



Convergence et applications d'approximations rationnelles vectorielles

Hervé Le Ferrand

► To cite this version:

Hervé Le Ferrand. Convergence et applications d'approximations rationnelles vectorielles. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 1992. Français. NNT : . tel-00521678

HAL Id: tel-00521678

<https://theses.hal.science/tel-00521678v1>

Submitted on 28 Sep 2010

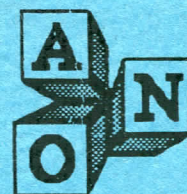
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

USTL

FLANDRES ARTOIS

**LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET
D'OPTIMISATION**



n° d'ordre : 913

THESE

présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de
DOCTEUR en MATHEMATIQUES

par
Hervé LE FERRAND

CONVERGENCE ET APPLICATIONS D'APPROXIMATIONS RATIONNELLES VECTORIELLES

soutenue le 29 mai 1992 devant la commission d'examen

Président

C. BREZINSKI

Membres :

**J. VAN ISEGHEM
J. DELLA DORA
J.F. MAITRE**

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL ,
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.



n° d'ordre : 913

THESE

présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES

par

Hervé LE FERRAND

CONVERGENCE ET APPLICATIONS D'APPROXIMATIONS RATIONNELLES VECTORIELLES

soutenue le 29 mai 1992 devant la commission d'examen

Président

C. BREZINSKI

Membres :

**J. VAN ISEGHEM
J. DELLA DORA
J.F. MAITRE**

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL ,
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

**PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT
ET SCIENCES ECONOMIQUES. DES SCIENCES ET DES LETTRES**

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A. DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé
M. CONSTANT Eugène
M. ESCAIG Bertrand
M. FOURET René
M. GABILLARD Robert
M. LABLACHE COMBIER Alain
M. LOMBARD Jacques
M. MACKE Bruno

Géotechnique
Electronique
Physique du solide
Physique du solide
Electronique
Chimie
Sociologie
Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. LATTEUX Michel
 M. LAVEINE Jean Pierre
 Mme LECLERCQ Ginette
 M. LEHMANN Daniel
 Mme LENOBLE Jacqueline
 M. LEROY Jean Marie
 M. LHENAFF René
 M. LHOMME Jean
 M. LOUAGE Francis
 M. LOUCHEUX Claude
 M. LUCQUIN Michel
 M. MAILLET Pierre
 M. MAROUF Nadir
 M. MICHEAU Pierre
 M. PAQUET Jacques
 M. PASZKOWSKI Stéfan
 M. PETIT Francis
 M. PORCHET Maurice
 M. POUZET Pierre
 M. POVY Lucien
 M. PROUVOST Jean
 M. RACZY Ladislas
 M. RAMAN Jean Pierre
 M. SALMER Georges
 M. SCHAMPS Joël
 Mme SCHWARZBACH Yvette
 M. SEGUIER Guy
 M. SIMON Michel
 M. SLIWA Henri
 M. SOMME Jean
 Melle SPIK Geneviève
 M. STANKIEWICZ François
 M. THIEBAULT François
 M. THOMAS Jean Claude
 M. THUMERELLE Pierre
 M. TILLIEU Jacques
 M. TOULOTTE Jean Marc
 M. TREANTON Jean René
 M. TURRELL Georges
 M. VANEECLOO Nicolas
 M. VAST Pierre
 M. VERBERT André
 M. VERNET Philippe
 M. VIDAL Pierre
 M. WALLART Francis
 M. WEINSTEIN Olivier
 M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Informatique
 Paléontologie
 Catalyse
 Géométrie
 Physique atomique et moléculaire
 Spectrochimie
 Géographie
 Chimie organique biologique
 Electronique
 Chimie-Physique
 Chimie physique
 Sciences Economiques
 Sociologie
 Mécanique des fluides
 Géologie générale
 Mathématiques
 Chimie organique
 Biologie animale
 Modélisation - calcul scientifique
 Automatique
 Minéralogie
 Electronique
 Sciences de gestion
 Electronique
 Spectroscopie moléculaire
 Géométrie
 Electrotechnique
 Sociologie
 Chimie organique
 Géographie
 Biochimie
 Sciences Economiques
 Sciences de la Terre
 Géométrie - Topologie
 Démographie - Géographie humaine
 Physique théorique
 Automatique
 Sociologie du travail
 Spectrochimie infrarouge et raman
 Sciences Economiques
 Chimie inorganique
 Biochimie
 Génétique
 Automatique
 Spectrochimie infrarouge et raman
 Analyse économique de la recherche et développement
 Mécanique

M. LE MAROIS Henri
 M. LEMOINE Yves
 M. LESCURE François
 M. LESENNE Jacques
 M. LOCQUENEUX Robert
 Mme LOPES Maria
 M. LOSFELD Joseph
 M. LOUAGE Francis
 M. MAHIEU François
 M. MAHIEU Jean Marie
 M. MAIZIERES Christian
 M. MANSY Jean Louis
 M. MAURISSON Patrick
 M. MERIAUX Michel
 M. MERLIN Jean Claude
 M. MESMACQUE Gérard
 M. MESSELYN Jean
 M. MOCHE Raymond
 M. MONTEL Marc
 M. MORCELLET Michel
 M. MORE Marcel
 M. MORTREUX André
 Mme MOUNIER Yvonne
 M. NIAY Pierre
 M. NICOLE Jacques
 M. NOTELET Francis
 M. PALAVIT Gérard
 M. PARSY Fernand
 M. PECQUE Marcel
 M. PERROT Pierre
 M. PERTUZON Emile
 M. PETIT Daniel
 M. PLIHON Dominique
 M. PONSOLLE Louis
 M. POSTAIRE Jack
 M. RAMBOUR Serge
 M. RENARD Jean Pierre
 M. RENARD Philippe
 M. RICHARD Alain
 M. RIETSCH François
 M. ROBINET Jean Claude
 M. ROGALSKI Marc
 M. ROLLAND Paul
 M. ROLLET Philippe
 Mme ROUSSEL Isabelle
 M. ROUSSIGNOL Michel
 M. ROY Jean Claude
 M. SALERNO François
 M. SANCHOLLE Michel
 Mme SANDIG Anna Margarete
 M. SAWERYSYN Jean Pierre
 M. STAROSWIECKI Marcel
 M. STEEN Jean Pierre
 Mme STELLMACHER Irène
 M. STERBOUL François
 M. TAILLIEZ Roger
 M. TANRE Daniel
 M. THERY Pierre
 Mme TJOTTA Jacqueline
 M. TOURSEL Bernard
 M. TREANTON Jean René

Vie de la firme
 Biologie et physiologie végétales
 Algèbre
 Systèmes électroniques
 Physique théorique
 Mathématiques
 Informatique
 Electronique
 Sciences économiques
 Optique - Physique atomique
 Automatique
 Géologie
 Sciences Economiques
 EUDIL
 Chimie
 Génie mécanique
 Physique atomique et moléculaire
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Physique du solide
 Chimie organique
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Chimie organique
 Physiologie des structures contractiles
 Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
 Spectrochimie
 Systèmes électroniques
 Génie chimique
 Mécanique
 Chimie organique
 Chimie appliquée
 Physiologie animale
 Biologie des populations et écosystèmes
 Sciences Economiques
 Chimie physique
 Informatique industrielle
 Biologie
 Géographie humaine
 Sciences de gestion
 Biologie animale
 Physique des polymères
 EUDIL
 Analyse
 Composants électroniques et optiques
 Sciences Economiques
 Géographie physique
 Modélisation, calcul scientifique, statistiques
 Psychophysiologie
 Sciences de gestion
 Biologie et physiologie végétales

 Chimie physique
 Informatique
 Informatique
 Astronomie - Météorologie
 Informatique
 Génie alimentaire
 Géométrie - Topologie
 Systèmes électroniques
 Mathématiques
 Informatique
 Sociologie du travail

M. TUREL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANDIJK Hendrik	
Mme VAN ISEGHEM Jeanine	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VASSEUR Jacques	Biologie
Mme VIANO Marie Claude	
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	géologie générale
M. WEICHERT Dieter	Génie mécanique
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WIGNACOURT Jean Pierre	
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Introduction

Les approximants de Padé et leurs généralisations sont depuis plusieurs années l'objet d'intenses recherches. Les applications sont nombreuses, et des domaines aussi variés que la physique, la chimie, la théorie des circuits, la dynamique des fluides sont concernés. Cependant beaucoup de problèmes théoriques restent en suspens. Les questions suivantes reviennent souvent : les approximants que l'on a définis existent-ils ? A-t-on des critères simples d'existence et d'unicité ? Les procédés ou les algorithmes que l'on utilise convergent-ils ? Accélèrent-ils la convergence ?.

Tous ces problèmes sont très difficiles. L'objectif du travail de thèse présenté ici était justement d'apporter des réponses à de telles questions. Par exemple, dans le chapitre I de la première partie on trouvera des conditions d'existence et d'unicité pour les approximants de Padé vectoriels de séries de matrices. Dans la seconde partie, au chapitre I,

une condition suffisante est donnée pour avoir la convergence quadratique de l' ϵ -algorithme topologique appliqué à des systèmes non linéaires. Dans la troisième partie, en bon choix des dénominateurs des approximations de type Padé de e^{-z} conduit à l'accélération de convergence.

Au delà de ces considérations, nous avons voulu faire aussi le lien entre différents points de vue. Par exemple dans la première partie, chapitre II, on met en lumière la connexion entre approximations de Padé, théorie de Lanczos pour les systèmes linéaires, et polynômes biorthogonaux.

Je remercie les professeurs, Madame Morandi Cecchi, Université de Padoue, Messieurs Della Dora, Université de Grenoble, et Maître, INSA de Lyon, pour leur participation à ce jury.

Il m'est agréable de remercier tout particulièrement Madame Jeannette Van Iseghem et Monsieur Claude Brzezinski, professeurs à l'Université de Lille, pour leur aide et leurs encouragements constants.

En dernier lieu je remercie le personnel ATOS de l'Université de Lille et en particulier Madame Tailly pour son aide.

Table des matières.

Première partie

Chap. I Polynômes orthogonaux vectoriels
et séries de matrices.

p 3

p 4

Chap. II Polynômes orthogonaux vectoriels
et méthode de Lanczos.

p 37

Chap. III Convergence de l'algorithme Q.D
vectoriel dans le cas (f, f') où f
est une fonction "lisse" au sens de Lukatsky.

p 56

Deuxième partie

p 77

Chap. I La convergence quadratique de
l'épilon algorithme topologique dans la
résolution de systèmes non-linéaires d'équations

p 78

Chap. II De l'épilon algorithme vectoriel

p 98

Chap. III Transformations quasi-linéaires

p 124

Troisième partie

Approximants de type Padé et
accélération de la convergence: deux exemples.

p 135

Quatrième partie

Biaorthogonalité et procédé de
Gram - Schmidt.

p 156

PREMIERE PARTIE

Approximants de Padé vectoriels :
exemples et applications.

<< Qui, j'ai quitté ce port tranquille,
Ce port si longtemps appelé,
En loin des ennuis de la ville,
Dans un loisir doux et facile,
Sans huit mes jours auraient coûté. >>

Lamartine, Adieu,

Méditations poétiques.

Chapitre I

Polynômes orthogonaux vectoriels et séries de matrices.

L'objet de ce chapitre est de donner des conditions d'existence et d'unicité des polynômes orthogonaux vectoriels. Les polynômes qui sont considérés ici, sont ceux définis par Van Iseghem dans [13]. Nous donnons leur définition et leurs principales propriétés dans le paragraphe 1.

Brezinski a généralisé au cas vectoriel la transformation de Shanks, et a trouvé un epsilon algorithme, appelé epsilon algorithme topologique (TEA), pour calculer récursivement la transformation généralisée de Shanks [1]. De plus, des généralisations de la table de Padé ont été obtenues [2]. Il y a donc un lien très étroit entre les approximants de Padé vectoriels, la transformation généralisée de Shanks et le TEA. En particulier, comme l'epsilon vectoriel de Wynn [14], l'epsilon algorithme topologique peut être utilisé comme une méthode itérative (mais exacte après un nombre fini d'étapes) pour

résoudre des systèmes linéaires [2][6][10]. Ainsi, la théorie des approximations de Padé vectoriels, présentée dans [13], appliquée à la fonction $(I - zA)^{-1} \cdot X_0$, nous donne une méthode itérative pour résoudre le système linéaire $X = AX + X_0$.

Nous allons considérer la fonction $F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n X_0$ où $c_n \in \mathbb{F}$, A est une matrice carrée $d \times d$ et $X_0 \in \mathbb{F}^d$.

Dans le paragraphe 2 nous donnons des résultats sur les polynômes orthogonaux associés à une telle fonctionnelle (en particulier nous établissons un lien entre le polynôme minimal de A pour X_0 et ces polynômes orthogonaux et traduisons les conditions de normalité jusqu'à la colonne d en termes de projection).

Dans le paragraphe 3 nous examinons le cas de la résolvante d'une matrice, i.e. $F(z) = (I - zA)^{-1} \cdot X_0$, et nous utilisons l'algorithme Q.D vectoriel pour le calcul des valeurs propres de A .

Enfin, dans la dernière partie, nous nous intéressons à la fonction $z \mapsto e^{zA} \cdot X_0$, qui contrairement au cas scalaire ne présente pas une table normale.

1. Propriétés des polynômes orthogonaux vectoriels.

On considère une fonction F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^d$,
supposée analytique en zéro : $F(z) = \sum_{n \geq 0} \Gamma_n z^n$ où
 $\Gamma_n \in \mathbb{C}^d$. Van Issegem a défini dans [12] une famille
de polynômes $(P_n^\delta)_{n \geq 0, \delta \geq 0}$ associées à F : si Γ désigne

la fonction de $\mathbb{C}^d[[X]]$ dans $\mathbb{C}^d$, définie par
 $\Gamma(X^i) = \Gamma_i$, les polynômes (P_n^δ) vérifient les relations
d'orthogonalité suivantes ;

$$\begin{cases} \Gamma(X^i P_n^\delta(X)) = 0 & n = nd+k \quad (0 \leq k \leq d) \\ & i = \delta, \dots, \delta+n-1 \\ \Gamma^{(k)}(X^{\delta+n} P_n^\delta(X)) = 0 \end{cases}$$

($\Gamma^{(k)}$ représente le vecteur formé par les k premières
coordonnées de Γ).

Ainsi, les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$
($a_n = 1$) du polynôme P_n^δ doivent vérifier le
système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} a_0 \Gamma_\delta + \dots + a_n \Gamma_{n+\delta} = 0 \\ \vdots \\ a_0 \Gamma_{\delta+n-1} + \dots + a_n \Gamma_{n+\delta+n-1} = 0 \\ a_0 \Gamma_{\delta+n}^{(k)} + \dots + a_n \Gamma_{n+\delta+n}^{(k)} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n = nd+k \\ 0 \leq k < d \end{matrix}$$

où $\Gamma_j^{(k)}$ désigne les k premières composantes du vecteur Γ_j .

Le polynôme $\tilde{P}_n^\Delta$ (i.e. $P_n^\Delta(x) = x^n \tilde{P}_n^\Delta(\frac{1}{x})$) est le dénominateur de l'approximant de Padé vectoriel $[n+\Delta-1/n]$ au sens de [12] de $F(z) = \sum_{n \geq 0} \Gamma_n z^n$.

Son existence et unicité est donc liée à la condition de non-nullité du déterminant de Hankel généralisé H_n^Δ :

$$H_n^\Delta = \begin{vmatrix} \Gamma_0 & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{\Delta+n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Gamma_{\Delta+n-1} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{\Delta+n-2} \\ \Gamma_{\Delta+n}^{(k)} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{\Delta+n-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

(chaque ligne vectorielle représente Δ lignes scalaires (k lignes pour la dernière)).

Les polynômes P_n^Δ sont liés, en supposant la table normale (i.e. $H_n^\Delta \neq 0$ pour $n \geq 0, \Delta \geq 0$) par différentes relations de récurrence [12][13]. En particulier pour Δ fixé la famille $(P_n^\Delta)_{n \geq 0}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre $\Delta+1$ (i.e. avec $\Delta+2$ termes): on obtient aussi une généralisation du théorème de Shohat - Favard.

On a une généralisation de l'algorithme Q.D de Rutishauser [9], l'algorithme Q.D vectoriel qui lie les familles $(P_n^\delta)_n$ et $(P_n^{\delta+1})_n$:

$$(9) \quad \begin{cases} P_{n+1}^\delta(x) = x P_n^{\delta+1}(x) - q_{n+1}^\delta P_n^\delta(x) & n \geq 0 \quad \delta \geq 0 \\ q_{n+1}^\delta = \frac{H_{n+1}^{\delta+1} \times H_n^\delta}{H_{n+1}^\delta \times H_n^{\delta+1}} \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} P_n^{\delta+1}(x) - P_n^\delta(x) = - \sum_{i=n-d}^{n-1} e_{n,i}^\delta P_i^{\delta+1}(x) & \delta \geq 0 \quad n \geq d \\ e_{n,n-d}^\delta \neq 0 \end{cases}$$

$$(Q.D) \quad \begin{cases} q_{n+1}^{\delta+1} + e_{n,n-1}^{\delta+1} = q_{n+1}^\delta + e_{n+1,n}^\delta \\ e_{n,i}^{\delta+1} \times q_{i+1}^{\delta+1} + e_{n,i-1}^{\delta+1} = e_{n,i}^\delta q_{n+1}^\delta + e_{n+1,i}^\delta & i = n-d+1, \dots, n-1 \\ e_{n,n-d}^{\delta+1} \times q_{n-d+1}^{\delta+1} = e_{n,n-d}^\delta \times q_{n+1}^\delta \end{cases}$$

Des résultats de convergence du Q.D vectoriel et des polynômes P_n^δ pour n fixé ont été démontrés par Van Iseghem dans [11], quand F est méromorphe.

Pour la mise en œuvre de ces algorithmes (i.e. algorithme Q.D et calcul des P_n^δ) plusieurs problèmes se posent :

- * initialisation de l'algorithme Q.D (en particulier si d est grand)

- * normalité de la table
- * convergence des P_n^d .

Nous allons aborder ces problèmes quand $F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n X_0$ où $c_n \in \mathbb{C}$, A est une matrice carrée $d \times d$ et $X_0 \in \mathbb{C}^d$. On applique en fait une série de matrices à un vecteur X_0 . Étudier directement la série matricielle, quand une matrice est considérée comme un vecteur de $\mathbb{C}^d$, ne semble pas un choix judicieux comme le montre l'exemple suivant :

$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_n = 1 \text{ pour tout } n, \quad F(z) = \sum_{n \geq 0} z^n I \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z} \end{bmatrix}.$$

Si on écrit $F(z) = \left(\frac{1}{1-z}, 0, 0, \frac{1}{1-z} \right)$ on a $H_n^d = 0$ dès que $n \geq 1$.

2. Condition pour l'existence et unicité des polynômes orthogonaux vectoriels ($n \leq d$).

On considère une matrice $d \times d$, A , et X_0 un vecteur non nul de $\mathbb{C}^d$. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R ($R \neq 0$).

Pour z suffisamment petit posons $F(z) = f(zA) \cdot X_0 = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n X_0$
 et $P_n = c_n A^n X_0$. Remarquons que si A et B sont deux
 matrices semblables, $A = P B P^{-1}$, on a :

$F(z) = P \left(\sum_{n \geq 0} c_n z^n B^n P^{-1} X_0 \right) = P f(zB) P^{-1} X_0$, donc
 en termes d'approximants de Padé, il revient au
 même d'approcher $F(z)$ que $f(zB) P^{-1} X_0$.

Il ne faut pas perdre de vue que les approximants
 de Padé vectoriels de Van Iseghem sont une extension
 de ceux définis par Brezinski dans [2] : ce sont
 exactement les approximants de Padé vectoriels $[n+k/k]$
 pour $k \leq d$ [13]. Les d premières colonnes de la
 table de Padé jouent donc un rôle particulier.

2.1 Le cas $n = d$.

Dans le cas $n = d$ (5) se réduit à :

$$(c_0 c_0 A^0 + \dots + c_d c_{d+d} A^{d+d}) \cdot X_0 = 0.$$

Supposons A inversible : en multipliant la ligne ci-dessus
 par A^{-d} on obtient le système (S') ;

$$(c_0 c_0 I + c_1 c_{d+1} A + \dots + c_d c_{d+d} A^d) \cdot X_0 = 0 \quad (c_d = 1).$$

(S') admet une solution et une seule, si et seulement si
 la famille $(c_0 X_0, \dots, c_{d+d-1} A^{d-1} X_0)$ est libre. Ceci

équivalent à : $c_0 \neq 0, c_{d+1} \neq 0, \dots, c_{sd} \neq 0$ et $(x_0, \dots, A^{d-1}x_0)$ libre. Rappelons ici la définition d'une matrice cyclique [7] : une matrice carrée M est dite cyclique si son polynôme caractéristique P_M est égal à son polynôme minimal π_M . En outre le résultat suivant [5, chap 7]

Proposition 2: M est une matrice carrée $d \times d$ cyclique si et seulement si il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que la famille $(x, Mx, \dots, M^{d-1}x)$ soit libre.

A présent les vecteurs $x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0$ engendrent $\mathbb{C}^d$ (i.e le sous-espace de Krylov $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0 \rangle$ est égal à $\mathbb{C}^d$), cela signifie que la matrice A est cyclique, c'est à dire que son polynôme caractéristique P_A est égal à son polynôme minimal π_A et que $\pi_A = \pi_{x_0}$ où π_{x_0} désigne le polynôme minimal de A pour x_0 .

Considérons le polynôme $Q(X) = a_0 c_s + a_1 c_{s+1}X + \dots + a_d c_{sd}X^d$, on a d'après ce qui précède :

$$Q(X) = K \prod_{X_0} (X) = K P_A(X) \text{ où } K \in \mathbb{C}^d.$$

Si $P_A(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1} + \alpha_d X^d$ ($\alpha_d = 1$) on doit avoir : $a_0 c_{d+1} = K \alpha_0, a_1 c_{d+1} = K \alpha_1, \dots, a_d c_{d+1} = K$,

$$\text{d'où } a_i = \frac{c_{d+1}}{c_{d+1}} \alpha_i \text{ pour } i=0 \text{ à } d-1.$$

En résumé ce qui précède par :

Théorème 2.1

Soit $F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n X_0$ avec $c_n \neq 0$ pour tout n .

Soit $P_A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1} + X^d$ le polynôme caractéristique de A . Le polynôme P_d^δ , $\delta \geq 0$, existe et est unique si et seulement si A est cyclique inversible et si le système $(X_0, AX_0, \dots, A^{d-1}X_0)$ est libre. On a alors :

$$P_d^\delta = \sum_{i=0}^d \frac{c_{d+i}}{c_{d+1}} \alpha_i X^i \quad (\alpha_d = 1).$$

Remarquons que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+d}}{c_{n+1}} = \frac{1}{R^{d-1}}$ ($R \in \mathbb{C}^*$).

Corollaire 2.2

Avec les hypothèses précédentes, si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{R}$ $R \in \mathbb{C}^*$, la suite $(P_d^\delta(z))_{\delta \geq 0}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers $\frac{P_A(Rz)}{R^d}$.

Remarque : ce résultat n'est pas surprenant au vu de [11].
 En effet le théorème de Fabry nous dit que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{R}$ ($R \in \mathbb{C}^*$), f est analytique à l'intérieur du disque $\{|z| < R\}$ et R est une singularité sur la frontière. Par exemple supposons que $f(z) = g(z) + \frac{\lambda_1}{z-R} + \dots + \frac{\lambda_n}{(z-R)^n}$ où g est holomorphe dans le plan (f est méromorphe avec un pôle en R). On a $f(zA) \cdot X_0 = g(zA) \cdot X_0 + \lambda_1 (zA - RI)^{-1} \cdot X_0 + \dots + \lambda_n (zA - RI)^{-n} \cdot X_0$

(I est l'opérateur identité de $\mathbb{C}^d$). Ainsi nous voyons que $\frac{R}{\lambda_1}, \dots, \frac{R}{\lambda_d}$ sont des pôles de $f(zA) \cdot X_0$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_d$ étant les valeurs propres de A). Mais dans notre cas, contrairement à [11], on peut très bien avoir des pôles de même module pour une même composante de $f(zA) \cdot X_0$.

2.2 Le cas $n < d$.

Le cas $n < d$ est plus délicat : nous nous limitons au cas des polynômes P_n^0 (l'hypothèse A inversible est alors inutile).

On a donc le système :

$$(S) \quad (a_0 c_0 X_0 + \dots + a_{n-1} c_{n-1} A^{n-1} X_0 + c_n A^n X_0)^{(1)} = 0.$$

Si S_n désigne la projection orthogonale sur $E_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ($(e_1, \dots, e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^d$),

le système a une solution et une seule, si et seulement si la famille $(\delta_n(c_0 x_0), \dots, \delta_n(c_{n-1} A^{n-1} x_0))$ est libre, - ce qui équivaut à $c_0 \neq 0, \dots, c_{n-1} \neq 0$ et $(\delta_n(x_0), \dots, \delta_n(A^{n-1} x_0))$ libre.

Il est donc nécessaire que les vecteurs $x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1} x_0$ soient indépendants, donc que $n \leq m$ où m est le degré du polynôme minimal de A pour x_0 . La matrice est par ailleurs semblable à une matrice du type :

$$n \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Théorème 2.3

a) Soit $F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n x_0$ avec $c_n \neq 0$ pour tout n .

