HAL open science

Calcul moulien et théorie des formes normales classiques et renormalisées

Guillaume Morin

▶ To cite this version:

Guillaume Morin. Calcul moulien et théorie des formes normales classiques et renormalisées. Mathématiques [math]. Observatoire de Paris, 2010. Français. NNT : . tel-00521709

HAL Id: tel-00521709

https://theses.hal.science/tel-00521709v1

Submitted on 28 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS

ÉCOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

Doctorat Astronomie et Astrophysique
spécialité : Mathématiques

Auteur : Guillaume MORIN

CALCUL MOULIEN ET THÉORIE DES FORMES NORMALES CLASSIQUES ET RENORMALISÉES

Rapporteurs
Mostafa ADIMY (Université de Lyon I)
Jean ÉCALLE (Université Paris-Sud)
Giuseppe GAETA (Université de Milan)

Thèse de doctorat soutenue le 9 juin 2010 devant le Jury composé de :

Mostafa ADIMY (Université de Lyon I)	Rapporteur
Jacky CRESSON (Université de Pau - IMCCE)	Directeur de thèse
Giuseppe GAETA (Université de Milan)	Rapporteur
David SAUZIN (IMCCE-CNRS)	Examinateur
Emmanuel PAUL (Université de Toulouse)	Examinateur
Jacques-Arthur WEIL (Université de Limoges)	Examinateur

CALCUL MOULIEN ET THÉORIE DES FORMES NORMALES CLASSIQUES ET RENORMALISÉES

Résumé :

La première partie de cette thèse présente le cadre des équations différentielles à retard. Ces équations apparaissent notamment dans des modélisations de phénomènes physiques (calcul de marées) et physiologiques.

La recherche de forme normale d'équation différentielle à retard est rendue difficile du fait de la dimension infinie de l'espace des conditions initiales. On présente une méthode de calcul due à T. Faria qui permet de réduire cette difficulté en utilisant des variétés centrales de dimension finie, sur lesquelles on peut faire un calcul de forme normale « classique ». On étend ensuite ce résultat à l'aide d'une méthode de G. Gaeta permettant la *renormalisation* de formes normales usuelles, pour des équations différentielles ordinaires.

En utilisant ces deux méthodes, on démontre un théorème donnant l'existence d'une forme renormalisée d'équation différentielle à retard.

Dans une deuxième partie, on présente et on étudie le *formalisme moulien* développé par Jean Ecalle. On utilise ce formalisme pour la recherche de formes normales de champs de vecteurs, et on l'applique à des champs hamiltoniens en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées action-angle. On obtient ainsi une nouvelle démonstration de la version formelle du théorème de Kolmogorov et du théorème de Birkhoff.

On présente également une feuille de calcul avec Maple mettant en œuvre certains de ces calculs, et témoignant ainsi de la remarquable aptitude du formalisme moulien à être utilisé dans les logiciels de calcul formel.

Mots-clés : systèmes dynamiques ; forme normale ; équation différentielle à retard ; renormalisation ; moule ; calcul moulien ; champ hamiltonien ; calcul formel.

MOULD CALCULUS AND THEORY OF USUAL AND RENORMALIZED NORMAL FORMS

Abstract:

This text is about normal forms of differential equations.

The first part of this text deals with retarded (or delayed) differential equations; these equations appear for example in tide computations and also in physiological modeling, where they have a particular interest.

The search of normal forms of retarded differential equations is made difficult as the initial conditions space is of infinite dimension. We present a computation by Faria which reduces this difficulty: first we make a projection on a finite dimensional central manifold, on which it is possible to make a classical (*i.e.* Poincaré-Dulac) normal form computation. Then we extend this result with the help of Gaeta's method of renormalization.

By using these two methods, we prove a theorem giving existence of a renormalized normal form of a retarded differential equation.

In the second part, we present the *mould calculus* by Jean Écalle. We use this formalism to compute normal forms of formal vector fields and apply it then to hamiltonian formal vector field in cartesian coordinates, then in action-angle coordinates. We obtain then a new proof of a formal version of Birkhoff's theorem on normal forms, and Kolmogorov's theorem.

We present also a Maple worksheet, which shows how easily mould can be implemented in formal computations.

Keywords: dynamical systems; normal form; retarded differential equation; renormalization; mould calculus; hamiltonian vector field; formal computation.

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier chaleureusement mon directeur de thèse Jacky Cresson, qui, malgré la distance qui nous séparait, malgré mes questionnements et incertitudes, m'a toujours soutenu, guidé et encouragé pour terminer ce travail.

Mes pensées reconnaissantes vont également vers tous les membres de l'IMCCE, et plus particulièrement l'équipe d'Astronomie et Systèmes Dynamiques, notamment David Sauzin et l'ANR Galois pour son aide lors de ma participation au groupe de travail « Calcul Moulien », et que j'ai la chance de compter parmi les membres du jury.

C'est par ailleurs un grand honneur pour moi que d'inscrire monsieur Jean Écalle au nombre des rapporteurs de ce travail, je souhaite le remercier ici pour sa disponibilité et sa gentillesse, ainsi évidemment que pour ses œuvres qui m'ont tant intéressé.

Je remercie également messieurs les rapporteurs Mostafa Adimy et Giuseppe Gaeta pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail.

Merci également à Emmanuel Paul d'avoir accepté de se plonger dans le calcul moulien, j'espère que la lecture de ce travail lui aura montré qu'on ne s'y noie pas nécessairement.

Je remercie enfin Jacques-Arthur Weil pour son enthousiasme vis-à-vis des modestes résultats ci-inclus et pour sa disponibilité.

C'est également à Ana Gómez et Daniel Egret de l'Observatoire de Paris que je dois la possibilité de présenter ce travail, je les remercie donc tous deux pour la confiance qu'ils m'ont accordée au long de ces années.

Par ailleurs, puisque l'occasion se présente ici, et bien qu'ils le sachent déjà, je remercie ma famille, spécifiquement mon épouse et mes parents de la patience qu'ils ont eue vis-à-vis de ce travail, mes amis et particulièrement Sébastien, mon frère en mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements 5

Introduction 11
Origine de la notion de forme normale 11
Unicité de la forme normale et renormalisation 12
Équations à retard 13
Calcul moulien 14
Calcul formel 14
Le cas hamiltonien 15
Problèmes de convergence 15

Partie I. Formes normales d'équations différentielles à retard . . . 17

1. Rappels sur les systèmes dynamiques 19
1.1. Points fixes 19
1.2. Notions de stabilité 19
1.3. Ensembles invariants 20
1.4. Variété centrale 21
1.5. Calcul explicite des variétés centrales 23
1.6. Redressement des variétés stable et instable 24
1.7. Redressement de variété centrale 27

2. Éléments sur les équations à retard 29
2.1. Existence et unicité d'une solution 29
2.2. Équations à retard linéaires autonomes 30
2.3. Cadre fonctionnel des équations à retard 33
2.4. Variété centrale dans les équations différentielles à retard 40

3. Variété du centre et dynamique 41

3.1. L'espace invariant central 41
3.2. Utilisation de variété centrale 42
3.3. Obtention d'une forme normale 43
3.4. Conclusion 47

4. Formes normales renormalisées 49
4.1. La notion de forme normale 49
4.2. Renormalisation de Poincaré 52
4.3. Procédure de renormalisation 55
4.4. Conclusion 58

5. Renormalisation pour les équations différentielles à retard 59
5.1. Énoncé du théorème 59
5.2. Conclusion 61

Partie II. Calcul moulien et théorie des formes normales 63

6. Calcul moulien 65
6.1. Notations 65
6.2. La correspondance avec les séries entières 66
6.3. L'algèbre des moules 67
6.4. Exponentielle et Logarithme 70
6.5. Aspects algébriques 70
6.6. Écriture moulienne d'un champ de vecteurs 73
6.7. Arborification 75

7. Théorie des formes normales 83
7.1. Normalisation 83
7.2. Le cas des champs de vecteurs 84
7.3. Forme prénormale 86
7.4. Formes prénormales continues 88
7.5. Linéarisation 93
7.6. La forme normale de Poincaré-Dulac 101
7.7. Procédure de simplification 102
7.8. Itération de la procédure de simplification 109
7.9. La forme élaguée 110

8. Le cas hamiltonien 117
8.1. La forme normale de Birkhoff 118
8.2. Le théorème de Kolmogorov 124

9. Calcul formel et exemples avec Maple 131
9.1. Présentation 131
9.2. Les différentes formes prénormales 131
9.3. Programme de calcul 133
9.4. Le problème du centre 134
9.5. La forme normale de Birkhoff 139

10. Conclusion et perspectives 145

A. Programmes de calcul 147
A.1. Définitions nécessaires pour le calcul de la forme élaguée 148
A.2. Programmes de calculs 148
A.3. Exemples de moules, moules utiles 155
A.4. Zone d'utilisation du calcul des formes prénormales 163

Liste des symboles 165

Bibliographie 167

INTRODUCTION

Cette thèse présente certains aspects et applications de la théorie des formes normales des champs de vecteurs sur $\mathbb{K}^\nu$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ν étant un entier, possédant un point d'équilibre à l'origine.

Origine de la notion de forme normale

On ne peut pas parler de forme normale sans évidemment citer l'œuvre de Henri Poincaré, qui donne dans ses *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [42] le premier théorème de normalisation formelle d'une équation différentielle, qui sera rapidement complété par Dulac ([15, 16]). Poincaré développe en effet une théorie *qualitative* de l'étude des équations différentielles : comment étudier le comportement local des solutions d'une équation différentielle au voisinage d'un point d'équilibre de cette équation ? Poincaré montre qu'on peut *simplifier* d'une certaine manière une équation différentielle (résolue) au voisinage d'un point d'équilibre. La simplification la meilleure que l'on puisse attendre est de déterminer un changement de variables qui conjugue le champ à sa partie linéaire : c'est la linéarisation.

Cependant on ne peut pas toujours linéariser un champ car certains termes ne peuvent être simplifiés : ce sont les termes *résonants*, qui constituent une *obstruction à la linéarisation* (voir [10]).

Soit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$ le spectre de la partie linéaire du champ. Pour $m = (m_1, \ldots, m_\nu)$ dans $\mathbb{N}^\nu$, on écrira $m \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i m_i$ et $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_\nu^{m_\nu}$. Soit alors e_j le j^{e} vecteur de base de $\mathbb{K}^\nu$. On dira que le monôme $x^m e_j$ est *résonant* si $\lambda_j = m \cdot \lambda$.

On a en particulier le résultat suivant, connu sous le nom de forme normale de Poincaré-Dulac :

Théorème 0.0.1. — *Soit X un champ de vecteurs formel sur $\mathbb{C}^\nu$ tel que $X(0) = 0$, et dont la partie linéaire X_{lin} est non nulle, sous forme diagonale (semi-simple) :*

$$X_{\text{lin}} = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial_{x_j}},$$

alors il existe un changement de variables formel $x = y + h(y)$ tangent à l'identité tel que le champ $\widetilde{X}$ exprimé dans les variables y soit conjugué à X et ne soit constitué que de termes résonants.

La démonstration de ce théorème s'effectue de manière algorithmique, et le calcul de h à un ordre donné peut s'effectuer à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Unicité de la forme normale et renormalisation

L'approche qualitative initiée par Poincaré se révèle extrêmement féconde et donnera naissance à la théorie des systèmes dynamiques. Une question naturelle est la suivante : y a-t-il unicité d'une forme normale d'un champ de vecteurs ? Les travaux de Baider [5, 6] donnent une réponse positive ; cependant, la forme normale construite par Baider n'est pas explicite ni calculable (de manière algorithmique) : dans la perspective de simplifier un champ afin d'étudier le comportement qualitatif des trajectoires, on n'exigera donc pas nécessairement l'unicité de l'objet simplifié ; en revanche, il est intéressant de pouvoir calculer de manière effective un tel objet. La forme normale de Poincaré-Dulac se calcule de manière algorithmique, par exemple. Il peut être encore plus intéressant aujourd'hui de pouvoir mettre en œuvre un calcul par ordinateur de ces objets, qui peuvent, pour un champ donné, être multiples.

Une forme « simplifiée » d'un champ est appelée par Écalle « forme prénormale ». Dans le cas d'un champ hamiltonien, le théorème de Birkhoff assure que toutes les formes prénormales sont égales (voir par exemple [26]). En revanche, certaines formes prénormales seront plus facilement calculables à l'aide d'un logiciel de calcul formel que d'autres. On développe ces problèmes dans la deuxième partie.

Ainsi, de nombreux travaux portent sur la recherche de l'unicité d'une forme normale, ou sur une simplification plus poussée que la forme de Poincaré-Dulac. On trouvera un certains nombres de résultats classiques et récents dans l'article de Stolovitch [50]. Dans l'optique d'obtenir une forme simplifiée

qui soit « plus simplifiée » que la traditionnelle forme de Poincaré-Dulac et algorithmique, nous présentons dans la première partie une amélioration de la normalisation classique, due à Giuseppe Gaeta ([27–29]). Cette technique de *renormalisation* est basée sur la résolution d'équations homologiques degré par degré, comme dans le calcul de la forme normale de Poincaré-Dulac, mais avec une simplification plus poussée des termes. Elle consiste en un bon compromis pour arriver à une forme normale possédant une certaine unicité, tout en ayant une bonne calculabilité, de manière algorithmique.

Équations à retard

On voit ensuite une extension de la normalisation au cas des équations différentielles à retard : on considère une équation du type

$$\dot{x} = L(x_t) + F(x_t)$$

où pour un $r > 0$ fixé, l'application $x : I \to \mathbb{K}$ est continue et dérivable, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, pour θ dans $[-r, 0]$; L est une application linéaire continue de C dans $\mathbb{K}$ et F une application continue de C dans $\mathbb{K}$. Ce type d'équation apparaît notamment dans la modélisation de phénomènes physiologiques (croissance de certains types de cellules) et fait l'objet d'études par des équipes mixtes INSERM-CNRS dans un but thérapeutique. On pourra consulter notamment les travaux de M. Adimy sur le sujet [1].

Comme c'est souvent le cas dans le domaine des systèmes dynamiques, de nombreux articles étudient le comportement à long terme des solutions d'équations différentielles à retard au voisinage d'objets invariants (cycles limites ou points d'équilibre) ; l'étude des bifurcations est également récurrente, et un excellent outil pour les déterminer est la mise sous forme « normale » ou du moins sous forme simplifiée.

La difficulté de ce type d'équations est que l'espace des conditions initiales n'est plus $\mathbb{K}^\nu$ mais un espace de fonctions (fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$) de dimension infinie.

Une méthode de normalisation, présentée notamment par T. Faria dans [25, 31] consiste à déterminer une variété centrale de dimension finie pour l'équation de départ, variété sur laquelle on peut simplifier, par changements de variables successifs, cette équation. On obtient ainsi une forme normale d'équation différentielle à retard.

Après avoir présenté cette méthode, nous utilisons la méthode de Gaeta pour améliorer celle de Faria. On obtient ainsi un résultat nouveau :

> Étant donnée une équation différentielle à retard, il existe une transformation formelle telle que, sur la variété centrale, l'équation différentielle de départ a une forme normale renormalisée au sens de Gaeta.

Calcul moulien

Dans l'optique d'approfondir et d'étendre les techniques de calcul des formes normales de champs de vecteurs, on présente dans la deuxième partie cette théorie dans le cadre du formalisme moulien de Jean Écalle ([17–19,21]). L'intérêt non négligeable de ce formalisme est d'une part son *universalité* (nous donnerons un sens plus précis à ce terme ultérieurement) mais aussi sa capacité à être utilisé par un logiciel de calcul formel comme Maple.

La quantité énorme d'informations que constituent les ouvrages d'Écalle peut malheureusement rebuter certains ; on pourra consulter [11] ou [45] pour une introduction exhaustive.

Nous présentons dans la deuxième partie des éléments utiles pour appréhender ces objets que sont les moules. Écalle et Vallet définissent les *formes prénormales continues* dans [20, 51] qui sont toutes autant de normalisations possibles d'un champ de vecteurs ; on détaille ici l'exposition de la procédure qui permet d'obtenir la forme *élaguée* car cette dernière se construit de manière analogue à la forme normale de Poincaré-Dulac.

Calcul formel

On présente un chapitre entier consacré à la mise en œuvre à l'aide d'un logiciel de calcul formel (avec Maple 13) du calcul de certains moules et de l'utilisation de ces moules pour le calcul de formes (pré)normales, ce qui constitue une nouveauté dans cette thématique.

Lorsque l'on calcule à l'aide d'un logiciel de calcul formel, par exemple la forme normale de Poincaré-Dulac de manière classique, on est amené à effectuer des tests d'annulation faisant intervenir les coefficients du champ, ce qui rend, en général, le calcul difficile, voire impossible, pour un ordinateur ; on pourra remarquer dans les feuilles de calcul que nous présentons (en annexe) que l'utilisation des moules ne nécessite pas ce type de test : c'est un des avantages frappants des moules, que de permettre une mise en œuvre dans un logiciel de calcul formel comme Maple ; par ailleurs, l'universalité des moules

(pour le calcul de la forme élaguée par exemple) simplifie le travail de codage pour plusieurs champs différents.

Le cas hamiltonien

On sait que la forme normale associée à un champ hamiltonien est unique ; cependant, la procédure de construction usuelle de la forme élaguée ne conserve pas la structure hamiltonienne à chaque étape, du fait du choix de la graduation habituelle, par composantes homogènes du champ.

On étend donc le formalisme moulien aux champs hamiltoniens en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées action-angle. On construit tout d'abord un algorithme de normalisation qui conserve la structure hamiltonienne des équations ; chaque étape est alors une transformation canonique : on a dû pour cela modifier la construction usuelle d'Écalle. L'intérêt de cette modification est que la forme prénormale obtenue à chaque étape est encore un champ hamiltonien ; c'est ce qui rend cette construction intéressante, par exemple lors d'un calcul par ordinateur.

En utilisant ce formalisme moulien qui conserve la structure hamiltonienne à chaque étape, on redémontre les parties formelles des théorèmes de la forme normale de Birkhoff, et de Kolmogorov sur la persistance des tores invariants d'un Hamiltonien complètement intégrable perturbé.

Problèmes de convergence

Lorsque l'on calcule une forme normale d'un champ de vecteurs, on procède généralement en décomposant le champ en série formelle et en effectuant des étapes de « normalisation formelle » successives, puis on étudie la convergence éventuelle des deux séries formelles obtenues : la série donnant la forme normale du champ et la série donnant le changement de variables.

Les problèmes de convergence lors de la normalisation d'un champ de vecteurs pour obtenir la forme de Poincaré-Dulac proviennent (historiquement du moins) de l'accumulation de *petits diviseurs*.

Un intérêt majeur du calcul moulien réside dans le fait qu'il permet d'étudier de manière puissante et originale la convergence (analytique) des séries formelles qu'il définit, principalement par un réordonnement des termes, ce

qu'Écalle appelle *arborification* : on contourne par cette méthode l'accumulation des petits diviseurs. Nous présentons brièvement cette notion au chapitre 7 avec une application : la démonstration de la condition de Brjuno pour la normalisation des champs de vecteurs holomorphes (voir [8]).

PARTIE I

FORMES NORMALES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À RETARD

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Nous rappelons dans ce chapitre quelques notions classiques de systèmes dynamiques ; lorsqu'on étudie la dynamique d'un système différentiel, que ce soit une équation différentielle ordinaire ou à retard, on commence par déterminer les objets *invariants*, qui peuvent être de natures diverses (points fixes, variétés, orbites périodiques). Puis on étudie l'évolution du système au voisinage de ces objets invariants. On pourra trouver les démonstrations des théorèmes de ce chapitre dans [53] ou [36] pour une introduction.

On fixe une norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^\nu$ et on considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^\nu$ est de classe $\mathscr{C}^1$, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^\nu$. On rappelle les définitions suivantes :

1.1. Points fixes

Un point fixe de (1.1) est une solution constante x_0, *i.e.* un élément x_0 de U tel que $f(x_0) = 0$. Le point fixe est dit *hyperbolique* si les valeurs propres de $Df(x_0)$ ont toutes une partie réelle non nulle.

1.2. Notions de stabilité

***Définition 1.2.1* (Stabilité)**. — Soit $\bar{x}$ une solution de (1.1) définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$, a réel. On dit que $\bar{x}$ est *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t_0 > a$, pour toute solution y vérifiant $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$, alors $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ pour tout $t > t_0$.

Une solution qui n'est pas stable est dite *instable*.

Définition 1.2.2. — Soit $\bar{x}$ une solution de (1.1). Cette solution est dite *asymptotiquement stable* si elle est stable, et si pour toute solution y de (1.1), il existe une constante $\delta > 0$ telle que si $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$, alors $\lim_{t \to +\infty} |x(t) - y(t)| = 0$.

1.3. Ensembles invariants

L'étude des systèmes dynamiques passe par la connaissance de leurs objets invariants. Rappelons-en la définition :

Définition 1.3.1. — L'ensemble S est dit invariant sous le champ de vecteurs $\dot{x} = f(x)$ si toute solution x de l'équation différentielle ayant une condition initiale x_0 appartenant à S vérifie $x(t) \in S$ pour tout t réel. On dira que l'ensemble est positivement invariant si cette propriété est vraie pour tout $t > 0$.

L'ensemble invariant le plus simple possible est un point fixe ou d'équilibre. Ensuite viennent les orbites périodiques. Mais on ne peut pas se limiter à ces deux catégories. La recherche de forme normale étant liée à l'étude de la partie linéaire d'un champ de vecteurs, on regarde d'abord les ensembles invariants d'un champ linéaire.

1.3.1. Sous-espaces stables d'un champ linéaire autonome. — Considérons l'équation linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

où A est une matrice constante carrée d'ordre n, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. On peut alors écrire $\mathbb{R}^n$ comme une somme directe de trois sous-espaces vectoriels :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

où E^s (respectivement E^u, E^c) sont les sous-espaces propres généralisés de A correspondant aux valeurs propres de A de partie réelle strictement négative (respectivement strictement positive, nulle).

Rappelons enfin que le sous-espace propre généralisé correspondant à la valeur propre λ est $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id})^{m_\lambda}$ où m_λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de A ; c'est aussi la dimension de $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id})^{m_\lambda}$.

Chacun de ces trois sous-espaces est invariant par le flot du champ linéaire ; ce sont respectivement les espaces stable (E^s), instable (E^u), et centre ou central (E^c).

1.3.2. Variétés invariantes d'un champ autonome. — Pour un champ quelconque, possédant un point fixe à l'origine :

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

et en notant $A = Df(0)$, on a le théorème suivant (dit théorème de la variété stable, ou instable ou centrale) :

Théorème 1.3.2. — *Si f est de classe $\mathscr{C}^s, s \geqslant 2$, et les espaces E^s, E^u et E^c sont respectivement de dimension p, q, r, alors le point fixe 0 du champ admet trois variétés invariantes de classe $\mathscr{C}^s$: une variété stable $W^s_{\text{loc}}(0)$ de dimension p, une variété instable $W^u_{\text{loc}}(0)$ de dimension q et une variété centrale $W^c_{\text{loc}}(0)$ de dimension r.*

Ces trois variétés ont en commun le point d'équilibre 0 et sont chacune tangente respectivement au sous-espace correspondant du champ linéaire en 0. De plus, ce sont localement des graphes au-dessus des espaces correspondant :

$$W^s_{\text{loc}}(0) = \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c, v = h^s_v(u), w = h^s_w(u), Dh^s_v(0) = 0, Dh^s_w(0) = 0, |u| \text{ assez petit}\Big\};$$

$$W^u_{\text{loc}}(0) = \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c, u = h^u_u(v), w = h^u_w(v), Dh^u_u(0) = 0, Dh^u_w(0) = 0, |v| \text{ assez petit}\Big\};$$

$$W^c_{\text{loc}}(0) = \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c, u = h^c_u(w), v = h^c_v(w), Dh^c_u(0) = 0, Dh^c_v(0) = 0, |w| \text{ assez petit}\Big\};$$

$W^s_{\text{loc}}(0)$ et $W^u_{\text{loc}}(0)$ sont uniques, ce qui n'est pas le cas a priori de $W^c_{\text{loc}}(0)$.

Il faut bien noter qu'on parle de variété invariante d'un point d'équilibre ici. Lorsque le point d'équilibre est hyperbolique (pas de valeur propre de partie réelle nulle, *i.e.* $E^c = \emptyset$), ce théorème assure que les trajectoires ayant des conditions initiales « proches » du point d'équilibre se comportent comme les trajectoires du système linéarisé.

En revanche, il ne semble pas possible de relier le comportement des trajectoires sur la variété centrale à celui des trajectoires sur E^c dans le cas où ce dernier est non vide.

1.4. Variété centrale

Nous reprenons le livre de Wiggins [53] pour cet aparté. L'intérêt des variétés centrales dans un système dynamique est en général de réduire le nombre de degrés de liberté. De nombreux exemples se trouvent notamment dans [9].

Ce sera a fortiori d'une grande utilité dans le cas d'un système dynamique de dimension infinie, comme une équation différentielle à retard.

Considérons un champ de vecteurs de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y) \\ \dot{y} = By + g(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s, \end{cases} \tag{1.2}$$

où

$$f(0,0) = 0, \quad Df(0,0) = 0,$$
$$g(0,0) = 0, \quad Dg(0,0) = 0.$$

Avec ces notations, A est une matrice carrée d'ordre c dont les valeurs propres sont toutes de parties réelles nulles et B une matrice carrée d'ordre s dont les valeurs propres sont toutes de parties réelles strictement négatives ; f et g sont des fonctions de classe au moins $\mathscr{C}^r, r \geqslant 2$. La définition d'une variété centrale est alors la suivante :

Définition 1.4.1. — Une variété invariante d'un système dynamique est une variété centrale si c'est un graphe local au-dessus de l'espace central, tangent à celui-ci :

$$W^c(0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s, y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\right\},$$

pour δ assez petit.

Le théorème qui suit assure l'existence d'une variété centrale :

Théorème 1.4.2. — *Il existe une variété centrale pour le système* (1.2) *de classe* $\mathscr{C}^r$. *La dynamique de* (1.2) *restreinte à la variété centrale est, pour* u *assez petit, donnée par le champ de vecteur suivant, de dimension* c *:*

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), u \in \mathbb{R}^c. \tag{1.3}$$

Le résultat suivant implique que la dynamique de (1.3) près de $u = 0$ détermine la dynamique de (1.2) près de $(x,y) = (0,0)$.

Théorème 1.4.3. — *i) Si la solution nulle de* (1.3) *est stable (resp. asymptotiquement stable, instable) alors la solution nulle de* (1.2) *est stable (resp. asymptotiquement stable, instable).*

ii) Dans le cas où la solution nulle de (1.3) *est stable. Alors, si* $(x(t), y(t))$ *est une solution de* (1.2) *avec* $(x(0), y(0))$ *assez petit, il existe une solution* $u(t)$

de (1.3) *telle que, lorsque* $t \to +\infty$,

$$x(t) = u(t) + O(\mathrm{e}^{-\gamma t})$$
$$y(t) = h(u(t)) + O(\mathrm{e}^{-\gamma t}),$$

où γ *est une constante* > 0.

Ainsi, lorsque les conditions initiales du système de départ sont assez proche du point d'équilibre, les trajectoires qui en sont issues approchent de manière asymptotique une trajectoire sur la variété centrale.

1.5. Calcul explicite des variétés centrales

Le problème est maintenant de calculer explicitement la variété centrale, c'est-à-dire la fonction h. Nous allons obtenir une équation vérifiée par h.

On écrit la variété centrale sous la forme classique :

$$W^c(0) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s, y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\Big\},$$

où δ est un réel strictement positif assez petit.

Un point (x,y) de $W^c(0)$ vérifie

$$y = h(x).$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \tag{1.4}$$

Tout point de $W^c(0)$ vérifie le système (1.2), d'où :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,h(x)) \\ \dot{y} = Bh(x) + g(x,h(x)) \end{cases}$$

et en réinjectant dans (1.4), on obtient :

$$Dh(x)\Big[Ax + f(x,h(x))\Big] = Bh(x) + g(x,h(x));$$

ce qui se réécrit :

$$\mathcal{N}(h(x)) \equiv Dh(x)\Big[Ax + f(x,h(x))\Big] - Bh(x) - g(x,h(x)) = 0.$$

Cette dernière équation est une équation aux dérivées partielles quasilinéaire que doit satisfaire h pour que son graphe soit une variété centrale. Cependant, il est souvent plus difficile de résoudre cette équation que le problème de départ.

1.6. Redressement des variétés stable et instable

Nous décrivons sur un exemple classique et pour une équation différentielle ordinaire dans le plan, l'idée de redressement de variété que nous mettrons ensuite en œuvre dans les équations différentielles à retard. On pourra se référer à [48] ou à [39] pour une étude plus approfondie.

Considérons une équation différentielle ordinaire dans le plan (x,y) telle que l'origine soit un point fixe hyperbolique, et telle que les espaces stables et instables soient portés par les axes respectivement en x et en y. Ceci revient à supposer que la partie linéaire de ce système différentiel est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$ et $\mu < 0$.

L'espace invariant stable est $E^s = \{x = 0\}$ et l'espace invariant instable est $E^u = \{y = 0\}$. Le théorème de la variété stable (resp. instable) assure l'existence d'une fonction h_s (resp. h_u) définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine, et telle que la variété stable $W^s(0)$ (resp. la variété instable $W^u(0)$) s'écrive :

$$W^s(0) = \{(x,y) \in \mathcal{V}, x = h_s(y)\}$$

$$\Big(\text{resp. } W^u(0) = \{(x,y) \in \mathcal{V}, y = h_u(x)\}.\Big)$$

Le problème est alors de déterminer une éventuelle forme explicite de h_s (resp. h_u). Pour résoudre ce problème on essaye de transférer la complexité des expressions de h_s et h_u dans le système de coordonnées : on cherche à simplifier la représentation géométrique de $W^s(0)$ et $W^u(0)$, même si le changement de coordonnées est compliqué.

1.6.1. Méthode de redressement. — On cherche T_R tel que $(X,Y) = T_R(x,y)$ sur un domaine local $(\mathcal{V})$, de manière à ce que, dans les coordonnées (X,Y), l'image par T_R de $W^s(0)$ soit $\{X = 0\}$ et que l'image de $W^u(0)$ soit $\{Y = 0\}$. Naturellement T_R doit être tangent à l'identité de manière à préserver la partie linéaire du champ.

Le théorème de la variété stable (et instable) donne l'existence de h_s et h_u. On peut donc définir le changement de coordonnées suivant :

$$X = x - h_s(y)$$

$$Y = y - h_u(x)$$

Par ce changement de coordonnées, on obtient bien :

$$X = 0 \iff x = h_s(y)$$

$$Y = 0 \iff y = h_u(x).$$

Un changement de coordonnées adéquat qui redresse les variétés stables et instables (*i.e.* qui vérifie les conditions ci-dessus) permet donc de déterminer l'expression des paramétrisations h_s et h_u des variétés stables et instables. On peut alors chercher ce changement de coordonnées comme un changement de variables dans un système différentiel, et par conséquent appliquer les outils de recherche de forme normale que l'on verra par la suite.

Essayons de préciser la forme normale que l'on recherche : dans les nouvelles coordonnées (X,Y), les variétés $\{X = 0\}$ et $\{Y = 0\}$ doivent être invariantes par le flot, ainsi on doit avoir :

$$X = 0 \Longrightarrow \dot{X} = 0$$
$$\text{et } Y = 0 \Longrightarrow \dot{Y} = 0.$$

On peut donc rechercher une forme normale du système du type :

$$\begin{cases} \dot{X} = \lambda X + XR_1(X,Y) \\ \dot{Y} = \mu Y + YR_2(X,Y) \end{cases}$$

où R_1 et R_2 sont des séries entières en X et Y.

On cherche de plus la simplification dynamique (et non plus géométrique) suivante : on demande que la dynamique soit linéaire sur chacune des variétés $W^s(0)$ et $W^u(0)$. Ainsi, l'ensemble $\{X = 0\}$ doit être invariant par le flot, et la dynamique sur cette variété doit être donnée par $\dot{Y} = \mu Y$; on doit donc avoir

$$X = 0 \Longrightarrow \dot{X} = 0 \text{ et } \dot{Y} = \mu Y, \text{ donc } R_2(0,Y) = 0,$$

donc on peut mettre X en facteur dans R_2. De même $\{Y = 0\}$ doit être invariant par le flot et la dynamique dessus doit être donnée par $\dot{X} = \lambda X$, donc on peut mettre Y en facteur dans R_1.

On cherche finalement un changement de coordonnées supplémentaires $(X,Y) \to (\widetilde{X},\widetilde{Y})$ tel que le système précédent se réécrive :

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{X}} = \lambda \widetilde{X} + XY\widetilde{R}_1(X,Y) \\ \dot{\widetilde{Y}} = \mu \widetilde{Y} + XY\widetilde{R}_2(X,Y) \end{cases} \tag{1.5}$$

où $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ sont des séries en $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$.

Résumons : la méthode de redressement d'une variété invariante d'un champ de vecteurs consiste en l'alternative suivante :

- soit on peut calculer la ou les fonctions h_u, h_s, h_c, ce qui donne alors le changement de variables ;

– soit le calcul n'est pas accessible et on peut alors chercher une forme normale du type (1.5) avec les outils des formes normales (méthodes pas-à-pas, degré par degré...), ce qui donne alors les fonctions h_u, h_s et h_c.

1.6.2. Un exemple. — Considérons le système autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \tag{1.6}$$

où x et y sont des fonctions inconnues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

L'origine est un point fixe hyperbolique du champ et l'espace propre stable est $E_s = \{x = 0\}$ et l'espace instable est $E_u = \{y = 0\}$.

La variété instable W^u est, d'après le théorème, un graphe local au-dessus de E_u, donc il existe une fonction h définie pour $|x| < \delta$ (pour un certain δ) telle que : $W^u = \{(x, h(x)), |x| < \delta\}$. La méthode pour calculer une expression explicite de h à un ordre donné est alors la suivante : on cherche un changement de variables $(x, y) \longrightarrow (u, v)$ tangent à l'identité, tel que dans les coordonnées (u, v), l'équation de W^u soit $\{v = 0\}$. De plus, W^u est un ensemble invariant par le flot de (1.6). Une condition nécessaire pour que W^u ait pour équation $\{v = 0\}$ en coordonnées (u, v) est donc que $v = 0 \Rightarrow \dot{v} = 0$; par ailleurs, comme l'espace instable dans les coordonnées (u, v) est $\{v = 0\}$ et que la variété instable est un graphe au-dessus de l'espace instable, on pourra également écrire $v = \varphi(u)$.

Comme on cherche un changement de variables tangent à l'identité, dans cet exemple, on prend $x = u$ et $y = v + f(u, v)$. Dans ces coordonnées le champ se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = -v + g(u, v) \end{cases}$$

avec $g(u, 0) = 0, \forall u$, d'après ce qui précède.

Ici, le changement de variable peut donc s'écrire avec u en facteur ; On écrit $f(u) = au^2 + \cdots$.

À l'ordre 2, le changement de variables ci-dessus donne : $\begin{cases} \dot{x} = \dot{u} \\ \dot{y} = \dot{v} + f'(u)\dot{u} = \dot{v} + 2au\dot{u} \end{cases}$

Donc le système se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} + 2au\dot{u} = -v - au^2 + u^2 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = -v + (1-3a)u^2 \end{cases}$$

et comme les termes d'ordre 2 doivent être nuls, on obtient $a = \frac{1}{3}$. Le changement de variable à l'ordre 2 est donc donné par :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v + \frac{1}{3}u^2 \end{cases}$$

d'où $v = y - \frac{1}{3}x^2$ et comme W^u a pour équation $v = 0$, on obtient son équation en coordonnées (x, y) : $y = \frac{1}{3}x^2$.

1.7. Redressement de variété centrale

Le principe de redressement reste le même pour une variété centrale d'un point d'équilibre non hyperbolique.

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y - x^5 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

L'origine $(0,0)$ est un point fixe du champ de vecteurs associé, et la partie linéarisée du champ en $(0,0)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'origine possède donc une variété centrale portée par l'axe des x et on peut écrire cette variété comme $W^c = \{(x, h(x)),\ \text{pour } x \text{ assez petit}\}$.

On cherche alors un changement de variables $(u,v) \mapsto (x,y)$ tangent à l'identité, tel que, dans les variables (u,v), la variété invariante W^c ait pour équation $\{v = 0\}$ dans un voisinage de l'origine. On pose donc $v = y - h(x)$ et $x = u$.

Écrivons alors $h(u) = au^2 + bu^3 + O(u^4)$; le système devient :

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 v + au^4 + (b-1)u^5 + \cdots \\ \dot{v} = -v + (1-a)u^2 - bu^3 + 2au^3 v - 3bu^4 v + \cdots \end{cases}$$

Comme W^c est une variété invariante, $v = 0 \Rightarrow \dot{v} = 0$, donc dans la deuxième équation on obtient $a = 1$ et $b = 0$; finalement, $h(u) = u^2 + O(u^4)$.

Le changement de variables $x = u$, $y = v + u^2$ donne alors un redressement de W^c à l'ordre 4.

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS SUR LES ÉQUATIONS À RETARD

Les équations différentielles à retard interviennent dans de nombreux domaines de la physique (électronique, calcul de marées) mais peuvent également servir à modéliser des phénomènes physiologiques (croissance des cellules sanguines).

La première difficulté qui apparaît dans l'étude de ces équations, c'est le fait que l'espace des conditions initiales n'est pas de dimension finie ; on verra comment contourner cette difficulté au cours de ce chapitre et du suivant.

Nous présentons ici quelques éléments propres à ces équations et quelques résultats utiles. On trouvera toutes les précisions et démonstrations dans [14, 32, 52].

2.1. Existence et unicité d'une solution

On considère dans cette section des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = F(y(t), y(t-r)), \quad t \geqslant 0 \tag{2.1}$$

où $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, lipschitzienne, et r un paramètre réel fixé, $r \geqslant 0$. Ceci ne décrit pas toutes les équations différentielles à retard possibles mais reste suffisant pour définir les notions de base.

Une solution de (2.1) est une application dérivable $y : [-r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ vérifiant (2.1) pour $t \geqslant 0$. La première question qui se pose à nous est de déterminer ce qu'est une *condition initiale* pour cette équation. On peut observer qu'une condition initiale convenable est une fonction $\varphi : [-r, 0) \to \mathbb{R}^n$ continue.

2.1.1. La méthode des pas. — Cette méthode est exposée notamment dans [24]. Si on impose la condition $z(t) = \varphi(t)$ pour $-r \leqslant t \leqslant 0$ où φ est une fonction continue sur $[-r, 0]$ donnée, l'équation (2.1) devient une équation

différentielle ordinaire :

$$\dot{y}(t) = F(y(t), \varphi(t-r)) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant r \text{ et } y(0) = \varphi(0). \tag{2.2}$$

Étant données les hypothèses sur F et le théorème de Cauchy-Lipschity, cette équation différentielle ordinaire non autonome a une unique solution y_1 sur $[0,r]$, et cette solution coïncide avec la solution de (2.1) sur $[0,r]$ ayant pour fonction initiale φ sur $[-r,0]$. On peut alors, connaissant y sur $[-r,r]$ en déduire une équation différentielle ordinaire vérifiée par y sur $[r,2r]$ et ainsi de suite... On obtient finalement une solution globale y définie sur $[-r,+\infty)$, définie sur chaque intervalle de la forme $[(k-1)r,kr]$, $k \in \mathbb{N}$, comme $y_0(t) = \varphi(t)$ pour $-r \leqslant t \leqslant 0$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, y_k est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y_k((k-1)r) = y_{k-1}((k-1)r) \\ \dot{y}_k(t) = F(y_k(t), y_{k-1}(t)), \quad \text{pour } (k-1)r \leqslant t \leqslant kr, \quad k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Observons par ailleurs que la régularité de la solution de (2.1) augmente avec t ; en effet, si φ est continue, l'équation (2.2) assure que $\dot{y}_1$ est continue, donc y_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,r]$, etc.

On peut finalement énoncer le théorème suivant, qui assure l'existence et l'unicité d'une solution pour une équation telle que (2.1) :

Théorème 2.1.1. — *Considérons* (2.1) *et soit φ une fonction continue sur $[-r,0]$ à valeurs $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution y à l'équation* (2.1) *définie sur $[-r,+\infty[$ et telle que $y(t) = \varphi(t)$ sur $[-r,0]$. Cette solution est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[(k-1)r,kr]$ pour tout entier naturel k.*

L'inconvénient de ce théorème, c'est qu'il ne dit rien sur une éventuelle solution définie pour $t \leqslant -r$. Il existe des résultats d'existence de telles solutions dans [32], mais imposant une régularité plus forte que la seule continuité de la fonction initiale φ. De plus, il n'y a alors pas nécessairement unicité d'une telle solution, ce qui complique les choses...

2.2. Équations à retard linéaires autonomes

Comme pour les équations différentielles ordinaires, l'étude des équations linéaires est primordiale, car lorsque l'on considère l'équation (2.1) dans une approche « dynamique », on va s'intéresser aux objets invariants suivant : points d'équilibre et solutions périodiques. Un point d'équilibre pour cette équation est une solution constante $y(t) = \bar{y}$ telle que $F(\bar{y},\bar{y}) = 0$. Par ailleurs, quitte à changer l'échelle des temps, on supposera par la suite que $r = 1$.

L'étape suivante est naturellement de linéariser l'équation (2.1) au voisinage de $\bar{y}$. En notant B_0 la matrice carrée $D_1F(\bar{y},\bar{y})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et B_1 la matrice $D_2F(\bar{y},\bar{y})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le linéarisé de l'équation (2.1) est :

$$\dot{y}(t) = B_0 y(t) + B_1 y(t-1), \quad t \geqslant 0. \tag{2.3}$$

2.2.1. Équation caractéristique. — La résolution « point par point » des équations linéaires autonomes à retard telles que (2.3) se fait en utilisant la transformation de Laplace et le théorème des résidus.

Si l'on cherche les solutions de (2.3) de la forme $y(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$ où λ est complexe et c dans $\mathbb{R}^n$, non nul, une telle fonction peut être solution si et seulement si la matrice $\Delta(\lambda)$ n'est pas inversible, où

$$\Delta(\lambda) = \lambda\,\mathrm{Id} - B_0 - B_1\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On cherche donc à résoudre l'équation sur $\mathbb{C}$ d'inconnue λ :

$$\det\Delta(\lambda) = 0. \tag{2.4}$$

Définition 2.2.1. — L'équation (2.4) est *l'équation caractéristique* associée à l'équation linéaire autonome (2.3). La matrice $\Delta(\lambda)$ est la matrice caractéristique.

Une manière plus générale d'obtenir l'équation caractéristique est la suivante : pour la solution y on note $\mathscr{L}(y)$ sa transformée de Laplace, définie par :

$$\mathscr{L}(y)(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} y(t)dt, \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si on applique la transformée de Laplace à l'équation linéaire autonome (2.3) avec la condition initiale

$$y(\theta) = \varphi(\theta) \quad \text{pour } -1 \leqslant \theta \leqslant 0,$$

on obtient :

$$\Delta(\lambda)\mathscr{L}(y)(\lambda) = \varphi(0) + B_1 \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t}\varphi(t-1)dt. \tag{2.5}$$

L'idée est ensuite d'obtenir une représentation explicite de la solution y en utilisant la transformée de Laplace inverse, le théorème de Cauchy et le théorème des résidus. Il y a pour cela besoin de bonnes estimations sur $\Delta(\lambda)^{-1}$ lorsque $|\lambda|$ tend vers $+\infty$.

