'une interprétation physique plus facile, dans la mesure où la propagation est liée à un tel critère (le taux de restitution d'énergie). Comme on ne représente pas la fissure, on ne peut pas déterminer la valeur de ce taux de restitution d'énergie. Cependant, on a vu dans le chapitre précédent (6) que dans certains cas de solution analytique, on peut écrire le nombre de cycles pour qu'une micro-fissure se propage jusqu'à sa taille détectable en fonction de l'énergie de déformation (*cf.* équation 6.2).

La figure 7.26 montre les résultats obtenus avec l'énergie de déformation totale. De toutes les variables présentées ici, il s'agit de celle qui donne les plus mauvais résultats en terme de distorsion. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec ceux de la littérature (ceux de Mars [59] et de Dong [22] notamment). Mars suppose que toute l'énergie de déformation n'est pas disponible pour ouvrir une fissure. Il introduit un concept d'énergie directionnelle pour identifier la part de l'énergie de déformation pouvant être dissipée par l'ouverture d'une fissure dans un plan donné.

La formulation du comportement proposé dans la première partie permet, par construction, d'accéder facilement à l'énergie de déformation w dans une direction donnée N, puisque l'énergie est écrite précisément comme la somme de l'énergie de déformation dans chaque direction. Si λ désigne l'élongation dans la direction N, l'énergie de déformation dans cette même direction s'écrit :

$$w(\lambda(\mathrm{N})) = -\frac{G}{2}\left(\lambda_l - \frac{1}{\lambda_l}\right)\ln\left(\frac{\lambda_l - \lambda}{\lambda_l + \lambda}\frac{\lambda_l + 1}{\lambda_l - 1}\right),$$

de dérivée :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_l) = \frac{G}{1 - \frac{\lambda^2 - 1}{{\lambda_l}^2 - 1}},$$

toujours positive. On en déduit que c'est une fonction croissante de λ. En revanche, comme l'extension limite λ_l dépend de la direction, la direction qui maximise l'énergie n'est pas nécessairement celle qui maximise l'élongation. L'obtention de la direction qui maximise l'énergie n'est donc *a priori* pas immédiate. Dans le cas où la structure n'a pas vu de précharge, comme c'est le cas pour les essais concernés ici, on remarque que, par construction, quand l'élongation λ est maximale (égale à λ_m), on a $\lambda_l = \sqrt{{\lambda_m}^2 + a} = \sqrt{\lambda^2 + a}$. On a donc :

$$w(\lambda_m) = -\frac{G}{2}\left(\sqrt{{\lambda_m}^2 + a} - \frac{1}{\sqrt{{\lambda_m}^2 + a}}\right)\ln\left(\frac{\sqrt{{\lambda_m}^2 + a} - \lambda_m}{\sqrt{{\lambda_m}^2 + a} + \lambda_m}\frac{\sqrt{{\lambda_m}^2 + a} + 1}{\sqrt{{\lambda_m}^2 + a} - 1}\right),$$

de dérivée :

$$\frac{\partial w(\lambda_m)}{\partial \lambda_m} = G\frac{2(\lambda_m - 1 + {\lambda_l}^2)\lambda_l - (1 + {\lambda_l}^2) * \ln\left(\frac{\lambda_l - \lambda_m}{\lambda_l + \lambda_m}\frac{\lambda_l + 1}{\lambda_l - 1}\right)}{2{\lambda_l}^3},$$

toujours positive car $\lambda_m \geq 1$. On en déduit que w est une fonction croissante de λ_m. Dans ce cas précis, la direction qui maximise l'énergie est donc la même que celle qui maximise

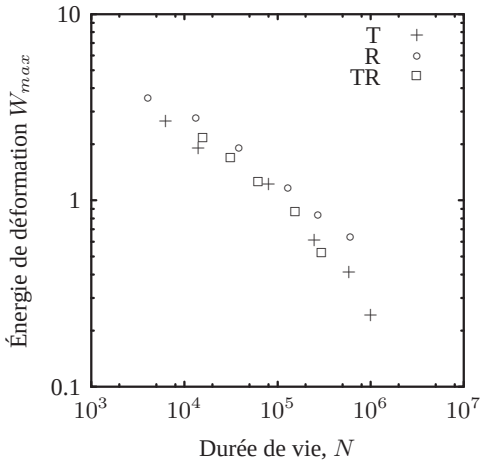


FIG. 7.26 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de l'énergie de déformation maximale.

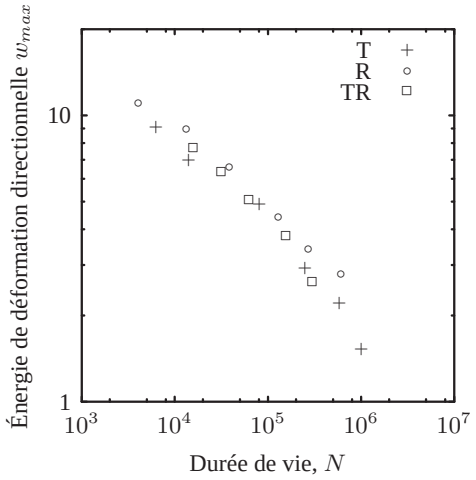


FIG. 7.27 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de l'énergie de déformation directionnelle maximale.

l'élongation. Il s'agit du vecteur principal associé à l'élongation principale maximale. Dans le cas général, une solution au problème de la détermination de cette direction consisterait à discrétiser l'espace en un certain nombre de directions, et à déterminer *a posteriori* celle qui maximise w. La figure 7.27 montre le résultat obtenu avec l'énergie maximale directionnelle. Comme attendu, les résultats sont très similaires à ceux obtenus avec l'élongation principale maximale.

Toutes les grandeurs envisagées ici sont relativement bien corrélées avec la durée de vie. Il est donc très difficile de choisir l'une plutôt que l'autre. Les angles de fissuration mesurés indiquent que les sollicitations normales sont prépondérantes devant les sollicitations de cisaillement. On regrette de n'avoir pas pu générer avec ces éprouvettes un état de traction équibiaxiale, qui aurait peut-être été discriminant. Cet état de contrainte peut être obtenu en gonflant une membrane, mais ceci demande un matériel très différent de celui utilisé pour les essais réalisés dans cette étude.

7.3.3 Influence de la rotation du repère principal

Les essais réalisés dans cette étude ne permettent pas d'étudier l'influence de la rotation du repère principal à état de distorsion constant. Les essais qui sont étudiés ici sont ceux du paragraphe précédent, plus les essais suivants :

- torsion alternée symétrique ou non (RR) ;
- traction simple et torsion alternée (TRR90) ;
- traction alternée et torsion simple (TCR90) ;
- deux cycles de traction pour un cycle de torsion alternée (T2RR).

Les figures 7.28 et 7.29 montrent qu'une variable comme la déformation ou la contrainte normale maximale est toujours assez bien correlée à la durée de vie, sauf dans le cas des es-

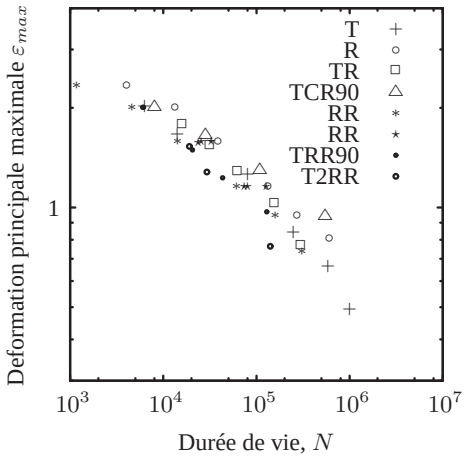


FIG. 7.28 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la déformation principale maximale.

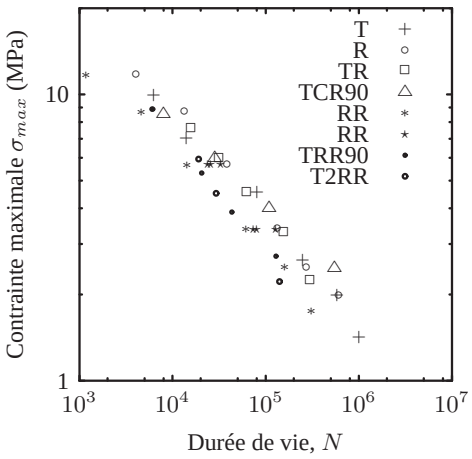


FIG. 7.29 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte principale maximale.

sais ayant une composante de torsion alternée. Ces derniers essais ont une durée de vie inférieure aux essais de torsion simple de même maximum. Les résultats obtenus avec d'autres variables, notamment les grandeurs énergétiques, sont similaires.

Afin de mieux comprendre quels phénomènes peuvent être en cause, on s'intéresse plus particulièrement aux essais de torsion simple et alternée. La figure 7.30 montre l'évolution de la durée de vie de différents essais, de même torsion maximale mais de torsion minimale différente. On voit que la durée de vie diminue de façon quasiment linéaire avec la torsion minimum. On trace (figure 7.31) l'évolution de l'élongation au cours du cycle dans la direction qui voit l'élongation maximale :

$$\lambda_{\mathrm{N}} = \sqrt{\mathrm{N} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{N}}$$

où N désigne la direction principale associée à l'élongation principale maximale à l'instant où elle est maximale. On trace de la même manière l'histoire de la contrainte normale sur la facette qui voit la contrainte normale maximale (figure 7.32). Si n désigne la direction principale à l'instant t_{max} où ce maximum est atteint, alors la contrainte normale sur la facette en question s'écrit :

$$\sigma_{\mathrm{n}} = \mathrm{n} \cdot \boldsymbol{F}_{t_{max}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^{t}\boldsymbol{F}^{-1} \cdot {}^{t}\boldsymbol{F}_{t_{max}} \cdot \mathrm{n} \quad .$$

En effet, la direction n définit une facette matérielle, de normale N constante en référence lagrangienne. Malgré l'anisotropie de la loi de comportement, on constate en pratique que les directions N identifiées en contraintes sont les mêmes que celles identifiées en élongation. Pendant la première partie du cycle (qu'on définit comme le sens de rotation positif), l'élongation sur cette direction décrit un cycle allant de 1 à sa valeur maximale. Pendant la deuxième partie du cycle (sens négatif), elle décrit un second cycle d'amplitude plus petite.

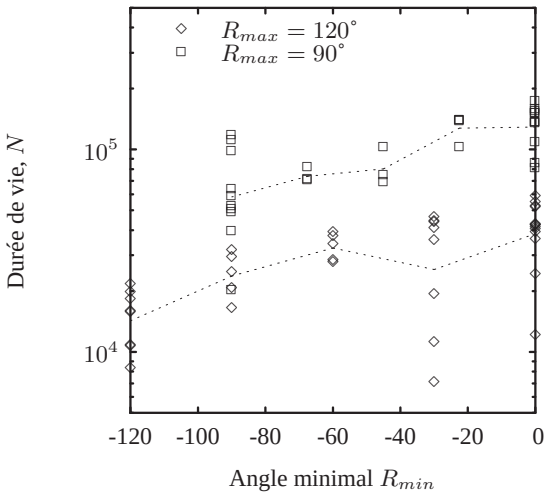


FIG. 7.30 – Durée de vie en fonction de la torsion minimale imposée pour deux séries d'essais de torsions maximales respectives de 120° et 90°. Tous les essais sont représentés ; leur moyenne est indiquée par la ligne pointillée.

L'énergie directionnelle (non représentée ici) présente le même comportement. La contrainte normale se comporte différemment : la seconde partie du cycle est en compression.

On suppose que la réduction de la durée de vie est liée à l'existence du deuxième cycle observé pour les élongations. Un critère en maximum ne tient pas compte de l'existence de ce deuxième cycle. La description de ces essais nécessite donc une règle indiquant la manière d'accumuler l'endommagement généré par chacun de ces cycles.

7.3.4 Loi de cumul d'endommagement

La loi de cumul d'endommagement la plus simple et la plus utilisée est la règle de cumul linéaire, qui consiste à sommer l'endommagement généré par chaque type de cycles, celui-ci s'écrivant comme le rapport entre le nombre de cycles effectués et le nombre de cycle à rupture :

$$D = \sum_{i=1}^{p} D_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{n_i}{N_i} \right) \quad .$$

Cela suppose que l'endommagement généré par un cycle à l'instant t est indépendant de l'endommagement du matériau à ce même instant, autrement dit, l'endommagement généré par un chargement d'amplitude variable est indépendant de l'ordre dans lequel ces cycles sont agencés. Appelons E la variable représentative de l'endommagement identifiée précédemment. Dans notre cas, il peut s'agir de la déformation ou de l'énergie directionnelle dans une direction donnée ou encore de la contrainte normale sur une facette. En utilisant

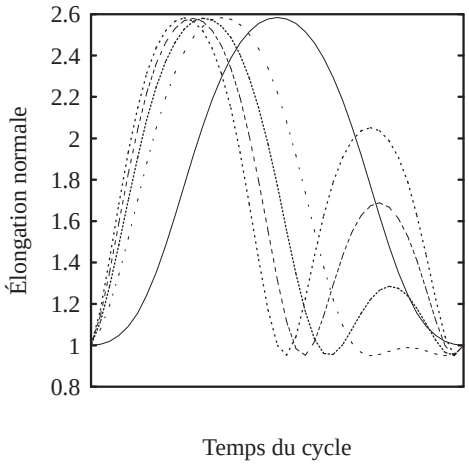


FIG. 7.31 – Évolution de l'élongation dans la direction voyant l'élongation maximale, pour des essais de torsion alternée de rapports de charge différents ($R = 0$: torsion simple, $R = -1$: torsion alternée symétrique).