Le polynôme P_n^0 , $n \leq d$, existe et est unique, si et seulement si les vecteurs $\delta_n(x_0), \dots, \delta_n(A^{n-1} x_0)$ sont indépendants, où δ_n est la projection orthogonale sur $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Il est donc nécessaire que $n \leq m$ où m est le degré du polynôme minimal de A pour x_0 .

b) Si les vecteurs $\delta_m(x_0), \dots, \delta_m(A^{m-1} x_0)$ sont indépendants, on a $P_m^0 = \sum_{i=0}^m \frac{c_m}{c_i} \beta_i x^i$, où

les β_i sont les coefficients du polynôme minimal de A pour x_0 .

Donnez des exemples :

$$i) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_A(X) = \pi_{X_0}(X) = X^2 - 3X + 2$$

$$F(z) = \left(\frac{1}{1-z}, \frac{1}{1-2z} \right) = \frac{(1-2z, 1-z)}{(1-z)(1-2z)}$$

$$\text{Pour tout } \delta \geq 0 \quad P_2^\delta(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) = \widetilde{(1-X)(1-2X)}$$

$$ii) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad G(z) = X_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} A^n X_0$$

$$= (1 - \log(1-z), 1 - \log(1-2z))$$

$$P_2^\delta(X) = X^2 - 3X \frac{(\delta+1)}{(\delta+2)} + 2 \frac{\delta}{(\delta+2)}$$

$$iii) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n A^n X_0$$

$$= (ze^z, e^z)$$

$$P_2^\delta = X^2 - \frac{2}{\delta+2} X + \frac{1}{(\delta+1)(\delta+2)}$$

3. Résolvante de la matrice A.

3.1. Polynômes orthogonaux vectoriels de $(I - zA)^{-1} X_0$.

On considère ici $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$ (résolvante de A appliquée à X_0). Au niveau des applications on pourra considérer $F(z)$ comme la solution du système linéaire $(I - zA)X = X_0$.

La fonction $F(z)$ est une fonction rationnelle dont les pôles sont les inverses des valeurs propres de A :

$$(I - zA)^{-1} X_0 = \frac{1}{\det(I - zA)} \text{Cof}(I - zA) \cdot X_0$$

où $\text{Cof } M$ est la matrice des mineurs algébriques de M .

On peut donc appliquer les résultats de convergence donnés dans [11] et en particulier celui de la convergence des colonnes du Q.D, ici vers les valeurs propres de A .

De plus si $n > d$ le système (5), en supposant A inversible, se réduit à $(a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n) X_0 = 0$.

Ce système possède une infinité de solutions, i.e les a_i sont les coefficients d'un polynôme de la forme $P(\lambda) \Pi_{X_0}(\lambda)$ avec $\partial^\circ P = n - \partial^\circ \Pi_{X_0}$. On va donc restreindre notre étude aux d premières colonnes : cependant d peut être grand et nous venons en peu plus loin que le calcul du Q.D est possible en utilisant l'algorithme RPA [4].

Si $n = d$ on peut utiliser les résultats de la seconde partie : si A est cyclique et inversible, et si le sous-espace de Krylov $\langle X_0, AX_0, \dots, A^{d-1} X_0 \rangle$ est égal à $\mathbb{C}^d$, on a $P_d^\Delta = P_A$ ($\Delta \geq 0$) où P_A est le polynôme caractéristique de A .

Remarques :

Calculons l'approximant de Padé vectoriel $[d|d]_F$ de F ,
 $[d|d]_F(z) = T_0 + \frac{\tilde{w}(z)}{\tilde{v}(z)}$ où $v(t) = P_A(t)$ et

$$w(t) = \Gamma^{(1)} \left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right), \text{ soit } w(t) = \sum_{j=1}^d \alpha_j \sum_{k=0}^{j-1} \Gamma_{k+1} t^{j-1-k},$$

ce qui donne

$$[d|d]_F(z) = \frac{\sum_{j=0}^d \alpha_j z^{d-j} \left(\sum_{k=0}^j \Gamma_k z^k \right)}{\alpha_d + \alpha_{d-1} z + \dots + \alpha_0 z^d}.$$

Par ailleurs $\sum_{j=0}^d \alpha_j t^{d-j} \left(\sum_{k=j+1}^{+\infty} \Gamma_k t^k \right) = \sum_{j=0}^d \alpha_j t^d \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma_{k+j} t^k \right),$

or on a $\Gamma_{k+j} = A^{j+k} x_0 = A^j (A^k x_0) = A^j \Gamma_k$, d'où

$$\sum_0^d \alpha_j t^{d-j} \left(\sum_{j+1}^{+\infty} \Gamma_k t^k \right) = t^d \sum_0^d \alpha_j A^j \left(\sum_1^{+\infty} \Gamma_k t^k \right) = 0$$

En conclusion : $[d|d]_F(z) = \sum_0^{+\infty} \Gamma_k z^k = (I - zA)^{-1} x_0.$

Finalement, soit A une matrice cyclique et régulière, x_0 un vecteur tel que la famille $(x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0)$ soit libre : si $P_A(x) = \sum_{i=0}^d \alpha_i x^i$, alors

$$(I - zA)^{-1} x_0 = [d|d]_F(z) = \frac{\sum_{j=0}^d \alpha_j z^{d-j} \left(\sum_{k=0}^j A^k z^k \right)}{\alpha_d + \alpha_{d-1} z + \dots + \alpha_0 z^d} \cdot x_0$$

Démontrons le lemme suivant :

Lemme : soit f un endomorphisme inversible et cyclique de $\mathbb{F}^n$ ($\pi f = P f$). Soit $x \in \mathbb{F}^n$ tel que $\pi x = P f$. Alors on a : $\pi f(x) = \pi x$.

preuve :

$$\pi_x(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \quad (a_0 \neq 0 \text{ car } f \text{ est inversible}).$$

$$\pi_{f(x)}(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{q-1} X^{q-1} + X^q \quad q \leq n.$$

$$\text{On a } \pi_{f(x)}(f) \cdot f(x) = 0, \text{ soit } (b_0 \text{id} + b_1 f + \dots + f^q) \cdot f(x) = 0 \\ (b_0 f + b_1 f^2 + \dots + f^{q+1}) \cdot x = 0$$

Ainsi $X \pi_{f(x)}(X)$ est divisible par π_x donc $q = n$ ou $n-1$.

Or $a_0 \neq 0$ donc nécessairement $q = n$ et $\pi_{f(x)} = \pi_x \quad \square$

D'après le lemme $\pi_{A^j x_0} = \pi_{x_0}$ pour $j = 0 \text{ à } d-1$,

et donc l'égalité précédente reste vraie si on remplace x_0 par $A^j x_0$. Les $A^j x_0$ forment une base de $\mathbb{C}^d$, on peut ainsi remplacer x_0 par un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^d$. Soit A une matrice cyclique inversible,

$p_A(X) = \sum_{i=0}^d \alpha_i X^i$ son polynôme minimal, on a

$$(I - zA)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^d \alpha_j z^{d-j} \left(\sum_{k=0}^j A^k z^k \right)}{\alpha_d + \alpha_{d-1} z + \dots + \alpha_0 z^d}$$

On retrouve une identité de la théorie des matrices [7].

De plus cette égalité est vraie sans hypothèse de régularité et de caractère cyclique.

On peut aussi remarquer que si $I - A$ est inversible, on obtient :

$$(I-A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^j \alpha_j A^k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_d} = \frac{\sum_{j=0}^d \left(\sum_{k=j}^d \alpha_k \right) A^j}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_d}$$

$$\begin{aligned} \text{On } \sum_{j=0}^d \left(\sum_{k=j}^d \alpha_k \right) A^j &= \sum_{j=0}^d \left(\sum_{k=j+1}^d \alpha_k \right) A^j + \sum_{j=0}^d \alpha_j A^j \\ &= \sum_{j=0}^d \left(\sum_{k=j+1}^d \alpha_k \right) A^j \end{aligned}$$

d'où
$$(I-A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^d \left(\sum_{k=j+1}^d \alpha_k \right) A^j}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_d} \quad \cdot \quad \text{On retrouve}$$

ainsi en résultat de [3] p 77.

Pour $n < d$, on peut appliquer les résultats de la première partie : en particulier si $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$ on a l'existence et l'unicité de P_n^0 .

Définissons A_n , opérateur de E_n dans E_n par :

$$A_n x_0 = A x_0; \quad A_n(Ax_0) = A^2 x_0; \dots; A_n(A^{n-2}x_0) = A^{n-1}x_0$$

et $A_n(A^{n-1}x_0) = S_n(A^n x_0)$.

Considérons le polynôme caractéristique de A_n :

$$P_0 I + \dots + P_{n-1} A_n^{n-1} + A_n^n = 0, \quad \text{d'où}$$

$$P_0 x_0 + \dots + P_{n-1} A^n x_0 + S_n(A^n x_0) = 0, \quad \text{ce qui équivaut}$$

$$\tilde{a} \quad S_n(P_0 x_0 + \dots + P_{n-1} A^{n-1} x_0 + A^n x_0) = 0.$$

P_n^0 est donc le polynôme caractéristique de A_n et

la matrice de A_n dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est la matrice extraite de A en prenant les n premières lignes et les n premières colonnes.

Théorème 3.1

Soit A une matrice $d \times d$, $x_0 \in \mathbb{F}^d$. Supposons que $E_n = \langle x_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle$. Alors l'approximant de Padé $[n-1/n]$ de $F(z) = (I - zA)^{-1}x_0$ existe et est unique : son dénominateur est $\tilde{P}_n^0$ où P_n^0 est le polynôme caractéristique de la matrice extraite de A en prenant les n premières lignes et les n premières colonnes.

Corollaire 3.2

Si de plus A est inversible et si $n=m$ où m est le degré du polynôme minimal de A pour x_0 , on a :

$$[m-1/m](z) = (I - zA)^{-1}x_0.$$

La preuve est identique à celle du cas $m=d$, après avoir remarqué que le polynôme minimal de A pour $(x_0 - (I - zA)^{-1}x_0)$ est aussi le polynôme minimal de A pour x_0 (on a besoin de l'hypothèse A inversible).

Ce résultat est à rapprocher de celui de [2] p 147.

Donnons un exemple de matrice A pour laquelle l'hypothèse $E_n = \langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle$ est vérifiée pour $n=1 \text{ à } d$:

soit $A = [a_{ij}]$ avec $\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i \geq j+2 \\ \text{et} \\ a_{j+1,j} \neq 0 \end{cases}$
 $1 \leq i, j \leq m$

Cette matrice est cyclique et pour tout $n=1 \text{ à } d$ on a $\langle e_1, Ae_1, \dots, A^{n-1}e_1 \rangle = E_n$, car $A^j e_1 \in E_{j+1} \setminus E_j$ ($j=1 \text{ à } d-1$).

exemples

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $x_0 = e_1$ $P_0^0 \equiv 1$ $P_1^0(x) = x-1$
 $P_2^0(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 3x - 1$
 et $P_3^0(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 6$

ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & -\alpha_{d-1} \end{bmatrix}$ (matrice compagnon du polynôme $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{d-1} x^{d-1} + x^d$ $\alpha_0 \neq 0$)

$P_n^0 = x^n$ pour $n=1 \text{ à } d-1$ et $P_d^0 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{d-1} x^{d-1} + x^d$

iii)

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{d-1} & c_{d-1} \\ & & & c_{d-1} & b_d \end{bmatrix} \quad c_i \neq 0 \quad i=1 \text{ à } d-1$$

(A est symétrique et tridiagonale)

$$P_0^0(x) \equiv 1 \quad P_1^0(x) = x - b_1 \quad \text{et} \quad P_n^0(x) = (x - b_n) P_{n-1}^0(x) - c_{n-1}^2 P_{n-2}^0(x) \\ \text{pour } 2 \leq n \leq d.$$

Remarque : le résultat du corollaire 3.2 reste vrai si on ne suppose que $(\sum_m(X_0), \dots, \sum_m(A^{m-1}X_0))$ libre.

Dans les deux cas P_m^0 est le polynôme minimal de A pour X_0 .

3.2 Initialisation de l'algorithme Q.D vectoriel.

Lorsqu'on veut utiliser l'algorithme Q.D vectoriel, on doit l'initialiser en calculant les déterminants

H_x^0 ($x=0$ à $d-1$) qui ont une dimension au plus égal à $d \times d$. Si d est petit, cela ne pose pas de problème. Si d est grand il faut trouver une autre méthode d'initialisation. En particulier si on considère

la fonction $F(z) = (I - zA)^{-1}X_0$, l'initialisation est en fait le calcul du Q.D jusqu'à ce qu'on est limité aux d premières colonnes. On fait ici l'initialisation dans le cas

$F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$ et on procéderait de la même façon dans le cas d'une autre fonction.
 Pour $\alpha = 0, \dots, d-1$ et δ fixé on considère le rapport $H_{\alpha+1}^\delta / H_\alpha^\delta$

$$\begin{aligned}
 \frac{H_{\alpha+1}^\delta}{H_\alpha^\delta} &= \frac{\begin{vmatrix} (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha} X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_{\alpha+1} | A^\delta X_0) & \dots & (e_{\alpha+1} | A^{\delta+\alpha} X_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_\alpha | A^\delta X_0) & \dots & (e_\alpha | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} (e_{\alpha+1} | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_{\alpha+1} | A^\delta X_0) & \dots & (e_{\alpha+1} | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \\ (e_1 | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_\alpha | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_\alpha | A^\delta X_0) & \dots & (e_\alpha | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \end{vmatrix}}{H_\alpha^\delta}
 \end{aligned}$$

Soit $0 \leq R \leq \alpha$ Posons :

$$E_R^{(\delta, \alpha)} = \frac{\begin{vmatrix} A^{\delta+\alpha} X_0 & A^\delta X_0 & \dots & A^{\delta+\alpha-R} X_0 \\ (e_1 | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_R | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_R | A^\delta X_0) & \dots & (e_R | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_R | A^\delta X_0) & \dots & (e_R | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \end{vmatrix}}$$

On reprend la formulation habituelle du RPA [4], avec

$$z = A^{\delta+1} \cdot X_0, \quad z_i = e_i, \quad x_i = A^{\delta+i-1} \cdot X_0.$$

$$\text{On a } \frac{H_{\alpha+1}^{\delta}}{H_{\alpha}^{\delta}} = (e_{\alpha+1} | E_{\alpha}^{(\delta, \alpha)}).$$

Les $E_k^{(\delta, \alpha)}$ se calculent récursivement par :

$$\begin{aligned} E_0^{(\delta, \alpha)} &= A^{\delta+1} \cdot X_0 & g_{0,i}^{(\delta, \alpha)} &= A^{\delta+i-1} \cdot X_0 \\ E_h^{(\delta, \alpha)} &= E_{h-1}^{(\delta, \alpha)} - \frac{(e_h | E_{h-1}^{(\delta, \alpha)})}{(e_h | g_{h-1,h}^{(\delta, \alpha)})} g_{h-1,h}^{(\delta, \alpha)} & \alpha \geq h \geq 0 \\ g_{h,i}^{(\delta, \alpha)} &= g_{h-1,i}^{(\delta, \alpha)} - \frac{(e_h | g_{h-1,i}^{(\delta, \alpha)})}{(e_h | g_{h-1,h}^{(\delta, \alpha)})} g_{h-1,h}^{(\delta, \alpha)} & i > h > 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$q_{\alpha+1}^{\delta} = \frac{(e_{\alpha+1} | E_{\alpha}^{(\delta+1, \alpha)})}{(e_{\alpha+1} | E_{\alpha}^{(\delta, \alpha)})}$$

(Remarquons que les calculs sont effectués pour chaque α indépendamment)

On donnera des exemples de calculs un peu plus loin.

3.3 Valeurs propres.

Étudions à présent la convergence du Q.D vectoriel vers les valeurs propres de la matrice A . On se place dans le cas où A est diagonalisable.

$$A = P \Delta P^{-1} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_i \text{ valeurs propres de } A \\ (\lambda_i \neq 0) \end{array}$$

$$\text{et } P = [a_{ij}]$$

Soit $x_0 \in \mathbb{C}^d$, on a $P^{-1}x_0 = y_0 = (y_1, \dots, y_d)^T$:

l'expression de $F(z)$ est alors

$$\begin{aligned} F(z) &= (I - zA)^{-1}x_0 = \left(\sum_{j=1}^d a_{1j} \frac{y_j}{1 - \lambda_j z}, \dots, \sum_{j=1}^d a_{dj} \frac{y_j}{1 - \lambda_j z} \right) \\ &= (f_1(z), \dots, f_d(z)) \end{aligned}$$

Les pôles éventuels de f_α sont les $\frac{1}{\lambda_j}$ (i.e si $a_{\alpha j} y_j \neq 0$).

Donnons tout d'abord un théorème de Van Isegem [11]

Théorème : Soit $E_\alpha = \{z_i^\alpha\}_{i \geq 0}$ l'ensemble des pôles de f_α ($\alpha = 1, \dots, d$).

On suppose que pour chaque $\alpha = 1, \dots, d$, $|z_1^\alpha| < \dots < |z_i^\alpha| < \dots$.
Chaque fonction f_α a des pôles simples. $\bigcup_\alpha E_\alpha$ contient au moins m pôles dans D_ρ . $f_1, \dots, f_d$ sont r. p. linéairement indépendantes pour $n = 1 \bar{a} m$ sur D_ρ .

Alors, pour $n = 1 \bar{a} m$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^\delta = u_n \quad \text{avec } u_n^{-1} \in \bigcup_\alpha E_\alpha.$$

Rappelons aussi la définition de fonctions polairement indépendantes, due à Graves Morris and Saff [8].

Définition: Soient $f_1, \dots, f_d$ des fonctions méromorphes dans le disque D , et soit des entiers positifs p_i donnés, tels que $\sum_{i=1}^d p_i \geq 0$.

Les fonctions sont dites polairement indépendantes par rapport aux nombres p_i s'il n'existe pas de polynômes $\pi_1, \dots, \pi_d$, au moins un d'entre eux est non nul, avec $\partial^\alpha \pi_i \leq p_i - 1$ si $p_i \geq 1$ et $\pi_i \equiv 0$ si $p_i = 0$, tels que $\varphi(z) = \sum_i \pi_i(z) f_i(z)$ soit analytique dans D .

Si on prend pour p_i les entiers suivants:

si $n = nd + k$ $0 \leq k < d$, $p_\alpha = (n + \epsilon_\alpha)$ où $\epsilon_k = 1$ si $1 \leq k \leq h$, $\epsilon_k = 0$ si $h+1 \leq k \leq d$, on obtient la définition de fonctions n -polairement indépendantes.

A présent, soit $K_\alpha \in \mathbb{C}^d$ ($\alpha = 1, \dots, d$) et

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha=1}^d K_\alpha f_\alpha(z) = \sum_{j=1}^d \frac{\sum_{\alpha=1}^d K_\alpha a_{\alpha,j} y_j}{1 - \lambda_j z}.$$

On suppose que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Alors φ est analytique dans un disque contenant les inverses des valeurs propres de A si et seulement si

$$\sum_{\alpha=1}^d K_\alpha a_{\alpha,i} y_i = 0 \quad \text{pour } i=1 \text{ à } d.$$

Si $y_i \neq 0$ pour tout i , comme la matrice P est inversible, on a $K_\lambda = 0$ pour $\lambda = 1 \text{ à } d$, ce qui entraîne que $f_1, \dots, f_d$ sont n -polairement indépendantes pour $n = 1 \text{ à } d$. Pour pouvoir appliquer le théorème précédent on doit supposer de plus que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d|$.

Théorème 3.3 :

A une matrice de valeurs propres λ_i ($i = 1 \text{ à } d$).
On applique l'algorithme Q.D. vectoriel à $F(z) = (z - \lambda A)^{-1} x_0$, $x_0 \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$, et on suppose que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d| > 0$.
Soit P la matrice inversible telle que :

$$A = P \Delta P^{-1} \quad \text{où} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix}$$

Si toutes les coordonnées de $P^{-1}x_0$ sont différentes de zéro, pour $n = 1 \text{ à } d$

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \infty} q_n^s = u_n \\ u_n \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\} \end{cases}$$

Remarques :

a) La notion de fonctions n -polairement indépendantes dépend de l'ordre dans lequel on considère les fonctions. L'hypothèse très forte, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$, nous permet d'éviter ce problème. Cependant, avec l'hypothèse précédente

on peut avoir des pôles de même module. On devra alors faire des hypothèses supplémentaires sur la matrice P . (Par exemple, si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, on doit supposer que $a_{11} = 0$ ou $a_{22} = 0$).

b) En utilisant la preuve du théorème de Van Iseghem, on peut voir que $\left(\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_1^\delta\right)^{-1}$ est le pôle de plus petit module de f_1 . Par exemple, si $a_{11} \neq 0$, on a $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_1^\delta = \lambda_1$.

Pour $n > 1$ on n'a pas de résultat général : le problème vient du fait que si un pôle est simple pour une fonction mais commun à plusieurs de ces fonctions, il apparaîtra seulement une fois dans la suite $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n^\delta)^{-1}\right)_n$.

Cependant, si $A = \Delta$ et $x_0 = (1, \dots, 1)^T$, on peut écrire, $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_1^\delta = \lambda_1$.

On calcule à présent l'algorithme QD vectoriel en utilisant l'algorithme RPA. (simple précision en turbo-Pascal).

examples :

$$i) A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 30 \\ -6 & -27 & -66 \\ 4 & 16 & 37 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (valeurs propres } 9; 3; 1)$$

$$\begin{cases} q_1^{10} = 9,0003 \\ q_1^{15} = 9,000001 \end{cases} \quad q_2^{10} = 3,00002 \quad \begin{cases} q_3^8 = 1,00044 \\ q_3^9 = 0,905 \end{cases}$$

$$\text{(avec } X_0 = (1, 1, 1)^T \text{) } \begin{cases} q_1^{10} = 9,00018 \\ q_1^{15} = 9,0000007 \\ q_3^{10} = 0,988 \end{cases}$$

$$ii) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \quad X_0 = (1, 0, 0, 0)^T \text{ (valeurs propres: } 4; 3; 2; 1)$$

$$\begin{cases} q_1^{20} = 4,0128 \\ q_1^{15} = 4,003 \end{cases} \quad q_2^{25} = 2,99809 \quad q_3^{20} = 2,0036 \quad q_4^{10} = 0,9989.$$

4. La fonction $e^{3A} \cdot X_0$

On peut appliquer les résultats de la deuxième partie :

Théorème 4.1

Soit $F(z) = e^{3A} \cdot X_0$ ($z \in \mathbb{C}$) et

$P_A(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1} + X^d$ le polynôme caractéristique de A .

a) Le polynôme P_d^δ , $\delta \geq 0$, existe et est unique si et seulement si A est cyclique inversible, et si le système $(X_0, AX_0, \dots, A^{d-1}X_0)$ est libre. En ce cas alors

$$P_d^\delta(X) = \sum_{i=0}^d \frac{\alpha_i}{(\delta+d)(\delta+d-1)\dots(\delta+i-1)} X^i \quad (\alpha_d=1)$$

b) Avec les mêmes hypothèses, la suite $(P_d^\delta(z))_{\delta \geq 0}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers X^d .

On se pose le problème suivant :

$P_n^\delta(x)$ existe-t-il et est-il unique pour $n > d$?

La réponse est négative si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur la matrice A .

Remarque : considérons l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Posez $y_1 = y, \dots, y_n = y^{(n-1)}$, on obtient alors

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ -a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_0 y \end{bmatrix} \quad \text{soit encore,}$$

$$Y' = AY \quad \text{avec} \quad Y = (y_1, \dots, y_n)^T \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

A est cyclique et la solution du système est $Y(t) = e^{tA} Y(0)$.
Les approximations de Padé vectoriels de $z \mapsto e^{zA} Y(0)$, nous donnent donc des approximations de la solution exacte.

Revenons au problème posé : considérons l'exemple suivant en dimension 2 ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad F(z) = e^{zA} \cdot X_0 = \begin{bmatrix} x_0 e^z + z x_1 e^z \\ x_1 e^z \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } H_4^0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_0 + x_1 & \frac{x_0 + x_1}{2} & \frac{x_0 + x_1}{6} + \frac{x_1}{2} \\ x_1 & x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} \\ x_0 + x_1 & \frac{x_0 + x_1}{2} + x_1 & \frac{x_0 + x_1}{6} + \frac{x_1}{2} & \frac{x_0}{24} + \frac{x_1}{6} \\ x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} & \frac{x_1}{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_0 + x_1 & \frac{x_0 + x_1}{2} & \frac{x_0}{6} + \frac{x_1}{6} \\ x_1 & x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} \\ x_0 & \frac{x_0}{2} & \frac{x_0}{6} & \frac{x_0}{24} \\ x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} & \frac{x_1}{24} \end{vmatrix}$$

les deux dernières lignes étant proportionnelles $H_4^0 = 0$.