Revenons à l'équation caractéristique $\det\Delta(\lambda) = 0$. Les équations de ce type sont étudiées dans [14], et on a le résultat suivant :

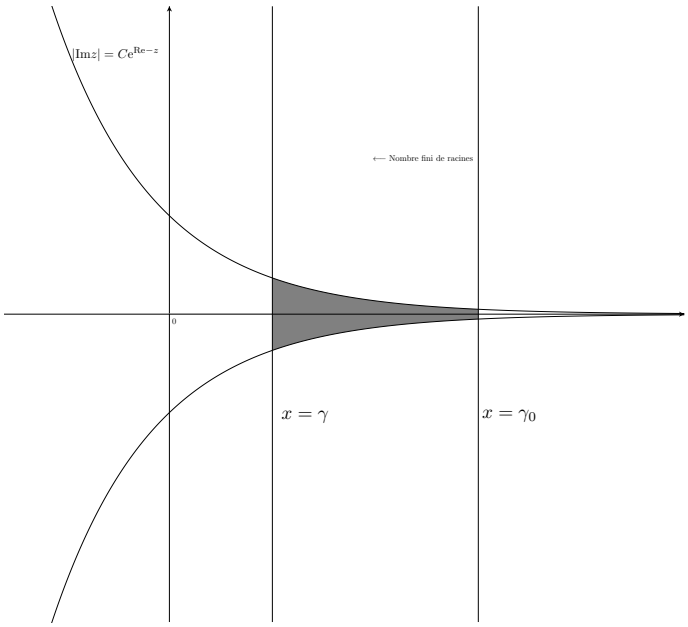

FIGURE 1. La répartition des racines de l'équation transcendante (2.4)

Lemme 2.2.2. — *Les racines de l'équation* (2.4) *ont les propriétés suivantes : il existe une constante* γ_0 *réelle telle que*

- *Il existe un demi-plan* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(\lambda) > \gamma_0\}$ *ne comportant aucune racine de* (2.4)*;*
- *Si* γ_- *et* γ_+ *sont deux réels, le nombre de racines de* (2.4) *dans une bande verticale donnée* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \gamma_- < \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \gamma_+\}$ *est fini ;*
- *Les racines* λ *de* (2.4) *dans le demi-plan gauche vérifient :*

$$|\,\mathrm{Im}(\lambda)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\lambda)},$$

où C *est une constante dépendant de* B_0 *et* B_1.

La figure 2.2.1 de la présente page illustre ce lemme. Il n'y a qu'un nombre fini de racines pour l'équation (2.4) dans la partie grisée.

Le théorème suivant montre alors que le comportement asymptotique des solutions de l'équation (2.3) est directement lié aux racines de l'équation caractéristique (2.4) :

Théorème 2.2.3. — *Soit* y *une solution de* (2.3) *de condition initiale* φ*, où* $\varphi \in C$*. Pour tout* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tel que l'équation* (2.4) *n'a pas de solutions sur la droite*

$\mathrm{Re}(\lambda) = \gamma$, *y a le développement asymptotique suivant :*

$$y(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t)\mathrm{e}^{\lambda_j t} + o(\mathrm{e}^{\gamma t}) \quad \textit{pour } t \to +\infty,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *sont les racines de l'équation caractéristique* (2.4) *de partie réelle plus grande que* γ *(qui sont en nombre fini), et où* $p_1, \ldots, p_m$ *sont des polynômes en* t.

Corollaire 2.2.4. — *Toutes les solutions de l'équation linéaire autonome* (2.3) *tendent vers* 0 *de manière exponentielle lorsque* $t \to +\infty$ *si et seulement si l'équation caractéristique* (2.4) *n'a pas de racines dans le demi-plan* $\{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0\}$.

Démonstration. — La preuve complète de ce théorème se trouve notamment dans [14]. Elle est basée sur la représentation de la solution y suivante, d'après le lemme 2.2.2 et l'égalité (2.5).

$$y(t) = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{\gamma_0 - \mathbf{i}\infty}^{\gamma_0 + \mathbf{i}\infty} \mathrm{e}^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} [\varphi(0) + B_1 \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} \varphi(t-1) dt] d\lambda.$$

□

Ainsi, le comportement asymptotique de solutions au voisinage de points fixes de l'équation (2.1) dépend directement des racines de l'équation (2.4). Cependant le théorème précédent soulève les questions suivantes : lorsque $\gamma \to -\infty$, le nombre de racines m augmente ; la série définissant y est-elle alors convergente ? si oui, définit-elle bien une solution de l'équation (2.1) ?

Ces questions sont notamment à l'origine de l'approche fonctionnelle des équations différentielles à retard que nous présentons dans la section suivante.

2.3. Cadre fonctionnel des équations à retard

2.3.1. Cadre général. — Le théorème d'existence et d'unicité d'une solution si une fonction initiale est donnée permet de définir un flot, ou plus exactement un semi-flot. Nous notons C le $\mathbb{C}$-espace des fonctions continues sur $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, muni de la norme :

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-r,0]} |\varphi(\theta)|.$$

Avec cette norme, C est alors un espace de Banach. Par ailleurs, pour $\varphi \in C$, nous notons $x(\cdot;\varphi)$ la solution de l'équation (2.1)

$$\dot{y}(t) = F(y(t), y(t-r)), \quad t \geqslant 0 \tag{2.1}$$

ayant pour condition initiale la fonction φ (*i.e.* égale à φ sur $[-r,0]$). On utilise la « notation-définition » suivante :

Définition 2.3.1. — Si $\varphi \in C$, *l'état* de la solution $x(\cdot;\varphi)$ à l'instant $t \geqslant 0$ est la fonction de C notée $x_t(\cdot;\varphi)$ et définie par :

$$x_t(\theta;\varphi) = x(t+\theta;\varphi), \quad \theta \in [-r,0].$$

On pourra ainsi définir le semi-flot $\Sigma(t;\cdot)$ de la manière suivante, pour $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \Sigma(t,\cdot) : C &\to C \\ \varphi &\mapsto x_t(\cdot;\varphi) \end{aligned}$$

2.3.2. Cas linéaire. — La linéarisation de l'équation de départ (2.1) au voisinage d'un point d'équilibre conduit à la linéarisation du semi-flot Σ en un opérateur $T(t)$ définissant un semi-groupe fortement continu : $T(t)$ est alors un endomorphisme continu de C défini par :

$$T(t)\varphi = x_t(\cdot;\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(A)$$

On considère le cas des équations différentielles à retard linéaires. On écrit de manière générale une telle équation :

$$\dot{z}(t) = L(z_t), \tag{2.6}$$

où $z : I \to \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue, et $L : C \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire continue. L'ensemble C est l'ensemble des fonctions continues sur $[-r,0]$ dans $\mathbb{R}^n$, où r est un réel > 0 fixé une fois pour toutes. Muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{\theta\in[-r,0]} \|\varphi(\theta)\|$, c'est un espace de Banach.

Pour tout t dans I, z_t est dans C, définie par : $z_t(\theta) = z(t+\theta)$. Ainsi, une solution de (2.6) est une fonction z de $[\sigma - r, \sigma + A]$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\sigma \in \mathbb{R}$ et $A > 0$, qui vérifie l'équation (2.6) pour tout t dans $[\sigma, \sigma + A)$.

Remarque 2.3.2. — Cette écriture permet de définir des classes d'équations beaucoup plus larges que les seules équations différentielles à retard ; par exemple, le cas où $L(\varphi) = \varphi(0)$ donne l'équation différentielle $\dot{z}(t) = z(t)$. Le cas $L(\varphi) = \varphi(-1)$ (si l'on suppose que $r > 1$) donne l'équation $\dot{z}(t) = z(t-1)$.

Une condition initiale pour (2.6) est une fonction φ appartenant à C.

Nous allons plutôt considérer par la suite les solutions de (2.6) comme des éléments de l'espace de Banach C. Ainsi, si $\varphi \in C$, on notera $z_t(\cdot,\varphi)$ la solution « translatée de t » de (2.6) (élément de C) ayant pour condition initiale la fonction φ. On a donc :

$$\forall \theta \in [-r,0],\ z_0(\theta,\varphi) = \varphi(\theta),\ \text{et}\ \forall t \in [\sigma,\sigma+A], \forall \theta \in [-r,0], z_t(\theta,\varphi) = z(t+\theta,\varphi),$$

où z est la solution de (2.6) qui a pour condition initiale φ.

Ceci nous permet de définir un endomorphisme sur C.

Définition 2.3.3. — Pour t dans $[\sigma,\sigma+A]$, on définit $T(t)$ l'application de C dans C qui a un élément φ de C associe $z_t(\cdot,\varphi)$.

On a donc $z_t(\cdot,\varphi) = T(t)\varphi$. On peut déduire de L quelques propriétés de T.

Proposition 2.3.4. — *T est un $\mathscr{C}^0$semi-groupe, c'est-à-dire que :*

(i) $T(0) = \mathrm{Id}_C$ *;*

(ii) $\forall t_1, t_2 \geqslant 0, T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2)$*;*

(iii) $\forall \varphi \in C, \lim\limits_{t\downarrow 0} \|T(t)\varphi - \varphi\| = 0.$

2.3.3. Cadre infinitésimal. — On peut définir le *générateur infinitésimal* de T comme une application linéaire A définie sur un sous-ensemble $\mathfrak{D}(A)$ de C à valeurs dans C, par :

$$A\varphi = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\big(T(t)\varphi - \varphi\big).$$

On a de plus les propriétés suivantes :

Proposition 2.3.5. — *(i) Pour tout φ dans C, $t \mapsto T(t)\varphi$ est une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans C ;*

(ii) A est un opérateur continu fermé défini sur un ensemble dense ;

(iii) pour tout φ dans $\mathfrak{D}(A)$, l'application $t \mapsto T(t)\varphi$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = AT(t)\varphi = T(t)A\varphi. \tag{2.7}$$

Enfin, on a une expression de A : c'est la dérivation usuelle sur les fonctions de C qui vérifient la condition de raccord.

Proposition 2.3.6. — *L'ensemble de définition de A est donné par :*

$$\mathfrak{D}(A) = \left\{\varphi \in C, \frac{d\varphi}{d\theta} \in C, \frac{d\varphi}{d\theta}(0) = L(\varphi)\right\},$$

et l'opérateur A a pour expression :

$$A\varphi = \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

Nous allons nous intéresser de plus près au générateur infinitésimal A et à son spectre. Rappelons tout d'abord les définitions suivantes :

Définition 2.3.7. — Soit B un opérateur (endomorphisme linéaire continu) sur un espace de Banach C. L'ensemble résolvant de B est l'ensemble $\rho(B)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \operatorname{Id}_C - B$ a un inverse continu défini sur un domaine dense. On note alors $R(\lambda, B)$ cet inverse (la résolvante). Le *spectre* de B est le complémentaire de $\rho(B)$: $\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B)$.

On définit alors :

- $\sigma_R(B)$: le spectre *résiduel* de B est l'ensemble des λ de $\sigma(B)$ tels que $R(\lambda, B)$ existe mais n'est pas défini sur un domaine dense ;
- $\sigma_C(B)$: le spectre *continu* de B est l'ensemble des λ de $\sigma(B)$ tels que $R(\lambda, B)$ existe mais n'est pas continu ;
- $\sigma_P(B)$: le spectre *ponctuel* de B est l'ensemble des λ de $\sigma(B)$ tels que $\lambda \operatorname{Id}_C - B$ n'a pas d'inverse.

La définition de A permet de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.3.8. — *A étant le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu T, le spectre de A est son spectre ponctuel.*

$$\sigma(A) = \sigma_P(A).$$

Pour $\lambda \in \sigma(A)$, on notera $\mathscr{M}_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id}_C - A)^k$ l'espace propre généralisé associé à λ. L'idée est ensuite de décomposer l'espace des phases $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$ où $P_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.

Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et $d = \dim \mathscr{M}_\lambda$. Notons $\Phi_\lambda = (\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_d^\lambda)$ une base de $\mathscr{M}_\lambda$, où $\varphi_i^\lambda \in \mathfrak{D}(A) \subset C$. Comme $\mathscr{M}_\lambda$ est invariant par A, pour tout i, $A\varphi_i^\lambda \in \mathscr{M}_\lambda$, donc il existe une matrice carrée B_λ d'ordre d telle que :

$$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda.$$

Proposition 2.3.9. — *B_λ admet λ comme seule valeur propre.*

Comme $A\varphi = \dfrac{d\varphi}{d\theta}$, on en déduit $\dfrac{d}{d\theta}\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$ d'où :

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)\mathrm{e}^{B_\lambda \theta}, \quad \forall \theta \in [-r, 0].$$

Par ailleurs, d'après (2.7) et la définition de B_λ :

$$\begin{aligned} T(t)A\Phi_\lambda &= T(t)\Phi_\lambda B_\lambda \\ &= AT(t)\Phi_\lambda \\ &= \frac{d}{dt}T(t)\Phi_\lambda. \end{aligned}$$

Donc $\frac{d}{dt}\Big(T(t)\Phi_\lambda\Big) = \Big(T(t)\Phi_\lambda\Big)B_\lambda$ (équation différentielle dans C) ; on obtient donc l'égalité suivante dans C :

$$T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda \mathrm{e}^{B_\lambda t},$$

car $T(0) = \mathrm{Id}_C$.

En regroupant ces deux résultats, on obtient finalement :

$$(T(t)\Phi_\lambda)(\theta) = \Phi_\lambda(0)\mathrm{e}^{B_\lambda(t+\theta)}, \text{ pour } \theta \in [-r,0] \text{ et } t \geqslant 0;$$

on peut étendre cette égalité pour tout t réel.

Ainsi sur chaque espace propre généralisé de A, l'équation (2.6) à retard a la même structure qu'une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre.

On aura les mêmes types de résultats en considérant non plus une valeur propre λ de A, mais un ensemble de valeurs propres Λ de A.

Soit $\Lambda = \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ un ensemble de valeurs propres de A, et pour tout i, $d_i = \dim \mathscr{M}_{\lambda_i}$, Φ_i une base de $\mathscr{M}_{\lambda_i}$, $\Phi_\Lambda = (\Phi_1,\dots,\Phi_p)$. Pour tout i, il existe une matrice carrée B_i d'ordre d_i telle que

$$A\Phi_i = \Phi_i B_i.$$

Posons B_Λ la matrice carrée d'ordre $d_1 + \cdots + d_p$ définie par $B_\Lambda = \mathrm{diag}(B_1,\dots,B_p)$. Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.10. — *(i) Le spectre de B_Λ est Λ ;*

(ii) La base Φ_Λ est donnée par :

$$\Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)\mathrm{e}^{B_\Lambda\theta} \textit{ pour } \theta \textit{ dans } [-r,0];$$

(iii) De plus pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^{d_1+\cdots+d_p}$, la solution $T(t)\Phi_\Lambda a$ de valeur initiale $\Phi_\Lambda a$ à $t = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda \mathrm{e}^{B_\Lambda t} a.$$

On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.3.11. — *Soit λ une valeur propre du générateur infinitésimal A de l'équation différentielle* (2.6). *Alors, la restriction à l'espace propre généralisé $\mathscr{M}_\lambda$ de A de l'équation* (2.6) *est une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre à coefficients constants, de matrice B_λ.*

2.3.4. Le cas des équations non linéaires. — La présentation ci-dessus montre clairement que le problème de Cauchy lié à une équation différentielle à retard est un problème de dimension infinie. Cependant, la restriction à des sous-espaces propres de l'équation donne un problème de dimension finie. Comment garantir alors la possibilité de récupérer un problème de dimension finie ?

Les auteurs de [32] démontrent le résultat suivant :

Proposition 2.3.12. — *Si le spectre $\sigma(A)$ de A est non vide, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres de A de partie réelle nulle. En particulier, si Λ est l'ensemble des valeurs propres de partie réelle nulle de A, l'espace propre généralisé $\mathscr{M}_\Lambda$ est de dimension finie.*

Ainsi, on décompose l'espace C en une somme directe :

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

où P_Λ est l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres de A de partie réelle nulle, et Q_Λ défini par la théorie de l'adjoint formel.

On considère dorénavant une équation différentielle à retard de la forme générale :

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z_t), \tag{2.8}$$

où $L : C \to \mathbb{R}^m$ est définie de manière identique que dans la section précédente, et f est une application de C dans $\mathbb{R}^m$, continue, telle que $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. On note toujours $T(t)$ le semigroupe associé à l'équation linéaire $\dot{z}(t) = L(z_t)$ et A son générateur infinitésimal. Il existe une formule de variation de la constante qui permet d'exprimer les solutions de (2.8) à partir des solutions de la partie linéaire.

Soit X_0 la fonction de $[-r, 0]$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ définie par :

$$X_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m} & \text{si } \theta = 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, la solution de (2.8) ayant pour valeur initiale φ en $t = 0$ est donnée par :

$$x_t = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)X_0 f(x_s)ds, \text{ pour } t \geqslant 0.$$

Nous connaissons le comportement dynamique des solutions de l'équation linéaire (2.6) sur les espaces propres généralisés de son générateur infinitésimal ; il faut maintenant déterminer les liens éventuels entre la dynamique de l'équation linéaire et la dynamique de l'équation non linéaire.

On écrit l'équation :

$$\dot{z}(t) = F(z_t), \tag{2.9}$$

avec $F : C \to \mathbb{R}^n$ continue, telle que $F(0) = 0$: 0 est un point d'équilibre. On écrit $F = L + f$ où $L = D_\varphi F(0)$ est la partie linéaire de F.

Le spectre de A est donné par les racines de l'équation caractéristique :

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \text{ où } \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^0 \mathrm{e}^{\lambda\theta} d\eta(\theta).$$

Le comportement du point d'équilibre 0 dépend alors des parties réelles des racines de l'équation caractéristique.

2.3.5. Points d'équilibres hyperboliques. —

Définition 2.3.13. — Le point d'équilibre 0 est dit *hyperbolique* si toutes les racines de l'équation caractéristique sont de partie réelle non nulle.

On peut alors décomposer l'espace C en :

$$C = U \oplus S$$

où U est l'ensemble des fonctions initiales φ de l'équation linéaire qui existent et restent bornée pour $t \leqslant 0$.

Dans ce cas, on peut étudier le comportement des solutions de manière assez transparente : si les conditions initiales sont assez proches de l'origine, les trajectoires se comportent comme le système linéarisé.

2.3.6. Points d'équilibre non hyperboliques. —

Définition 2.3.14. — Le point d'équilibre 0 est dit *non hyperbolique* si il existe une racine de l'équation caractéristique de partie réelle nulle.

Posant cette fois-ci Λ l'ensemble des valeurs propres de A de partie réelle nulle, on peut encore décomposer l'espace C en la somme directe :

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

où Q_Λ est un supplémentaire orthogonal de P_Λ dans C pour le crochet de dualité formelle.

Si $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est une base de P_Λ, qui est de dimension finie m, tout élément z_t de C s'écrit :

$$z_t = \Phi x(t) + y(t)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in Q_\Lambda$.

2.4. Variété centrale dans les équations différentielles à retard

La proposition 2.3.12 justifie l'étude de l'équation différentielle à retard réduite sur la variété centrale de celle-ci : en effet l'espace stable centre est de dimension finie ; par ailleurs, le théorème de la variété centrale assure l'existence d'une telle variété, qui est un graphe au-dessus de l'espace centre ; l'équation différentielle à retard, projetée sur la variété centrale, va alors donner une équation en dimension finie ; on pourra étudier alors la dynamique sur la variété centrale et mettre l'équation projetée sous forme normale. C'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

VARIÉTÉ DU CENTRE ET DYNAMIQUE

Ce chapitre poursuit l'étude d'une équation différentielle à retard en utilisant une méthode de projection sur une variété centrale de dimension finie.

Sur la notion de variété centrale et pour tous les théorèmes d'existence, d'unicité (et de non-unicité) on renvoie à [9]. Sur l'utilisation d'une variété centrale pour diminuer le nombre de degrés de liberté d'un système dynamique, on pourra consulter notamment [41].

3.1. L'espace invariant central

Soit r un réel strictement positif, n un entier au moins égal à 1, et $C = \mathscr{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ l'espace (de Banach) des applications continues de $[-r,0]$ dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme de la convergence uniforme.

On considère l'équation différentielle à retard suivante :

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + F(z_t),$$

où comme précédemment, z est une fonction inconnue, continue sur $[-r,+\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, z_t est dans C et vérifie $z_t(\theta) = z(t+\theta)$ pour θ dans $[-r,0]$; L est une application linéaire continue de C dans $\mathbb{R}^n$ et F une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de C dans $\mathbb{R}^n$, telle que $F(0) = 0$ et $DF(0) = 0$. D'après le théorème de Riesz, on peut écrire L sous la forme suivante :

$$\begin{cases} L: & C \to \mathbb{R}^n \\ & \varphi \longmapsto L(\varphi) = \displaystyle\int_{-r}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta), \end{cases}$$

où η est une application à variations bornées de $[-r,0]$ dans l'espace des matrices carrées réelles de taille n.

On ne considère ici que la partie linéaire de l'équation :

$$\dot{z}(t) = L(z_t).$$

Les solutions de la partie linéaire $\dot{z}(t) = L(z_t)$ de l'équation sont données par un $\mathscr{C}^0$-semigroupe sur C qu'on note $T_0(t)$ pour $t \geqslant 0$; A_0 est son générateur infinitésimal, qui vérifie $A_0\varphi = \dot{\varphi}$ et a pour domaine de définition, l'ensemble $\mathscr{D}(A_0) = \{\varphi \in C^1, L(\varphi) = \dot{\varphi}(0)\}$, où C^1 est l'espace des applications continûment différentiables de $[-r, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Une valeur propre de A_0 est une solution de l'équation caractéristique :

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \text{où } \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} d\eta(\theta) e^{\lambda\theta}.$$

Comme on l'a déjà dit, ces équations sont bien connues, et les solutions de partie réelle nulle sont au plus en nombre fini m. Le spectre de A_0 est égal à son spectre ponctuel ; pour une valeur propre λ de A_0, on note $\mathscr{M}_\lambda(A_0)$ l'espace propre généralisé associé ; enfin, on note Λ le sous-ensemble du spectre de A_0 des valeurs propres λ de partie réelle nulle, et P l'espace invariant de A_0 engendré par $\{\mathscr{M}_\lambda(A_0), \lambda \in \Lambda\}$ (espace du centre).

Remarque 3.1.1. — Le cas où l'ensemble Λ est vide est d'intérêt moindre car on sait ce qui se passe sur les variétés stables et instables. C'est pourquoi on suppose que Λ est non vide.

P est alors un espace de dimension finie m, et on note $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ une base de P. Il existe une matrice réelle B carrée de taille n et de spectre Λ telle que :

$$T_0(t)\Phi = \Phi e^{Bt}.$$

La théorie de l'adjoint (voir [14, 32]) permet alors de trouver un supplémentaire Q de P dans C, qui soit lui aussi invariant par $T_0(t)$ et par A_0. On a donc

$$C = P \oplus Q.$$

3.2. Utilisation de variété centrale

Reprenons l'équation :

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + F(z_t),$$

Le comportement des orbites de cette équation dans C près d'une singularité (en l'occurrence la fonction nulle) peut être complètement décrite par la restriction du flot à la variété centrale associée. Le théorème de la variété centrale assure qu'il existe une variété centrale de cette équation (c'est-à-dire

localement invariante, tangente à l'espace invariant P de A_0 associé aux valeurs propres de partie réelle nulle), de la forme :

$$M = \{\varphi \in C, \quad \varphi = \Phi x + h(x), \text{ pour } x \text{ dans un voisinage de } 0 \text{ de } \mathbb{R}^m\}$$

où $h(x)$ est dans Q pour tout x et est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le flot sur la variété centrale est alors donné par :

$$z_t = \Phi x(t) + h(x(t)),$$

où x est une solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{x} = Bx + \Psi(0)F(\Phi x + h(x)),$$

$\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$ étant une fonction obtenue à partir de Φ et permettant de définir Q.

3.3. Obtention d'une forme normale

3.3.1. Projection sur la variété centrale. — Dans leur article [25], Faria et Magalhães utilisent le théorème de la variété centrale pour présenter une méthode de réduction d'équation différentielle à retard, et obtiennent une forme « normale ». La première étape est de récrire l'équation

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + F(z_t),$$

sous la forme d'une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach. Pour ce faire, ils sont amenés à élargir l'espace des phases C en l'espace BC des fonctions de $[-r, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$, uniformément continues sur $[-r, 0[$ et ayant un saut de discontinuité en 0. L'espace BC se décompose alors en :

$$BC = P \oplus \operatorname{Ker} \pi$$

où P a déjà été défini, et $\pi : BC \to P$ un opérateur de projection, tel que $Q \subset \operatorname{Ker} \pi$. On note alors $Q^1 = Q \cap C^1$ et A_{Q^1} la restriction de A à Q^1, où A est l'opérateur défini sur $\mathscr{D}(A) = C^1$ par :

$$A\varphi = \dot{\varphi} + X_0[L(\varphi) - \dot{\varphi}(0)], \qquad \text{avec } X_0(\theta) = \begin{cases} I_{\mathbb{R}^n}, & \text{si } \theta = 0 \\ 0, & \text{si } -r \leqslant \theta < 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle à retard est amenée, par des techniques classiques dans cette théorie (utilisation d'adjoint... voir [14, 31, 32, 52]) à un système de

la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{j\geqslant 2} \frac{1}{j!} f_j^1(x,y) \\ \frac{d}{dt} y &= A_{Q^1} y + \sum_{j\geqslant 2} \frac{1}{j!} f_j^2(x,y) \end{aligned} \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^m \text{ et } y \in Q^1 = Q \cap C^1, \tag{3.1}$$

où la variété centrale est portée par x, de dimension finie m, B donnée par le flot de la partie linéaire de l'équation de départ, A le générateur infinitésimal du flot, A_{Q^1} la restriction à Q^1 de A ; l'espace des fonctions conditions initiales est BC décomposé en

$$BC = P \oplus \operatorname{Ker} \pi,$$

Précisons tout d'abord que les auteurs de [25] cherchent une forme normale du système (3.1) sur une variété invariante de l'équation de départ, ici une variété centrale, car elle est de dimension finie. De manière plus précise, on cherche un changement de variables $(x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ dans (3.1) tel que l'équation $\bar{y} = 0$ définisse une variété localement invariante de dimension finie ; en l'occurrence, ceci signifie que, dans les variables $(\bar{x},\bar{y})$, le système (3.1) doit répondre à la condition suivante :

$$\bar{y} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{y}} = 0.$$

Remarque 3.3.1. — Le système (3.1) a été obtenu en utilisant le théorème de la variété centrale, en séparant en variables x (dimension finie, portant la variété centrale) et y (dimension infinie), de telle sorte que, dans ce système, on a déjà $y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0$.

3.3.2. Calcul itératif d'une forme normale sur la variété centrale. — Le calcul de la forme normale se fait alors par étapes, en simplifiant successivement les termes d'ordre 2, puis 3, etc., comme dans la classique forme de Poincaré-Dulac. Les changements de variables successifs sont alors de la forme $(x,y) = (\widehat{x},\widehat{y}) + \frac{1}{j!}(U_j^1(\widehat{x}), U_j^2(\widehat{x}))$, où U_j^1 et U_j^2 sont des polynômes homogènes en x de degré j : remarquons que les U_j^i ne dépendent pas de $\widehat{y}$; en effet, d'après la remarque ci-dessus, on ne cherche à simplifier que les termes en x dans la première équation pour obtenir une forme normale... pourquoi alors chercher à transformer également l'équation sur y ? Lorsque l'on fait $y = 0$ dans cette équation, on obtient $\dot{y} = 0$ et donc une équation de la variété centrale ; mais lorsqu'il y a changement de variable de x vers $\widehat{x}$, ce changement de variable doit aussi s'effectuer dans l'équation portant sur y, au risque de la

compliquer encore ; on en profite donc pour tenter de simplifier également au maximum l'équation sur y, mais en n'agissant que sur la variable x.

On considère ici des changements de variables sous la forme de séries formelles.

Pour j dans $\mathbb{N}$ et X un espace vectoriel normé, de norme $\|\,\|_X$, on note $V_j^m(X)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré j en les m variables $x = (x_1,\dots,x_m)$ à coefficients dans l'espace X. $V_j^m(X)$ est naturellement normé de la manière suivante :

$$\left|\sum_{|q|=j} c_q x^q\right| = \sum_{|q|=j} \|c_q\|_X, \quad c_q \in X.$$

On suppose que la forme normale a été obtenue jusqu'à l'ordre $j-1$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Bx + \sum_{i=2}^{j-1} \frac{1}{i\,!} g_i^1(x,y) + \frac{1}{j\,!}\bar{f}_j^1(x,y) + \cdots \\ \frac{dy}{dt} &= A_{Q^1} y + \sum_{i=2}^{j-1} \frac{1}{i\,!} g_i^2(x,y) + \frac{1}{j\,!}\bar{f}_j^2(x,y) + \cdots,\end{aligned}$$

où g_i^1 est dans $V_i^m(\mathbb{R}^m)$, $\bar{f}_j^1$ dans $V_j^m(\mathbb{R}^m)$, g_i^2 dans $V_i^m(\operatorname{Ker}\pi)$ et $\bar{f}_j^2$ dans $V_j^m(\operatorname{Ker}\pi)$. $\bar{f}_j^1$ et $\bar{f}_j^2$ sont les termes d'ordre j obtenus après le calcul de la forme normale à l'ordre $j-1$.

On cherche à éliminer, ou du moins simplifier, les termes d'ordre j par le changement de variables suivant :

$$(x,y) = (\widehat{x},\widehat{y}) + \frac{1}{j\,!}U_j(\widehat{x}),$$

où $U_j = (U_j^1, U_j^2)$ est dans $V_j^m(\mathbb{R}^m) \times V_j^m(Q^1)$ (et $Q^1 \subset \operatorname{Ker}\pi$).

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\mathrm{Id} + \frac{1}{j\,!}DU_j^1(\widehat{x})\right)\dot{\widehat{x}} \\ \dot{y} &= \dot{\widehat{y}} + \frac{1}{j\,!}DU_j^2(\widehat{x})\dot{\widehat{x}}.\end{aligned}$$

En remplaçant x et y par leur expression en fonction de $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$, et en tronquant à l'ordre j, on obtient (les termes g_i^1 et g_i^2, pour $2 \leqslant i \leqslant j-1$ ne donnent pas de termes d'ordre j) le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\mathrm{Id} + \frac{1}{j\,!}DU_j^1(\widehat{x})\right)\dot{\widehat{x}} = B\left(\widehat{x} + \frac{1}{j\,!}U_j^1(\widehat{x})\right) + \frac{1}{j\,!}\bar{f}_j^1(\widehat{x},\widehat{y}) + \cdots \\ \dot{y} &= \dot{\widehat{y}} + \frac{1}{j\,!}DU_j^2(\widehat{x})\dot{\widehat{x}} = A_{Q^1}\left(\widehat{y} + \frac{1}{j\,!}U_j^2(\widehat{x})\right) + \frac{1}{j\,!}\bar{f}_j^2(\widehat{x},\widehat{y}) + \cdots\end{aligned}$$

À l'ordre j, l'inverse de l'opérateur $\left(\mathrm{Id}+\frac{1}{j!}DU_j^1(\widehat{x})\right)$ est $\left(\mathrm{Id}-\frac{1}{j!}DU_j^1(\widehat{x})\right)$, donc le système se réécrit, en « oubliant » les chapeaux sur x et y, pour une écriture plus claire :

$$\dot{x}=\left(\mathrm{Id}-\frac{1}{j!}DU_j^1(x)\right)B\left(x+\frac{1}{j!}U_j^1(x)\right)+\frac{1}{j!}\bar{f}_j^1(x,y)+\cdots$$
$$\dot{y}=A_{Q^1}\left(y+\frac{1}{j!}U_j^2(x)\right)-\frac{1}{j!}DU_j^2(x)\dot{x}+\frac{1}{j!}\bar{f}_j^2(x,\widehat{y})+\cdots$$

En développant et en tronquant à l'ordre j, on obtient les expressions de g_j^1 et g_j^2 (termes d'ordre j respectivement dans chacune des équations) :

$$g_j^1(x,y)=\bar{f}_j^1(x,y)+BU_j^1(x)-D_xU_j^1(x)Bx$$
$$g_j^2(x,y)=\bar{f}_j^2(x,y)+A_{Q^1}U_j^2(x)-D_xU_j^2(x)Bx.$$

Notons M_j l'opérateur de $V_j^m(\mathbb{R}^m)\times V_j^m(\mathrm{Ker}\,\pi)$ dans lui-même qui à (q,p) associe $(M_j^1(q),M_j^2(p))$, où $M_j^1:V_j^m(\mathbb{R}^m)\to V_j^m(\mathbb{R}^m)$ et où $M_j^2:V_j^m(\mathrm{Ker}\,\pi)\to V_j^m(\mathrm{Ker}\,\pi)$ sont définis par :

$$M_j^1(q)=[B,q]\quad \text{pour } q \text{ dans } V_j^m(\mathbb{R}^m)$$
$$M_j^2(p)=D_xp(x)Bx-A_{Q^1}p(x)\quad \text{pour } p \text{ dans } V_j^m(\mathrm{Ker}\,\pi)$$

On peut alors écrire les fonctions g_j^1 et g_j^2 comme

$$g_j^1(x,y)=\bar{f}_j^1(x,y)-M_j^1(U_j^1(x))$$
$$g_j^2(x,y)=\bar{f}_j^2(x,y)-M_j^2(U_j^2(x))$$

ou encore

$$g_j=\bar{f}_j-M_j(U_j). \tag{3.2}$$

Les applications M_j^1 et M_j^2 sont des endomorphismes, respectivement des espaces $V_j^m(\mathbb{R}^m)$ et $V_j^m(\mathrm{Ker}\,\pi)$.

Pour déterminer U_j, on rappelle que $\{y=0\}$ est une variété (centrale) invariante, donc $y=0\Rightarrow\dot{y}=0$ dans la deuxième équation du système, donc $g_j^2(x,0)=0$ pour tout x.

Écrivons

$$V_j^m(\mathbb{R}^m)=\mathrm{Im}(M_j^1)\oplus S_j^1$$
$$\text{et } V_j^m(\mathrm{Ker}\,\pi)=\mathrm{Im}(M_j^2)\oplus S_j^2$$

où S_j^1 et S_j^2 sont des supplémentaires respectifs de $\mathrm{Im}\,M_j^1$ et $\mathrm{Im}\,M_j^2$ et notons P_j la projection de $V_j^m(\mathbb{R}^m)\times V_j^m(\mathrm{Ker}\,\pi)$ sur $\mathrm{Im}\,M_j^1\times\mathrm{Im}\,M_j^2$; en faisant $y=0$ dans (3.2) :

$$g_j(x,0)=\bar{f}_j(x,0)-M_jU_j(x)$$

donc, en notant M_j^{-1} l'inverse de $M_j : V_j^m(\mathbb{R}^m) \to \operatorname{Im} \mathscr{M}_j$,

$$U_j(x) = M_j^{-1} P_j \bar{f}_j(x, 0).$$

On peut donc espérer supprimer de $\bar{f}_j^1$ et $\bar{f}_j^2$ la partie projetée sur, respectivement $V_j^m(\mathbb{R}^m)$ et $V_j^m(\operatorname{Ker} \pi)$. La simplification la plus poussée pourra se faire lorsque les opérateurs M_j^1 et M_j^2 sont surjectifs ; les auteurs de [25] démontrent que ces opérateurs sont surjectifs lorsque certaines conditions sur les spectres de B et A_{Q^1} sont vérifiées, analogues des conditions de non-résonance pour des formes normales de champs de vecteurs.

3.4. Conclusion

On voit que l'on peut donc traiter la projection de l'équation différentielle à retard initiale comme une équation différentielle ordinaire en dimension finie, et en calculer ainsi une forme normale classique. On devrait donc pouvoir utiliser également d'autres méthodes de calcul, ou d'amélioration de calcul, de forme normale classique, telle que la méthode de *renormalisation* exposée au chapitre suivant dans le cas de champs de vecteurs sur $\mathbb{K}^\nu$.

CHAPITRE 4

FORMES NORMALES RENORMALISÉES

Nous présentons ici une méthode de recherche de forme normale développé par Giuseppe Gaeta notamment dans [27–29]. On commence par une présentation algébrique de la notion de forme normale (voir par exemple [53]).

4.1. La notion de forme normale

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = Ax + F(x),$$

où x est une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\nu$, A une matrice carrée d'ordre ν et F une fonction de $\mathbb{R}^\nu$ dans lui-même de classe $\mathscr{C}^r$. On décompose F en parties homogènes f_k de degré k :

$$\dot{x} = Ax + f_2(x) + \cdots f_{r-1}(x) + O(|x|^r).$$

On écrira par la suite

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x),$$

où f_k est homogène (en x) de degré k.

Notons alors V_k l'espace vectoriel des polynômes homogènes en x de degré k à coefficients dans $\mathbb{R}^\nu$: $f_k \in V_k$.

4.1.1. Transformation de Poincaré. — On décrit ici brièvement la transformation de Poincaré : on recherche un changement de variable préservant la partie linéaire (donc un changement de variable tangent à l'identité) qui conjugue le champ de départ à un champ « plus simple ». On procède pour cela degré par degré.

Si on fait le changement de variables $x = y + h_2(y)$ où h_2 est dans V_2, on obtient :

$$\dot{x} = (\mathrm{Id} + Dh_2(y))\dot{y} = Ay + Ah_2(y) + f_2(y + h_2(y)) + \cdots + O(|y|^r);$$

pour $m \geqslant 2$, chaque terme $f_m(y + h_2(y)) = f_m(y) + Df_m(h_2(y))Dh_2(y) + \cdots$ est alors au moins de degré 3 en y, sauf la contribution $f_2(y)$ de degré 2 ; donc l'équation précédente se réécrit, pour le terme d'ordre 2 :

$$(\mathrm{Id} + Dh_2(y))\dot{y} = Ay + Ah_2(y) + \cdots + f_2(y) + \cdots + O(|y|^r).$$

Pour y assez petit, la matrice $(\mathrm{Id} + Dh_2(y))$ est inversible, et a pour inverse :

$$(\mathrm{Id} + Dh_2(y))^{-1} = \mathrm{Id} - Dh_2(y) + O(|y|^2),$$

ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (\mathrm{Id} - Dh_2(y) + O(|y|^2))\Big(Ay + Ah_2(y) + f_2(y) + \cdots + O(|y|^r)\Big)\\ &= Ay + Ah_2(y) + f_2(y) - Dh_2(y)Ay + \text{ des termes de degré supérieur...}\end{aligned}$$

On obtient alors l'équation suivante pour le degré 2 :

$$\widetilde{f}_2(y) = f_2(y) - \Big(Dh_2(y)Ay - Ah_2(y)\Big)$$

où $\widetilde{f}_2$ est la forme « simplifiée » du champ ; la meilleure simplification possible serait évidemment $\widetilde{f}_2 = 0$.

On peut généraliser, et montrer de la même manière que pour un changement de variable $x = y + h_k(y)$ où h_k est dans V_k, l'équation obtenue est :

$$\widetilde{f}_k(y) = f_k(y) - \Big(Dh_k(y)Ay - Ah_k(y)\Big).$$

Remarquons qu'alors, si k est fixé, les f_m pour $m < k$ ne sont pas modifiés : on stabilise bien un terme supplémentaire de degré fixé à chaque étape, en prenant successivement les changements de variables $x = y + h_2(y)$, puis $x = y + h_3(y)$, etc. En revanche, les termes f_m pour $m > k$ seront eux modifiés, et de manière plus compliquée que f_k. C'est cependant cette « complication » apparente que Gaeta utilise pour effectuer la *renormalisation* du champ, comme nous le verrons plus loin[1].

Considérons alors les applications suivantes, pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{1,k} : V_k &\longrightarrow V_k\\ h_k(y) &\longmapsto Dh_k(y)Ay - Ah_k(y)\end{aligned} \tag{4.1}$$

[1]Cependant, cette renormalisation nécessite une condition supplémentaire sur la forme du changement de variable.

La recherche d'une forme normale consiste à résoudre pour tout $k \geqslant 2$ l'équation homologique :

$$\widetilde{f}_k = f_k - \mathscr{L}_{1,k}(h_k),$$

c'est-à-dire à trouver h_k dans V_k tel que $\widetilde{f}_k$ soit le plus simple possible : on peut espérer simplifier f_k en en retranchant les termes qui sont dans l'image de $\mathscr{L}_{1,k}$.

Remarque 4.1.1. — Comme le générateur h_k du changement de variables est dans V_k, il est alors défini à un élément de $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_{1,k}$ près.

4.1.2. Schéma algébrique. — Considérons l'opérateur $\mathscr{L}_{1,k}$: pour tout k, on a $\mathscr{L}_{1,k}(V_k) \subset V_k$, et il existe donc un supplémentaire G_k de $\operatorname{Im}(\mathscr{L}_{1,k})$ dans V_k :

$$V_k = \mathscr{L}_{1,k}(V_k) \oplus G_k.$$

Le choix d'une forme normale dépend donc non seulement du choix de h_k pour tout k (à un élément du noyau de $\mathscr{L}_{1,k}$ près), mais aussi du choix du supplémentaire G_k. Le cas le plus simple est celui où $\mathscr{L}_{1,k}(V_k) = V_k$ et où $G_k = \{0\}$ ce qui permet de simplifier les termes de degré k. Dans les autres cas, les termes de G_k sont des termes qu'on ne peut pas simplifier.

Définition 4.1.2. — Les éléments de G_k sont les termes *résonants* de degré k.

En suivant la procédure, degré par degré, on a alors le théorème très classique suivant, qu'on trouve par exemple dans [3] ou [53], dû à Poincaré :

Théorème 4.1.3. — *Soit $\dot{x} = Ax + \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x)$ un champ de vecteurs formel sur $\mathbb{R}^\nu$, A dans $\mathscr{M}_\nu(\mathbb{R})$ et f_k dans V_k. Alors, pour r fixé, il existe une transformation formelle $x = y + h(y)$ telle que cette équation est transformée en :*

$$\dot{y} = Ay + \sum_{k=2}^{r-1} \widetilde{f}_k(y) + O(|y|^r),$$

*où $\widetilde{f}_k$ est résonant (*i.e. *dans G_k), pour $2 \leqslant k < r$, G_k étant un supplémentaire de $\mathscr{L}_{1,k}(V_k)$ dans V_k.*

Remarque 4.1.4. — La conséquence de la remarque 4.1.1 est qu'il n'y a pas unicité de la transformation formelle citée dans le théorème, et donc pas de forme normale unique *a priori*. Le problème de la recherche d'une forme normale unique est étudié notamment dans [5, 6], mais bien que la réponse soit

positive, se révèle complexe à mettre en œuvre d'un point de vue algorithmique.

4.2. Renormalisation de Poincaré

Dans une série d'articles [27–29], G. Gaeta développe et expose la méthode suivante de calcul d'une forme normale « renormalisée ».