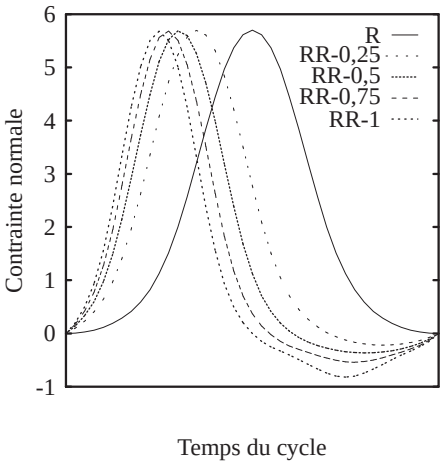


FIG. 7.32 – Évolution de la contrainte normale sur la facette voyant la contrainte normale maximale, pour des essais de torsion alternée de rapports de charge différents (légende identique à celle de la figure 7.31).

un modèle de Basquin, l'endommagement s'écrit :

$$D = K \sum_{i=1}^{p} n_i E_i^{\beta} \quad .$$

En l'appliquant sur une période de chargement, on peut faire apparaître la valeur E_{eq} de l'amplitude de la variable d'endommagement E qui dans le cas d'un chargement simple (à un seul cycle dans la période) donnerait le même endommagement :

$$E_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{p} n_i E_i^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad .$$

Ceci est une application simple de la méthode de construction d'un signal équivalent, qui permet de représenter les résultats avec le même formalisme que précédemment (variable d'endommagement contre nombre de cycles).

On cherche maintenant à interpréter avec une telle loi les résultats expérimentaux.

Dans un premier temps, on raisonne en terme de direction ou de plan critique. La variable d'endommagement peut être déterminée pour toutes les directions de l'espace (direction matérielle ou facette selon le cas). L'objectif est de déterminer, sur toutes les directions possibles, celle qui est la plus sollicitée, c'est-à-dire celle qui voit la variable cumulée la plus importante. L'espace est discrétisé en un nombre fini de directions sur lesquelles la variable équivalente est calculée. La direction la plus sollicitée est donc déterminée *a posteriori*. Le nombre de directions choisi ici est égal à 101, et elles ne sont pas régulièrement

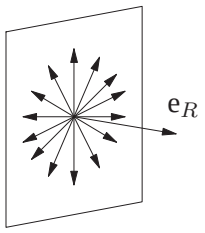


FIG. 7.33 – Directions choisies pour le calcul de la variable cumulée.

réparties dans l'espace : en effet, malgré l'anisotropie du comportement, la normale à la surface de l'éprouvette est une direction principale aussi bien pour les dilatations que pour les contraintes. Le plan de la surface de l'éprouvette (e_Z, e_Θ) est donc discrétisé en 100 directions régulièrement répartie et la normale à la surface e_R est la 101ième direction (voir le schéma 7.33). Les figures 7.35 et 7.34 montrent les résultats obtenus pour la déformation et la contrainte normale (les résultats obtenus avec l'énergie directionnelle étant très similaires à ceux obtenus avec la déformation, on ne les montre pas ici).

Les directions déterminées en pratique sont très proches des directions obtenues par le maximum de la variable non cumulée, c'est-à-dire la direction principale maximale. On constate que la durée de vie est bien corrélée à la variable d'endommagement proposée. Les résultats obtenus aux grands nombres de cycles sont moins bons que sur le reste de la plage de durée de vie disponible. Ceci se comprend facilement en regardant la figure 7.31 : lorsque la torsion dans le sens négatif est faible (pour le rapport de charge de $-0,25$ notamment), il n'y a pas de deuxième cycle car la facette reste en compression. Les résultats obtenus avec l'énergie directionnelle cumulée sont toutefois satisfaisants et les angles associés à cette variable représentatifs des angles mesurés.

7.3.5 Discussion sur le choix de la grandeur à cumuler

La courbe 7.37 montre les résultats obtenus en faisant $E = \sigma_{max}$ la contrainte principale maximale. Le cumul semble alors n'avoir aucun sens physique puisque la direction principale associée change à chaque instant. On cumule par conséquent une variable qui n'agit pas sur la même facette matérielle à chaque instant. Cependant, les résultats obtenus sont très satisfaisants, et même meilleurs qu'avec la contrainte équivalente sur le plan critique.

Une explication pourrait résider dans la non-linéarité du passage de l'échelle macroscopique vers l'échelle microscopique. Tous les calculs sont effectués sur la géométrie saine, c'est-à-dire sans fissure. En réalité, on mesure dans l'amorçage tel qu'il a été défini essentiellement de la propagation d'une fissure apparue très tôt dans la vie de l'éprouvette. Cette fissure existe pendant la plus grande partie de la vie de l'éprouvette, même si elle reste petite devant la taille caractéristique de l'éprouvette. Cette dernière hypothèse peut être reformulée en disant que la fissure est petite par rapport à un volume dit « élémentaire », lui même petit devant la taille de l'éprouvette (voir le schéma 7.38). Typiquement, la taille du maillage utilisé pour les calculs aux éléments finis est de l'ordre de grandeur de ce volume élémen-

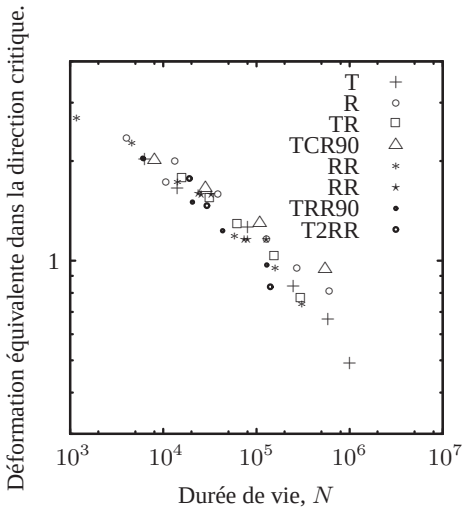


FIG. 7.34 – Durée de vie en fonction de la déformation normale cumulée dans la direction la plus sollicitée.

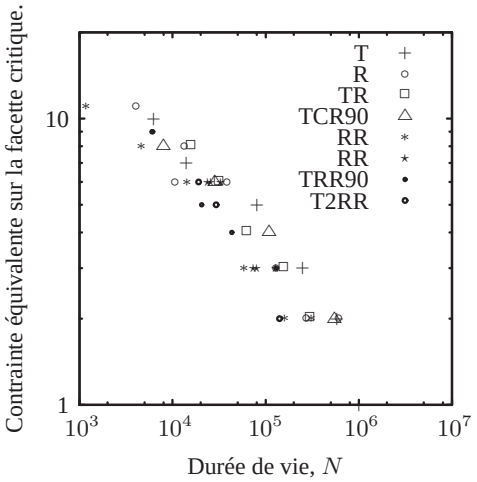


FIG. 7.35 – Durée de vie en fonction de la contrainte normale cumulée sur la facette la plus sollicitée.

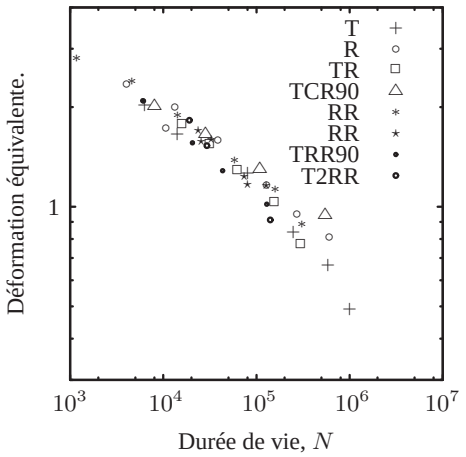


FIG. 7.36 – Durée de vie en fonction de la déformation principale maximale cumulée .

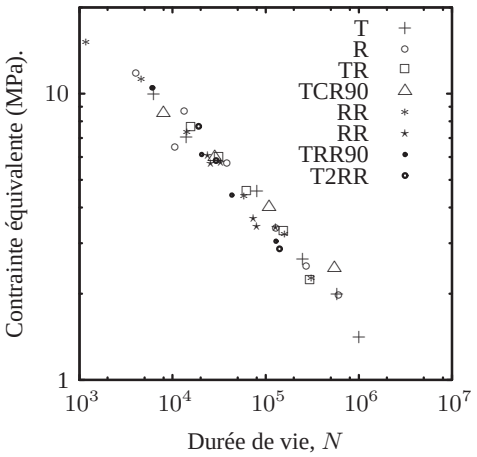


FIG. 7.37 – Durée de vie en fonction de la contrainte principale maximale cumulée .

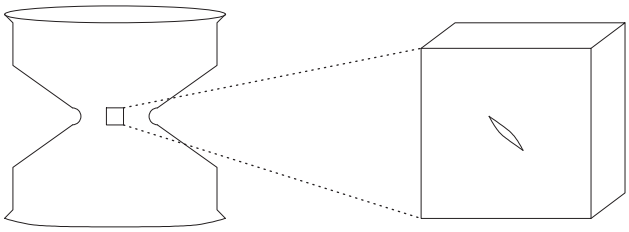


FIG. 7.38 – La fissure est petite devant le volume élémentaire à l'échelle duquel les grandeurs sont calculées par éléments finis. Elle ne modifie donc par la raideur de ce volume élémentaire.

taire. La fissure est suffisamment petite pour que la frontière du volume élementaire puisse être considérée comme infiniment loin d'elle et les grandeurs mécaniques calculées sans la fissure représentatives des grandeurs obtenues aux frontières du volume élémentaire avec la fissure. On a donc accès par le calcul à des grandeurs non représentatives des champs locaux autour de la fissure. Or le passage du champ lointain (aux limites du volume élémentaire) vers les champs locaux n'est pas du tout trivial. En effet, on ne connait ni la géométrie de la fissure initiale, ni le critère de propagation de la fissure à l'échelle mésoscopique, ni le comportement du matériau pour des élongations très importantes comme celles qui peuvent exister en pointe de fissure (et qu'on ne peut pas obtenir par un essai à l'échelle macroscopique, car la présence de défauts fait intervenir la rupture avant de les atteindre). Quand bien même ces informations seraient disponibles, le calcul de structure ne donne pas de résultats fiables pour la propagation de fissure et les solutions analytiques n'existent que pour certains cas de chargement. La relation entre les grandeurs calculées et la propagation de la fissure est *a priori* suffisamment complexe pour que le raisonnement précédent, en terme de plan critique sur des grandeurs non représentatives de l'état local à l'échelle de la fissure, ne soit pas vérifié.

On réalise un calcul aux éléments finis, en déformations planes, d'un chargement de glissement simple sur un cube contenant une fissure. La loi de comportement utilisée est le modéle néo-hookéen. La fissure est représentée comme ayant une épaisseur non nulle et un fond d'entaille circulaire afin de ne pas introduire de singularité géométrique. Elle est suffisamment petite devant la taille du cube pour que loin de la fissure, la transformation soit bien celle du glissement simple. Le calcul est réalisé pour deux cas de chargement de glissement symétriques. Le premier ouvre la fissure en mode I, tandis que le second la cisaille en mode II. La figure 7.39 montre que les contraintes principales maximales atteintes dans les deux cas sont du même ordre de grandeur. On comprend alors comment les contraintes principales maximales à l'échelle du volume élémentaire peuvent être liées aux conditions locales au voisinage de la fissure. En particulier, on remarque que le fond de fissure est en traction alors que le plan associé à la fissure est en compression. Dans le cas de la torsion alternée, contrairement à ce que suggérait la figure 7.32, il est probable que la fissure se propage pendant la deuxième partie du cycle et pas seulement pendant la première partie.

Ces considérations remettent en cause les approches par plan critique telles qu'elles sont

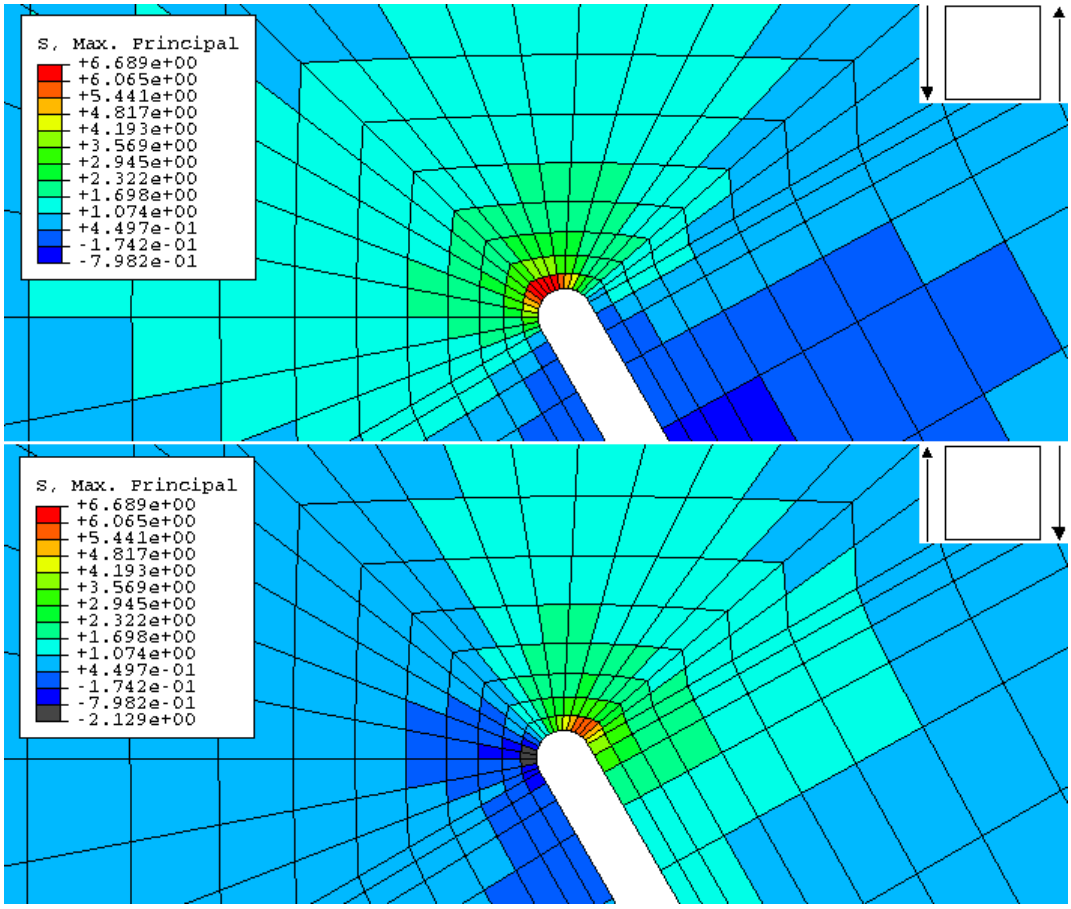


FIG. 7.39 – Contrainte principale maximale au voisinage de la fissure, représentée sur la configuration non déformée. On compare le cas de la fissure ouverte par un chargement de glissement de $0,65$ et cisaillée par un chargement de glissement de $-0,65$. On constate que les valeurs maximales atteintes sont du même ordre de grandeur.

traditionnellement employées, c'est-à-dire sans description explicite de la fissure, lorsque l'amorçage détectable résulte d'une longue période de propagation d'une micro-fissure. Elles laissent entrevoir la possibilité de mettre en place un modèle du type méso/macro, à condition d'exprimer la relation entre champs lointains (macro) et variable locale en fond de fissure (méso).

