



**HAL**  
open science

# Mouvements de grande amplitude d'un corps flottant en fluide parfait. Application à la récupération de l'énergie des vagues.

Jean-Christophe Gilloteaux

## ► To cite this version:

Jean-Christophe Gilloteaux. Mouvements de grande amplitude d'un corps flottant en fluide parfait. Application à la récupération de l'énergie des vagues.. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2007. Français. NNT : . tel-00521689

**HAL Id: tel-00521689**

**<https://theses.hal.science/tel-00521689>**

Submitted on 28 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE**

**MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL**

*Année 2007*

N° B.U. : ED 0367 - 274

**Thèse de DOCTORAT**

***Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES ET TRANSFERTS

Présentée et soutenue publiquement par :

JEAN-CHRISTOPHE GILLOTEAUX

Le 16 Mai 2007

à l'Ecole Centrale de Nantes - France

**MOUVEMENTS DE GRANDE AMPLITUDE D'UN CORPS FLOTTANT EN FLUIDE PARFAIT.  
APPLICATION A LA RECUPERATION DE L'ENERGIE DES VAGUES**

.....

**JURY**

Président :	M. LECOINTE Yves	Professeur, Université de Nantes.
Rapporteurs :	M. BROSSARD Jérôme M. SARMENTO Antoniò	Professeur, Université du Havre. Professeur, Instituto Superior Tecnico (Lisbonne).
Examineurs :	M. ASHAR Jean-Luc M. CLEMENT Alain M. FERRANT Pierre M. PEIRANO Eric	professeur, LEGI (Grenoble). HDR, Ingénieur de recherche, Ecole Centrale de Nantes. HDR, maître de conférences, Ecole Centrale de Nantes. ingénieur de recherche, ADEME.

---

Directeur de thèse : Alain H. CLEMENT

Laboratoire : Laboratoire de Mécanique des Fluides, Equipe Hydrodynamique et Génie Océanique, Ecole Centrale de Nantes

Co-encadrant : Pierre FERRANT

Laboratoire : Laboratoire de Mécanique des Fluides, Equipe Hydrodynamique et Génie Océanique, Ecole Centrale de Nantes

## **Mouvements de grande amplitude d'un corps flottant en fluide parfait. Application à la récupération de l'énergie des vagues.**

Les corps flottants servant de capteur pour la récupération de l'énergie des vagues sont exposés, par nature, à des mers fortes et leur conception fait qu'ils seront a priori animés de grands mouvements. Cette particularité fait que la simulation numérique de leur comportement sur houle ne pourra pas se satisfaire de l'approche linéarisée.

Une part importante et fortement non-linéaire de l'excitation du flotteur tient dans les termes dits « hydrostatiques » des efforts de pression dès lors que l'on tient compte de la déformation de la surface libre et du déplacement du corps. Ils se calculent par une intégrale dont le noyau est simple, mais dont le support (la surface instantanément mouillée) est ici bien plus difficile à déterminer. Ainsi, la première partie du travail présentée est consacrée au développement d'algorithmes permettant ce suivi de surface déterminé par l'intersection de la surface libre réelle et du corps (de forme non nécessairement simple) dans sa position déplacée. Pour la partie proprement hydrodynamique du problème, il a été utilisé une approche de champ complémentaire, déjà utilisée au LMF dans d'autres contextes, et en particulier pour les modélisations couplées fluide parfait/ fluide réel. Le champ incident est donné par une représentation spectrale qui permet d'avoir dans tout l'espace une expression analytique du champ incident en formulation non-linéaire. Le problème de la perturbation du champ incident est ensuite résolu par une méthode linéaire (singularités de Kelvin), en se basant sur des logiciels développés antérieurement au LMF.

Les applications présentées concernent essentiellement la modélisation numérique du comportement du module SEAREV de récupération d'énergie des vagues.

**Mots-clés :** hydrodynamique, énergie des vagues, intersection de surfaces.

## **Large amplitude motions of floating bodies in potential theory. Application to wave energy conversion.**

Wave energy converters (WECs) will be required to operate in severe seas. The Large amplitude of motions, and thus their numerical simulation can not be satisfactorily modelled by linear theory. So the primary goal of my research was to create a potential-method model for providing numerical simulations in time domain which can be used to assess various control strategies and hull shapes in different sea states.

The first step has been to develop a 2D model to study the influence of the upper works of the SEAREV floating body. For this study, we chose to only take into account the Froude-Krylov forces on the instantaneous wetted surface. The incident wave field was given by the stream function theory of Rienecker & Fenton. The influence of the parts of upper works on the SEAREV device behavior has been realized by fixing the geometry of the hull whereas different shapes of the emerged part have been tested.

A second step has been to create a linear 3D model to show how the production matrix of the SEAREV wave energy device is modified by the directional spreading of the wave spectrum and, to determine the resulting influence on the annual production at a given test site. In this approach, the computation of the hydrodynamic coefficients is performed by using the frequency-domain seakeeping computer code AQUADYN and the computation of the memory function by using the time-domain seakeeping code ACHIL3D. A cosine power '2s' function applied to a Pierson-Moskowitz spectrum is chosen to model the spreading.

In the non-linear 3D model developed in a third stage, we have allowed the three-dimensional SEAREV device to be either floating on the free surface or completely immersed, and to undergo arbitrary six-degrees-of-freedom motions. The body motions have been described using three Cardan angles and the direct integration of the equations of motion implemented with a fourth order Runge-Kutta scheme. The fluid forces acting on the body can be non-linear with respect to certain motion variables, e.g. the quadratic component of Bernoulli's equation, the nonlinear incident potential flow. They contain "geometric" non-linearities as the forces are computed by integrating on the exact instantaneous position and wetted surface. The first-order force is calculated by a linear potential flow formulation whereas the second-order force is calculated by adding the quadratic term of Bernoulli's equation and by expanding the first-order force to the second-order using the Taylor expansion. The incident wave field is given by the stream function theory of Rienecker & Fenton as in the 2D model. Nonlinear irregular waves can also be generated by using a higher order spectral (HOS) formulation.

**Key-words:** Hydrodynamics, wave energy.



# Remerciements

Je voudrais en tout premier lieu exprimer toute ma gratitude aux deux rapporteurs de cette thèse, Messieurs Jérôme Brossard et Antoniò Sarmiento, qui ont prêté une lecture attentive à ce manuscrit, et m'ont fait part de leurs commentaires avisés. Je suis de même très reconnaissant à Messieurs Jean-Luc Achard, Eric Peirano et Yves Lecointe d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Je tiens également à remercier Alain Clément et Pierre Ferrant d'avoir accepté d'encadrer officiellement cette thèse, ainsi que de leur appui tout au long de son déroulement. Avant de rentrer dans les remerciements personnalisés, je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des thésards et post-doc que j'ai rencontré pendant ces 4 ans, car malgré des caractères assez différents, une ambiance de franche camaraderie a toujours régné au sein du laboratoire ou en-dehors d'ailleurs. Mes pensées vont également à Anne Lagatu, notre secrétaire, pour son aide toujours efficace et pour sa disponibilité constante.

Parmis l'ensemble des thésards et post-docs rencontrés au cours de ces années je tiens à en remercier spécialement un. En effet, ce serait une impolitesse de ne pas commencer par celui avec lequel j'ai passé tant de temps depuis le DEA. Romain, Romulus ou encore la Fouine pour certains, je tiens particulièrement à te remercier car ta présence m'a été plus qu'utile pendant toutes ces années. Je pense bien évidemment aux stages de kite-surf ou de mountain-board, au ski à Châtel, aux parties de tennis ou encore aux sorties en bateau mais surtout à tous ces jours passés dans le bureau D214 et à cette ambiance si particulière qui y a toujours régné. Pour tout cela merci encore!

Mes pensées viennent également aux "anciens" : Febo, Yannou, David, Mathieu (barbe rousse), Christophe, Gaele, Alban... Febo, notre théoricien à la gentillesse incroyable, celui sur lequel tu peux toujours compter jusqu'à ton pot de thèse...Yannou le champion du labo, le dévoreur de camembert ou encore l'organisateur de raid en catamaran mais surtout l'ami qu'il fait toujours bon de voir ou même d'entendre au téléphone malgré la distance. Enfin je terminerai par le plus "rital" d'entre eux ! David, encore merci pour tous tes conseils toujours avisés,

pour ton oreille attentive aux problèmes de chacun et de ta grande disponibilité notamment pour déboguer un code Latex récalcitrant la veille des vacances de Noël...

C'est ensuite à Miky Max, l'homme au trop plein d'énergie, à la guigne incroyable mais qui rebondit à chaque fois. Je ne te remercierai jamais assez de m'avoir convaincu de m'inscrire à ce stage de chute-libre un jour de Mai 2004 non loin de Meucon et qui a à jamais bouleversé ma vie...

Merci également à l'équipe Tool, Kro et Gargouille composée de Pierrot le Fou, Nico, Ducros et Ouss et plus spécialement aux deux derniers d'entre eux pour leur grande hospitalité!

Mes remerciements vont également aux membres de la "SEAREV team" : Bab, Mat et Hakim. Bab le nouveau capitaine au long court du labo, merci de tous tes conseils au cours de ma thèse, des discussions que nous avons pu avoir à propos de SEAREV et d'une mystérieuse énergie provenant de la mer... et qui je l'espère continueront dans le futur. Mat, LE tacticien, merci pour tout ces moments passés à parler avec tant de passion de sujets aussi différents les uns que les autres. Merci également pour ton savoir faire culinaire, et pour cette fabuleuse pizza qui aurait fait rougir n'importe quel napolitain!

Je tiens également à remercier mes parents, de leur constant soutien et de la confiance qu'ils m'ont toujours porté tout au long de mes études et qui m'ont permis d'en arriver là.

Enfin je terminerai par une personne que j'ai rencontré pendant cette thèse au hasard d'une chute dans les airs au-dessus du golf du Morbihan et qui depuis, a conquis mon coeur à jamais. Perrine merci pour ton soutien pendant cette thèse et notamment pendant la rédaction, période qui n'a pas été des plus faciles à gérer...

Bonne lecture.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Modèle non-linéaire 2D.</b>	<b>10</b>
<b>1 Formulations.</b>	<b>12</b>
1.1 Hypothèses, repères et notations. . . . .	12
1.2 Equations du mouvement dans l'espace 2D. . . . .	13
1.3 Bilan des efforts. . . . .	15
1.3.1 Efforts de pesanteur. . . . .	15
1.3.2 Efforts d'excitation. . . . .	15
1.3.3 Efforts dus au convertisseur d'énergie. . . . .	16
<b>2 Résolution numérique.</b>	<b>17</b>
2.1 Discrétisation des équations du mouvement. . . . .	17
2.2 Génération du champ de vagues incident. . . . .	18
2.3 Discrétisation de la surface mouillée. . . . .	19
<b>3 Validation et application.</b>	<b>23</b>
3.1 Stabilité d'une caisse parallélépipédique. . . . .	23
3.2 Influence de la forme du capot sur le comportement général du système. . . . .	24
3.2.1 Description du capot. . . . .	25
3.2.2 Comparaison des performances pour un même état de mer. . . . .	26
3.2.3 Réponse en fonction de l'amplitude et de la période du champ incident. . . . .	28
3.3 Conclusion. . . . .	31

<b>II</b>	<b>Modèle linéaire 3D.</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>Formulation et résolution du problème.</b>	<b>35</b>
4.1	Hypothèses-position du problème. . . . .	35
4.1.1	Equations générales. . . . .	35
4.1.2	Equations intégrales du problème. . . . .	37
4.2	Résolution du problème. . . . .	39
4.2.1	Approche utilisée. . . . .	39
4.3	Résolution numérique. . . . .	40
4.3.1	Equations intégrales discrètes. . . . .	40
4.4	Bilan des efforts. . . . .	41
4.4.1	Efforts du convertisseur d'énergie. . . . .	42
4.4.2	Efforts hydrostatiques. . . . .	43
4.4.3	Efforts de pression. . . . .	43
4.5	Modélisation de la houle aléatoire. . . . .	46
4.5.1	Modèle de dispersion fréquentielle. . . . .	46
4.5.2	Modèle de dispersion spatiale. . . . .	47
4.5.3	Hauteur de surface libre et force d'excitation. . . . .	47
4.5.4	Energie et puissance disponible. . . . .	49
4.6	Energie moyenne annuelle extraite. . . . .	51
<b>5</b>	<b>Influence de la directionnalité de la houle sur les performances d'un récupérateur d'énergie des vagues.</b>	<b>52</b>
5.1	Etude analytique. . . . .	52
5.2	Résultats numériques. . . . .	53
<b>III</b>	<b>Modèle non-linéaire 3D.</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Le problème particulier du calcul de la surface mouillée.</b>	<b>59</b>
6.1	Intersection de surfaces 3D, tour d'horizon bibliographique. . . . .	60
6.1.1	Représentation mathématique des courbes et des surfaces . . . . .	60
6.1.2	Types d'intersection entre deux surfaces gauches. . . . .	64
6.1.3	Intersection entre deux surfaces courbes. . . . .	64
6.1.4	Un cas particulier : l'intersection surface-plan. . . . .	69
6.2	Méthodes adoptées. . . . .	73
6.2.1	Pré-sélection des panneaux. . . . .	74
6.2.2	Calcul de l'intersection par suivi de surface libre. . . . .	75
6.2.3	Calcul analytique de l'intersection. . . . .	78

6.3	Maillage de la surface mouillée : . . . . .	82
6.3.1	Méthode transfinite. . . . .	83
6.3.2	Convergence de maillage. . . . .	87
6.4	Conclusion. . . . .	89
<b>7</b>	<b>Formulation du problème de tenue à la mer.</b>	<b>91</b>
7.1	Equations du mouvement non-linéaire dans l'espace 3D. . . . .	91
7.1.1	Définition des repères utilisés. . . . .	91
7.1.2	Détermination des matrices de passage . . . . .	92
7.1.3	Résolution du principe fondamental de la dynamique. . . . .	93
7.2	Formulation des efforts - extension au second-ordre. . . . .	94
7.2.1	Efforts de pression. . . . .	94
7.2.2	Efforts de pesanteur. . . . .	102
7.2.3	Efforts d'ancrage. . . . .	103
7.2.4	Efforts dus au pendule. . . . .	103
<b>8</b>	<b>Résolution et résultats numériques.</b>	<b>105</b>
8.1	Efforts hydrostatiques. . . . .	105
8.2	Efforts de Froude-Krylov. . . . .	106
8.3	Efforts de radiation. . . . .	109
8.4	Efforts de diffraction. . . . .	110
8.5	Extension au second-ordre. . . . .	113
8.5.1	Evaluation des gradients surfaciques. . . . .	113
8.6	Vérifications numériques. . . . .	116
8.6.1	Cas test d'un flotteur cubique. . . . .	116
8.6.2	Cas test du cylindre vertical. . . . .	122
8.7	Intégration en temps : choix de la méthode et influence du pas de temps. . . . .	123
8.7.1	Choix de la méthode. . . . .	123
8.7.2	Influence du pas de temps. . . . .	123
<b>9</b>	<b>Validations expérimentales.</b>	<b>126</b>
9.0.3	Description du dispositif expérimental. . . . .	127
9.1	Essais d'extinction de tangage. . . . .	127
9.2	Simulation sur houle régulière. . . . .	132
9.2.1	Modélisation du champ de vagues incident. . . . .	132
9.2.2	Résultats numériques. . . . .	134
	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>145</b>

<b>Annexes</b>	<b>153</b>
<b>A : Détails des termes composant la matrice de masse M dans l'équation du mouvement.</b>	<b>153</b>
<b>B : Dimensions et caractéristiques mécaniques des flotteurs SEAREV utilisés.</b>	<b>158</b>
<b>C : Exemples d'intersections de surfaces.</b>	<b>159</b>



# Table des figures

1	Evolution des cours du pétrole brut de 2003 à nos jours. . . . .	1
2	Représentation artistique en coupe du système SEAREV. . . . .	3
3	Classement des différentes approches rencontrées en tenue à la mer.	6
1.1	Repère lié au flotteur. . . . .	13
2.1	Profils adimensionnels de surface libre en profondeur infinie. . . . .	18
2.2	Exemple de contour obtenu à partir de la forme 3D. . . . .	19
2.3	Allure de la fonction test et comparaison des vitesses de convergence des deux méthodes de dichotomie. . . . .	21
2.4	Exemple de discrétisation possible. . . . .	21
3.1	condition de stabilité transversale d'une caisse parallélépipédique. . .	24
3.2	Déroulement d'une simulation d'extinction de roulis. . . . .	25
3.3	Description et paramétrisation du capot. . . . .	26
3.4	Types de capot retenus. . . . .	27
3.5	Evolution temporelle des mouvements de tangage et des mouve- ments du pendule pour les flotteurs de type SEAREV_Triangle, SEAREV_Rectangle, SEAREV_4cotes, SEAREV_2TrianglesBis et SEAREV_2Triangles. . . . .	29
3.6	Réponse des amplitudes des trois premières harmoniques de Fourier en fonction de l'amplitude et de la période du champ incident pour le flotteur SEAREV_rectangle. . . . .	30
3.7	Réponse des amplitudes des trois premières harmoniques de Fourier en fonction de l'amplitude et de la période du champ incident pour le flotteur SEAREV_Triangle. . . . .	31
3.8	Réponse des amplitudes des trois premières harmoniques de Fourier en fonction de l'amplitude et de la période du champ incident pour le flotteur SEAREV_2Triangles. . . . .	31
4.1	Volume fluide. . . . .	38

4.2	Répartition statistique (scatter-diagram) des états de mer pour le site de l'île d'Yeu. . . . .	48
4.3	Représentation de la répartition des vagues autour de la position du SEAREV. . . . .	50
4.4	Distribution angulaire idéale pour le modèle cosine power . . . . .	50
5.1	Comportement des fonctions G, Q et H en fonction de s. . . . .	53
5.2	Variation du taux de capture en fonction du paramètre de dispersion s. . . . .	55
5.3	Réponse en roulis et en tangage dans le cas d'un spectre de houle directionnel pour s=2 et s=100. . . . .	56
6.1	Représentations mathématiques des courbes et surfaces. . . . .	63
6.2	Exemple de courbe semi-ouverte d'intersection. . . . .	65
6.3	Principe de la grille d'arrière-plan. . . . .	66
6.4	Principe du suivi de contour. . . . .	67
6.5	Classement des domaines paramétriques selon une relation 4-connexe . . . . .	71
6.6	Vue d'artiste de la géométrie d'un flotteur SEAREV . . . . .	74
6.7	Exemple de renumérotation d'un panneau : le sommet n°1 est celui dont la valeur en z est la plus petite, le sens de numérotation pour la suite est le sens horaire. . . . .	75
6.8	Exemple de repère pour un panneau quelconque. . . . .	76
6.9	Présentation des trois types d'intersection retenus. . . . .	78
6.10	Définition des repères utilisés lors de la recherche des points d'intersection. . . . .	82
6.11	Cas particuliers d'intersection entre la surface libre et un panneau ABCD quelconque. . . . .	82
6.12	Définition d'un carreau de Coons . . . . .	84
6.13	Sommets des carreaux de Coons. . . . .	85
6.14	Frontières des carreaux de Coons. . . . .	85
6.15	Résultat de l'interpolation transfinie. . . . .	85
6.16	Exemple de résultat obtenu à l'aide du critère de raffinement automatique appliqué sur les panneaux contenant la surface libre. Figure du haut : sans raffinement automatique. Figure du bas : avec raffinement automatique. . . . .	87
6.17	Influence du maillage sur la valeur de l'effort moyen total en cavale-ment, embardée, roulis, tangage et lacet ( $F_x$ , $F_y$ , $M_{mtx}$ , $M_{mty}$ , $M_{mtz}$ ) ainsi que sur les composantes statiques et dynamiques de Froude-Krylov (FKS1, FKS2, FKS4, FKS5 FKS6 et FKD1, FKD2, FKD4, FKD5 FKD6). . . . .	88

6.18	Procédure de discrétisation de la surface mouillée. . . . .	90
7.1	Définition des repères utilisés. . . . .	91
7.2	Exemple de contours de pression dus à la composante dynamique du champ incident. . . . .	95
7.3	Mouvements pris en compte lors du développement de Taylor autour de la position moyenne du flotteur. . . . .	101
8.1	Comparaison des moments de redressement en tangage et roulis entre le logiciel commercial Multisurf© et le programme <i>STAB3D</i> pour le flotteur DES2595. . . . .	106
8.2	Exemple de maillage de la surface mouillée utilisée pour le calcul des efforts de Froude-Krylov. . . . .	107
8.3	Comparaison des efforts de Froude-Krylov en cavalemt calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et par la méthode présentée ici. . . . .	108
8.4	Comparaison des efforts de Froude-Krylov en tangage calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et par la méthode présentée ici. . . . .	109
8.5	Comparaison du déroulement d'une simulation de lâchers de roulis et de tangage par une méthode potentielle linéaire et la méthode exposée ici. . . . .	110
8.6	Comparaison des efforts de diffraction en cavalemt calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et la méthode présentée ici. Le corps est le flotteur SEAREV de type DES1451 et la houle incidente est régulière de période 7 secondes et d'amplitude 0,1 mètre. . . . .	112
8.7	Comparaison des efforts de diffraction en pilonnement calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et la méthode présentée ici. Le corps est le flotteur SEAREV de type DES1451 et la houle incidente est régulière de période 7 secondes et d'amplitude 0,1 mètre. . . . .	113
8.8	Possibilités d'évaluation des gradients surfaciques. . . . .	114
8.9	Exemple de maillage utilisé pour ACHIL3D. . . . .	114
8.10	Les différents types de voisinage rencontrés. . . . .	115
8.11	Essais d'extinction en pilonnement d'un flotteur cubique avec pour amplitude de départ $Z_0=0,1$ m et $Z_0=1$ m. Comparaison entre un modèle 3D linéaire et le modele 3D nonlinéaire. . . . .	118

8.12	Essai d’extinction de tangage avec pour amplitude initiale $\theta_0=1^\circ$ . Comparaison de l’évolution temporelle des mouvements de cavalement, de tangage et du pendule entre un modèle 3D linéaire et le modèle 3D nonlinéaire.	119
8.13	Essai d’extinction de tangage avec pour amplitude initiale $\theta_0=10^\circ$ . Comparaison de l’évolution temporelle des mouvements de cavalement, de tangage et du pendule entre un modèle 3D linéaire et le modèle 3D nonlinéaire.	120
8.14	Cube soumis à une houle régulière d’amplitude 0,1m et de période 8s. Comparaison des efforts en cavalement, pilonnement et roulis entre le code potentiel linéaire AQUAPLUS et le code potentiel nonlinéaire SEAREV3D.	121
8.15	Efforts de dérive suivant l’axe de propagation de la houle dans le cas d’un cylindre vertical $H/R_0 = 10$ .	122
8.16	Comparaison de résultats temporels en tangage pour différents pas de temps.	124
8.17	Zoom [10,5..14]	125
8.18	Zoom sur l’intervalle de temps [50..60]	125
9.1	Photo de la maquette SEAREV à l’échelle 1/12	128
9.2	Schéma du dispositif expérimental.	128
9.3	Illustration des trois angles de tangage initiaux des différents essais d’extinction.	129
9.4	Déroulement de 3 essais d’extinction de tangage. Comparaison numérique/expériences.	131
9.5	Situation du problème lors de l’interpolation spatiale des vitesses et pression sur la surface mouillée.	133
9.6	Réponse en tangage des amplitudes des deux premières harmoniques dans le cas d’une houle d’amplitude 0,083 m (échelle maquette) et avec $B_{pto}=6,37$ N.m.s.	135
9.7	Réponse en tangage des deux premières harmoniques dans le cas d’une houle d’amplitude 0,042 m et avec $B_{pto}=1,39$ N.m.s.	136
9.8	Cliché d’un impact de slamming observé lors des essais expérimentaux.	137
9.9	Comparaison numérique/expérimental du mouvement de tangage dans le cas d’une mer régulière d’amplitude 0,083 m et de fréquence 0,48Hz et pour un $B_{PTO} = 6,97$ N.m.s.	138
9.10	Comparaison numérique/expérimental du mouvement du pendule dans le cas d’une mer régulière d’amplitude 0,083 m et de fréquence 0,48Hz et pour un $B_{PTO} = 6,97$ N.m.s.	138

9.11	Comparaison numérique/expérimental du mouvement de tangage dans le cas d'une mer régulière d'amplitude 0,042 m et de fréquence 0,50Hz et pour un $B_{PTO} = 1,39$ N.m.s. . . . .	139
9.12	Comparaison numérique/expérimental du mouvement du pendule dans le cas d'une mer régulière d'amplitude 0,042 m et de fréquence 0,50Hz et pour un $B_{PTO} = 1,39$ N.m.s. . . . .	139
9.13	Composantes du moment de tangage dans le cas d'une houle régulière d'amplitude 0,083m, de fréquence 0,52Hz et pour $B_{pto}=6,97$ N.m.s. . . . .	140
9.14	Composantes du moment de tangage dans le cas d'une houle régulière d'amplitude 0,042m, de fréquence 0,56Hz et pour $B_{pto}=1,39$ N.m.s. . . . .	140
9.15	Amortissement en roulis de la maquette SEAREV. Comparaison entre valeurs expérimentales, numériques avec radiation seule et numériques avec radiation plus terme correctif. . . . .	142
9.16	Evolution temporelle des mouvements de roulis, tangage et lacet dans le cas de la maquette SEAREV pour une houle régulière de période 2,3 s et de hauteur 0,16 m. . . . .	143
9.17	Tableau récapitulatif des différents modèles numériques présentés dans la thèse. . . . .	145



# Introduction.

Cet été 2006 aura vu une flambée historique du prix du pétrole qui a battu un nouveau record en franchissant la barre des 75 dollars le baril. Le spectre du fameux "Pic de Hubert", ce moment à partir duquel la production mondiale de pétrole va commencer à baisser faute de réserves, plane de plus en plus au-dessus de nos têtes. En effet, contrairement aux chocs pétroliers de 1973-1974 et de 1979-1980, cette hausse complètement inattendue n'est pas seulement due à des facteurs géopolitiques mais aussi à l'équilibre entre l'offre et la demande et à l'accélération inattendue du rythme d'accroissement des besoins de consommation.

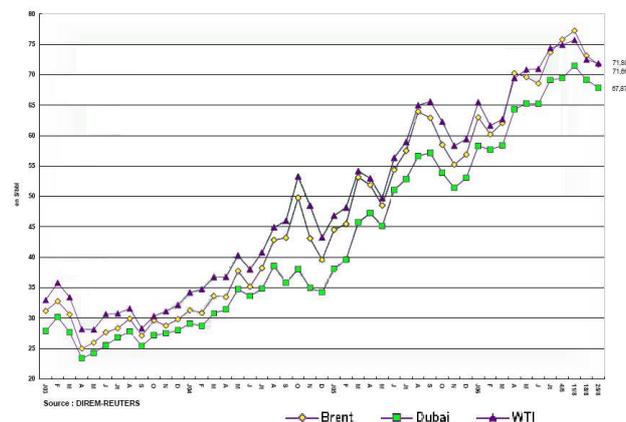


FIG. 1 – Evolution des cours du pétrole brut de 2003 à nos jours.

Dans un tel contexte, le recours aux énergies renouvelables, non émettrices de gaz à effet de serre, est en train de devenir une priorité économique, technologique et politique. Ainsi, depuis un certain nombre d'années, toutes sortes d'énergies renouvelables ont vu le jour : l'énergie solaire, l'énergie éolienne, l'énergie hydraulique, l'énergie géothermique et celle qui nous intéresse ici : l'énergie des vagues.

Cette source d'énergie, issue de l'océan, prend en fait sa source dans l'air et plus précisément dans le vent. En effet, lors de l'action du souffle du vent sur l'océan, une partie de l'énergie libérée est transmise à la mer créant alors des vagues d'autant plus grandes que le vent souffle fort et sur une longue durée. Outre le fait d'être gratuite et renouvelable, cette énergie a également l'avantage de ne pratiquement pas se dissiper lors du transport des vagues jusqu'aux côtes et cela même sur des

distances de plusieurs milliers de kilomètres. Quant à sa puissance, qui n'a jamais assisté au spectacle de vagues explosant contre des rochers un jour de tempête...

La première personne à avoir créé un système permettant d'exploiter cette énergie fut Yoshio Masuda. Ce japonais, considéré comme le père de la technologie "énergie des vagues", a inventé dans les années 40 une bouée se déplaçant à l'aide d'une turbine à air. En dehors de ce cas isolé, le réel départ du développement de ces nouvelles technologies se situe au début des années 70. La période suivant la première crise pétrolière de 1973 a en effet vu un nombre croissant de projets voir le jour comme le rapporte McCormick [17] qui en recense un millier en 1981. L'évolution des systèmes récupérateurs d'énergie des vagues nous amène depuis un certain nombre d'années à des systèmes installés en mer. En effet, alors que la première génération (brevet Girard 1799) était constituée de systèmes principalement côtiers, peu à peu ces derniers "ont pris le large" et se sont installés à quelques miles des côtes. Ces systèmes appelés offshore system ont, en plus du fait de ne plus dégrader les côtes, le net avantage de pouvoir recevoir une énergie non dissipée par les effets de fond dus à la diminution de la profondeur.

Dès le début des années 80, le Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes s'est intéressé à l'énergie des vagues et a commencé à réfléchir à des moyens de la récupérer. Fruit de ces années d'expérience, le système SEAREV (Système Electrique Autonome de Récupération de l'Energie des Vagues) est apparu. Son principe s'inscrit dans la dernière génération de système récupérateur d'énergie des vagues. Considérons tout d'abord un flotteur complètement clos à l'intérieur duquel est installé une masse mobile assimilable à un pendule. En mer et sous l'action de la houle, le flotteur peut se mouvoir selon toutes les directions et dans tous les sens. La masse mobile est alors sollicitée et développe, elle aussi, des mouvements qui lui sont propres. Il se crée alors un mouvement relatif entre le flotteur et la masse mobile qui est alors exploité pour actionner un convertisseur d'énergie mécanique en énergie électrique.

Le déroulement du projet SEAREV peut se décomposer en quatre étapes. La première correspond à la phase de recherche et de développement. Elle comprend les différentes études théoriques et numériques, que ce soit au niveau des modèles hydromécaniques que des algorithmes de contrôle, comme des campagnes d'expérimentation permettant de les valider. La seconde étape concerne le développement industriel où des études de recherche appliquée et de conception sont menées à bien afin de valider la rentabilité commerciale du système. L'étape suivante est celle de réalisation à proprement parlé. Un prototype est alors construit pour servir à valider de manière définitive les études de conception et de gestion de projet. Enfin la quatrième et dernière étape, constituant le parachèvement du projet, est le développement commercial du système SEAREV sur le marché des énergies renouvelables.

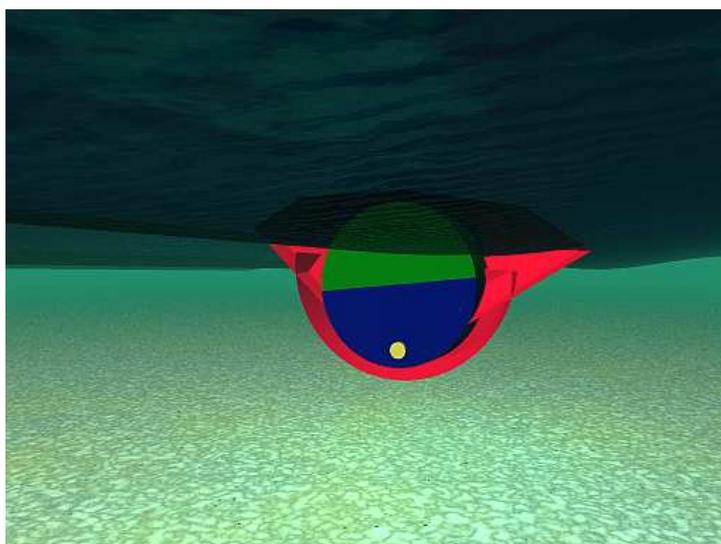


FIG. 2 – Représentation artistique en coupe du système SEAREV.

De manière générale, le développement de tout système à énergie des vagues passe par la résolution d'un certain nombre de problèmes. Le plus important d'entre eux se situe au niveau de la modélisation numérique du champ de vagues créé par la houle rencontrant le flotteur alors en mouvement. Les suivants ne sont pas d'ordre numérique mais plutôt d'ordre pratique. Le problème se pose notamment quant à la création du système récupérant cette énergie appelé Power-Take-Off (PTO). Le système doit en effet prendre en compte le fait que l'énergie transportée par les vagues est un phénomène variationnel. Plus précisément, la variabilité de ce flux d'énergie se fait selon trois échelles de temps : l'une dure quelques secondes et correspond à l'arrivée des vagues successives, une autre a trait à la durée de l'état de mer qui peut varier de quelques heures à quelques jours et enfin l'échelle de temps la plus longue à savoir les variations saisonnières qui s'étalent sur plusieurs mois. Le problème de la survivabilité et du comportement de l'ensemble de la structure lors de tempêtes, par exemple, est un sujet important qui doit être également résolu.

Le projet SEAREV est actuellement dans la phase de recherche et développement, l'ensemble des problèmes énumérés précédemment font donc partie de travaux qui sont ou ont été menés. Le travail présenté dans cette thèse ainsi que les campagnes d'essai en bassin réalisées avec la maquette prototype annoncent en quelque sorte la fin de cette étape. L'un des objectifs de cette phase est de réaliser un modèle numérique du système le plus complet et le plus proche de la physique. Les essais expérimentaux représentant un coût trop important, les méthodes numériques se présentent en effet comme la seule alternative à la création d'un outil pour le développement et l'optimisation du système SEAREV. Ce modèle, appelé Wave To Wire (W2W), est très complexe d'où la décision de s'en approcher par étapes successives. La première étape, réalisée lors de la thèse d'Aurélien Babarit [1], a consisté en la réalisation d'un modèle numérique hybride du récupérateur de l'énergie des vagues dans lequel l'hydrodynamique est linéarisée alors que la

cinématique est totalement non-linéaire. Ce modèle a permis de valider le concept initial et le principe utilisé. Il a notamment été utile pour le développement du PTO et à la recherche de loi de commande pour le contrôle par latching. Il a permis également une première approche de la modélisation des efforts hydrodynamiques mais reste cependant pas assez précis lors de mouvements de grande amplitude et inefficace pour des tests de survivabilité. Les systèmes de récupération d'énergie des vagues seront par nature soumis à des états de mer importants les contraignant à des mouvements qui seront a priori de grande amplitude. La simulation numérique de tels comportements ne pouvant se satisfaire d'une approche linéaire, le développement d'un modèle non-linéaire que ce soit au niveau de la modélisation des mouvements que des efforts hydrodynamiques est une nécessité. C'est dans ce but que le travail présenté dans ce rapport a été effectué.

La modélisation de l'ensemble des efforts hydrodynamiques agissant sur un navire soumis à la houle représente depuis longtemps un enjeu très important. Dès 1898, Krylov présenta la première méthode permettant le calcul du chargement hydrodynamique d'un navire dans les vagues. Cette méthode partait de l'hypothèse que la présence du navire ne perturbe en rien le champ de vagues incident, hypothèse connue aujourd'hui sous le nom : "hypothèse de Froude-Krylov". Froude et Mitchell ([28]) se sont intéressés à la même époque au problème de résistance à l'avancement. Les premières solutions analytiques sont proposées par Havelock en 1940 [61] pour le problème de tenue à la mer sans vitesse d'avance (au point fixe). Fondées sur l'hypothèse du bateau mince, les comparaisons avec des résultats expérimentaux n'étaient cependant pas satisfaisantes.

Toutes ces méthodes analytiques ou empiriques ont laissé place peu à peu aux techniques numériques. C'est ainsi, que depuis une cinquantaine d'années et l'arrivée de l'informatique, l'intérêt des méthodes numériques pour résoudre le problème de tenue à la mer n'a cessé de grandir. De nombreuses techniques ont ainsi été développées, allant de la plus simple avec la théorie des corps minces (slender-body theory), jusqu'à la plus complexe du calcul des équations complètement non-linéaires de Navier-Stokes. La complexité du problème et les limitations informatiques de l'époque ont incité les chercheurs à développer des théories basées sur différentes hypothèses simplificatrices.

C'est ainsi que durant les années 50, le développement de plusieurs théories autour de l'idée d'un corps élancé telle que la méthode des corps minces et la méthode des tranches (strip theory) ont vus le jour. Le problème est traditionnellement linéarisé et formulé dans le domaine fréquentiel, en supposant de petits mouvements et une réponse temporelle harmonique. La formulation fait alors apparaître un problème aux frontières. Korvin-Kroukovsky introduit en 1955 [9] une méthode qui consiste à décomposer le problème tridimensionnel initial en une somme de problèmes bidimensionnels. Salvesen [45] résout en 1970 le problème aux limites par une approche similaire appelée méthode des tranches. Plusieurs améliorations ont

par la suite été apportées, notamment la prise en compte de la vitesse d'avance par l'intermédiaire de termes correctifs (Ogilvie et Tuck, [60]). Cette approche s'est très vite imposée comme une méthode de prédiction très pratique et a été très largement utilisée en ingénierie. Cependant, elle ne peut pas calculer la distribution de pression sur la carène si ce n'est que sur certaines tranches, elle donne également des résultats peu satisfaisants aux basses fréquences. Le développement de l'informatique et la puissance de calcul augmentant, le développement de théories tridimensionnelles est apparu. Le problème aux frontières est alors résolu par une distribution de singularités sur la surface de la carène considérée au repos. La méthode ne présentant pas de problèmes pour le cas du corps fixe, elle rencontra un vif succès et est devenue un outil standard pour le calcul de structures offshore (Korsmeyer [20]).

Au cours des années 60, Wehausen et Laitone [29] ont proposé une expression de la fonction de Green pour une source pulsante se déplaçant à vitesse constante en profondeur infinie. En 1968, les français Lebreton et Margnac [27] furent les premiers à utiliser la fonction de Green de diffraction-radiation sans vitesse d'avance. Cette méthode s'est depuis imposée pour la résolution des problèmes de tenue à la mer au point fixe. En 1977, Chang [42] et Bessho [37] proposent deux formulations de la fonction de Green de diffraction-radiation avec vitesse d'avance, suivent Inglis et Price [55] puis Guével et Bougis [49]. Des difficultés liées au calcul de cette fonction ont incité les auteurs à se tourner vers les méthodes de Rankine. Ces méthodes permettent en effet de s'affranchir des difficultés numériques de la fonction de Green en distribuant des singularités sur une portion de la surface-libre en plus du corps. Il est alors possible de considérer des conditions de surface-libre plus complexes.

Dans les années 90, les premières méthodes de Rankine ont ainsi été utilisées pour résoudre le problème temporel avec une condition de surface libre complètement non-linéaire (Beck et al. [52], Ba et al. [36], Ferrant [48]). Malgré les avantages des méthodes énumérées précédemment, il est apparu plusieurs difficultés. L'obligation notamment d'appliquer une condition de radiation permettant aux vagues créées près du corps de s'éloigner de celui-ci, et plus particulièrement lorsqu'il y a création d'un groupe de vagues se propageant en avant du corps. Il y a également l'influence du maillage qui conditionne la qualité des résultats, rendant difficile le contrôle de la précision et la stabilité des calculs. L'informatique ayant progressé entre-temps, les travaux sur les fonctions de Green et les singularités de Kelvin ont pu reprendre. Ces méthodes satisfaisant automatiquement la condition de radiation et la condition dynamique de surface-libre linéarisée ont permis d'échapper aux problèmes liés aux méthodes de Rankine précédentes.

Actuellement, les difficultés majeures en tenue à la mer se situent au niveau des non-linéarités. Il y a tout d'abord les non-linéarités associées au fluide, où interviennent les effets visqueux et le terme quadratique de l'équation de Bernoulli. Il y a également les non-linéarités liées au comportement de la surface libre qui interviennent dans les conditions aux frontières au niveau mais aussi sur la forme même de la déformée de la surface libre. Il y a enfin les non-linéarités dues à la géométrie du flotteur impliquant un comportement non-linéaire des efforts hy-

drostatiques ainsi qu’au niveau de l’intersection entre le corps et la surface libre. Comme nous l’avons vu précédemment, certains de ces problèmes peuvent être contournés en apportant certaines hypothèses simplificatrices, notamment en prenant en compte la vitesse d’avance. Les navires sont alors considérés comme longs et effilés, créant de faibles perturbations au niveau du champ de vague incident qui sont alors négligées.

L’étude des mouvements de grande amplitude de navire sur houle a trouvé un très vif intérêt ces 40 dernières années. La nature hautement non-linéaire et imprévisible de certains phénomènes rencontrés par des navires en mer a motivé de nombreuses recherches qu’elles soient théoriques ou expérimentales. En effet, les tests de survivabilité pour des cas de mer extrêmes, les cas de résonance paramétrique ou plus récemment l’étude du problème particulier d’abordage (*broaching*) sont tous des phénomènes qui doivent passer par une modélisation numérique non-linéaire que ce soit au niveau des mouvements que des efforts hydrodynamiques. De manière générale, les approches fluide parfait utilisées en tenue à la mer peuvent se diviser en quatre groupes.

Ces méthodes sont les plus évoluées actuellement où le problème hydrodynamique est résolu directement dans le domaine temporel. Les différents groupes peuvent être distingués selon le degré de complexité avec lequel s’effectue le calcul des efforts.

Le premier niveau de complexité correspond aux codes dont la partie immergée ne varie pas dans le temps et dont l’ensemble des efforts hydrodynamiques est résolu linéairement. Dans ce cas, le problème aux limites est résolu une bonne fois pour toute et les quantités hydrodynamiques en découlant sont ré-utilisées à chaque pas de temps.

Dans le second niveau de complexité, le problème hydrodynamique non-linéaire est toujours résolu linéairement, seuls les efforts hydrostatiques et les efforts de Froude-Krylov sont évalués sur la surface mouillée délimitée par la hauteur de surface libre du champ de vague incident non perturbé.

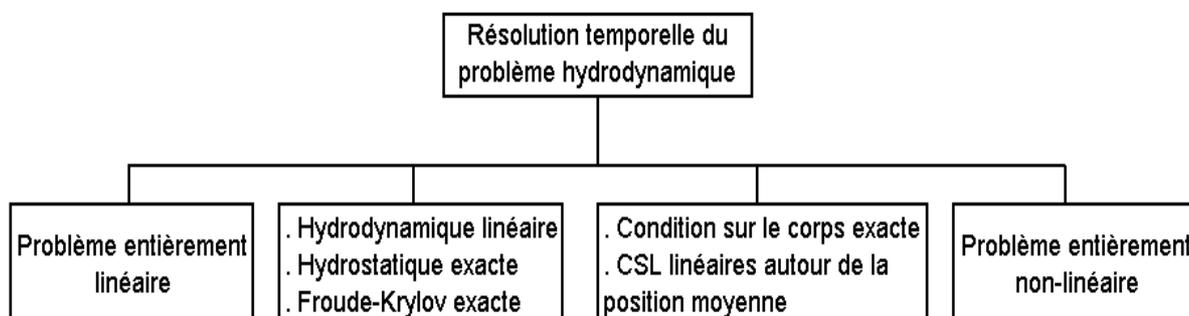


FIG. 3 – Classement des différentes approches rencontrées en tenue à la mer.

Le troisième niveau de complexité prend en compte les mouvements du flotteur et les changements géométriques de la surface mouillée. Les termes hydrodynamiques sont alors calculés en utilisant la condition exacte de glissement sur le corps appliquée sur la surface mouillée instantanée. La condition de surface libre est linéarisée autour de la position moyenne de la surface libre ou autour de la surface du champ de vague incident.

Enfin, il y a les modèles complètement non-linéaires. Ce problème a été résolu par de nombreux chercheurs que ce soit dans l'espace bidimensionnel ou tridimensionnel en utilisant une large variété de méthodes. Pour le problème de tenue à la mer la technique la plus communément appliquée est la méthode mixte d'Euler Lagrange (*MEL*). Cette méthode, développée à l'origine par Longuet-Higgins et Cockett [43], résoud à chaque pas de temps un problème mixte aux frontières. Il y a tout d'abord une étape eulérienne dans laquelle le potentiel est connu sur la surface libre et la vitesse normale sur la carène. L'étape lagrangienne consiste ensuite à utiliser les conditions de surface libre non-linéaires pour suivre l'évolution des amplitudes de la surface libre et la valeur du potentiel sur la surface libre.

Ces différentes approches sont adoptées aussi bien par les méthodes utilisant la fonction de Green tridimensionnelle que par celles basées sur des sources de Rankine. Les méthodes utilisant la fonction de Green ont uniquement besoin de la discrétisation de la carène. Les singularités sont alors localisées sur cette frontière discrétisée et satisfont la condition de surface libre. Une méthode alternative à celle des fonctions de Green est celle des sources de Rankine. Les singularités sont beaucoup plus simple à calculer mais ne satisfont pas la condition de surface-libre obligeant le domaine de discrétisation à inclure la surface-libre.

Deux programmes ressortent parmi toutes ces approches. Il y a tout d'abord, le programme LAMP (*Large-Amplitude-Motion-Program*) développé par le Ship Technology Division of Science Applications International Corporation [63]. C'est l'un des programmes les plus aboutis actuellement en théorie potentielle résolvant dans le domaine temporel le problème de tenue à la mer. Trois versions différentes ont été développées. LAMP- 1, la version totalement linéaire du programme, satisfait la condition de surface libre sur la surface libre non perturbée tandis que les efforts de Froude-Krylov ainsi que les efforts hydrostatiques sont utilisés sous leur forme linéaire. Cette version est l'équivalent du code ACHIL3D du LMF [1]. La seconde version, LAMP-2, utilise une approche 3D linéaire pour calculer la partie hydrodynamique des efforts de pression. LAMP-2 approche les effets des mouvements de grande amplitude en étirant le champ de pression sur la carène si cela est nécessaire. La condition de surface libre est appliquée sur la surface mouillée moyenne alors que les efforts de Froude-Krylov et les efforts hydrostatiques sont non-linéaires. La troisième et dernière version de ce programme, LAMP-4, calcule le potentiel avec une condition de surface libre linéarisée appliquée sur la surface libre du champ incident. Les pressions hydrodynamiques et hydrostatiques sont calculées toutes les deux sur la surface mouillée instantanée délimitée par le champ incident. La carène du flotteur est alors remaillée à chaque pas de temps et la fonction de Green ré-évaluée. Ce programme calcule simultanément et interactivement les efforts hydrodynamiques et les mouvements d'un navire dans

l'espace tridimensionnel. Il peut prédire les mouvements de grande amplitude d'un corps flottant de géométrie quelconque soumis à un état de mer arbitraire. Il a été également implémenté par un module permettant de représenter les mouvements d'une masse mobile embarquée dans le but de simuler les effets d'un système anti-roulis [63]. Il est à noter que pour les besoins de cette application un modèle semi-empirique d'amortissement en roulis a également été rajouté. Il y a également le programme FREDYN [31]. C'est un code hybride qui résout le problème de diffraction-radiation de manière linéaire à partir d'une méthode des tranches et qui prend en compte les composantes statiques et dynamiques non-linéaires des efforts de Froude-Krylov. L'amortissement en roulis, la résistance à l'avancement ou les forces de manoeuvrabilité sont également considérés, tout comme les efforts de traînée qui sont évalués empiriquement.

L'objectif du travail présenté est de résoudre le problème de tenue à la mer pour le système houlomoteur SEAREV dans le cas de mouvements de grande amplitude. L'approche fluide parfait en domaine temporel a été retenue ce qui a consisté à la mise en place d'un modèle hybride basé sur une méthode potentielle linéaire utilisant les singularités de Kelvin et étendue au second-ordre. Cette extension au second-ordre est réalisée en trois étapes : tout d'abord la prise en compte des efforts de Froude-Krylov sur la surface mouillée déplacée exacte, ensuite l'ajout du terme quadratique de l'équation de Bernoulli dans les efforts de pression et enfin le développement au second-ordre de la composante linéaire des efforts de pression de diffraction-radiation. Ce rapport est organisé en trois parties. Les deux premières parties présentent deux modèles qui servent de premières étapes au développement du modèle tridimensionnel non-linéaire.

La première partie présente un modèle 2D non-linéaire où les efforts hydrodynamiques se réduisent aux composantes statiques et dynamiques des efforts de Froude-Krylov. Un premier chapitre présente la formulation du problème où sont présentées les équations non-linéaires régissant les mouvements du système complet [flotteur+pendule]. Le modèle représentant le champ incident est décrit dans le chapitre 3 concernant la résolution numérique. Le chapitre 4 présente les validations et les applications faites avec ce modèle. Le cas classique de stabilité d'une caisse parallélépipédique est étudié, validant ainsi la méthode permettant de calculer l'intersection entre la carène et la surface libre ainsi que celle discrétisant la surface mouillée. L'influence de la forme du capot sur le comportement général du système est également étudiée. Plusieurs comparaisons entre différents capots sont effectuées pour des états de mer d'amplitude et de période croissantes.

La partie 2 de ce manuscrit est consacrée à la présentation d'un modèle 3D linéaire prenant en compte les efforts de diffraction-radiation dans le cas de houles irrégulières multidirectionnelles. Le premier chapitre formule le problème de tenue à la mer, et présente les méthodes numériques permettant sa résolution. Les modèles de dispersion spatiale et de répartition fréquentielle du spectre du champ

de vagues incident sont notamment développés. Le chapitre suivant présente une étude sur l'influence de la directionnalité de la houle sur les performances du système SEAREV. Une comparaison sur l'énergie annuelle moyenne récupérée est alors faite suivant un paramètre contrôlant la dispersion spatiale du spectre du champ de vagues incident.

