HAL
open science

Modélisation et simulation de la calorimétrie modulée inductive

P. Schetelat

To cite this version:

P. Schetelat. Modélisation et simulation de la calorimétrie modulée inductive. Mécanique [physics.med-ph]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2009. Français. NNT : . tel-00521865

HAL Id: tel-00521865

https://theses.hal.science/tel-00521865v1

Submitted on 28 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque
|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Institut Polytechnique de Grenoble

Spécialité : MECANIQUE DES FLUIDES ENERGETIQUE, PROCEDES

préparée au laboratoire ***SCIENCE ET INGENIERIE DES MATERIAUX ET PROCEDES***

dans le cadre de **l'Ecole Doctorale** ***INGENIERIE - MATERIAUX, MECANIQUE, ENVIRONNEMENT, ENERGETIQUE, PROCEDES, PRODUCTION***

présentée et soutenue publiquement

par

Pascal SCHETELAT

le 15 mai 2009

Modélisation et simulation de la calorimétrie modulée inductive.

DIRECTEUR DE THESE

Jacqueline ETAY

JURY

M.	Philipe MARTY	, Président
M.	Guy DEFAYE	, Rapporteur
M.	Virgiliu FIRETEANU	, Rapporteur
M.	Jacqueline ETAY	, Directeur de thèse
M.	Rainer WUNDERLICH	, Examinateur

Never make a calculation until you know the answer.

John A. Wheeler and Edwin F. Taylor

Remerciements

Une thèse ce n'est pas uniquement une soutenance bien arrosée et un mémoire qui finira par prendre la poussière sur une étagère. Ce sont trois ans de vie dédiés à un sujet, un laboratoire, des collègues, des amis et surtout des heures innombrables à se casser la tête pour le pur plaisir de faire de la Science. Il est légitime de remercier tous ceux qui ont donné naissance à cette aventure et qui l'ont fait vivre.

Avant toute chose, une thèse commence avec un directeur de thèse, en l'occurrence une directrice, Jacqueline Etay. Merci à elle pour m'avoir fait confiance et pour sa patience à mon égard. C'est également le "thésard d'avant", le détenteur des mille et un secrets qui vous initie dans la voie du doctorant. Benoit Bardet, merci à lui pour m'avoir guidé dans mes premiers pas sur la route de la lévitation, mais plus généralement au laboratoire. Puis vient celui qui détient toutes les réponses dès qu'il y a simulation numérique dans l'énoncé (et à beaucoup d'autres questions aussi). Merci à Yves Delannoy, pour sa disponibilité et sa bonne humeur, sans parler de son secours inestimable sur les serveurs et son désormais célèbre "cours d'introduction à Fluent" en cinq heures top chrono. Dans la grande équipe qu'est le laboratoire, il est impossible d'oublier l'équipe technique pour leur travail et leurs conseils. Merci à Christian, Patrick et Denis. Ce sont eux qui gardent les clefs de la boutique et qui la font tourner. Puis vient celle sans qui le travail au laboratoire deviendrait rapidement un enfer, noyés que nous serions par les problèmes matériels et pratiques. Pascale Esteoule, merci pour sa patience, sa gentillesse et sa bonne humeur inaltérable. Enfin Roland Ernst et Mikael Dumont avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler et plus généralement à discuter.

Mais cette thèse n'aurait pas été ce qu'elle est sans les amis avec qui j'ai partagé trois très belles années. Julien Roudeau pour nos longs débats sur les sphères qui tournent et nos parties de squash. Mickael Beaudhuin pour nos échanges interminables sur la diérence entre théorie et pratique, entre simulation numérique et réalisation expérimentale. Je te tire mon chapeau pour m'avoir supporté tout ce temps dans le bureau. Emilien Sauvage, pour avoir refait le monde plusieurs fois avec moi, pour nos discussions scientiques en général, mais en particulier : les harmoniques sphériques, les algorithmes génétiques, la singularité, la réponse à la vie, l'univers et tout le reste.

J'ai une pensé particulière pour Anne Noeppel. Pour son aide, sa patience et sa rigueur, mais surtout pour nos échanges ainsi que son soutien dans une période qui n'a pas toujours été facile.

Enfin, et surtout, je remercie ma famille pour m'avoir soutenu pendant toutes ces années d'études, dans des sujets qui ont pu parfois leur sembler obscurs. Papa, Maman, David et Monika, merci pour tout.

Table des matières

1 Contextes **21**

1.1 Contexte européen 21

1.2 Contexte scientifique 24

1.2.1 Techniques de mesure utilisant la lévitation 24

1.2.2 Calorimétrie modulée 27

1.2.3 La calorimétrie modulée inductive 29

2 Lévitation stationnaire **33**

2.1 Notations 33

2.2 Électromagnétisme 35

2.2.1 Description du système 35

2.2.2 Equations fondamentales et approximations 36

2.2.3 Champ magnétique sans charge 39

2.2.4 Champ magnétique avec charge 42

2.2.5 Conclusion 48

2.3 Mécanique 52

2.3.1 Description 52

2.3.2 Equations fondamentales : 52

2.3.3 Lévitation 53

2.3.4 Oscillation 54
2.3.5 Rotation 55
2.4 Mécanique des fluides 58
2.4.1 Description 58
2.4.2 Équations fondamentales 58
2.4.3 Brassage électromagnétique 59
2.4.4 Convection thermo-gravitaire 60
2.4.5 Convection thermo-centrifuge 60
2.4.6 Effet Marangoni 60
2.4.7 Oscillation de surface 62
2.4.8 Freinage avec un champ magnétique permanent et uniforme 63
2.4.9 Conclusion 64
2.5 Thermique 65
2.5.1 Description du système 65
2.5.2 Équations fondamentales et hypothèses 67
2.5.3 Transferts externes 68
2.5.4 Transferts internes 71
2.5.5 Ordre de grandeur de la température 73
2.6 Conclusion 73

3 Simulations préliminaires 77

3.1 Outils numériques 77
3.1.1 Présentation des outils numériques 77
3.2 Simulations 78
3.2.1 Inducteur Tempus 80
3.2.2 Inducteurs 3D 88

4 Expérience à l'ESRF **97**

4.1 Étude préliminaire : 98

4.1.1 Équipement 98

4.1.2 Échantillon et traceurs 100

4.1.3 Inducteur 102

4.2 Résultats 108

4.3 Conclusions et perspectives 109

5 Calorimétrie **111**

5.1 Transferts instationnaires 112

5.1.1 Équations fondamentales 112

5.1.2 Grandeurs caractéristiques 113

5.2 Calorimétrie inductive 118

5.2.1 Procédure expérimentale 118

5.2.2 Traitement des mesures 119

5.2.3 Conclusion 121

5.3 Approche système 122

5.3.1 Principe 123

5.3.2 Influence de la convection 153

5.4 Conclusion 163

Bibliographie **171**

A Propriétés physiques **179**

B Calcul des forces électromagnétiques dues à un inducteur monophasé **181**

B.1 Champ magnétique 181

B.2 Densité de courant induit 182

B.3 Forces électromagnétiques 183
B.4 Puissance dans la charge 183
B.5 Equation de l'induction 184

Table des figures

1.1 Nombre de réponses classant l'une des propriétés comme étant de haute importance. Résultats d'une étude réalisée auprès des industries européennes de production de métaux au sujet de l'importance des propriétés thermophysiques des matériaux et des alliages à l'état liquide, extrait de Fecht et Wunderlich (2001) 22

1.2 Mesures de la viscosité du fer pur en fonction de la température (voir Tanaka *et al.* (1996)). 23

1.3 Airbus A-300 zéro-G (a), Fusée sonde TEXUS (b), Station Spatiale Internationale (c) 24

1.4 Material Science Laboratory (MSL) (a), Electro Magnetic Levitator (EML) (b) Voss *et al.* (2007) 25

1.5 Aubes de Turbine en TiAl. Photo (a). Simulation de la solidification (Voss *et al.*, 2007) (b) 26

1.6 Inducteur Tempus. (a) Vue du dessus. (b) En coupe.(Lohoefer et Piller, 2001) 26

1.7 Mesure du courant inducteur et de la température.(Wunderlich *et al.*, 1997) 31

2.1 Systèmes de coordonnées (cartésien et sphérique) et notations. 34

2.2 Aspect des lignes de champ. (a) Configuration dipolaire et (b) quadripolaire. 40

2.3 Vue schématique du champ magnétique dans un inducteur quadripolaire (gravité terrestre) 41

2.4 Interprétation géométrique de la pénétration des lignes de champ 47

2.5 Représentation schématique de la structure des écoulements générés par le brassage électromagnétique. La goutte est brassée par un champ dipolaire en microgravité (à gauche), par un champ quadripolaire sur terre (à droite). . . 59

2.6 Retour à une forme d'équilibre sous l'effet de la seule tension superficielle. . . 62

2.7 Mode d'oscillation 2. 66

2.8 Comparaison des transferts de chaleur externes. (a) Flux totaux de chaleur évacués. (b) Coefficients de transfert globaux. 70

3.1 Couplages physiques et hypothèses 80

3.2 Puissance Joule normalisée par χ_0 pour différentes valeurs du paramètre d'écran électromagnétique. Les valeurs sont prises (a) à la surface et (b) sur le plan équatorial 82

3.3 Rapport $\frac{\chi_{max}V}{P}$ 82

3.4 Fonction de courant de l'écoulement. En haut, variation de la viscosité. En bas, variation de l'intensité du champ permanent freinant. (a) $\nu = 100\nu_0$. (b) $\nu = 75\nu_0$. (c) $\nu = 40\nu_0$. (d) $\nu = 20\nu_0$. (e) $B_{frein} = 1,2T$. (f) $B_{frein} = 0,8T$. (g) $B_{frein} = 0,6T$. (h) $B_{frein} = 0,5T$. Echelle absolue : $min = 0\,kg.s^{-1}$ $max = 4.6\,10^{-3}\,kg.s^{-1}$ 84

3.5 Vitesse normalisée par U_A. A gauche Re_A varie de 16 à 80 (variation de la viscosité (a), (c), (e)). A droite un champ magnétique statique B_{frein} freine l'écoulement ((b), (d), (f)). Il varie de 0,5 à 1,2 T. 85

3.6 Températures normalisées par Θ_0 pour différentes valeurs du paramètre d'écran électromagnétique. 87

3.7 Carte de température normalisée par Θ_0 pour des échantillons brassés en fonction de la viscosité. (a) Solide (b)$\nu = 100\nu_0$. (c) $\nu = 75\nu_0$. (d) $\nu = 40\nu_0$. (e) $\nu = 20\nu_0$. 88

3.8 Températures normalisées par Θ_0 (équation 2.107 page 71). A gauche pour Re_A varie de 16 à 80 (variation de la viscosité). A droite un champ magnétique statique B_{frein} freine l'écoulement. Il varie de 0,5 à 1,2 T.Vitesse normalisée par U_A. 89

3.9 Comparaison de la densité de courant à la surface de la charge ($A.m^{-2}$). Code Lohoefer (a). Comsol (b). 91

3.10 Comparaison des cartes de densité de couple à la surface de la charge. Gauche : Code Lohoefer. Droite : Comsol. 93

3.11 Exemple de visualisation. Projection orthographique (a) projection de mercator (planisphère) (b) projection stéréographique de l'hémisphère nord (c) et sud (d) 94

3.12 Projections stereographiques des composantes de la densité de couple (code Lohofer) 95

4.1 Schéma de principe de la visualisation par tomographie 98

4.2 Schéma de l'enceinte 99

4.3 Photographie du générateur (en orange) 101

4.4 Test préliminaire : visualisation des particules de carbures de Tungsten dans des échantillons d'aluminium. (a) Sans particules. (b) Avec particules (points blancs) 102

4.5 Contraintes géométriques : alignement optique 102

4.6 Géométrie des inducteurs. (a) et (c) ESRF 2007. (b) et (d) ESRF 2008. (a) et (b) Projection orthographique. (c) et (d) Coupe dans le plan X-Z 104

4.7 Caractéristiques des inducteurs. (a) Position. (b) Couple. (c) Puissance Joule. (d) Fréquence d'oscillation 105

4.8 Induction dans l'échantillon (Al) pour l'inducteur ESRF 2007 ($I_0 = 500A$). A gauche : hémisphère nord. A droite : hémisphère sud. 106

4.9 Induction dans l'échantillon (Ni) pour l'inducteur ESRF 2008 ($I_0 = 500A$). A gauche : hémisphère nord. A droite : hémisphère sud. 107

4.10 (a) Inducteur et échantillon lévité à l'air libre. (b) Inducteur dans l'enceinte. 108

4.11 Suivi des particules 109

4.12 Contraste pour deux échantillons de nickel. Le taux d'ensemencement de (a) est inférieur à celui de (b). (Les taches sombres dans les échantillons sont des poches d'air). 110

5.1 Comportements caractéristiques du rapport $\frac{\|\tilde{T}\|}{\|\tilde{P}\|}$ en fonction de fréquence de modulation ω_2 de la puissance Joule dissipée dans la charge. 117

5.2 Schéma de la mesure de température et de puissance. 118

5.3 Simulation d'une expérience de calorimétrie modulée pour des échantillons solides. Les series de points BC1 et BC2 correspondent au choix de la condition limite de rayonnement, respectivement linéarisé et non-linéarisé (voirSchetelat et Etay (2008)) 122

5.4 Fonction de transfert. A gauche : Re_A varie de 12 à 80. A droite : B_{frein} varie de 0,5 T à 1,2T 159

5.5 Fonction de transfert normalisée. A gauche : Re_A varie de 12 à 80. A droite : B_{frein} varie de 0,5 T à 1,2T 160

5.6 Fréquences naturelles des fonctions de transfert pour les cas liquides en fonction du nombre de Reynolds (variation de la viscosité). Les valeurs de λ_0 sont les ordonnées à l'origine des droites d'interpolation. 163

Liste des tableaux

1.1 Récapitulatif des principes de mesure des propriétés thermophysiques mesurées par les dispositifs de lévitation électromagnétique (voir Etay *et al.* (2004)). . 27

1.2 Comparaison de la calorimétrie classique et de la calorimétrie modulée . . . 28

2.1 Dimensions de l'inducteur TEMPUS 41

2.2 Gamme de valeurs considérées pour les paramètres d'entrée 49

2.3 Champ magnétique caractéristique (T) 50

2.4 Grandeurs caractéristiques du problème en fonction du champ magnétique . 51

2.5 Nombres adimensionnels 65

2.6 Comparaison des sources de la convection 66

2.7 Grandeurs caractéristiques associées à la thermique. Les propriétés des gaz sont prise à 300K. Le Grashof est calculé pour un échantillon à 2000K. . . . 74

3.1 Propriétés et paramètres physiques des simulations 81

3.2 Paramètres numériques des simulations 81

3.3 Valeurs des fréquences vortex (voir équation 2.75 page 58) en fonction du champ magnétique de freinage 86

3.4 Valeurs des fréquences vortex en fonction de la viscosité 86

3.5 Paramètres des simulations 91

3.6 Extrema des cartes de courant 91

3.7 Extrema des cartes de couples 92

3.8 Force et couple total sur la charge 92

4.1 Spécifications de la ligne ID15 à l'ESRF 99

4.2 Propriétés des matériaux sélectionnés 101

5.1 Régimes thermiques caractéristiques 116

5.2 Temps caractéristiques (ordre de grandeur pour un échantillon de TiAl de 4 mm de rayon à 2000 K) 117

5.3 Paramètres des SBPA (temps total du signal de 15 s) 155

5.4 Ordre des fonctions de transferts. 155

5.5 Fréquences caractéristiques mesurées par identification 161

A.1 Propriétés physiques des liquides (Eustathopoulos *et al.*, 1999; IIda et Gutherie, 1988) 179

A.2 Propriétés physiques des gaz 180

Liste des symboles

Lettres Romaines

Symbole	Grandeur	Unité
A	Surface de l'échantillon	m^2
$\mathbf{A}$	Potentiel vecteur magnétique	T
A_p, A_e	Dénominateur de la fonction de transfert discrète	
B_p, B_e	Numérateur de la fonction de transfert discrète	$K.W^{-1}$
Bi	Nombre de Biot	
$\mathbf{B}$	Vecteur champ magnétique	T
$B_0 = \mu_0 I_0 G$	Champ magnétique caractéristique	T
C	Couple	$N.m$
c	Densité surfacique de couple	$N.m^{-1}$
C_p	Capacité calorifique totale	$J.K^{-1}$
c_p	Capacité calorifique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\mathcal{D}$	Domaine de définition sur $\mathbb{R}^3$	
$\mathbf{dB}$	Différentielle du flux de champ magnétique	T
$\mathbf{dl}$	Elément de longueur curviligne infinitésimal	m
dt	Pas de temps numérique	s
dx	Longueur caractéristique de maille	m
f	Fonction de modulation	
f_{vortex}	Fréquence vortex	Hz
$\mathbf{F}$	Vecteur force volumique	$N.m^{-3}$
F_0	Force volumique électromagnetique	$N.m^{-3}$
G	Facteur géometrique électromagnétique	m
g	Accelération de la gravité	$m.s^{-2}$

Symbole	Grandeur	Unité
g_e	Fraction volumique du domaine équatorial Ω_e	
h_{int}	Coefficient de transfert global interne	$W\,K^{-1}$
h_{ext}	Coefficient de transfert global externe	$W\,K^{-1}$
H_p	Fonction de transfert de Ω_p	$K.W^{-1}$
H_e	Fonction de transfert de Ω_e	$K.W^{-1}$
I	Courant inducteur	A
I_0	Amplitude du courant inducteur	A
i	Variable complexe	
$\overline{\overline{Id}}$	Matrice identité	
$\mathbf{j}$	Vecteur densité de courant	$A.m^{-2}.s^{-1}$
$\overline{\overline{\mathbf{J}}}$	Matrice Jacobienne de la résultante des forces sur l'échantillon	$N.m^{-1}$
k	Paramètre de la SBPA	
k_i	valeurs propres de $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$	$N.m^{-1}$
L	Taille caractéristique de l'inducteur	m
L_{tot}	Longueur totale de l'inducteur	m
L_H	Hauteur de l'inducteur	m
m	Masse de l'échantillon	kg
n	Numéro de l"itération	
N	Longueur de registre	
N_{spire}	Nombre de spires de l'inducteur	
P	Puissance Joule totale	W
P_{atm}	Pression atmosphérique	Pa
P_m	Pression magnétique	Pa
P_f	Pression dans le fluide	Pa
p	Variable de la transformée de Laplace	s^{-1}
r	Coordonnée radiale	m
R	Rayon de l'échantillon	m
R_i	Rayon de la $i^{ème}$ spire de l'inducteur	m
R_ω	Paramètre d'écran électromagnétique	
s_e	Fraction surfacique du domaine équatorial	
T	Température dans l'échantillon	K
T_0	Température ambiente	K

Symbole	Grandeur	Unité
T_e	Température équatoriale	K
T_p	Température polaire	K
$\bar{T}_{surf}$	Température radiative équivalente	K
t	Temps	s
t_e	Période d'échantillonage	s
U_A	Vitesse d'Alfvén	$m.s^{-1}$
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
V	Volume	m^3
z^{-1}	Variable de la transformée en Z	

Lettres Grecques

α	Amplitude relative de modulation	
α_{th}	Diffusivité thermique	
β	Dilatabilité thermique	K^{-1}
ϵ	Emissivité hémisphérique totale	
η	Viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
δ	Epaisseur de peau électromagnétique	m
ζ	Facteur géométrique thermique	
ϕ	Flux de chaleur	$W.m^{-2}$
Φ	Puissance	W
γ	Tension de surface	$J.m^{-2}$
$\Gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial T}$	Coefficient thermique de la tension de surface	$J.m^{-2}.K^{-1}$
κ_{th}	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
λ_i	Fréquence propre relative aux transferts thermiques	s^{-1}
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$m\,s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	$m^2\,s^{-1}$
π_i	$i^{ème}$ pôle d'une fonction de transfert discrète	$kg.m.A^{-2}.s^{-2}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	$W.m^{-2}.K^{-4}$
σ_{el}	Conductivité électrique	$\Omega^{-1}.m^{-1}$

θ	colatitude	rad
Θ_0	Ecart de température interne lié à la diffusivité thermique	K
ψ	Azimut	rad
χ	Densité de puissance Joule	$W.m^{-3}$
χ_0	Densité de puissance Joule caractéristique	$W.m^{-3}$
ω_1	Pulsation du champ électromagnétique	$rad.s^{-1}$
ω_2	Pulsation de modulation	$rad.s^{-1}$
ω_0	Pulsation de modulation optimale	$rad.s^{-1}$

Nombres adimmensionnels

B_m	Nombre de Bond magnétique	$B_0^2 R / (2\mu_0\gamma)$
Bi	Nombre de Biot	h_{ext}/h_{int}
$Fo_{maillle}$	Nombre de Fourier de maille	$\alpha_{th} dt/dx^2$
Gr	Grashof	$g\beta (T - T_\infty) / (2\mu_0\rho\nu^2)$
Gr_{rot}	Grashof de rotation	$R\Omega^2\beta (T - T_\infty) / (2\mu_0\rho\nu^2)$
Gr_m	Grashof magnétique	$B_0^2 R^3 / (2\mu_0\rho\nu^2)$
Ha	Nombre de Hartmann	$\sqrt{\sigma_{el} B_{frein}^2 R^2 / (\rho\nu)}$
Nu	Nusselt	$hR/\kappa_{th,gaz}$
Pe	Péclet	UR/α_{th}
Pe_{maille}	Péclet de maille	Udx/α_{th}
Pr	Prandtl	ν/α_{th}
Re	Reynolds	UR/ν
Re_m	Reynolds magnétique	$UR\sigma_{el}$
Re_{maille}	Reynolds de maille	Udx/ν
R_ω	Paramètre d'écran	$\mu_0\sigma_{el}\omega_1 R$

Introduction

L'outil numérique a connu un développement sans précédent dans la recherche comme dans l'industrie. Son utilisation était initialement coûteuse et dès lors réservée à des domaines où l'approche expérimentale était impossible. Du fait de l'amélioration des méthodes numériques, de leur démocratisation dans les cursus scolaires et surtout de la considérable augmentation des capacités de calcul brut, cet outil est devenu peu onéreux et facile d'accès.

Que ce soit pour élaborer un nouveau procédé, un nouveau matériau ou un nouveau produit, le passage à l'expérimentation n'intervient plus que comme une étape de validation, les dimensionnements et optimisations préliminaires étant souvent réalisées grâce à la simulation numérique, bien moins chère qu'un procédé pilote ou que l'élaboration d'un prototype.

L'enthousiasme entourant ces nouvelles techniques a tendance à faire oublier leurs limitations intrinsèques. Outre des contraintes purement techniques (nombre de mailles et pas de temps limités par la mémoire et la puissance des stations de calcul), un résultat de simulation ne fera jamais autre chose que restituer (plus ou moins bien) la physique contenue dans les modèles qui l'ont produit. De même, ces résultats n'auront jamais plus de pertinence que celle des propriétés physiques utilisées comme paramètres d'entrée.

En partant de ce constat, l'optimisation d'un procédé grâce à la simulation pose un problème nouveau. Contrairement à des tests réalisés sur prototype, les résultats obtenus par simulation numérique dépendent de la connaissance a priori de l'expérimentateur. Ce problème peut devenir particulièrement ardu lorsque l'on travaille avec des matériaux nouveaux possédant des propriétés physiques mal connues, ou pire, lorsque les conditions d'utilisation de ces matériaux sont extrêmes (température, pression, pureté, etc). Lorsque l'application des techniques d'analyses classiques est impossible dans de telles conditions, il est nécessaire d'en inventer de nouvelles.

Cette problématique apparaît clairement dans les procédés d'élaboration métallurgique. Le

développement d'alliages spécifiques exige à la fois une bonne connaissance de leurs propriétés en phase liquide à très haute température ainsi que des compositions très précises, exemptes de contamination (oxydes, éléments non désirés, etc). La grande réactivité de ces alliages en phase liquide se traduit par souvent l'interdiction de tout contact avec un creuset.

Comment analyser un alliage liquide quand il est impossible de le manipuler ? La lévitation électromagnétique apporte une réponse technique à ce problème (Okress *et al.*, 1952). En utilisant les particularités de l'induction (création de forces de Laplace, chauffage par effet Joule), il devient possible d'interagir avec un échantillon liquide sans contact matériel et de rendre possible une vaste gamme d'analyse (Egry *et al.*, 2001). Néanmoins, la plupart de ces techniques d'analyse requièrent également une utilisation en condition de microgravité (Hibiya et Egry, 2005). Bien que techniquement réalisable (via l'utilisation de vols paraboliques, fusées sondes ou grâce à la station spatiale internationale) la microgravité est particulièrement coûteuse à obtenir. Un tel coût se doit d'être justifié par la fiabilité des mesures réalisée avec ces grands instruments. Or cette fiabilité est loin d'être établie. Comment s'assurer de la qualité de mesures de propriétés physiques dont il n'existe pas de réference ?

L'outil numérique pourrait apporter une réponse à cette question. S'il est possible de simuler de manière pertinente le déroulement d'une analyse en microgravité, alors il devient possible de comparer les propriétés attribuées (entrées de la simulation) aux propriétés déterminées par l'expérience simulée. Une telle démarche permettrait l'évaluation objective de ces techniques.

Le propos de cette thèse est l'étude de la mesure calorimétrique réalisée à l'aide de la lévitation électromagnétique en microgravité. Ses buts sont :

- Evaluer la capacité des techniques actuelles à réaliser des mesures de capacité calorifique et de conductivité thermique sur des échantillons liquides, sièges de convection.
- Le cas échéant, proposer de nouvelles approches pour rendre ces mesures possibles.

  Ces but sont déclinés en sous objectifs :
  - Discerner les phénomènes physiques qu'il est nécessaire de prendre en compte pour simuler une expérience de calorimétrie modulée.
  - Produire des résultats à partir des modèles choisis afin de s'assurer de la pertinence des simulations.
  - Permettre de valider ces modèles numériques visualiser l'écoulement
  - Utiliser ces modèles conjointement pour réaliser un "banc d'essai virtuel" et, ainsi, tester les techniques de calorimétrie proposées.

Cette thèse se divise en cinq chapitres.

Le premier présente les contextes technologiques, scientifiques et industriels de cette étude et résume succinctement l'évolution des techniques de calorimétrie jusqu'à leur application conjointe à la lévitation électromagnétique en microgravité.

Les chapitres suivants tentent de répondre aux objectifs définis précédemment.

Le chapitre deux traite des différents phénomènes physiques apparaissant pendant la lévitation d'un échantillon métallique liquide. Nous nous attachons dans cette partie à décrire les ordres de grandeurs associés à l'induction, la convection et les transferts de chaleur. Nous élaborons notre stratégie de modélisation à partir de cette étude.

Le chapitre trois présente les résultats de simulation produits à partir des modèles choisis. Ces résultats sont comparés aux ordres de grandeurs obtenus dans le chapitre deux.

Dans le chapitre quatre, nous exposons l'élaboration une expérience de visualisation. A l'aide d'un rayonnement X généré au synchrotron ESRF de Grenoble (European Synchrotron Radiation Facility), nous tentons d'oserver l'écoulement dans un échantillon métallique lévité en condition de gravité terrestre. Nous y détaillons les études préliminaires réalisées, la stratégie d'optimisation expérimentale et les résultats de l'expérience elle même.

Enfin, le coeur de notre étude se concentrera dans le cinquième chapitre sur la calorimétrie elle même. Après une description des phénomènes thermiques instationnaires dont un échantillon lévité peut être le siège, nous présentons en détail la méthode actuelle utilisée en microgravité et la testons à l'aide de la simulation numérique. Par la suite, nous proposons une nouvelle approche expérimentale qui est également testée et validée.

Chapitre 1

Contextes

1.1 Contexte européen

Les travaux présentés dans cette thèse font partie de deux projets européens. Le premier se nomme THERMOLAB. C'est un projet MAP (Microgravity Application Program) de l'Agence Spatiale Européenne (ESA).

Il a pour but la mesure des propriétés thermophysiques des matériaux. La modélisation de procédés industriels complexes, et particulièrement de la mise en forme et de la solidification des matériaux, est devenue un des enjeux majeur pour le développement et la recherche. Parallèlement au développement très rapide de solutions analytiques et des méthodes numériques, il y a un manque de données concernant les matériaux, plus particulièrement l'évolution de leurs propriétés avec la température. Ce manque est dû à la haute réactivité chimique des alliages métalliques à l'état liquide, qui ne permet pas l'utilisation de moyens de mesures traditionnels.

Une étude réalisée auprès des entreprises européennes en rapport avec l'élaboration et/ou l'utilisation de matériaux (Fecht et Wunderlich, 2001) a montré le besoin urgent d'obtenir des propriétés thermophysiques de haute qualité de matériaux et de nouveaux alliages (figure 1.1). En effet, les propriétés de nombreux matériaux ont déjà été mesurées, mais les valeurs obtenues ne sont pas satisfaisantes. Par exemple des mesures de la viscosité du fer en fonction de la température (figure 1.2) font apparaître des écarts considérables. Ils peuvent atteindre 100%. La dispersion des résultats est trop élevée. Les mesures doivent être améliorées.

Les propriétés thermophysiques des matériaux sont nécessaires pour :

- mieux comprendre les procédés, particulièrement de l'étape de la solidification,
- résoudre les problèmes de défauts au sein des matériaux (piqûres, etc.) et ainsi augmenter la qualité des productions,
- réduire les pertes et les coûts.

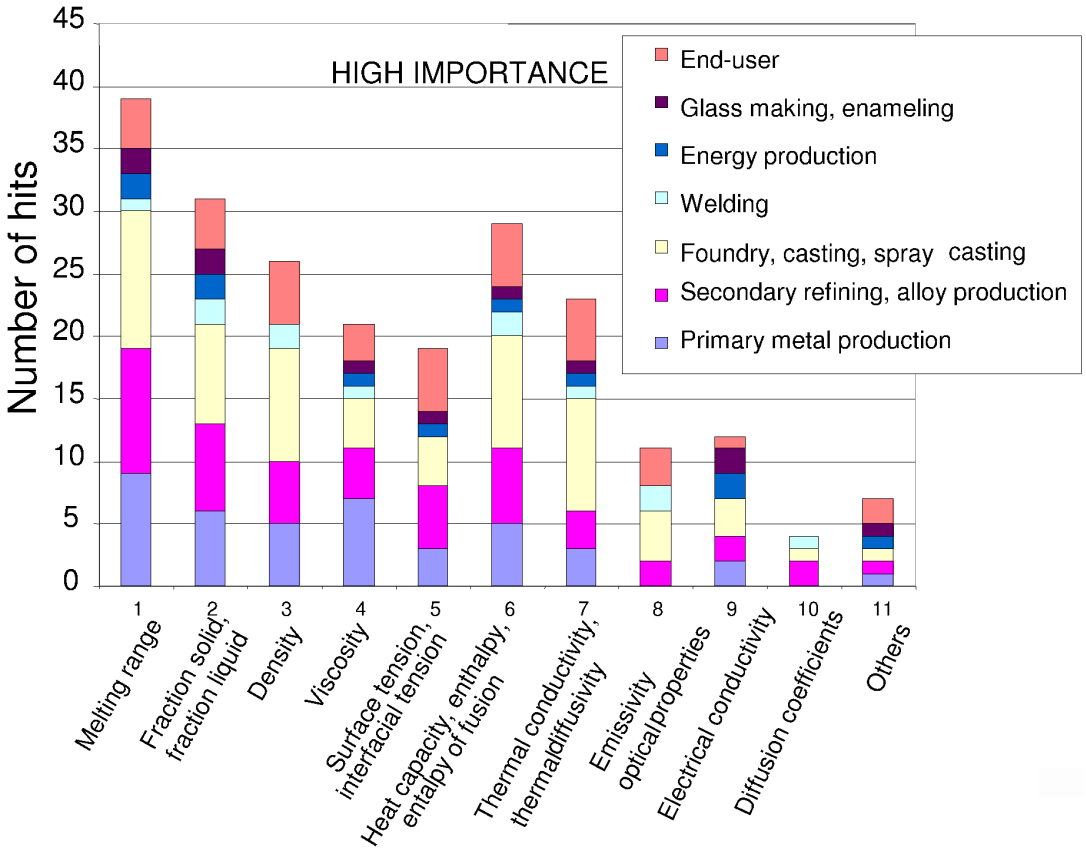


Figure 1.1: Nombre de réponses classant l'une des propriétés comme étant de haute importance. Résultats d'une étude réalisée auprès des industries européennes de production de métaux au sujet de l'importance des propriétés thermophysiques des matériaux et des alliages à l'état liquide, extrait de Fecht et Wunderlich (2001)

C'est pourquoi le projet ESA-THERMOLAB vise à l'obtention de propriétés thermophysiques des matériaux, tout particulièrement en utilisant le procédé TEMPUS-EML (ElectroMagnetic Levitator), en utilisant les vols paraboliques (dans l'Airbus A-300-ZÉRO-G de l'ESA ou les fusées sondes TEXUS), ou la station spatiale ISS (dans le Material Science Laboratory MSL (figure 1.4 et 1.4) du module Colombus (Voss *et al.*, 2007)). Ce projet vise à la fois à réaliser les mesures listées tableau 1.1, mais aussi à continuer d'améliorer leur précision, notamment en travaillant sur la modélisation du procédé de mesure lui-même.

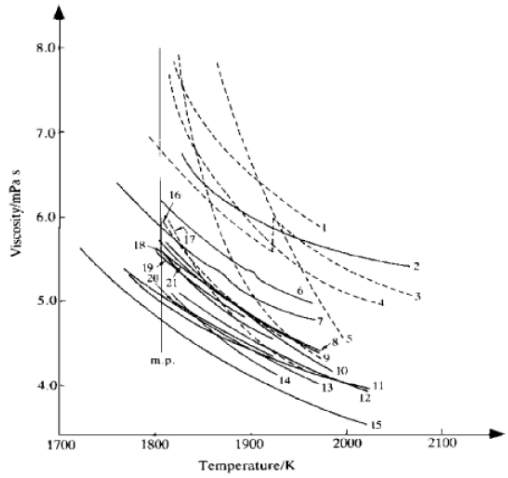


Figure 1.2: Mesures de la viscosité du fer pur en fonction de la température (voir Tanaka *et al.* (1996)).

Le second projet est partiellement financée par la commission européenne. Il s'agit d'un Projet Intégré nommé IMPRESS (Intermetallic Materials Processing in Relation to Earth and Space Solidification). Il est coordonné par l'ESA. 42 groupes de recherche universitaires et industriels y sont associés. L'objectif du projet est d'élaborer des aubes de turbines de 40 cm en aluminides de titane (TiAl). Ce matériau présente des propriétés d'usage meilleures que les propriétés actuelles. Son emploi permettra à la fois d'augmenter la longueur des aubes de turbines et améliorer leurs qualités mécaniques. Pour cela, il est nécessaire de maîtriser entièrement le lien entre l'élaboration du matériau, sa structure et ses propriétés finales. Les aluminides de titane ont des propriétés mécaniques et physiques remarquables jusqu'à des températures de 800°C. La combinaison d'un haut point de fusion, d'une haute résistance et d'une faible densité rend ces matériaux idéaux pour les ailettes de turbine à gaz. Ces aubes, produites par des techniques avancées, développées grâce au projet IMPRESS, seront employées dans la prochaine génération de turbines pour les moteurs aéronautiques et les centrales électriques modernes. L'utilisation de l'aluminide de titane permettra une réduction du poids de 50% des composants de turbine améliorant le rapport poussée/poids des moteurs aéronautiques et leur rendement.

Une originalité du projet IMPRESS est son volet consacré aux expérimentations réalisées dans l'espace. La station spatiale internationale (ISS), comme d'autres plate-formes de microgravité, sera employée pour réaliser des expériences de solidification sur les alliages intermétalliques . Le but de ces expériences est de comprendre le rôle de la pesanteur sur les

(a) (b) (c)

Figure 1.3: Airbus A-300 zéro-G (a), Fusée sonde TEXUS (b), Station Spatiale Internationale (c)

processus d'élaboration de matériaux, de valider les modèles de simulation de solidification et d'optimiser les processus industriels.

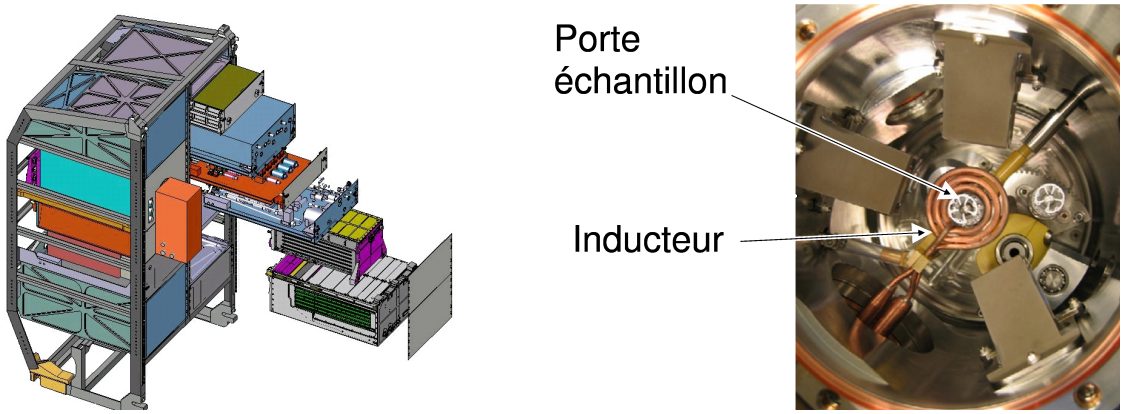
Dans ce projet, le groupe EPM du laboratoire SIMAP travaille aussi sur le contrôle de la solidification, grâce à l'action des champs magnétiques. Cela concerne le couplage dans une modélisation numérique de la solidification et de l'action des champs magnétiques et les comparaison de ces résultats avec les mesures expérimentales.

1.2 Contexte scientifique

La mesure par calorimétrie modulée sur des échantillons en lévitation s'incrit à la fois dans le développement des techniques d'analyses utilisant la lévitation et dans celui des techniques de calorimétrie. Nous abordons succinctement ces deux domaines puis présentons le développement de la calorimétrie modulée inductive.

1.2.1 Techniques de mesure utilisant la lévitation

La lévitation électromagnétique est un procédé mis en évidence par (Okress *et al.*, 1952). Dans ce dernier, une charge conductrice de l'électricité est placée dans un inducteur alimenté par un courant de haute fréquence (de la dizaine à la centaine de kHz). L'induction crée une force capable d'équilibrer le poids de la charge. L'absence de contact matériel a conduit au



(a) (b)

Figure 1.4: Material Science Laboratory (MSL) (a), Electro Magnetic Levitator (EML) (b) Voss *et al.* (2007)

developpement de techniques de mesures de propriétés thermophysiques de matériaux basées sur l'induction. Parmi les premiers à utiliser la lévitation à cet effet, on peut citer Fromm et Jehn (1965). Ils ont établi les corrélations liant la puissance Joule et la force de lévitation à la fréquence du courant, la forme de la charge et sa conductivité électrique. On peut également citer Chaudhuri *et al.* (1970) qui ont été les premiers à utiliser la lévitation pour réaliser des mesures de calorimétrie.

Aujourd'hui, les analyses réalisées sur des échantillons lévités couvrent une large gamme de propriétés (Egry *et al.*, 2001) dont voici une liste non-exhaustive :

- masse volumique et dilatométrie (Racz et Egry, 1995)

- conductivité électrique (Richardsen et Lohoefer, 1999)

- investigation du diagrame de phase, mesure de surfusion (Egry, 1998)

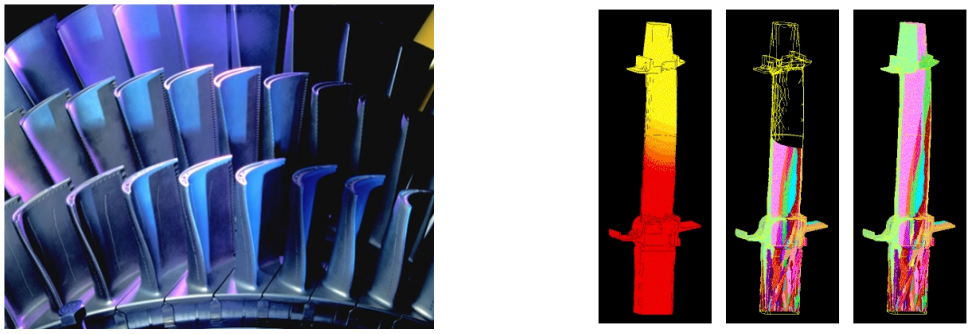
- état de la matière à l'état surfondu par diffraction X (Brillo *et al.*, 2006; Hartmann *et al.*, 2008)

- viscosité et tension de surface (Egry *et al.*, 1995)

- capacité calorifique et conductivité thermique (Fecht et Johnson, 1991; Rulison et Rhim, 1994; Wunderlich *et al.*, 2001; Tsukada *et al.*, 2007)

- émissivité (Tsukada *et al.*, 2007), (Rulison et Rhim, 1994)

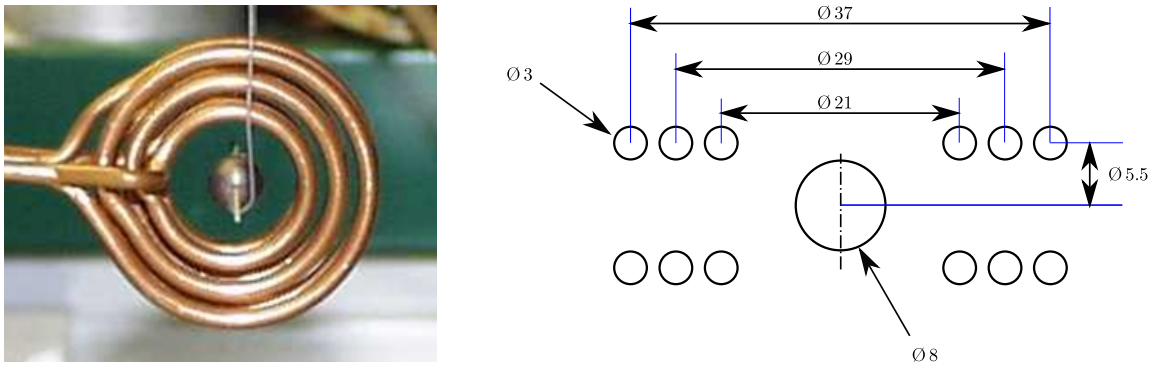
Un brève description des principes de ces techniques est donnée dans le tableau 1.1.



(a) (b)

Figure 1.5: Aubes de Turbine en TiAl. Photo (a). Simulation de la solidification (Voss *et al.*, 2007) (b)

On doit aux équipes de la DLR (Centre Aérospatial Allemand) le développement d'inducteurs destinés aux techniques d'analyse (Herlach, 1984; Herlach *et al.*, 1993). Le lévitateur TEMPUS utilisé aujourd'hui dans les projets IMPRESS et Thermolab a été developpé par ces mêmes équipes (Lohoefer et Piller, 2001). Il est présenté figure 1.6. Dans la suite de ce travail de thèse, nous utiliserons cette géométrie pour toutes les simulations d'expériences spatiales.