Devant la complexité du phénomène à représenter, un modèle entièrement phénoménologique peut s'avérer plus efficace qu'une description détaillée du mécanisme physique. Un choix simple comme la contrainte principale maximale donne en effet de très bons résultats. Cette variable présente l'avantage de tenir compte de la pression hydrostatique, au contraire d'une grandeur en déformation ou en énergie de déformation. Elle est de plus très simple à déterminer ; la discrétisation de l'espace est ici inutile. En revanche, ce critère n'est associé à aucun plan critique particulier et ne prédit donc pas l'orientation de la fissure. Il est d'ailleurs possible que l'orientation macroscopique de la fissure résulte en réalité d'une propagation séquentielle selon plusieurs plans.

7.3.6 Conclusion

Les essais pour lesquels la rotation du repère principal est faible décrivent des états de distorsion de traction uniaxiale et de glissement. Dans l'espace (I_1, I_2) ainsi décrit, on montre que plusieurs grandeurs sont corrélées à la durée de vie. L'analyse des directions de fissuration oriente le choix de la variable d'endommagement vers les grandeurs qui représentent une sollicitation normale maximale (contrainte ou élongation principale, énergie directionnelle). Les variables en énergie directionnelle et en élongation sont équivalentes, et ne représentent que l'état de déformation. Une variable en contrainte représente en outre l'état de pression hydrostatique, un paramètre dont l'influence n'a pas été mesurée ici mais dont la littérature suggère l'importance.

Lorsque le repère principal tourne beaucoup, on peut observer plusieurs cycles de certaines de ces grandeurs locales pour un seul cycle unitaire du chargement global. Afin de représenter la diminution de durée de vie associée à la multiplication du nombre de cycles, on propose une règle de cumul linéaire. Une approche par plan critique donne de bons résultats, mais uniquement avec des variables en déformation, car dans le cas de ces essais, la contrainte normale sur la facette la plus sollicitée ne décrit qu'un seul cycle. On remet toutefois en cause les approches par plan critique dans le cas où le cumul d'endommagement représente la propagation d'une fissure, non décrite par le modèle.

7.4 Renforcement

La figure 7.40 représente la durée de vie en fonction de la contrainte principale maximale équivalente pour les essais qui ont été écartés jusqu'ici, c'est à dire les essais susceptibles de présenter l'effet de renforcement décrit au paragraphe 7.1.3. Il s'agit des essais suivants, contrôlés en déplacement :

- traction/traction (TT) ;
- traction/torsion déphasées de 90 degrés (TR90) ;

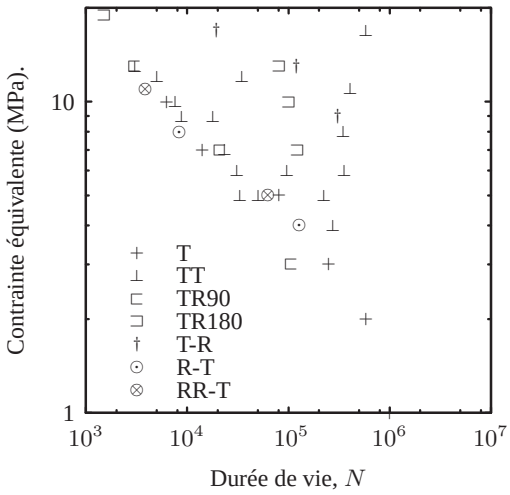


FIG. 7.40 – Durée de vie de l'éprouvette AE2 en fonction de la contrainte principale maximale équivalente.

- traction/torsion en opposition de phase (TR180) ;
- traction avec torsion constante (T-R) ;
- torsion avec traction constante (R-T) ;
- torsion alternée (symétrique) avec traction constante (RR-T) ;

Parmi ces essais certains sont situés à proximité de la droite prévue en condition non renforçante ; il s'agit d'essais pour lesquels le trajet de chargement passe à proximité de l'état de repos (c'est-à-dire de l'état de déformation nul). Pour les autres, qui restent dans un état de déformation d'intensité importante pendant tout le temps du cycle de chargement, la durée de vie est beaucoup plus élevée que ce que la variable d'endommagement proposée aurait pu indiquer.

La bibliographie n'a pas permis de déterminer clairement la nature du mécanisme de renforcement. L'état de distorsion ou la rotation du repère principal peuvent avoir une influence sur le renforcement tout autant que sur l'endommagement. Si on fait l'hypothèse que le renforcement est surtout lié au phénomène de cristallisation, alors il est raisonnable de supposer que les cristallites sont dirigées selon la direction principale puisqu'elles se forment dans la direction d'extension des chaînes macromoléculaires. Mais comme l'endommagement, le renforcement est *a priori* un phénomène local, à l'échelle de la fissure. Il faut donc, encore une fois, trouver une grandeur déterminée à l'échelle du volume élementaire et qui soit liée à la grandeur locale qui représente le renforcement.

La figure 7.41 représente la durée de vie en fonction du maximum et du minimum au cours du cycle de la contrainte principale maximale pour les chargements renforçants sur éprouvette AE. On choisit une représentation fonction du minimum du chargement en raison de la nature hystérétique de la cristallisation. Les essais de traction/torsion en opposition de phase (TR180) et les essais de traction avec torsion constante (T-R) ne se superposent pas aux autres : leur durée de vie est inférieure à celles obtenues en traction pour les mêmes

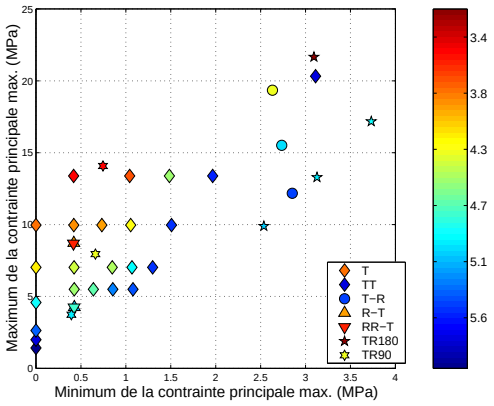


FIG. 7.41 – Durée de vie (échelle de couleur en $\log(N)$) en fonction du maximum et du minimum au cours du cycle de la contrainte principale maximale.

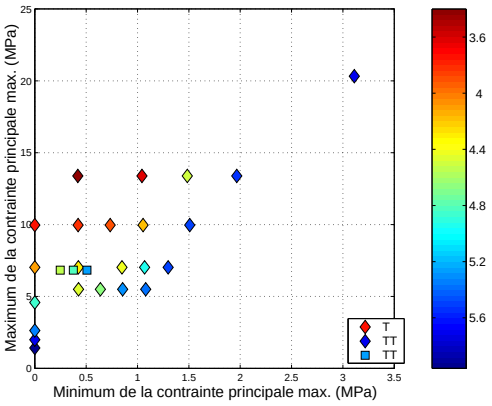


FIG. 7.42 – Durée de vie (échelle de couleur en $\log(N)$) en fonction du maximum et du minimum au cours du cycle de la contrainte principale maximale.

valeurs des contraintes principales maximales. Ces deux types d'essais sont similaires à la fois du point de vue de l'évolution de l'état de distorsion que du point de vue de la rotation du repère principal (voir les figures 5.19 et 5.21 du chapitre 5). Il est donc difficile de conclure quant à la nature de la variable de renforcement. D'autres essais sont nécessaires.

La détection du nombre de cycles à l'amorçage n'est pas aussi aisée dans le cas des chargements renforçants que dans le cas des chargements non renforçants. En effet, on a pu constater des amorçages internes en découpant des éprouvettes peu endommagées en surface (pour la série T - R en particulier). Cet amorçage n'a pas été détecté par la méthode décrite au chapitre 5.

Remarque *Ces amorçages internes ont déjà été observés par Saintier [73]. Il les explique par un meilleur renforcement en surface qu'à cœur.*

Quelques essais de traction/traction contrôlés en effort ont également été effectués. La figure 7.42 permet de comparer les durées de vie correspondantes avec celles obtenues en déplacement. On constate que les points ne coïncident pas. On pense que la raison de cet écart réside dans l'absence de représentation des déformations rémanentes dans la loi de comportement. Ces déformations rémanentes sont petites devant les déformations maximales vues par le matériau, le modèle est donc suffisant pour décrire l'endommagement, qui dépend plus des valeurs maximales que des valeurs minimales de la sollicitation. En revanche, les déformations rémanentes peuvent être non négligeables devant les déformations minimales vues au cours du chargement. L'erreur sur les grandeurs minimales calculées est donc relativement grande. On en déduit que la mise au point d'un modèle de renforcement nécessite la représentation des déformations rémanentes.

La nécessité de représenter le phénomène de renforcement dans le contexte industriel de cette étude n'est pas encore établie. En effet, les sollicitations appliquées aux pièces antivibratoires sont d'amplitude et de moyenne variable ; aussi les déformations passent-

FIG. 7.43 – Suspente vue de côté.

FIG. 7.44 – Suspente vue de face.

elles régulièrement par l'origine. On ne sait pas dans quelle mesure le renforcement dépend de l'histoire du chargement. Des travauxs récents [85, 73] suggèrent que la cristallisation est un phénomène hystérétique cumulatif, nécessitant plusieurs cycles pour se mettre en place et détruit par un passage à l'état de repos. Seules les pièces soumises à une sollicitation moyenne importante (comme par exemple les supports du moteur , qui en supportent le poids) seraient donc susceptibles de se renforcer par cristallisation. Cette dernière est par ailleurs fortement réduite à température élevée. Les températures sous capot rendraient alors l'influence du phénomène de cristallisation marginale. Ceci devra être confirmé par des essais de fatigue en température.

7.5 Application à une structure industrielle : la suspente d'échappement

Une suspente d'échappement a été moulée dans le même matériau que celui qui a été utilisé pour toute l'étude. La pièce est représentée sur les photographies 7.43 et 7.44. Des essais de traction simple contrôlés en déplacement ont été réalisés sur cette pièce. Les fissures apparaissent en surface, aux plis des bras. La figure 7.46 montre la courbe de Wöhler obtenue avec la contrainte maximale cumulée. Le maillage utilisé pour le calcul de la pièce est montré figure 7.45. Les trajets de chargement sont analysés aux nœuds référencés C et E, qui correspondent aux contraintes maximales dans les zones d'apparition des fissures. Les deux zones critiques voient en fait des sollicitations locales très similaires ; les points des bras extérieur et central sont donc quasiment superposés. On constate que les points sont situés légèrement en dessous de la droite prévue avec les essais sur éprouvette AE2. Ceci peut être dû à un maillage trop grossier, ou bien au mode d'élaboration qui est à l'origine d'une assez grande dispersion sur les propriétés du matériau.

Remarque *L'essai réalisé ici n'est pas un cas test discriminant. En effet, la sollicitation est très simple : uniaxiale, et ne faisant apparaître qu'un seul cycle localement. Seule la géométrie est plus complexe que celle des éprouvettes utilisées jusqu'ici.*

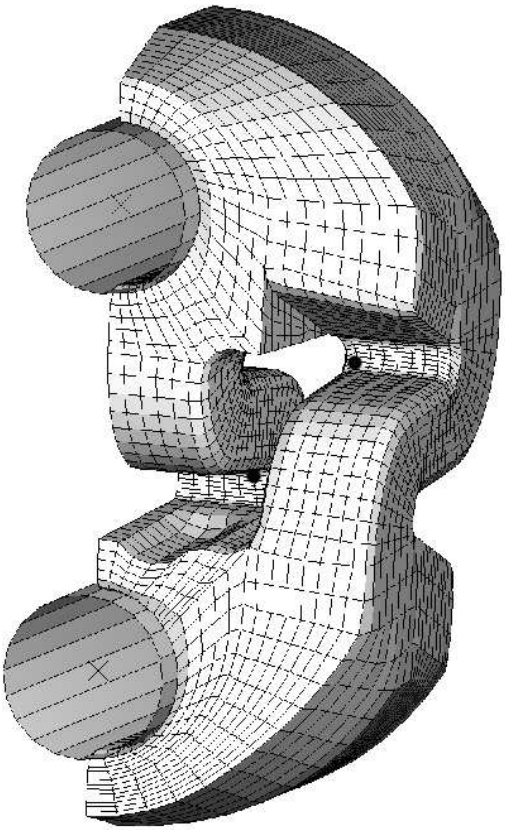


FIG. 7.45 – La moitié de la suspente est maillée. Une condition de symétrie est imposée sur le plan médian. On impose un déplacement vertical à l'un des deux cyclindres rigides emmanchés dans le caoutchouc. Les chargements sont analysés aux nœuds marqués d'un point noir, référencés C (bras central) et E (bras extérieur).

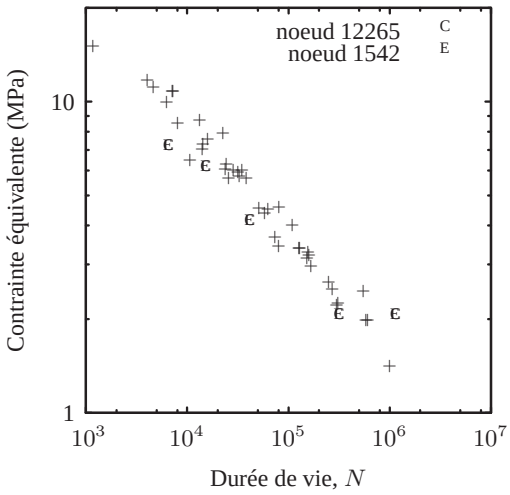


FIG. 7.46 – Durée de vie de la suspente en fonction de la contrainte cumulée, superposée au nuage de point obtenu avec l'ensemble des essais sur éprouvette AE2.