On considère $n = 2d$: les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{2d}$ ($a_{2d} = 1$) de P_{2d}^Δ doivent vérifier le système suivant ;

$$(*) \quad \begin{cases} \left(\frac{a_0}{d!} I + \frac{a_1}{(d+1)!} A + \dots + \frac{a_{2d}}{(d+2d)!} A^{2d} \right) \cdot X_0 = 0 \\ \left(\frac{a_0}{(d+1)!} I + \frac{a_1}{(d+2)!} A + \dots + \frac{a_{2d}}{(d+2d+1)!} A^{2d+1} \right) \cdot X_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(on suppose } A \\ \text{inversible)} \end{matrix}$$

Faisons l'hypothèse que A est cyclique avec $\pi_{X_0} = P_A = P$ où $P(X) = \sum_0^d \alpha_j X^j$ ($\alpha_d = 1$ et $P(0) \neq 0$). Posons, $\beta_j = \frac{a_j}{(d+j)!}$,

$$Q_1(X) = \sum_0^{2d} \beta_j X^j, \quad Q_2(X) = \sum_0^{2d} \beta_j X^{j+d+1}.$$

d'après (*) les polynômes Q_1 et Q_2 sont divisibles par P .

$$\text{On a par ailleurs } X^{d+1} Q_2(X) = \sum_0^{2d} \frac{\beta_j}{(j+d+1)} X^{j+d+1},$$

$$\text{d'où } (X^{d+1} Q_2(X))' = \sum_0^{2d} \beta_j X^{j+d} = X^d Q_1(X),$$

$(X^{d+1} Q_2(X))'$ est divisible par $P(X)$. De plus $Q_2(X) = P(X) R(X)$

avec $\partial^0 R = d$, en dérivant on obtient :

$$(X^{d+1} Q_2(X))' = X^d \left\{ P(X) [X R'(X) + (d+1) R(X)] + X P'(X) R(X) \right\}.$$

Ainsi $X P'(X) R(X)$ est divisible par $P(X)$ et comme $P(0) \neq 0$

$P'(X)R(X)$ est divisible par $P(X)$. En particulier si $P'(X)$ et $P(X)$ sont premiers entre eux $R(X) = K P(X)$:

$$Q_2(X) = K P^2(X) = \frac{P_{2d}}{(2d+1)} \sum_{j=0}^{2d} \underbrace{\left(\sum_{p+q=j} \alpha_p \alpha_q \right)}_{\alpha'_j} X^j$$

d'où $\frac{P_j}{(j+1)} = \frac{P_{2d}}{(2d+1)} \left(\sum_{p+q=j} \alpha_p \alpha_q \right)$, - ce qui donne

$$a_j = \frac{(j+1)!}{(2d+1)!} \alpha'_j. \quad \text{Le polynôme } P_{2d}^\Delta \text{ existe donc}$$

et est unique dans ce cas.

Vérification: $Q_1(X) = \sum_{j=0}^{2d} \frac{a_j}{(j+1)!} X^{j+1} = \frac{1}{(2d+1)!} \sum_{j=0}^{2d} (j+1) \alpha'_j X^{j+1}$

$$= \frac{1}{(2d+1)!} \left\{ (2d+1) \sum_{j=0}^{2d} \alpha'_j X^j + \sum_{j=0}^{2d} j \alpha'_j X^j \right\}$$

$$= \frac{1}{(2d+1)!} \underbrace{\left\{ (2d+1) P^2(X) + X (P^2(X))' \right\}}_{\text{divisible par } P(X)}.$$

Remarque : dans l'hypothèse sur P , le choix $R(X) = P(X)$ nous donne une solution de (*). Un autre choix pour R nous donne une autre solution de (*)

prouve que $xP'(x)R(x)$ soit divisible par P .

En résumé :

Théorème 4.2

Soit A une matrice cyclique inversible et $x_0 \in \mathbb{C}^d$ tel que $(x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0)$ soit libre.

Le polynôme P_{2d}^Δ , $\Delta \geq 0$, existe et est unique, si et seulement si $P(x)$, polynôme caractéristique de A , n'a que des racines simples. Dans ce cas si α_j ($j=0 \text{ à } 2d$) désigne le coefficient de x^j dans $P^2(x)$ ($\alpha_{2d}=1$) on a :

$$P_{2d}^\Delta = \sum_{j=0}^{2d} \frac{(j+1)!}{(2d-j+1)!} \alpha_j x^j.$$

References

- [1] C. Brezinski, Généralisation de la transformation de Shanks, de la table de Padé, et de l'E-algorithme, *Calcolo*, 12 (1975), pp 317-360.
- [2] C. Brezinski, Accélération de la convergence en analyse numérique, LNM 584, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [3] C. Brezinski, Padé type Approximants and General Orthogonal Polynomials, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.
- [4] C. Brezinski, Recursive interpolation, extrapolation and projection, *J. Comp. App. Math.*, 9 (1983) 369-379.
- [5] F.R Gantmacher, Théorie des matrices, Dunod, Paris, 1966.
- [6] E. Geheler, On the solution of systems of equations by epsilon algorithm of Wynn, *Math. Comp.* 26 (1972) pp 427-436.
- [7] G.H Golub and C.F Van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, 2nd edition.
- [8] P. Graves Morris and E.B Saff, A Montessus Theorem for vector Valued Rational Interpolants, in Rational Approximation and Interpolation 227-242, LNM 1105, Springer-Verlag.
- [9] P. Henrici, Applied and computational Complex Analysis, Wiley, New York 1974.
- [10] D.A Smith, W.F Fad, and A-Sidi, Extrapolation methods for vector sequences, *SIAM Rev.*, 29: 199-233, 1987.
- [11] J. Van Iseghem, Convergence of the Vector Q.D-algorithm, *J. Comp. App. Math.*, 25 (1989) 33-46
- [12] J. Van Iseghem, Vector Orthogonal Relations, Vector Q.D-algorithm, *J. Comp. App. Math.*, 19 (1987) 141-150

[13] J. Van Iseghem, Approximants de Pade vectoriels, Thesis 1987, Université des Sciences et Techniques de Lille - Flandres - Artois.

[14] P. Wynn, Acceleration techniques for iterated vector and matrix problems, Math. Comp., 16 (1962) pp 301-322

Chapitre II

Polynômes orthogonaux vectoriels et méthode de Lanczos.

Dans ce chapitre nous allons utiliser les résultats précédemment obtenus sur les approximations de Padé vectoriels d'une fonction du type $z \mapsto (I - zA)^{-1} X_0$ où A est une matrice carrée $d \times d$. Cette fonction étant rationnelle, il y a égalité entre la fonction et certains approximations d'une part. D'autre part $(I - zA)^{-1} X_0$ peut être considéré comme la solution du système $X = (zA)X + X_0$. C'est cette situation que nous allons exploiter.

Récemment, Brzezinski a montré dans [4] que la méthode de Lanczos pour résoudre des systèmes linéaires est issue d'une généralisation de la méthode des moments de Vorobyev [7]. Si la méthode classique de Lanczos met en jeu une famille de polynômes orthogonaux formels [2], la généralisation obtenue

par Brezinski fait apparaître une famille de polynômes biorthogonale [3].

Nous allons justement montrer qu'apparaît de façon naturelle comme famille possible, les polynômes orthogonaux vectoriels de Van Isegem [6]. Plus généralement nous ferons le lien avec les résultats de Brezinski [4].

Dans ce chapitre, on conservera les notations du chapitre I.

1. Approximants de Padé de $z \mapsto (I - zA)^{-1}x_0$.

On considère un endomorphisme A dans $\mathbb{C}^d$.

On identifiera au besoin A à sa matrice, notée encore A , dans la base canonique de $\mathbb{C}^d$.

(Dans le chapitre I, A était une matrice carrée $d \times d$, nous reviendrons un peu plus loin sur ce fait.)

1.1 Soit $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$. Supposons que l'on ait $\langle X_0, AX_0, \dots, A^{d-1}X_0 \rangle = \mathbb{C}^d$. La matrice A est donc cyclique et :

$$P_d^0 = \pi_A = P_A = \pi_{A, X_0}.$$

D'après le chapitre I, sans faire l'hypothèse A inversible puisque $d=0$:

$$(I - zA)^{-1} X_0 = [d-1 | d]_F(z)$$

Remarques :

a) si $I - A$ est inversible on a :

$$(I - A)^{-1} X_0 = [d-1 | d](1) = Q_{d-1}(A) X_0$$

où Q_{d-1} est le polynôme de degré $d-1$ défini par :

$$1 - \frac{P_d^0(t)}{P_d^0(1)} = (1-t) Q_{d-1}(t).$$

b) $(I - A)^{-1} X_0$ est la solution du système :

$$X = AX + X_0$$

1.2 Plus généralement, supposons que l'on ait

$$\langle X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0 \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = E_n.$$

Toujours d'après le chapitre I, l'approximant de Padé vectoriel $[n-1 | n]_F(z)$ de $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$

existe et est unique : son polynôme générateur, P_n^0 , est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $A_n = \partial_n A$ restreint à E_n (∂_n est la projection orthogonale sur E_n).

De plus on a :

$$[n-1|n]_F(z) = (I_n - z A_n)^{-1} X_0 \quad (I_n \text{ identité de } E_n)$$

$$\text{car } A_n^k = A^k \text{ pour } k=0, \dots, n-1.$$

Voyons à présent à quelle condition on a $P_n^0(1) \neq 0$.

Lemme 1

Soit B un endomorphisme de $\mathbb{C}^d$ et $X_0 \in \mathbb{C}^d$.

Supposons que $\langle X_0, BX_0, \dots, B^{n-1}X_0 \rangle = E_n$.

Alors $\partial_n B = B_n$ est inversible si et seulement si

$$\begin{vmatrix} (X_0 | BX_0) & \dots & (X_0 | B^n X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (B^{n-1}X_0 | BX_0) & \dots & (B^{n-1}X_0 | B^n X_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

preuve : soit $X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i B^i X_0 \in E_n$, alors

$$BX = \sum_{i=0}^{n-1} x_i B^{i+1} X_0.$$

Ainsi $\partial_n(BX) = 0$ si et seulement si pour tout $k=0, \dots, n-1$

$$(B^k X_0 | BX) = 0, \text{ soit } \sum_{i=0}^{n-1} x_i (B^k X_0 | B^{i+1} X_0) = 0.$$

B_n est donc inversible si et seulement si le système

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i (B^h x_0 | B^{i+h} x_0) = 0 \quad h=0, \dots, n-1 \text{ et de Gramer,}$$

1.2 Si on a la condition du lemme $\square$

lemme 2

Soit B un endomorphisme de $\mathbb{F}^d$ et $x_0 \in \mathbb{F}^d$.

Supposons que la famille $(x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0)$ soit libre.

Alors $\langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle = \langle x_0, (I-B)x_0, \dots, (I-B)^{n-1}x_0 \rangle$.

preuve : soit $h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, en utilisant la formule du binôme on voit que $(I-B)^h x_0 \in \langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle$.

donc que $\langle x_0, (I-B)x_0, \dots, (I-B)^{n-1}x_0 \rangle \subset \langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle$

Par ailleurs considérons une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 (I-B)x_0 + \dots + \alpha_{n-1} (I-B)^{n-1} x_0 = 0$$

$$\text{soit } \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^i C_i^j (-1)^j B^j x_0 \right) = 0$$

$$\text{ou encore } \sum_{m=0}^{n-1} \left[\sum_{i=m}^{n-1} (-1)^m \alpha_i C_i^m \right] B^m x_0 = 0$$

On obtient le système triangulaire suivant :

$$\alpha_0 C_0^0 + \alpha_1 C_1^0 + \dots + \alpha_{n-1} C_{n-1}^0 = 0$$

$$\alpha_1 C_1^1 + \dots + \alpha_{n-1} C_{n-1}^1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-1} C_{n-1}^{n-1} = 0$$

d'où $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, et l'égalité désirée $\square$

En utilisant les lemmes 1 et 2, on peut énoncer :

Théorème 1

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{F}^d$ et $x_0 \in \mathbb{F}^d$.

Supposons que $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$.

Soit alors P_n^0 le polynôme générateur de $[n-1|n]_F$, qui est aussi le polynôme caractéristique de $A_n = \partial_n A$.

$$\text{Si } \begin{vmatrix} (x_0 | (I-A)x_0) & \dots & (x_0 | (I-A)^{n-1}x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ ((I-A)^{n-1}x_0 | (I-A)x_0) & \dots & ((I-A)^{n-1}x_0 | (I-A)^{n-1}x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

alors $P_n^0(1) \neq 0$ (i.e. $I_n - A_n$ est inversible)

et si Q_{n-1} désigne le polynôme défini par

$$1 - \frac{P_n^0(t)}{P_n^0(1)} = (1-t) Q_{n-1}(t) \quad \text{alors}$$

$$(I_n - A_n)^{-1} x_0 = [n-1|n]_F(1) = Q_{n-1}(A_n) \cdot x_0 = Q_{n-1}(A) \cdot x_0.$$

1.3 On s'intéresse à présent au système :

$$AX = X_0 \quad (A \text{ inversible}).$$

On peut l'écrire $(I-B)X = X_0$ avec $B = I-A$

Commençons tout d'abord par le résultat suivant :

Lemme 3

Soit π_A le polynôme minimal de A et π_B le polynôme minimal de B .

Si $B = I - A$, alors $\pi_B(x) = \pi_A(1-x)$.

(et on a le même résultat pour les polynômes caractéristiques, et les polynômes minimaux pour un vecteur).

preuve : on a $\pi_A(I-B) = \pi_A(A) = 0$, donc π_B divise $\pi_A(1-x)$.

De même π_A divise $\pi_B(1-x)$.

$$\text{On } \begin{cases} \partial^\circ \pi_A(1-x) = \partial^\circ \pi_A, \text{ ainsi } \partial^\circ \pi_B \leq \partial^\circ \pi_A. \\ \partial^\circ \pi_B(1-x) = \partial^\circ \pi_B, \text{ ainsi } \partial^\circ \pi_A \leq \partial^\circ \pi_B \end{cases}$$

En conclusion $\partial^\circ \pi_A = \partial^\circ \pi_B$, d'où $\pi_B(x) = \pi_A(1-x)$ $\square$.

A présent, supposons que $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$ et que $\partial_n A$ soit inversible.

On a alors $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = \langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle = E_n$ et $B_n = I_n - A_n$.

Désignons par :

P_n° le polynôme générateur de $[n-1/n]_F$ où $F(z) = (I - zA)^{-1}x_0$

P le polynôme générateur de $[n-1/n]_G$ où $G(z) = (I - zB)^{-1}x_0$

Appliquons à B le théorème 1 :

$$(I_n - B_n)^{-1} X_0 = Q(B) X_0 \quad \text{où } Q \text{ est le polynôme défini par } 1 - \frac{P(x)}{P(1)} = (1-x) Q(x).$$

P étant le polynôme caractéristique (et d'ailleurs aussi le polynôme minimal) de B_n , on a d'après le lemme 3 la relation $P(x) = P_n^0(1-x)$. On en déduit que $1 - \frac{P_n^0(1-x)}{P_n^0(0)} = (1-x) Q(x)$, soit

$$1 - \frac{P_n^0(x)}{P_n^0(0)} = x Q(1-x) = x V_{n-1}(x).$$

En conclusion on a obtenu le résultat suivant :

$$A_n^{-1} \cdot X_0 = (I_n - B_n)^{-1} X_0 = V_{n-1}(I - B) X_0$$

$$\text{soit } A_n^{-1} \cdot X_0 = V_{n-1}(A) \cdot X_0.$$

En résumé notre étude par le théorème suivant :

Théorème 2

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{C}^d$ et $x_0 \in \mathbb{C}^d$.
Supposons que $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$ et que

$$\begin{vmatrix} (x_0 | Ax_0) & \dots & (x_0 | A^n x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (A^{n-1}x_0 | Ax_0) & \dots & (A^{n-1}x_0 | A^n x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

($E_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ base canonique de $\mathbb{C}^d$).

On considère le système linéaire :

$$\partial_n A X = X_0, \quad X \in E_n.$$

Alors $\partial_n A$ est inversible et la solution du système est : $X = V_{n-1}(A) \cdot X_0$ où V_{n-1} est

le polynôme défini par la relation $1 - \frac{P_n^0(x)}{P_n^0(0)} = x V_{n-1}(x)$

avec P_n^0 polynôme caractéristique de $A_n = \partial_n A$,

et aussi polynôme générateur de l'approximant de Padé vectoriel $[n-1/n]$ de $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$.

Nous allons à présent utiliser ces résultats pour

la résolution de systèmes linéaires dans $\mathbb{I}^d$.

2. La méthode de Lanczos.

On considère dans $\mathbb{I}^d$ le système linéaire :

$$(*) \quad Ax = b \quad (A \text{ matrice inversible})$$

Soit $x_0 \in \mathbb{I}^d$, on pose $r_0 = b - Ax_0$.

On suppose dans ce paragraphe que pour tout $k = 1, \dots, m$ où m est le degré du polynôme minimal de A pour r_0 , on a :

$$\langle r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1} r_0 \rangle = E_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle.$$

Cette hypothèse semble très restrictive : nous ferons à ce sujet des remarques dans le paragraphe 3, et d'autre part dans le chapitre I de la première partie nous avons donné un exemple important d'opérateur A vérifiant cette condition.

En posant $x = x_0 + z$, le système $(*)$ devient

$$Az = r_0. \quad \text{On résout ensuite le}$$

système $\exists_k Az = r_0$ dans E_k . On applique pour cela le théorème 2, la condition

$$\begin{vmatrix} (n_0 | A n_0) & \dots & (n_0 | A^k n_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (A^{k-1} n_0 | A n_0) & \dots & (A^{k-1} n_0 | A^k n_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

devant être réalisée :

la solution dans E_k du système est

$z_k = V_{k-1}(A) n_0$ où V_{k-1} est le polynôme défini

par $1 - \frac{P_k^0(x)}{P_k^0(0)} = x V_{k-1}(x)$ où P_k^0 est le

polynôme générateur de l'approximant de Padé vectoriel $[k-1|k]$ de la fonction $z \mapsto (I - zA)^{-1} n_0$.

On pose ensuite :

$$\begin{cases} x_k = x_0 + z_k \\ n_k = b - Ax_k \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \text{ainsi } n_k &= b - Ax_k = b - A(x_0 + V_{k-1}(A) n_0) \\ &= n_0 - AV_{k-1}(A) n_0 \\ &= \frac{P_k^0(A)}{P_k^0(0)} n_0 \end{aligned}$$

Par définition des polynômes orthogonaux vectoriels on a de plus $P_k^0(A)$ orthogonal à E_k .

De plus, comme $r_m = 0$, on obtient $Ax_m = 1$.

Tout le problème est donc de calculer les polynômes $(P_k^0)_{k \geq 0}$. Ces calculs peuvent être effectués en utilisant les relations de récurrence données dans le paragraphe 1 du Chapitre I de la première partie.

Faisons maintenant quelques remarques au sujet des différentes hypothèses.

3. Remarques et extensions

a) Polynômes biorthogonaux

Considérons les polynômes biorthogonaux les plus généraux [3] : on se donne une famille libre $(L_i)_{i \geq 0}$ de formes linéaires sur $\mathbb{C}[X]$, et on s'intéresse aux polynômes $(P_k)_{k \geq 0}$ vérifiant les relations $L_i(P_k) = 0$ pour $i = 0, \dots, k-1$.

Les polynômes orthogonaux rectaels de dimension n en sont un cas particulier lorsque les formes linéaires L_i vérifient

$$(1) \quad L_i(x^{j+1}) = L_{i+n}(x^j)$$

Dans les paragraphes 1 et 2 nous avons considéré les polynômes rectaels de dimension $n = d$ où d est la dimension de l'espace dans lequel nous travaillons. Nous nous sommes restreints aux polynômes (P_k) avec $k \leq d$: nous n'avons donc pas utilisé la relation (1).

$$f) \quad \underline{\text{L'hypothèse } \langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle}$$

La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ désigne toujours la base canonique de $\mathbb{I}^d$. Le polynôme orthogonal rectael P_k^0 est défini par : ($k \leq d$)

$$(e_i | P_k^0(A)x_0) = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

On cherche à exprimer ces relations en terme de projection sur le sous-espace $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle$.

Si on fait l'hypothèse $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$,

La projection cherchée n'est rien d'autre que la projection orthogonale sur $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{h-1}x_0 \rangle$.

D'autre part on a immédiatement la matrice de l'opérateur A_h dans la base canonique : c'est la matrice obtenue à partir de celle de A en considérant les h premières lignes et les h premières colonnes.

Supposons que $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{h-1}x_0 \rangle = E_h$ avec $\dim E_h = h$ (E_h n'est plus nécessairement égal à $\langle e_1, \dots, e_h \rangle$). Faisons toujours l'hypothèse d'existence et d'unicité du polynôme P_h^0 , i.e

$$\begin{vmatrix} (e_1 | x_0) & \dots & (e_1 | A^{h-1}x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_h | x_0) & \dots & (e_h | A^{h-1}x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Comme la famille $(x_0, Ax_0, \dots, A^{h-1}x_0)$ est libre, cela signifie que la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq h}$ considérée comme famille de formes linéaires sur E_h est libre [5]. On peut donc prendre comme projection la projection oblique sur E_h construite en orthogonalisant les familles $(x_0, Ax_0, \dots, A^{h-1}x_0)$ et $(e_1, \dots, e_h)$ [3].

On obtient alors un opérateur A_n de E_n dont le polynôme caractéristique est P_n^0 .

c) Généralisation de la table de Padé.

On va généraliser ce qui précède en considérant la troisième généralisation de la table de Padé donnée par Brezinski dans [1]. Rappelons cette généralisation: soient $L_1, \dots, L_d$ des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{C}^d$, $f(z) = \sum_{i \geq 0} c_i z^i$

où $z \in \mathbb{C}$, $c_i \in \mathbb{C}^d$ une série formelle vectorielle,

pour $p \geq q-1$ on pose :

$$[p/q] = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i z^{q+i} & \dots & \sum_{i=0}^p c_i z^i \\ L_1(c_{p-q+1}) & \dots & L_1(c_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(c_{p-q+1}) & \dots & L_h(c_{p+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^q & \dots & 1 \\ L_1(c_{p-q+1}) & \dots & L_1(c_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(c_{p-q+1}) & \dots & L_h(c_{p+1}) \end{vmatrix}}.$$

Le cas des approximants de Padé vectoriels de

Van Isoglem correspond à $L_i = e_i$.

On s'intéresse à $f(z) = \sum_{i=0}^h z^i A^i x_0$. Pour $h \leq d$ on considère donc les polynômes :

$$P_h(x) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & x^h \\ L_1(x_0) & \dots & L_1(A^h x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(x_0) & \dots & L_h(A^h x_0) \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} L_1(x_0) & \dots & L_1(A^{h-1} x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(x_0) & \dots & L_h(A^{h-2} x_0) \end{vmatrix}$$

On a alors $P_h(A) x_0 = 0$, i.e. $L_i(P_h(A) x_0) = 0$ pour $i = 1 \text{ à } h$. Notons $u_i = A^i x_0$: on biorthogonalise (L_j, u_i) en (L_j^*, u_i^*)

$$\left((L_j^*, u_i^*) = \delta_{ij} \quad , \quad u_i^* \in E_h = \langle u_0, \dots, u_{h-1} \rangle \right. \\ \left. L_j^* \in \langle L_1, \dots, L_h \rangle \quad i=0, \dots, h-1 \text{ et } j=1, \dots, h \right)$$

Soit $P_h(x) = \sum_{i=0}^{h-1} L_{i+1}^*(x) u_i^*$: P_h est une projection

sur E_h et les conditions $L_i(P_h(A) x_0) = 0 \quad i=1 \text{ à } h$

sont équivalentes à $P_h(P_h(A) x_0) = 0$.

En notant $A_h = P_h A$ (restant à E_h), le polynôme P_h n'est rien d'autre que le polynôme caractéristique A_h opérateur cyclique de E_h .

Les conclusions du théorème 2 restent alors valables et

on retrouve la généralisation de la méthode
de Lanczos [4] .

References du chapitre II, première partie.

- [1] C. Brezinski, Accélération de la convergence en Analyse Numérique, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [2] C. Brezinski, Padé - type Approximations and General Orthogonal Polynomials, ISNM vol 50, Birkhäuser, Basel, 1980.
- [3] C. Brezinski, Biorthogonality and its applications to Numerical Analysis, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [4] C. Brezinski, The Theory of Lanczos Method, ANO, 1991.
- [5] P.J Davis, Interpolation and Approximation, Dover, New York, 1975.
- [6] J. Van Iseghem, Vector orthogonal relation. Vector Q.D algorithm, J. Comp. Appl. Math 19 (1987) 141-150.
- [7] Yu. V. Vorobyev, Method of Moments in Applied Mathematics, Gordon and Breach, New York, 1965.

Chapitre III

Convergence de l'algorithme Q.D. vectoriel
dans le cas de $z \mapsto (f(z), f'(z))$ où f
est une fonction "lisse" au sens de Lubinsky.

L'étude des approximations de type Padé [1]
d'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, développable en
série entière au voisinage de zéro, $f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$,

conduit aux polynômes $(P_n^\delta)_{s,n}$:

P_n^δ existe et est unique si et seulement si le
détérminant de Hankel, $H_n^\delta = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{s+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s+n-1} & \dots & a_{s+2n-2} \end{vmatrix}$

est non nul. Sous cette condition P_n^δ s'exprime de
la façon suivante :

$$P_n^\delta(x) = \frac{H_n^\delta(x)}{H_n^\delta} \quad \text{ou} \quad H_n^\delta(x) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{s+n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s+n-1} & \dots & a_{s+2n-2} & x^n \end{vmatrix}.$$

Les polynômes P_n^δ , i.e. $\tilde{P}_n^\delta(x) = z^n P_n^\delta\left(\frac{1}{z}\right)$, sont les dénominateurs des approximants de Padé $[n+\delta-1/n]$ de f . De plus δ étant fixé, la famille $(P_n^\delta)_n$ constitue la famille des polynômes orthogonaux associés à la fonctionnelle a^δ (i.e. $a^\delta(x^i) = a_{i+\delta}$).