(a) (b)

Figure 1.6: Inducteur Tempus. (a) Vue du dessus. (b) En coupe.(Lohoefer et Piller, 2001)

Tableau 1.1: Récapitulatif des principes de mesure des propriétés thermophysiques mesurées par les dispositifs de lévitation électromagnétique (voir Etay *et al.* (2004)).

Propriété	Principe de la détermination	Quantité mesuré	Appareille de mesure
Masse volumique	- Sur terre : équilibre des forces de gravité et des forces électromagnétiques - En microgravité : équilibre des forces électromagnétiques, de tension superficielle et d'inertie	Position de la charge	vidéo, traitement d'images
Tension superficielle	Mise en oscillation de la goutte fluide par coupure du champ chauffant.	Fréquences excitées à la surface libre de la charge	Laser, caméra haute résolution de 30 à 300 images par seconde
Viscosité	Mise en oscillation de la goutte fluide par coupure du champ chauffant.	Temps d'amortissement des oscillations	Laser, caméra haute résolution de 30 à 300 images par seconde
Résistivité électrique	Changement de l'impédance du système inducteur / charge lévitée	Différence de potentiel et fréquence dans le circuit d'alimentation	Voltmètre, fréquence-mètre
Capacité calorifique	Modulation du courant inducteur	Variation de la puissance Joule et de la température.	Pyromètre
Conductivité thermique	Modulation du courant inducteur	Déphasage température / Puissance	Pyromètre

1.2.2 Calorimétrie modulée

En calorimétrie classique, la capacité calorifique et l'enthalpie de changement d'état d'un corps sont déterminées en immergeant celui-ci dans une enceinte, supposée adiabatique, appelée calorimètre. En mesurant la variation de température dans l'enceinte entre les états initial et final, on détermine la variation de quantité de chaleur provoquée par l'introduction de l'échantillon. Cette technique présente de nombreux désavantages, dont le principal est l'impossibilité de respecter la condition d'adiabaticité de l'enceinte calorimétrique.

Le concept de calorimétrie alternative ("ac calorimetry" en anglais), ou modulée, a été ini-

Tableau 1.2: Comparaison de la calorimétrie classique et de la calorimétrie modulée

Calorimétrie classique	Calorimétrie modulée
Nécessite un calorimètre adiabatique	L'échantillon est connecté thermiquement à un thermostat
Procédé discontinu	Procédé continu
Une seule mesure par expérience	Possibilité d'étude paramétrique tout au long d'une expérience.
Sensibilité limitée par la capacité calorifique du calorimètre	Sensibilité limitée par la qualité des mesures de température et de puissance
Précision relative de 10%	Précision relative de 1%

tialement proposé par Sullivan et Seidel (1966) pour pallier ces désavantages (voir tableau 1.2) et a été appliqué avec succès dans l'étude de la capacité calorifique de composés à très basse température (Sullivan et Seidel, 1968). Son principe ne repose plus sur l'adiabaticité de l'enceinte. L'échantillon à analyser est d'une part connecté thermiquement à un thermostat (au sens thermodynamique du terme), de l'autre il est soumis à une puissance de chauffe modulée par une fonction sinusoïdale. La modulation de la température de l'échantillon est mesurée pour un régime harmonique établi en fonction de la pulsation de la modulation de puissance. Si les temps de retour à l'équilibre thermique global et local sont suffisamment différents (Kraftmakher (2002) parle de la règle des 3 ordres de grandeur) il est possible de trouver une pulsation de modulation telle que le système puisse être considéré comme adiabatique (on parle alors abusivement de régime "adiabatique", ou quasi-adiabatique). Pour cette pulsation, la capacité calorifique totale peut dès lors être directement déterminée à partir des mesures de température et de puissance.

Un grand nombre de variantes de cette technique, i.e. de techniques reposant sur le même principe, ont été développées pour des échantillons et des conditions de mesure spécifiques (haute température, basse température, haute pression, etc). Chacune d'entre elles fait intervenir différents modes de chauffage (résistif, radiatif, induction...) et de mesure de température (thermocouple, pyromètre, etc). Le lecteur interessé pourra se référer aux revues détaillées de ces techniques dans Gemlin (1997) et Kraftmakher (2002).

1.2.3 La calorimétrie modulée inductive

L'utilisation de la lévitation électromagnétique pour la mesure calorimétrique date des travaux de Chaudhuri *et al.* (1970). Ils ont mesuré la capacité calorifique du cuivre et du platine à haute température (1000 à 2500 K). Pour cela ils utilisaient un calorimètre à chute ("drop calorimeter") dont le fonctionnement consiste à laisser tomber un échantillon, préalablement lévité et fondu, dans un calorimètre adiabatique. Par la suite, de nombreuses autres équipes utiliseront cette technique pour l'étude d'autres métaux (Mo, Fe, Ti, etc). Frohberg (1999) fait une revue détaillée de ces travaux jusqu'à 1999. Bien que cette méthode bénéficie des avantages de la lévitation électromagnétique (limitation de la contamination de l'échantillon), elle reste similaire en principe à la calorimétrie classique, et partage les mêmes inconvénients.

Fecht et Johnson (1991) proposent pour la première fois d'utiliser les techniques de calorimétrie modulée conjointement à la lévitation électromagnétique. Ils décrivent les conditions d'application de cette méthode pour la mesure de la capacité calorifique et de la conductivité thermique effective d'échantillons métalliques à haute température, en condition de microgravité. Le chauffage est réalisé directement par induction, sa modulation est réalisée en modulant le courant parcourant l'inducteur. La température est mesurée par pyrométrie et la puissance est déduite du courant circulant dans l'inducteur. Cette technique a été utilisée avec succès lors de campagnes de vols paraboliques pour différents alliages métalliques (Wunderlich et Fecht, 2001).

La combinaison des atouts de la calorimétrie modulée avec ceux de la lévitation électromagnétique offre des avantages indéniables. Même en l'absence de contact matériel, l'échantillon est en contact thermique avec un thermostat (transfert radiatif entre l'échantillon et l'enceinte). Néanmoins, des problèmes expérimentaux propres à l'utilisation de la lévitation rendent ces mesures complexes.

Mesure de la température La présence de champ magnétique alternatif interdit l'utilisation de thermocouple. L'expérimentateur est condamné à utiliser la mesure de température par pyrométrie. Or cette technique n'est adaptée que pour la mesure de température de matériaux dont l'émissivité est connue. En effet, l'utilisation d'un pyromètre double bande repose sur l'hypothèse implicite que l'émissivité spectrale du corps observé est proportionnelle à celle d'un corps noir (on parle d'hypothèse de corps gris (Howell et Siegel, 1981)). Or l'émissivité des alliages à haute température, pour des raisons liées à leur contamination, est complexe à

mesurer et est souvent inconnue (Hofmeister *et al.*, 1996; Teodorescu *et al.*, 2005). Il devient nécessaire de calibrer le pyromètre à partir des températures de changement de phase connue de l'état solide et de supposer que cette calibration reste valable à plus haute température.

Mesure de la puissance Il n'existe aucun moyen direct de mesurer la puissance Joule totale dissipée dans l'échantillon par chauffage inductif. Plusieurs approches ont été abordées.

Une première approche proposée par Wunderlich *et al.* (1997) consiste à calibrer la puissance Joule à partir de résultats de simulations numériques de l'induction et de la mesure de la conductivité électrique de l'échantillon (Richardsen et Lohoefer, 1999). Cette approche est indépendante de la connaissance de l'émissivité. Son erreur relative est estimée à 3%.

Une autre approche, décrite par Guo *et al.* (2005), repose sur la mesure du flux chaleur total évacué par rayonnement de l'échantillon . Dans l'état stationnaire, cette quantité est égale à la puissance Joule totale. Néanmoins, seule une mesure locale à la surface est possible. Pour pouvoir eploiter cette mesure, il faut faire les hypothèses suivantes : la surface totale de l'échantillon est connue, la température de l'échantillon y est homogène, tous les transferts de chaleur sont radiatifs et enfin l'émissivité spectrale de l'échantillon est connue. L'incertitude relative est évaluée par les auteurs à 4,5% .

Enfin, il est intéressant de noter que seul le courant inducteur peut être modulée en amplitude. La puissance Joule totale étant proportionnelle au carré du courant, une harmonique de fréquence double existe dans la modulation de la puissance. Ce phénomène est limité pour de faible amplitudes relatives de la modulation de courant, mais ajoute néanmoins un bruit à la mesure. Il est nécessaire de filtrer le signal de la puissance avant de l'exploiter pour la mesure (Wunderlich *et al.*, 1997). La figure 1.7 donne un exemple des signaux de puissance et de température enregistrés lors d'une expérience.

Influence de la convection : De nombreux travaux ont porté sur la simulation des écoulements induits dans une goutte lévitée (El-Kaddah et Szekely, 1983; Schwartz et Szekely, 1998; Bojarevics et Pericleous, 2003; Ai, 2004; Hyers, 2005; Li, 2006; Bardet, 2006). Les travaux traitant directement de l'impact de la convection sur la détermination de la conductivité thermique sont plus rares (Hyers, 2005; Li, 2006; Bardet, 2006). Si ces travaux s'accordent sur l'effet néfaste de la convection sur la détermination de ces propriétés, cette affirmation ne repose que sur la constatation qu'un écoulement dans l'échantillon homogénéise le champ de température à l'intérieur de celui-ci. Aucune évaluation quantitative n'est présenté.

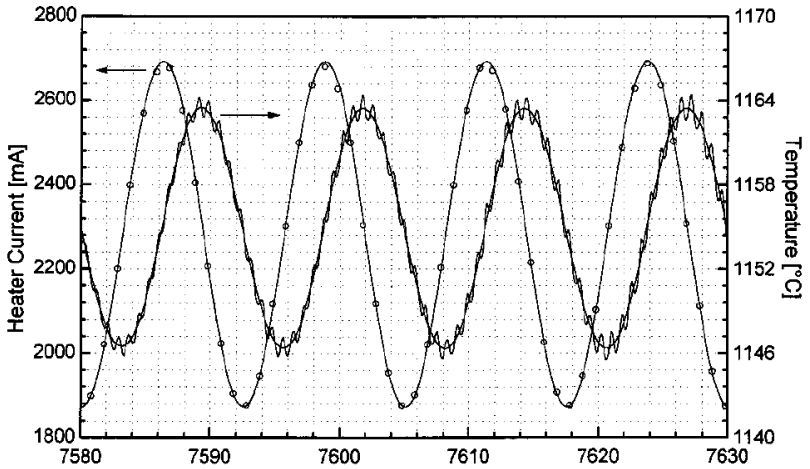


Figure 1.7: Mesure du courant inducteur et de la température.(Wunderlich *et al.*, 1997)

Les expérimenteurs ont cherché à affranchir leur résultats de l'influence de la convection. L'utilisation de la microgravité n'est qu'un des moyens employés. Des équipes japonaises (Yasuda *et al.*, 2004; Adachi *et al.*, 2007; Tsukada *et al.*, 2007) mettent à profit l'utilisation de champs magnétiques permanent intenses (de 1 à $10\,T$) pour freiner l'écoulement dans l'échantillon. Nous notons particulièrement l'approche de Kobatake *et al.* (2007). Elle consiste à réaliser une expérience de calorimétrie modulée sur des échantillons de silicium (en lévitation électromagnétique au sol) dans d'un aimant supraconducteur. En observant le déplacement de particules d'oxydes à la surface de leurs échantillons, les auteurs estiment la réduction de la vitesse dans l'échantillon due à l'imposition du champ magnétique. Cette vitesse passe de $40\,cm.s^{-1}$ sans champ magnétique à $5\,cm.s^{-1}$ quand un champ de $4\,T$ est imposé dans la direction verticale. Ces auteurs utilisent le même protocole expérimental que Wunderlich et Fecht (2001), c'est à dire la modulation sinusoïdale du courant inducteur, mais déterminent la conductivité thermique à l'aide de méthodes numériques inverses. (Une description de la méthode utilisée peut être trouvée dans Levenberg (1944)). Cependant, les modèles utilisés ne prennent pas en compte le transport convectif de la chaleur, celui-ci étant supposé rendu négligeable par l'utilisation du freinage magnétique.

Chapitre 2

Lévitation stationnaire

Dans ce chapitre nous décrivons le système physique que constitue un échantillon liquide conducteur de l'électricité mis en lévitation électromagnétique. Nous procédons à la description de l'électromagnétisme, de la mécanique pour un échantillon solide, de la mécanique pour un échantillon liquide et enfin de la thermique suivant les 4 étapes : :

1. Description du système pour le phénomène considéré.
2. Énoncé des équations fondamentales.
3. - Mécanismes mis en jeu.
   (a) Description
   (b) Définition des grandeurs caractéristiques et nombres adimensionnels associés.
4. - Calcul des ordres de grandeur et discrimination des effets prépondérants si nécessaire.

2.1 Notations

Tout au long de cette thèse, nous discutons de grandeurs dépendant des coordonnées d'espace et de temps. Il est utile d'introduire les notations qui seront utilisées par la suite. Les systèmes de coordonnées sont portés sur la figure 2.1.

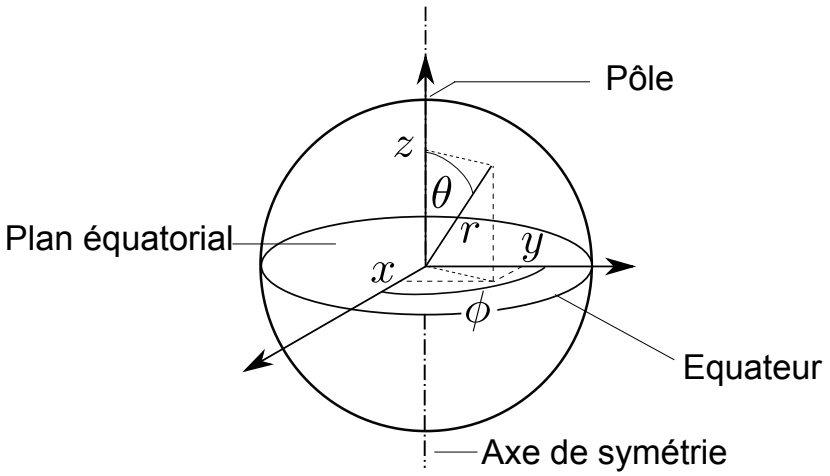


Figure 2.1: Systèmes de coordonnées (cartésien et sphérique) et notations.

Soit X, une fonction du temps à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par convention nous décomposons X de la manière suivante,

$$X(t) = \overline{X} + \tilde{X}(t)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{t_{exp}} \int_0^{t_{exp}} X(t)\, dt$$

où $\overline{X}$ est la valeur moyenne de X, $\tilde{X}(t)$ est sa partie fluctuante et t_{exp} est la durée de l'expérience.

Nous posons également $\left\|\tilde{X}\right\|$, l'amplitude efficace de la partie fluctuante,

$$\left\|\tilde{X}\right\|^2 = \frac{1}{t_{exp.}} \int_0^{t_{exp.}} \tilde{X}^2 \mathrm{d}t$$

Par la suite nous appellerons $\left\|\tilde{X}\right\|$ la valeur efficace de $\tilde{X}$.

Quand $\tilde{X}$ est une fluctuation sinusoïdale de pulsation ω_2, nous utilisons la formulation harmonique suivante :

$$\tilde{X} = \Re\left\{\hat{X} e^{i\omega_2 t}\right\}$$

où $\hat{X}$ est complexe.

Soit Y une fonction de l'espace à valeurs réelles définie sur le domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$. Nous

définissons sa moyenne volumique et surfacique par

$$\langle Y \rangle_V = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{D}} Y \, dV \quad \langle Y \rangle_S = \frac{1}{A} \iint_{\partial\mathcal{D}} Y \, dS$$

où V est le volume, A l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et $\partial\mathcal{D}$ la ssurface de$\mathcal{D}$.

Soit Z une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$. Nous notons respectivement $|Z|$ et $\arg(Z)$ son module et son argument tels que

$$Z = |Z| \, e^{i \arg(Z)}$$

2.2 Électromagnétisme

Dans cette partie, nous présentons les équations décrivant l'électromagnétisme pour un inducteur à vide puis en interaction avec une charge conductrice de l'électricité.Nous rappellons nombre de résultats antérieurs [1]avec lesquel le lecteur peut ou non être familier. Pour cela nous introduisons les équations fondamentales de l'électromagnétisme et les simplifions suivant les hypothèses de l'induction. Les ordres de grandeur caractéristiques de l'électromagnétique sont dérivés en fonction des paramètres d'entrée du système (courant, fréquence, propriétés physiques de la charge) pour une charge en TiAl placée dans l'inducteur TEMPUS en microgravité (figure 1.6).

2.2.1 Description du système

Principe

Nous considérons un système inductif composé d'un inducteur et d'un échantillon métallique (aussi appelé charge) conducteur de l'électricité. Par inducteur, nous entendons un organe électrotechnique constitué par l'enroulement d'un conducteur électrique, parcouru par un courant alternatif. Les tailles caractéristiques de l'inducteur et de la charge sont respectivement appelées L et R. Lorsqu'il est parcouru par un courant alternatif d'amplitude I_0 et

1. Pour une description plus détaillée des phénomènes d'induction et de magnétohydrodynamique, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Moffatt et Proctor (1982); Moreau (1990); Berton (1991); Davidson (2001).

de pulsation ω_1, l'inducteur génère un champ magnétique alternatif monophasé et de pulsation ω_1. Ce champ magnétique alternatif induit une densité de courants $\mathbf{j}$ dans l'échantillon. La présence de ces courants a deux conséquences. La première est de produire un échauffement par dissipation Joule dans la charge. La seconde est de se composer avec le champ magnétique et de générer des forces de Laplace. Par la suite, nous les appellerons "forces électromagnétiques" (notées forces e.m).

Dans le cadre de cette étude, nous distinguons deux types de systèmes inductifs en fonction de l'environnement dans lequel ils sont destinés à être utilisés. Les inducteurs utilisés sur terre équilibrent le poids de l'échantillon. Ils sont conçus afin que la force électromagnétique soit dirigée principalement selon la verticale et présentent plus de spires sous l'échantillon qu'au dessus. La seconde catégorie d'inducteur est utilisée en condition de microgravité [2]. Les courants induits permettent un chauffage sans contact, et la force électromagnétique est alors un moyen d'assurer le centrage de la charge dans une position donnée. Ces inducteurs sont symétriques.

2.2.2 Equations fondamentales et approximations

Nous considérons les équations de Maxwell dans le vide (Berton, 1991) :

Loi Gauss

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \tag{2.1}$$

Conservation du flux de champ magnétique $\mathbf{B}$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \tag{2.2}$$

Loi de Faraday

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \tag{2.3}$$

Loi d'Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.4}$$

2. En toute rigueur, nous devrions parler de micropesanteur plutôt que de microgravité.

Loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma_{el} \left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \tag{2.5}$$

Conservation du courant

$$\nabla . \mathbf{j} = 0 \tag{2.6}$$

où $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{u}$ sont respectivement le champ magnétique, le champ électrique et la vitesse de la charge. μ_0, ϵ_0, σ_{el} et ρ_{el} sont respectivement la permitivité du vide, la perméabilité du vide, la conductivité électrique et la densité volumique de charge électrique. Nous introduisons aussi un certain nombre de conventions liées à la forme de ces équations.

Tout d'abord l'équation (2.2) nous permet d'écrire $\mathbf{B}$ comme dérivant d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.7}$$

Nous utilisons conjointement la condition de Jauge ($\nabla . \mathbf{A} = 0$) qui permet de définir de manière non-ambigüe le potentiel vecteur.

Nous portons cette expression dans la loi de Faraday qui devient :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \tag{2.8}$$

ou bien

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{2.9}$$

Il existe donc un potentiel électrique scalaire Ψ tel que

$$\nabla \Psi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.10}$$

En prenant un potentiel constant, cette expression devient :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.11}$$

Cette expression est portée dans la Loi d'Ohm (2.5), il vient :

$$\mathbf{j} = \sigma_{el}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\right) \tag{2.12}$$

Le poids des termes du membre de droite sont respectivement de l'ordre de $\sigma_{el} L \omega_1 \mathbf{B}$ et $\sigma_{el} U_0 \mathbf{B}$, où U_0 est l'ordre de grandeur de la vitesse de la charge.

Nous prenons enfin le rotationel de l'équation d'Ampère (2.4) en la combinant avec l'équation de Faraday et la conservation du flux de champ magnétique. Nous obtenons l'expression :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{2.13}$$

La dimension caractéristique de variation $\mathbf{B}$ est la taille de l'inducteur, c'est à dire L.

Les ordres de grandeur des termes de l'équation (2.13) sont alors :

$$\mathcal{O}(\nabla^2 \mathbf{B}) \sim \frac{B_0}{L^2} \tag{2.14}$$

$$\mathcal{O}(\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2})\frac{1}{c_0^2} \sim \mathcal{O}(\mathbf{B}).\left(\frac{2\pi\omega_1}{c_0}\right)^2 \tag{2.15}$$

où $c_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ est la célérité de la lumière.

Nous posons désormais les hypothèses classiques pour un système inductif (Lohoefer, 2003) :

1. Le matériau de l'échantillon est homogène, isotrope et n'est polarisable ni électriquement ni magnétiquement ($\rho_{el} = 0$).
2. La longueur d'onde du champ électromagnétique est très grande devant les tailles caractéristiques de l'inducteur et de l'échantillon ($L << \frac{2\pi c_o}{\omega_1}$.)
3. Le courant de conduction dans l'échantillon est très supérieur au courant de déplacement ($\epsilon_0 \omega_1 << \sigma_{el}$).
4. La fréquence du champ électromagnétique est négligeable devant la fréquence caractéristique des collisions des électrons $2\pi\omega_1 << 10^{12} Hz$
5. La vitesse caractéristique U_0 dans l'échantillon est telle que $\frac{U_0}{\omega_1 L} << 1$

Ces hypothèses permettent de ne conserver que les termes principaux dans les équations de Maxwell :

– L'hypothèse 2 donne

$$\nabla^2 \mathbf{B} >> \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{2.16}$$

– L'hypothèse 3 donne

$$\mu_0 \mathbf{j} >> \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.17}$$

– L'hypothèse 4 donne

On obtient finalement le système d'équations pour l'induction :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.17a}$$

$$\nabla . \mathbf{j} = 0 \tag{2.17b}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{2.17c}$$

$$\mathbf{j} = -\sigma_{el}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.17d}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \tag{2.17e}$$

2.2.3 Champ magnétique sans charge

Dans un premier temps, nous nous intéressons au champ magnétique produit par un inducteur à vide. Le champ est alternatif de pulsation ω_1. Nous décrivons tous les champs vectoriels $\mathbf{X}$ ($\mathbf{j}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$) comme la partie réelle un champ vectoriel complexe $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ dépendant uniquement de l'espace

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \Re\left\{\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, e^{i\omega_1 t}\right\} \tag{2.18}$$

Ainsi l'équation 2.17c devient $\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = \mu_0 \hat{\mathbf{j}}$ où $\hat{\mathbf{B}}$ est le champ magnétostatique produit par l'inducteur parcouru par un courant continu. On peut donc utiliser l'équation de Biot et Savart pour calculer la contribution $\mathbf{d}\hat{\mathbf{B}}$ en un point M de l'espace due au courant inducteur d'intensité I_0 porté par l'élément curviligne $\mathbf{dl}$ situé au point S.

$$\mathbf{d}\hat{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{SM}}{\|\mathbf{SM}\|^3} \tag{2.19}$$

Par commodité, nous modélisons l'inducteur par un ensemble de spires filaires et axisymétriques. Cela permet de calculer la valeur sur l'axe de la composante z (majoritaire) du champ magnétique $\hat{B}_{z,i}(z) := \hat{\mathbf{B}}_i(r=0,\, z).\mathbf{e_z}$, créée par une spire de rayon R_i en position $z = h_i$:

$$\hat{B}_{z,i}(z) = \pm\frac{\mu_0 I_0}{2}\frac{R_i^2}{\left(R_i^2 + (z-h_i)^2\right)^{3/2}} \tag{2.20}$$

Conformément à la règle dite du "tire-bouchon", la contribution est positive si le courant parcourt l'inducteur dans le sens trigonométrique direct, et négative dans le cas inverse. L'équation (2.19) étant linéaire, pour un ensemble de N_{spire} spires, la valeur totale du champ est simplement $\hat{B}_z(z) = \hat{B}_{z,i}(z)$.

Deux cas se présentent alors selon que la configuration du courant est symétrique par rapport à z (champ dipolaire) ou antisymétrique (champ quadripolaire). Ces champ sont représentés figure 2.2.

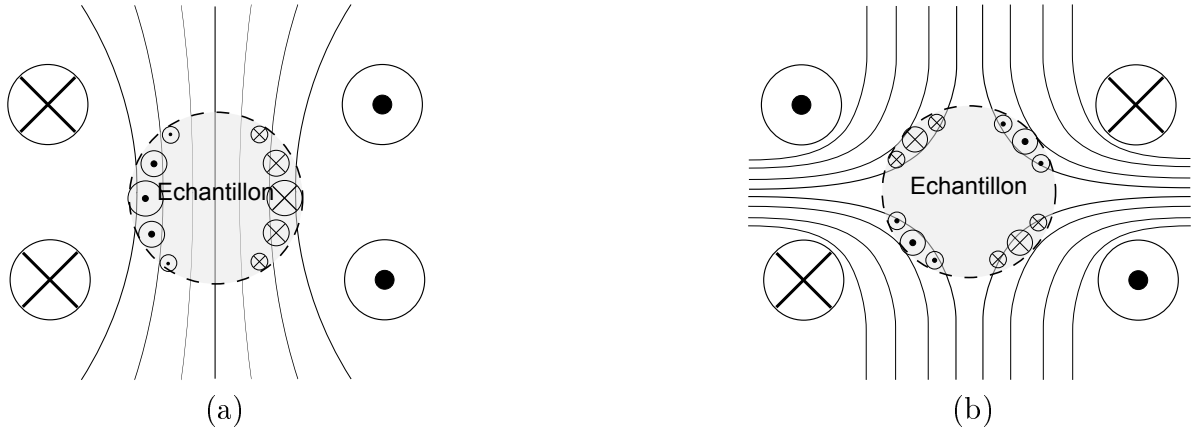


Figure 2.2: Aspect des lignes de champ. (a) Configuration dipolaire et (b) quadripolaire.

Champ dipolaire

Dans la configuration dipolaire, toutes les contributions s'ajoutent. Il en résulte un champ magnétique relativement homogène entre les spires. Il est maximum en $z = 0$ et vaut

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{G} \tag{2.21}$$

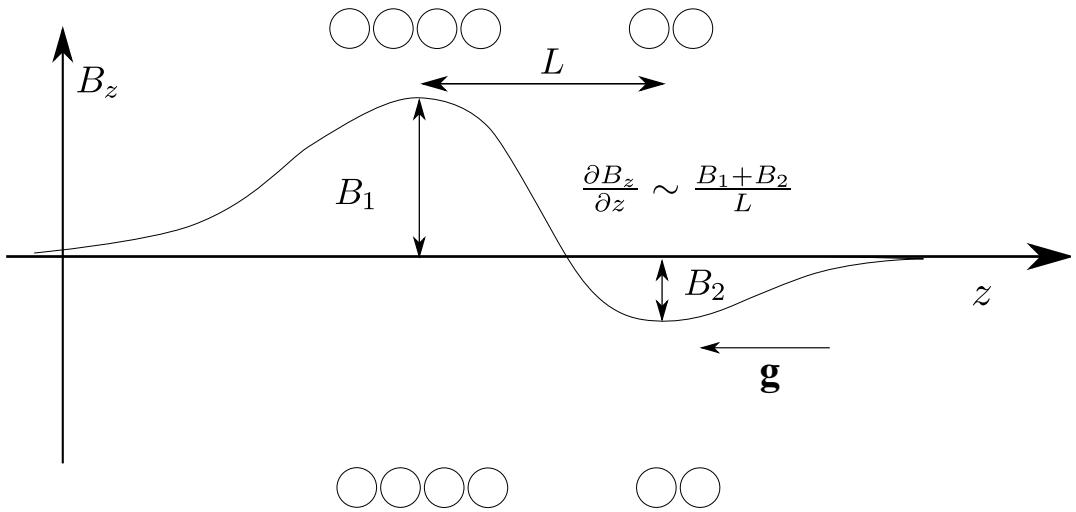


Figure 2.3: Vue schématique du champ magnétique dans un inducteur quadripolaire (gravité terrestre)

avec G un paramètre géométrique décrivant l'inducteur,

$$G^{-1} = \frac{R_i^2}{2\left(R_i^2 + h_i^2\right)^{3/2}} \tag{2.22}$$

Pour l'inducteur TEMPUS (figure 1.6 page 26), dont les dimensions sont reportées dans le tableau 2.1, $G = 5,88\,mm$. Par la suite, la valeur de B_0 calculée par l'équation 2.21 sera prise comme grandeur caractéristique pour la configuration dipolaire.

Tableau 2.1: Dimensions de l'inducteur TEMPUS

$R_1(mm)$	$R_2(mm)$	$R_3(mm)$	$h\,(mm)$
$10,5$	$14,5$	$18,5$	$\pm 5,5$

Champ quadripolaire

Dans ce cas particulier, les contributions se soustraient les unes aux autres pour s'annuler au centre de l'inducteur. Le choix d'une valeur de champ caractéristique est alors moins aisé. Il faut considérer deux cas :

- Dans le premier cas, nous considérons que la somme des forces induites sont grandes devant le poids de la charge. Le centre de gravité de la charge est situé dans le trou de champ magnétique. On choisit comme champ caractéristique caractéristique la valeur :

$$B_{0,dip} = R\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z} \tag{2.23}$$

$$B_{0,dip} = \frac{R}{2L}\frac{\mu_0 I_0}{G} \tag{2.24}$$

où $B_{0,dip}$est le champ magnétique caractéristique d'une configuration dipolaire. R et L sont respectivement le rayon de la charge et la dimmension caractéristique de l'espacement entre spires et contrespires.

- Les forces électromagnétiques sont de l'ordre de grandeur du poids. La position d'équilibre de l'échantillon est située sous le trou de champ. Le champ magnétique que voit l'échantillon est celui qui le maintient en lévitation. Okress *et al.* (1952) donne l'expression de B_0 suivante :

$$B_0 = \sqrt{2R\rho g\mu_0} \tag{2.25}$$

2.2.4 Champ magnétique avec charge

Prenons en compte la charge conductrice de l'électricité dans l'inducteur. Le système d'équations (2.17a) et la formulation (2.18) permettent l'écriture du problème de l'induction dans la charge en fonction du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ uniquement :

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\sigma_{el}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.26}$$

$$\mathcal{O}(\frac{\mathbf{A}}{l^2}) \qquad \mathcal{O}(\omega_1\mu_0\sigma_{el}\mathbf{A}) \tag{2.27}$$

Cette formulation fait apparaître la longueur caractéristique de variation du potentiel vecteur suivante :

$$\mathcal{O}(l^2) = (\mu_0\sigma_{el}\omega_1)^{-1} \tag{2.28}$$

Cette longueur correspond à l'épaisseur de pénétration du champ magnétique dans une charge conductrice. Elle est appelée épaisseur de peau électromagnétique. On la définit conventionnellement comme suit :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_{el}\omega_1}} \tag{2.29}$$

Une résolution analytique de l'équation (2.26)est donnée dans l'annexe B pour une charge sphérique dans un champ magnétique homogène à l'infini et pour une veleur de δ faible devant le rayon de la charge. Une telle approximation décrit de manière pertinente le problème de l'induction pour le champ dipolaire généré par l'inducteur TEMPUS. Les solutions analytiques du potentiel vecteur, des densités de courant et de forces ainsi que de la puissance Joule sont utilisées dans la discussion des parties suivantes.

Courant induit

Le courant induit dans la charge présente une répartition spatiale analogue à celle du potentiel vecteur. Il pénètre la charge sur une profondeur de l'ordre de grandeur de δ. Pour une sphère, on peut démontrer que le courant est purement tangentiel à la surface (Lohoefer, 2003). On peut dériver un ordre de grandeur du courant induit dans la sphère, grâce à l'équation de Faraday :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{2.30}$$

$$\mathcal{O}(\mathbf{j}) = -\sigma_{el}\mathcal{O}(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \tag{2.31}$$

En prenant δ comme distance caractéristique de la variation du potentiel vecteur dans la charge, on obtient :

$$j_0 = \frac{B_0}{\mu_0 \delta} \tag{2.32}$$

Puissance Joule

La densité de puissance Joule provient de la dissipation des courants induits dans la sphère et a pour expression,

$$\chi = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma_{el}} \tag{2.33}$$

Dans le cas d'un champ dipolaire, son maximum est situé en position équatoriale. Pour une configuration quadripolaire, le maximum est approximativement situé à mi-chemin entre

le pôle et l'équateur. Dans le cas d'une mise en lévitation en gravité terrestre, l'équilibre mécanique impose un maximum de champ sous la charge, donc un maximum du chauffage sous la charge.

En utilisant la propriété :

$$a.b = \frac{1}{2}\Re\left\{\hat{a}\hat{b}^* + \hat{a}\hat{b}\,e^{2i\omega_1 t}\right\} \tag{2.34}$$

on peut écrire la densité de puissance Joule χ comme la somme d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante. La période $\frac{\pi}{\omega_1}$ étant inférieure de plusieurs ordres de grandeur aux temps de la thermique dans l'échantillon, cette partie est entièrement filtrée. On obtient alors :

$$\chi = \frac{\Re\left\{\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}}^*\right\}}{2\sigma_{el}} = \frac{\left|\hat{\mathbf{j}}\right|^2}{2\sigma_{el}} \tag{2.35}$$

On définit également la puissance Joule totale chauffant l'échantillon par

$$P = \langle\chi\rangle_V\, V \tag{2.36}$$

Ces expressions donnent les ordres de grandeur caractéristiques suivants

$$\chi_0 = \frac{j_0^2}{\sigma_{el}} = \frac{\omega_1 B_0^2}{\mu_0} \tag{2.37}$$

et

$$P_0 = \chi_0 \frac{\delta}{R} V \tag{2.38}$$

On remarque également que la configuration, dipolaire ou quadripolaire, du champ a une grande importance sur la puissance de chauffe. En champ dipolaire, l'échantillon se trouve au maximum du champ magnétique. En champ quadripolaire, il se trouve dans un minimum. Pour une même valeur du courant inducteur, cette différence engendre dans le cas dipolaire une puissance de chauffe bien supérieure au cas quadripolaire.

Force électromagnétique

Le courant induit dans la charge se compose avec le champ magnétique local et crée des forces de Laplace **F** dans le conducteur.

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{2.39}$$

Le courant est parallèle à la surface et, si l'épaisseur de peau δ est faible, $\mathbf{B}$ est aussi parallèle à la surface, ainsi $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ est porté principalement par la normale à la surface et orienté vers l'intérieur de la charge. En remplaçant $\mathbf{j}$ par son expression donnée dans l'équation 2.17c, on exprime la densité des forces de Laplace en fonction du champ magnétique uniquement :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \tag{2.40}$$

Cette expression se décompose de façon non-unique en une partie potentielle (conservatrice) et une partie rotationnelle

$$\mathbf{F} = -\nabla(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} = -\nabla P_m + F_r \tag{2.41}$$

Cette formulation fait apparaître la pression électromagnétique $P_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$ qui s'applique à la surface et au sein de la charge. On peut ainsi appréhender l'influence de la force électromagnétique sur le comportement mécanique de la charge. Ce point sera traité plus en détail dans les sections 2.3 page 52 et 2.4 page 58 . Il est également intéressant de remarquer que la densité de force F_i peut s'écrire comme la divergence d'un tenseur. Nous définissons le tenseur de Maxwell comme suit :

$$T_{i,j} = M_{i,j} - \frac{1}{2}tr(\overline{\overline{M}})\delta_{ij} \tag{2.42}$$

avec

$$M_{i,j} = \frac{B_i B_j}{\mu_0} \tag{2.43}$$

alors

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(M_{ij} - \frac{1}{2}tr(\overline{\overline{M}})\delta_{ij}\right) = \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial B_j^2}{\partial x_j} = F_{r,i} + F_{p,i} \tag{2.44}$$

En configuration dipolaire, la force est maximale dans la zone équatoriale et varie peu en fonction de la position de l'échantillon. En configuration quadripolaire, le hamp crée une "cage magnétique". Que ce soit sur terre ou en microgravité, la force dépend fortement de la position de la charge. Elle agit comme une force de rappel vers le minimum de champ

magnétique, ou “trou de champ”.

Direction du champ magnétique à la surface de la charge

Nous avons vu précédemment que le champ magnétique pénètre dans la charge sur une profondeur δ. Nous souhaitons quantifier l'effet d'expulsion du champ. De manière asymptotique, pour $\delta << R$ les lignes contournent la charge et sont presque tangentielles à sa surface. Inversement, pour $\delta >> R$, la charge devient “invisible” pour le champ magnétique. Les lignes de champ ne contournent plus la charge. Décomposons $\mathbf{B}$ sur les bases locales $(\mathbf{e_n}, \mathbf{e}_\tau)$ et $(\mathbf{e_r}, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$:

$$\|\mathbf{B}\|^2 = B_n^2 + B_\tau^2 = B_r^2 + B_\theta^2 + B_\phi^2 \tag{2.45}$$

On définit les grandeurs caractéristiques correspondantes

$$B_0^2 = B_{n,0}^2 + B_{\tau,0}^2 = B_{r,0}^2 + B_{\theta,0}^2 + B_{\phi,0}^2 \tag{2.46}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la surface, τ le vecteur tangentiel se décomposant lui même selon θ et ϕ, la colatitude et l'azimut. Si l'ordre de grandeur B_0 est relativement aisé à dériver, sa répartition selon les composante normale et tangentielle à la surface est moins directe. Afin de quantifier l'importance relative entre les composantes normale et tangentielle, nous utilisons une approche géometrique simple .

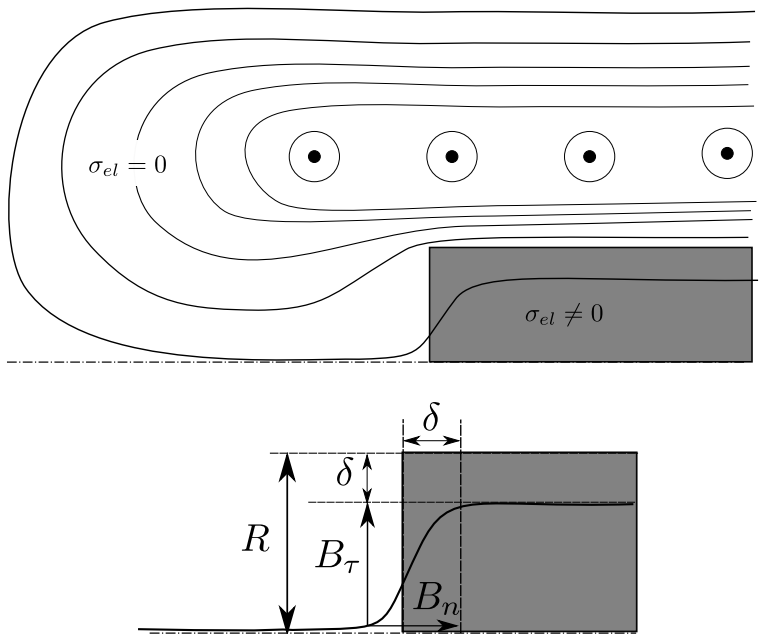


Figure 2.4: Interprétation géométrique de la pénétration des lignes de champ

Sur la figure 2.4, on représente une ligne de champ magnétique pénétrant une charge conductrice de taillle caractéristique R sur une profondeur δ. Il vient alors

$$\frac{B_{n,0}}{B_{\tau,0}} = \frac{\delta}{R} = R_\omega^{-1/2} \tag{2.47}$$

En utilisant l'équation 2.46, il vient

$$B_{n,0} = \frac{B_0}{\sqrt{1+R_\omega}} \text{ et } B_{\tau,0} = \frac{B_0}{\sqrt{1+R_\omega^{-1}}} \tag{2.48}$$

où $R_\omega = \left(\frac{R}{\delta}\right)^2$ est le paramètre d'écran électromagnétique.

Ces expressions confortent l'intuition physique. La composante normale à la surface tend vers 0 quand l'épaiseur de peau électromagnétique est négligeable par rapport à la taille caractéristique de la charge. Elle sont également en accord avec Moffatt (1982); Mestel (1986). Quand à la composante B_ϕ, elle découle nécessairement de la composante $\mathbf{e_z}$du courant inducteur. De manière simplifiée, nous la quantifions de la manière suivante :

$$B_{\phi,0} = B_{\tau,0}\frac{L_H}{L_{tot}} \tag{2.49}$$

où L_H et L_{tot}sont respectivement la hauteur caractéristique de l'inducteur et sa longueur totale.

2.2.5 Conclusion

Une description du problème électromagnétique a été réalisée pour les configurations de lévitation au sol et en condition de microgravité. Pour chacune d'elles, un ordre de grandeur caractéristique du champ magnétique a été explicité. Par la suite, des ordres de grandeur pour le courant induit j_0, la densité de puissance Joule χ_0 et la force volumique F_0 dans l'échantillon ont été donnés en fonction du champ magnétique caractéristique B_0 vu par la charge.

Tableau 2.2: Gamme de valeurs considérées pour les paramètres d'entrée

Grandeur	Gamme
Amplitude du Courant I_0(A)	50
Fréquence $\frac{\omega_1}{2\pi}\,(kHz)$	$100 - 350$
Taille de l'inducteur $L\,(cm)$	$10 - 50$
Rayon de la charge $R\,(mm)$	$2,5 - 4$
Masse volumique de la charge $\rho\,(kg.m^{-3})$	$2700 - 8900$
Conductivité électrique de la charge $\sigma_{el}\,(\Omega.m)^{-1}$	$10^5 - 10^7$

Tableau 2.3: Champ magnétique caractéristique (T)

Configuration		Expression
Dipolaire		$B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{G}$
Quadripolaire	$F_0 \sim \rho g$	$B_0 = \sqrt{2R\rho g\mu_0}$
	$F_0 > \rho g$	$B_0 = \frac{R}{2L}\frac{\mu_0 I_0}{G}$

Tableau 2.4: Grandeurs caractéristiques du problème en fonction du champ magnétique

Grandeur	Expression	ordre de grandeur
Composante normale	$\frac{B_{n,0}}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{1+R_\omega}}$	$10-40\,\%$
Composante tangentielle	$\frac{B_{\tau,0}}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{1+R_\omega^{-1}}}$	$90-99\,\%$
Composante azimutale	$\frac{B_{\phi,0}}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{1+R_\omega^{-1}}}\frac{H_{induc}}{L_{induc}}$	$4-5\,\%$
Densité de courant induit ($A.m^{-2}$)	$j_0 = \frac{B_0}{\mu_0\delta}$	10^6-10^8
Densité de puissance Joule ($W.m^{-3}$)	$\chi_0 = \frac{\omega_1 B_0^2}{\mu_0}$	10^7-10^8
Pression magnétique (Pa)	$P_{m,0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$	$50-350$
Force totale (quadripolaire) (N)	$F_0 = P_{m,0}\frac{S}{2}$	$10^{-3}-10^{-2}$
Puissance Joule totale (W)	$P_0 = \chi_0\frac{\delta}{R}V$	$10-10^2$
Paramètre d'écran (-)	$R_\omega = (\frac{R}{\delta})^2$	$10-100$

2.3 Mécanique

Nous présentons ici l'influence de l'induction sur le comportement mécanique de la charge. La charge est considérée comme un solide. On s'intéresse alors à la position d'équilibre de celle-ci, à la stabilité de cette position et au couple électromagnétique susceptible de mettre en rotation l'échantillon. Tout au long de cette section, nous utiliserons la forme de la densité de force électromagnétique introduite paragraphe 2.2.4 page 44, à savoir :

$$\mathbf{F} = \underbrace{-\nabla P_m}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\nabla.\overline{\overline{\mathbf{M}}}}_{\text{Forces rotationelles}} \tag{2.50}$$

où P_m est la pression magnétique introduite équation (2.41) et $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ le tenseur d'ordre 2 défini par l'équation (2.43).