7.6 Conclusion

On a abordé dans ce chapitre plusieurs points importants. Tout d'abord, on a montré que la durée de vie dépend des grandeurs mécaniques en régime cyclique, d'où la nécessité d'une description adéquate du comportement stabilisé. On a ensuite montré que la contrainte et la déformation principales maximales permettent de représenter divers trajets de chargement, à condition que le cycle de chargement local soit unique. Lorsque le chargement comprend plusieurs cycles, on utilise une règle de cumul linéaire qui permet de représenter l'endommagement total occasionné par le chargement. Ce cumul d'endommagement peut s'interpréter comme la propagation d'une micro-fissure. Les résultats obtenus avec le cumul de la déformation et de la contrainte principale maximale sont satisfaisants. Il est prévu d'éprouver cette règle de cumul sur un chargement d'amplitude variable, de type aléatoire.

Comme l'analyse préliminaire menée au chapitre 5 le suggérait, il n'a pas été possible de déterminer l'influence de la pression sur l'endommagement à l'aide de ces essais. La bibliographie et les quelques ruptures survenues à cœur sous l'insert laissent penser qu'il faudrait en tenir compte.

Les essais de rapport de charge positif conduisent à une durée de vie plus élevée que des essais de même amplitude de rapport de charge nul. Cet effet de renforcement a une composante multiaxiale importante ; des essais supplémentaires sont nécessaires pour la déterminer. En outre, la description des déformations rémanentes pourrait avoir son importance pour représenter correctement ces essais.

Conclusions générales et perspectives

L'objectif de ce travail était de donner des outils de prévision de la tenue en service des structures réalisées en caoutchouc soumises à un chargement mécanique répété, une demande de PSA Peugeot Citroën. Le caractère industriel de cette étude et de ses applications a conduit à choisir des modèles faciles à implanter dans les outils informatiques existants et à faible nombre de coefficients matériau.

La démarche qui a été mise en place est constituée de deux étapes découplées :

1. représenter le comportement du caoutchouc en régime stabilisé ;
2. identifier une grandeur mécanique corrélée à la durée de vie.

Chacune de ces deux étapes a donné lieu à la réalisation d'un grand nombre d'essais, effectués chez Modyn-Trelleborg. Un seul matériau a été étudié : un caoutchouc naturel chargé de noir de carbone, le matériau le plus courant pour les applications antivibratoires de l'automobile.

Sur le comportement

Les comportements monotone et cyclique du matériau ont été caractérisés à l'aide d'essais sur éprouvettes simples. L'influence de paramètres comme l'intensité, la multiaxialité ou la vitesse du chargement a été observée. Différents phénomènes ont été identifiés, mais seuls certains ont été retenus pour la modélisation :

Élasticité non linéaire Le raidissement aux grandes déformations est associé à la déformation élastique maximale du réseau macromoléculaire.

Incompressibilité On fait l'hypothèse classique de transformation isochore. Toutefois, la littérature suggère qu'elle est vérifiée en compression mais pas en extension.

Effet Mullins Le matériau soumis à un chargement cyclique présente un adoucissement très important par rapport à la courbe de première charge. Après cinq cycles, on considère que le comportement n'évolue plus. L'ampleur de la perte de raideur varie comme le chargement maximal vu par le matériau. Par ailleurs, cet adoucissement est anisotrope : il se produit essentiellement dans la direction de traction et modifie très peu le comportement dans la direction transverse. Le matériau ainsi accommodé est donc anisotrope.

D'autre phénomènes ont au contraire été écartés de la modélisation :

Viscosité La viscoélasticité du matériau ne se manifeste pas de façon notable dans la gamme de vitesse où le matériau est sollicité dans cette étude. On choisit donc de ne pas en tenir compte.

Déformations rémanentes Les déformations observées à effort nul après un chargement sont en partie recouvrables, en partie définitives. Dans la mesure où elles sont limitées, et où l'endommagement par fatigue des matériaux dépend essentiellement du chargement maximal, on juge inutile de décrire ce phénomène.

Modèle de comportement

Un modèle de comportement en régime cyclique est proposé. On suppose que la réponse du matériau ne dépend que des variables cycliques : elle est indépendante du trajet de chargement suivi pendant la période transitoire. L'endommagement est constant : il ne peut pas évoluer puisqu'on fait l'hypothèse que le comportement est stabilisé. Il est décrit par les élongations maximales vues dans un nombre fini de directions matérielles au cours du chargement cyclique, ceci afin de représenter l'anisotropie induite par le chargement. Le choix des élongations maximales est motivé par le mécanisme d'altération du réseau macromoléculaire pour expliquer l'effet Mullins. La forme de la densité d'énergie par direction est choisie sur des critères phénoménologiques uniquement.

Les deux coefficients matériau du modèle sont identifiés sur le cinquième cycle d'essais stabilisés. Des essais à plus grand nombre de cycles indiquent qu'il serait plus judicieux de les identifier à quelques centaines de cycles, de façon à ce que la réponse ne dépende plus du type de contrôle (effort ou déplacement). Le modèle représente très bien la traction et le glissement, moins bien la compression.

La détermination des élongations maximales qui paramètrent le modèle n'est pas triviale dans une structure quelconque. Elles doivent être solution d'un problème implicite, puisque ces élongations qui gouvernent le comportement local doivent également être les élongations maximales effectivement atteintes au cours du cycle. L'existence de cette solution n'a d'ailleurs pas été démontrée. Le problème est résolu de manière itérative, en utilisant la courbe enveloppe du comportement comme une courbe de charge fictive. La loi de comportement est enfin implantée dans le code Abaqus sous la forme d'un sous-programme utilisateur.

Le comportement à cinq cycles est simulé par un calcul aux éléments finis pour les deux éprouvettes axi-symétriques et comparé aux essais. Étant donné le faible nombre de coefficients du modèle et la dispersion expérimentale due au mode d'élaboration du matériau, les résultats obtenus sont très satisfaisants.

Perspectives

Les améliorations à apporter au modèle porteraient sur les points suivants :

- une identification des coefficients matériau à un plus grand nombre de cycles, ce qui suppose d'avoir un critère indiquant l'établissement effectif du régime stabilisé ;
- une meilleure description de l'état de compression ;

– une mesure expérimentale de la compressibilité en extension et en régime cyclique du matériau, afin de valider ou au contraire de remettre en cause l'hypothèse de transformation isochore ;
– l'identification des mécanismes physiques à l'origine des déformations rémanentes observées et leur représentation dans le modèle.

Sur la durée de vie

La durée de vie est définie ici comme l'apparition d'une fissure d'un millimètre environ. Il s'agit d'une taille détectable à l'œil nu et par la mesure de la raideur de l'éprouvette, mais cependant relativement petite devant la taille de la structure. On peut donc raisonnablement faire l'hypothèse que la présence de la fissure ne modifie pas la distribution des contraintes et des déformations à l'échelle de la taille caractéristique de la structure, l'échelle qui doit par ailleurs être choisie pour le maillage destiné aux calculs par éléments finis.

De nombreux essais cycliques sont réalisés sur les deux éprouvettes axisymétriques choisies. L'accès aux différentes grandeurs locales, au point d'apparition de la fissure, se fait par un calcul aux éléments finis, réalisé avec le modèle de comportement décrit précédemment.

Sollicitations uniaxiales

L'éprouvette la moins entaillée (AE42) est consacrée aux essais de traction uniaxiale. On met en évidence l'effet du rapport de charge sur la durée de vie :
– la compression ne provoque pas d'endommagement ;
– les essais de traction/traction ont une durée de vie bien plus importante que des essais de traction simple de même amplitude.

L'effet du type de contrôle (effort ou déplacement) est mis en évidence par la réalisation de deux courbes de Wöhler. La durée de vie des essais contrôlés en déplacement est supérieure à celle des essais contrôlés en effort, lorsqu'on les compare à l'aide des déplacements ou efforts au premier cycle. En revanche, lorsqu'on les compare à l'aide des efforts ou déplacements en régime stabilisé, ils sont équivalents. On montre que le comportement proposé ci-dessus, bien qu'identifié sur le cinquième cycle seulement (alors que le régime stabilisé n'est pas encore complètement établi), permet de décrire de manière satisfaisante les deux types d'essais. On montre également l'effet d'une précharge d'amplitude plus importante que celle de l'essai d'endurance : bénéfique lorsque l'essai est contrôlé en déplacement et néfaste lorsqu'il est contrôlé en effort. Cet effet s'explique par l'adoucissement du matériau qui se produit pendant la phase de précharge. La prise en compte de cet adoucissement dans le modèle de comportement proposé en première partie permet d'améliorer la prévision de la durée de vie pour ces essais. Le cas des chargements d'amplitude variable n'a pas été traité ici, mais on suppose que la description de ce phénomène sera importante dans ce cas également : le comportement est déterminé par les cycles d'amplitude maximale vus précédemment au cours de la vie de la structure. L'endommagement provoqué par les cycles d'amplitude inférieure sera donc modifié par l'existence de ces cycles de grande amplitude.

Sollicitations multiaxiales

L'éprouvette la plus entaillée (AE2) est consacrée à l'étude de l'influence de la multiaxialité sur la durée de vie. De nombreux essais combinant des sollicitations de traction et de torsion sont réalisés. Pour des essais sans rotation importante du repère principal, les différentes grandeurs envisagées (contrainte ou élongation principale, cisaillement, énergies) donnent des résultats équivalents en terme de corrélation avec la durée de vie mesurée. L'analyse des angles de fissuration mesurés pour certaines séries d'essais, ainsi que les observations microscopiques issues de la littérature, indiquent que le matériau est sensible aux sollicitations normales plutôt qu'au cisaillement. Les essais pour lesquels le repère principal tourne beaucoup font apparaître localement plusieurs cycles de chargement. On propose une règle de cumul d'endommagement linéaire pour ces essais, qui donne des résultats satisfaisants. Ce critère devra être évalué par la suite sur des essais plus complexes, d'amplitude variable.

Renforcement

Seuls les essais pour lesquels le matériau ne passe jamais par l'état de déformation nulle sont mal représentés par ce modèle ; leur durée de vie est bien supérieure aux essais de même amplitude mais passant par l'état de déformation nulle. La littérature suggère que dans ce cas, il existe un mécanisme de renforcement qui retarde l'endommagement. Le mécanisme de ce renforcement n'est pas identifié de manière certaine. Il pourrait s'agir d'un phénomène de cristallisation de la gomme. Il semble lié à la valeur minimale de la sollicitation, mais on ne sait pas quelle grandeur est la plus judicieuse d'un point de vue multiaxial. En effet, on dispose de peu d'essais discriminants de ce point de vue. D'autre part, l'estimation de cette sollicitation minimale est plutôt mauvaise, car le modèle de comportement utilisé ne représente pas les déformations rémanentes.

Perspectives

Certains points mériteraient d'être approfondis. En particulier, on pourrait proposer :
- de déterminer l'influence de la pression hydrostatique ;
- de réaliser des essais de traction biaxiale afin de complèter la base expérimentale du point de vue des états de distorsion ;
- d'éprouver la règle de cumul sur un chargement d'amplitude variable ;
- de comprendre les mécanismes physiques du phénomène de renforcement et de déterminer une variable de renforcement multiaxiale.

On montre dans ce mémoire que des modèles simples suffisent pour estimer la durée de vie, qui résulte pourtant de mécanismes d'endommagement complexes. En particulier, on montre qu'il est possible de représenter le comportement en régime stabilisé avec seulement deux coefficients matériau et sans décrire la période transitoire lourde en temps de calcul.

En utilisant ce modèle de comportement, on montre que des grandeurs mécaniques simples, comme la déformation principale maximale ou la contrainte normale, sont bien corrélées avec la durée de vie. Une loi de cumul est proposée pour tenir compte des chargements à cycles multiples. Les résultats obtenus sont satisfaisants.

Bibliographie

[1] F. Abraham, T. Alshuth et S. Jerrams. The effect of minimum stress and stress amplitude on the fatigue life of non strain crystallising elastomers. *Materials and Design*, 2004.

[2] N. André. *Critère local d'amorçage de fissure en fatigue dans un élastomère de type NR*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, janvier 1998.

[3] F. Andrieux. *Sur les milieux visco-hyperélastiques endommageables*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1996.

[4] E. M. Arruda et M. C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2) :389–412, 1993.

[5] J. R. Beatty. Fatigue of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 37(5) :1341–1364, 1964.

[6] M. F. Beatty et S. Krishnaswamy. A theory of stress-softening in incompressible isotropic materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1931–1965, 2000.

[7] A. Bennani, S. Cantournet, L. Laiarinandrasana, R. Piques et M.-N. Bouchereau. Comportement et durée de vie du caoutchouc naturel chargé de silice. Dans *DEPOS 2004*, 2004.

[8] D. Besdo et I. J. Properties of rubberlike materials under large deformations explained by self-organizing linkage patterns. *International Journal of Plasticity*, 19 :1001–1018, 2003.

[9] M. C. Boyce. Direct comparison of the gent and the arruda-boyce constitutive models of rubber elasticity. *Rubber Chemistry and Technology*, 69 :781–785, 1997.

[10] F. Bueche. Mullins effect and rubber-filler interactions. *Journal of Applied Polymer Science*, 15 :271–281, 1961.

[11] S. M. Cadwell, R. A. Merrill, C. M. Sloman et F. L. Yost. Dynamic fatigue life of rubber. *Industrial and engineering chemistry*, 12(1) :19–23, 1940.

[12] S. Cantournet. *Endommagement et fatigue des élastomères*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2004.

[13] P. Chadwick. Thermo-mechanics of rubberlike materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 276(A 1260) :371–403, May 1974.

[14] P. Chadwick. Applications of an energy-momentum tensor in non-linear elastostatics. *Journal of Elasticity*, 5(3-4) :249–258, 1975.

[15] P. Chadwick et C. F. M. Creasy. Modified entropic elasticity of rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 32(5) :337–357, 1984.

[16] G. Chagnon. *Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2003.

[17] P. Charrier, E. Ostoja-Kuczynski, E. Verron, L. Gornet et G. Chagnon. Influence of loading conditions on fatigue properties for filled elastomers. Dans *International Rubber Conference*, Praha, july 2002.

[18] A. Cohen. A Padé approximant to the Langevin function. *Rheologica Acta*, 30 :270–273, 1991.

[19] K. Dang Van. *Sur la résistance à la fatigue des métaux*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1971.

[20] J. Diani, M. Brieu, J.-M. Vacherand et A. Rezgui. Directional model for isotropic and anisotropic rubber-like materials. *Mechanics of Materials*, 36 :313–321, 2004.

[21] S. Doll et K. Schweizerhof. On the development of volumetric strain energy functions. *Journal of Applied Mechanics*, 67 :17–20, 2000.