Tout d'abord, on choisit un changement de variables de la forme

$$x = \exp(h_k)y, \text{ avec } h_k \text{ dans } V_k,$$

ce qui va permettre d'utiliser la formule de Campbell-Baker-Hausdorff. En effet dans ce cas, le champ X est transformé en un champ $\widetilde{X}$ tel que :

$$\widetilde{X} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} X^{(n)} \qquad \text{où } X^{(n+1)} = [X^{(n)}, H_k],$$

De plus, pour choisir le supplémentaire G_k, on peut définir un produit scalaire sur les V_k (pour tout k), ce qui permet le choix d'un supplémentaire privilégié pour G_k, à savoir

$$\Big(\mathscr{L}_{1,k}(V_k)\Big)^{\perp} = \Big(\mathrm{Im}(\mathscr{L}_{1,k})\Big)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_{1,k}^*,$$

où $\mathscr{L}_{1,k}^*$ est l'adjoint de $\mathscr{L}_{1,k}$ pour le produit scalaire choisi.

Les termes résonants sont donc les éléments du noyau $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_{1,k}^*$. Cette notion de résonance est bien cohérente avec celle que nous verrons dans la deuxième partie à la définition 7.3.2 (voir [23] ou [53] pour une étude plus approfondie).

Les choix possibles de produit scalaires sont divers. On peut privilégier le produit scalaire de Bargmann (voir [7, 33]) défini sur V_k par :

$$\langle x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} | x_1^{\beta_1} \cdots x_m^{\beta_m} \rangle = \alpha_1! \cdots \alpha_m! \delta_{\alpha_1,\beta_1} \cdots \delta_{\alpha_m,\beta_m},$$
$$\text{où } \delta_{\alpha_j,\beta_j} = 1 \text{ si } \alpha_j = \beta_j, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

L'intérêt de choisir ce produit scalaire est que si $\mathscr{L}_1 = \{A, \cdot\}$ où $\{\cdot,\cdot\}$ est le crochet de Poisson, alors l'adjoint $\mathscr{L}_1^*$ pour ce produit scalaire est égal à $\{A^*, \cdot\}$ où A^* est l'adjoint de A (au sens des matrices réelles ou complexes).

Le changement de variables à chaque étape dans le champ, est obtenu par une transformation de Lie qui agit uniquement sur une partie homogène de degré fixé. Puis on remodifie cette partie homogène par un nouveau changement de variables, sans modifier les termes de degré inférieur.

On note V l'ensemble des séries entières formelles f de $\mathbb{R}^\nu$ dans lui-même, telles que $f(0) = 0$ et toujours V_k l'ensemble des fonctions vectorielles polynomiales homogènes de degré k ; on a donc :

$$V = \bigoplus_{k \geqslant 1} V_k$$

4.2.1. Décomposition homogène de la transformée de Lie. — Considérons un champ de vecteurs autonome sur $\mathbb{R}^\nu$: $\dot{x} = X(x)$. On décompose X en polynômes homogènes : $X = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ où f_k est homogène de degré k dans les variables $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$. On effectue le changement de variables $y = \exp\Big(-tH\Big)\Big|_{t=1} x$, où $H = \sum_{i=1}^{\nu} h^i \partial_{x_i}$ est un champ de vecteurs. Le nouveau champ $\widetilde{X}$ est donné par :

$$\widetilde{X} = \exp\Big(tH_k\Big) X \exp\Big(-tH_k\Big)\Big|_{t=1},$$

que l'on peut développer par la formule de Campbell-Baker-Hausdorff :

$$\widetilde{X} = X - [X, H_k] + \cdots$$

On peut alors écrire $\widetilde{X} = \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{f}^i \partial_{x_i}$, avec :

$$\widetilde{f} = f + \{h, f\} + \frac{1}{2}\{h, \{h, f\}\} + \frac{1}{6}\{h, \{h, \{h, f\}\}\} + \cdots$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ est le crochet de Poisson, défini par :

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^{\nu} \Big(u^i \frac{\partial v}{\partial x_i} - v^i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big).$$

On notera $\mathscr{H}$ l'application qui, à f, associe $\{h, f\}$ et $\mathscr{H}^s$ la composée s fois de cette application.

Si h est homogène de degré k, on peut alors écrire $\widetilde{f}$ comme une somme de parties homogènes $\widetilde{f} = \sum_{m \geqslant 1} \widetilde{f}_m$ et on a, pour $m \geqslant k$:

$$\widetilde{f}_m = \sum_{s=1}^{[m/k]} \frac{1}{s!} \mathscr{H}^{s-1}\Big(f_{m-s(k-1)}\Big). \tag{4.2}$$

Remarquons à ce stade que si h est de degré k, seuls les termes de degré plus grand que k sont modifiés.

4.2.2. Premiers termes. — On part d'un système différentiel du type :

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^{(0)}(x).$$

L'indice supérieur (0) correspond ici à l'étape de la transformation en cours.

La partie linéaire est $f_1^{(0)}$, on utilise donc la relation (4.2) ci-dessus pour $m = 2$, qui donne :

$$f_2^{(1)} = f_2^{(0)} - \mathscr{L}_1\left(h_2^{(0)}\right).$$

On doit alors trouver $h_2^{(0)}$ comme solution de cette équation, de manière à ce que $f_2^{(1)}$ soit à la fois dans V_2 (homogène de degré 2) et dans $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^*$ (résonant).

Passons au terme suivant : $f_2^{(0)}$ est déjà modifié par la transformation précédente, mais nous conservons cette notation pour alléger l'écriture. On choisit alors $h_2^{(0)}$ de sorte que :

$$f_2^{(1)} = f_2^{(0)} - \mathscr{L}_1\left(h_2^{(0)}\right) \quad \text{d'après (4.2)},$$

et $f_2^{(1)}$ doit encore être résonant, donc dans $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^*$ et dans V_2.

Cette écriture correspond à

$$f_2^{(0)} = f_2^{(1)} + \mathscr{L}_1\left(h_2^{(0)}\right),$$

donc à la décomposition en somme :

$$V_2 = \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_2 \oplus \operatorname{Im}\mathscr{L}_{1,2}.$$

Reprenons alors la relation (4.2) pour $m = 2$ et $k = 1$, dans le cas où $h = h_1^{(1)}$ est dans V_2, donc homogène de degré 2.

$$f_2^{(2)} = f_2^{(1)} + \{h_1^{(1)}, f_2^{(1)}\} + \frac{1}{2}\{h_1^{(1)}, \{h_1^{(1)}, f_1^{(0)}\}\}.$$

Si on choisit $h_1^{(1)}$ dans $V_1 \cap \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1$, alors le dernier terme de la somme est nul, et on obtient :

$$f_2^{(2)} = f_2^{(1)} - \mathscr{L}_2\left(h_1^{(1)}\right).$$

Il est certain que cette transformation supplémentaire ne peut éliminer de f_2 que la partie des termes qui sont dans $\operatorname{Im}\mathscr{M}_2$, où $\mathscr{M}_2$ est la restriction de $\mathscr{L}_2$ à $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1$.

On a obtenu $f_2^{(1)}$ à partir de $f_2^{(0)}$ et à l'aide de la remarque ci-dessus, on voit que l'on peut encore simplifier $f_2^{(1)}$: on a choisi $h_1^{(1)}$ dans $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1 \cap V_1$ (voir plus bas comment est fait ce choix) et on obtient :

$$f_2^{(2)} = f_2^{(1)} - \mathscr{L}_1\left(h_1^{(1)}\right) = f_2^{(1)} - \mathscr{M}_2\left(h_1^{(1)}\right),$$

de manière à ce que $f_2^{(2)}$ soit dans $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_2 \cap \operatorname{Ker}\mathscr{M}_2^*$. Ceci correspond encore une fois à la décomposition en somme, non plus de V_2, mais de $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_2$

(qui contient $f_2^{(1)}$) suivante :

$$\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_2 = \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_2 \cap \operatorname{Im}\mathscr{M}_2 \oplus \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_2 \cap \operatorname{Ker}\mathscr{M}_2^*,$$

Le choix de $h_1^{(1)}$ est fait pour éliminer les termes de $f_2^{(1)}$ qui sont dans $\operatorname{Im}\mathscr{M}_2$, donc, en posant P_2 l'opérateur de projection sur $\operatorname{Im}\mathscr{M}_2$, on a :

$$h_1^{(1)} = \mathscr{M}_2^{-1} P_2 f_2^{(1)},$$

où le pseudo-inverse $\mathscr{M}_2^{-1}$ n'est défini que sur $\operatorname{Im}\mathscr{M}_2$.

L'étape suivante consiste à transformer $f_3^{(0)}$; on applique d'abord une transformation de Lie-Poincaré ayant un générateur homogène d'ordre 3, $h_3^{(0)}$ comme solution de l'équation homologique :

$$f_3^{(1)} = f_3^{(0)} - \mathscr{L}_1(h_3^{(0)}) \in \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_3,$$

puis

$$f_3^{(2)} = f_3^{(1)} - \mathscr{L}_2(h_2^{(1)}) \in \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap V_3 \cap \operatorname{Ker}\mathscr{M}_2^*,$$

où $h_2^{(1)}$ est dans $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1$; enfin, on rajoute une transformation de générateur $h_1^{(2)}$ homogène de degré 1. La relation (4.2) s'écrit alors, avec $m = 1,2,3$ et $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_3 &= f_3^{(2)} + \left\{h_1^{(2)}, f_3^{(2)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{h_1^{(2)}, \left\{h_1^{(2)}, f_2^{(1)}\right\}\right\} + \frac{1}{3!}\mathscr{H}^3(f_1),\\
\widetilde{f}_2 &= f_2^{(2)} + \left\{h_1^{(2)}, f_2^{(2)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{h_1^{(2)}, \left\{h_1^{(2)}, f_1\right\}\right\}\\
\widetilde{f}_1 &= f_1^{(1)} - \mathscr{L}_1(h_1^{(2)})
\end{aligned}$$

Comme on veut $\widetilde{f}_1 = f_1^{(1)}$ et $\widetilde{f}_2 = f_2^{(2)}$, on cherchera de plus $h_1^{(2)}$ dans $\operatorname{Ker}\mathscr{L}_1 \cap \operatorname{Ker}\mathscr{L}_2$.

On a alors :

$$f_3^{(3)} = f_3^{(2)} + \left\{h_1^{(2)}, f_3^{(2)}\right\} = f_3^{(2)} - \mathscr{L}_3\left(h_1^{(2)}\right),$$

et on obtient :

$$f_3^{(3)} \in V_3 \cap \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1^* \cap \operatorname{Ker}\mathscr{M}_2^* \cap \operatorname{Ker}\mathscr{M}_3^*, \quad \text{où } \mathscr{M}_3 \text{ est } \mathscr{L}_3 \text{ restreint à } \operatorname{Ker}\mathscr{L}_1 \cap \operatorname{Ker}\mathscr{L}_2.$$

Ces trois première étapes présentent un aperçu de la méthode générale de construction d'une forme normale de Poincaré renormalisée selon Gaeta.

4.3. Procédure de renormalisation

On considère un champ de vecteurs $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$ où X_m est homogène de degré m, X_1 étant la partie linéaire.

Rappelons qu'on part d'un système différentiel du type :

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^{(0)}(x).$$

L'indice supérieur (0) correspond ici à l'étape de la transformation en cours.

Notation 1. — Pour $m \geqslant 1$, on note renor_m la procédure de renormalisation, de l'ensemble des dérivations locales dans lui-même, qui au champ $X_{\mathrm{renor}}^{(m-1)}$ renormalisé à l'ordre $m-1$ associe le champ $X_{\mathrm{renor}}^{(m)}$ renormalisé à l'ordre m, c'est-à-dire tel que $X_1, \ldots, X_m$ sont sous forme renormalisée.

On aura bien sûr $X_{\mathrm{renor}}^{(0)} = X_{\mathrm{renor}}^{(1)} = X$.

Définition 4.3.1 **(Forme normale renormalisée à l'ordre r)**
Soit r dans $\mathbb{N}$. La forme normale renormalisée à l'ordre r du champ X est le champ $X_{\mathrm{renor}}^{(r)}$ obtenu après r actions de la procédure de renormalisation :

$$X = X_{\mathrm{renor}}^{(0)} \xrightarrow{\mathrm{renor}_1} X_{\mathrm{renor}}^{(1)} \xrightarrow{\mathrm{renor}_2} \cdots \xrightarrow{\mathrm{renor}_r} X_{\mathrm{renor}}^{(r)}.$$

4.3.1. Notations. — Pour le système différentiel $\dot{x} = \sum_{k \geqslant 1} f_k(x)$, on note $\mathscr{L}_k$ le crochet de Poisson $\{f_k, \cdot\}$; on note par ailleurs $H^{(k)}$ l'espace $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_{k-1}$ et pour $k \geqslant 1$ $\mathscr{M}_k$ l'opérateur $\mathscr{L}_k$ restreint à $H^{(k)}$.

Enfin, on note $F^{(k)} = \bigcap_{p=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\mathscr{M}_p^*$ et $F_p^{(k)}$ pour $F^{(k)} \cap V_p$. Rappelons que pour tous k et m supérieurs ou égaux à 1, $\mathscr{L}_m(V_k) \subset V_{m+k-1}$ et par conséquent $\mathscr{M}_m(V_k) \subset V_{m+k-1}$. On notera par ailleurs π_k la projection sur $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_k$.

Définition 4.3.2. — On dit que l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

est sous forme *renormalisée* à l'ordre m, si f_k est dans $F_k^{(k)}$ pour tout $k \leqslant m$.

4.3.2. Étapes de renormalisation. — Pour passer de $X_{\mathrm{renor}}^{(m-1)}$ à $X_{\mathrm{renor}}^{(m)}$, on effectue la transformation renor_m qui comprend m étapes, correspondant aux changements de variables successifs $\widetilde{x} = \exp(-h_k)x$ pour $1 \leqslant p \leqslant m$, où h_k est dans V_k.

$$V_m = \mathscr{M}_k\Big(V_{k-m+1}\Big) \oplus \mathrm{Ker}\,\mathscr{M}_{k,k-m+1}^*$$

4.3.3. Décomposition des espaces homogènes. — Pour f dans V, on écrit $f = \sum_{m \geqslant 1} f_m$ et on définit l'opérateur $\mathscr{F} : V \to V$ associé à f par $\mathscr{F} = \{f, \cdot\}$. On

peut alors écrire :

$$\mathscr{F} = \sum_{m=1}^{+\infty} \{f_m, \cdot\} = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathscr{L}_m \quad \text{où } \mathscr{L}_m = \{f_m, \cdot\}.$$

On a alors, pour tous k et m, $\mathscr{L}_m(V_k) \subset V_{m+k-1}$. On notera $\mathscr{L}_{m,k}$ la restriction de $\mathscr{L}_m$ à V_k, et simplement $\mathscr{L}_m$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. La notation $\mathscr{L}_{1,k}$ est bien cohérente avec celle utilisée à l'équation (4.1) page 50. En particulier, $\mathscr{L}_1(V_k) \subset V_k$.

La procédure de renormalisation repose alors sur les décompositions en sommes directes des espaces homogènes V_k :

$$\text{pour } k \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant m \leqslant k, \quad V_k = \mathscr{L}_{m,k-m+1}\Big(V_{k-m+1}\Big) \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{L}^*_{m,k-m+1}.$$

Pour déterminer la composante homogène de degré k de la forme renormalisée, on va donc utiliser k décompositions en sommes directes successives, correspondant à un changement de variables engendré par un champ successivement de degré m pour $1 \leqslant m \leqslant k$.

4.3.4. Schéma de renormalisation. — Pour la composante homogène de degré k, on écrit donc, successivement :

$$f_k^{(0)} = \mathscr{L}_1(h_k) + f_k^{(1)} \text{ où } h_k \in V_k \text{ et } f_k^{(1)} \in \operatorname{Ker} \mathscr{L}^*_{1,k}$$
$$f_k^{(1)} = \mathscr{L}_2(h_{k-1}) + f_k^{(2)} \text{ où } h_{k-1} \in V_{k-1} \text{ et } f_k^{(2)} \in \operatorname{Ker} \mathscr{L}^*_{2,k-1}$$

mais cette dernière ligne doit être précisée : en effet, le changement de variables $x = \exp(-H_{k-1})\tilde{x}$ va modifier le terme $f_{k-1}^{(k-1)}$, qu'on a pourtant stabilisé ; il faut donc imposer que h_{k-1} soit dans $\operatorname{Ker} \mathscr{L}_{1,k-1}$.

De manière générale, à la m-ième étape, on écrit :

$$V_k = \mathscr{L}_{m,k-m+1}\Big(V_{k-m+1}\Big) \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{L}^*_{m,k-m+1}$$

donc

$$f_k^{(m-1)} = \mathscr{L}_{m,k-m+1}(h_{k-m+1}) + f_k^{(m)} \text{ avec } f_k^{(m)} \in \operatorname{Ker} \mathscr{L}^*_{m,k-m+1},$$

et pour que le changement de variables engendré par h_{k-m+1} ne modifie pas les termes de degré strictement inférieur à m, on impose :

$$h_{k-m+1} \in \operatorname{Ker} \mathscr{L}_{1,k-m+1} \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \mathscr{L}_{m-1,k-m+1}$$

On notera donc $\mathscr{M}_p$ l'opérateur $\mathscr{L}_p$ restreint à $\operatorname{Ker} \mathscr{L}_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \mathscr{L}_{p-1}$, et on utilise la somme directe :

$$V_k = \mathscr{M}_{m,k-m+1}\Big(V_{k-m+1}\Big) \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{M}^*_{m,k-m+1}$$

Supposons donc $f_k^{(m-1)}$ appartenant à $\bigcap_{p=1}^{m-1} \operatorname{Ker} \mathscr{M}_{p,k}^*$; on détermine alors $f_k^{(m)}$ et h_{k-m+1} tels que

$$f_k^{(m-1)} = \mathscr{M}_{m,k-m+1}(h_{k-m+1}) + f_k^{(m)},$$

avec h_{k-m+1} dans $\operatorname{Ker} \mathscr{M}_{1,k-m+1} \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \mathscr{M}_{m-1,k-m+1}$ et $f_k^{(m)}$ dans $\bigcap_{p=1}^{m} \operatorname{Ker} \mathscr{M}_{p,k}^*$.

4.3.5. Résolution des équations homologiques. — L'équation homologique d'inconnues h_{k-m+1} et $f_k^{(m)}$ est alors la suivante :

$$f_k^{(m-1)} = \mathscr{M}_{m,k-m+1}(h_{k-m+1}) + f_k^{(m)}, \qquad h_{k-m+1} \in V_{k-m+1}$$

où $f_k^{(m-1)}$ est dans $\bigcap_{p=1}^{m-1} \operatorname{Ker} \mathscr{M}_{p,k}^*$. On procède de la manière suivante :

Si on note P_m la projection sur $\operatorname{Im} \mathscr{M}_m$, on doit avoir :

$$P_{m-1}(f_k^{(m-1)}) = \mathscr{M}_{m,k-m+1}(h_{k-m+1}),$$

donc on prend :

$$h_{k-m+1} = \mu_{m-1} \circ \mathscr{M}_{m,k-m+1}^{-1}\Big(P_{m-1}(f_k^{(m-1)})\Big);$$

dans cette écriture, $\mathscr{M}_{m,k-m+1}^{-1}$ est le pseudo-inverse de $\mathscr{M}_{m,k-m+1}$ (défini uniquement sur $\operatorname{Im} \mathscr{M}_{m,k-m+1}$), et μ_m la projection sur $\operatorname{Ker} \mathscr{M}_1 \cap \cdots \cap \mathscr{M}_m$. On obtient ainsi $f_k^{(m)}$ pour tout $m \leqslant k$.

4.4. Conclusion

De cette manière, on peut renormaliser un champ de vecteurs ; de plus, la transformation de renormalisation est complètement algorithmique. Gaeta donne plusieurs exemples de constructions de ce type de forme que l'on pourra trouver dans les articles cités en début de chapitre.

CHAPITRE 5

RENORMALISATION POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À RETARD

On obtient dans ce chapitre, grâce aux précédents, un résultat nouveau sur le calcul de forme normale d'équations différentielles à retard.

5.1. Énoncé du théorème

On a vu dans le chapitre 3 qu'une équation différentielle à retard de la forme :

$$\dot{x} = L(x_t) + F(x_t)$$

pouvait s'écrire de manière « réduite » :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{j \geqslant 2} \frac{1}{j!} f_j^{(1)}(x, y) \\ \dot{y} &= A_{Q^1} y + \sum_{j \geqslant 2} \frac{1}{j!} f_j^{(2)}(x, y) \end{aligned} \tag{5.1}$$

où x porte la partie de dimension finie p (sur une variété centrale de dimension p) et y la partie de dimension infinie $Q^1 \subset \operatorname{Ker} \pi$ où π est la projection canonique de l'espace des phases BC sur l'espace P de dimension finie p.

Dans ce chapitre, nous appliquons la renormalisation de Gaeta exposée précédemment à ce type d'équations.

Le but étant d'obtenir une forme normale sur une variété centrale qui sera définie par $y = 0$, il suffit de renormaliser la partie de dimension finie.

On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.1.1. — *Étant donnée une équation différentielle à retard du type* (5.1) *il existe une transformation formelle* $x = \widetilde{x} + p(\widetilde{x})$, $y = \widetilde{y} + h(\widetilde{x})$ *telle que l'équation* (5.1) *est conjuguée au système suivant :*

$$\dot{\widetilde{x}} = B\widetilde{x} + \sum_{j\geqslant 2} \frac{1}{j!} g_j^{(1)}(\widetilde{x},\widetilde{y})$$

$$\dot{\widetilde{y}} = A_{Q^1}\widetilde{y} + \sum_{j\geqslant 2} \frac{1}{j!} g_j^{(2)}(\widetilde{x},\widetilde{y})$$

où, pour $\widetilde{y} = 0$, le flot sur la variété centrale est donné par :

$$\dot{\widetilde{x}} = B\widetilde{x} + \sum_{j\geqslant 2} \frac{1}{j!} g_j^{(1)}(\widetilde{x},0),$$

qui est une forme renormalisée au sens du chapitre précédent.

Démonstration. — La démonstration s'effectue de la même manière que dans le cas classique sur la partie de dimension finie. Remarquons que la première étape de la renormalisation correspond à l'étape classique de suppression des termes non résonants. Il suffit de reprendre la démonstration du théorème d'obtention de forme normale pour les RFDE, et d'intercaler les étapes de renormalisation sur la partie de dimension finie. Les opérateurs $\mathscr{L}$ sont définis par $\mathscr{L}_1 = \{Bx,\cdot\}$ et $\mathscr{L}_k = \{f_k,\cdot\}$ pour $k \geqslant 2$.

Supposons donc que la forme du théorème est obtenue jusqu'à l'ordre $j-1$:

$$\dot{x} = Bx + \sum_{k=2}^{j-1} \frac{1}{k!} g_k^{(1)}(x,y) + \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{k!} f_k^{(1)}(x,y)$$

$$\dot{y} = A_{Q^1}y + \sum_{k=2}^{j-1} \frac{1}{k!} g_k^{(2)}(x,y) + \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{k!} f_k^{(2)}(x,y)$$

Pour passer de l'ordre $j-1$ à l'ordre j on effectue les j étapes qui correspondent à la transformation renor_{j-1} vue au chapitre précédent appliquée à la partie de dimension finie portée par x : tout d'abord l'étape classique de normalisation ; on choisit $U_j^{(1)}$ dans $V_j^m(\mathbb{R}^m)$ tel que $\widetilde{f}_j^{(1)}(x) = f_j(x) - \mathscr{L}_1\Big(\frac{1}{j!}U_j^{(1)}(x)\Big)$ soit constitué uniquement de termes résonants. On peut noter $h_j^{(1)} = \frac{1}{j!}U_j^{(1)}$. On choisit également $U_j^{(2)}$ dans $V_j^m(Q^1)$ tel que $g_j^2(x,y) = f_j^2(x,y) + A_{Q^1}U_j^2(x) - D_xU_j^2(x)Bx$ soit simplifié.

Puis on effectue les étapes de renormalisation : pour $2 \leqslant p \leqslant j$, on résout l'équation :

$$f_j^{(p)}(x) = f_j^{(p-1)}(x) - \mathscr{M}_{p-1}\Big(h_{2+j-p}^{(p)}(x)\Big) \quad \text{avec } h_{2+p-j}^{(p)} \in \bigcap_{i=1}^{p-2} \operatorname{Ker}\mathscr{L}_i,$$

et

$$h_{2+p-j}^{(p)} \in V_{2+p-j}^m\Big(\mathbb{R}^m\Big)$$

La résolution de ces équations se fait de la même manière que dans le chapitre précédent, puisqu'elle consiste finalement à renormaliser une équation différentielle ordinaire sur $\mathbb{R}^m$. □

5.2. Conclusion

Ce chapitre conclut la première partie : nous avons vu comment utiliser différentes méthodes algorithmiques de calcul de formes normales classiques, lesquelles méthodes peuvent se compléter et s'entraider.

Néanmoins, cette approche « pas-à-pas », itérative, cache une structure algébrique mise en évidence par Jean Écalle comme on va le voir dans la deuxième partie.

PARTIE II

CALCUL MOULIEN ET THÉORIE DES FORMES NORMALES

CHAPITRE 6

CALCUL MOULIEN

L'objet de ce chapitre est de présenter brièvement les objets appelés *moules* par leur créateur J. Écalle, ainsi qu'une première utilisation des moules dans le calcul des formes normales de champs de vecteurs.

Les principales références sont bien sûr les nombreux travaux d'Écalle sur le sujet [17–19,21] mais on pourra également consulter ceux de J. Cresson [11, 12] ou de D. Sauzin [45], ou la thèse de B. Vallet [51].

6.1. Notations

Dans ce chapitre, on notera $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ un alphabet, fini ou non. A^* est l'ensemble des *mots* construits sur l'alphabet A, c'est-à-dire des suites totalement ordonnées $a_1, \ldots, a_r$.

Si r est un entier naturel, un mot de longueur r dont les lettres sont $a_1, \ldots, a_r$ est noté $\boldsymbol{a}$ et $\ell(\boldsymbol{a}) = r$. Par convention, l'unique mot de longueur 0 est le mot vide $\emptyset$. On notera également A_r^* l'ensemble des mots de longueur r.

L'opération usuelle sur A^* est la *concaténation* de deux mots $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ notée $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ ou plus simplement $\boldsymbol{ab}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Dans le cas de la composition de deux moules, on aura de plus besoin d'une structure de semi-groupe sur A. Si $\boldsymbol{a} = a_1 \cdots a_r$ est dans A^* et $+$ l'opération de semi-groupe sur A, on définit $\|\boldsymbol{a}\|$ comme la lettre $a_1 + \cdots + a_r$ de A.

Après ce bref catalogue de notations, nous pouvons enfin définir l'outil principal de cette partie.

Définition 6.1.1. — Étant donnés un anneau commutatif $\mathbb{K}$ et un alphabet A, un *moule* sur A est une application $M^\bullet$ de A^* dans $\mathbb{K}$. Elle est usuellement notée $M^\bullet$; la notation de l'évaluation du moule $M^\bullet$ sur le mot $\boldsymbol{a}$, $M^\bullet(\boldsymbol{a})$ est notée $M^{\boldsymbol{a}}$.

On notera $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des moules construits sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque 6.1.2. — C'est ainsi qu'Écalle présente les moules comme des « fonctions d'un nombre variable de variables ».

6.2. La correspondance avec les séries entières

La construction algébrique des moules peut se voir plus aisément à l'aide des séries entières formelles non-commutatives. Il y a en effet une interprétation naturelle d'un moule en coefficient de série entière formelle non-commutative.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif, et si A est un alphabet, on note $\mathbb{K}\langle A\rangle$ l'anneau des combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\mathbb{K}$ d'éléments de A^*, *i.e.* les polynômes non-commutatifs sur A^* ; de même, on note $\mathbb{K}_r\langle A\rangle$ l'anneau des polynômes non commutatifs homogènes de degré r, *i.e.* les combinaisons linéaires finies d'éléments de A_r^* à coefficients dans $\mathbb{K}$. Remarquons tout de suite que $\mathbb{K}\langle A\rangle$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non-commutative. Elle est munie d'une *graduation* naturelle par la longueur des mots :

$$\mathbb{K}\langle A\rangle = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathbb{K}_r\langle A\rangle.$$

On note $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ la complétion de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ par rapport à cette graduation. C'est l'algèbre des séries entières formelles non-commutatives à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ s'écrit :

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} M^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}, \quad M^{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{K},$$

notation condensée pour :

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{\boldsymbol{a}\in A_r^*} M^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} \Big).$$

Pour un moule $M^\bullet$ sur l'alphabet A à valeurs dans $\mathbb{K}$, on peut définir une série génératrice Φ_M élément de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ par :

$$\Phi_M = \sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} M^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a},$$

qu'on notera aussi, s'il n'y a pas d'ambiguïté (notamment sur l'alphabet), $\sum_\bullet M^\bullet \bullet$.

Proposition 6.2.1. — *L'application* $\begin{array}{l} \mathscr{M}_{\mathbb{K}}(A) : \to \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \\ M^\bullet \mapsto \Phi_M \end{array}$ *est bijective.*

Remarque 6.2.2. — La graduation sur $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ a une contrepartie naturelle dans $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(A)$ qui est également la longueur des mots. Ainsi, la formalisation en termes mouliens d'un problème passe d'abord par la possibilité de décrire le problème en question dans une algèbre graduée. C'est ce que nous verrons pour les champs de vecteurs, les difféos...

6.3. L'algèbre des moules

La correspondance précédente induit quelques propriétés calculatoires élémentaires : des opérations d'addition et de multiplication dans $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ on déduit aisément celles sur les moules correspondant.

6.3.1. Opérations élémentaires, inverse. —

Définition 6.3.1. — La *somme* de deux moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$ est le moule $M^\bullet + N^\bullet$ défini par :

$$(M^\bullet + N^\bullet)^{\boldsymbol{a}} = M^{\boldsymbol{a}} + N^{\boldsymbol{a}}.$$

De même, en identifiant le calcul des coefficients du produit $\Phi_M \Phi_N$ en fonction de ceux de Φ_M et Φ_N donne le *produit* de deux moules :

Définition 6.3.2. — Le produit (non commutatif) de deux moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$ est le moule noté $M^\bullet \times N^\bullet$ défini par :

$$(M^\bullet \times N^\bullet)^{\boldsymbol{a}} = \sum_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}} M^{\boldsymbol{a}_1} N^{\boldsymbol{a}_2},$$

où cette dernière somme s'effectue sur toutes les partitions du mot $\boldsymbol{a}$ de A^* en deux mots $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$.

Proposition 6.3.3. — *La multiplication moulienne est une opération associative.*

Le moule neutre pour l'addition est bien évidemment le moule nul $0^\bullet$ qui vaut 0 sur tous les mots. Le moule neutre pour la multiplication est le moule $1^\bullet$ défini par :

$$1^{\boldsymbol{a}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{a} = \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors définir l'inverse $(M^\bullet)^{-1}$ du moule $M^\bullet$ comme le moule (unique) $N^\bullet$ tel que :

$$M^\bullet \times N^\bullet = N^\bullet \times M^\bullet = 1^\bullet.$$

La définition du moule $1^\bullet$ assure la proposition suivante :

Proposition 6.3.4. — *$M^\bullet$ est inversible pour la multiplication si et seulement si $M^\emptyset$ est inversible dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. — Si $S^\bullet$ est l'inverse de $M^\bullet$, alors $S^\bullet \times M^\bullet = 1^\bullet$. On résout cette équation pour le mot vide, puis pour les mots de longueur 1, puis de longueur 2, etc.

Sur le mot vide, cette équation donne :

$$S^\emptyset M^\emptyset = 1.$$

Donc si $M^\emptyset$ est inversible, $S^\emptyset$ existe et vaut $\dfrac{1}{M^\emptyset}$.

Pour un mot a de longueur 1, $S^\bullet \times M^\bullet = 1^\bullet$ donne :

$$S^a M^\emptyset + S^\emptyset M^a = 0,$$

d'où $S^a = -\dfrac{M^a}{(M^\emptyset)^2}$.

Plus généralement, pour un mot $\boldsymbol{a} = a_1 \cdots a_r$ de longueur r :

$$S^{\boldsymbol{a}} = \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^k}{(M^\emptyset)^{1+k}} \sum_{\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_k \overset{*}{=} \boldsymbol{a}} M^{\boldsymbol{a}_1} \cdots M^{\boldsymbol{a}_k},$$

où $\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_k \overset{*}{=} \boldsymbol{a}$ représente toutes les partitions du mot $\boldsymbol{a}$ en k mots tels que $\boldsymbol{a}_i \neq \emptyset$ pour tout i. □

6.3.2. Algèbre à composition des moules. — Si $(A,+)$ est un semi-groupe, on peut définir, pour un mot $\boldsymbol{a} = a^1 \ldots a^r$ de A^*, la « norme » $\|\boldsymbol{a}\| = a^1 + \cdots + a^r$. L'opération de *composition* de deux moules nécessite la structure de semi-groupe sur l'alphabet A. Elle est donnée par l'opération de *substitution* d'une série formelle dans une autre.

L'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle$ est graduée par $\|\|$. Soit $b \in A$. La *composante homogène* de degré b de la série formelle non-commutative $\Phi_M = \sum_{\boldsymbol{a} \in A^*} M^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}$ est définie comme :

$$\Phi_M^b = \sum_{\substack{\boldsymbol{a} \in A^* \\ \|\boldsymbol{a}\| = b}} M^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}.$$

Remarquons que cette composante homogène est définie à l'aide de la norme $\|\|$ et dépend donc de la graduation choisie sur l'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle$.

On a alors, par définition de Φ_M :

$$\Phi_M = \sum_{a \in A} \Phi_M^a.$$

Rappelons la définition de la substitution des séries formelles non-commutatives :

Définition 6.3.5. — Soit $(A,+)$ un alphabet muni d'une structure de semi-groupe. Si $M^\bullet$ et $N^\bullet$ sont deux moules de séries génératrices respectives Φ_M et Φ_N, la substitution de Φ_N dans Φ_M que l'on notera $\Phi_M \circ \Phi_N$ est définie par :

$$\Phi_M \circ \Phi_N = \sum_{\boldsymbol{a} \in A^*} M^{\boldsymbol{a}} \Phi_N^{\boldsymbol{a}},$$

où, pour le mot $\boldsymbol{a} = a_1 \cdots a_r$, $\Phi_N^{\boldsymbol{a}}$ est le produit $\Phi_N^{a_1} \cdots \Phi_N^{a_r}$ et $N^\emptyset = 0$.

Nous pouvons maintenant donner la définition de la composition de deux moules :

Définition 6.3.6. — Soit $(A,+)$ un alphabet muni d'une structure de semi-groupe. Étant donnés deux moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$ on définit le moule $M^\bullet \circ N^\bullet$ comme le moule tel que :

$$\Phi_M \circ \Phi_N = \sum_{\boldsymbol{a} \in A^*} (M^\bullet \circ N^\bullet)^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}.$$

On peut donner une expression intrinsèque du moule $M^\bullet \circ N^\bullet$:

Lemme 6.3.7. — *Soit $(A,+)$ un alphabet muni d'une structure de semi-groupe, et $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A)$. On définit le moule $M^\bullet \circ N^\bullet$ sur les mots de A^* de la manière suivante :*

- $(M^\bullet \circ N^\bullet)^\emptyset = M^\emptyset$;
- *Pour un mot $\boldsymbol{a}$ de longueur au moins 1 :*

$$(M^\bullet \circ N^\bullet)^{\boldsymbol{a}} = \sum_{k=1}^{\ell(\boldsymbol{a})} \sum_{\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_k \overset{*}{=} \boldsymbol{a}} M^{\|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_k\|} N^{\boldsymbol{a}_1} \cdots N^{\boldsymbol{a}_k},$$

où $\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_k \overset{*}{=} \boldsymbol{a}$ représente toutes les partitions du mot $\boldsymbol{a}$ en k mots tels que $\boldsymbol{a}_i \neq \emptyset$ pour tout i.

De même que le moule $1^\bullet$ est le neutre pour la multiplication moulienne, on définit le moule $I^\bullet$ neutre pour la composition de la manière suivante :

Définition 6.3.8. — Le moule neutre pour la composition est le moule $I^\bullet$ défini par :

$$I^\bullet = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell(\bullet) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.1}$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 6.3.9. — *L'ensemble $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(A)$ muni des opérations $(+,\cdot,\times,\circ)$ est une algèbre à composition, c'est-à-dire telle que :*

$$\forall M^\bullet, \forall N^\bullet, \forall U^\bullet, (M^\bullet \times N^\bullet) \circ U^\bullet = (M^\bullet \circ U^\bullet) \times (N^\bullet \circ U^\bullet).$$

6.4. Exponentielle et Logarithme

Notons $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle_*$ l'ensemble des séries formelles non-commutatives sans terme constant, c'est-à-dire telles que le coefficient du mot vide est nul.

Pour Φ dans $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle_*$, on peut définir l'exponentielle de Φ comme suit :

$$\exp \Phi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Phi^n}{n!},$$

et c'est encore un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\left[M^\bullet\right]_{(\times n)}$ le moule donné par le produit $\underbrace{M^\bullet \times \cdots \times M^\bullet}_{n \text{ fois}}$ avec la convention que $\left[M^\bullet\right]_{(\times 0)} = 1^\bullet$.

Nous définissons maintenant l'exponentielle d'un moule :

Définition 6.4.1. — Soit $M^\bullet$ un moule de $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(A)$ et Φ_M sa série génératrice ; on définit l'exponentielle du moule $M^\bullet$ l'unique moule $S^\bullet$ tel que :

$$\exp\Big(\sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} M^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\Big) = \sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} S^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}.$$

On note $S^\bullet = \mathrm{Exp} M^\bullet$.

On peut définir de manière analogue le logarithme d'un moule. Néanmoins, nous n'en aurons pas besoin ici.

6.5. Aspects algébriques

L'algèbre des moules s'inscrit dans le cadre algébrique plus général des algèbres de Lie libres. Pour une introduction voir [34, 44, 47].

Si A est un ensemble, on note $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$ *l'algèbre de Lie libre* engendrée par A. Ses éléments sont des crochets de Lie formels $[\cdot,\cdot]$.

On a $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A) \subset \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ où cette dernière algèbre se révèle être *l'algèbre enveloppante universelle* de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$. Par ailleurs on note $\mathscr{G}_{\mathbb{K}}(A)$ le *groupe de Lie* associé à $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$.

On définit l'application $\Delta : \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ comme le morphisme d'algèbres défini de la manière suivante : $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ et pour a dans A par $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. On étend ensuite Δ à $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ par linéarité. Cette application donne une structure de bigèbre graduée sur $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. On peut alors caractériser à l'aide de Δ les éléments de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ appartenant $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$.

Définition 6.5.1. — Un élément P de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ est dit :

$$\textit{primitif} \text{ si} \quad \Delta(P) = P \otimes 1 + 1 \otimes P;$$

$$\textit{group-like} \text{ si} \quad \Delta(P) = P \otimes P.$$

Le résultat important suivant, issu de la théorie des algèbres de Lie libres, se trouve dans [47] ; il va donner naissance à des moules particuliers, vérifiant certaines symétries.

Lemme 6.5.2. — *Soit P un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. Alors :*

$$P \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A) \iff P \textit{ est primitif;}$$

$$P \in \mathscr{G}_{\mathbb{K}}(A) \iff P \textit{ est group-like.}$$

On peut énoncer ce résultat en utilisant uniquement des expressions faisant intervenir les coefficients des séries formelles en jeu. Pour cela nous rappelons une définition classique en algèbre combinatoire, à savoir la notion de *battage* ou *shuffle*.

Définition 6.5.3. — Le battage ou shuffle, noté $ш : A^* \times A^* \to \mathscr{P}(A^*)$ est défini récursivement sur A^*, pour tout mot $\boldsymbol{a}$ de A^* et tous x et y dans A, e étant le mot vide :

$$\boldsymbol{a} ш e = e ш \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

$$x\boldsymbol{a} ш y\boldsymbol{b} = x(\boldsymbol{a} ш y\boldsymbol{b}) \cup y(x\boldsymbol{a} ш \boldsymbol{b})$$

Un exemple, avec $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2)$ et $\boldsymbol{b} = (x_3)$:

$$\boldsymbol{a} ш \boldsymbol{b} = \{(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_3, x_1, x_2)\}$$

Remarquons qu'ici, les différents triplets apparaissent autant de fois que nécessaire.

D'après [47] :

$$\Delta\Big(\sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} M^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\Big) = \sum_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A^*}\Big(\sum_{\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{a}ш\boldsymbol{b}} M^{\boldsymbol{c}}\Big)\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}. \tag{6.2}$$

Cette égalité permet d'obtenir le lemme suivant, qui donne des conditions pour qu'un élément soit primitif (respectivement group-like) directement sur les coefficients de la série formelle :

Lemme 6.5.4. — *Un élément $P \in \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ s'écrivant $P = \sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} P^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ est primitif (respectivement group-like) si et seulement si :*

$$\sum_{\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{a}ш\boldsymbol{b}} M^{\boldsymbol{c}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A^*\setminus\{e\}, \tag{$\star$}$$

$$\Big(\textit{respectivement} \sum_{\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{a}ш\boldsymbol{b}} M^{\boldsymbol{c}} = M^{\boldsymbol{a}}M^{\boldsymbol{b}} \quad \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A^*.\Big) \tag{$\star\star$}$$

Démonstration. — Appliquer le lemme 6.5.2 et utiliser la formule (6.2), puis procéder par identification des coefficients. □

Inversement Écalle utilise ces deux égalités pour définir des propriétés des moules : *l'alternalité* et la *symétralité*.

Définition 6.5.5. — Un moule $M^\bullet$ de $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(A)$ est dit *alternal* (respectivement *symétral*) si $M^\bullet$ vérifie ($\star$) (respectivement ($\star\star$)).

Un élément primitif de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ donné, comment s'écrit l'élément correspondant dans $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$? Comme $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle_*$ est l'idéal de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ engendré par les polynômes sans terme constant, notons $\psi : \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle_* \to \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$ l'application définie pour tout $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_r)$ de A^* par :

$$\psi(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{r}[[\cdots[[a_1,a_2],a_3],\cdots],a_r],$$

puis étendue à $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle_*$ par linéarité.

Le lemme suivant, qu'on trouve dans [47] et [34] sous le nom de théorème de Dynkin-Specht-Wever, est appelé *lemme de projection* par Écalle :

***Lemme 6.5.6* (Lemme de projection)**. — *On a :*

$$\psi|_{\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)} = \mathrm{Id}_{\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)}.$$

La conséquence importante est que pour un moule alternal $M^\bullet$ on a l'égalité suivante :

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} M^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} M^{\boldsymbol{a}}\psi(\boldsymbol{a}) = \sum_{r\geqslant 1}\frac{1}{r}\sum_{\boldsymbol{a}\in A^*} M^{\boldsymbol{a}}[[\cdots,[[a_1,a_2],a_3],\cdots],a_r].$$

L'utilisation de ces symétries permettra par la suite de démontrer rapidement qu'une somme d'opérateurs différentiels d'apparence *a priori* peu engageante est en fait un champ de vecteurs. C'est pourquoi nous présentons dans la section suivante l'utilisation des moules pour écrire un champ de vecteurs.