La troisième partie de ce manuscrit est consacrée au modèle 3D non-linéaire. Le premier chapitre aborde le problème du calcul de l'intersection entre la surface libre et le flotteur. Après un tour d'horizon bibliographique des différentes méthodes numériques de calcul d'intersection de surfaces, la méthode adoptée est présentée ainsi que celle concernant la discrétisation de la surface mouillée. La formulation mathématique du problème tridimensionnel est présentée au chapitre suivant. Les efforts dus à l'écoulement créé par le corps sont représentés par une distribution de singularités sur la surface mouillée moyenne, le problème aux limites ainsi obtenu est alors résolu à l'aide des fonctions de Green. Le problème hydrodynamique précédent est découpé de celui lié aux mouvements du corps en utilisant une fonction réponse impulsionnelle issue du code ACHIL3D puis développé au second-ordre par un développement en série de Taylor autour de la position moyenne. Des vérifications numériques sont présentées tout au long du chapitre 8 concernant la résolution numérique du problème de tenue à la mer. Le dernier chapitre de cette partie est quant à lui consacré aux validations expérimentales. Il est tout d'abord fait une brève description du dispositif expérimental des essais d'où sont issus les résultats utilisés dans ce chapitre. Le modèle numérique servant à reproduire le champ incident est également présenté ainsi que certains détails d'implémentation dans le code. Une première validation est réalisée pour laquelle on compare les résultats de trois simulations d'extinction de tangage. Une seconde étude est également faite où cette fois le flotteur est soumis à un champ de vagues incident régulier. Une comparaison des réponses en tangage est alors réalisée pour deux configurations différentes du pendule.

**Première partie**  
**Modèle non-linéaire 2D.**

# Introduction

Cette partie est la première étape du développement du programme de modélisation non-linéaire du problème de tenue à la mer dans l'espace 3D. En effet, afin d'appréhender au mieux tous les problèmes liés au développement de ce genre de logiciel, nous avons décidé de commencer par la simulation bidimensionnelle en se restreignant aux seuls efforts d'excitation dus au champ de vague incident pour ce qui est des efforts hydrodynamiques. La géométrie du SEAREV est ici restreinte à son contour contenu dans le plan de symétrie longitudinale, on suppose également que la largeur est infiniment grande. Conscient des erreurs que ce genre d'approximation peut engendrer ce code va néanmoins nous permettre une première approche quant à la compréhension du rôle particulier que jouent les oeuvres-mortes sur le comportement de l'ensemble du système lorsque celui-ci est soumis à une houle régulière.

Le modèle des angles de Cardan est utilisé pour développer les équations qui régissent les mouvements du système [flotteur + pendule]. Le champ incident est généré à l'aide de la méthode de la fonction de courant [40] permettant ainsi la simulation de houles fortement cambrées. Une méthode réalisant le calcul de l'intersection entre la surface libre et la carène du flotteur, puis la discrétisation de la surface immergée est développée afin d'intégrer les pressions hydrodynamiques et hydrostatiques du champ incident sur la surface mouillée instantanée du flotteur.

Des validations sont effectuées en ce qui concerne les efforts hydrostatiques en étudiant le comportement d'une caisse parallélépipédique lors d'un lâcher de roulis. Une étude concernant l'influence de la géométrie des oeuvres-mortes, appelé ici capot, sur le comportement général du flotteur SEAREV est également faite pour différents cas de houle.

# Chapitre 1

## Formulations.

### 1.1 Hypothèses, repères et notations.

On considère le système [flotteur + pendule] représenté par la figure (1.1) auquel on impose un plan de symétrie longitudinale. La houle incidente est supposée cylindrique et excitant le flotteur selon son axe principal. Le flotteur peut ainsi être animé de deux mouvements de translation l'un en cavalement, l'autre en pilonnement ainsi que d'un mouvement de rotation en tangage. Un quatrième degré de liberté vient s'ajouter aux précédents. Il correspond au mouvement relatif de la roue pendulaire, à savoir un mouvement de rotation dans le plan de symétrie du flotteur. Considérons un repère galiléen  $(I, X_0, Y_0, Z_0)$  quelconque mais dont l'axe vertical  $\vec{Z}_0$  est vertical ascendant. Le plan de symétrie longitudinale du flotteur est représenté par le repère  $(G, X_B, Z_B)$  où  $G$  correspond au centre de gravité du flotteur. On définit également un second repère  $R_P = (P, X_P, Z_P)$  pour décrire les mouvements du pendule avec  $P$  représentant le centre de gravité du pendule.

Les hypothèses énoncées précédemment impliquent aux mouvements d'être contenus dans un plan vertical noté ici  $(G, X_B, Z_B)$ . Le modèle des angles de Cardan ayant été choisi, les angles de rotation en tangage  $\theta$  et de rotation du pendule  $\alpha$  sont définis comme sur la figure suivante.

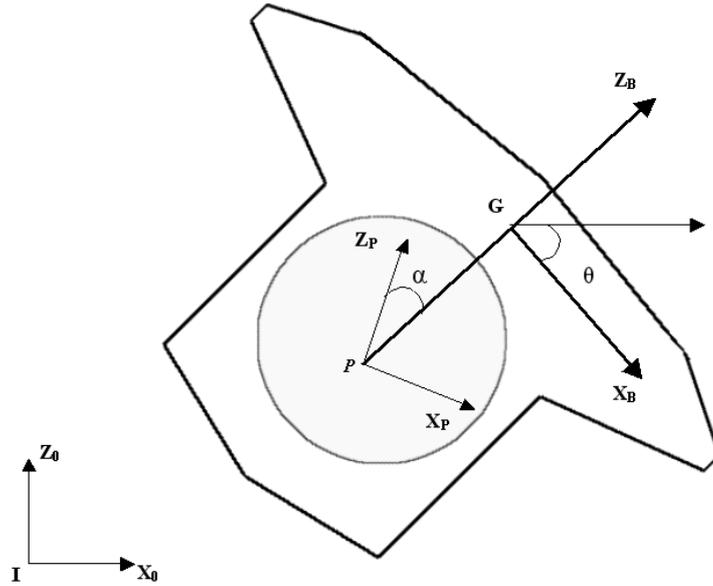


FIG. 1.1 – Repère lié au flotteur.

## 1.2 Equations du mouvement dans l'espace 2D.

Nous considérons donc un système bidimensionnel et le repère galiléen  $(I, X_0, Z_0)$ . On passe de ce repère à celui du flotteur par une translation  $\overrightarrow{IG}$  et par une rotation correspondant au tangage tel que :

$$\overrightarrow{IG} = x_G \cdot \overrightarrow{X_0} + z_G \cdot \overrightarrow{Z_0} \quad (1.1)$$

Soit  $X = (x_G, z_G, \theta, \alpha)^t$  le vecteur d'état correspondant à la position du centre de gravité du flotteur et soient  $m$  la masse du flotteur et  $(u, w)$  son vecteur vitesse au centre de gravité dans  $R_B$ . Le vecteur de rotation instantanée du flotteur  $\overrightarrow{\Omega_B}$  est alors :

$$\overrightarrow{\Omega_B} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{Y_B} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{Y_0} \quad (1.2)$$

avec  $\overrightarrow{Y_B}$  et  $\overrightarrow{Y_0}$  tel que  $(X_B, Y_B, Z_B)$  et  $(X_0, Y_0, Z_0)$  soient directs. La matrice de passage de  $R_0$  à  $R_B$  est donc de la forme :

$$T_{0B} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

L'équation du mouvement revient alors au système différentiel suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_p \quad (1.4)$$

Où :

$$M = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 \\ 0 & m_b + m_p \\ m_p(d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & -m_p(d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \\ -m_p l \cos(\theta + \alpha) & m_p l \sin(\theta + \alpha) \\ m_p(d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & -m_p l \cos(\theta + \alpha) \\ -m_p(d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) & m_p l \sin(\theta + \alpha) \\ I_b + I_y + m_p(d^2 + l^2) - 2m_p d l \cos \alpha & I_y + m_p l^2 - m_p d l \cos \alpha \\ I_y + m_p l^2 - m_p d l \cos \alpha & I_y + m_p l^2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$F_p = \begin{pmatrix} m_p \left( l \left( \dot{\alpha} + \dot{\theta} \right)^2 \sin(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \\ m_p \left( l \left( \dot{\alpha} + \dot{\theta} \right)^2 \cos(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \\ m_p d l \left( \dot{\alpha} + \dot{\theta} \right)^2 \sin \alpha - m_p d l \dot{\theta}^2 \sin \alpha - m_p g (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \\ m_p d l \dot{\theta}^2 \sin \alpha - m_p g l \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_z \\ C_y \\ C_{pto} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$F_p$  représentant les efforts exercés par le pendule sur le flotteur et  $F$  le vecteur des efforts extérieurs s'exerçant sur le système {flotteur+pendule} hormis les efforts liés à la gravité.  $C_{pto}$  représente quant à lui l'effort exercé par le convertisseur d'énergie sur le pendule.

Il est à remarquer qu'aucune supposition n'est faite sur les mouvements du corps, nous sommes donc dans le domaine non-linéaire.

## 1.3 Bilan des efforts.

### 1.3.1 Efforts de pesanteur.

Le champ de pesanteur fait partie du terme appelé efforts extérieurs. Pour l'ensemble du système comprenant le flotteur et le pendule, l'action du pendule est due à la fois à l'action du poids du flotteur au centre de gravité du flotteur et à celle du poids du pendule en son centre de gravité. Il s'exprime par l'intermédiaire d'un torseur d'effort généralisé au centre de gravité du flotteur  $G$  de la forme :

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_b + m_p)g \\ T_{OB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + T_{OP} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

où  $T_{OB}$  et  $T_{OP}$  représentent respectivement les matrices de passage de repère de  $R_0$  à  $R_B$  et de  $R_0$  à  $R_P$ .

### 1.3.2 Efforts d'excitation.

On néglige provisoirement ici l'influence des perturbations dues à la présence du flotteur sur le champ de vagues incident, cela implique de ne retenir dans les efforts excitateurs que les composantes dues à la déformée de surface libre non perturbée et au potentiel incident  $\phi_I$ . Cette approximation, pouvant entraîner des erreurs de plus de 50%, définit ce que l'on appelle les efforts de Froude-Krylov. Ordinairement, ces efforts résultent de la pression dynamique du champ incident sur la surface mouillée. Ainsi en théorie linéaire, les efforts hydrostatiques sont traités séparément et sont représentés par une matrice de coefficients hydrostatiques. La prise en compte de la déformée de la surface libre du champ incident fait apparaître des fluctuations au niveau des efforts hydrostatiques, par conséquent la formulation des efforts de Froude-Krylov fait apparaître deux termes. Le premier correspondant au torseur des efforts hydrostatiques est obtenu en intégrant la pression hydrostatique sur la surface mouillée instantanée  $S_C$ . Le second met à profit la pression dynamique du champ incident qui est également appliquée sur la surface mouillée instantanée du flotteur.

$$\vec{F} = \int_{S_C} p \vec{n} dS \quad (1.9)$$

Le terme de pression  $p$  est donné par l'équation de Bernoulli :

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2 \quad (1.10)$$

avec ici par hypothèse  $\phi = \phi_I$

### 1.3.3 Efforts dus au convertisseur d'énergie.

L'effort fourni par le convertisseur d'énergie se résume à un couple modélisé par :

$$\overrightarrow{C_{PTO}}(O) = C_\alpha \overrightarrow{y_p} \quad (1.11)$$

où

$$C_\alpha = -B_\alpha \dot{\alpha} - k_\alpha \alpha \quad (1.12)$$

soit, par hypothèse, un rappel purement linéaire et un amortissement de type visqueux.

# Chapitre 2

## Résolution numérique.

### 2.1 Discrétisation des équations du mouvement.

Aucun effort d'amortissement n'étant pris en compte, des termes amortissement ont été rajoutés de telle manière que le flotteur ait un mouvement oscillatoire amorti. Il consiste en des termes agissant directement sur l'accélération du centre de gravité du flotteur tels que :

$$\vec{F}_{amortissement} = \mathbf{C}_A \dot{\mathbf{X}} \quad (2.1)$$

$$\text{avec, } \mathbf{C}_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{Az} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{A\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations différentielles discrétisée revient alors à un système d'équations différentielles qui a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{X}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d \\ 0 & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{ex} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Soit,

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B} \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d \\ 0 & -\mathbf{B} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{ex} \end{pmatrix}$$

et  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité.

Les mouvements du système sont alors obtenus en intégrant dans le temps le système d'équations différentielles précédent à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

## 2.2 Génération du champ de vagues incident.

On s'intéresse maintenant à la génération de la houle. Les efforts de pression du champ incident étant considérés sur la surface mouillée instantanée du corps, nous avons besoin de connaître à chaque pas de temps et dans tout le domaine fluide la hauteur de surface libre et la pression du champ incident. De plus, l'un des intérêts de ce code étant de simuler le comportement du flotteur lorsque celui-ci est animé de mouvements de grande amplitude, le modèle utilisé ne peut être limité par sa hauteur de vague ou par sa longueur d'onde. On génère ainsi une houle de forte cambrure (figure (2.1)) à l'aide d'un algorithme basé sur la théorie de la fonction courant de Rienecker-Fenton [40].

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \sum_{i=0}^n \phi_i(x, z, t) \\ \phi_i(x, z, t) &= B_i \frac{\cosh(ik(z+D))}{\cosh(ikD)} \sin(ik(x - ct)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec  $c$  la vitesse de phase,  $k$  le nombre d'onde et  $D$  la profondeur.

Cet algorithme permet de générer des champs de vague dans une large échelle de profondeurs, d'amplitudes et de longueurs d'onde en respectant les conditions aux limites non-linéaires à la surface libre.

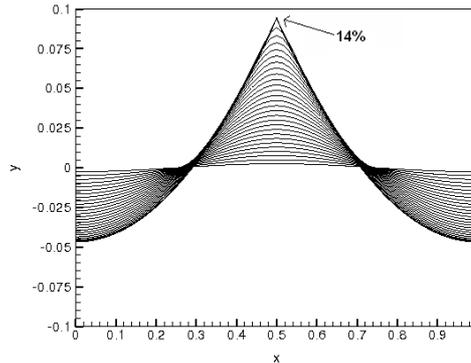


FIG. 2.1 – Profils adimensionnels de surface libre en profondeur infinie.

Sa formulation mathématique est basée sur une théorie potentielle et donne la solution numérique d'une onde progressive périodique d'un écoulement irrotationnel sur fond plat. La résolution du problème est faite dans un repère en translation uniforme avec une crête permettant de rendre l'écoulement stationnaire. Une série de Fourier finie est utilisée pour donner un ensemble d'équations non linéaires qui

sont résolues par une méthode de Newton. Cette méthode itérative utilise la houle d'Airy comme approximation pour la solution initiale.

$$\eta(x, z, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=0}^n A_i \cos(ik(x - ct)) \quad (2.5)$$

Enfin, dans l'utilisation qui en est faite en tant que force d'excitation de la mécanique du flotteur, une rampe en temps est appliquée au début de la génération. Ceci afin de diminuer les contraintes imposées au flotteur qui peuvent arriver lors de simulations de houles de grandes amplitudes. L'essai de plusieurs types de rampe (linéaire, sinusoïdale) a permis d'arrêter notre choix sur une rampe de type sinusoïdal de durée variable suivant l'amplitude d'entrée du champ incident.

## 2.3 Discrétisation de la surface mouillée.

En théorie linéarisée, les mouvements sont supposés de faible amplitude permettant ainsi de ne prendre en compte les efforts hydrodynamiques que sur la position moyenne du flotteur tout en considérant la hauteur de surface libre moyenne. Ici, les efforts de Froude-Krylov sont laissés sous leur forme non-linéaire laissant la surface mouillée instantanée comme seul support des efforts de pression. Cette surface est obtenue suite à la résolution d'un problème d'intersection de surfaces entre la surface libre du champ incident non perturbé et la carène du flotteur.

En bidimensionnel et dans le plan  $(I, X_0, Z_0)$ , la géométrie du flotteur se résume à son contour selon son plan de symétrie en  $y = 0$  (figure (2.2)).

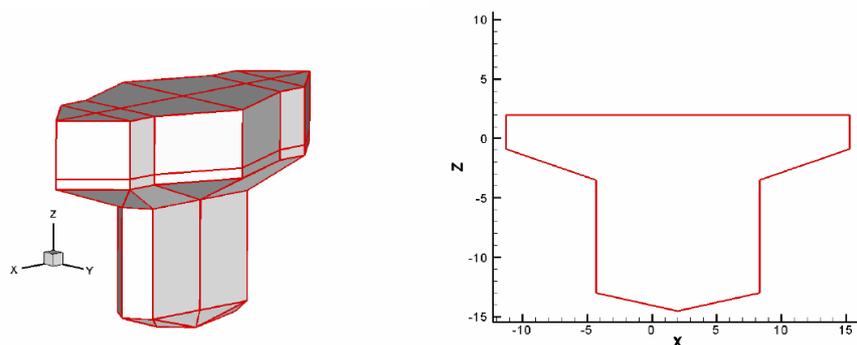


FIG. 2.2 – Exemple de contour obtenu à partir de la forme 3D.

Une première étape discrétise le contour en une succession de segments de droite eux-mêmes paramétrisés par l'intermédiaire de fonctions affines tel que :  $z = ax + b$ .

Une seconde étape consiste à déterminer une grille d'arrière-plan permettant de réduire l'intervalle le long duquel la surface libre est susceptible de rencontrer

le flotteur. Le domaine où s'effectue la recherche des points d'intersection est alors un espace centré en abscisse autour du centre de gravité du flotteur et de part et d'autre de celui-ci sur une longueur correspondant à la plus grande distance existant entre le centre de gravité du flotteur et l'une des extrémités d'un des panneaux du flotteur.

Le contour étant connu analytiquement tout comme la hauteur de surface libre, la recherche des points d'intersection peut donc se faire. Le problème à résoudre est alors une suite de systèmes de deux équations à deux inconnues aussi nombreux que le nombre de côtés définissant le flotteur. Chaque système est de la forme :

$$\begin{cases} z = ax + b \\ z = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=0}^n A_i \cos(ik(x - ct)) \end{cases} \quad (2.6)$$

soit

$$a \cdot x - \sum_{i=0}^n A_i \cos(ik(x - ct)) + b - \frac{A_0}{2} = 0 \quad (2.7)$$

Ce problème présente 3 cas possibles : le cas d'une paroi verticale, celui d'une paroi horizontale et enfin celui où la paroi du flotteur est inclinée par rapport aux axes définissant le repère  $(I, X_0, Z_0)$ . Pour le cas d'une paroi verticale,  $x$  est une constante, la solution est alors triviale et correspond à un unique point d'ordonnée égale à la valeur de la hauteur de surface libre en  $x$ . Pour le cas de la paroi horizontale et de la paroi inclinée, la solution ne peut se faire analytiquement.

On se propose alors d'approximer numériquement la solution à l'aide d'une méthode de dichotomie. La méthode employée diffère de la méthode classique de par la valeur que prend le point  $c$  contenu dans l'intervalle  $[a, b]$ . L'idée est de pondérer les valeurs en abscisse des points  $a$  et  $b$  par la valeur absolue de l'ordonnée du point opposé.

$c = \frac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}$	méthode barycentrique
$c = \frac{a+b}{2}$	méthode de dichotomie classique

Cela consiste à calculer le barycentre de l'intervalle  $[a, b]$  en fonction des ordonnées à l'origine afin de se rapprocher plus rapidement à chaque étape du point d'abscisse  $b$  que celui d'abscisse  $a$ .

Cette méthode a été testée pour une fonction très proche du problème qui nous intéresse. On résout l'équation  $\cos(x) - x = 0$  (figure (2.3a)) à l'aide de la méthode de dichotomie classique ainsi que celle basée sur le calcul du barycentre.

La figure (2.3b)) montre le nombre d'itérations qu'il est nécessaire aux deux méthodes pour obtenir la solution pour une précision de  $10^{-15}$ . On peut voir sur

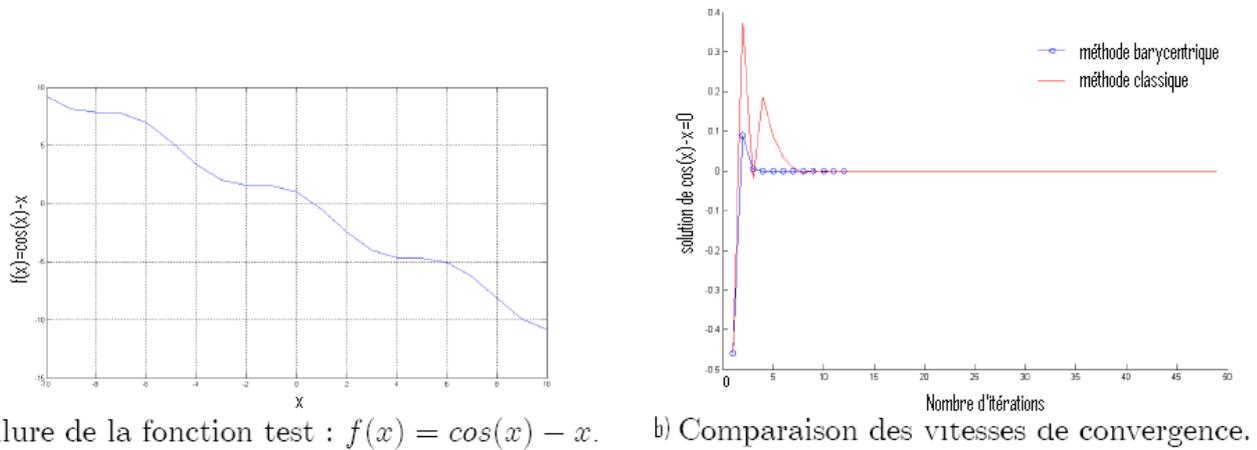


FIG. 2.3 – Allure de la fonction test et comparaison des vitesses de convergence des deux méthodes de dichotomie.

cette figure que la méthode de dichotomie classique a besoin de 51 évaluations pour obtenir la bonne précision alors que celle utilisant le barycentre n'en a besoin que de 14. La méthode avec le barycentre est ici 4 fois plus rapide que la méthode de dichotomie classique pour un résultat à précision égale.

Cet exemple nous montre le gain de temps non négligeable que la méthode du barycentre peut nous apporter pour résoudre ce genre de problème. Ce résultat est également corrélé avec les résultats des temps de calcul mis par le code lors des simulations. En effet, le temps de calcul tend à diminuer du tiers par rapport à celui mis par la méthode classique.

Une fois les points d'intersection déterminés, les côtés du flotteur sont discrétisés (figure (2.4)).

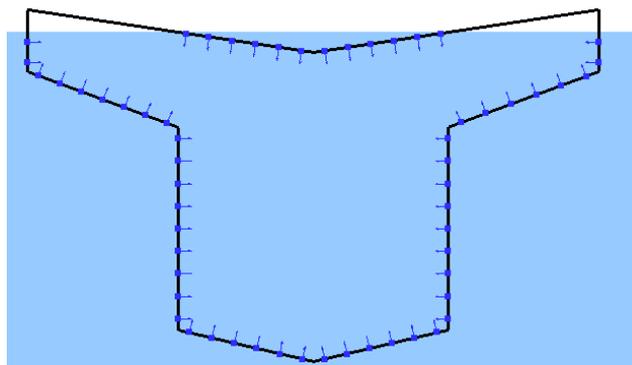


FIG. 2.4 – Exemple de discrétisation possible.

Dans le cas de solutions multiples, la recherche de solution est relancée à partir du dernier point d'intersection trouvé. Afin d'éviter à cette recherche d'être faite systématiquement, un test est effectué sur la pente de la déformée de la surface

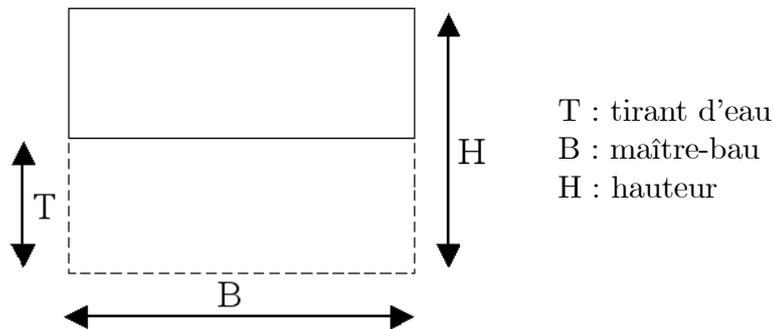
libre. Ce test consiste à regarder si la surface libre présente un creux ou une crête sur l'intervalle compris entre le dernier point d'intersection trouvé et le point bornant le segment de droite concerné. En pratique ce test se caractérise par une routine calculant la dérivée en espace selon la direction de propagation de la déformée de surface libre. Si cette dérivée devient nulle sur l'intervalle, la recherche de solution est lancée, sinon le calcul passe au segment de droite suivant.

# Chapitre 3

## Validation et application.

### 3.1 Stabilité d'une caisse parallélépipédique.

Afin de valider les développements présentés dans les chapitres 2 et 3 quant à la gestion numérique de l'évolution de la surface mouillée, un test simple de stabilité est réalisé. On considère pour cela une caisse flottante représentée par un parallélépipède rectangle tel que :



La géométrie relativement simple de ce genre de corps permet en effet de connaître analytiquement la position finale de repos. La relation 3.1 nous donne ainsi la condition de stabilité transversale d'un corps flottant parallélépipédique en fonction de ses caractéristiques géométriques et du rapport de densité  $c$  entre le matériau et l'eau tel que :

$$\frac{H}{2}(c-1) + \frac{B^2}{12cH} > 0 \quad (3.1)$$

Cette relation a deux solutions  $C_1$  et  $C_2$  correspondant chacune aux limites extrêmes entre lesquelles le corps devient instable.

En fixant les dimensions géométriques du flotteur telles que :

$$\begin{cases} H = 5 \text{ mètres} \\ B = 5 \text{ mètres} \end{cases}$$

et en considérant le corps comme homogène, la condition de stabilité de la caisse parallélépipédique est :

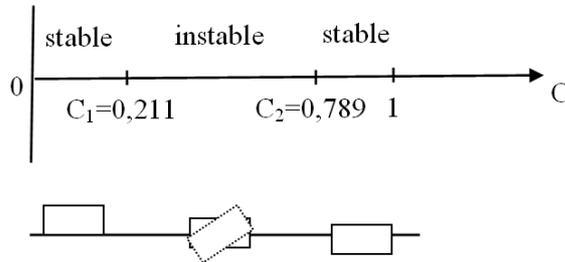


FIG. 3.1 – condition de stabilité transversale d’une caisse parallélépipédique.

L’étude de stabilité est faite ici en prenant le coefficient  $c$  égal à 0,5. La condition de stabilité prévoit alors une position de repos correspondant à un angle d’inclinaison valant 45 degrés.

On se propose alors d’effectuer une comparaison entre les résultats numériques et la solution analytique pour un lâcher de roulis. Au début de la simulation numérique le modèle est fixe et présente un angle de gîte initial de 20 degrés (figure (3.2)). Le mouvement de roulis est alors libéré, tout en laissant libre le mouvement couplé du flotteur en pilonnement.

La figure suivante décrit les mouvements de roulis au niveau du centre de gravité de la caisse. On observe un mouvement périodique qui s’amortit progressivement jusqu’à atteindre une position de stabilité correspondant à l’angle d’inclinaison prévu par la condition de stabilité (figure (3.1)). L’amortissement, quant à lui, est artificiel et aucune leçon ne peut donc être tirée de l’allure de la décroissance de l’amplitude de tangage.

Ces résultats permettent de valider les développements réalisés précédemment tout du moins au niveau des efforts hydrostatiques. On peut également considérer que la discrétisation de la surface mouillée est satisfaisante.

### 3.2 Influence de la forme du capot sur le comportement général du système.

On se propose dans cette partie d’étudier le rôle du capot qui reste encore indéterminé. Pour cela, on considère le flotteur de type DES2595 (Annexe 2) auquel on adapte différents capots de caractéristiques géométriques différentes. On impose dans un premier temps certaines contraintes géométriques qui doivent être satisfaites par le capot, une paramétrisation de sa géométrie est ainsi réalisée. Afin d’appréhender au mieux l’influence de la géométrie du capot sur le comportement

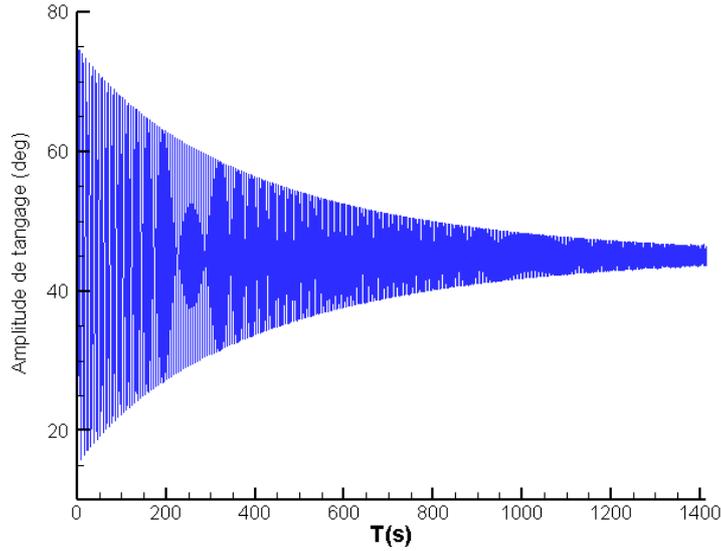


FIG. 3.2 – Déroulement d’une simulation d’extinction de roulis.

général du système, plusieurs géométries sont testées lors de simulation sur houle régulière d’amplitude et de longueur d’onde différentes. Auparavant les performances de différents capots sont comparées pour un même état de mer favorable à la formation de mouvements de grandes amplitudes. L’étude consiste ensuite à garder les flotteurs les plus intéressants et à les soumettre chacun aux mêmes cas de houle. Les résultats numériques présentés dans cette partie sont issus de simulations réalisées avec le code précédemment décrit où les dimensions de l’empreinte 2D du flotteur sont prises à l’échelle réelle telles qu’elles sont précisées dans l’annexe 2 de ce manuscrit.

### 3.2.1 Description du capot.

**Définition du capot :** La première étape de cette étude consiste tout d’abord à définir la forme générale de ce capot. Cette forme ne doit pas être à la fois trop compliquée pour ne pas rendre l’analyse des résultats plus compliquée qu’elle ne l’est déjà, mais aussi assez générale afin d’en dégager plusieurs catégories lors de la paramétrisation. Le choix d’un assemblage de panneaux plans pour la construction du flotteur ayant été décidé, nous avons gardé cette même particularité pour le capot. Il a donc été décidé de le constituer de 4 panneaux plans soit 4 segments de droite dans l’espace 2D.

**Paramétrisation :** Connaissant les coordonnées des points bornant ces 4 segments, ces derniers sont alors décrits analytiquement à l’aide de fonctions affines de la même manière que pour la partie immergée du chapitre précédent. En considérant comme fixe les points appartenant à la fois à la partie immergée et émergée, le capot est paramétré selon les longueurs  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  et les quatre angles d’inclinaisons  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  des segments (figure (3.3)). On considère la symétrie comme une propriété intrinsèque du capot impliquant par conséquent une réduction du

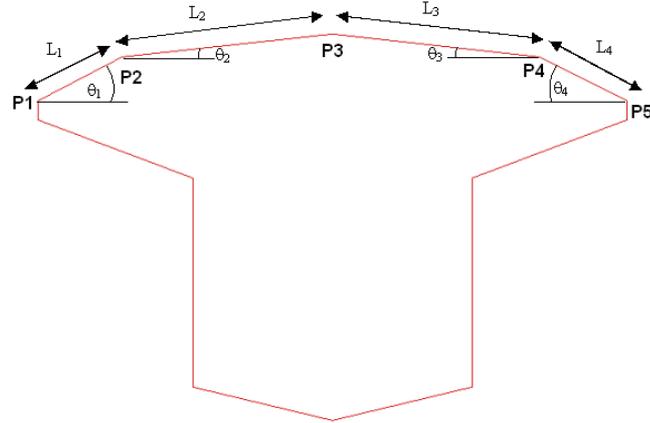


FIG. 3.3 – Description et paramétrisation du capot.

paramétrage à deux paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . L'ensemble des paramètres décrivant la géométrie du capot doit être contenu dans un certain domaine de validité. On interdit notamment au capot de passer sous la ligne de flottaison. Le sommet supérieur du capot noté P4 (figure(3.3)) est donc contraint à ne jamais être en dessous de la ligne de flottaison du flotteur. En résumé les paramètres définissant le capot doivent satisfaire :

$$\begin{cases} 0 < \theta_1, \theta_4 < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < \theta_2, \theta_3 < \frac{\pi}{2} \\ z(P4) > 0 \end{cases}$$

**Capots retenus :** Les capots testés se distinguent selon trois familles (voir figure (3.4)). La première est basée sur la forme la plus simple possible qui est le rectangle (SEAREV\_Rectangle), à partir de celui-ci nous avons fait varier les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . La variation s'est faite selon les  $\theta_2$  positifs (SEAREV\_4cotes, SEAREV\_Triangle) puis progressivement on s'est orienté vers des types de flotteur (SEAREV\_2Triangles, SEAREV\_2TrianglesBis) présentant un évasement en leur centre ( $\theta_2 < 0$ ).

### 3.2.2 Comparaison des performances pour un même état de mer.

La figure (3.5) présente, pour les cinq flotteurs de la figure (3.4), les évolutions temporelles sur 60 secondes des amplitudes de tangage et des amplitudes de mouvement du pendule. Ces résultats sont obtenus dans le cas d'une houle régulière de hauteur de vague 2 mètres et de période 8 secondes (soit une cambrure de 4%).

Une première remarque est à faire quant aux allures de chaque signal. On voit en effet, que hormis le flotteur SEAREV\_Rectangle, le comportement des flotteurs est très fortement non-linéaire. Cette différence peut s'expliquer par le fait que le

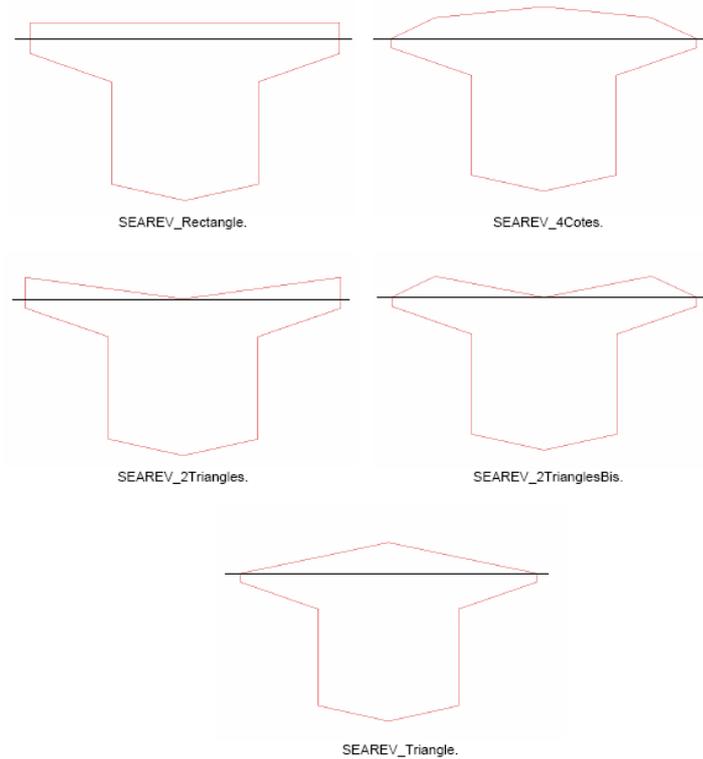


FIG. 3.4 – Types de capot retenus.

franc-bord du SEAREV\_Rectangle est droit et a une hauteur correspondant à l'amplitude de la houle. L'observation du comportement de SEAREV\_2Triangles, qui a le même franc-bord, va également dans ce sens. L'allure de la courbe de tangage de ce flotteur est la même que celle de SEAREV\_Rectangle jusqu'à l'instant  $t = 5$  secondes, moment à partir duquel la surface libre passe par-dessus le franc-bord.

Les différences qui apparaissent par la suite entre ces flotteurs sont dues à la partie  $L_2$  qui suit le franc-bord. SEAREV\_2Triangles présente un évasement soit, pour reprendre les paramètres descriptifs,  $\theta_2 < 0$ . Cette particularité permet ainsi à ce flotteur d'avoir un couple de rappel hydrostatique beaucoup plus important que SEAREV\_Rectangle une fois la partie  $L_2$  immergée. Le fait d'avoir la partie supérieure du capot horizontal, permet à SEAREV\_Rectangle d'être le flotteur à avoir le moins d'eau au-dessus de lui lors du passage d'une crête. La valeur de la composante hydrostatique des efforts est alors bien moindre par rapport à celles des autres capots.

De manière générale, on peut regarder l'ordre dans lequel s'effectue les différences de comportement entre chaque flotteur. On s'aperçoit ainsi que le premier flotteur à changer de comportement est SEAREV\_Triangle suivent SEAREV\_4cotes et SEAREV\_2TrianglesBis ensuite SEAREV\_2Triangles et enfin SEAREV\_Rectangle.

Ce classement est directement lié à l'inclinaison plus ou moins aigüe que présente la partie  $L_1$  ( figure (3.3)). En effet, ces trois flotteurs ont le même angle

d'inclinaison pour cette partie. Tout comme pour SEAREV\_Rectangle et SEAREV\_2Triangles, les différences qui s'opèrent par la suite entre ces trois flotteurs sont dues à l'angle d'inclinaison de leur partie  $L_2$ . On s'aperçoit notamment que la remarque faite sur le SEAREV\_Rectangle de part l'horizontalité de la partie supérieure du capot peut également être faite sur SEAREV\_4cotes. SEAREV\_2TrianglesBis qui a la même partie  $L_1$  mais qui présente un évasement au niveau de  $L_2$  a un comportement totalement différent.

L'ensemble des remarques précédentes rend compte de l'importance de la géométrie du capot sur le comportement général du système. On a vu ainsi que le fait d'orienter différemment les parties  $L_1$  et  $L_2$  et par conséquent d'influer le couple d'efforts final appliqué au centre de gravité du flotteur, joue un rôle important quant au comportement général du système. La non prise en compte des efforts de diffraction-radiation impose d'être prudent sur les conclusions d'une telle étude.

Cependant, nous pouvons faire ressortir certains flotteurs. SEAREV\_2TrianglesBis et SEAREV\_2Triangles ont notamment des amplitudes de mouvement qui sont largement supérieures aux autres. A l'inverse, le capot du SEAREV\_4cotes paraît peu performant. SEAREV\_Triangle, quant à lui, est intéressant de part son comportement assez singulier, il est en effet le seul flotteur à avoir un angle moyen de tangage non nul.

Pour toutes ces raisons, la suite de ce travail est restreinte aux flotteurs de type : SEAREV\_2Triangles, SEAREV\_Rectangle et SEAREV\_Triangle. SEAREV\_Rectangle est retenu pour son comportement sinusoïdal, SEAREV\_2Triangles, même si les phénomènes liés à son évasement ne sont pas pris en compte, reste le plus performant de tous. SEAREV\_Triangle enfin, pour son comportement particulier qui ne se retrouve pas sur les autres capots.

### 3.2.3 Réponse en fonction de l'amplitude et de la période du champ incident.

Les figure (3.6), (3.8) et (3.7) présentent une comparaison des performances du flotteur DES2595 pour les trois géométries de capot retenues à la fin du paragraphe précédent, à savoir SEAREV\_Rectangle, SEAREV\_Triangle et SEAREV\_2Triangles. Les trois flotteurs sont soumis aux mêmes états de mer : une première étude est faite où l'on fixe la hauteur de vague à 4 mètres et où l'on fait varier la période de 6 à 20 secondes, une seconde étude est également réalisée où cette fois la période de houle est considérée égale à 6,5 secondes et où l'amplitude de vague varie de 0,5 à 4 mètres. Une analyse harmonique est alors faite sur les signaux de tangage permettant de comparer l'amplitude des trois premiers modes. Chaque sous-figure représente ainsi, pour chaque flotteur, l'évolution des trois harmoniques selon la période et l'amplitude du champ incident.

On s'intéresse tout d'abord à l'influence de l'amplitude du champ incident. Les courbes représentant les premières harmoniques sont relativement différentes les unes des autres. En effet, pour SEAREV\_Rectangle le premier mode évolue linéairement jusqu'à  $H = 2$  mètres puis a une allure logarithmique et présente un pic d'amplitude pour  $H = 4$  mètres. Pour le flotteur SEAREV\_Triangle, l'allure

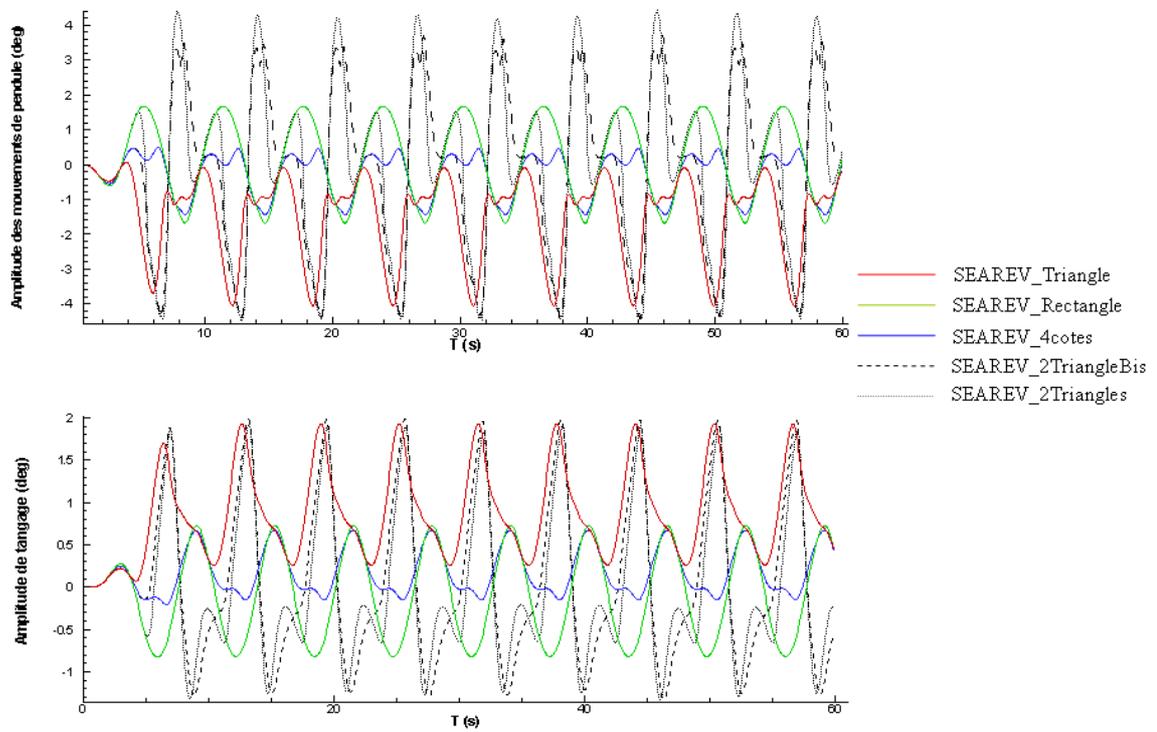


FIG. 3.5 – Evolution temporelle des mouvements de tangage et des mouvements du pendule pour les flotteurs de type SEAREV\_Triangle, SEAREV\_Rectangle, SEAREV\_4cotes, SEAREV\_2TrianglesBis et SEAREV\_2Triangles.

de l'évolution des premières harmoniques est quadratique, quant au flotteur SEAREV\_2Triangles le comportement est quasiment linéaire. On remarque également une grande différence dans les évolutions des harmoniques d'ordre 2 et 3. Le signal du SEAREV\_Rectangle est constitué principalement de la première harmonique, ce n'est qu'à partir de  $H = 3$  mètres que le second et troisième mode interviennent. Pour SEAREV\_Triangle toutes les harmoniques ont la même allure, et ont une amplitude d'autant moins importante que l'on s'éloigne du premier mode. Les allures des harmoniques, dans le cas du flotteur SEAREV\_2Triangles, sont toutes les trois quasiment linéaires. Il est également intéressant de constater que dans ce cas là, l'amplitude de la deuxième harmonique est du même ordre de grandeur que le premier mode.

Intéressons nous maintenant au comportement en fonction de la période de houle. On remarque tout d'abord que le maximum d'amplitude est bien atteint au voisinage de la période propre du système à savoir 6,5 secondes. On voit également que l'amplitude de la première harmonique est la plus importante lorsque la période de houle se situe dans la bande passante du système. Au-delà de  $T = 12$  secondes, les harmoniques d'ordre supérieur ont une plus grande amplitude que le premier mode. Pour  $T = 12$  secondes, ce phénomène peut s'expliquer par les non-linéarités de mouvement. En effet, si l'on effectue le rapport  $T/2$  on s'aperçoit que la période obtenu est aux alentours de 6,5 secondes soit à l'intérieur de la bande passante du système. La même remarque peut également être faite pour la composante du troisième ordre où le rapport  $T/3$  nous donne aussi une valeur de période comprise dans la bande passante du système.

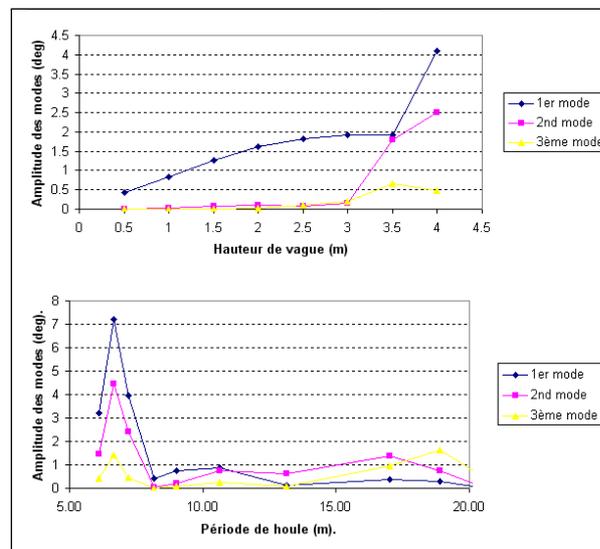


FIG. 3.6 – Réponse des amplitudes des trois premières harmoniques de Fourier en fonction de l'amplitude et de la période du champ incident pour le flotteur SEAREV\_rectangle.

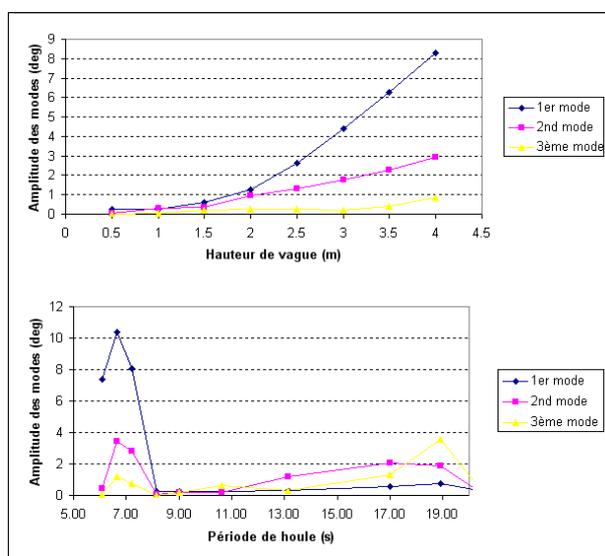


FIG. 3.7 – Réponse des amplitudes des trois premières harmoniques de Fourier en fonction de l’amplitude et de la période du champ incident pour le flotteur .SEAREV\_Triangle.

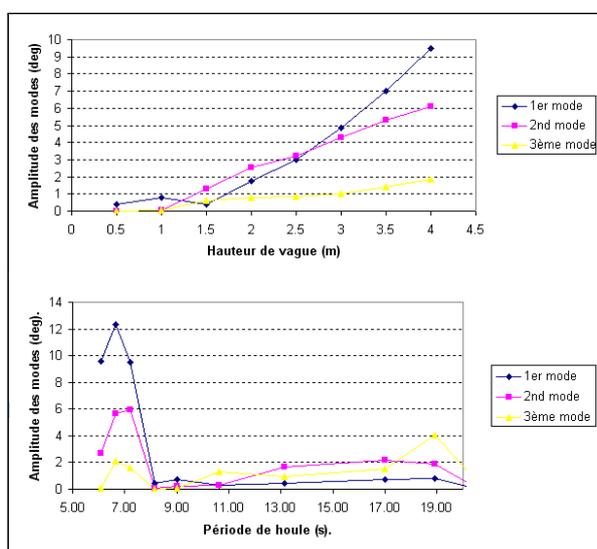


FIG. 3.8 – Réponse des amplitudes des trois premières harmoniques de Fourier en fonction de l’amplitude et de la période du champ incident pour le flotteur SEAREV\_2Triangles.

### 3.3 Conclusion.

Nous avons présenté dans cette partie, le développement d’une méthode 2D permettant de représenter les mouvements d’un flotteur bidimensionnel de forme

SEAREV de manière non-linéaire en prenant en compte les efforts exacts du champ incident sur la surface mouillée instantanée. Cette approche a permis de nous familiariser avec les problèmes rencontrés dans un programme de simulation non-linéaire et plus particulièrement de l'intersection de surface entre le flotteur et la surface libre.