2.3.1 Description

Un échantillon solide de conductivité électrique homogène ne possède que 6 degrés de liberté : x, y, z, Ω_x, Ω_y et Ω_z, respectivement 3 pour sa position et 3 pour sa rotation.

2.3.2 Equations fondamentales :

Considérons les équations fondamentales de la mécanique du point matériel (Coirier, 2001) :

Principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{dv_i}{dt} = F_{tot,i} - \lambda_f v_i + mg\,\delta_{i,3} \tag{2.51}$$

où m est la masse de la charge, $\mathbf{v}$ sa vitesse, $\mathbf{F_{tot}}$ la résultante des forces électromagnétiques et λ_f le coefficient de frottement de la charge dans son environnement. Pour une sphère de rayon R se déplaçant à faible vitesse dans un gaz de viscosité η_{gaz} on utilise l'expression de Stokes :

$$\lambda_f = 6\pi\eta_{gaz}R \tag{2.52}$$

2.3.3 Lévitation

Nous exprimons $\mathbf{F_{p,tot}}$ et $\mathbf{F_{r,tot}}$ les résultantes des parties potentielles et rotationelles des forces EM sur l'échantillon de la façon suivante :

$$\mathbf{F_{p,tot}} = -\iiint_V \nabla(P_m)dv \tag{2.53}$$

$$\mathbf{F_{r,tot}} = \iiint_V \nabla.(\overline{\overline{\mathbf{M}}})dv \tag{2.54}$$

Nous utilisons le théorème de la divergence, respectivement pour un tenseur d'ordre 0 puis d'ordre 2. Remplaçons P_m par son expression nous évaluons $\overline{\overline{\mathbf{M}}}\otimes\mathbf{n}$:

$$\mathbf{F_{p,tot}} = -\oiint_{\partial V} P_m\mathbf{n}.dS = -\oiint_{\partial V} \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0}\mathbf{n}.dS \tag{2.55}$$

$$\mathbf{F_{r,tot}} = \oiint_{\partial V} \overline{\overline{\mathbf{M}}}\otimes\mathbf{n}.dS = \oiint_{\partial V} B_n.\mathbf{B}dS \tag{2.56}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la surface et $\otimes$ représente le produit matriciel.

La résultante des forces sur le volume se réduit à la résultante des forces appliquées à la surface. Il apparait que seules les valeurs du champ magnétique à la surface de la charge permettent de décrire la lévitation. Pour une sphère, $B_n = B_r$:

$$\mathbf{F_{tot}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{B_r.\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0}\mathbf{n}\right)dS \tag{2.57}$$

Nous faisons l'hypothèse que l'échantillon est en équilibre mécanique. La force de lévitation compense alors le poids de la charge ($\mathbf{F_{tot}} + m\mathbf{g} = 0$). L'intégrale 2.55 est alors non nulle selon la direction de $\mathbf{g}$. Nous choisissons l'orientation du repère sphérique de coordonnées (r, θ, ϕ) de manière à ce que $\mathbf{F_{tot}}$ soit parallèle au vecteur $\mathbf{e_z} = \mathbf{e_r}\cos\theta + \mathbf{e}_\theta\sin\theta$. Quand la charge est en équilibre mécanique, $\mathbf{F_{tot}} = mg\mathbf{e_z}$. L'équation (2.57) devient :

$$\mathbf{F_{tot}}.\mathbf{e_z} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{B_r.(B_r\cos\theta + B_\theta\sin\theta)}{\mu_0} - \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0}\cos\theta\right)dS \tag{2.58}$$

L'ordre de grandeur du terme déviateur sous l'intégrale est :

$$\frac{B_r.(B_r\cos\theta + B_\theta\sin\theta)}{\mu_0} \sim \begin{cases} 2P_{m,0}R_\omega^{-1/2} & \text{pour } R_\omega >> 1 \\ 2P_{m,0} & \text{pour } R_\omega << 1 \end{cases}$$

et le terme potentiel

$$\frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0}\cos\theta \sim P_{m,0} \tag{2.59}$$

Nous remarquons que pour une épaisseur de peau négligeable devant le rayon (i.e. $R_\omega >> 1$), la force de lévitation est principalement due aux forces de pressions électromagnétiques.

2.3.4 Oscillation

Une fois la charge en position d'équilibre stable (asymptotiquement stable), la force électromagnétique agit comme une force de rappel (Priede et Gerbeth, 2006). Pour des oscillations autour de la position d'équilibre, d'amplitude faible devant la distance caractéristique L de l'inducteur, on peut faire l'hypothèse que la force de rappel est linéaire par rapport à la distance entre le centre de gravité de la charge et cette position d'équilibre. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la charge s'écrit alors :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \overline{\overline{\mathbf{J}}} \otimes \mathbf{x} - \lambda\mathbf{v} \tag{2.60}$$

où $\mathbf{x}$ est la position du centre de gravité de la charge (nul à la position d'équilibre),$\mathbf{v}$ est sa vitesse, λ le coefficient de trainée de la charge dans le gaz de l'enceinte, $\otimes$ le produit matriciel et $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$ la matrice Jacobienne de la résultante des forces, définie par :

$$J_{i,j} = \left.\frac{\partial\left(F_{tot,i} - mg\delta_{i,3}\right)}{\partial x_j}\right|_{x_i,x_j=0} \tag{2.61}$$

Le système dynamique est stable si la partie réelle des valeurs propres de $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$ est strictement négative. On peut découpler le problème en diagonalisant $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$ sur une base de vecteurs propres (e_1, e_2, e_3). Les forces électromagnétiques n'étant pas une source d'amortissement, on s'attend à ce que ces valeurs propres soient toutes réelles. L'équation vectorielle (2.60) devient le

système d'équations différentielles :

$$m\frac{dv_{e,i}}{dt} = k_i x_{e,i} - \lambda v_{e,i} \tag{2.62}$$

où $\mathbf{x}_e$ et $\mathbf{v_e}$ sont respectivement la position et la vitesse exprimée dans la base (e_1, e_2, e_3), et k_1, k_2 et k_3 sont les valeurs propres de $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$. On en déduit les fréquences naturelles d'oscillation suivante :

$$\Omega_{1,i} = \sqrt{\frac{-k_i}{m}} \tag{2.63}$$

L'ordre de grandeur des k_i est établie en exprimant la dépendance spatiale de la force e.m. :

$$\frac{\partial F_{tot,x_e}}{\partial x_{e,i}} \sim \frac{AP_{m,0}}{L_{e,i}} \tag{2.64}$$

où $L_{e,i}$ est une dimension caractéristique de l'inducteur dans la direction propre $\mathbf{e}_i$ et A l'aire de l'échantillon. Il vient :

$$\Omega_{1,i} \sim \frac{B_0}{\sqrt{L_{e,i} R \rho \mu_0}} = \frac{U_A}{\sqrt{L_{e,i} R}} \tag{2.65}$$

Ainsi le système constitué par la charge dans le trou de champ est un oscillateur en régime forcé dès que le courant inducteur possède des harmoniques de basses fréquences susceptibles d'exciter ce système.

2.3.5 Rotation

Les problèmeq de rotation d'une charge lévitée ont fait l'objet de nombreuses études (Priede et Gerbeth (2000), Moffatt (1990)) mais ne s'accordent pas sur l'origine de cette rotation d'une charge lévitée.

Dans ce travail de thèse, nous faisons l'hypothèse que ce sont les forces e.m. qui génèrent un couple sur l'échantillon. La force dérivant de la pression électromagnétique étant portée par la normale de la surface de la charge, elle ne peut pas générer de couple. Nous ne considérons donc que la partie rotationelle de la densité volumique de force $\mathbf{F_r} = \nabla.\overline{\overline{\mathbf{M}}}$.

La contrainte e.m. sur un élément de surface orienté selon le vecteur normal $\mathbf{n}$ s'écrit alors

$\overline{\overline{\mathbf{M}}} \otimes \mathbf{n}$. La densité de couple surfacique $\mathbf{c}$ généré par cette contrainte s'écrit donc :

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \overline{\overline{\mathbf{M}}} \otimes \mathbf{n} \tag{2.66}$$

La résultante du couple $\mathcal{C}$ est l'intégrale de cette grandeur sur la surface de la charge :

$$\mathcal{C} = \oiint_{\partial V} \mathbf{r} \times \overline{\overline{\mathbf{M}}} \otimes \mathbf{n}\, dS \tag{2.67}$$

où $\mathbf{r}$ le vecteur position à partir du centre de gravité de la charge. Nous exprimons la densité surfacique du couple $\mathbf{c}$

dans le repère local sphérique $(\mathbf{e_r}, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$. Pour une charge sphérique, $B_n = B_r$, $\mathbf{n} = \mathbf{e_r}$ et $\mathbf{r} = R\,\mathbf{e_r}$. Il vient :

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}\times\overline{\overline{\mathbf{M}}}\otimes\mathbf{n} = R.\mathbf{e_r}\times\overline{\overline{\mathbf{M}}}\otimes\mathbf{e_r} = \frac{R}{\mu_0}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_rB_r & B_rB_\theta & B_rB_\phi \\ B_\theta B_r & B_\theta B_\theta & B_\theta B_\phi \\ B_\phi B_r & B_\phi B_\theta & B_\phi B_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R\frac{B_r}{\mu_0}\mathbf{e_r}\times\mathbf{B} \tag{2.68}$$

$$\mathbf{c} = R.\frac{B_r}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ -B_\phi \\ B_\theta \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

Pour un système axisymétrique, $B_\phi = 0$ et l'intégrale surfacique de $R.\frac{B_rB_\phi}{\mu_0}\mathbf{e}_\phi$ est nécessairement nulle. Nous faisons l'hypothèse que $\mathbf{C}$, l'intégrale de $\mathbf{c}$ sur la sphère, soit non nulle. Nous choisissons alors l'orientation du repère sphérique de coordonnées (x, y, z) tel que $\mathcal{C} = C_z\mathbf{e_z}$, d'où

$$c_z = c_\theta \cos\theta \mathbf{e}_\theta = R.\frac{B_rB_\phi}{\mu_0}\cos\theta\mathbf{e}_\theta \tag{2.70}$$

$$C_z = \frac{R}{\mu_0}\oiint_{\partial V} B_rB_\phi \sin\theta\, dS = \frac{R^3}{\mu_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} B_rB_\phi \cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi \tag{2.71}$$

Nous déduisons l'ordre de grandeur du produit $B_rB_\phi$de l'équation 2.47. L'odre de grandeur de la densité de couple à la surface est alors :

$$c_0 \sim \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{R}{\sqrt{2 + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2}} \frac{L_H}{L_{tot}} \tag{2.72}$$

2.4 Mécanique des fluides

La charge est maintenant vue comme une goutte liquide, siège de convection. On cherche à identifier les moteurs et freins potentiels aux écoulements dans la charge fondue.

2.4.1 Description

Nous considérons un écoulement incompressible dans une goutte lévitée de viscosité cinématique ν, de masse volumique ρ et de conductivité électrique σ_{el}. La condition limite de vitesse est libre à la surface de la goutte.

2.4.2 Équations fondamentales

Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla(P_f) + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}}{\rho} \tag{2.73}$$

Continuité

$$\nabla.\mathbf{u} = 0 \tag{2.74}$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse, $\mathbf{F}$ la force volumique totale s'exerçant dans le volume de la goutte et P_f la pression dans le fluide. Le fluide est susceptible d'être mis en mouvement par les mécanismes suivant :

- Forces volumiques rotationnelles
- Contrainte à la surface
- Déformation de la surface libre

Afin de quantifier l'importance de la convection, nous introduisons la fréquence de retournement vortex donné par Lesieur (1997),

$$f_{vortex} = \left\langle \frac{\nabla \times \mathbf{U}}{2} \right\rangle_V \tag{2.75}$$

définie comme la moyenne volumique du vecteur tourbillon. Cette fréquence représente le nombre de rotations par seconde effectuées par un vortex.

2.4.3 Brassage électromagnétique

La goutte lévitée est soumise à une densité de forces e.m.. Dans une enceinte close, la partie potentielle de cette force ne met pas le fluide en mouvement et se traduit par un champ de pression dans le fluide $P_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$. C'est la partie rotationnelle de la force qui est source de convection. Dans le cas d'un champ dipolaire, le maximum de la force (et le maximum de sa partie rotationnelle) est situé à la surface (dans l'épaisseur δ) dans le plan équatorial de la goutte. Ainsi le fluide est mis en mouvement de la surface de la goutte vers son centre. Par conservation de la masse, le fluide est repoussé vers les pôles et revient vers le plan méridien en longeant la surface libre.Cet écoulement est constitué de deux vortex contrarotatifs situés de part et d'autre du plan méridien. Dans une géométrie axisymétrique, ces vortex sont en fait des tubes de vorticité toroïdaux. Ces structures ont été observées indirectement en condition de microgravité par Hyers *et al.* (2003) en suivant les trajectoires de particules d'oxyde métallique sur la surface libre de la goutte. Les particules sont piégées à la surface et s'accumulent au voisinage de la ligne équatoriale de la goutte.

L'écoulement dans une goutte lévitée sur terre présente une structure similaire, mais dissymétrisé, le maximum du brassage se trouve alors dans la partie inférieure de l'échantillon (figure 2.5) Une littérature abondante traite de la simulation de ces écoulements. (El-Kaddah et Szekely, 1983; Schwartz et Szekely, 1998; Bojarevics et Pericleous, 2003; Ai, 2004; Hyers, 2005; Li, 2006; Bardet, 2006).

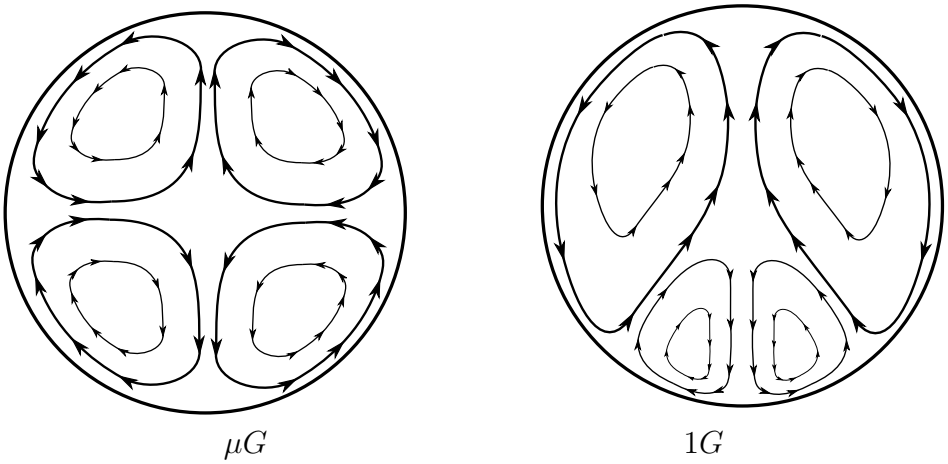


Figure 2.5: Représentation schématique de la structure des écoulements générés par le brassage électromagnétique. La goutte est brassée par un champ dipolaire en microgravité (à gauche), par un champ quadripolaire sur terre (à droite).

2.4.4 Convection thermo-gravitaire

La charge lévitée est chauffée de manière inhomogène (section 2.2.4 page 43). Des gradients thermiques apparaissent dans la goutte. En condition de gravité terrestre, cette l'inhomogénéité de température dans la charge liquide peut être source de convection naturelle. En utilisant l'approximation de Boussinesq, la dépendance de la masse volumique avec la température s'écrit :

$$\rho(T) = \rho(T_\infty)\,(1 + \beta(T - T_\infty)) \tag{2.76}$$

où T_∞ est la température moyenne dans la goutte et β sa dilatabilité thermique. Le gradient de masse volumique génère une force volumique rotationnelle de la forme :

$$\mathbf{g}\beta(T - T_\infty) \tag{2.77}$$

2.4.5 Convection thermo-centrifuge

Lorsque la goutte décrit un mouvement de rotation solide portée par $\mathbf{\Omega}$, ce mouvement génère un champ de vitesse de la forme :

$$\mathbf{u} = \Omega \times \mathbf{r} \tag{2.78}$$

où $\mathbf{r}$ est dirigé selon le vecteur de base $\mathbf{e_r}$ du système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) et z coïncide avec l'axe de rotation $\mathbf{\Omega}$. Ce champ d'accélération correspond à une force volumique $\rho r \Omega^2 \mathbf{e_r}$, analogue à celle de la gravité. En présence d'un gradient interne de température, on retrouve un champ de forces rotationnelles semblable à la convection naturelle.

2.4.6 Effet Marangoni

La tension de surface représente une densité d'énergie de cohésion à l'interface liquide-gaz. De manière analogue aux forces de électrostatique ou gravitaire, il existe une force dérivant du gradient de cette énergie. Dans l'effet Marangoni, c'est la dépendance en température de la tension de surface $\gamma(T)$ qui est l'origine du gradient d'énergie :

$$\gamma(T) = \gamma_{ref} - \Gamma(T - T_{ref}) \tag{2.79}$$

où

$$\Gamma = -\left.\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right|_{T=T_{ref}} \tag{2.80}$$

De manière générale, cet effet meut le liquide d'une zone chaude vers une zone froide (si $\Gamma > 0$) (Schiller *et al.*, 1982). Dans notre cas, c'est l'inhomogénéité du chauffage par induction qui est responsable de l'apparition de ce gradient thermique surfacique.

Nous cherchons à comparer les contraintes tangentielles provoquées respectivement par le champ magnétique et par l'effet Marangoni à partir de l'équilibre suivant :

$$\Gamma \left.\frac{\partial T}{\partial \theta}\right|_S \sim \left(\overline{\overline{\mathbf{M}}} \otimes \mathbf{e_r}\right).\mathbf{e}_\theta \tag{2.81}$$

Nous utilisons l'ordre de grandeur du gradient thermique $\mathcal{O}(\Theta) = \frac{P_0}{\frac{4}{3}\pi R \kappa_{th}}$ donné en section 2.5.4 page 71. Nous utilisons également la distance du pôle au plan méridien $\frac{\pi R}{2}$. Pour de faibles épaisseurs de peau, on écrit l'ordre de grandeur de la contrainte Marangoni :

$$\Gamma \frac{2\Theta_0}{\pi R} \quad \text{avec} \quad \Theta_0 = \frac{\chi_0 R \delta}{\kappa_{th}} \tag{2.82}$$

La contrainte électromagnétique peut s'écrire :

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{M}}} \otimes \mathbf{e_r}\right).\mathbf{e}_\theta = \frac{B_n B_\theta}{\mu_0} \sim \frac{P_{m,0}}{2\sqrt{2 + R_\omega + R_\omega^{-1}}} \sim P_{m,0}\frac{\delta}{2R} \tag{2.83}$$

Le rapport des termes de l'équation 2.81 s'écrit alors :

$$\frac{Marangoni}{e.m.} \sim R\omega_1 \frac{\Gamma}{\kappa_{th}} \tag{2.84}$$

Ainsi pour des valeurs typiques de Γ pour des métaux liquides Eustathopoulos *et al.* (1999) ($\Gamma_{Ni} = -4.10^{-4}\, J.m^{-2}.K^{-1}$, $\Gamma_{Al} = -10^{-4}\, J.m^{-2}.K^{-1}$, $\Gamma_{Ti} = -2.8.10^{-4}\, J.m^{-2}.K^{-1}$) les contraintes dues à l'effet Marangoni sont négligeables faces aux contraintes électromagnétiques (voir 2.6 page 66). L'échelle du gradient thermique surfacique est dérivée du terme de conduction de l'équation de la chaleur. En présence de convection, il convient de diviser ce rapport par le nombre de Nusselt caractérisant le transport par convection dans la goutte.

2.4.7 Oscillation de surface

La goutte possède une surface libre déformable susceptible d'être le siège d'instabilités. En régime statique, la goutte épouse une forme d'équilibre minimisant son énergie de surface. L'équilibre entre les forces de pression électromagnétique et les forces de tension de surface est caractérisé par un nombre de Bond magnétique $Bo_m = \frac{B_0^2 R}{2\mu_0 \gamma}$, où γ est la tension de surface de la goutte dans le gaz de l'enceinte. Quand la pression varie rapidement, la forme de la goutte évolue d'une position d'équilibre à une autre en passant par une étape transitoire oscillante (figure 2.6). Pour de faibles déformations, le comportement mécanique de la surface peut être assimilé à celui d'un oscillateur harmonique (Rayleigh, 1879; Lamb, 1975). De nombreux modes d'oscillations sont susceptibles d'apparaître. Chaque mode est associé à une longueur d'onde et à une fréquence spécifique.

Nous ne considérerons ici que le mode 2 (figure 2.7), premier mode où la surface se déforme, passant successivement d'une forme aplatie à une forme allongée par rapport aux pôles. Le mode 1 correspond aux oscillations solides décrites dans la section 2.3.4 page 54.

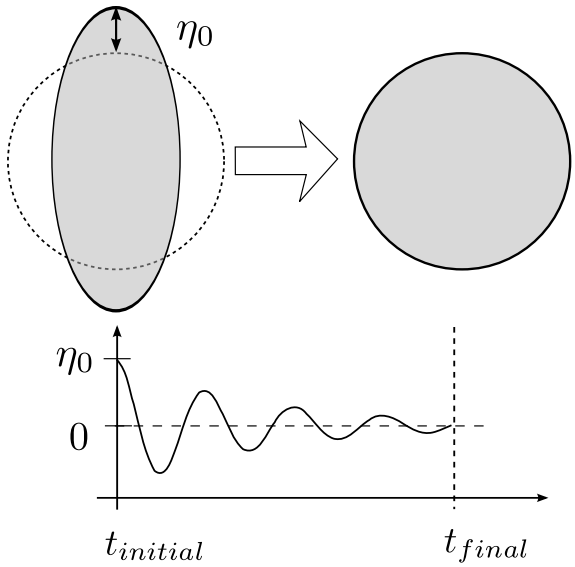


Figure 2.6: Retour à une forme d'équilibre sous l'effet de la seule tension superficielle.

On associe au mode 2 une fréquence propre d'oscillation $\Omega_2 = \left(\frac{8\gamma}{\rho R^3}\right)^{1/2}$. Dans ce mode, un écart relatif entre position initiale et finale $\eta_0 = \frac{R-R_0}{R_0}$ engendre un vitresse initiale de la surface telle que :

$$U_2 = \eta_0 R \Omega_2 \tag{2.85}$$

Une analyse mécanique permet d'évaluer l'écart entre la forme d'équilibre de la goutte et la sphère correspondant au même volume en fonction du champ magnétique appliqué :

$$\eta_0 = \frac{3}{8}\frac{B_0^2}{2\mu_0}\frac{R}{\gamma} = \frac{3}{8}B_m \tag{2.86}$$

Une fluctuation de la pression magnétique, d'amplitude relative α, provoque un écoulement dont le nombre de Reynolds caractéristique est :

$$Re_\gamma = \frac{3}{4}\alpha\frac{Bo_m R^2 \Omega_2}{\nu} \tag{2.87}$$

2.4.8 Freinage avec un champ magnétique permanent et uniforme

L'imposition d'un champ magnétique permanent (DC) est une technique utilisée pour stabiliser la lévitation d'un échantillon (Yasuda *et al.*, 2004). L'écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité dans un champ magnétique B_{frein} induit des courants dans la charge. Ces courants se composent avec le champ magnétique (DC) pour donner une force de freinage proportionnelle à la vitesse. En utilisant la loi d'Ohm (2.5),

$$\mathbf{F}_{frein} = \sigma_{el}(\mathbf{u} \times \mathbf{B_{frein}}) \times \mathbf{B_{frein}} = -\sigma_{el} B_{frein}^2 \mathbf{u}_\perp \tag{2.88}$$

où $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u} - \mathbf{u}.\frac{\mathbf{B_{frein}}}{B_{frein}}$ est la composante du champ de vitesse perpendiculaire au champ magnétique permanent. En comparant les forces de freinage magnétique aux forces visqueuses, on obtient le nombre de Hartmann,

$$\mathcal{O}\left(\sigma_{el} B_{frein}^2 \mathbf{u}_\perp\right) \sim \mathcal{O}\left(\rho\nu\nabla^2\mathbf{u}\right) \quad \text{soit} \quad Ha = \left(\frac{\sigma_{el} B_{frein}^2 R^2}{\rho\nu}\right)^{1/2} \tag{2.89}$$

2.4.9 Conclusion

En régime stationnaire, l'équation de la quantité de mouvement et les ordres de grandeurs des différents termes qui la constituent sont :

$$\begin{array}{ccccccccc} (\mathbf{u}.\nabla)\,\mathbf{u} & = & -\frac{1}{\rho}\nabla(P+P_m) & - & (\mathbf{g}+\mathbf{g_r}) & \beta(T-T_\infty) & + & \nu\nabla^2\mathbf{u} & +\frac{\nabla.\overline{\overline{\mathbf{M}}}}{\rho} \\ Iniertie & & Pression & & thermo- & convection & & Viscosité & EM \\ \frac{U^2}{L} & & \frac{P_{m,0}}{\rho L} & & (g+R\Omega_0^2) & \beta\Theta_u & & \frac{\nu U}{L^2} & \frac{P_{m,0}}{\rho L} \end{array} \tag{2.90}$$

L'équilibre des différentes sources de la convection et des forces d'inertie donne les vitesses caractéristiques liées à ces phénomènes :

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{U^2}{R} & \sim & g\beta\Theta & \Rightarrow & U_g & = & (Lg\beta\Theta)^{1/2} \\ \frac{U^2}{R} & \sim & R\Omega\beta\Theta & \Rightarrow & U_\Omega & = & (R^2\Omega_0^2 g\beta\Theta)^{1/2} \\ \frac{U^2}{R} & \sim & \frac{P_{m,0}}{\rho L} & \Rightarrow & U_A & = & \left(\frac{B_0^2}{\rho\mu_0}\right)^{1/2} \end{array} \tag{2.91}$$

où U_g, U_Ω et U_A sont respectivement les vitesses caractéristiques liées à la convection naturelle gravitaire, à la convection centrifuge et au brassage électromagnétique. On appelle U_A la vitesse d'Alfvén, caractéristique de la plupart des systèmes de brassage par induction.

Nous définissons par ailleurs les nombres de Grashof, Grashof magnétique et Grashof centrifuge à partir de ces vitesses. L'équilibre des forces d'inertie liées à ces vitesses avec les forces de dissipation visqueuse donne :

$$\frac{forces\,d'inertie}{forces\,visqueuses} = \frac{UL}{\nu} = Re = Gr^{1/2} \tag{2.92}$$

$$Gr_m = \left(\frac{U_A R}{\nu}\right)^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\frac{R^2}{\rho\nu^2} \tag{2.93}$$

$$Gr_\Omega = \left(\frac{U_\Omega R}{\nu}\right)^2 = \frac{\Omega\beta\Theta R^4}{\nu^2} \tag{2.94}$$

$$Gr_g = \left(\frac{U_g R}{\nu}\right)^2 = \frac{g\beta\Theta R^3}{\nu^2} \tag{2.95}$$

dont les valeurs sont données tableau (2.6). Pour un échantillon de TiAl en microgravité, la principale source de mouvement est le brassage électromagnétique avec $Re_A \sim 1500$. Ce brassage correspond à un nombre de Grashof magnétique de $Gr_m \sim 22.10^5$ qui est d'un ordre

de grandeur supérieur au nombre de Grashof critique vers la turbulence. Hyers *et al.* (2003) donnent une estimation du nombre de Grashof critique expérimental entre $1,7.10^5$ et $2,5.10^5$. Cela implique qu'un échantillon de TiAl liquide est le siège d'écoulements turbulents.

Tableau 2.5: Nombres adimensionnels

Nombre	Expression	Ordre de grandeur
Nombre de Bond magnétique	$Bo_m = P_{m,0}\dfrac{R}{\gamma}$	0,1
Nombre de Hartmann (pour $B_{frein} \sim 0,5\,à\,1\,T$)	$Ha = \left(\dfrac{\sigma_{el}B_{frein}^2R^2}{\rho\nu}\right)^{1/2}$	20 à 50

2.5 Thermique

Dans cette partie, nous nous intéressons aux grandeurs liées aux phénomènes de transferts thermiques stationnaires dans une charge sphérique chauffée par induction en présence ou non de convection. Nous identifions les différents mécanismes de transport de la chaleur au sein de l'échantillon ainsi qu'entre celui-ci et son milieu environnant. Nous dérivons les ordres de grandeur de la température moyenne ainsi que les écarts à cette moyenne dans la charge.

2.5.1 Description du système

On considère un échantillon lévité, sans contact matériel autre qu'avec le gaz de l'enceinte. On note κ_{th} et c_p la conductivité thermique et la capacité calorifique de l'échantillon. L'échantillon est soumis à un chauffage par induction non-uniforme localisé dans l'épaisseur de peau électromagnétique δ. Le gaz dans l'enceinte est à la pression atmosphérique P_{atm} et à température ambiante T_0. Sa conductivité thermique, sa masse volumique, sa capacité calorifique et sa viscosité cinématique sont notées respectivement $\kappa_{th,gaz}$, ρ_{gaz} , $C_{p,gaz}$ et ν_{gaz}. Leurs valeurssont reportées dans l'annexe A.

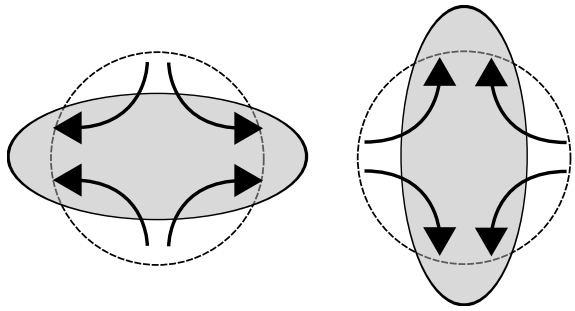


Figure 2.7: Mode d'oscillation 2.

Tableau 2.6: Comparaison des sources de la convection

Moteur de la convection	Reynolds associé	Ordre de grandeur
Brassage électromagnétique	$Re_A = Gr_m^{1/2} = \left(\frac{P_{m,0}R^2}{\rho\nu^2}\right)^{1/2}$	1500
Thermo-gravitaire	$Re_g = Gr_g^{1/2} = \left(\frac{g\beta\Theta R^3}{\nu^2}\right)^{1/2}$	0
Thermo-centrifuge (basé sur une vitesse de rotation de 20Hz)	$Re_\Omega = Gr_\Omega^{1/2} = \left(\frac{\Omega_0^2\beta\Theta R^4}{\nu^2}\right)^{1/2}$	210
Thermo-capillaire	$Re_\Gamma = Bo_\Gamma Re_A$	60
Oscillation de surface ($\alpha = 5\%$)	$Re_\gamma = \frac{3}{4}\alpha\frac{Bo_m R^2\Omega_2}{\nu}$	110

En régime stationnaire, et en l'absence de contact matériel, toute la puissance injectée par induction est évacuée de la charge par deux mécanismes :

- Transports conductif et convectif du gaz dans l'enceinte
- Rayonnement thermique.

Les transferts thermiques à l'intérieur de l'échantillon sont de deux natures :

- Conduction
- Convection

Nous ne traitons pas de la variation de quantité de chaleur produite par changement de phases ou de variétés allotropiques.

On définit les grandeurs suivantes :

- Le nombre de Prandtl du gaz $Pr_{gaz} = \frac{\nu_{gaz}}{\alpha_{th,gaz}}$, rapport entre les diffusions de la chaleur et de la quantité de mouvement.
- Le nombre de Grashof du gaz $Gr_{gaz} = \frac{g\beta(T-T_0)R^3}{\nu_{gaz}^2}$
- Le nombre de Nusselt $Nu = \frac{h_{ext}}{4\pi R\kappa_{th,gaz}}$, représentant l'importance du transfert thermique par rapport à la conduction dans l'atmosphère de l'enceinte. h_{ext} est ici le coefficient d'échange global à la surface de l'échantillon.
- Le nombre de Reynolds $Re_{gaz} = \frac{2RU_{gaz}}{\nu_{gaz}}$, basé sur la vitesse U_{gaz} dans l'enceinte et le diamètre de l'échantillon.

2.5.2 Équations fondamentales et hypothèses

Équation locale de la chaleur et condition limite

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(\kappa_{th}\nabla T) + \rho c_p(\mathbf{u}.\nabla)T & = & \chi \\ -\kappa_{th}\ \nabla T|_{surface} & = & \phi_{ext} \end{array} \right. \tag{2.96}$$

Bilan thermique global

$$\rho c_p V \frac{\partial}{\partial t} \langle T \rangle_V + \langle \phi_{ext} \rangle_S = P \tag{2.97}$$

où ϕ_{ext} est le flux thermique surfacique perdu par l'échantillon. Ce flux est positif pour un échantillon plus chaud que le milieu environnant.

Hypothèses

L'échantillon est considéré comme rayonnant comme un corps gris d'émissivité totale hémisphérique ϵ. Etant donné la difficulté de déterminer l'émissivité de manière expérimentale (Teodorescu *et al.*, 2005; Tsukada *et al.*, 2007), elle est fixée arbitrairement à $\epsilon = 0,4$ dans la suite de cette étude. L'épaisseur optique du milieu dans lequel l'échantillon rayonne est grande devant les dimensions caractéristiques de l'enceinte. Les parois de l'enceinte constituent une cavité fermée absorbant et rayonnant comme un corps gris d'émissivité ϵ_{ext}. Sauf indication contraire, on suppose que toutes les propriétés physiques sont indépendantes de la température. Le matériau constituant l'échantillon est uniforme et isotrope. Notre description se limite à des configurations où il est légitime de supposer que l'écoulement dans un échantillon liquide est laminaire et permanent. Les instabilités de la surface libre sont considérées comme faibles.

En régime stationnaire et avec une conductivité thermique constante, les équations 2.96 et 2.97deviennent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\kappa_{th}\nabla^2 T + \rho c_p(\mathbf{u}.\nabla)T & = & \chi \\ -\kappa_{th}\ \nabla T|_{r=R} & = & \phi_{ext} \end{array} \right. \tag{2.98}$$

$$\langle \phi_{ext} \rangle_S = -P \tag{2.99}$$

où $\mathbf{u}$ est le champ de vitesse stationnaire dans l'échantillon. Il est nul pour un échantillon solide.

2.5.3 Transferts externes

Conduction

En l'absence de convection forcée et naturelle dans l'enceinte, le flux thermique global par conduction s'écrit (Bianchi *et al.* (2004)),

$$\Phi_\kappa = 4\pi R \kappa_{th,gaz}(T - T_0) \tag{2.100}$$

Par la suite, nous normalisons les transports thermiques par le coefficient de transfert global par conduction $4\pi R\kappa_{th,gaz}$.

Convection naturelle

Le gaz dans l'enceinte est soumis à un gradient thermique dû à la différence entre la température ambiante $T_0 = 300\,K$ et celle de l'échantillon $1000\,K < T < 2000\,K$. Dans ces conditions, l'enceinte est le siège de convection naturelle (El-Kaddah et Szekely, 1983) qui est caractérisé par le nombre de Nusselt suivant :

$$Nu_n = 0,78\,(Gr_{gaz}Pr_{gaz})^{1/4} \text{ lorsque } 10^5 < Gr_{gaz} < 10^8 \tag{2.101}$$

Convection forcée

Il est également possible de refroidir la charge via un flux de gaz. Dans cette configuration de convection forcée, le Nusselt devient (El-Kaddah et Szekely, 1983) :

$$Nu_f = 0,8\,Re_{gaz}^{1/2}Pr_{gaz}^{1/3} \text{ lorsque } 150 < Re_{gaz} < 500 \tag{2.102}$$

Rayonnement

L'échantillon rayonne un flux thermique par qui s'exprime

$$\phi_\epsilon = \epsilon\sigma\left(T^4 - T_0^4\right) \tag{2.103}$$

où ϵ est l'émissivité totale hémisphérique de l'échantillon. Le flux est non linéaire en fonction de la température. Nous definissons un coefficient d'échange global dépendant de la température valable pour les faibles écarts de température,

$$h_\epsilon = 4A\epsilon\sigma T^3 \tag{2.104}$$

Cette expression permet de définir un nombre de Nusselt lié au rayonnement,

$$Nu_r = \frac{4\epsilon\sigma T^3 R}{\kappa_{th}} \tag{2.105}$$

L'équation (2.99), sous l'hypothèse d'un transfert purement radiatif, permet de définir la

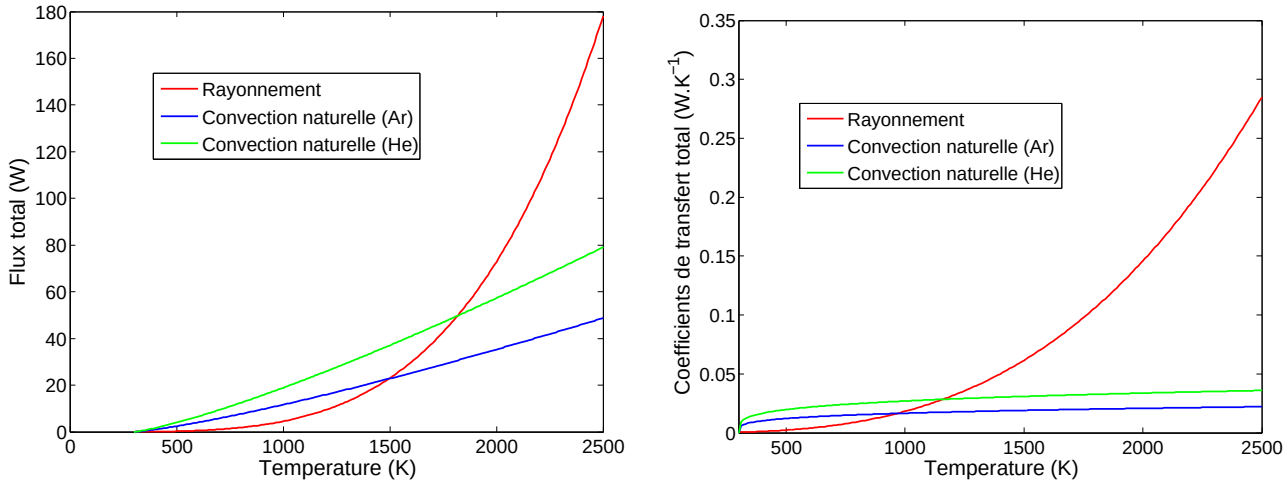
température de rayonnement équivalente suivante :

$$T_{surf} = \left(\frac{P}{A\epsilon\sigma} - T_0^4 \right)^{1/4} \tag{2.106}$$

Conclusion

La figure (2.8a) représente en fonction de la température la variation des flux totaux évacués par les différents phénomènes de transport. On remarque que le transfert par rayonnement est supérieur au transfert par convection naturelle dès $1700K$.

La figure (2.8b) donne une comparaison des coefficients de transfert entre eux. Le coefficient h_ϵ, associé au rayonnement, devient le plus élevé dès 1200 K et pour des températures de l'ordre de 2000 K est d'un ordre de grandeur supérieur aux autres coéfficients d'échanges. Dans la suite de cette étude nous considérons que les échanges sont purement radiatifs. Cela représente une hypothèse raisonnable pour les hautes températures, ou pour les faibles pressions dans l'enceinte.



(a) (b)

Figure 2.8: Comparaison des transferts de chaleur externes. (a) Flux totaux de chaleur évacués. (b) Coefficients de transfert globaux.

2.5.4 Transferts internes

La température moyenne dépend de la nature des transferts à la surface de la charge. Le gradient interne de température dépend de la nature des transferts à l'intérieur de celle-ci. Nous avons vu dans la section 2.2.4 que la densité de puissance Joule dans la charge est inhomogène. Elle est principalement réparti à la surface, proche du plan équatorial. Le gradient thermique interne est d'autant plus faible que le transfert de la chaleur est efficace. Dans cette section nous décrivons les différents types de transfert de la chaleur, conduction et convection, et estimons le gradient thermique résultant. Les charges considérées étant opaques, nous omettons délibérément la description des transports par rayonnement.

Conduction

Dans une charge solide, le transfert est purement conductif. On cherche un ordre de grandeur du gradient de température. En écrivant la température sous la forme $T = \langle T \rangle_V + \Theta$ dans l'équation locale de la chaleur (2.98), on obtient l'ordre de grandeur suivant :

$$\mathcal{O}\left(\nabla^2\Theta\right) \sim \mathcal{O}\left(\frac{\chi}{\kappa_{th}}\right) \quad \text{soit} \quad \Theta_0 = \frac{P_0}{h_\kappa} \tag{2.107}$$

où $h_\kappa = \frac{4}{3}\pi R \kappa_{th}$ est défini comme le coefficient de transfert global de la chaleur dans l'échantillon.

La condition limite de l'équation (2.98) met en évidence l'influence de la condition limite sur le gradient thermique interne :

$$\mathcal{O}\left(\Theta\right) \sim \frac{P_0}{h_\kappa(1+Bi)} \tag{2.108}$$

où $Bi = \frac{h_\epsilon}{h_\kappa}$ est le nombre de Biot dont la valeur détermine la répartition de température dans l'échantillon :

- Pour $Bi << 1$, les transferts internes sont beaucoup plus rapides que les transferts externes. La température est globalement uniforme dans tout l'échantillon.
- Pour $Bi >> 1$, les transferts externes dominent. Les gradients thermiques internes sont importants.

Les équations locale et globale de la température donnent une idée de la carte de température dans l'échantillon solide :

- Pour un faible nombre de Biot, le gradient thermique dans le volume de l'échantillon ne dépend que de la puissance Joule et de la conductivité thermique de l'échantillon.

- Le chauffage Joule est localisé à la surface de l'échantillon (dans l'épaisseur de peau δ) et est maximum à l'équateur. On s'attend à ce que le maximum de température soit proche de ce maximum. Par condition de symétrie, il est nécessairement situé sur le plan équatorial.
- Le gradient de température normal à la surface est négatif. Une estimation de ce gradient est $-\frac{P}{A\kappa_{th}}$. Cela implique qu'il est impossible que le maximum de température soit localisé sur la surface, quelque soit le chauffage volumique.
- Le chauffage est minimum sur l'axe. On s'attend à ce que le point ou la température est minimum soit proche de l'axe.
- L'échantillon est axisymétrique par rapport à l'axe des pôles et symétrique par rapport au plan méridien. La continuité de la température et du flux thermique impose une dérivée de la température nulle au centre de la sphère.