Par ailleurs on a la relation de récurrence suivante:

$$(*) \quad P_{n+1}^\delta(x) = x P_n^{\delta+1}(x) - q_{n+1}^\delta P_n^\delta(x) \quad (n \geq 0, \delta \geq 0)$$

$$P_0^\delta \equiv 1 \quad (\delta \geq 0)$$

$$\text{ou} \quad q_{n+1}^\delta = \frac{H_{n+1}^{\delta+1} \times H_n^\delta}{H_{n+1}^\delta \times H_n^{\delta+1}}$$

Les quantités (q_n^δ) se calculent à l'aide de l'algorithme Q.D de Rutishauser [4].

De nombreux résultats de convergence sur les P_n^δ existent : on pourra consulter [2] d'une part et d'autre part nous rappellerons certains résultats plus loin.

La relation (*) nous suggère l'idée suivante : si l'on arrive à connaître le comportement

de la suite $(q_{n+1}^{\delta})_{n \geq 0}$ (n est donc fixé),

en utilisant (*) et en raisonnant par récurrence sur n on doit obtenir des résultats de convergence pour les suites $(P_n^{\delta})_{n \geq 0}$. L'intérêt de cela est, comme nous l'avons vu au chapitre I de la première partie, que la relation (*) subsiste dans le cas vectoriel.

Nous allons développer cette idée dans le cas d'une fonction $z \mapsto (f(z), f'(z))$ ($f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$).

Pourquoi en tel choix ? Il y a deux motivations:

* approcher simultanément une fonction et sa dérivée (on trouvera dans [3] une approche "scalaire" de ce problème, où il est fait usage des polynômes de Bernstein)

* avoir un lien étroit entre les coefficients des deux séries concernées dans le cas d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^2$.

1. Le cas scalaire.

1.1 Citons un premier résultat dans le

cas d'une fonction méromorphe :

Théorème 1 [4] p 626

Soit f analytique en 0 , méromorphe dans $D = \{ |z| < R \}$

Soit z_i les pôles de f dans D : $0 < |z_1| < |z_2| < \dots < R$.

Si n est tel que $|z_n| < |z_{n+1}|$ alors

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} P_n^\delta(u) = (u - u_1)(u - u_2) \dots (u - u_n)$$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. ($u_i = z_i^{-1}$)

Remarque : On obtient le même résultat en utilisant (*), avec cependant des hypothèses plus fortes.

En effet, toujours d'après [4], pour avoir un résultat de convergence sur $(q_n^\delta)_{\delta \geq 0}$ on doit

supposer que $|z_{n-1}| < |z_n| < |z_{n+1}|$, auquel cas

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_n^\delta = \frac{1}{z_n}. \text{ Supposons que } 0 < |z_1| < |z_2| < \dots :$$

pour tout n on aura donc $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_n^\delta = u_n$.

Puisant de $P_0^\delta \equiv 1$ ($\delta \geq 0$) on a d'après (*):

$$P_1^\delta(x) = x P_0^{\delta+1}(x) - q_1^\delta P_0^\delta(x) = x - q_1^\delta \text{ et}$$

ainsi $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} P_n^\Delta(x) = x - u_1$ sur les compacts

de $\mathbb{C}$. Supposons que $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} P_n^\Delta(x) = (x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n)$:

$$P_{n+1}^\Delta(x) = x P_n^{\Delta+1}(x) - q_{n+1}^\Delta P_n^\Delta(x).$$

En passant à la limite, on a uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} P_{n+1}^\Delta(x) &= x (x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n) \\ &\quad - u_{n+1} (x - u_1) \dots (x - u_n) \\ &= (x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n)(x - u_{n+1}). \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat cherché pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Examinons à présent le comportement asymptotique des H_n^Δ avec d'autres hypothèses sur f .

1.2 Cas des fonctions "lisses" au sens de Lubinsky.

Soit $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ avec $a_j \in \mathbb{C}^*$ pour tout j .

On suppose que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{a_{j-1} \times a_{j+1}}{a_j^2} = q \in \mathbb{C}$ (fonction "lisse")

On remarque en particulier que si $|q| < 1$, f est une fonction entière d'ordre zéro.

Ubinsky [5] a obtenu le résultat suivant
sur les déterminants de Toeplitz $D(\delta | n)$:
(on a $H_n^\delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(\delta + n - 1 | n)$)

Théorème 2 [5]

Soit $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ avec $a_j \neq 0$ pour j assez grand,
et $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{a_{j-1} \times a_{j+1}}{a_j^2} = q \in \mathbb{C}$.

On a alors $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \frac{D(\delta | n)}{a_\delta^n} = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j)^{n-j}$ (n est fixé)

Remarquons que si q n'est pas une racine de l'unité
 $\prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j)^{n-j} \neq 0$, ce qui nous permet alors de faire
des quotients de déterminants de Toeplitz.

On a alors :

Corollaire 1

Avec les hypothèses précédentes et si q n'est pas une
racine de l'unité, on a : n étant fixé,

$$q_n^\delta = \frac{a_{n+\delta}}{a_{n+\delta-1}} q^{n-1} (1 + o(1)) \text{ quand } \delta \text{ tend vers } +\infty$$

preuve :

$$\text{On a } q_n^\delta = \frac{H_n^{\delta+1} \times H_{n-1}^\delta}{H_n^\delta \times H_{n-1}^{\delta+1}} = \frac{D(n+\delta|n) \times D(\delta+n-2|n-1)}{D(n+\delta-1|n) \times D(n+\delta-1|n-1)}$$

$$q_n^\delta = \frac{\left[\frac{D(n+\delta|n)}{(a_{n+\delta})^2} \right]}{\left[\frac{D(n+\delta-1|n)}{(a_{n+\delta-1})^2} \right]} \times \frac{\left[\frac{D(n+\delta-2|n-1)}{(a_{n+\delta-2})^{n-1}} \right]}{\left[\frac{D(n+\delta-1|n-1)}{(a_{n+\delta-1})^{n-1}} \right]} \times \left(\frac{a_{n+\delta} \times a_{n+\delta-2}}{(a_{n+\delta-1})^2} \right)^{n-1} \times \frac{a_{n+\delta}}{a_{n+\delta-1}}$$

En utilisant le Lemme 2, on a le résultat annoncé $\square$.

Remarques :

a) on peut démontrer le résultat du corollaire 1, directement en utilisant les règles de calcul du Q.D. algorithme :

supposons que $\frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{(a_j)^2} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} q \in \mathbb{C}^*$ non racine de l'unité

et considérons (notations habituelles du Q.D [4])

la propriété

$$(R_m) \quad \begin{cases} q_m^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{a_{m+n}}{a_{m+n-1}} q^{m-1} (1+o(1)) \\ e_m^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{a_{m+n}}{a_{m+n-1}} (q^m - 1) (1+o(1)) \end{cases}$$

On a :

$$e_1^m = q_1^{m+1} - q_1^m = \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \quad (\text{d'après}$$

l'initialisation du Q.D) , d'où

$$e_1^m = \frac{a_{m+1}}{a_m} \left[\frac{a_{m+2} \times a_m}{(a_{m+1})^2} - 1 \right]_{n \rightarrow +\infty} = \frac{a_{m+1}}{a_m} (q-1) (1+o(1))$$

(R_1) est donc vraie. Supposons (R_m) vraie :

au rang $m+1$ on a ainsi

$$q_{m+1}^m = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} (q^m - 1) (1+o(1))}{\frac{a_{m+n}}{a_{m+n-1}} (q^m - 1) (1+o(1))} \times \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^{m-1} (1+o(1))$$

$$= \frac{a_{m+n+1} \times a_{m+n-1}}{(a_{m+n})^2} \times \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^{m-1} (1+o(1))$$

$$= \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^m (1+o(1))$$

et

$$e_{m+1}^m = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{a_{m+n+2}}{a_{m+n+1}} q^m (1+o(1)) - \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^m (1+o(1)) \right] + \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} (q^m - 1) (1+o(1))$$

$$= \frac{a_{m+m+1}}{a_{m+n}} \left[\frac{a_{m+n} \times a_{m+m+2}}{(a_{m+m+1})^2} q^m (1+O(1)) - q^m (1+O(1)) + (q^m - 1) (1+O(1)) \right]$$

$$= \frac{a_{m+m+1}}{a_{m+n}} \left[q^{m+1} (1+O(1)) - q^m (1+O(1)) + (q^m - 1) (1+O(1)) \right]$$

$$= \frac{a_{m+m+1}}{a_{m+n}} \left[q^{m+1} - 1 \right] (1+O(1))$$

(R_{m+1}) est donc vraie

En conclusion (R_m) est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

f) Dans la démonstration du Théorème 2, Lubinsky a prouvé dans un premier temps que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} D(m|m) / a_m^m = \det \left(q^{(k-j)(k-j-1)/2} \right)_{j,k=1}^m$$

Ensuite, en raisonnant par récurrence et en utilisant l'identité de Jacobi [4] l'auteur a montré que le membre de droite est égal à $\prod_{j=1}^{m-1} (1-q^j)^{m-j}$.

Provoons ce résultat directement.

Soit $A = (q^{(k-j)(k-j-1)/2})_{1 \leq j, k \leq m}$ On a :

$$A = BVC \quad \text{ou} \quad \begin{cases} B = (q^{\frac{j^2+j}{2}} \delta_{jk})_{j,k=1}^m \\ V = ((q^{-j})^k)_{j,k=1}^m \\ C = (q^{\frac{k^2-k}{2}} \delta_{jk})_{j,k=1}^m \end{cases}$$

(δ_{jk} étant le symbole de Kronecker)

B et C sont des matrices diagonales donc,

$$\det B = q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j^2+j)} \quad \text{et} \quad \det C = q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j^2-j)}$$

Par ailleurs, $\det V = q^{-\sum_{j=1}^m j} \det \underbrace{((q^{-j})^{k-1})}_{\text{matrice de Vandermonde}}$

soit $\det V = q^{-\sum_{j=1}^m j} q^{\sum_{j=1}^m (j-j^2)} \prod_{j=1}^{m-1} (1-q^j)^{m-j}$

$$\begin{aligned} \text{car } \det ((q^{-j})^{k-1})_{j,k=1}^m &= \prod_{k=2}^m \prod_{j=1}^{k-1} (q^{-k} - q^{-j}) \\ &= \prod_{k=2}^m (q^{-k})^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - q^{k-j}) \\ &= q^{-2} \times (q^{-3})^2 \times \dots \times (q^{-m})^{m-1} \prod_{k=2}^m \prod_{j=1}^{k-1} (1 - q^{k-j}) \\ &= q^{\sum_{j=1}^m (j-j^2)} \prod_{j=1}^{m-1} (1 - q^j)^{m-j} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \det A &= \det B \times \det V \times \det C \\
 &= q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j^2 + j)} \times q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j^2 - j)} \times q^{-\sum_{j=1}^m j} \times q^{\sum_{j=1}^m (j - j^2)} \\
 &\quad \times \prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j)^{m-j} \\
 &= \prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j)^{m-j} \quad \square
 \end{aligned}$$

Revenons à la relation de récurrence (*):

on peut l'écrire,

$$\widetilde{P}_{n+1}^{\Delta}(x) = \widetilde{P}_n^{\Delta}(x) - x q_{n+1}^{\Delta} \times \widetilde{P}_n^{\Delta}(x)$$

et ainsi

$$\widetilde{P}_{n+1}^{\Delta}\left(x \frac{a_{n+\Delta}}{a_{n+\Delta+1}}\right) = \widetilde{P}_n^{\Delta+1}\left(x \frac{a_{n+\Delta}}{a_{n+\Delta+1}}\right) - x q_{n+1}^{\Delta} \times \frac{a_{n+\Delta}}{a_{n+\Delta+1}} \widetilde{P}_n^{\Delta}\left(x \frac{a_{n+\Delta-1}}{a_{n+\Delta}} \times \frac{a_{n+\Delta}^2}{a_{n+\Delta-1} \times a_{n+\Delta+1}}\right).$$

Montrons par récurrence que :

$$\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \widetilde{P}_n^{\Delta}\left(x \frac{a_{n+\Delta-1}}{a_{n+\Delta}}\right) = B_n(x) \quad \text{uniformément}$$

sur les compacts de $\mathbb{C}$, où les B_n sont les polynômes de Rogers - Szegő [6] définis par

$$\begin{cases} B_{n+1}(x) = B_n(x) - x q^n B_n(x q^{-1}) \\ B_0(x) \equiv 1. \end{cases}$$

En utilisant le développement asymptotique de q_{n+1}^s , $s \rightarrow +\infty$, et la relation précédente on obtient le résultat voulu.

Nous allons procéder de même dans le cas vectoriel.

2. Le cas vectoriel.

On se place sur $\mathbb{C}^2$ et on considère la fonction $F(z) = (f(z), f'(z))$ où $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ ($a_j \in \mathbb{C}^*$ pour tout j) est une fonction "lisse" au sens de Lubinsky, i.e. $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{a_j^2} = q \in \mathbb{C}$.

$$\text{On notera } q_j = \frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{a_j^2}.$$

Commençons par établir un résultat sur le comportement asymptotique des déterminants de Hankel généralisés H_n^s quand s tend vers $+\infty$.

Théorème 3

Soit $F(z) = (f(z), f'(z))$ avec $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$

où $\lim_{j \rightarrow +\infty} q_j = q \in \mathbb{C}$ ($q_j = \frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{2}$).

On considère les déterminants de Hankel généralisés, H_n^δ , associés à F .

Soit $n \in \mathbb{N}$: $n = 2m + h$ ($h = 0$ ou 1)

Les quantités suivantes ont une limite quand δ tend vers $+\infty$ (n fixé), notée $\mathcal{P}_n(q)$:

$$\frac{H_n^\delta}{\delta (a_{\delta+m})^2 \times \dots \times (a_{\delta+n-1})^2} \quad (n \text{ pair})$$

$$\frac{H_n^\delta}{\delta + m (a_{\delta+m+1})^2 \times \dots \times (a_{\delta+n-1})^2} \quad (n \text{ impair})$$

démonstration : $a \quad a$

$$H_n^\delta = \begin{vmatrix} a_\delta & \dots & a_{\delta+n-1} \\ (\delta+1)a_{\delta+1} & \dots & (\delta+n)a_{\delta+n} \\ a_{\delta+1} & \dots & a_{\delta+n} \\ (\delta+2)a_{\delta+2} & \dots & (\delta+n+1)a_{\delta+n+1} \\ \vdots & & \\ a_{\delta+m-1} & \dots & a_{\delta+m-1+n} \\ (\delta+m)a_{\delta+m} & \dots & (\delta+m+n-1)a_{\delta+m-1+n} \\ (a_{\delta+m})^{(h)} & \dots & a_{\delta+m-1}^{(h)} \end{vmatrix}$$

Si n est pair, par des combinaisons entre lignes il ne restera de coefficients avec s qu'à la dernière ligne.

Si n est impair, il ne restera plus de coefficients avec s .

Plaçons nous en (i, j) :

$i = 2\theta_i + k_i$ ($k_i = 0$ ou 1), on aura comme terme

$$a_{s+\theta_i+j-1} \text{ ou } (\theta_i+j-1)a_{s+\theta_i+j-1}$$

en $(i, n+1-i)$ on aura $a_{s+\theta_i+n-i}$

Multiplications la $i^{\text{ème}}$ ligne par $\left(\frac{a_{n+s-1}}{a_{n+s-2}}\right)^{n+1-i}$, et

la $j^{\text{ème}}$ colonne par $\left(\frac{a_{n+s-1}}{a_{n+s-2}}\right)^{-j}$, on obtiendra

alors en (i, j) dans $\frac{H_n^s}{s(a_{s+n})^2 - (a_{s+n-1})^2} \text{ [I]}$ ou dans

$\frac{H_n^s}{a_{s+n}(a_{s+n+1})^2 - (a_{s+n-1})^2} \text{ [II]}$, à un coefficient près :

$$\left(\frac{a_{s+\theta_i+j-1}}{a_{s+\theta_i+n-i}}\right) \left(\frac{a_{n+s}}{a_{n+s-1}}\right)^{n+1-(i+j)}$$

Prenons $t = i+j - (n+1)$ et $m_i = s + \theta_i + n - i$.

$$\frac{a_{s+\theta_i+j-1}}{a_{s+\theta_i+n-i}} = \frac{a_{m_i+t}}{a_{m_i}}$$

Supposons par exemple que $t > 0$:

$$\frac{a_{m_i+t}}{a_{m_i}} = \prod_{l=0}^{t-1} \frac{a_{m_i+l+1}}{a_{m_i+l}}$$

$$\text{On } \frac{a_{m_i+l+1}}{a_{m_i+l}} = q_{m_i+l} \times \dots \times q_{m_i+1} \times \frac{a_{m_i+1}}{a_{m_i}}$$

$$\text{d'où } \frac{a_{m_i+t}}{a_{m_i}} \underset{s \rightarrow +\infty}{=} q^{\frac{t(t-1)}{2}} \left(\frac{a_{m_i+1}}{a_{m_i}} \right)^t (1+o(1))$$

Il reste à examiner alors:

$$\left(\frac{a_{m_i+1}}{a_{m_i}} \times \frac{a_{n+s-1}}{a_{n+s}} \right)^t$$

$$\frac{a_{n+s}}{a_{n+s-1}} = \frac{a_{m_i+l+1}}{a_{m_i+l}} \text{ avec } l = i - \theta_i - 1$$

$$\text{d'où } \frac{a_{n+s}}{a_{n+s-1}} = \prod_{k=1}^{i-\theta_i-1} (q_{m_i+k}) \frac{a_{m_i+1}}{a_{m_i}}$$

$$\text{d'où } \left(\frac{a_{m_i+1}}{a_{m_i}} \times \frac{a_{n+s-1}}{a_{n+s}} \right)^t = \left(\prod_{k=1}^{i-\theta_i-1} (q_{m_i+k})^{-1} \right)^t$$

En conclusion, en passant à la limite dans I ou II on obtient un déterminant dont le terme (i, j) vaut, à un coefficient près,

$$q^{(\Theta_i + 1 - i)t} \times q^{\frac{t(t-1)}{2}}$$

$$\text{où } \begin{cases} t = i + j - (n+1) \\ r = 2\Theta_i + k_i \quad (k_i = 0 \text{ ou } 1) \end{cases}$$

Remarque

$\mathcal{P}_n(q)$ est une fonction rationnelle en q .

Exemples

$$\mathcal{P}_2(q) = q - 1 \quad ; \quad \mathcal{P}_3(q) = -(q - 1)^2$$

$$\mathcal{P}_4(q) = (q - 1)^4 (q^2 - 1) \quad ; \quad \mathcal{P}_5(q) = (q - 1)^6 (q^2 - 1)^2$$

Corollaire 2.

Soit $n = 2m + k$ ($k = 0$ ou 1). Si $\begin{cases} \mathcal{P}_n(q) \neq 0 \\ \mathcal{P}_{n-1}(q) \neq 0 \end{cases}$

$$\text{on a} \quad q_n^{\delta} = q^{n-1} \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} (1 + o(1)) \text{ quand } \delta \rightarrow +\infty$$

preuve : montrons le dans le cas n pair.

On a :

$$q_n^\delta = \frac{\frac{H_n^{\delta+1}}{(\delta+1)(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n})^2} + \frac{H_{n-1}^\delta}{a_{\delta+m-1}(a_{\delta+n})^2 \dots (a_{\delta+n-2})^2}}{\frac{H_n^\delta}{\delta(a_{\delta+m})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2} + \frac{H_{n-1}^{\delta+1}}{a_{\delta+m}(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2}} \\ \times \frac{(\delta+1)(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n})^2 \times a_{\delta+m-1}(a_{\delta+m})^2 \dots (a_{\delta+n-2})^2}{\delta(a_{\delta+m})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2 \times a_{\delta+m}(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2}$$

quand δ tend vers $+\infty$;

$$q_n^\delta = (1+o(1)) \left(\frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+m}}$$

Or :

$$\left(\frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} = \left(\frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+m}} \right)^2 \times \left(\frac{a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}}$$

$$\frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+m}} = \prod_{l=0}^{n-1} \left(q_{\delta+m+l} \times q_{\delta+m+l-1} \times \dots \times q_{\delta+m+1} \times \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} \right) \\ = \left(\frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} \right)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (1+o(1)) \text{ quand } \delta \rightarrow +\infty$$

$$\frac{a_{\delta+n-1}}{a_{\delta+m-1}} = \frac{a_{\delta+m-1+n}}{a_{\delta+m-1}} = \left(\frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} \right)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (1+o(1))$$

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} = \left(\frac{a_{\delta+m+1} \times a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+m}^2} \right)^{2n} \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} (1+o(1))$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{a_{\delta+m+1} \times a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+m}^2} \right)^{2m-1} \times \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} (1+o(1)) \\
&= q^{n-1} \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} (1+o(1)) \quad \square
\end{aligned}$$

Comme dans le cas scalaire on a la relation :

$$\tilde{P}_{n+1}^{\delta}(x) = \tilde{P}_n^{\delta+1}(x) - x q^{\delta} \tilde{P}_n^{\delta}(x).$$

Il faudra cependant tenir compte de la parité de n :

$$\bullet \text{ si } n=2m \quad (n+1=2m+1)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{n+1}^{\delta} \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right) &= \tilde{P}_n^{\delta+1} \left(x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \times \frac{a_{\delta+m+2} \times a_{\delta+m}}{(a_{\delta+m+1})^2} \right) \\
&\quad - x q^n (1+o(1)) \tilde{P}_n^{\delta} \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)
\end{aligned}$$

donc si $\tilde{P}_n^{\delta} \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$ tend vers $P_1(x)$ uniformément

sur les compacts de $\mathbb{C}$ quand $\delta \rightarrow +\infty$,

$\tilde{P}_{n+1}^{\delta} \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$ tend vers $P_2(x)$ tel que :

$$P_2(x) = P_1(xq) - xq^{-1}P_1(x)$$

• si $n = 2m+1$ ($n+1 = 2(m+1)$)

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n+1}^\delta \left(x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \right) &= \tilde{P}_n^{\delta+1} \left(x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \right) \\ &\quad - xq^n(1+q^{-1}) \tilde{P}_n^\delta \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \times \frac{(a_{\delta+m+1})^2}{a_{\delta+m} \times a_{\delta+m+2}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi si $\tilde{P}_n^\delta \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$ tend vers $Q_1(x)$,

uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ quand $\delta \rightarrow +\infty$,

$\tilde{P}_{n+1}^\delta \left(x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \right)$ tend vers $Q_2(x)$ tel que :

$$Q_2(x) = Q_1(x) - xq^n Q_1(xq^{-1}).$$

En conséquence on a : la convergence étant la convergence sur les compacts de $\mathbb{C}$,

supposons n pair ($n = 2m$), alors si

$\tilde{P}_n^\delta \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$ tend vers $P_1(x)$,

$\tilde{P}_{n+1}^\delta \left(x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$ tend vers $P_2(x)$ et

$\tilde{P}_{n+2}^{\Delta} \left(x \frac{a_{\Delta+n+1}}{a_{\Delta+n+2}} \right)$ tend vers $P_3(x)$ tels que

$$\begin{cases} P_2(x) = P_1(qx) - x q^n P_1(x) \\ P_3(x) = P_2(x) - x q^{n+1} P_2(x q^{-1}) \end{cases}$$

$$\text{d'où } P_3(x) = P_1(qx) - x q^n P_1(x) - x q^{n+1} (P_1(x) - x q^{n-1} P_1(x q^{-1}))$$

$$\text{soit } P_3(x) = x^2 q^{2n} P_1(x q^{-1}) - x q^n (q+1) P_1(x) + P_1(qx)$$

Conclusion : avec les hypothèses précédentes,
 $\tilde{P}_0^{\Delta} \equiv 1$ ($\Delta \geq 0$), $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{2n}^{\Delta} \left(x \frac{a_{\Delta+n}}{a_{\Delta+n+1}} \right) = V_n(x)$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$, où les polynômes V_n satisfont à

$$\begin{cases} V_{n+1}(x) = x^2 q^{2n} V_n(x q^{-1}) - x q^n (q+1) V_n(x) + V_n(qx) \\ V_0(x) \equiv 1 \end{cases}$$

Références du chapitre III, première partie.

- [1] C. Brezinski, Padé type Approximants and General Orthogonal Polynomials, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.
- [2] C. Brezinski and J. Van Iseghem. Padé approximations. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds., Handbook of Numerical Analysis, vol 3, Amsterdam, 1992. North-Holland.
- [3] P. J. Davis, Interpolation and Approximation, Dover, New York, 1975.
- [4] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, Wiley, New York 1974.
- [5] D. S. Lubinsky, Uniform Convergence of Rows of the Padé table for Functions with Smooth MacLaurin Series Coefficients, Constr. Approx. (1987) 3: 307-330.
- [6] G. Szegő (1926): Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Phys. Math. Kl. 1, 242-251.

DEUXIEME PARTIE

Epsilon algorithmes :
problèmes de convergence.

<< Rougis plutôt, rougis d'envier au vulgaire
le stérile repos dont son cœur est jaloux :
Les dieux ont fait pour lui tous les biens de la terre,
Mais la lyre est à nous. >>

Lamartine , La Gloire,
Méditations poétiques.

Chapitre I

La convergence quadratique de l'epsilon topologique algorithme (T.E.A) dans la résolution de systèmes non-linéaires d'équations.