[22] S. Dong, C. Bathias, K. Legorju et F. Hourlier. Experimental research on the fatigue of natural rubber subjected to multiaxial loading. Dans *7th ICBMFF - International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, pages 323–328, Berlin, Germany, June 28 - July 1 2004.

[23] A. Dorfmann et R. W. Ogden. A pseudo-elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle-reinforced rubber. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :2699–2714, 2003.

[24] A. Dorfmann et R. Ogden. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :1855–1878, 2004.

[25] D. Elata et M. B. Rubin. Isotropy of strain energy functions which depend only on a finite number of directional strain mesures. *Journal of Applied Mechanics*, 61 :284–289, June 1994.

[26] J. L. Ericksen et R. S. Rivlin. Large elastic deformations of homogeneous anisotropic materials. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 3(3) :281–301, 1954.

[27] J. D. Eshelby. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, 5(3-4) :321–335, 1975.

[28] R. J. Farris. The influence of vacuole formation on the response and failure of filed elastomers. *Transactions of the Society of Rheology*, 12(2) :315–334, 1968.

[29] J. H. Fielding. Flex life and crystallisation of synthetic rubber. *Industrial and Engineering Chemistry*, 35(12) :1259–1261, December 1943.

[30] P. J. Flory. Thermodynamics of crystallisation in high polymers. I. crystallisation induced by stretching. *Journal of Chemical Physics*, 15(6) :397–408, 1947.

[31] P. J. Flory et J. Rehner, Jr. Statistical mechanics of cross-linked polymer networks. *The Journal of Chemical Physics*, 11(11) :512–520, November 1943.

[32] S. D. Gehman, P. Rohall et D. I. Livingston. Biaxial fatigue testing of vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 34 :506–526, 1961.

[33] A. G. Gent. Cavitation in rubber : a cautionary tale. *Rubber Chemistry and Technology*, 63 :49–53, 1990.

[34] A. N. Gent. A new constitutive model for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 69 :59–61, 1996.

[35] A. N. Gent, P. B. Lindley et A. G. Thomas. Cut growth and fatigue of rubbers. I. the relationship between cut growth and fatigue. *Journal of Applied Polymer Science*, 8 :455–466, 1964.

[36] A. N. Gent et A. G. Thomas. Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. *Journal of Polymer Science*, 28(118) :625–629, 1958.

[37] S. Govindjee et J. Simo. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating mullin's effect. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :87–112, 1991.

[38] S. Govindjee et J. Simo. Mullin's effect and the strain amplitude dependance of the storage modulus. *International Journal of Solids and Structures*, 29(14/15) :1737–1751, 1992.

[39] H. W. Greensmith. Rupture of rubber. X. the change in stored energy on making a small cut in a test piece held in simple extension. *Journal of Applied Polymer Science*, 7 :993–1002, 1963.

[40] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series A*, 221 :163, 1921.

[41] L. J. Hart-Smith. A pseudo-elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle-reinforced rubber. *Zeitschrift fur Angewande Mathematik und Physik*, 17(5) :608, 1966.

[42] HKS. *Abaqus standard, version 6.1 : Theory manual et Standard user's manual*, 2000.

[43] C. O. Horgan, R. W. Ogden et G. Saccomandi. A theory of stress softening of elastomers based on finite chain extensibility. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 460 :1737–1754, 2004.

[44] H. M. James et E. Guth. Theory of the increase in rigidity of rubber during cure. *The Journal of Chemical Physics*, 11(9) :669–683, 1943.

[45] M. A. Johnson et M. F. Beatty. The Mullins effect in equibiaxial extension and its influence on the inflation of a balloon. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 33(2) :223–245, 1995.

[46] J. K. Knowles et E. Sternberg. On a class of conservation laws in linear and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44 :187–211, 1972.

[47] W. Kuhn et F. Grün. Relation between the elasticity constant and extension double diffraction of highly elastic substances. *Kolloid Zeit*, 101 :248–271, 1942.

[48] G. J. Lake. Mechanical fatigue of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 45 :309–328, 1972.

[49] G. J. Lake. Fatigue and fracture of elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 68(3) :435–460, 1995.

[50] G. J. Lake et P. B. Lindley. The mechanical fatigue limit for rubber. *Journal of Applied Polymer Science*, 9 :1233–1251, 1965.

[51] K. Layouni, L. Laiarinandrasana et R. Piques. Compressibility induced by damage in carbon black reinforced natural rubber. Dans *Constitutive Models for Rubber III*, pages 273–281, 2003.

[52] J.-B. Le Cam, B. Huneau, E. Verron et G. L. Mechanism of fatigue crack growth in carbon black filled natural rubber. *Macromolecules*, 37(13) :5011–5017, 2004.

[53] D. J. Lee et J. A. Donovan. Microstructural changes in the crack tip region of carbon-black-filled natural rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 60 :910–924, 1987.

[54] K. Legorju-Jago et C. Bathias. Fatigue initiation and propagation in natural and synthetic rubbers. *International Journal of Fatigue*, 24 :85–92, 2002.

[55] J. Lemaitre et J. L. Chaboche. *Mechanics of solids materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[56] P. B. Lindley et A. Stevenson. Fatigue resistance of natural rubber in compression. *Rubber Chemistry and Technology*, 55 :337–351, 1982.

[57] G. Marckmann, E. Verron, L. Gornet, G. Chagnon, P. Charrier et P. Fort. A theory of network alteration for the Mullins effect. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 50 :2011–2028, 2002.

[58] W. V. Mars et A. Fatemi. A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber. *International Journal of Fatigue*, 24 :949–961, 2002.

[59] W. V. Mars. *Multiaxial fatigue of rubber*. PhD thesis, The University of Toledo, August 2001.

[60] G. Martin Borret. *Sur la propagation de fissures dans les élastomères*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1998.

[61] C. Miehe. Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden type large strain elastic materials. *European Journal of Mechanics*, 14(5), 1995.

[62] L. Mullins et N. R. Tobin. Theoretical model for the elastic behaviour of filler-reinforced vulcanized rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 30 :555–571, 1957.

[63] R. W. Ogden. Volume changes associated with the deformation of rubber-like solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24 :323–338, 1976.

[64] R. W. Ogden et D. G. Roxburgh. A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 455 :2861–2877, 1999.

[65] E. Ostoja-Kuczynski. *Comportement en fatigue des élastomères. Application aux structures antivibratoires pour l'automobile.* Thèse de doctorat, à paraître, École Centrale de Nantes, 2005.

[66] E. Ostoja-Kuczynski, P. Charrier, E. Verron, G. Marckmann, L. Gornet et G. Chagnon. Crack initiation in natural rubber : experimental database and macroscopic observations. Dans Busfield et Muhr, editors, *European Conference on Constitutive Models for Rubber III*, pages 41–47, London, 15-17 September 2003.

[67] I. Papadopoulos. *Fatigue polycyclique des métaux : une nouvelle approche*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chausées, 1987.

[68] R. W. Penn. Volume changes accompanying the extension of rubber. *Transactions of the Society of Rheology*, 14(4) :509–517, 1970.

[69] G. Perrin. Analytic stress-strain relationship for isotropic network model of rubber elasticity. *Compte Rendu à l'Académie des Sciences, série II b*, 328 :5–10, 2000.

[70] R. S. Rivlin et A. G. Thomas. Rupture of rubber. I. characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science*, 10(3) :291–318, 1953.

[71] B. J. Roberts et J. B. Benzies. The relashionship between unniaxial and equibiaxial fatigue in gum and carbon black filled vulcanizates. Dans *Rubbercon'77*, pages 2.1–2.13, 1977.

[72] A. Robisson. *Comportement visco-hyperélastique endommageable d'élastomères SBR et PU : prévision de la durée de vie en fatigue*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.

[73] N. Saintier. *Prévision de la durée de vie en fatigue du NR, sous chargement multiaxial*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2 janvier 2001.

[74] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Les éditions de l'école polytechnique, Palaiseau, 2000.

[75] SFMM. Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable. méthode rainflow de compatge des cycles. principe et utilisation. Fascicule de documentation AFNOR A03-406, novembre 1993.

[76] F. Sidoroff. Les grandes déformations. rapport Gréco n° 51, 1982.

[77] F. Sidoroff. Description of anisotropic damage application to elasticity. Dans J. Hult et J. Lemaître, editors, *IUTAM Colloquium on Physical Nonlinearities in structural analysis.*, pages 237–244, Berlin, 1980. Springer.

[78] J. C. Simo. On a fully three-dimensionnal finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60 :153–173, 1987.

[79] P. Steinmann. Applications of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. I. continuum mechanical setting. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :7371–7391, 2000.

[80] P. Steinmann, D. Ackermann et F. J. Barth. Applications of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. II. computational settings. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :5509–5526, 2001.

[81] A. Stevenson. A fracture mechanics study of the fatigue of rubber in compression. *International Journal of Fracture*, 23 :45–59, 1982.

[82] C. Stolz. *Approches énergétiques en mécanique non linéaire*. 2005. A paraître.

[83] C. Sun, A. Gent et P. Marteny. Effect of fatigue step loading sequence on residual strength. *Tire Science and technology*, 28(3) :196–208, 2000.

[84] S. Toki, T. Fujimaki et M. Okuyama. Strain-induced crystallisation of natural rubber as detected real-time by wide-angle X-ray diffraction technique. *Polymer*, 41 :5423–5429, 2000.

[85] S. Toki, I. Sics, S. Ran, L. Liu, B. S. Hsiao, S. Murakami, M. Tosaka, S. Kohjiya, S. Poombradub, Y. Ikeda et A. H. Tsu. Strain-induced molecular orientation and crystallization in natural and synthetic rubbers under uniaxial deformation by *in-situ* synchrotron x-ray study. *Rubber Chemistry and Technology*, 77(2) :317–335, 2004.

[86] M. Tosaka, S. Murakami, S. Poombradub, S. Kohjiya, Y. Ikeda, S. Toki, I. Sics et B. S. Hsiao. Orientation and cristallisation of natural rubber network as revealed by waxd using synchrotron radiation. *Macromolecules*, 37 :3299–3309, 2004.

[87] S. Trabelsi, P.-A. Albouy et J. Rault. Stress-induced crystallization around a crack tip in natural rubber. *Macromolecules*, 35(27) :10054–10061, 2002.

[88] S. Trabelsi, P.-A. Albouy et J. Rault. Effective local deformation in stretch filled rubber. *Macromolecules*, 36(24) :9093–9099, 2003.

[89] S. Trabelsi, P.-A. Albouy et J. Rault. Strain-induced crystallization properties of natural and synthetic cis-polyisoprene. *Rubber Chemistry and Technology*, 77(2) :303–316, 2004.

[90] L. R. G. Treloar. *The physics of rubber elasticity*. Clarendon Press, Oxford, third edition edition, 1975.

[91] K. C. Valanis et R. F. Landel. The strain energy function of a hyperelastic material in terms of the extensions ratios. *Journal of Applied Physics*, 38(7) :2997–3002, June 1967.

[92] B. Wang, H. Lu et G.-h. Kim. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials. *Mechanics of Materials*, 34 :475–483, 2002.

[93] M. C. Wang et E. Guth. Statistical theory of networks of non-gaussian flexible chains. *The Journal of Chemical Physics*, 20(7) :1144–1157, july 1952.

[94] P. D. Wu et E. van der Giessen. On improved networks models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(3) :427–456, 1993.

Annexes

Annexe A

Caractéristiques du matériau

A.1 Formulation

Ingrédient	Quantité (pce)	Pourcentage en masse (%)
Caoutchouc naturel	100	64.1
Oxyde de zinc	9.95	6.4
Plastifiant	3	1.9
Noir de carbone	34	21.8
Acide stéarique	3	1.9
Antioxydant	2	1.3
Accélérateurs	4	2.6

Remarque *La formulation d'un caoutchouc est généralement donnée en pourcentage de la gomme (noté pce) et non en pourcentage de la masse totale de tous les ingrédients (noté %), à la manière d'une recette de cuisine.*

A.2 Caractéristiques mécaniques

Caractéristique	Méthode	Unité	Valeur
Dureté DIDC	ISO 48 (94)	Pts	62
Dureté Shore A	ISO 868 (98)	Pts	58
Résistance à rupture	ISO 37 (94)	MPa	23.5
Allongement à rupture	ISO 37 (94)	%	600
DRC après 22h à 70˚C	ISO 815 (91)	%	22.4
Densité	ISO 2781 (88)	g/cm^3	1.13
Résistance au déchirement	ISO 34-2 (96)	kN/m	56
Vieillissement air 7j 70˚C			
Variation de résistance à rupture	ISO 37 (94)	%	-8.5
Variation d'allongement à rupture	ISO 37 (94)	%	-18.2
Variation de dureté DIDC	ISO 48 (94)	Pts	$+6$
Variation de dureté Shore A	ISO 868 (98)	Pts	$+6$

Annexe B

Représentation des essais de caractérisation

B.1 Généralités

On traite ici deux cas de comportement : les comportements en invariant $W(I_1, I_2)$ et les comportements qui peuvent s'écrire comme la somme des comportements unidirectionnels dans N_α directions $W = \sum_\alpha^{N_\alpha} w(\lambda^\alpha)$.

On suppose que les transformations s'effectuent à volume constant. Les contraintes sont donc définies à un multiplicateur de Lagrange près. Dans le cas des comportements en invariants on a donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{G} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}^2) - \eta\boldsymbol{I},$$

où :

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}\,{}^t\boldsymbol{F}$$

Par le théorème de Caley-Hamilton, il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{G} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\boldsymbol{G}^{-1} - \eta'\boldsymbol{I} \quad .$$

On en déduit le tenseur de Boussinesq :

$$\boldsymbol{B} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{F} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{F}) - \eta\,{}^t\boldsymbol{F}^{-1} \quad .$$

Dans le cas des comportements discrétisés sur plusieurs directions, on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_\alpha \frac{p^\alpha}{\lambda^\alpha}\frac{\partial w}{\partial \lambda^\alpha}(\boldsymbol{F}\mathrm{D}^\alpha)\otimes(\boldsymbol{F}\mathrm{D}^\alpha) - \eta\boldsymbol{I},$$

soit :

$$\boldsymbol{B} = \sum_\alpha \frac{p^\alpha}{\lambda^\alpha}\frac{\partial w}{\partial \lambda^\alpha}(\boldsymbol{F}\mathrm{D}^\alpha)\otimes\mathrm{D}^\alpha - \eta\,{}^t\boldsymbol{F}^{-1} \quad .$$

Dans les deux cas, le multiplicateur de Lagrange η est déterminé en annulant les contraintes sur les bords libres.