Convection

En présence de brassage électromagnétique, le transport de la chaleur par convection est plus efficace que celui du à la conduction. La chaleur est advectée de la partie chaude de la goutte vers son centre.

A partir du temps de convection R/U_A, nous définissons un coefficient de transfert global de convection :

$$h_u = \frac{4}{3}\pi R^2 \rho c_p U_A \tag{2.109}$$

En comparant ce coefficient à h_κ, on établit le nombre de Peclet,

$$Pe = \frac{h_u}{h_\kappa} = \frac{U_A R}{\alpha_{th}} \tag{2.110}$$

dont la valeur caractérise l'importance des transferts thermiques par convection par rapport aux transferts par conduction. Si $Pe >> 1$, le nombre de nombre Biot n'est plus pertinant pour caractériser la répartition de la température dans l'échantillon. Dans ce cas, il convient d'observer $\frac{Bi}{Pe}$. Nous établissons l'ordre de grandeur du gradient de température dans l'échantillon par $\frac{\Theta_0}{Pe}$ où θ_0 est définit par l'équation 2.107. La répartition de température dans un echantillon liquide est beaucoup plus homogène que dans une charge solide.

2.5.5 Ordre de grandeur de la température

Les tableaux 2.7a page suivante et 2.7b page suivante présentent respectivement les ordres de grandeur des nombres adimensionnés et des températures caractéristiques dans l'échantillon. On remarque que le gradient interne de la température θ_0 est faible devant la température absolue de la charge T_{surf}, que celle-ci soit liquide ou solide. On remarque également que le nombre de Peclet calculé à partir de la vitesse d'Alfvén est de l'ordre de 200. Ceci est significatif de la prédominance de la convection sur la conduction pour les transferts thermiques.

De manière générale, nous utiliserons par la suite h_{int} pour quantifier l'ensemble des transferts internes à l'échantillon et h_{ext} pour les transferts à la condition limite.

2.6 Conclusion

Une étude des phénomènes mis en jeu dans une charge en lévitation a été réalisée. Les ordres de grandeur associés ont été dérivés et peuvent tous s'exprimer à partir des paramètres géométriques et électriques du lévitateur et des propriétés de la charge. Une description qualitative des champs magnétique, de vitesse et de température a été avancée. Les différentes sources de la convection ont été discutées. Le brassage électromagnétique se révèle être prédominant dans la gamme de paramètres que nous avons choisie de considérer. Les différents transferts thermiques entre la charge et l'enceinte ont été comparés. Le rayonnement s'avère être le transport le plus efficace de chaleur. Par soucis de simplicité, nous négligerons les autres formes de transfert thermique. Cette approximation peut amener à surestimer la température moyenne de la charge. L'ordre de grandeur du nombre de Peclet, établi pour une goutte brassée électromagnétiquement, indique une prédominance des transferts par convection sur les transferts conductifs.

L'étude de l'ordre de grandeur du champ magnétique en fonction de la configuration dipolaire ou quadripolaire permet d'apprécier les avantages à l'utilisation de la microgravité. A courant équivalent, un champ dipolaire permet un chauffage important et une force de brassage plus faible qu'un champ quadripolaire. Ce dernier permet un centrage efficace de la charge et un chauffage faible. En superposant un champ dipolaire avec un champ quadripolaire, Lohoefer et Piller (2001) exploitent le principe de superposition rendu possible par la linéarité des équations de l'induction. Il est possible d'utiliser les deux champs de manière simultanée. Le champ quadripolaire est appelé champ positionneur, tandis que le dipolaire est appelé champ

Tableau 2.7: Grandeurs caractéristiques associées à la thermique. Les propriétés des gaz sont prise à 300K. Le Grashof est calculé pour un échantillon à 2000K.

(a) Gaz

Grandeur	Expression	Hélium	Argon
Prandtl	$Pr_{gaz} = \frac{\nu}{\alpha_{th}}$	$0,7288$	$0,0786$
Grashof	$Gr_{gaz} = \frac{g\beta\Theta(2R)^3}{\nu^2}$	$1,84.10^3$	$1,02.10^7$

(b) Échantillon

Grandeur	Expression	Titane Aluminium
Nombre de Biot	$Bi = \frac{h_{ext}}{h_\kappa}$	0,4
Nombre de Peclet	$Pe = \frac{U_A R}{\alpha_{th}}$	200
Température radiative équivalente	$T_{surf} = (\frac{P_0}{A\epsilon\sigma} + T_0^4)^{1/4}$	2000
Gradient interne	$\Theta_0 = \frac{P_0}{h_\kappa}$	200
Gradient interne (liquide)	$\frac{\Theta_0}{Pe}$	1

chauffant. En pratique, une telle séparation n'est possible qu'en condition de microgravité. Sur terre, seul le champ quadripolaire permet la lévitation. Il est donc nécessairement élevé afin que les forces e.m. équilibrent le poids de la charge. Cela induit un chauffage important, malgré sa faible efficacité. Il devient difficile de découpler la fonction de chauffage de la lévitation, surtout pour les charges dont la densité est importante.

C'est pourquoi l'utilisation de la microgravité est avantageuse pour la détermination de propriétés thermophysiques. Les champs utilisés y sont suffisamment faibles pour que la forme de la goutte s'écarte peu de la sphère ($Bo_m = 0,24$) et le brassage électromagnétique est suffisemment faible pour rester en régime laminaire (Hyers *et al.*, 2003).

Enfin, ces résultats nous permettent de bâtir une stratégie pour la modélisation d'une expérience de calorimétrie modulée utilisant l'inducteur TEMPUS.

Le brassage e.m. est la source principale de convection. En pratique, l'intensite du champ quadripolaire est plus faible que celle du champ dipolaire. Nous négligeons le brasage qu'il induit. L'expérience nous apprend que la goutte conserve une forme sphérique. L'influence des oscillations de la surface libre sur l'écoulement est négligé devant l'influence du brassage. Il nous parait donc raisonnable de simuler une goutte indéformable. Le gradient thermique est faible dans une goutte brassée. Nous négligeons la dépendance des propriétés physiques avec la température. Ces approximations permettent de découpler les aspects e.m., mécanique et thermique.

Quand la forme de la surface est déterminée, l'induction ne dépend ni des champs de vitesse, ni des champs de température. Nous pouvons donc calculer la densité des forces e.m. et de la puissance Joule à partir des valeurs de courant et de fréquence. Le calcul de l'écoulement ne nécessite que la connaissance de la densité des forces e.m.. Enfin, le champ de température peut être calculé grâce à la densité de puissance Joule dans la goutte et au champ de vitesse.

Chapitre 3

Simulations préliminaires

3.1 Outils numériques

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons utilisé des outils numériques commerciaux et des codes développés au laboratoire SIMAP - EPM. Cette section introduit succinctement leur formulation et leurs limitations, ainsi que les but qu'ils servent. Nous présentons également les résultats de simulations préliminaires de l'électromagnétisme, la mécanique des fluides et la thermique dans le cas d'une lévitation stationnaire (ie sans modulation). L'objectif est d'assurer une bonne description de l'état stationnaire avant de simuler une expérience de calorimétrie modulée.

3.1.1 Présentation des outils numériques

Module Induct2D et Fluent 6.3

- Fluent est un code de calcul commercial de volumes finis. Il permet la résolution stationnaire et instationnaire de l'équation de la chaleur et de la mécanique des fluides pour des géométries complexes en deux ou trois dimensions à l'aide de maillages non structurés.
- Induct2D est un module Fluent de calcul de l'équation de l'induction développé au sein du groupe EPM dans le laboratoire SIMAP par Yves Delonnoy . Il repose sur une formulation harmonique de potentiel vecteur (Delannoy *et al.*, 2002). Les inconnues sont les parties réelles et complexes du potentiel vecteur **A**. Il est limité à l'étude de configurations 2-D axisymétriques.

Code Lohoefer

Dans le cadre de l'étude expérimentale présentée dans le chapitre 4 page 97, un outil de calcul semi-analytique a été développé pour la résolution de l'induction pour un inducteur 3D arbitraire. Cet outil est basé sur la solution analytique de l'induction dans une sphère (Lohoefer, 2003) . Le principe général du calcul se décompose ainsi :

- La géométrie tridimennsionelle de l'inducteur est prise en compte grâce à un développement sur une base d'harmoniques sphériques généralisées (équivalent de la transformée de fourier pour des fonctions définies sur une sphère).
- L'influence de l'inducteur est ramenée à une condition limite à la surface de la charge.
- L'induction est traitée par une formulation harmonique du potentiel vecteur $\mathbf{A}$.
- Le potentiel vecteur est décomposé en un champ induit par l'inducteur et un champ induit par les courants dans la sphère.
- La résolution dans la charge est faite de manière spectrale.
- On obtient une expression explicite des grandeurs suivantes :
  - potentiel vecteur dans la charge et dans l'espace lui étant connexe.
  - densité de courant dans la charge

Les hypothèses générales sont décrites en section 2.2.2 page 36. Les limitations de cette solution analytique sont :

- applicable uniquement pour une sphère
- conductivité électrique de la charge constante
- la densité de courant dans l'inducteur doit être connue a priori.

La conduite du calcul amène à démontrer que le courant induit est tangentiel à la surface.

Le code numérique consiste à évaluer ces solutions et à les intégrer numériquement sur la sphère. Par commodité, la densité de courant inducteur est décrite sur une trajectoire curviligne en trois dimensions. Cette description est appelée approximation filaire. Elle est valable si la distance entre la spire et la charge est grande devant l'épaisseur d'une spire. L'erreur commise est quantifiée grâce à une comparaison code à code avec COMSOL, un logiciel de calcul en éléments finis capable de calculer la répartition des courants dans le volume de l'inducteur.

3.2 Simulations

Nos objectifs sont :

- simuler une expérience de calorimétrie modulée analysant dans le lévitateur TEMPUS un échantillon de TiAl solide et liquide.
- concevoir un inducteur optimisé

Pour traiter le premier objectif, nous avons fait les simplifications suivantes :

- la géométrie de l'inducteur Tempus est axisymétrique.
- l'échantillon a une position mécanique stable, donné.
- Même dans son état liquide, la forme de l'échantillon est sphèrique.
- l'ordre de grandeur des gradients de température dans l'échantillon est faible. On ne prend donc pas en compte les variations de propriétés physiques (σ_{el}, ν, ρ, κ_{th} et c_p) avec la température.

Ces arguments nous permettent d'utiliser Fluent et le module Induct2D pour traiter l'ensemble du problème découplé de manière séquentielle :

- Résolution de l'induction pour une sphère au centre de l'inducteur en configuration dipolaire. Les paramètres d'entrée sont le courant et la fréquence du courant inducteur. On obtient la carte de la puissance Joule dissipée dans l'échantillon ainsi que les forces volumiques de Laplace s'exerçant dans la sphère.
- Résolution de l'écoulement laminaire provoqué par les forces de Laplace. On obtient le champ de vitesse stationnaire.
- Résolution du champ de température dans l'échantillon à partir de la puissance Joule et des champs de vitesse obtenus précédement

Pour traiter le second objectif, les simulations doivent :

- Permettre de tester une géométrie d'inducteur rapidement.
- Calculer la puissance Joule totale dissipée dans la charge et sa position d'équilibre.
- Evaluer la stabilité de la charge (oscillation et rotation).

Dans le paragraphe 2.3.5 page 55, nous avons montré qu'une description axisymétrique de l'inducteur permet pas de rendre compte de l'apparition d'un couple électromagnétique. Nous devons donc ajouter la condition suivante :

- Permettre la description de la géométrie 3D d'un inducteur.

Pour satisfaire ce cahier des charges, nous avons écarté l'utilisation du module Induct 2D. La raison principale étant son incapacité à simuler une géométrie 3D.

Nous avons préféré une approche semi-analytique. Les travaux présentés dans Lohoefer (2003) donnent les solutions analytiques de la densité de courant $\mathbf{J}$ et du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ induit par une nappe de courant 3-D arbitraire sur une sphère parfaite. A partir de ces travaux, nous avons développé un code de calcul dans l'environnement Matlab permettant de dessiner un

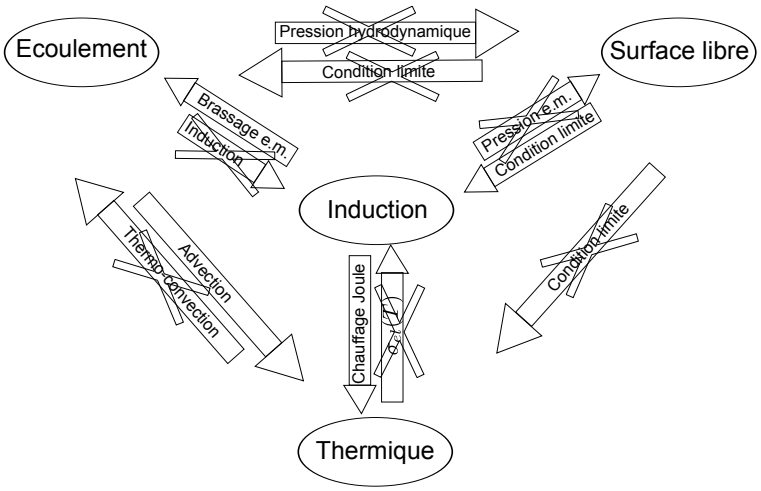


Figure 3.1: Couplages physiques et hypothèses

inducteur filaire 3D et de calculer la solution de l'induction de celui ci sur une sphère. Pour un inducteur donné (courant I_0, fréquence ω_1), une sphère donnée (rayon R, conductivité électrique σ_{el}) et une position relative donnée (x, y et z), nous calculons $\mathbf{J}$ et $\mathbf{A}$ sur un ensemble de points répartis dans l'échantillon sphérique. La connaissance de $\mathbf{A}$ permet de calculer $\mathbf{B}$ (voir équation 2.30 page 43), qui permet de calculer $\mathbf{F}$ et $\mathbf{c}$ (équations 2.44 page 45 et 2.66 page 56). $\mathbf{J}$ permet de calculer χ (équation 2.35 page 44). En intégrant numériquement les grandeurs locales $\mathbf{F}$, $\mathbf{c}$ et χ, nous calculons la force totale $\mathbf{F}_{tot}$, le couple total $\mathbf{C}$ et la puissance Joule totale P. A partir de la force totale, la matrice Jacobienne des forces en fonction de la position de l'échantillon est calculée (équation 2.61 page 54). Les valeurs propres de cette matrice sont calculées. Si les parties réelles de ces dernières sont négatives, la position est stable. Leurs modules sont les fréquences propres d'oscillation de l'échantillon autour de sa position d'équilibre. Un algorithme de Raphson Newton est utilisé pour déterminer la position d'équilibre. Pour cette position, la résultante des forces est nulle.

Nous présentons les résultats de simulation de ce code pour une configuration académique facilement comparable avec d'autre résultats de calcul.

3.2.1 Inducteur Tempus

Nous choisissons une température T_{surf} de 2000 K. Tous les calculs ont été réalisés avec le logiciel Fluent 6.3. Les schémas numériques utilisés sont tous à base de volume finis en formulation implicite. Les paramètres numériques concernant les simulations sont donnés

tableau 3.2.

Tableau 3.1: Propriétés et paramètres physiques des simulations

Propriété	Unité	Symbol	Valeur
Masse volumique	$kg.m^{-3}$	ρ	3860
Capacité calorifique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	c_p	663
Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$	κ_{th}	5 à 23,1
Conductivité électrique	$(\Omega.m)^{-1}$	σ_{el}	$5,26.10^5$
Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$	ν_0	$9,5.10^{-7}$
Emissivité totale hémisphérique	$[-]$	ϵ	$0,4$
Rayon	mm	R	4
Température ambiante	K	T_0	300

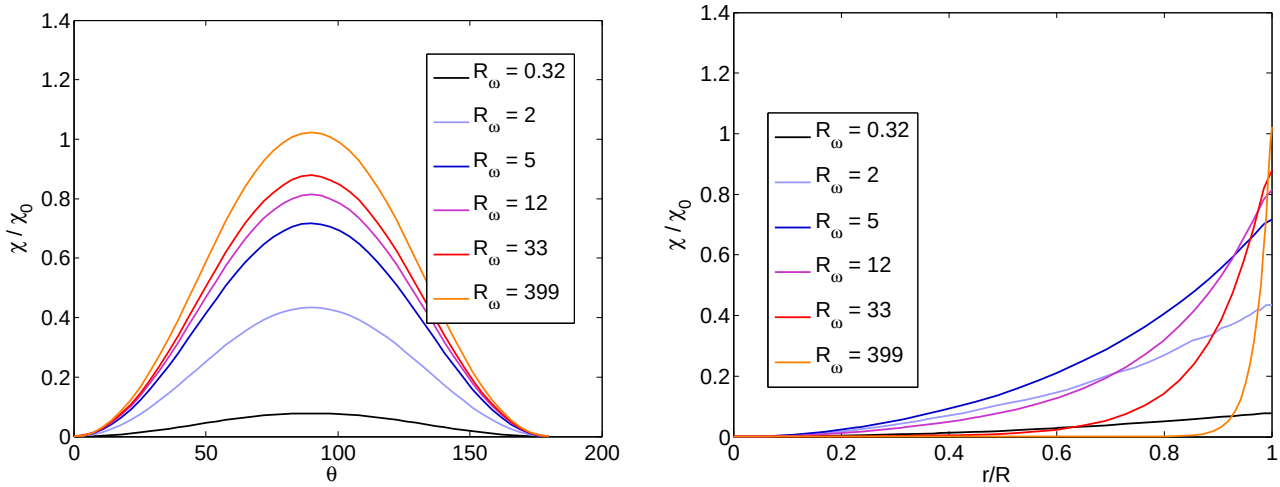
Fréquence du courant $\frac{\omega_1}{2\pi}\,(kHz)$	9.6	60	150	350	1 000	12 000
Intensité du courant (crète) $I_0(A)$	1979	339	174	121	86	26.4
Epaisseur de peau $\delta\,(mm)$	7,07	2,83	1,79	1,17	0,69	0,20
Paramètre d'écran R_ω	0.64	4.0	9.97	23.3	66.4	797

Tableau 3.2: Paramètres numériques des simulations

	Nombre adimensionnel	
Induction	$R_{\omega,maille} \sim 4.10^{-3}$	10^{-12}
Convection	$0 < Re_{maille} < 5$	10^{-3}
Thermique stationnaire	$0 < Pe_{maille} < 1$	10^{-12}

Induction

Nous simulons le problème de l'induction pour la géométrie TEMPUS (figure 1.6). Les paramètres listés dans le tableau 3.1 sont choisis de manière à ce que la puissance totale dissipée par effet Joule dans la charge soit constante et égale à $72\,W$ pour tous les couples fréquences / intensités de courant.



(a) (b)

Figure 3.2: Puissance Joule normalisée par χ_0 pour différentes valeurs du paramètre d'écran électromagnétique. Les valeurs sont prises (a) à la surface et (b) sur le plan équatorial

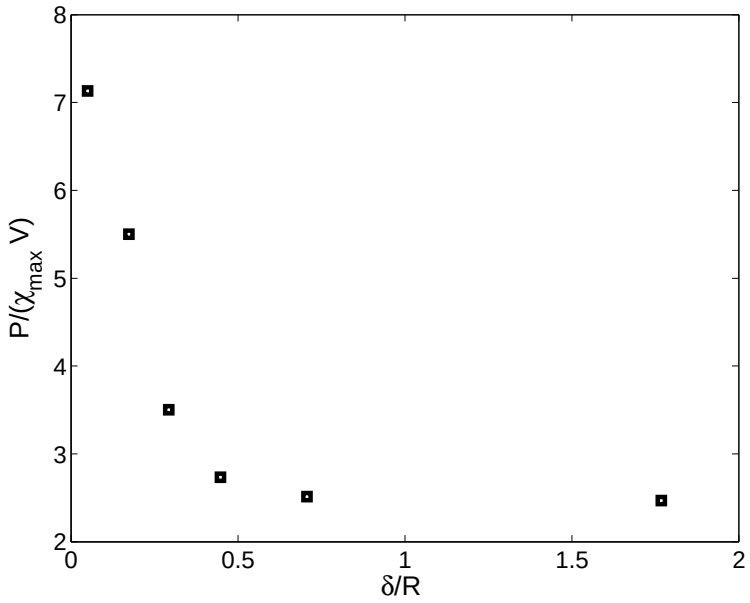


Figure 3.3: Rapport $\frac{\chi_{max}V}{P}$

Inhomogénéité de la puissance Joule Le profil de la puissance Joule est présenté figure3.2. On remarque que la forme de la desité de puissance Joule à la surface ressemble à celle de la fonction $\sin^2\theta$ prédite par l'approche analytique (voir annexe B). Dans le plan

équatorial, cette densité présente une décroissance quasi-exponentielle dans l'épaisseur de peau δ, caractéristique des problèmes d'induction. La figure 3.3 montre l'inhomogénéité du chauffage sur l'ensemble de la charge en fonction du rapport $\frac{\delta}{R}$. Cette inhomogénéité augmente rapidement quand l'épaisseur de peau diminue.

Ecoulement

L'écoulement est calculé à partir des densités de forces e.m. calculées dans les simulations de l'induction.

Brassage électromagnétique Nous nous interessons à des écoulements permanents laminaires. Pour nous assurer que les cas simuler suivent bien un tel comportement , nous somme intervenu sur deux paramètres :

1. Nous augmentons artificiellement la viscosité du métal liquide par rapport aux propriétés du TiAl (de 20 à 100 fois la viscosité réelle)
2. Nous ajoutons un terme de freinage correspondant à la présence d'un champ magnétique permanent orienté selon l'axe vertical $\mathbf{e_z}$. Dans ce cas, la valeur de la viscosité est celle du TiAl.

Les tableaux 3.3 et 3.4 présentent l'évolution de la fréquence vortex pour ces simulations. Conformément à l'intuition, cette fréquence diminue quand la valeur de la viscosité augmente ou quand la valeur du champ magnétique permanent augmente. La figure 3.4 comparent la fonction courant pour les cas où la viscosité est augmenté (a, b, c et d) avec les cas où la force de freinage est imposée (e, f, g et h). Chacun des cas présente une structure similaire avec deux vortex toroïdaux contra-rotatif. La figure 3.5 compare les profils de la vitesse normalisée à la surface (a et b), dans le plan équatorial (c et d) et sur l'axe de symétrie (e et f) pour les mêmes cas.

Influence de la viscosité La valeur de vitesses représentant seulement 10 % à 40% de la vitesse d'Alfven. Ce résultat est cohérent avec les valeurs relativement faibles des nombres de Reynolds d'Alfven calculés pour chaque viscosité (de 16 à 80).

Influence du freinage magnétique Conformément à l'ordres de grandeur élevé du nombre de Reynolds pour une goutte liquide de TiAl sous brassage, ($Re_A = 1500$, voir

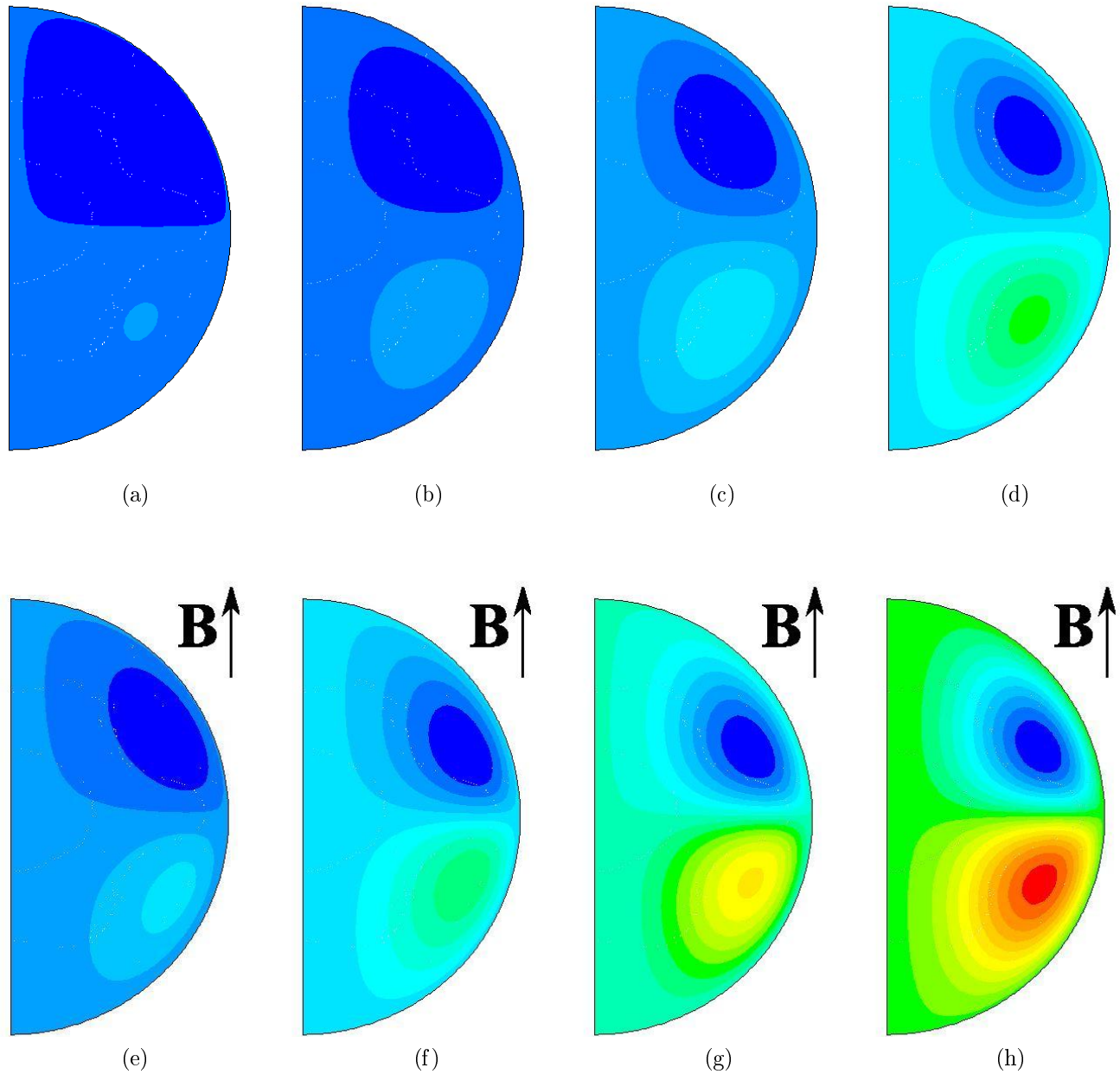


Figure 3.4: Fonction de courant de l'écoulement. En haut, variation de la viscosité. En bas, variation de l'intensité du champ permanent freinant. (a) $\nu = 100\nu_0$. (b) $\nu = 75\nu_0$. (c) $\nu = 40\nu_0$. (d) $\nu = 20\nu_0$. (e) $B_{frein} = 1,2T$. (f) $B_{frein} = 0,8T$. (g) $B_{frein} = 0,6T$. (h) $B_{frein} = 0,5T$. Echelle absolue : $min = 0\,kg.s^{-1}$ $max = 4.6\,10^{-3}\,kg.s^{-1}$

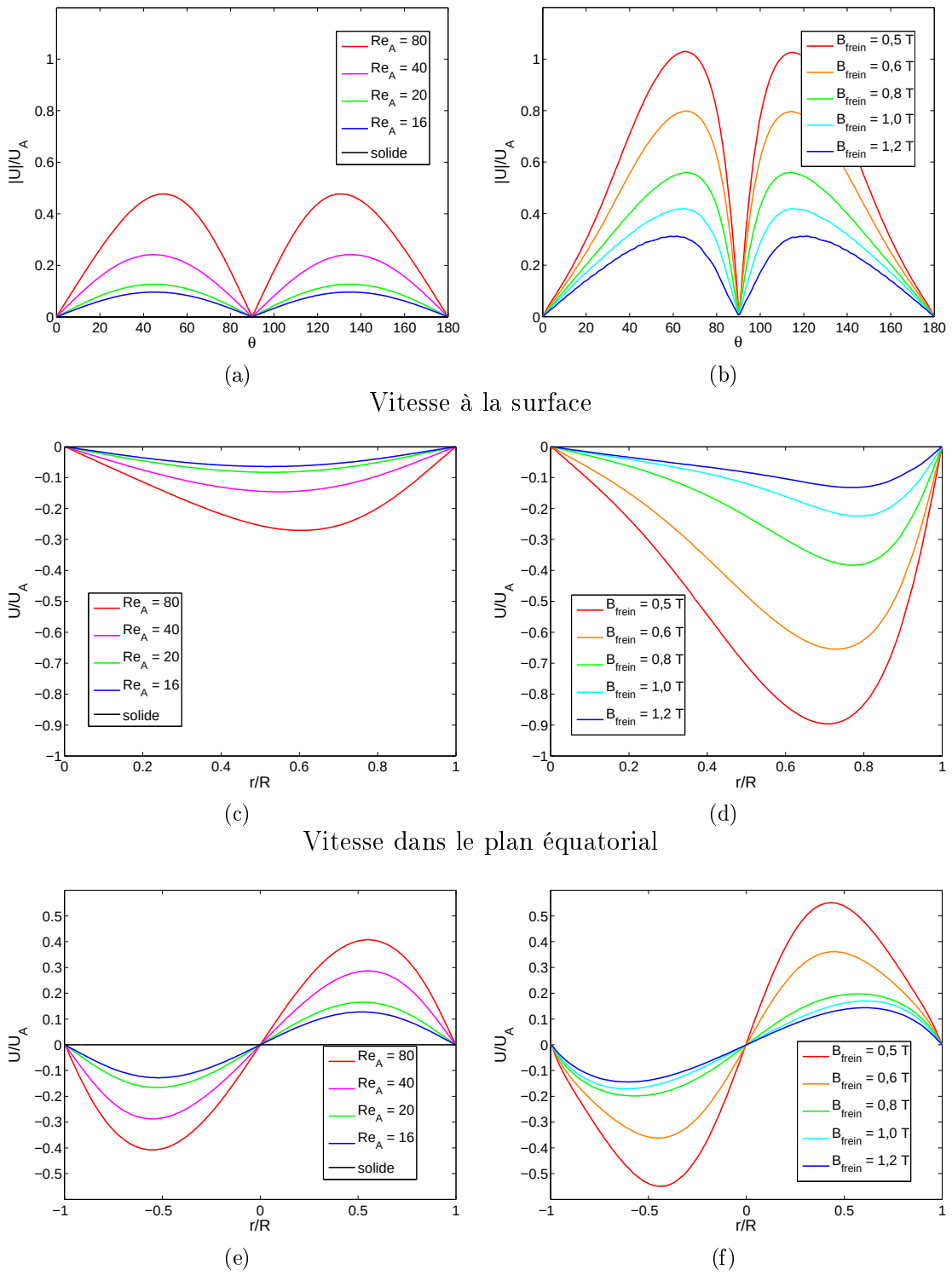


Figure 3.5: Vitesse normalisée par U_A. A gauche Re_A varie de 16 à 80 (variation de la viscosité (a), (c), (e)). A droite un champ magnétique statique B_{frein} freine l'écoulement ((b), (d), (f)). Il varie de 0,5 à 1,2 T.

Tableau 3.3: Valeurs des fréquences vortex (voir équation 2.75 page 58) en fonction du champ magnétique de freinage

$B_{frein}(T)$	Ha	f_{vortex} (Hz)
$0,5$	24,0	164,05
$0,6$	28,7	124,05
$0,8$	38,3	81,16
$1,0$	47,9	57,58
$1,2$	57,9	41,36

Tableau 3.4: Valeurs des fréquences vortex en fonction de la viscosité

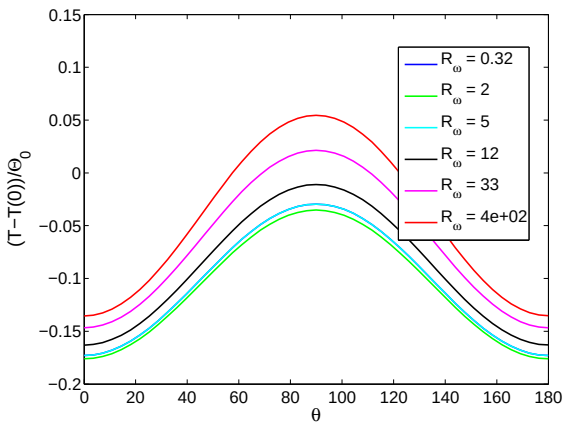
ν	Re_A	f_{vortex} (Hz)
$20\nu_0$	78,6	68,13
$40\nu_0$	39,3	35,70
$75\nu_0$	21,0	19,24
$100\nu_0$	15,7	14,72

tableau le tableau 2.6), sans freinage, aucune solution stationnaire n'est trouvé (pas de convergence numérique). La convergence numérique est atteinte pour un état stationnaire à partir de $B_{frein} > 0,5T$. Pour les différentes valeurs du nombre de Hartmann (de 24 à 60), la vitesse est proche de la vitesse d'Alfvén. Quand la valeur du champ magnétique augmente, les position des maxima des profils de vitesse à la surface et le long de l'axe de symétrie se rapprochent du plan équatorial tandis que la position du maximum dans ce plan se rapproche de la surface de la goutte. Cela indique que la position des vortex est modifiée par l'imposition du champ magnétique et qu'elle se rapproche vers la ligne équatoriale de l'échantillon, là où le brassage est le plus intense.

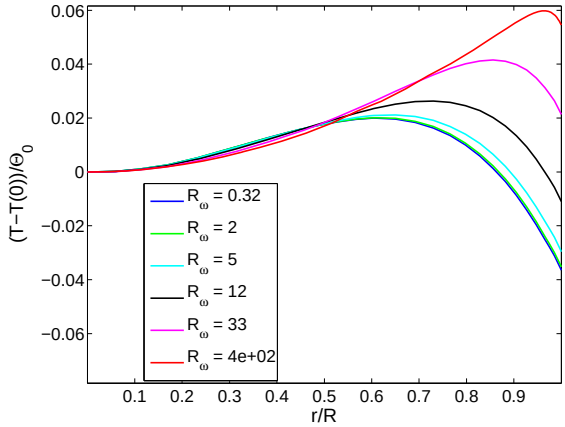
Thermique

Température dans un échantillon solide Nous resolvons l'équation de la chaleur stationnaire pour un échantillon solide de $4\,mm$ de rayon. La condition limite thermique est uniquement radiative. Le terme source χ de l'équation de la chaleur est issu du calcul de l'induction. La figure 3.6 présente les résultats pour les profils de la température normalisée à la surface (a), dans le plan équatorial (b) et sur l'axe de symétrie (c) pour les différentes

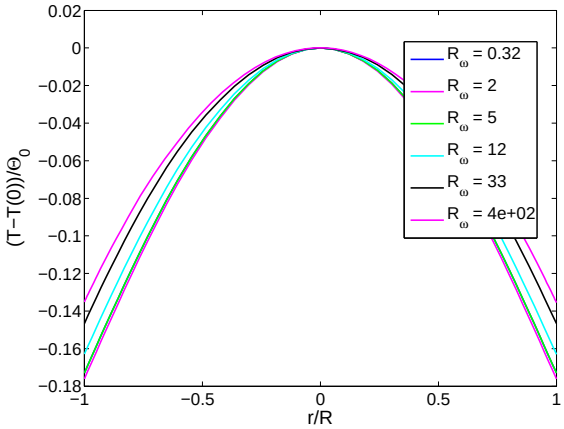
valeurs du paramètre d'éran électromagnétique.



(a) Température à la Surface



(b) Température sur le plan équatorial



(c) Température sur l'axe de symétrie

Figure 3.6: Températures normalisées par Θ_0 pour différentes valeurs du paramètre d'écran électromagnétique.

Le gradient thermique à la surface ne dépend pas de la répartition de puissance Joule mais de la puissance totale P.

Nous observons les points suivants :

- La position du maximum de la température est toujours situé dans le plan équatorial. Quand δ diminue, la position radiale de ce maximum se rapproche de la surface, sans jamais l'atteindre.
- Le minimum de température est toujours localisé aux pôles de l'échantillon.
- Le profil de température à la surface est similaire au profil de source Joule.

- Le profil de température sur l'axe semble parabolique. Son maximum est au centre de l'échantillon.
- Le profil équatorial a une pente nulle pour $r = 0$.

Ces observations sont en accord avec les déductions faites en section 2.5.4 page 71.

Convection Nous résolvons l'équation de la chaleur en présence de convection. Les champs de vitesses imposé sont présentés section 3.2.1 page 83. La figure 3.6 compare les profils de la température normalisée à la surface (a et b), dans le plan équatorial (c et d) et sur l'axe de symétrie (e et f) pour les cas où la viscosité est augmenté et où la force de freinage est imposée.

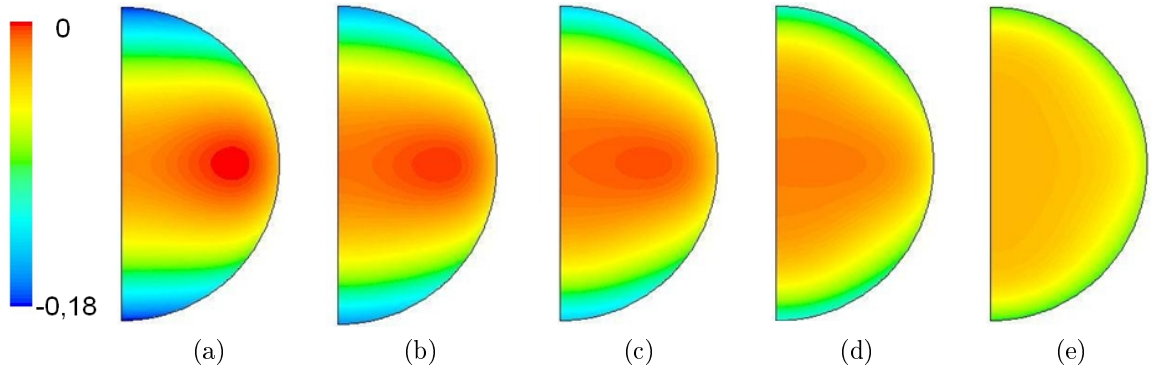


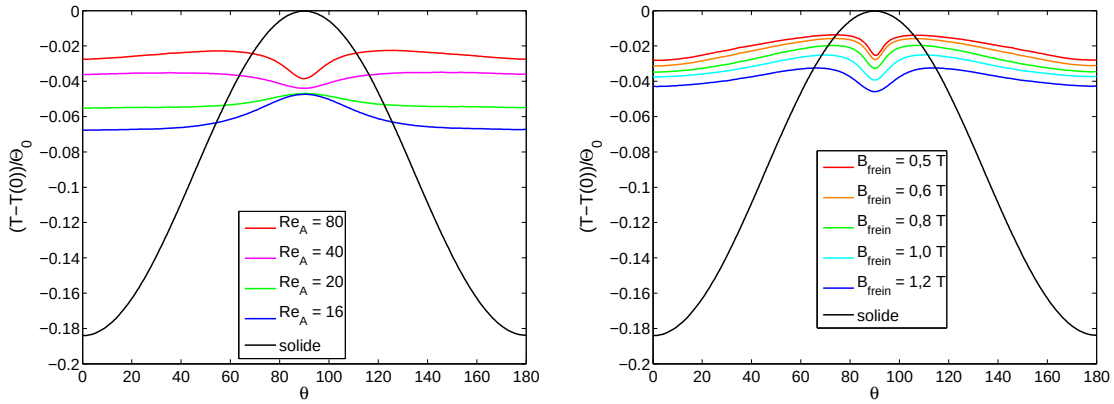
Figure 3.7: Carte de température normalisée par Θ_0 pour des échantillons brassés en fonction de la viscosité. (a) Solide (b)$\nu = 100\nu_0$. (c) $\nu = 75\nu_0$. (d) $\nu = 40\nu_0$. (e) $\nu = 20\nu_0$.

La figure 3.8 présente la température normalisée à la surface pour les différentes valeures de Re_A. La figure 3.7 présente les cartes de température correspondantes. En présence de convection, la température normalisée tend vers 0. Ceci est conforme à l'intuition physique : une forte convection homogénéise le champ de température à la surface de l'échantillon.

3.2.2 Inducteurs 3D

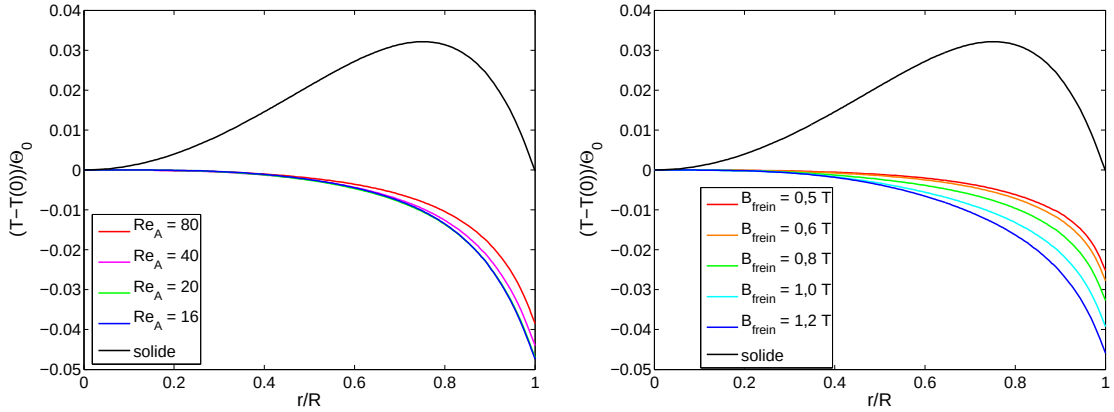
Comparaison des résultats obtenus avec Comsol et avec le code Lohoefer

Afin de valider les résultats produits par le code "Lohoefer", nous avons réalisé avec le logiciel COMSOL (éléments finis) une comparaison code à code sur une configuration 3-D (Schetelat *et al.*, 2009). Les paramètres de cette simulation sont reportés dans le tableau 3.5. Dans



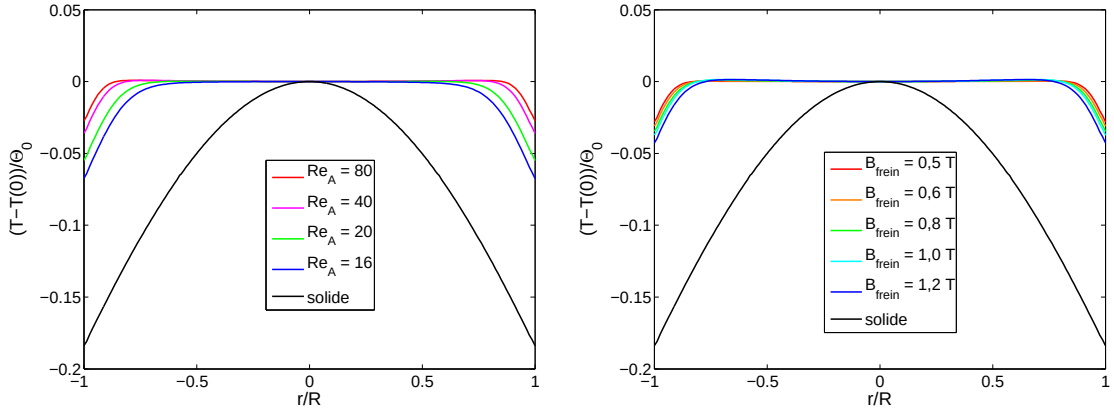
(a) (b)

Température à la Surface



(c) (d)

Température sur le plan méridien



(e) (f)

Température sur l'axe de symétrie

Figure 3.8: Températures normalisées par Θ_0 (équation 2.107 page 71). A gauche pour Re_A varie de 16 à 80 (variation de la viscosité). A droite un champ magnétique statique B_{frein} freine l'écoulement. Il varie de 0,5 à 1,2 T.Vitesse normalisée par U_A.

les deux cas, les grandeurs sont intégrées en utilisant le formalisme du tenseur de Maxwell (intégrales surfaciques). Les cartes des densités des courants à la surface sont comparées figure 3.9. Les composantes de la densité de couple sont comparées figure 3.10. Dans ces figures, l'échelle des couleurs est relative. Les maxima et minima de chacune de ces cartes sont reportés dans les tableaux 3.6 et 3.7.