On considère le système non-linéaire défini par $G(x) = x$, où G est une fonction de D , ouvert convexe de IK^p ($IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), dans IK^p . Soit $\bar{x}$ une solution de ce système.

L'algorithme qui nous intéresse est le suivant :

- * choisit d'un point initial $x_0 \in D$
- * à l'itération k , on pose : $u_0 = x_k$ et $u_j = G(u_{j-1})$ pour $j = 1, \dots, 2m_k$ où m_k est le degré du polynôme minimal de $G'(\bar{x})$ pour le vecteur $x_k - \bar{x}$.
- * on applique l' ϵ -algorithme topologique à $u_0, \dots, u_{2m_k}$ et on pose $x_{k+1} = E_{2m_k}^{(0)}$.

Cet algorithme a été proposé par Brezinski [1] et presque simultanément par Geheker [3]. D'après les résultats numériques, sa convergence semble quadratique sous les hypothèses habituelles. Cet algorithme

a été étudiée par plusieurs autres auteurs [6].
 Cependant, jusqu'à présent, aucune preuve satisfaisante
 de cette propriété n'a été obtenue. Nous allons
 combler cette lacune.

1. Convergence quadratique de l'algorithme.

$\varepsilon_{2mk}^{(0)}$ s'exprime comme un quotient de deux
 déterminants [1] :

$$\varepsilon_{2mk}^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_{mk} \\ (y, \Delta \mu_0) & \dots & (y, \Delta \mu_{mk}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta \mu_{mk-1}) & \dots & (y, \Delta \mu_{2mk-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ (y, \Delta \mu_0) & \dots & (y, \Delta \mu_{mk}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta \mu_{mk-1}) & \dots & (y, \Delta \mu_{2mk-1}) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 & \Delta \mu_0 & \dots & \Delta \mu_{mk-1} \\ (y, \Delta \mu_0) & (y, \Delta^2 \mu_0) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{mk-1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ (y, \Delta \mu_{mk-1}) & (y, \Delta^2 \mu_{mk-1}) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{2mk-2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (y, \Delta^2 \mu_0) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{mk-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta^2 \mu_{mk-1}) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{2mk-2}) \end{vmatrix}}$$

En utilisant l'identité de Magnus généralisée [2], on obtient :

$$x_{k+1} = x_k - \Delta U_{0,m_k} (M U_{0,m_k})^{-1} (y, \Delta U)_{0,m_k}$$

$$\alpha \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{0,m_k} = (\Delta u_0, \dots, \Delta u_{m_k-1}) \\ M U_{0,m_k} = \begin{pmatrix} (y, \Delta^2 u_0) & \dots & (y, \Delta^2 u_{m_k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta^2 u_{m_k-1}) & \dots & (y, \Delta^2 u_{2m_k-2}) \end{pmatrix} \\ (y, \Delta U)_{0,m_k} = ((y, \Delta u_0), \dots, (y, \Delta u_{m_k-1}))^T \end{array} \right.$$

$$\text{Ecrivons : } (M U_{0,m_k})^{-1} (y, \Delta U)_{0,m_k} = (a_0^{(k)}, \dots, a_{m_k-1}^{(k)})^T.$$

Ainsi on a la relation de récurrence suivante :

$$(*) \quad x_{k+1} = x_k - (a_0^{(k)} \Delta u_0 + \dots + a_{m_k-1}^{(k)} \Delta u_{m_k-1}).$$

Nous allons faire maintenant le lien entre les $a_i^{(k)}$ et les coefficients du polynôme minimal de $G'(\bar{x})$ pour le vecteur $x_k - \bar{x}$.

Pour cela nous supposons, dans ce paragraphe, que G satisfait les conditions suivantes :

$$\textcircled{48} \left\{ \begin{array}{l} * \text{ la matrice } G'(\bar{x}) \text{ est inversible} \\ * \text{ la d\u00e9riv\u00e9e de Fr\u00e9d\u00e9t } G' \text{ de } G \text{ v\u00e9rifie la} \\ \text{condition de Lipschitz } \|G'(x) - G'(y)\| \leq L \|x - y\| \\ \text{pour } x, y \in D \text{ (} L \in \mathbb{R} \text{ fix\u00e9e)} \end{array} \right.$$

On consid\u00e8re aussi la matrice H_h :

$$H_h = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{(y, \Delta u_0)}{\|\Delta u_0\|} & \dots & \frac{(y, \Delta u_m)}{\|\Delta u_0\|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{(y, \Delta u_{m-1})}{\|\Delta u_0\|} & \dots & \frac{(y, \Delta u_{2m-1})}{\|\Delta u_0\|} \end{pmatrix}$$

Th\u00e9or\u00e8me 1

Si G poss\u00e8de la propri\u00e9t\u00e9 $\textcircled{48}$ et si
 $\exists \alpha > 0 \exists K \in \mathbb{N} \quad |\det H_h| > \alpha \quad \forall h \geq K$
 alors il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que
 $\forall x_0 \in U, \quad \|x_{k+1} - \bar{x}\| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$.

d\u00e9monstration :

La condition de Lipschitz entraine ([3])

$$\begin{cases} \Delta u_i = [G'(\bar{x})]^i (G'(\bar{x}) - I)(x_k - \bar{x}) + w_i^{(h)} \\ \Delta^2 u_i = [G'(\bar{x})]^i (G'(\bar{x}) - I)^2 (x_k - \bar{x}) + \tilde{w}_i^{(h)} \end{cases}$$

où $\|w_i^{(h)}\| = O(\|x_h - \bar{x}\|^2)$ et $\|\tilde{w}_i^{(h)}\| = O(\|x_h - \bar{x}\|^2)$.

Soit $c_i^{(h)}$, les coefficients du polynôme

$$\frac{1}{P_h(1)} \frac{P_h(1) - P_h(x)}{x-1}, \text{ où } P_h \text{ est le polynôme minimal}$$

de $G'(\bar{x})$ pour le vecteur $x_h - \bar{x}$ (P_h est le polynôme unitaire de plus petit degré tel que $P_h(G'(\bar{x}))(x_h - \bar{x}) = 0$)

On a par ailleurs $P_h(1) \neq 0$ car la matrice $G'(\bar{x}) - I$ est inversible.

On a :

$$(MT_{0,m_h})^{-1} \begin{bmatrix} (y, \Delta^2 u_j) \\ \vdots \\ (y, \Delta^2 u_{j+m_h-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow (j+1)^{\text{ième}} \text{ ligne,}$$

$$\text{donc } \sum_{i=0}^{m_h-1} c_i^{(h)} (MT_{0,m_h})^{-1} (y, \Delta^2 v_i) = (c_0^{(h)}, \dots, c_{m_h-1}^{(h)})^T.$$

D'un autre côté on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} c_i^{(h)} (MT_{0,m_h})^{-1} (y, \Delta^2 v_i) = (MT_{0,m_h})^{-1} \sum_{i=0}^{m_h-1} c_i^{(h)} (y, \Delta^2 v_i)$$

$$\text{et } \sum_{i=0}^{m_h-1} c_i^{(h)} (y, \Delta^2 v_i) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m_h-1} c_i^{(h)} (y, \Delta^2 u_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m_h-1} c_i^{(h)} (y, \Delta^2 u_{m_h+i-1}) \end{bmatrix}.$$

$$\text{Mais } \Delta u_{i+j} = [G'(\bar{x})]^{-1} (G'(\bar{x}) - I)^2 (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

$$\text{d'où } \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} \Delta^2 u_{i+j} = G'(\bar{x})^j (G'(\bar{x}) - I)^2 \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

(car les $c_i^{(h)}$ sont bornés indépendamment de h).

Par définition des $c_i^{(h)}$ on a :

$$\sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) = (G'(\bar{x}) - I)^{-1} (x_k - \bar{x}), \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} \Delta^2 u_{i+j} &= G'(\bar{x})^j (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \\ &= \Delta u_j + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} (y, \Delta^2 v_i) = \begin{bmatrix} (y, \Delta u_0) \\ \vdots \\ (y, \Delta u_{m_k-1}) \end{bmatrix} + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

Si on multiplie cette égalité par $(MT_{0,m_k})^{-1}$ il vient

$$\begin{aligned} (*) \quad (c_0^{(h)}, \dots, c_{m_k-1}^{(h)})^T &= (a_0^{(h)}, \dots, a_{m_k-1}^{(h)})^T \\ &\quad + (MT_{0,m_k})^{-1} O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

En utilisant la norme de Frobenius, on a l'inégalité [4] :

$$\|(MT_{0,m_h})^{-1}\|_2 \leq \frac{\|MT_{0,m_h}\|_F^{m_h-1}}{|\det(MT_{0,m_h})|}.$$

Mais $\det(MT_{0,m_h}) = \|\Delta u_0\|^{m_h} \times \det H_h$

$$\|\Delta u_0\| = \|(G'(\bar{x}) - I)(x_h - \bar{x}) + w_i^{(h)}\| \text{ avec } \|w_i^{(h)}\| = O(\|x_h - \bar{x}\|^2)$$

d'où pour x_h proche de $\bar{x}$,

$$\|\Delta u_0\| \geq \|(G'(\bar{x}) - I)(x_h - \bar{x})\| - \|w_i^{(h)}\| \geq D \|(G'(\bar{x}) - I)(x_h - \bar{x})\| \quad (D > 0)$$

De plus, si A est une matrice inversible $\|Ax\|_2 \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|_2}$,

la dernière inégalité devient :

$$\|\Delta u_0\| \geq \frac{D}{\|(G'(\bar{x}) - I)^{-1}\|_2} \|x_h - \bar{x}\|.$$

Finalement il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\det(MT_{0,m_h})| \geq C \|x_h - \bar{x}\|^{m_h}.$$

Par ailleurs on a $\|MT_{0,m_h}\|_F \leq C' \|x_h - \bar{x}\|$ ($C' > 0$):

$$\|MT_{0,m_h}\|_F = \left(\sum_{i=0}^{m_h-1} \|(y, \delta^2 u_i)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{pour } j=0, \dots, 2m_h-2 \quad |(y, \delta^2 u_j)| \leq \|y\| \|\delta^2 u_j\|$$

$$\|\Delta^2 u_j\| \leq \|G'(\bar{x})\|^i \|G'(\bar{x}) - I\|^2 \|x_k - \bar{x}\| + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

donc $\exists K_2 > 0$ tel que : $\|\Delta^2 u_j\| \leq K_2 \|x_k - \bar{x}\|$.

et finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \|MT_{0,m_k}\|_F &\leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} (p \|y\| K_2 \|x_k - \bar{x}\|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= p^{\frac{3}{2}} \|y\| K_2 \|x_k - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|(MT_{0,m_k})^{-1}\|_2 \leq \frac{C''}{\|x_k - \bar{x}\|} \quad (C'' > 0)$$

(*) devient

$$(**) \quad a_i^{(k)} = c_i^{(k)} + O(\|x_k - \bar{x}\|) \quad i=0 \text{ à } m_k-1.$$

Revenons à la relation de récurrence (*):

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \bar{x} &= x_k - \bar{x} - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} \Delta u_i \\ &= (x_k - \bar{x}) - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} G'(\bar{x}) (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x}) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} w_i^{(k)} \\ &= x_k - \bar{x} - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} G'(\bar{x})^i (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x}) \\ &\quad + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

car d'après (**) les $a_i^{(k)}$ sont bornés.

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) &= \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m_k-1} O(\|x_k - \bar{x}\|) (x_k - \bar{x}) \\ &= (G'(\bar{x}) - I)^{-1} (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } x_{k+1} - \bar{x} &= x_k - \bar{x} - (G'(\bar{x}) - I)(G'(\bar{x}) - I)^{-1} (x_k - \bar{x}) \\ &\quad + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \\ &= O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque: à la place de la matrice H_k , on aurait pu considérer la matrice

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \frac{(y, \Delta u_0)}{\|\Delta u_0\|} & & & & \frac{(y, \Delta u_{m_k})}{\|\Delta u_0\|} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{(y, \Delta u_{m_k-1})}{\|\Delta u_{m_k-1}\|} & \dots & \dots & \dots & \frac{(y, \Delta u_{m_k-1})}{\|\Delta u_{m_k-1}\|} \end{pmatrix}$$

pour écrire ensuite que

$$\det(MV_{0,m_k}) = \|\Delta u_0\| \times \dots \times \|\Delta u_{m_k-1}\| \times \det F_m.$$

Cherchant une minoration de $|\det(MV_{0,m_k})|$, il nous faut minorer $\|\Delta u_i\|$: or si $i > 0$, dans l'expression de Δu_i apparaît un terme en $[G'(\bar{x})]^i$.

Pour être certain plus que $\| \Delta u \|$ se compute comme $\| x_n - \bar{x} \|$, il suffit d'ajouter l'hypothèse $G'(\bar{x})$ inversible. On pourra consulter [].

2. Considérations géométriques.

a) L'utilisation du HPE [4] ou du TEA pour résoudre des systèmes non-linéaires, nécessite l'introduction du polynôme minimal d'une matrice pour un vecteur. Soit A une matrice carrée $p \times p$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Considérons les vecteurs dont les polynômes minimaux par rapport à A sont de degré m . Une question intéressante est de décrire cet ensemble. Donnons le résultat suivant :

Théorème 2 :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A , supposées distinctes. Soient $v_1, \dots, v_p$ une base de vecteurs propres associés. Si m est le degré du polynôme minimal de A pour $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i$, alors il y a exactement m nombres différents de zéro parmi les α_i .

preuve : $A^m x = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i^m v_i$. On travaille dans la base $(v_1, \dots, v_p)$. Par définition du polynôme minimal d'une matrice pour un vecteur,

le système $(x, Ax, \dots, A^{m-1}x)$ est libre

et le système $(x, Ax, \dots, A^m x)$ est lié.

En utilisant la notion de rang d'une matrice, le rang de

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_p & \alpha_p \lambda_p & \dots & \alpha_p \lambda_p^{m-1} \end{pmatrix}$$

est égal à m

ainsi que le rang de

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_p & \alpha_p \lambda_p & \dots & \alpha_p \lambda_p^m \end{pmatrix}.$$

On peut supposer sans perdre de généralité que :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_m \lambda_m & \dots & \alpha_m \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

soit $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \underbrace{V(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}_{\text{determinant de Vandermonde}} \neq 0$

On a donc déjà $\alpha_i \neq 0$ pour $i=1$ à m .

D'après la définition du rang pour $k=m+1, \dots, p$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{m-1} & \alpha_1 \lambda_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_m \lambda_m & \dots & \alpha_m \lambda_m^{m-1} & \alpha_m \lambda_m^m \\ \alpha_k & \alpha_k \lambda_k & \dots & \alpha_k \lambda_k^{m-1} & \alpha_k \lambda_k^m \end{vmatrix} = 0$$

soit $(\alpha_1 x \dots x \alpha_m) x \alpha_n \times V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_n) = 0$.
 Or les λ_i étant distincts, $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_n) \neq 0$,
 on en déduit que $\alpha_n = 0$ ■

Soit $m(x)$ le degré du polynôme minimal
 de A pour le vecteur $x \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$: on pose

$$U_m = \{x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } m(x) = m\}$$

Soit p_i la projection sur $\mathbb{R} v_i$ parallèlement à
 $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p \rangle$, $i = 1, \dots, p$

$$p_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} v_i$$

$$x \mapsto \alpha_i v_i$$

On pose aussi pour

terminer :

$$\begin{cases} V_i = p_i^{-1}(\mathbb{R}^*) \\ \mathcal{H}_i = p_i^{-1}(\{0\}) \text{ (hyperplan)} \end{cases}$$

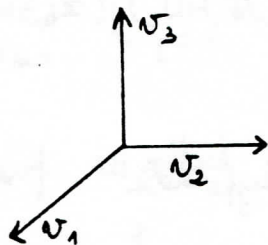
D'après le théorème précédent :

$$U_m = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq p} \left\{ \bigcap_{j=1}^m V_{i_j} \cap \bigcap_{k \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \mathcal{H}_k \right\}$$

exemples : dans $\mathbb{R}^3$

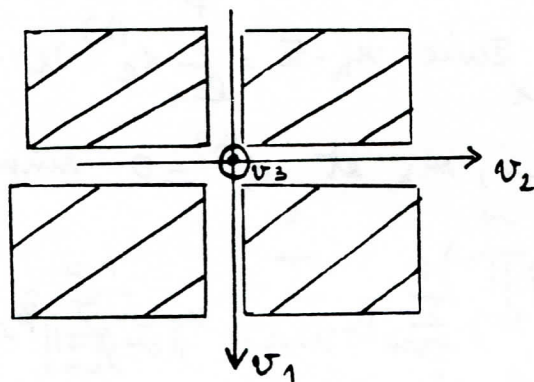
$$U_1 = (V_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3) \cup (V_2 \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_3) \cup (V_3 \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$$

soit $\mathcal{U}_1 = \mathbb{R}^* v_1 \cup \mathbb{R}^* v_2 \cup \mathbb{R}^* v_3$



$$\mathcal{U}_2 = (v_1 \wedge v_2 \wedge \mathcal{H}_3) \cup (v_1 \wedge v_3 \wedge \mathcal{H}_2) \cup (v_1 \wedge v_3 \wedge \mathcal{H}_1)$$

représentons $v_1 \wedge v_2 \wedge \mathcal{H}_3$:



b) Considérons la matrice LH_n :

$$LH_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{(y, L\Delta u_0)}{\|L\Delta u_0\|} & & \frac{(y, L\Delta u_n)}{\|L\Delta u_0\|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{(y, L\Delta u_{n-1})}{\|L\Delta u_0\|} & \dots & \frac{(y, L\Delta u_{n-1})}{\|L\Delta u_0\|} \end{pmatrix}$$

où $L \Delta u_i = [G'(\bar{x})]^i (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x})$ (la partie linéaire de Δu_i).

Nous allons voir que l'hypothèse $|\det LH_k| \geq \alpha$ entraîne $|\det H_k| \geq \alpha$, et donner une interprétation de la condition $|\det LH_k| \geq \alpha$.

Supposons que $G'(\bar{x})$ remplisse les conditions du théorème 2. On peut écrire $x_k - \bar{x} = \sum_{e=1}^p \alpha_e^{(k)} v_e$ avec $\alpha_e^{(k)} \neq 0$ pour $e=1, \dots, m_k$ et $\alpha_e^{(k)} = 0$ sinon.

Alors : ($m=m_k$)

$$\det LH_k = \frac{1}{\|L \Delta u_0\|^{m_k}} \begin{vmatrix} 1 & \sum_{i_1=1}^p \beta_{i_1} & \dots & \sum_{i_m=1}^p \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{m-1} \\ 1 & \sum_{i_1=1}^p \beta_{i_1} \lambda_{i_1} & \dots & \sum_{i_m=1}^p \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sum_{i_1=1}^p \beta_{i_1} \lambda_{i_1}^{m_k} & \dots & \sum_{i_m=1}^p \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{2m-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{où } \beta_e^{(k)} = \alpha_e^{(k)} (\lambda_e - 1) (y, v_e).$$

$$\det LH_k = \frac{1}{\|L \Delta u_0\|^{m_k}} \sum_{i_1=1}^p \dots \sum_{i_{m_k}=1}^p \begin{vmatrix} 1 & \beta_{i_1} & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{m-1} \\ 1 & \beta_{i_1} \lambda_{i_1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \beta_{i_1} \lambda_{i_1}^m & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{2m-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\|\Delta u_0\|^m} \sum_{i_1=1}^p \dots \sum_{i_m=1}^p \left(\prod_{j=1}^m \beta_{i_j} \lambda_{i_j}^{j-1} \right) V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}).$$

En utilisant un résultat de [5] on obtient

$$\det L H_k = \frac{1}{\|\Delta u_0\|^m} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m}^p \begin{vmatrix} \beta_{i_1} & \dots & \beta_{i_m} \\ \beta_{i_1} \lambda_{i_1} & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{i_1} \lambda_{i_1}^{m-1} & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{m-1} \end{vmatrix} \times V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m})$$

$$= \frac{1}{\|\Delta u_0\|^m} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m}^p \left(\prod_{j=1}^m \beta_{i_j} \right) V(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}) \times V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m})$$

Mais $\beta_i^{(k)} = 0$ pour $i = m+1, \dots, p$ donc

$$= \frac{1}{\|\Delta u_0\|^m} \left(\prod_{j=1}^m \beta_j^{(k)} \right) V(\lambda_1, \dots, \lambda_m) V(1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

et finalement

$$\det L H_k = \frac{1}{\|\Delta u_0\|^m} \left(\prod_{j=1}^m \alpha_j^{(k)} (y | v_j) \right) V(1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^2$$

La condition $|\det L H_k| \geq \epsilon > 0$ est équivalente à :

$$\frac{\prod_{j=1}^m |\alpha_j^{(h)}|}{\left[(\alpha_1^{(h)})^2 + \dots + (\alpha_m^{(h)})^2 \right]^{\frac{m}{2}}} \geq \alpha' > 0$$

$$\left[(\alpha_1^{(h)})^2 + \dots + (\alpha_m^{(h)})^2 \right]^{\frac{m}{2}} \geq \alpha' > 0$$

$$\text{d'où } \prod_{j=1}^m \left[1 + \left(\frac{\alpha_j^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\alpha_{j-1}^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_{j+1}^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\alpha_m^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 \right] \leq \frac{1}{(\alpha')^2}$$

La dernière condition équivaut à :

il existe deux nombres $K_1 > 0$ $K_2 > 0$ tels que

$$K_1 \leq \left| \frac{\alpha_j^{(h)}}{\alpha_i^{(h)}} \right| \leq K_2 \quad \text{pour tout } h \text{ quand}$$

$$\alpha_j^{(h)} \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_i^{(h)} \neq 0.$$

Théorème 3

$|\det L H_n| \geq \alpha > 0$ si il existe des réels $p_j > 0$ tels que :

$$\sum p_j^2 < 1, \quad \text{et pour } h \text{ assez grand}$$

$$p_j \times \|x_h - \bar{x}\| \leq \alpha_j^{(h)} \leq \|x_h - \bar{x}\|.$$

Sous cette hypothèse on a la condition

$$|\det H_k| \geq \alpha > 0.$$

En effet, $\det H_k = \frac{1}{\|\Delta u_0\|^{m_k}} \left\{ \|\Delta u_0\|^{m_k} \det L H_k + \Sigma \right\}$

où Σ désigne des déterminants dont une colonne au moins est faite de w_i^y

(i.e. $w_i^y = (y, w_i^{(k)})$ $|w_i^y| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$)

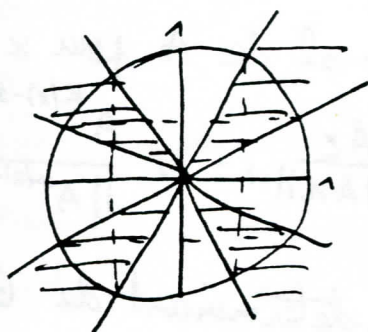
On peut donc écrire :

$$\det H_k = \frac{1}{\|\Delta u_0\|^{m_k}} \prod_{j=1}^{m_k} \alpha_j^{(k)} (y, w_j) V(1, \lambda_1, \dots, \lambda_{m_k}) \times (1 + O(\|x_k - \bar{x}\|))$$

et on a le résultat.

exemple :

$$\bar{x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|x\| \leq |x_1| \leq \|x\| \\ \frac{1}{2} \|x\| \leq |x_2| \leq \|x\| \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$



Les x_k reste dans la partie hachurée.

c) On peut remarquer que l'hypothèse d'uniforme inversibilité (i.e. $|\det H_n| \geq \alpha > 0 \quad \forall n > N$) pète directement sur les termes de la suite (x_n) .

On souhaiterait, au moins dans certain cas, avoir une hypothèse sur x restant dans un certain convexe.

Pour le MPE x_{n+1} est barycentre de $G^i(x_n)$, avec somme des coefficients égale à 1. Si ces coefficients sont positifs et si les $G^i(x_n)$ sont dans le convexe x_{n+1} reste dans le convexe : c'est le cas si la matrice $G'(\bar{x})$ n'a que des valeurs propres positives.

Par ailleurs, avec les notations de [4], $(\alpha_n(x))^2$

est le déterminant de Gram des vecteurs normés

$$\frac{G(x) - x}{\|G(x) - x\|}, \dots, \frac{G^{d_n}(x) - G^{d_n-1}(x)}{\|G^{d_n}(x) - G^{d_n-1}(x)\|}.$$

Plus généralement, soit A une matrice et $m(x)$ le degré du polynôme minimal de A pour $x (x \neq 0)$.

on pose $\varphi(x) = g\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{Ax}{\|Ax\|}, \dots, \frac{A^{m(x)-1}x}{\|A^{m(x)-1}x\|}\right)$

où $g(\)$ désigne le déterminant de Gram.

Soit $\alpha > 0$, l'ensemble $\{\varphi(x) \geq \alpha\}$ n'est pas nécessairement un voisinage de zéro. Cependant on a l'exemple, dans $\mathbb{R}^2$, suivant :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\theta \neq k\pi), \quad \varphi(x) = |\sin \theta| > 0.$$

References du chapitre I, deuxième partie.

[1] C. Brezinski

Accélération de la convergence en analyse numérique.
LNM 584, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[2] C. Brezinski

Other manifestations of the Schur complement.
Linear Algebra Appl., 111 (1988), 231-247.

[3] E. GEKELER

On the solution of systems of equations by the
epsilon algorithm of Wynn.