6.6. Écriture moulienne d'un champ de vecteurs

Dans cette section, tous les champs considérés, ainsi que les séries, sont encore des objets formels. Soit ν un entier naturel fixé ; on considère un champ de vecteurs X sur $\mathbb{C}^\nu$:

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i\partial_{x_i},$$

où ∂_{x_i} est la dérivée partielle par rapport à la variable complexe x_i, et où $X_i : \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}$ est une série formelle en les $x_1,\ldots,x_\nu$; on note $\mathbb{C}[[x]]$ l'algèbre des séries entières formelles en $x_1,\ldots,x_\nu$.

Comme on l'a vu, pour obtenir une écriture d'un champ de vecteurs en termes mouliens, nous avons besoin d'une graduation ; nous verrons qu'il y a plusieurs choix de graduations possibles lorsque l'on écrit un champ de vecteurs, cependant pour l'instant, nous nous en tiendrons à la graduation induite par la décomposition du champ en *opérateurs différentiels homogènes*.

Définition 6.6.1. — Un opérateur différentiel est un élément de $\mathbb{C}[[x]][\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_\nu}]$, *i.e.* un polynôme en les ∂_{x_i} dont les coefficients sont des séries entières formelles (commutatives) en les variables $x_1,\ldots,x_\nu$.

L'ordre d'un opérateur différentiel est le degré du polynôme en les variables $\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_\nu}$.

Pour $m = (m_1,\ldots,m_\nu)$ dans $\mathbb{Z}^\nu$, on note x^m pour $x_1^{m_1}\cdots x_\nu^{m_\nu}$. On définit alors le *degré* d'un opérateur différentiel homogène : si n est dans $\mathbb{Z}^\nu$, un opérateur différentiel homogène de degré n est un opérateur différentiel B_n tel que pour tout m dans $\mathbb{N}^\nu$, il existe un complexe $\beta_{n,m}$ tel que :

$$B_n(x^m) = \beta_{n,m}x^{n+m}.$$

Ainsi on a deux graduations possibles sur $\mathbb{C}[[x]][\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_\nu}]$: l'ordre et le degré. Cette distinction prendra tout son sens lors de l'exposition de la méthode

d'arborification. La graduation qu'on utilise ici pour définir les moules est celle donnée par le degré de l'opérateur différentiel.

Remarque 6.6.2. — Si B_n est un opérateur différentiel homogène en ordre d'ordre 1 et de degré n, alors $B_n = \sum_{i=1}^{\nu} B_n(x_i)\partial_{x_i}$.

Considérons alors un champ de vecteurs X sur $\mathbb{C}^\nu$ tel que $X(0) = 0$. On peut l'écrire sous la forme :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n,$$

où les B_n sont des opérateurs différentiels homogènes de degré n et d'ordre 1, et X_{lin} la partie linéaire du champ. L'ensemble $A(X)$ est une partie de $\mathbb{Z}^\nu$ mais nous pouvons étendre $A(X)$ en $\mathbb{Z}^\nu$ en posant $B_n = 0$ si n n'est pas dans $A(X)$.

C'est alors $A(X)$, ou plus généralement $\mathbb{Z}^\nu$ qui va jouer le rôle de l'alphabet des sections précédentes. L'opération de concaténation de deux mots a pour pendant l'opération de composition d'opérateurs différentiels : pour deux lettres (degrés) n_1 et n_2, on note $B_{\boldsymbol{n}}$ l'opérateur $B_{n_1} \circ B_{n_2}$ où $\boldsymbol{n} = n_1 n_2$. C'est encore un opérateur différentiel homogène, de degré $\|\boldsymbol{n}\| = n_1 + n_2$ et d'ordre 2.

Remarque 6.6.3. — Par la suite, et pour alléger les notations, on préférera écrire $B_1 B_2$ à $B_1 \circ B_2$, sauf cas équivoque.

À titre d'exemple, considérons le champ suivant, défini sur $\mathbb{C}^2$, (les λ_1, λ_2 ainsi que les a_{ij} et b_{ij} sont des complexes) :

$$X = \lambda_1 x\partial_x + \lambda_2 y\partial_y + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)\partial_x + (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)\partial_y,$$

La partie linéaire est $X_{\text{lin}} = \lambda_1 x\partial_x + \lambda_2 y\partial_y$ et les opérateurs différentiels homogènes sont :

$$\begin{aligned} B_{(1,0)} &= x(a_{20}x\partial_x + b_{11}y\partial_y), \\ B_{(0,1)} &= y(a_{11}x\partial_x + b_{02}y\partial_y), \\ B_{(-1,2)} &= a_{02}y^2\partial_x, \\ B_{(2,-1)} &= b_{20}x^2\partial_y. \end{aligned}$$

Pour terminer cette section, nous donnons l'écriture moulienne d'un champ de vecteurs :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet}.$$

On rappelle que le moule $I^{\bullet}$ a été défini page 70 ; quant à la notation $\bullet$ elle représente les mots construits sur l'alphabet, ici $\mathbb{Z}^{\nu}$. Ainsi cette écriture n'est rien d'autre que :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in A^*} I^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}},$$

où $A = \mathbb{Z}^{\nu}$. Les $B_{\bullet}$ sont les *comoules* qui apparaissent dans les écrits d'Écalle.

Nous allons maintenant nous attacher à la composition des opérateurs différentiels homogènes. La motivation principale de cette étude, est l'obtention de séries d'opérateurs convergentes comme nous le verrons par la suite.

6.7. Arborification

La méthode d'arborification est introduite par Écalle et largement développée dans ses travaux propres ou écrits avec B. Vallet ([17–22]) ; c'est une réécriture des séries mouliennes du type $\sum_{\bullet} M^{\bullet} B_{\bullet}$ et est utilisée pour mieux démontrer la *convergence* de ces séries, définie en 7.5.4 page 95. Commençons par une définition :

Définition 6.7.1. — Pour tout ν-uplet $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_\nu)$ d'entiers positifs, on notera ∂_x^{δ} pour $\partial_{x_1}^{\delta_1} \cdots \partial_{x_\nu}^{\delta_\nu}$ et on dira que ∂_x^{δ} est *d'ordre de dérivation* $|\delta| = \delta_1 + \cdots + \delta_\nu$.

On dira alors qu'un opérateur différentiel

$$B = \sum_{\delta \in \mathfrak{D}} b_{\delta}(x) \partial_x^{\delta},$$

où $\mathfrak{D}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\nu}$, est *homogène en ordre de dérivation d'ordre* d si pour tout δ dans $\mathfrak{D}$, on a $|\delta| = d$.

Remarque 6.7.2. — Cette définition d'ordre de dérivation est bien cohérente (et compatible) avec la définition donnée pour des opérateurs différentiels homogènes.

Nous allons maintenant considérer quelques exemples dans un but pédagogique.

6.7.1. Exemples. — Commençons par la composition de deux opérateurs différentiels homogènes B_1 et B_2 de degrés respectivement n_1 et n_2, d'ordre de dérivation 1.

On a :

$$B_1 = \sum_{i=1}^{\nu} B_1(x_i)\partial_{x_i}, \quad \text{et} \quad B_2 = \sum_{j=1}^{\nu} B_2(x_j)\partial_{x_j}.$$

La composée $B_{1\bullet 2} = B_1 \circ B_2$ est un opérateur différentiel homogène de degré $n_1 + n_2$. On écrit alors $B_{1\bullet 2}$ de la manière suivante :

$$B_{1\bullet 2} = \underbrace{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant \nu} B_1(x_i)\partial_{x_i}[B_2(x_j)]\partial_{x_j}}_{B_{\underset{(1\bullet 2)}{<}}} + \underbrace{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant \nu} B_1(x_i)B_2(x_j)\partial^2_{x_i x_j}}_{B_{1\oplus 2}}.$$

Le premier terme de la somme, noté $B_{\underset{(1\bullet 2)}{<}}$ est toujours d'ordre de dérivation 1 (c'est la partie dans laquelle B_1 n'agit que sur les coefficients de B_2) ; en revanche, le deuxième terme de la somme, noté $B_{1\oplus 2}$ voit son ordre de dérivation augmenter à 2. Par ailleurs, chaque terme reste un opérateur différentiel homogène de degré $n_1 + n_2$. C'est justement l'idée de la méthode d'arborification que d'écrire, pour un mot donné $\boldsymbol{n} = n_1 \cdots n_r$ la composée $B_{\boldsymbol{n}}$ en une somme d'opérateurs différentiels homogènes en degré *et en ordre de dérivation*.

L'apprentissage de la méthode d'arborification comporte deux parties, qui sont données par les réponses respectives aux questions suivantes : que fait l'arborification ? comment l'écrit-on ? La problématique est d'abord issue de l'analyse (regrouper les termes de même ordre de dérivation) mais est traitée de manière algébrique, comme nous le verrons plus loin.

Le principe de la méthode d'arborification étant à ce stade explicité, attachons nous maintenant à en comprendre la notation ; pour cela, on considère un deuxième exemple : soient $B_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_3}$ trois opérateurs différentiels homogènes de degrés respectifs n_1, n_2, n_3 (éléments de $\mathbb{Z}^\nu$), de même ordre 1, et $B_{\boldsymbol{n}} = B_{n_1}B_{n_2}B_{n_3}$, qui est un homogène de degré $\|\boldsymbol{n}\|$.

On écrit :

$$B_{n_1} = \sum_{i=1}^{\nu} B_{n_1}(x_i)\partial_{x_i}, \quad B_{n_2} = \sum_{j=1}^{\nu} B_{n_2}(x_j)\partial_{x_j}, \quad B_{n_3} = \sum_{k=1}^{\nu} B_{n_3}(x_k)\partial_{x_k}.$$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
B_{n_1,n_2,n_3} &= B_{n_1}\Big(\sum_{j,k} B_{n_2}(x_j)\partial_{x_j}[B_{n_3}(x_k)]\partial_{x_k} + \sum_{i,j} B_{n_2}(x_j)B_{n_3}(x_k)\partial^2_{x_jx_k}\Big) \\
&= \sum_{i,j,k} B_{n_1}(x_i)\Big(\partial_{x_i}[B_{n_2}(x_j)]\partial_{x_j}[B_{n_3}(x_k)]\partial_{x_k} && (6.3)\\
&\qquad + B_{n_2}(x_j)\partial^2_{x_ix_j}[B_{n_3}(x_k)]\partial_{x_k} && (6.4)\\
&\qquad + B_{n_2}(x_j)\partial_{x_j}[B_{n_3}(x_k)]\partial^2_{x_ix_k} && (6.5)\\
&\qquad + \partial_{x_i}[B_{n_2}(x_j)]B_{n_3}(x_k)\partial^2_{x_jx_k} && (6.6)\\
&\qquad + B_{n_2}(x_j)\partial_{x_i}[B_{n_3}(x_k)]\partial^2_{x_jx_k} && (6.7)\\
&\qquad + B_{n_2}(x_j)B_{n_3}(x_k)\partial^3_{x_ix_jx_k}\Big) && (6.8)
\end{aligned}
$$

On a deux termes d'ordre 1, trois d'ordre 2 et un d'ordre 3. Cependant pour deux termes de même ordre, les coefficients ne sont pas les mêmes (ne proviennent pas de la même « manière » de dériver c'est-à-dire du même coefficient). En utilisant le même principe de notation que précédemment, on a :

$$
\begin{aligned}
(6.3) &= B_{(n^1n^2n^3)^<}\\
(6.4) &= B_{((n^2\oplus n^1)n^3)^<}\\
(6.5) &= B_{(n^2n^3)^<\oplus n^1}\\
(6.6) &= B_{(n^1n^2)^<\oplus n^3}\\
(6.7) &= B_{(n^1n^3)^<\oplus n^2}\\
(6.8) &= B_{n^1\oplus n^2\oplus n^3}
\end{aligned}
$$

Plus généralement, considérons deux opérateurs différentiels homogènes en degré et en ordre :

$$B_1 = \sum_{\delta\in\mathfrak{D}} b_\delta(x)\partial_x^\delta \text{ avec } |\delta| = d \in \mathbb{N} \text{ et } \mathfrak{D} \subset \mathbb{N}^\nu$$

et

$$B_2 = \sum_{\gamma\in\mathfrak{G}} c_\gamma(x)\partial_x^\gamma \text{ avec } |\gamma| = e \in \mathbb{N} \text{ et } \mathfrak{G} \subset \mathbb{N}^\nu$$

où les b_δ et c_γ sont des coefficients dans $\mathbb{C}[[x]]$. On note alors

$$B_{(12)^<} = \sum_{\substack{\delta\in\mathfrak{D}\\ \gamma\in\mathfrak{G}}} b_\delta(x)\partial_x^\delta[c_\gamma(x)]\partial_x^\gamma$$

et

$$B_{1\oplus 2} = \sum_{\substack{\delta\in\mathfrak{D}\\ \gamma\in\mathfrak{G}}} b_\delta(x)c_\gamma(x)\partial_x^{\delta+\gamma}.$$

Ces exemples montrent comment construire des mots avec les opérations $\oplus$ et $^<$.

Définition 6.7.3. — Un mot construit sur les lettres $n_1,\dots,n_r$ avec les opérations $\oplus$ et $^<$ est dit *arborescent* ou *arborifié*. On notera $\overset{<}{\boldsymbol{n}}$ un mot arborescent, et sa longueur sera donnée par $\ell\left(\overset{<}{\boldsymbol{n}}\right) = r$.

On notera par ailleurs $\mathrm{Arb}(A)$ l'ensemble des mots arborescents formés sur l'alphabet A avec les deux opérations $\oplus$ et $^<$; pour $\boldsymbol{n}$ dans A^*, on notera $\mathrm{Arb}(\boldsymbol{n})$ l'ensemble des mots $\overset{<}{\boldsymbol{a}}$ de $\mathrm{Arb}(A)$ apparaissant dans la décomposition de $B_{\boldsymbol{n}}$. On a donc, par définition :

$$B_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}\in\mathrm{Arb}(\boldsymbol{n})} B_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}}.$$

Remarque 6.7.4. — Remarquons cependant, par exemple, que $B_{1\oplus 2} = B_{2\oplus 1}$. Ainsi $B_{1\bullet 2}$ et $B_{2\bullet 1}$ comportent tous deux le terme $B_{1\oplus 2}$ dans leur décomposition : même si $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{m}$ on peut avoir $\mathrm{Arb}(\boldsymbol{n})\cap\mathrm{Arb}(\boldsymbol{m})\neq\emptyset$.

Définition 6.7.5. — Enfin, un moule $M^\bullet$ étant donné, on notera $M^{\overset{<}{\bullet}}$ le moule *arborifié* de $M^\bullet$, c'est-à-dire le coefficient de $B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}$ dans l'égalité ci-dessous :

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in A^*} M^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}\in\mathrm{Arb}(A)} M^{\overset{<}{\boldsymbol{a}}} B_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}}.$$

Remarque 6.7.6. — Il faut être attentif à la notation $^<$ qui peut être équivoque ici : c'est en effet aussi bien la manière générale de noter une suite ou un moule arborifié, qu'un des deux symboles qui interviennent dans la construction des suites arborifiées.

6.7.2. Formalisme. — Dans la perspective d'obtenir des estimations sur les moules et opérateurs différentiels homogènes arborifiés on cherche une correspondance entre un moule $M^\bullet$ et le moule arborescent $M^{\overset{<}{\bullet}}$, et de même, entre un opérateur $B_{\boldsymbol{n}}$ et $B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}$.

Définition 6.7.7. — Soit A un alphabet. On définit un *mot arborescent* sur A comme une suite $\overset{<}{\boldsymbol{n}} = (n_1,\dots,n_r)$ d'éléments de A avec sur les indices un ordre partiel particulier appelé *ordre arborescent* : chaque i de $\{1,\dots,r\}$ possède au

plus un antécédent pour cet ordre (*i.e.* au plus un élément plus grand). La longueur de $\overset{<}{\boldsymbol{n}}$ est ici $\ell\left(\overset{<}{\boldsymbol{n}}\right) = r$.

On note $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1 \oplus \overset{<}{\boldsymbol{n}}_2$ l'union disjointe des deux suites arborescentes $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1$ et $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_2$. Dans cette suite, les ordres partiels internes respectifs de $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1$ et $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_2$ sont conservés et les éléments de $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1$ et $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_2$ sont incomparables.

Une suite arborescente $\overset{<}{\boldsymbol{n}}$ est dite *irréductible* si elle ne possède pas de décomposition non triviale $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1 \oplus \overset{<}{\boldsymbol{n}}_2$, autrement dit si elle possède un plus grand élément.

Enfin on notera $M^{\overset{<}{\bullet}}$ un moule *arborescent* c'est-à-dire indexé par des suites arborescentes.

Les opérateurs différentiels arborifiés sont ensuite définis :

Définition 6.7.8. — Pour une suite arborescente $\overset{<}{\boldsymbol{n}} = (n_1, \ldots, n_r)$, on définit $B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}$ comme étant l'unique opérateur différentiel vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}(\varphi\psi) = \sum_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1 \oplus \overset{<}{\boldsymbol{n}}_2} \left(B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1}\varphi\right)\left(B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}_2}\psi\right).$$

Si la suite $\overset{<}{\boldsymbol{n}}$ se décompose en exactement d suites irréductibles non vides, $\overset{<}{\boldsymbol{n}} = \overset{<}{\boldsymbol{n}}_1 \oplus \cdots \oplus \overset{<}{\boldsymbol{n}}_d$, alors $B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}$ est un opérateur différentiel homogène en dérivation d'ordre de dérivation d.

Si $\overset{<}{\boldsymbol{n}} = \overset{<}{\boldsymbol{n}}_1 \bullet n_0$ alors :

$$B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}} = B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1} B_{n_0}.$$

On peut alors calculer $B_{\boldsymbol{n}}$ de la manière suivante, par récurrence :

$$\begin{aligned}
B_{\overset{<}{n}} &= \sum_{i=1}^{\nu} (B_n(x_i))\partial_{x_i} \text{ si } l(\overset{<}{\boldsymbol{n}}) = 1,\\
B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}} &= \sum_{i=1}^{\nu} B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}_1}\left(B_{n_0}(x_i)\right)\partial_{x_i} \text{ si } \overset{<}{\boldsymbol{n}} = \overset{<}{\boldsymbol{n}}_1.n_0,\\
B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}} &= \frac{1}{d_1!\cdots d_s!} \sum_{\substack{1\leqslant i_1,\ldots,i_d\leqslant \nu\\ 1\leqslant j_1,\ldots,j_d\leqslant d}} \left(B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}_{j_1}}(x_{i_1})\right)\cdots\left(B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}_{j_d}}(x_{i_d})\right)\partial_{x_{i_1}}\cdots\partial_{x_{i_d}}.
\end{aligned}$$

où d_i est le nombre de suites arborescentes identiques $\overset{<}{\boldsymbol{n}}_i$ qui interviennent dans la décomposition de $\overset{<}{\boldsymbol{n}} = \overset{<}{\boldsymbol{n}}_1 \oplus \cdots \oplus \overset{<}{\boldsymbol{n}}_d$. Ainsi, si l'on applique $B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}$ à une

fonction φ, B_{n_j} agit sur φ si n_j est maximal et B_{n_i} agit uniquement sur les coefficients de l'opérateur $B_{n_{i_+}}$.

On a vu que

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in A(X)} S^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}\in \mathrm{Arb}(X)} S^{\overset{<}{\boldsymbol{a}}} B_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}},$$

et que

$$\Theta^{\overset{<}{\boldsymbol{a}}} = \sum_{\boldsymbol{n}\in X(\overset{<}{\boldsymbol{a}})} \Theta^{\boldsymbol{n}}.$$

Quels sont les $B_{\boldsymbol{n}}$ qui, dans leur arborification donnent $B_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}}$? En d'autres termes comment obtient-on une suite arborifiée $\overset{<}{\boldsymbol{a}} = (a_1,\dots,a_r)^<$ donnée à partir d'une suite ordinaire (totalement ordonnée) $\boldsymbol{n} = (n_1,\dots,n_{r'})$? Tout d'abord, il faut que $l(\boldsymbol{n}) = l(\overset{<}{\boldsymbol{a}})$ soit $r = r'$ (une composée de r' opérateurs donne des termes indexés par des suites arborescentes de longueur r'). Ensuite il faut que ce soient les mêmes lettres qui interviennent dans $\overset{<}{\boldsymbol{a}}$ que dans $\boldsymbol{n}$ (on ne peut pas faire apparaître d'autres opérateurs différentiels que ceux donnés par $\overset{<}{\boldsymbol{a}}$). Ainsi une suite arborescente $\overset{<}{\boldsymbol{a}} = (a_1,\dots,a_r)^<$ provient nécessairement d'une permutation de l'ensemble $\{a_1,\dots,a_r\}$. Cependant toutes les permutations de cet ensemble ne conviennent pas. En effet, le type de permutation σ que l'on cherche doit préserver l'ordre partiel de $\overset{<}{\boldsymbol{a}}$ (ce qui correspond à l'ordre dans lequel les opérateurs sont composés) ; finalement σ doit vérifier :

$$\text{si } i_1 < i_2 \text{ dans } \overset{<}{\boldsymbol{a}}, \text{ alors } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) \text{ dans } \boldsymbol{n}$$
$$\text{et } n_j = a_i \text{ si } j = \sigma(i).$$

Pour une suite arborescente $\overset{<}{\boldsymbol{a}} = (a_1,\dots,a_r)^<$ (partiellement ordonnée) et une suite $\boldsymbol{n} = (n_1,\dots,n_{r'})$ (totalement ordonnée) notons alors $\mathrm{proj}\begin{pmatrix}\overset{<}{\boldsymbol{a}}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}$ le nombre de bijections de $\{1,\dots,r\}$ dans $\{1,\dots,r'\}$ (nul si $r \neq r'$) vérifiant :

$$\text{si } i_1 < i_2 \text{ dans } \overset{<}{\boldsymbol{a}}, \text{ alors } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) \text{ dans } \boldsymbol{n}$$
$$\text{et } n_j = a_i \text{ si } j = \sigma(i).$$

Alors on a la relation

$$S^{\overset{<}{\boldsymbol{a}}} = \sum_{\boldsymbol{n}\in A(X)} \mathrm{proj}\begin{pmatrix}\overset{<}{\boldsymbol{a}}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix} S^{\boldsymbol{n}},$$

pour tout moule $S^\bullet$. En fait, la somme ne s'effectue que sur les mots $\boldsymbol{n}$ qui possèdent les mêmes lettres que $\overset{<}{\boldsymbol{a}}$. De même,

$$B_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}\in \mathrm{Arb}(X)} \mathrm{proj}\begin{pmatrix}\overset{<}{\boldsymbol{a}}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix} B_{\overset{<}{\boldsymbol{a}}}.$$

6.7.2.1. Deux exemples. — Développons B_{a_1,a_2,a_3} ; on a vu que

$$B_{a_1,a_2,a_3} = B_{(a_1a_2a_3)^<} + B_{((a_2\oplus a_1)a_3)^<} + B_{(a_2a_3)^<\oplus a_1} + B_{(a_1a_2)^<\oplus a_3} + B_{(a_1a_3)^<\oplus a_2} + B_{a_1\oplus a_2\oplus a_3}.$$

Cherchons $S^{a_1\oplus a_2\oplus a_3}$; comme il n'y a pas d'ordre partiel sur $a_1\oplus a_2\oplus a_3$, toute bijection de $\{1,2,3\}$ dans lui-même convient, c'est-à-dire pour toute permutation σ de $\{1,2,3\}$, l'opérateur $B_{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)}}$ comporte $B_{a_1\oplus a_2\oplus a_3}$ dans son arborifié. Ainsi,

$$S^{a_1\oplus a_2\oplus a_3} = S^{a_1a_2a_3} + S^{a_1a_3a_2} + S^{a_2a_1a_3} + S^{a_2a_3a_1} + S^{a_3a_1a_2} + S^{a_3a_2a_1}.$$

Si on veut calculer $S^{((a_2\oplus a_3)a_1)^<}$ on regarde la suite arborescente $((a_2\oplus a_3)a_1)^<$. On a $a_3 < a_1$ et $a_2 < a_1$. Donc une projection σ sur le mot $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vérifie nécessairement $\sigma(2) < \sigma(1)$ et $\sigma(3) < \sigma(1)$ puisqu'elle doit préserver l'ordre partiel. Étant donné l'ordre total sur $\boldsymbol{n}$, on a nécessairement $\sigma(1) = 3$ donc $n_3 = a_1$. Ensuite, ($\sigma(2) = 2$ et $\sigma(3) = 1$) et ($\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$) conviennent. On doit donc avoir

$$n_2 = a_2 \text{ et } n_1 = a_3 \text{ dans le premier cas}$$
$$n_2 = a_3 \text{ et } n_1 = a_2 \text{ dans le deuxième cas.}$$

Finalement,

$$S^{((a_2\oplus a_3)a_1)^<} = S^{a_2a_3a_1} + S^{a_3a_2a_1}.$$

CHAPITRE 7

THÉORIE DES FORMES NORMALES

On donne dans ce chapitre un aperçu de la théorie des formes normales d'objets locaux, et surtout des exemples d'utilisation du langage des moules dans cette optique. On peut trouver un résumé des principaux résultats et démonstrations dans l'article de J. Martinet [37].

On insistera sur la notion de *forme prénormale continue* introduite par Écalle. Nous étudierons en détail la construction de la forme prénormale *élaguée*. Dans [20], Écalle et Vallet isolent une forme prénormale ayant des propriétés optimales vis-à-vis de la divergence des séries normalisantes.

En suivant Écalle, on montrera l'intérêt qu'apporte le formalisme moulien lorsqu'il s'agit d'étudier la convergence des séries de normalisation. On se limitera à l'exemple de la linéarisation ; dans ce cas, les moules fournissent un procédé algébrique systématique permettant d'obtenir des majorations optimales pour montrer la convergence des séries normalisantes, grâce à la procédure d'arborification, exposée de manière approfondie dans l'article d'Écalle-Vallet [22].

Par ailleurs, afin de comparer les formes prénormales continues à celle de Poincaré-Dulac, dans un cadre cette fois-ci formel, nous insisterons sur la forme élaguée, dont la construction en est analogue. Nous redémontrons en détail les propriétés de la forme élaguée.

Nous commençons par exposer la problématique générale.

7.1. Normalisation

La plus grande partie de cette section peut-être trouvée dans [3, 53]. La théorie (ou peut-être devrions-nous dire les théories) de formes normales est

un aspect fondamental lorsque l'on cherche à connaître la dynamique d'un système ; c'est tout d'abord une démarche mathématique naturelle, qui consiste à chercher à simplifier le problème.

Ainsi, pour une équation différentielle sous la forme $\dot{x} = X(x)$ où X est un champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^\nu$ par exemple, une première approche consiste à chercher un changement de variables sous la forme $x = y + h(y)$ de manière à simplifier l'équation. Cependant, dans quelle mesure un changement de variables conservera-t-il la dynamique de l'équation initiale ? C'est la condition de conjugaison qui permettra de répondre à cette attente.

7.2. Le cas des champs de vecteurs

Définition 7.2.1. — Soient

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\dot{y} = g(y) \quad y \in \mathbb{R}^n$$

deux champs de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire ici deux applications de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On note $\varphi(t,x)$ et $\psi(t,x)$ respectivement les flots engendrés par f et g.

On dit que les dynamiques (ou les champs de vecteurs) sont $\mathscr{C}^j$ équivalent(e)s s'il existe $j \leqslant k$ et un $\mathscr{C}^j$-difféomorphisme h tels que les orbites de φ sont transportées par h en les orbites de ψ, en préservant l'orientation (mais pas nécessairement la paramétrisation par le temps) ; si h préserve en plus la paramétrisation par le temps, on dit que les dynamiques de f et g sont $\mathscr{C}^j$-conjuguées.

Ainsi, si f et g sont $\mathscr{C}^j$-conjugués, il existe un $\mathscr{C}^j$-difféomorphisme h tel que :

$$h \circ \varphi(t,x) = \psi(t,h(x)).$$

Le théorème de Hartman-Grobman justifie le fait que l'on souhaite conserver la partie *linéaire* du champ :

***Théorème 7.2.2* (Hartman-Grobman)**. — *Soit $\dot{x} = X(x)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ et x_0 un point fixe hyperbolique de X,* i.e. *toutes les valeurs propres de $DX(x_0)$ sont de partie réelle non nulle et $X(x_0) = 0$. Alors le flot engendré par $\dot{x} = X(x)$ est $\mathscr{C}^0$-conjugué au flot de l'équation linéarisée en x_0 :*

$$\dot{\xi} = DX(x_0)\xi,$$

dans un voisinage de x_0.

On considère ici des champs de vecteurs formels sur $\mathbb{C}^\nu$, c'est-à-dire de la forme $X(x) = \sum_{j=1}^{\nu} X_j(x)\partial_{x_j}$ où les X_j sont des séries entières formelles en les variables $x_1,\dots,x_\nu$. On recherche un changement de variable $x = h(y) = y + w(y)$ où w est également une série formelle en les $y_1,\dots,y_\nu$ de valuation au moins 2, ceci afin de préserver la partie linéaire du champ lors du changement de variable.

L'idée d'Écalle est de considérer non pas h mais le *morphisme de substitution* Θ_h défini par :

$$\Theta_h : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]]$$
$$\varphi \mapsto \varphi \circ h$$

On notera Θ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Lemme 7.2.3. — *Le morphisme Θ est un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[[x]]$.*

Démonstration. — Θ est bien une application $\mathbb{C}$-linéaire. De plus, si φ et ψ sont deux séries formelles, le produit $\varphi\psi$ est encore dans $\mathbb{C}[[x]]$ et on a :

$$\begin{aligned}\Theta(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)\circ h\\ &= (\varphi\circ h)(\psi\circ h)\\ &= \Theta(\varphi)\Theta(\psi).\end{aligned}$$

Enfin, h est un changement de variable, donc inversible. Ainsi, on peut définir un inverse de Θ par :

$$\Theta^{-1}(\varphi) = \varphi\circ h^{-1}.$$

On a bien

$$\Theta\circ\Theta^{-1}(\varphi) = (\varphi\circ h^{-1})\circ h = \varphi$$

et

$$\Theta^{-1}\circ\Theta(\varphi) = (\varphi\circ h)\circ h^{-1} = \varphi.$$

Donc $\Theta\circ\Theta^{-1} = \Theta^{-1}\circ\Theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[[x]]}$ et Θ est bien un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[[x]]$. □

On considère l'action du champ X sur les séries formelles φ comme une *dérivation* $\varphi \mapsto X\cdot\varphi$, où :

$$X\cdot\varphi = \sum_{j=1}^{\nu} X_j(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x).$$

Si on note X_{nor} le nouveau champ après le changement de variable h, il faut que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \xrightarrow{X} & X\cdot\varphi \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \varphi\circ h & \xrightarrow[X_{\text{nor}}]{} & X_{\text{nor}}\cdot(\varphi\circ h) \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & X_{\text{nor}}\cdot(\varphi\circ h) = (X\cdot\varphi)\circ h \qquad \forall\varphi\in\mathbb{C}[[x]], \\ \Longleftrightarrow\ & X_{\text{nor}}(\Theta\varphi) = \Theta(X\varphi) \qquad \forall\varphi\in\mathbb{C}[[x]]. \end{aligned}$$

D'où $X_{\text{nor}}\circ\Theta = \Theta\circ X$, que l'on écrira sous la forme suivante (et en omettant les $\circ$ pour alléger la notation) :

$$X_{\text{nor}} = \Theta X\Theta^{-1}.$$

Ainsi X_{nor} est formellement conjugué à X.

7.3. Forme prénormale

7.3.1. Définitions. — On rappelle que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y est encore un champ de vecteurs défini par :

$$[X,Y] = XY - YX$$

Définition 7.3.1. — On dit que le champ X_{nor} est une *forme prénormale* du champ X si :

i) X_{nor} est conjugué à X ;
ii) $[X_{\text{nor}}, X_{\text{lin}}] = 0$.

On rappelle à présent la notion de *résonance* (cf. [3]) :

Définition 7.3.2. — Soit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\dots,\lambda_\nu)\in\mathbb{C}^\nu$. On dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est résonant si il existe s dans $\{1,\dots,\nu\}$ et m dans $\mathbb{N}^\nu$, $|m|\geqslant 2$ tels que :

$$\lambda_s = \sum_{j=1}^{\nu} m_j\lambda_j.$$

De plus, étant donnée une collection $\boldsymbol{\lambda}$ de complexes telle que $\boldsymbol{\lambda}$ est résonant, étant donnés s dans $\{1,\dots,\nu\}$ et m dans $\mathbb{N}^\nu$, $|m|\geqslant 2$, le monôme (opérateur différentiel) $x^m\partial_{x_j}$ est dit résonant si m et s sont tels que la relation de résonance $\lambda_s = \sum_{j=1}^{\nu} m_j\lambda_j$ est vérifiée.

Définition 7.3.3. — Soit X un champ de vecteurs de partie linéaire X_{lin} diagonale de spectre $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$ tel que $X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A} B_n$.

- On dira que le champ X est *non résonant* si $\boldsymbol{\lambda} \cdot m$ n'est nul pour aucun m dans A ;
- on dira que le champ X est *fortement non résonant* si $\boldsymbol{\lambda} \cdot m$ n'est nul pour aucun m non nul dans $\mathbb{Z}^\nu$.

Nous pouvons maintenant caractériser les formes prénormales de champs de vecteurs :

Proposition 7.3.4. — *Soit X un champ de vecteurs formel sur $\mathbb{C}^\nu$ de partie linéaire X_{lin} et X_{nor} une forme prénormale de X. Alors X_{nor} est de la forme :*

$$X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}} + \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{m \in R_j(X)} a_m x^m \partial_{x_j},$$

où $R_j = \{m \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\}$ tels que $|m| \geqslant 2$ et $\lambda_j = m \cdot \boldsymbol{\lambda}\}$ et $a_m \in \mathbb{C}$.

Démonstration. — Pour un monôme $x^m \partial_{x_s}$ avec $m \in \mathbb{N}^\nu$ et s dans $\{1, \dots, \nu\}$, on a :

$$[x^m \partial_{x_s}, X_{\text{lin}}] = x^m (\lambda_s - \sum_{j=1}^{\nu} m_j \lambda_j) \partial_{x_s}.$$

□

7.3.2. Non unicité des formes prénormales. — Pour un entier $k \geqslant 2$ on note E_k l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathbb{C}^\nu$ de degré k *i.e.* tels que chaque coordonnée (dans la base $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_\nu}$ est un polynôme en les variables $x_1, \dots, x_\nu$ homogène de degré k. On définit E par :

$$E = \bigoplus_{k \geqslant 2} E_k,$$

de telle sorte que tout champ de vecteurs de E s'écrit $Y = \sum_{k \geqslant 2} Y_k$.

On fixe maintenant la partie linéaire X_{lin}, et on note $\operatorname{ad} X_{\text{lin}}$ l'application $Y \mapsto [X_{\text{lin}}, Y]$ pour tout champ de vecteurs Y. Remarquons que $\operatorname{ad} X_{\text{lin}}(E_k) \subset E_k$, et donc $\operatorname{ad} X_{\text{lin}} : E \to E$.

Commençons par un résultat sur le noyau de $\operatorname{ad} X_{\text{lin}}$:

Lemme 7.3.5. — *Soit* $X_{\text{lin}} = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j x_j \partial_{x_j}$ *et* $\begin{cases} \operatorname{ad} X_{\text{lin}} & : E \to E \\ Y & \mapsto [X_{\text{lin}}, Y] \end{cases}$. *Alors* $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad} X_{\text{lin}}) = \{0\}$ *si et seulement si $\boldsymbol{\lambda}$ est non-résonant.*

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de prouver le lemme pour un monôme $x^m \partial_{x_s}$. Les calculs déjà effectués montrent que si $\boldsymbol{\lambda}$ est non-résonant, alors $(\lambda_s - \sum_{j=1}^{\nu} m_j \lambda_j) \neq 0$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, X_{\mathrm{lin}}) = \{0\}$. Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, X_{\mathrm{lin}}) = \{0\}$ alors $(\lambda_s - \sum_{j=1}^{\nu} m_j \lambda_j) \neq 0$. Donc $\boldsymbol{\lambda}$ n'est pas résonant. □

Corollaire 7.3.6. — *Si le spectre $\boldsymbol{\lambda}$ de X_{lin} est non-résonant, alors $X_{\mathrm{nor}} = X_{\mathrm{lin}}$.*

Démonstration. — Le théorème de Poincaré-Dulac assure l'existence d'une forme prénormale. De plus, une forme prénormale est la somme de la partie linéaire X_{lin} et de termes résonants. □

Dans le cas où le spectre $\boldsymbol{\lambda}$ de X_{lin} est résonant, cependant on ne peut pas conclure :

Proposition 7.3.7. — *Si le spectre de X_{lin} est résonant, une forme prénormale de X n'est pas unique.*

Démonstration. — Le théorème de Poincaré-Dulac assure l'existence d'au moins une forme prénormale dans ce cas. De plus, une forme prénormale est définie modulo un élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, X_{\mathrm{lin}})$, qui n'est pas réduit à $\{0\}$ d'après le lemme 7.3.5. □

Le cas général de la normalisation en l'absence de résonances ne conduira donc *a priori* pas à une forme unique. Ce problème a été étudié, notamment par Baider [5], mais aussi Gaeta [27], dont nous avons exposé une méthode dans la première partie.

7.4. Formes prénormales continues

Cette notion de forme prénormale continue est introduite et étudiée par Écalle et Vallet dans [20, 51].

On considère toujours un champ de vecteurs $X = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in A} B_n$ où X_{lin} est diagonale, de spectre $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$.

On note $\mathbb{C}\langle\langle \boldsymbol{B} \rangle\rangle$ l'algèbre des séries formelles non-commutatives construites sur les opérateurs B_n. Dans ce contexte, on a la proposition suivante :

Proposition 7.4.1. — *L'application suivante de $\mathbb{C}\langle\langle A \rangle\rangle$ dans $\mathbb{C}\langle\langle \boldsymbol{B} \rangle\rangle$ est surjective.*

$$\sum_{\boldsymbol{n} \in A^*} M^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{n} \longmapsto \sum_{\boldsymbol{n} \in A^*} M^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}$$

De plus, $M^\bullet \longmapsto \Phi_M$ est une bijection de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(A)$ sur $\mathbb{C}\langle\langle A \rangle\rangle$.

La partie linéaire X_{lin} du champ étant fixée, cette proposition justifie bien l'écriture suivante :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet}.$$

Notons pour $k \in \mathbb{Z}^{\nu}$:

$$\omega(k) = \boldsymbol{\lambda} \cdot k = \sum_{j=1}^{\nu} = \lambda_j k_j.$$

On rappelle par ailleurs que si $\boldsymbol{n} = n_1 \cdots n_r \in A^*$, $\|\boldsymbol{n}\| = n_1 + \cdots + n_r$. On a alors le résultat suivant, qui précise la manière dont les résonances apparaissent et sont liées à la partie linéaire :

Lemme 7.4.2. — *Pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de A^*, on a $[X_{\text{lin}}, B_{\boldsymbol{n}}] = \omega(\|\boldsymbol{n}\|) B_{\boldsymbol{n}}$.*

En d'autres termes, pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de A^*, $B_{\boldsymbol{n}}$ est un vecteur propre de l'opérateur $\operatorname{ad} X_{\text{lin}}$ *associé à la valeur propre $\omega(\|\boldsymbol{n}\|)$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur la longueur r des mots. Rappelons que pour un mot n de longueur $r = 1$, $B_n = \sum_{j=1}^{\nu} B_n(x_j) \partial_{x_j}$. Donc :

$$\begin{aligned}
[X_{\text{lin}}, B_n] &= X_{\text{lin}} B_n - B_n X_{\text{lin}} \\
&= \sum_{j=1}^{\nu} \Big(\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i} [B_n(x_j)] - B_n(x_j) \lambda_j \Big) \partial_{x_j}.
\end{aligned}$$

Par définition, B_n étant un opérateur différentiel homogène de degré n, on a donc $B_n(x_j) = \beta_j x^{\check{n}_j}$ où $\beta_j \in \mathbb{C}$ et $\check{n}_j = (n_1, \ldots, n_j + 1, \ldots, n_\nu)$. Alors, pour tout (i, j) in $\{1, \ldots, \nu\}^2$, $x_i \partial_{x_i} [B_n(x_j)] = \beta_j (n_i + \delta_{ij}) x^{\check{n}_j}$. D'où :

$$\begin{aligned}
[X_{\text{lin}}, B_n] &= \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j x^{\check{n}_j} \big(\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i (n_i + \delta_{ij}) - \lambda_j \big) \\
&= \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j x^{\check{n}_j} \omega(n) = \omega(n) B_n.
\end{aligned}$$

Fixons maintenant $r \geqslant 2$; on suppose que pour tout mot $\boldsymbol{m}$ de longueur inférieure à $r - 1$, $[X_{\text{lin}}, B_{\boldsymbol{m}}] = \omega(\|\boldsymbol{m}\|) B_{\boldsymbol{m}}$. Pour un mot $\boldsymbol{n}$ de longueur r on écrit $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} p$ où $\ell(\boldsymbol{m}) = r - 1$ et $\ell(p) = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
[X_{\text{lin}}, B_{\boldsymbol{n}}] &= [X_{\text{lin}}, B_{\boldsymbol{m}} B_p] \\
&= X_{\text{lin}} B_{\boldsymbol{m}} B_p - B_{\boldsymbol{m}} B_p X_{\text{lin}} \\
&= X_{\text{lin}} B_{\boldsymbol{m}} B_p - B_{\boldsymbol{m}} X_{\text{lin}} B_p + B_{\boldsymbol{m}} X_{\text{lin}} B_p - B_{\boldsymbol{m}} B_p X_{\text{lin}} \\
&= [X_{\text{lin}}, B_{\boldsymbol{m}}] B_p + B_{\boldsymbol{m}} [X_{\text{lin}}, B_p] \\
&= \omega(\|\boldsymbol{m}\|) B_{\boldsymbol{n}} + B_{\boldsymbol{m}} \omega(p) B_p \\
&= \omega(\|\boldsymbol{n}\|) B_{\boldsymbol{n}}.
\end{aligned}$$

□

On peut donner la définition d'un mot résonant, bien que redondante avec la sous-section précédente :

Définition 7.4.3. — Soit $\boldsymbol{n}$ dans A^*. On dit que $\boldsymbol{n}$ est un mot résonant si

$$\omega(\|\boldsymbol{n}\|) = 0.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le type de forme prénormale que l'on cherche (toujours suivant Écalle) :

Définition 7.4.4. — On dira que le champ X_{nor} est une *forme prénormale continue* du champ $X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n$ par rapport à l'alphabet A s'il existe un changement de variables qui conjugue X à X_{nor} et tel que :

$$X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in A^*} \text{Pran}^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}, \quad \text{avec } \text{Pran}^{\boldsymbol{n}} = 0 \text{ si } \omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0.$$

Remarque 7.4.5. — Remarquons que cette définition implique que le moule $\text{Pran}^{\bullet}$ doit être alternal, de manière à ce que $X_{\text{nor}} - X_{\text{lin}}$ soit bien un champ de vecteurs, c'est-à-dire un élément primitif de l'algèbre $\mathbb{C}\langle\langle \boldsymbol{B} \rangle\rangle$. Ainsi, $X_{\text{nor}} - X_{\text{lin}}$ est un élément de l'algèbre de Lie engendrée par les $\{B_n, n \in A(X)\}$.

Nous essayons donc d'écrire les éléments de $\text{Ker}\,\text{ad}\,X_{\text{lin}}$ dans l'algèbre de Lie engendrée par les B_n.