Le code "Lohofer" utilise une approximation filaire. Il a été utilisé pour simuler deux configurations. Dans la première, le courant passe au centre de l'inducteur (courbe bleu). Dans la seconde, le courant passe à la surface de l'inducteur (courbe rouge). Dans le calcul COMSOL, la répartition des courants est le résultat du calcul de l'induction.

Les grandeurs intégrées pour chacune des composantes de la force et du couple sont présentées dans le tableau 3.8. Deux positions de la charge sont simulées. Dans la première, la sphère est au centre de l'inducteur. Dans le second, celle-ci est située $10mm$ plus haut.

Résultats Dans tous les cas, la répartition des courants et des couples sont en excellent accord. Les valeurs des extrema des couples issus de la simulation "COMSOL" sont toujours encadrées par les valeurs des simulations Lohofer (centre et intérieur). Ce n'est pas le cas pour la densité de courant, dont les valeurs des extrema calculés avec le code "Lohofer" sont toujours supérieures aux valeurs calculée avec "COMSOL". Néanmoins, les résultats donnés par le code "Lohofer" dans le cas où le courant est localisé en centre de l'inducteur sont très proche de ceux calculés avec "COMSOL".

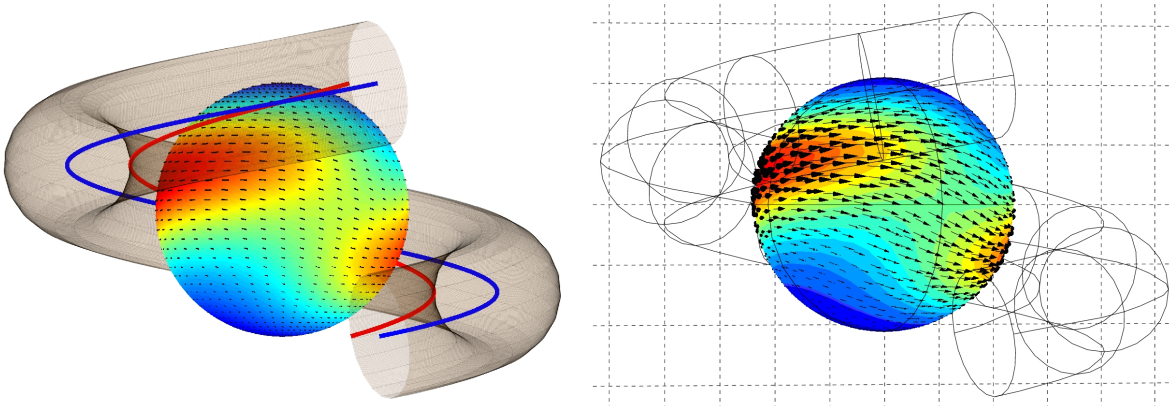
Les valeur des résultantes de la force et du couple calculées sous "COMSOL" sont également encadrées par les valeurs données par code "Lohofer" quand leurs composantes sont significative. Dès que les valeurs des autres composantes sont plusieurs ordres de grandeur inférieures à la composante principale, les incertitudes numériques limitent la précision des résultats donnés par "COMSOL".

Visualisation : Nous présentons les cartes de champ précédentes en utilisant la projection stereographique. Contrairement aux projections orthographique et de Mercator (voir figures 3.11), la projection stereographique ne distord pas les formes géométriques (un triangle sur la sphère reste un triangle sur la projection). Elle permet une visualisation rigoureuse de chacun des champs scalaires pour chacun des hémisphères de la sphères.

La figure 3.12 présente les projections des cartes de l'intensite du champ magnétique, de la densité de courant et de la densité de couple. Nous remarquons que l'intensité du champ

Tableau 3.5: Paramètres des simulations

	COMSOL	LOHOFER
Rayon de l'échantillon (Aluminium) (mm)	10	
Rayon de l'inducteur (mm)	17	
Diamètre de la section de l'inducteur (mm)	10	
Intensité du courant (pic) A	1200	
Fréquence (kHz)	30	
Nombre d'éléments à la surface	500	160 000



(a) (b)

Figure 3.9: Comparaison de la densité de courant à la surface de la charge ($A.m^{-2}$). Code Lohoefer (a). Comsol (b).

Tableau 3.6: Extrema des cartes de courant

	Densité de courant ($A.m^{-2}$)	
	Maximum	Minimum
Comsol	$4.90.10^7$	$5,85.10^5$
Lohoefer (intérieur)	$1,08.10^8$	$27,2.10^5$
Lohoefer (centre)	$5,10.10^7$	$19,0.10^5$

Tableau 3.7: Extrema des cartes de couples

(a) Couple selon x ($N.m^{-1}$)

	Maximum	Minimum
Comsol	$4,36$	$-3,19$
Lohoefer (intérieur)	$12,5$	$-10,8$
Lohoefer (centre)	$2,11$	$-1,72$

(b) Couple selon y ($N.m^{-1}$)

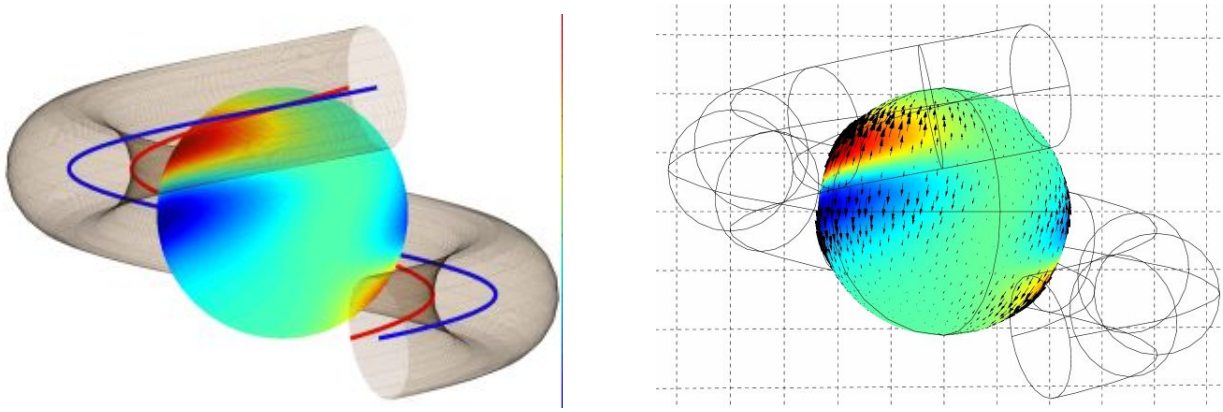
	Maximum	Minimum
Comsol	$5,49$	$-5,49$
Lohoefer (intérieur)	$16,5$	$-16,5$
Lohoefer (centre)	$2,26$	$-2,26$

(c) Couple selon z ($N.m^{-1}$)

	Maximum	Minimum
Comsol	$1,02$	$-1,01$
Lohoefer (intérieur)	$4,16$	$-4,16$
Lohoefer (centre)	$0,396$	$-0,396$

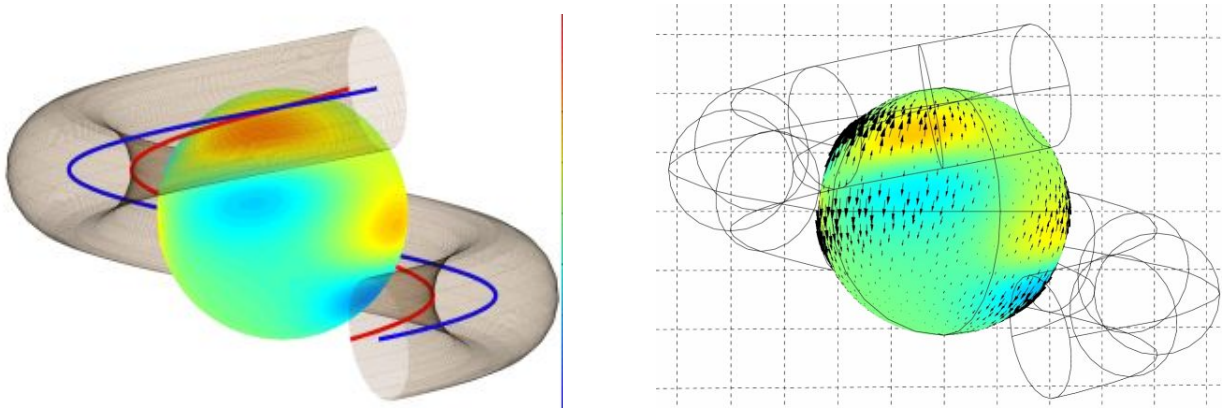
Tableau 3.8: Force et couple total sur la charge

	$Z = 0\,mm$			$Z = 10\,mm$		
	Comsol	Lohoefer (intérieur)	Lohoefer (centre)	Comsol	Lohoefer (intérieur)	Lohoefer (centre)
M_x	$1,54.10^{-5}$	$3,42.10^{-5}$	$1,04.10^{-5}$	$-2,01.10^{-6}$	$-2,96.10^{-6}$	$0,336.10^{-6}$
M_y	$2,63.10^{-7}$	$21,9.10^{-9}$	$6,33.10^{-9}$	$-3,79.10^{-7}$	$1,45.10^{-5}$	$0,160.10^{-5}$
M_z	$-10,2.10^{-9}$	$-12,0.10^{-9}$	$-1,58.10^{-9}$	$8,63.10^{-6}$	$49,9.10^{-6}$	$5,86.10^{-6}$
F_x	$-1,09.10^{-1}$	$-3,04.10^{-1}$	$-0,63.10^{-1}$	$1,67.10^{-2}$	$7,72.10^{-2}$	$0,32.10^{-2}$
F_y	$-49,9.10^{-5}$	$-2,52.10^{-5}$	$-0,72.10^{-5}$	$-9,75.10^{-2}$	$-2,34.10^{-1}$	$-0,69.10^{-1}$
F_z	$-15,9.10^{-5}$	$-9,68.10^{-5}$	$-3,59.10^{-5}$	$1,23.10^{-1}$	$2,26.10^{-1}$	$0,97.10^{-1}$



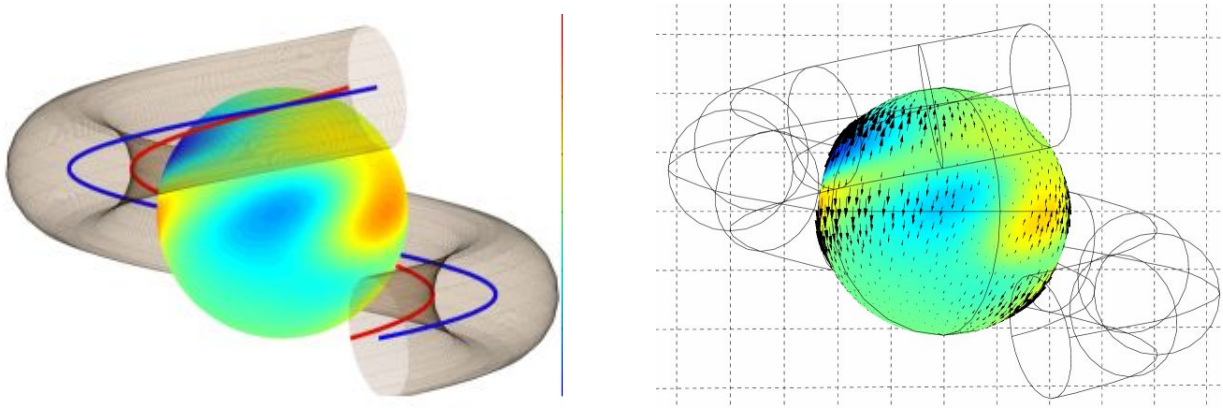
(a) (b)

Couple selon x ($N.m^{-1}$)



(c) (d)

Couple selon y ($N.m^{-1}$)



(e) (f)

Couple selon z ($N.m^{-1}$)

Figure 3.10: Comparaison des cartes de densité de couple à la surface de la charge. Gauche : Code Lohoefer. Droite : Comsol.

magnétique et la densité de courant ont une répartition très semblable. Leurs maxima se situent clairement le long de la ligne où l'inducteur est le plus proche de l'échantillon. Au contraire, la densité de couple y est minimum et devient rapidement maximum de part et d'autre de cette ligne. Cette figure illustre la variation rapide du couple et la nécessité d'utiliser un maillage en surface suffisamment raffiné pour le décrire.

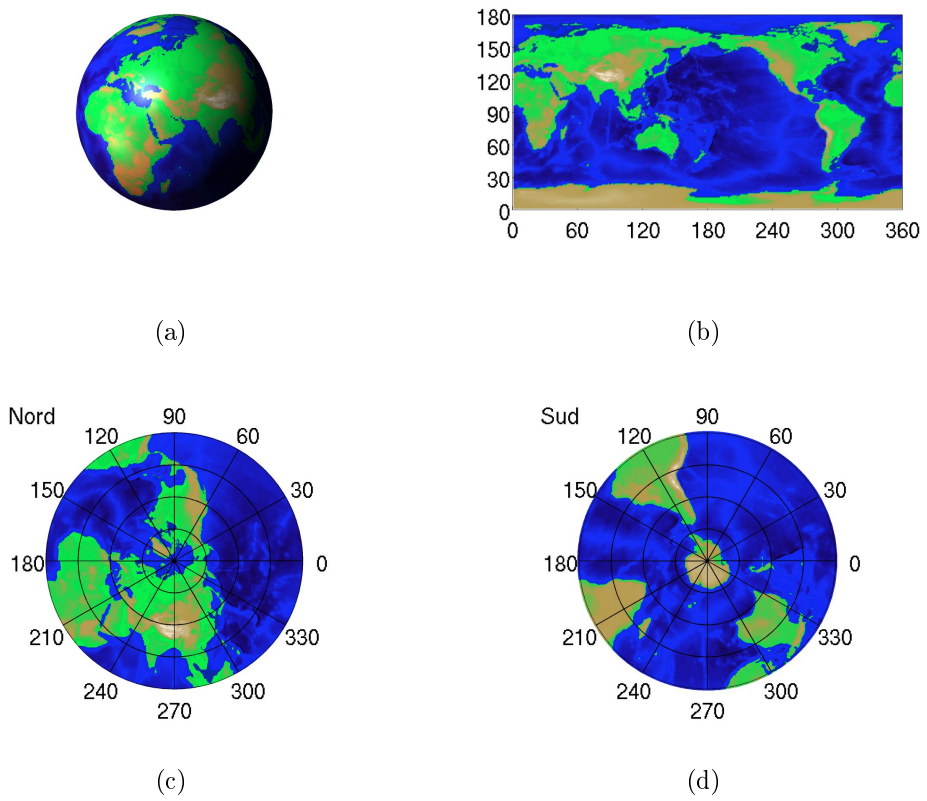
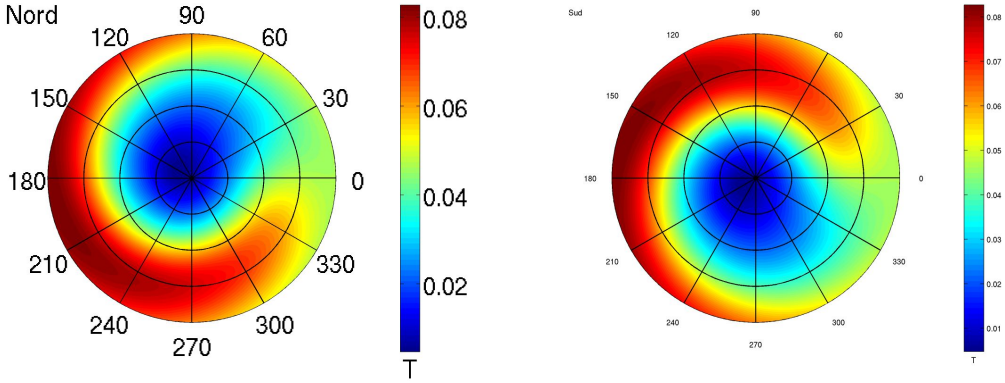
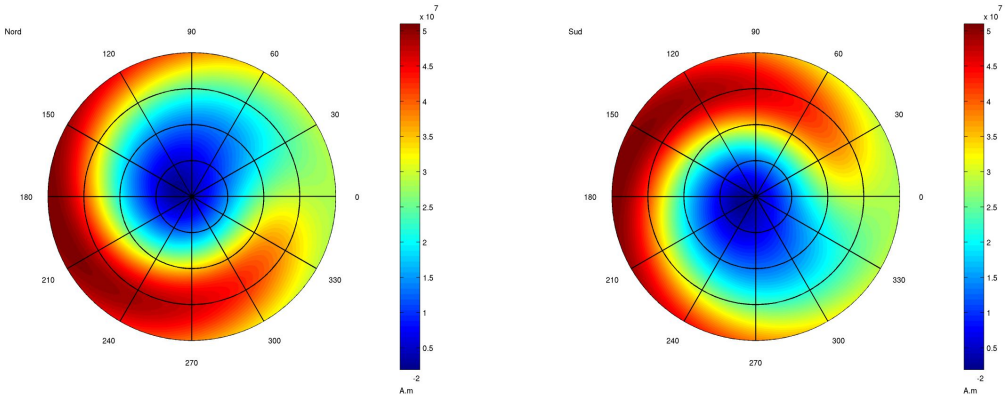


Figure 3.11: Exemple de visualisation. Projection orthographique (a) projection de mercator (planisphère) (b) projection stéréographique de l'hémisphère nord (c) et sud (d)

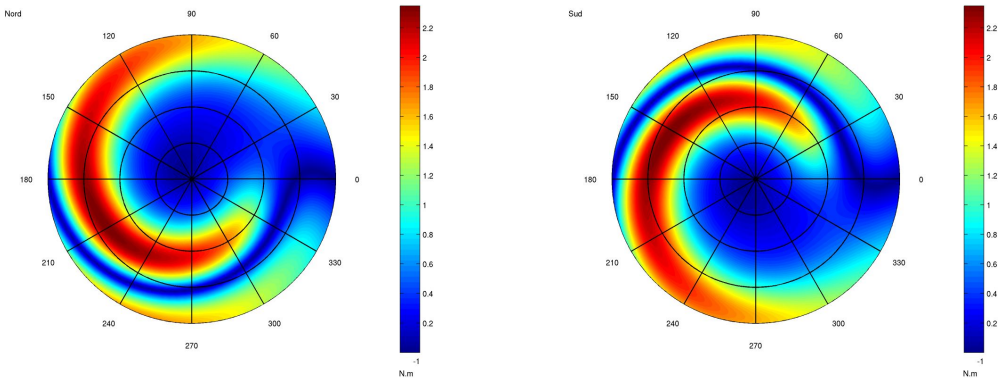
Conclusion Les résultats du code "Lohofer" ont été comparé à ceux du logiciel "COMSOL" pour une configuration 3D. Les résultats sont excellents. L'hypothèse filaire pour décrire l'inducteur est satisfaisante. Le code "'Lohofer" présente un temps de calcul réduit (ici 30 secondes pour chaque cas), ce qui en fait un outil idéal pour calculer un grand nombre de configuration. Sont utilisation est validée pour l'optimisation d'inducteur.



(a) Champ magnétique (T)



(b) Densité de courant ($A.m^{-2}$)



(c) Densité de couple ($N.m^{-1}$)

Figure 3.12: Projections stereographiques des composantes de la densité de couple (code Lohofer)

Chapitre 4

Expérience à l'ESRF

La simulation des écoulements dans une sphère lévitée a déjà fait l'objet de multiples travaux (Bojarevics et Pericleous, 2003; Ai, 2004; Hyers, 2005; Li, 2006; Bardet, 2006). Néanmoins, il n'existe à ce jour aucune validation expérimentale directe de ceux-ci. Due à l'opacité des gouttes métalliques lévitées, aucune investigation n'a pu être menée in situ. L'expérimentateur n'a accès qu'à des mesures indirectes. Par exemple, en suivant des particules d'oxydes à la surface libre de la goutte, particulièrement les zones de la surface où celles-ci s'accumulent, Hyers *et al.* (2003) ont pu ainsi observer la transition vers la turbulence dans l'écoulement.

Une partie de ce travail de thèse a pour objectif l'élaboration d'une expérience de visualisation de l'écoulement dans une goutte de métal liquide lévité électromagnétiquement. Son principe repose sur l'utilisation d'un rayonnement X intense capable de traverser un échantillon métallique. Un tel rayonnement subit une absorption proportionnelle à la longueur du chemin optique dans l'échantillon ainsi qu'à sa masse volumique (Loi de type Beer-Lambert). Cette technique rend possible la visualisation de particules immergées dans un métal liquide quand celles-ci possèdent une plus grande masse volumique que le liquide. (figure 4.1). Le suivi des trajectoires de ces particules permet de visualiser l'écoulement, d'une manière analogue à ce qui est pratiqué dans les techniques PIV (Particles Image Velocimetry (Westerweel, 1993)).

Ce projet expérimental a fait l'objet d'une demande de temps de faisceau auprès de l'European Synchrotron Radiation Facility (ESRF, Grenoble). Cette demande a été acceptée en janvier 2007, allouant à sa réalisation trois shifts de 8 heures, les 14 et 15 novembre 2007. Ce chapitre présente les travaux de mise en oeuvre de l'installation expérimentale ainsi que l'exploitation des résultats qui ont été obtenus.

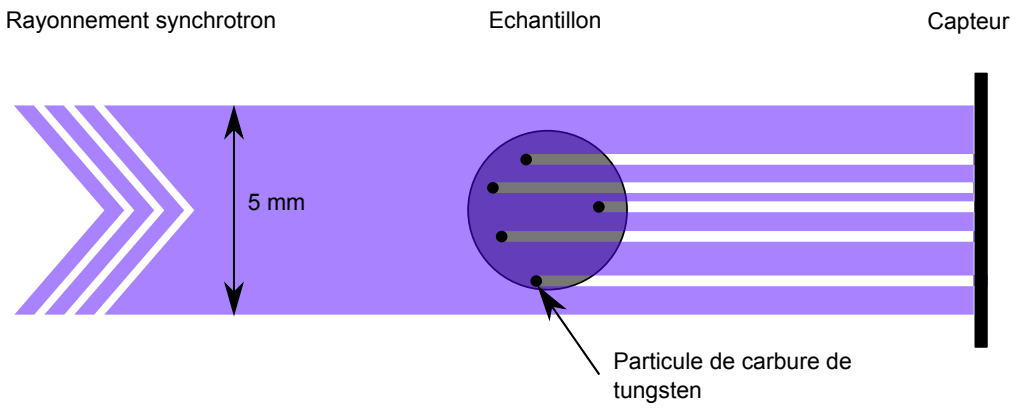


Figure 4.1: Schéma de principe de la visualisation par tomographie

4.1 Étude préliminaire :

Cette étude préliminaire a pour objectifs :

- Identifier les contraintes (techniques, physiques) liées à cette expérience,
- Sélectionner les matériaux de l'échantillon et des traceurs,
- Dimensionner l'inducteur de lévitation.

4.1.1 Équipement

L'installation expérimentale utilisée à l'ESRF se compose de 3 parties : une cellule, une partie électrotechnique, un système de pilotage et d'acquisition. Afin de pouvoir entrer dans la chambre où se trouve le faisceau, une alimentation de puissance spécifique a été développée par une PME : IP-Partner.

Spécification de la ligne ID15 La ligne ID15 de l'ESRF fournit un faisceau de rayon X blanc (par opposition à un rayonnement monochromatique) de grande cohérence spatiale. Le faisceau est de section elliptique, son profil d'intensité est gaussien. La section utilisable (dont l'intensité est suffisante pour la visualisation) est d'environ $5\,mm$ de diamètre.

Le capteur est un écran luminescent couplé à un capteur CCD. Ses caractéristiques sont spécifiées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1: Spécifications de la ligne ID15 à l'ESRF

Faisceau	
Diamètre	$5\,mm$
Énergie	$15\,keV$

Capteur	
Résolution	$14\,\mu m$
Fréquence	$500\,Hz$

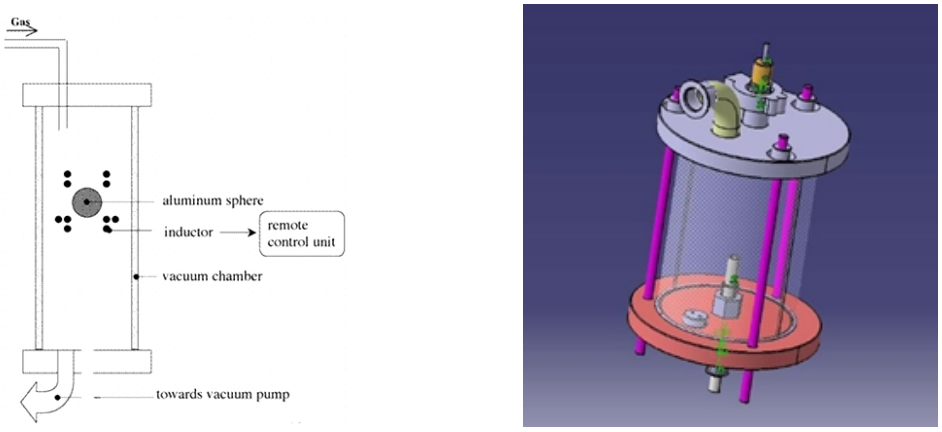


Figure 4.2: Schéma de l'enceinte

Enceinte Les expériences sont réalisées dans une enceinte étanche dont l'atmosphère est contrôlable. Celle-ci doit être d'un faible encombrement et permettre le passage des rayons X (Une enceinte métallique est exclue). Ces conditions sont remplies par le montage réalisé par Bardet (2006). Le montage est présenté sur la figure 4.2. L'enceinte est constituée par un tube de quartz, transparent aux rayons X et à l'infrarouge. Il repose sur un socle de résine polymère et est surmonté d'un couvercle en acier inox. L'étanchéité est réalisée avec des joints toriques. L'installation permet de faire un vide dynamique de $10^{-3} mBar$ pour chasser l'oxygène. L'enceinte est ensuite remplie d'un gaz inerte (Argon) en légère surpression pour éviter l'oxydation des échantillons lévités.

Générateur Le générateur doit également avoir un faible volume d'encombrement. Celui-ci a été spécifiquement développé par la PME ID-Partner (voir figure 4.3). Il fourni une puissance de $12\,kW$ pour des fréquences comprises entre 100 et $200\,kHz$.

4.1.2 Échantillon et traceurs

Critères de sélection

Masse volumique Le choix du rapport des masses volumiques est un compromis entre le contraste aux rayons X (rapport élevé) et une faible sédimentation des particules (rapport de densité faible).

Tailles La taille des particules doit être suffisamment petite pour ne pas trop perturber l'écoulement et suffisamment grande pour être observable avec le capteur CCD (résolution de $14\,\mu m$).

La taille de l'échantillon est fixée par la largeur du faisceau ($5\,mm$).

Températures de fusion, réactivités et miscibilités L'échantillon étant petit (inférieur à $5\,mm$) et de faible masse volumique, il a tendance à rester dans le trou de champ magnétique (voir paragraphe 2.2.4 page 44). Dans ces conditions, il est difficile de le chauffer efficacement. L'échantillon doit donc avoir une faible température de fusion. De plus, nous souhaitons observer l'écoulement dans une goutte dont la surface est libre. Il faut donc éviter la formation d'une couche d'oxyde à la surface.

Les particules doivent avoir une température de fusion supérieure à celle de l'échantillon. Elle doivent également être suffisamment peu miscibles et peu réactives pour ne pas être dissoutes au cours de l'expérience.

Conductivités électriques L'échantillon doit être suffisamment bon conducteur de l'électricité pour pouvoir être lévité. De plus, le rapport des conductivités de l'échantillon et des particules doit être faible pour éviter des phénomènes de séparation électromagnétique (Leenov et Kolin, 1954).

Vitesse de l'écoulement La gamme de vitesse observable est l'objet d'un compromis. La fréquence du capteur est de $500\,Hz$ et sa résolution est de $14\,\mu m$. La vitesse minimale mesurable est un déplacement d'un pixel entre deux prises de vue, ce qui correspond à une vitesse de $7\,mm.s^{-1}$. La vitesse doit également être suffisamment grande pour que les forces de traînée dominent les autres forces s'exerçant sur les particules (sédimentation, séparation

électromagnétique, force centrifuge). Cette condition est nécessaire pour que les trajectoires des particules soient représentatives des lignes de courant de l'écoulement. Par ailleurs, une vitesse trop grande aura pour conséquence un mauvais contraste des particules.

Matériaux choisis

Pour cette première expérience, nous réalisons un compromis privilégiant un fort contraste de densité. L'aluminium est choisi pour l'échantillon. Il possède un bas point de fusion ($T_f = 933\,K$) et une faible densité ($\rho = 2700\,kg.m^{-3}$). Des particules de carbure de tungsten (WC) sont utilisées comme traceurs. Elles possèdent une forte densité, un haut point de fusion et leur conductivité électrique est du même ordre de grandeur que la bille en aluminium (voir tableau 4.2). Les échantillons sont élaborés en creuset froid. Les particules sont incorporées dans la matière première. Une fois fondu dans le creuset froid, le mélange est coulé et solidifié dans une lingotière dans laquelle une cavité sphérique est aménagée.

Tableau 4.2: Propriétés des matériaux sélectionnés

Propriétés	Échantillon	Particules
Matériaux	Aluminium	Carbure de Tungsten (WC)
Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	2700	15600
Conductivité $(\Omega.m)^{-1}$	$1,37.10^7$	$\sim 10^7$
Température de fusion(K)	930	2870
Taille	$5\,mm$	$50 - 120\,\mu m$

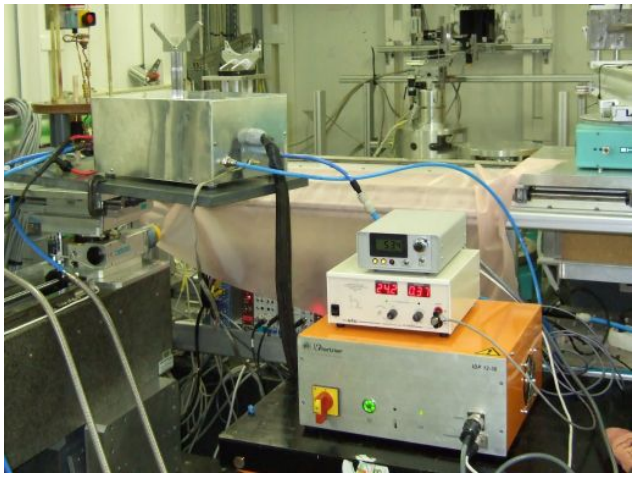
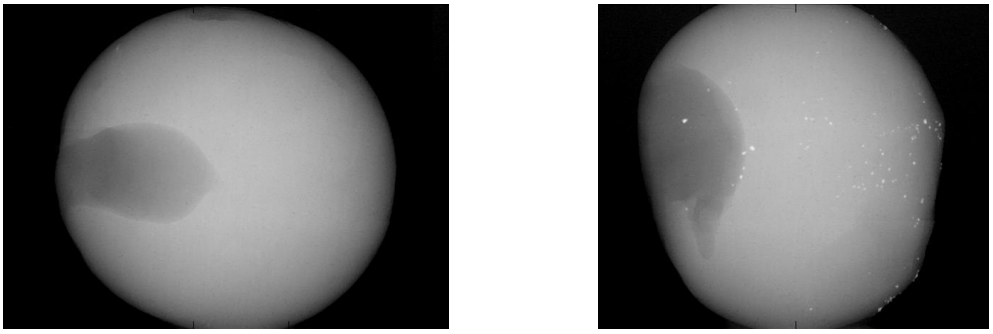


Figure 4.3: Photographie du générateur (en orange)



(a) (b)

Figure 4.4: Test préliminaire : visualisation des particules de carbures de Tungsten dans des échantillons d'aluminium. (a) Sans particules. (b) Avec particules (points blancs)

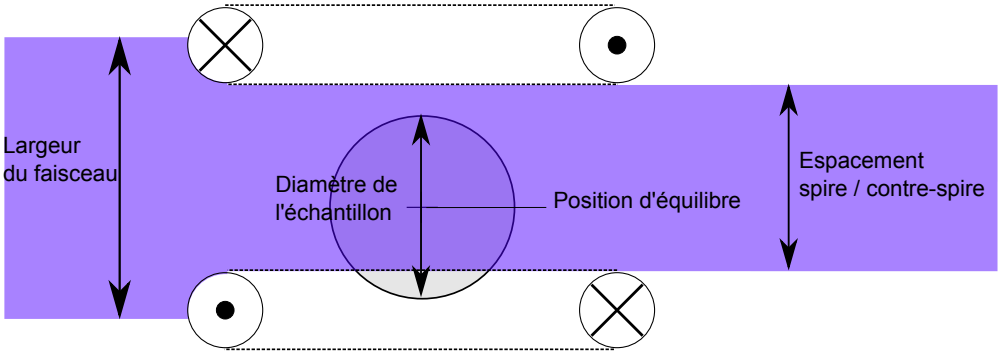


Figure 4.5: Contraintes géométriques : alignement optique

4.1.3 Inducteur

Critères de sélection

Visibilité L'inducteur est constitué par l'enroulement d'un tube de cuivre permettant son refroidissement par circulation d'eau. Sa masse volumique et son épaisseur le rendent totalement opaque aux rayons X. L'espacement spire / contre-spire (bord à bord) de l'inducteur est de $5\,mm$ minimum pour laisser passer le faisceau (voir figure 4.5).

Position La position d'équilibre de l'échantillon dans l'inducteur est telle que l'échantillon est entièrement visible dans l'espacement spire / contre-spire (voir figure 4.5).

Stabilité La géométrie de l'inducteur doit minimiser l'amplitude des oscillations de l'échantillon autour de sa position d'équilibre. (voir le paragraphe 2.3.4 page 54)

Rotation L'inducteur doit minimiser le couple e.m. sur l'échantillon dans sa position d'équilibre. (équation 2.66 page 56)

Puissance La puissance Joule totale P doit permettre de fondre l'échantillon. Une borne supérieure de la température est donnée par la température équivalente de rayonnement. T_{surf}(équation 2.106 page 70).

Paramètres d'optimisation

Espacement spires / contre-spires Une simple analyse d'ordre de grandeur permet de relier directement les oscillations de la charge à la "raideur" du trou dechamp (voir paragraphe 2.2 page 40). Ainsi, plus la distance spire / contre-spire est faible, plus la fréquence d'oscillation est grande. Plus la fréquence est élevée, plus l'énergie mécanique se dissipe rapidement par frottement. Ainsi l'écartement des spires doit être minimum pour minimiser l'amplitude des mouvements de l'échantillon autour de sa position d'équilibre. La condition de visibilité impose cette distance égale à $5\,mm$.

Nombre de spires Ce nombre est borné. Il faut un nombre minimal de spires pour atteindre la lévitation. De plus, l'impédance totale de l'inducteur est déterminée par le générateur. Le nombre de spires ne peut donc pas être trop élevé.

Géométrie choisie

Les conditions de visibilité de l'échantillon, notamment l'alignement entre le faisceau, l'échantillon et l'inducteur, ainsi que la stabilité de la goutte en lévitation, imposent des contraintes fortes sur le dessin de l'inducteur.

Pour nous aider dans cette conception, nous utilisons la simulation numérique. La géométrie 3D d'un inducteur est testée grâce au code "Lohoefer", développé à cette fin(voir le paragraphe 3.1.1 page 78) . A titre indicatif, la simulation de ses performances (position, stabilité, puissance Joule dissipée, couple) est comparée à celle d'un autre inducteur, développé pour l'expérience menée en 2008 (voir les figures 4.6, 4.7 et 4.8).

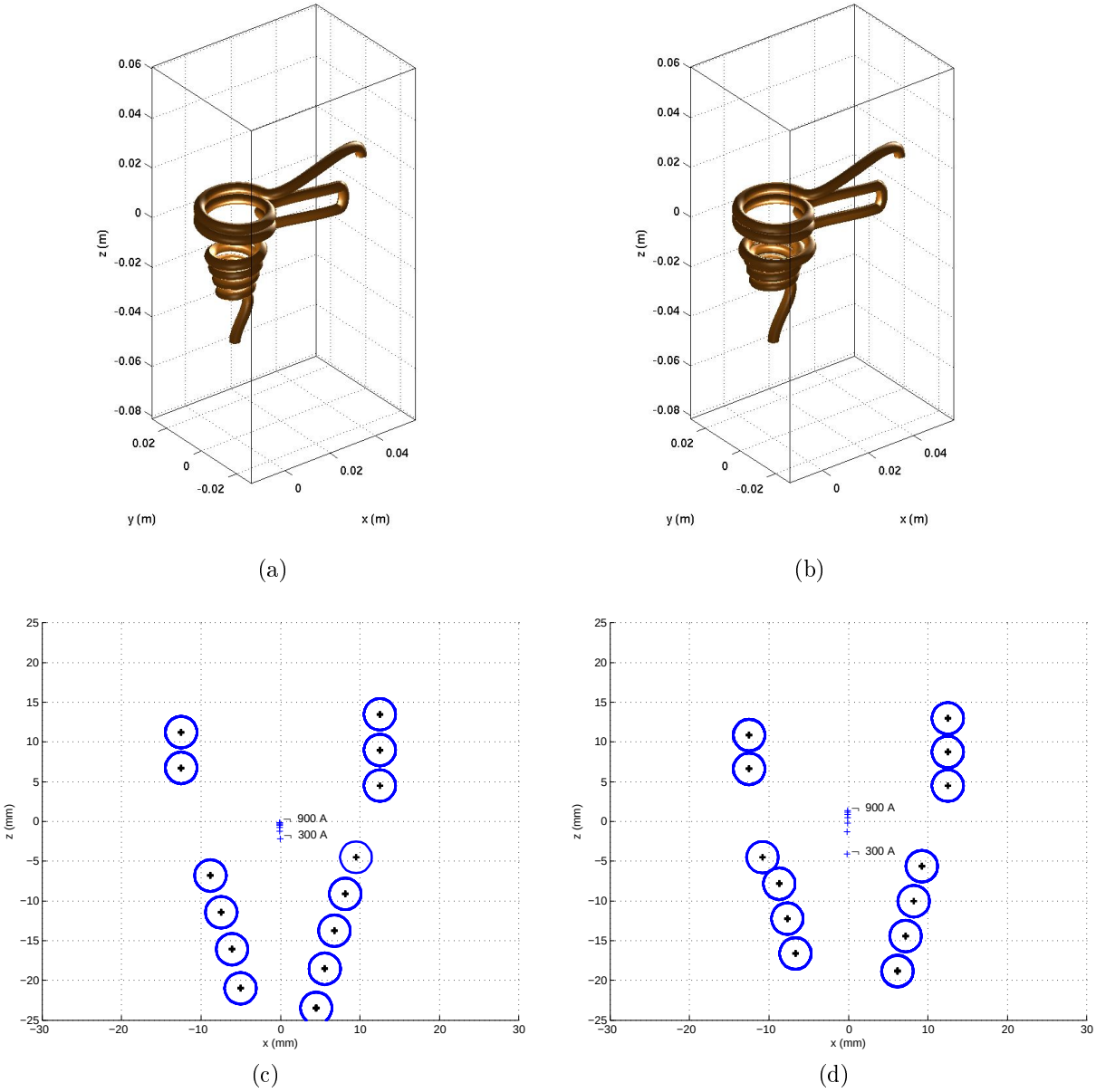


Figure 4.6: Géométrie des inducteurs. (a) et (c) ESRF 2007. (b) et (d) ESRF 2008. (a) et (b) Projection orthographique. (c) et (d) Coupe dans le plan X-Z .