B.2 Lois en invariants

B.2.1 Traction et compression uniaxiales

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1/\sqrt{\lambda} & \\ & & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux premiers invariants s'écrivent :

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \qquad I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \quad .$$

On en déduit les contraintes :

$$B_{11} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) \quad .$$

B.2.2 Cisaillement pur

L'éprouvette est longue, de façon à assurer un état de déformations planes.

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1/\lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Les deux premiers invariants sont égaux :

$$I_1 = I_2 = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \quad .$$

On en déduit les contraintes :

$$B_{11} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)$$

Remarque *Malgré son nom, l'essai dit « de cisaillement pur » ne génère pas un état de cisaillement pur mais contient également une composante de traction. En effet, la pression vaut :*

$$tr\,\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(1 + \lambda^2 - \frac{2}{\lambda^2}\right) + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(2\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} - 1\right) > 0 \quad \textit{pour} \quad \lambda > 1 \qquad \text{(B.1)}$$

B.2.3 Glissement simple

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux premiers invariants sont égaux :

$$I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2$$

En écrivant la condition de bord libre $\sigma_{33} = 0$, on déduit que $p = 0$ et l'expression des contraintes :

$$\boldsymbol{B} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1} \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \\ \gamma & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2} \begin{pmatrix} -\gamma^2 & \gamma & \\ \gamma + \gamma^3 & -\gamma^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$B_{12} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\gamma \quad .$$

Remarque *Les essais de cisaillement pur et de glissement simple sont considérés comme équivalents car ils produisent le même état de distorsion (leur trajet de chargement dans un diagramme I_1-I_2 est le même, et le gradient de la transformation est identique si on l'écrit dans les directions principales). Ils sont pourtant différents sur deux points. D'une part, les directions principales de $\boldsymbol{C}$ sont constantes dans l'essai de cisaillement pur tandis qu'elles tournent dans l'essai de glissement simple. Elles sont données par :*

$$\left(\frac{1}{2}(-\gamma \pm \sqrt{4+\gamma^2}), 1, 0\right) \quad .$$

D'autre part, l'état de pression est différent entre les deux essais. En effet, pour le glissement simple on a :

$$tr\,\boldsymbol{\sigma} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\gamma^2,$$

soit, en l'écrivant dans le repère principal (λ correspondant à l'élongation principale max) :

$$tr\,\boldsymbol{\sigma} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\left(-2 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad .$$

Il s'agit d'un résultat différent de celui trouvé pour le cisaillement pur (cf. B.1).

Remarque *On écrit les contraintes sur les bords obliques de l'éprouvette, de normale en configuration de référence $N = (-1, 0, 0)$:*

$$\boldsymbol{B}.N = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\gamma \\ -2\frac{\partial W}{\partial I_1}\gamma - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}(\gamma + \gamma^3) \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad .$$

On constate que la condition de bord libre n'est pas respectée. Ainsi, l'hypothèse sur la forme du gradient de la tranformation n'est pas exacte.

B.3 Lois discrétisées sur plusieurs directions fixes

La démarche est la même que précédemment, aussi les résultats sont-ils donnés directement.

B.3.1 Traction et compression uniaxiales

$$B_{11} = \sum_{\alpha} \frac{p^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial \lambda^{\alpha}} \left(\lambda^2 D^{\alpha}{}_1^2 - \frac{1}{\lambda^2} D^{\alpha}{}_2^2 \right)$$

B.3.2 Cisaillement pur

$$B_{11} = \sum_{\alpha} \frac{p^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial \lambda^{\alpha}} \left(\lambda D^{\alpha}{}_1^2 - \frac{1}{\lambda^3} D^{\alpha}{}_2^2 \right)$$

B.3.3 Glissement simple

$$B_{12} = \sum_{\alpha} \frac{p^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial \lambda^{\alpha}} \left(D^{\alpha}{}_2 D^{\alpha}{}_1 + \gamma D^{\alpha}{}_3^2 \right)$$

Annexe C

Description d'un tenseur symétrique par sa projection sur 6 directions

On démontre ici qu'il suffit pour caractériser complètement un tenseur de connaître sa projection sur 6 directions (voir [25]).

On considère un ensemble de 6 directions définies par leur vecteur directeur unitaire N_α. Les tenseurs $\boldsymbol{B}_\alpha$ définis comme suit :

$$B_\alpha = N_\alpha \otimes N_\alpha$$

forment une base de l'espace des tenseurs symétriques $\mathbb{S}$ à condition d'être linéairement indépendants (car $\mathbb{S}$ est de dimension 6).

$$a_\alpha \boldsymbol{B}_\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \{1, ..., 6\} \quad a_\alpha = 0 \tag{C.1}$$

On suppose que cette condition est remplie. Tout tenseur $\boldsymbol{S}$ appartenant à $\mathbb{S}$ peut donc s'écrire dans la base $(\boldsymbol{B}_\alpha)_{\alpha \in \{1,...,6\}}$. On définit alors le produit scalaire sur :

$$\forall \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S'} \in \mathbb{S} \quad \langle \boldsymbol{S} \mid \boldsymbol{S'} \rangle = \sum_{\alpha=1}^{6} \sum_{\beta=1}^{6} S_\alpha M_{\alpha\beta} S'_\beta$$

avec

$$M_{\alpha\beta} = \boldsymbol{B}_\alpha : \boldsymbol{B}_\beta$$

$(M_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \{1,...,6\}}$ est symétrique, définie, positive et donc inversible. On note son inverse $(M^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \{1,...,6\}}$ et on note $(\boldsymbol{B}^\alpha)_{\alpha \in \{1,...,6\}}$ la base duale de $(\boldsymbol{B}_\alpha)_{\alpha \in \{1,...,6\}}$ définie comme suit :

$$\boldsymbol{B}^\alpha = M^{\alpha\beta} \boldsymbol{B}_\beta$$

On a alors :

$$\boldsymbol{B}^\alpha : \boldsymbol{B}_\beta = \boldsymbol{B}_\alpha : \boldsymbol{B}^\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

Ainsi, à condition de choisir 6 directions N_α indépendantes au sens défini par C.1, tout tenseur symétrique $\boldsymbol{S}$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{S} = S_\alpha \boldsymbol{B}^\alpha \quad \text{avec} \quad S_\alpha = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{B}_\alpha$$

Remarque *La condition d'indépendance des directions est équivalente à* $\det M \neq 0$.

La conséquence pratique de tout ceci est que le tenseur des élongations de Cauchy $\boldsymbol{C}$ peut être complètement défini par une mesure des élongations dans 6 directions indépendantes (au sens défini par C.1) :

$$\boldsymbol{C} = \lambda^{\alpha 2} \boldsymbol{B}^{\alpha}$$

Annexe D

Anisotropie

L'essai décrit en 1.5.2 et représenté de manière schématique par la figure D.1 met en évidence le caractère anisotrope de l'accommodation. On désire simuler le comportement de l'éprouvette prélevée.

Le gradient de la transformation du cisaillement pur s'écrit, dans son repère principal XYZ :

$$\boldsymbol{F}_{XYZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \end{pmatrix}$$

soit, dans le repère xyz (repère principal de la traction) :

$$\boldsymbol{F}_{xyz} = \begin{pmatrix} 1 & (\Lambda - 1)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ (\Lambda - 1)\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \Lambda\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \end{pmatrix}$$

On en déduit la valeur des élongations maximales selon les directions de calcul :

$$\lambda_m^\alpha = \max\sqrt{\mathrm{D}^\alpha \cdot {}^t\boldsymbol{F}_{xyz} \cdot \boldsymbol{F}_{xyz} \cdot \mathrm{D}^\alpha}$$

Il reste alors à calculer la réponse à l'essai de traction, de gradient de transformation,

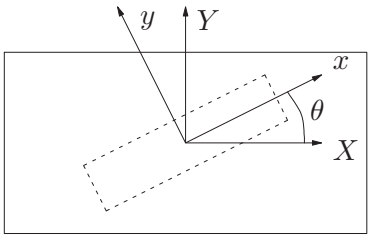


FIG. D.1 – Une éprouvette de traction est découpée dans une éprouvette de cisaillement pur préalablement accommodée dans la direction Y. La découpe est réalisée selon un angle θ.

dans xyz :

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

Les contraintes de Boussinesq, dans la direction de traction, valent donc :

$$B_{11} = \sum_{\alpha} \frac{p^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial \lambda^{\alpha}} (\lambda^{\alpha}, \lambda_m^{\alpha}) \left(\lambda^2 D^{\alpha}{}_1^2 - \frac{1}{\lambda^2} D^{\alpha}{}_2^2 \right)$$

avec λ_m^{α} calculés précédemment en cisaillement pur.

Annexe E

Implantation de la loi de comportement dans Abaqus

E.1 Implantation d'une loi de comportement en grandes déformations dans Abaqus

La loi de comportement est implantée dans Abaqus [42] sous la forme d'un programme Fortran appelé Umat (comme User MATerial) [1]. Les grandeurs à fournir sont d'une part les contraintes, d'autre part une matrice tangente aux contraintes qui sera utilisée comme direction de recherche par l'algorithme de convergence du code. La mesure des contraintes utilisée est celle de Cauchy. Cependant, la mesure lagrangienne étant plus naturelle lorsqu'on traite des problèmes en grandes déformations, on commencera par exprimer les grandeurs nécessaires dans leur formulation lagrangienne :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}^l = \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \boldsymbol{E}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{E}^2} \tag{E.1}$$

L'expression eulérienne des contraintes et du tenseur d'élasticité se déduit de leur expression lagrangienne par le transport de la configuration initiale vers la configuration actuelle :

$$J\sigma_{ij} = \Pi_{ab} F_{ia} F_{jb} \quad \text{et} \quad J{E^e}_{ijkl} = {E^l}_{abcd} F_{ia} F_{jb} F_{kc} F_{ld}$$

Abaqus utilise une formulation dite lagrangienne réactualisée, c'est-à-dire en prenant comme configuration de référence à l'instant t la configuration à l'instant $t-1$. Le tenseur d'élasticité attendu dans la UMAT s'écrit donc comme la somme d'un terme de convection et d'un terme de transport :

$$\mathbb{E}^{abq} = \frac{1}{J}\frac{\partial(\dot{J\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \boldsymbol{d}} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbb{I} + \mathbb{I}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + \mathbb{E}^e$$

[1] Abaqus propose aussi un autre type de programme, appelé UHYPER, dévolu à l'implantation de lois de comportement hyperélastiques incompressibles ou quasi-incompressibles. Son formalisme en invariants de $\boldsymbol{C}$ est particulièrement adapté à la programmation des lois classiques pour les élastomères, mais suppose l'isotropie du comportement, ce qui n'est pas le cas ici.

E.2 Cas du comportement compressible

Les contraintes s'obtiennent en décomposant l'énergie sur les directions de discrétisation :

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} = p^\alpha \frac{\partial w}{\partial \lambda^\alpha} \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}$$

On en déduit l'expression du tenseur d'élasticité lagrangien :

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)_{ijkl} = p^\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda^{\alpha 2}} \left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{ij} \left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{kl} + p^\alpha \frac{\partial w}{\partial \lambda^\alpha} \left(\frac{\partial^2 \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)_{ijkl}$$

où les dérivées simples et doubles des élongations dans chaque direction par rapport aux déformations s'écrivent respectivement :

$$\left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{ij} = \frac{1}{\lambda^\alpha} D^\alpha{}_i D^\alpha{}_j \tag{E.2}$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)_{ijkl} = -\frac{1}{\lambda^\alpha} \left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{ij} \left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{kl} \tag{E.3}$$

Il reste à exprimer le comportement monodirectionnel du matériau, soit, dans le cas de notre loi :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda^\alpha} = G \frac{\lambda_m^{\alpha\,2} + a}{\lambda_m^{\alpha\,2} - \lambda^{\alpha 2} + a}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda^{\alpha 2}} &= \frac{2G}{a} \lambda^\alpha \qquad \text{si} \quad \lambda^\alpha = \lambda_m^\alpha \\ &= 2G \frac{\lambda^\alpha (\lambda_m^{\alpha\,2} + a)}{(\lambda_m^{\alpha\,2} - \lambda^{\alpha 2} + a)^2} \qquad \text{si} \quad \lambda^\alpha < \lambda_m^\alpha \end{aligned}$$

E.3 Gestion de l'incompressibilité

La condition de transformation isochore est une liaison interne qui fait apparaître une inconnue de pression hydrostatique. L'écriture des contraintes est modifiée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange μ :

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} - \mu \boldsymbol{C}^{-1}$$

E.3.1 Cas des contraintes planes

L'hypothèse des contraintes planes permet de lever l'indétermination sur la pression hydrostatique. En effet, la condition de transformation isochore $\det(\boldsymbol{C}) = 1$ permet de

réduire les variables de calcul aux variables du plan. L'élongation hors plan est alors donnée par $C_{hp} = 1/\det(\boldsymbol{C}_{cp})$.