Par ailleurs, une forme prénormale continue dépend de la décomposition du champ choisie. Nous verrons que certains choix peuvent s'avérer meilleurs que d'autres.

Enfin, on a le théorème suivant, qui unifie la notion de forme prénormale et de forme prénormale continue d'un champ de vecteurs :

Théorème 7.4.6. — *Soit X un champ de vecteurs qu'on écrit sous la forme $X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n$ et X_{nor} une forme prénormale continue de ce champ. Alors X_{nor} est une forme prénormale au sens de la définition 7.3.1.*

Démonstration. — Si X_{nor} est une forme prénormale continue de X, on peut l'écrire :

$$X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in A^*} \text{Pran}^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}, \quad \text{avec } \text{Pran}^{\boldsymbol{n}} = 0 \text{ si } \omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}[X_{\mathrm{lin}}, X_{\mathrm{nor}}] &= \sum_{\boldsymbol{n}\in A(X)^*} \mathrm{Pran}^{\boldsymbol{n}}[X_{\mathrm{lin}}, B_{\boldsymbol{n}}] \\ &= \sum_{\boldsymbol{n}\in A(X)^*} \mathrm{Pran}^{\boldsymbol{n}}\omega(\boldsymbol{n})B_{\boldsymbol{n}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

En effet, chaque terme de cette somme est nul par définition de $\mathrm{Pran}^{\bullet}$. □

7.4.1. L'équation de normalisation moulienne. — On considère dans cette sous-section un champ de vecteurs X de partie linéaire X_{lin} qu'on supposera diagonale :

$$X_{\mathrm{lin}} = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j x_j \partial_{x_j}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu) \in \mathbb{C}^\nu.$$

On cherche $X_{\mathrm{nor}} - X_{\mathrm{lin}}$ dans l'algèbre de Lie libre de $\mathbb{C}\langle\langle \boldsymbol{B} \rangle\rangle$ et on écrit l'équation de conjugaison :

$$X_{\mathrm{nor}} = \Theta X \Theta^{-1}. \tag{7.1}$$

Θ devant être un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$, il doit être dans le groupe de Lie de cette algèbre de Lie. On travaille donc dans l'algèbre enveloppante universelle $\mathbb{C}\langle\langle \boldsymbol{B} \rangle\rangle$ et on cherche Θ sous la forme :

$$\Theta = \sum_{\boldsymbol{n}\in A(X)^*} \Theta^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}.$$

De même, on écrit X_{nor} sous la forme :

$$X_{\mathrm{nor}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\bullet} \mathrm{Pran}^{\bullet} B_{\bullet},$$

la sommation sur le $\bullet$ signifiant qu'elle s'effectue sur tous les mots $\boldsymbol{n}$ construits avec l'alphabet sous-jacent $A(X)$, lequel découle de la décomposition du champ X en opérateurs différentiels homogènes B_n.

L'équation de conjugaison (7.1) s'écrit alors de la manière suivante, en utilisant la décomposition moulienne :

$$X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet} = \Big(\sum_{\bullet} (\Theta^{\bullet})^{-1} B_{\bullet}\Big)\Big(X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\bullet} \mathrm{Pran}^{\bullet} B_{\bullet}\Big)\Big(\sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}\Big)$$

i.e.

$$X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet} = \Big(\sum_{\bullet} (\Theta^{\bullet})^{-1} B_{\bullet}\Big) X_{\mathrm{lin}} \Big(\sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}\Big) + \sum_{\bullet} \Big((\Theta^{\bullet})^{-1} \times \mathrm{Pran}^{\bullet} \times \Theta^{\bullet}\Big) B_{\bullet}. \tag{7.2}$$

Pour développer le deuxième terme du membre de gauche, on a besoin du lemme suivant, afin de pouvoir ensuite identifier les deux séries terme à terme :

Lemme 7.4.7. — *Soit $M^\bullet$ un moule $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}\big(A(X)\big)$. Alors :*

$$X_{\mathrm{lin}}\Big(\sum_\bullet M^\bullet B_\bullet\Big) = \sum_\bullet \nabla M^\bullet B_\bullet + \Big(\sum_\bullet M^\bullet B_\bullet\Big) X_{\mathrm{lin}},$$

où $\nabla M^{\boldsymbol{n}} = \omega(\|\boldsymbol{n}\|) M^{\boldsymbol{n}}$ pour tout $\boldsymbol{n}$ dans $A(X)^*$.

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de calculer $X_{\mathrm{lin}} B_{\boldsymbol{n}}$ pour un mot $\boldsymbol{n} = (n^1, \ldots, n^r)$ de $A(X)^*$ de longueur r. D'après le lemme 7.4.2, $X_{\mathrm{lin}} B_{\boldsymbol{n}} = \omega(\|\boldsymbol{n}\|) B_{\boldsymbol{n}} + B_{\boldsymbol{n}} X_{\mathrm{lin}}$.

□

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 7.4.8. — *L'équation de conjugaison* (7.1) *est équivalente à l'équation moulienne suivante :*

$$\Theta^\bullet \times I^\bullet = \nabla \Theta^\bullet + \mathrm{Pran}^\bullet \times \Theta^\bullet. \tag{7.3}$$

Démonstration. — À l'aide du lemme 7.4.7 précédent, on peut développer le membre de gauche de l'équation (7.2). On identifie ensuite terme à terme, ce qui donne :

$$I^\bullet = (\Theta^\bullet)^{-1} \times \nabla \Theta^\bullet + (\Theta^\bullet)^{-1} \times \mathrm{Pran}^\bullet \times \Theta^\bullet,$$

puis, en multipliant à gauche par $\Theta^\bullet$:

$$\Theta^\bullet \times I^\bullet = \nabla \Theta^\bullet + \mathrm{Pran}^\bullet \times \Theta^\bullet.$$

□

Dans notre démarche, cette équation est très importante car elle donne une relation entre la forme prénormale voulue (donnée par $\mathrm{Pran}^\bullet$) et la manière de l'obtenir grâce à $\Theta^\bullet$. Cependant, il ne sera pas toujours possible de résoudre complètement cette équation, et une condition ou équation supplémentaire sera parfois nécessaire.

Remarque 7.4.9. — En fait, l'opérateur ∇ défini ci-dessus est une dérivation sur les moules, c'est-à-dire que pour tous moules $A^\bullet$ et $B^\bullet$,

$$\nabla(A^\bullet \times B^\bullet) = \nabla A^\bullet \times B^\bullet + A^\bullet \times \nabla B^\bullet.$$

Ainsi l'équation (7.3) que nous venons d'obtenir est une « équation différentielle » sur le moule $\Theta^\bullet$.

7.5. Linéarisation

7.5.1. Linéarisation formelle d'un champ de vecteurs. — Le cas le plus simple que l'on peut résoudre entièrement se trouve déjà dans la thèse de Poincaré (1879) ; c'est le cas de la linéarisation formelle du champ de vecteurs X en l'absence de résonances. Énonçons le théorème de Poincaré en nous restreignant au cas fortement non résonant :

Théorème 7.5.1. — *Soit X un champ de vecteurs formel sous forme bien préparée :*

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A} B_n, \quad X_{\text{lin}} = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j x_j \partial_{x_j},$$

la partie linéaire étant diagonale de spectre λ et les B_n des opérateurs différentiels homogènes. Si X est fortement non résonant, alors ce champ est formellement conjugué à sa partie linéaire X_{lin}.

De plus, la conjugaison est donnée explicitement par l'automorphisme de substitution :

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{C}[[x]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[x]] \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ h \end{aligned}$$

où $\Theta = \sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}$ et le moule $\Theta^{\bullet}$ est donné par :

$$\Theta^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \cdots + \omega_r)},$$

pour un mot $\boldsymbol{n} = (n^1, \ldots, n^r)$ de longueur r.

Démonstration. — Comme X est fortement non résonant, pour tout m non nul dans $\mathbb{Z}^{\nu}$, $\lambda \cdot m \neq 0$; pour tout $\boldsymbol{n}$ de $A(X)^*$, chaque lettre de $\boldsymbol{n}$ est un multi-entier de somme strictement positive, donc $\|\boldsymbol{n}\|$ est aussi un multi-entier de somme strictement positive, donc $\|\boldsymbol{n}\| \neq 0$; donc $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$. L'équation de linéarisation s'obtient en cherchant $X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}}$, soit de manière équivalente, en imposant $\text{Pran}^{\bullet} = 0^{\bullet}$. D'après la proposition 7.4.8, l'équation de linéarisation moulienne est alors :

$$\Theta^{\bullet} \times I^{\bullet} = \nabla \Theta^{\bullet}. \tag{7.4}$$

Remarque 7.5.2. — On obtient également une « équation différentielle moulienne » sur $\left(\Theta^{-1}\right)^{\bullet}$ en conduisant des calculs analogues :

$$\nabla \left(\Theta^{-1}\right)^{\bullet} = -I^{\bullet} \times \left(\Theta^{-1}\right)^{\bullet}. \tag{7.5}$$

À partir de l'équation (7.4), nous allons calculer $\Theta^\bullet$ par récurrence sur la longueur des suites $\boldsymbol{n}$.

Tout d'abord, Θ doit être tangent à l'identité de manière à préserver la partie linéaire du champ, donc $\Theta^\emptyset = 1$ et $B_\emptyset = \mathrm{Id}$.

Par définition du produit de deux moules, l'équation (7.4) est équivalente à :

$$\forall \boldsymbol{n} \in A(X)^*, \nabla\Theta^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{n}_1 \bullet \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}} \Theta^{\boldsymbol{n}_1} I^{\boldsymbol{n}_2}.$$

En se souvenant de la définition de $I^\bullet$, $I^{\boldsymbol{n}}$ vaut 0 si $l(\boldsymbol{n}) \neq 1$ et 1 sinon. Donc, par définition du moule $\nabla\Theta^\bullet$, l'équation précédente équivaut à la relation de récurrence suivante : si $\boldsymbol{n} = (n^1, \ldots, n^r)$ est de longueur r,

$$(\lambda \cdot \|\boldsymbol{n}\|)\Theta^{\boldsymbol{n}} = \Theta^{n^1,\ldots,n^{r-1}} I^{n^r},$$

soit

$$(\lambda \cdot (n^1 + \cdots + n^r))\Theta^{n^1,\ldots,n^r} = \Theta^{n^1,\ldots,n^{r-1}}. \tag{7.6}$$

Notons pour tout i, $\omega(n^i) = \omega_i = \lambda \cdot n^i$. Si $l(\boldsymbol{n}) = 1$, l'équation (7.6) est équivalente à :

$$(\lambda \cdot n)\Theta^n = \Theta^\emptyset,$$

soit

$$\omega(n)\Theta^n = 1.$$

Comme $\omega(n) \neq 0$ on a une solution

$$\Theta^n = \frac{1}{\omega(n)}.$$

Si r est fixé supposons que pour toute suite $(n^1, \ldots, n^{r-1})$ de longueur $r-1$, pour tout k dans $\{1, \ldots, r-1\}$ on ait $\omega_1 + \cdots + \omega_k \neq 0$ et

$$\Theta^{n^1,\ldots,n^{r-1}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2)\cdots(\omega_1 + \cdots + \omega_{r-1})}.$$

Alors pour toute suite $(n^1, \ldots, n^r)$ de longueur r on a

$$(\omega_1 + \cdots + \omega_r)\Theta^{n^1,\ldots,n^r} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2)\cdots(\omega_1 + \cdots + \omega_{r-1})}.$$

Comme X est fortement non résonant, $\omega_1 + \cdots + \omega_r \neq 0$, donc

$$\Theta^{n^1,\ldots,n^r} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2)\cdots(\omega_1 + \cdots + \omega_r)}.$$

Remarque 7.5.3. — La résolution de l'équation (7.5) à la remarque 7.5.2 sur $\left(\Theta^{-1}\right)^\bullet$ conduit de la même manière à :

$$\left(\Theta^{-1}\right)^{\boldsymbol{n}} = \frac{(-1)^r}{\omega_r(\omega_r + \omega_{r-1})\cdots(\omega_r + \cdots + \omega_1)}.$$

Il resterait à démontrer que le moule $\Theta^\bullet$ ainsi défini est bien symétral, de manière à ce que la somme

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in A(X)^*} \Theta^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}$$

définisse bien un champ de vecteurs. On trouvera une démonstration dans [11].

□

7.5.2. Linéarisation analytique : problèmes de convergence. — On considère ici un champ de vecteurs X analytique, c'est-à-dire que $X(x) = \sum_{j=1}^{\nu} X_j(x)\partial_{x_j}$ où X_j est analytique, ce qu'on notera $X_j \in \mathbb{C}\{x\}$. Pour étudier la convergence des séries mouliennes utilisera des majorations sur les moules, ou sur les comoules, et de même sur les opérateurs différentiels, ou leurs arborifiés ; pour ces derniers, il est nécessaire de définir la notion de convergence à l'aide d'une norme :

Définition 7.5.4. — Soient U et V deux voisinages compacts de 0 dans $\mathbb{C}^\nu$, tels que $V \subset U$. Pour tout germe de fonction φ de $\mathbb{C}\{x\}$ en 0, on définit :

$$\|\varphi\|_U = \sup_{x\in U} |\varphi(x)|,$$

et pour tout opérateur P de $\mathbb{C}\{x\}$ dans lui-même, on définit également :

$$\|P\|_{U,V} = \sup_{\|\varphi\|_U \leqslant 1} \|P\varphi\|_V.$$

On dira alors que la série d'opérateurs $\sum_{\boldsymbol{n}} P_{\boldsymbol{n}}$ est *normalement convergente* si la famille $(\|P_{\boldsymbol{n}}\|)_{\boldsymbol{n}}$ est sommable pour une paire (U,V) au moins.

Enfin, pour le champ

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n\in A(X)} B_n,$$

de partie linéaire $X_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i}$, on notera Ω l'ensemble $\{\lambda\cdot n, n \in A(X)\}$ et les complexes éléments de Ω seront toujours notés $\omega(n)$ ou ω s'il n'y a pas d'ambiguïté. Pour un mot $\boldsymbol{n} = (n^1,\dots,n^r)$ on aura donc $\omega(\boldsymbol{n}) = (\omega_1,\dots,\omega_r)$ et $\|\omega(\boldsymbol{n})\| = \omega_1 + \cdots + \omega_r$. Les degrés (ou lettres) n de $A(X)$ sont toujours des ν-uplets d'entiers positifs ou nul, sauf au plus un valant -1, de somme $|n| = n_1 + \cdots + n_\nu \geqslant 1$.

On s'intéresse ici à la convergence de la série d'opérateurs différentiels définissant $\Theta^\bullet$ vue dans le théorème de Poincaré 7.5.1. Cela dépend de la grosseur des coefficients $\Theta^{\boldsymbol{n}}$, en particulier de la vitesse à laquelle les $\omega(\boldsymbol{n})$ peuvent

s'approcher de 0 quand $|\|\boldsymbol{n}\||$ augmente. Ce dernier phénomène dépend essentiellement de la répartition dans le plan complexe des valeurs propres du spectre λ de la partie linéaire du champ. C'est ce qui motive la définition suivante :

Définition 7.5.5. — Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$ une collection de valeurs propres dans $\mathbb{C}^\nu$. On définit :

- le *domaine de Poincaré* $\mathscr{P}$ comme l'ensemble des λ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0.
- le *domaine de Siegel* $\mathscr{S}$, comme le complémentaire du précédent.

On voit que si λ est dans le domaine de Poincaré $\mathscr{P}$, les ω auront tendance à s'éloigner de 0 (car ce sont des combinaisons $\sum_i \lambda_i n_i$ d'entiers *positifs* sauf au plus un valant -1) ; *a contrario* si λ est dans $\mathscr{S}$ il sera beaucoup plus facile aux ω de se rapprocher de 0.

7.5.3. En l'absence de petits diviseurs. — Nous commençons par nous placer dans le cas où les ω ne peuvent pas trop s'approcher de 0 :

Définition 7.5.6. — On dira que le champ X ne contient pas de petits diviseurs s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega, |\omega| \geqslant C.$$

Remarquons que si le champ X ne contient pas de petits diviseurs, il est nécessairement non résonnant donc formellement linéarisable d'après le théorème de Poincaré 7.5.1 page 93. Une condition suffisante pour que le changement de variable soit analytique est donnée par le théorème suivant, également dû à Poincaré.

Théorème 7.5.7. — *Soit un champ de vecteurs X ne contenant pas de petits diviseurs, et dont le spectre λ est dans le domaine de Poincaré. Alors il existe un changement de variable analytique qui linéarise le champ au voisinage de* 0 *et ce changement de variable est donné par le normalisateur* Θ. *De plus,* $\Theta = \sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}$ *est un automorphisme de* $\mathbb{C}\{x\}$, *et on a :*

$$\Theta^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\cdots(\omega_1+\cdots+\omega_r)},$$

pour un mot $\boldsymbol{n} = (n^1, \ldots, n^r)$ *de longueur* r.

Si on démontre que Θ est un automorphisme de $\mathbb{C}\{x\}$, alors le changement de variable h est aussi dans $\mathbb{C}\{x\}$, car $h = \Theta(\mathrm{Id})$. Il s'agit donc de prouver que la série définissant Θ est normalement convergente, au sens de la définition 7.5.4.

Démonstration. — On écrit comme d'habitude le champ

$$X = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n,$$

et on rappelle que, le champ n'étant pas résonnant, il est linéarisable par le normalisateur

$$\Theta = \sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}$$

dont les coefficients sont définis par :

$$\Theta^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\cdots(\omega_1+\cdots+\omega_r)},$$

pour tout mot de $A(X)^*$ de longueur r.

Observons alors que les λ_i étant dans $\mathscr{P}$, ils sont tous dans un même demi-plan ouvert $P_\theta = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(ze^{i\theta}) > 0\}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, quitte à effectuer une rotation, on peut les considérer tous dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Il existe donc une constante $\rho > 0$ telle que pour tout i $\mathrm{Re}(\lambda_i) > \rho$. On peut alors en déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de ω dans Ω tels que $\mathrm{Re}(\omega) < 0$. En effet, un tel ω s'écrit $\lambda \cdot n$ avec, par exemple, $n_s = -1$ pour un certain s dans $\{1,\ldots,\nu\}$, les autres n_i étant positifs. On a alors :

$$0 > \mathrm{Re}(\omega) = -\mathrm{Re}(\lambda_s) + \sum_{i \neq s} n_i \mathrm{Re}(\lambda_i),$$

donc

$$\mathrm{Re}(\lambda_s) > \left(\sum_{i \neq s} n_i\right)\rho,$$

et il n'y a qu'un nombre fini de $n_i, i \neq s$ vérifiant cette inégalité.

On peut alors effectuer un changement de variable polynomial (car il n'y a qu'un nombre fini de ω à éliminer) pour obtenir le champ X sous la forme :

$$X = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in \mathfrak{A}(X)} B_n,$$

où $\mathfrak{A}(X)$ est le nouvel alphabet, tel que

$$\forall n \in \mathfrak{A}(X), \mathrm{Re}(\omega(n)) > 0.$$

Notons alors $S^{\bullet}$ indifféremment pour $\Theta^{\bullet}$ ou pour $\left(\Theta^{-1}\right)^{\bullet}$. Écalle donne les inégalités suivantes dans [18], pour $\boldsymbol{n} = (n^1,\ldots,n^r)$:

$$|S^{\boldsymbol{n}}| \leqslant \frac{1}{r!C_1^r} \qquad C_1 > 0 \tag{7.7}$$

$$\|B_{\boldsymbol{n}}\|_{U,V} \leqslant r!\|B_{n^1}\|_{U,V} \cdots \|B_{n^r}\|_{U,V} C_2^{N(\boldsymbol{n})} \qquad C_2 > 0 \tag{7.8}$$

$$\|B_n\|_{U,V} \leqslant (C_{U,V})^{|n|} \qquad C_{U,V} > 0 \tag{7.9}$$

$$c(N) \leqslant (C_3)^{N(\boldsymbol{n})} \qquad C_3 > 0 \text{ dépend de V} \tag{7.10}$$

où $|n| = n_1 + \cdots + n_\nu$ et $N(\boldsymbol{n}) = |n^1| + \cdots + |n^r|$ est le *poids* de $\boldsymbol{n}$; $c(N)$ est le nombre de mots de poids N.

Ces inégalités sont prouvées par Brjuno dans [8] ; on peut préciser la preuve (dans [18]) d'Écalle. Pour un bon choix de (U,V) on peut rendre $C_{U,V}$ aussi petite qu'on veut, et on a, pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de longueur r et de poids N :

$$\begin{aligned}\|S^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}\| &\leqslant \frac{1}{r!C_1^r} r!\|B_{n^1}\|_{U,V} \cdots \|B_{n^r}\|_{U,V} C_2^N \\ &\leqslant \frac{1}{C_1^r}(C_{U,V})^{rN} C_2^N\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{\substack{l(\boldsymbol{n})=r\\ N(\boldsymbol{n})=N}} S^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}\|_{U,V} &\leqslant \sum_{\substack{l(\boldsymbol{n})=r\\ N(\boldsymbol{n})=N}} \|S^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}\|_{U,V} \\ &\leqslant \frac{c(N)}{C_1^r} C_{U,V}^{rN} C_2^N \\ &\leqslant (C_3 C_2)^N \frac{(C_{U,V}^r)^N}{C_1^r}.\end{aligned}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$ et r_0 fixés on peut choisir (U_0, V_0) tel que $C_{U_0,V_0} < \varepsilon^{1/r_0} \leqslant \varepsilon^{1/r}$ pour tout $r \geqslant r_0$. On a donc :

$$\sum_{\substack{l(\boldsymbol{n})=r\\ N(\boldsymbol{n})=N}} \|S^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}\| \leqslant \frac{(C_3 C_2 \varepsilon)^N}{C_1^r} \tag{7.11}$$

Si $C_1 > 1$ le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque r tend vers $+\infty$ et la série $\sum_{\bullet} S^{\bullet} B_{\bullet}$ est normalement convergente au sens de la définition 7.5.4 ; si $C_1 < 1$, comme on a toujours $r \leqslant N$, on a

$$\frac{1}{C_1^r} \leqslant \frac{1}{C_1^N}. \tag{7.12}$$

Le cas $C_1 = 1$ ne posant pas de problème, on a dans tous les cas la convergence normale de la série $\sum_{\bullet} S^{\bullet} B_{\bullet}$ et donc un changement de variable analytique. □

Il s'agit maintenant de démontrer les inégalités (7.7) à (7.10).

Démonstration de (7.7). — Puisque l'on s'est ramené à des $\omega(n)$ de partie réelle strictement positive, comme on a supposé que, pour tout ω, $|\omega| \geqslant C > 0$, alors on a :

$$\forall \omega \in \mathfrak{A}(X), \mathrm{Re}(\omega) \geqslant C.$$

Ainsi, pour tout r,

$$\begin{aligned} |\omega_1 + \cdots + \omega_r| &\geqslant \mathrm{Re}(\omega_1 + \cdots + \omega_r) \\ &\geqslant rC. \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$|S^{\boldsymbol{n}}| \leqslant \frac{1}{r!C^r}.$$

□

7.5.4. Le théorème de Brjuno. — On a vu qu'un champ de vecteurs pouvait être linéarisé formellement en l'absence de petits diviseurs (théorème de Poincaré), puis qu'on pouvait le mettre sous forme de la somme de sa partie linéaire et de termes résonnants (théorème de Poincaré-Dulac). On a ensuite étudié la convergence éventuelle des séries donnant le changement de variable, ce qui nous a conduit à un théorème de Poincaré analytique dans le cas du spectre dans le domaine de Poincaré. Une amélioration de ce théorème est la condition diophantienne de Siegel, mais la meilleure condition –à ce jour– est la condition diophantienne de Brjuno.

Introduisons, pour le champ $X = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n$ la quantité $\varpi(k)$ définie pour tout entier k par :

$$\varpi(k) = \inf\left\{ |\lambda \cdot m| = \left| \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i m_i \right| \text{ avec } |m| \leqslant 2^{k+1} \text{ et } \lambda \cdot m \neq 0 \right\}, \tag{7.13}$$

où les m_i sont tous positifs, un au plus valant -1, de somme $|m| = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \geqslant 0$. Cette quantité « mesure » la vitesse à laquelle s'approchent les $\lambda \cdot m$ de 0.

La condition diophantienne de Brjuno est alors la suivante :

$$\text{La série } \mathscr{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log(1/\varpi(k))}{2^k} \text{ est convergente.} \tag{B}$$

remarquons encore que si le champ vérifie la condition (B), il n'est pas résonnant (sinon $\mathscr{S}$ vaudrait ∞). De plus, on dit alors qu'on est en présence de petits diviseurs *diophantiens*.

L'introduction des séries arborifiées permet à Écalle de redémontrer le théorème suivant :

***Théorème 7.5.8* (Brjuno).** — *Soit X un champ de vecteurs analytique dont le spectre de la partie linéaire vérifie la condition* (B). *Alors ce champ est linéarisable par un changement de variable analytique ; les séries arborifiées donnant les normalisateurs*

$$\Theta = \sum_{\boldsymbol{a}^< \in Arb(X)} \Theta^{\boldsymbol{a}^<} B_{\boldsymbol{a}^<}$$

et

$$\Theta^{-1} = \sum_{\boldsymbol{a}^< \in Arb(X)} \left(\Theta^{-1}\right)^{\boldsymbol{a}^<} B_{\boldsymbol{a}^<}$$

convergent en norme vers des opérateurs Θ et Θ^{-1} qui sont des automorphismes de $\mathbb{C}\{x\}$ définissant le changement de variable.

Ce théorème (1971) est presque contemporain des premiers travaux d'Écalle sur les moules (1975). La preuve originale par Brjuno n'utilise bien sûr ni moule ni série arborifiée. Par rapport au formalisme moulien, on rencontrera au cours de la démonstration quelques résultats *a priori* étonnants qu'on ne manquera pas de souligner.

Idée de la démonstration. — On note $S^{\overset{<}{\bullet}}$ indifféremment le moule $\Theta^{\overset{<}{\bullet}}$ ou $\left(\Theta^{-1}\right)^{\overset{<}{\bullet}}$. La preuve repose sur les inégalités suivantes proposées par Écalle dans [18] :

$$|S^{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}| \leqslant Q_1^{N(\overset{<}{\boldsymbol{n}})}, \qquad Q_1 > 0, \tag{7.14}$$

$$\|B_{\overset{<}{\boldsymbol{n}}}\|_{U,V} \leqslant \|B_{n_1}\|_{U,V} \cdots \|B_{n_r}\|_{U,V} Q_2^{N(\overset{<}{\boldsymbol{n}})}, \qquad Q_2 > 0, \tag{7.15}$$

$$\|B_n\|_{U,V} \leqslant (C_{U,V})^{|n|}, \qquad C_{U,V} > 0, \tag{7.16}$$

$$q(N) \leqslant Q_3^{N(\overset{<}{\boldsymbol{n}})}, \qquad Q_3 > 0, \tag{7.17}$$

où (7.14), (7.15), (7.17) sont les analogues respectivement des inégalités (7.7), (7.8), (7.10) déjà vues page 98 pour les séries non arborifiées, tandis que (7.16) est l'identique de (7.9), ce qui est normal, puisque pour un mot n de longueur 1, $B_{\overset{<}{n}} = B_n$.

En supposant ces inégalités prouvées, par des majorations analogues à celles utilisées dans la preuve de la convergence des séries non arborifiées en l'absence de petits diviseurs, on prouve également la convergence de la série $\sum_{\bullet} S^{\overset{<}{\bullet}} B_{\overset{<}{\bullet}}$ et donc le théorème. □

Remarque 7.5.9. — S'il n'est pas étonnant de voir que, dans (7.15), le facteur $r!$ de (7.8) a disparu –c'est l'effet de l'arborification de faire « disparaître » les $r!$ termes du produit $B_{\boldsymbol{n}}$ en « individualisant » chacun d'eux–, il est par contre surprenant de constater avec (7.14) que le moule arborifié correspondant n'augmente pas considérablement mais suit le même type de croissance que le moule ordinaire. On a pourtant vu que le moule arborifié s'exprimait à partir du moule ordinaire, comme une somme comportant parfois jusqu'à $r!$ termes.

On peut trouver des explications à ce phénomène : dans [22], Ecalle et Vallet prouvent que lorsque le moule arborifié est solution d'une « équation différentielle moulienne » identique à celle du moule non arborifié, cela entraîne des croissances voisines pour les deux types de moules.

Bien que ce résultat ne soit pas vrai pour n'importe quel moule, il l'est pour les moules usuels rencontrés ici.

7.6. La forme normale de Poincaré-Dulac

En présence de résonances dans un champ de vecteurs formel, on ne peut plus totalement linéariser le champ ; cependant, le théorème de Poincaré-Dulac assure qu'on peut conjuguer le champ à la somme de sa partie linéaire et de monômes résonants.

Théorème 7.6.1. — *Soit X un champ de vecteurs formel de partie linéaire X_{lin} diagonale dont le spectre $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$ est résonant. Alors il existe un moule* $\text{Pran}^\bullet$ *tel que X est formellement conjugué à la forme prénormale*

$$X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Pran}^\bullet B_\bullet \quad \text{où } \text{Pran}^{\boldsymbol{n}} = 0 \text{ si } \omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0.$$

Démonstration. — Ce théorème n'est autre qu'une réécriture moulienne de celui de Poincaré-Dulac. La démonstration classique de ce théorème se trouve par exemple dans [3] et conduit à la forme de Poincaré-Dulac. La démonstration moulienne se trouve à la section suivante et conduit à la forme élaguée.

□

La forme normale de Poincaré-Dulac est une forme prénormale au sens d'Écalle. Cependant, la démonstration moulienne du résultat ci-dessus conduit à résoudre l'équation de conjugaison (7.1) déjà rencontrée. On verra que la résolution de cette équation donne bien une forme prénormale, mais *a priori* distincte de la forme de Poincaré-Dulac : Écalle l'appelle la forme *élaguée*.

7.7. Procédure de simplification

Rappelons l'équation de conjugaison moulienne (7.3) :

$$\Theta^\bullet \times I^\bullet = \nabla\Theta^\bullet + \mathrm{Pran}^\bullet \times \Theta^\bullet.$$

On cherche à obtenir une forme prénormale continue (de type Poincaré-Dulac) donc on impose :

$$\mathrm{Pran}^{\boldsymbol{n}} = 0 \text{ si } \omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0.$$

Essayons dans ce cas de résoudre l'équation (7.3) dans laquelle, rappelons-le, les moules $\Theta^\bullet$ et $\mathrm{Pran}^\bullet$ sont inconnus, le premier sur tous les mots, le deuxième sur les mots résonants. On rajoute la condition que $\Theta^\emptyset = 1$ car l'automorphisme Θ doit être tangent à l'identité.

On résout par récurrence sur la longueur des mots :

Pour le mot vide $\emptyset$, l'équation (7.3) se réécrit :

$$\Theta^\emptyset I^\emptyset = \nabla\Theta^\emptyset + \mathrm{Pran}^\emptyset\Theta^\emptyset \quad \text{d'où } \mathrm{Pran}^\emptyset = 0.$$

Pour un mot n de longueur 1, l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}\Theta^n I^\emptyset + I^n\Theta^\emptyset &= \nabla\Theta^n + \mathrm{Pran}^n\Theta^\emptyset + \mathrm{Pran}^\emptyset\Theta^n \\ \iff 1 &= \omega(n)\Theta^n + \mathrm{Pran}^n.\end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas où $\omega(n) \neq 0$, comme $\mathrm{Pran}^n = 0$ on peut résoudre cette équation, et on obtient $\Theta^n = \dfrac{1}{\omega(n)}$. Cependant, pour un mot résonant ($\omega(n) = 0$), l'équation donne $\mathrm{Pran}^n = 1$ mais Θ^n disparaît de l'équation et l'on n'a, à ce stade, plus d'informations pour déterminer ces quantités. C'est ici qu'on est placé devant l'alternative suivante :

- Soit rajouter une condition sur Θ, comme une dérivation (voir [51] p.25) ; cela conduit à différentes formes prénormales selon la condition additionnelle (formes royale, régale...). C'est la méthode qu'on peut qualifier de directe, car à l'aide de cette condition supplémentaire, on obtient directement $\Theta^\bullet$ et $\mathrm{Pran}^\bullet$. On utilisera ces formes dans le chapitre 9 afin de comparer, sur des exemples, les différentes expressions obtenues.
- Une autre possibilité est de construire une itération comme dans la méthode de Poincaré-Dulac. C'est cette méthode que l'on présente ici, et qui conduit à la forme élaguée.

Comme dans la méthode de Poincaré-Dulac, on tente de supprimer les termes d'ordre (de dérivation) 1 à chaque étape. Le normalisateur Θ étant un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[[x]]$, c'est un élément group-like de l'algèbre de

Lie libre $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(A)$ et s'écrit donc comme l'exponentielle d'un élément primitif de cette algèbre, *i.e.* l'exponentielle d'un champ de vecteurs V. On écrit donc :

$$\Theta = \exp(V) \text{ où } V = \sum_{\bullet} V^{\bullet} B_{\bullet},$$

le moule $V^{\bullet}$ étant alternal car V est un champ de vecteurs. D'après l'écriture moulienne de Θ et par définition de l'exponentielle d'un moule, on a :

$$\Theta^{\bullet} = \mathrm{Exp} V^{\bullet},$$

et l'équation (7.3) se réécrit :

$$\mathrm{Exp} V^{\bullet} \times I^{\bullet} = \nabla \mathrm{Exp} V^{\bullet} + \mathrm{Pran}^{\bullet} \times \mathrm{Exp} V^{\bullet}. \tag{7.18}$$

Cela ne lève pas l'indétermination sur $\Theta^{\bullet}$ que l'on a rencontrée précédemment, mais le fait d'utiliser l'exponentielle permet d'utiliser la formule de Campbell-Baker-Hausdorff pour choisir $V^{\bullet}$ de manière à éliminer les termes d'ordre 1 non résonants du champ. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 7.7.1. — *Soit* $X = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n$ *un champ de vecteurs sous forme bien préparée, de partie linéaire diagonale fixée* X_{lin} *de spectre* λ.

Si on pose $\Theta = \exp(V)$*, où* V *est le champ défini par :*

$$V^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega(n)} & \textit{si } \ell(\boldsymbol{n}) = 1 \textit{ et } \omega(n) \neq 0\,; \\ 0 & \textit{sinon}\,; \end{cases}$$

alors le champ conjugué $X_{\mathrm{nor}} = \Theta X_{\mathrm{lin}} \Theta^{-1}$ *ne possède pas de termes non-résonants d'ordre* 1.

Démonstration. — Dans [27], Gaeta démontre que d'après la formule de Campbell-Baker-Hausdorff (voir [34]) on a :

$$X_{\mathrm{nor}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} X^{(n)},$$

où $X^{(n+1)} = [X^{(n)}, V]$ et $X^{(0)} = X$. D'où :

$$X_{\mathrm{nor}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n - [X_{\mathrm{lin}}, V] - \cdots;$$

On pose alors $V = \sum_{\boldsymbol{p} \in A(X)^*} V^{\boldsymbol{p}} B_{\boldsymbol{p}}$, donc :

$$X_{\mathrm{nor}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n - \sum_{\boldsymbol{n} \in A(X)^*} \omega(\|\boldsymbol{n}\|) V^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}} - \cdots,$$

d'après le lemme 7.4.2. D'où l'expression du moule $V^{\bullet}$.

□

7.7.1. Procédure de simplification et champ simplifié. — Ce lemme nous permet de définir la forme « simplifiée » du champ X, qui n'est pas une forme prénormale et correspond à la première étape de la transformation recherchée :

Théorème 7.7.2. — *Soit $X = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet}$ un champ de vecteurs formel sous forme bien préparée, où X_{lin} est la partie linéaire diagonale de spectre λ. Soit V le champ défini par $V = \sum_{\bullet} V^{\bullet} B_{\bullet}$ où $V^{\bullet}$ est le moule (alternal) donné par :*

$$V^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega(n)} & \text{si } \ell(n) = 1 \text{ et } \omega(n) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle forme « simplifiée » de X le champ de vecteurs $X_{\text{sam}} = \exp(V) X \exp(-V)$; on l'écrit de la manière suivante :

$$X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in A(X)^*} \text{Sam}^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}},$$

et le moule $\text{Sam}^{\bullet}$ *a l'expression suivante :*

$$\text{Sam}^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{n} = \emptyset, \\ 0 & \text{si } \ell(\boldsymbol{n}) = 1 \text{ et } \omega(n) \neq 0, \\ 1 & \text{si } \ell(\boldsymbol{n}) = 1 \text{ et } \omega(n) = 0 ; \end{cases}$$

pour les mots de longueur $\ell(\boldsymbol{n}) \geqslant 2$, $\text{Sam}^{\bullet}$ *est donné par l'équation moulienne :*

$$\text{Sam}^{\bullet} = \text{Exp} V^{\bullet} \times I^{\bullet} \times \text{Exp}(-V)^{\bullet} - \nabla \text{Exp} V^{\bullet} \times \text{Exp}(-V)^{\bullet}.$$

Démonstration. — Les termes non-résonants du champ X sont tous d'ordre 1. On cherche à les éliminer, donc on pose $X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Sam}^{\bullet} B_{\bullet}$, où le moule $\text{Sam}^{\bullet}$ est défini comme suit :

$$\text{Sam}^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{n} = \emptyset, \\ 0 & \text{si } \ell(\boldsymbol{n}) = 1 \text{ et } \omega(n) \neq 0, \\ & \text{on ne sait pas encore pour les mots plus longs } \boldsymbol{n}. \end{cases}$$

On reprend la même équation que (7.18) avec $\text{Pran}^{\bullet} = \text{Sam}^{\bullet}$:

$$\text{Exp} V^{\bullet} \times I^{\bullet} = \nabla \text{Exp} V^{\bullet} + \text{Sam}^{\bullet} \times \text{Exp} V^{\bullet}.$$

De plus, en imposant $V^{\boldsymbol{n}} = 0$ si $\ell(\boldsymbol{n}) \neq 1$ il est possible de résoudre cette équation, et on trouve :

$$V^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(n) = 0, \\ \dfrac{1}{\omega(n)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où l'expression du champ simplifié X_{sam} :

$$X_{\text{sam}} = \exp\Bigg(\sum_{\substack{n \in A(X) \\ \omega(n) \neq 0}} \frac{1}{\omega(n)} B_n\Bigg) X \exp\Bigg(\sum_{\substack{n \in A(X) \\ \omega(n) \neq 0}} -\frac{1}{\omega(n)} B_n\Bigg). \tag{7.19}$$

□

Enfin, le moule $\text{Sam}^\bullet$ se calcule à l'aide des équations ci-dessus :

Lemme 7.7.3. — *Soit X un champ de vecteurs formel sous forme bien préparée*

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^\bullet B_\bullet,$$

où X_{lin} est la partie linéaire, diagonale de spectre λ. Alors il existe un changement de variables formel qui conjugue X à sa forme « simplifiée » de la manière suivante :

$$X_{\text{sam}} = \exp\Bigg(\sum_{\substack{n \in A(X) \\ \omega(n) \neq 0}} \frac{1}{\omega(n)} B_n\Bigg) X \exp\Bigg(\sum_{\substack{n \in A(X) \\ \omega(n) \neq 0}} -\frac{1}{\omega(n)} B_n\Bigg).$$

De plus, le moule $\text{Sam}^\bullet$ *se calcule directement, et a pour expression :*

- $\text{Sam}^\emptyset = 0$*;*
- *si* $\ell(n) = 1$ *et* $\omega(n) \neq 0$, $\text{Sam}^n = 0$ *(élimination des termes non-résonants) ;*
- *si* $\ell(n) = 1$ *et* $\omega(s) = 0$, $\text{Sam}^n = 1$*;*
- *si* $r = \ell(\boldsymbol{n}) \geqslant 2$ *et* $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *sont tous différents de* 0,

$$\text{Sam}^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^{r-k}(\omega_k(r-k) - \omega_{k+1} - \cdots - \omega_r)}{(k-1)!(r-k+1)!}.$$

- *s'il existe un seul i tel que* $\omega_i = 0$,

$$\text{Sam}^{\boldsymbol{n}} = \frac{(-1)^{r-1}}{(i-1)!(r-i)!\omega_1 \cdots \omega_{i-1}\omega_{i+1} \cdots \omega_r},$$

- *s'il existe au moins deux indices i tels que* $\omega_i = 0$, *alors* $\text{Sam}^{\boldsymbol{n}} = 0$.

Démonstration. — On définit le moule $V^\bullet$ par :

$$V^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega(n)} & \text{si } \ell(\boldsymbol{n}) = 1 \text{ et } \omega(n) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Tout d'abord, effectuons le calcul du moule $\exp(V^\bullet)$. Par définition de l'exponentielle d'un moule, pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de longueur r :

$$\exp(V^\bullet)^{\boldsymbol{n}} = (1^\bullet)^{\boldsymbol{n}} + (V^\bullet)^{\boldsymbol{n}} + \frac{1}{2!}(V^\bullet \times V^\bullet)^{\boldsymbol{n}} + \cdots$$

Comme $V^{\boldsymbol{s}}$ est nul si $l(\boldsymbol{s}) \neq 1$, on a d'une part

$$\exp(V^\bullet)^{\emptyset} = 1,$$

et d'autre part, si $r \geqslant 1$, le seul terme éventuellement non nul dans la somme ci-dessus est le terme d'ordre r du développement :

$$\frac{1}{r!}(\underbrace{V^\bullet \times \cdots \times V^\bullet}_{r \text{ facteurs}})^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{r!}V^{n^1}\cdots V^{n^r},$$

et d'après la définition de $V^\bullet$,

$$(\exp(V^\bullet))^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 \text{ si l'un au moins des } \omega_i \text{ est nul,} \\ \dfrac{1}{r!\omega_1\cdots\omega_r} \text{ si tous les } \omega_i \text{ sont non nuls.} \end{cases}$$

De la même manière,

$$(\exp(-V^\bullet))^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 \text{ si l'un au moins des } \omega_i \text{ est nul,} \\ \dfrac{(-1)^r}{r!\omega_1\cdots\omega_r} \text{ si tous les } \omega_i \text{ sont non nuls.} \end{cases}$$

7.7.1.1. Un premier terme...— Notons $C^\bullet$ le moule $C^\bullet = \exp(V^\bullet) \times I^\bullet$. On a $C^{\emptyset} = 0$. De plus, pour un mot n de longueur 1, on a :

$$C^n = (\exp(V^\bullet))^{\emptyset} I^n = 1.$$

Pour un mot $\boldsymbol{n}$ de longueur $r \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} C^{\boldsymbol{n}} &= \left(\exp(V^\bullet)\right)^{n^1,\ldots,n^{r-1}} I^{n^r} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si l'un au moins des } (\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant r-1} \text{ est nul,} \\ \dfrac{1}{(r-1)!\omega_1\cdots\omega_{r-1}} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

7.7.1.2. ...un deuxième terme...— On note $D^\bullet = C^\bullet \times \exp(-V^\bullet)$, de sorte que $D^{\emptyset} = 0$, et pour un mot n de longueur 1, $D^n = C^n = 1$.