Ce travail nous a également permis un premier débroussaillage quant à la compréhension du comportement dynamique du système. L'influence de la géométrie a été plus ou moins éclaircie, nous permettant par la suite une meilleure compréhension des résultats lors de l'exploitation des résultats obtenus avec l'approche 3D ou même lors des essais expérimentaux.

**Deuxième partie**  
**Modèle linéaire 3D.**

# Introduction.

Cette partie présente une méthode basée sur une théorie hydrodynamique potentielle linéaire et permettant la simulation des mouvements du système SEAREV lorsque celui-ci est soumis à une houle aléatoire. Afin d'être cohérent avec la théorie potentielle linéaire, les équations du mouvement sont linéarisées. Comme dans le chapitre précédent, on suppose que le système SEAREV a deux plans de symétries verticaux et que l'axe du cylindre d'inertie autour duquel celui-ci tourne est perpendiculaire au plan de symétrie longitudinale du flotteur. On rappelle que l'on suppose la direction principale du champ de vague incident alignée avec le plan de symétrie longitudinale le long de l'axe Ox. Sous ces hypothèses et dans le cas d'une mer aléatoire, le flotteur peut donc se mouvoir selon ses 6 degrés de liberté à savoir : cavalement, embardée, pilonnement, roulis, tangage et lacet. Les repères et notations sont les mêmes que dans le cas du SEAREV 2D du chapitre précédent et étendus à l'espace 3D. Par rapport au modèle 2D non-linéaire, les efforts de Froude-Krylov sont pris en compte sur la surface mouillée moyenne et les efforts diffraction-radiation sont également considérés sous leur forme linéaire. Les angles de Cardan sont utilisés pour modéliser les mouvements du système tandis que l'état de mer est représenté à l'aide du spectre de Pierson-Moskowitz pour ce qui est de la distribution fréquentielle et d'un modèle en cosinus 2s pour la répartition angulaire de l'énergie du champ incident.

Cette approche va nous offrir la possibilité, par rapport au programme 2D non-linéaire, d'identifier les effets d'une houle irrégulière 3D sur les performances d'un système récupérateur d'énergie des vagues. L'influence de la directionnalité de la houle est ainsi étudiée pour un site donné. On montre son impact sur les performances du système SEAREV ainsi que les répercussions engendrées sur la production annuelle.

# Chapitre 4

## Formulation et résolution du problème.

### 4.1 Hypothèses-position du problème.

Tout comme dans la partie 1 précédente, on s'intéresse ici au problème de tenue à la mer d'une structure flottante mobile soumis à l'excitation d'une houle incidente. Le flotteur est le système SEAREV présenté précédemment que l'on considère maintenant sous sa forme 3D. On se place, pour l'instant, dans une théorie linéarisée, c'est à dire que l'on suppose que les mouvements du corps et que la cambrure des vagues sont suffisamment petits pour que les équations sur la surface libre et sur le corps puissent être linéarisées.

Le modèle choisi suppose un fluide parfait isovolume en écoulement irrotationnel. Nous nous plaçons ainsi dans le cadre de la théorie des écoulements à surface libre dérivant d'un potentiel de vitesse  $\phi$ . Les hypothèses liées à cette approche sont les suivantes :

- 1. Le fluide est parfait et incompressible.
- 2. L'écoulement est irrotationnel.
- 3. Le fluide est initialement au repos.
- 4. On néglige les tensions superficielles et on suppose que la pression reste constante au-dessus de la surface libre.

Dans ces conditions la vitesse du fluide en un point quelconque  $M(x,y,z,t)$  du domaine fluide  $D$  est donnée par la relation :

$$\vec{V}(M, t) = \overrightarrow{grad}\phi(M, t) \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Equations générales.

Les hypothèses énumérées précédemment imposent au potentiel  $\phi$  de satisfaire certaines conditions qui sont développées maintenant.

### Principe de conservation de la masse.

Si l'écoulement satisfait la deuxième hypothèse et la troisième hypothèse, le champ de vitesse au sein du fluide dérive d'un potentiel scalaire. Il existe donc une fonction scalaire  $\phi$ , appelée potentiel de l'écoulement telle que :

$$\Delta\phi(t) = 0 \tag{4.2}$$

Le potentiel  $\phi$  est donc harmonique, il vérifie à chaque instant l'équation de Laplace dans le domaine fluide.

### Principe fondamental de la dynamique.

Les quatre premières hypothèses énoncées précédemment permettent d'obtenir l'équation d'Euler donnant la valeur de la pression en un point quelconque du fluide :

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{\delta\phi}{\delta t} = F(t) \tag{4.3}$$

### Conditions aux limites.

**Conditions de surface libre.** A la surface libre, nous appliquons une condition de glissement traduisant le fait que le flux de matière soit nul à travers l'interface eau-air.

L'équation instantanée de la surface libre sera écrite sous la forme :

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \tag{4.4}$$

où  $\eta$  est la hauteur de la surface libre mesurée depuis le plan  $z = 0$ . Une telle notation implique que la projection orthogonale de la surface libre sur un plan horizontal est univoque.

### Conditions de surface libre linéarisée.

Le fait de considérer des mouvements non infinitésimaux ne nous permet pas de formuler l'hypothèse de faible perturbation de la surface libre. Cependant, la prise en compte de conditions de surface libre non linéaire entraînant des difficultés importantes, nous ne retiendrons dans un premier temps que la forme linéarisée de ces dernières.

Il s'agit donc maintenant, d'effectuer une linéarisation des conditions cinématique et dynamique de surface libre au voisinage de la solution de "repos", solution d'ordre 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p_0 - \rho g z. \\ \phi = \text{constante.} \\ \Delta \phi = 0 \\ \eta = 0 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

### Condition de glissement sur le corps.

La condition aux limites sur la carène se traduit par une condition "d'étauchéité". Le corps étant supposé indéformable, la vitesse normale du fluide doit être égale à la vitesse normale de la paroi. Si nous considérons  $\vec{V}_G$  la vitesse du centre de gravité du flotteur (ou d'un autre point fixe dans le repère lié au corps), la condition de glissement s'écrit :

$$\frac{\partial \phi (M, t)}{\partial n (M, t)} = \vec{V}_G (t) \cdot \vec{n} (M, t) \Big|_{M \in S_C} \quad (4.6)$$

Où  $\vec{n} (t)$  représente la normale à la carène  $S_C$  en un point  $M$  lié à celle-ci.

Autrement dit, on cherche à résoudre le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta \phi (M, t) = 0 & \forall M \in \Omega, & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi (M, t) = 0 & \forall M \in S_f \cup S_\infty, & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi (M, t) + g \partial \phi (M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL}, & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi (M, t) = \vec{V} \cdot \vec{n} (M, t) & \forall M \in S_C, & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Equations intégrales du problème.

Nous allons maintenant considérer la fonction de Green qui permet de satisfaire l'ensemble des conditions du problème aux limites précédent (équation (4.7)) exceptée celle de glissement sur le corps (équation (4.6)). Son expression générale est la suivante :

$$G (M', t', M, t) = \delta (t - t') G_0 (M', M) + H (t - t') F (M', t', M, t) \quad (4.8)$$

avec :

$$G_0 (M', M) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R1} \right) \quad (4.9)$$

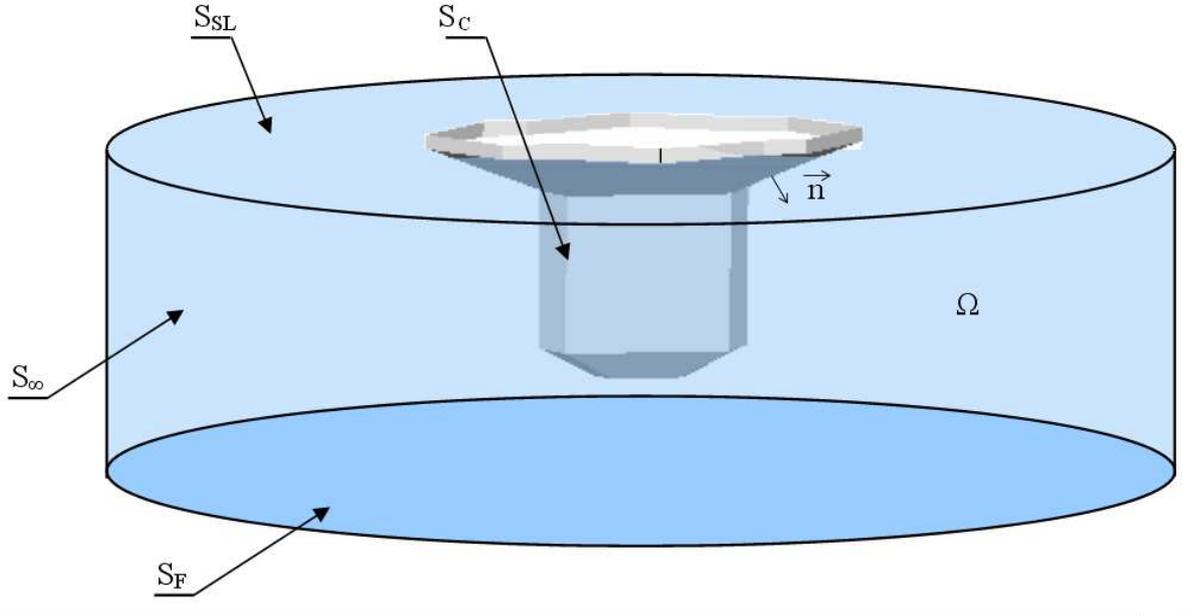


FIG. 4.1 – Volume fluide.

$$F(M', t', M, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(kr) e^{(kz+z')} \sqrt{gk} \sin(\sqrt{gk}(t-t')) dk \quad (4.10)$$

où :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')(y-y')(z-z')} \\ R &= \sqrt{r^2 + (z-z')^2} \\ R_1 &= \sqrt{r^2 + (z+z')^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

En considérant la troisième formule de Green, Wehausen [29] a montré que le potentiel est solution de l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t)}{2} - \int \int_{S_C} \phi(M', t) \frac{\partial}{\partial n} G_0(M', M) dS &= - \int \int_{S_C} G_0(M', M) \vec{V} \cdot \vec{n}(M, t) \\ &+ \int_0^t \int \int_{S_C} \left[ \begin{array}{l} \phi(M', t) \frac{\partial}{\partial n} F(M', t', M, t) \\ -F(M', t', M, t) \vec{V} \cdot \vec{n}(M', t') \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le problème tridimensionnel initial se ramène alors au calcul du potentiel à la surface du corps.

## 4.2 Résolution du problème.

### 4.2.1 Approche utilisée.

Nous avons vu précédemment que pour évaluer numériquement l'écoulement incompressible dans le domaine  $D$ , limité par la surface libre au repos  $S_{SL}$  et la carène  $S_C$ , on utilise la méthode des singularités. Cette approche a permis notamment de réduire d'une dimension le problème initial en passant d'un problème 3D à un problème situé sur les frontières du domaine avec comme inconnues les valeurs du potentiel des vitesses sur la surface de la carène  $S_C$ .

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul des efforts associés aux mouvements d'un corps dans la houle. L'approche classique lorsque l'on détermine les efforts liés aux mouvements d'un flotteur soumis à un champ de vagues est de décomposer le potentiel de vitesse en une somme de huit potentiels élémentaires tel que :

$$\phi = \phi_0(M, t) + \sum_{i=1}^7 \phi_i(M, t) \quad (4.13)$$

Cette décomposition rendue possible par la linéarité du problème (4.7) et proposée initialement par Haskind [11], fait apparaître  $\phi_0$ , représentant le potentiel associé au champ de vagues incident,  $\phi_7$  celui associé au champ diffracté et  $\phi_{i=1,2,\dots,6}$  correspondant au potentiel de radiation associé aux mouvements du corps en cavalement, embardée, pilonnement, roulis, tangage et lacet. Ces différents potentiels sont alors présentés comme solution de problèmes élémentaires indépendants, qui une fois superposés, permettent d'obtenir la solution du problème global.

Une seconde approche existe également, qui est celle proposée par Bingham [23] et qui consiste à déterminer le potentiel  $\phi_P$  pour une impulsion de vitesse en un unique point  $P$  du corps. Le problème aux limites est alors de la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta \phi_P(M, t) = 0 & \forall M \in \Omega, & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_P(M, t) = 0 & \forall M \in S_f \cup S_\infty, & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_P(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \phi_P(M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL}, & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_P(M, t) = \delta(t) \partial \left( \left\| \overrightarrow{PM} \right\| \right) & \forall M \in S_C, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

avec :  $\delta(t)$  représentant la fonction de Dirac.

L'effort associé à l'impulsion est alors :

$$\overrightarrow{F}_P(t) = \rho \int_{S_C} \int \frac{\partial}{\partial t} \phi_P(M, t) \overrightarrow{N}(M, t) dS \quad (4.15)$$

Dès lors, pour toute distribution de vitesses  $\overrightarrow{V}(PM, t)$  connue sur le corps,

nous pouvons obtenir l'effort correspondant par convolution :

$$\vec{F}(t) = \rho \int \int_{S_C} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_P(t - \tau) \left( \vec{V}(P, \tau) \cdot \vec{n}(P) \right) d\tau \quad (4.16)$$

Cette méthode, appelée méthode des déformations généralisées [1], a le net avantage par rapport à la méthode classique d'être applicable pour n'importe quel champ incident. En effet, la méthode classique est applicable pour un seul et même champ incident d'amplitude et de période données, ici, la solution peut s'appliquer pour tout type de houles régulières sans que le calcul hydrodynamique soit relancé. C'est donc un avantage pratique qui est loin d'être négligeable d'autant plus lorsque l'on veut faire des simulations sur houle irrégulière. La méthode classique imposait de superposer plusieurs houles régulières suivant le spectre de vagues désiré, la méthode des déformations généralisées permet quant à elle d'appliquer directement le gradient de potentiel du champ incident à travers l'équation (4.16).

## 4.3 Résolution numérique.

### 4.3.1 Equations intégrales discrètes.

Le potentiel  $\phi(M, T)$  en chaque point  $M$  appartenant à la carène  $S_C$  et pour chaque mouvement élémentaire est calculé grâce à la relation de Wehausen [29]. L'équation intégrale précédente couplée au problèmes aux limites (4.14) est alors discrétisée en temps et en espace en vue de sa résolution. La surface du corps est donc approchée par des facettes planes, triangulaires ou quadrangulaires alors que le temps est incrémenté par un pas fixe. Si  $S_f$  correspond à la facette  $f$  du maillage alors le problème aux limites (4.14) devient :

$$\begin{cases} \Delta \phi_{S_f}(M, t) = 0 & \forall M \in \Omega & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{S_f}(M, t) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_{S_f}(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \phi_{S_f}(M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL} & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{S_f}(M, t) = H_{S_f} & \forall M \in S_C & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} H_{S_f}(M, t) &= 1 & \forall M \in S_f \text{ et } \forall t \geq 0 \\ H_{S_f}(M, t) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned} \quad (4.18)$$

En posant respectivement  $\sigma_{S_f, j}(t) = \frac{\partial \phi_{S_f}(M_j, t)}{\partial n_j}$  et  $\mu_{f, j}(t) = -\phi_{S_f}(M_j, t)$  les densités surfaciques de sources et de doublets sur la surface, l'équation intégrale (4.12) est, sous forme discrète et en notation matricielle, de la forme [4] :

$$[D_{ij}] [\mu_{sf,j}(t)] = -H(t) [S_{ij}] [\sigma_j(0)] + \int_0^t [d_{ij}(t-\tau)] [\mu_{sf,j}(t)] d\tau \quad (4.19)$$

avec :

$$-D_{ij} = \int_{S_j} \int \frac{\partial}{\partial n_j} G_0(M_i, M_j) dS \quad (4.20)$$

$$-S_{ij} = \int_{S_j} \int G_0(M_i, M_j) dS \quad (4.21)$$

$$-d_{ij} = \int_{S_j} \int \frac{\partial}{\partial n_j} F(M_i, 0, M_j, t) dS \quad (4.22)$$

$$-s_{ij} = \int_{S_j} \int F(M_i, 0, M_j, t) dS \quad (4.23)$$

On obtient ainsi un système de  $n$  équations correspondant aux  $n$  facettes de la discrétisation du corps. Les  $n$  inconnus sont les potentiels  $\mu_{f,j}(t)$  sur chaque facette. Le système est alors résolu à chaque pas de temps, à partir de l'instant initial.

La résolution numérique de ce système est réalisée par le code numérique ACHIL3D. Ce programme, développé au sein de l'Ecole Centrale par Clément [4], résout en effet l'équation intégrale discrète dans le cas de problèmes de radiation pour des corps présentant 0, 1 ou 2 symétries. Une méthode aux éléments frontières est utilisée où l'intégration sur les facettes se fait à l'aide d'une méthode de Gauss à un point, Ferrant [47] ayant montré que le nombre de facettes est moins pénalisant que le nombre de points de Gauss. La partie instationnaire de la fonction de Green, quant à elle, est résolue par intégration des équations différentielles ordinaires, méthode tirées de Clément [5].

## 4.4 Bilan des efforts.

Soit  $\vec{X}^t = (x_G, y_G, z_G, \varphi, \theta, \psi, \alpha)$  le vecteur des paramètres de position du flotteur et de la roue pendulaire et  $\vec{Y}^t = (x_G, y_G, z_G, \varphi, \theta, \psi)$  le vecteur position du centre de gravité du flotteur avec :  $\varphi$  l'angle de roulis,  $\theta$  l'angle de tangage et  $\psi$  l'angle de lacet. En théorie linéarisée et dans le domaine temporel, les équations du mouvement d'un navire sont données par l'égalité suivante :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{C}_M(\infty)) \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{ex}(t) - \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} - \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) \dot{\mathbf{X}}(\tau) d\tau - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_H) \mathbf{X} \quad (4.24)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{\text{ex}} : \text{Force d'excitation hydrodynamique due au champ de vague incident et diffracté.} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{M}} : \text{Matrice des masses d'eau ajoutées.} \\ \mathbf{H} : \text{Fonction mémoire.} \\ \mathbf{B} : \text{Matrice d'amortissement extérieur.} \\ \mathbf{M} \text{ et } \mathbf{K} : \text{Matrice des masses et des raideurs propres au système.} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{H}} : \text{Matrice des raideurs hydrostatiques.} \end{array} \right.$$

Le flotteur SEAREV ayant 2 axes de symétrie dans le plan vertical, les équations du mouvement pour le cavement et le lacet sont découplées des autres mouvements. En théorie linéaire, ces degrés de liberté ne contribuent donc pas à l'absorption d'énergie, par conséquent, dans la suite ce chapitre les équations ne prendront en compte comme inconnus que  $(x_G, y_G, \varphi, \theta, \alpha)$  tel que :  $\vec{X}^t = (x_G, y_G, \varphi, \theta, \alpha)$  et  $\vec{Y}^t = (x_G, y_G, \varphi, \theta)$ .

Nous ne présentons ici que les matrices résultantes, pour ce qui est des développements mathématiques amenant à ce résultat j'invite le lecteur à se reporter à mon rapport de DEA [26].

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & 0 & m_p(d-l) & -mpl \\ 0 & m_b + m_p & m_pl(-d) & 0 & 0 \\ 0 & m_pl(-d) & I_{by} + I_{py} + m_p(l-d) & 0 & 0 \\ m_p d & 0 & 0 & I_{by} + I_{py} - m_p d(l-d) & -m_p dl + I_{py} \\ -m_pl & 0 & 0 & m_p(l-d) + I_{py} & I_{py} + m_pl^2 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p g d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_p g(d-l) & m_p g l \\ 0 & 0 & 0 & m_p g l & m_p g l \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

#### 4.4.1 Efforts du convertisseur d'énergie.

La matrice  $\mathbf{B}$  représente le système d'absorption d'énergie (*Power Take Off*). Dans toutes les simulations qui suivent, le PTO est modélisé par un simple couple d'amortissement linéaire  $\overrightarrow{C}_{PTO}$  appliqué au centre de rotation du cylindre tel que :

$$\overrightarrow{C}_{PTO} = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} \quad (4.27)$$

La matrice  $\mathbf{B}$  est par conséquent de la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_p \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

#### 4.4.2 Efforts hydrostatiques.

Les efforts hydrostatiques s'écrivent ici :

$$\mathbf{F}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_b + m_p)g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{K}_H \mathbf{Y} \quad (4.29)$$

$\mathbf{K}_H$  représente la matrice de raideur hydrostatique, terme qui disparaîtra dans l'approche non-linéaire puisque la surface mouillée instantanée exacte sera considérée.

#### 4.4.3 Efforts de pression.

##### Efforts d'excitation.

L'effort d'excitation regroupe à la fois les efforts de Froude-Krylov et les efforts de diffraction. En utilisant un code temporel, cet effort d'excitation généralisé est donné par :

$$\mathbf{Fex}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{K}_0(t - \tau) + \mathbf{K}_7(t - \tau)) \eta_0(\tau) d\tau \quad (4.30)$$

avec  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_7$  les réponses impulsionnelles en effort pour la houle incidente et la houle diffractée et  $\eta_0$  la déformée de surface libre associée au potentiel de la houle incidente.

Une autre manière est d'utiliser la solution d'un code fréquentiel, l'effort généralisé est alors donné dans le domaine temporel par :

$$\mathbf{Fex}(t) = a\mathfrak{S}(\mathbf{F}_{I+D}(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)}) \quad (4.31)$$

$\mathbf{F}_{I+D}(\omega)$  vecteur à variables complexes des efforts de diffraction-radiation au point O.

Cette dernière solution qui est retenue pour l'approche linéaire, où les coefficients de raideurs hydrostatiques de la matrice  $\mathbf{K}_H$  et le vecteur effort d'excitation  $\mathbf{F}_{ex}$  de l'équation 4.24 sont calculés à l'aide du programme fréquentiel de tenue à la mer AQUADYN [21]. L'approche non-linéaire calculera, elle, les efforts d'excitation en fonction des réponses impulsionnelles en effort issus d'ACHIL3D pour ce qui est de la diffraction tandis que les efforts de Froude-Krylov seront déterminés sur la surface mouillée instantanée exacte.

### Efforts de radiation.

L'effort généralisé de radiation s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_R(t) = -\mathbf{C}_M \ddot{X} - \int_0^t \mathbf{H}(t - \tau) \dot{Y}(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

La décomposition de Cummins est ici utilisée pour représenter les efforts de radiation par un produit de convolution entre la fonction mémoire  $\mathbf{H}$  et le vecteur vitesse du centre de gravité du flotteur. La matrice  $\mathbf{C}_M$  est une matrice à coefficient constants correspondant à la matrice d'eau ajoutée. Ces deux matrices sont obtenues par l'intermédiaire du programme instationnaire de tenue à la mer ACHIL3D [6].

Pour la résolution dans le domaine temporel du produit de convolution le problème peut se résoudre de différentes manières. La méthode classique se résume à intégrer directement l'équation du mouvement telle qu'elle est écrite dans l'équation(4.24) à l'aide, par exemple, d'un schéma d'intégration de Runge-Kutta à l'ordre 4. Il existe également une méthode alternative consistant dans un premier temps à transformer la fonction mémoire dans le but de faire disparaître des équations le produit de convolution. C'est cette dernière méthode que nous utilisons ici. Cette transformation est réalisée en suivant la méthode de Prony, méthode implémentée au laboratoire par Daubisse [25] et développée ultérieurement par Clément [4] pour le calcul de la réponse impulsionnelle des efforts de radiation.

Cette méthode calcule un couple de variables réelles tel que :

$$H_{ij}(t) \approx \sum_{m=1}^{N_{ij}} \alpha_{ijm} e^{\beta_{ijm} t} \quad (4.33)$$

Cette identification permet ainsi d'approximer la réponse impulsionnelle  $\mathbf{H}(t)$  par une somme d'exponentielles. On pose :

$$I_{ij}(t) = \int_0^t H_{ij}(t - \tau) \dot{Y}_j(\tau) d\tau \quad (4.34)$$

En injectant l'équation (4.33) dans l'équation précédente nous obtenons :

$$I_{ij}(t) = \sum_{m=1}^{N_{ij}} I_{ijm} \quad (4.35)$$

soit

$$I_{ijm}(t) = \int_0^t \alpha_{ijm} e^{\beta_{ijm}(t-\tau)} \dot{X}_j(\tau) d\tau \quad (4.36)$$

En reprenant l'équation (4.24) et en appliquant ces nouveaux changements nous arrivons au système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{I}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}_{ex}(t) \\ \dot{\mathbf{i}}(t) = \boldsymbol{\beta}\mathbf{I}(t) + \boldsymbol{\alpha}\dot{\mathbf{Y}}(t) \end{cases} \quad (4.37)$$

avec,

$$\mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{N_{11}} I_{11}(t) + \sum_{m=1}^{N_{15}} I_{15}(t) \\ \sum_{m=1}^{N_{22}} I_{22}(t) + \sum_{m=1}^{N_{24}} I_{24}(t) \\ \sum_{m=1}^{N_{42}} I_{42}(t) + \sum_{m=1}^{N_{44}} I_{44}(t) \\ \sum_{m=1}^{N_{51}} I_{51}(t) + \sum_{m=1}^{N_{55}} I_{55}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mis sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} + \mathbf{C} \quad (4.38)$$

Avec,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [I_d] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{M} + \mathbf{C}_M(\infty)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [I_d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & [I_d] & 0 \\ -(\mathbf{K} + \mathbf{K}_H) & -\mathbf{B} & \boldsymbol{\delta} \\ 0 & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [I_d] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{M} + \mathbf{C}_M(\infty)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [I_d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{ex}^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \delta = \begin{pmatrix} 1_{1 \leq j \leq N_{11} + N_{14}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{1 \leq j \leq N_{22} + N_{24}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{1 \leq j \leq N_{32} + N_{34}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{1 \leq j \leq N_{41} + N_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 4.5 Modélisation de la houle aléatoire.

La connaissance de la distribution spatiale angulaire de la houle est assez limitée comparé à celle de son spectre de fréquence. L'approche la plus classique pour modéliser cette dispersion spatiale consiste à multiplier pour chaque fréquence  $f$  et chaque incidence  $\theta$  le spectre de fréquence  $E(f)$  par une fonction empirique  $D(f, \theta)$  représentant la dispersion directionnelle de l'énergie tel que :

$$E(f, \theta) = E(f) \cdot D(f, \theta) \quad (4.39)$$

$E(f, \theta)$  représentant alors le spectre directionnel du champ de vague.

### 4.5.1 Modèle de dispersion fréquentielle.

Désireux de connaître la production d'énergie annuelle, il est indispensable de disposer d'un modèle d'état de mer dont les propriétés spectrales correspondent, en partie, à celles d'une mer établie depuis une longue durée. Notre choix pour le spectre de champ de vague monodirectionnel  $E(f)$  s'est porté sur le plus populaire de tous à savoir celui de Pierson-Moskowitz[64].

Ce spectre est défini pour des conditions de profondeur infinie, où l'on considère un fetch assez large afin que l'énergie apportée par le vent équilibre celle perdue. Paramétré en fonction de la hauteur significative  $H_{1/3}$  et la période moyenne de pic  $T_P$ , il s'écrit de la manière suivante :

$$E(f) = \frac{A}{f^5} \exp \left[ -\frac{B}{f^4} \right] \quad (4.40)$$

avec,

$$\begin{cases} A = \frac{5}{16} \frac{H_{1/3}^2}{T_P^4} \\ B = \frac{5}{4} \frac{1}{T_P^4} \end{cases}$$

En toute rigueur, nous devrions prendre en compte la remarque d'Hasselmann [33] qui a montré que ce spectre ne correspondait pas dans sa totalité à un spectre d'états de mer pleinement développés mais qu'à une partie seulement.

### 4.5.2 Modèle de dispersion spatiale.

La littérature [54] fait ressortir principalement 4 méthodes pour représenter la fonction de dispersion spatiale. Il existe ainsi les modèles en puissance de cosinus (cosine power-models), les modèles basés sur une distribution gaussienne (wrapped-around Gaussian model), la formule de Von Mises, le modèle de type hyperbolique, ou encore le modèle à double pic (double peak spreading model). Pour cette étude nous avons choisi les cosine power-models de Mitsuyasu [24] où la fonction de dispersion spatiale  $D(f, \theta)$  est modélisée de la manière suivante .

$$D(f, \theta) = G(s) \cos^{2s} \left[ \frac{(\theta - \theta_m)}{2} \right] \quad (4.41)$$

$$\text{avec } G(s) = \frac{2^{2s-1} \Gamma^2(s+1)}{\pi \Gamma(2s+1)}$$

$s$  est alors un paramètre dépendant de la fréquence et est appelé paramètre de dispersion directionnelle,  $\theta_m$  représente la direction moyenne (dépendant aussi de la fréquence) et  $G(s)$  correspond au facteur permettant d'assurer l'identité avec le spectre unidirectionnel la fonction de dispersion  $D(f, \theta)$  en vérifiant la relation suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D(f, \theta) d\theta = 1 \quad (4.42)$$

Le paramètre de dispersion  $s$  utilisé ici définit un état de mer spécifique en terme de distribution directionnelle. Généralement ce terme est estimé à partir de relevés réalisés lors de campagnes de mesures sur un site donné [12]. Il existe également de nombreuses manières de l'estimer. Ainsi Cartwright dans [44] a représenté la fonction de dispersion à l'aide d'une décomposition en série de Fourier. Mitsuyasu [24] quant à lui a montré que le maximum du paramètre de dispersion, correspondant à la fréquence de pic du spectre de vague, peut être déterminé à partir d'un paramètre adimensionnel correspondant à l'âge de la vague et calculé en réalisant le rapport entre la vitesse de phase et la vitesse du vent. Goda [66], pour sa part, recommande de prendre une valeur égale à 10 pour la simulation de vagues créées par le vent, 25 dans le cas de petites longueurs d'onde et 75 pour les houles établies.

### 4.5.3 Hauteur de surface libre et force d'excitation.

Une collaboration entre le CETMEF de Météo France et l'IFREMER a permis d'obtenir plusieurs relevés concernant les périodes de pic et les hauteurs de surface libre pour différents sites le long du littoral français (île d'Yeu, Ouessant, ...). Ces données, disponibles à l'adresse : [www.cetmef.equipement.gouv.fr](http://www.cetmef.equipement.gouv.fr), ont donné lieu à

des cartes de densité de probabilité de rencontre d'un état de mer (scatter-diagram) 4.2.

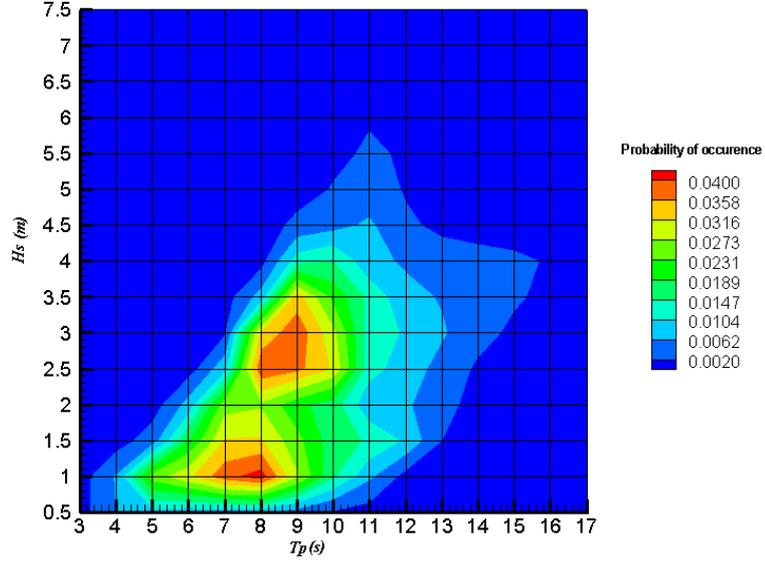


FIG. 4.2 – Répartition statistique (scatter-diagram) des états de mer pour le site de l'île d'Yeu.

Dans cette étude nous avons choisi de simuler numériquement une houle représentant au mieux le site de l'île d'Yeu. Dans ce genre de simulation et lorsque la houle est supposée irrégulière, la modélisation mathématique consiste à considérer la houle comme une superposition de  $N$  ondes sinusoïdales avec pour chacune d'entre elles une fréquence  $f_i$ , une incidence  $\theta_j$  et une phase  $\varphi_{ij}$  qui est, elle, tirée aléatoirement dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

L'amplitude significative pour une houle aléatoire est donnée par la relation suivante :

$$a(f_j, \theta_i) = \sqrt{2E(f_j, \theta_i) \Delta f \Delta \theta} \quad (4.43)$$

L'élévation de la surface libre  $\eta(t)$  correspondant à la houle reconstruite se fait alors de la manière suivante :

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_w} a(w_j, \theta_i) \cos(k_j(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - w_j t + \varphi_{ij}) \quad (4.44)$$

L'effort d'excitation est alors déduit des résultats du code fréquentiel donnant les efforts élémentaires dus à chaque pulsation pour chaque incidence présente dans la houle. Il s'écrit tel que :

$$F_{ex}(t) = \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_w} \Im \left( a \left( \frac{w_j}{2\pi}, \theta_i \right) F_{ex}(w_j, \theta_i) e^{i(k_i(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \omega_j t + \varphi_{ij})} \right) \quad (4.45)$$

#### 4.5.4 Energie et puissance disponible.

Pour une houle monodirectionnelle l'énergie transportée par mètre de front de vague est équivalent à :

$$P_{disp} = \rho g \int_0^{\infty} C_g(f) E(f) df \quad (4.46)$$

où  $C_g$  correspond à la vitesse de groupe,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $g$  la gravité .

Si l'on considère cette même équation mais appliquée à un spectre directionnel nous avons :

$$P_{disp} = \rho g \int_0^{\infty} C_g(f) df \int_{-\pi}^{\pi} E(f, \theta) . D(f, \theta) d\theta \quad (4.47)$$

L'intégrale selon  $\theta$  étant égale à 1 selon la relation (4.42), l'équation (4.46) donne par conséquent la puissance transportée à travers un cercle fixe de diamètre unité. N'étant pas le but de cette étude, nous supposons que le système SEAREV, de part sa forme longiligne, se place et se stabilise naturellement dans la direction moyenne du champ de vague incident. Par conséquent, comme le montre la figure (4.3) les trains de vagues peuvent se répartir symétriquement autour du flotteur par rapport à sa position longitudinale.

Sous cette hypothèse, la direction moyenne du champ de vague  $\theta_m$  devient alors nulle dans l'équation (4.41). Nous supposons également que la distribution du champ de vague se fait dans l'intervalle  $[-90^\circ, 90^\circ]$  autour de  $\theta_m$ . On peut remarquer sur la figure (4.4) que cette hypothèse est relativement acceptable où l'on voit que la distribution angulaire idéale de  $D(\theta)$  ne va pas au-delà de  $90^\circ$  pour une valeur du paramètre de dispersion supérieure ou égale à 5.

Finalement, nous obtenons pour la puissance dissipée à travers un plan vertical normal à la direction principale de propagation :

$$P_{disp} = \rho g \int_0^{\infty} df \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} C_g(f) E(f, \theta) \cos(\theta) d\theta \quad (4.48)$$

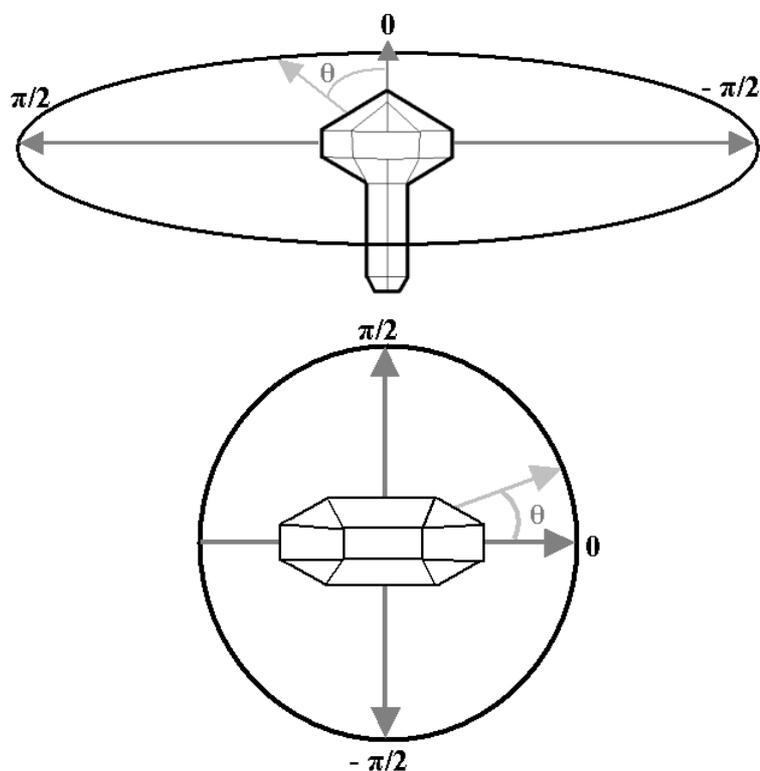


FIG. 4.3 – Représentation de la répartition des vagues autour de la position du SEAREV.

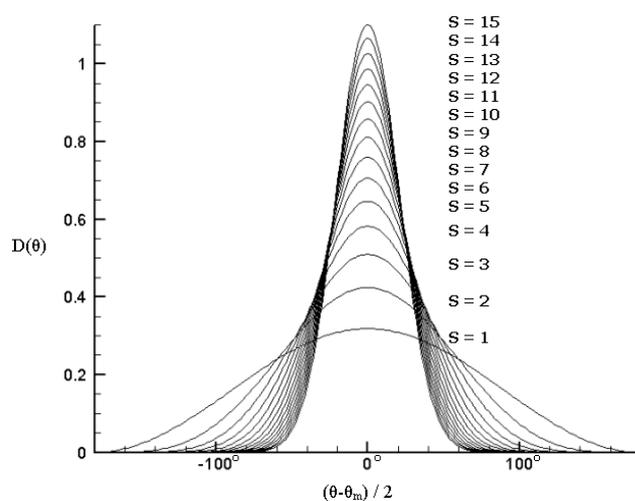


FIG. 4.4 – Distribution angulaire idéale pour le modèle cosme power .

L'énergie disponible sur une année pour le site de l'île d'Yeu s'obtient alors en pondérant l'énergie disponible pour chaque état de mer par leur probabilité d'occurrence donnée par la carte de densité de probabilité du paragraphe précédent.

## 4.6 Energie moyenne annuelle extraite.

La puissance moyenne absorbée sur un temps  $T$  est donnée par :

$$\hat{p} = \frac{1}{T} \int_0^T B_{PTO} \alpha(t)^2 dt \quad (4.49)$$

La théorie linéarisée permet d'exprimer la puissance moyenne annuelle sur un site donné tel que :

$$\hat{P} = \sum_{j=1}^{N_w} \hat{p}(w_j, \theta_i) \left[ a \left( \frac{w_j}{2\pi}, \theta_i \right) \right]^2 \quad (4.50)$$

De la même manière que dans le paragraphe précédent, le calcul de l'énergie totale absorbée sur une année peut être réalisé en sommant les puissances absorbées pour tous les états de mer pondérées, par leur probabilité d'occurrence  $C$  donnée par le scatter-diagram précédent (figure (4.2)). Nous avons alors :

$$E = \sum_{H_{1/3}} \sum_{T_P} C(H_{1/3}, T_P) \sum_{j=1}^{N_w} \hat{p}(w_j, \theta_i) \left( a \frac{w_j}{2\pi}, H_{1/3}, T_P \right) \quad (4.51)$$

# Chapitre 5

## Influence de la directionnalité de la houle sur les performances d'un récupérateur d'énergie des vagues.

La dispersion spatiale angulaire du contenu fréquentiel d'un spectre de vague est une propriété fondamentale du champ de vagues d'une houle aléatoire. Elle est un élément clé lors de la modélisation du comportement d'un navire dans un tel environnement ou lors d'études de phénomènes océanographiques ou géomorphologiques. Pour autant, la grande majorité des simulations numériques réalisées en énergie des vagues ne prennent pas en compte ce phénomène et se cantonnent au cas d'une houle monodirectionnelle. Le but de l'étude présentée maintenant est justement de voir si ce choix de modélisation est justifié et de quantifier l'influence que cette répartition spatiale peut avoir sur la production moyenne annuelle d'un système récupérateur d'énergie des vagues tel que le système SEAREV.

### 5.1 Etude analytique.

L'étude analytique porte sur l'énergie disponible d'un champ de vague multidirectionnel. Soit  $E(f, \theta)$  la densité spectrale d'énergie de l'équation et supposons une profondeur infinie. On obtient :

$$P^+ = 410,3 H_{1/3}^2 . T_P . G(s) . Q(s) \quad (5.1)$$

avec

$$Q(s) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2s} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos(\theta) d\theta \quad (5.2)$$

$G(s)$  la fonction de normalisation (équation (4.41))

L'exposant + indique que la valeur que prend le cosinus dans l'équation (4.3) est positive.

Finalement nous obtenons :

$$P = 0,410 H_{1/3}^2 \cdot T_P \cdot H(s) \quad (5.3)$$

Les allures des fonctions  $G(s)$ ,  $Q(s)$  et  $H(s)$ , définies précédemment, en fonction du paramètre de dispersion  $s$  sont présentées sur la figure (5.1). Une perte d'énergie incidente de 10% est observable pour une valeur du paramètre de dispersion  $s$  autour de 10. Cette perte s'amenuise au fur et à mesure que  $s$  devient grand (tableau (5.1)) pour converger finalement vers la valeur 0.

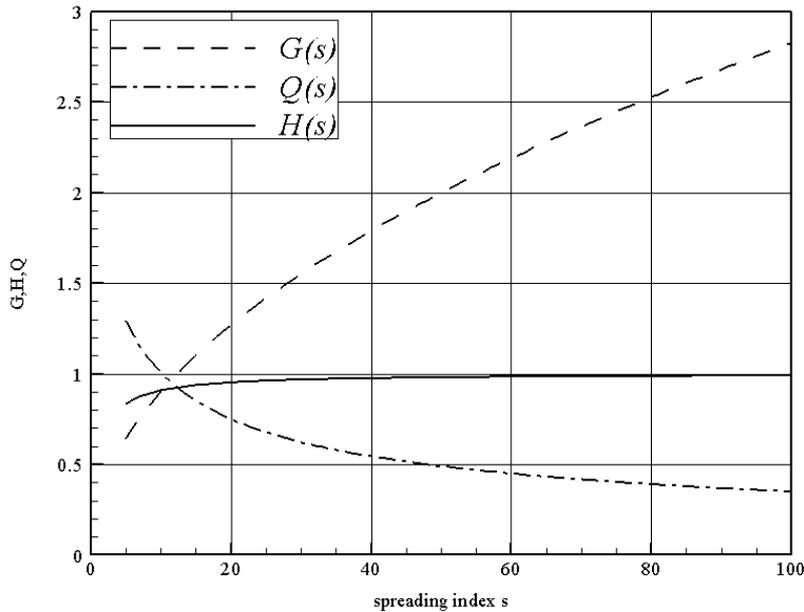


FIG. 5.1 – Comportement des fonctions  $G$ ,  $Q$  et  $H$  en fonction de  $s$ .

Le paramètre de dispersion  $s$  a donc finalement peu d'influence sur l'énergie disponible par unité de largeur de front au delà des valeurs usuelles.

## 5.2 Résultats numériques.

Les calculs numériques dans cette partie sont réalisés sur le flotteur SEA-REV2595 (cf. annexe 1). Sa largeur est de 15,3 mètres et la racine cubique de son volume correspond à une longueur de 11 mètres. L'étude se porte sur 10 valeurs du coefficient de dispersion  $s$  permettant de balayer l'ensemble des étalements directionnels des états de mer. Les valeurs 2 à 5 sont utilisés pour représenter des

s	H(s)
5	0.83434
10	0.90910
30	0.95238
50	0.98039
100	0.99010

TAB. 5.1 – Influence du paramètre de dispersion  $s$  sur la fonction  $H(s)$ .

états de mer très dispersés, 10 pour une mer formée par le vent, 30 et 50 pour avoir de courtes longueurs d'onde et enfin 100 pour se rapprocher du cas idéal de la houle monodirectionnelle.

Nous avons procédé à dix simulations de la réponse du système à des houles aléatoires directionnelles de période de pic et de hauteur significative correspondant aux données statistiques du site de l'île d'Yeu sur un an. Chaque calcul pour un couple ( $H_s$ ,  $T_p$ ) donné est d'une durée de 200 secondes, en ce qui concerne la discrétisation du spectre le pas en période est de 0,2 seconde tandis que celui correspondant à la répartition angulaire est égal à 2 degrés. Le tableau suivant compare les valeurs moyennes annuelles de largeur de capture et du taux de capture pour chaque valeur du paramètre de dispersion  $s$ . Les définitions de ces deux termes sont les suivantes :

- La largeur de capture d'un système pour un état de mer particulier est le rapport entre l'énergie récupérée et l'énergie incidente par mètre de largeur.
- Le taux de capture pour un état de mer particulier résulte, lui, du rapport entre la largeur de capture et la valeur de la racine cubique du volume.

s	Moyenne annuelle de la largeur de capture (m)	Taux de capture.
2	3,22	29,3 %
3	3,62	32,8 %
4	3,97	36,1 %
5	4,11	37,4 %
7	4,22	38,3 %
8	4,23	38,5 %
10	4,28	38,9 %
30	4,52	41,1 %
50	4,59	41,7 %
100	4,65	42,2 %

TAB. 5.2 – Variations des valeurs moyennes annuelles de la largeur de capture et de l'énergie absorbée en fonction du paramètre de dispersion  $s$ .

Il apparaît un écart relativement important entre deux calculs correspondant à un même état de mer. En effet, le tirage des phases aléatoires implique des effets non négligeables sur le comportement du SEAREV. Toutefois, l'influence négative

de l'étalement directionnel sur les performances du système est indéniable au regard des résultats. Le cas  $s = 10$  donne une largeur de capture de 4,28 mètres autrement dit le flotteur absorbe pratiquement 39% de l'énergie qui lui passe à travers tandis que pour  $s = 100$ , correspondant à un état de mer quasi monodirectionnel, la largeur de capture est d'environ 4,6 mètres soit un pourcentage d'absorption de 42%.

La figure suivante illustre l'évolution du taux de capture en fonction de la valeur du paramètre de dispersion  $s$ .

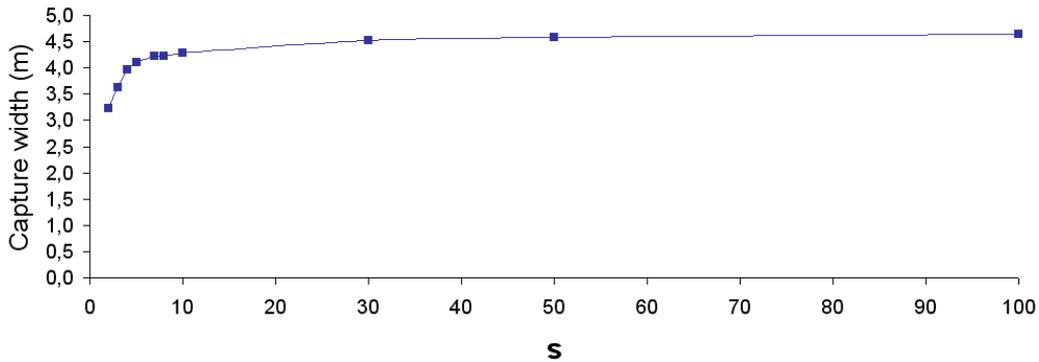


FIG. 5.2 – Variation du taux de capture en fonction du paramètre de dispersion  $s$ .

L'allure quasi logarithmique de la courbe montre l'effet indéniable de l'étalement directionnel du spectre. Cependant, on remarque que la largeur de capture converge assez rapidement vers la valeur 4,5 mètres. En effet, pour  $s=30$  la largeur de capture vaut 4,52 mètres soit 99% de la largeur obtenue pour  $s=100$ . Nous voyons donc qu'au fur et à mesure que  $s$  augmente et que l'état de mer converge vers le cas monodirectionnel, le taux de capture augmente. Autrement dit, plus la modélisation du champ incident se rapproche du cas idéal de la houle monodirectionnelle et plus le système récupère d'énergie.

L'ensemble de ces résultats nous montre que l'influence de la directionnalité de la houle a des effets non négligeables sur la production d'énergie pour ce type de carène. La directionnalité du spectre de la houle contraint le système à être excité selon ses modes transverses (cf figure (5.3)) qui ont une action négative sur le pendule rendant l'ensemble du système moins performant en terme de production d'énergie. L'éventualité du second degré de liberté du pendule afin de récupérer cette énergie perdue a déjà été envisagée. Mais à la vue du coût de l'installation d'un tel système, cet investissement serait beaucoup plus important que le gain qui serait susceptible d'être apporté.