Math. Comp., 26, (1972) 427-436

[4] K. Jbilou, H. Sadok

Some results about vector extrapolation methods
and related fixed point iterations.

J. Comput. Appl. Math., 36 (1991) 385-398.

[5] A. Sidi, W.F. Fud, D.A. Smith

Acceleration of convergence of vector sequences.

SIAM J. Numer. Anal., 23 (1986), 178-196.

[6] S. Shelton

Computation of the periodic steady-state response
of nonlinear networks by extrapolation methods

IEEE Circuits and Systems, 27 (1980), 161-175.

Chapitre II

De l'epsilon algorithme vectoriel.

Il y a peu de résultats théoriques pour l'epsilon algorithme vectoriel : ceci s'explique en partie par le fait que l'on n'a pas une expression de $E_h^{(n)}$ à l'aide de déterminants. Pour une synthèse sur l' ϵ -algorithme vectoriel, on pourra consulter [1] [7]. Cependant cet algorithme admet dans la pratique beaucoup d'applications [2] [3].

Dans une première partie nous allons nous intéresser à $E_2^{(h)}$ appliqué à des suites vectorielles aux comportements linéaires au sens de Nivergelt [6]. Au préalable nous ferons quelques remarques sur cette notion.

Dans une seconde partie, partant de fait que l'on a uniquement une relation de récurrence pour définir les $E_h^{(n)}$, on essaiera de progresser de deux colonnes en deux colonnes.

1. Transformation $E_2^{(h)}$ et suites aux comportements linéaires.

Dans tout ce paragraphe on travaille dans $\mathbb{R}^p$.
 Bruguiski a montré dans [1] p 142-143 l'accélération
 de convergence par $E_2^{(n)}$ des suites (S_n) ($S_n \in \mathbb{R}^p$)
 vérifiant les hypothèses suivantes :

- (H) {
- il existe une suite (e_n) dans $\mathbb{R}^p$ qui converge vers zéro
 - il existe $y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \lambda < 1$
 - $S_n - S = \lambda^n (y + e_n)$ pour tout n à partir d'un certain rang.

Les vecteurs $(S_n - S)$ ne sont pas nécessairement colinéaires.
 Remarquons alors que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e_{n+1} + e_n)}{\|y + e_n\|} = 0$$

On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} = \frac{y}{\|y\|}$.

La suite (S_n) converge donc λI - linéairement
 au sens de Niervergelt, à savoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0.$$

Évidemment, une suite (X_n) de $\mathbb{R}^p$ peut très bien

converger linéairement vers x sans pour autant avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}$ existe. Il suffit de considérer

la suite $x_n = \left(\frac{\cos \sqrt{n}}{2^n}, \frac{\sin \sqrt{n}}{2^n} \right)$: x_n tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n}{\|x_n\|} &= \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}, \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n} \right) \\ &= \left(-\sin \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}, \sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right) \end{aligned}$$

Or $\sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} = \sin \left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n}{\|x_n\|} = 0$. Cependant $\frac{x_n}{\|x_n\|} = (\cos \sqrt{n}, \sin \sqrt{n})$

n'a pas de limite.

Pour généraliser le résultat d'accélération donné au début du paragraphe on va considérer la définition suivante :

1.1 Définition [6]

On dira que la suite (S_n) de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$) se comporte linéairement vers un point S de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$) si :

- [a] il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq K \quad S_n \neq S$
- [b] il existe une matrice A telle que $(I - A)$ soit inversible et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0$

Remarques :

- a) la suite (S_n) n'est pas nécessairement convergente
- b) Soit A une matrice carrée $p \times p$ telle que $(I-A)$ soit inversible : considérons la suite (S_n) générée de la façon suivante ;

$$S_{n+1} = AS_n + b$$

Si S est la solution du système $S = AS + b$, on a :

$(S_{n+1} - S) - A(S_n - S) = 0$. La suite (S_n) se comporte donc A linéairement.

D'autre part, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A . Supposons que l'on ait $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p|$:

on a alors [1] p 143

$$S_n - S = \lambda_1^n (y_1 + \varepsilon_n) \quad (y_1 \neq 0 \text{ vecteur propre associé à } \lambda_1) \text{ avec } \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

(Ceci vient de la décomposition spectrale de A).

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda_1(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0$$

Sur cet exemple, on voit que la matrice A de la définition n'est pas nécessairement unique d'un fait, et d'autre part (S_n) ne converge pas nécessairement vers S (il faudrait $|\lambda_1| < 1$).

c) Considérons une suite (S_n) vérifiant la relation suivante :

$$(*) \quad S_{n+1} - S = (A + A_n) (S_n - S) \quad \text{avec}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0 \quad (A_n \text{ étant une matrice } p \times p)$$

$$\text{On a } \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = A_n \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0. \quad \text{La suite } (S_n)$$

se comporte donc A-linéairement.

A-t-on la réciproque ? (i.e si (S_n) se comporte A-linéairement vers S, existe-t-il une suite (A_n) de matrice qui converge vers 0, telle que l'on ait (*)?)

$$\text{Notons } u_n \text{ le vecteur } \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|}.$$

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

$$\text{Posons } A_n = \left(\left(e_1, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \right) u_n, \dots, \left(e_p, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \right) u_n \right)$$

la matrice dont le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne est

$$\left(e_i, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \right) u_n. \quad \text{La suite } (A_n) \text{ tend vers } 0.$$

Calculons $A_n \cdot (S_n - S)$:

$$A_n \cdot (S_n - S) = \sum_{i=1}^p \frac{(e_i, S_n - S)^2}{\|S_n - S\|} \cdot u_n = \|S_n - S\| u_n$$

$$\text{Or } S_{n+1} - S = A(S_n - S) + \|S_n - S\| u_n$$

$$\text{soit } S_{n+1} - S = (A + A_n)(S_n - S).$$

On a donc équivalence entre les deux notions.

Dans la suite nous conserverons la présentation de Nierergelt.

Nous allons à présent nous intéresser à la deuxième colonne de l'epsilon algorithme vectoriel et montrer un résultat d'accélération de convergence pour certaines suites à calculer linéaire.

Tout va dépendre en fait de la matrice A intervenant dans le calcul linéaire de la suite, et plus précisément de son polynôme minimal. Nous ferons donc quelques remarques à ce sujet.

1.2 Dans $\mathbb{R}^p$ si $y \neq 0$, on note

$$y^{-1} = \frac{y}{(y, y)}. \text{ Soit } (S_m) \text{ une suite d'éléments de}$$

$\mathbb{R}^p$.

On considère :

$$E_2^{(n)} = S_{m+1} + (\Delta E_1^{(n)})^{-1}$$

$$\text{où } \Delta E_1^{(n)} = \frac{\Delta S_{m+1}}{\|\Delta S_{m+1}\|^2} - \frac{\Delta S_m}{\|\Delta S_m\|^2}$$

De plus on a :

$$\|\Delta E_1^{(n)}\|^2 = \frac{1}{\|\Delta S_{m+1}\|^2} - 2 \frac{(\Delta S_{m+1}, \Delta S_m)}{\|\Delta S_{m+1}\|^2 \|\Delta S_m\|^2} + \frac{1}{\|\Delta S_m\|^2}$$

$$= \|\Delta S_m\|^{-2} \|\Delta S_{m+1}\|^{-2} \left(\|\Delta S_m\|^2 - 2(\Delta S_{m+1}, \Delta S_m) + \|\Delta S_{m+1}\|^2 \right)$$

$$= \|\Delta S_m\|^{-2} \|\Delta S_{m+1}\|^{-2} \|\Delta^2 S_m\|^2.$$

Ainsi on obtient l'égalité :

$$E_2^{(n)} = S_{m+1} + \frac{1}{\|\Delta^2 S_m\|^2} \left(\|\Delta S_m\|^2 \Delta S_{m+1} - \|\Delta S_{m+1}\|^2 \Delta S_m \right).$$

Supposons que (S_k) se comporte linéairement vers S : il existe une matrice A avec $(I-A)$ inversible

telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(S_{k+1}-S) - A(S_k-S)}{\|S_k-S\|} = 0$

(on suppose $S_k \neq S$ pour k assez grand).

On a donc :

$$\frac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|} = A \cdot \frac{(S_k-S)}{\|S_k-S\|} + o(1)$$

Remarquons alors que $\frac{\|S_{k+1}-S\|}{\|S_k-S\|}$ est borné

$$\left(\frac{\|S_{k+1}-S\|}{\|S_k-S\|} \leq \|A\| + 1 \right)$$

Examinons le rapport $\frac{E_2^{(k)}-S}{\|S_k-S\|}$:

$$\frac{E_2^{(k)}-S}{\|S_k-S\|} = \frac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|} + \frac{1}{\|\Delta^2 S_k\|^2} \left[\|\Delta S_k\|^2 \frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k-S\|} - \|\Delta S_{k+1}\|^2 \frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|} \right]$$

On :

$$\frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|} = \frac{S_{k+1}-S_k}{\|S_k-S\|} = \frac{(S_{k+1}-S) + (S-S_k)}{\|S_k-S\|}$$

soit

$$\boxed{\frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|} = (A-I) \frac{S_k-S}{\|S_k-S\|} + o(1)}$$

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = \frac{S_{k+2} - S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = \frac{\|S_{k+1} - S\|}{\|S_k - S\|} \times \frac{S_{k+2} - S}{\|S_{k+1} - S\|} - \frac{S_{k+1} - S}{\|S_k - S\|}$$

comme $\frac{S_{k+2} - S}{\|S_{k+1} - S\|} = A \cdot \frac{S_{k+1} - S}{\|S_{k+1} - S\|} + o(1)$, on obtient :

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = \frac{\|S_{k+1} - S\|}{\|S_k - S\|} \left\{ A \cdot \frac{S_{k+1} - S}{\|S_{k+1} - S\|} + o(1) \right\} - A \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)$$

et puisque $\frac{\|S_{k+1} - S\|}{\|S_k - S\|}$ est borné,

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = A \cdot \frac{S_{k+1} - S}{\|S_k - S\|} - A \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)$$

$$\boxed{\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = A(A - I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)}$$

On déduit de ces différentes égalités :

$$\frac{\Delta^2 S_k}{\|S_k - S\|} = \frac{\Delta S_{k+1} - \Delta S_k}{\|S_k - S\|} = (A - I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1).$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{\|\Delta S_k\|}{\|\Delta^2 S_k\|} = \frac{\frac{\|\Delta S_k\|}{\|S_k - S\|}}{\frac{\|\Delta^2 S_k\|}{\|S_k - S\|}} = \frac{\left\| (A - I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|}{\left\| (A - I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|}}$$

On remarque d'ailleurs que toutes les quantités sont définies.

et

$$\frac{\|\Delta S_{k+1}\|}{\|\Delta^2 S_k\|} = \frac{\left\| A(A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|}{\left\| (A-I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|}.$$

On résume tout ceci par :

lemme 1

$$\frac{E_2^{(k)} - S}{\|S_k - S\|} = \left[A + \frac{\left\| (A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2}{\left\| (A-I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2} A(A-I) - \frac{\left\| A(A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2}{\left\| (A-I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2} (A-I) \right]$$

1.3 Le cas $A = \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) avec $\lambda \neq 1$

$$\text{On a } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\| = |\lambda - 1| :$$

$$\text{en effet } \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} \right\| - o(1) \leq \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|$$

$$\leq \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} \right\| + o(1)$$

$$\text{soit } |\lambda - 1| - o(1) \leq \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\| \leq |\lambda - 1| + o(1).$$

$$\text{De même } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \lambda(\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\| = |\lambda(\lambda - 1)| \text{ et}$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left\| \frac{(\lambda-1)^2 \frac{S_h - S}{\|S_h - S\|} + o(1)}{\|S_h - S\|} \right\| = (\lambda-1)^2$$

On en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left\{ A + \frac{\left\| \frac{(A-I)S_h - S}{\|S_h - S\|} + o(1) \right\|^2}{\left\| \frac{(A-I)^2 \frac{S_h - S}{\|S_h - S\|} + o(1) \right\|^2} A (A-I) - \frac{\left\| A(A-I) \frac{S_h - S}{\|S_h - S\|} + o(1) \right\|^2}{\left\| \frac{(A-I)^2 \frac{S_h - S}{\|S_h - S\|} + o(1) \right\|^2} (A-I)} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda + \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^4} \lambda (\lambda-1) - \frac{\lambda^2 (\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^4} (\lambda-1) \right\} I$$

$$= \left\{ \lambda + \frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{\lambda^2}{\lambda-1} \right\} I$$

$$= \left\{ \frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda - \lambda^2}{\lambda-1} \right\} I = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{\|E_2^{(h)} - S\|}{\|S_h - S\|} = \left\| o(1) \frac{S_h - S}{\|S_h - S\|} \right\| = o(1).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$ et soit (S_k) une suite de $\mathbb{R}^p$ vérifiant :

- * $S_k \neq S$ pour k assez grand
- * $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(S_{k+1} - S) - \lambda(S_k - S)}{\|S_k - S\|} = 0$

Alors on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{E_2^{(k)} - S}{\|S_k - S\|} = 0.$$

Remarques

a) Si de plus la suite $(\|S_k - S\|)$ est bornée on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} E_2^{(k)} = S$.

b) Soit (S_k) la suite générée par :

$$S_{k+1} = AS_k + b \quad \text{avec } (I - A) \text{ inversible.}$$

Supposons que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ soient telles que : $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p|$

Si A est une matrice réelle nécessairement $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (puisque si λ est racine du polynôme caractéristique de A il en est de même de $\bar{\lambda}$).

La suite (S_k) vérifie alors les conditions du théorème,

avec $S = (I-A)^{-1}b$.

Donc si $|\lambda_1| < 1$, (S_k) converge vers S ,
et $E_n^{(2)}$ converge vers S plus rapidement que (S_k) .

c) Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$ (on peut faire
les mêmes raisonnements dans $\mathbb{R}^p$ $p > 2$)

Soit $S_n = (x_n, y_n)$: on suppose que S_n tend
vers $S = (x, y)$ de la façon suivante ;

(i) $x_n \neq x$ pour n assez grand

(ii)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda \quad (\lambda \neq 1)$$

(iii)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x} = \lambda' \quad (\lambda' \neq 0)$$

On a alors :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0.$$

Géométriquement on a l'interprétation suivante
de (iii) :

la droite (S_n, S) tend vers une direction donnée
 (Δ) , où (Δ) est la droite passant par S de
pente λ' .

Par ailleurs on peut remarquer que (iii) peut
être une conséquence de (ii) et réciproquement

En effet regardons les deux cas suivants :

Cas 1 : $S_{n+1} = AS_n + b$ $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

On a $\frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \alpha + \beta \frac{y_n - y}{x_n - x}$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = l$ et si $\beta \neq 0$,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x}$ existe (et est non nulle si $l \neq \alpha$)

Cas 2 $S_{n+1} = \phi(S_n)$ ($S = \phi(S)$)

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \phi_2(x_n, y_n) \end{cases}$$

$$\frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \partial_1 \phi_1(x, y) + \partial_2 \phi_1(x, y) (1 + o(n)) \frac{y_n - y}{x_n - x} + o(n).$$

donc si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = l$ ($l \neq 1$) et si $\partial_2 \phi_1(x, y) \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x} = \frac{l - \partial_1 \phi_1(x, y)}{\partial_2 \phi_1(x, y)}.$$

On peut d'ailleurs remarquer que si $l = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x} = - \frac{\partial_1 \phi_1(x, y)}{\partial_2 \phi_1(x, y)} = f'(x) \text{ où } f \text{ est définie}$$

par le théorème des fonctions implicites :

localement en (x, y) , $\phi_1(u, v) = x$ si et seulement si $v = f(u)$.

On peut aussi voir que l'hypothèse " $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = l \neq 1$ "

peut être remplacée par " $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = l \neq 1$ ". [4]

exemple (due à Sadhana [7])

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{12}(x_n - y_n)^2 \\ y_{n+1} = -\frac{1}{6}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{12}(x_n - y_n)^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} (x_0, y_0) &= (6, 4) \\ (x_1, y_1) &= (0, 0) \end{aligned}$$

On peut voir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = -1$

donc $E_2^{(n)}$ accélère la convergence de la suite.

d) Soit (S_n) une suite convergeant A-linéairement.

Si on rajoute l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} = u$ ($\|u\| = 1$),

on a alors $\frac{S_{n+1} - S}{\|S_n - S\|} \rightarrow Au$. Par ailleurs on a :

$$\frac{S_{n+1} - S}{\|S_{n+1} - S\|} = \frac{\|S_n - S\|}{\|S_{n+1} - S\|} \times \frac{S_{n+1} - S}{\|S_n - S\|}, \text{ d'où } Au = \|Au\|u.$$

En conclusion: si (S_n) tend vers S A. linéairement, pour que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|}$ existe, il faut que la matrice A admette une valeur propre positive λ . Dans ce cas, $\frac{S_{n+1} - S}{\|S_n - S\|} - \lambda \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1.4 La matrice A n'est pas une homothétie.

a) Un exemple dans $\mathbb{R}^2$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$)

Pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ on a: $\|Au\| = \sqrt{2} \|u\|$. En utilisant l'expression du lemme 1, on a:

$$\frac{E_2^{(n)} - S}{\|S_n - S\|} = \left\{ A + A(A-I) - 2(A-I) \right\} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} + o(1).$$

Or $A + (A-I) - 2(A-I) = A^2 - 2(A-I) = 0$
(car $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$)

Conclusion: dans $\mathbb{R}^2$, si une suite (S_n) vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0$ avec

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|E_2^{(n)} - S\|}{\|S_n - S\|} = 0$.

b) Degré d'une suite.

On perçoit, d'après ce qui précède, que l'accélération va dépendre du degré du polynôme minimal de la matrice A , d'où l'idée de poser :

(x_n) une suite vectorielle à convergence linéaire,

$$\deg(x_n) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \text{degrés des polynômes minimaux} \\ \text{des matrices } A \text{ telles que} \\ x_n \rightarrow x \text{ } A\text{-linéairement} \end{array} \right\}.$$

On a un premier résultat :

Lemme : A et B deux matrices carrées qui commutent. Soit (x_n) une suite vectorielle qui converge vers x A -linéairement.

On pose $y_n = B x_n$. Si B est de plus inversible alors (y_n) tend vers $y = Bx$ A -linéairement.

preuve :

$$\begin{aligned} (y_{n+1} - y) - A(y_n - y) &= B(x_{n+1} - x) - AB(x_n - x) \\ &= B[(x_{n+1} - x) - A(x_n - x)] \text{ car } AB = BA. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\|x_n - x\| = \|B^{-1}(y_n - y)\| \leq \|B^{-1}\| \|y_n - y\|$$

$$\text{d'où } \frac{1}{\|y_n - y\|} \leq \frac{\|B^{-1}\|}{\|x_n - x\|}.$$

Ainsi :

$$\frac{\| (y_{n+1} - y) - A(y_n - y) \|}{\| y_n - y \|} \leq \| B \| \| B^{-1} \| \frac{\| (x_{n+1} - x) - A(x_n - x) \|}{\| x_n - x \|}$$

d'où le résultat du lemme $\square$

Faisons deux remarques :

i) si A est une matrice de polynôme minimal de degré $\deg(x_n)$, on peut en déduire que $\deg(y_n) \leq \deg(x_n)$.

ii) si B n'est pas inversible, le problème est d'avoir une inégalité du type $\frac{1}{\| y_n - y \|} \leq \frac{K}{\| x_n - x \|}$ ($K > 0$).

Pour avoir le résultat du lemme, il suffit de rajouter une hypothèse du type

$$\inf_{n \geq N} \frac{\| B(x_n - x) \|}{\| x_n - x \|} > 0.$$

. Supposons que $\deg(x_n) = \partial^0 \pi_A = k$ où π_A est le polynôme minimal de A . Faisons l'hypothèse supplémentaire que A est normale (i.e. $AA^* = A^*A$). A étant diagonalisable [5], elle possède k valeurs propres distinctes. (on se place ici dans $\mathbb{C}^p$)

Supposons, pour fixer les idées, que E_1 sous-espace

propre relatif à la valeur propre λ_1 , soit de dimension 1. Posons $\mathcal{H} = E_1^\perp$ (orthogonal de E_1) l'hyperplan $\mathcal{H}$ est stable par A et A^* et $\tilde{A}$, la restriction de A à $\mathcal{H}$, est normale. Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{C}^p$ sur $\mathcal{H}$: pour tout vecteur x on a $A \cdot p(x) = p(Ax)$.

Considérons la suite $y_n = p(x_n)$, suite des projetés dans $\mathcal{H}$: on a

$$p[(x_{n+1} - x) - A(x_n - x)] = y_{n+1} - y - \tilde{A}(y_n - y).$$

Par ailleurs $\pi_A(x) = (x - \lambda_1) Q(x)$ avec $Q(\lambda_1) \neq 0$ et $\deg Q = k-1$.

Si $x \in \mathcal{H}$, $(A - \lambda_1 I) Q(A)x = 0$, soit

$$A[Q(A)x] = \lambda_1 Q(A)x, \text{ d'où}$$

$$Q(A)x \in \mathcal{H} \cap E_1 = \{0\}. \text{ Ainsi } \pi_A^\sim = Q.$$

Pour terminer on a aussi:

$$\frac{(y_{n+1} - y) - \tilde{A}(y_n - y)}{\|y_n - y\|} = \frac{\|x_n - x\|}{\|y_n - y\|} p \left[\frac{(x_{n+1} - x) - A(x_n - x)}{\|x_n - x\|} \right]$$

Résumons tout cela par la proposition suivante:

Proposition :

Soit (x_n) une suite qui converge linéairement vers x au sens de Nierergelt, à son degré.

Supposons qu'il existe une matrice A normale, dont le polynôme minimal soit de degré k , telle que (x_n) se comporte vers x A -linéairement.

On suppose de plus que un des sous espaces propres de A est de dimension 1 et on note $\mathcal{H}$ l'hyperplan orthogonal et p la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$.

$$\text{Si } \frac{\|p(x_n - x)\|}{\|x_n - x\|} \geq \alpha > 0 \quad \forall n > N$$

alors la suite $y_n = p(x_n)$ converge vers $p(x)$

$\tilde{A}$ -linéairement, où $\tilde{A}$ est la restriction de A à $\mathcal{H}$.

De plus on a $\deg(y_n) \leq k-1$.

Si un procédé accéleère les suites à convergence linéaire de degré $\leq k-1$, on peut l'appliquer à la suite des projetés $y_n = p(x_n)$.

exemple :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_2 \neq 1 \end{array}$$

$$\pi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

Supposons que $x_n \rightarrow x$ A. linéairement.

On note $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On projette (x_n) sur $\langle e_2, \dots, e_p \rangle$: la suite des projetés y_n converge alors $\lambda_2 I_{p-1}$ (I_{p-1} identité de $\mathbb{C}^{p-1}$) si $\frac{\|y_n - y\|}{\|x_n - x\|} > \alpha$ pour n assez grand.

Le procédé E_2^m va donc accélérer la convergence de la suite (y_n) .

2. Progression de 2 colonnes en 2 colonnes.

$\mathcal{Y}'E$ - algorithme vectoriel et appliqué à une suite (S_n) de $\mathbb{R}^p$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$.

Supposons que l'on ait calculé les quantités $E_{2k}^{(n)}, E_{2k+1}^{(n)}$ pour tout $n \geq 0$ (k étant fixée), que peut-on en déduire pour $E_{2k+2}^{(n)}$ et $E_{2k+3}^{(n)}$?

Faisons les hypothèses $\mathcal{H}_k$ suivantes :

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2k}^{(n)} = S$$

$$(b) \quad \frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = a_{n,k} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = a_k \neq 1 \quad (a_k \geq 0).$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = u_k \in \mathbb{R}^p \quad (\|u_k\| = 1)$$

$$(d) \quad E_{2k+1}^{(n)} \text{ tend vers l'infini dans la direction } u_k \text{ avec la vitesse } \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} \quad \left(\text{i.e. } E_{2k+1}^{(n)} = \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k}) \right)$$

avec $e_{n,k} \rightarrow 0$
 $n \rightarrow +\infty$

On a alors :

Théorème 2 :

sous les hypothèses $\mathcal{H}_k$ on a :

$$① \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2k+2}^{(n)} = S$$

$$② \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = 0$$

$$③ \text{ si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|} \text{ existe, alors } E_{2k+3}^{(n)}$$

tend vers l'infini dans la direction de cette limite
avec la vitesse $\frac{1}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}$.

démonstration : on a $E_{2k+2}^{(n)} = E_{2k}^{(n+1)} + (\Delta E_{2k+1}^{(n)})^{-1}$

$$\text{d'où } \Delta E_{2k+2}^{(n)} = \Delta E_{2k}^{(n+1)} + \frac{\Delta E_{2k+1}^{(n+1)}}{\|\Delta E_{2k+1}^{(n+1)}\|^2} - \frac{\Delta E_{2k+1}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+1}^{(n)}\|^2}$$

$$\text{Or } E_{2k+1}^{(n)} = \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k}), \text{ ainsi}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{2k+1}^{(n)} &= \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} (u_k + e_{n+1,k}) - \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k}) \\ &= \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} \left\{ u_k + e_{n+1,k} - \frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k}) \right\} \end{aligned}$$

$$\Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)} = \frac{1}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|} \left\{ (1-a_{n,k})u_k + \varepsilon_{n+1,k} - a_{n,k} \varepsilon_{n,k} \right\}$$

On obtient alors :

$$\frac{\Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)}}{\|\Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)}\|^2} = \|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\| \times \frac{(1-a_{n,k})u_k + \varepsilon_{n+1,k} - a_{n,k} \varepsilon_{n,k}}{\|(1-a_{n,k})u_k + \varepsilon_{n+1,k} - a_{n,k} \varepsilon_{n,k}\|^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varepsilon_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|} &= \frac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|} + \frac{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+2)}\|}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|} \times \frac{(1-a_{n,k})u_k + \dots}{\|(1-a_{n,k})u_k + \dots\|^2} \\ &\quad - \frac{(1-a_{n,k})u_k + \dots}{\|(1-a_{n,k})u_k + \dots\|^2} \end{aligned}$$

En passant à la limite il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta \varepsilon_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|} = \left(1 + a \frac{(1-a)}{(1-a)^2} - \frac{1-a}{(1-a)^2} \right) u_k$$

$$1 + a \frac{(1-a)}{(1-a)^2} - \frac{1-a}{(1-a)^2} = 1 + \frac{a}{1-a} - \frac{1}{1-a} = 1 + \frac{a-1}{1-a} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta \varepsilon_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|} = 0 \text{ et comme } \frac{\Delta \varepsilon_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}\|} = \frac{\Delta \varepsilon_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|} \times \frac{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}\|}{\|\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}\|}$$

il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = 0$.