Pour un mot $\boldsymbol{n}$ de longueur $r \geqslant 2$ on a :

$$D^{n^1,\ldots,n^r} = C^{n^1}(\exp(-V^\bullet))^{n^2,\ldots,n^r} + C^{n^1,n^2}(\exp(-V^\bullet))^{n^3,\ldots,n^r} + \cdots + C^{n^1,\ldots,n^r}.$$

Il y a alors plusieurs cas possibles :

– S'il existe un i de $\{1,\dots,r-1\}$ tel que $\omega_i = 0$, alors tout $C^{n^1,\dots,n^j}$, tel que $j \geqslant i+1$ est également nul, (d'après le calcul de $C^{\boldsymbol{n}}$ en 7.7.1.1) ; de même, tout $(\exp(-V^\bullet))^{n^k,\dots,n^r}$ s'annule pour $k \leqslant i$. Donc

$$D^{\boldsymbol{n}} = C^{n^1,\dots,n^i}(\exp(-V^\bullet))^{n^{i+1},\dots,n^r}.$$

On a alors, pour un mot $\boldsymbol{n}$:

$$D^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 \text{ si un autre } (\omega_l)_{\substack{1\leqslant l\leqslant r\\ l\neq i}} \text{ s'annule ;} \\ \dfrac{1}{(i-1)!\omega_1\cdots\omega_{i-1}} \times \dfrac{(-1)^{r-i}}{(r-i)!\omega_{i+1}\cdots\omega_r} \text{ si aucun } \omega_l, l\neq i \text{ ne s'annule.} \end{cases}$$

– si ω_r s'annule, $D^{\boldsymbol{n}} = C^{n^1,\dots,n^r}$ alors :

$$D^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } (\omega_l)_{1\leqslant l\leqslant r-1} \text{ s'annule ;} \\ \dfrac{1}{(r-1)!\omega_1\cdots\omega_{r-1}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

– si aucun autre ω_i ne s'annule, alors

$$D^{n^1,\dots,n^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!\omega_2\cdots\omega_r} + \frac{1}{\omega_1}\times\frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!\omega_3\cdots\omega_r} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(r-2)!\omega_1\cdots\omega_{r-2}}\times\frac{-1}{\omega_r} + \frac{1}{(r-1)!\omega_1\cdots\omega_{r-1}},$$

soit :

$$D^{n^1,\dots,n^r} = \frac{1}{\omega_1\cdots\omega_r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{r-k}\omega_k}{(k-1)!(r-k)!}.$$

7.7.1.3. ...un troisième terme...— On calcule ensuite le terme : $E^\bullet = \nabla\exp(-V^\bullet)$. Par le calcul précédent de l'exponentielle d'un moule, et par définition de l'opérateur ∇, on a $E^\emptyset = 0$; de plus, pour un mot $\boldsymbol{n}$ de longueur $r \geqslant 1$:

$$E^{n^1,\dots,n^r} = (\omega_1+\cdots+\omega_r)(\exp(-V^\bullet))^{\boldsymbol{n}},$$

et donc :

$$E^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si l'un au moins des } (\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant r} \text{ s'annule ;} \\ \dfrac{(\omega_1+\cdots+\omega_r)(-1)^r}{r!\omega_1\cdots\omega_r} & \text{sinon.} \end{cases}$$

7.7.1.4. ... le dernier terme. — On termine par le calcul du produit moulien $F^\bullet = \exp(V^\bullet)\times E^\bullet$; tout d'abord $F^\emptyset = 0$; pour un mot de longueur 1, $F^n = E^n$ donc $F^n = 0$ si $\omega(n) = 0$ et $F^n = -1$ si $\omega(n) \neq 0$; finalement, pour un mot $\boldsymbol{n}$ de longueur $r \geqslant 1$ on a :

$$F^{n^1,\dots,n^r} = (\exp(V^\bullet))^\emptyset E^{\boldsymbol{n}} + (\exp(V^\bullet))^{n^1}E^{n^2,\dots,n^r} + \cdots + (\exp(V^\bullet))^{n^1,\dots,n^{r-1}}E^{n^r}.$$

Ainsi, d'après le calcul des moules $\exp(V^\bullet)$ et $E^\bullet$, $F^{\boldsymbol{n}}$ s'annule l'un au moins des ω_i s'annule. Si aucun ω_i ne s'annule, alors :

$$F^{n^1,\dots,n^r} = \frac{(\omega_1+\cdots+\omega_r)(-1)^r}{r!\omega_1\cdots\omega_r} + \frac{1}{\omega_1}\times\frac{(\omega_2+\cdots+\omega_r)(-1)^{r-1}}{(r-1)!\omega_2\cdots\omega_r}+\cdots + \frac{1}{(r-1)!\omega_1\cdots\omega_{r-1}}\times\frac{(-1)\omega_r}{\omega_r}.$$

Et finalement :

$$F^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } \omega_i \text{ est nul,} \\ \dfrac{1}{\omega_1\cdots\omega_r}\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{r-k+1}(\omega_k+\cdots+\omega_r)}{(r-k+1)!(k-1)!} & \text{sinon.}\end{cases}$$

7.7.1.5. Expression du moule recherché. — Come $\mathrm{Sam}^\bullet = F^\bullet + D^\bullet$, on a :

$$\mathrm{Sam}^\emptyset = F^\emptyset + D^\emptyset = 0.$$

Pour un mot de longueur 1, on obtient :

$$\mathrm{Sam}^n = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(n)=0, \\ 0 & \text{si } \omega(n)\neq 0.\end{cases}$$

Ainsi le champ X_{sam} ne comporte plus de termes non-résonants d'ordre 1. De plus, pour un mot $\boldsymbol{n}$ de longueur $r\geqslant 2$, on obtient :

- s'il existe $i\neq j$, dans $\{1,\dots,r\}$ tels que $\omega_i=\omega_j=0$ alors $D^{\boldsymbol{n}}=F^{\boldsymbol{n}}=0$ donc
$$\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}=0.$$
- s'il existe un unique i de $\{1,\dots,r\}$ tel que $\omega_i=0$, $F^{\boldsymbol{n}}=0$ et
$$\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{(i-1)!\omega_1\cdots\omega_{i-1}}\cdot\frac{(-1)^{r-1}}{(r-i)!\omega_{i+1}\cdots\omega_r}.$$
- si tous les $(\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ sont non nuls, alors
$$D^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\omega_1\cdots\omega_r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{r-k}\omega_k}{(k-1)!(r-k)!},$$
$$F^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\omega_1\cdots\omega_r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{r-k+1}(\omega_k+\cdots+\omega_r)}{(r-k+1)!(k-1)!},$$
et
$$\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\omega_1\cdots\omega_r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{r-k}(\omega_k(r-k)-\omega_{k+1}-\cdots\omega_r)}{(k-1)!(r-k+1)!}.$$

□

7.8. Itération de la procédure de simplification

Le champ simplifié X_{sam} ne comporte ainsi plus de termes non-résonants d'ordre 1, mais ce n'est pas une forme prénormale pour autant : en effet $\text{Sam}^{\boldsymbol{n}}$ n'est pas toujours nul quand $\ell(\boldsymbol{n}) \geqslant 2$. La transformation de simplification doit être alors itérée.

La méthode est ici de réécrire le champ

$$X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in A(X)^*} \text{Sam}^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}$$

comme un champ « initial », où $X_{\text{sam}} - X_{\text{lin}}$ soit une somme d'opérateurs différentiels homogènes en degré indexés par les lettres d'un nouvel alphabet $\mathfrak{A}$; on cherche donc à écrire :

$$X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{m \in \mathfrak{A}} D_m.$$

Comme pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de $A(X)^*$, $B_{\boldsymbol{n}}$ est un opérateur différentiel homogène de degré $\|\boldsymbol{n}\|$ il est naturel à ce stade de choisir comme nouvel alphabet :

$$\mathfrak{A} = \{\|\boldsymbol{n}\|, \boldsymbol{n} \in A(X)^*\} \subset \mathbb{Z}^{\nu}.$$

Nous verrons par la suite que le choix d'une décomposition (qui induit la graduation sur l'algèbre de Lie) est lié à l'objectif requis : en effet, lors de la recherche d'une transformation canonique dans le cas d'un champ hamiltonien, nous serons amenés à raffiner ce choix.

Écrivons pour plus de clarté $X^{(1)}_{\text{sam}}$ au lieu de X_{sam} pour noter que ce champ provient de la première simplification (transformation simp). On applique alors la transformation simp à $X^{(1)}_{\text{sam}}$ pour obtenir un champ $X^{(2)}_{\text{sam}}$ ne comportant plus de termes non-résonants d'ordre 1.

Pour la première étape de l'itération, on applique la transformation simp, d'où :

$$\begin{aligned} X^{(1)}_{\text{sam}} &= X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in A^*} \text{Sam}^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}} \\ &= X_{\text{lin}} + \sum_{m \in \mathfrak{A}} D_m, \quad \text{où } D_m = \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in A^* \\ \|\boldsymbol{n}\| = m}} \text{Sam}^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}. \end{aligned}$$

On applique une deuxième fois la transformation simp, maintenant à $X^{(1)}_{\text{sam}}$, on obtient :

$$X^{(2)}_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathfrak{A}^*} \text{Sam}^{\boldsymbol{m}} D_{\boldsymbol{m}},$$

que l'on peut réécrire dans l'alphabet A de départ de la manière suivante :

$$X_{\text{sam}}^{(2)} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n}\in A^*} (\text{Sam}^\bullet \circ \text{Sam}^\bullet)^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}.$$

On continue ainsi jusqu'à l'ordre désiré. Formalisons à présent ce que nous venons de décrire.

7.9. La forme élaguée

Soit X un champ de vecteurs sous forme bien préparée $X_{\text{lin}} + \sum_{n\in A(X)} B_n$. On définit par récurrence les alphabets $A^{(i)}$ pour $i \geqslant 0$ par :

$$A_0 = A(X),$$
$$A_i = \{\|\boldsymbol{n}\| \text{ où } \boldsymbol{n} \in A_{i-1}^*\}.$$

On définit ensuite les opérateurs différentiels homogènes $B^{(i)}$ par :

$$\text{pour } n \in A_0, B_n^{(0)} = B_n,$$
$$\text{pour } n \in A_i, B_n^{(i)} = \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in A_{i-1}^* \\ \|\boldsymbol{m}\|=n}} \text{Sam}^{\boldsymbol{m}} B_{\boldsymbol{m}}^{(i-1)}$$

On définit ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$X_{\text{sam}}^{(i)} = X_{\text{lin}} + \sum_{n\in A_i} B_n^{(i)}.$$

De plus, on a l'égalité suivante pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$X_{\text{sam}}^{(i)} = \Theta_{i-1} X_{\text{sam}}^{(i-1)} {\Theta_{i-1}}^{-1},$$

où, pour un j de $\mathbb{N}$, Θ_j est défini par :

$$\Theta_j = \exp\Big(\sum_{\boldsymbol{n}\in A_j^*} V^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}^{(j)}\Big),$$

les coefficients $V^\bullet$ étant donnés par le moule déjà rencontré.

Notation 2. — Pour $i \in \mathbb{N}$, on note simp_i la transformation qui à $X_{\text{sam}}^{(i-1)}$ associe $X_{\text{sam}}^{(i)}$.

Définition 7.9.1 **(Forme élaguée à l'ordre** r**)**. — Soit r dans $\mathbb{N}$. La forme élaguée à l'ordre r du champ X est le champ $X_{\text{sam}}^{(r)}$ obtenu après r simplifications :

$$X = X_{\text{sam}}^{(0)} \xrightarrow{\text{simp}_1} X_{\text{sam}}^{(1)} \xrightarrow{\text{simp}_2} \cdots \xrightarrow{\text{simp}_r} X_{\text{sam}}^{(r)}.$$

La construction expliquée précédemment assure la proposition suivante :

Proposition 7.9.2. — *Soit X un champ de vecteurs formel sous forme bien préparée $X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in A(X)^*} B_n$ où λ est le spectre de la partie linéaire. Pour tout r dans $\mathbb{N}$, il existe un moule $\mathrm{Sam}_r^\bullet$ tel que la forme élaguée de X à l'ordre r $X_{\mathrm{sam}}^{(r)}$ possède l'écriture moulienne suivante :*

$$X_{\mathrm{sam}}^{(r)} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in A(X)^*} \mathrm{Sam}_r^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}.$$

De plus, le moule $\mathrm{Sam}_r^\bullet$ se calcule à l'aide du moule de simplification $\mathrm{Sam}^\bullet$ défini précédemment, et pour tout r entier naturel, on a :

$$\mathrm{Sam}_r^\bullet = \underbrace{\mathrm{Sam}^\bullet \circ \cdots \circ \mathrm{Sam}^\bullet}_{r \text{ fois}}.$$

Démonstration. — La démonstration se fait de manière identique à l'explication précédant l'énoncé de la proposition, par récurrence. □

Nous noterons dorénavant $\mathrm{Sam}_r^\bullet$ ou $\left(\mathrm{Sam}^\bullet\right)^{\circ r}$ indifféremment pour la composition de r copies du moule $\mathrm{Sam}^\bullet$.

Rappelons également que l'objectif est d'obtenir une forme prénormale pour X, c'est-à-dire un champ X_{tram} conjugué à X, qui ne contienne que des termes résonants (la partie linéaire exceptée). Après la première itération, et étant donnée la définition du moule $\mathrm{Sam}^\bullet$, on a :

$$X_{\mathrm{sam}}^{(1)} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\substack{n \in A(X) \\ \omega(n)=0}} B_n + \sum_{m \in A(X)} \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in A(X)^* \\ \|\boldsymbol{n}\|=m}} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}}.$$

D'après cette écriture, on voit que la transformation de simplification ne modifie pas les opérateurs résonants, mais introduit de nouveaux termes qui peuvent être non-résonants. C'est pour cela que l'itération de la transformation de simplification permet de supprimer les nouveaux termes non-résonants apparaissant à chaque étape.

La proposition 7.9.2 incite à étudier le moule $\mathrm{Sam}_r^\bullet$ de plus près. Sa principale propriété est qu'il est « stationnaire » au sens suivant :

Proposition 7.9.3. — *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout mot $\boldsymbol{n}$ dans $A(X)^*$ de longueur au plus r, on a :*

$$\mathrm{Sam}_q^{\boldsymbol{n}} = \mathrm{Sam}_r^{\boldsymbol{n}}, \quad \forall q \geqslant r.$$

Cette proposition est déduite du lemme suivant :

Lemme 7.9.4. — *Soit r dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de $A(X)^*$ de longueur au plus r, on a :*

$$\mathrm{Sam}_{r+1}^{\boldsymbol{n}} = \mathrm{Sam}_r^{\boldsymbol{n}}.$$

Preuve du lemme. — Elle s'effectue par récurrence sur r.

Pour $r = 1$: soit n dans A^* ; on a :

$$\left(\mathrm{Sam}^\bullet \circ \mathrm{Sam}^\bullet\right)^n = \left(\mathrm{Sam}^n\right)^2 = \mathrm{Sam}^n, \text{ d'après le lemme 7.7.3.}$$

Supposons maintenant que $r \geqslant 2$ est fixé, et que pour tout $p \leqslant r-1$, et tout mot $\boldsymbol{n}$ de longueur au plus p, $\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{p+1} = \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_p$. Soit alors $\boldsymbol{n} = n^1 \cdots n^r$ un mot de longueur r. Trois cas sont possibles :

(a). $\boldsymbol{n}$ est non-résonant, *i.e.* $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$. On écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{r+1} &= \left(\mathrm{Sam}^\bullet \circ \mathrm{Sam}^\bullet_r\right)^{\boldsymbol{n}} \\ &= \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_r + \sum_{\substack{2\leqslant l\leqslant r \\ \boldsymbol{n}_1\cdots\boldsymbol{n}_l=\boldsymbol{n}}} \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}_1\|,\cdots,\|\boldsymbol{n}_l\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_1}_r \cdots \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_l}_r.\end{aligned}$$

Comme $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$, d'après le lemme 7.7.3, $\mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|} = 0$, d'où $\mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_r = \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{r-1}$. De plus, dans le second terme, comme $l \geqslant 2$, $\ell(\boldsymbol{n}_k) \leqslant r-1$ pour tout k dans $\{1,\ldots,l\}$, d'où, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_k}_r = \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_k}_{r-1}$. Finalement,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{r+1} &= \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{r-1} + \sum_{\substack{2\leqslant l\leqslant r \\ \boldsymbol{n}_1\cdots\boldsymbol{n}_l=\boldsymbol{n}}} \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}_1\|,\cdots,\|\boldsymbol{n}_l\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_1}_{r-1} \cdots \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_l}_{r-1} \\ &= \left(\mathrm{Sam}^\bullet \circ \mathrm{Sam}^\bullet_{r-1}\right)^{\boldsymbol{n}} \\ &= \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_r.\end{aligned}$$

(b). $\boldsymbol{n}$ est résonant, *i.e.* $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) = 0$, et $\omega(n^i) = 0$ pour tout i dans $\{1,\ldots,r\}$. Dans ce cas, on écrit encore :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{r+1} &= \left(\mathrm{Sam}^\bullet \circ \mathrm{Sam}^\bullet_r\right)^{\boldsymbol{n}} \\ &= \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_r + \sum_{\substack{2\leqslant l\leqslant r \\ \boldsymbol{n}_1\cdots\boldsymbol{n}_l=\boldsymbol{n}}} \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}_1\|,\cdots,\|\boldsymbol{n}_l\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_1}_r \cdots \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_l}_r.\end{aligned}$$

D'une part, d'après le lemme 7.7.3, $\mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|} = 1$, car $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) = 0$; d'autre part, pour l in $\{2,\ldots,r\}$, $\omega(\|\boldsymbol{n}_k\|) = 0$ pour tout k dans $\{1,\ldots,l\}$,donc, toujours d'après le lemme 7.7.3, $\mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}_1\|,\cdots,\|\boldsymbol{n}_l\|} = 0$. Finalement, $\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{r+1} = \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_r$.

(c). $\boldsymbol{n}$ est résonant, *i.e.* $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) = 0$ il y a au moins un (et donc deux) n^i dans $\boldsymbol{n}$ tels que $\omega(n^i) \neq 0$. Encore une fois, d'après le lemme 7.7.3, $\mathrm{Sam}^{n^i} = 0$. Dans ce dernier cas, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_{r+1} &= \left(\mathrm{Sam}^\bullet_r \circ \mathrm{Sam}^\bullet\right)^{\boldsymbol{n}} \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant r-1 \\ \boldsymbol{n}_1\cdots\boldsymbol{n}_l=\boldsymbol{n}}} \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}_1\|\cdots\|\boldsymbol{n}_l\|}_r \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_1} \cdots \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_l} + \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}}_r \mathrm{Sam}^{n^1} \cdots \mathrm{Sam}^{n^r}.\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence assure que pour tout l dans $\{1,\dots,r-1\}$,

$$\mathrm{Sam}_r^{\|\boldsymbol{n}_1\|\cdots\|\boldsymbol{n}_l\|} = \mathrm{Sam}_{r-1}^{\|\boldsymbol{n}_1\|\cdots\|\boldsymbol{n}_l\|};$$

de plus

$$\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant r-1\\ \boldsymbol{n}_1\cdots\boldsymbol{n}_l=\boldsymbol{n}}} \mathrm{Sam}_{r-1}^{\|\boldsymbol{n}_1\|\cdots\|\boldsymbol{n}_l\|}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_1}\cdots\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}_l}$$
$$= \left(\mathrm{Sam}_{r-1}^{\bullet}\circ\mathrm{Sam}^{\bullet}\right)^{\boldsymbol{n}} - \mathrm{Sam}_{r-1}^{\boldsymbol{n}}\mathrm{Sam}^{n^1}\cdots\mathrm{Sam}^{n^r}.$$

Ainsi $\mathrm{Sam}_{r+1}^{\boldsymbol{n}} = \mathrm{Sam}_r^{\boldsymbol{n}} - \mathrm{Sam}_{r-1}^{\boldsymbol{n}}\mathrm{Sam}^{n^1}\cdots\mathrm{Sam}^{n^r} + \mathrm{Sam}_r^{\boldsymbol{n}}\mathrm{Sam}^{n^1}\cdots\mathrm{Sam}^{n^r}$. Le lemme 7.7.3 assure alors que le produit $\mathrm{Sam}^{n^1}\cdots\mathrm{Sam}^{n^r}$ est nul et finalement $\mathrm{Sam}_{r+1}^{\boldsymbol{n}} = \mathrm{Sam}_r^{\boldsymbol{n}}$.

□

La proposition 7.9.3 permet alors de définir le moule $\mathrm{Tram}^{\bullet}$ de la manière suivante :

Définition 7.9.5. — On définit le moule $\mathrm{Tram}^{\bullet}$ par :

$\mathrm{Tram}^{\emptyset} = 0$;

$\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} = \mathrm{Sam}_r^{\boldsymbol{n}} = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\left(\mathrm{Sam}^{\bullet}\right)^{\circ p}\right)^{\boldsymbol{n}}$ pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de A^* de longueur $r\geqslant 1$.

C'est grâce à ce moule que l'on peut définir la *forme élaguée* d'un champ de vecteurs :

Définition 7.9.6. — Soit $X = X_{\mathrm{lin}} + \sum\limits_{\bullet} I^{\bullet}B_{\bullet}$ un champ de vecteurs formel sous forme bien préparée. Sa *forme élaguée* est donnée par :

$$X_{\mathrm{tram}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\bullet}\mathrm{Tram}^{\bullet}B_{\bullet}.$$

La forme élaguée du champ X est ainsi la « limite » de la procédure de simplification, que l'on pourrait comprendre comme la « limite » des champs $X_{\mathrm{sam}}^{(r)}$ lorsque r tend vers $+\infty$. La forme élaguée correspond alors bien à ce que l'on attend, comme l'affirme le théorème suivant :

Théorème 7.9.7. — *Soit $X = X_{\mathrm{lin}} + \sum\limits_{\bullet} I^{\bullet}B_{\bullet}$ un champ de vecteurs formel sous forme bien préparée. Alors sa forme élaguée, donnée par :*

$$X_{\mathrm{tram}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\boldsymbol{n}\in A(X)^*}\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}}B_{\boldsymbol{n}},$$

est une forme prénormale continue (par rapport aux (B_n)).

Démonstration. — Rappelons tout d'abord que $\mathrm{Tram}^{\emptyset} = 0$. Par définition du moule $\mathrm{Tram}^{\bullet}$, pour un mot de longueur 1, $\mathrm{Tram}^{n} = \mathrm{Sam}^{n}$, donc $\mathrm{Tram}^{n} = 0$ si $\omega(n) \neq 0$. Pour un mot $\boldsymbol{n}$ de longueur supérieure à 2, la définition 7.9.5 du moule $\mathrm{Tram}^{\bullet}$ donne :

$$\mathrm{Tram}^{\bullet} = \mathrm{Tram}^{\bullet} \circ \mathrm{Sam}^{\bullet} \tag{7.20}$$

$$= \mathrm{Sam}^{\bullet} \circ \mathrm{Tram}^{\bullet}. \tag{7.21}$$

On peut alors vérifier que $\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} = 0$ si $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$ par récurrence sur la longueur $r \geqslant 2$ du mot $\boldsymbol{n}$. En effet, si $\boldsymbol{n} = n^1 n^2$ est dans A^*, par définition de la composition de deux moules et d'après l'équation (7.20) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} &= \mathrm{Tram}^{\emptyset}\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}} + \mathrm{Tram}^{n^1}\mathrm{Sam}^{n^2} + \mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}}\mathrm{Sam}^{\emptyset}\\ &= \mathrm{Tram}^{n^1}\mathrm{Sam}^{n^2}\\ &= \mathrm{Sam}^{n^1}\mathrm{Sam}^{n^2}.\end{aligned}$$

Maintenant, d'après le lemme 7.7.3, $\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} \neq 0$ si et seulement si $\omega(n^1) = \omega(n^2) = 0$, et ceci est impossible puisque $\omega(n^1) + \omega(n^2) \neq 0$. Donc $\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} = 0$ si $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$.

Fixons alors $r \geqslant 3$ et supposons que $\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} = 0$ si $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$, pour tout mot $\boldsymbol{n}$ de longueur inférieure à $r-1$. Alors, si $\boldsymbol{n}$ est un mot de longueur r tel que $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$ on a, d'après l'équation (7.21) :

$$\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} = \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|}\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} + \sum_{\substack{2 \leqslant l \leqslant r\\ \boldsymbol{n}_1 \cdots \boldsymbol{n}_l = \boldsymbol{n}}} \mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}_1\| \cdots \|\boldsymbol{n}_l\|}\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}_1} \cdots \mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}_l}.$$

Le terme $\mathrm{Sam}^{\|\boldsymbol{n}\|}\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}}$ est nul car $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) \neq 0$. De plus, pour chaque partition du mot $\boldsymbol{n}$ en l mots $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_l$, où $l \geqslant 2$ il y a au moins un k dans $\{1, \ldots, l\}$ tel que $\omega(\|\boldsymbol{n}_k\|) \neq 0$ (car $\omega(\|\boldsymbol{n}\|) = \sum_{j=1}^{l} \omega(\|\boldsymbol{n}_j\|)$). Ainsi, par récurrence $\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}_k} = 0$. Donc $\mathrm{Tram}^{\boldsymbol{n}} = 0$. □

7.9.1. Universalité des moules. — Nous pouvons ici mettre en évidence l'aspect *universel* induit par le formalisme moulien ; on introduit pour cela la famille à un paramètre suivante de fonctions complexes :

Définition 7.9.8. — Les fonctions de Poincaré est l'ensemble des fonctions $\mathscr{P} = (P_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ où $P_q : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q$, sont des fonctions définies par :

$$P_1(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

et pour $q \geqslant 2$:

$$P_q(z_1,\dots,z_q) = \begin{cases} \dfrac{1}{z_1\cdots z_q}\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(-1)^{q-k}\frac{z_k(q-k)-z_{k+1}-\cdots-z_q}{(k-1)!(q-k+1)!}, & \text{si } z\in(\mathbb{C}^*)^q\ , \\ \dfrac{(-1)^{q-1}}{(i-1)!(q-i)!}\dfrac{1}{z_1\dots z_{i-1}z_{i+1}\dots z_q}, & \text{si } z\in S_{q,i}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $S_{q,i} = (\mathbb{C}^*)^{i-1}\times\{0\}\times(\mathbb{C}^*)^{q-i}$.

On peut alors réécrire plus simplement le lemme 7.7.3 définissant le moule $\mathrm{Sam}^\bullet$:

Lemme 7.9.9. — *Le moule* $\mathrm{Sam}^\bullet$ *est défini par*

$$\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} 1 & \textit{si } \boldsymbol{n}=\emptyset; \\ P_{\ell(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{n}\cdot\lambda) & \textit{si } \ell(\boldsymbol{n})\geqslant 2. \end{cases}$$

CHAPITRE 8

LE CAS HAMILTONIEN

La recherche de la forme normale de Birkhoff est la recherche d'une forme prénormale (de type Poincaré-Dulac) pour un champ de vecteurs hamiltonien. Un résultat particulièrement important est que, dans ce cas précis de champ hamiltonien, il n'existe qu'une seule forme prénormale pour un champ donné. En d'autres termes, quelle que soit la méthode de calcul employée, elle conduit à la même forme. C'est pourquoi nous parlerons de *la* forme normale de Birkhoff. De plus, dans ce cas, la transformation de normalisation est une transformation canonique. On peut recommander de nombreuses références, celle d'Arnold [2] étant incontournable.

Le problème (dont un historique se trouve dans l'article de Pérez-Marco [43]) est notamment de déterminer une forme de Birkhoff analytique, et de savoir si la transformation de normalisation est elle aussi analytique.

Pour des raisons pratiques, on souhaite obtenir une méthode itérative de calcul de forme normale qui préserve la structure hamiltonienne à chaque étape. Nous avons dû pour cela modifier la procédure usuelle d'Écalle de construction de la forme élaguée.

Nous donnons dans ce chapitre la méthode de calcul moulien qui permet de normaliser un champ hamiltonien, en coordonnées cartésiennes ou action-angle, en préservant la structure hamiltonienne à chaque étape.

Nous étudions alors les aspects formels des théorèmes de la forme normale de Birkhoff et de Kolmogorov sur les tores hamiltoniens.

Dans tout ce chapitre, si H est un hamiltonien, on notera X_H le champ de vecteurs correspondant.

8.1. La forme normale de Birkhoff

On considère le hamiltonien suivant, défini en coordonnées cartésiennes, de $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$:

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i y_i + \sum_{(n,m)\in A(H)} a_{nm} x^n y^m,$$

où $A(H)$ est l'ensemble des degrés des monômes intervenant dans la partie non-quadratique de H, et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ dans $\mathbb{C}^\nu$. On notera A s'il n'y a pas d'ambiguïté. Le deuxième terme représente ici une série formelle. Le champ hamiltonien (formel) s'écrit alors :

$$X_H = X_{\text{lin}} + \sum_{(n,m)\in A} D_{nm},$$

où

$$X_{\text{lin}} = -\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i} + \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i y_i \partial_{y_i}$$

et

$$D_{nm} = a_{nm} \sum_{i=1}^{\nu} x^{\widehat{n}_i} y^{\widehat{m}_i} (n_i y_i \partial_{y_i} - m_i x_i \partial_{x_i}),$$

en notant $\widehat{n}_i = (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_\nu)$. Remarquons que D_{nm} n'est pas un opérateur différentiel homogène en degré comme défini au chapitre 6 à la définition 6.6.1. Cependant, on définit D_{nmi} pour i dans $\{1, \dots, \nu\}$ comme l'opérateur différentiel suivant :

$$D_{nmi} = a_{nm} x^{\widehat{n}_i} y^{\widehat{m}_i} (n_i y_i \partial_{y_i} - m_i x_i \partial_{x_i}). \tag{8.1}$$

D_{nmi} est alors un opérateur différentiel homogène de degré $(\widehat{n}_i, \widehat{m}_i)$ et

$$D_{nm} = \sum_{i=1}^{\nu} D_{nmi}.$$

Si l'on suit la décomposition utilisée dans le chapitre 7 en opérateurs différentiels homogènes, donc une graduation de l'algèbre par le degré de ces mêmes opérateurs, la transformation obtenue n'est pas nécessairement canonique. Nous cherchons cependant à transformer le champ hamiltonien de manière canonique, de manière à obtenir à chaque étape un nouveau champ hamiltonien. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 8.1.1. — *Soit $M^\bullet$ un moule alternal sur un alphabet A et $S_\bullet$ un collection d'opérateurs différentiels tels que pour tout u dans A, S_u est un champ de vecteurs hamiltonien formel. Alors, la somme :*

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in A^*} M^{\boldsymbol{u}} S_{\boldsymbol{u}}, \quad \textit{avec } S_{\boldsymbol{u}} = S_{u^1} \cdots S_{u^r} \textit{ si } \boldsymbol{u} = u^1 \cdots u^r,$$

définit un champ de vecteurs hamiltonien.

Démonstration. — Comme on l'a déjà vu, le fait que $M^\bullet$ soit alternal implique que $\sum_{\boldsymbol{u}\in A^*} M^{\boldsymbol{u}} S_{\boldsymbol{u}}$ est un champ de vecteurs. Montrons alors qu'il est bien hamiltonien. Rappelons pour cela que le crochet de Lie de deux champs hamiltoniens est encore un champ hamiltonien. Rappelons également la notation suivante : si $\boldsymbol{u} = (u^1 \cdots u^r)$ est un élément de A^* de longueur $r \in \mathbb{N}^*$, $S_{[\boldsymbol{u}]}$ est le crochet $[[\cdots[[S_{u^1}, S_{u^2}], S_{u^3}], \cdots], S_{u^r}]$; c'est donc un champ hamiltonien.

On utilise alors le lemme de projection 6.5.6 : soit $\boldsymbol{u}$ un mot de A^* de longueur r et $\sigma(\boldsymbol{u})$ l'ensemble des mots obtenus par permutation à partir de $\boldsymbol{u}$; comme le moule $M^\bullet$ est alternal, on a :

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in\sigma(\boldsymbol{u})} M^{\boldsymbol{v}} S_{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{r} \sum_{\boldsymbol{v}\in\sigma(\boldsymbol{u})} M^{\boldsymbol{v}} S_{[\boldsymbol{v}]}.$$

Si on note alors $\sim$ la relation d'équivalence sur A^* définie par

$$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{t} \iff \text{il existe une permutation } \tau \text{ telle que } \tau(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{t},$$

on alors $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{t} \iff \ell(\boldsymbol{u}) = \ell(\boldsymbol{t})$ donc $A^* \backslash \{\emptyset\} = \coprod_{r=1}^{+\infty} A_r^*$ et $A^*\big/_\sim = \coprod_{r=1}^{+\infty} A_r^*\big/_\sim$; de plus, $M^\emptyset = 0$ (par définition de l'alternalité) d'où les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{u}\in A^*} M^{\boldsymbol{u}} S_{\boldsymbol{u}} &= \sum_{r\geqslant 1} \sum_{\boldsymbol{u}\in A_r^*} M^{\boldsymbol{u}} S_{\boldsymbol{u}} \\
&= \sum_{r\geqslant 1} \sum_{\boldsymbol{u}\in A_r^*/\sim} \sum_{\boldsymbol{u}\in\sigma(\boldsymbol{u})} M^{\boldsymbol{u}} S_{\boldsymbol{u}} \\
&= \sum_{r\geqslant 1} \sum_{\boldsymbol{u}\in A_r^*/\sim} \frac{1}{r} \sum_{\boldsymbol{u}\in\sigma(\boldsymbol{u})} M^{\boldsymbol{u}} S_{[\boldsymbol{u}]} \\
&= \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r} \sum_{\boldsymbol{u}\in A_r^*} M^{\boldsymbol{u}} S_{[\boldsymbol{u}]}
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarquons que les opérateurs D_{nm} définis ci-dessus sont hamiltoniens (*i.e.* définissent des champs hamiltoniens). Pour une lettre $s = (n, m)$ de A, on notera fréquemment D_s au lieu de D_{nm}. De la même manière que précédemment, si $\boldsymbol{s} = s^1 \cdots s^r$ est un mot de A^*, $D_{\boldsymbol{s}}$ est la composée $D_{s^1} \cdots D_{s^r}$.

On définit également la notation $\omega(s)$ où $s = (n, m)$ est dans A par :

$$\omega(s) = \omega(n, m) = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j (m_j - n_j).$$

De plus, on dira que le mot $\boldsymbol{s}$ est *résonant* si $\omega(\|\boldsymbol{s}\|) = 0$.

On obtient facilement le lemme suivant :

Lemme 8.1.2. — *Soit* $X = X_{\text{lin}} + \sum_{s\in A} D_s$ *un champ de vecteurs hamiltonien. Pour un mot* $\boldsymbol{s}$ *de* A^* *de longueur r, on a :*

$$X_{\text{lin}} D_{\boldsymbol{s}} = D_{\boldsymbol{s}} X_{\text{lin}} + \|\omega(\boldsymbol{s})\| D_{\boldsymbol{s}}.$$

Démonstration. — On procède de la même manière que pour la démonstration du lemme 7.4.2 page 89. □

8.1.1. Limites de la procédure de simplification. — Si l'on procède de la même manière que pour un champ quelconque, comme on l'a fait précédemment, on associe à X_H un champ simplifié X_{sam} par :

$$X_{\text{sam}} = \exp\Bigg(\sum_{\substack{s\in A(H)\\ \omega(s)\neq 0}} \frac{1}{\omega(s)} D_s\Bigg) X_H \exp\Bigg(\sum_{\substack{s\in A(H)\\ \omega(s)\neq 0}} -\frac{1}{\omega(s)} D_s\Bigg),$$

et on peut écrire alors :

$$X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{s}\in A^*} \text{Sam}^{\boldsymbol{s}} D_{\boldsymbol{s}}$$

où $\text{Sam}^\bullet$ est le moule déjà défini au lemme 7.7.3 ; ce sont seulement l'alphabet et les opérateurs qui changent. Le moule $\text{Sam}^\bullet$ reste lui alternal, et définit donc, d'après le lemme 8.1.1, un champ hamiltonien à son tour (car X_{lin} définit bien, lui aussi un champ hamiltonien).

À ce stade, et pour itérer la procédure de simplification, il faut trouver comment réécrire X_{sam} en une somme :

$$X_{\text{lin}} + \sum_{a\in\mathfrak{A}} \Delta_a$$

où $\mathfrak{A}$ est un nouvel alphabet obtenu à partir de A^* et où Δ_a est à son tour un opérateur hamiltonien. Cependant la décomposition intuitive initiale ne nous a pas permis de pouvoir obtenir une telle écriture. C'est pourquoi nous avons dû chercher une autre décomposition du champ X_H.

8.1.2. Simplification canonique. — Le hamiltonien H étant fixé, nous avons écrit en coordonnées cartésiennes :

$$X_H = X_{\text{lin}} + \sum_{s\in A(H)} D_s;$$

Nous définissons alors un nouvel alphabet $\Omega(H)$, ou Ω s'il n'y a pas d'ambiguïté, par :

$$\Omega(H) = \Big\{\omega(s),\ \text{où } s \in A(H)\Big\}.$$

Remarquons que cet alphabet est une partie de $\mathbb{C}$ et non plus de $\mathbb{Z}^\nu$. On peut alors écrire :

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i y_i + \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{\substack{(n,m)\in A(H)\\ \omega(n,m)=\omega}} a_{nm} x^n y^m,$$

et

$$X_H(x,y) = X_{\text{lin}} + \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{\substack{s\in A(H)\\ \omega(s)=\omega}} D_s.$$

On définit alors les opérateurs suivants :

Définition 8.1.3. — Pour $\omega \in \Omega$, on définit $\mathfrak{D}_\omega$ comme étant le champ de vecteurs hamiltonien induit par le hamiltonien $H_\omega(x,y) = \sum_{\substack{(n,m)\in A\\ \omega(n,m)=\omega}} a_{nm} x^n y^m$. On a ainsi $\mathfrak{D}_\omega = X_{H_\omega}$.

Les opérateurs $\mathfrak{D}_\omega$ sont hamiltoniens et on peut écrire : $\mathfrak{D}_\omega = \sum_{\substack{s\in A\\ \omega(s)=\omega}} D_s$. Finalement, on a la décomposition suivante du champ X_H :

$$X_H = X_{\text{lin}} + \sum_{\omega\in\Omega} \mathfrak{D}_\omega.$$

Encore une fois, la procédure de simplification, ou plus généralement l'équation de normalisation moulienne nécessite de connaître l'effet de X_{lin} sur les opérateurs intervenant dans la décomposition du champ, ici les $\mathfrak{D}_\omega$. On a encore l'analogue du lemme 7.4.2 :

Lemme 8.1.4. — *Soit $X = X_{\text{lin}} + \sum_{\omega\in\Omega} \mathfrak{D}_\omega$ le champ hamiltonien précédemment défini. Alors, pour tout mot $\boldsymbol{\omega}$ de Ω^* :*

$$X_{\text{lin}} \mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}} = \mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}} X_{\text{lin}} + \|\boldsymbol{\omega}\| \mathfrak{D}_\omega.$$

Démonstration. — La démonstration s'effectue de la même manière que le lemme 7.4.2 page 89 en utilisant le fait que, si $\omega(s) \in \Omega$ alors $\omega(s) = \lambda \cdot (m-n)$ où $s = (n,m)$. □

En suivant toujours la même procédure de simplification que précédemment, on définit le champ simplifié X_{sam} par :

$$X_{\text{sam}} = \exp\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega(H)\\ \omega\neq 0}} \frac{1}{\omega}\mathfrak{D}_\omega\Big) X_H \exp\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega(H)\\ \omega\neq 0}} -\frac{1}{\omega}\mathfrak{D}_\omega\Big),$$

et on a toujours

$$X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{\omega}\in\Omega^*} \text{Sam}^{\boldsymbol{\omega}} \mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Ici, le moule $\mathrm{Sam}^\bullet$ est encore celui défini au lemme 7.7.3, mais indexé par les $\omega(s)$ et non plus par les s. C'est possible car pour un mot $\boldsymbol{s}$ donné, la valeur de $\mathrm{Sam}^{\boldsymbol{s}}$ ne dépend que des $\omega(\boldsymbol{s})$.

Nous devons ensuite itérer cette procédure ; pour cela, on cherche à réécrire X_{sam} sous la forme suivante :

$$X_{\mathrm{sam}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\widetilde{\omega}\in\widetilde{\Omega}} \mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}},$$

où $\widetilde{\Omega}$ est un nouvel alphabet, et où l'opérateur $\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}}$ est à nouveau hamiltonien, et s'exprime à l'aide des $\mathfrak{D}_\omega$.

Le champ X_{sam} étant hamiltonien, il existe une fonction $H^{(1)}$ (définie à constante près) telle que $X_{\mathrm{sam}} = X_{H^{(1)}}$. Écrivons :

$$H^{(1)}(x,y) = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j x_j y_j + \sum_{\widetilde{\omega}\in\widetilde{\Omega}} \sum_{\substack{(n,m)\\ \omega(n,m)=\widetilde{\omega}}} a^{(1)}_{nm} x^n y^m$$

où on note encore les variables (x,y).

Par définition, $\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}}$ doit être le champ de vecteurs hamiltonien induit par le terme $\sum_{\omega(n,m)=\widetilde{\omega}} a^{(1)}_{nm} x^n y^m$. Ainsi, pour un $\widetilde{\omega}$ fixé, cherchons les mots $\boldsymbol{\omega}$ de Ω^* tels que $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}}$ engendre le champ de vecteurs hamiltonien induit par le hamiltonien $\sum_{\omega(n,m)=\widetilde{\omega}} a^{(1)}_{nm} x^n y^m$.

La proposition suivante résout cette question :

Proposition 8.1.5. — *Soit X_H le champ de vecteurs hamiltonien formel de partie linéaire X_{lin} défini précédemment :*

$$X = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\omega\in\Omega} \mathfrak{D}_\omega.$$

Soit X_{sam} le champ simplifié obtenu précédemment, qu'on écrit sous la forme :

$$X_{\mathrm{sam}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\boldsymbol{\omega}\in\Omega^*} \mathrm{Sam}^{\omega}\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Alors, on peut écrire :

$$X_{\mathrm{sam}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\widetilde{\omega}\in\Omega} \mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}},$$

où pour $\widetilde{\omega}$ dans Ω, $\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}}$ est hamiltonien et s'exprime à l'aide des $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}}$ de la manière suivante :

$$\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\Omega^*\\ \|\boldsymbol{\omega}\|=\widetilde{\omega}}} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{\omega}}\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Démonstration. — Rappelons tout d'abord que le moule $\mathrm{Sam}^\bullet$ est alternal ; nous pouvons donc écrire :

$$\sum_{\boldsymbol{\omega}\in\Omega^*} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{\omega}}\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{r\geqslant 1}\frac{1}{r}\sum_{\boldsymbol{\omega}\in\Omega_r^*} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{\omega}}\mathfrak{D}_{[\boldsymbol{\omega}]};$$

et même

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\Omega^*\\ \|\boldsymbol{\omega}\|=\widetilde{\omega}}} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{\omega}}\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{r\geqslant 1}\frac{1}{r}\sum_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\Omega_r^*\\ \|\boldsymbol{\omega}\|=\widetilde{\omega}}} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{\omega}}\mathfrak{D}_{[\boldsymbol{\omega}]},$$

ce qui prouve que cette dernière somme définit bien un opérateur hamiltonien.