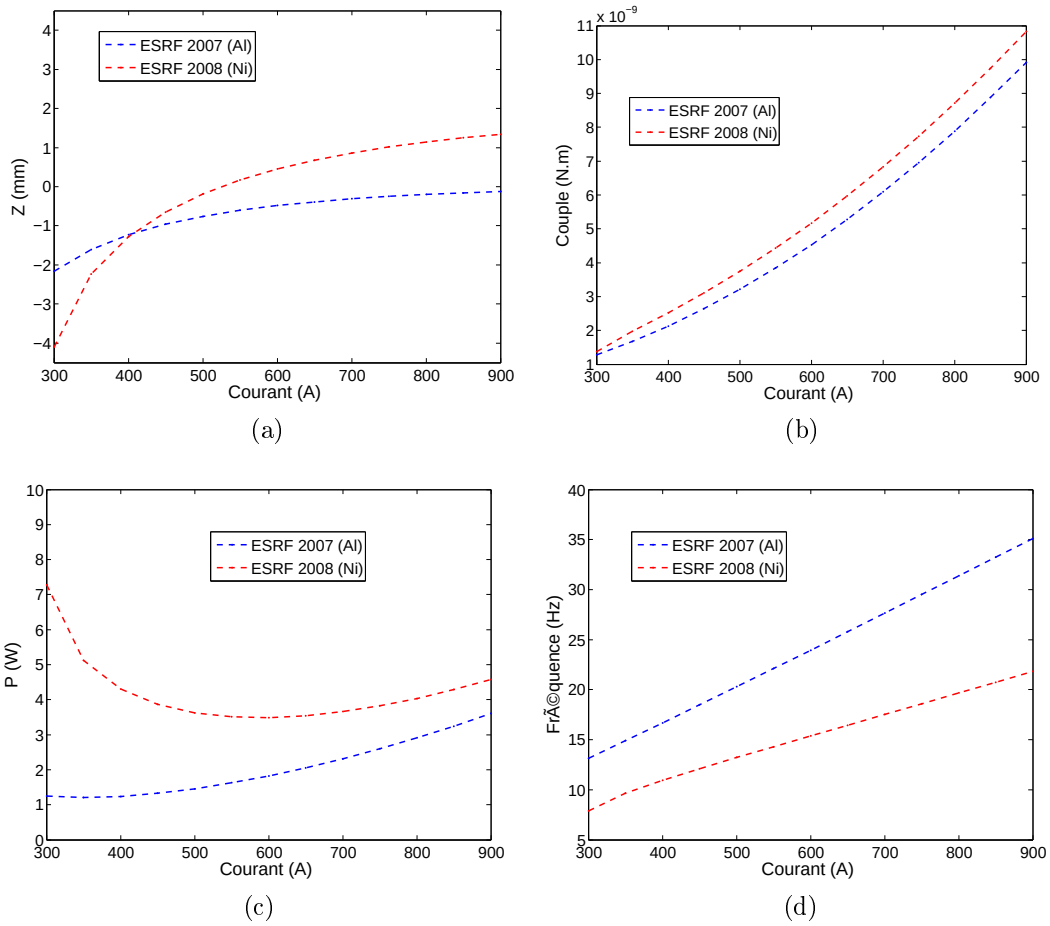
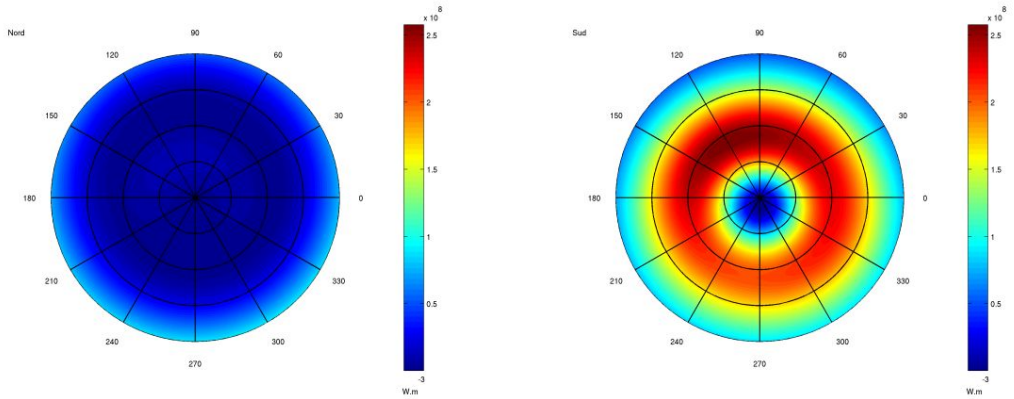
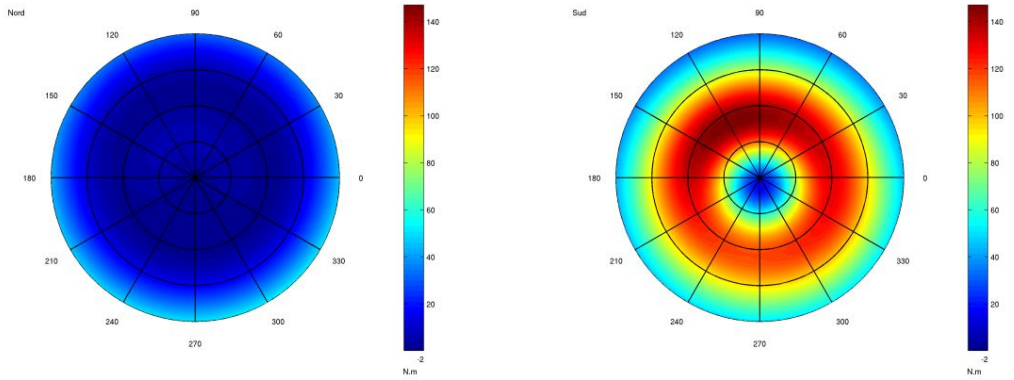


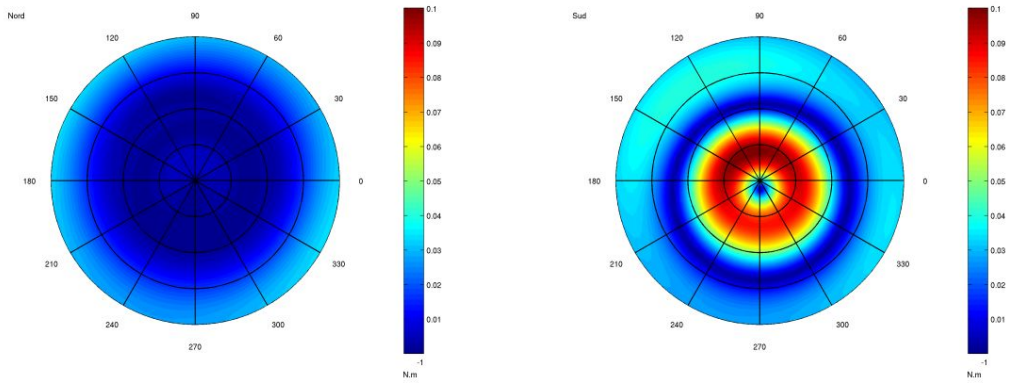
Figure 4.7: Caractéristiques des inducteurs. (a) Position. (b) Couple. (c) Puissance Joule. (d) Fréquence d'oscillation .



(a) Densité de puissance Joule ($W.m^{-3}$)

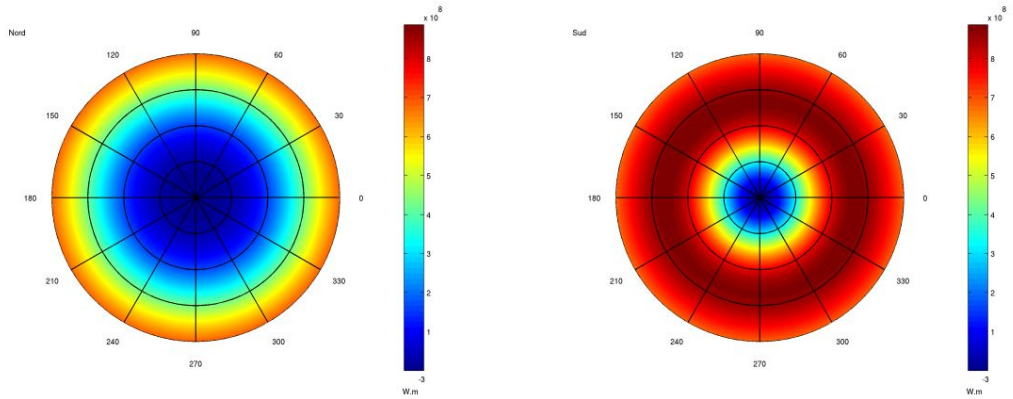


(b) Pression magnétique ($N.m^{-2}$)

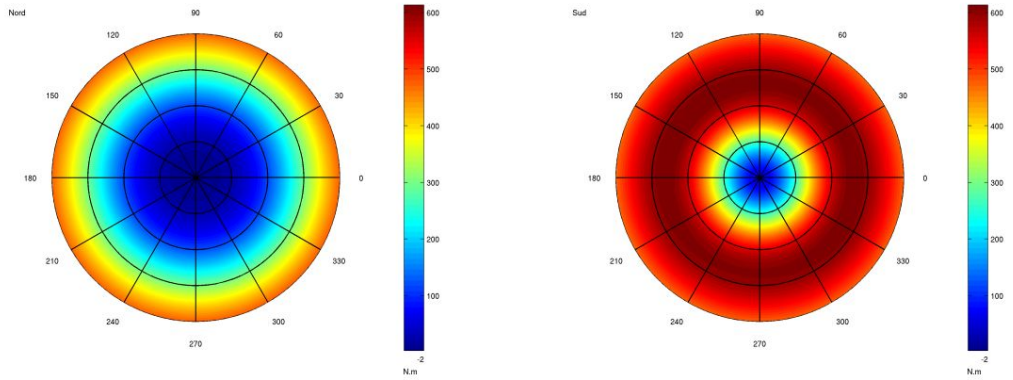


(c) Densité surfacique de couple ($N.m^{-1}$)

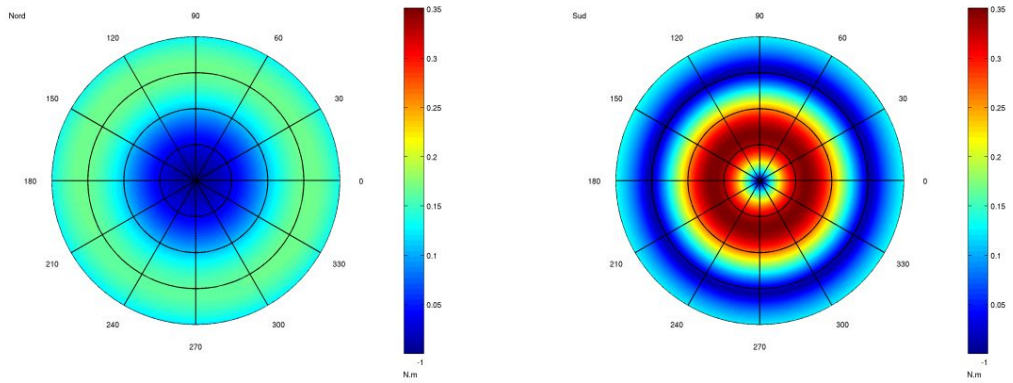
Figure 4.8: Induction dans l'échantillon (Al) pour l'inducteur ESRF 2007 ($I_0 = 500A$). A gauche : hémisphère nord. A droite : hémisphère sud.



(a) Densité de puissance Joule ($W.m^{-3}$)

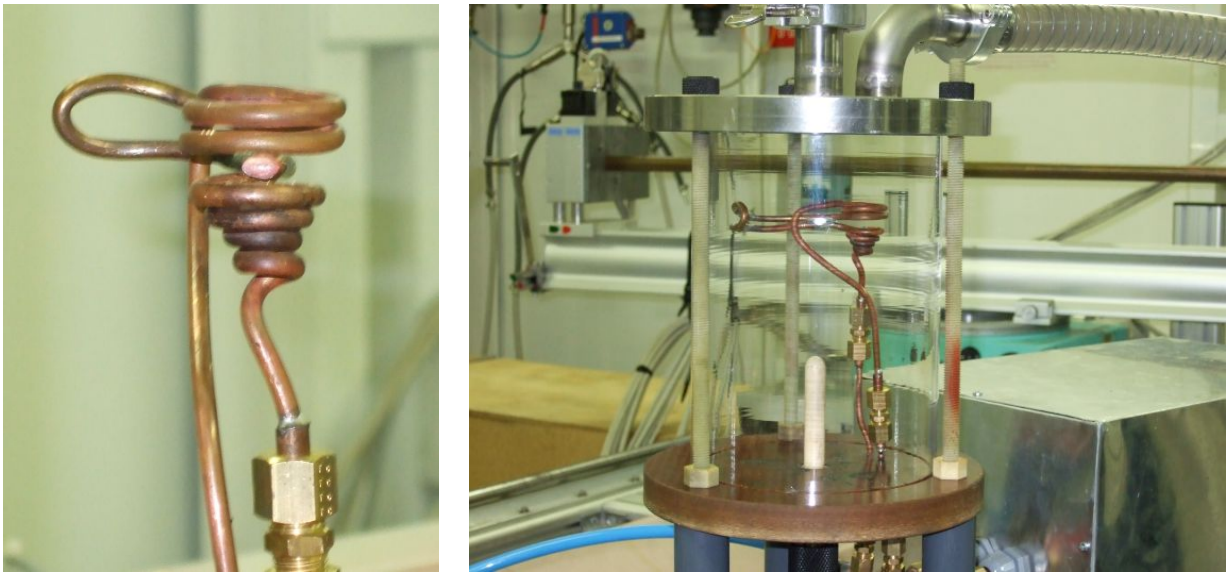


(b) Pression magnétique ($N.m^{-2}$)



(c) Densité surfacique de couple ($N.m^{-1}$)

Figure 4.9: Induction dans l'échantillon (Ni) pour l'inducteur ESRF 2008 ($I_0 = 500A$). A gauche : hémisphère nord. A droite : hémisphère sud.



(a) (b)

Figure 4.10: (a) Inducteur et échantillon lévité à l'air libre. (b) Inducteur dans l'enceinte.

4.2 Résultats

Les expériences se sont déroulé durant trois shifts de 8h à l'ESRF. 17 échantillons ont été préalablement élaborés avec succès dans un creuset froid au laboratoire SIMAP-EPM. Au début de l'expérience, une analyse au rayon X a révélé que seuls 8 échantillons contenaient des particules de WC en nombre suffisant. Sur ces 8 échantillons, seuls 5 ont pu être fondus et observés avec succès. Chaque échantillon lévité a été visualisé par fenêtre de 5 ou 10 secondes à plusieurs reprises.

Les vidéos ont révélé un problème commun à tous les échantillons. Les particules restent collées à la surface. Ceci est du au fait suivant. La mise sous vide secondaire de l'enceinte ne permet pas d'éliminer suffisamment l'oxygène pour éviter l'oxydation de la surface de l'aluminium. Seules quelques prises de vues ont pu être exploitées. Un suivi des particules par traitement d'images (Matlab) n'a pas mis en évidence de particules dans le coeur de l'échantillon en fusion.

Les échantillons, une fois fondus, tournent sur eux-même selon l'axe z. La position des particules selon l'axe x est reportée sur la figure 4.11. La fréquence de rotation mesurée est de $6\,Hz$.

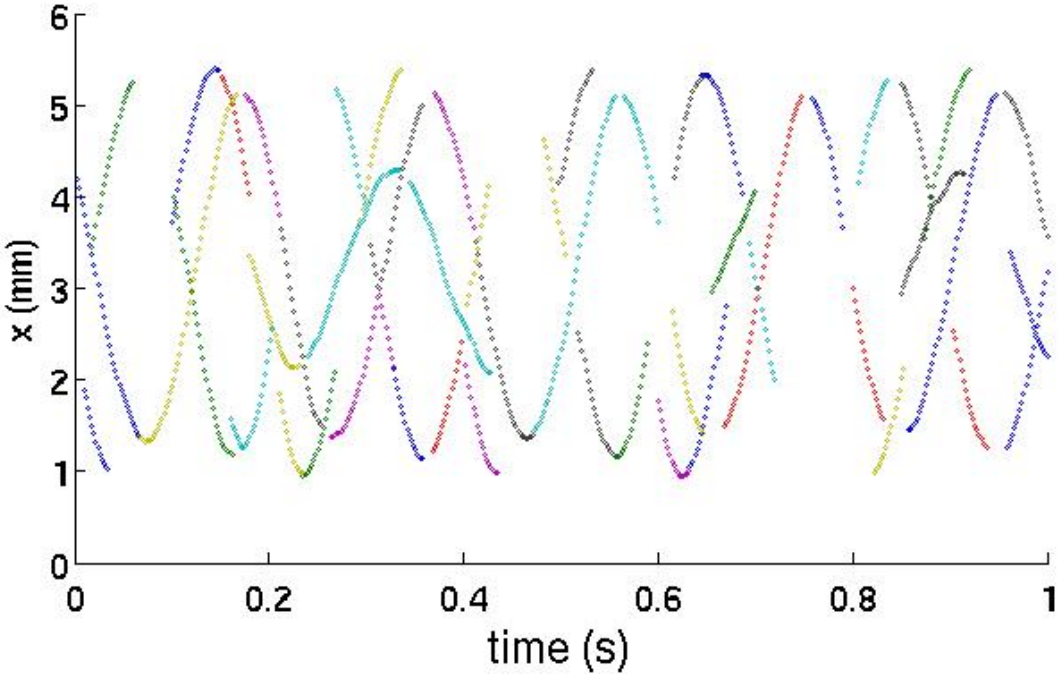


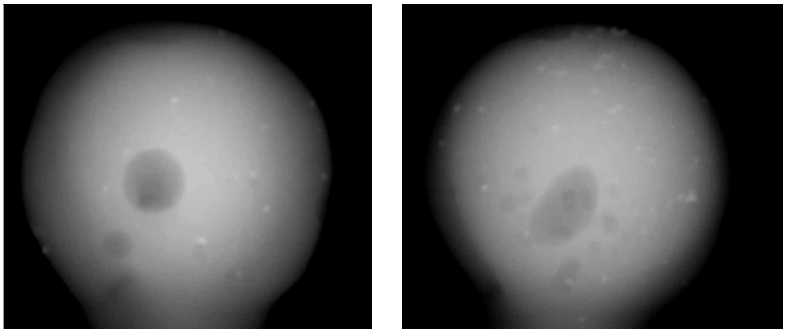
Figure 4.11: Suivi des particules

Interprétation Nous pensons que l'absence de particule au sein des échantillons est due à un problème de mouillabilité entre les particules de WC et l'aluminium liquide. En préparation à une nouvelle série d'expériences (décembre 2008), des tests de visualisation ont été réalisés avec des échantillons de nickel, offrant une meilleure mouillabilité avec le carbure de tungstène (Eustathopoulos *et al.*, 1999). Pour s'assurer de la répartition des particules, ces visualisations ont été réalisées pour plusieurs angles de vue (figure 4.12).

4.3 Conclusions et perspectives

La mise en oeuvre d'une expérience de visualisation de l'écoulement dans une bille lévitée a été réalisée. Un choix de matériaux pour les échantillons et les traceurs a été réalisé. Ce choix permet la visualisation des particules dans les gouttes lévitées. Des échantillons contenant les traceurs ont été élaborés. Une visualisation préliminaire à l'expérience a mis en évidence la présence de particules dans l'échantillon. Néanmoins, ce test n'a été réalisé que sous un seul angle de vue. Ce test n'a pas mis en évidence la répartition des traceurs à la surface.

Un code de calcul pseudo-analytique a été développé et utilisé pour la conception et l'opti-



(a) (b)

Figure 4.12: Contraste pour deux échantillons de nickel. Le taux d'ensemencement de (a) est inférieur à celui de (b). (Les taches sombres dans les échantillons sont des poches d'air).

misation d'un inducteur adapté à l'expérience. Aucune des configurations testées n'a permis de réduire efficacement le couple e.m.. Une géométrie a été sélectionnée et réalisée. Des expériences préliminaires réalisées au laboratoire SIMaP ont permis de tester cette géométrie. Le position d'équilibre de la goutte dans l'inducteur est conforme aux prédictions des simulations. Les instabilités sont mal prédites. Ceci est probablement dû aux limites du code de calcul de l'induction. Celui-ci ne prend pas en compte l'écart à la sphéricité de l'échantillon, ni les potentielles inhomogénéités au coeur de celui-ci (comme on peut l'observer dans les radiographies d'échantillons montrées figures 4.4 et 4.12). Le problème de la mouillabilité des particules par le métal liquide est apparu suite à la réalisation des expériences à l'ESRF 2007.

Une nouvelle proposition d'expérience a été soumise à l'ESRF et a été acceptée. Elle a été menée par Cyril Courtessol, Mikael Dumont et Jacqueline Etay du 30 novembre au 2 décembre 2008. A l'heure où cette thèse est rédigée, les résultats des ces expériences n'ont pas encore été traités. Une solution a été apportée au problème de la mouillabilité des particules grâce à l'utilisation de nickel.

Chapitre 5

Calorimétrie

Nous nous intéressons dans ce champitre à la mesure de la capacité calorifique et de la conductivité thermique d'un échantillon métallique. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.2.2 page 27, la calorimétrie modulée repose sur la mesure des variations de la température dues à des modulations sinusoïdales de la puissance chauffant l'échantillon pour certaines pulsations. Les résultats de ces mesures sont traités afin de déterminer les propriétés thermiques recherchées. Dans ce chapitre, nous nous posons les questions suivantes :

- Sur quels principes ces méthodes fonctionnent elles ?
- Quelles en sont les limites ? Peut-on les utiliser pour mesurer la conductivité thermique d'échantillons métallique liquide ?
- Comment peut-on améliorer ces techniques ?

Pour y répondre, nous décrivons, dans un premier temps, les transferts thermiques instationnaires dans un échantillon solide soumis à une source de chauffage variant dans le temps. A partir des équations de la chaleur, nous discutons des différents comportements que peut présenter la température de l'échantillon en fonction de la pulsation de la modulation et tâchons d'en souligner le sens physique.

Dans un second temps, nous explicitons la technique de calorimétrie développée par Fecht et Johnson (1991); Wunderlich et Fecht (2005) en détaillant le traitement des mesures de température établi par ces auteurs.

Enfin, nous proposons une nouvelle méthode de mesure de la réponse en température d'un échantillon selon la fréquence de variation de la puissance de chauffage (Nous l'appelerons par la suite réponse fréquentielle). Des simulations numériques de la thermique instationnaire sont

utilisées pour démontrer la validité théorique de cette méthode. Les réponses fréquentielles associées à des échantillons solides et liquides sont comparées. Nous discutons de la possibilité de déterminer la conductivité thermique d'échantillons liquides à partir de ces résultats.

Nous invitons le lecteur à se réferer au paragraphe 2.1 page 33 où les notations utilisées dans ce chapitre sont introduite.

5.1 Transferts instationnaires

5.1.1 Équations fondamentales

Équations locales Nous considérons l'équation locale de la chaleur instationnaire pour un échantillon liquide siège de brassage électromagnétique, ainsi que sa condition limite,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} - \alpha_{th}\nabla^2 T + (\mathbf{u}\nabla)T = \dfrac{\chi}{\rho c_p} \\ -\kappa_{th}\nabla T\big|_{r=R} = \phi_{ext} \end{cases} \tag{5.1}$$

En écrivant $T = \overline{T}+\tilde{T}$ et $\chi = \overline{\chi}+\tilde{\chi}$, et en faisant l'hypothèse que l'écoulement est stationnaire, nous obtenons l'équation suivante pour les grandeurs fluctuantes,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \alpha_{th}\nabla^2 \tilde{T} + (\mathbf{u}\nabla)\tilde{T} = \dfrac{\tilde{\chi}}{\rho c_p} \\ -\kappa_{th}\nabla \tilde{T}\Big|_{r=R} = \dfrac{h_{ext}}{A}\tilde{T} \end{cases} \tag{5.2}$$

où $h_{ext} = A\left\langle \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial T} \right\rangle_S$. Nous considérons maintenant une fluctuation harmonique de la puissance joule de pulsation ω_2. La linéarité des équations (5.2) permet d'établir que, pour un régime établi, la fluctuation de température est également harmonique et de même pulsation. En utilisant la notation introduite dans la section 2.1 page 33, nous réécrivons l'équations (5.2),

$$\begin{cases} \dfrac{C_p}{V}\left(i\omega_2 - \alpha_{th}\nabla^2 + (\mathbf{u}\nabla)\right)\hat{T} = \hat{\chi} \\ \left(\kappa_{th}\nabla + h_{ext}\right)\hat{T}\Big|_{r=R} = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

On note ici que l'équation locale (5.3) est similaire à l'équation de l'induction (équation 2.26). La seule différence provient du terme source $\hat{\chi}$ absent en électromagnétisme. Cette similarité engendre des comportements physiques communs. Citons par exemple l'existence d'une épaisseur de peau thermique (Bianchi *et al.*, 2004), similaire à l'épaisseur de peau électromagnétique,

$$\delta_{th} = \sqrt{\frac{2\alpha_{th}}{\omega_2}} \tag{5.4}$$

où α_{th}, la diffusivité thermique joue un rôle analogue à celui de la diffusivité magnétique $(\mu_0\sigma_{el})^{-1}$.

Équations globales L'équation (5.2) intégré sur le volume V de l'échantillon donne le bilan thermique global suivant,

$$\underbrace{i\omega_2 C_p \left\langle \hat{T} \right\rangle_V}_{\substack{\textit{Dérivée de} \\ \textit{l'énergie interne}}} = \underbrace{\hat{P}}_{\substack{\textit{Puissance} \\ \textit{injectée}}} - \underbrace{h_{ext} \left\langle \hat{T} \right\rangle_S}_{\substack{\textit{Puissance} \\ \textit{évacuée}}} \tag{5.5}$$

où C_p est la capacité calorifique totale de l'échantillon et $\tilde{P}$ la partie fluctuante de la puissance Joule totale.
En supposant que$\left\langle \tilde{T} \right\rangle_V \simeq \left\langle \tilde{T} \right\rangle_S = \left\langle \tilde{T} \right\rangle$, l'équation 5.5 donne :

$$C_p \left(i\omega_2 + \frac{h_{ext}}{C_p} \right) \left\langle \hat{T} \right\rangle = \hat{P} \tag{5.6}$$

5.1.2 Grandeurs caractéristiques

On utilise les équations (5.2) et (5.5) pour trouver les ordres de grandeur des temps caractéristiques de la thermique. Du bilan thermique global, on trouve l'ordre de grandeur de τ_{ext}, le temps capacitif, lié aux transferts thermiques entre l'échantillon et son milieu environnant :

$$\mathcal{O}\left(C_p \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \tilde{T} \right\rangle_V \right) \sim \mathcal{O}\left(h_{ext} \left\langle \tilde{T} \right\rangle_S \right) \quad \text{soit} \quad \mathcal{O}\left(\tau_{ext}\right) \sim \frac{C_p}{h_{ext}}$$

c'est le temps de retour à l'équilibre global de l'échantillon.

De l'équation locale de la chaleur, on trouve les ordres de grandeur de τ_κ et τ_u, respectivement les temps caractéristiques de la conduction et de la convection,

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}\right) \sim \mathcal{O}\left(\alpha_{th}\nabla^2\tilde{T}\right) \quad \text{soit} \quad \mathcal{O}\left(\tau_\kappa\right) \sim \frac{\rho c_p}{\kappa_{th}R^2} = \frac{C_p}{h_\kappa}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}\right) \sim \mathcal{O}\left((\mathbf{u}\nabla)\tilde{T}\right) \quad \text{soit} \quad \mathcal{O}\left(\tau_u\right) \sim \frac{R}{U_A} = \frac{C_p}{h_u},$$

où $h_\kappa = \frac{4}{3}\pi R\kappa_{th}$ et $h_u = \frac{4}{3}\pi R^2\rho c_p U_A$. L'introduction de ces temps caractéristiques permet de réécrire l'épaisseur de peau thermique sous la forme $\delta_{th} = R\sqrt{\frac{2}{\tau_\kappa\omega_2}}$.

Dans notre cas, le nombre de Biot (voir paragraphe 2.5.4 page 71) est toujours de l'ordre de 1 ou inférieur. Nous utiliserons implicitement cette propriété dans la suite du chapitre en posant $\tau_{ext} > \tau_\kappa > \tau_u$.

Régime thermique caractéristique

Nous appelons "comportement thermique de l'échantillon", ou encore "réponse fréquentielle" le rapport des amplitudes de la fluctuation de la température sur la fluctuation de la puissance Joule. Nous cherchons à trouver l'ordre de grandeur de ce rapport en fonction de la pulsation de la modulation. Pour un échantillon solide, nous distinguons trois comportements différents en fonction du régime de la modulation :

- Régime quasi-stationnaire $\omega_2 < \frac{1}{\tau_{ext}}$
- Régime capacitif $\frac{1}{\tau_{ext}} < \omega_2 < \frac{1}{\tau_\kappa}$
- Régime conductif $\omega_2 > \frac{1}{\tau_\kappa}$

Régime quasi-stationnaire Dans le régime quasi-stationnaire, l'échantillon est en équilibre thermique global. La variation de température est le résultat d'une succession d'états d'équilibre. Dans l'équation (5.6), le terme d'inertie thermique est négligeable. On trouve le comportement thermique caractéristique du régime quasi-stationnaire,

$$\mathcal{O}\left(h_{ext}\left\langle\hat{T}\right\rangle\right) = \mathcal{O}\left(\hat{P}\right) \quad \text{soit} \quad \mathcal{O}\left(\frac{\left\langle\hat{T}\right\rangle}{\hat{P}}\right) = h_{ext}^{-1}$$

Régime capacitif Dans le régime "capacitif", la pulsation est trop rapide pour que l'échantillon reste à l'équilibre global. Un déphasage apparaît entre la variation de la puissance et de la température. Quand $\frac{1}{\tau_{ext}} < \omega_2$, l'inertie domine par rapport aux transferts à la condition limite. Pour $\frac{1}{\tau_\kappa} > \omega_2$, la température est homogène dans l'échantillon. On peut donc utiliser le bilan global donné équation (5.6). On obtient

$$\frac{\left\langle \hat{T} \right\rangle}{\hat{P}} = -\frac{1}{C_p\left(i\omega_2 - \tau_{ext}^{-1}\right)} \quad \text{soit} \quad \mathcal{O}\left(\frac{\left\langle \hat{T} \right\rangle}{\hat{P}}\right) \sim \left(C_p\omega_2\right)^{-1} \tag{5.7}$$

Il est important de noter que dans cette gamme de pulsations, la réponse fréquentielle n'est pas influencée par la valeur de la conductivité thermique.

Régime conductif Si le chauffage est inhomogène dans le volume, il existe un point chaud dans l'échantillon (probablement situé à proximité du point ou la densité de puissance Joule est maximum). C'est de ce point que les fluctuations de température prennent naissance avant de diffuser dans le reste de l'échantillon. Si $\omega_2 > \frac{1}{\tau_\kappa}$, les fluctuations de température n'ont plus le temps de diffuser. En effet, dans cette gamme de pulsation, l'épaisseur de peau thermique définie par l'équation 5.4 est inférieure au rayon de la charge ($\delta_{th} = R$ pour $\omega_2 = 2\tau_\kappa^{-1}$). On distingue une première zone, située à une distance inférieure à δ_{th} du point chaud, dont la réponse en température n'est pas affectée par la conduction. On retrouve le comportement caractéristique du régime capacitif, mais dans un volume plus réduit (et dont la taille est déterminée par δ_{th}),

$$\mathcal{O}\left(\frac{\hat{T}}{\hat{P}}\right) = \left(C_p\omega_2\right)^{-1} \tag{5.8}$$

Dans le reste de l'échantillon, i.e. au delà de l'épaisseur de diffusion thermique, les fluctuations de températures sont atténuées car la conduction n'a pas le temps de s'effectuer. On s'attend à ce que la variation de la température y soit négligeable. Le gradient des fluctuations de température dans tout l'échantillon est donc de l'ordre de grandeur des fluctuations du point chaud

$$\mathcal{O}\left(R\nabla\hat{T}\right) \sim \hat{P}\left(C_p\omega_2\right)^{-1} \tag{5.9}$$

On déduit la variation de température dans le reste de l'échantillon en comparant le terme d'inertie au terme de diffusion dans l'équation (5.3),

Tableau 5.1: Régimes thermiques caractéristiques

Régime thermique	Comportement thermique caractéristique	
quasi-stationnaire	$\sim h_{ext}^{-1}$	
Capacitif	$\sim (c_p\omega_2)^{-1}$	
Conductif	Point chaud $\sim (C_p\omega_2)^{-1}$	Hors point chaud $\sim \dfrac{1}{\tau_\kappa C_p}(\omega_2)^{-2}$

$$\mathcal{O}\left(\hat{T}\right) \sim \frac{R^2\nabla^2\hat{T}}{i\tau_\kappa\omega_2} \text{ soit } \mathcal{O}\left(\frac{\hat{T}}{\hat{P}}\right) = \left(\tau_\kappa C_p\omega_2^2\right)^{-1} \tag{5.10}$$

Conclusion

La figure 5.1 représente les rapports caractéristiques $\frac{\|\tilde{T}\|}{\|\tilde{P}\|}$ rapportés dans le tableau 5.1 en fonction de la pulsation de modulation ω_2. La droite en pointillés représente ce ratio au point le plus chaud de l'échantillon.

On remarque que les termes “adiabatique”, “idéal” ou “isotherme”, utilisés en calorimétrie modulée pour désigner le domaine de fréquence intermédiaire (figure 5.1), sont inadaptés à la description de ce régime de modulation. Le terme “adiabatique” est hérité de la calorimétrie classique et ne correspond pas à la physique mise en jeu. Il en est de même de “l'idéalité” d'un tel domaine de fréquence. Enfin, si “isotherme” est le moins mauvais de ces qualificatifs, il peu aussi s'appliquer au régime quasi-stationnaire. Nous préférons donc le terme “capacitif”. Cette dénomination est pertinente pour décrire un domaine de fréquence propice à la mesure de la capacité calorifique, i.e. un régime où domine l'inertie thermique de l'échantillon.

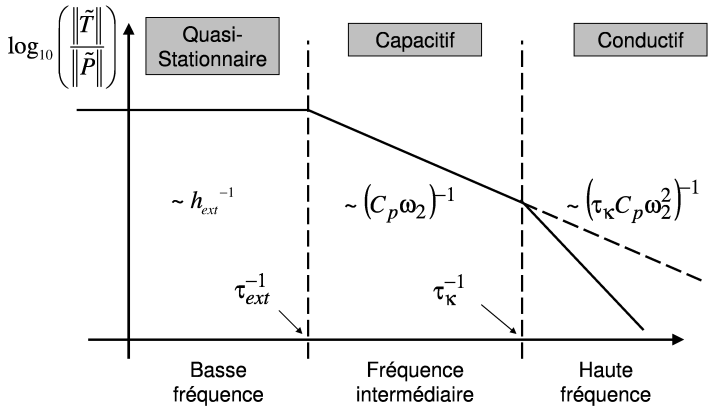


Figure 5.1: Comportements caractéristiques du rapport $\frac{\|\tilde{T}\|}{\|\tilde{P}\|}$ en fonction de fréquence de modulation ω_2 de la puissance Joule dissipée dans la charge.

Tableau 5.2: Temps caractéristiques (ordre de grandeur pour un échantillon de TiAl de 4 mm de rayon à 2000 K)

Temps	Expression	Ordre de grandeur
Temps capacitif	$\tau_{ext} = \dfrac{C_p}{h_{ext}}$	10 s
Temps de conduction	$\tau_\kappa = \dfrac{R^2 \rho c_p}{\kappa_{th}}$	1 s
Temps de convection	$\tau_u = \dfrac{R}{U_A}$	0,01 s

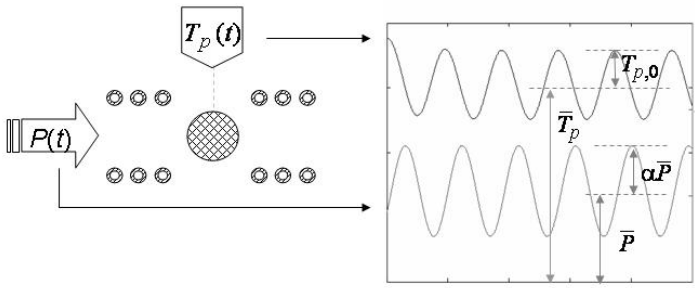


Figure 5.2: Schéma de la mesure de température et de puissance.

5.2 Calorimétrie inductive

Nous présentons ici les travaux pionniers de Fecht et Johnson (1991); Wunderlich et Fecht (2005) concernant la mesure calorimétrique utilisant la lévitation. Nous décrivons le montage expérimental et le traitement qu'il est fait des mesures pour déterminer la capacité calorifique et la conductivité thermique.

En présentant cet exemple en détail, nous donnons au lecteur un aperçu de la calorimétrie modulée. En effet, les équations du modèle proposé par Fecht et Johnson (1991) ne sont guère différentes des équations présentées par Sullivan et Seidel (1966) et reposent sur le même type de modélisation.

5.2.1 Procédure expérimentale

En microgravité, un échantillon est positionné électromagnétiquement (champ quadripolaire) et chauffé par induction (champ bipolaire) au centre d'un inducteur (paragraphe 2.2.3 page 39). La puissance est modulée par un signal sinusoïdal d'amplitude relative α. On mesure, au cours du temps, la puissance Joule totale et la température en position polaire (figure 5.2). Un même échantillon est soumis à plusieurs pulsations de modulation dans la gamme du régime capacitif défini au paragraphe 5.1.2 page 115. Les signaux sont analysés. A partir des mesures du déphasage entre la puissance et la température pour chacune des pulsations, on déduit une pulsation optimale ω_0. La mesure est effectuée en choisissant la pulsation ω_0 pour moduler l'amplitude du courant inducteur. Le rapport des amplitudes des variations de la température polaire et de la puissance est enregistré.

5.2.2 Traitement des mesures

Modèle analytique

La calorimétrie modulée inductive est une méthode de détermination indirecte reposant sur un modèle analytique des transferts thermiques interne et externe de l'échantillon. La température dans l'échantillon est modélisée par deux réservoirs de chaleur, identifiés aux zones polaire et équatoriale. Leur température sont appelées T_p et T_e respectivement et leur capacité calorifique totale sont $C_p\,(1-g_e)$ et $C_p g_e$ (g_e représentant la fraction volumique du réservoir de chaleur équatorial). Ils sont couplés thermiquement par un coefficient de transfert interne global h_{int}. Chacun d'eux est également couplé à un thermostat (au sens thermodynamique du terme) à température ambiante via un coefficient de transfert externe global $(1-s_e)\,h_{ext}$ et $h_{ext}s_e$ respectivement (s_e représente la fraction de la surface du réservoir équatorial en contact avec le thermostat). Wunderlich et Fecht (2005); Fecht et Johnson (1991) donnent les expressions analytiques des solutions de ce système thermique pour des modulations harmoniques en fonction de la pulsation de ces modulations.

Dans cette section, nous reportons ces solutions et détaillons leur utilisation pour déterminer les propriétés thermiques globales de l'échantillon (capacité calorifique totale et coefficients de transfert globaux) à partir de résultats de mesures expérimentales

Équation et solution Le modèle se traduit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} c_p \dfrac{\partial \widetilde{T}_p}{\partial t} = h_{int}\left(\widetilde{T}_e - \widetilde{T}_p\right) + h_{ext}\widetilde{T}_p \\ c_p \dfrac{\partial \widetilde{T}_e}{\partial t} = h_{int}\left(\widetilde{T}_p - \widetilde{T}_e\right) + h_{ext}\widetilde{T}_e + \widetilde{P} \end{cases} \tag{5.11}$$

Pour une puissance $\widetilde{P}$ harmonique de pulsation de modulation ω_2, Wunderlich et Fecht (2005) donnent les expressions suivantes,

$$\frac{\left|\hat{T}_p\right|}{\left|\widehat{P}\right|} = \frac{h_{int}}{C_p^2 g_e(1-g_e)} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_2^2+\lambda_{int}^2\right)\left(\omega_2^2+\lambda_{ext}^2\right)}} \tag{5.12}$$

$$\arg\left(\frac{\hat{T}_p}{\hat{P}}\right) = \arccos\left(\frac{\lambda_{ext}\lambda_{int}-\omega_2^2}{\sqrt{\left(\omega_2^2+\lambda_{int}^2\right)\left(\omega_2^2+\lambda_{ext}^2\right)}}\right) \tag{5.13}$$

$$\frac{\left|\hat{T}_e\right|}{\left|\widehat{P}\right|} = \frac{h_{int}}{C_p^2 g_e(1-g_e)} \frac{\left[\omega_2^2 + \left(\frac{h_{int}}{C_p}\frac{1-s_e}{1-g_e} + \frac{h_{ext}}{C_p}\frac{1}{1-g_e}\right)^2\right]}{\sqrt{\left(\omega_2^2+\lambda_{int}^2\right)\left(\omega_2^2+\lambda_{ext}^2\right)}} \tag{5.14}$$

$$\arg\left(\frac{\hat{T}_e}{\hat{P}}\right) = \arccos\left(\frac{-\left[-\left(h_{ext}\frac{1-s_e}{1-g_e} + h_{int}\frac{1}{C_p(1-e)}\right)\left(\lambda_{ext}\lambda_{int}-\omega_2^2\right)+\omega_2^2\left(\lambda_{ext}+\lambda_{int}\right)\right]}{\sqrt{\left(\omega_2^2 + \left(h_{ext}\frac{1-s_e}{1-g_e} + h_{int}\frac{1}{C_p(1-e)}\right)^2\right)\left(\omega_2^2+\lambda_{int}^2\right)\left(\omega_2^2+\lambda_{ext}^2\right)}}\right) \tag{5.15}$$

où λ_{ext} et λ_{int} sont les valeurs propres du système d'équation 5.11.

Pour de faibles valeurs du nombre de Biot, Wunderlich et Fecht (2005) donnent :

$$\lambda_{int}^{-1} = \frac{C_p g_e(1-g_e)}{h_{int}} \tag{5.16}$$

$$\lambda_{ext}^{-1} = \frac{C_p}{h_{ext}} \tag{5.17}$$

Détermination des propriétés thermiques globales

Le ratio $\frac{\left\|\widetilde{T}_p\right\|}{\left\|\widetilde{P}\right\|}$ ainsi que le déphasage entre $\widetilde{T}_p$ et $\widetilde{P}$ est déterminé à partir des mesures de puissance et de température pour une série de pulsations de modulation prédéterminée. A partir des mesures de déphasage on recherche la pulsation ω_0 tel que le déphasage entre la température polaire et la puissance vaille $\frac{\pi}{2}$. En utilisant l'équation 5.13 page précédente, on établit que $\omega_0 = \sqrt{\lambda_{ext}\lambda_{int}}$.

Capacité calorifique totale L'équation 5.12 pour la pulsation optimale $\omega_2 = \omega_0$ donne :

$$C_p = \frac{\left\|\widetilde{P}\right\|}{\omega_2\left\|\widetilde{T}_p\right\|}\frac{1}{(1+(g_e(1-s_e)+s_e(1-g_e))Bi)} \underset{Bi\to 0}{=} \frac{\left\|\widetilde{P}\right\|}{\omega_0\left\|\widetilde{T}_p\right\|} \tag{5.18}$$

qui se simplifie pour les faibles valeurs du nombre de Biot $Bi = \frac{h_{ext}}{h_{int}} < 0,01$. Alors, la connaissance des facteurs géométriques s_e et g_e n'est plus nécessaire pour déterminer la

capacité calorifique totale

Coefficient de transfert interne global h_{int} est déterminé à partir de la fréquence caractéristique λ_{int} (équation 5.16). Or cette fréquence ne peut pas être mesurée directement. Wunderlich et Fecht (2005) expliquent que la variation de la modulation de fréquence permet de déterminer la quantité $\lambda_{ext}^2 + \lambda_{int}^2$. Ainsi, une mesure du déphasage pour des modulations de très basses fréquences permet de déduire la quantité $\frac{\lambda_{ext}\lambda_{int}}{\lambda_{ext}^2+\lambda_{int}^2}$ à partir de l'équation 5.13. La connaissance de ces deux quantités permet alors de déterminer la fréquence λ_{int}. Dans de précédents travaux, Wunderlich *et al.* (2001) utilisent la mesure du temps de relaxation externe λ_{ext}^{-1} avec la valeur de ω_0 pour déduire λ_{int}.

La valeur de la fraction g_e, nécessaire à la détermination de h_{int} à partir de λ_{int}, est prédéterminée (Wunderlich *et al.* (2001) donnent $g_e \approx 0,4$). Son obtention théorique est aussi proposée à partir de l'interpolation du déphasage entre la température équatoriale et la puissance. Les validations expérimentales décrites dans Wunderlich et Fecht (2005) ne font aucune mention de la mesure de la température à cette position.

Enfin, le coefficient d'échange interne est obtenu de la manière suivante,

$$h_{int} = \frac{C_p g_e(1-g_e)}{\lambda_{int}^{-1}}$$

Conductivité thermique : Elle est obtenue à partir de la détermination de h_{int} grâce à l'expression suivante :

$$h_{int} = \frac{4}{3}\pi^3(R-\gamma\delta)\kappa_{th} \tag{5.19}$$

où γ est un facteur géométrique compris entre 0 et 1 et δ l'épaisseur de peau électromagnétique. Wunderlich *et al.* (2001) donne $\gamma \approx 0,65$

5.2.3 Conclusion

Cette technique a été testée pour des échantillons solides grâce à l'approche numérique proposé dans le chapitre 3. Nous avons montré que les résultats de simulations étaient en très bon accord avec le modèle analytique, et ce sur une très large gamme de pulsation (figure 5.3). Pour une vérification plus complète des hypothèse, le lecteur pourra se référer à Schetelat et Etay (2008). Cette technique est pertinente pour la mesure de C_p et de κ_{th} d'échantillons

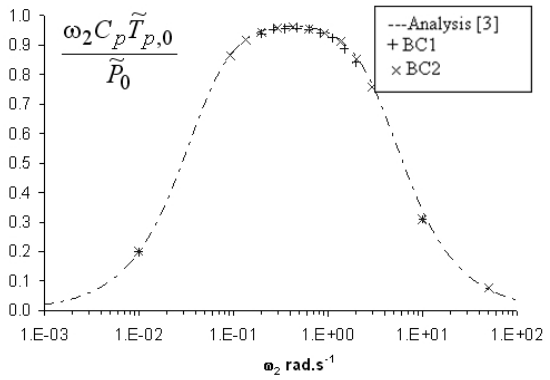


Figure 5.3: Simulation d'une expérience de calorimétrie modulée pour des échantillons solides. Les series de points BC1 et BC2 correspondent au choix de la condition limite de rayonnement, respectivement linéarisé et non-linéarisé (voirSchetelat et Etay (2008))

solides, et dont le nombre de Biot est faible. L'erreur sur la mesure est inférieure au pourcent en supposant que le facteur géométrique g_e est connu avec précision.