Il faut tenir compte de cette liaison lorsqu'on dérive des expressions où C_{hp} intervient. En particulier, les relations E.2 et E.3 deviennent :

$$\left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{ij} = \frac{1}{\lambda^\alpha} D^\alpha{}_i D^\alpha{}_j + \left(\frac{\partial C_{hp}}{\partial \boldsymbol{C}_{cp}}\right)_{ij} D^{\alpha 2}{}_{hp}$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)_{ijkl} = -\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{ij}\left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{kl} + \frac{2}{\lambda^\alpha}\left(\frac{\partial^2 C_{hp}}{\partial \boldsymbol{C}_{cp}^2}\right)_{ijkl} D^{\alpha 2}{}_{hp}$$

avec :

$$\frac{\partial C_{hp}}{\partial \boldsymbol{C}_{cp}} = -C_{hp}\boldsymbol{C}_{cp}^{-1}$$

et

$$\frac{\partial^2 C_{hp}}{\partial \boldsymbol{C}_{cp}^2} = C_{hp}\left(\boldsymbol{C}_{cp}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}_{cp}^{-1} - \frac{\partial \boldsymbol{C}_{cp}^{-1}}{\partial \boldsymbol{C}_{cp}}\right)$$

E.3.2 Cas général tridimensionnel

On propose de relâcher légèrement la condition d'incompressibilité, c'est-à-dire de considérer que le matériau est en fait compressible et de maintenir le volume presque constant par l'introduction d'une fonction de pénalisation. Le potentiel élastique s'écrit alors comme la somme d'un terme de comportement à volume constant et d'un terme de pénalisation :

$$W^{pot} = W(\overline{\boldsymbol{F}}) + Kf(J)$$

où $\overline{\boldsymbol{F}} = J^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{F}$ est le déviateur du gradient de la transformation et où f, pour assurer la stabilité du comportement, doit être une fonction convexe ayant son minimum en 1 et croissant rapidement vers l'infini lorsqu'elle s'en éloigne.

$$f : \quad]0 \quad +\infty[\longrightarrow [0 \quad +\infty[\quad \text{telle que :}$$

$$f(1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial J}(1) = 0$$

$$\lim_{J\to 0} f = +\infty \qquad \lim_{J\to +\infty} f = +\infty$$

$$\forall \quad J\frac{\partial^2 f}{\partial J^2} > 0$$

Les nombreuses fonctions de pénalisation proposées dans la littérature sont en général des combinaisons de la fontion logarithmique et des polynômes de degré deux. On pourra se reporter à [21] pour une étude critique des fonctions de pénalisation les plus usitées. Plusieurs remplissent toutes les conditions mathématiques requises (voir tableau E.1 en fin de ce

chapitre). Certaines permettent en outre de représenter correctement les essais de compressibilité par identification d'un ou plusieurs paramètres. Pour cette étude, c'est la fonction :

$$f(J) = \frac{1}{4}\left(\ln^2 J + (J-1)^2\right)$$

qui a été retenue sur des critères de simplicité et de vitesse de convergence des calculs numériques.

K doit être choisi suffisamment grand pour que le module de compressibilité soit 10^6 fois plus grand que le module de cisaillement.

Les contraintes et le tenseur d'élasticité se décomposent maintenant en deux parties, l'une associée au déviateur de la tranformation, notée $\overline{\bullet}$, l'autre à la pénalisation, notée $\widetilde{\bullet}$.

Les formules E.1 obtenues précédemment doivent être modifiées pour tenir compte de la variation de volume. Les contraintes lagrangiennes s'écrivent désormais :

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} = \frac{\partial W}{\partial \overline{\boldsymbol{E}}} : \frac{\partial \overline{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{E}}$$

et la matrice d'élasticité lagrangienne :

$$\begin{aligned}
\overline{E^l}_{ijkl} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)_{ijkl} \\
&= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \overline{\boldsymbol{E}}^2}\right)_{abcd} \left(\frac{\partial \overline{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{baij} \left(\frac{\partial \overline{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{dckl} + \left(\frac{\partial W}{\partial \overline{\boldsymbol{E}}}\right)_{ab} \left(\frac{\partial^2 \overline{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)_{baijkl}
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{E}} = J^{-\frac{2}{3}}(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{C}^{-1})$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)_{ijklmn} = -\frac{2}{3}J^{-\frac{2}{3}}(I_{ijkl}C^{-1}_{mn} + I_{ijmn}C^{-1}_{kl} - \frac{1}{3}C_{ij}C^{-1}_{kl}C^{-1}_{mn} - C_{ij}C^{-1}_{kn}C^{-1}_{lm})$$

Quant aux termes associés à la pénalisation, ils se calculent simplement :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{J}\boldsymbol{F}\frac{\partial K f}{\partial \boldsymbol{E}}\,{}^t\boldsymbol{F} = K\frac{\partial f}{\partial J}\boldsymbol{I} \\
\widetilde{\mathbb{E}^{abq}} &= K\left(\frac{\partial f}{\partial J} + J\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}\right)\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}
\end{aligned}$$

soit, avec la fonction de pénalisation choisie :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} &= K\frac{1}{2}\left(J - 1 + \frac{\ln J}{J}\right)\boldsymbol{I} \\
\widetilde{\mathbb{E}^{abq}} &= K\frac{1}{2}\left(2J + \frac{1}{J} - 1\right)\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}
\end{aligned}$$

Les cas des déformations planes et axi-symétriques (avec ou sans torsion) sont des cas particuliers du cas tridimensionnel où certains termes du gradient de la transformation sont connus.

$$\boldsymbol{F}_{\text{déf. planes}} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F}_{\text{axisym}} = \begin{pmatrix} F_{rR} & 0 & F_{rZ} \\ F_{\theta R} & F_{\theta\Theta} & F_{\theta Z} \\ F_{zR} & 0 & F_{zZ} \end{pmatrix}$$

E.3.3 Éléments à formulation mixte

Pour assurer l'incompressibilité, Abaqus propose des éléments à formulation mixte qui possèdent une variable suplémentaire en plus des déplacements : un multiplicateur de Lagrange associé à la pression hydrostatique.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser ce type d'éléments car l'incompressibilité est déjà assurée par la pénalisation introduite dans la loi de comportement. Cela permet toutefois d'améliorer la convergence des calculs. Les éléments employés ici sont référencés CGAX4H.

f	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial J}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}$	E^{abq}	convexe	$f(0)$	$f(+\infty)$
$\frac{1}{2}(J-1)^2$	$J-1$	1	$2J-1$	oui	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\frac{1}{2}\ln^2 J$	$\frac{\ln J}{J}$	$\frac{1}{J^2}(1-\ln J)$	$\frac{1}{J}$	non	$+\infty$	$+\infty$
$\frac{1}{4}((J-1)^2+\ln^2 J)$	$\frac{1}{2}\left(J-1+\frac{\ln J}{J}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{J^2}(1-\ln J)\right)$	$\frac{1}{2}\left(2J-1+\frac{1}{J}\right)$	oui	$+\infty$	$+\infty$
$J\ln J - J + 1$	$\ln J$	$\frac{1}{J}$	$1+\ln J$	oui	1	$+\infty$
$\frac{1}{4}(J^2-1)-\frac{1}{2}\ln J$	$\frac{1}{2}\left(J-\frac{1}{J}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{J^2}\right)$	J	oui	$+\infty$	$+\infty$
$\frac{\lambda}{2}\ln^2 J+\mu\ln J$	$\frac{1}{J}(\lambda\ln J+\mu)$	$\frac{1}{J^2}(\lambda-\mu-\lambda\ln J)$	$\frac{\lambda}{J}$	non	$+\infty$	$+\infty$
$\frac{1}{2}(J-1)\ln J$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{J}+\ln J\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{J}+\frac{1}{J^2}\right)$	$1+\frac{1}{2}\ln J$	oui	$+\infty$	$+\infty$
$\frac{1}{2}(e^{J-1}-\ln J-1)$	$\frac{1}{2}\left((J-1)e^{J-1}-\frac{1}{J}\right)$	$\frac{1}{2}\left((J-1)^2e^{J-1}+\frac{1}{J^2}\right)$	$\frac{1}{2}((J^3-2J^2-2J-1)e^{J-1})$	oui	$+\infty$	$+\infty$
$\theta^{-2}(\theta\ln J+J^{-\theta}-1)$	$\frac{\theta^{-1}}{J}(1-J^{-\theta})$	$\frac{\theta^{-1}}{J^2}(-1+(\theta+1)J^{-\theta})$	$J^{-\theta-1}$	si $\theta<-1$		$+\infty$

TAB. E.1 – Fonctions de pénalité

Annexe F

Plans des éprouvettes diabolo

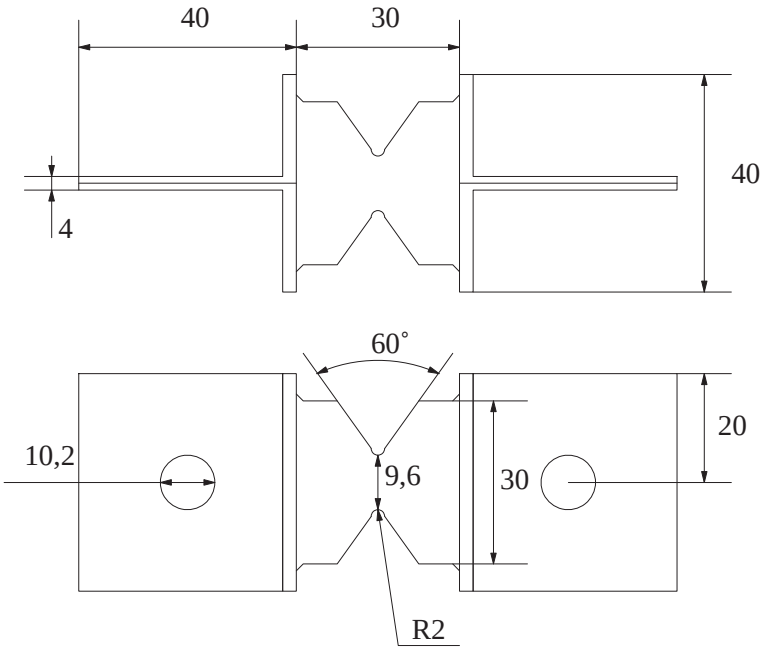


FIG. F.1 – Éprouvette de type AE2.

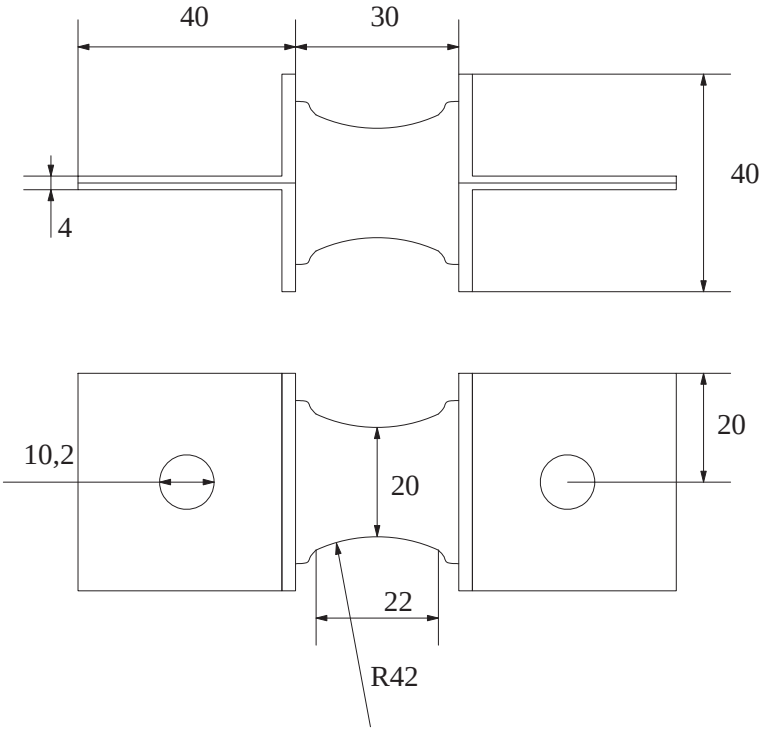


FIG. F.2 – Éprouvette de type AE42.

Annexe G

Maillages des éprouvettes diabolo

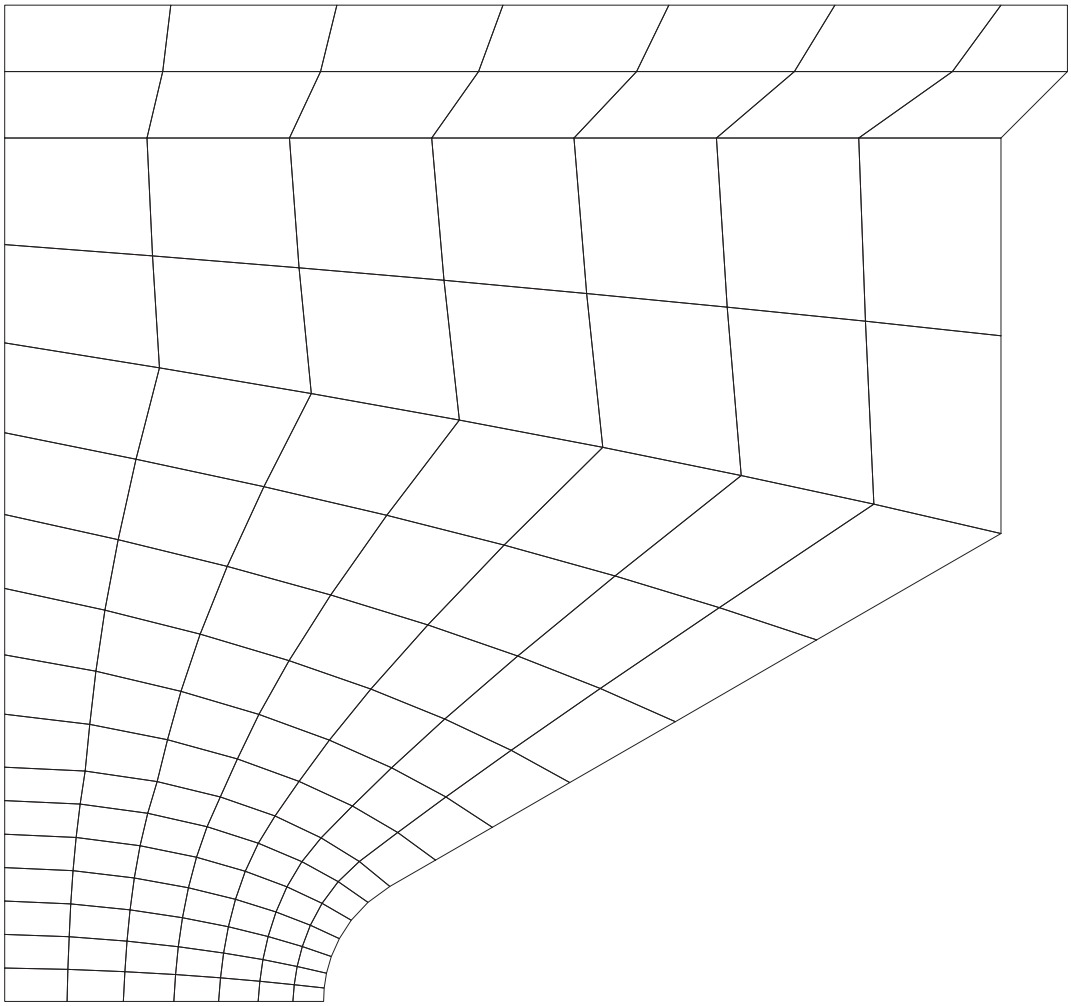


FIG. G.1 – Maillage 1 de l'éprouvette AE2.