Pour deux opérateurs $\mathfrak{D}_{\omega^1}$ et $\mathfrak{D}_{\omega^2}$, provenant respectivement des deux hamiltoniens

$$H_{\omega^1}(x,y) = \sum_{\substack{n,m\\ \omega_{nm}=\omega^1}} a_{nm}x^n y^m \text{ et } H_{\omega^2}(x,y) = \sum_{\substack{p,q\\ \omega_{pq}=\omega^2}} a_{pq}x^p y^q,$$

on a en fait :

$$[\mathfrak{D}_{\omega^1},\mathfrak{D}_{\omega^2}] = \left\{X_{H_{\omega^1}}, X_{H_{\omega^2}}\right\} = X_{\{H_{\omega^1},H_{\omega^2}\}},$$

et

$$\left\{H_{\omega^1},H_{\omega^2}\right\} = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{\substack{n,m,p,q\\ \omega_{nm}=\omega^1\\ \omega_{pq}=\omega^2}} a_{nm}a_{pq}x^{\widehat{n+p}_i}y^{\widehat{m+q}_i}(m_ip_i - q_in_i);$$

C'est une somme (indexée par i) de monômes hamiltoniens dont chaque terme a le même $\widetilde{\omega}$:

$$\forall i, 1\leqslant i\leqslant \nu, \omega(\widehat{n+p}_i, \widehat{m+q}_i) = \omega(n,m)+\omega(p,q) = \omega^1+\omega^2 = \widetilde{\omega}.$$

On peut ainsi dire que $\widetilde{\Omega} = \left\{\|\boldsymbol{\omega}\|, \boldsymbol{\omega}\in\Omega^*\right\} = \Omega$. Rappelons de plus que $\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}}$ est défini comme le champ de vecteurs hamiltonien provenant de la composante Ω-homogène de degré $\widetilde{\omega}$ du nouveau hamiltonien $H^{(1)}$; On conclut alors que $[\mathfrak{D}_{\omega^1},\mathfrak{D}_{\omega^2}]$ apparaît dans, et uniquement dans, $\mathfrak{D}^{(1)}_{\omega^1+\omega^2}$. Réciproquement, si $\widetilde{\omega}$ est fixé, seuls les opérateurs $\mathfrak{D}_{[\boldsymbol{\omega}]}$ construits sur les mots $\boldsymbol{\omega}$ tels que $\|\boldsymbol{\omega}\| = \widetilde{\omega}$ apparaissent dans $\mathfrak{D}^{(1)}_{\omega}$.

D'où le résultat :

$$\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}} = \sum_{r\geqslant 1}\frac{1}{r}\sum_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\Omega_r^*\\ \|\boldsymbol{\omega}\|=\widetilde{\omega}}} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{\omega}}\mathfrak{D}_{[\boldsymbol{\omega}]} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\Omega^*\\ \|\boldsymbol{\omega}\|=\widetilde{\omega}}} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{\omega}}\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}}.$$

D'une part $\mathrm{Sam}^\bullet$ étant alternal, l'opérateur $\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}}$ est alors un élément primitif, donc bien un champ de vecteurs ; de plus, l'expression de $\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}}$ comme somme de $\mathfrak{D}_{[\boldsymbol{\omega}]}$ assure que $\mathfrak{D}^{(1)}_{\widetilde{\omega}}$ est hamiltonien et conclut la preuve. □

Cette proposition rend alors possible l'itération de la procédure de simplification comme dans le cas d'un champ de vecteurs formel quelconque. On pourra donc définir la forme élaguée d'un champ de vecteurs hamiltonien formel. On a donc le théorème suivant :

***Théorème 8.1.6* (Forme normale de Birkhoff).** — *Soit H un hamiltonien donné comme la somme d'une partie « linéaire » et d'une série formelle, et X_H le champ de vecteurs formel induit :*

$$X_H = X_{\text{lin}} + \sum_{\omega \in \Omega} \mathfrak{D}_\omega,$$

Ω étant l'alphabet (adapté). Alors, il existe une forme élaguée du champ X_H. Elle est donnée par l'écriture moulienne suivante :

$$X_{\text{tram}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^*} \text{Tram}^{\boldsymbol{\omega}} \mathfrak{D}_{\boldsymbol{\omega}},$$

*et c'est une forme prénormale de X_H (*i.e. *conjuguée à X_H et composée, outre la partie linéaire, uniquement de termes résonants).*

Sur un mot $\boldsymbol{\omega}$ de longueur r, le moule Tram$^\bullet$ *vaut :*

$$\text{Tram}^{\boldsymbol{\omega}} = \left((\text{Sam}^\bullet)^{\circ r}\right)^{\boldsymbol{\omega}}.$$

Démonstration. — Il suffit d'itérer la procédure de simplification définie pour un champ hamiltonien, et d'utiliser la proposition 8.1.5 précédente, qui rend l'expression moulienne possible.

□

Comme nous sommes dans le cas d'un champ hamiltonien, et que dans ce cas il n'y a qu'une unique forme prénormale, c'est donc la forme normale de Birkhoff que donne ce théorème. Il serait alors intéressant de comparer les résultats obtenus par ce théorème par rapport à d'autres calculs plus classiques.

8.2. Le théorème de Kolmogorov

Rappelons brièvement la notion d'intégrabilité d'un hamiltonien (on pourra consulter [3, 4, 53]).

8.2.1. Hamiltonien complètement intégrable. — On notera $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1. On considère un hamiltonien *complètement intégrable* en coordonnées action-angle *i.e.* des coordonnées (p, q) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$:

$$H = H_0(p);$$

et le champ de vecteurs hamiltonien associé est :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial q}(p) = 0,$$
$$\dot{q} = \frac{\partial H_0}{\partial p}(p).$$

On notera le *vecteur fréquence* $\dfrac{\partial H_0(p)}{\partial p}$ souvent $\omega(p)$. Les solutions de ces équations existent sur des variétés invariantes de la forme :

$$\{p = p_0 = \text{ constante}\} \times \mathbb{T}^n.$$

Ces variétés sont donc des tores (de dimension n) et l'espace des phases est alors feuilleté par une famille de tores de dimension n paramétrée par la constante p_0. De plus, les trajectoires sur ces tores sont données par :

$$p(t) = p_0;$$
$$q(t) = \omega(p_0)t + q_0.$$

Ce sont des trajectoires *quasipériodiques*.

De plus, on dira que le hamiltonien H est *non-dégénéré* si l'application fréquence $p \mapsto \omega(p)$ est un difféomorphisme. Une condition suffisante pour cela est que :

$$\det\Big(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}(p)\Big) \neq 0.$$

Que se passe-t-il pour ces tores invariants lorsque le hamiltonien n'est plus complètement intégrable ? Lorsque le hamiltonien est proche d'un hamiltonien non-dégénéré, le théorème de Kolmogorov répond à cette question, pour les tores dont la fréquence vérifie une condition *diophantienne*. C'est là l'origine de la théorie KAM, du nom de ses principaux auteurs Kolmogorov, Arnold et Moser. On pourra se référer à ces auteurs ([4, 35, 49].

Pour $\tau, \gamma > 0$, on définit :

$$\Omega(\tau,\gamma) = \{\omega \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } |\omega \cdot k| \geqslant \gamma |k|^{-\tau}, \forall k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}\},$$

où

$$|k| = \sup_i |k_i|.$$

On pose alors

$$\Omega(\tau) = \bigcup_{\gamma > 0} \Omega(\tau,\gamma).$$

On peut comprendre ces ensembles comme les fréquences éloignées des résonances. Citons alors le théorème KAM :

***Théorème 8.2.1* (KAM).** — *Soit*

$$H(p,q) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p,q), \quad (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n,$$

où H_0 est un hamiltonien réel complètement intégrable analytique non-dégénéré, et où H est le hamiltonien perturbé, de classe $\mathscr{C}^r$ avec $r > 2n$. Alors, pour tout tore invariant de H_0 de fréquence $\omega \in \Omega(n,\gamma)$, si ε est assez petit par rapport à γ^2, le système perturbé possède des tores invariants lisses de même fréquence ω.

En d'autres termes, le théorème assure que, sous les bonnes hypothèses, et sur un type de tore spécifique (appelé tore KAM), le champ hamiltonien perturbé est analytiquement conjugué à un champ constant sur un tore (de même fréquence). C'est donc bien dire qu'il existe un changement de variables (analytique ici) qui transforme le champ de vecteurs hamiltonien perturbé de départ, en sa partie constante, soit en une forme prénormale.

Nous cherchons donc à utiliser le calcul moulien pour prouver ce théorème, et notamment les notions de forme prénormale, simplifiée et élaguée.

Malheureusement, nous n'avons pas pu prouver ce théorème dans toute sa généralité ; nous en proposons ici une version tout d'abord formelle, et dans le cas d'une perturbation d'une forme particulière, suivant [30].

8.2.2. Calcul moulien pour le théorème de Kolmogorov. — Nous suivons ici l'article de Giorgilli et Locatelli [30].

On définit l'algèbre $\mathscr{A}_\varepsilon$ des fonctions $f_\varepsilon(p,q) : \mathbb{C}^\nu \times \mathbb{C}\nu \to \mathbb{C}$ de la forme :

$$f_\varepsilon(p,q) = \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s f_s(p,q),$$

où les f_s sont des polynômes trigonométriques en q, tels que si on écrit :

$$f_s(p,q) = \sum_{|k| \leqslant K_s} f_{s,k}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot q},$$

les coefficients $f_{s,k}(p)$ sont des polynômes en p.

On définit ensuite $\mathscr{A}_\varepsilon^1$ comme le sous-ensemble de $\mathscr{A}_\varepsilon$ des polynômes trigonométriques en q de degré K dont les coefficients sont des polynômes en p homogènes de degré 1. De plus, $\mathscr{D}(\mathscr{A}_\varepsilon)$ est l'ensemble des dérivations sur l'algèbre $\mathscr{A}_\varepsilon$ et $\mathscr{D}^1(\mathscr{A}_\varepsilon)$ le sous-ensemble de $\mathscr{D}(\mathscr{A}_\varepsilon)$ des dérivations D de la forme :

$$D = A_\varepsilon(p,q)\partial_p + B_\varepsilon(p,q)\partial_q,$$

où A_ε et B_ε sont dans $\mathscr{A}_\varepsilon^1$.

Notons de plus $\mathscr{D}_r^1(\mathscr{A}_\varepsilon) \subset \mathscr{D}^1(\mathscr{A}_\varepsilon)$ le sous-ensemble des dérivations D de la forme :

$$D = A_\varepsilon(p,q)\partial_p + B_\varepsilon(p,q)\partial_q,$$

où A_ε et B_ε sont dans $\mathscr{A}_\varepsilon^1$, et dont tous les coefficients de ε^s pour $s \leqslant r$ ne dépendent pas de q.

Toujours en suivant [30], on considère un hamiltonien H_ε de $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$ de la forme :

$$H_\varepsilon(p,q) = \omega \cdot p + \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon f(q),$$

ω étant un vecteur de $\mathbb{R}^\nu$ non-résonant.

Le théorème de Kolmogorov est moins fort que le théorème KAM car il se limite à un tore donné. Le théorème « formel » de Kolmogorov peut alors s'énoncer de la manière suivante :

***Théorème 8.2.2* (Kolmogorov).** — *Soit H_ε défini par :*

$$H_\varepsilon(p,q) = \omega \cdot p + \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon f(q),$$

ω étant un vecteur diophantien de $\mathbb{R}^\nu$. Il existe une transformation canonique formelle tangente à l'identité qui transforme H_ε en la forme suivante :

$$\widetilde{H}_\varepsilon(p,q) = \omega \cdot p + R(p,q,\varepsilon), \text{ avec } R(p,q,\varepsilon) = O(p^2).$$

De plus cette transformation se calcule explicitement à l'aide du moule $\mathrm{Tram}^\bullet$.

La stratégie de la démonstration « classique » est la suivante : on utilise une méthode itérative (type Newton) pour supprimer à chaque étape la partie du champ hamiltonien qui dépend des angles.

Dans le formalisme que nous utilisons, on peut reformuler cet énoncé par la proposition suivante, plus précise ; on note X_ε le champ hamiltonien induit par H_ε, et X_c la partie constante du champ hamiltonien $\omega \cdot \partial_q$. Giorgilli et Locatelli démontrent dans [30] la proposition suivante :

Proposition 8.2.3. — *Supposons qu'il existe une transformation (canonique formelle) qui conjugue X_ε à*

$$X_{r,\varepsilon}(p,q) =$$

$$\omega \cdot \partial_q + \sum_{s=1}^{r} \varepsilon^s (a_s(p)\partial_p + b_s(p)\partial_q) + \sum_{s \geqslant r+1} \varepsilon^s \Big(\sum_{l=1}^{N_s} a_{s,l}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i} l \cdot q} \partial_p + \sum_{l=1}^{M_s} b_{s,l}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i} l \cdot q} \partial_q \Big),$$

où $a_s(p), b_s(p), a_{s,l}(p), b_{s,l}(p)$ sont des polynômes en p homogènes de degré 1. Alors il existe une transformation (canonique formelle) tangente à l'identité $q = q' + \varepsilon \cdots, p = p' + \varepsilon \cdots$, telle que X_ε est conjugué à $X_{r,\varepsilon}(p,q) = X_{r+1,\varepsilon}(p',q')$.

Nous reformulons alors cette proposition dans le cadre de la procédure de simplification, de manière équivalente plus concise :

Proposition 8.2.4. — *Si $X - X_c \in \mathscr{D}_r^1(\mathscr{A}_\varepsilon)$, alors $X_{\mathrm{sam}} - X_c \in \mathscr{D}_{r+1}^1(\mathscr{A}_\varepsilon)$.*

Démonstration. — On écrit

$$X = X_c + \sum_{s=1}^{r} \varepsilon^s X_s^0(p) + \sum_{s \geqslant r+1} \varepsilon^s \Big(X_s^0(p) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} X_s^k(p,q) \Big),$$

où $X_s^0(p)$ est indépendant de q et

$$X_s^k(p,q) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k \cdot q)} \Big(a_{s,k}(p) \partial_p + b_{s,k}(p) \partial_q \Big).$$

Posons alors $B_k = \sum_{s \geqslant r+1} \varepsilon^s X_s^k$ pour $k \neq 0$ et $B_0 = \sum_{s \geqslant 1} \varepsilon^s X_s^0$.

Lemme 8.2.5. — *Pour $k \in \mathbb{Z}^\nu$, B_k est un opérateur différentiel homogène de degré k en les angles q. De plus,*

$$[X_c, B_k] = X_c B_k = \mathbf{i}(k \cdot \omega) B_k.$$

On peut alors écrire $X = X_c + \sum_{\boldsymbol{k} \in A^*} I^{\boldsymbol{k}} B_{\boldsymbol{k}}$, où $A = \mathbb{Z}^\nu$ est l'alphabet, et $I^\bullet$ le moule déjà défini page 70. On cherche une transformation sous la forme d'une série moulienne $\Theta = \sum_\bullet \Theta^\bullet B_\bullet$, où $\Theta = \exp(V)$ et $V = \sum_\bullet V^\bullet B_\bullet$.

La formule de Campbell-Baker-Hausdorff assure alors que :

$$\Theta X \Theta^{-1} = X - [X, V] + \cdots = X_c + \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} B_k - [X_c, V] + \text{ h.o.t. }, \tag{8.2}$$

où h.o.t. sont des termes de plus haut degré en ε. On définit alors le moule $V^\bullet$ par

$$V^{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbf{i}(k \cdot \omega)} \text{ si } \ell(k) = 1 \text{ et } k \cdot \omega \neq 0 \text{ (\textit{i.e.} si } k \neq 0 \text{ puisque } \omega \text{ est non résonant)}; \\ 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Alors,

$$[X_c, V] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} V^k [X_c, B_k] + \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in A^* \\ \ell(\boldsymbol{k}) \geqslant 2}} V^{\boldsymbol{k}} [X_c, B_{\boldsymbol{k}}] + \cdots,$$

donc (8.2) se réécrit :

$$X_{\mathrm{sam}} = X_c + B_0 + \underbrace{\sum_{\substack{k\in A\\ k\neq 0}} B_k - \sum_{k\in A} \mathbf{i}(k\cdot\omega)V^k B_k}_{(*)} + \underbrace{\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in A^*\\ \ell(\boldsymbol{k})\geqslant 2}} V^{\boldsymbol{k}}[X_c, B_{\boldsymbol{k}}] + \cdots}_{(**)}$$

Le terme $(**)$ est d'ordre au moins $r+2$ en ε, et convient. D'après la définition du moule $V^\bullet$, le terme $(*)$ est nul car $k\cdot\omega = 0$ si et seulement si $k = 0$ car ω est diophantien, donc non-résonant. Ceci prouve finalement que $X_{\mathrm{sam}} - X_c \in \mathscr{D}^1_{r+1}(\mathscr{A}_\varepsilon)$. □

C'est donc grâce, encore une fois, à la procédure de simplification simp que l'on peut conjuguer X à X_{sam}. D'après le lemme de projection 6.5.6 on peut écrire :

$$X_{\mathrm{sam}} = X_c + \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r} \sum_{\boldsymbol{k}\in A^*} \mathrm{Sam}^{\boldsymbol{k}} B_{[\boldsymbol{k}]}.$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 8.2.6. — $\forall D, \widetilde{D} \in \mathscr{D}^1(\mathscr{A}_\varepsilon), \qquad [D, \widetilde{D}] \in \mathscr{D}^1(\mathscr{A}_\varepsilon).$

Démonstration. — Ce lemme et le lemme de projection montrent que X_{sam} est alors dans $\mathscr{D}^1_{r+1}(\mathscr{A}_\varepsilon)$, donc en appliquant de manière itérative la proposition 8.2.4, on prouve la proposition 8.2.3 et par conséquent le théorème 8.2.2. □

CHAPITRE 9

CALCUL FORMEL ET EXEMPLES AVEC MAPLE

9.1. Présentation

L'intérêt premier de ce chapitre réside dans le fait qu'il présente un programme effectif de calcul de différentes formes prénormales, sous la forme d'une suite de procédures MAPLE. Le logiciel utilisé est ici Maple 13.

Nous avons testé plusieurs types de champs, principalement les champs de vecteurs polynomiaux : en effet, ces derniers sont importants dans la recherche sur le 16ème problème de Hilbert et problème du centre, mais aussi champs hamiltoniens en coordonnées cartésiennes, qui interviennent dans la recherche de la forme normale de Birkhoff.

Nous avons pu également comparer différents types de formes prénormales : la classique forme de Poincaré-Dulac, la forme élaguée, la forme royale, et enfin la correction.

9.2. Les différentes formes prénormales

9.2.1. Introduction. — Rappelons que nous étudions ici différentes formes prénormales continues : si X est un champ de vecteurs de la forme :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A} B_n,$$

sous forme bien préparée, alors une forme prénormale de X est un champ de vecteurs X_{nor} ayant les propriétés suivantes :

- conjugué à X,
- tel que $[X_{\text{nor}}, X_{\text{lin}}] = 0$,
- il existe un moule $\text{Pran}^{\bullet}$ alternal tel que X_{nor} a une écriture moulienne de la forme

$$X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Pran}^{\bullet} B_{\bullet},$$

avec $\mathrm{Pran}^{\boldsymbol{n}} = 0$ si $\boldsymbol{n}$ est non résonant.

Rappelons également que le moule $\mathrm{Pran}^{\bullet}$ est lié au moule donnant la transformation de conjugaison par l'équation suivante, vue à la proposition 7.4.8 page 92.

$$\Theta^{\bullet} \times I^{\bullet} = \nabla\Theta^{\bullet} + \mathrm{Pran}^{\bullet} \times \Theta^{\bullet}.$$

Et comme nous l'avons vu à la page 102 la résolution complète de cette équation implique de rajouter une condition supplémentaire, sauf dans le cas de la forme élaguée.

C'est ici que nous pouvons décrire la forme royale et la correction.

9.2.2. La forme royale. — La forme royale est une forme prénormale obtenue en ajoutant une condition de dérivation sur le moule $\mathrm{Pran}^{\bullet}$; on trouve les détails sur sa construction dans [21, 51]. On donne ici les expressions qui permettent de calculer la forme royale avec Maple.

Précisons auparavant quelques notations : le spectre de la partie linéaire étant $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_v)$ on a noté ∇ la dérivation suivante :

$$\nabla M^{\boldsymbol{n}} = \omega(\|\boldsymbol{n}\|) M^{\boldsymbol{n}}.$$

En notant, comme auparavant, $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{n}) = (\lambda \cdot n_1, \ldots, \lambda \cdot n_r) = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ lorsque $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r)$, Écalle définit également la dérivation lan suivante, sur un moule $M^{\bullet}$:

$$(\mathrm{lan}\, M)^{\boldsymbol{n}} = r^{\star}(\boldsymbol{n}) M^{\boldsymbol{n}} \quad \text{où} \quad r^{\star}(\boldsymbol{n}) = \sum_{\omega_i \neq 0} 1$$

La forme royale est définie par l'équation de normalisation moulienne, à laquelle on rajoute la condition suivante :

$$\left((\mathrm{lan}\, \Theta^{\bullet}) \times \left(\Theta^{-1} \right)^{\bullet} \right)^{\boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{si } \|\omega(\boldsymbol{n})\| = 0.$$

Alors, la forme royale a l'écriture moulienne suivante :

$$X_{\mathrm{ray}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\bullet} \mathrm{Ray}^{\bullet} B_{\bullet}$$

et l'automorphisme de substitution a pour expression :

$$\Theta_{\mathrm{Ray}} = \sum_{\bullet} \mathrm{Sray}^{\bullet} B_{\bullet}, \quad \text{et son inverse} \quad {\Theta_{\mathrm{Ray}}}^{-1} = \sum_{\bullet} \mathcal{S}\mathrm{ray}^{\bullet} B_{\bullet}.$$

Enfin, les expressions suivantes permettent de calculer le moule $\mathrm{Ray}^\bullet$ par récurrence sur la longueur des mots.

$$\mathrm{Sray}^\emptyset = \not{S}\mathrm{ray}^\emptyset = 1 \quad \text{et } \mathrm{Ray}^\emptyset = 0$$

$$\mathrm{Sray}^\bullet \times \not{S}\mathrm{ray}^\bullet = 1^\bullet$$

$$\nabla\mathrm{Sray}^\bullet \times \not{S}\mathrm{ray}^\bullet = \mathrm{Ray}^\bullet - \mathrm{Sray}^\bullet \times I^\bullet \times \not{S}\mathrm{ray}^\bullet$$

$(\mathrm{lan}\,\mathrm{Sray}^\bullet) \times \not{S}\mathrm{ray}^\bullet = 0$ sur les mots $\boldsymbol{n}$ tels que $\|(\omega(\boldsymbol{n})\| = 0$.

$$\mathrm{lan}\,\mathrm{Ray}^\bullet = \begin{cases} \mathrm{Sray}^\bullet \times \mathrm{lan}\, I^\bullet \times \not{S}\mathrm{ray}^\bullet \text{ sur les mots } \boldsymbol{n} \text{ tels que} \|\omega(\boldsymbol{n})\| = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

9.2.3. La correction. — La correction est exposée dans la thèse de Bruno Vallet [51] et dans [10]. C'est un champ de vecteurs noté X_{carr} solution du problème suivant : trouver un champ de vecteurs Z tel que $X - Z$ est formellement conjugué à X_{lin} et tel que $[X_{\mathrm{lin}}, Z] = 0$. La correction possède le développement moulien suivant :

$$X_{\mathrm{carr}} = \sum_{\bullet} \mathrm{Carr}^\bullet B_\bullet.$$

On trouve dans [51] la manière de calculer le moule $\mathrm{Carr}^\bullet$ par récurrence sur la longueur des suites : si $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ et $\omega_i = \lambda \cdot n_i$ alors, en notant $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$:

$$\omega_1 \mathrm{Carr}^{n_1,\ldots,n_r} + \mathrm{Carr}^{n_1+n_2,n_3,\ldots,n_r} = \sum_{n_1 \bullet \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c} = \omega} \mathrm{Carr}^{n_1 \boldsymbol{c}} \mathrm{Carr}^{\boldsymbol{b}}.$$

9.3. Programme de calcul

Voir en appendice le programme Maple écrit pour l'occasion ; seules les procédures de calcul de la forme royale et de la correction sont inspirées d'un programme antérieur dû à Jacky Cresson et Bertrand Schuman (voir [13,46]), les autres procédures étant originales.

Remarquons que les programmes permettent de calculer facilement la contraction d'un moule et d'un comoule pour peu que le moule soit donné sous la forme d'une procédure, quelle que soit la dimension et la longueur des mots demandée ; seule la puissance de la machine est limitative.

9.4. Le problème du centre

Le problème du centre constitue un exemple de problème que l'on cherche à résoudre par une mise sous forme normale. On considère l'équation différentielle du plan (x,y) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + P_1(x,y) \\ \dot{y} &= x + P_2(x,y) \end{cases}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes à coefficients réels. Dans le cas où P_1 et P_2 sont tous deux nuls, le point d'équilibre $(0,0)$ est un *centre* et toutes les orbites sont périodiques de période 1. La conjecture de Dulac (démontrée par J.Écalle et Y.Ilyashenko au début des années 1990) assure que si P_1 ou P_2 est nul il subsiste un nombre fini d'orbites périodiques, qui sont des cycles limites.

Le 16e problème de Hilbert consiste lui à majorer le nombre de ces cycles limites en fonction du degré des polynômes P_1 et P_2. Quant au problème du centre, il consiste à caractériser les couples de polynômes (P_1,P_2) tels que le système différentiel ci-dessus ait toutes ses orbites périodiques dans un voisinage de l'origine. On peut montrer que cela revient à montrer que le système est formellement linéarisable.

C'est ici l'occasion d'utiliser les différentes formes prénormales (Poincaré-Dulac et élaguée) vues, ainsi que d'autres formes prénormales, pour comparer les conditions de centre les plus simples.

9.4.1. Mise sous forme préparée. — On reprend le système différentiel ci-dessus : ses valeurs propres sont i et $-i$ donc on en posant $z = x+iy$, le système devient :

$$\frac{dz}{dt} = iz + P(z,\bar{z}),$$

où $P(z,\bar{z}) = P_1(x,y) + iP_2(x,y)$, et

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = -i\bar{z} + \overline{P}(z,\bar{z}).$$

Finalement, le système se réécrit dans $\mathbb{C}^2$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(z,\bar{z}) \\ \overline{P}(z,\bar{z}) \end{pmatrix}.$$

9.4.2. Cas d'un champ homogène quadratique. — On se place dans le cas où :

$$P(z,\bar{z}) = a_{02}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{20}\bar{z}^2.$$

9.4.2.1. Conditions de centre à l'ordre 2. — On trouve à l'ordre 2 les conditions suivantes, données par la forme élaguée, la forme royale, et la correction :

$$-a_{11}a_{02}+|a_{11}|^2+\frac{2}{3}|a_{20}|^2=0.$$

9.4.2.2. Conditions de centre à l'ordre 3. — On trouve la même équation.

9.4.2.3. Conditions de centre à l'ordre 4. — La forme élaguée et la forme royale ont la même expression, et la condition de centre supplémentaire est la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\overline{a_{11}}a_{02}^2a_{20}+\frac{4}{3}\overline{a_{11}}^3a_{20}-2|a_{11}|^4+a_{11}^2\overline{a_{11}}a_{02}-\frac{1}{3}|a_{02}|^2|a_{20}|^2\\ -\frac{23}{4}|a_{20}|^2|a_{11}|^2-\frac{4}{9}|a_{20}|^4+\frac{7}{18}\overline{a_{02}a_{11}}|a_{20}|^2+\frac{35}{18}|a_{20}|^2a_{02}a_{11}\\ +|a_{02}|^2|a_{11}|^2-2\overline{a_{11}}^2a_{20}a_{02}+2a_{11}^3\overline{a_{20}}-\overline{a_{02}a_{20}}a_{11}^2=0.\end{aligned}$$

La condition supplémentaire donnée par la correction est un peu plus simple :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\overline{a_{11}}a_{02}^2a_{20}+\frac{4}{3}\overline{a_{11}}^3a_{20}+2|a_{11}|^4-\frac{7}{4}|a_{20}|^2|a_{11}|^2-\frac{1}{3}|a_{02}|^2|a_{20}|^2\\ -2\overline{a_{11}}^2a_{20}a_{02}+\frac{5}{6}|a_{20}|^2\overline{a_{02}a_{11}}+\frac{3}{2}|a_{20}|^2a_{02}a_{11}-\overline{a_{02}a_{20}}a_{11}^2\\ -|a_{02}|^2|a_{11}|^2+\frac{4}{9}|a_{20}|^4-a_{11}^2\overline{a_{11}}a_{02}+2a_{11}^3\overline{a_{20}}=0.\end{aligned}$$

9.4.2.4. Conditions de centre à l'ordre 6. — À l'ordre 6, les formes royale, élaguée et corrigée ont toutes trois des expressions différentes.La correction possède une expression plus simple : moins de termes, et des coefficients moins compliqués.

9.4.3. Cas d'un champ homogène cubique. —

9.4.4. Expressions des différentes formes dans le cas homogène de degré 3. — En posant $P(z,\bar{z})=a_{30}z^3+a_{21}z^2\bar{z}+a_{12}z\bar{z}^2+a_{03}\bar{z}^3$ on obtient les résultats suivants. La recherche des annulations de ces coefficients donne les conditions de centre pour ce problème.

9.4.4.1. À l'ordre 1. — Les formes élaguée, royale et la correction sont les mêmes ; pour la composante $z\dfrac{\partial}{\partial z}$:

$$|z|^2a_{21}.$$

9.4.4.2. À l'ordre 2. — À l'ordre 2, la forme royale et la forme élaguée sont les mêmes :

Pour la composante $z\dfrac{\partial}{\partial z}$:

$$|z|^2 a_{21} + |z|^4 i\Big(a_{12}a_{30} - \frac{3}{4}|a_{03}|^2 - |a_{12}|^2\Big)$$

et pour la composante $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, le conjugué (car le champ reste réel).

9.4.4.3. À l'ordre 3. — À l'ordre 3, la forme royale et la forme élaguée sont encore les mêmes :

Pour la composante $z\dfrac{\partial}{\partial z}$:

$$\begin{aligned}
&a_{21}|z|^2 + i|z|^4\Big(a_{12}a_{30} - \frac{3}{4}|a_{03}|^2 - |a_{12}|^2\Big) \text{ (on retrouve l'ordre 2)}\\
&\quad + |z|^6\Big(-\frac{1}{2}a_{12}a_{21}a_{30} - \frac{1}{2}\overline{a_{30}a_{03}}a_{12} + \frac{11}{16}|a_{03}|^2 a_{21} - \frac{3}{8}a_{03}{a_{30}}^2 - \overline{a_{21}}|a_{12}|^2\\
&\qquad + \frac{3}{2}\overline{a_{12}}a_{03}a_{30} - \frac{9}{16}\overline{a_{21}}|a_{03}|^2 + \frac{5}{4}|a_{12}|^2 a_{21}\\
&\qquad\quad + \frac{3}{2}{a_{12}}^2\overline{a_{03}} - \frac{1}{4}a_{21}|a_{30}|^2 + \frac{1}{2}\overline{a_{30}a_{12}}a_{21} - \frac{9}{8}\Big(\overline{a_{12}}\Big)^2 a_{03}\Big)
\end{aligned}$$

et le conjugué pour la composante $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

En revanche, la correction a une expression différente :

$$|z|^6\Big(-\frac{1}{2}\overline{a_{03}a_{30}}a_{12} + \frac{3}{2}\overline{a_{03}}a_{12}^2 + \frac{3}{2}a_{03}a_{30}\overline{a_{12}} - \frac{3}{8}a_{30}^2 a_{03} - \frac{9}{8}a_{03}\overline{a_{12}}^2\Big).$$

9.4.4.4. Calculs à l'ordre 4. — C'est à partir de l'ordre 4 que les formes royales et élaguées diffèrent.

Le calcul donne l'expression suivante pour la composante $z\dfrac{\partial}{\partial z}$ de la forme royale :

ordre 2 + ordre 3 +

$$
\begin{aligned}
&|z|^8 i\Big(\overline{a_{30}a_{12}}|a_{03}|^2 + |a_{30}|^2|a_{12}|^2 + \boldsymbol{\frac{7}{24}\overline{a_{30}}a_{12}\overline{a_{03}}a_{21}} - \boldsymbol{\overline{a_{30}}|a_{21}|^2\overline{a_{12}}} \\
&\boldsymbol{- \frac{3}{4}|a_{12}|^2|a_{21}|^2} + \frac{47}{24}\overline{a_{03}a_{12}}a_{21}a_{30} + \boldsymbol{\frac{7}{8}\overline{a_{30}a_{21}a_{03}}a_{12} - \frac{23}{32}|a_{03}|^2|a_{21}|^2} \\
&- \frac{167}{24}|a_{03}|^2|a_{12}|^2 - \frac{3}{4}|a_{30}|^2|a_{03}|^2 - \frac{9}{8}\overline{a_{21}a_{12}}a_{03}a_{30} - a_{12}a_{30}|a_{21}|^2 \\
&+ \frac{23}{8}|a_{03}|^2a_{30}a_{12} - \frac{1}{4}|a_{30}|^2|a_{21}|^2 + a_{12}|a_{12}|^2a_{30} + \boldsymbol{\frac{1}{2}\overline{a_{30}}a_{21}^2\overline{a_{12}}} - \frac{1}{4}|a_{30}|^2a_{21}^2 \\
&\boldsymbol{- \frac{15}{32}\overline{a_{21}}a_{03}a_{30}^2 - \frac{33}{16}a_{03}\overline{a_{12}}^2a_{21} + \frac{75}{32}\overline{a_{21}a_{12}}^2a_{03}} + \frac{3}{2}\overline{a_{21}}^2|a_{12}|^2 \boldsymbol{+ \frac{41}{64}|a_{03}|^2a_{21}^2} \\
&\boldsymbol{+ \frac{101}{32}a_{12}^2\overline{a_{03}}a_{21} - \frac{17}{32}\overline{a_{30}}^2\overline{a_{03}}a_{21} + \frac{33}{64}\overline{a_{21}}^2|a_{03}|^2 - \frac{17}{8}a_{12}^2\overline{a_{21}a_{03}}} \\
&\boldsymbol{- \frac{1}{2}a_{12}a_{21}^2a_{30} + \frac{7}{4}|a_{12}|^2a_{21}^2 - \frac{5}{16}a_{03}a_{21}a_{30}^2} - \frac{45}{64}|a_{03}|^4 - 2|a_{12}|^4\Big)
\end{aligned}
$$

Quant à la forme élaguée, on obtient le résultat suivant :

ordre 2 + ordre 3 +

$$
\begin{aligned}
&|z|^8 i\Big(\overline{a_{30}a_{12}}|a_{03}|^2 + |a_{30}|^2|a_{12}|^2 - \frac{167}{24}|a_{03}|^2|a_{12}|^2 - \frac{3}{4}|a_{30}|^2|a_{03}|^2 + \frac{23}{8}|a_{03}|^2a_{30}a_{12} \\
&- \frac{1}{4}|a_{30}|^2|a_{21}|^2 \boldsymbol{- \frac{3}{4}\overline{a_{21}}a_{03}a_{30}^2 - 3a_{03}\overline{a_{12}}^2a_{21} + \overline{a_{30}}a_{21}^2\overline{a_{12}}} + a_{12}|a_{12}|^2a_{30} \\
&\boldsymbol{+ |a_{12}|^2a_{21}^2} - \frac{1}{4}|a_{30}|^2a_{21}^2 \boldsymbol{+ \frac{11}{12}\overline{a_{30}a_{03}}a_{12}a_{21} - \frac{1}{2}\overline{a_{30}a_{12}}|a_{21}|^2 - \frac{9}{4}|a_{12}|^2|a_{21}|^2} \\
&\boldsymbol{+ \frac{17}{6}a_{03}\overline{a_{12}}a_{21}a_{30} + \frac{5}{4}\overline{a_{30}a_{21}a_{03}}a_{12} - |a_{03}|^2|a_{21}|^2} \\
&- \frac{45}{64}|a_{03}|^4 - 2|a_{12}|^4 \boldsymbol{+ \frac{3}{2}\overline{a_{21}a_{12}}^2a_{03}} \\
&\boldsymbol{+ \frac{3}{4}\overline{a_{21}}^2|a_{12}|^2 + \frac{1}{2}|a_{03}|^2a_{21}^2 + \frac{17}{8}a_{12}^2\overline{a_{03}}a_{21}} \\
&\boldsymbol{- \frac{5}{8}\overline{a_{30}}^2\overline{a_{03}}a_{21} + \frac{3}{8}\overline{a_{21}}^2|a_{03}|^2 - \frac{13}{4}a_{12}^2\overline{a_{21}a_{03}} + \frac{3}{4}\overline{a_{21}}^2a_{12}a_{30}} \\
&\boldsymbol{- \frac{1}{4}a_{12}a_{21}^2a_{30} - \frac{1}{2}a_{03}a_{21}a_{30}^2}
\end{aligned}
$$

On a mis en gras les termes qui diffèrent dans les deux expressions.

Enfin pour la correction on obtient :

ordre 2 + ordre 3 +

$$i|z|^8\Big(-2|a_{12}|^4+|a_{12}|^2a_{12}a_{30}+|a_{12}|^2|a_{30}|^2-\frac{17}{8}a_{30}a_{12}|a_{03}|^2+\frac{25}{12}|a_{12}|^2|a_{03}|^2 \\ +\frac{3}{4}|a_{30}|^2|a_{03}|^2-\frac{11}{8}\overline{a_{30}a_{12}}|a_{03}|^2-\frac{45}{64}|a_{03}|^4\Big)$$

9.4.5. Conditions de centre. —

9.4.5.1. À l'ordre 1. — La condition de centre à l'ordre 1 est :

$$a_{21}=0.$$

9.4.5.2. À l'ordre 2. — On obtient :

$$\begin{cases} a_{21} & =0 \\ 4a_{12}a_{30}-3|a_{03}|^2-4|a_{12}|^2 & =0, \end{cases}$$

9.4.5.3. À l'ordre 3. — Les conditions de centre à l'ordre 3 données par les formes royale et élaguée, ainsi que par la correction deviennent :

$$\begin{cases} a_{21} & =0 \\ a_{12}a_{30}-\frac{3}{4}|a_{03}|^2-|a_{12}|^2 & =0 \\ -\frac{1}{2}\overline{a_{03}a_{30}}a_{12}-\frac{3}{8}a_{03}a_{30}^2+\frac{3}{2}\overline{a_{12}}a_{03}a_{30}+\frac{3}{2}a_{12}^2\overline{a_{03}}-\frac{9}{8}\overline{a_{12}}^2a_{03} & =0. \end{cases}$$

9.4.5.4. À l'ordre 4. — Les conditions de centre données par la forme royale sont les mêmes qu'à l'ordre 3 auxquelles il faut rajouter l'équation :

$$\overline{a_{30}a_{12}}|a_{03}|^2+|a_{30}|^2|a_{12}|^2-\frac{167}{24}|a_{03}|^2|a_{12}|^2 \\ -\frac{3}{4}|a_{30}|^2|a_{03}|^2+\frac{23}{8}|a_{03}|^2a_{30}a_{12}+a_{12}|a_{12}|^2a_{30}-\frac{45}{64}|a_{03}|^4-2|a_{12}|^4=0. \quad (9.1)$$

Quant aux conditions de centre données par la forme élaguée, l'équation supplémentaire à l'ordre 4 est la même que ci-dessus, bien que les expressions des deux formes diffèrent, car tous les termes différents d'une forme à l'autre contiennent a_{21} ou $\overline{a_{21}}$ qui est nul.

En revanche, la condition supplémentaire de centre donnée par la correction est légèrement différente :

$$\mathbf{-\frac{11}{8}}\overline{a_{30}a_{12}}|a_{03}|^2+|a_{30}|^2|a_{12}|^2\mathbf{+\frac{25}{12}}|a_{03}|^2|a_{12}|^2 \\ \mathbf{+\frac{3}{4}}|a_{30}|^2|a_{03}|^2\mathbf{-\frac{17}{8}}|a_{03}|^2a_{30}a_{12}+a_{12}|a_{12}|^2a_{30}-\frac{45}{64}|a_{03}|^4-2|a_{12}|^4=0. \quad (9.2)$$

9.5. La forme normale de Birkhoff

Si on considère un champ de vecteurs hamiltonien, il n'existe qu'une seule forme prénormale de ce champ, c'est la forme normale de Birkhoff : dans ce cas, la forme de Poincaré-Dulac, la forme élaguée, la forme royale doivent être toutes identiques.

9.5.1. Avec un point fixe elliptique. — On considère l'exemple d'un hamiltonien comportant un point fixe elliptique :

$$H(x,y) = \frac{(x^2+y^2)}{2} + P(x,y), \text{ où } P \text{ est un polynôme en } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

À titre d'exemple, on ne considérera que des polynômes homogènes. On pose $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \mathbf{i}\, y)$. Les équations de Hamilton en coordonnées (x,y) se réécrivent alors en coordonnées $(z,\bar{z})$:

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathbf{i}\,\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}} \\ \dot{\bar{z}} = -\mathbf{i}\,\dfrac{\partial H}{\partial z}. \end{cases}$$

9.5.1.1. Cas d'une perturbation homogène de degré 3. — Le passage en variables complexes $z,\bar{z}$ qui permet la mise sous forme bien préparée nous amène à considérer le hamiltonien suivant :

$$H(z,\bar{z}) = z\bar{z} + a_{30}z^3 + a_{21}z^2\bar{z} + a_{12}z\bar{z}^2 + a_{03}\bar{z}^3,$$

où les coefficients $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$ sont complexes, mais le hamiltonien H étant réel, on a les égalités suivantes :

$$\overline{a_{30}} = a_{03}, \quad \overline{a_{21}} = a_{12}.$$

Les équations de Hamilton en coordonnées (x,y) conduisent alors au système différentiel suivant en variables $(z,\bar{z})$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} a_{21}z^2 + 2\overline{a}_{21}z\bar{z} + 3\overline{a}_{30}\bar{z}^2 \\ -3a_{30}z^2 - 2a_{21}z\bar{z} - \overline{a}_{21}\bar{z}^2 \end{pmatrix}$$

9.5.1.2. Cas d'une perturbation homogène de degré d quelconque. — Le hamiltonien est, en variables complexes :

$$H(z,\bar{z}) = z\bar{z} + \sum_{p=0}^{d} a_{d-p,p} z^{d-p}\bar{z}^p,$$

avec la condition de réalité : $a_{p,q} = \overline{a}_{q,p}$ pour tous p et q tels que $p+q=d$.

Le champ s'écrit alors :

$$X = \mathbf{i}(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) + \mathbf{i}\Big(\sum_{p=1}^{d} p a_{d-p,p} z^{d-p}\bar{z}^{p-1}\Big)\partial_z - \mathbf{i}\Big(\sum_{p=0}^{d-1}(d-p)a_{d-p,p}z^{d-p-1}\bar{z}^{p}\Big)\partial_{\bar{z}}.$$

Mise à part la partie linéaire $\mathbf{i}(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$, opérateur homogène de degré $(0,0)$, le champ s'écrit comme une somme d'opérateurs homogènes :

$$\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant d, \quad \mathbf{i}\Big(p a_{d-p,p} z^{d-p}\bar{z}^{p-1}\Big)\partial_z - \mathbf{i}\Big((d-p)a_{d-p,p}z^{d-p-1}\bar{z}^{p}\Big)\partial_{\bar{z}}$$

$$\text{est homogène de degré } n_p = (d-p-1, p-1);$$

$$\text{pour } p = 0, \quad -\mathbf{i}\, d a_{d,0} z^{d-1}\partial_{\bar{z}} \text{ est homogène de degré } n_0 = (d-1,-1)$$

$$\text{pour } p = d, \quad \mathbf{i}\, d a_{0,d}\bar{z}^{d-1}\partial_z \text{ est homogène de degré } n_d = (-1, d-1).$$

La forme normale de Birkhoff X_{Birk} s'écrit alors indifféremment à l'aide des moules Tram$^\bullet$, Ray$^\bullet$ ou Carr$^\bullet$. On utilise ici la forme élaguée.