De plus $E_{2k+2}^{(n)} - S = E_{2k}^{(n)} - S + (\Delta E_{2k+1}^{(n)})^{-1}$:

or $\|(\Delta E_{2k+1}^{(n)})^{-1}\| = \frac{1}{\|\Delta E_{2k+1}^{(n)}\|} = \frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|}{\|(1-u_{n,k})u_{k+1}\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2k+2}^{(n)} = S$.

$$\begin{aligned} * E_{2k+3}^{(n)} &= E_{2k+1}^{(n+1)} - \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|^2} \\ &= \frac{1}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|} \left\{ \frac{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} \times \|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\| E_{2k+1}^{(n+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|} \right\} \end{aligned}$$

Pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} = 0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\| E_{2k+1}^{(n)}$

existe, on obtient le résultat ③ du théorème. $\square$

Références du chapitre II, deuxième partie.

- [1] C. Brezinski
Accélération de la convergence en analyse numérique,
LNM 584, Springer Verlag, Heidelberg, 1977.
- [2] C. Brezinski
Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique.
Editions Technip, Paris, 1978.
- [3] C. Brezinski. M. Redivo-Zaglia
Extrapolation Methods, Theory and Practice
North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [4] J.P. Delahaye
Sequence Transformations.
Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [5] F.R. Gantmacher
Théorie des Matrices, Dunod, Paris, 1966
- [6] Y. Niervergelt
Aitken's and Steffensen's accelerations in several
variables.
Numer. Math. 59, 295-310 (1991)
- [7] H. Sadok
Accélération de la convergence de suites réelles,
et méthodes de point fixe.
Thèse, Lille, 1988.

Chapitre III

Transformations quasi-linéaires

Sadoh a généralisé récemment au cas vectoriel la notion de procédé quasi-linéaire [4]. Dans le cas scalaire l'étude complète a été faite dans [1] par Brezis.

Nous allons tout d'abord faire quelques rappels sur cette notion, puis nous nous intéresserons aux problèmes de convergence (accélération de la convergence pour des suites à convergence linéaire, convergence de méthodes de points fixes).

1. Transformation quasi-linéaire.

Soit $E = \mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ et k un entier naturel fixé. On considère une application F de E^{k+1} dans E .

On dira que F est translatrice si :

$$F(u_0 + b, \dots, u_k + b) = F(u_0, \dots, u_k) + b$$

pour tout $(u_0, \dots, u_k) \in E^{k+1}$ et tout $b \in E$.

Sadok a montré le résultat suivant :

Théorème 1 :

soit $F: E^{k+1} \rightarrow E$ une application translatrice de classe C^2 . Il existe alors une fonction $f: E^{k+1} \rightarrow E$ de classe C^2 telle que :

$$F(u_0, \dots, u_k) = [Df(u_0, \dots, u_k)]^{-1} \cdot f(u_0, \dots, u_k)$$

avec $D^2 f(u_0, \dots, u_k) \equiv 0$.

Et on a la réciproque.

(Notation : $Df(u_0, \dots, u_k) = \frac{\partial f}{\partial u_0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k}$

$\frac{\partial f}{\partial u_i} \in L(E)$, application linéaire de E dans E)

Supposons de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$f(\alpha u_0, \dots, \alpha u_k) = \alpha^\alpha f(u_0, \dots, u_k).$$

On a alors d'une part $f(0, \dots, 0) = 0$,

et d'autre part ,

$$Df(\alpha u_0, \dots, \alpha u_k) = \alpha^{\alpha-1} Df(u_0, \dots, u_k).$$

Montrons ce dernier point :

pour $h \in E$ tel que $\|h\|$ soit assez petite on a

$$f(a\mu_0 + h, \dots, a\mu_k + h) = f(a\mu_0, \dots, a\mu_k) + Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \cdot h + o(\|h\|).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } f(a\mu_0 + h, \dots, a\mu_k + h) &= a^n f(\mu_0 + \frac{h}{a}, \dots, \mu_k + \frac{h}{a}) \\ &= a^n \left[f(\mu_0, \dots, \mu_k) + Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \frac{h}{a} + o(\|h\|) \right] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \cdot h = a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \cdot h + o(\|h\|)$$

Soit alors $\mu \in E$, $\mu \neq 0$: pour n assez grand

$$\begin{aligned} Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \frac{\mu}{n} &= a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \frac{\mu}{n} \\ &\quad + \frac{\mu}{n} \varepsilon\left(\frac{\mu}{n}\right) \left(\varepsilon\left(\frac{\mu}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \mu = a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \mu + \mu \varepsilon\left(\frac{\mu}{n}\right)$$

$$\text{ainsi } Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \mu = a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \mu \quad \square$$

En particulier si $n > 1$ on a :

$$Df(0, \dots, 0) = 0.$$

Si F est translatrice : $F = (Df)^{-1} \cdot f$.

Si de plus f est homogène, d'après ce qui précède F sera homogène de degré 1.

On dit alors que F est quasi-linéaire.

Terminons ces rappels par le calcul des opérateurs $\frac{\partial F}{\partial \mu_i}$.

Lemme 1 :

$$\text{si } F(\mu_0, \dots, \mu_k) = [Df(\mu_0, \dots, \mu_k)]^{-1} f(\mu_0, \dots, \mu_k)$$

($D^2 f \equiv 0$) alors :

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i}(\mu_0, \dots, \mu_k) \cdot \mu = [Df(\mu_0, \dots, \mu_k)]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\mu_0, \dots, \mu_k) \cdot \mu \right)$$

$$- [Df(\mu_0, \dots, \mu_k)]^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial \mu_i} (Df) \cdot \mu \circ [Df(\mu_0, \dots, \mu_k)]^{-1} \cdot f(\mu_0, \dots, \mu_k)$$

preuve : il suffit de décomposer F ,

$$\mu_0 \xrightarrow{F_1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \xrightarrow{F_2} (Df(\mu_0, \dots, \mu_k))^{-1}$$

(on calcule $\frac{\partial F}{\partial \mu_0}$)

puis

$$\mu_0 \longmapsto (F_2 \circ F_1(\mu_0), f(\mu_0, \dots, \mu_k)) \longmapsto F_2 \circ F_1(\mu_0) \cdot f(\mu_0, \dots, \mu_k)$$

et d'utiliser le théorème sur la dérivée d'une fonction composée et le résultat suivant ;

[2] l'application $\gamma: GL(E) \rightarrow GL(E)$
 $u \mapsto u^{-1}$

($GL(E)$ groupe linéaire de E) est de classe C^∞
 et $\gamma'(u).h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ pour $h \in L(E)$.

2. Accélération de la convergence.

On a le théorème suivant :

Théorème 2

Soit $f: E^{h+1} \rightarrow E$ de classe C^2 , homogène de degré $n > 1$. On considère la transformation quasi-linéaire $F = [Df]^{-1} \cdot f$, et A une matrice carrée $p \times p$.

Soit (x_n) une suite dans E qui converge A -linéairement vers $x \in E$ (i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x_{n+1}-x) - A(x_n-x)}{\|x_n-x\|} = 0$). Supposons que :

$$\forall u \in E \quad f(u, Au, \dots, A^h u) = 0.$$

S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf \left\{ \left| \det Df \left(\frac{x_n-x}{\|x_n-x\|}, A \cdot \frac{x_n-x}{\|x_n-x\|}, \dots, A^h \frac{x_n-x}{\|x_n-x\|} \right) \right| \mid n \geq N \right\} > 0$$

alors $T_n = F(x_n, \dots, x_{n+h})$ tend vers x plus rapidement que x_n

démonstration :

Remarquons que $x_{n+1} - x = A(x_n - x) + \|x_n - x\| e_{n,1}$

avec $e_{n,1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } x_{n+2} - x &= A(x_{n+1} - x) + \|x_{n+1} - x\| e_{n+1,1} \\ &= A^2(x_n - x) + \|x_n - x\| A \cdot e_{n,1} \\ &\quad + \|x_{n+1} - x\| e_{n+1,1}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \|x_{n+1} - x\| \leq \|A\| \|x_n - x\| + \|x_n - x\| \|e_{n,1}\|$$

$$\text{soit } \|x_{n+1} - x\| = O(\|x_n - x\|)$$

$$\text{d'où } x_{n+2} - x = A^2(x_n - x) + \|x_n - x\| e_{n,2} \quad e_{n,2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Plus généralement on a :

$$x_{n+i} - x = A^i(x_n - x) + \|x_n - x\| e_{n,i} \quad e_{n,i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On obtient ainsi :

$$T_n - x = F(x_n - x, \dots, x_{n+h} - x)$$

$$= \|x_n - x\| F\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, \frac{x_{n+h} - x}{\|x_n - x\|}\right)$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, \frac{x_{n+h} - x}{\|x_n - x\|}\right) &= F\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, A \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}\right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^h \frac{\partial F}{\partial u_i}\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}\right) e_{n,i} + o((e_{n,0}, \dots, e_{n,h})) \end{aligned}$$

Pour avoir le résultat voulu, il suffit donc que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_i} \left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \right) \right)_{n \geq N} \text{ soit formée}$$

dans $L(E)$. Pour cela, étant donnée l'expression de $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ obtenue dans le lemme 1, il suffit que

$$\left(Df \left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, A \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \right)^{-1} \right)_{n \geq N} \text{ soit}$$

formée dans $L(E)$, ce qui équivaut $[\exists]$ à

$$\inf \left\{ \left| \det \left(Df \left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, A \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \right) \right) \right| \right. \\ \left. n \geq N \right\} > 0 \quad \blacksquare$$

Remarques

a) On a considéré l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longmapsto & Df(u, Au, \dots, A^h u) \end{array}$$

A-t-on toujours $Df(u, Au, A^2 u, \dots, A^h u) \in GL(E)$?

Doit-on mettre des conditions sur A , sur h ?

Le problème est difficile, et regardons à titre d'exemple la situation suivante :

$$E \longrightarrow L(E)$$

$$u \longmapsto G(u, Au, \dots, A^k u)$$

$G(-)$ désignant la matrice de Gram des vecteurs $(u, Au, \dots, A^k u)$. Pour que l'on ait bien une application de E dans $L(E)$, la matrice de Gram étant d'ordre $(k+1) \times (k+1)$, il faut que $k = p-1$. D'autre part $G(u, Au, \dots, A^k u) \in GL(E)$ si et seulement si le système $(u, Au, \dots, A^k u)$ est libre : cela signifie d'une part que la matrice A est cyclique et que le degré du polynôme minimal de A pour le vecteur u est p . On aura donc pas la condition pour tous les vecteurs de l'espace E !

b) L'hypothèse ,

$\forall x \in E \quad f(x, Ax, \dots, A^k x) = 0$ entraîne que $I-A$ est inversible. En effet on a d'une part $F(x, Ax, \dots, A^k x) = 0$, et d'autre part si 1 était valeur propre de A il existerait un vecteur u tel que $Au = u$ ($u \neq 0$), d'où

$$0 = F(u, Au, \dots, A^k u) = F(u, \dots, u)$$

$$= F(0, \dots, 0) + u = u \quad !$$

3. Méthode de point fixe.

Soit à résoudre l'équation $G(x) = x$ ($x \in E$).

Soit $\bar{x}$ un point fixe de G : $G(\bar{x}) = \bar{x}$. On suppose que $A = G'(\bar{x})$ est telle que $I - A$ soit inversible. On fait sur G les mêmes hypothèses que dans le cas de la convergence quadratique de l'E-algorithme topologique.

Soit $F = [Df]^{-1} \cdot f$ une transformation quasi-linéaire sur E^{k+1} . On considère l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ donné (dans un voisinage de } \bar{x} \text{)} \\ u_0 = x_0 \\ u_i = G(u_{i-1}) \quad i = 1 \text{ à } k \\ x_{n+1} = F(u_0, \dots, u_k) \end{array} \right.$$

Théorème 3 : Si on suppose que $F(u, Au, \dots, A^k u) = 0 \forall u$

$$\text{et } \inf \left\{ \left| \det \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|}, A \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|}, \dots, A^k \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \right) \right| \mid n > N \right\} > 0$$

alors $\|x_{n+1} - \bar{x}\| = o(\|x_n - \bar{x}\|)$ si x_0 est proche de $\bar{x}$.

démonstration : elle est identique à celle de
l'exercice 2 après avoir noté que

$$\mu_i - \bar{x} = A^i (\mu_0 - \bar{x}) + O(\|\mu_0 - \bar{x}\|^2).$$

Reference du chapitre III

- [1] C. Brzezinski. Quasi-linear extrapolation processes.
In R.P. Agarwal et al., eds., Numerical Mathematics.
Singapore 1988, volume 86 of ISNM, pp 61-78, Basel, 1988.
Birkhäuser-Verlag.
- [2] H. Cartan. Cours de Calcul Differential.
2^e éd, Hermann, Paris, 1977.
- [3] Y. Nievergelt. Aitken's and Steffensen's accelerations
in several variables. Numer. Math 53, 295-310 (1991).
- [4] H. Sadokh. Quasi-linear vector processes,
à paraître.

TROISIEME PARTIE

Approximants de type Padé et
accélération de la convergence :
deux exemples .

<< Ainsi toujours poussés vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emparés sans retour,
Ne pourrions-nous jamais sur l'océan des âges
Jeter l'ancre en seul jour ? >>

Lamartine , Le Lac,
Méditations poétiques.

INTRODUCTION

Des résultats théoriques sur le choix des polynômes générateurs des approximations de type Padé [1] ont été obtenus par Eiermann [3].

En particulier on a le théorème suivant

Théorème []: Soit f une fonction entière et $(h-1|h)_f$ l'approximant de type Padé de f de polynôme générateur $v_h(z) = \prod_{i=1}^h (z - a_i)$ $a_i \in \mathbb{C}$.

Si $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = 0$, alors $\lim_{h \rightarrow +\infty} (h-1|h)_f = f(z)$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$.

De plus :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} |f(z) - (h-1|h)_f(z)|^{\frac{1}{h-1}} = 0.$$

Le théorème reste vrai pour v_h de la forme :

$$v_h(z) = (z - a_h)^h \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} a_h = 0.$$

(pour une synthèse de tous ces résultats on peut voir [2, p 77-78-79]).

Comme exemple important on a $f(z) = e^{-z}$ avec

$a_h = -\frac{1}{h}$ ($h \in \mathbb{N}^*$): ce cas a été étudié par Van Iseghem [7].

L'objectif de cette première partie est d'aborder le problème suivant: les approximations de type Padé $(h-1|h)f$ définies précédemment, accélèrent-ils la convergence des sommes partielles de la série?

Le calcul de $(h-1|h)f$ nécessitant la connaissance de $c_0, \dots, c_{h-1}$ ($f(x) = \sum_{i \geq 0} c_i x^i$), il s'agit de comparer $[f(t) - (h-1|h)f(t)]$ et $[f(t) - \sum_{i=0}^{h-1} c_i t^i]$.

Nous allons étudier les deux exemples suivants:

* $z \mapsto e^{-z}$ avec $\sigma_h(z) = (z + \frac{1}{h})^h$

* $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$ ($0 < q < 1$) avec $\sigma_h(z) = (z - q^h)^h$.

1. Approximants de type Padé de $z \mapsto e^{-z}$
dont les dénominateurs sont $(1 + \frac{z}{h})^h$

Soit $t \in \mathbb{C}^*$ et h assez grand : on considère l'approximant de type Padé $(h-1|h)$ de $z \mapsto e^{-z}$, de polynôme générateur $(z + \frac{1}{h})^h$.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, ces approximants ont été étudiés par Van Issegheem [].

En particulier Van Issegheem a retrouvé sur cet exemple les résultats du théorème de Eiermann, et a donné une expression de $(h-1|h)$ à l'aide de polynômes de Laguerre.

1.1 Notons $E_h(z)$ l'erreur :

$$E_h(z) = e^{-z} - (h-1|h)(z).$$

Nous allons établir une nouvelle majoration de $|E_h(t)|$. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1 [1, p21]

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D contenant l'origine. Soit C' un lacet simple dans ce domaine. Si on pose $C = \psi(C')$ où $\psi: z \mapsto \frac{1}{z}$, on a alors :

$$f(t) - (h-1|h)f(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^h}{\tilde{v}(t)} \int_C \frac{x^{-1} f(x^{-1}) \tilde{v}(x)}{1 - xt} dx$$

($\tilde{v}$ étant le polynôme générateur).

Théorème 1 :

Soit $t \in \mathbb{C}$ donné. Pour h assez grand on a l'inégalité suivante :

$$|E_h(t)| \leq 4 e^{|t|} \times |t|^h \times \left(\frac{\sqrt{e}}{h}\right)^h.$$

démonstration :

Soit $r > 0$ tel que $|t| < r$: on a, d'après le lemme 1,

$$E_h(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^h}{\tilde{V}(t)} \int_C \frac{z^{-1} f(z^{-1}) V(z)}{1-zt} dz$$

avec $C = \left\{ z \mid |z| = \frac{1}{h} \right\}$ $(z = \frac{e^{i\theta}}{h} \quad \theta \in [0, 2\pi])$
 et $V(z) = \left(z + \frac{1}{h}\right)^h$.

$$\int_C \frac{z^{-1} f(z^{-1}) V(z)}{1-zt} dz = \int_0^{2\pi} \frac{h e^{-i\theta} \times e^{-n e^{-i\theta}} \times \left(\frac{e^{i\theta}}{h} + \frac{1}{h}\right)^h \times \frac{i}{h} e^{i\theta} d\theta}{1 - \frac{e^{i\theta} \times t}{h}}$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{-n e^{-i\theta}} \times \left(\frac{e^{i\theta}}{h} + \frac{1}{h}\right)^h}{1 - \frac{e^{i\theta} \times t}{h}} d\theta$$

d'où $\left| \int_C \frac{z^{-1} f(z^{-1}) V(z)}{1-zt} dz \right| \leq \frac{1}{(nh)^h} \times \frac{1}{1 - \frac{|t|}{h}} \int_0^{2\pi} e^{-n \cos \theta} d\theta$

car : $\left| e^{-n} e^{-i\theta} \right| = \left| e^{-n \cos \theta} \times e^{i n \sin \theta} \right| = e^{-n \cos \theta}$

$$\left| \frac{e^{i\theta}}{n} + \frac{1}{h} \right|^h = \left(\frac{1}{nh} \right)^h (h^2 + n^2 + 2nh \cos \theta)^{\frac{h}{2}}$$

$$\left| 1 - \frac{e^{i\theta} \times t}{n} \right| \geq 1 - \frac{|t|}{n}$$

De plus on a $|\tilde{v}(t)| = \left| 1 + \frac{t}{h} \right|^h \geq \frac{1}{2} |e^t| \geq \frac{1}{2} e^{-|t|}$.

Ainsi pour $n = h$ et h assez grand on a obtenu :

$$|E_h(t)| \leq \frac{e^{|t|}}{\pi} \times \frac{|t|^h}{1 - \frac{|t|}{h}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{h} \right)^h \int_0^{2\pi} e^{-h \cos \theta} (1 + \cos \theta)^{\frac{h}{2}} d\theta$$

Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} e^{-h \cos \theta} (1 + \cos \theta)^{\frac{h}{2}} &= e^{-h \cos \theta} (2 \cos^2 \frac{\theta}{2})^{\frac{h}{2}} \\ &= (\sqrt{2})^h e^{-h \cos \theta} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|^h \\ &= (\sqrt{2})^h (e^{-\cos \theta} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|)^h. \end{aligned}$$

Soit $u(\theta) = e^{-\cos \theta} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$ $\theta \in [0; 2\pi]$: en étudiant u sur $[0; 2\pi]$ on montre que u a un maximum en $\frac{2\pi}{3}$ qui vaut $\frac{1}{2} \sqrt{e} (< 1)$.

On obtient ainsi :

$$|E_h(t)| \leq \frac{2e^{|t|}}{1 - \frac{|t|}{h}} \left(\frac{\sqrt{2}}{h} \right)^h \times |t|^h \leq 4e^{|t|} \times |t|^h \times \left(\frac{\sqrt{e}}{h} \right)^h \blacksquare$$

1.2 Considérons à présent l'erreur :

$$e_h(t) = e^{-t} - \sum_{j=0}^{h-1} \frac{(-t)^j}{j!}$$

Théorème 2 :

Soit $t \in \mathbb{C}^*$ donné. On a l'équivalence :

$$|e_h(t)| \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|t|^h}{h!}$$

démonstration :

$$e_h(t) = \sum_{j \geq h} \frac{(-t)^j}{j!} = \frac{(-t)^h}{h!} \sum_{j \geq 0} \frac{h!}{(j+h)!} (-t)^j$$

Posons $S_h(t) = \sum_{j \geq 0} \frac{h!}{(j+h)!} (-t)^j$. On a alors

$$|S_h(t) - 1| = \left| \sum_{j \geq 1} \frac{h!}{(j+h)!} (-t)^j \right| \leq \sum_{j \geq 1} \left(\frac{|t|}{h} \right)^j$$

Si $h > 2|t|$ alors $\frac{|t|}{h} < \frac{1}{2}$ d'où

$$|S_h(t) - 1| \leq \frac{\frac{|t|}{h}}{1 - \frac{|t|}{h}} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} S_h(t) = 1.$$

On $|e_h(t)| = \frac{|t|^h}{h!} \times |S_h(t)|$ d'où le résultat cherché. ■

Remarque : t étant fixé, on a pour h assez grand

$$|e_h(t)| \geq \frac{1}{2} \frac{|t|^h}{h!}$$

1.3 Nous allons à présent comparer $|E_h(t)|$ et $|e_h(t)|$.

Théorème 3 :

Soit $t \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t} - (R-1)h(t)}{e^{-t} - \sum_{j=0}^{h-1} \frac{(-t)^j}{j!}} = 0$$

Ce résultat signifie que la suite $((R-1)h(t))_{h \geq 1}$ converge plus vite vers e^{-t} que les sommes partielles $\left(\sum_{j=0}^{h-1} \frac{(-t)^j}{j!} \right)_{h \geq 1}$.

démonstration :

1) après les théorèmes 1 et 2 on a : si $t \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{|E_h(t)|}{|e_h(t)|} \leq 4 e^{|t|} \times |t|^h \times \left(\frac{\sqrt{e}}{h} \right)^h \times \frac{2h!}{|t|^h}$$

$$\text{soit } \frac{|E_h(t)|}{|e_h(t)|} \leq 8 e^{|t|} h! \left(\frac{\sqrt{e}}{h} \right)^h$$

Or, d'après la formule de Stirling, $h! \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi h} h^h e^{-h}$.
d'où $h! \left(\frac{\sqrt{e}}{h} \right)^h \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi h} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^h$ qui tend vers 0 quand $h \rightarrow +\infty$. ■

Remarque :

On aurait pu choisir comme polynôme générateur de l'approximant de type Padé $(k-1|k)$ de $z \mapsto e^{-z}$ le polynôme $(x + \rho^{-k})^k$ avec $0 < \rho < 1$.

D'après le théorème d'Eiermann on a convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$ de la suite $((k-1, k))_{k \geq 0}$ vers la fonction e^{-z} .

Par contre, les techniques de majorations du paragraphe 1.1 donnent :

$$|e^{-t} - (k-1|k)(t)| \leq \frac{\left|\frac{t}{\rho^{-k}}\right|^k 2^k}{\left(1 - \frac{|t|}{\rho^{-k}}\right)\left(1 + \frac{|t|}{\rho^{-k}}\right)^k} \sup_{\theta} \left(e^{-\frac{\rho^k}{k} \cos \theta} \times \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \right)^k$$

$$\text{Or } \sup_{\theta} \left(e^{-\frac{\rho^k}{k} \cos \theta} \times \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \right)^k = e^{\frac{1}{2} \frac{\rho^{-k}}{k}} \times \frac{1}{2^{\frac{1}{2k}}}$$

$$\text{d'où } |e^{-t} - (k-1|k)(t)| \leq \frac{\left|\frac{t}{\rho^{-k}}\right|^k}{\left(1 - \frac{|t|}{\rho^{-k}}\right)\left(1 + \frac{|t|}{\rho^{-k}}\right)^k} e^{\frac{1}{2} \times \frac{\rho^{-k}}{k}}$$

Le membre de droite est équivalent, quand k tend vers l'infini à $\left|\frac{t}{\rho^{-k}}\right|^k e^{\frac{\rho^{-k}}{2k}}$, terme qui tend vers $+\infty$.