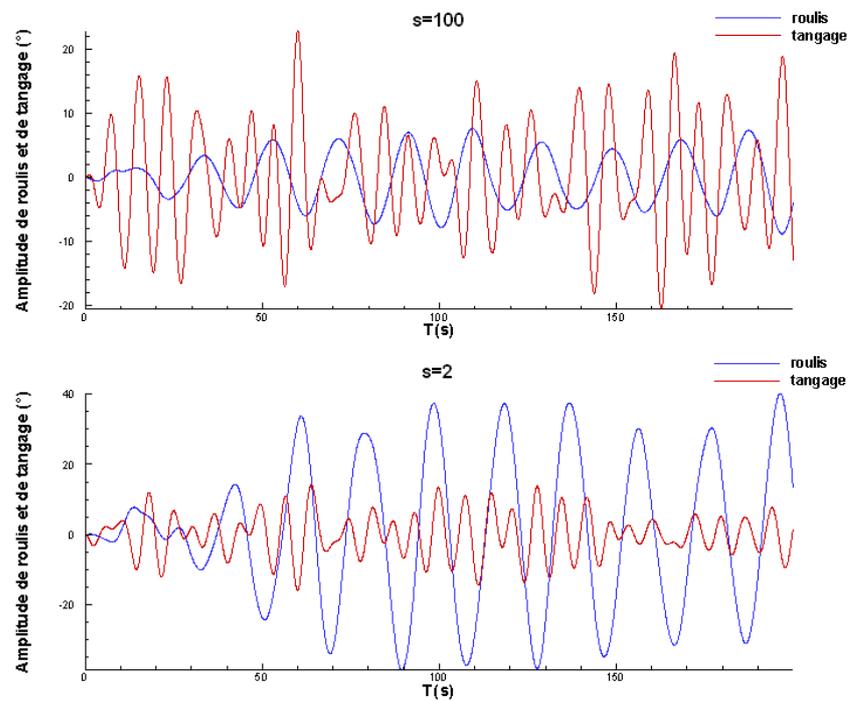


FIG. 5.3 – Réponse en roulis et en tangage dans le cas d'un spectre de houle directionnel pour  $s=2$  et  $s=100$ .

**Troisième partie**  
**Modèle non-linéaire 3D.**

# Introduction

La simulation hydrodynamique non-linéaire implique une telle dynamique que de forts couplages apparaissent entre les différents degrés de liberté du système. On s'attache donc dans cette partie à présenter les équations non-linéaires de la mécanique régissant les mouvements du système [flotteur+pendule]. Au-delà, des équations du mouvement d'autres étapes interviennent dans la simulation temporelle de mouvements de grande amplitude. La première étape consiste à prendre en compte la surface mouillée instantanée imposant à chaque instant le calcul de l'intersection entre la carène et la surface libre. Alors qu'en 2D le problème se résumait à l'intersection entre deux courbes planes, le problème est ici spatial et concerne des surfaces qui peuvent être gauches. Le problème de tenue à la mer est également formulé où le fluide est considéré comme parfait. La méthode des singularités de Kelvin est alors utilisée, donnant ainsi l'effort de pression sous forme linéaire. L'extension au second-ordre de cet effort se fait alors en deux étapes. Une première concerne les composantes de l'effort de Froude-Krylov et du calcul de la surface mouillée. La seconde étape se fait au niveau de l'effort de pression hydrodynamique linéaire qui est d'abord étendu au second-ordre à l'aide d'un développement de Taylor autour de la position moyenne du flotteur. Le terme quadratique de l'équation de Bernoulli est enfin ajouté au terme de pression lié à cet effort.

Au cours de la résolution numérique, différentes vérifications sont réalisées. Les efforts de Froude-Krylov, de diffraction, de radiation sont alors comparés à ceux d'une méthode potentielle linéaire. Le cas test du cylindre vertical est également présenté afin de valider l'effort de dérive du second-ordre. La solution numérique est alors comparée à la solution analytique. Le modèle est également confronté à des résultats expérimentaux concernant la maquette à l'échelle 1/12 du système SEAREV. Des simulations d'extinction de tangage sont alors réalisées et comparées aux résultats expérimentaux. Des essais sur houle régulière sont également étudiés où les réponses en tangage sont à la fois confrontées aux expériences et à un code potentiel linéaire.

## Chapitre 6

# Le problème particulier du calcul de la surface mouillée.

La prise en compte des efforts hydrodynamiques et hydrostatiques de Froude-Krylov implique la connaissance à chaque instant de la surface mouillée correspondant à la partie immergée de la carène. L'attention va être portée dans ce chapitre sur la méthode permettant de déterminer cette surface mouillée instantanée.

La précision avec laquelle on connaît cette surface mouillée est prépondérante quand on se place dans le domaine non-linéaire. On considère dans cette approche à la fois les mouvements du corps flottant ainsi que ceux de la déformée de la surface libre. Sa connaissance à chaque instant se traduit par la résolution d'un problème d'intersection entre deux surfaces : la carène du flotteur et la surface représentant le champ incident non perturbé. Ce problème d'intersection de surfaces est récurrent dans de nombreuses disciplines, il convient donc d'étudier de plus près toutes les approches qui ont été développées dans ces domaines. Ce travail est présenté au début de ce chapitre, où après un bref rappel de notions de représentation géométrique des courbes et surfaces, un tour d'horizon bibliographique des différentes méthodes concernant l'intersection de deux surfaces gauches est réalisée. La suite du chapitre concerne les deux méthodes qui ont été retenues pour le calcul de l'intersection entre la carène et la surface libre. Enfin, la procédure de maillage de la surface mouillée est présentée et l'on montre l'influence du raffinement de la discrétisation sur la valeur moyenne des efforts de Froude-Krylov.

## 6.1 Intersection de surfaces 3D, tour d'horizon bibliographique.

Le problème d'intersection de surfaces est fondamental en modélisation et correspond à la première étape du calcul des opérations booléennes (intersection, union, différence) permettant la création d'objets complexes à partir d'objets simples. Il est souvent nécessaire de connaître cette courbe d'intersection pour définir les bords et les frontières des solides ou éliminer leurs parties cachées lors de la visualisation. La topologie de la courbe d'intersection peut être simple ou connexe. L'intersection peut être un point, une collection de points, une collection de courbes, une collection de surfaces ou toute combinaison de ces entités. On voit par conséquent que le choix de telle ou telle méthode est délicat car il doit répondre à de nombreuses exigences. Avant d'aborder à proprement parler le problème d'intersection de surfaces et d'identifier les différentes méthodes présentes dans la littérature, il semble nécessaire de faire quelques rappels sur les différentes manières de représentation des courbes et des surfaces parmi les méthodes les plus connues en CAO.

### 6.1.1 Représentation mathématique des courbes et des surfaces .

Il y a en général deux possibilités pour représenter une courbe ou une surface lors d'une visualisation ou d'un calcul. Le type de représentation a d'importantes conséquences pour le calcul et la représentation des intersections de ces surfaces. Une première approche vise à utiliser des portions de type segments (en 2D) ou facettes planes (en 3D) issues d'une structure de données discrètes telle que des facettes quadrilatérales et des facettes triangulaires. Cette méthode est largement adoptée en ingénierie (visualisation, modèles de calculs, éléments finis, ...). Cette représentation "digitale" des courbes et surfaces est notamment utile lorsqu'aucune propriété de continuité ou de régularité n'est assurée a priori. Dans le cas contraire, une seconde approche peut être utilisée qui consiste à se donner une représentation mathématique de la géométrie au travers d'équations.

#### La représentation des courbes

**Courbes paramétriques.** La représentation paramétrique est très souvent utilisée en CAO. Selon la dimension dans laquelle on se place on trouve les formes suivantes :

- Courbes 2D :  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$        $(x, y) = f(u)$
- Courbes 3D :  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$        $(x, y, z) = f(u)$

Les coordonnées des points d'une courbe paramétrique sont alors exprimés comme fonction d'une variable ou d'un paramètre tel que  $k$ . Une courbe dans un plan a la forme  $C(k) = (x(k), y(k))$ , tandis qu'une courbe dans l'espace est de

la forme :  $C(k) = (x(k), y(k), z(k))$ . Les fonctions  $x(k)$ ,  $y(k)$ ,  $z(k)$  sont appelées fonctions de coordonnées. Une courbe paramétrique définie par une fonction polynomiale est appelée *courbe polynomiale*. Le degré de cette courbe correspond à la puissance la plus importante de la fonction de coordonnées.

Il est utilisé en général des courbes de degré 3 (cubiques) qui sont de la forme :

$$P(t) = ((x(k), y(k), z(k))) = \sum_{i=0}^n f_i(k) P_i \quad (6.1)$$

où  $f_i(k)$  sont des fonctions de pondération,  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  sont les points de contrôle.

Ces courbes polynomiales sont, selon leur degré  $n$ , spécifiées par une séquence de  $n + 1$  points appelés *points de contrôle*. Cette définition englobe une famille de courbes dont en particulier : les courbes de Bézier et les courbes B-spline.

Une fonction de la forme  $p(k)/q(k)$  est dite rationnelle si  $p(k)$  et  $q(k)$  sont des polynômes. Les segments de courbes rationnelles sont alors de la forme :

$$x(k) = X(k)/W(k), \quad y(k) = Y(k)/W(k), \quad z(k) = Z(k)/W(k) \quad (6.2)$$

Le degré de la courbe est alors égal à la valeur maximale de la puissance du numérateur et du dénominateur. Dans le cas de polynômes cubiques on définit ainsi les courbes de Bézier rationnelles ainsi que les courbes B-spline rationnelles non-uniforme (*NURBS*).

**Courbes explicites.** Les coordonnées  $(x, y)$  de points d'une courbe plane explicite et non-paramétrique satisfont l'égalité :  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$ . Une courbe spatiale a quant à elle deux de ses coordonnées exprimées en fonction d'une troisième telle que :  $x = f(z)$ ,  $y = g(z)$ .

**Courbes implicites.** Les fonctions implicites apparaissent le plus souvent dans le domaine de l'image de synthèse et de l'imagerie médicale. On les retrouve, selon la dimension dans laquelle on se place, sous les formes suivantes :

- Courbes 2D :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = 0$
- Courbes 3D :  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Les coordonnées  $(x, y)$  des points d'une courbe implicite satisfont donc  $f(x, y) = 0$  quelque soit la fonction  $f$ . Lorsque  $f$  a une forme polynomiale pour  $x$  et  $y$  la courbe est alors appelée *courbe algébrique*. Une courbe implicite dans l'espace doit satisfaire simultanément au moins deux conditions :  $f(x, y) = 0$  et  $g(x, y) = 0$ .

**Représentation des surfaces.**

**Surfaces paramétriques.** Le raisonnement développé sur les courbes peut s'appliquer aux surfaces. Cette fois-ci deux paramètres interviennent pour la définition

d'une surface qui sont déterminées à partir de grilles (patches) de points de contrôle. La forme générale est alors :

$$- \text{ Surfaces : } f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) = f(u, v)$$

Les surfaces paramétriques sont donc définies par une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui à chaque couple de paramètres associe un point  $P(x_p, y_p, z_p)$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Ce point est un point de la surface, c'est à dire que lorsque  $u$  et  $v$  parcourent  $\mathbb{R}^2$  les points  $P$  associés parcourent l'ensemble de la surface, la définition de la surface est alors explicite :

$$\begin{cases} x_p = f_x(u, v) \\ y_p = f_y(u, v) \\ z_p = f_z(u, v) \end{cases}$$

Ce type de représentation permet de ne stocker qu'un ensemble discret de points de la surface. Il reste alors à approcher cette dernière entre ces points par l'intermédiaire de fonctions paramétriques. Cette approximation est généralement réalisée à l'aide de modèles d'ordres supérieurs qui sont le plus souvent des courbes de degré 3 (cubiques) telle que les courbes de Bézier ou les courbes B-spline précédentes. Dans le cas des courbes de Bézier, par exemple, la surface est définie par l'égalité suivante :

$$P(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_{i,n}(s) B_{j,m}(t) \quad (6.3)$$

avec :

- $P_{ij}$  les  $(m+1)(n+1)$  points de contrôles.
- $B_{i,n}$  et  $B_{j,m}$  les polynômes de Bernstein définissant les fonctions de bases de la forme générale des fonctions de Bézier.
- $s, t \in [0, 1]$

**Surfaces implicites.** Les surfaces implicites sont définies de la manière suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = 0$$

$f$  est donc une fonction  $f : \mathbb{R}^3$  qui à tout point  $P(x_p, y_p, z_p)$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  associe une valeur de potentiel  $C_0$  :

$$S = \{P(x, y, z) / f(x, y, z) = C_0\} \quad (6.4)$$

La surface implicite  $S$  est alors définie par l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$  pour lesquels la fonction  $f$  associe la même valeur de potentiel  $C_0$ .

La fonction potentiel définit alors complètement le volume  $V$  de la manière suivante :

- si  $f(P) > C_0$ , le point P est à l'extérieur du volume.
- si  $f(P) < C_0$ , le point P est à l'intérieur du volume.
- $V = \{P \in \mathbb{R}^3 / f(P) \leq C_0\}$  définit le solide.

En général on choisit :  $C_0 = 0$ .

Lorsque  $f$  est un polynôme en  $x$ ,  $y$  et  $z$  alors la surface est dite algébrique. Les quadriques constituent l'un des moyens de définir ces surfaces. Elles sont alors définies par l'équation implicite suivante :

$$Q(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 + 2gx + 2hy + 2jz + k = 0 \quad (6.5)$$

Les superquadriques, extension des plus communes quadriques, ont notamment été utilisées par Bardinet [14] dans le domaine médical lors de représentation de données 3D non structurées.

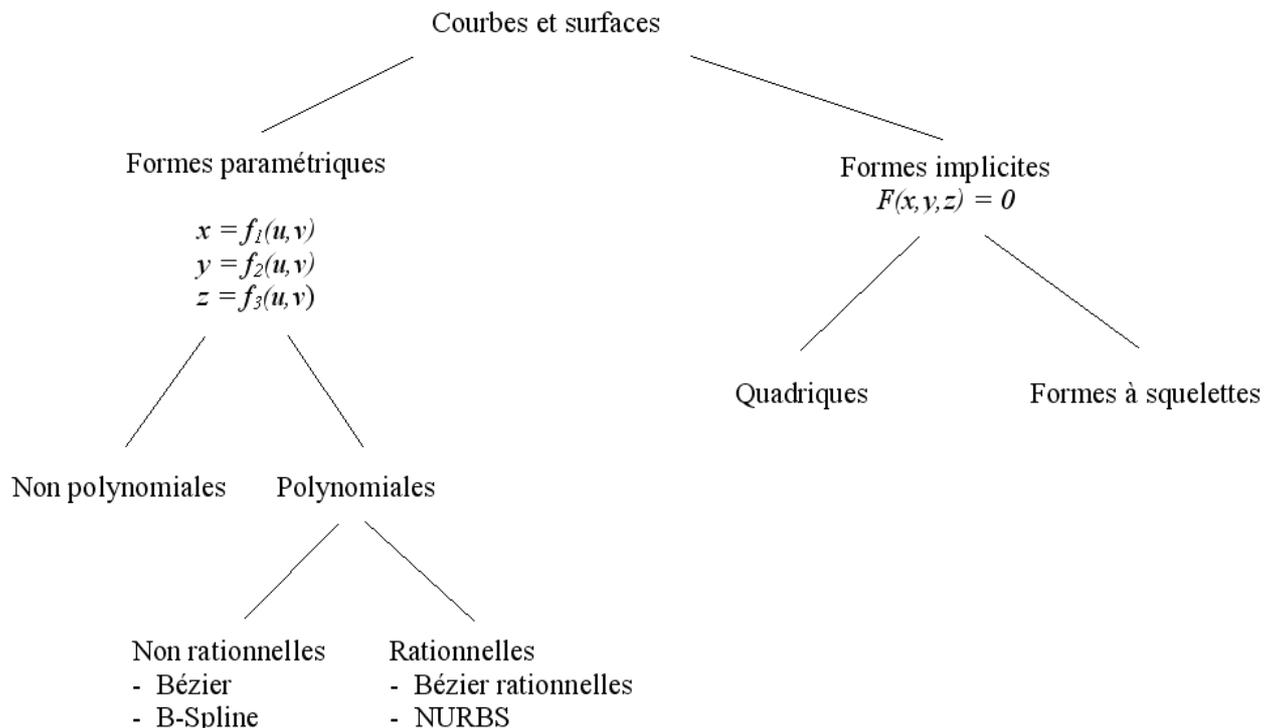


FIG. 6.1 – Représentations mathématiques des courbes et surfaces.

Par ailleurs, ces modèles sont utilisés en combinaison avec des structures de données qui sont la représentation par les frontières (Brep : *Boundary Representation*) et l'historique de construction (CSG : *Constructive Solid Geometry*), très

présents dans de nombreux domaines. Le choix du type de représentation utilisé a des implications sur les fonctions qui réalisent le calcul géométrique. Par exemple, la génération des points sur les surfaces est plus facile avec des surfaces paramétriques, à l'inverse il est plus commode de déterminer quel point manque sur une surface dans le cas d'une surface algébrique (par simple évaluation de l'équation du polynôme).

### 6.1.2 Types d'intersection entre deux surfaces gauches.

On différencie plusieurs types d'intersection en fonction de la dimension qu'on leur associe. Les surfaces pouvant être considérées comme des variétés de dimension 2 puisque biparamétrées, le cas général d'intersection est la courbe qui est une variété de dimension 1. Les autres types d'intersection, qui sont des cas particuliers, sont le point ou le morceau de surface. L'intersection entre deux surfaces gauches peut donc être soit vide, soit composée de :

- Un ou plusieurs points.
- Une ou plusieurs courbes.
- Un ou plusieurs morceaux de surfaces.
- Une combinaison des 3 cas précédents.

Dans le cas général d'intersection (la courbe), on considère trois situations différentes suivant que la courbe coupe ou non le bord des surfaces. Lorsque la courbe commence sur le bord des deux surfaces et se termine sur le bord des deux surfaces, la courbe est appelée courbe ouverte par contre la courbe est dite fermée lorsqu'elle ne rencontre aucun bord.

Il existe deux autres types différents de courbe. En effet, il est possible que la courbe commence et se termine sur le bord d'une surface mais soit interne sur l'autre surface. Il est aussi possible qu'une courbe commence sur le bord d'une surface sans se terminer sur un bord de cette même surface. Ces deux types de courbe ne sont ni fermés, ni ouvertes. Il est appelé courbe semi-ouverte, toute courbe qui n'est ni ouverte, ni fermée (voir exemple ci-dessous).

Pour le point d'intersection, deux types différents sont à considérer suivant leur position par rapport aux bords des surfaces. Lorsqu'un point est sur le bord d'une des deux surfaces, il peut être obtenu en étudiant le bord de la surface et l'autre surface (intersection courbe-surface) par contre, si le point est interne aux deux surfaces, son obtention est plus délicate car il faut alors pouvoir situer ce point sur les surfaces avant de chercher à le calculer explicitement (les surfaces sont tangentes en ce point).

### 6.1.3 Intersection entre deux surfaces courbes.

On présentera de façon générale toutes les familles de méthodes rencontrées dans la littérature concernant le calcul d'intersections en commentant plus préci-

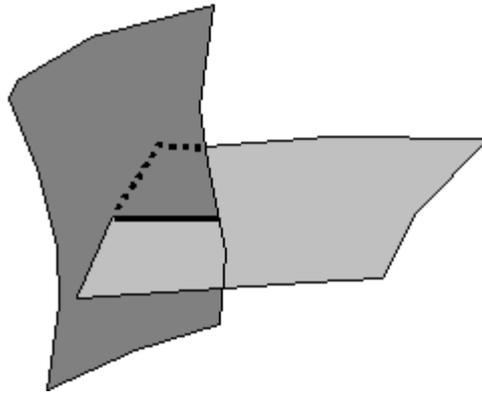


FIG. 6.2 – Exemple de courbe semi-ouverte d'intersection.

sément celles qui nous paraissent les plus pertinentes pour notre problème par la description de leur algorithme.

En modélisation géométrique, le calcul des intersections de surfaces est un problème récurrent et fondamental, largement étudié pour les surfaces algébriques et paramétriques. Les méthodes de calcul d'intersection de surfaces tridimensionnelles sont classées selon 4 catégories :

- Les méthodes analytiques.
- Les méthodes de discrétisation.
- Les méthodes de suivi.
- Les méthodes de subdivision récursive.

### Les méthodes analytiques.

Cette technique est utilisée lorsque l'une des surfaces est exprimée sous forme implicite et l'autre sous forme paramétrique. Le principe est de trouver des solutions précises en calculant les racines des équations polynomiales des surfaces susceptibles de se couper et d'obtenir une représentation explicite de la courbe d'intersection. Une grande précision dans les calculs est obtenue du fait que la solution est obtenue sous sa forme algébrique. Seules les erreurs engendrées par le calcul machine subsistent. Cette méthode est fiable en théorie car, en plus de la précision des calculs, elle détecte toutes les solutions, ce qui est le point primordial dans le calcul d'intersection de surfaces. Cependant elle est limitée aux surfaces de faible degré. En effet, l'intersection d'une surface algébrique de degré  $m$  avec une autre de degré  $n$  donne une surface de degré  $m \times n$ . Ainsi l'intersection de deux surfaces quadratiques donne une courbe d'ordre 4, courbe qui selon son caractère singulier peut être ou non paramétrable. De manière générale, la recherche d'une représentation appropriée dans ce cas reste un problème difficile. Une autre alternative aux méthodes analytiques est l'utilisation de méthodes géométriques développées par Piegl [34]. Ce dernier utilise des principes géométriques pour calculer l'intersection de surfaces quadratiques. Malgré le fait qu'il obtienne des résultats de bonne précision, cette méthode ne peut pas être facilement généralisable aux

autres types de représentations de surfaces[62][19].

### Les méthodes de discrétisation (*lattice methods*).

Ici, le problème initial d'intersection surface/surface est décomposé en un ensemble de problèmes géométriques moins complexes comme les intersections courbe/surface. Les points discrets obtenus pour chacun des problèmes cités dernièrement sont reliés pour former une courbe. Il est à noter cependant, que ces méthodes dépendent fortement du raffinement des maillages des deux surfaces et que la détermination du pas de discrétisation garantissant une solution robuste est difficile à avoir. De plus, elle peut être lente et souffre d'un manque de robustesse au niveau de la recherche des boucles et des singularités [32][34].

Parmi les articles rencontrés, la méthode de Lo et Wang[35] m'a semblé très intéressante. Il s'agit d'une méthode alternative basée sur la technique de « *neighbour tracing* ». Cette dernière utilise directement les données discrètes du maillage où les surfaces sont d'abord discrétisées en quadrilatères ou en triangles. Les lignes d'intersection entre les surfaces sont représentées en termes de segment de ligne droite, qui peuvent être déterminés en considérant une paire d'éléments à la fois. Les lignes d'intersection sont regroupées pour former des chaînes et des boucles. L'algorithme peut se décomposer en 4 étapes. Tout d'abord, il faut trouver et mettre en mémoire les voisins de chaque quadrilatère des deux surfaces. Ensuite, on crée une grille d'arrière-plan où l'intersection peut être localisée à l'intérieur d'un petit volume tel qu'une cellule de la grille d'arrière-plan (figure (6.3)). Après il s'agit de diviser les éléments quadrangulaires en deux éléments triangles afin d'identifier un segment d'intersection avec l'une des cellules de cloison.

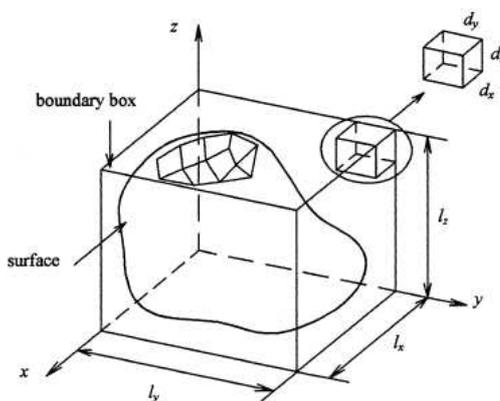


FIG. 6.3 – Principe de la grille d'arrière-plan.

Cette méthode apparaît d'après les différents exemples présentés dans l'article comme un processus très robuste et peu coûteux en temps de calcul.

### Les méthodes de suivi (*marching methods ou continuation methods*).

Les méthodes de suivi de contours (ou de cheminement) ont été créées dans le but d'obtenir rapidement les courbes d'intersection, celles-ci permettant en plus de résoudre dans la majorité des cas, le problème de l'obtention de l'intersection entre deux surfaces. Ce sont les méthodes les plus utilisées à cause de leur généralité (applicables à l'ensemble des surfaces paramétriques) et leur simplicité d'implémentation. Elles utilisent une approche locale du problème de l'intersection de surface. Partant d'un point connu sur l'une des deux surfaces, ces méthodes construisent une approximation polygonale de la courbe d'intersection tout en suivant la courbe (suivi), calculant successivement un nouveau point basé sur le (ou les) point(s) précédent(s). En revanche, la description de cette ligne polygonale n'est pas représentée par un ensemble de segments, comme pour les subdivisions récursives mais par une succession de points calculés au fur et à mesure et triés au sens de l'abscisse curviligne. Une reconstruction des courbes n'est donc pas nécessaire. Il est à noter que ces méthodes doivent toutes utiliser des approximations numériques non seulement pour le suivi de la courbe mais aussi pour la recherche des points de départ. Il en ressort deux grandes phases : la phase de prédiction et la phase de correction. La phase de prédiction sert à avancer, si possible rapidement, le long de la courbe sans obtenir un point de celle-ci alors que la phase de correction rectifie l'estimation faite lors de la phase de prédiction afin de trouver un « vrai » point de la courbe.

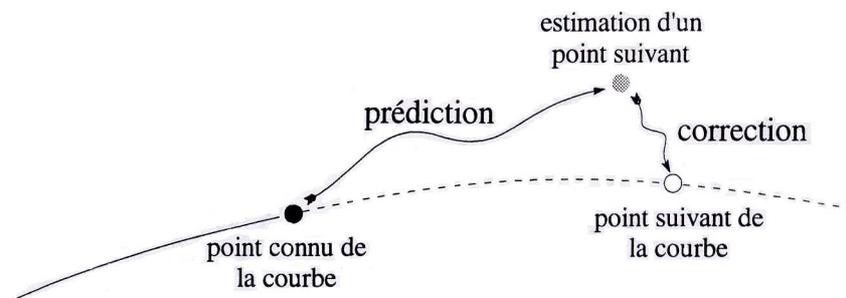


FIG. 6.4 – Principe du suivi de contour.

Les différents algorithmes développés font donc leur originalité par la manière de réaliser ces deux dernières étapes. Pour la phase de prédiction deux approches existent. La première, l'approche heuristique ([50], [38]), consiste à utiliser uniquement les points déjà trouvés. La seconde, l'approche géométrique [15], utilise en plus des points précédemment calculés, les propriétés de la courbe en ces points. Il existe également deux techniques pour la phase de correction, heuristique et géométrique développées respectivement par les mêmes auteurs que pour la phase de prédiction.

Les surfaces peuvent être exprimées de manière implicite ou paramétrique, elles peuvent être aussi reformulées dans des espaces différents de l'espace tridimensionnel. En effet, plutôt que de considérer des équations de surface de forme close dans

l'espace tridimensionnel, Hoffman [39] reformule le problème dans un espace surdimensionné où l'on a beaucoup plus de variables mais des équations nettement simplifiées. Cette transformation évite des manipulations complexes des équations ainsi que des opérations numériques délicates.

### Les méthodes de subdivision (*decomposition methods*).

Les méthodes de subdivision récursive sont les premières méthodes d'intersection réalisées. Ce sont des techniques utilisant une approche plus globale du problème en raffinant les surfaces pour trouver une approximation polygonale des courbes d'intersection. Elles exploitent les propriétés géométriques de la représentation paramétrique des courbes et des surfaces pour décomposer le problème d'intersection original en un ensemble de sous-problèmes plus faciles à résoudre. Le problème élémentaire correspond au fait que l'intersection entre deux polygones (quadrilatères, triangles) est triviale à déterminer. Une étape de prédiction permet de ne pas découper les surfaces de manière systématique. Cette étape utilise la propriété d'enveloppe convexe des surfaces B-splines. On construit des polyèdres (soit des boîtes, soit des enveloppes convexes directement) englobant les surfaces. Si les polyèdres ne se coupent pas, il ne peut y avoir intersection. On découpe alors les surfaces à moins qu'elles respectent toutes deux un critère de planéité donné. La surface initiale est généralement découpée en quatre. La fiabilité de ce type de méthode n'est pas garantie. Si le critère de planéité est trop large ( la tolérance permettant de considérer que la surface est plane est trop forte), on ne trouvera pas l'intersection recherchée.

La première méthode de subdivision est due à Lane et Riesenfeld [30] et s'applique à des surfaces de type Bézier ou B-spline. Les polyèdres englobant les surfaces sont des boîtes min-max parallèles aux axes du repère euclidien. Pour tester si les polyèdres se coupent, il suffit de comparer ces valeurs extrêmes. Afin de vérifier la planéité, Lane et Riesenfeld proposent de tester la linéarité de chaque courbe du bord de la surface et la planéité de la surface. Le découpage d'une surface est une action spécifique à la modélisation des surfaces. Cette action est fondée sur un algorithme qui permet le calcul d'un point d'une surface. Cet algorithme génère quatre surfaces de Bézier. Les auteurs démontrent dans leur article qu'à chaque itération de l'algorithme précédemment cité, les surfaces engendrées sont telles que leur enveloppe convexe contienne la surface initiale et converge vers cette surface. La même remarque est faite en ce qui concerne les surfaces B-splines. Koparkar et Mudur [51] proposent une nouvelle méthode de calcul pour les boîtes min-max. Les coordonnées des boîtes sont obtenues en recherchant les valeurs extrêmes de l'équation de Bézier ou B-spline considérée. Cette méthode ne peut cependant être utilisée pour des surfaces d'ordre élevé, l'obtention d'un polynôme n'étant pas fiable lorsque le degré d'un polynôme est élevé. Houghton, Emmett Factor et Sabharwal [16] proposent eux de choisir comme polyèdres englobant des boîtes min-max non parallèles aux axes principaux, mais des boîtes orientées en fonction de la surface. L'intérêt étant de pouvoir stopper la méthode de subdivision récursive plus rapidement. Filip, Maedson et Markot [10] définissent des boîtes min-max pour des surfaces paramétriques quelconques. Ntarajan[57] construit aussi ces boîtes mais

pour des surfaces B-splines.

Beaucoup d'autres méthodes existent et sont du même type que celles qui viennent d'être décrites brièvement. Toutes ces méthodes sont applicables pour tous les types de problème. Cependant, elles nécessitent d'obtenir la planéité des surfaces avant de pouvoir calculer les éléments d'intersection qu'elles peuvent contenir. De plus, la fiabilité de ces méthodes dépend du niveau de subdivision et des différents outils utilisés pour contrôler l'arbre de subdivision. Par conséquent, ces méthodes sont forcément coûteuses en temps de calcul.

A cela, on peut également ajouter la méthode de Chen basée sur une fonction de distance ainsi que celle de Kriezic qui est une reformulation de cette même équation de la distance.

Il est utilisé généralement une combinaison de toutes ces méthodes afin d'améliorer la robustesse du processus, il s'agit alors de méthodes hybrides également nommées méthodes mixtes. En associant les techniques qu'elles proposent à une phase fiable de détection des premiers points, la méthode ainsi constituée devient performante en termes de rapidité, fiabilité et robustesse. Ces méthodes peuvent être très différentes les unes des autres. La phase de détection peut s'appuyer sur des subdivisions récursives (Barnhill et Kersey) ou sur la détection des courbes fermées (Hohm). Il existe aussi dans la littérature des méthodes topologiques ou d'autres fondées sur la géométrie floue, et abordées par Foufou ([57], [56]).

#### 6.1.4 Un cas particulier : l'intersection surface-plan.

Le calcul de l'intersection entre une surface et un plan abordé ici correspond tout à fait au problème que l'on se propose de résoudre. Il m'a semblé donc utile de décrire cette méthode de manière détaillée. En effet, cherchant l'intersection de la surface libre avec un flotteur constitué de panneaux plans, il s'agit alors de réaliser l'intersection entre une surface gauche (la surface libre) et autant de plans représentant la carène du flotteur. La suite de ce paragraphe est tirée du rapport de thèse de Alain Nicolas [3] qui a développé pour cette problématique une méthode mixte.

##### Définition du plan et de l'intersection entre une surface et un plan.

Un plan est défini algébriquement par une équation du type :

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{6.6}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres réels non tous nuls et  $d$  est un nombre réel quelconque.

De part sa définition même, un plan est non borné. Si un plan coupe une surface, cette séparation de la surface est totale, et la surface est obligatoirement séparée en deux.. Pour cette raison, l'intersection entre une surface et un plan ne

peut être formée de courbes semi-ouvertes puisqu'il n'y aurait alors pas séparation totale.

L'intersection entre une surface et un plan est ainsi soit vide, soit formée de :

- Un ou plusieurs points.
- Une ou plusieurs courbes ouvertes.
- Un ou plusieurs morceaux de surfaces.
- Une combinaison des 3 cas précédents.

### Détermination des zones de localisation sur la surface.

Pour localiser l'intersection, le caractère local et la propriété d'enveloppe convexe, des surfaces B-splines sont utilisés. En particulier, le critère de localisation d'un carreau va permettre de différencier pour la surface les carreaux qui peuvent contenir un élément d'intersection de ceux qui n'en contiennent aucun. En résumé, les pavés (domaine paramétrique associé à un carreau) voisins du plan sont finalement regroupés en zones pour obtenir une première localisation de l'intersection.

#### Domaines paramétriques élémentaires.

Le principe est que pour chaque carreau de la surface, il faut déterminer sa position par rapport au plan. Cette position peut être obtenue directement si l'on utilise le critère de localisation d'un carreau. D'après ce critère, la position d'un carreau n'est fonction que de la position d'un ensemble de points de contrôle. De plus pour la surface, le carreau est contenu dans l'enveloppe convexe formée par cet ensemble de points de contrôle

La position d'un point de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  par rapport à un plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est donnée par le signe de  $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$  tel que :

- Si  $ax_1 + by_1 + cz_1 + d < 0$ , le point est dit en dessous du plan.
- Si  $ax_1 + by_1 + cz_1 + d > 0$ , le point est dit au-dessus du plan.
- Si  $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ , le point appartient au plan.

Le simple fait de connaître la position relative des points de contrôle par rapport au plan est suffisant pour déterminer si un carreau est critique ou non. Un code est alors affecté suivant les trois positions possibles. On initialise la position du carreau par celle d'un de ses points de contrôles associés. On modifie ensuite la position du carreau en fonction de la position de chacun des autres points restants. Par exemple si le carreau est au-dessus du plan et le point P (point de contrôle) aussi alors la nouvelle position du carreau est au-dessus du plan. A l'inverse, si le carreau est au-dessus du plan et le point P en dessous, alors le carreau est considéré comme étant potentiellement un élément d'intersection. Afin d'augmenter la rapidité et de trouver plusieurs pavés critiques en une seule étude le calcul de la position des carreaux se fait par un procédé de cheminement.

**Classement de ces domaines paramétriques élémentaires.** Le classement permet de regrouper les pavés critiques en zones disjointes et de les stocker dans un

arbre binaire. Pour se faire, on considère une relation 4-connexe, où l'on cherche d'abord un pavé critique suivant une certaine direction. Ce pavé est le premier pavé d'une zone. Si cette zone contient d'autres pavés, il y en a au moins un qui lui est voisin. On cherche alors un pavé critique voisin de ce pavé et ainsi de suite. Les zones sont conservées au fur et à mesure de leur détermination dans un arbre binaire.

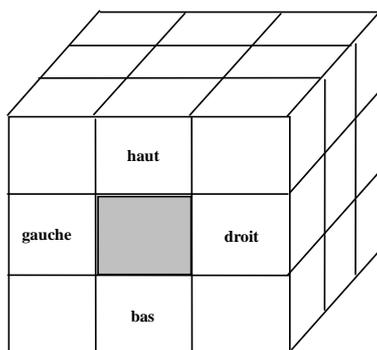


FIG. 6.5 – Classement des domaines paramétriques selon une relation 4-connexe

### Phase de décomposition de l'intersection en éléments simples.

Si le test n'est pas vérifié, il n'existe pas de courbe fermée, ni de morceaux de surface dans l'intersection. Dans le cas contraire l'un ou l'autre type apparaît. Les morceaux de surface sont différenciés des courbes fermées de par le fait que la surface et le plan possèdent des normales parallèles en chaque point du morceau de la face. Ces morceaux de surface sont détectés séparément des courbes fermées lors du test en étudiant le point « milieu » de la zone. Sinon, comme le test a été validé, il peut exister une courbe fermée ; la surface sera alors découpée en quatre dans le but de séparer cette courbe en courbes ouvertes.

**Implémentation du test** Le plan étant d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , la normale au plan a comme coordonnées  $(a, b, c)$ . Comme on ne peut obtenir toutes les normales à la surface il est construit une pyramide englobant ces normales. On vérifie ensuite que la direction de la normale au plan est incluse dans cette pyramide. Cela nous ramène alors à un problème d'inclusion d'un point  $P$  dans un polygone formé de points  $P_i$ . Les courbes fermées sont ainsi décomposées en courbes ouvertes sur les zones associées à la surface. Sur chaque zone, il faut trouver les courbes ouvertes d'intersection. Pour cela, on chemine sur la surface le plus près possible du plan, contraignant ainsi les points de la surface à être près du plan.

### Suivi de contours.

Les courbes fermées sont donc maintenant décomposées en courbes ouvertes sur les zones associées à la surface. Sur chaque zone, il faut trouver les courbes ouvertes d'intersection. Pour cela, on chemine sur la surface le plus près possible

du plan. La progression ne se fait donc pas sur le plan mais dans le domaine paramétrique de la surface en contraignant les points de la surface à être près du plan. Avant de suivre la courbe d'intersection, il faut trouver les points initiaux nécessaires à la progression. Cette méthode a besoin de deux points de départ, le premier étant sur le bord de la surface, il faut obtenir l'intersection entre chaque courbe du bord et le plan.

**Recherche des deux premiers points.** L'intersection entre une courbe et un plan étant formée de points ou d'arcs de courbe, la détermination des premiers points commence d'abord par une reconstruction du bord de la surface sous la forme d'une union connexe de courbes. Les bords ainsi déterminés, on calcule l'intersection de chaque courbe du bord de la portion de surface avec celle du plan, puis l'intersection du bord de la portion du plan avec celle de la surface. Lorsque le test est terminé, il apparaît soit plusieurs points d'intersection soit des arcs de courbe d'intersection. Ces premiers points trouvés, on recherche un second point sur la courbe dans leur voisinage.

Autour du premier point on crée un voisinage dont la frontière est rectangulaire. On étudie alors la frontière de ce voisinage pour trouver un second point. Le second point est obtenu en calculant entre les arcs de courbes et le plan avec la méthode courbe-plan citée précédemment.

Le second point trouvé, on obtient le reste de la courbe par cheminement le long de celle-ci.

**Calcul du reste de la courbe et critère d'arrêt.** Le prolongement est effectué uniquement sur la surface. A partir des deux points, on dispose d'une estimation locale de la tangente à la courbe. Cette estimation permet de calculer un nouveau couple de points. Pour parcourir la courbe, on définit un pas de progression, correspondant à la distance souhaitée entre deux points calculés sur la courbe. Ce couple n'étant pas en général un point de la courbe, on utilise une étape de correction pour en obtenir un qui soit dessus. Grâce à ce nouveau point et au point précédemment calculé, on dispose d'une nouvelle estimation locale de la courbe, qui permet de calculer un autre point d'intersection.

Le plan étant non borné, le critère d'arrêt du suivi de contours est fonction de l'arrivée sur un bord de la surface. La courbe est alors déterminée sous la forme d'un arc de courbe par suivi de contours et d'un arc de courbe par la résolution de l'intersection entre le bord de la surface et le plan.

### **Calcul des morceaux déterminés.**

La détermination des morceaux de surface d'intersection a lieu lorsque, pour un couple de portions de surface donné, le point milieu de la première portion est un point d'intersection où les normales à la surface et au plan sont parallèles. Les deux portions sont tangentes au point milieu et donc partiellement confondues au voisinage de ce point. Il faut donc rechercher autour de ce point le morceau de surface d'intersection. Pour se faire, on construit un maillage sur le morceau de surface d'intersection, et on réalise l'intersection de celle-ci avec le plan.

Quand tous les éléments d'intersection ont été calculés, il convient de relier ensemble les éléments de même type qui ont été séparés lors de la phase de détection des courbes fermées. Il y a deux types de connexion, la connexion des courbes et la connexion des morceaux de surface. Après le calcul de tous les éléments d'intersection, on dispose d'un arbre dans lequel sont stockées les courbes. Cet arbre ayant été créé au fur et à mesure du découpage, les éléments d'intersection sont stockés dans celui-ci. Il faut donc connecter progressivement les entités appartenant à des feuilles ayant même père dans l'arbre si ces feuilles ont été générées par un découpage des zones. Comme il peut y avoir plusieurs couples de zones après la phase de localisation, il suffit de connecter les éléments à l'intérieur de ces couples de zones uniquement, i.e entre les zones issues de découpage. Il ne reste plus alors qu'à déterminer comment relier les courbes ou les morceaux de surface entre deux zones. Cette étape est réalisée en reliant les courbes n'ayant pas de points de liaison en commun, en comparant les extrémités de la surface et du plan. En effet, lorsque l'extrémité d'une courbe ou le bord d'un morceau de surface appartient au bord de la surface, il est évident qu'il ne sert à rien de vouloir connecter cette partie de la courbe ou du morceau de surface. Pour ce qui est des morceaux de surface, ils seront connectés si les paramètres des bords de leur maillage respectif sont les mêmes.

### **Analyse de la méthode.**

Les différents exemples présentés dans la thèse d'Alain Nicolas mettent en évidence un gain de temps et de fiabilité par rapport aux autres méthodes existantes. De plus, cette rapidité de calcul est présente quelque soit le type d'intersection recherché.

Il reste maintenant à voir plus en détails la possibilité d'implémentation de cette méthode dans le cadre de notre problème d'intersection de surface libre avec un flotteur de géométrie cubique. Notre surface (la surface libre) n'étant pas une surface de type NURBS mais une surface explicite, il faudra savoir si cette méthode est encore applicable.

## **6.2 Méthodes adoptées.**

Les méthodes présentées précédemment paraissent assez lourdes par rapport au problème initial où les surfaces intervenant sont relativement simples à définir mathématiquement. En effet, au début de ce travail l'une des conditions du cahier des charges du projet est que le flotteur soit constitué de panneaux plans (figure (6.6)). Cette particularité, relative aux coûts de construction, nous permet de considérer chacun des panneaux comme des morceaux de plans facilement modélisables mathématiquement. La seconde surface intervenant dans ce problème d'intersection est la surface libre qui est, quant à elle, modélisée mathématiquement par l'intermédiaire d'un développement en série de cosinus.

Deux méthodes permettant le calcul de l'intersection de surfaces ont été développées. Une première reprend la méthode utilisée lors de l'approche non-linéaire

2D et présentée dans la partie 1 de ce manuscrit. Elle s'inspire des méthodes de suivi de contour où l'on traque les points d'intersection en se déplaçant par dichotomie le long de la surface libre. La seconde méthode est analytique dans le sens où l'on ne cherche plus les points d'intersection à proprement parler mais la courbe d'intersection en elle-même.

Auparavant et quelle que soit la méthode utilisée, un tri est effectué au niveau des panneaux composant la structure du corps. On effectue ainsi une recherche des panneaux susceptibles de contenir la surface libre afin d'alléger le calcul d'intersection.

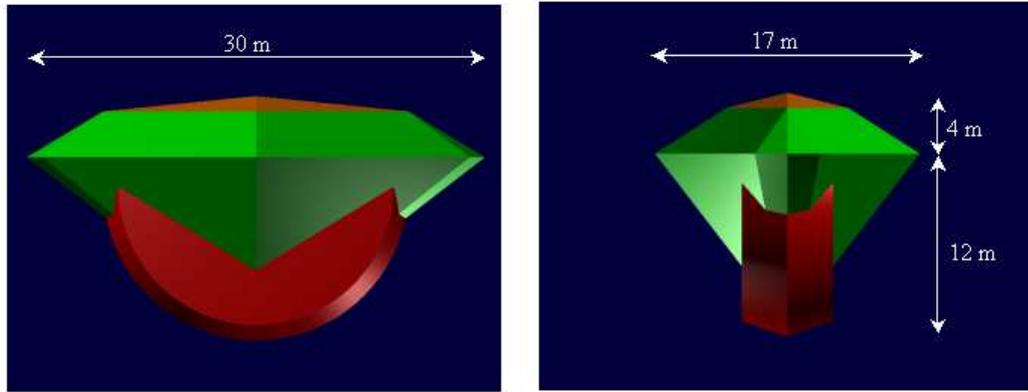


FIG. 6.6 – Vue d'artiste de la géométrie d'un flotteur SEAREV

### 6.2.1 Pré-sélection des panneaux.

Afin de réduire le temps de calcul une sélection est réalisée sur les panneaux afin de ne garder que ceux qui sont au voisinage de la surface libre. La lecture du fichier d'entrée nous donne les coordonnées des sommets des panneaux en numérotation naturelle. On effectue alors un test, pour chaque panneau, par rapport à la coordonnée en  $z$  des sommets. Le principe est le suivant :

Soient  $z_{\min}$  et  $z_{\max}$  les coordonnées verticales extrémales du panneau ( $P_i$ ) et  $A$  l'amplitude de la houle incidente, alors :

*Si*  $[ z_{\min}, z_{\max} ] \subset [ -A, A ]$  ou  $[ z_{\min}, z_{\max} ] \cap [ -A, A ] \neq \emptyset$  Alors  
mise en mémoire des paramètres du panneau ( $P_i$ ).

*Fin Si.*

Ce test permet au final de réduire de manière conséquente le nombre de panneaux à traiter lors du calcul de l'intersection de surface, un gain de temps non négligeable est alors réalisé.

Parmi les panneaux ne satisfaisant pas le test, nous retenons également ceux situés entièrement sous la surface libre puisque constituant la surface mouillée du corps.

### 6.2.2 Calcul de l'intersection par suivi de surface libre.

Suite à la présélection des panneaux, il est effectué un réarrangement de la numérotation des sommets. La méthode employée étant une méthode de suivi, il est en effet impératif de savoir où l'on se place par rapport au panneau lorsque l'on se déplace le long de la surface libre. Nous nous arrangeons donc pour que le sommet ayant la profondeur la plus importante soit le point numéroté 1, le sens de la numérotation pour les sommets suivants étant le sens horaire (figure 6.7).

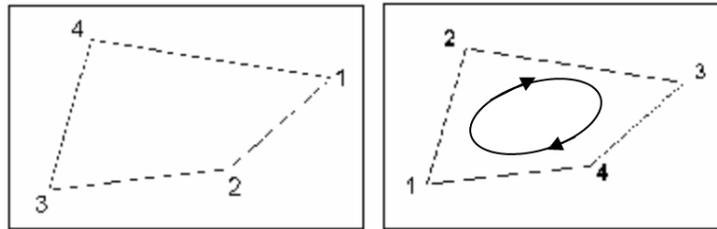


FIG. 6.7 – Exemple de renumérotation d'un panneau : le sommet n°1 est celui dont la valeur en  $z$  est la plus petite, le sens de numérotation pour la suite est le sens horaire.

#### Passage dans le repère lié au panneau.

Nous nous plaçons maintenant dans le repère lié au panneau afin de passer du problème 3D initial à un problème plan.

Pour ce faire, on suppose que la base associée au panneau est une combinaison linéaire des composantes de la base canonique du repère fixe tel que :

$$\begin{cases} \vec{u} = a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{12} \cdot \vec{e}_2 + a_{13} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{v} = a_{21} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{23} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{w} = a_{31} \cdot \vec{e}_1 + a_{32} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

avec  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

et avec  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  la base liée au repère du panneau.

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

avec  $M$  la matrice de l'application linéaire dans la base canonique telle que :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Ce changement de repère est effectué pour chaque panneau "présélectionné". Par exemple, si l'on considère un panneau quadrilatéral  $ABCD$  où  $A$  correspond au sommet présentant la profondeur d'eau la plus grande. On choisit alors  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  comme vecteurs directeurs que l'on décompose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= a_1 \cdot \vec{e}_1 + b_1 \cdot \vec{e}_2 + c_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \overrightarrow{AD} &= a_2 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + c_2 \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (6.9)$$

La base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  liée au panneau est alors déduite par les relations suivantes :

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} \\ \vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \frac{a_1 \cdot \vec{e}_1 + b_1 \cdot \vec{e}_2 + c_1 \cdot \vec{e}_3}{\|\overrightarrow{AD}\|} \\ \vec{v} = \frac{a_2 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + c_2 \cdot \vec{e}_3}{\|\overrightarrow{AB}\|} \\ \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}$$

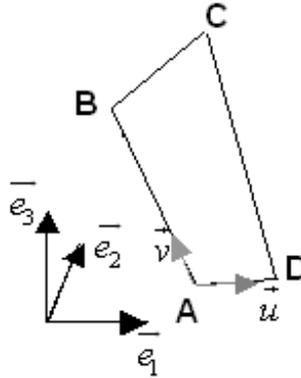


FIG. 6.8 – Exemple de repère pour un panneau quelconque.

On obtient au final la matrice  $M$  :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|\overrightarrow{AD}\|} & \frac{b_1}{\|\overrightarrow{AD}\|} & \frac{c_1}{\|\overrightarrow{AD}\|} \\ \frac{a_2}{\|\overrightarrow{AB}\|} & \frac{b_2}{\|\overrightarrow{AB}\|} & \frac{c_2}{\|\overrightarrow{AB}\|} \\ \frac{b_1 \times c_2 - b_2 \times c_1}{\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} & \frac{a_2 \times c_1 - a_1 \times c_2}{\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} & \frac{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1}{\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

A l'inverse si on note les deux paramètres  $u$  et  $v$  de manière compacte nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \vec{V}_1 + v \cdot \vec{V}_2, (u, v) \in D \quad (6.11)$$

avec  $D = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

$$\text{où } \begin{cases} x = a + u \cdot a_1 + v \cdot a_2 \\ y = b + u \cdot b_1 + v \cdot b_2 \\ z = c + u \cdot c_1 + v \cdot c_2 \end{cases}, (u, v) \in D$$

Si  $A$  est le point de coordonnées  $(a, b, c)$  et  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  les vecteurs  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$ .