En utilisant l'alternalité du moule Tram$^\bullet$ on a alors :

$$\begin{aligned} X_{\text{Birk}} &= X_{\text{lin}} + \sum_{r\geqslant 1}\frac{1}{r}\sum_{\boldsymbol{a}\in A_r^*}\text{Tram}^{\boldsymbol{a}} B_{[\boldsymbol{a}]} \\ &= X_{\text{lin}} + \sum_{n\in A}\text{Tram}^{n} B_n + \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\in A_2^\star}\text{Tram}^{a_1,a_2}[B_{a_2},B_{a_1}] + \sum_{r\geqslant 3}\frac{1}{r}\sum_{\boldsymbol{a}\in A_r^*}\text{Tram}^{\boldsymbol{a}} B_{[\boldsymbol{a}]}. \end{aligned}$$

On rappelle que le moule Tram$^\bullet$ est toujours nul sur les mots non résonants. Cherchons les mots non résonants de longueur 1 ; on calcule les $\omega(n)$ où $n_p, 0 \leqslant p \leqslant d$ est un des degrés. On a successivement :

$$\omega(n_0) = (\mathbf{i}, -\mathbf{i})\cdot(d-1,-1) = \mathbf{i}\, d$$

$$\omega(n_d) = (\mathbf{i}, -\mathbf{i})\cdot(-1,d-1) = -\mathbf{i}\, d$$

$$\omega(n_p) = (\mathbf{i}, -\mathbf{i})\cdot(d-p-1,p-1) = \mathbf{i}(d-2p) \text{ pour } 1 \leqslant p \leqslant d-1.$$

Ainsi tous les mots de longueur 1 sont non résonants, sauf un, dans le cas où d est pair. Si $d = 2k$, le mot n_k est résonant et $\text{Tram}^{n_k} = 1$. L'opérateur homogène correspondant est

$$B_{n_k} = \mathbf{i}\, k a_{k,k} z^k \bar{z}^{k-1}\partial_z - \mathbf{i}\, k a_{k,k} z^{k-1}\bar{z}^k\partial_{\bar{z}} = \mathbf{i}\, k (z\bar{z})^{k-1} a_{k,k}\Big(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}\Big).$$

On cherche maintenant les mots de longueur 2 qui sont résonants ; un tel mot s'écrit $(n_p, n_{p'})$ et tel que le produit scalaire de $n_p + n_{p'}$ par $(\mathbf{i}, -\mathbf{i})$ doit être nul, donc un tel mot est nécessairement de la forme suivante :

$$(n_0, n_d), \text{ ou } (n_d, n_0), \text{ ou } (n_p, n_{d-p}), \text{ avec } 1 \leqslant p \leqslant d-1.$$

Finalement, à l'ordre 2, la forme normale de Birkhoff s'écrit de la manière suivante :
Si $d = 2k$ est pair :

$$X_{\text{Birk}} = X_{\text{lin}} + \mathbf{i}\,k(z\bar{z})^{k-1}a_{k,k}\Big(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k-1}\Big(\text{Tram}^{(n_p,n_{d-p})}[B_{n_{d-p}},B_{n_p}] + \text{Tram}^{(n_{d-p},n_p)}[B_{n_p},B_{n_{d-p}}]\Big) + \frac{1}{2}\Big(\text{Tram}^{(n_0,n_d)}[B_{n_d},B_{n_0}] + \text{Tram}^{(n_d,n_0)}[B_{n_0},B_{n_d}]\Big).$$

Si $d = 2k+1$ est impair :

$$X_{\text{Birk}} = X_{\text{lin}} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k}\Big(\text{Tram}^{(n_p,n_{d-p})}[B_{n_{d-p}},B_{n_p}] + \text{Tram}^{(n_{d-p},n_p)}[B_{n_p},B_{n_{d-p}}]\Big) + \frac{1}{2}\Big(\text{Tram}^{(n_0,n_d)}[B_{n_d},B_{n_0}] + \text{Tram}^{(n_d,n_0)}[B_{n_0},B_{n_d}]\Big).$$

Les calculs du moule $\text{Tram}^{\bullet}$ sur les mots de longueur 2 résonants à l'aide de Maple donnent les résultats ci-dessous :

$$\text{Tram}^{(n_0,n_d)} = \frac{1}{\mathbf{i}\,d} \qquad \text{Tram}^{(n_d,n_0)} = -\frac{1}{\mathbf{i}\,d}$$
$$\text{Tram}^{(n_p,n_{d-p})} = \frac{1}{\mathbf{i}(d-2p)} \qquad \text{Tram}^{(n_{d-p},n_p)} = -\frac{1}{\mathbf{i}(d-2p)}$$

On obtient donc :
si $d = 2k$ est pair :

$$X_{\text{Birk}} = X_{\text{lin}} + \mathbf{i}\,k(z\bar{z})^{k-1}a_{k,k}\Big(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}\Big) + \frac{1}{\mathbf{i}\,d}[B_{n_d},B_{n_0}] + \sum_{p=1}^{k-1}\frac{1}{\mathbf{i}(d-2p)}[B_{n_{d-p}},B_{n_p}],$$

si $d = 2k+1$ est impair :

$$X_{\text{Birk}} = X_{\text{lin}} + \frac{1}{\mathbf{i}\,d}[B_{n_d},B_{n_0}] + \sum_{p=1}^{k}\frac{1}{\mathbf{i}(d-2p)}[B_{n_{d-p}},B_{n_p}].$$

Il reste à calculer les crochets :

$$= -2d^2|a_{0d}|^2(z\bar{z})^{d-2}(d-1)(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$$
$$[B_{n_{d-p}},B_{n_p}] = -2(z\bar{z})^{d-2}|a_{d-p,p}|^2 d(d-1)(d-2p)(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}).$$

D'où le champ hamiltonien à l'ordre 2, si $d = 2k$ est pair :

$$X_{\text{Birk}} = X_{\text{lin}} + \mathbf{i}\,k(z\bar{z})^{k-1}a_{k,k}\Big(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}\Big) + \mathbf{i}\,2d(d-1)(z\bar{z})^{d-2}\Big(\sum_{p=0}^{k-1}|a_{d-p,p}|^2\Big)\Big(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}\Big).$$

et si $d = 2k+1$ est impair :

$$X_{\text{Birk}} = X_{\text{lin}} + 2\mathbf{i}\, d(d-1)(z\bar{z})^{d-2}\Big(\sum_{p=0}^{k} |a_{d-p,p}|^2\Big)\Big(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}\Big).$$

On en déduit alors les hamiltoniens suivants à l'ordre 2 :
si $d = 2k$ est pair :

$$H(z,\bar{z}) = z\bar{z} + (z\bar{z})^k a_{k,k} + (z\bar{z})^{d-1} d\Big(\sum_{p=0}^{k-1} |a_{d-p,p}|^2\Big) + \cdots$$

si $d = 2k+1$ est impair :

$$H(z,\bar{z}) = z\bar{z} + (z\bar{z})^{d-1} d\Big(\sum_{p=0}^{k} |a_{d-p,p}|^2\Big) + \cdots$$

On a retrouvé les résultats de Bertrand Schuman [46] sur les coefficients de Birkhoff.

9.5.1.3. Les résultats. — La forme élaguée et la forme royale semblent être égales à tous les ordres (vérifié jusqu'à l'ordre 6), ce qui correspond bien au fait que la forme normale de Birkhoff doit être unique.

À l'ordre 3, pour la composante $\dfrac{\partial}{\partial z}$ du champ :

$$\begin{aligned} &-6\,i z^2 \bar{z}\left(\left|{a_{21}}^2\right| + \left|{a_{30}}^2\right|\right) \\ &\qquad - 12i\Big(3|a_{30}|^4 + 22|a_{30}|^2|a_{21}|^2 + 3|a_{21}|^4 + 5\overline{a_{21}}^3 a_{30} + 5a_{21}^3\overline{a_{30}}\Big) z^3\bar{z}^2 \end{aligned}$$

9.5.1.4. Où l'on retrouve un théorème...— Rappelons qu'un hamiltonien est dit *isochrone* si toutes ses orbites sont périodiques et toutes de même période. Le théorème donné par Bertrand Schuman dans [46] est le suivant :

Théorème 9.5.1. — *Il n'existe pas de centre isochrone hamiltonien autre que dans le cas linéaire.*

Démonstration. — Considérons un hamiltonien de la forme $H_0 + H_1$ où $H_0(x,y) = x\partial_y - y\partial_x$ et H_1 est une perturbation homogène de degré d, comme précédemment. Le calcul précédent donne la forme normale de Birkhoff de ce hamiltonien. Si le hamiltonien est isochrone, la forme normale de Birkhoff doit être réduite à la partie linéaire.

On cherche donc les coefficients $a_{p,q}$ qui annulent les coefficients de Birkhoff $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$: dans le cas où $d = 2k$ est pair, les coefficients sont :

$$\mathscr{B}_1 = a_{k,k} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_2 = d\Big(\sum_{p=0}^{k-1} |a_{d-p,p}|^2\Big)$$

donc $\mathscr{B}_1 = 0$ et $\mathscr{B}_2 = 0$ implique que $a_{p,q} = 0$ pour tout (p,q) tel que $p+q = d$.

De même dans le cas où $d = 2k+1$ est impair, il n'y a que le coefficient $\mathscr{B}_1$, qui vaut :

$$d\Big(\sum_{p=0}^{k} |a_{d-p,p}|^2\Big)$$

et $\mathscr{B}_2 = 0$ implique aussi $a_{p,q} = 0$ pour tout (p,q) tel que $p+q = d$.

Donc la perturbation homogène H_1 est identiquement nulle. □

9.5.2. Avec un point fixe hyperbolique. — Si le hamiltonien est de la forme :

$$H(x,y) = xy + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$

où les coefficients $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$ sont réels, les équations de Hamilton dans le plan (x,y) donnent :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{21}x^2 - 2a_{12}xy - 3a_{03}y^2 \\ 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 \end{pmatrix}$$

9.5.2.1. Les résultats. — Ici encore, la forme royale et la forme élaguée sont égales à tous les ordres que nous avons calculés avec Maple. Voici les calculs aux ordres 2, 3, et 4.

Ordre 2 et 3 :

$$6x^2y(a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03})\frac{\partial}{\partial x} - 6xy^2(a_{03}a_{30} + a_{12}a_{21})\frac{\partial}{\partial y}$$

Ordre 4 et 5, composante $\dfrac{\partial}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} &6(a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03})yx^2 \\ &+ 12\big(3{a_{03}}^2{a_{30}}^2 + 5a_{03}{a_{21}}^3 + 21a_{03}a_{21}a_{30}a_{12} + 5{a_{12}}^3a_{30} + 3{a_{12}}^2{a_{21}}^2\big)x^3y^2 \end{aligned}$$

Ordre 4 et 5, composante $\dfrac{\partial}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} &-6(a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03})xy^2 \\ &- 12\big(3{a_{03}}^2{a_{30}}^2 + 5a_{03}{a_{21}}^3 + 21a_{03}a_{21}a_{30}a_{12} + 5{a_{12}}^3a_{30} + 3{a_{12}}^2{a_{21}}^2\big)y^3x^2 \end{aligned}$$

CHAPITRE 10

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette incursion dans le domaine des formes normales montre l'étendue des travaux qu'il y a encore à faire sur le sujet.

Bien sûr, un premier objectif sera de donner une écriture de la méthode de renormalisation à l'aide du calcul moulien ; puis d'appliquer le calcul moulien à la recherche et au calcul des formes normales d'équations différentielles à retard.

Ensuite les objets que sont les moules réclament eux aussi un traitement plus approfondi, bien que les ouvrages d'Écalle soient déjà prolifiques sur le thème.

Un aspect qui n'est malheureusement qu'esquissé dans cette thèse est le problème de *convergence* des formes normales ; là encore, les moules, grâce à l'arborification, fournissent un outil puissant pour étudier la convergence des séries donnant le changement de variables ou la forme normale elle-même. L'étape suivant la démonstration formelle du théorème de Birkhoff (formel ici) serait bien évidemment d'étudier la convergence de la forme normale de Birkhoff, ainsi que du changement de variables associé.

Par ailleurs, le chapitre présentant le calcul par ordinateur de certains moules, ainsi que le calcul des formes élaguée, royale et régale, et celle de Poincaré-Dulac n'est qu'un bref aperçu du travail qu'il faudrait faire pour développer des programmes de calcul systématiques de forme(s) normale(s) (y compris renormalisée(s)).

Enfin, remarquons que le cas d'un champ dont la partie linéaire est diagonale non identiquement nulle n'est pas systématique. Il serait donc également intéressant de pouvoir calculer des formes normales de champs dont la partie linéaire est quelconque, voire sans partie linéaire. La technique de Gaeta permet par exemple de calculer des formes normales pour un champ dont la partie linéaire est nilpotente (des exemples se trouvent dans les articles [27–29]).

Pour des champs dont la partie linéaire est nulle, on peut citer les travaux d'Emmanuel Paul [40] sur le sujet, ou de Mayer [38] ; c'est encore une tentative que nous n'avons pas pu mener à bout que d'essayer d'adapter le calcul moulien à ces techniques d'obtention de formes normales.

APPENDICE A

PROGRAMMES DE CALCUL

La feuille de calcul ci-après est écrite pour le logiciel Maple 13. Elle reprend le calcul des principaux moules vus dans la seconde partie. Elle donne aussi (dans la zone d'utilisation du programme) un outil de calcul efficace de différentes formes prénormales.

```
> restart;
```

Les mots sont des listes de multidegrés, ces derniers étant également des listes de longueur la dimension.

```
> with(combinat):
> with(Ore_algebra):
```

A.1. Définitions nécessaires pour le calcul de la forme élaguée

d'abord la liste des variables sous la forme [Dx,x]... et [comm,b] pour les constantescas d'un champ homogène de degré 3

```
> algebre:=diff_algebra([Dx,x],[Dy,y],[comm,a[40]],
[comm,a[31]], [comm,a[22]], [comm,a[13]],[comm,a[04]],
[comm,b[40]],[comm,b[31]],[comm,b[22]], [comm,b[13]],
[comm,b[04]]);
> p:=I*(a[31]*x^3+2*a[22]*x^2*y+3*b[31]*x*y^2
> + 4*b[40]*y^3)*Dx -I*(4*a[40]*x^3+ 3*a[31]*x^2*y+
2*a[22]*x*y^2+b[31]*y^3)*Dy;
> lambda:=[I,-I];
```

A.2. Programmes de calculs

```
> Procédure partoche renvoie la liste de toutes les
> décompositions du mot 'mot' en k mots distincts.
> partoche:=proc(mot,k)
> local r,A,resultat,s,u,L,j;
> r:=nops(mot):
> A:=composition(r,k):
> resultat:=[seq(x_n,n=1..nops(A))];
> for s from 1 to nops(A) do
> u:=0:
> L:=[]:
> for j from 1 to nops(A[s]) do
> L:=[op(L),mot[1+u..A[s][j]+u]]:
> u:=u+A[s][j]:
> od;
> resultat[s]:=L;
> od;
> return(resultat):
> end;
```

Norme d'un mot : renvoie une lettre de la forme [...] à convertir en mot (rajouter []) si besoin.

```
> norme:=proc(mot) local k:
```

```
> return add(mot[k],k=1..nops(mot))
> end;
```

Composition de deux moules M et N (dans cet ordre) sur le mot 'mot', M et N étant définis comme des procédures, 'mot' étant une liste [n1,n2,..,nr] où les ni sont des listes (multidegrés). Renvoie un scalaire.

```
> compomoule:=proc(M,N,mot)
> local S,j,P,k,mot_temp,prod_temp,l;S:=0;
> if nops(mot)=0 then apply(M,mot);
> else
> for j from 1 to nops(mot) do
> P:=partoche(mot,j):
> for k from 1 to nops(P) do
> mot_temp:=[];
> prod_temp:=1;
> for l from 1 to nops(P[k]) do
> mot_temp:=[op(mot_temp),norme(P[k][l])];
> prod_temp:=prod_temp*(apply(N,P[k][l]));
> od;
> S:=S+apply(M,mot_temp)*prod_temp;
> od;
> od;
> fi;
> return S;
> end;
```

A.2.1. Produit de mélange (shuffle). — Renvoie le battage de deux mots ; un même mot de ce battage peut apparaître plusieurs fois.

```
> melange:=proc(mot1,mot2)
> local resultat,l1,l2,i1,i2,mot1_temp,mot2_temp,
> resultat_temp1,   resultat_temp2, i, j;
> resultat:=[];
> l1:=nops(mot1);
> l2:=nops(mot2);
> if l1=0 then resultat:=mot2;
> elif l2=0 then resultat:=mot1;
> elif l1=1 then
> for i1 from 1 to l2-1 do
> resultat:= [op(resultat),[op(mot2[1..i1]),mot1[1],
op(mot2[i1+1..l2])]];
> od;
> resultat:= [op(resultat),[mot1[1],op(mot2)]];
> resultat:=[op(resultat),[op(mot2),mot1[1]]];
> elif l2=1 then
> for i2 from 1 to l1-1 do
> resultat:= [op(resultat),[op(mot1[1..i2]),mot2[1],
op(mot1[i2+1..l1])]];
> od;
> resultat:=[op(resultat),[mot2[1],op(mot1)]];
> resultat:=[op(resultat),[op(mot1),mot2[1]]];
> else
> mot1_temp:=mot1[2..l1];
> mot2_temp:=mot2[2..l2];
> resultat_temp1:=procname(mot1,mot2_temp);
> resultat_temp2:=procname(mot1_temp,mot2);
> for i from 1 to nops(resultat_temp1) do
> resultat_temp1:=subsop(i=[mot2[1],
> op(resultat_temp1[i])], resultat_temp1);
> od;
> for j from 1 to nops(resultat_temp2) do
> resultat_temp2:=subsop(j=[mot1[1],
> op(resultat_temp2[j])], resultat_temp2);
> od;
> resultat:=[op(resultat),op(resultat_temp1)];
> resultat:=[op(resultat),op(resultat_temp2)];
> fi;
> return resultat;
> end;
```

Procédure de vérification de l'alternalité d'un moule : calcule la somme du moule M sur tous les mots du battage de mot1 et mot2.

```
> verif:=proc(M,mot1,mot2)
> local resultat,S,r,i;
> resultat:=0;
> S:=melange(mot1,mot2);
> r:=nops(S);
> for i from 1 to r do
> resultat:=resultat+apply(M,S[i]);
> od;
> resultat:=simplify(resultat);
> return resultat;
> end;
```

Calcul des opérateurs homogènes à partir du champ donné, ainsi que des multidegrés. Renvoie les opérateurs Bn indexés par les multidegrés de l'alphabet

```
> op_homo:=proc(p,v)
> alphabet contiendra la liste des multidegrés
> local alphabet,operateurs,A,s,n,nvar,q,i,j,k,k1,r;
> A:={};
> alphabet:={};
> operateurs:=[];
> nvar:=nops(v);
> for i from 1 to nvar do
> q:=expand(diff(p,cat(D,op(i,v))));
> calcul du multidegré dans le cas d'un monôme
> if (q<>0 and type(q,monomial)) then n:=[];
> q:=q/op(i,v);
> for k1 from 1 to nvar do
> n:=[op(n),degree(q,op(k1,v))];
> od;
> n:=[n];
> #print('n',n);
> if (alphabet intersect {n})={} then
> a||op(n):=0;
> fi;
> a||op(n):=a||op(n)+q*op(i,v)*cat(D,op(i,v));
> alphabet:=alphabet union {n};
> operateurs:=[op(operateurs),[q*op(i,v)*cat(D,op(i,v)),
n]];
> calcul du multidegré dans le cas d'un polynôme
> elif q<>0 then
```

```
> q:=expand(q/op(i,v));
```

```
> #print('q',q);
> for j from 1 to nops(q) do
> r:=op(j,q);n:=[];
> for k from 1 to nvar do
> n:=[op(n),degree(r,op(k,v))];
> od;
> n:=[n];
> #print(r,n);
> if (alphabet intersect {n})={} then
> a||op(n):=0;
> fi;
> a||op(n):=a||op(n)+r*op(i,v)*cat(D,op(i,v));
> alphabet:=alphabet union {n};
> operateurs:=[op(operateurs),[r*op(i,v)
> *cat(D,op(i,v)), n]];
> od;



> fi;
> od;
> for s from 1 to nops(alphabet) do
> A:=A union {[a||op(op(s,alphabet)),op(s,alphabet)]};
> Bn(op(op(s,alphabet))):=a||op(op(s,alphabet));
> od;
> return alphabet;
> end;
```

A.2.2. Calcul de tous les mots de longueur donnée à partir d'un alphabet donné. — donner l'alphabet sous la forme d'un ensemble de listes de mots d'une lettre : { [[1,0,0]],[[-1,0,1]]...} pour des lettres (multidegrés) de $\mathbb{C}^3$ par exemple.

```
> tous_les_mots:=proc(alphabet,longueur)
> local touslesmots,mot,mot_temp,i,j;
> touslesmots:={};
> if longueur=1 then
> return alphabet;
> else
> mot:=[];
> mot_temp:=procname(alphabet,longueur-1);
> for i from 1 to nops(alphabet) do
> for j from 1 to nops(mot_temp) do
> mot:=[op(alphabet[i]),op(op(j,mot_temp))];
> touslesmots:=touslesmots union {mot};
> od;
> od;
> return touslesmots;
> fi;
> end;
```

A.2.3. Calcul des comoules Bn. — les Bn et l'alphabet doivent avoir été calculés. Pour un mot donné [[n1],[n2]...], renvoit l'opérateur composé Bn1(Bn2(...))

```
> comoule:=proc(mot)
> local mot_temp, comoule;
> if nops(mot)=1 then return Bn(op(mot));
> else
> mot_temp:=mot[2..nops(mot)];
> comoule:=skew_product(Bn(op([mot[1]])),
> procname(mot_temp),algebre);
> fi;
> return comoule;
> end;
```

A.2.4. Contraction des moules et comoules à un ordre donné. — les argument sont : moule (procédure), ordre (entier).

```
> contraction:=proc(moule,ordre)
> local l,temp,j,resultat;
> resultat:=0;
```

on suppose que alphabet a déjà été calculé par la procédure op_homo supra, ainsi que la définition des comoules Bn.

```
> for l from 1 to ordre do
> temp:=convert(tous_les_mots(alphabet,l),list);
> for j from 1 to nops(temp) do
> resultat:=resultat
> + apply(moule,temp[j])*apply(comoule,temp[j]);
> resultat:=expand(resultat);
> od;



> od;
> return resultat;

> end;
```

A.3. Exemples de moules, moules utiles

```
> ie:=proc(mot):
> if nops(mot)=1 and mot[1]<>0 then return 1;
> else return 0;
> fi:
> end;
```

A.3.1. Élément neutre pour la composition des moules. —

```
> Sam:=proc(mot)
> local i,j,sam,indice,omega,r,nu,produit,k;
```

A.3.2. Moule Sam$^{\bullet}$ **: n est le multi degré de C^nu, lambda le spectre de la partie linéaire. n doit être donné sous la forme d'une liste de listes [[n1],[n2],...] où n1,n2,... sont des éléments de Z^nu dont un élément au plus vaut -1.—** Calcul du mot omega=[n1*lambda,n2*lambda,...] correspondant

```
> r:=nops(mot);
> omega:=[];
> if r=0 then
> else
> nu:=nops(mot[1]);
> for i from 1 to r do
> omega:=[op(omega),add(op(j,mot[i]) *lambda[j],
j=1..nu)];
> od;
```

```
> fi;
> on regarde la longueur du mot :
> if r=0 then return 0;
> elif r=1 then
> if op(omega)=0 then return 1 else return 0 fi;
> si la longueur du mot est au moins 2 :
> else
> sam:=1:
> si tous les omega[k] qui composent le mot omega sont non nuls, alors
valeur de Sam :
> if product(omega[k],k=1..r)<>0
> then produit:=mul((omega[k],k=1..r));
> sam:=0;
> for k from 1 to r-1 do
> sam:= sam + ((-1)^(r-k)*omega[k])/((k-1)!*(r-k)!)
> + ((-1)^(r-k+1)*(add(omega[p],p=k..r)))
> /((r-k+1)!*(k-1)!);
> od;
> sam:=sam/produit;
> sinon, on regarde le premier omega[k] nul
et on note son indice dans 'indice':
> else
> indice:=1;
> for j from 1 to r while omega[j]<>0 do
> sam:=sam*(1/(j*omega[j]));
> indice:=j+1;
> od;
> puis on regarde si il y a un deuxième omega[k] nul :
> if ((indice+1)>r) then
> else
> for j from indice+1 to r  do
> if omega[j]=0 then sam:=0:
> break;
> else
> sinon valeur de sam
> sam:=sam*1/((j-indice)*omega[j]);
> fi;
> od;
> fi;
> sam:=(-1)^(r-indice)*sam;
> return sam;
> fi;
> fi;

> end;
```

moule Tram$^\bullet$ **: ce moule est obtenu par composition du moule** Sam$^\bullet$ **avec lui même. Le nombre de compositions nécessaire est égal à la longueur du mot sur lequel on cherche à évaluer** Tram$^\bullet$**.**

```
> Tram:=proc(mot)
> local omega,i,P,j,s,S,k,mot_temp,prod_temp,l;
```

> On regarde la longueur du mot : si longueur 0 (mot vide) alors on retourne 0 ; si longueur 1, alors Sam(mot).

```
> if nops(mot)=0 then return 0;
> elif nops(mot)=1 then return Sam(mot);
```

> Si la longueur du mot 'mot' est au moins 2, on calcule le omega (n.lambda) correspondant.

```
> else omega:=[];
> for i from 1 to nops(mot) do
> omega:=[op(omega),sum(mot[i][k1]
> *lambda[k1],k1=1..nops(mot[i]))];
> od;
```

> Puis si la norme de omega est non nulle (ie omega non résonant) on retourne 0 ;

```
> if norme(omega)<>0 then return 0;
> else
```

> sinon, pour un mot n=(n1,n2) de longueur 2 résonant, on retourne 0 si n1 et n2 sont résonants aussi, sinon on retourne Sam(mot) ;

```
> if nops(mot)=2 then
> if omega[1]=0 then return 0;
> else return Sam(mot);
> fi;
```

> Enfin pour un mot n=(n1,n2,...) de longueur au moins 3, si tous les ni sont résonants, on retourne 0, et sinon on utilise la formule Tram=Tram Sam sur un mot de longueur inférieure (voir formule de composition des moules).

```
> else
> if sum(omega[k2]^2,k2=1..nops(omega))=0 then return
0;
```

```
> else S:=0;
> for j from 1 to nops(mot)-1 do
> P:=partoche(mot,j);
> for k from 1 to nops(P) do
> mot_temp:=[];
> prod_temp:=1;
> for l from 1 to nops(P[k]) do
> mot_temp:=[op(mot_temp),norme(P[k][l])];
> prod_temp:=prod_temp*(Sam(P[k][l]));
> od;
> #print('mot_temp',mot_temp);
> S:=S+procname(mot_temp)*prod_temp;
> od;
> od;
> fi;

> fi;
> fi;
> fi;
> end;
```

A.3.3. Le moule T alternal. — Un exemple de moule alternal

```
> T:=proc(mot)
> local l,r,omega,resultat,nu,i,alpha;

> r:=nops(mot);
> omega:=[];
> if r=0 then resultat:=0; break;
> else
> nu:=nops(mot[1]);
> for i from 1 to r do

> omega:=[op(omega),add(op(j,mot[i])
> *lambda[j], j=1..nu)];
> od;


> fi;

> if r=0 then resultat:=0;
> elif r=1 then resultat:=1;
```

```
> else
> resultat:=1;
> for i from 1 to r-1 do
> alpha:=omega[i+1]-omega[i];
> if alpha=0 then resultat:=0; break;
> else
> resultat:=resultat*1/alpha;
> fi;
> od;
> return resultat;
> fi;
> end;
```

A.3.4. Moule Theta (symétral) de linéarisation d'un champ non résonant. — Exemple avec le moule Theta de linéarisation d'un champ non résonant. Ce moule est symétral.

```
> Theta:=proc(mot)
> local resultat,omega,nu,i,r,alpha;
> r:=nops(mot);
> omega:=[];
> if r=0 then resultat:=1;
> else
> nu:=nops(mot[1]);
> for i from 1 to r do
> omega:=[op(omega),add(op(j,mot[i])
> *lambda[j], j=1..nu)];
> od;
> fi;
> if r>0 then
> resultat:=1;
> alpha:=0;
> for i from 1 to r do
> alpha:=alpha+omega[i];
> if alpha=0 then print(i,resonant);
> else
> resultat:=resultat*1/alpha;
> fi;
> od;
> fi;
> resultat:=(-1)^r*resultat;
> return resultat;
> end;
```

Dérivation lan (nombre de omega_i non nuls d'un mot)

```
> lan:=proc(mot) local k,omega,i:
> omega:=[];
> for i from 1 to nops(mot) do
> omega:=[op(omega),sum(mot[i][k1]
> *lambda[k1], k1=1..nops(mot[i]))];
> od;
> lan(mot):=nops(mot);
> for k from 1 to nops(mot) do
> if omega[k]=0 then lan(mot):=lan(mot)-1:
> fi:
> od:
> lan(mot);
> end;
```

Calcul du moule de la transformation sous la forme prénormale royale, dépend de lan

```
> sray:=proc(mot,deriv) local omega,i,k1,k2,s,r;
> r:=nops(mot):
> if r=0 then s:=1:
> else
> omega:=[];
> for i from 1 to r do
> omega:=[op(omega),sum(mot[i][k3]
> *lambda[k3], k3=1..nops(mot[i]))];
> od;
> if r=1 and deriv(mot)=1 then
> s:=-1/norme(omega):
> else if norme(omega)<>0 then
> s:=0:
> for k1 from 1 to r-1 do
> s:=s +
> norme([op(1..k1,omega)])*sray([op(1..k1,mot)],deriv)
*seray([op(k1+1..r,mot)],deriv)+
> sray([op(1..k1-1,mot)],deriv)
> *seray([op(k1+1..r,mot)],deriv):
> od:
> s:=s+sray([op(1..r-1,mot)],deriv):
> s:=-(1/norme(omega))*s:
> else if norme(omega)=0 and deriv(mot)<>0 then
```

```
>  s:=0:
>  for k2 from 1 to r-1 do
>  s:=s +
>  deriv([op(1..k2,mot)])*sray([op(1..k2,mot)],deriv)
*seray([op(k2+1..r,mot)],deriv):


>  od:
>  s:=-s/deriv(mot):
>  else if deriv(mot)=0 then
>  s:=0:


>  fi:
>  fi:
>  fi:
>  fi:
>  fi:
>  sray(mot,deriv):=s;
>  end;
```

Calcul du moule inverse de la transformation précédente

```
>  seray:=proc(mot,deriv) local k:
>  seray(mot,deriv):=(-1)**nops(mot)
*sray([seq(op(nops(mot)-k,mot),k=0..nops(mot)-1)],deriv):
>  end;
```

Calcul du moule de la forme prénormale royale, dépend de lan

```
>  ray:=proc(mot,deriv) local k,r,l,omega,i:
>  l:=nops(mot):
>  omega:=[];
>  for i from 1 to l do
>  omega:=[op(omega),sum(mot[i][k1]
>  *lambda[k1], k1=1..nops(mot[i]))];
>  od;
>  if norme(omega)<>0 then r:=0:
>  else if l=1 then r:=1:
>  else
>  r:=0:
>  for k from 1 to l do
```

```
>  r:=r + norme([op(1..k,omega)])
>  *sray([op(1..k,mot)],deriv)
*seray([op(k+1..l,mot)],deriv) +
>  sray([op(1..k-1,mot)],deriv)
>  *seray([op(k+1..l,mot)],deriv):
>  od:
>  fi:
>  fi:
>  ray(mot,deriv):=(-1)^(l+1)*r;
>  end;
>  royale:=proc(mot)
>  return ray(mot,'lan');


>  end;
```

Moule de la correction

```
>  carr:=proc(mot) local i,j,omega;
>  if mot=NULL then carr(mot):=0:
>  elif nops(mot)=0 then carr(mot):=0:
>  else
>  omega:=[];
>  for j from 1 to nops(mot) do
>  omega:=[op(omega),sum(mot[j][k1]
>  *lambda[k1], k1=1..nops(mot[j]))];
>  od;
>  if nops(mot)=1 then if op(omega)<>0 then
carr(mot):=0:
>  else carr(mot):=1: fi:
>  else
>  if norme(omega)<>0 then carr(mot):=0:
>  elif member(0,{op(omega)})=true then carr(mot):=0:
>  else
>  carr(mot):=-carr([op(1,mot)+op(2,mot),
op(3..nops(mot),mot)]):
>  for i from 2 to nops(mot) do
>  carr(mot):=carr(mot)+carr([op(1,mot),
op(i+1..nops(mot),mot)])*carr([op(2..i,mot)]) od:
>  carr(mot):=simplify(carr(mot)/(op(1,omega))):
```

```
> fi: fi: fi:
> end;
```

A.4. Zone d'utilisation du calcul des formes prénormales

D'abord calculer les opérateurs homogènes et l'alphabet donnés par le champ de départ.

```
> alphabet:=op_homo(p,[x,y]);
> S:=contraction(Tram,4):
> S:=Ore_to_diff(S,f,algebre):
> S:=subs(b[30]=conjugate(a[30]),b[21]=conjugate(a[21]),b[12]=
conjugate(a[12]),b[03]=conjugate(a[03]),S):
> m1:=collect(expand(subs(x=z,y=conjugate(z),
simplify(op(1,op(1,P))))),[z,conjugate(z)],distributed);
```

LISTE DES SYMBOLES

$\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(A)$ Algèbre de Lie libre, page 70

$(\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle)_*$ Séries formelles non-commutatives sans terme constant, page 70

$\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ Séries entières formelles non-commutatives, page 66

$\mathbb{C}[[x]]$ Algèbre des séries entières formelles en $x_1,\ldots,x_\nu$, page 73

$\mathbb{K}\langle A\rangle$ Polynômes non-commutatifs sur A à coefficients $\mathbb{K}$, page 66

$\ell(\boldsymbol{a})$ longueur d'un mot, page 65

$\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(A)$ Ensemble des moules sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$, page 65

$\overset{<}{M^\bullet}$ Moule arborescent, page 79

$[M^\bullet]_{(\times n)}$ Produit n fois du moule $M^\bullet$, page 70

$\mathrm{Exp}M^\bullet$ Exponentielle du moule $M^\bullet$, page 70

$M^\bullet$ Moule, page 65

$\|\boldsymbol{a}\|$ Norme d'un mot, page 65

A Alphabet, page 65

A^* Ensemble des mots, page 65

A_r^* Mots de longueur r, page 65

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ADIMY, F. CRAUSTE, A. HALANAY, M. NEAMTU & D. OPRIS – « Stability of limit cycles in a pluripotent stem cell dynamics model », *Chaos, Solitons & Fractals* **27** (2006), no. 4, p. 1091 – 1107.

[2] V. I. ARNOLD – *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd éd., vol. 60, Springer, New York, 1997.

[3] V. ARNOLD – *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, 3ème édition en français, Éditions MIR, Librairie du Globe, 1996.

[4] V. ARNOLD, V. V. KOZLOV & A. I. NEISHTADT – *Dynamical systems III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1985.

[5] A. BAIDER – « Unique normal forms for vector fields and Hamiltonians », *J. Diff. Equations* **78** (1989), no. 1, p. 33–52.

[6] A. BAIDER & R. CHURCHILL – « Unique normal forms for planar vector fields », *Mathematische Zeitschrift* **199** (1988), no. 3, p. 303–310.

[7] V. BARGMANN – « On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform part I », *Comm. Pure Appl. Math* **14** (1961), no. 3, p. 187–214.

[8] A. BRJUNO – « An analytic form of differential equations », *Transactions of the Moscow Mathematical Society* **25** (1971), p. 119–262.

[9] J. CARR – *Applications of centre manifold theory*, Springer-Verlag, 1981.

[10] J. CRESSON – « Obstruction à la linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux », *Canadian Mathematical Bulletin* **45** (2002), no. 3, p. 355–363.

[11] J. CRESSON – « Calcul moulien », *Annales de la faculté des sciences de Toulouse* **18** (2009), no. 2, p. 307–395.

[12] J. CRESSON & J. RAISSY – « About the trimmed and the Poincaré-Dulac normal form of diffeomorphisms », Prépublications de l'IHES, 2006.

[13] J. CRESSON & B. SCHUMAN – « Formes normales et problème du centre symétrique », *C. R. Acad. Sci. Paris* **327** (1998), p. 581–584.

[14] O. DIEKMANN, S. VAN GILS, S. M. VERDUYN LUNEL & H.-O. WALTHER – *Delay equations : functional-, complex-, and nonlinear analysis*, Applied mathematical sciences, vol. v. 110, Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] H. DULAC – « Recherches sur les points singuliers des équations différentielles », *Journal de l'École Polytechnique* (1904).

[16] H. DULAC – « Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles », *Bulletin des sciences mathématiques* (1908).

[17] J. ECALLE – *Les fonctions résurgentes. Tome I, II et III*, Publications Mathématiques d'Orsay 81, vol. 5, Université de Paris-Sud Département de Mathématiques, Orsay, 1981-1985, Les algèbres de fonctions résurgentes. [The algebras of resurgent functions], With an English foreword.

[18] J. ECALLE – « Singularités non abordables par la géométrie », *Ann. Inst. Fourier* **42** (1992), no. 1-2, p. 73–164.

[19] J. ECALLE – « Six lectures on transseries, analysable functions and the constructive proof of Dulac's conjecture », in *Bifurcations and periodic orbits of vector fields (Montreal, PQ, 1992)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 408, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, p. 75–184.

[20] J. ECALLE & B. VALLET – « Prenormalization, correction and linearization of resonant vector fields or diffeomorphisms », Prépublications du département de mathématiques de l'université Paris-Sud-Orsay, 1995.

[21] J. ECALLE & B. VALLET – « Correction and linearization of resonant vector fields and diffeormorphisms », *Mathematische Zeitschrift* **228** (1998), p. 249–318.

[22] J. ECALLE & B. VALLET – « The arborification-coarborification transform : analytic, combinatorial, and algebraic aspects », *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 6* **13** (2004), no. 4, p. 575–657.

[23] C. ELPHICK, E. TIRAPEGUI, M. E. BRACHET, P. COULLET & G. IOOSS – « A simple global characterization for normal forms of singular vector fields », *Phys. D* **29** (1987), no. 1-2, p. 95–127.

[24] L. ELSGOLTS – *Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments*, Holden-Day, San Francisco, 1966.

[25] T. FARIA & L. T. MAGALHÃES – « Normal forms for retarded functional-differential equations with parameters and applications to Hopf bifurcation », *J. Differential Equations* **122** (1995), no. 2, p. 181–200.

[26] J.-P. FRANÇOISE – *Géométrie analytique et systèmes dynamiques*, Presses Universitaires de France, 1995.

[27] G. GAETA – « Poincaré renormalized forms », *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **70** (1999), no. 6, p. 461–514.

[28] G. GAETA – « Algorithmic reduction of Poincaré-Dulac normal forms and lie algebraic structure », *Letters in Mathematical Physics* **57** (2001), no. 1, p. 41–60.

[29] G. GAETA – « Poincaré normal and renormalized forms », *Acta Applicandae Mathematicae* **70** (2002), no. 1-3, p. 113–131.

[30] A. GIORGILLI & U. LOCATELLI – « On classical series expansions for quasi-periodic motions », *Mathematical Physics Electronic Journal* **3** (1997).

[31] J. K. HALE, L. T. MAGALHÃES & W. M. OLIVA – *Dynamics in infinite dimensions*, 2nd éd., Applied mathematical sciences, vol. v. 47, Springer, New York, 2002.

[32] J. K. HALE & S. M. VERDUYN LUNEL – *Introduction to functional differential equations*, Applied mathematical sciences, vol. v. 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[33] G. IOOSS & M. ADELMEYER – *Topics in bifurcation theory and applications*, World Scientific, 1992.

[34] N. JACOBSON – *Lie algebras*, 2nd éd., Dover Publications, 1979.

[35] A. N. KOLMOGOROV – *Preservation of conditionally periodic movements under small change in the Hamilton function*, vol. 98, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1954.

[36] C.-M. MARLE – *Systèmes dynamiques - une introduction*, Ellipses, 2003.

[37] J. MARTINET – « Normalisation des champs de vecteurs holomorphes », *Séminaire Bourbaki* **564** (1980), no. 1, p. 55–70.

[38] S. MAYER, J. SCHEURLE & S. WALCHER – « Practical normal form computations for vector fields », *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **84** (2004), no. 7, p. 472–482.

[39] J. PALIS & W. D. MELO – *Geometric theory of dynamical systems : an introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[40] E. PAUL – « Formal normal forms for the perturbations of a quasi-homogeneous Hamiltonian vector field », *J. Dynam. Control Systems* **10** (2004), no. 4, p. 545–575.

[41] L. PERKO – *Differential equations and dynamical systems*, 3rd ed éd., vol. 7, Springer, New York, 2001.

[42] H. POINCARÉ – *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, 1899.

[43] R. PÉREZ-MARCO – « Convergence or generic divergence of the Birkhoff normal form », *Annals of Mathematics* **157** (2003), p. 557–574.

[44] C. REUTENAUER – *Free Lie algebras*, New series 7, London Math. Soc. Monographs, 1993.

[45] D. SAUZIN – « Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials », in *Renormalization and Galois Theories* (A. Connes, F. Fauvet & J.-P. Ramis, éds.), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 15, European Mathematical Society, 2009, p. 83–163.

[46] B. SCHUMAN – « Sur la forme normale de Birkhoff et les centres isochrones », *C. R. Acad. Sci. Paris* **322** (1996), p. 21–24.

[47] J.-P. SERRE – *Lie algebras and Lie groups*, 2nd éd., Springer, 2006.

[48] L. P. SHILNIKOV – *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*, vol. v. 5, World Scientific, New Jersey, 2001.

[49] C. L. SIEGEL & J. MOSER – *Lectures on celestial mechanics*, Springer, Berlin, 1995.

[50] L. STOLOVITCH – « Progress in normal form theory », *Nonlinearity* **22** (2009), no. 7, p. R77–R99.

[51] B. VALLET – « Géométrie analytique des champs de vecteurs et des difféomorphismes », Thèse, Université d'Orsay, 1996.

[52] S. M. VERDUYN LUNEL – « Spectral theory for delay equations », in *Systems, approximation, singular integral operators, and related topics (Bordeaux, 2000)*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 465–507.

[53] S. WIGGINS – *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 2nd éd., vol. 2, Springer, New York, 2003.