Toutefois, l'utilisation de cette technique pour déterminer la conductivité thermique d'échantillons liquides apparait peu pertinente. En effet, la modélisation des transferts internes par un coefficient global h_{int} ne permet pas de différencier la contribution de la convection de celle de la conduction. Cette approche revient à mesurer une conductivité thermique apparente, surestimant largement la conductivité intrinsèque du matériau.

Réaliser des simulations du protocole expérimental ci-dessus pour des échantillons liquides revient à évaluer des erreurs de mesure de l'ordre de la centaine de pourcent. Nous avons donc choisi d'évaluer directement l'influence de la convection sur la réponse en température. Cette évaluation est réalisée à l'aide d'une approche système de la thermique instationnaire dans l'échantillon. Cette approche est décrite dans la section suivante.

5.3 Approche système

Dans ce travail de thèse, nous proposons une nouvelle approche pour la mesure de la capacité calorifique et de la conductivité thermique. L'échantillon lévité y est vu comme un système dynamique linéaire ayant pour entrée la puissance Joule et pour sortie une ou plusieurs mesures de température. Mesurer le comportement thermique de l'échantillon revient à déterminer la fonction de transfert du système. Cette opération est appelé identification de

système. Contrairement à la technique présentée dans le paragraphe 5.2 page 118, l'excitation thermique de l'échantillon n'est plus réalisée via des modulations harmoniques, pulsation après pulsation. La modulation utilisée pour l'identification est de type "pseudo bruit blanc". Grâce à ce signal, le système dynamique est excité sur une plage de fréquences incluant les fréquences caractéristiques de la thermique de l'échantillon λ_{int} et λ_{ext}.

Cette technique est testée par simulation numérique. La section 5.3.1 présente le principe et les résultats de l'identification pour un échantillon solide. Cette section est constituée par un article accepté au journal Heat and Mass Transfer. La section 5.3.2 utilise la même approche pour des échantillons liquides.

5.3.1 Principe

Article accepté pour publication à Heat and Mass Transfer.

A new approach for non-contact calorimetry: system identification using pseudo-white noise perturbation.

Pascal Schetelat and Jacqueline Etay

CNRS-SIMAP-EPM
ENSEEG BP75
38402 ST MARTIN D'HERES CEDEX
FRANCE

Abstract

This paper presents a new technique for non-contact calorimetry measurement of specific heat capacity and thermal conductivity. Based on pseudo-white noise modulation and system identification, commonly used in electronics and communication engineering, this procedure can be used to measure the transfer function of the sample temperature variation due to heating power variation. The heat capacity and internal heat transfer coefficient are then determined using the equivalence between the identified transfer functions of the temperatures measured at two locations and the analytical model proposed by Fecht [1991] and Wunderlich [2005]. This inverse problem is solved numerically using a Gauss-Seidel algorithm. A numerical simulation of a non-contact modulated calorimetry experiment is used to demonstrate the relevance of this new technique for indirect measurement of the heat capacity and heat transfer coefficients of solid samples presenting large Biot numbers (Bi > 0.4).

1. Introduction

Numerical models of casting and solidification are increasingly used to optimize industrial processes for the production of metal alloys. All such models require reliable thermophysical property values such as heat capacity and thermal conductivity as input. However, most standard measurement techniques, such as differential scanning calorimetry, require the sample to be in contact with a crucible, leading to unavoidable contamination. Based on the early work of Okress [1952] on electromagnetic (e.m.) levitation, Herlach [1993] and Egry [2001] developed the electromagnetic levitator (EML), a non-contact technique that can be used to reduce flows inside the molten sample under microgravity conditions. This instrument is used in the framework of the Thermolab ESA-MAP project (Fecht [2005]).

Electromagnetic levitation is performed by placing an electrically conducting sample (radius *R*, electrical conductivity σ_{el}) inside a coil supplied by a high frequency current ($\omega_1/2\pi = 300 - 400\,kHz$) of intensity I_o, which generates an e.m. field. Located within such a field, the sample develops induced currents which: 1) generate a Joule power density χ that heats the sample (the total Joule power is P) and 2) interact with the e.m. field to generate e.m. forces directed towards the inside of the sample.

In microgravity, a bipolar e.m. field is used to melt the sample and control the temperature and a quadripolar e.m. field creates forces capable of centering the sample inside the inductor. Due to the bipolar inductor, heat source density χ is maximal at equatorial position and vanishes at the pole. It decreases almost exponentially from the surface to the core of the sample according to the so-called e.m. skin effect with a skin depth of:

$$\delta = \sqrt{2/\mu_o \sigma_{el} \omega_1} \qquad (1)$$

where μ_o is the magnetic permeability of the vacuum which is equal to $4\pi \cdot 10^{-7}\,SI$.

Traditional modulation calorimetry techniques as reviewed by (Kraftmakher 2002] are performed on solid samples of known geometry, with a spatially known heat source density harmonically modulated for a set of frequencies. Temperature responses are measured. An optimal modulation frequency, referred to as “adiabatic”, is deduced from these measurements. Assuming a low Biot number (the ratio between external and internal global heat transfer), the temperature response to this modulated input power can be used in a model to determine the specific heat capacity and thermal conductivity of a sample.

Fecht [1991] proposed to transpose the modulation calorimetry technique proposed by Sullivan [1968] to the EML. Here, the induced currents are modulated, generating a modulated Joule power in the sample. Temperature response at the polar position of the sample is recorded. A specific analytical model proposed by Fecht [1991] and Wunderlich [2005] is used to analyse the recorded signal and determine the heat capacity C_p as well as the thermal conductivity κ_{th} of a levitated sample. This model is detailed in section 2.2. As in traditional modulated calorimetry, this technique requires a low Biot number (Bi < 0.02). It has been used successfully in microgravity experiments by Wunderlich [2001]. The model assumptions have been checked numerically and provide a good approximation of the thermal behavior of solid samples (Schetelat [2008-1]).

The present paper describes and validates an original measurement technique designed to determine the global thermal properties (heat capacity and internal heat transfer coefficient) of samples with large Biot numbers.

This technique is divided into two steps.

The first step is described in section 2.1. It consists in a measurement of the non-stationary thermal response to a time-varying heating power, referred to as the thermal behaviour of the sample. Assuming a linear temperature response, the relationship between the power *P* and the temperatures measured at both polar and equatorial positions (T_p and T_e) are described by black box models (Richalet [1991]). Using a specifically designed pseudo-white noise, the heating power is modulated with time over a chosen frequency range instead of using single harmonics one at a time. Using well known identification algorithms (Richalet [1991], Borne [1992], (Sontag [1999]), the black box models relating *P* to T_p and T_e are identified from the measured temperature responses and power modulation. When correctly identified, these models give the transfer function between power and temperatures without any prior thermal modelling.

The second step is the indirect measurement of heat capacity and heat transfer coefficient. It is described in section 2.3. Using the Laplace transform, the model proposed by Fecht [1991] and Wunderlich [2005] is solved for any time dependent power modulation. Analytical transfer functions are found, using geometrical and thermophysical properties as input parameters. The sample properties are measured indirectly by stating the equality between identified and analytical transfer functions. This statement leads to a set of non-linear equations for which the model parameters are the unknowns (see table A.2.1 in Annex 2). Model parameters are determined by numerically solving these equations with a Gauss-Seidel algorithm (see chart in figure A.2.1 of Annex 2).

Section 3 is devoted to the numerical demonstration of the proposed technique (see figure 3). Experimental data are simulated using a non-stationary thermal simulation performed with finite volume software (Fluent 6.3). System identification and indirect measurement are performed using Matlab. Results are shown and discussed in section 4.

In this article we will use the following notation. The time-dependent variables $X(t)$ (X standing for T_e, T_p or P) are described by the following convention:

$$X(t) = \overline{X} + \tilde{X} \tag{2a}$$

where $\overline{X}$ and $\tilde{X}$ are the time averaged and fluctuating parts of *X* respectively, i.e.

$$\overline{X} = \frac{1}{t_{\exp}} \int_0^{t_{\exp}} X(t)\,dt \quad \text{and} \quad \tilde{X}(t) = X(t) - \overline{X} \tag{2b and 2c}$$

where $t_{\exp}$ is the duration of the experiment.

Note that an harmonic power modulation is $\tilde{X}(t) = \alpha \overline{X}\, \Re\left\{e^{i\omega_2 t}\right\}$, where ω_2 is the modulation angular frequency. Moreover, the measured or computed signal $\tilde{X}(t)$ is always a discrete signal noted as $\tilde{X}^{(n)} = \tilde{X}(n \cdot t_s)$, where t_s is the sampling time and n the sample number.

2. Method

2.1. System identification

Let us consider the measured polar and equatorial temperatures ($\tilde{T}_p^{(n)}$ and $\tilde{T}_e^{(n)}$) as the outputs of two linear systems, each taking the measured total Joule power perturbation $\tilde{P}^{(n)}$ as input (Sontag [1999]). The systems are represented schematically in figure 1.

We define H_p^{exp} and H_e^{exp} as the measured discrete transfer functions of these systems. For discrete models, the following relationships can be written:

$$Z\left\{\tilde{T}_p^{(n)}\right\} = H_p^{exp}(z^{-1}) \cdot Z\left\{\tilde{P}^{(n)}\right\} \tag{3a}$$

$$Z\left\{\tilde{T}_e^{(n)}\right\} = H_e^{exp}(z^{-1}) \cdot Z\left\{\tilde{P}^{(n)}\right\} \tag{3b}$$

where $Z\left\{\tilde{X}^{(n)}\right\}$ is the Z-transform of the discrete signal $\tilde{X}^{(n)}$ and z the Z-transform variable. These transfer functions can be written in a polynomial form such as

$$H_p^{exp}(z^{-1}) = \frac{B_p(z^{-1})}{A_p(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^{n_b} b_{p,i}(z^{-1})^i}{1 + \sum_{j=0}^{n_a} a_{p,j}(z^{-1})^j} \tag{4a}$$

$$H_e^{exp}(z^{-1}) = \frac{B_e(z^{-1})}{A_e(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^{n_b} b_{e,i}(z^{-1})^i}{1+\sum_{i=1}^{n_a} a_{e,j}(z^{-1})^j} \tag{4b}$$

which are fully equivalent to the following recursive expressions:

$$\tilde{T}_p^{(n)} + \sum_{i=1}^{n_a} a_{p,i}\tilde{T}_p^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n_b} b_{p,i}\tilde{P}^{(n-i)} \tag{5a}$$

$$\tilde{T}_e^{(n)} + \sum_{i=1}^{n_a} a_{e,i}\tilde{T}_e^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n_b} b_{e,i}\tilde{P}^{(n-i)} \tag{5b}$$

where $a_{p,i}$, $a_{e,i}$, $b_{p,i}$ $b_{e,i}$, are the model parameters and n_a and n_b are the order of the polynomials B_p, A_p, B_e and A_e. Here, a second order polynomial has been chosen ($n_a = n_b = 2$) because this choice produces the best fitting results.

to perform accurate identification (i.e. to find the above mentioned parameters), the input signal (i.e. heating modulation) Power Spectrum Density (PSD) must contain all the natural frequencies of the systems. This is achieved using Feedback Linear Shift Register (LFSR) sequences, commonly used in process, electronic, and communication engineering (Borne [1992], Mutagi [1996]). Choosing appropriate parameters (Annex 1), LFSR sequences can be set to have a constant PSD over a specified frequency range. Such signals are called pseudo-white noises.

The resulting power modulation at time *t* is

$$\tilde{P}(t) = \tilde{P}^{(n)} = \alpha\,\overline{P}\,LFSR^{(n)} \quad for\ all\ n,\ n\,t_s < t < (n+1)\,t_s \tag{6}$$

where α is the modulation relative amplitude and $LFSR^{(n)}$ the nth element of the LFSR sequence (figure A.1.1). The measured response temperatures to this modulation are $\tilde{T}_e^{(n)}$ and $\tilde{T}_p^{(n)}$. Identification is performed using a recursive root mean square algorithm (Richalet [1991]) from the complete sequences $\tilde{T}_e^{(n)}$, $\tilde{T}_p^{(n)}$ and $\tilde{P}^{(n)}$ recorded in the experiment.

Once the transfer functions are identified, no additional measurement is necessary given that all the information on the thermal behavior of the polar and equatorial positions for the predetermined frequency range is contained in H_p^{exp} and H_e^{exp}. For instance, these

functions can be used to predict the temperature variation resulting from any other power modulation. This includes the single harmonic modulation used in traditional modulated calorimetry.

H_p^{exp} and H_e^{exp} can be described by their gain, poles and zeros (Sontag [1999]). While the gain is the static response of the sample, pole values (i.e. roots of polynomials A_p and A_e in equations 4a and 4b) are related to the dynamic properties of the systems. In our case, two poles values, π_{ext} and π_{int}, are found for each transfer function as A_p and A_e are second order polynomials. Natural frequencies λ_{ext} and λ_{int}, are related to the poles values of the discrete transfer functions by the simple relation:

$$\pi_{int} = e^{-\lambda_{int} t_s} \quad \text{and} \quad \pi_{ext} = e^{-\lambda_{ext} t_s} \qquad \text{(7a and 7b)}$$

Natural frequencies derived from these values appear to be similar for both polar and equatorial temperatures and related to external and internal heat transfers.

Note that the accuracy of λ_{ext} and λ_{int} is bound neither by any a priori heat transfer model nor by the calibrations involved in power and temperature measurement (Wunderlich [1997], Hofmeister [1996]).

2.2. Heat transfer model

Fecht [1991] and Wunderlich [2005] proposed an analytical model of the heat transfer taking place in a non-contact calorimetry experiment to determine C_p and κ_{th} from temperature response measurement. This model is made up of two thermally coupled heat reservoirs and is based on the following assumptions:

(A1) The sample geometry and volume are constant. Its temperature variation amplitude is small enough to assume that the sample physical properties (i.e. $\rho, \sigma_{el}, \kappa_{th}, C_p, \varepsilon$) remain constant. Temperature variation does not trigger any phase transition.

(A2) Sample heating is inhomogeneous. The total heating power is assumed to be injected in only a fraction g_e of the sample volume.

(A3) The sample volume is divided in two virtual domains, each accounting for a heat reservoir of homogeneous temperature. One of these reservoirs receives all the heating power. Fecht [1991] and Wunderlich [2005] identified the directly heated reservoir with the equatorial region and the other reservoir with the polar region. Their volume and surface area fractions are g_e, $(1-g_e)$ and s_e, $(1-s_e)$, respectively (see figure 2).

(A4) The external heat transfer coefficient h_{ext} is modeled as:

$$h_{ext} = 4A\varepsilon\sigma\left(s_e\overline{T}_e^3 + (1-s_e)\overline{T}_p^3\right) \tag{8}$$

where $\sigma = 5.67\times10^{-8} W\, m^{-2}\, K^{-4}$ is the Stefan-Boltzmann constant and ε the total emissivity of the sample surface.

(A5) The internal heat transfer between equatorial and polar domains is modeled by a global internal heat transfer coefficient h_{int}. to relate h_{int} to the thermal conductivity, Wunderlich [2005] assumed the sample to be solid, spherical (radius R) and heated by a bipolar electromagnetic field of skin depth δ. This model leads to the following expression:

$$h_{int} = 4\pi(R-\gamma\delta)\kappa_{th} \tag{9}$$

with $0<\gamma<1$.

External h_{ext} and internal h_{int} global heat transfer coefficients allow us to define a global Biot number *Bi* as:

$$Bi = h_{ext}/h_{int} \tag{10}$$

The above listed assumptions lead to the following set of differential equations (Wunderlich [2005]):

$$C_p g_e \frac{d\tilde{T}_e}{dt} = h_{int}\left[\tilde{T}_p - (1+s_e Bi)\tilde{T}_e\right] + \tilde{P} \tag{11a}$$

$$C_p(1-g_e)\frac{d\tilde{T}_p}{dt} = h_{int}\left[\tilde{T}_e - (1+(1-s_e)Bi)\tilde{T}_p\right] \tag{11b}$$

2.3. Indirect property measurements

Indirect measurement techniques require a physical model to link the thermal behavior given by H_p^{exp} and H_e^{exp} to the thermal properties C_p and κ_{th}. For this study, we chose the aforementioned coupled reservoir model (Fecht [1991], Wunderlich [2005]). Instead of solving these equations for an harmonic perturbation of the power $\tilde{P}$, we use the Laplace formalism to transform the set of time-dependent differential equations (11a and 11b to an algebraic equation system in the Laplace space. The resulting polar and equatorial continuous transfer functions are

$$H_p^{ana}(p) = \frac{L\{\tilde{T}_p\}}{L\{\tilde{P}\}} = \frac{h_{int}}{C_p{}^2 g_e(1-g_e)} \frac{1}{(p+\lambda_{int})(p+\lambda_{ext})} \tag{12a}$$

$$H_e^{ana}(p) = \frac{L\{\tilde{T}_e\}}{L\{\tilde{P}\}} = \frac{h_{int}}{C_p{}^2 g_e(1-g_e)} \frac{1+(1-se)Bi + p\dfrac{(1-g_e)C_p}{h_{int}}}{(p+\lambda_{int})(p+\lambda_{ext})} \tag{12b}$$

where $L\{X\}$ is the Laplace transform of the continuous signal X and *p* is the complex Laplace variable.

The indirect determination of C_p and h_{int} is performed by stating that H_p^{exp} and H_e^{exp} are the discrete form of H_p^{ana} and H_e^{ana}. Then for every *p* in the complex plane:

$$H_e^{ana}(p) = H_e^{exp}(e^{-p\cdot ts}) \tag{13a}$$

$$H_p^{ana}(p) = H_p^{exp}(e^{-p\cdot ts}) \tag{13b}$$

A set of non-linear equations (table A.2.1 of Annex 2) is derived from equations 13a and 13b by selecting specific values of *p*. The calculation of the geometrical and thermophysical parameters of H_p^{ana} and H_e^{ana} is performed by solving this set of equations using a Gauss-Seidel algorithm. The full procedure is described in Annex 2.

3. Numerical validation

The present study intends to demonstrate the feasibility of the system identification calorimetry described in section 2. The full approach is summarized in figure 3. Numerical simulations of a levitated sample substitute for the non-contact calorimetry experiment. The input signal is synthesized by modulating the steady Joule power density (calculated from induction simulation) with a pseudo-white noise. Temperatures are obtained from the non-stationary thermal simulation of the time varying heated sample. Signal treatment (system identification and indirect measurement) are performed using Matlab.

3.1. Signal synthesis

The induction equation (i.e. calculation of magnetic field, induced currents and Joule power density for a given geometry) is solved using a harmonic formalism of the electromagnetic field in an axisymmetric 2D framework and performed with a specific module developed within the EPM laboratory (Delannoy [2002]). The geometry of the problem is depicted in figure 4. It corresponds to the levitator planned to fly on the International Space Station (Voss [2007]). The sample is a solid sphere of radius $R = 4mm$ and electrical conductivity $\sigma_{el} = 5.26\,10^5\ \Omega^{-1}m^{-1}$. The inductor is composed of two coils which are powered in phase. Each coil has three windings.

Six values of the electromagnetic skin depth δ are investigated by varying the angular frequency ω_1. For each δ, the current intensity I_o is chosen to keep the overall Joule power $\overline{P}$ in the sample constant. Two levels of heating power are chosen: $\overline{P} = 20.98\,W$ and $72.92\,W$. The corresponding current intensities and frequencies are listed in table 2.

Joule power density for $\omega_1/2\pi = 350\,kHz$ is depicted in figure 5. Cell size is taken to describe the e.m. skin depth by at least 15 cells.

The time varying Joule power density is obtained as follows

$$\chi(r,\theta,t) = \overline{\chi}(r,\theta)\left[1 + \alpha\ LFSR^{(n)}\right]\ \forall n,\ n.t_s < t < (n+1).t_s \qquad (14)$$

where $\overline{\chi}$ is the steady Joule power density calculated in the induction simulation and $\alpha = 5\%$. The parameter settings chosen for the LFSR are reported in table 3.

3.2. Simulated non-contact calorimetry

The time-dependent heat equation inside the sample is solved in an axisymmetric 2D framework using Fluent 6.3. The source term is the modulated Joule power density $\chi(r,\theta,t)$ defined in equation 14. The sample is assumed to be solid and its thermal properties independent of the temperature. Boundary heat flux ϕ corresponds to a grey and diffuse surface in a black body enclosure at room temperature $T_o = 300K$:

$$\phi(\theta,t) = \sigma\varepsilon\left(T(R,\theta,t)^4 - T_o^4\right) \qquad (17)$$

The total hemispherical emissivity is taken as $\varepsilon = 0.4$. We define an equivalent radiative surface temperature $\overline{T}_{surf}$ as:

$$\overline{T}_{surf} = \left[\frac{\overline{P}}{A\varepsilon\sigma} + T_o^4\right]^{1/4} \qquad (18)$$

The total heating power corresponds to $\overline{T}_{surf} = 1440°K$ and $2000°K$.

The sample is meshed with a total of 1000 cells. Numerical time steps $\mathrm{d}t$ and cell size $\mathrm{d}x$ are chosen such that the Fourier number $Fo = \alpha \mathrm{d}t / \mathrm{d}x^2$ is less than 10.

4. Results

For the sake of clarity, the orders of magnitude of the heat transfer coefficients are used to normalize the results. Order of magnitude of h_{ext} is evaluated from (8):

$$O(h_{ext}) = 4\varepsilon A \sigma \overline{T}_{surf}^3 \tag{19}$$

Order of magnitude of h_{int} is given by a simple heat transfer balance:

$$O(h_{int}) = \frac{4}{3}\pi R \kappa_{th} \tag{20}$$

These orders of magnitude lead to the following order of magnitude of the Biot number:

$$O(Bi) = 12\ \varepsilon\sigma\ \overline{T}_{surf}^3 R / \kappa_{th} \tag{21}$$

The two characteristic surface temperatures (eq. 24) correspond to two Biot number orders of magnitude: $O(Bi)$= 0.6 and 1.7.

4.1. Identified system

System identification was performed for the simulation cases listed in table 2. Figure 6 shows the results of the Fluent time-dependent solution and the results of system identification. The black solid line is the total modulated power and the red and blue solid lines are the Fluent solutions for equatorial and polar temperature. Red and blue squares are the discrete values simulated from H_p^{exp}, H_e^{exp} and the modulated power. This figure shows very good agreement between the Fluent results and the identified transfer functions (standard deviation less than 0.2%). As knowledge of H_p^{exp} and H_e^{exp} is equivalent to knowing the results of 3072 and 2048 single frequency modulation experiments (i.e. the half of the number of sampled temperatures for the cases $\overline{P} = 20.98\,W$ and $72.92\,W$ respectively), these transfer functions are compact and accurate measures of the thermal behavior of the sample at polar and equatorial regions. The identified transfer function modulus

$\left\| H_p^{exp}(j\omega_2) \right\|$ is shown in figure 7 for both levels of power. It has been normalized by the characteristic order of magnitude $O\left(\left\|\tilde{T}\right\| / \left\|\tilde{P}\right\|\right) = 1/\omega_2 C_p$. As expected for large values of Bi, none of these normalized functions reach 1, making it impossible to find an "adiabatic" regime ([Wunderlich [2005]). As pointed out in the introduction, traditional methods are unable to calculate the heat capacity in such cases without prior knowledge of the values of geometrical factors g_e and s_e .

4.2. Calculation of global properties

Using the identified transfer functions for the aforementioned cases (i.e. $Bi \geq 0.4$), the algorithm described in Annex 2 is run. g_e , s_e , h_{int} , h_{ext} $C_p^{\exp}$ are determined. External and internal transfer coefficients h_{ext} and h_{int} are normalized with the characteristic transfer coefficients (eq. 18 and eq. 19). $C_p^{\exp}$ is used to evaluate the relative error $\Delta C_p = \left(C_p^{set} - C_p^{\exp}\right) / C_p^{set}$ from the actual heat capacity C_p^{set} set in the Fluent simulations. Results are shown in figures 8 to 11.

Curves relative to geometrical factors (figure 8) and heat transfer coefficients (figures 9 and 10) exhibit the same trends: when $\delta / R \leq 1$, g_e, s_e, $h_{int} 3/(4\pi R \kappa_{th})$ and $h_{ext} \Big/ 4A\varepsilon\sigma\overline{T}_{surf}^3$ change significantly with time, however when $\delta / R \geq 1$, these quantities are almost constant.

These observations confirm our physical expectations: for large electromagnetic skin depths, the Joule power density is nearly constant in the sample and no longer varies with the electromagnetic skin depth.

Figure 9 shows the normalized external heat transfer coefficient $h_{ext} \Big/ 4A\varepsilon\overline{T}_{surf}^3$. For most cases it is close to 1. Larger deviations for higher levels of power can be explain by considering the second order terms of the linearization of the radiative flux $\tilde{T}^2 / \overline{T}^2 \propto \overline{P}^{3/2}$ which shows that the relative error increases as the total power increases.

For $\delta / R \leq 1$, figure 10 clearly shows an increase in the normalized internal heat transfer coefficient as the skin depth decreases for both levels of heating power. This trend is consistent with equation 9. For higher Bi, internal heat transfer increases as well.

Figure 11 shows the relative error ΔC_p for the various skin depth and heating power values. It is always less than 3%. The standard deviation of ΔC_p for varying skin depth is less than 1% for $\overline{P} = 21W$ and less than 2% for $73W$, proving the measurement to be mostly independent of the skin depth.

5. Discussion

A new method of calorimetry based on pseudo-white noise modulation and system identification has been proposed. Using the identification algorithm in conjunction with the heat transfer model proposed by Fecht [1991] and Wunderlich [2005], the heat capacity and internal transfer coefficients can be determined. The complete method was tested using a numerical simulation for samples with Biot numbers up to 1. The results were excellent. Physical and geometrical parameters of the heat transfer model were calculated for various skin depths and heating powers. Dependency on the skin depth value was observed and is in good agreement with physical intuition.

Note the following points:

- The proposed measurement of the frequency response of a sample involves a fully automated procedure. An experiment requires only a rough estimate of a frequency range that overlaps the frequency interval $[\lambda_{ext};.\lambda_{int}]$. The wider the chosen frequency range, the longer the modulation sequence. This could be a limitation as a low Biot number implies a very wide frequency range. This potential problem has already been solved in our recent work by using an improved pseudo-white noise synthesis, theoretically allowing measurement of samples of Bi as low as 0.01 in less than 30s (Schetelat [2008-2]).

- Values of the natural frequencies are directly determined from the identified transfer function and are bound neither by any a priori heat transfer model nor the calibrations involved in power and temperature measurement (Wunderlich [1997], Hofmeister [1996]).

- In this work, the indirect measurement of the heat capacity and internal transfer coefficient has been performed using the model proposed by Fecht [1991] and Wunderlich [2005]. This specific procedure requires the temperature measurement at both equatorial and polar positions. It is fully automated, valid for large Biot numbers and does not require any calibration. Note that to determine the thermal conductivity, the electrical conductivity of the sample must be known as well as the dependency of h_{int} on κ_{th}, δ and *Bi*. Such a parametric study can be easily carried out with numerical simulations as discussed in this work (see figure 10).

Note also that system identification calorimetry is not limited to a specific heat transfer model to perform indirect measurements. Efforts are required to develop an accurate analytical or numerical inverse heat transfer model taking advantage of the quantity of information provided by the system identification technique.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been funded by the ESA under the MAP-Thermolab project, the EC under the PI-IMPRESS project (Contract Number: NMP3-CT-2004-500635) and the CNES under the Material Sciences Program.

Nomenclature

A	Sample surface area **[m^2]**

A_p , A_e	Discrete transfer function polynomial denominator **[-]**
$a_{p,i}$, $a_{e,i}$	A_p , A_e coefficients **[-]**
B_p , B_e	Discrete transfer function polynomial numerator **[K W^{-1}]**
$b_{p,i}$, $b_{e,i}$	B_p , B_e coefficients **[K W^{-1}]**
Bi	Biot number **[-]**
C_p	Total specific heat capacity **[J K^{-1}]**
dt	Numerical time step **[s]**
dx	Cell size **[m]**
$LFSR^{(n)}$	Modulation sequence **[-]**
Fo	Fourier number **[-]**
G	Electromagnetic geometrical factor **[-]**
g_e	Volume ratio of the equatorial zone **[-]**
h_{int}	Global conductive heat transfer coefficient **[W K^{-1}]**
h_{ext}	Global radiative heat transfer coefficient **[W K^{-1}]**
H_p	Transfer function of Ω_p **[K W^{-1}]**
H_e	Transfer function of Ω_e **[K W^{-1}]**
I_0	Coil current amplitude **[A]**
j	Complex variable **[-]**
k	LFSR parameter **[-]**
n	Time step number **[-]**
N	Register length **[-]**
P	Total Joule heating power **[W]**
p	Laplace transform variable **[s^{-1}]**
r	Radial coordinate **[m]**
R	Sample radius **[m]**
R_ω	Shield parameter **[-]**
s_e	Surface area ratio of the equatorial zone **[-]**
T	Temperature in the sample **[K]**
T_o	Ambient temperature **[K]**
T_e	Equatorial temperature **[K]**

T_p	Polar temperature **[K]**
$\overline{T}_{surf}$	Equivalent radiative temperature **[K]**
t	Time **[s]**
t_s	Sampling period **[s]**
z^{-1}	Z-transform variable **[-]**

Greek symbols

α	relative modulation amplitude **[-]**
ε	Total hemispherical emissivity **[-]**
δ	Electromagnetic depth **[m]**
ϕ	Radiative heat flux **[W m^{-2}]**
Φ	Total radiative power **[W]**
γ	Thermal geometrical factor **[-]**
κ_{th}	Thermal conductivity **[W m^{-1} K^{-1}]**
λ_{ext} , λ_{int}	Thermal natural frequencies relative to h_{int} and h_{ext} **[s^{-1}]**
μ_0	Vacuum permittivity $4\pi 10^{-7}$ **[SI units]**
π_{ext}, π_{int}	Discrete transfer function pole values **[-]**
ρ	Density **[kg m^{-3}]**
σ	Stefan-Boltzmann constant **5.67 x 10^{-8} [W m^{-2} K^{-4}]**
σ_{el}	Electrical conductivity **[Ω^{-1} m^{-1}]**
θ	Azimutal coordinate **[rad]**
χ	Joule power density **[W m^{-3}]**
χ_0	Characteristic Joule power density **[W m^{-3}]**
ω_1	E.M. field angular frequency **[rad s^{-1}]**
ω_2	Modulation angular frequency **[rad s^{-1}]**
ω_o	Optimal modulation angular frequency **[rad s^{-1}]**

Bibliography

Borne P. (1992) *Modélisation et identification des procédés* tome 2 Technip

Carslaw H.S. & Jaeger J.C. (1959) *Conduction of heat in solids* - Oxford University Press - pp 230-8

Delannoy Y., Pelletier D., Etay J. & Fautrelle Y. (2002) *Stirring and mass transfer in a 1-phase induction system* Proceedings of the international PAMIR conference, Ramatuelle (France), section II 39–44

Egry I., Diefenbach A., Dreier W. & Piller J. (2001) *Containerless processing in space-thermophysical property measurements using electromagnetic levitation* International Journal of Thermophysics **22** (2) 569-578

Fecht H.J. & Johnson W.L. (1991) *A conceptual approach for non-contact calorimetry in space* Rev. Sci. Instr. **62**:1299-1303

Fecht H.J., Passerone A. Ricci E., Etay J., Egry I., Seetharaman S., Aune R.E., Battezzati L. & Wunderlich R.W. (2005) *Thermophysical properties of metallic alloys* Microgravity Applications Program: successful teaming of Science and Industry – 8-20 ISBN 92-9092-971-5

Herlach D.M., Cochrane R.F., Egry I., Fecht H.J. & Greer A.L. (1993) *Containrless processing in the study of metallic melt and their solidification* Int. Mater. Rev. **38**, 273-347.

Hofmeister, W. H.; Bayuzick, R. & Krishnan, S. (1996) *Optical Pyrometry on TEMPUS: a Critical Assessment of Non Contact Temperature Measurement in low earth orbit* Proc. SPIE, 2809, 288-302

Kraftmakher, Y. *Modulation Calorimetry and related techniques* (2002) Physics Reports, **356**, 1-117

Lohöfer G. & Piller J. (2001) *The new ISS electromagnetic levitation facility: "MSL-EML".* AIAA 0764

Mutagi, R.N. (1996) *Pseudo noise sequences for engineers*, Electronics & Communication Engineering Journal. **8** (2) 79-87

Okress, E. C.; Wroughton, D. M.; Comenetz, G.; Brace, P. H. & Kelly (1952) *Electromagnetic levitation of solid and molten metals* Journal of applied physics, **23**, 545-552

Richalet J. (1991) *Pratique de l'identification* Hermès

Schetelat P. & Etay J. (2008) *Inductive modulated calorimetry analytical model versus numerical simulation* COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering Vol. 27 No. 2, pp. 436-444

Schetelat P. & Etay J. (2008) *Electromagnetic Stirring Effect on Thermal Conductivity of a Levitated Sample*Proceedings. Proceedings of the International Scientific Colloquium Modelling for Electromagnetic Processing, Hannover (Germany) session 5 163–168

Sontag, Eduardo D. (1999) *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. Second Edition.* Springer.

Sullivan P. & Seidel G. (1968) *Steady State, AC-Temperature Calorimetry* Phys. Rev. **173** 679-685

Voss D., Minster O., Jarvis D., Manieri P., Dreier W., Kuhl R., Egry I., Herlach D., Kolbe M., Volkmann T., Lohoefer G., Holland-Moritz D., Loeser W., Hermann R., Gandin C.A., Battezzati L., Etay J., Fecht H.J., Wunderlich R., Ricci E., Pottlacher G., Seetharaman S.

(2007) *Electromagnetic Levitation on Board the International Space Station* - 3rd Int.Symp. on Physical Sciences in Space – ISPS2007 – Nara, Japon, 22-26 Oct.

Wunderlich R.K. , Lee D.S. Johnson W.L. & Fecht H.J. (1997) *Non contact modulation calorimetry of metallic liquid in low earth orbit* Physical Review B **55** (1) 26-29

Wunderlich R. K., Ettl Ch. & Fecht H.J. (2001) *Specific heat and thermal transport measurements of reactive Metallic Alloys by non contact calorimetry in reduced gravity*. International Journal of Thermophysics. **22** (2) 579-591

Wunderlich R. & Fecht H. (2005) *Modulated electromagnetic induction calorimetry of reactive metallic liquids*. Measurement Science and Technology **16**, 402-416

Annex 1: Pseudo-noise synthesis

A pseudo-white noise sequence is a signal for which PSD is constant over a specified frequency range. It can be generated using a feedback linear shift register (LFSR). The register is a binary sequence of *N* bits, where *N* is chosen between 5 and 20. The signal is used to iteratively generate a pseudo-random binary sequence of $\left(2^N - 1\right)$ bits. The register is shifted by one bit every each iteration. The new bit of the register is calculated from a Boolean operation between bits of constant position in the register. An example of the signal and its related LFSR is given in figure A.1.1.

Figure A1.1 – LFSR scheme and resulting signal (N=6 ; k=2)

k is the number of times each bit of the pseudo-random binary sequence is repeated in the discrete signal $LFSR^{(n)}$ and t_s is the sampling period. The PSD of $LFSR^{(n)}$ is white over a frequency range predetermined by the parameters t_s, k and N. For this range to be wider than [λ_{ext} ;λ_{int}], the LFSR parameters must satisfy the following conditions:

$$t_s \leq 2(\lambda_{\text{int}})^{-1}$$
$$N\,k\,t_s \geq (\lambda_{ext})^{-1} \qquad \text{(A.1.1)}$$

The resulting signal has a total duration of $\left(2^N - 1\right)kt_s$. A detailed description on pseudo-white noise synthesis can be found in Mutagi [1996].

Annex 2: Calculation of physical properties

The identification process described in section 2.2.1 provides the discrete transfer functions $H_p^{exp}(z^{-1})$ and $H_e^{exp}(z^{-1})$ for which the natural frequencies are λ_{int} and λ_{ext}. This makes it possible to evaluate quantities S_1 to S_5. Using equation system (13), we can write the following set of non-linear equations, linking S_1 to S_5 to the heat transfer model properties:

	Discrete transfer function evaluation		Model property expression
S_1=	$\left\| H_p^{exp}(e^{-j\omega_0 t_s}) \right\| . \omega_0$	=	$C_p[1+\gamma_e Bi]$
S_2=	$\left((\lambda_{int}+\lambda_{ext}).\omega_0 . \left\| H_p^{exp}(e^{-j\omega_0 T_s}) \right\| \mathrm{Im}\left\{ \frac{H_e^{exp}(e^{-jt_s})}{H_p^{exp}(e^{-jt_s})} \right\} \right)^{-1}$	=	$C_p g_e$
S_3=	$\left\| \frac{H_e^{exp}(1)}{H_p^{exp}(1)} \right\| - 1$	=	$(1-s_e)Bi$
S_4=	$\frac{\omega_0}{\left\| H_p^{exp}(e^{-j\omega_0 t_s}) \right\| . (\lambda_{int}+\lambda_{ext})}$	=	$h_{ext}[1+s_e(1-s_e)Bi]$
S_5=	$\omega_0 \frac{\left(\left\| H_p^{exp}(e^{-j\omega_0 t_s}) \right\| . (\lambda_{int}+\lambda_{ext}) \right)^{-1}}{\left(\left\| \frac{H_e^{exp}(e^{-j\omega_0 t_s})}{H_p^{exp}(e^{-j\omega_0 t_s})} \right\|^2 - \mathrm{Re}\left\{ \frac{H_e^{exp}(e^{-jt_s})}{H_p^{exp}(e^{-jt_s})} \right\} \right)}.$	=	$h_{int}\frac{g_e}{(1-g_e)}$

Table A.2.1 – Numerical results

Note that $\omega_0 = \sqrt{\lambda_{\mathrm{int}}\lambda_{ext}}$. These equations are solved using the Gauss-Seidel algorithm described in figure A.2.1. Convergence is achieved after few iterations and C_p, h_{int}, h_{ext}, g_e and s_e are obtained.