### Déterminations de la position des points d'intersection.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il existe de nombreux types d'intersection. L'intersection entre une surface et un plan est ainsi soit vide, soit formée de un ou plusieurs points, une ou plusieurs courbes ouvertes, un ou plusieurs morceaux de surfaces ou encore une combinaison des trois cas précédents.

Nous supposons ici que l'intersection est constituée de un ou plusieurs points. Le principe est de trouver les points au niveau desquels la surface libre coupe les côtés bordant le panneau. On paramétrise alors les bords de chaque panneau tels que dans la base liée à celui-ci on ait la relation suivante :

$$v = au + b \tag{6.12}$$

De par la manière dont nous plaçons le repère par rapport au panneau il n'y a en fait que les deux côtés qui ne composent pas les axes qui sont modélisés de la sorte. Les axes correspondent en effet à  $u = 0$  et  $v = 0$  pour  $0 < v < 1$  et  $0 < u < 1$  respectivement.

Une fois cette paramétrisation faite, une méthode de dichotomie modifiée (cf. Partie 1) est alors employée pour évaluer les coordonnées des points d'intersection entre les côtés et la surface libre.

Un test est effectué afin que le nombre de points d'intersection soit limité à deux. On regarde alors le nombre de crêtes et de creux présent sur l'intervalle couvert par le panneau. S'il n'y a qu'une seule crête ou un seul creux alors on peut supposer que l'intersection se fera sur deux côtés sinon le panneau est discrétisé de manière à n'avoir qu'une seule crête ou un seul creux sur ces "sous-panneaux".

De manière générale et si l'on considère un panneau quadrilatéral, trois types d'intersection ressortent (figure (6.9)). Un premier correspond au cas où les points d'intersection se font sur deux côtés opposés. Un second type est caractérisé par le fait que les côtés contenant les points d'intersection sont adjacents. Le troisième et dernier a, quant à lui, ses points d'intersection sur un seul et même côté.

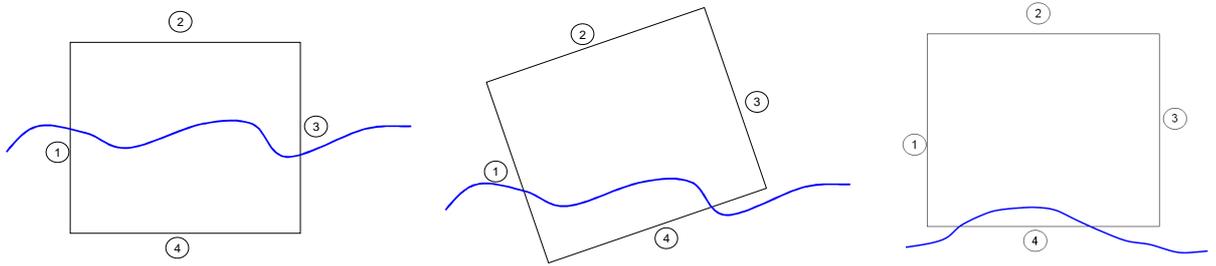


FIG. 6.9 – Présentation des trois types d'intersection retenus.

Il est important de différencier tel ou tel type d'intersection. En effet, suivant les cas le domaine à mailler n'est pas le même. Le premier type d'intersection a ainsi un domaine à mailler qui peut être assimilé à un panneau quadrilatéral (trois côtés + la surface libre). Le second type d'intersection est plus compliqué et peut correspondre à deux situations différentes. La première correspond au moment où une crête rencontre un côté d'un panneau, le domaine à mailler n'est alors plus constitué que d'un morceau de la surface libre et d'un côté. La seconde situation est celle rencontrée lorsqu'un creux coupe un côté d'un panneau. Les bornes de la surface mouillée du panneau sont alors : trois côtés, une partie de la surface libre et deux parties disjointes du côté contenant les points d'intersection. Le troisième type d'intersection regroupe également deux configurations différentes. La première correspond au moment où le panneau est entièrement sous la surface libre sauf un sommet, la seconde configuration se passe lorsque cette fois l'ensemble du panneau est au-dessus de la surface libre mis à part un sommet. Le domaine à mailler est alors soit constitué des quatre côtés et d'une partie de la surface libre soit de deux côtés et de la surface libre. Les mêmes remarques peuvent être également faites dans le cas d'un panneau triangulaire.

On voit par conséquent que ces particularités géométriques devront être prises en compte lors du choix de la méthode de discrétisation spatiale. Il faudra également déterminer le type de panneau considéré ou plus exactement s'il s'agit d'un panneau triangulaire ou quadrangulaire.

### 6.2.3 Calcul analytique de l'intersection.

Une seconde approche a été développée où l'on cherche cette fois la courbe d'intersection en elle-même. Cette méthode part du principe que l'on peut définir analytiquement les surfaces qui définissent l'intersection recherchée.

On part de la même hypothèse que précédemment, à savoir que la carène est constituée de panneaux plans que l'on paramétrise de la manière suivante :

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{6.13}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres réels non tous nuls et  $d$  est un nombre réel quelconque.

En effet, tout point situé sur ce plan vérifie cette égalité. Connaissant les coordonnées des sommets des panneaux, on construit alors le système suivant :

$$\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c z_1 + d = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c z_2 + d = 0 \\ a x_3 + b y_3 + c z_3 + d = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est alors obtenue numériquement, nous permettant ainsi d'obtenir l'expression algébrique des paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$

Il reste maintenant à modéliser la déformée de la surface libre du champ de vague incident. Deux méthodes sont employées ici pour représenter le champ incident. La première est celle de Rienecker-Fenton qui a été utilisée dans la partie 1 de ce manuscrit et qui permet de représenter des houles régulières cylindriques. Une seconde méthode est également employée et qui est présentée dans le dernier chapitre, c'est également une méthode spectrale dite HOS (cf. chapitre 9) qui cette fois autorise la représentation non-linéaire de houles irrégulières. La méthode de Rienecker-Fenton représente la déformée de surface libre en la décomposant en une série de cosinus telle que :

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=1}^n a_i \cos [i (k_x x + k_y y - wt)] \quad (6.14)$$

La méthode HOS, quant à elle, représente la hauteur de surface libre de la façon suivante :

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}(t) \cos(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \quad (6.15)$$

L'équation de la surface libre ( $SL$ ) et celle du plan ( $P_i$ ) étant maintenant définies mathématiquement, nous avons le système suivant pour la méthode Rienecker-Fenton :

$$\begin{cases} (SL) \quad \eta(x, y, t) = z = \sum_{i=1}^n a_i \cos [i (k_x x + k_y y - wt)] \\ (P_i) \quad ax + by + c z + d = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

et le système suivant si l'on utilise la méthode HOS :

$$\begin{cases} (SL) \quad \eta(x, y, t) = z = \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}(t) \cos(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \\ (P_i) \quad ax + by + c z + d = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Tout comme lors de la méthode précédente, nous nous plaçons dans le plan lié au panneau avec :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 u + \beta_1 v + X_{ref} \\ y = \alpha_2 u + \beta_2 v + Y_{ref} \\ z = \alpha_3 u + \beta_3 v + Z_{ref} \end{cases} \quad (6.18)$$

où  $X_{ref}, Y_{ref}, Z_{ref}$  correspondent aux coordonnées du sommet servant d'origine au repère lié au panneau.

En injectant ces expressions de  $x, y$  et  $z$  dans l'équation (6.13) nous obtenons :

$$a(\alpha_1 u + \beta_1 v + X_{ref}) + b(\alpha_2 u + \beta_2 v + Y_{ref}) + c(\alpha_3 u + \beta_3 v + Z_{ref}) + d = 0 \quad (6.19)$$

Mise sous forme explicite, l'équation (6.19) devient :

$$v = \frac{(a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3)}{(a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3)} u - \frac{(d + aX_{ref} + bY_{ref} + cZ_{ref})}{(a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3)} \quad (6.20)$$

On reprend alors, dans le cas de la méthode de Rienecker-Fenton, l'équation (6.14) de la surface libre et on se place dans le repère  $(u, v)$  en appliquant le changement de variable de l'équation (6.18). On obtient alors :

$$\alpha_3 u + \beta_3 v + Z_{ref} = \sum_{i=1}^n a_i \cos [i(k_x(\alpha_1 u + \beta_1 v + X_{ref}) + k_y(\alpha_2 u + \beta_2 v + Y_{ref}) - wt)] \quad (6.21)$$

et en remplaçant maintenant  $v$  par l'expression (6.20) nous obtenons :

$$v = \frac{1}{\beta_3} \left[ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i \cos [i(k_x(\alpha_1 u + \beta_1 (Au + B) + X_{ref}) + k_y(\alpha_2 u + \beta_2 (Au + B) + Y_{ref}) - wt)] \\ -\alpha_3 u - Z_{ref} \end{array} \right] \quad (6.22)$$

De la même manière nous obtenons une relation explicite du type  $u(v)$  :

$$u = \frac{1}{\alpha_3} \left[ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i \cos [i(k_x(\alpha_1 (A'v + B') + \beta_1 v + X_{ref}) + k_y(\alpha_2 (A'v + B') + \beta_2 v + Y_{ref}) - wt)] \\ -\beta_3 v - Z_{ref} \end{array} \right] \quad (6.23)$$

Dans le cas de la méthode HOS, on reprend l'équation (6.15) de la surface libre et on se place dans le repère  $(u, v)$  en appliquant les mêmes changements de variable utilisés précédemment pour la méthode de Rienecker-Fenton. On obtient alors :

$$v = \frac{1}{\beta_3} \left[ \begin{array}{l} \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}(t) \cos(k_{n_x}(\alpha_1 u + \beta_1(Au + B) + X_{ref})) \\ \cos(k_{n_y}(\alpha_2 u + \beta_2(Au + B) + Y_{ref})) - \alpha_3 u - Z_{ref} \end{array} \right] \quad (6.24)$$

$$u = \frac{1}{\alpha_3} \left[ \begin{array}{l} \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}(t) \cos(k_{n_x}(\alpha_1(A'v + B') + \beta_1 v + X_{ref})) \\ \cos(k_{n_y}(\alpha_2(A'v + B') + \beta_2 v + Y_{ref})) - \beta_3 v - Z_{ref} \end{array} \right] \quad (6.25)$$

où  $A$  et  $B$  correspondent aux facteurs permettant d'exprimer  $v$  en fonction de  $u$  tel que :

$$v = Au + B \quad (6.26)$$

et  $A'$  et  $B'$  correspondent aux facteurs permettant d'exprimer  $u$  en fonction de  $v$  tel que :

$$u = A'v + B' \quad (6.27)$$

Les formules (6.22), (6.23) et (6.24), (6.25) nous donnent une solution explicite de la projetée de la surface libre dans le plan lié au panneau considéré. Le problème maintenant est de connaître quelle partie de cette courbe est commune au panneau. Si l'on regarde l'exemple représenté sur les schémas de la figure (6.10), on s'aperçoit que l'on doit connaître les points d'intersection avec les frontières du panneau. Analytiquement, on remarque que la solution n'est pas forcément triviale. Cependant, les cas particuliers où  $u = 0$  et  $v = 0$  peuvent être au contraire facilement résolus et vont nous permettre en effectuant un changement de repère de connaître ces points d'intersection de manière analytique. Le principe est illustré par les deux figures suivantes.

Soit ABCD un panneau quadrilatéral où les côtés AB et AD définissent les axes  $(\vec{u}, \vec{v})$  du repère lié au panneau, une première recherche d'intersection est réalisée sur ces axes en remplaçant dans les équations (6.23) et (6.24)  $v$  par 0 et dans les équations (6.22) et (6.25)  $u$  par 0. On effectue ensuite un changement de repère où cette fois ce sont les côtés CB et CD qui définissent les axes  $(\vec{u}, \vec{v})$ , et on recherche de la même manière que précédemment les points d'intersection sur ces deux axes.

Le problème tridimensionnel de départ a été décomposé en plusieurs problèmes bidimensionnels aussi nombreux que le nombre de panneaux retenus pour l'évaluation de l'intersection. On arrive au final à une forme explicite de l'intersection entre la surface libre et un panneau constituant la carène. En procédant de la même fa-

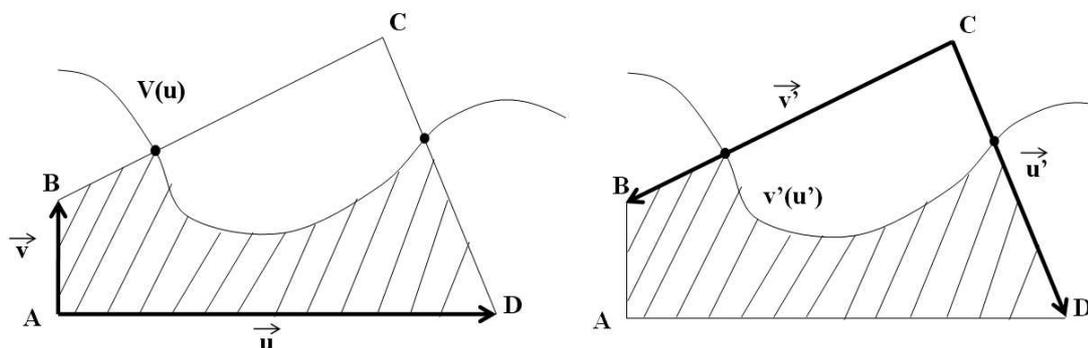


FIG. 6.10 – Définition des repères utilisés lors de la recherche des points d'intersection.

çon pour chaque panneau "présélectionné", on obtient par morceaux l'intersection entière.

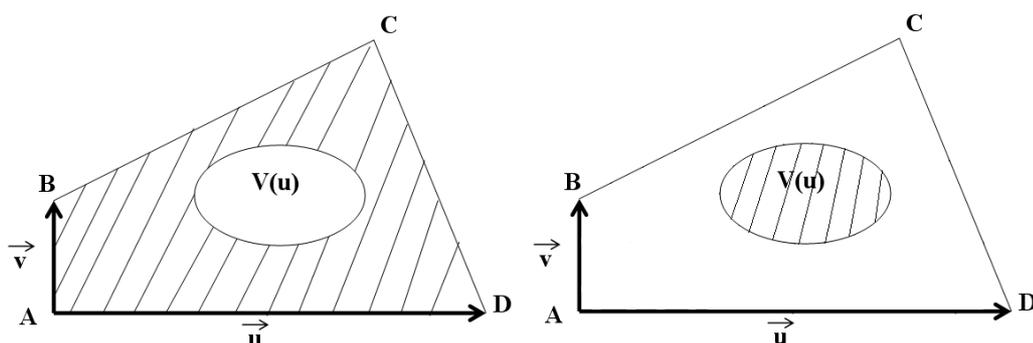


FIG. 6.11 – Cas particuliers d'intersection entre la surface libre et un panneau ABCD quelconque.

Cette formulation apporte un plus par rapport à la méthode précédente de par le fait qu'aucune hypothèse n'est posée quant à l'allure de l'intersection. Précédemment nous cherchions des points d'intersection situés sur les frontières bordant les panneaux, ce qui occultait certains types d'intersection tel que celui présenté à la figure (6.11). Sur cet exemple la surface libre ne coupe aucune frontière bordant le panneau ABCD, l'intersection est alors entièrement contenue dans le panneau. Ce cas peut éventuellement arriver sur houle irrégulière 3D mais n'a cependant pas été vérifié lors de simulation numérique.

### 6.3 Maillage de la surface mouillée :

Les deux paragraphes précédents ont permis de calculer l'intersection entre la surface libre et la carène du flotteur. Il s'agit maintenant de discrétiser la surface

mouillée délimitée par cette intersection et les frontières des panneaux constituant la carène. Lorsque l'on simule des écoulements autour de corps en mouvement, le maillage doit être modifié à chaque instant pour être cohérent avec la nouvelle configuration du corps en présence. La méthode employée doit alors être à la fois robuste et rapide d'exécution. La littérature propose de nombreuses méthodes mais c'est la procédure de maillage algébrique nommée maillage Transfini qui a été retenue. Ce choix a été motivé en raison de sa bonne adaptation au type de géométrie de panneau que l'on va rencontrer. Sa rapidité de calcul, en comparaison à des méthodes elliptiques ou paraboliques, a également été un facteur déterminant.

### 6.3.1 Méthode transfinie.

Le terme transfini a été introduit en 1973 par Gordon et Hall [22] en définissant l'interpolation transfinie sur le rectangle et le parallélépipède rectangle. Ce schéma d'interpolation repose sur un nombre infini de points eux-mêmes définis sur des courbes. Ceci diffère des autres méthodes qui utilisent un nombre fini de points. Le principe est le suivant :

Considérons tout d'abord une surface inconnue  $Q(u, v)$  s'appuyant sur quatre courbes connues formant un carreau, chacune de ces courbes sera définie par :

$$Q(u, 0), Q(u, 1), Q(0, v), Q(1, v) \quad (6.28)$$

où les entiers 0 et 1 indiquent seulement la position des courbes dans le carreau.

Ces fonctions posées, la surface réelle est alors approchée par une surface formée de la somme booléenne :

$$\vec{P}(u, v) = TQ = (T_1 \oplus T_2) Q = (T_1 + T_2 - T_1 T_2) Q \quad (6.29)$$

où  $T_1, T_2$  représentent les opérateurs de projection tels que :

$$T_1 T_2 Q = T_2 T_1 Q \quad (6.30)$$

et définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} T_1 Q = Q(0, v)L_0^1(u) + Q(1, v)L_1^1(u) \\ T_2 Q = Q(u, 0)L_0^1(v) + Q(u, 1)L_1^1(v) \end{cases}$$

où  $L_i^1$  sont les opérateurs de Lagrange linéaires.

#### Carreaux de Coons :

Coons a proposé dans les années 60 une formulation puissante pour la représentation des surfaces transfinie [58]. Par suite de plusieurs améliorations [59], celle-ci s'est avérée être une méthode générale pour la représentation des surfaces. Chaque surface de Coons est définie par les caractéristiques des 4 courbes qui la

composent, ainsi que de ses sommets (figures (6.14), (6.13) et (6.15)). De nombreuses surfaces simples peuvent alors être considérées comme des cas particuliers des carreaux de Coons.

Principe : Soit un carreau dont la frontière est définie par les quatre équations de courbes suivantes :  $Q(0, v)$ ,  $Q(u, 1)$ ,  $Q(1, v)$ ,  $Q(u, 0)$  et deux paramètres  $u, v$  dans  $[0, 1]$  :

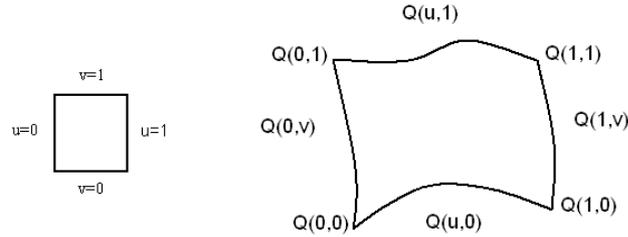


FIG. 6.12 – Définition d'un carreau de Coons

On définit alors la surface par un réseau de courbes croisées (isoparamétriques). Ceci nous permet de définir des "carreaux", que l'on définit complètement par interpolation surfacique à partir des frontières :

$$\begin{aligned}
 U(i) &= (1-r) \cdot Q_u(0, s) + r \cdot Q_u(1, s) + (1-s) \cdot Q_u(r, 0) + s \cdot Q_u(r, 1) - \\
 &\quad (1-r)(1-s)Q_u(0, 0) - r(1-s) \cdot Q_u(1, 0) - (1-r)s \cdot Q_u(0, 1) - r \cdot s \cdot Q_u(1, 1) \\
 V(i) &= (1-r) \cdot Q_v(0, s) + r \cdot Q_v(1, s) + (1-s) \cdot Q_v(r, 0) + s \cdot Q_v(r, 1) - \\
 &\quad (1-r)(1-s)Q_v(0, 0) - r(1-s) \cdot Q_v(1, 0) - (1-r)s \cdot Q_v(0, 1) - r \cdot s \cdot Q_v(1, 1) \\
 &\hspace{15em} (6.31) \\
 W(i) &= (1-r) \cdot Q_w(0, s) + r \cdot Q_w(1, s) + (1-s) \cdot Q_w(r, 0) + s \cdot Q_w(r, 1) - \\
 &\quad (1-r)(1-s)Q_w(0, 0) - r(1-s) \cdot Q_w(1, 0) - (1-r)s \cdot Q_w(0, 1) - r \cdot s \cdot Q_w(1, 1)
 \end{aligned}$$

De manière plus compacte :

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -Q(0, 0) & -Q(0, 1) & -Q(0, v) \\ -Q(1, 0) & -Q(1, 1) & -Q(1, v) \\ -Q(u, 0) & -Q(u, 1) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-v \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Soit,

$$P(u, v) = [U]^T [Q] [V] \quad (6.33)$$

où la colonne de droite et la ligne inférieure représentent les surfaces réglées, le bloc carré correspond quant à lui au produit tensoriel bilinéaire.

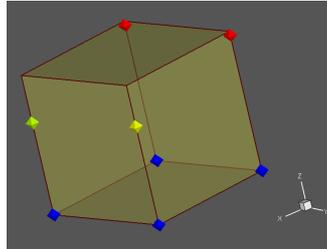


FIG. 6.13 – Sommets des carreaux de Coons.

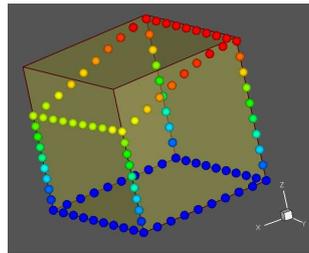


FIG. 6.14 – Frontières des carreaux de Coons.

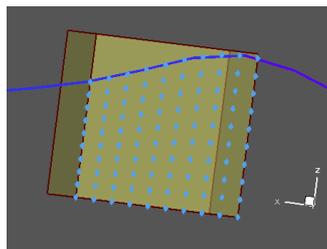


FIG. 6.15 – Résultat de l'interpolation transfinie.

Cette méthode permet au final de définir un grand nombre de surfaces complexes, ainsi que la plupart des surfaces simples uniquement à partir de la définition de 4 courbes. La génération d'un maillage est donc nettement plus facile à piloter par rapport aux carreaux B-splines ou NURBS car il n'est pas nécessaire d'avoir un réseau de points de contrôles ou de poids associés ou encore d'une subdivision de l'espace paramétrique.

### Raffinement automatique.

Un critère de raffinement automatique est utilisé pour certains panneaux contenant la surface libre. En effet, le raffinement de l'ensemble des panneaux est déterminé initialement par l'utilisateur à travers le fichier d'entrée. Lors des simulations certains panneaux contenant la surface libre présentent une surface mouillée relativement petite par rapport à leur surface totale  $S_{totale}$ . Le panneau se retrouve alors avec une densité de points importante qui n'est certes pas pénalisante au niveau de la précision des résultats mais qui l'est en terme de temps de calcul.

Le critère part du principe que le raffinement initial imposé par l'utilisateur est correct. Le contrôle de la densité de points se fait alors par l'intermédiaire d'un critère géométrique relatif à la surface mouillée  $S_{mouillée}$  du panneau considéré. La méthode Transfinite définissant la surface par interpolation de ses frontières, le contrôle de la densité se fait au niveau du nombre de points de discrétisation de ces dernières.

Soient respectivement  $nu_{initial}$  et  $nv_{initial}$  le nombre de points discrétisant les frontières selon les directions  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Ces paramètres d'entrée étant donnés par l'utilisateur, le critère de raffinement automatique nous donne alors :

$$\begin{cases} nu = nu_{initial} \cdot \frac{S_{mouillée}}{S_{totale}} \\ nv = nv_{initial} \cdot \frac{S_{mouillée}}{S_{totale}} \end{cases} \quad (6.34)$$

avec  $nu$  et  $nv$  les nouveaux nombres de points de discrétisation des frontières selon  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

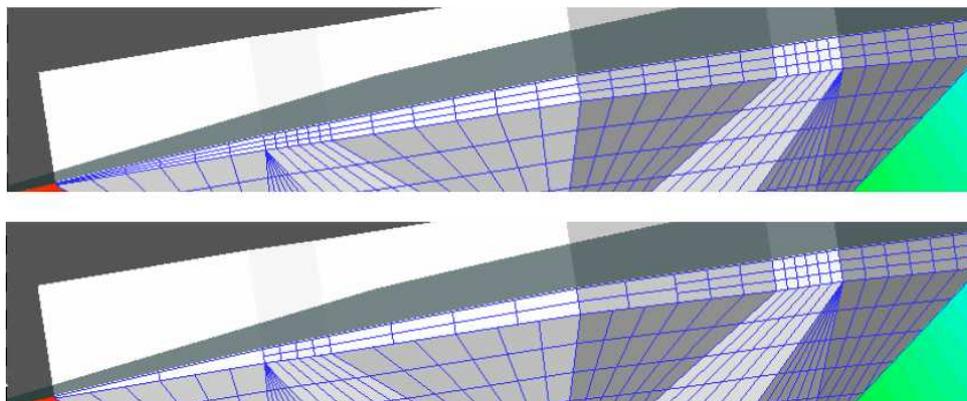


FIG. 6.16 – Exemple de résultat obtenu à l’aide du critère de raffinement automatique appliqué sur les panneaux contenant la surface libre. Figure du haut : sans raffinement automatique. Figure du bas : avec raffinement automatique.

### 6.3.2 Convergence de maillage.

Dans le contexte des simulations numériques, la précision des solutions dépend étroitement de la qualité des maillages. En vue d’évaluer l’influence de la finesse de maillage sur les résultats numériques, nous avons effectué des calculs en raffinant progressivement le maillage de la maquette SEAREV. Dans cette étude, les paramètres de raffinement  $nu$  et  $nv$ , contrôlant la discrétisation des frontières des panneaux, sont considérés comme égaux.

$nu, nv$	2	4	5	6	8	10	11	14	16	18	20
nombre de mailles	68	368	640	992	1940	3216	3980	6752	9002	11584	14492

TAB. 6.1 – Evolution du nombre de mailles en fonction du paramètre de raffinement  $n$ .

Les résultats sont présentés à la figure (6.17) et correspondent au cas d’une houle régulière d’amplitude 0,083 m et de période 2,5 s. Nous avons tracé le module des valeurs moyennes en cavalemt, embardée, roulis, tangage et lacet de l’effort total et des composantes statiques et dynamiques des efforts de Froude-Krylov. Neuf cas ont été traités, de  $nu = nv = 5$  à  $nu = nv = 20$ . Les résultats illustrent une convergence relativement monotone et régulière des efforts. L’allure des courbes montre que le maillage à  $nu = nv = 11$ , utilisé pour l’ensemble des résultats présentés dans la suite de ce document, constitue un bon compromis précision-temps de calcul.

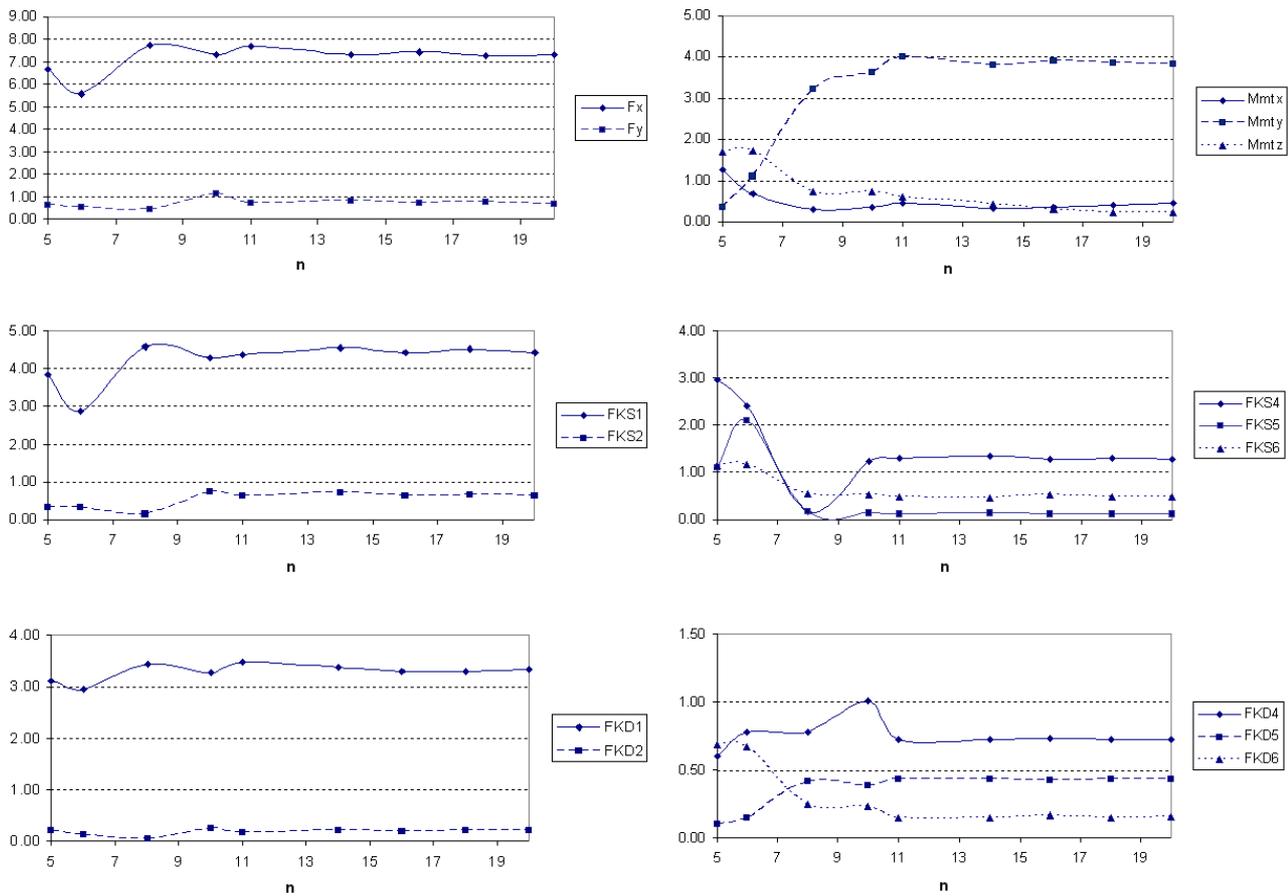


FIG. 6.17 – Influence du maillage sur la valeur de l'effort moyen total en cavalemt, embardée, roulis, tangage et lacet ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_{mtx}$ ,  $M_{mty}$ ,  $M_{mtz}$ ) ainsi que sur les composantes statiques et dynamiques de Froude-Krylov ( $FKS_1$ ,  $FKS_2$ ,  $FKS_4$ ,  $FKS_5$ ,  $FKS_6$  et  $FKD_1$ ,  $FKD_2$ ,  $FKD_4$ ,  $FKD_5$ ,  $FKD_6$ ).

## 6.4 Conclusion.

Ce chapitre a permis de présenter en détails la méthode permettant la discrétisation de la surface mouillée instantanée. La procédure ainsi réalisée peut se décomposer en six étapes (figure (6.18)) qui sont répétées à chaque pas de temps. La première est la lecture de la géométrie donnant les coordonnées spatiales des sommets des panneaux ainsi que leurs connectivités. Il s'ensuit une étape de présélection où les panneaux sont triés selon leur position par rapport à la surface libre. Les panneaux contenant la surface libre sont mémorisés tout comme ceux qui sont complètement immergés. La troisième étape s'applique aux panneaux contenant la surface libre. Elle se résume à la recherche de l'intersection entre la surface libre et les panneaux. Une fois l'intersection déterminée, il s'agit alors de mailler la partie immergée. Cette quatrième étape fait appel à la procédure de maillage algébrique appelée maillage transfinite. La cinquième étape intervient pour les panneaux complètement immergés qui sont, de la même manière que précédemment, discrétisés à l'aide de la méthode Transfinite. Enfin la dernière étape est celle de la mémorisation du maillage afin d'appliquer aux centres des facettes le champ de pression statique et dynamique du champ incident afin de calculer les efforts de Froude-Krylov.

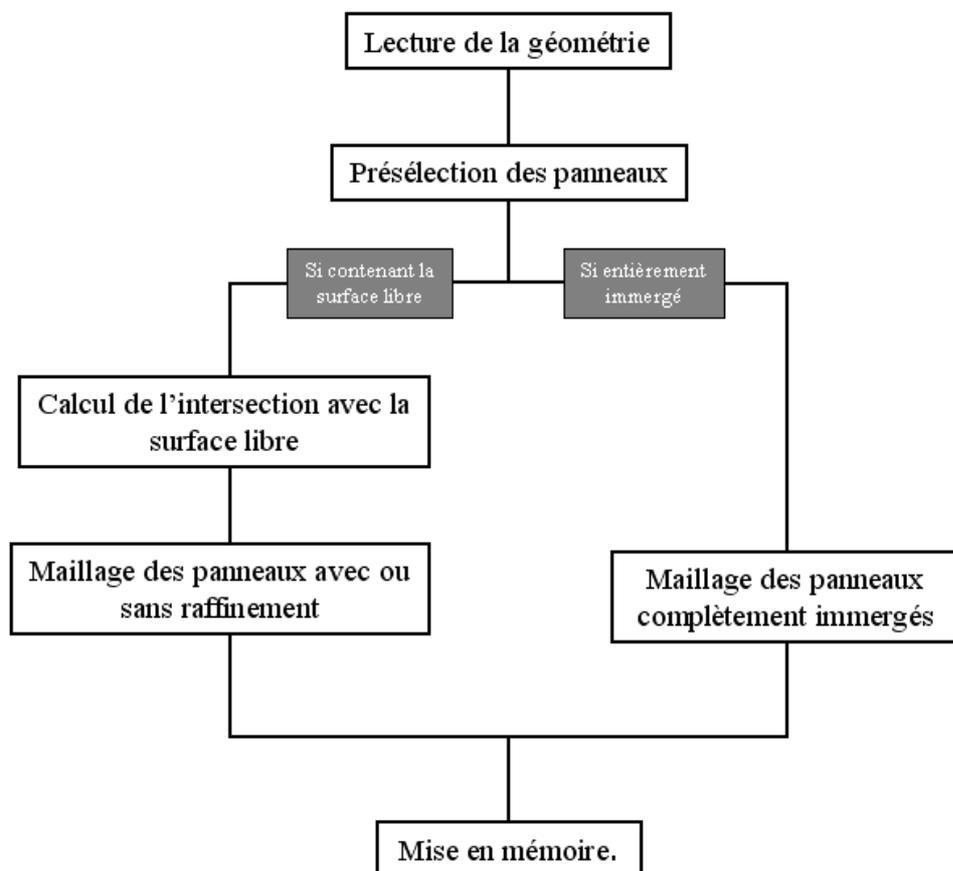


FIG. 6.18 – Procédure de discrétisation de la surface mouillée.

# Chapitre 7

## Formulation du problème de tenue à la mer.

### 7.1 Equations du mouvement non-linéaire dans l'espace 3D.

#### 7.1.1 Définition des repères utilisés.

Les équations de la mécanique sont écrites non-linéairement à l'aide du modèle des angles de Cardan. Trois repères sont alors utilisés (figure (7.1)) :  $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$  correspondant au repère terrestre,  $R_3(O, X_3, Y_3, Z_3)$  qui est un repère horizontal lié au navire obtenu par translation du repère  $R_0$ , et  $R_b(O, X_b, Y_b, Z_b)$  pour le repère lié au navire obtenu par les trois rotations successives des angles de Cardan du repère  $R_3$  dans l'ordre suivant : lacet, tangage puis roulis.

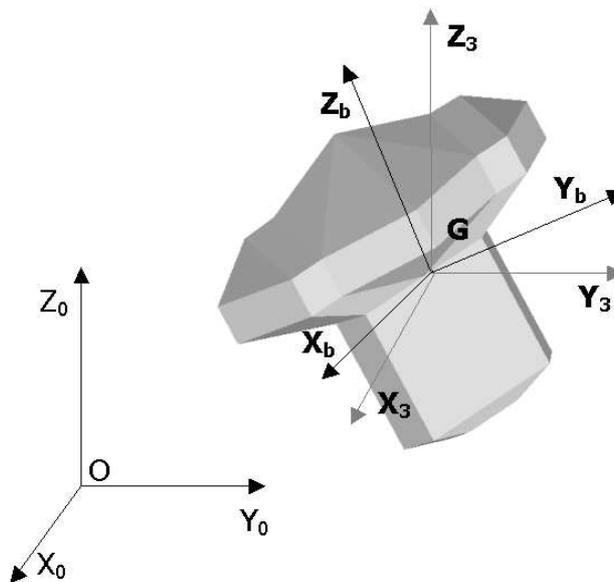
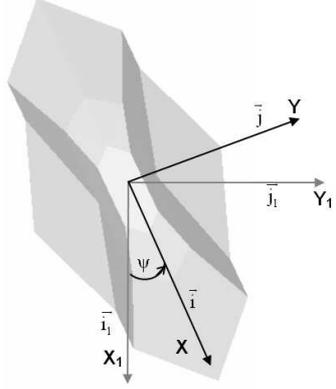


FIG. 7.1 – Définition des repères utilisés.

### 7.1.2 Détermination des matrices de passage

– Repère lié au flotteur.

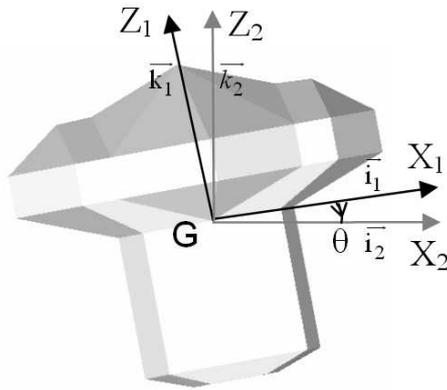
Les angles de Cardan et les matrices de passage sont définis de la manière suivante :



Matrice de passage associée à la rotation d'axe Z et d'angle  $\Psi$  :

$$\begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases} = P_{R_1 \rightarrow R_b} \begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases}$$

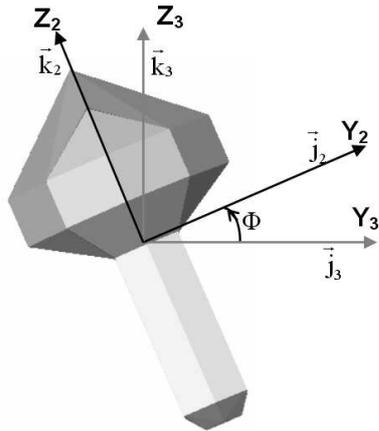
avec  $P_{R_1 \rightarrow R_b} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi) & -\sin(\Psi) & 0 \\ \sin(\Psi) & \cos(\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Matrice de passage associée à la rotation d'axe Y2 et d'angle  $\theta$  :

$$\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases} = P_{R_2 \rightarrow R_1} \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}$$

avec  $P_{R_2 \rightarrow R_1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



Matrice de passage associée à la rotation d'axe X3 et d'angle  $\Phi$  :

$$\begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases} = P_{R_2 \rightarrow R_3} \begin{cases} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{cases}$$

avec  $P_{R_2 \rightarrow R_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) \\ 0 & \sin(\Phi) & \cos(\Phi) \end{bmatrix}$

La matrice de passage du repère  $R_3$  au repère  $R$  est alors définie par :

$$P_{R_3 \rightarrow R} = P_{R_1 \rightarrow R} P_{R_2 \rightarrow R_1} P_{R_3 \rightarrow R_2}.$$

Soit,

$$P_{R_3 \rightarrow R} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi)\cos(\theta) & -\sin(\Psi)\cos(\Phi) + \cos(\Psi)\sin(\Phi)\sin(\theta) & \sin(\Psi)\sin(\Phi) + \cos(\Psi)\cos(\Phi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\Psi) & \cos(\Psi)\cos(\Phi) + \sin(\Psi)\sin(\theta)\sin(\Phi) & -\cos(\Psi)\sin(\Phi) + \sin(\Psi)\cos(\Phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \sin(\Phi)\cos(\theta) & \cos(\theta)\cos(\Phi) \end{bmatrix}$$

et par conséquent :

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = P_{R_3 \rightarrow R_b} \begin{vmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{vmatrix} \quad (7.1)$$

### – Repère lié au pendule

Le repère lié au pendule est le même que dans les deux précédentes parties concernant la modélisation 2D non-linéaire et 3D linéaire. La matrice de passage associée à la rotation  $\alpha$  est alors :

$$\begin{vmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{vmatrix} = P_{R_b \rightarrow R_p} \begin{vmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{vmatrix} \quad (7.2)$$

$$P_{R_b \rightarrow R_p} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

### 7.1.3 Résolution du principe fondamental de la dynamique.

Le principe fondamental de la dynamique peut être résolu dans l'un des trois repères naturels pour le flotteur : le repère lié au flotteur  $R_b$ , le repère horizontal lié au flotteur  $R_3$  ou le repère terrestre  $R_0$ . Il a été choisi ici de le résoudre dans le repère lié au flotteur  $R_b$  pour des raisons de simplicité au niveau de la matrice d'inertie ou encore au niveau des vecteurs rotation instantanée.

Nous ne présentons pas ici les résultats intermédiaires permettant d'arriver au système final à résoudre. Si le lecteur désire plus de détails, notamment sur les développements liés au calcul de la cinétique et de la cinématique du système, il est invité à consulter la thèse d'Aurélien Babarit [1]. Ces résultats nous permettent d'obtenir l'équation du mouvement sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{H} \quad (7.3)$$

où  $\mathbf{X}$  représente le vecteur d'état correspondant aux paramètres de position suivant tous les degrés de liberté tel que :  $\mathbf{X} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi, \beta, \alpha)^t$ ,  $\mathbf{M}$  est une matrice de dimension  $9 \times 8$  représentant la matrice de masse du système,  $\mathbf{F}$  est le tenseur des efforts extérieurs s'exerçant sur le système [flotteur+pendule] et  $\mathbf{H}$  le vecteur des efforts de Coriolis. Les détails des termes composant  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{H}$  sont décrits dans l'annexe 1 à la fin du manuscrit. Il est à noter, ici, que le

degré de liberté correspondant à la variable  $\beta$  est utilisé dans les cas où l'on donne deux degrés de liberté au pendule. Des résultats relatifs à ce cas de figure ne sont cependant pas traités dans ce manuscrit.

## 7.2 Formulation des efforts - extension au second ordre.

Dans cette approche, l'effort total sur le flotteur peut être écrit de la manière suivante :

$$\vec{F}_{\{\text{flotteur}\}} = \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_g + \vec{F}_A + \vec{F}_{\text{pendule}} \quad (7.4)$$

$\vec{F}_{\text{pression}}$  représente l'effort hydrodynamique regroupant à la fois les efforts de Froude-Krylov dus au champ incident, les efforts de diffraction et de radiation dus respectivement aux vagues heurtant la structure et au champ de vagues créé par les mouvements du flotteur.  $\vec{F}_g$  correspond aux efforts de pesanteur,  $\vec{F}_A$  aux efforts engendrés par l'ancrage et  $\vec{F}_{\text{pendule}}$  aux efforts créés par le pendule.

### 7.2.1 Efforts de pression.

L'interaction dynamique entre le flotteur et la masse fluide l'entourant est défini par la distribution de pression sur la carène  $S_C$  du flotteur (surface immergée). Cette distribution de pression est donnée par la relation de Bernoulli de l'équation (4.3) pour autant que la partie droite de l'égalité soit évaluée sur  $S_C$ . Les forces généralisées exercées sur le flotteur, en considérant un corps rigide, sont formulées de la manière suivante :

$$\vec{F}_{\text{pression},O}(G) = \int_{S_C} \int p \vec{n} dS \quad (7.5)$$

$$\vec{M}_{\text{mt}_{\text{pression},O}}(G) = \int_{S_C} \int p (\vec{OM} - \vec{OG}) \times \vec{n} dS \quad (7.6)$$

où  $\vec{F}$  correspond à la force hydrodynamique résultante et  $\vec{M}_{\text{mt}_{\text{pression},O}}$  au moment hydrodynamique résultant par rapport au centre de gravité  $G$  du flotteur.

L'approche adoptée ici consiste à partir de la solution linéaire du problème de tenue à la mer et de l'étendre par étapes successives au second ordre à partir de la position moyenne du flotteur. La pression en tout point  $p(x,y,z,t)$  sur la carène peut alors être exprimée telle que :

$$p = p_I + p_R + p_D + p_S \quad (7.7)$$

où  $p_I$ ,  $p_R$  et  $p_D$  sont respectivement les pressions dues au champ incident, au champ de radiation et au champ diffracté. Le terme de pression  $p_S$  correspond quant à lui aux fluctuations de la pression statique dues aux mouvements d'oscillation du corps.

La première extension concerne les termes de pression  $p_I$  et  $p_S$  correspondant aux efforts de Froude-Krylov. Ces pressions sont appliquées sur la surface mouillée instantanée  $C(t)$  créée par le champ de vagues incident non perturbé. La pression du champ incident  $p_I$  est calculée en prenant en compte l'ensemble des termes de l'équation de Bernoulli (4.3). La seconde extension s'applique aux efforts linéaires de diffraction-radiation auxquels on incorpore les efforts liés à la composante quadratique de l'équation de Bernoulli (cf. équation 4.3). Enfin, la troisième et dernière extension permet de prendre en compte les composantes du second-ordre de l'effort linéaire de diffraction-radiation à l'aide d'un développement en série de Taylor autour de la position moyenne du corps.

Les efforts de Froude-Krylov étendus sont donc considérés sur la surface mouillée instantanée  $C(t)$  où la normale instantanée  $\vec{n}$  à la surface du corps est prise en compte. Les efforts de diffraction-radiation sont dans un premier temps évalués sur la surface mouillée moyenne  $C_0$  et sa normale  $\vec{n}_0$ . Les termes de pression  $p_R$  et  $p_D$  contiennent par la suite le terme de vitesse quadratique de l'équation de Bernoulli. Enfin, les mouvements du corps sont considérés en développant au second-ordre les efforts linéaires de diffraction-radiation permettant de prendre en compte la rotation de la normale.

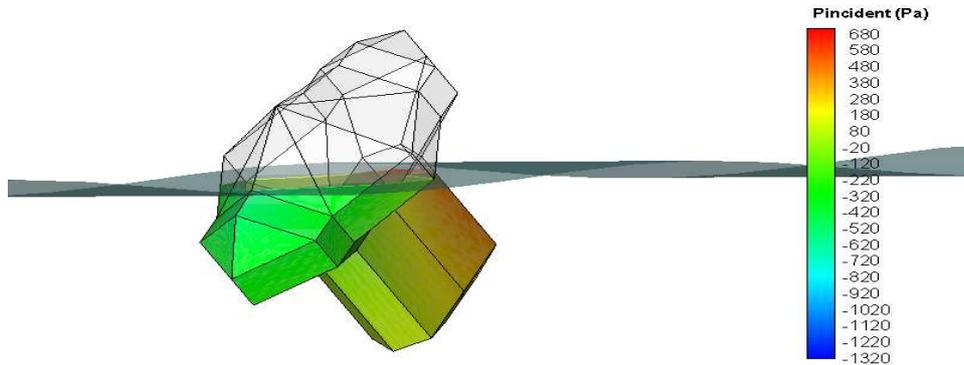


FIG. 7.2 – Exemple de contours de pression dus à la composante dynamique du champ incident.

### Efforts de Froude-Krylov étendus.

Les efforts de Froude-Krylov sont définis comme les efforts résultant de l'intégration de la pression du champ de vague incident  $\phi_I$  sur la surface mouillée  $C(t)$  du flotteur, la pression étant imaginée non perturbée par la présence du flotteur.

En théorie potentielle linéaire, les mouvements du flotteur étant supposés petits, cette intégration est prise en compte sur la surface mouillée moyenne, les efforts hydrostatiques liés à l'action de la pression due à la profondeur d'eau sur la carène se résument alors à un effort vertical ascendant et à une matrice de raideur hydrostatique. Ici, le calcul de l'intersection de surfaces entre la surface libre non perturbée et la structure est réalisé à chaque instant, permettant par conséquent d'intégrer les efforts de pression sur la totalité de la surface mouillée instantanée (figure (7.2)).

La contribution de ces efforts dans le comportement non-linéaire des navires est largement avérée. De Kat et Pauling [31], ont ainsi montré que ces efforts sont dominants dans toutes les conditions de vague. Lin et Yue [65] ont également présenté des résultats similaires pour une sphère soumis à différents états de mer. Ils ont tous mis en exergue le fait que, complétés par une théorie potentielle linéaire, les résultats obtenus pour des cas de mouvements de grande amplitude sont très satisfaisants par rapport aux résultats expérimentaux.