Donc si le pôle est trop grand, on ne peut même plus démontrer la convergence par cette méthode, - car $\sup_{\theta} (e^{-\frac{n}{k} \cos \theta} |\cos \frac{\theta}{2}|) = \frac{1}{2} e^{\frac{n}{2k}}$ et le module de $f(n e^{-i\theta})$ croît beaucoup plus vite que n^k .

2. Approximants de type Padé de
 $z \mapsto \sum_{n \geq 0} p^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$ ($0 < p < 1$) de dénominateurs $(1 - zp^h)^h$.

On considère à présent la série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$
 avec

(a) $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} \times a_{n-1}}{a_n^2} = q$ où $q \in \mathbb{C}$ $|q| < 1$

Il existe alors $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$ tel que :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq p \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|. \text{ Ainsi on a } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq p^n \left| \frac{a_1}{a_0} \right|$$

et donc f est holomorphe dans tout le plan.

Des résultats de convergence sur les approximants de Padé de telles fonctions ont été obtenus par Lubinsky [5] et Lubinsky et Saff [6].

Posons : $E_h(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{h-1} a_j t^j$.

2.1 On a le résultat suivant sur l'erreur $E_h(t)$.

Théorème 4

Soit $t \in \mathbb{C}^*$ fixé. On a l'équivalence :

$$|E_h(t)| \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} |a_h| \times |t|^h$$

démonstration :

$$E_k(t) = \sum_{j \geq k} a_j t^j = a_k t^k \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^j$$

$$\text{On } \left| \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^{j+1} \right| = \left| \sum_{j \geq 1} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^j \right| \leq \sum_{j \geq 1} \left| \frac{a_{j+k}}{a_k} \right| |t|^j.$$

De plus $\frac{a_{j+k}}{a_k}$ est le produit $\frac{a_{j+k}}{a_{j+k-1}} \times \frac{a_{j+k-1}}{a_{j+k-2}} \times \dots \times \frac{a_{k+1}}{a_k}$
j termes

$$\text{d'où } \left| \frac{a_{j+k}}{a_k} \right| \leq \rho^{j+k-1} \times \rho^{j+k-2} \times \dots \times \rho^k \times \left| \frac{a_1}{a_0} \right|^j \leq \left(\rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \right)^j.$$

Pour k assez grand on a : $0 < \rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| < 1$, donc

$$\left| \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^{j+1} \right| \leq \sum_{j \geq 1} \left(\rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \times |t| \right)^j \leq \frac{\rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \times |t|}{1 - \rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \times |t|}$$

Le dernier terme tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$,
 on obtient ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^j = 1$, et du
 même coup le résultat cherché. ■

Remarque : $t \in \mathbb{C}^*$ fixé, on a pour k assez grand

$$|E_k(t)| \geq \frac{|a_k|}{2} \times |t|^k.$$

2.2 On suppose à présent que $q = p$ avec $0 < p < 1$.

On remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Il

semble donc raisonnable de considérer les approximations de type Padé $(k-1, k)$ de f de polynômes générateurs $(z - p^k)^k$ (on "envoie" les zéros des dénominateurs des type Padé vers $+\infty$).

Notons $E_k(z)$ l'erreur : $E_k(z) = f(z) - (k-1/k)(z)$.

En utilisant le lemme 1 on obtient une expression de $E_k(z)$, et d'ailleurs plus généralement on a :

Lemme 2 :

Soit $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ une fonction entière et R_k l'approximant de type Padé $(k-1/k)$ de g de polynôme générateur $V(x) = (x - \frac{1}{a})^k$ ($a \neq 0$).

On a :

$$g(t) - R_k(t) = \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{a}\right)^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{n=0}^k c_n t^n \left(\sum_{p=0}^n c_h^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) + \sum_{n=k+1}^{+\infty} c_n t^n.$$

démonstration :

d'après le Lemme 1 on a l'égalité

$$g(t) - R_k(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \int_0^{2\pi} \frac{n e^{-i\theta} g(n e^{-i\theta}) \left(\frac{e^{i\theta}}{n} - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - \frac{e^{i\theta}}{n} t} \cdot \frac{i}{n} e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \int_0^{2\pi} \sum_{m \geq 0} c_m n^{m-k} \frac{e^{-i(m+1)\theta} \left(e^{i\theta} - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - \frac{e^{i\theta}}{n} t} i e^{i\theta} d\theta$$

et comme la série converge uniformément sur $[0; 2\pi]$

$$g(t) - R_k(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{m \geq 0} c_m n^{m-k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(m+1)\theta} \left(e^{i\theta} - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - \frac{e^{i\theta}}{n} t} i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{m \geq 0} c_m n^{m-k} \int_{C_1} \frac{z^{-(m+1)} \left(z - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - z \frac{t}{n}} dz$$

où $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Posez $I_m = \int_{C_1} \frac{z^{-(m+1)} \left(z - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - z \frac{t}{n}} dz$: on remarque que

$$\frac{1}{2i\pi} I_m = \text{Res} \left(z=0, \frac{\left(z - \frac{1}{a}\right)^k}{z^{m+1} \left(1 - z \frac{t}{n}\right)} \right) \quad (\text{Res désigne}$$

le résidu).

$$\begin{aligned}
 \text{On } \frac{\left(3 - \frac{n}{a}\right)^k}{1 - 3\frac{t}{n}} &= \left(\sum_{p=0}^k C_k^p (-1)^{k-p} \frac{n^{k-p}}{a^{k-p}} z^p \right) \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{t^h}{n^h} z^h \right) \\
 &= \sum_{m \geq 0} \left[\sum_{p=0, m}^k C_k^p (-1)^{k-p} \frac{n^{k-m}}{a^{k-p}} t^{m-p} \right] z^m
 \end{aligned}$$

on en déduit que ,

$$\frac{1}{2\pi i} I_n = \left(\sum_{p=0}^m C_k^p (-1)^p a^p t^{m-p} \right) (-1)^k \frac{n^{k-m}}{a^k}$$

(avec la convention $C_k^p = 0$ si $p > k$) , puis que

$$g(t) - R_k(t) = \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{a}\right)^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{n \geq 0} c_n t^n \left(\sum_{p=0}^m C_k^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or plus } \sum_{n \geq k+1} c_n t^n \left(\sum_{p=0}^m C_k^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) \\
 &= \sum_{n \geq k+1} c_n t^n \left(\sum_{p=0}^k C_k^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) \\
 &= \sum_{n \geq k+1} c_n t^n \left(1 - \frac{a}{t}\right)^k \\
 &= \left(\frac{a}{t}\right)^k (-1)^k \left(1 - \frac{t}{a}\right)^k \sum_{n \geq k+1} c_n t^n.
 \end{aligned}$$

En conclusion , il vient :

$$g(t) - R_k(t) = \frac{(-1)^h \left(\frac{t}{a}\right)^h}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^h} \sum_0^h c_n t^n \left(\sum_{p=0}^n c_h^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) + \sum_{k+1}^{+\infty} c_n t^n \quad \square$$

On peut remarquer que :

$$\sum_0^h c_n t^n \left(\sum_{p=0}^n c_h^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) = \sum_{n=0}^h \left(\sum_{p=0}^{k-n} c_{n+p} c_h^p (-1)^p a^p \right) t^n$$

Si on applique le lemme 2 à $f(z) = \sum_{n \geq 0} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$,

on obtient :

Théorème 5

Soit $t \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(t) &= \frac{(-1)^k t^k}{(1 - t \rho^k)^k} \sum_{n=0}^h \left(\sum_{p=0}^{k-n} (-1)^p c_k^p (\rho^k)^{k-p} \rho^{\frac{(p+1)(p+1-1)}{2}} \right) t^n \\ &\quad + \sum_{n \geq k+1} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} t^n. \end{aligned}$$

Remarque :

On aurait pu prendre comme dénominateurs des approximations de type Padé les polynômes $(1 + z \rho^k)^h$. Dans les deux cas le théorème

de Eiermann nous permet de conclure quant à la convergence des approximations de type Padé.

On retrouve ce résultat directement en utilisant l'expression de $E_k(t)$ donnée par le théorème 5.

En effet on a :

$$\left| \sum_{p=0}^{k-n} (-1)^p C_k^p (p^k)^{k-p} p^{\frac{(p+n)(p+n-1)}{2}} \right| \leq \sum_{p=0}^{k-n} C_k^p (p^k)^{k-p} p^{\frac{(p+n)(p+n-1)}{2}}$$

$$\sum_{p=0}^{k-n} C_k^p (p^k)^{k-p} p^{\frac{(p+n)(p+n-1)}{2}} = p^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{p=0}^{k-n} C_k^p p^{\psi_n(p)}$$

$$(0 \leq n \leq k)$$

où la fonction ψ_n est définie par ;

$$p \in [0; k-n] \quad \psi_n(p) = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} - pk + \frac{(p+n)(p+n-1)}{2}$$

Comme $\psi_n'(p) = -k+n-\frac{1}{2}+p$, on voit que ψ_n est décroissante sur $[0; k-n]$:

$$\psi_n(0) = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } \psi_n(k-n) = nk, \text{ donc si}$$

$$p \in [0; k-n]$$

$$nk \leq \psi_n(p) \leq \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$

Ainsi :

$$\sum_{p=0}^{h-m} C_h^p (\rho^h)^{h-p} \frac{(\rho^{h-p})^{p+m-1}}{\rho^{\frac{p(m-1)}{2}}} \leq \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{p=0}^{h-m} C_h^p (\rho^h)^m$$

$$\leq 2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} (\rho^h)^m$$

d'où

$$\left| \sum_{m=0}^h \left(\sum_{p=0}^{h-m} (-1)^p (\rho^h)^{h-p} \frac{(\rho^{h-p})^{p+m-1}}{\rho^{\frac{p(m-1)}{2}}} \right) t^m \right| \leq 2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{m=0}^h (\rho^h |t|)^m$$

$$\leq \frac{2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}}}{1 - \rho^h |t|}$$

De plus $\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}}}{1 - \rho^h |t|} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{2 \times \rho^{\frac{h-1}{2}}}{(1 - \rho^h |t|)^{\frac{1}{h}}} = 0$

et comme $\sum_{m \geq h+1} \rho^{\frac{m(m-1)}{2}} t^m$ se compare, d'après la démonstration du théorème 4, comme $t^{h+1} \rho^{\frac{h(h+1)}{2}}$, on obtient :

Théorème 6

Pour $t \in \mathbb{C}$ fixé, on a :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} |E_h(t)|^{\frac{1}{h}} = 0$$

L'étude de l'accélération de la convergence est beaucoup plus délicate que dans le cas de $z \mapsto e^{-z}$: en effet nous n'avons pas de majoration de $|f(z)|$ contrairement au cas $|e^{-z}| = e^{-\Re(z)}$.

D'après les théorèmes 4. et 5., il suffit de regarder le comportement de $\sum_{n=0}^h \left(\sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_h^p (\rho^h)^{h-p} \frac{(p+1)(p+1-1)}{2} \right) t^n$ vis à vis de celui de $\rho^{\frac{h(h-1)}{2}}$ quand $h \rightarrow +\infty$.

$$\text{Or } \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{n=0}^h \left(\sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_h^p \rho^{\Psi_n(p)} \right) t^n = \sum_{n=0}^h \left(\sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_h^p (\rho^h)^{h-p} \frac{(p+1)(p+1-1)}{2} \right) t^n$$

Si $n \geq 1$ $\rho^{\Psi_n(p)-h} \leq (\rho^h)^{n-1} \leq 1$, d'où

$$\left| \sum_{n=1}^h \left(\sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_h^p \rho^{\Psi_n(p)} \right) t^n \right| \leq \rho^h \sum_{n=1}^h \left(\sum_{p=0}^{h-n} C_h^p (\rho^h)^{n-1} \right) |t|^n$$

$$\leq 2^h \rho^h \frac{|t|}{1 - \rho^h |t|}$$

Si $0 < \rho < \frac{1}{2}$ l'expression tend vers 0 quand $h \rightarrow +\infty$.

Conclusion : le comportement de $E_h(t)$ (t fixé) vis à vis de $E_h(t)$, quand $h \rightarrow +\infty$, dépend, si $0 < \rho < \frac{1}{2}$, de celui de $V_h = \sum_{p=0}^h C_h^p (-1)^p \rho^{\Psi_0(p)}$.

Remarques :

a) en faisant un changement d'indice, p en $h-p$ on voit que $u_h = (-1)^h \sum_{p=0}^h (-1)^p C_h^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$

b) Considérons les polynômes $P_h(x) = \sum_{p=0}^h C_h^p x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$

$$\text{Alors } P_h(\rho x) = \sum_{p=0}^h C_h^p x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$$

$$\begin{aligned} x P_h(\rho x) &= \sum_{p=0}^h C_h^p x^{p+1} \rho^{\frac{p(p+1)}{2} + p} \\ (l=p+1) \quad &= \sum_{l=1}^{h+1} C_h^{l-1} x^l \rho^{\frac{l(l-1)}{2}} \times \rho^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient ainsi : } \rho x P_h(x \rho) = \sum_{p=1}^{h+1} C_h^{p-1} x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}},$$

$$\begin{aligned} \text{puis} \\ P_h(x) + \rho x P_h(x \rho) &= \sum_{p=0}^h C_h^p x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}} + \sum_{p=1}^{h+1} C_h^{p-1} x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}} \\ &= 1 + \sum_{p=1}^h \left\{ C_h^p + C_h^{p-1} \right\} x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}} + x^{h+1} \rho^{\frac{(h+1)(h+2)}{2}} \end{aligned}$$

soit

$$P_h(x) + \rho x P_h(x \rho) = P_{h+1}(x).$$

c) Revenons sur le fait que nous n'avons pas de majoration intéressante $|f(z)|$. Les fonctions entières du type $f(z) = \sum_{n \geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$ ($|q| < 1$) sont d'ordre 0.

Elles sont donc en particulier de type exponentiel [4].

On pourrait espérer une majoration du type :

$|f(re^{i\theta})| \leq K e^{r\gamma(\theta)}$ où γ est une fonction de l'argument θ . C'était le cas pour e^{-z} avec

$$\gamma(\theta) = -\cos \theta$$

La transformée de Laplace de $f(z)$ est :

$$g(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{Or on a :}$$

$$\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)! \times q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)!}{(n! q^{\frac{n(n-1)}{2}})^2} = q^{\frac{n+1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q$$

la série $\sum_0^{+\infty} n! q^{\frac{n(n-1)}{2}} u^n$ définit encore une

fonction entière d'ordre 0. La seule singularité de $g(s)$ est donc 0 ce qui ne nous permet pas de conclure [4] p 312.

Références de la troisième partie :

- [1] Brezinski C. [1980]: Padé type approximation and General Orthogonal Polynomials, ISNM Vol 50, Birkhäuser - Verlag, Basel.
- [2] Brezinski C. Van Iseghem J. [1991]: Padé Approximations
- [3] Eiermann M. [1984]: On the convergence of Padé-type approximants to analytic functions, J-Comput. Appl. Math. 10, 219-227.
- [4] Henrici P. [1977]: Applied and Computational Complex Analysis V2, John Wiley and Sons, New-York.
- [5] Lubinsky D.S [1987]: Uniform Convergence of Rows of the Padé Table. Constr. Approx. 3, 307-330.
- [6] Lubinsky D.S; Saff E.B [1988]: Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth II, Constr. Approx. 4, 321-339.
- [7] Van Iseghem J. [1984]: Padé-type approximants of $\exp(-z)$ whose denominators are $(1 + \frac{z}{n})^n$, Numer - Math 43, 282-282.

QUATRIÈME PARTIE

Biorthogonalité et procédé de
Gram - Schmidt.

« Ainsi tout change, ainsi tout passe ;
Ainsi nous-mêmes nous passons ,
Hélas ! sans laisser plus de trace
Que cette barque où nous glissons
Sur cette mer où tout s'efface. »

Lamartine , Le Golfe de Baya,
Méditations poétiques.

Introduction

Rappelons tout d'abord un résultat important de factorisation des matrices carrées [2]: étant donné une matrice A d'ordre n , il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = Q.R$. De plus on peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de la matrice R soient tous positifs, et alors, dans le cas d'une matrice A inversible, la factorisation $A = QR$ correspondante est unique. Ce résultat est appelé factorisation QR et n'est rien d'autre que l'interprétation matricielle de la méthode de Householder pour la résolution d'un système linéaire $Au = b$ [4].

Si la matrice A est inversible, la factorisation QR signifie géométriquement que les vecteurs colonnes de la matrice unitaire Q , formant un système orthonormal, sont construits à partir des vecteurs colonnes de la matrice A par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Malheureusement, d'un point de vue numérique, ce procédé ne donne pas de bons résultats. On va remplacer ce procédé par un procédé de biorthonormalisation [3] et comparer les deux méthodes.

1. Procédé de Gram-Schmidt (G.S).

Les résultats exposés sont donnés dans [3] au chapitre VIII.

Le procédé de Gram-Schmidt est le suivant :
soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ des vecteurs indépendants dans $\mathbb{F}^p$,
il existe des constantes α_{ij} telles que

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{11} x_1 \\ x'_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \\ \vdots \\ x'_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \dots + \alpha_{nn} x_n \end{cases}$$

avec $\alpha_{ii} > 0$ et $(x'_i, x'_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

On peut exprimer les vecteurs x'_h à l'aide de déterminants. En effet si on note $g(u_1, \dots, u_h)$ le déterminant de Gram de $u_1, \dots, u_h$ (i.e. $g(u_1, \dots, u_h) = |(u_i, u_j)|_{1 \leq i, j \leq h}$) on a :

$$x'_h = \frac{1}{\sqrt{g(x_1, \dots, x_{h-1}) g(x_1, \dots, x_h)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_h, x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_1, x_{h-1}) & (x_2, x_{h-1}) & \dots & (x_h, x_{h-1}) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_h \end{vmatrix}$$

et si $k > 1$,

$$\alpha_{kk} = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_{k-1})}{g(x_1, \dots, x_k)}} \quad \left(\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{g(x_1)}} \right).$$

2. Biorthogonalité

Soit $x_1, x_2, \dots$ des vecteurs indépendants
 $L_1, L_2, \dots$ des formes linéaires indépendantes.

On suppose que les déterminants $G_n = |L_i(x_j)|_{1 \leq i, j \leq n}$

sont non nuls. Considérons alors [1][3] :

$$x_j^* = \frac{1}{G_{j-1}} \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_1(x_2) & \dots & L_1(x_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{j-1}(x_1) & L_{j-1}(x_2) & \dots & L_{j-1}(x_j) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j \end{vmatrix}$$

$$\text{et } L_j^* = \frac{1}{G_j} \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & \dots & L_j(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1(x_{j-1}) & L_2(x_{j-1}) & \dots & L_j(x_{j-1}) \\ L_1 & L_2 & \dots & L_j \end{vmatrix}$$

La famille (L_j^*, x_i^*) est biorthogonale, c'est à dire

$$L_j^*(x_i^*) = \delta_{ij}$$

Faisons le lien entre le procédé de Gram-Schmidt
 et le procédé de biorthogonalisation.

3. Lien entre la biorthonormalisation et G.S

Posons $L_i(x) = (x_i, x)$: on a alors

$$G_n = |(x_i, x_j)|_{1 \leq i, j \leq n} = g(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi on obtient l'expression suivante pour x_j^* :

$$x_j^* = \frac{1}{g(x_1, \dots, x_{j-1})} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_{j-1}, x_1) & (x_{j-1}, x_2) & \dots & (x_{j-1}, x_j) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_j)}{g(x_1, \dots, x_{j-1})}} \times \frac{1}{\sqrt{g(x_1, \dots, x_{j-1})g(x_1, \dots, x_j)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_j) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_{j-1}, x_1) & \dots & (x_{j-1}, x_j) \\ x_1 & \dots & x_j \end{vmatrix}$$

soit
$$x_j^* = \frac{x_j'}{\alpha_{jj}}$$

De même on a :

$$L_j^* = \alpha_{jj} x_j'$$

On peut d'ailleurs remarquer que :

$$\|x_j^*\| = \frac{1}{\alpha_{jj}} \quad \text{d'où} \quad x_j' = \frac{x_j^*}{\|x_j^*\|}.$$

4. Résolution de systèmes linéaires et interpolation.

Comme l'explique Davis dans son livre [3], il y a un lien étroit entre l'orthonormalisation et problème d'interpolation. Regardons ce lien dans le cas d'un système linéaire [1].

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Désignons par a_i le $i^{\text{ième}}$ vecteur ligne de A . Posons :

$$b = (b_1, \dots, b_n)^T \quad \text{et} \quad L_i(x) = (a_i, x).$$

Résoudre le système $Ax = b$ équivaut au problème d'interpolation suivant :

trouver x tel que $L_i(x) = b_i$ pour $i = 1 \bar{n}$.

$$\text{D'après [1] on a} \quad x = R_n = \sum_{i=1}^n L_i^*(x) a_i^*.$$

$$\text{On a de plus :} \quad R_k = R_{k-1} + \beta_k a_k^* \quad (R_0 = 0)$$

$$\text{où } R_k \text{ satisfait } \bar{a}; \quad L_i(R_k) = b_i \quad i = 1 \bar{k}$$
$$R_k \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle.$$

$$\text{et} \quad \beta_k = \frac{b_k - (a_k, R_{k-1})}{(a_k | a_k^*)}$$

En conclusion : soit $\bar{a}$ résoudre le système linéaire $Ax = b$ (A inversible), on considère

la famille des vecteurs ligne de A (a_i , $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne). On applique la méthode suivante :

* calcul des a_i^*

$$* R_k = R_{k-1} + \frac{b_k - (a_k, R_{k-1})}{(a_k, a_k^*)} a_k^* \quad (R_0 = 0)$$

$$* x = R_n = A^{-1} b$$

Remarques :

a) Le problème est de voir s'il est facile et peu coûteux de calculer les a_i^* . Le problème est à l'étude, on pourra consulter [5].

b) Considérons la factorisation QR de A^* , adjointe de A : $A^* = QR$

Si a_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A^* et q_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de Q on a $q_i = a_i'$ (procédé de Gram-Schmidt). De plus $A = R^* Q^*$ donc la résolution de $Ax = b$ équivaut à :

$$\begin{cases} R^* y = b \\ x = Q y \end{cases}$$

$$\text{d'où } x = \sum_{i=1}^n y_i a_i' = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} y_i a_i^*, \text{ soit } L_i^*(x) = \alpha_{ii} y_i,$$

ce qui établit un lien entre la méthode précédente et la factorisation QR.

References :

- [1] C. Brezinski, Biorthogonality and its applications to Numerical Analysis, Marcel Dekker, New York, in press.
- [2] P.G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, 1985.
- [3] P.J. Davis, Interpolation and Approximation Dover, New York, 1975.
- [4] A.S. Householder, The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell, New York, 1964.
- [5] Z. Da Rocha, Implementation of the recurrence relations of adjacent biorthogonal families, à paraître.

abstract

The Padé approximants and their generalizations are for many years the matter of intense researchs. Yet, many theoretical problems stay in suspense: problems of existence and unicity, problems of convergence and acceleration of convergence. The purpose of the present work was to give answers to such questions. In the first section we take an interest in vector Padé approximants of matrix series. Conditions of existence and unicity, results of convergence are given, as also the link with the theory of Lanczos method for the resolution of linear systems. We utilize also the vector Padé approximants to provide a simultaneous approximation of a function and its derivative. In the second section a sufficient condition for the quadratic convergence of the topological epsilon algorithm for systems of nonlinear equations is given. Results of acceleration of convergence are proved for the second column of the vector epsilon algorithm, and more generally for vector quasi linear transformations. The third section deals with some Padé type approximants of entire functions. In the last section a link between biorthogonality, Gram - Schmidt process, linear system and interpolation is made.

Keywords

Vector Padé approximants
Padé type approximants
Biorthogonal polynomials
Vector epsilon algorithm
Topological epsilon algorithm
Acceleration of convergence

Résumé :

Les approximants de Padé et leurs généralisations sont depuis plusieurs années l'objet d'intenses recherches, et leurs applications sont nombreuses. Beaucoup de problèmes théoriques restent cependant en suspens : problèmes tout d'abord d'existence, d'unicité, problèmes de convergence, d'accélération de convergence. L'objectif du travail présenté ici était justement d'apporter des réponses à de telles questions. Dans la première partie nous nous sommes intéressés aux approximants de Padé vectoriels de séries de matrices. Des conditions d'existence et d'unicité, des résultats de convergence sont donnés, ainsi que le lien avec la théorie de Lanczos pour la résolution de systèmes linéaires. Nous utilisons aussi les approximants de Padé vectoriels pour l'approximation simultanée d'une fonction et de sa dérivée. Dans la seconde partie une condition suffisante pour la convergence quadratique de l'épsilon algorithme topologique pour la résolution de systèmes non - linéaires est donnée. Des résultats d'accélération de convergence sont démontrés pour la deuxième colonne de l'épsilon algorithme vectoriel, et plus généralement pour des procédés quasi linéaires vectoriels. La troisième partie porte sur certains approximants de type Padé de fonctions entières. Des résultats sur l'accélération sont établis. La dernière partie fait le lien entre biorthogonalité, procédé de Gram - Schmidt, système linéaire et interpolation.

Mots clés : Approximants de Padé vectoriels

Approximants de type Padé

Polynômes biorthogonaux

Epsilon algorithme vectoriel

Epsilon algorithme topologique

Accélération de la convergence

Biorthogonalité