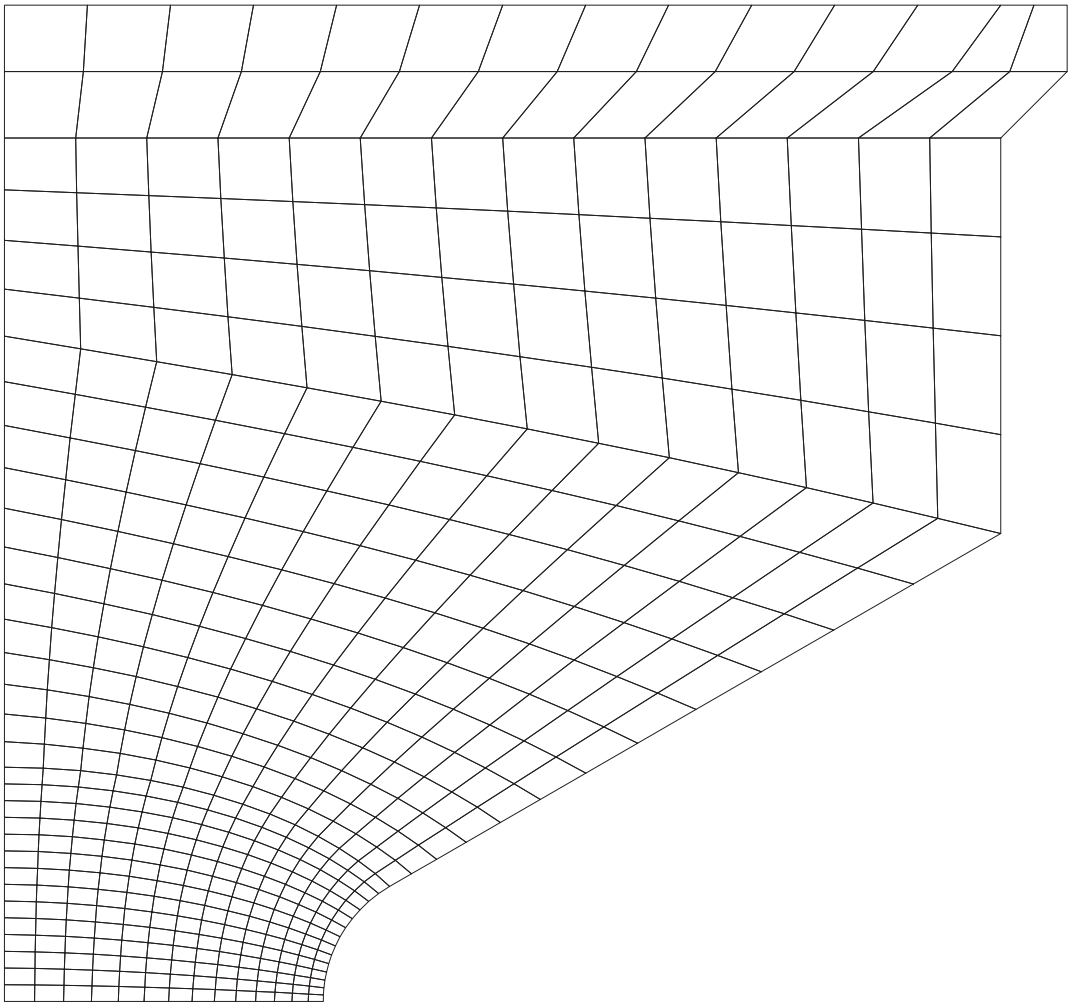


FIG. G.2 – Maillage 2 de l'éprouvette AE2.

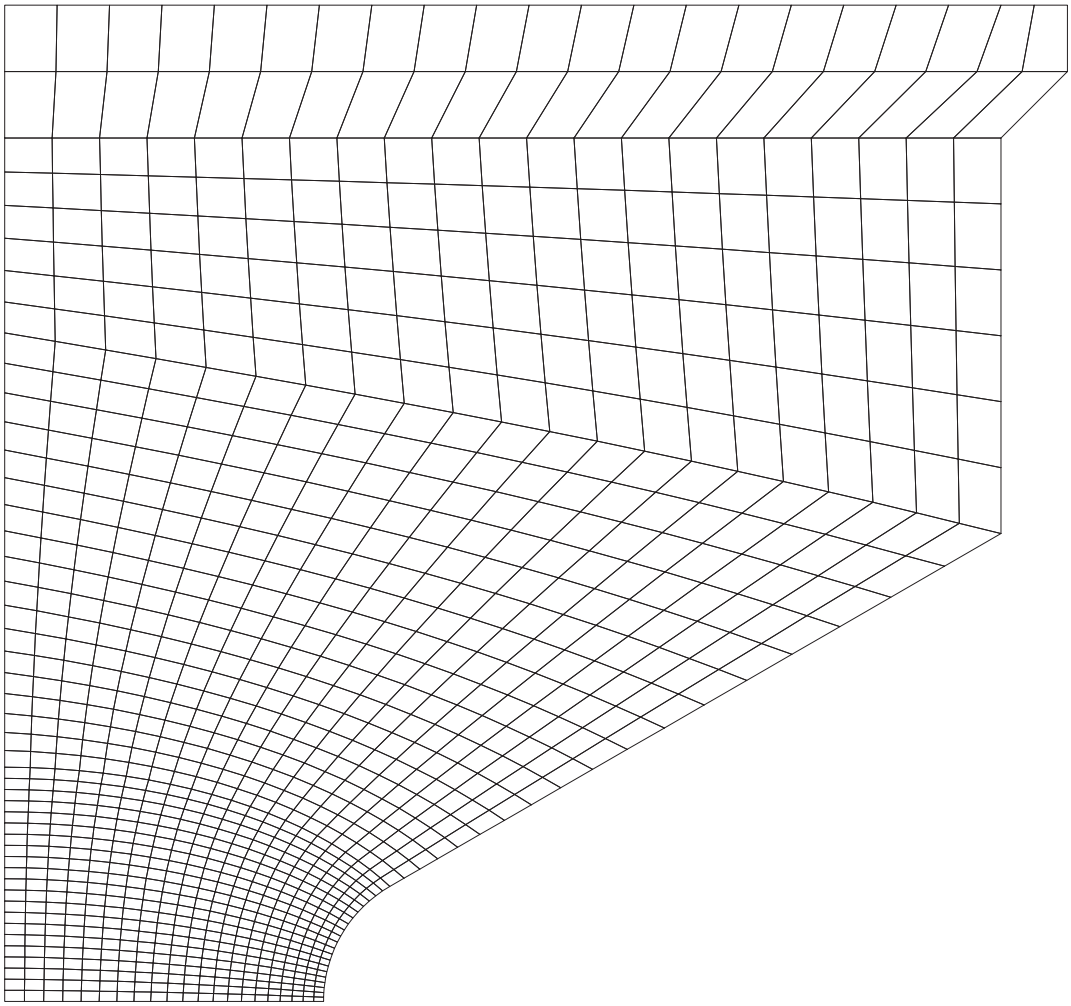


FIG. G.3 – Maillage 3 de l'éprouvette AE2.

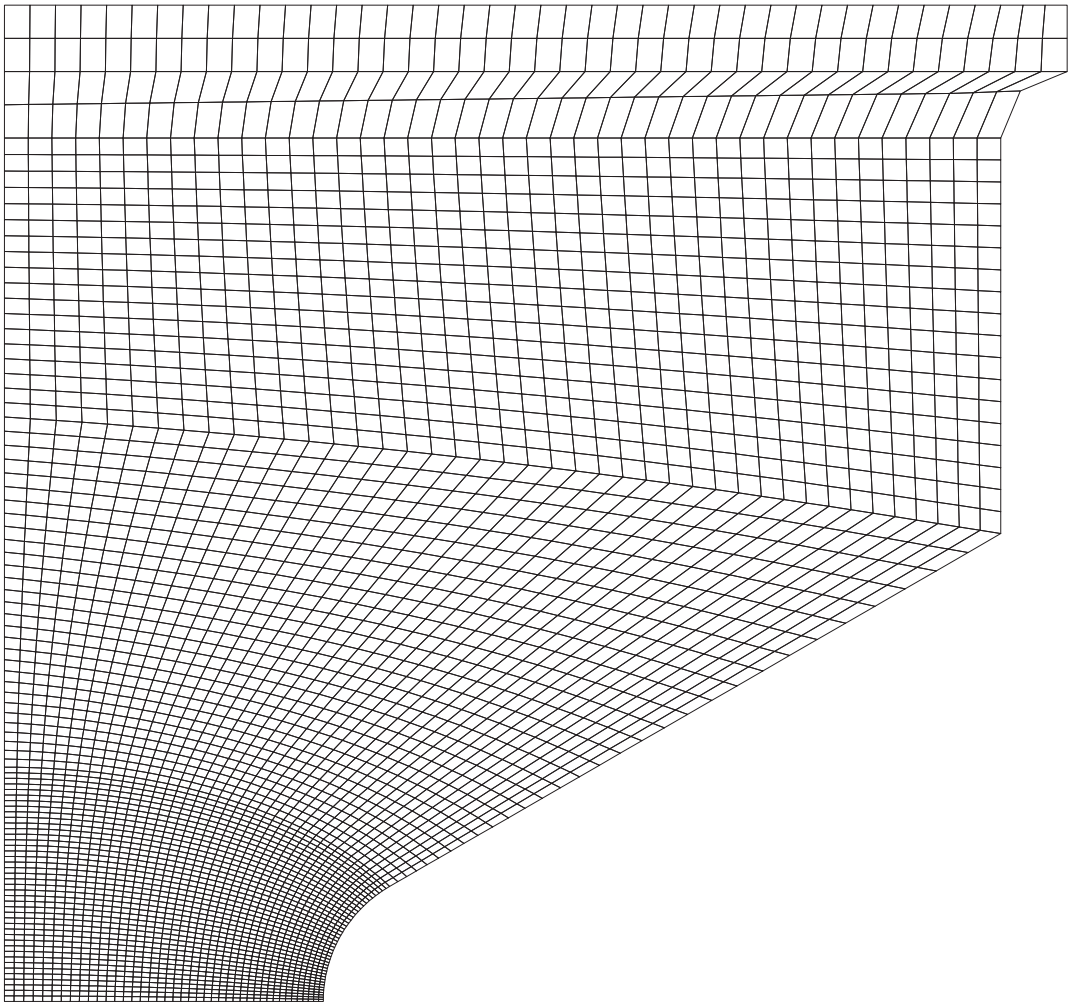


FIG. G.4 – Maillage 4 de l'éprouvette AE2.

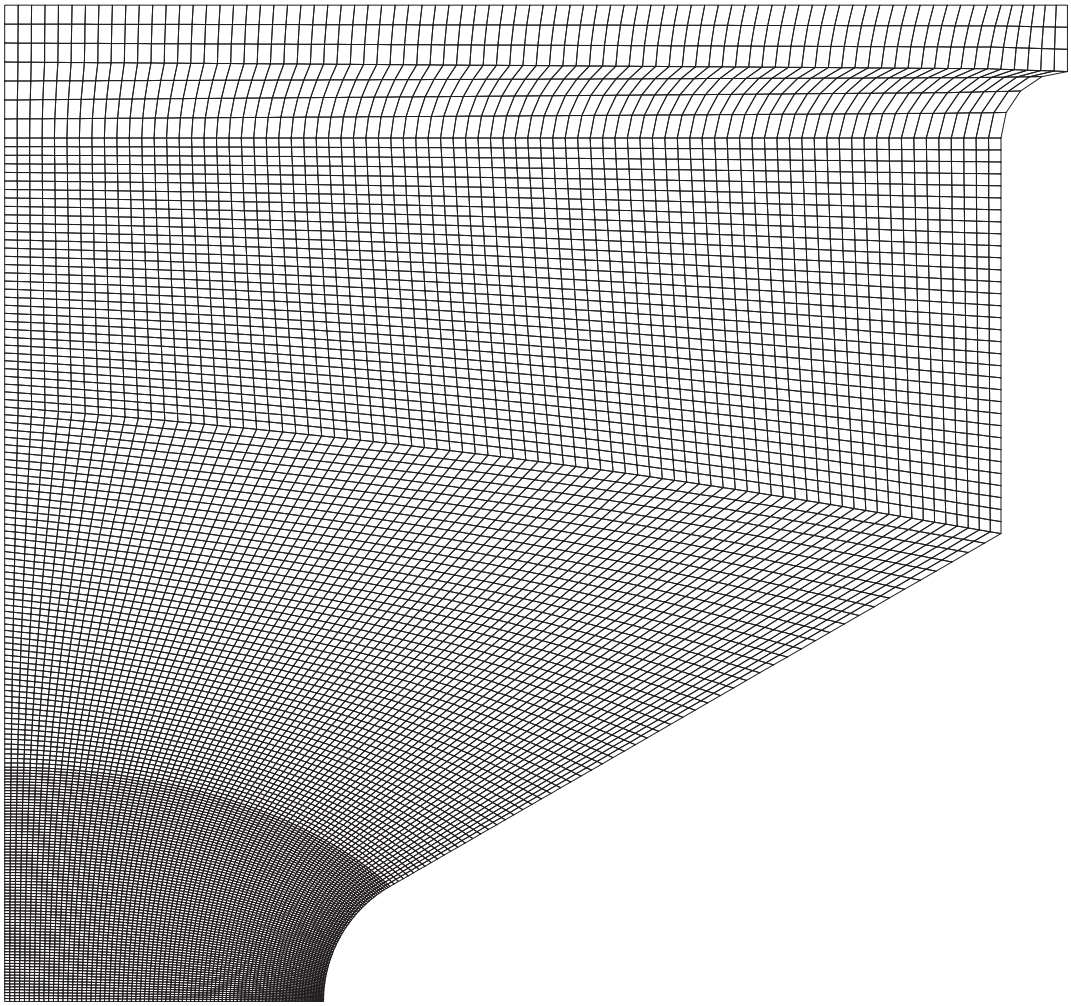


FIG. G.5 – Maillage 5 de l'éprouvette AE2.