Le torseur des efforts s'exerçant sur le corps est dépendant de la variable temporelle et peut être calculé en intégrant la pression sur la surface mouillée instantanée du corps  $C(t)$ . Le vecteur force généralisée  $\vec{F}_{FK}$  correspondant est par conséquent :

$$\vec{F}_{FK,O}(G,t) = \int_{C(t)} \int p_I \vec{n} dS \quad (7.8)$$

$$\vec{M}_{mt_{FK},O}(G,t) = \int_{C(t)} \int p_I (\overline{GM} \times \vec{n}) dS \quad (7.9)$$

où  $\vec{n}$  correspond à la normale instantanée à la surface du corps. Les vecteurs  $\vec{F}_{FK,O} = (Fx, Fy, Fz)^t$  et  $\vec{M}_{mt_{FK},O} = (Mx, My, Mz)^t$  représentent donc respectivement les composantes des efforts suivant les mouvements de translation et de rotation.

Ici l'intégration est réalisée sur la surface mouillée instantanée, l'effort de Froude-Krylov est alors exprimé de la façon suivante :

$$\vec{F}_{FK,O}(t) = \int_{C(t)} \int (P_S + P_{Dy}) \vec{n} dS \quad (7.10)$$

$$\vec{M}_{mt_{FK},O}(G,t) = \int_{C(t)} \int (P_S + P_{Dy}) (\overline{GM} \times \vec{n}) dS \quad (7.11)$$

$P_S$  représente la composante statique de la pression tandis que  $P_{Dy}$  la composante dynamique de la pression. Ces dernières sont respectivement égales à :

$$\begin{cases} P_S = p_0 - \rho g z, & -\infty < z < \eta(t) \\ P_{Dy} = -\rho \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\phi_0|^2 \right) \end{cases} \quad (7.12)$$

La pression statique dépendant de la position du point considéré, sa valeur est automatiquement connue. La pression dynamique du champ incident, quant à elle, est obtenue du potentiel de vitesse non-linéaire du champ incident calculé par l'intermédiaire d'une méthode spectrale qui sera présentée par la suite.

### Efforts de radiation linéaire.

Le principe est de partir de la solution instationnaire linéaire où l'effort généralisé de radiation s'écrit :

$$\mathbf{F}_R(t) = -\mathbf{C}_M \ddot{X} - \int_0^t \mathbf{K}(t-\tau) \dot{X}(\tau) d\tau \quad (7.13)$$

avec  $\mathbf{C}_M$  est une matrice à coefficients constants correspondant à la matrice d'eau ajoutée et  $\mathbf{K}$  est une matrice dépendante du temps représentant la réponse impulsionnelle pour l'effort de radiation pour chaque degré de liberté. Le calcul de cette réponse impulsionnelle se fait par l'intermédiaire du programme ACHIL3D [?] et la résolution du produit de convolution par la méthode de Prony présentée dans la partie 2 de ce mémoire.

### Efforts de diffraction linéaire.

L'approche temporelle de la méthode des déformations généralisées permet de relier la réponse impulsionnelle en effort (équation (4.16)) de la houle diffractée avec l'effort généralisé d'une houle quelconque. Nous avons vu précédemment que la réponse impulsionnelle en effort pour la houle diffractée  $\mathbf{K}_7$  est telle que :

$$\mathbf{K}_7(t) = - \int_{C_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_P(t-\tau) \nabla \phi_I(P, \tau) \cdot \vec{n}(P) d\tau \quad (7.14)$$

Le calcul consiste alors à effectuer le produit de convolution de cette réponse impulsionnelle avec la hauteur de surface libre du champ incident considéré tel que :

$$\mathbf{F}_D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_7(t-\tau) \cdot \eta_I(\tau) d\tau \quad (7.15)$$

avec  $\eta_I$  la déformée de surface libre associée au potentiel de la houle incidente donnée par une méthode spectrale présentée ultérieurement.

### Extension des efforts de diffraction-radiation au second-ordre.

**Ajout du terme quadratique de l'équation de Bernoulli.** Nous avons vu précédemment que les efforts hydrodynamiques de diffraction-radiation sont obtenus à partir d'une théorie potentielle linéaire. Le terme de pression dynamique pris en compte est donc issu de la relation de Bernoulli linéarisée suivante :

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7.16)$$

Le but ici est d'ajouter la composante quadratique telle qu'elle est utilisée pour l'évaluation des efforts de Froude-Krylov soit :

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \quad (7.17)$$

La décomposition du terme de pression (équation (7.7)) de la formulation linéaire implique au potentiel d'être de la forme :

$$\phi = \phi_I + \phi_R + \phi_D \quad (7.18)$$

Soit pour l'effort de pression hydrodynamique  $\vec{F}_h$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}_h &= \int_{c_0} \int \left[ -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right] \vec{n}_0 \, dS \\ &= \int_{c_0} \int \left[ -\rho \frac{\partial}{\partial t} (\phi_I + \phi_R + \phi_D) - \rho \frac{|\nabla (\phi_I + \phi_R + \phi_D)|^2}{2} \right] \vec{n}_0 \, dS \end{aligned} \quad (7.19)$$

En développant on obtient :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_h &= \int_{C_0} \int \left[ \left( -\rho \frac{\partial \phi_I}{\partial t} - \rho \frac{|\nabla \phi_I|^2}{2} \right) + \left( -\rho \frac{\partial \phi_R}{\partial t} - \rho \frac{|\nabla \phi_R|^2}{2} \right) + \left( -\rho \frac{\partial \phi_D}{\partial t} - \rho \frac{|\nabla \phi_D|^2}{2} \right) \right] \vec{n}_0 dS \\
 &\quad - \rho \int_{C_0} \int \nabla \phi_I \nabla \phi_R \vec{n}_0 dS \\
 &\quad - \rho \int_{C_0} \int \nabla \phi_I \nabla \phi_D \vec{n}_0 dS \\
 &\quad - \rho \int_{C_0} \int \nabla \phi_R \nabla \phi_D \vec{n}_0 dS
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Les deux premiers termes correspondent à la partie dynamique des efforts de Froude-Krylov calculée précédemment (équation (7.10)). Les deux termes suivants présentant une dérivée temporelle des potentiels de radiation et de diffraction sont également connus à travers les efforts linéaires de radiation et diffraction formulés dans la partie 2 de ce mémoire. Les termes non-linéaires restant à calculer nous donnent donc un effort  $F'_h$  tel que :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}'_h &= \int_{C_0} \int \left[ -\rho \frac{|\nabla \phi_R|^2}{2} - \rho \frac{|\nabla \phi_D|^2}{2} \right] \vec{n}_0 dS \\
 &\quad - \rho \int_{C_0} \int \nabla \phi_I \nabla \phi_R \vec{n}_0 dS \\
 &\quad - \rho \int_{C_0} \int \nabla \phi_I \nabla \phi_D \vec{n}_0 dS \\
 &\quad - \rho \int_{C_0} \int \nabla \phi_R \nabla \phi_D \vec{n}_0 dS
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Le potentiel du champ incident  $\phi_I$  est donné soit par la méthode de Rienacker-Fenton présentée dans la partie 1 du mémoire soit par une méthode spectrale de type HOS présentée à la fin du manuscrit au chapitre traitant des comparaisons expérimentales. Les potentiels de radiation  $\nabla \phi_R$  et de diffraction  $\nabla \phi_D$  sont quant à eux déduits de la solution sur la carène du code potentiel linéaire ACHIL3D. En effet, lors du calcul hydrodynamique linéaire le potentiel de vitesse est connu à chaque instant au centre de chacune des facettes. Le principe est alors de calculer le gradient de ces potentiels de vitesse à chaque instant et pour chaque facette pour obtenir au final un vecteur gradient de potentiel de vitesse  $\nabla \phi_\delta$ . Les gradients de potentiel relatifs à la radiation  $\nabla \phi_R$  et à la diffraction  $\nabla \phi_D$  sont ensuite calculés pour chaque facette et à chaque instant par le code potentiel non-linéaire à travers un produit de convolution de  $\nabla \phi_{\delta,f}$  avec la vitesse de déplacement de la facette  $V_f$  pour la radiation et avec la vitesse du champ incident  $V_{I,f}$  pour la diffraction tel que :

$$\nabla \phi_{R,f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \phi_{\delta,f}(t - \tau) \cdot V_f(\tau) d\tau \quad (7.22)$$

$$\nabla \phi_{D,f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \phi_{\delta,f}(t - \tau) \cdot V_{I,f}(\tau) d\tau \quad (7.23)$$

L'effort généralisé de diffraction-radiation  $\vec{F}_h'$  dû au terme quadratique est alors calculé par l'intermédiaire de sept produits de convolution effectués en chaque point de collocation du maillage d'ACHIL3D. Au final, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{F}_h'(t) = & -\frac{\rho}{2} \int_{C_0} \int_{C_0} |\overrightarrow{\nabla \phi_{\delta,f}} \otimes \vec{V}_f|^2 \vec{n}_0 dS - \frac{\rho}{2} \int_{C_0} \int_{C_0} |\overrightarrow{\nabla \phi_{\delta,f}} \otimes \vec{V}_I|^2 \vec{n}_0 dS \quad (7.24) \\ & -\frac{\rho}{2} \int_{C_0} \int_{C_0} |\overrightarrow{\nabla \phi_{\delta,f}} \otimes \vec{V}_I| |\overrightarrow{\nabla \phi_{\delta,f}} \otimes \vec{V}_f| \vec{n}_0 dS \\ & -\frac{\rho}{2} \int_{C_0} \int_{C_0} \overrightarrow{\nabla \phi_I} |\overrightarrow{\nabla \phi_{\delta,f}} \otimes \vec{V}_I| \vec{n}_0 dS \\ & -\frac{\rho}{2} \int_{C_0} \int_{C_0} |\overrightarrow{\nabla \phi_{\delta,f}} \otimes \vec{V}_f| |\overrightarrow{\nabla \phi_{\delta,f}} \otimes \vec{V}_I| \vec{n}_0 dS \end{aligned}$$

avec  $\otimes$  désignant le produit de convolution.

**Développement au second-ordre de l'effort de pression.** Le paragraphe précédent a permis d'expliciter la formulation permettant d'inclure à la solution linéaire des efforts de diffraction-radiation les efforts du second-ordre liés au terme quadratique en vitesse de l'équation de Bernoulli. On s'intéresse maintenant aux effets dus au développement au second-ordre des efforts hydrodynamiques linéaires calculés précédemment. On revient pour cela à la forme linéaire des efforts hydrodynamique (équation (7.16)).

Le développement au second des efforts de diffraction et radiation peut se faire suivant deux méthodes. Une première méthode consiste à partir des termes de forçages de la relation de Wehausen (équation (4.12)) et de développer au second-ordre la valeur des potentiels autour de la position moyenne du flotteur. La seconde méthode part de la formulation générale de l'effort de pression correspondant à l'intégration du terme de pression sur la surface mouillée instantanée (équation (7.5)) et de développer les termes correspondants au second-ordre à l'aide des séries de Taylor.

Notre choix s'est porté sur cette dernière méthode en raison de sa facilité d'implémentation. Auparavant intéressons-nous au développement au second-ordre.

Soit l'effort généralisé de pression :

$$\vec{F}_{pression} = \int_{S_C} p \vec{n} dS \quad (7.25)$$

l'équation de Bernoulli nous donne l'expression du terme de pression tel que :

$$\vec{F}_{pression} = \int_{S_C} \left( -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2 - \rho g z \right) \vec{n} dS \quad (7.26)$$

Comme il a été expliqué en introduction et comme nous le verrons dans le chapitre suivant le terme de pression hydrostatique est pris en compte sur la surface mouillée instantanée  $C(t)$ , nous permettant ainsi de l'ignorer ici. Le terme quadratique de vitesse d'écoulement est quant à lui ignoré aussi, puisqu'il induirait une correction d'ordre supérieur à 2. Une fois ces considérations prises en compte nous obtenons l'égalité suivante, représentant l'intégration sur la surface mouillée de la dérivée temporelle du potentiel de diffraction-radiation :

$$\vec{F}_{pression} = \iint_{S_C} \phi_t(t, M') dM' \cdot \vec{n}(M') \quad (7.27)$$

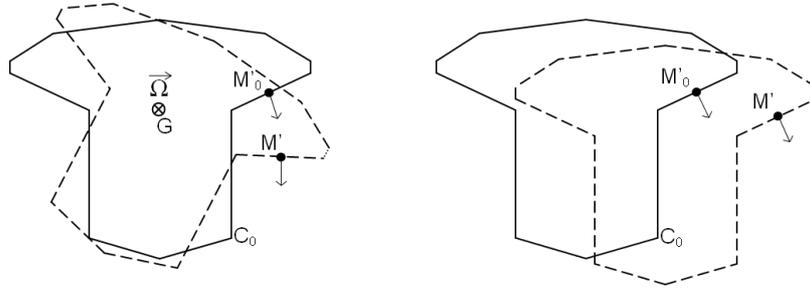


FIG. 7.3 – Mouvements pris en compte lors du développement de Taylor autour de la position moyenne du flotteur.

Le programme ACHIL3D considérant la surface mouillée moyenne  $C_0$ , nous effectuons alors un développement de Taylor d'ordre 1 du potentiel autour de la position moyenne du flotteur :

$$\phi_t(t, M') = \phi_t(t, M'_0) + |M_0 M'| \frac{\partial}{\partial n} \phi_t(t, M'_0) \quad (7.28)$$

soit,

$$\phi_t(t, M') = \phi_t(t, M'_0) + \partial x' \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \phi_t(t, M'_0) + \partial y' \cdot \frac{\partial}{\partial y'} \phi_t(t, M'_0) + \partial z' \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \phi_t(t, M'_0) + O() \quad (7.29)$$

La normale à la carène intervenant également dans l'effort de pression (équation (7.27)), il faut également prendre en compte sa rotation lors des mouvements du flotteur (Figure 7.3). On résout ainsi le produit vectoriel du vecteur rotation instantanée  $\overrightarrow{\Omega}$  avec le vecteur  $\overrightarrow{GM'_0}$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M'} &= \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM'_0} \\ &= \delta x' \overrightarrow{i} + \delta y' \overrightarrow{j} + \delta z' \overrightarrow{k} \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\overrightarrow{n}(M') = \overrightarrow{n}(M'_0) + \delta \overrightarrow{n}(t) = \overrightarrow{n}(M'_0) + \delta n_x \overrightarrow{i} + \delta n_y \overrightarrow{j} + \delta n_z \overrightarrow{k} \quad (7.31)$$

On remplace dans l'équation (7.27) l'expression de la dérivée temporelle de l'équation (7.29) pour obtenir au final :

$$F_i(t) = \iint_{C_0} \phi_t(t, M'_0) dM'_0 \quad (7.32)$$

$$+ \iint_{C_0} \left[ \partial x' \cdot \frac{\partial \phi_t(t, M'_0)}{\partial x'} + \partial y' \cdot \frac{\partial \phi_t(t, M'_0)}{\partial y'} + \partial z' \cdot \frac{\partial \phi_t(t, M'_0)}{\partial z'} \right] \cdot n_i(M'_0) dM'_0 \quad (7.33)$$

$$+ \iint_{C_0} \phi_t(t, M'_0) \cdot \partial n_i(M'_0) \quad (7.34)$$

$$i = 1, 6$$

Le premier terme (7.32) est connu et correspond à la réponse impulsionnelle, solution du problème linéaire calculée par le logiciel ACHIL3D. Le second terme (7.33) correspond au gradient de réponse impulsionnelle tandis que le dernier (7.34) correspond à la rotation de la normale.

## 7.2.2 Efforts de pesanteur.

L'effort de pesanteur est dû à la fois à l'action du poids du flotteur en son centre de gravité et à la fois à celui du pendule également en son centre de gravité tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R}_{pesanteur}(G) = -(m_b + m_p) g \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M}_{pesanteur}(G) = \overrightarrow{GP} \wedge m_P \overrightarrow{g} \end{cases} \quad (7.35)$$

Leurs actions conjuguées se résument alors dans le repère galiléen  $R_0$  à l'effort généralisé suivant :

$$\vec{F}_{pesanteur,0} = \left( \begin{array}{c} 0 \\ -(m_b + m_p)g \\ T_{ob} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + T_{op} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix} \end{array} \right) \quad (7.36)$$

### 7.2.3 Efforts d'ancrage.

L'amarrage de la structure est un problème bien spécifique qui va être étudié en détails à la fin de cette année à travers un travail d'ingénierie. Cet effort d'ancrage ne rentrant pas dans le cadre de cette thèse, il a été choisi de le modéliser ici sous la forme de raideurs linéaires tel que :

$$\vec{F}_{ancrage} = -\mathbf{K}_A \cdot Y \quad (7.37)$$

avec :

$$\mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} K_{Ax} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{Ay} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{A\psi} \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

Le choix des valeurs des termes de la matrice de raideur  $\mathbf{K}_A$  est de l'ordre de quelques dizaines de kN/m et correspond à l'ordre de grandeur que l'on retrouve dans la littérature.

### 7.2.4 Efforts dus au pendule.

#### Efforts de pesanteur.

Tout comme le flotteur précédemment le pendule est soumis à son propre poids qui s'exerce en son centre de gravité  $P$ . Au point  $O$ , cet effort se traduit par un couple donné par :

$$M_g(O) = \vec{OP} \wedge m_p \vec{g} \quad (7.39)$$

soit dans le repère galiléen :

$$M_{g,0}(O) = T_{op} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

**Efforts dus au convertisseur d'énergie.**

L'effort fourni par le convertisseur d'énergie se résume à un couple modélisé par :

$$\overrightarrow{C_{PTO}}(O) = C_\alpha \overrightarrow{y_p} \quad (7.41)$$

où

$$C_\alpha = -B_\alpha \dot{\alpha} - k_\alpha \alpha \quad (7.42)$$

**Efforts de liaison.**

La liaison entre le pendule et le flotteur au point A est un pivot, son torseur s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{R}_{liaison,p} \\ \overrightarrow{M}_{liaison,p}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ P \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

# Chapitre 8

## Résolution et résultats numériques.

### 8.1 Efforts hydrostatiques.

Un programme réalisant le calcul des courbes de stabilité isocarène a été réalisé afin de valider le calcul des efforts hydrostatiques. Ce programme nommé *STAB3D*, est composé en grande partie de modules issus du programme de tenue à la mer présenté ici. Les routines ainsi utilisées sont prévues pour calculer les efforts de Froude-Krylov et plus particulièrement celles concernant la composante statique de la pression du champ incident. Elles regroupent à la fois les routines permettant le calcul de l'intersection entre la surface libre et la carène, le maillage de la surface mouillée ainsi que celle réalisant l'intégration des efforts hydrostatiques. *STAB3D* va ainsi nous permettre de vérifier la qualité du maillage de la surface mouillée et le calcul de l'aire de la surface mouillée.

La figure ci-dessous compare les résultats obtenus avec le programme *STAB3D* présenté précédemment avec ceux issus du code commercial Multisurf© et plus particulièrement de son module de calcul hydrostatique *Hydro*. Le principe est de comparer le moment de redressement du navire lorsque celui-ci est en rotation autour de son centre de gravité de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ . Les calculs se passent dans le cas d'une carène en position fixe, c'est à dire que pour chaque inclinaison imposée, le programme n'essaie pas de chercher une position d'équilibre. On établit alors une courbe de stabilité où sont portées en abscisses les inclinaisons et en ordonnées les rappels hydrostatiques correspondants. Les résultats présentés ici concernent le flotteur DES2595 (Annexes 2).

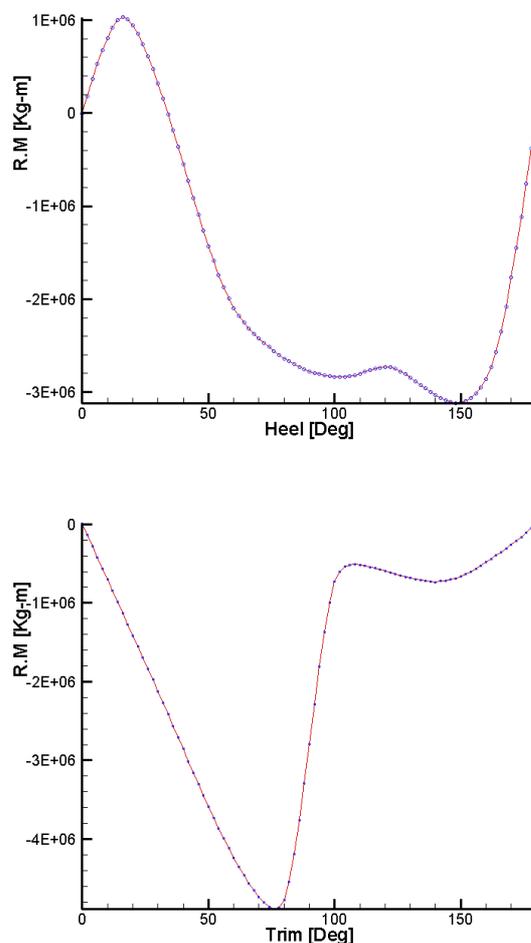


FIG. 8.1 – Comparaison des moments de redressement en tangage et roulis entre le logiciel commercial Multisurf© et le programme *STAB3D* pour le flotteur DES2595.

On remarque que l'accord est excellent entre les résultats obtenus avec Multisurf et ceux résultant du programme *STAB3D*.

## 8.2 Efforts de Froude-Krylov.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les efforts de Froude-Krylov sont définis comme les efforts résultant de l'intégration de la pression du champ de vague incident sur la surface mouillée du flotteur. La pression considérée est alors imaginée non perturbée par la présence du flotteur tel que :

$$\vec{F}_{FK}(t) = \int \int_{C(t)} P_I \vec{n} dS \quad (8.1)$$

$$\vec{M}_{mt_{FK}}(t) = \int \int_{C(t)} P_I (\vec{GM} \times \vec{n}) dS \quad (8.2)$$

Les équations intégrales précédentes doivent être discrétisées en espace en vue de sa résolution numérique.

$$\vec{F}_{FK}(t) = \sum_{i=1}^{N_{facettes}} (P_{S,i} + P_{Dy,i}) \begin{pmatrix} \vec{n}_{x,i} \\ \vec{n}_{y,i} \\ \vec{n}_{z,i} \end{pmatrix} S_i \quad (8.3)$$

$$\vec{M}_{mt_{FK}}(t) = \sum_{i=1}^{N_{facettes}} (P_{S,i} + P_{Dy,i}) \begin{pmatrix} (x_i - x_G) \\ (y_i - y_G) \\ (z_i - z_G) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{n}_{x,i} \\ \vec{n}_{y,i} \\ \vec{n}_{z,i} \end{pmatrix} S_i \quad (8.4)$$

Les pressions statiques et dynamiques sont considérées comme constantes sur l'ensemble de la facette considérée. La valeur de la partie statique  $P_s$  est connue intrinsèquement par le biais de la position relative à la surface libre moyenne du point considéré.

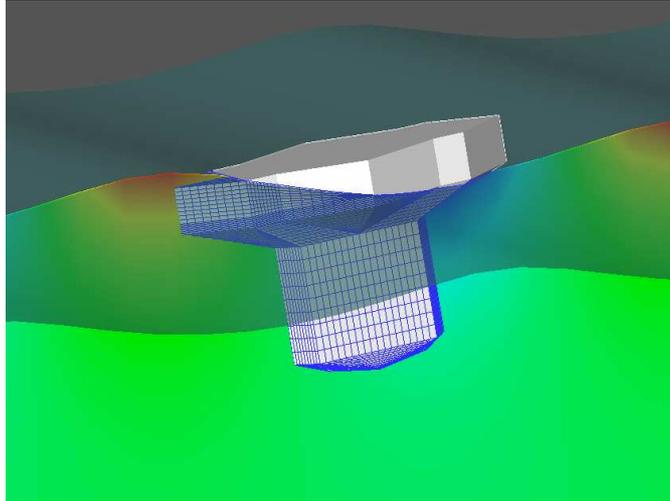


FIG. 8.2 – Exemple de maillage de la surface mouillée utilisée pour le calcul des efforts de Froude-Krylov.

La pression dynamique est calculée à l'aide d'une méthode spectrale qui permet de connaître en tout point du domaine fluide le champ de pression du champ incident dans une formulation non-linéaire. La méthode de Rienecker-Fenton, déjà utilisé dans le modèle 2D de la partie 1, est utilisée dans le cas de houles régulières.

On se sert d'une méthode HOS pour des états de mer plus complexes tels que des houles irrégulières ou de houles générées par un batteur. Cette dernière méthode est exposée plus en détails à la fin de cette partie dans le chapitre concernant les validations expérimentales.

Les équations intégrales discrétisées (8.3) et (8.4) impliquent que la surface mouillée délimitée par la surface libre exacte, doit être à chaque pas de temps obligatoirement discrétisée en  $N$  facettes (figure (8.2)). La détermination de cette surface mouillée est un problème bien spécifique. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent le problème consiste, dans un premier temps, au calcul de l'intersection de surface entre la surface libre du champ incident non perturbé et la surface de la carène et dans un second temps au maillage de la partie immergée.

Les figures (8.3) et (8.4) présentent les efforts de Froude-Krylov en cavement et tangage pour le flotteur SEAREV de type DES1451 soumis à une houle régulière de période 7 s et d'amplitude 0,1 m. On y compare les résultats obtenus par la méthode exposée ici, et le résultat d'un calcul dans le domaine temporel réalisé à l'aide d'un code potentiel linéaire [1]. On s'aperçoit que si l'on reste dans un cas linéaire avec une faible cambrure de vague, l'accord entre les deux méthodes est excellent.

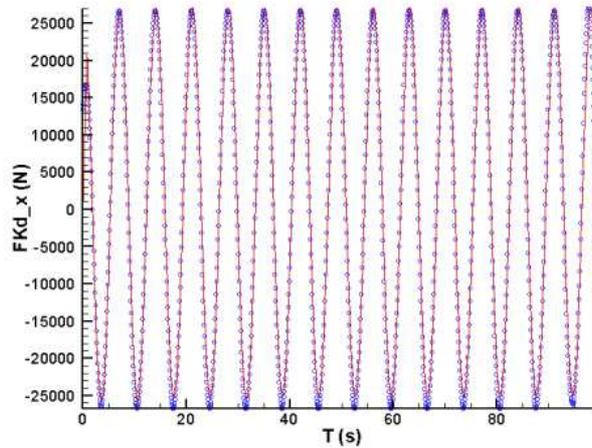


FIG. 8.3 – Comparaison des efforts de Froude-Krylov en cavement calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et par la méthode présentée ici.

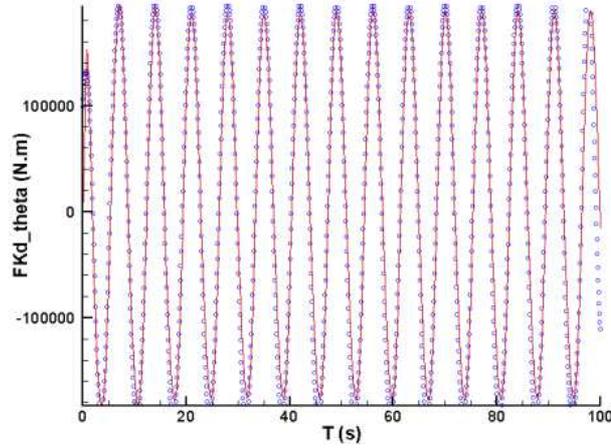


FIG. 8.4 – Comparaison des efforts de Froude-Krylov en tangage calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et par la méthode présentée ici.

### 8.3 Efforts de radiation.

Nous avons vu précédemment que le calcul de l'effort linéaire de radiation se résume à la résolution d'un produit de convolution de la réponse impulsionnelle avec le vecteur vitesse (équation (7.13)). Cette opération étant numériquement contraignante, nous nous en affranchissons en utilisant la même méthode que dans le cas 3D linéaire de la partie 2. La réponse impulsionnelle  $K$  est alors approchée à l'aide de la méthode de Prony qui, tous calculs fait, permet de mettre le produit de convolution sous la forme :

$$\int_0^t K(t-\tau) \dot{X}(\tau) d\tau = I(t) \quad (8.5)$$

où  $I$  est donné par l'intermédiaire d'un système de  $N$  équations différentielles du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$\begin{cases} \vec{I}(t) = \left( \sum_{j=1}^6 \sum_{r=1}^{N_{ij}} I_{ijr}(t) \right)_{i=1,6} \\ \dot{I}_{ijr} = \beta_{ijr} I_{ijr} + \alpha_{ijr} \dot{X}_j(t) \\ I_{ijr}(0) = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Au final l'effort de radiation revient à :

$$\vec{F}_R = -\mu_\infty \ddot{\vec{X}} - \vec{I} \quad (8.7)$$

La figure (8.5) présente l'évolution du tangage (resp. de roulis) lors d'une simulation d'une extinction de tangage (resp. de roulis) pour le flotteur SEAREV de type DES1451. On y compare l'évolution des mouvements de tangage (resp. de roulis) dans le temps obtenus par la méthode exposée ici et ceux d'un code potentiel linéaire [1]. L'accord entre les deux méthodes est excellent, les mouvements sont amortis de la même façon dans les deux cas.

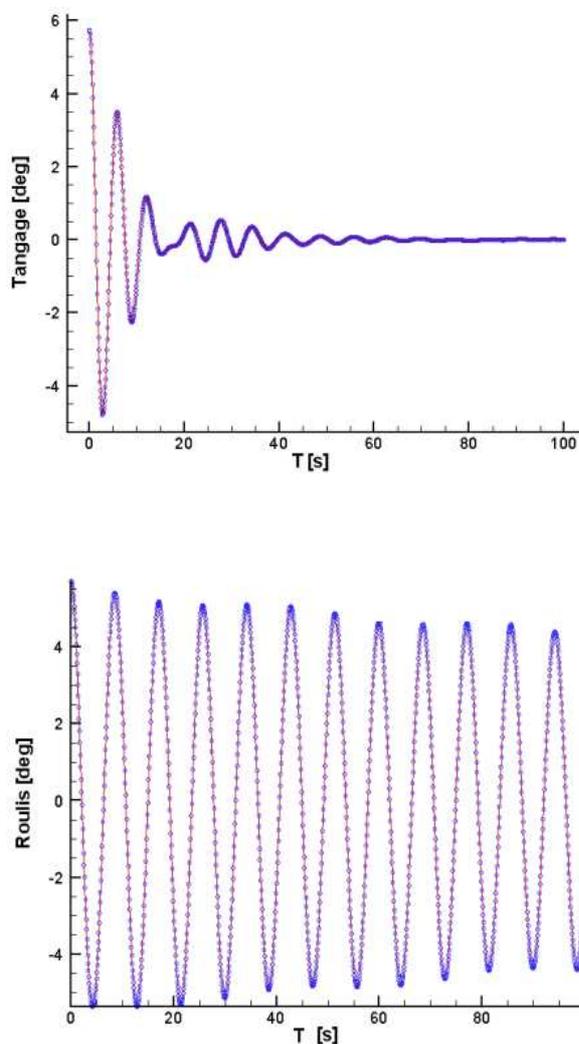


FIG. 8.5 – Comparaison du déroulement d'une simulation de lâchers de roulis et de tangage par une méthode potentielle linéaire et la méthode exposée ici.

## 8.4 Efforts de diffraction.

L'effort généralisé de diffraction s'écrit dans le domaine temporel :

$$\vec{F}_D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{K}_7(t - \tau) \eta_0(\tau) d\tau \quad (8.8)$$

avec  $\eta_0$  la hauteur de surface libre liée au champ incident.

Or, la réponse impulsionnelle en effort de diffraction  $\vec{K}_7$  est fonction du gradient de potentiel du champ incident tel que :

$$\vec{K}_7(t) = - \int \int_C dS \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_P(t - \tau) \overrightarrow{\nabla \phi_I}(P, \tau) \cdot \vec{n}(P) d\tau \quad (8.9)$$

Sous forme discrétisée le problème revient à :

$$\vec{K}_7(t) = - \sum_{\text{facettes}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_f(t - \tau) \overrightarrow{\nabla \phi_{I,f}}(\tau) \cdot \vec{n}(P) d\tau \quad (8.10)$$

Le programme ACHIL3D nous donne cependant en sortie les fonctions suivantes, pour chaque facette du corps :

$$\overrightarrow{CM}_f(t) = \rho \int \int_S \phi_f(M, t) \vec{n}(M) dS \quad (8.11)$$

$$\overrightarrow{CL}_f(t) = \rho \int \int_S \frac{\partial}{\partial t} \phi_f(M, t) \vec{n}(M) dS \quad (8.12)$$

Ces fonctions sont le résultat du calcul pour un échelon de vitesse sur la facette  $f$ , l'effort généralisé  $\vec{F}_f$  correspondant à une impulsion sur cette même facette est alors :

$$\vec{F}_f(t) = -\overrightarrow{CM}_f(0) \dot{\delta}(t) - \overrightarrow{CL}_f(t) \quad (8.13)$$

Le calcul des CL effectué dans ACHIL3D provient déjà d'une dérivation temporelle, numériquement et dans un souci de précision le calcul des  $\overrightarrow{CL}_f$  ne peut donc pas se faire directement. On montre [1] qu'après plusieurs manipulations mathématiques, la convolution de la réponse impulsionnelle avec le gradient normal du potentiel incident est égale à la convolution de la réponse indicelle avec la dérivée du gradient normal de potentiel incident.

Au final, la réponse impulsionnelle de diffraction en effort revient à :

$$\vec{K}_7(t) = \sum_{\text{facettes}} \left( \left( \vec{CM}_f(0) \overrightarrow{\nabla \phi_{I,f}}(t) \cdot \vec{n}_f \right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{CL}_f(t - \tau) \left( \overrightarrow{\nabla \phi_{I,f}}(\tau) \cdot \vec{n}_f \right) d\tau \right) \quad (8.14)$$

L'effort de diffraction généralisé est donc obtenu avec la relation (8.8), la hauteur de surface libre étant donnée par une méthode spectrale.

La figure (8.7) présente les efforts de diffraction en cavalemt et pilonnement pour le flotteur SEAREV de type DES1451 soumis à une houle régulière de période 7 s et d'amplitude 0,1 m. On y compare les résultats obtenus par la méthode exposée ici, et le résultat d'un calcul dans le domaine temporel réalisé à l'aide d'un code potentiel linéaire [1]. L'accord entre les deux méthodes est excellent.

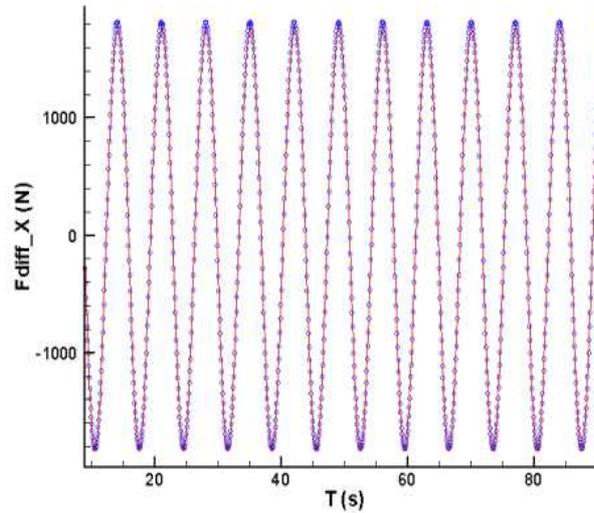


FIG. 8.6 – Comparaison des efforts de diffraction en cavalemt calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et la méthode présentée ici. Le corps est le flotteur SEAREV de type DES1451 et la houle incidente est régulière de période 7 secondes et d'amplitude 0,1 mètre.

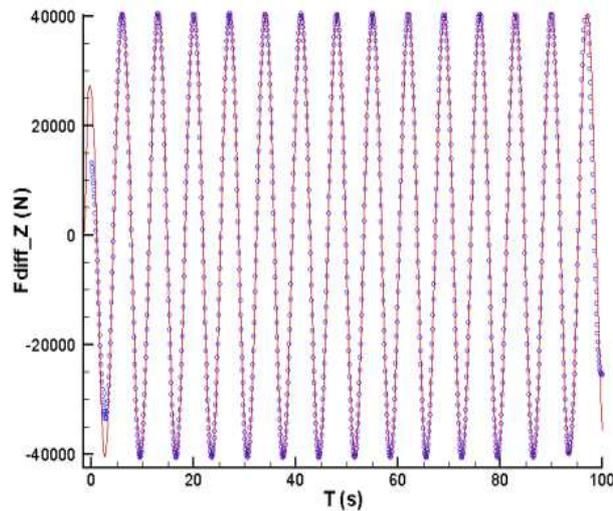


FIG. 8.7 – Comparaison des efforts de diffraction en pilonnement calculés dans le domaine temporel par un code potentiel linéaire et la méthode présentée ici. Le corps est le flotteur SEAREV de type DES1451 et la houle incidente est régulière de période 7 secondes et d’amplitude 0,1 mètre.

## 8.5 Extension au second-ordre.

### 8.5.1 Evaluation des gradients surfaciques.

La géométrie du flotteur SEAREV rend possible l’utilisation des symétries, permettant la division de la taille du problème lors de l’évaluation de la réponse impulsionnelle. Cette propriété est exploitée pour la détermination des gradients de potentiel calculés à la surface de la carène. Ainsi, le calcul pour un corps à un plan de symétrie consiste à la résolution de deux problèmes : l’un symétrique et l’autre antisymétrique. Pour une géométrie à deux plans de symétries, quatre problèmes sont alors à résoudre [46].

Le calcul de gradients surfaciques sur une surface discrétisée donne deux possibilités. La première consiste à évaluer les gradients surfaciques des composantes du 1er ordre aux nœuds du maillage. La seconde possibilité est l’évaluation de ces gradients surfaciques aux centres des mailles (figure (8.8)).

La première méthode permet une meilleure évaluation du gradient lorsque celui est situé sur une arête dans le cas de carènes à bouchains. Cette méthode n’est cependant idéale. Tout d’abord parce que la valeur des potentiels est connue aux centres des mailles. En effet, le potentiel est supposé ici constant sur toute la maille, il faudrait par conséquent interpoler la valeur de ces potentiels pour connaître leurs valeurs aux nœuds du maillage. Une fois le calcul des gradients réalisé, il s’agirait d’interpoler leurs valeurs afin de revenir au centre des mailles. L’enchaînement de ces calculs induit par conséquent beaucoup d’erreurs d’approximations, rendant

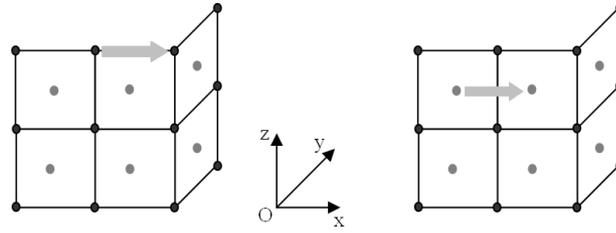


FIG. 8.8 – Possibilités d'évaluation des gradients surfaciques.

cette méthode peu précise. La seconde approche évalue les gradients entre les centres des mailles. Elle est de ce fait peu précise au niveau des arêtes mais le fait d'avoir recours à une seule interpolation suffit pour que l'on décide de choisir cette méthode.

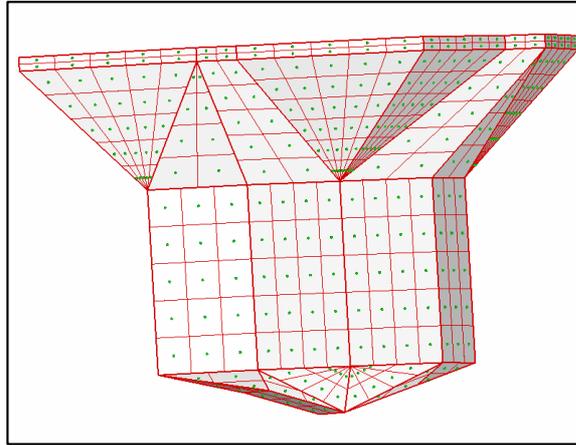


FIG. 8.9 – Exemple de maillage utilisé pour ACHIL3D.

### Procédure de recherche de voisinage.

Selon la position du point considéré sur le maillage, le voisinage n'est pas formé du même nombre d'éléments. Par ailleurs, ce voisinage spécifiquement local peut être décrit comme plus ou moins homogène selon que l'ensemble des facettes adjacentes aux sommets de la facette du point considéré est plus ou moins bien réparties autour de celle-ci. La recherche des plus proches voisins est restreinte au voisinage de premier niveau, autrement dit, aux seuls points appartenant aux mailles voisines. A cela vient s'ajouter une condition de coplanarité, conditionnant les points voisins à appartenir au même plan que le point considéré. Cette condition permet de garder une certaine continuité physique quant aux valeurs des gradients au voisinage d'une arête, comme lors du calcul de la vitesse à l'approche d'un bouchain.

De façon générale quatre types de positions différentes du point sur le maillage sont à envisager. Ces cas sont illustrés sur la figure (8.10) qui est un exemple de maillage utilisé lors des simulations avec ACHIL3D.

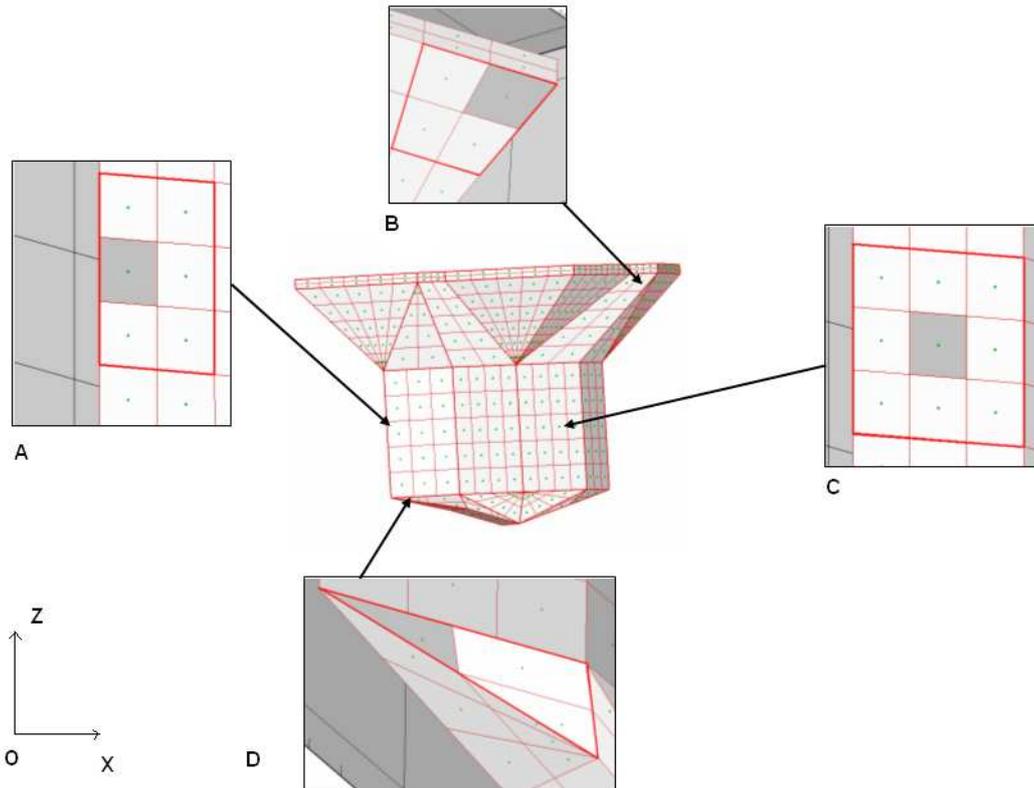


FIG. 8.10 – Les différents types de voisinage rencontrés.

La figure (8.10) met en évidence les quatre localisations correspondant aux descriptions suivantes :

Cas A

Le point est situé sur le bord d'un panneau. Cette configuration présente alors un voisinage de premier niveau non-homogène en  $x$  et homogène en  $z$ .

Cas B

Le point est situé dans un coin d'un panneau

Cas C

Ce cas correspond aux points "standards", c'est à dire aux points dont la position n'est ni sur l'un des bords du domaine, ni sur l'un des bords d'un panneau. Il présente alors un voisinage de premier niveau homogène dans toutes les directions

Cas D

C'est un cas particulier appartenant exclusivement aux panneaux triangulaires dont l'un sommet présente un angle aigu. La discrétisation du panneau au niveau de ce sommet se fait alors seulement avec une maille. Si aucun panneau voisin ne satisfait la condition de coplanarité, ce point n'a alors aucun voisin dans une des directions. Le problème dans ce cas est contourné en considérant le plus proche voisin selon la direction  $z$ .

### Approximation du calcul des gradients.

Le paragraphe précédent a montré quatre cas de voisinage différents. Les cas B et D présentent un voisinage décentré par rapport à la maille considérée. Le cas A est une maille avec un voisinage centré ou décentré suivant la direction où l'on regarde. Le cas C correspond à une maille dont le voisinage est centré suivant toutes les directions.

L'évaluation du gradient doit donc prendre en compte ces hétérogénéités pour ce faire les schémas aux différences finis ont été choisis. Suivant les cas cités précédemment, nous avons considéré les formes suivantes :

- Cas A : schémas décentrés premier ordre et centrés 1er ordre :
- Cas B et D : schémas décentrés premier ordre.
- Cas C : schémas centrés premier ordre.

## 8.6 Vérifications numériques.

### 8.6.1 Cas test d'un flotteur cubique.

Afin d'effectuer des validations numériques du modèle nonlinéaire, nous avons décidé de considérer un corps de géométrie relativement simple à savoir un cube. Les principales dimensions du corps considéré par la suite sont les suivantes :

Position verticale du centre de gravité	-2,5 m
Longueur des côtés	2 m
Masse	0.4990000E+06 Kg
Inertie	0.2776278E+08 Kg.m <sup>2</sup>

Les validations numériques présentées sont 3 simulations numériques différentes permettant de mettre en évidence les différents efforts pris en compte dans le modèle nonlinéaire. On procède ainsi à quatre essais d'extinction de mouvement : deux concernant le mouvement de pilonnement seul (Figure 8.11) et deux sur le mouvement de tangage (Figure 8.12 et Figure 8.13). Ces simulations permettent à la fois de valider les développements réalisés pour le calcul des efforts hydrostatiques et ainsi de valider une nouvelle fois la discretisation de la surface mouillée mais aussi la programmation des équations du mouvement. Une simulation sur houle régulière est également présentée permettant ainsi de valider l'implémentation des efforts de diffraction-radiation et des efforts de Froude-Krylov. Lors des essais d'extinction de pilonnement et de tangage les résultats sont confrontés à un modèle 3D temporel utilisant une approche potentielle [1] tandis que les comparaisons sur houle régulière sont faites avec le code commercial de tenue à la mer AQUAPLUS [21].

**Essais d'extinction de pilonnement et de tangage d'un flotteur cubique.**

Les sous-figures de la figure (8.11) présentent respectivement l'évolution temporelle en pilonnement du cube pour deux amplitudes initiales différentes :  $Z_0 = 0, 1\text{m}$  et  $Z_0 = 1\text{m}$ . On remarque un accord parfait entre les deux méthodes. La fréquence propre du corps est la même pour les deux modèles et le mouvement de pilonnement est amorti de la même manière par les deux méthodes que ce soit pour  $Z_0 = 0, 1\text{m}$  ou  $Z_0 = 1\text{m}$ . Ces résultats permettent ainsi d'être confiant pour la suite quant à la composante verticale des efforts hydrostatiques et au terme d'amortissement de radiation.

Les sous-figures des figures (8.12) et (8.13) présentent respectivement l'évolution temporelle des mouvements de cavement et de tangage du cube ainsi que le mouvement du pendule pour deux amplitudes initiales de tangage différentes :  $\theta_0 = 1^\circ$  et  $\theta_0 = 10^\circ$ . On remarque un accord parfait entre les deux méthodes dans le cas linéaire ou l'amplitude de tangage relativement peu importante est considérée ( $\theta_0 = 1^\circ$ ). On peut voir également que le comportement fortement non linéaire du pendule en début de simulation est reproduit de la même manière par les deux modèles. En ce qui concerne le cas test :  $\theta_0 = 10^\circ$ , on remarque que le modèle non linéaire amortit davantage l'ensemble des mouvements que le code linéaire.

Comme précédemment, ces résultats permettent de valider les efforts hydrostatiques ainsi les efforts de radiation.

**Essais sur houle régulière d'un flotteur de forme cubique.**

Les sous-figures de la figure (8.14) présentent respectivement l'évolution temporelle des efforts en cavement, pilonnement et tangage appliqués sur le cube lorsque celui-ci est soumis à une houle régulière de période 8 s et d'amplitude 0,1 m. Les résultats présentés sur la figure (8.14) sont en accord parfait avec les résultats du programme AQUAPLUS qui résoud dans le domaine fréquentiel le problème de tenue à la mer. La qualité de ces résultats s'explique par le fait que l'amplitude relativement faible de la houle et la période relativement éloignée de la période propre du système satisfont les conditions d'un modèle potentiel linéaire tel qu'AQUAPLUS.

Ces résultats permettent ainsi de valider l'implémentation des efforts de Froude-Krylov et les efforts de diffraction-radiation.

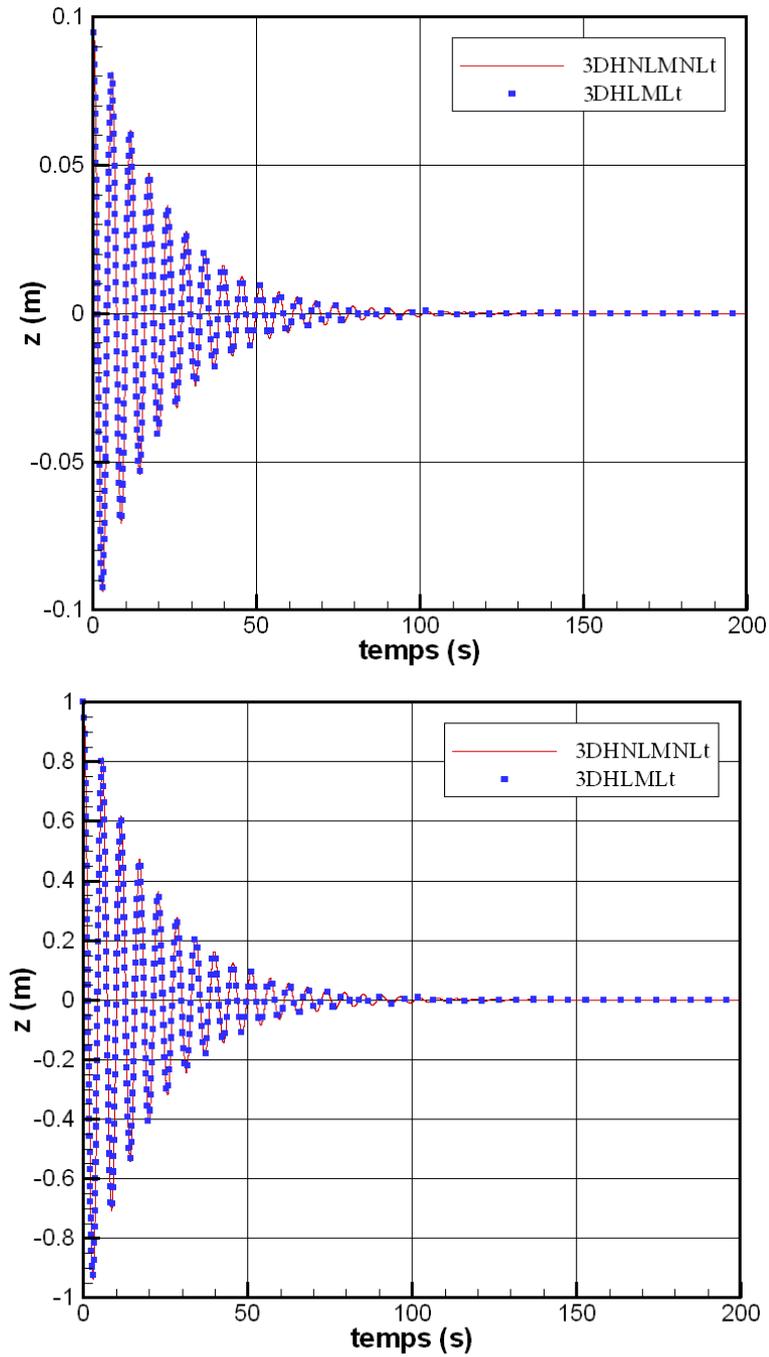


FIG. 8.11 – Essais d’extinction en pilonnement d’un flotteur cubique avec pour amplitude de départ  $Z_0=0,1$  m et  $Z_0=1$  m. Comparaison entre un modèle 3D linéaire et le modèle 3D nonlinéaire.

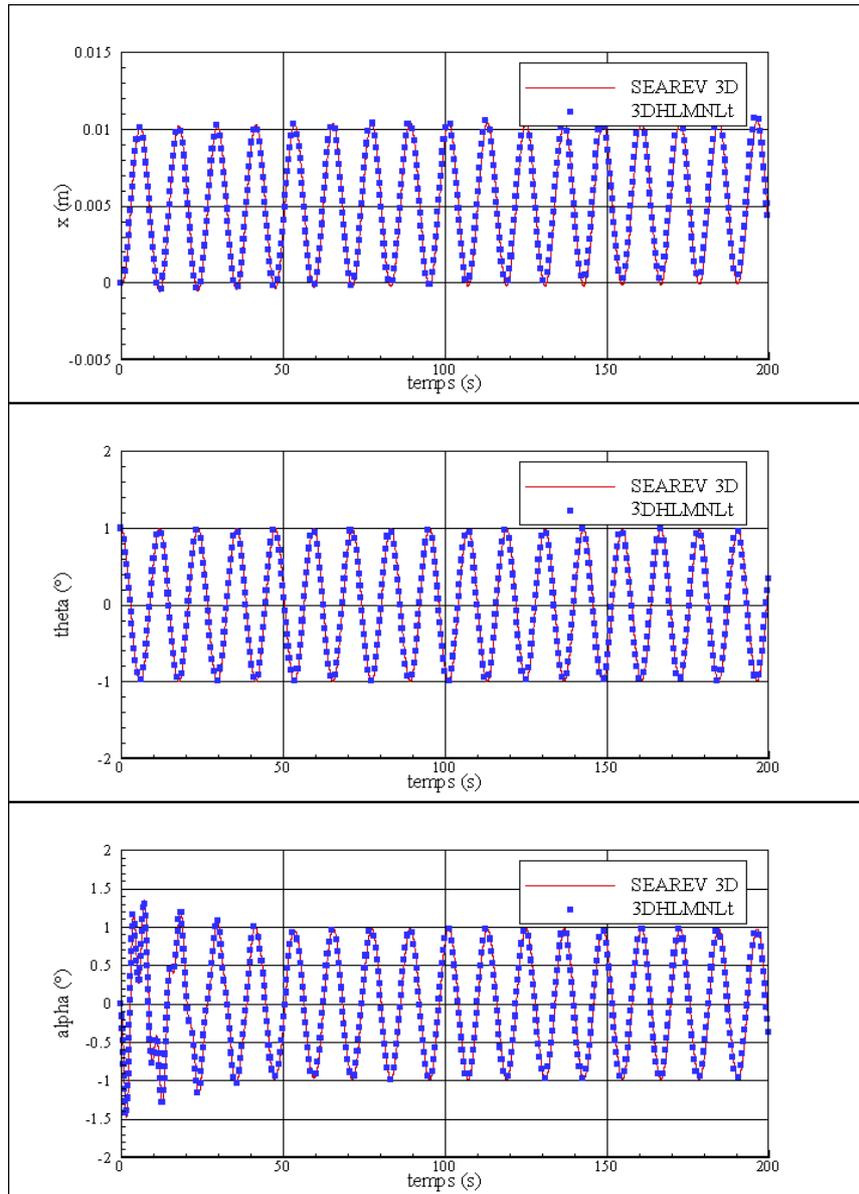


FIG. 8.12 – Essai d’extinction de tangage avec pour amplitude initiale  $\theta_0=1^\circ$ . Comparaison de l’évolution temporelle des mouvements de cavalemt, de tangage et du pendule entre un modèle 3D linéaire et le modèle 3D nonlinéaire.

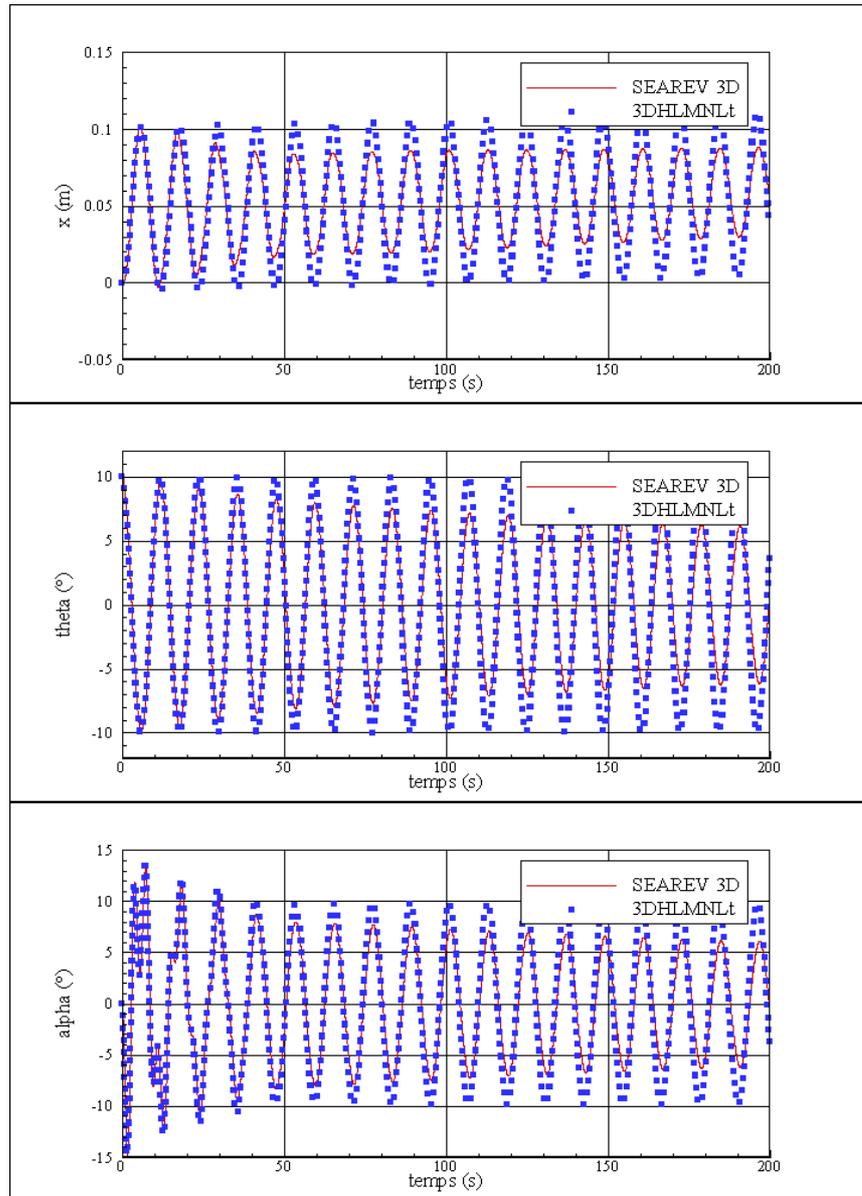


FIG. 8.13 – Essai d’extinction de tangage avec pour amplitude initiale  $\theta_0=10^\circ$ . Comparaison de l’évolution temporelle des mouvements de cavalemt, de tangage et du pendule entre un modèle 3D linéaire et le modèle 3D non linéaire.

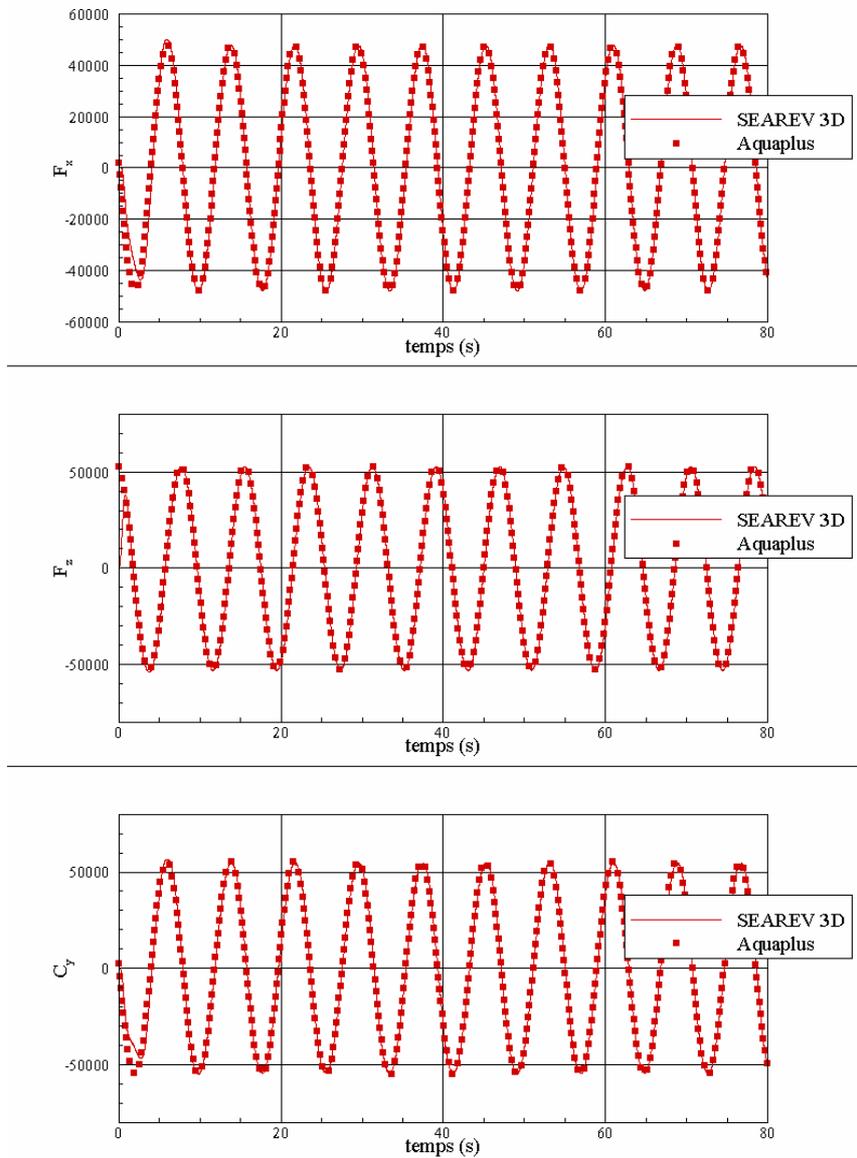


FIG. 8.14 – Cube soumis a une houle régulière d’amplitude 0,1m et de période 8s. Comparaison des efforts en cavalemt, pilonnement et roulis entre le code potentiel linéaire AQUAPLUS et le code potentiel nonlinéaire SEAREV3D.

### 8.6.2 Cas test du cylindre vertical.

Afin de valider les résultats numériques au second-ordre du programme présenté précédemment, nous avons cherché des géométries pour lesquelles il existe une solution analytique du potentiel de vitesse. Nous avons alors choisi le cas test du cylindre vertical posé sur le fond, perçant la surface libre et soumis à une houle régulière. Ce cas test a été choisi car nous pouvons comparer les résultats numériques et analytiques. Molin [7], Eatock Taylor et Hung [53] ont calculé analytiquement les efforts complets du second-ordre pour un cylindre vertical dans le cas d'une houle régulière d'amplitude  $A$ . Le cylindre étant fixe, ce calcul va nous permettre de valider les efforts du second-ordre liés à la composante quadratique de l'équation de Bernoulli du champ incident et du champ de diffraction (équation (7.20)), ainsi que ceux apportés par les efforts de Froude-Krylov liés à la prise en compte de la surface mouillée instantanée exacte (équation (7.10)).

Les comparaisons avec les calculs numériques se font pour un cylindre de rayon  $R_0$  égal à 1 mètre et d'une hauteur de 5 mètres. La figure (8.15) montre l'effort de dérive adimensionnel  $Fd/(\rho g R_0 A^2)$  en fonction du nombre d'onde adimensionnel  $kR_0$ . On voit que cet effort est relativement bien calculé par la méthode pour  $kR_0$  proche de 1. En revanche, quand la longueur d'onde devient petite devant le rayon, la réflexion de la houle par le cylindre est sous-estimée. Aux grandes longueurs d'onde, le modèle retrouve bien que le cylindre est soumis à une force de dérive quasiment nulle. Par contre pour des valeurs de  $kR_0$  comprises entre 0,2 et 0,8, l'effort de dérive est encore sous-estimé. De manière générale, les comportements asymptotiques pour  $kR_0 \rightarrow 0$  et  $kR_0 \rightarrow \infty$  ont globalement la même allure mais les valeurs des efforts de dérive sont inférieures aux résultats prévus par la solution analytique.

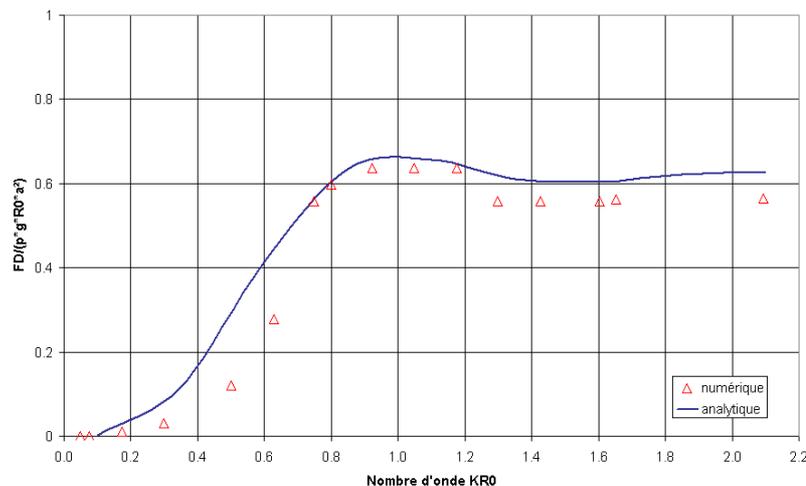


FIG. 8.15 – Efforts de dérive suivant l'axe de propagation de la houle dans le cas d'un cylindre vertical  $H/R_0 = 10$ .

## 8.7 Intégration en temps : choix de la méthode et influence du pas de temps.

### 8.7.1 Choix de la méthode.

Les équations du mouvement se présentent sous la forme d'équations différentielles ordinaires. L'intégration temporelle de ces équations est effectuée à l'aide d'une méthode classique de Runge-Kutta de quatrième ordre.

Pour un système d'équation différentielle  $y'(t) = f(y(t), t)$  et un pas d'intégration  $h$ , le schéma d'intégration est alors défini par les formules :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, t_n) \\ k_2 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 &= f\left(y_n + hk_3, t_{n+1}\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Dans notre modélisation le pas d'intégration  $h$  est équivalent au pas de temps  $\Delta t$ .

Notre choix s'est arrêté sur cette méthode car l'ordre 4 est une charnière dans les méthodes Runge Kutta explicites. En effet, au delà, le nombre d'étages devient plus grand que l'ordre (voir tableau ci-dessous).

ordre	nombre d'étages
$p \geq 5$	$p + 1$
$p = 7$	$p + 2$
$p \geq 8$	$p + 3$

Ce nombre d'étages conditionnant le coût en calcul de la méthode (une méthode à  $s$  étages implique  $s$  évaluations de la fonction  $f$ ), l'ordre 4 est la plus intéressante en terme de rapport précision/coût de calcul.

### 8.7.2 Influence du pas de temps.

Au cours de l'avance en temps, il convient de choisir un pas de temps permettant une solution stable aux temps longs tout en minimisant le temps de calcul. Ce dernier point est illustré par le tableau suivant qui rend compte des temps de calcul mis par le code pour différents pas de temps et pour un même cas test.

pas de temps (s)	0,01	0,05	0,1
$T_{CPU}(s)$	2678,67	503,55	250,41

On s'aperçoit que le temps de calcul évolue linéairement par rapport aux pas de temps. En effet, le rapport des pas de temps entre deux simulations est conservé

lorsque l'on regarde les temps CPU correspondant. Ainsi, pour  $dt = 0,01s$  le temps de simulation est de  $2678,67s$ , pour  $dt = 0,1s$  le calcul dure  $250,41s$  : le facteur 10 existant entre les pas de temps se retrouve pour les temps CPU où l'on obtient un rapport de 10,7.

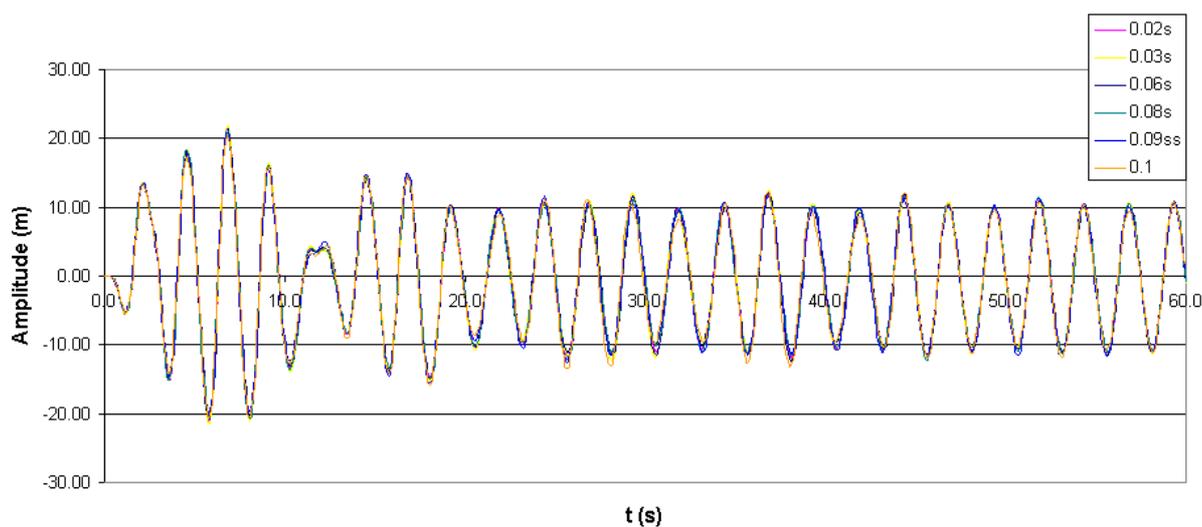


FIG. 8.16 – Comparaison de résultats temporels en tangage pour différents pas de temps.

Le fait que la solution ne diverge pas au bout de plusieurs pas de temps a trait à la stabilité intrinsèque de l'algorithme d'avance en temps. L'étude de la convergence du pas de temps s'est faite sur le cas de la maquette SEAREV soumise à un cas de houle régulière classique ( $H = 0,16m$  et  $T = 2,5s$ ). Six pas de temps différents ont été choisis allant de  $0,02s$  pour le plus petit à  $0,1s$  pour le plus grossier.

Il apparaît en observant la figure (8.16), que la dynamique de la solution est relativement bien approchée par l'ensemble des pas de temps testés, même pour le plus grossier d'entre eux, à savoir  $dt = 0,1s$ . Le zoom sur l'intervalle de  $[10,5s...14s]$  présenté sur la figure (??) nous montre que lors de comportements non-linéaires les deux pas de temps les plus grossiers ( $0,1s$  et  $0,09s$ ) donnent des comportements légèrement différents. Le zoom sur l'intervalle de  $[50s...60s]$  présenté sur la figure (8.18) nous montre l'écart existant lorsque le signal atteint un régime quasiment établi. On remarque alors une faible différence entre les signaux. Cette observation nous montre que de faibles écarts en début de calcul peuvent être corrigés dans le temps. Cette remarque est importante quant au fait que lors de simulations impliquant de grandes amplitudes, comme par exemple au voisinage de la fréquence de résonance, si le pas de temps choisi est trop grossier la qualité des résultats en régime établi peut être tout de même de bonne qualité.

Le pas de temps choisi pour la majorité des calculs présentés dans ce manuscrit est généralement égal à  $dt = 0.05s$  pour le cas de la maquette SEAREV. Cette valeur correspond en effet à un bon compromis entre précision et temps de calcul ; pour des simulations sur houles de grande amplitude ou de fréquence proche de la fréquence de résonance du système le choix du pas de temps oscille entre  $0,05s$  et  $0,01s$  suivant les cas.

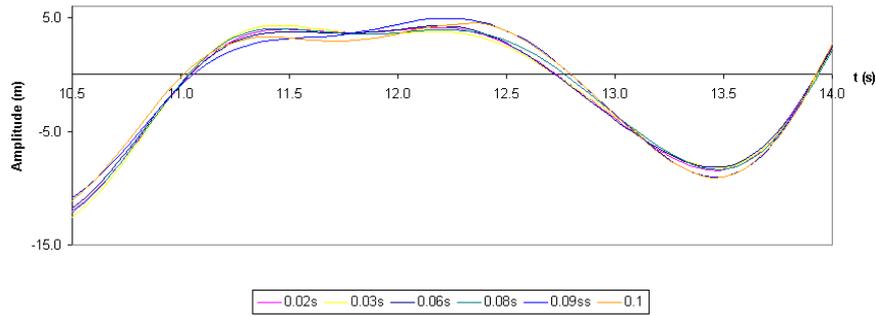


FIG. 8.17 – Zoom [10,5..14]

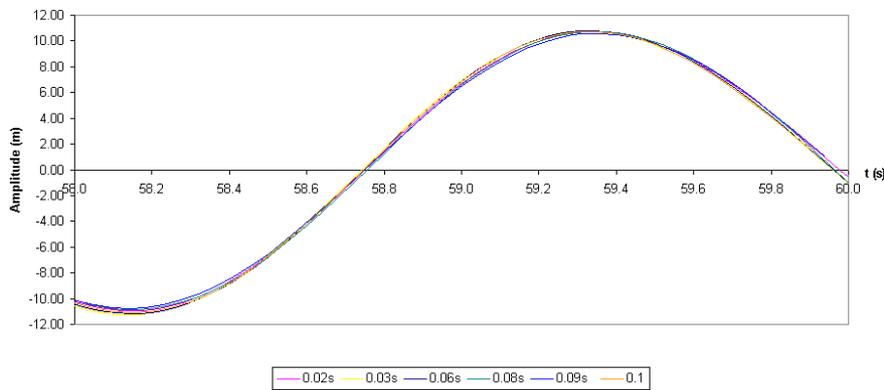


FIG. 8.18 – Zoom sur l'intervalle de temps [50..60]

## **Chapitre 9**

### **Validations expérimentales.**

### 9.0.3 Description du dispositif expérimental.

L'ensemble des validations a été effectué sur la maquette à l'échelle 1/12 du flotteur SEAREV (figure (9.1)), ses caractéristiques géométriques et mécaniques sont précisées dans le tableau ci-dessous :

<b>Dimensions principales</b>	
Longueur	= 2,216 m
Largeur	= 1,104 m
Tirant d'eau	= 1,272 m
Déplacement	= 526,6 kg
<b>Caractéristiques mécaniques</b>	
masse du flotteur ( $m_b$ )	= 306,9 kg
inertie du flotteur ( $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ )	= (40,3 ; 112,3 ; 37,7) kg.m <sup>2</sup>
position du centre de gravité ( $z_G$ )	= -0,025 m
masse du pendule ( $m_p$ )	= 219,64 kg
Inertie du pendule ( $I_y$ )	= 17,272 kg.m <sup>2</sup>
longueur pendulaire ( $l$ )	= 0,0825 m
position d'accroche du pendule ( $d$ )	= -0,7795 m

TAB. 9.1 – Dimensions principales et Caractéristiques mécaniques de la maquette

Les résultats expérimentaux utilisés dans ce chapitre sont tous issus d'essais réalisés au bassin de houle de l'Ecole Centrale de Nantes par Mathieu Durand , ingénieur CNRS au sein du projet SEAREV. Le schéma de la figure (9.2) illustre le dispositif expérimental utilisé. Les dimensions du bassin de houle sont 50m×30m×5m, le batteur situé sur la gauche permet de générer la houle. La maquette est positionnée au centre du bassin. L'amarrage est composé d'une bouée, accrochée dans le fond par deux câbles espacés de 10 mètres. Trois sondes à houles fixes sont positionnées : deux en amont, et une au niveau de la position de la maquette.

Un capteur de position angulaire est installé permettant de mesurer avec précision l'angle de rotation du disque. Un système de suivi de trajectoire par infrarouge est également utilisé donnant la position spatiale de la maquette par rapport au repère de référence lié au bassin. Le lecteur pourra se référer à l'article [2] pour plus de détails.

## 9.1 Essais d'extinction de tangage.

Dans un premier temps, nous avons procédé à des essais d'extinction en tangage. Cela nous permet ainsi de faire une première validation du modèle hydrodynamique et plus particulièrement des efforts hydrostatiques et des efforts de radiation. Les comparaisons avec les résultats expérimentaux nous donnent un premier aperçu des efforts visqueux sur l'effort total d'amortissement.



FIG. 9.1 – Photo de la maquette SEAREV à l'échelle 1/12

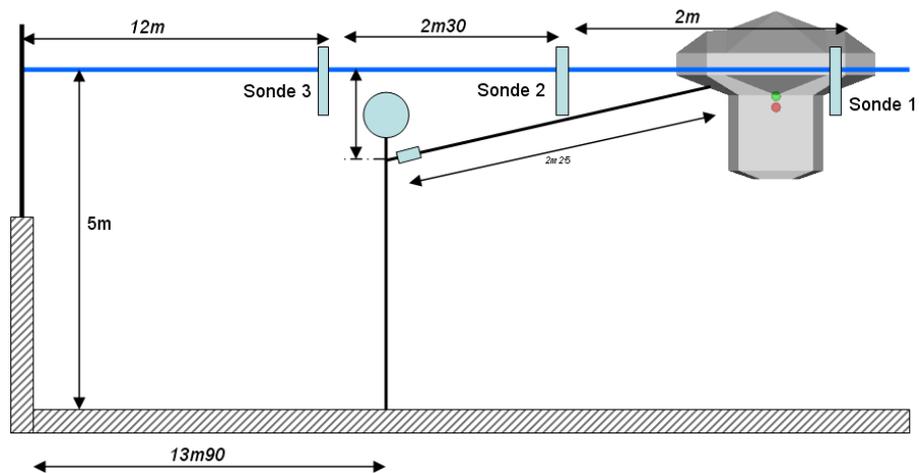


FIG. 9.2 – Schéma du dispositif expérimental.

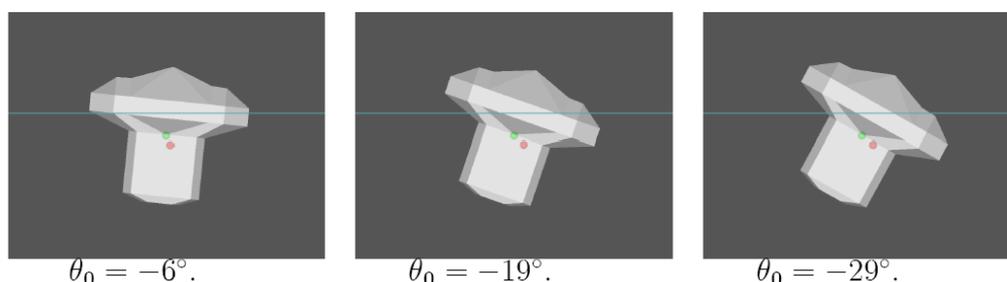


FIG. 9.3 – Illustration des trois angles de tangage initiaux des différents essais d’extinction.

Le principe des essais d’extinction est d’écarter le modèle de sa position d’équilibre et de le relâcher. Les essais réalisés ici prennent en compte trois angles de tangage initiaux différents (figure(9.3)). Le premier cas test correspond à une inclinaison initiale de 6 degrés afin de se rapprocher de l’hypothèse de mouvements de faible amplitude de la théorie linéarisée, le pendule est quant à lui libre. Les deux cas test suivants présentent respectivement des angles de tangage de 19 degrés et 29 degrés avec le pendule bloqué. Ces deux derniers essais vont nous permettre de voir comment évolue la contribution des efforts visqueux lorsque le modèle est animé de grands mouvements, mais aussi de voir l’influence d’autres phénomènes tel que le *slamming* qui peuvent apparaître dans ces cas là.

La figure (9.4) présente les relevés temporels du déroulement des trois essais d’extinction de tangage. Chacune des sous-figures de la colonne de gauche compare pour chacun des ces trois essais les résultats expérimentaux à ceux obtenus par le modèle numérique 3D-non-linéaire présenté précédemment. Les trois sous-figures de la colonne de droite montrent la décroissance de l’angle de tangage. De façon classique, cette décroissance est visualisée en traçant l’amplitude du tangage pour la période  $i$ , en fonction de l’amplitude pour la période  $i + 1$ .

La dynamique du système est relativement bien respectée. Le mouvement sinusoïdal amorti est globalement bien représenté même si le fait de ne pas prendre en compte les effets visqueux implique aux amplitudes de tangage calculées d’être supérieures à celles issues des expériences. Les sous-figures de la colonne de droite montrent qu’il y a un bon accord entre la décroissance de tangage mesurée lors des essais et les calculs réalisés, dans l’ensemble des cas présentés. Le tableau ci-dessous permet également de vérifier que les calculs donnent avec une bonne précision les pseudo-périodes déduites des relevés expérimentaux.

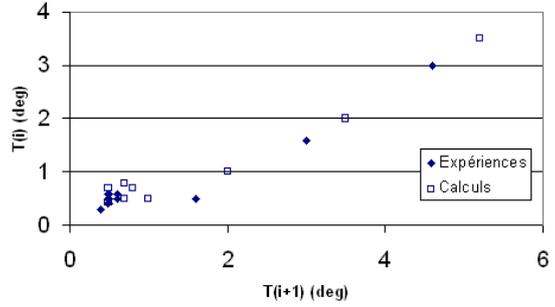
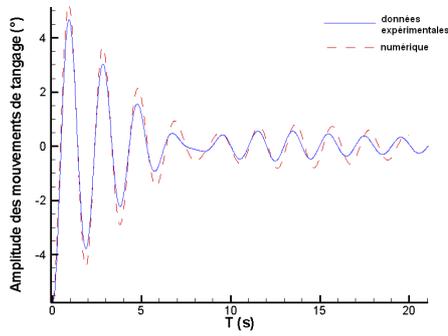
	$\theta_0 = -6^\circ$	$\theta_0 = -19^\circ$	$\theta_0 = -29^\circ$
expérimental	2,055s	1,902s	1,995s
numérique	2,024s	1,953s	2,024s

TAB. 9.2 – Comparaison numérique/expérimental des valeurs des pseudo-périodes lors des 3 essais d’extinction de tangage.

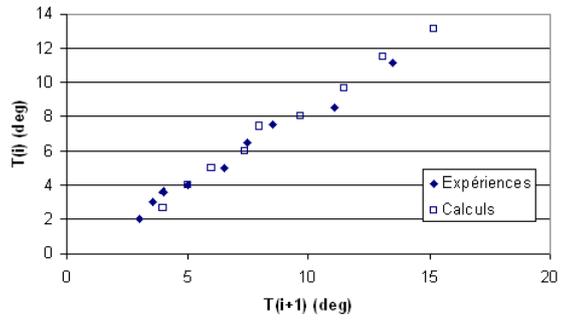
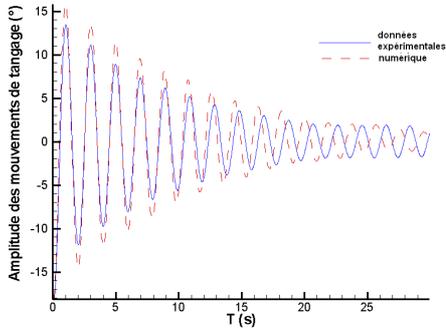
La raideur étant maintenant fonction du tangage, on remarque sur l'ensemble des essais un léger déphasage au cours du temps. Ce déphasage est d'autant plus grand et d'autant plus tôt dans le temps que l'amplitude de tangage initiale est grande. Ce phénomène peut s'expliquer par une différence de raideur de la maquette et celle issue de la modélisation numérique. En effet, l'absence de viscosité dans le modèle numérique implique une surévaluation des amplitudes numériques de tangage donnant une dynamique légèrement différente par rapport aux expérimentations. L'évolution des mouvements de tangage est alors décalée dans le temps provoquant un écart sensible entre les efforts hydrostatiques. Ces efforts ont une influence directe sur la raideur du système qui est elle-même intrinsèquement liée à la période propre du système. Il apparaît par conséquent un déphasage entre les signaux expérimentaux et les résultats numériques.

L'allure du signal de tangage du premier essai n'est pas exactement une sinusoïde amortie. On peut remarquer qu'au lieu de s'amortir l'amplitude de tangage augmente autour de l'instant  $t \simeq 8$  secondes. Ce phénomène est essentiellement dû au pendule qui redonne de l'énergie au flotteur lorsque celui-ci atteint sa position de stabilité. En effet, le pendule est animé dès le début du lâcher de mouvements qui sont d'une amplitude beaucoup plus grande que ceux du flotteur. Ce dernier atteint par conséquent en premier sa position de stabilité. Son énergie mécanique tendant vers zéro, le pendule joue alors le rôle d'excitateur.

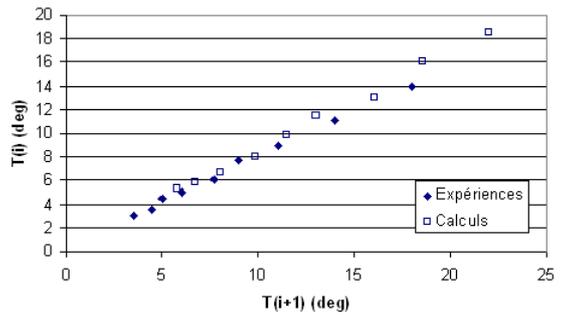
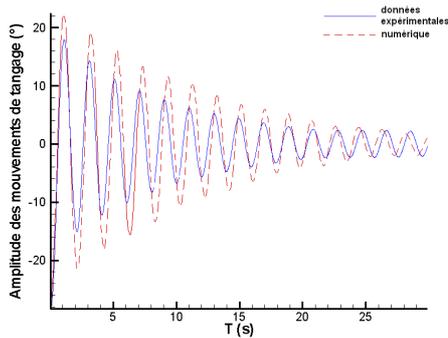
Le dernier essai correspondant à  $\theta_0 = -29^\circ$  est celui où les résultats numériques sont les plus éloignés des expériences. Le fait que cela soit l'essai présentant la plus grande amplitude de tangage initial est une des causes de ce résultat. Il faut également ajouter les effets dus au phénomène de *slamming* (photo (9.8)) qui intervient ici. Il apparaît dans l'essai précédent mais d'une manière moindre.



$\theta_0 = -6$  degrés.  
pendule libre.



$\theta_0 = -19$  degrés.  
pendule fixe.



$\theta_0 = -29$  degrés.  
pendule fixe.

FIG. 9.4 – Déroulement de 3 essais d'extinction de tangage. Comparaison numérique/expériences.

L'absence de viscosité influe sur les amplitudes des mouvements qui sont surestimés et qui ont pour conséquence une différence sur la valeur des périodes propres de tangage comme le montre le déphasage entre les signaux expérimentaux et numériques. On peut s'attendre donc à remarquer un léger décalage sur les réponses en tangage au voisinage de la fréquence de résonance du système où les amplitudes de tangage sont les plus grandes.

## 9.2 Simulation sur houle régulière.

### 9.2.1 Modélisation du champ de vagues incident.

Deux méthodes spectrales ont été implémentées pour représenter le champ incident. La première est la méthode de Rienecker-Fenton [40] déjà présentée dans la première partie de ce manuscrit concernant le modèle 2D non-linéaire. Cette approche est notamment très utile car elle permet de représenter des houles de forte cambrure avec une très grande précision. Elle définit également analytiquement les différentes composantes du champ incident dans tout le domaine fluide, mais est cependant limitée à la représentation de houle régulière. Le second modèle utilisé ici fait partie de la famille des schémas spectraux d'ordre supérieur (*HOS*) proposés initialement par West et al. [8] et Dommermuth et Yue [13]. Cette méthode est basée sur la théorie des écoulements potentiels et résout les conditions de surface libre de manière complètement non-linéaire où le point de départ de la méthode est de considérer une variable connue le long de la surface libre (le potentiel  $\phi$  par exemple) sous forme de développement spectral tel que :

$$\phi(x, y, \eta, t) = \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}(t) \psi_{n_x n_y}^s(x, y) \quad (9.1)$$

$$\text{avec } \psi_{n_x n_y}^s(x, y) = \cos(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \cosh[k_{n_x n_y} \eta(x, y) + 1] \quad (9.2)$$

Certaines améliorations ont été apportées par rapport au modèle initial, comme par exemple la formulation en milieu confiné et la génération de vagues (Bonnefoy et al. [18]). Ces développements ont ainsi donné lieu à un programme sous deux versions différentes. Une première est dédiée à la simulation en milieu confiné permettant notamment de reproduire des états de mer complexes dans les trois dimensions et reproductibles expérimentalement au bassin de houle de l'École Centrale de Nantes. La seconde version concerne la simulation en milieu ouvert. Cette version autorise entre autres des simulations de longue durée d'états de mer spectraux ainsi que des cas de mers extrêmes telles que des vagues scélérates (*freak waves*).

Les informations que l'on désire avoir à travers ces méthodes sont les vitesses et la pression sur l'ensemble des points discrétisant la surface mouillée. La résolution de ce problème ne se fait pas de la même manière selon que l'on utilise l'une ou l'autre de ces méthodes.

La méthode de Rienecker-Fenton définit analytiquement les paramètres de vitesse et de pression du champ incident. Leur connaissance sur la totalité de la

surface mouillée instantanée se fait alors de manière directe en fonction des coordonnées spatiales des noeuds du maillage.

Pour la méthode *HOS*, la procédure de construction du champ incident à l'intérieur du domaine fluide se fait à partir des modes propres en vitesse et en pression. Le principe est de lire en début de programme l'ensemble de ces modes propres. Une routine permet ensuite à chaque pas de temps de reconstruire par FFT le champ selon  $z$  au niveau des points de collocation. Les propriétés de la transformation de Fourier impliquant une discrétisation régulière de l'espace, un vecteur  $\vec{z}$  constant partant du fond du bassin est alors défini. Une discrétisation du domaine fluide est obtenue en  $x$  selon la position des points de collocation et en  $z$  selon un pas fixe en espace dépendant de la profondeur du bassin (figure (9.5)).

Une fois cette étape réalisée, il reste à évaluer les vitesses et la pression à chaque noeud du maillage de la surface mouillée instantanée. Ce calcul est réalisé à l'aide d'une interpolation spatiale entre les points discrétisant le domaine fluide en utilisant la méthode des splines cubiques.

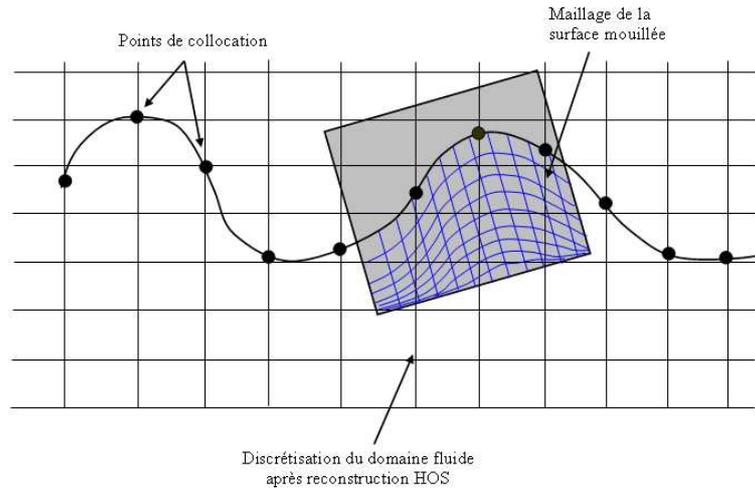


FIG. 9.5 – Situation du problème lors de l'interpolation spatiale des vitesses et pression sur la surface mouillée.

Le pas de temps du programme *HOS* calculant les modes propres n'étant pas forcément le même que celui du programme de tenue à la mer, une interpolation linéaire en temps doit-être également réalisée. Ce calcul implique à chaque pas de temps deux reconstructions spatiales : une au temps  $T_i$  et une autre au temps  $T_{i+1}$  pour autant que l'instant  $t$  auquel se fait le calcul hydrodynamique soit tel que :  $T_i < t < T_{i+1}$ .

Cette procédure est beaucoup plus lourde et coûteuse en temps que la méthode de Rieneker-Fenton. En effet, le fait que la méthode *HOS* permette de représenter des états de mer non-linéaires complexes implique que la répartition des points de collocation soit faite sur le domaine entier, impliquant par conséquent un nombre de modes important. La méthode de Rieneker-Fenton, elle représente uniquement

des houles régulières. La périodicité du phénomène permet de résoudre le problème dans un repère en translation uniforme avec une crête et ainsi de placer les points de collocation uniquement sur une longueur d'onde, réduisant du même coup le nombre de modes et le temps de calcul.

### 9.2.2 Résultats numériques.

Tous les résultats présentés dans cette section sont issus de simulations réalisées avec le code décrit dans la partie 3 de ce manuscrit. Pour chaque calcul, le flotteur est libre et se déplace selon ses 6 degrés de liberté, seul un effort d'amarrage est appliqué afin de se rapprocher des conditions expérimentales. Les dimensions du bassin et de la maquette sont quant à elles identiques aux dimensions réelles.

#### Réponse en tangage.

Les réponses en tangage présentées sur les figures (9.6) et (9.7) sont tracées à l'échelle de la maquette sur l'intervalle de fréquence  $[0,4 ; 0,65]$  Hz. Il est présenté sur chacune des figures une comparaison des amplitudes des deux premières harmoniques du signal de tangage des relevés expérimentaux, des résultats d'un code potentiel linéaire et des résultats du code potentiel non-linéaire présenté dans ce manuscrit.

La figure (9.6) présente la réponse en tangage de la maquette. Le flotteur est soumis à une houle régulière d'amplitude 0,083 m et le pendule est soumis à un coefficient de  $PTO$   $B_{pto} = 6,97$  N.m.s. De manière générale, les résultats du modèle non-linéaire sont beaucoup plus proches des résultats expérimentaux que les résultats issus du modèle linéaire. Les amplitudes de tangage sont nettement plus proches de la réalité, notamment au voisinage de la fréquence de résonance du flotteur. Cet écart entre les deux modèles peut s'expliquer par le rôle prépondérant que joue la composante statique des efforts de Froude-Krylov en plus de la mécanique non-linéaire.

La figure (9.13) montre en effet, que la composante hydrostatique est, pour cette houle, nettement supérieure aux autres efforts hydrodynamiques. L'effort de diffraction par exemple n'intervient pratiquement pas alors que la radiation est du même ordre de grandeur que la composante dynamique des efforts de Froude-Krylov. Eloigné de la fréquence de résonance, le modèle mécanique semble également jouer un rôle important, plus particulièrement en ce qui concerne l'influence de la roue pendulaire sur le comportement du flotteur. En effet, on s'aperçoit qu'à la fréquence de résonance de la roue pendulaire ( $f \simeq 0,47$  Hz), le modèle linéaire présente un pic en tangage qui n'apparaît ni lors des expériences ni avec le modèle non-linéaire. On note toutefois que les amplitudes obtenues dans le cas non-linéaire sont en général plus grandes que celles mesurées en bassin. Ce constat est explicable du fait que l'on ne modélise pas les efforts visqueux et les effets de *slamming* (photo (9.8)) qui interviennent dans la réalité. On remarque également un comportement asymptotique des trois réponses au niveau des basses fréquences

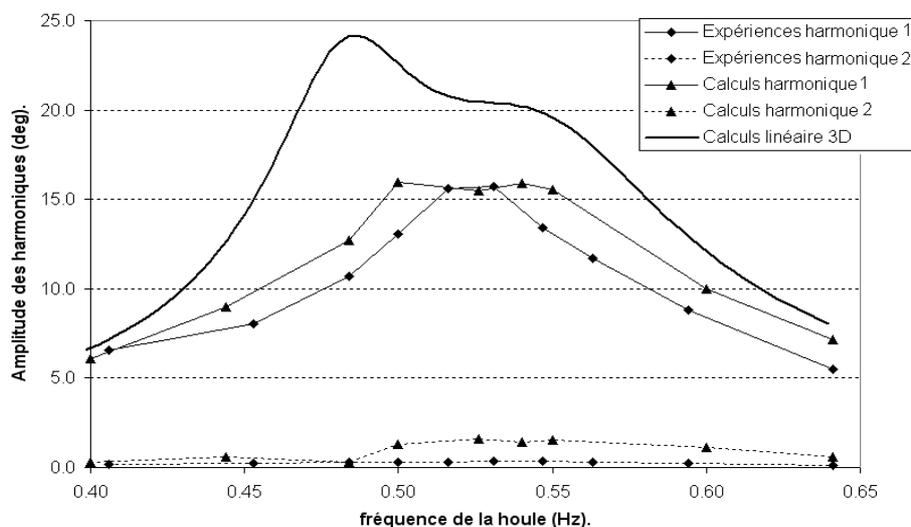


FIG. 9.6 – Réponse en tangage des amplitudes des deux premières harmoniques dans le cas d’une houle d’amplitude 0,083 m (échelle maquette) et avec  $B_{pto}=6,37$  N.m.s.

qui est beaucoup plus prononcé que pour les hautes fréquences. Cela est dû au fait que l’on se rapproche, pour ces fréquences, des hypothèses de la théorie linéaire où les amplitudes de mouvement sont relativement faibles (5 à 8 degrés). Le fait que l’on converge moins bien asymptotiquement pour les plus hautes fréquences peut s’expliquer au regard des mouvements en lacet. Les résultats expérimentaux montrent en effet, une oscillation d’une amplitude de 5 degrés des mouvements de lacet alors que pour le modèle non-linéaire il est négligeable (0,1 degré). Ces mouvements de lacet font perdre de l’énergie au système et peuvent être une des raisons de l’écart sur les amplitudes de tangage.

La figure (9.7) présente la réponse en tangage de la maquette pour le paramètre  $B_{pto}$  égale à 1,39 N.m.s et une amplitude du champ incident de 0,042 m. De manière encore plus franche que lors du cas précédent, nous constatons que le comportement du modèle non-linéaire est beaucoup plus proche des expériences que le modèle linéaire. On remarque notamment que l’influence de la roue pendulaire est très importante dans le cas du modèle linéaire, plus particulièrement proche de sa fréquence de résonance ( $f \simeq 0,47$  Hz), où l’on voit un pic d’amplitude de tangage très important. De la même manière que précédemment, cette différence de comportement peut s’expliquer par la différence des modèles mécaniques où les équations sont linéarisées dans un cas et pas dans l’autre. Au niveau de la fréquence de résonance en tangage, l’écart entre les expériences et le modèle numérique non-linéaire est plus grand que pour le cas  $B_{pto} = 6,97$  N.m.s. Les efforts de viscosité et le phénomène de *slamming* peuvent expliquer en partie l’erreur qui apparaît sur la première harmonique. Les résultats du modèle non-linéaire ont également un bon comportement asymptotique par rapport aux résultats expérimentaux pour les hautes et basses fréquences.

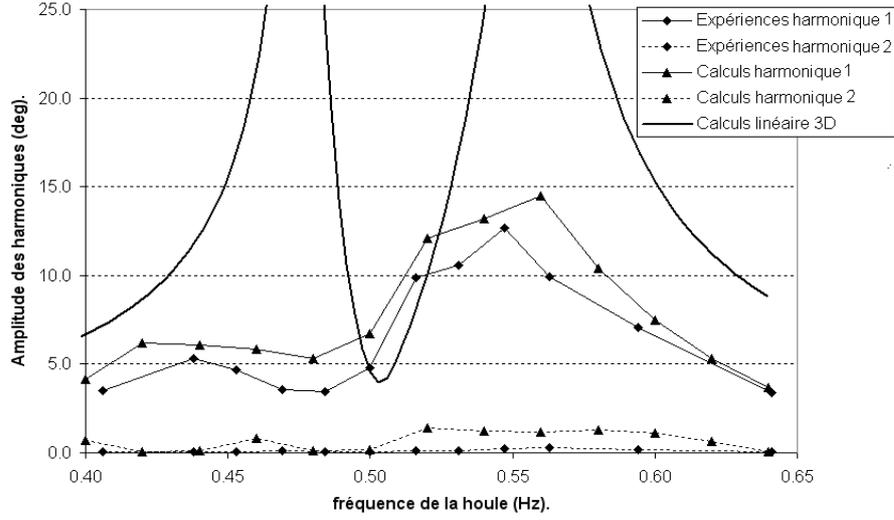


FIG. 9.7 – Réponse en tangage des deux premières harmoniques dans le cas d’une houle d’amplitude 0,042 m et avec  $B_{pto}=1,39$  N.m.s.

Sur les deux figures, les amplitudes des secondes harmoniques sont systématiquement surestimées. Cette erreur est plus importante que celle qui apparaît sur la première harmonique. En plus des mêmes remarques faites sur les résultats des premières harmoniques, ce résultat peut s’expliquer par le fait que pour la seconde harmonique l’erreur est d’ordre deux par rapport à la première harmonique. En effet, si l’on introduit une erreur  $\epsilon$  telle que sur la première harmonique on ait :

$$a_\epsilon = a(1 + \epsilon) \quad (9.3)$$

Le second ordre nous donne alors :

$$a_\epsilon^2 = a^2(1 + \epsilon)^2 \simeq a^2(1 + 2\epsilon) \quad (9.4)$$

l’erreur relative sur l’amplitude de la seconde harmonique est alors :

$$\frac{a_\epsilon^2 - a^2}{a^2} \simeq 2\epsilon \quad (9.5)$$

Il existe donc au moins un facteur deux entre l’erreur de la première harmonique et celle du second harmonique.

L’ensemble de ces résultats semblent justifier l’hypothèse formulée au début de ce manuscrit à savoir que les efforts hydrostatiques prennent part de manière prépondérante à l’effort total exercé sur ce flotteur. Les figures (9.13) et (9.14) pré-



FIG. 9.8 – Cliché d'un impact de slamming observé lors des essais expérimentaux.

a (m)	$f_0$ (N)	$f_1$ (N)	$f_2$ (N)
0,042	-10,43	848,22	169,32
0,083	-5,66	462,35	103,16

TAB. 9.3 – Amplitude des différentes harmoniques de Fourier sur le moment de tangage pour les cas  $A=0,083\text{m}$ ,  $f=0,48\text{Hz}$ ,  $B_{pto}=6,97\text{ N.m.s}$  et  $A=0,042\text{m}$ ,  $f=0,42\text{Hz}$ ,  $B_{pto}=1,39\text{ N.m.s}$ .

sentent l'évolution temporelle du moment de tangage des différents efforts hydrodynamiques pour deux cas de calculs tirés des réponses en amplitude précédentes (figure (9.6) et (9.7)) où les amplitudes de tangage sont les plus importantes. La figure (9.13) correspond au cas d'une houle régulière d'amplitude  $0,083\text{ m}$  et de fréquence  $0,52\text{ Hz}$  et un coefficient d'amortissement  $B_{pto} = 6,97\text{ N.m.s}$  tandis que la figure (9.14) présente l'évolution de ces mêmes efforts mais dans le cas d'une houle régulière d'amplitude  $0,042\text{ m}$  et de fréquence  $0,56\text{ Hz}$  et un coefficient d'amortissement  $B_{pto} = 1,39\text{ N.m.s}$ . Ces figures montrent un écart relativement important entre l'amplitude de la composante statique des efforts de Froude-Krylov et les amplitudes des efforts de diffraction, radiation et de la composante dynamique de ces mêmes efforts de Froude-Krylov (équation (7.10)). Les efforts de diffraction sont en comparaison des autres efforts totalement négligeables dans les deux cas. L'effort de radiation est quant à lui du même ordre de grandeur que la composante dynamique des efforts de Froude-Krylov pour  $B_{pto} = 6,97\text{ N.m.s}$  alors qu'il intervient de manière beaucoup moins importante dans le cas  $B_{pto} = 1,39\text{ N.m.s}$ .

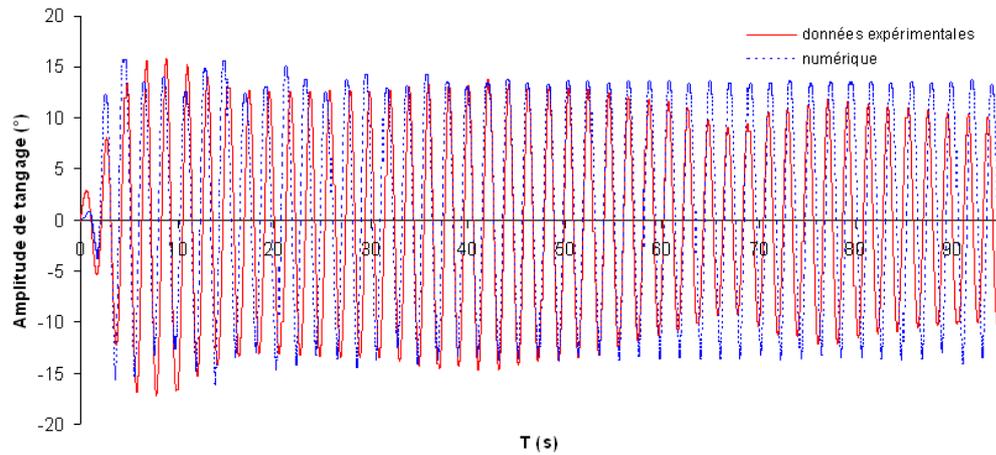


FIG. 9.9 – Comparaison numérique/expérimental du mouvement de tangage dans le cas d’une mer régulière d’amplitude 0,083 m et de fréquence 0,48Hz et pour un  $B_{PTO} = 6,97$  N.m.s.

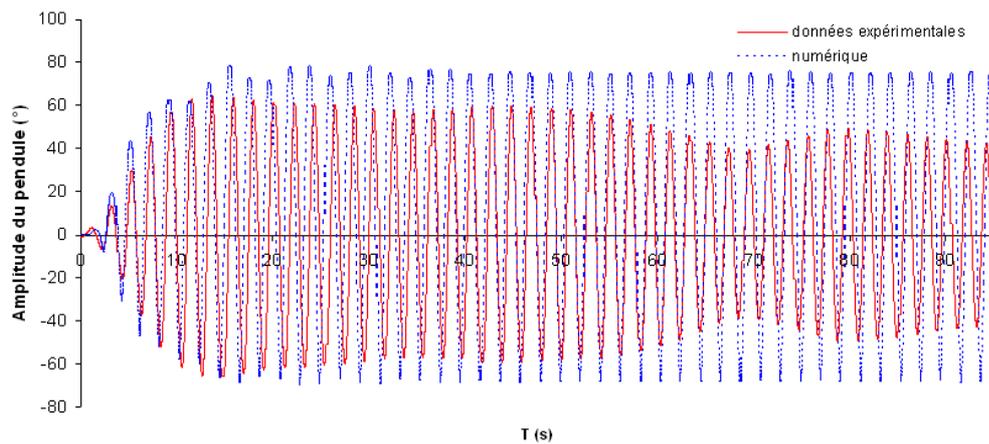


FIG. 9.10 – Comparaison numérique/expérimental du mouvement du pendule dans le cas d’une mer régulière d’amplitude 0,083 m et de fréquence 0,48Hz et pour un  $B_{PTO} = 6,97$  N.m.s.

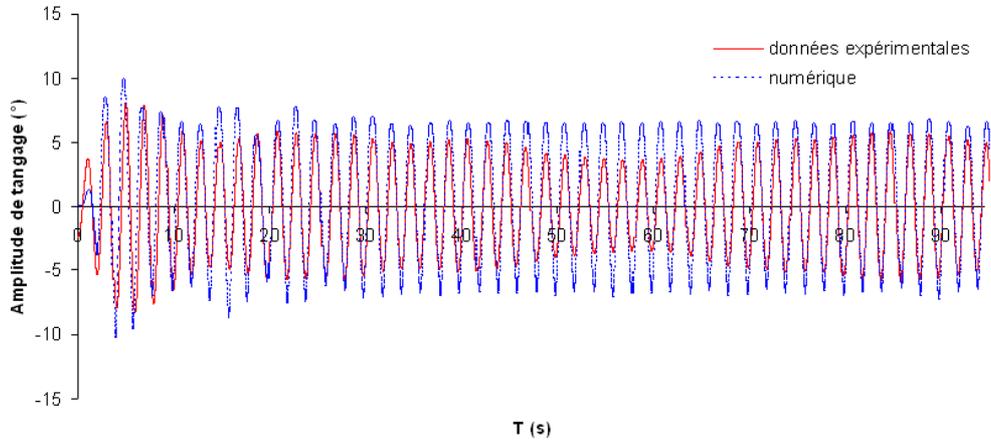


FIG. 9.11 – Comparaison numérique/expérimental du mouvement de tangage dans le cas d’une mer régulière d’amplitude 0,042 m et de fréquence 0,50Hz et pour un  $B_{PTO} = 1,39$  N.m.s.

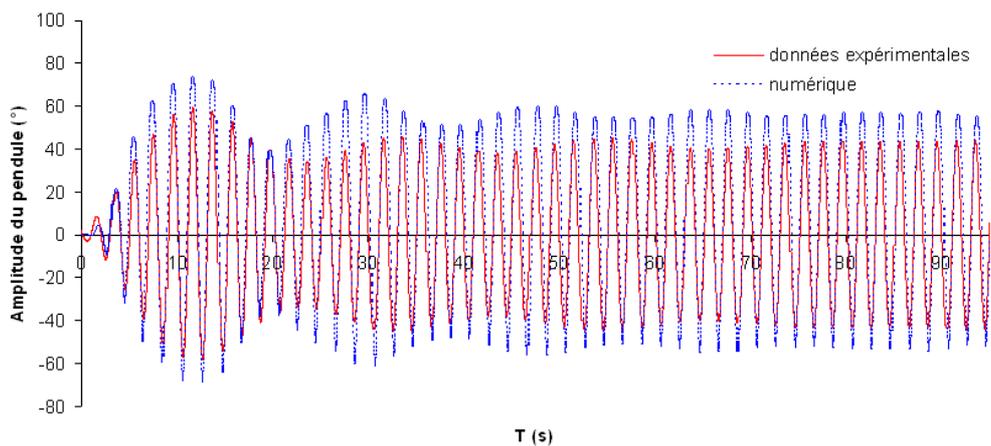


FIG. 9.12 – Comparaison numérique/expérimental du mouvement du pendule dans le cas d’une mer régulière d’amplitude 0,042 m et de fréquence 0,50Hz et pour un  $B_{PTO} = 1,39$  N.m.s.

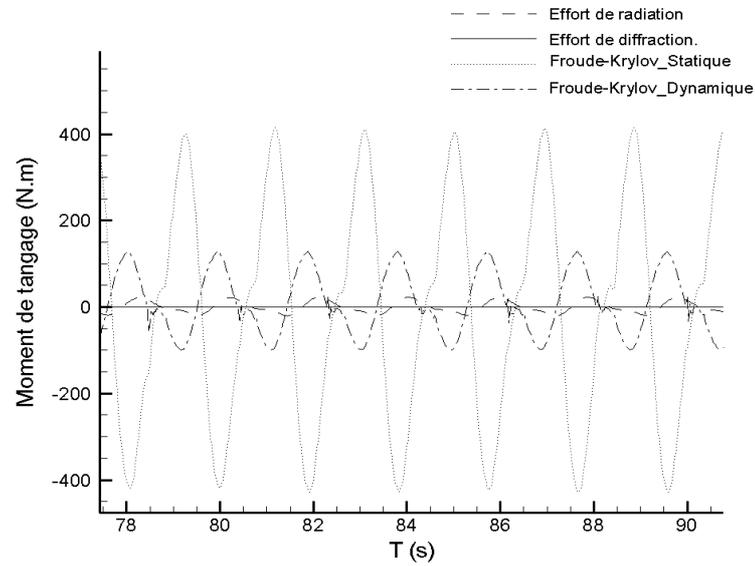


FIG. 9.13 – Composantes du moment de tangage dans le cas d’une houle régulière d’amplitude 0,083m, de fréquence 0,52Hz et pour  $B_{pto}=6,97$  N.m.s.

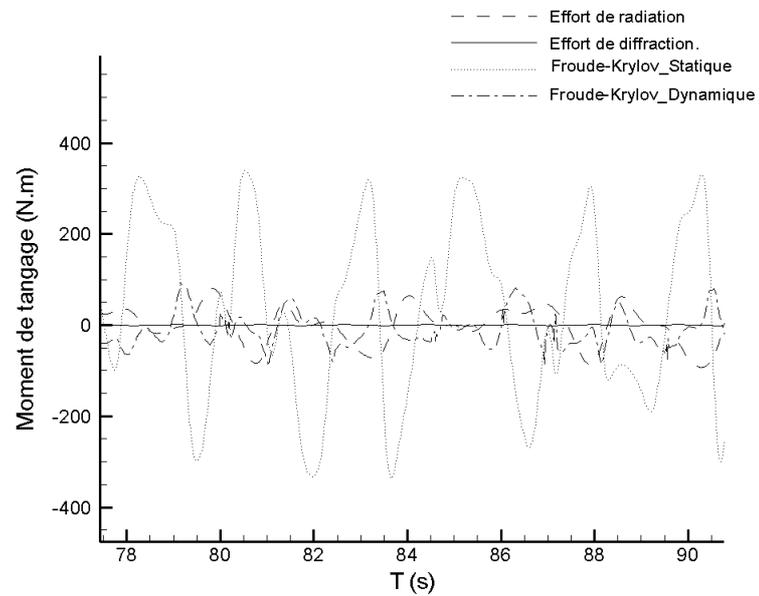


FIG. 9.14 – Composantes du moment de tangage dans le cas d’une houle régulière d’amplitude 0,042m, de fréquence 0,56Hz et pour  $B_{pto}=1,39$  N.m.s.

### Simulation de grands mouvements.

Les non-linéarités mécaniques liés aux mouvements de la maquette SEAREV font que lors de simulations de grands mouvements en tangage, les amplitudes en roulis et lacet prennent également des valeurs importantes. Pour les mouvements de tangage et pilonnement, l'amortissement de radiation est important, et prépondérant devant celui apporté par les efforts visqueux. Les comparaisons expérimentales (figure (9.4)) faites précédemment lors des essais d'extinction de tangage en sont un exemple. Les résultats sur les réponses en tangage (figures (9.13) et (9.14)) nous ont également montré que les écarts entre prédiction numérique et mouvement mesuré trouvent plutôt leurs origines au niveau des non-linéarités des efforts excitateurs lorsque les amplitudes des mouvements ou de la surface libre deviennent importantes. Ces remarques valent également pour le roulis, cependant le problème tient principalement ici à ce que l'amortissement d'origine visqueuse dû au frottement et surtout à la séparation de l'écoulement au niveau des bouchains n'est plus négligeable mais au contraire prépondérant.

Nous avons par conséquent décidé, dans ce paragraphe, d'ajouter un terme d'amortissement en roulis supplémentaire. Notre choix s'est porté sur une formulation quadratique donnant un effort généralisé  $F_v$  en fonction de la vitesse en roulis  $\dot{\varphi}$  tel que :

$$F_v = B_Q \dot{\varphi} \left| \dot{\varphi} \right| \quad (9.6)$$

Cette formulation est classique et se retrouve dans la majorité des codes de calcul utilisant une formulation potentielle [31]. D'un code à un autre la formulation diffère selon la façon avec laquelle est déterminé le coefficient  $B_Q$ . Ici, nous avons choisi une formulation issue des travaux de Tramoni [41] qui suggère d'exprimer le facteur  $B_Q$  de la façon suivante :

$$B_Q = \frac{1}{2} \rho C_d B^4 L \quad (9.7)$$

avec  $L$  la longueur,  $B$  le maître-bau et  $C_d$  un coefficient de l'ordre de 0,1 à 0,2 dans le cas d'une barge de section rectangulaire.

La figure (9.15) présente l'amortissement du mouvement de roulis dans le cas de la maquette SEAREV lors d'un essai d'extinction de roulis pour une amplitude initiale de 6 degrés. Les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats numériques obtenus en ne prenant en compte que la radiation et ceux obtenus en rajoutant le terme correctif (9.6) avec  $C_d = 0,5$ . On voit que l'ajout du terme de viscosité tend grandement à l'amélioration des résultats, les amortissements sont quasiment similaires entre les résultats numériques avec terme correctif et les résultats expérimentaux.

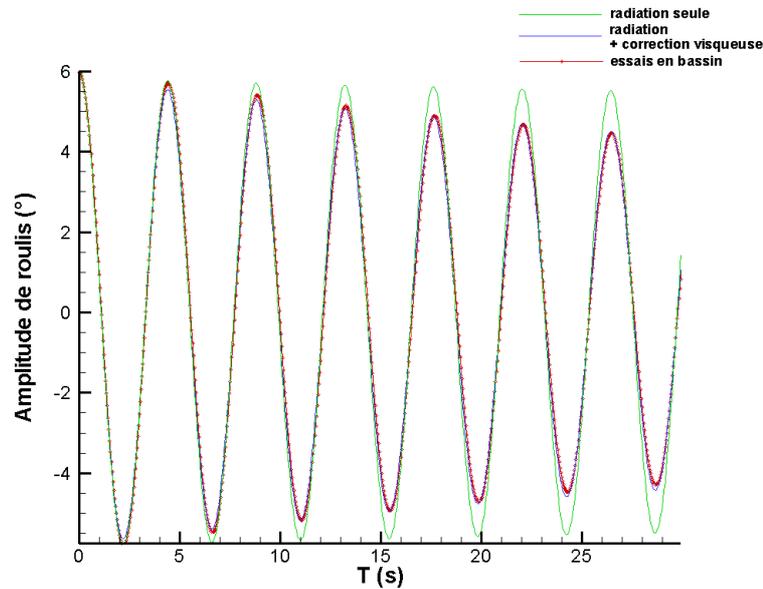


FIG. 9.15 – Amortissement en roulis de la maquette SEAREV. Comparaison entre valeurs expérimentales, numériques avec radiation seule et numériques avec radiation plus terme correctif.

Les résultats en extinction de roulis étant satisfaisant, nous avons décidé de simuler un cas de *fishtailing* rencontré lors des essais en bassin pour une période de 2s et une amplitude de 0,16m. Ce phénomène est caractérisé par le fait que la maquette oscille périodiquement en roulis et lacet en plus du tangage. Ce comportement est du en partie au fait que, la demi-période en roulis et les périodes propres en tangage et lacet sont relativement proches ( $T_\varphi/2=1,92s$ ,  $T_\theta=2s$  et  $T_\psi=2,267s$ ). En effet, les phénomènes de résonance pure en tangage et lacet apparaissent en raison de la valeur de la période du champ incident. Le phénomène de résonance paramétrique de roulis hémichrone, qui apparaît généralement dans le cas de houle de période égale à la demi-période propre en roulis, vient alors se greffer. Les mouvements de lacet pouvant devenir relativement important, le problème de l'amortissement en lacet s'est posé. Pour s'affranchir de ce problème, il a alors été ajouté une raideur afin de limiter les mouvements de lacet. Malgré l'ajout de cette raideur en lacet, ce calcul reste intéressant puisqu'il va nous permettre de voir si le modèle peut représenter des mouvements de grande amplitude que ce soit en tangage ou en roulis.

La figure (9.16) présente l'évolution temporelle des mouvements de roulis, tangage et lacet dans le cas d'une houle régulière de période 2,3 s et de hauteur 0,16 m. On remarque tout d'abord la valeur relativement importante des mouvements de roulis et tangage. La moyenne des amplitudes maximales de ces deux mouvements est de l'ordre de 20 degrés et démontre ainsi une certaine robustesse du modèle numérique lors de simulations de grands mouvements. On constate également que la période de mouvement en roulis s'effectue à la période double de celle de la houle.

Ce phénomène est caractéristique du roulis hémichrone, résonance paramétrique qui apparaît généralement en présence d'une houle dont la période est soit égale à celle en pilonnement soit à la moitié de celle en roulis. On prouve ainsi que ce modèle est capable de capter ce genre de comportement totalement non-linéaire. Ce modèle pourrait donc dans l'avenir être un outil numérique relativement pratique et rapide, permettant d'appréhender des comportements dus à des couplages non-linéaires entre les degrés de liberté et l'influence des efforts excitateurs induits par la houle à la position et à la cinématique du corps.

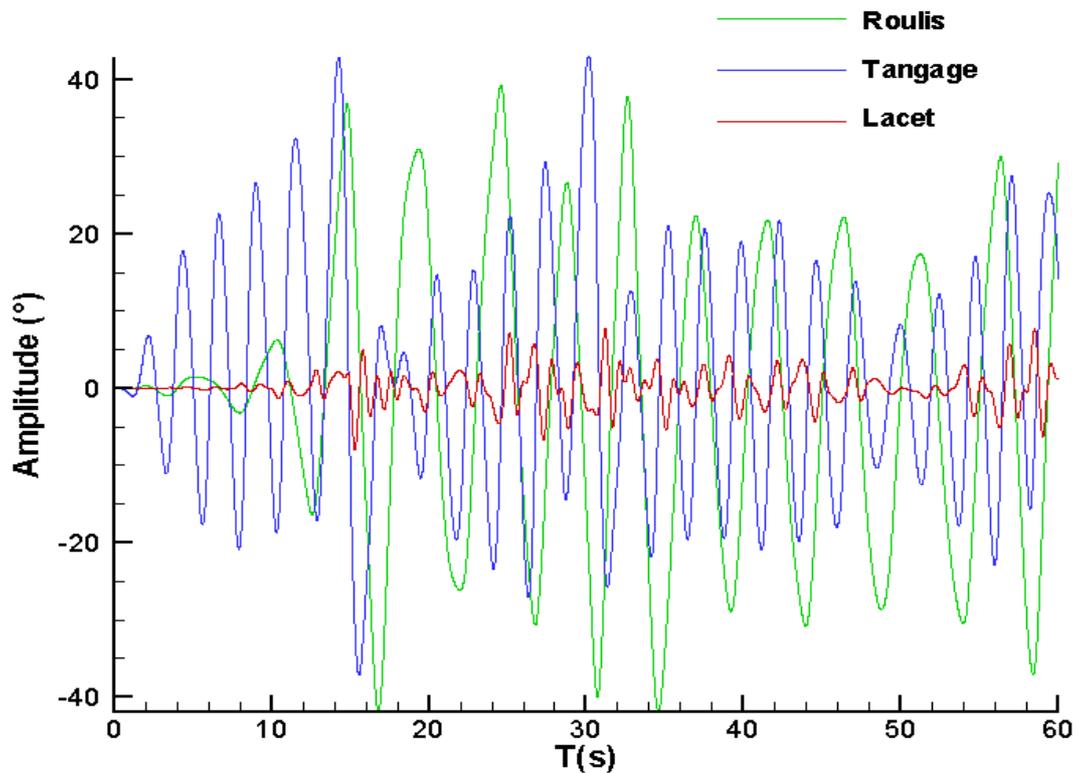


FIG. 9.16 – Evolution temporelle des mouvements de roulis, tangage et lacet dans le cas de la maquette SEAREV pour une houle régulière de période 2,3 s et de hauteur 0,16 m.

**Bilan et perspectives.**

L'objectif principal de cette thèse était la simulation de mouvements de grande amplitude du système houlomoteur SEAREV en utilisant l'approche fluide parfait. Dans ce but, il a été élaboré un modèle numérique hybride du récupérateur d'énergie dans lequel les équations du mouvement sont résolues non-linéairement les efforts de Froude-Krylov sur la surface mouillée exacte et l'hydrodynamique est développée au second-ordre. Le développement de ce simulateur a été précédé de deux codes permettant de résoudre des problèmes similaires (Figure 9.17).

	Froude-Krylov	Diffraction	Radiation	Équations du mouvement
2D	Considé­ré sur la surface mouillée exacte	Non pris en compte	Non pris en compte	Non-linéaires
3D L	Considé­ré sur la surface mouillée moyenne	1 <sup>er</sup> ordre	1 <sup>er</sup> ordre	Linéaires
3D NL	Considé­ré sur la surface mouillée exacte	1 <sup>er</sup> ordre + Termes correctifs du 2 <sup>nd</sup> ordre	1 <sup>er</sup> ordre + Termes correctifs du 2 <sup>nd</sup> ordre	Non-linéaires

FIG. 9.17 – Tableau récapitulatif des différents modèles numériques présentés dans la thèse.

Tout d'abord un code bidimensionnel a été développé où les seuls efforts de Froude-Krylov, pris en compte sur la surface mouillée instantanée, sont modélisés. Le potentiel du champ incident considéré pour ces efforts est non-linéaire, calculé par l'intermédiaire de la méthode de Rieneker-Fenton. Les efforts de diffraction-radiation sont quant à eux négligés. Malgré cette approximation le rôle joué par le capot sur le comportement général du flotteur a pu être étudié et un premier débroussaillage a pu être fait quant à la compréhension du comportement dynamique du système. Ce travail m'a également permis de me familiariser avec les problèmes liés au développement d'un programme de simulation non-linéaire et plus particulièrement au problème de l'intersection de surfaces entre la carène et la surface libre.

Un modèle potentiel 3D linéaire a également été développé. Ce modèle, par rapport au précédent, permet de représenter les effets de la radiation et de la diffraction. Cette approche reste cependant limitée au cas de la théorie potentielle linéaire où le corps animé est restreint à des mouvements de faibles amplitudes. L'un des intérêts de ce modèle est de représenter des états de mer multichromatiques et multidirectionnels. Cette spécificité a été appliquée à l'étude de l'influence de la

directionnalité de la houle sur les performances du système récupérateur d'énergie des vagues. Les résultats montrent l'influence non négligeable de la directionnalité de la houle sur la production annuelle d'énergie sur ce type de flotteur. Ce constat fait, nous avons pu en conclure que lors d'une étude sur site, le modèle numérique employé ne peut se passer du caractère dispersif de la houle incidente. Cette étude nous a également permis de trancher quant à l'éventualité d'un second degré de liberté associé au pendule. Le coût d'installation d'un tel système reviendrait en effet beaucoup trop cher par rapport à ce qu'il pourrait apporter en terme de récupération d'énergie.

La troisième partie de ce travail a été consacrée au développement du code 3D non-linéaire à proprement parler. Les non-linéarités interviennent à plusieurs niveaux. Tout d'abord au niveau des composantes statiques et dynamiques des efforts de Froude-Krylov. Ces efforts résultant du champ de pression créé par le champ incident à la surface de la carène sont considérés sur la surface mouillée instantanée exacte. L'ensemble des termes composant l'équation de Bernoulli sont pris en compte. Le potentiel du champ incident est calculé au travers de deux méthodes spectrales résolvant non-linéairement les équations de surface libre permettant ainsi d'intégrer les efforts de pression liés au potentiel non-linéaire du champ incident. Les efforts du premier-ordre de diffraction-radiation sont calculés à l'aide du code potentiel linéaire ACHIL3D. Ces efforts sont ensuite étendus au second-ordre selon deux étapes. Tout d'abord on applique un développement en série de Taylor de l'effort de pression jusqu'au second-ordre autour de la position moyenne du flotteur. Ce calcul permet entre autre de considérer la rotation de la normale à la carène. Le terme quadratique de l'équation de Bernoulli est ensuite ajouté. Pour ce faire, on procède en chaque point du maillage au produit de convolution de la réponse impulsionnelle du gradient de potentiel de vitesse avec la vitesse de déplacement du point considéré pour la composante en radiation et avec la vitesse du champ incident au point considéré pour l'effort de diffraction. Pour ce qui est de la partie gauche du principe fondamental de la dynamique, la cinématique et la dynamique du système sont résolues non-linéairement à l'aide des angles de Cardan. Ce modèle a également vu le développement d'une méthode robuste et originale permettant le calcul de l'intersection de surfaces entre la carène et la surface libre du champ incident ainsi que la discrétisation de la surface mouillée ainsi obtenue.

Les différentes validations effectuées rendent compte d'un accord parfait avec le modèle linéaire en ce qui concerne les efforts de premier-ordre de diffraction-radiation et de la composante dynamique des efforts de Froude-Krylov. La composante hydrostatique a également été validée en confrontant les courbes de redressement hydrostatiques obtenues avec le modèle et avec celles obtenues avec le programme commercial Multisurf et son module Hydro. Les efforts du second-ordre ont quant à eux été en partie validés par l'intermédiaire du cas test du cylindre vertical posé sur le fond et la comparaison des efforts de dérive par rapport à la solution analytique. Les validations expérimentales montrent que ce modèle apporte une nette amélioration quant à la modélisation des mouvements du flotteur SEAREV par rapport au modèle linéaire. Ces résultats rendent compte aussi du

fait que, pour ce flotteur, les efforts liés à la composante statique des efforts de Froude-Krylov jouent un rôle prépondérant. Ce constat permet de valider l'hypothèse formulée au début de travail à savoir qu'une part importante et fortement non-linéaire de l'excitation du flotteur tient dans les termes dits hydrostatiques des efforts de pression dès lors que l'on tient compte de la déformation de la surface libre et du déplacement du corps. Les fonctions de transfert sur houle régulière rendent compte également des limites du modèle. Au voisinage de la fréquence de résonance du flotteur, notamment, l'écart avec les résultats expérimentaux est en effet relativement important. Les effets tels que slamming ou encore ceux liés à l'ancrage sont des phénomènes qui sont mal représentés par le modèle et qui contribuent grandement à la dynamique du système.

Dans l'état actuel des choses il serait intéressant de refaire les études concernant la géométrie du capot et l'influence de la directionnalité de la houle. La comparaison des résultats des différents modèles permettrait de voir ce qu'apporte le raffinement du modèle sur de telles applications. L'optimisation de forme pourrait éventuellement se faire avec le modèle hydrodynamique non-linéaire. Le temps de calcul reste cependant un paramètre limitatif par rapport au modèle linéaire et par rapport à ce qu'il pourrait apporter. En effet, l'amplitude significative des calculs sur site est de l'ordre de 15 degrés ce qui reste raisonnablement linéaire. En terme d'application ce modèle pourra surtout être utilisé pour des simulations sur houle extrêmes dans le cas de test de survivabilité ou de dimensionnement de l'amarrage.

Parmi les améliorations à amener aux modèles numériques, la première a trait à la condition sur le corps. Le travail présenté ici présente une condition linéaire sur la position moyenne du flotteur. Le but serait d'adopter une approche de type body-nonlinear [47] pour le traitement de la condition de glissement sur le corps tout en affichant une condition de surface libre linéarisée sur la position instantanée de la houle incidente. Cette méthode est par exemple utilisée dans le programme LAMP [63] du SAIC. L'amarrage est également apparu comme un paramètre important quant comportement du flotteur que ce soit au niveau des essais en bassin ou lors des simulations numériques. Sa modélisation doit être plus poussée qu'elle ne l'est actuellement.

De manière plus générale enfin, ces trois années m'ont donné l'occasion d'appréhender la rigueur nécessaire qu'il nécessite d'avoir par exemple lors du codage des modèles numériques. Depuis l'écriture des équations en passant par le choix de la méthode de résolution, le développement de l'algorithme, le codage ou encore la sortie des données et leurs traitements. La rédaction elle-même a été très formatrice, dans le sens où ce travail a permis de faire un bilan des connaissances acquises lors de ces trois années et d'aiguiser encore plus ma curiosité quant au développement d'un tel modèle.

# Bibliographie

- [1] Babarit A. *Optimisation Hydrodynamique et Contrôle Optimal D'un Récupérateur de L'énergie Des Vagues*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2005.
- [2] Durand M. Babarit A., Pettinotti B., Quillard O., Toularastel J.L., and Clément A.H. Experimental validation of the performance SEAREV wave energy converter with real time latching control. *EWETEC (Porto)*, 2007.
- [3] Nicolas A. *Contribution À l'Etude De l'Intersection de Surfaces Gauches*. PhD thesis, école doctorale des sciences pour l'ingénieur de Nantes, 1995.
- [4] Clément A.H. Hydrodynamique instationnaire linéarisée : 'mise en oeuvre d'une méthode de singularités utilisant un modèle différentiel de la fonction de green.'. Technical Report LHN-9703, 1997.
- [5] Clement A.H. An ordinary differential equation for the green function of time-domain free-surface hydrodynamics. *Journal of Engineering mathematics*, 33(2) :201–217, 1998.
- [6] Clément A.H. Using differential properties of the green function in seakeeping computational codes. *Proc. 3rd intern. Conf. Numer. Ship Hydrod.*, 6(5) :1–15, 1999.
- [7] Molin B. *Hydrodynamique Des Structures Offshore*. TECHNIP, 2002.
- [8] West B.J., Brueckner K.A., Milder M., and Milton R.L. A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, 92 :11803–11824, 1987.
- [9] Korvin-Kroukovsky B.V. Investigations of ship motions in regular waves. *SNAME*, 63 :386–435, 1955.
- [10] Filip D., Magedson R., and Markot R. Surface algorithms using bounds on derivatives. *Computer Aided Design*, 3(4) :295–311.
- [11] Haskind M. D. The hydrodynamic theory of ship oscillations in roll and pitching. *Prikl. Mat. Mekh.*, 10 :33–66, 1946.
- [12] Nielsen U. D. Estimations of on-site directional wave spectra from measured ship responses. *Marine Structures*, 19 :33–69, 2006.
- [13] Domermuth D.G. and Yue D.K.P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 184 :267–288, 1987.
- [14] Bardinet E., Cohen L., and Ayache N. A parametric deformable model to fit unstructured 3d data. Technical report, INRIA, 1995.

- 
- [15] Batnhill R. E., Farin G., Jordan M., and Piper B. R. Surface/Surface intersection. *Computer Aided Design*, 4(1-2) :3–16, 1987.
- [16] Houghton E., Emmett R., Factor D., and Sabharwal L. Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surfaces. *Computer Aided Design*, 2 :173–183, 1985.
- [17] McCormick M. E. *Ocean Wave Energy Conversion*. John Wiley and Sons, 1981.
- [18] Bonnefoy F., Le Touzé, and Ferrant P. A fully non-linear high-order spectral 3d model for gravity waves generation and propagation. *Proc. 19th international workshop on water waves and floating bodies*, 2004.
- [19] Sarraga R F. Algebraic methods for intersection. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 22 :222–238, 1983.
- [20] Korsmeyer F.T. *The First and Second Order Transient Free Surface Wave Radiation Problems*. PhD thesis, Dept of Ocean Eng., MIT, 1988.
- [21] Delhommeau G., Ferrant P., and Guilbaud M. Calculation and measurement of forces on a high speed vehicle in forced pitch and heave. *Applied Ocean Research*, 14(2) :119–126, 1992.
- [22] W. J. Gordon and C Hall. Transfinite element methods and blending function interpolation over curved element domains. *Numer. Math.*, 21 :109–129, 1973.
- [23] Bingham H. Computing the green function for linear wave-body interaction. *Proc. of the 13th international workshop on water waves and floating bodies*, pages 5–8, 1999.
- [24] Mitsuyasu H. Observations of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy. *Journal of Physical Oceanography*, 5 :750–760, 1975.
- [25] Daubisse J-C. Some results on approximation by exponential series applied to hydrodynamics. *Proc. 3rd Intern. Conf. Numer. Ship Hydrod., Paris*, 1981.
- [26] Gilloteaux J-C. Etude bibliographique sur le déferlement des vagues et extension au cas tridimensionnel du système SEAREV. Master’s thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2003.
- [27] Lebreton J.C and Margnac A. Calcul des mouvements d’un navire ou d’une plateforme amarée dans la houle. *La Houille Blanche*, 23 :379–389, 1968.
- [28] Michell J.H. Wave resistance of a ship. *Philosophical Magazine*, 45 :113, 1898.
- [29] Wehausen J.H. and Laitone E.V. *Surfaces Waves*, volume 9, pages 446–778. Springer Verlag, 1960.
- [30] Lane J.M. and Riesenfeld R. F. A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces. *IEEE Transaction On Pattern Analysis And Machine Intelligence*, PAMI-2(1) :35–46, 1980.
- [31] De Kat J.O. and Paulling J.R. The simulation ship motions and capsizing in severe seas. *Trans SNAME*, 97 :139–168, 1989.
- [32] Rossignac J.R and Requicha A.A.G. Piecewise/circular curves for geometric modeling. *IBM Journal of Research and Development*, 31(3) :296–313, 1987.

- [33] Hasselmann K., Ross D.B., Müller P., and Sell W. A parametric wave prediction model. *Jour. Phy. Oceanogr.*, 6 :200–228, 1976.
- [34] Piegl L. Geometric method of intersecting natural quadrics represented in trimmed surface form. *Computer-Aided Design*, 21(4) :201–212, 1989.
- [35] Lo and Wang. An algorithm for the intersection of quadrilateral surfaces by tracing of neighbours. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 192 :2319–2338, 2003.
- [36] Ba M., Rebeyrotte A., and Albayaty A. Non linear ship motion by time domain panel method. *Euromech 374, Poitiers*, pages 123–130, 1998.
- [37] Bessho M. On the fundamental singularity in the theory of ship motions in a seaway. *Memoirs of the defense academy Japan*, 17 :95–105, 1977.
- [38] Daniel M. *Modélisation de Courbes et Surfaces Par Des B-Splines. Application À la Conception et À la Visualisation de Formes*. PhD thesis, Université de Nantes, 1989.
- [39] Hoffmann C. M. A dimensionality paradigm for surface interrogations. *Computer Aided Geometric Design*, 7 :517–532, 1990.
- [40] Rienecker M. M. and Fenton J. D. Fourier approximation method for steady water waves. *Journal Of Fluid Mechanics*, 104 :119–137, 1981.
- [41] Tramoni M-P. *Etude Expérimentale et Théorique Du Roulis Des Barges À la Résonance*. PhD thesis, Université de Nantes, 1992.
- [42] Chang M.S. Computations of three-dimensional ship motions with forward speed. *Proceedings of the 2nd International conference on numerical ship hydrodynamics*, pages 124–135, 1977.
- [43] Longuet-Higgins M.S. and Cockett E. D. The deformation of steep surface waves on water : I. a numerical method of computation. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A(350) :1–26, 1976.
- [44] Longuet-Higgins M.S and al. Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy. *Journal of Physical Oceanography*, 5 :750–760, 1963.
- [45] Salvesen N., Tuck E.O. , and Faltinsen O.M. Ship motions and sea loads. *SNAME*, 78 :250–280, 1970.
- [46] Masson O. Développements du programme ACHIL3D. laboratoire de mécanique des fluides. Technical report, Ecole Centrale de Nantes, UMR6598, 1998.
- [47] Ferrant P. *Radiation D’ondes de Gravité Pour Des Mouvements de Grande Amplitude D’un Corps Immergé*. PhD thesis, E.N.S.M, 1988.
- [48] Ferrant P. Simulation of strongly nonlinear wave Generation and wave body interactions using a 3-d MEL model. *Twenty-first symposium on naval hydrodynamics*, pages 93–110, 1991.
- [49] Guevel P. and Bougis J. Ship motions with forward speed in infinite depth. *International shipbuilding progress*, 29 :103–117, 1982.

- 
- [50] Hervé J. P. Contribution à l'étude de l'intersection de surface paramétriques. Master's thesis, Université de Nantes, 1987.
- [51] Koparkar P. Surface intersection by switching from recursive subdivision to iterate refinement. *The Visual Computer*, 8 :47–63, 1991.
- [52] Beck R. and Magee A. Time-domain analysis for predicting ship motions. Londres, 1990.
- [53] Eatock Taylor R. and Hung S.M. Second-order diffraction forces on a vertical cylinder in regular waves. *Applied Ocean reasearch*, 6(2) :19–30, 1987.
- [54] Massel S. R. *Ocean Surface Waves : Their Physics And Prediction*. World Scientific, 1996.
- [55] Inglis R.B and Price W.G. A three-dimensional ship motion theory : Comparison between theoretical predictions and experimental data coefficients with forward speed. *Trans SNAME*, 124 :141–157, 1981.
- [56] Foufou S., JBrun .M., and Bouras A. Intersection de surfaces paramétriques.
- [57] Lanquetin S., Foufou S., Kheddouci H., and Neveu M. Deux algorithmes d'intersection des surfaces de subdivision.
- [58] Coons S.A. Surfaces for computer-aided design of space figures. *M.I.T ESL 9442-M-139*, 1964.
- [59] Coons S.A. *Méthode Matricielle*. Hermès, 1987.
- [60] Ogilvie T.F and Tuck E.O. A rational strip theory for ship motions. Technical Report 013, University of Michigan, Ann Arbor, 1969.
- [61] Havelock T.H. Ship resistance : The wave-making properties of certain traveling pressure disturbances. *Proceedings of the royal society*, A 89 :490–499, 1913.
- [62] Sederberg T.W. *Implicit and Parametric Curves and Surfaces*. PhD thesis, Purdue University, 1983.
- [63] Treakle T. W., Mook D. T., , Liapis S. I., , and Nayfeh A. H. A time domain method to evaluate the use of moving weights to reduce the roll motion of a ship. *Ocen Engineering*, pages 1321–1343, 2000.
- [64] Pierson WJ. and Moskowitz L. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of s. a. kitaigorodskii. *J Geophy Res*, 69 :5181–5190, 1964.
- [65] Lin W.M. and Yue D. Numerical solutions for large-amplitude ship motions in the time domain. *8th Symposium on naval hydrodynamics*, 1991.
- [66] Goda Y. Random seas and design of maritime structures. *university of Tokyo press*, 1985.

# **Annexes.**

## A : Détails des termes composant la matrice de masse $\mathbf{M}$ dans l'équation du mouvement.

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_b + m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_b + m_p \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 4} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 5} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 6} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 7} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 8} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6, 1} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6, 2} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,3} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,4} = (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{I}_b \mathbf{T}_{b\theta} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\theta}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (9.17)$$

$$m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \quad (9.18)$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.19)$$

$$(9.20)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,5} = (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{I}_b \mathbf{T}_{b\psi} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.21)$$

$$(9.22)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,6} = (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{I}_b \mathbf{T}_{b0} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (9.23)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,7} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

$$+ m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.25)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,8} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{pb} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

$$+ m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.27)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,1} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,2} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.29)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,3} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.30)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,4} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \quad (9.31)$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.32)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,5} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \quad (9.33)$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.34)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,6} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \quad (9.35)$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (9.36)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,7} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.37)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,8} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{pb} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.38)$$

$$- \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_p \end{pmatrix}$$

–  $\mathbf{H}$  est la matrice des efforts de second-ordre, elle s'écrit :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{f}_4(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

– avec :

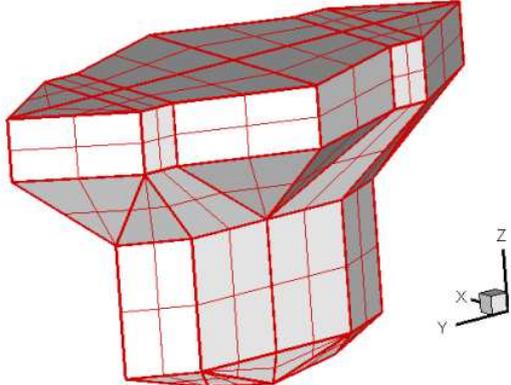
$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &+ \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} \wedge \\ &+ \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{p,0} \end{aligned} \quad (9.40)$$

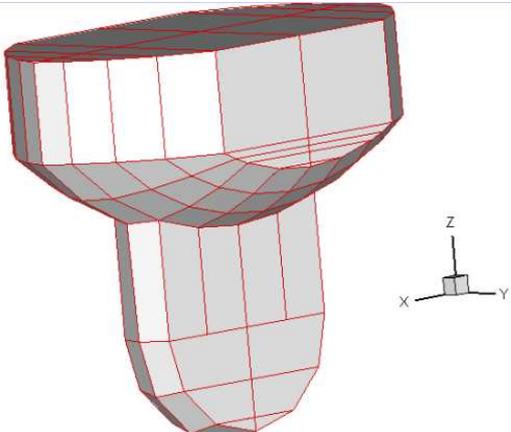
$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \mathbf{T}_{0b} \mathbf{I} \mathbf{I}_b \mathbf{T}_{b0} \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&\quad + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0b}) \mathbf{I} \mathbf{I}_b \mathbf{T}_{b0} \vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0b} \mathbf{I} \mathbf{I}_b \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{b0}) \vec{\Omega}_{b,0}
\end{aligned} \tag{9.41}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\
&\quad + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \quad \quad + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg) \\
&\quad + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0p}) \mathbf{I} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \vec{\Omega}_{p,0} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I} \mathbf{I}_p \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{p0}) \vec{\Omega}_{p,0}
\end{aligned} \tag{9.42}$$

$$\mathbf{f}_4(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - m_p \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \tag{9.43}$$

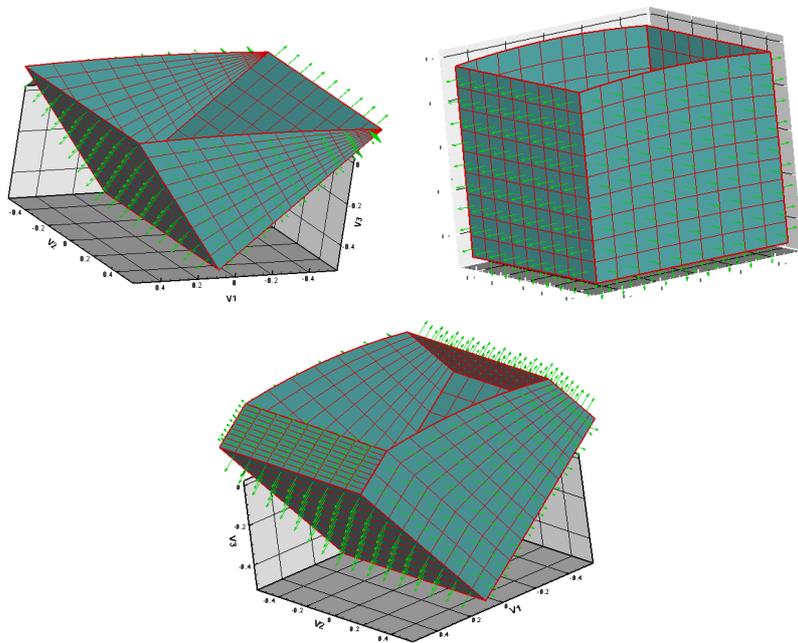
## B : Dimensions et caractéristiques mécaniques des flotteurs SEAREV utilisés.

 <p>Flotteur SEAREV de type DES2595.</p>	<p><b>Dimensions :</b>          Longueur = 30,0 mètres.          Largeur = 15,3 mètres.          Tirant d'eau = 15,0 mètres.          Déplacement = 1352 mètres cube.</p> <p><b>Caractéristiques mécaniques :</b>  <math>m_b = 765 \text{ t.}</math>  <math>I_b = 76,3 \cdot 10^3 \text{ t.m}^2.</math>  <math>z_G = 0,0 \text{ m.}</math>  <math>m_p = 587 \text{ t.}</math>  <math>I_y = 7,34 \cdot 10^3 \text{ t.m}^2.</math>  <math>l = 0,92 \text{ m.}</math>  <math>d = -10,0 \text{ m.}</math>  <math>K_{PTO} = 0,0 \text{ kN.m}</math>  <math>B_{PTO} = 800 \text{ kN.m.}</math></p>
--	--

 <p>Flotteur SEAREV de type DES1451.</p>	<p><b>Dimensions :</b>          Longueur = 21,7 mètres.          Largeur = 14,2 mètres.          Tirant d'eau = 15,0 mètres.          Déplacement = 922 mètres cube.</p> <p><b>Caractéristiques mécaniques :</b>  <math>m_b = 600 \text{ t.}</math>  <math>I_b = 26,8 \cdot 10^3 \text{ t.m}^2.</math>  <math>z_G = 0,0 \text{ m.}</math>  <math>m_p = 321 \text{ t.}</math>  <math>I_y = 6,73 \cdot 10^3 \text{ t.m}^2.</math>  <math>l = 2,07 \text{ m.}</math>  <math>d = -7,5 \text{ m.}</math>  <math>K_{PTO} = 0,0 \text{ kN.m}</math>  <math>B_{PTO} = 400 \text{ kN.m.}</math></p>
---	--

# C : Exemples d'intersections de surfaces.

Exemple d'un cube.



Exemple de la carène d'un série 60.