Figure A.2.1 – Chart of the Gauss-Seidel algorithm

Tables captions

Table 1 – Sample physical characteristics

Table 2 – Inducting currents characteristics and corresponding relevant parameters

Table 3 – LFSR parameters and unsteady thermal simulation time step

Table 4 – Numerical results

Tables

Table 1 - Sample physical characteristics

density	3860 kg.m^{-3}
Specific heat capacity	663 J.K^{-1}.kg^{-1}
Thermal conductivity	5 W.m^{-1}.K^{-1}
electrical conductivity	5.26 10^{5} Ω^{-1}.m^{-1}
total emissivity	0.4

Table 2 - Inducting currents characteristics and corresponding relevant parameters

$f_1(kHz)$		9.6	60	150	350	1 000	12 000
$\delta(mm)$		7.0715	2.8283	1.7918	1.1730	0.6939	0.2003
$R_\omega = \mu_o \sigma_{el} \omega_1 R^2$		0.6399	4.0003	9.9675	23.2575	66.4501	797.4009
$I_o(A_{peak})$	$P_o = 21W$	1061.14	181.75	93.45	65.00	46.37	14.14
	$P_o = 72W$	1978.58	338.90	174.24	121.20	86.46	26.37

Table 3 – LFSR parameters and unsteady thermal simulation time step

	n	k	$t_s(s)$	$\Delta t(s)$	duration (min)
$\overline{P} = 21W$	11	3	0.5	0.05	51
$\overline{P} = 72W$	11	2	0.2	0.02	14

Table 4 – Numerical results

δ/R	1.77		0.71		0.45		0.29		0.17		0.05	
$\overline{P}$	$21W$	$73W$	$21W$	$73W$	$21W$	$73W$	$21W$	$73W$	$21W$	$73W$	$21W$	$73W$
g_e	0.59	0.61	0.59	0.61	0.58	0.58	0.56	0.53	0.52	0.47	0.46	-
s_e	0.74	0.79	0.74	0.79	0.74	0.78	0.71	0.75	0.68	0.72	0.61	-
$h_{\text{int}}/4\pi R\kappa_{th}$	0.52	0.52	0.52	0.52	0.53	0.56	0.54	0.62	0.55	0.64	0.58	-
$h_{ext}/4A\varepsilon\sigma\overline{T}_{surf}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.03	1.02	-
$\Delta C_p(\%)$	-0.50	-2.26	-0.51	-2.04	-0.39	-1.15	-0.14	0.73	0.32	1.68	1.70	-

Figures captions

Figure 1 – System representation of the present inductive arrangement (inductor+sample)
Figure 2 - Sketch of heat transfer in and out of the sample as proposed by Fecht [1991]
Figure 3 – Numerical simulations used to validate the proposed signal analysis procedure

Figure 4 – Geometry used for numerical simulation
Figure 5 – Joule Power density in $W.m^{-3}$ for 350 kHz
Figure 6 – Verification of the concordance between numerically simulated and recovered temperature fluctuations after identification
Figure 7 – Identified transfer function for $\delta = 150\ kHz$ (normalized) for two different steady power values
Figure 8 – Volume and surface fractions g_e and s_e versus electromagnetic skin depth for two power values

Figure 9 – Normalized external heat transfer coefficient versus electromagnetic skin depth for two power values

Figure 10 - Normalized internal heat transfer coefficient versus electromagnetic skin depth for two power values
Figure 11 - Error on Cp (%) versus electromagnetic skin depth for two power values

Figure A1.1 – LFSR scheme and resulting signal (N=6 ; k=2)

Figure A.2.1 – The Gauss-Seidel algorithm

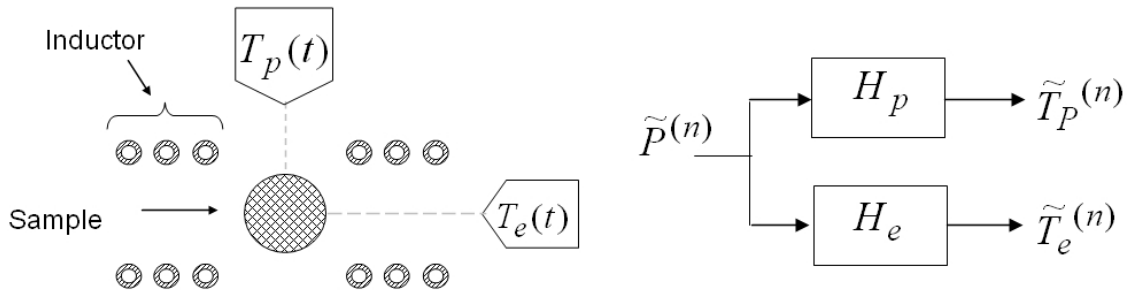

Inductor
$T_p(t)$
Sample
$T_e(t)$
$\widetilde{P}^{(n)}$
H_p
H_e
$\widetilde{T}_P^{(n)}$
$\widetilde{T}_e^{(n)}$

Figure 1 – System representation of the present inductive arrangement (inductor+sample)

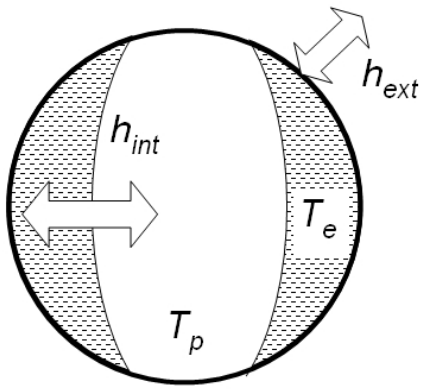


Figure 2 - Sketch of heat transfer in and out of the sample as proposed by Fecht [1991]

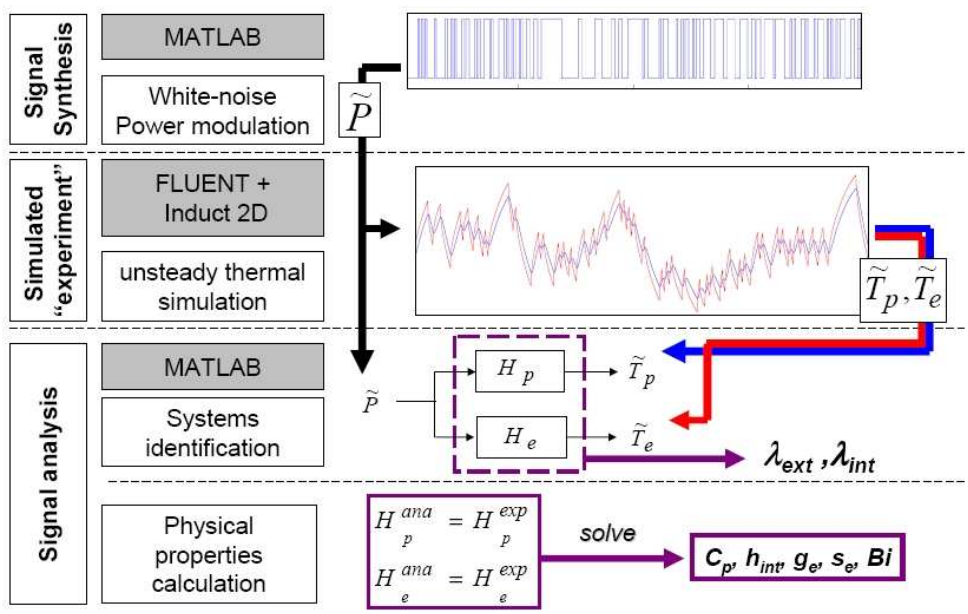


Figure 3 – Numerical simulations used to validate the proposed signal analysis procedure

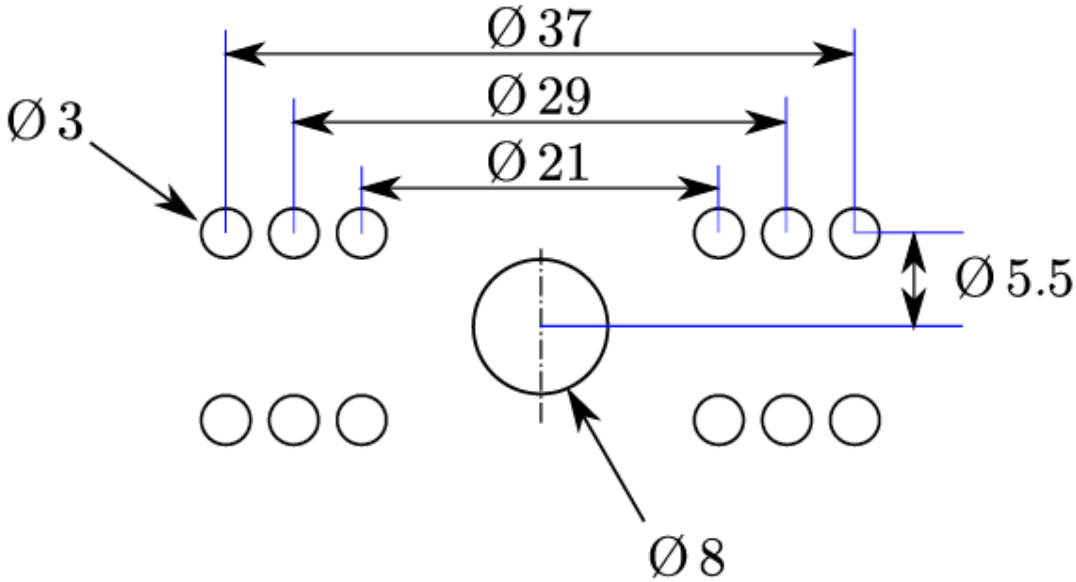


Figure 4 – Geometry used for numerical simulation

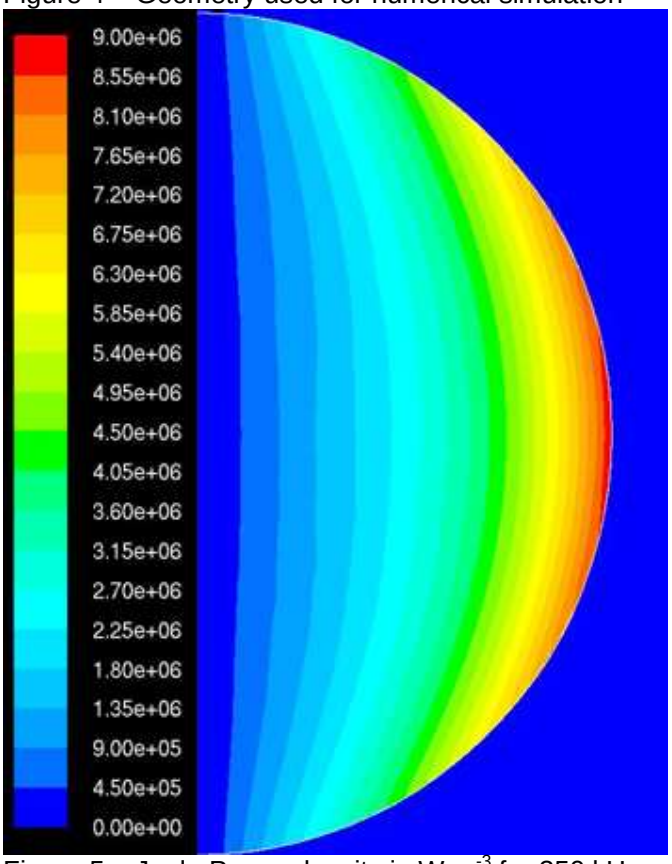


Figure 5 – Joule Power density in $W.m^{-3}$ for 350 kHz

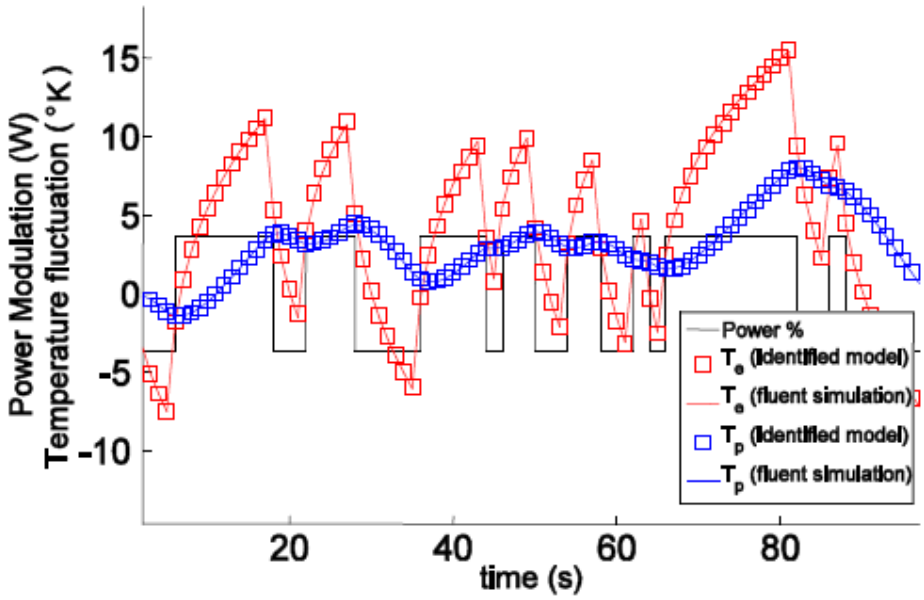


Figure 6 – Verification of the concordance between numerically simulated and recovered temperature fluctuations after identification

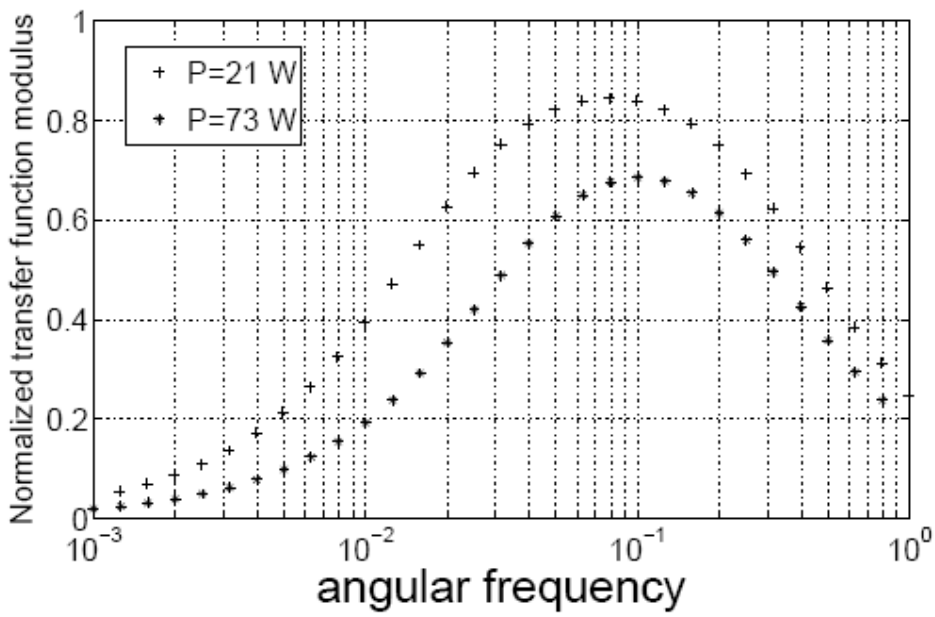


Figure 7 – Identified transfer function for δ = *150 kHz* (normalized) for two different steady power values

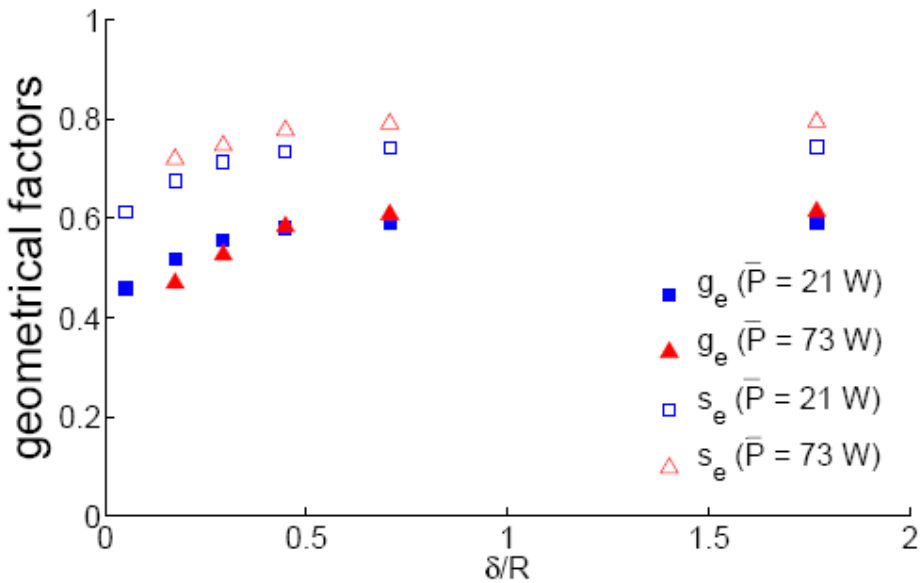


Figure 8 – Volume and surface fractions g_e and s_e versus electromagnetic skin depth for two power values

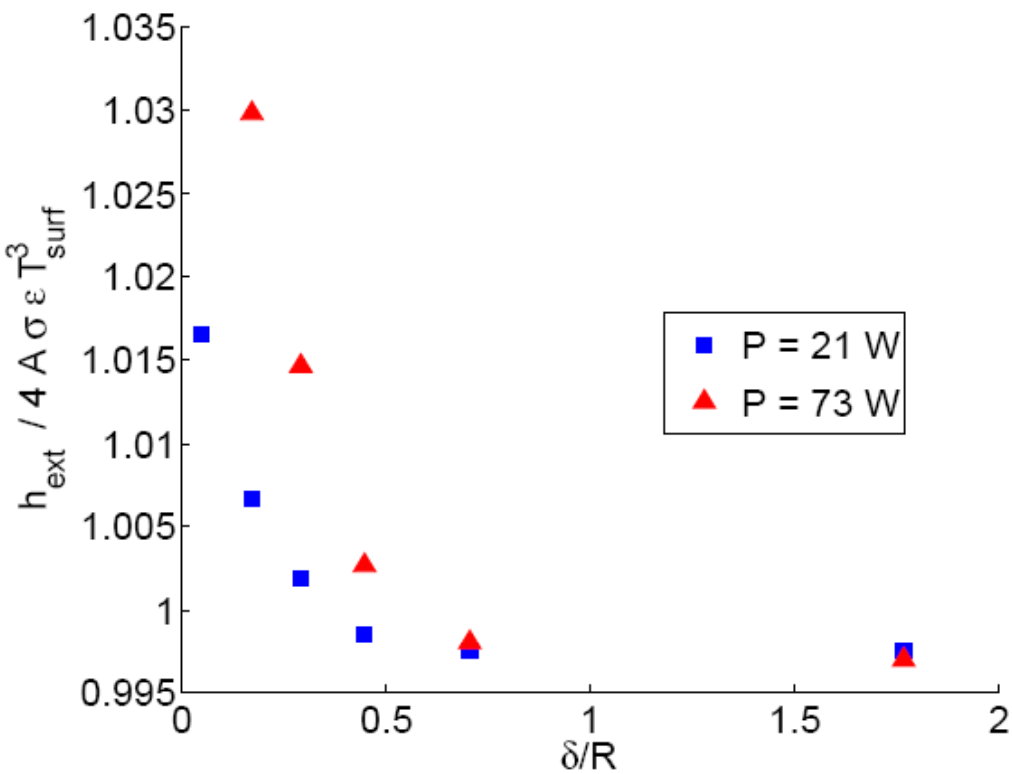


Figure 9 – Normalized external heat transfer coefficient versus electromagnetic skin depth for two power values

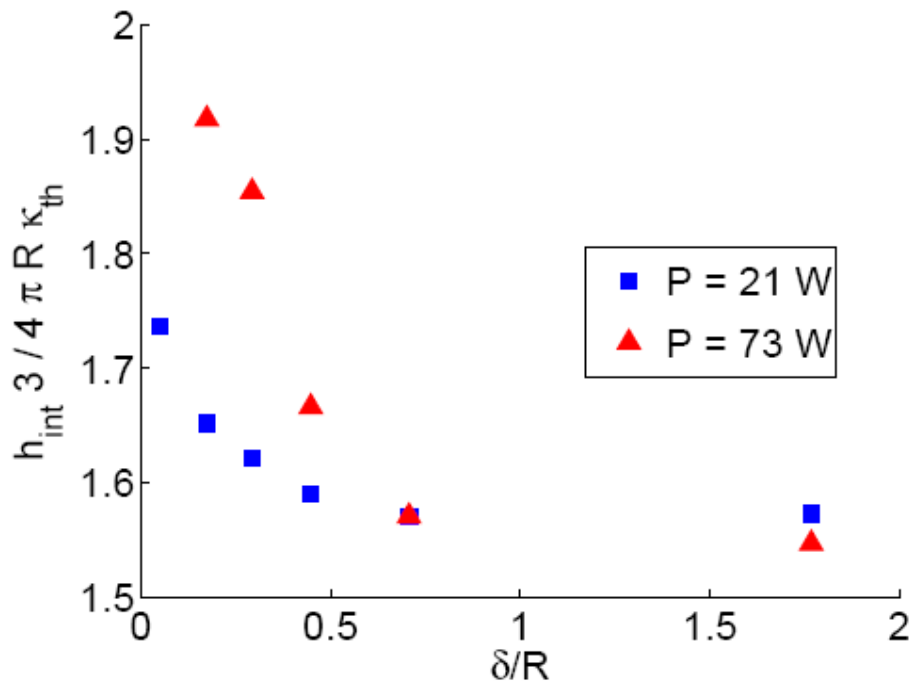


Figure 10 - Normalized internal heat transfer coefficient versus electromagnetic skin depth for two power values

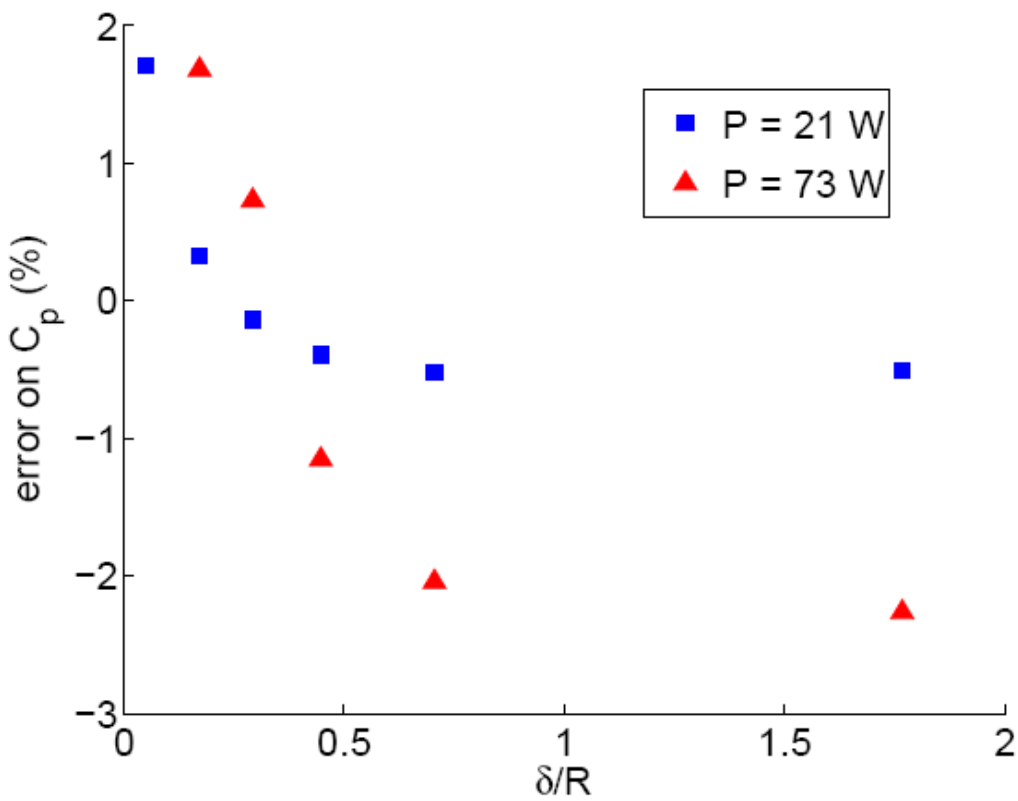


Figure 11 - Error on Cp (%) versus electromagnetic skin depth for two power values

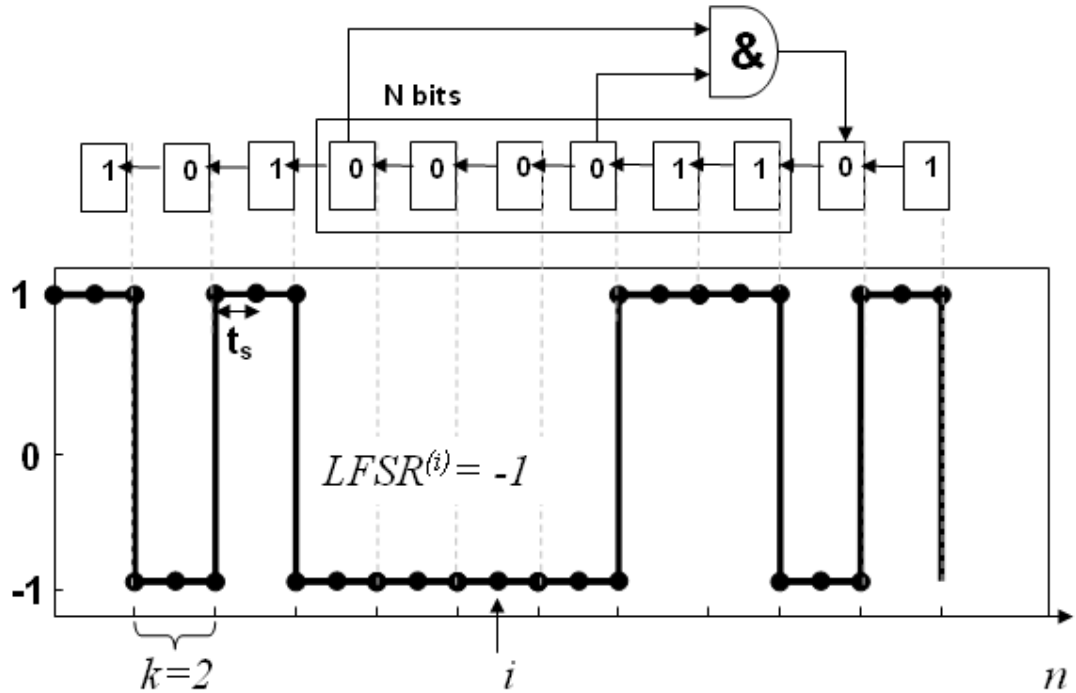


Figure A1.1 – LFSR scheme and resulting signal (N=6 ; k=2)

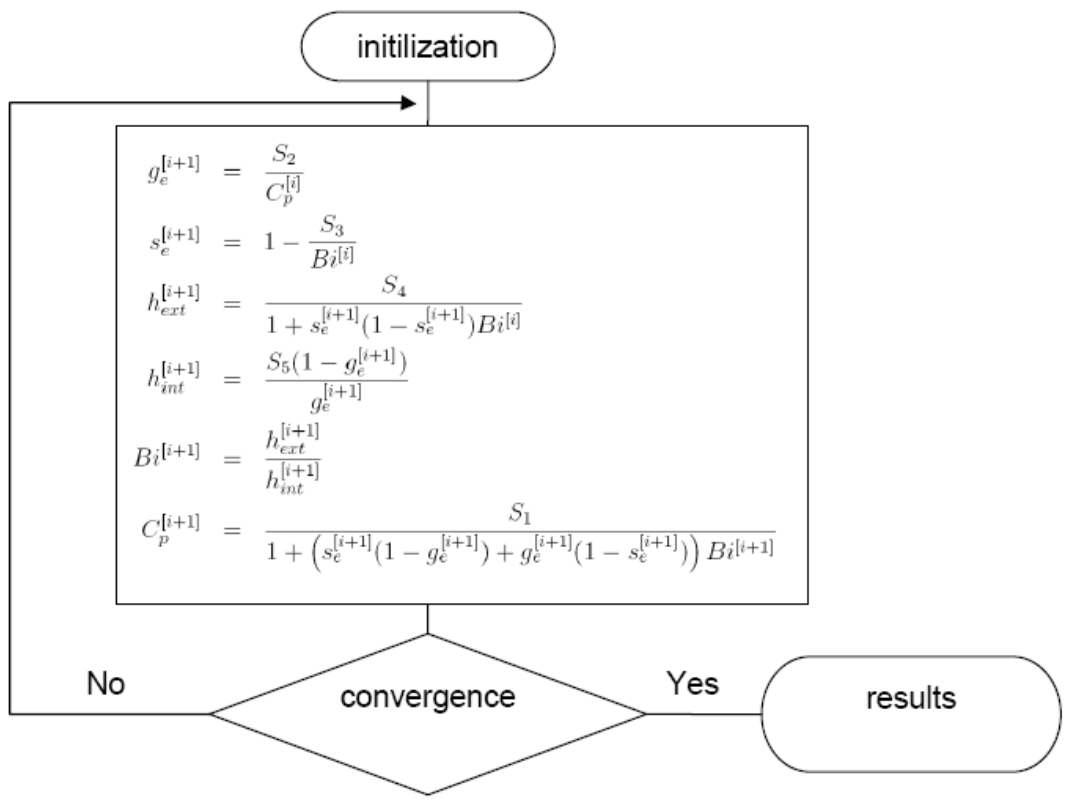


Figure A.2.1 – The Gauss-Seidel algorithm

5.3.2 Influence de la convection

L'objectif est de quantifier l'influence du brassage électromagnétique sur la réponse fréquentielle d'un échantillon liquide. Nous souhaitons répondre aux questions suivantes :

- Quels effets la présence de convection a t-elle sur la mesure de la capacité calorifique et de la conductivité thermique ?
- La réponse fréquentielle est elle qualitativement différente entre un liquide et un solide ? Le modèle des réservoirs thermiques couplés est-il applicable pour un liquide ?
- La conductivité thermique peut elle être déterminée à partir de la réponse fréquentielle d'un échantillon liquide ?

Pour répondre à ces questions, nous identifions les fonctions de transfert liant les températures polaire et équatoriale à la puissance Joule en utilisant des résultats de simulation thermique instationnaire en présence de convection. Nous nous plaçons dans une configuration simplifiée par rapport à l'expérience. Dans un souci d'économie de temps de calcul, et afin de pouvoir attribuer sans équivoque à la convection les modifications éventuelles de réponses fréquentielles, nous simulons la thermique pour des échantillons sphériques dont les champs de vitesse stationnaire ont été pré-calculés. Ces calculs ont été présentés dans le paragraphe 3.2.1 page 88. L'écoulement est laminaire, axisymétrique et stationnaire. La condition limite de vitesse est libre à la surface de la sphère. La surface est indéformable. Les hypothèses des couplages physique sont résumées sur la figure 3.1 page 80. Pour les conditions choisies, l'équation de la chaleur est linéaire et l'analyse fréquentielle reste pertinente. En choisissant cette approche, nous faisons implicitement l'hypothèse que l'écoulement de base n'est pas déstabilisé (ni même affecté) par la modulation du courant inducteur, i.e. par la modulation de la densité de forces dans l'échantillon.

La convection augmente significativement les transferts thermiques internes. Nous nous attendons à ce que la dynamique du système soit caractérisée par des fréquences naturelles plus élevées que celles associées à la conduction. De même, la fréquence liée au rayonnement doit rester la même. En générant un pseudo bruit blanc en suivant les règles définies dans la partie 5.3.1 page 123, la durée du signal est trop importante pour être appliquée en pratique, que ce soit pour une simulation ou une expérience. Ce problème est contourné en choisissant un signal plus spécifique. Au lieu d'observer toutes les fréquences du système, seuls quelques gammes de fréquences sont choisies. Dans l'étude qui suit, deux pseudo bruits blancs sont superposés. Le premier couvre un domaine de basses fréquences supposé couvrir la fréquence naturelle liée au rayonnement. Le second est un bruit de hautes fréquences englobant les

fréquences attendues liées à la conduction et à la convection. De cette manière, la durée du signal final est considérablement réduite, passant de plusieurs dizaines de minutes pour un pseudo bruit blanc couvrant toute la gamme de fréquence, à une dizaine de secondes pour une superposition de pseudo bruits blanc ciblés sur les gammes de fréquences attendues.

De plus, l'échantillon, qu'il soit solide ou liquide, agit comme un filtre passe bas à l'égard des fluctuations de puissance. Un signal de haute fréquence est donc significativement plus atténué qu'un signal de basse fréquence. Une atténuation trop importante rend alors impossible la mesure de la réponse pour les hautes fréquence. Notre intérêt est de quantifiée l'influence de la convection situé dans une gamme de fréquence élevée. Nous choisissons donc une plus grande amplitude de modulation pour le bruit de haute fréquence que pour le bruit de basse fréquence. Par analogie avec le spectre électromagnétique, le signal final peut être qualifié de "bruit bleu".

Comme décrit dansla partie 5.3.1, chacun des pseudo bruits blancs composants le bruit bleu est généré par un registre à décalage avec rétroaction linéaire (dénomination française de Linear Feedback Shift Register ou LFSR). Dans la suite du texte, nous utiliserons le terme francophone de Suite Binaire Pseudo-Aléatoire (SBPA) afin de désigner le signal binaire généré par le registre à décalage. Les paramètres (N, k et t_s) ainsi que les amplitudes relatives de chacune des SBPA sont donnés dans le tableau (5.3).

Les fonctions de transferts sont identifiées sous l'environnement Matlab en utilisant la fonction *stmcb* (Steiglitz et McBride, 1965) du module de traitement du signal (Signal Processing Toolbox). Contrairement à ce qui à été décrit dans la partie5.3.1, seul l'identification du système dynamique est réalisée. La détermination inverse des paramètres du modèle à deux zones n'est pas réalisé. En effet, cette étape ne nous semblait pas pertinente pour répondre aux questions listées précédemment.

Nous discutons de l'influence de la convection à partir des fonctions de transferts polaires et équatoriales discrètes et des fréquences naturelles associées à leurs pôles. Nous utilisons le terme de réponse fréquentielle pour désigner les fonctions de transfert évaluées sur le cercle unité du plan complexe $e^{j\omega_2}$, où la valeur maximale de ω_2 correspond à la fréquence de Nyquist, soit la moitié de la fréquence d'échantillonage.

Tableau 5.3: Paramètres des SBPA (temps total du signal de 15 s)

	n	k	$t_s\,(s)$	Amplitude relative
Haute fréquence	10	1	0,002	$0,8\,\alpha$
Basse fréquence	4	1	1	$0,2\,\alpha$

Tableau 5.4: Ordre des fonctions de transferts.

	n_a	n_b
Cas liquides	4	4
Cas solide	3	3

Interprétation physique des réponses fréquentielles

Les figures (5.4a) et (5.4b) représentent le module des fonctions de transfert (ou réponses fréquentielles) polaire et équatoriale en fonction de la pulsation pour des échantillons solides (courbe en noir) et des échantillons liquides pour les différents cas de convection répertoriés dans le paragraphe 3.2.1 page 88. Les figures (5.5a) et (5.5b) présentent les mêmes réponses fréquentielles, mais normalisées par le comportement caractéristique du régime capacitif $(C_p\omega_2)^{-1}$.

Dans les travaux de Fecht et Johnson (1991); Wunderlich et Fecht (2005), la réponse fréquentielle normalisée $\frac{C_p\omega_2\|\widetilde{T}\|}{\|\widetilde{P}\|}$ est appelée fonction de correction ("correction function"). Elle quantifie l'écart au comportement caractéristique capacitif $(C_p\omega_2)^{-1}$ (qualifié alors d'*idéal*, ou d'*isotherme*). L'intervalle de fréquence pour lequel cette "fonction de correction" vaut 1 est appelé domaine "adiabatique". Avant d'interpréter les réponses fréquentielles obtenues par simulation, nous cherchons à attacher un sens physique à ces fonctions. Une manière de voir ces quantités est suggérée par les égalités suivantes établies pour des fluctuations sinusoïdales :

$$\widetilde{T} = \Re\left\{\hat{T}\,e^{i\omega_2 t}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial t} = \Re\left\{i\omega_2\hat{T}\,e^{i\omega_2 t}\right\}$$

qui est également vrai pour l'intégration

$$\widetilde{P} = \Re\left\{\hat{P}\,e^{i\omega_2 t}\right\} \Rightarrow \int \widetilde{P}.dt = \Re\left\{\frac{\hat{P}}{i\omega_2}\,e^{i\omega_2 t}\right\}$$

Le ratio $\frac{C_p\omega_2\left\|\widetilde{T}\right\|}{\left\|\widetilde{P}\right\|}$ peut alors être vu comme un rapport d'énergie ou de puissance, selon que l'on considère l'intégration de la puissance, ou la dérivation de la quantité de chaleur $C_p\widetilde{T}$. Nous choisissons d'y voir le rapport du débit de quantité de chaleur dans l'échantillon sur la puissance Joule dissipée dans l'échantillon.

$$\frac{C_p\omega_2\left\|\widetilde{T}\right\|}{\left\|\widetilde{P}\right\|} = \frac{C_p}{\left\|\widetilde{P}\right\|}\left\|\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial t}\right\| = \frac{C_p\left|i\omega_2\hat{T}\right|}{\left|\hat{P}\right|} \tag{5.20}$$

La réponse fréquentielle normalisée peut alors être considérée comme le spectre d'absorption thermique de l'échantillon. La pulsation "adiabatique" ω_0 est alors la pulsation à laquelle la puissance flucutante est en opposition de phase avec le débit de quantité de chaleur dans l'échantillon. Cela revient à dire que le maximum de la puissance de chauffe intervient lorsque l'échantillon se refroidi le plus. Il est alors logique que cette pulsation ω_0 constitue un maximum pour le spectre d'absorption thermique de l'échantillon (voir figure (5.4a), courbe du solide en noir).

Pour $\omega_2 < \omega_0$, l'approximation $\hat{T} = \left\langle\hat{T}\right\rangle$ est valide. Le spectre d'absorption est valable pour la globalité de l'échantillon. On remarque que les spectres d'absorption polaire et équatorial du solide sont superposables jusqu'à ω_0.

Comme lors de l'analyse du paragraphe 5.1.2, nous interprétons les spectres pour les différents régimes de modulation dans le cas du solide :

Régime quasi-stationnaire L'échantillon est transparent aux modulations de puissance. La puissance Joule est directement évacuée par rayonnement. Le débit de quantité de chaleur dans l'échantillon est négligeable. L'absorption l'est également.

Régime capacitif La fréquence de modulation de la puissance est plus élevé que λ_{ext}, la fréquence associée à l'évacuation de la chaleur par rayonnement. Le déphasage entre la puissance et le débit de quantité de chaleur augmente à partir de $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à atteindre π pour ω_0. La puissance de chauffe est maximum quand l'échantillon se refroidi le plus.

Régime conductif Au delà du régime capacitif, $\hat{T}$ n'est plus homogène dans l'échantillon. Le spectre d'absorption, construit en mesurant la température en un point de la surface,

perd sa signification globale. Il devient un indicateur local de l'absorption de la puissance fluctuante. En vertu de (5.5), si l'expérimentateur a accès à $\left\langle \hat{T} \right\rangle$, le spectre d'absorption global reste strictement dans le régime capacitif (en vertu de l'équation (5.5)).

Pour $\omega_2 \sim \lambda_{int}$, la puissance injectée dans la zone chauffée n'a plus le temps de diffuser dans le reste de l'échantillon. La température moyenne suit un régime capacitif, l'absorption totale vaut toujours 1. Néanmoins, le débit de chaleur se concentre autour du point chaud et diminue dans le reste de l'échantillon. L'absorption au pôle, un minimum de la densité de puissance Joule, tombe à zéro. Au contraire, l'absorption à l'équateur, zone la plus chauffée, dépasse 1 et croit de manière monotone jusqu'à atteindre une valeur seuil. Il devient possible de définir une fraction du volume de l'échantillon où se concentre le débit de chaleur fluctuante. Pour que l'absorption globale vaille 1 et respecte le bilan globale d'énergie, cette fraction a pour valeur l'inverse de l'absorption mesurée au point chaud. Cette fraction rappelle la fraction volumique g_e introduite artificiellement dans le modèle à deux réservoirs de chaleurs couplés présenté paragraphe 5.2.2.

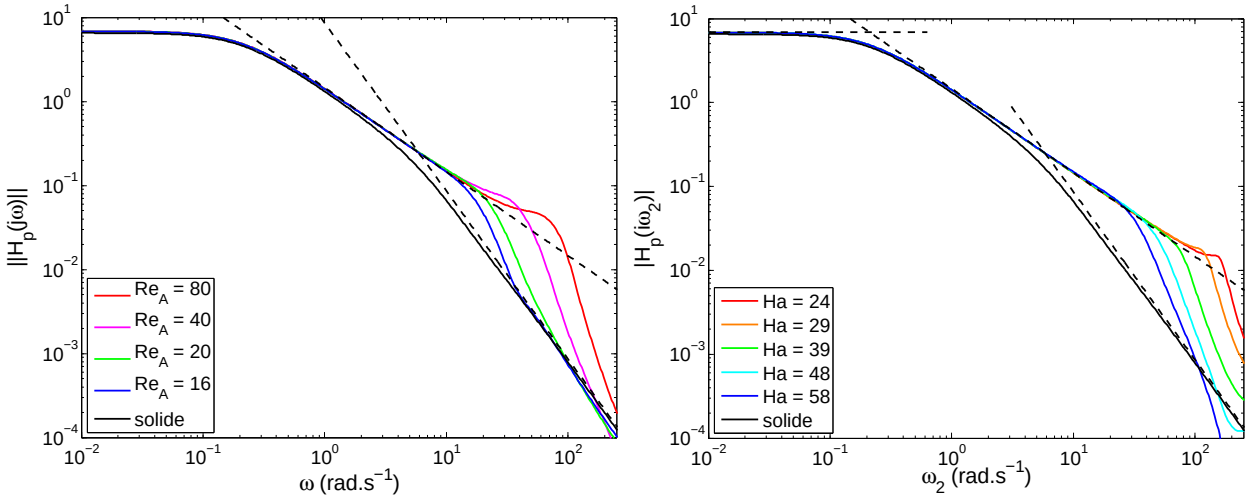
Il est intéressant de remarquer que pour ce modèle, la limite de $\frac{\omega_2 C_p \left\| \widetilde{T}_e \right\|}{\left\| \widetilde{P} \right\|}$ quand la pulsation $\omega_2$tend vers l'infini vaut $\frac{1}{g_e}$. Dans le cas d'un chauffage en volume, il est naturel de relier cette fraction volumique à la grandeur caractéristique de l'inhomogénéité du chauffage inductif $\frac{max(\overline{\chi})V}{\overline{P}}$ (figure 3.3 page 82). Ainsi, un chauffage très inhomogène, du par exemple à une épaisseur de peau électromagnétique très faible, un chauffage laser, etc, engendrera des valeurs très élevées de l'absorption au point chaud. Dans ce cas, le volume où se concentre le débit de chaleur est alors seulement limité à l'épaisseur de peau thermique, et évolue en $\omega_2^{-1/2}$.

Spectre d'absorption des échantillons liquides Les figures 5.5a et 5.5b, montrent les spectres équatoriaux et polaires obtenus pour des échantillons liquides et solides. Ces spectres se superposent pour $\omega_2 < \omega_0$. En effet, les transferts internes ne jouent aucun rôle dans le domaine des basses fréquences. Pour tous les cas de convection, on observe l'apparition de pics d'absorption dans les hautes fréquences. Pour chacune des séries, i.e. variation de la viscosité et du champ magnétique de freinage, la fréquence des pics et leur hauteur augmente avec la vitesse de l'écoulement. Ce résultat est en accord avec l'intuition. Un chauffage, modulé à la même fréquence que celle du retournement du vortex, doit avoir pour conséquence de chauffer continuellement le même volume de liquide advectée par l'écoulement. La largeur des pics semble diminuer quand la valeur de fréquence des pics se décalent vers les hautes fréquences. Cette diminution est due à l'effet de distorsion de l'échelle logarithmique. Au

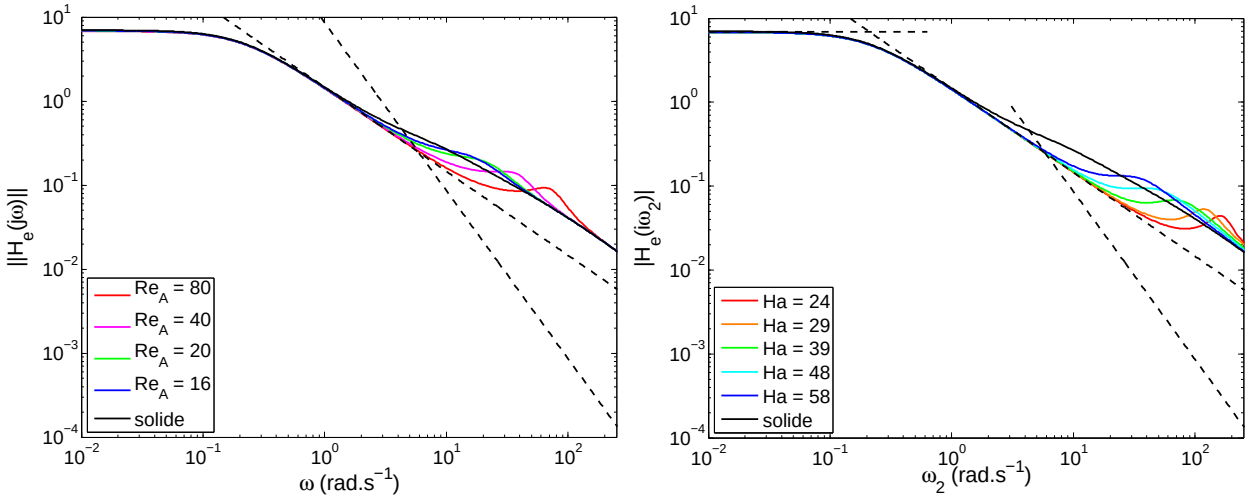
contraire, une représentation linéaire permet de constater que plus les pics sont centrés sur des hautes fréquences, plus ceux ci sont larges. L'augmentation de la hauteur de pics signifie que le volume de la zone chaude dans le liquide est plus faible petit à mesure que la vitesse de l'écoulement augmente.

Nous notons que tous les pics présentent des valeurs d'absorption supérieures à l'unité. Pour les domaines de fréquence situés au-delà des fréquences des pics dûs à la convection, les spectres de la zone polaire s'annulent. Les spectres équatoriaux semblent converger vers la valeur limite du spectre solide. Toutefois, pour les vitesses les plus élevées, un doute subsiste car ces pentes se situent au delà de la fréquence de Nyquist.

Les valeurs des spectres comprises entre ω_0 et les fréquences des pics dûs à la convection sont toujours supérieures à l'unité dans tous les spectres, polaire et équatoriaux. Cela semble être contradictoire avec une absorption thermique totale constante et égale à 1 pour $\omega_2 > \omega_0$, comme l'impose de bilan thermique global. Ainsi, il existe necessairement des zones à l'intérieur de l'échantillon dans lesquels la variation de température est plus faible qu'aux pôles. Nous faisons l'hypothèse que les centres des vortex sont des zones mortes au regard de la variation de température.

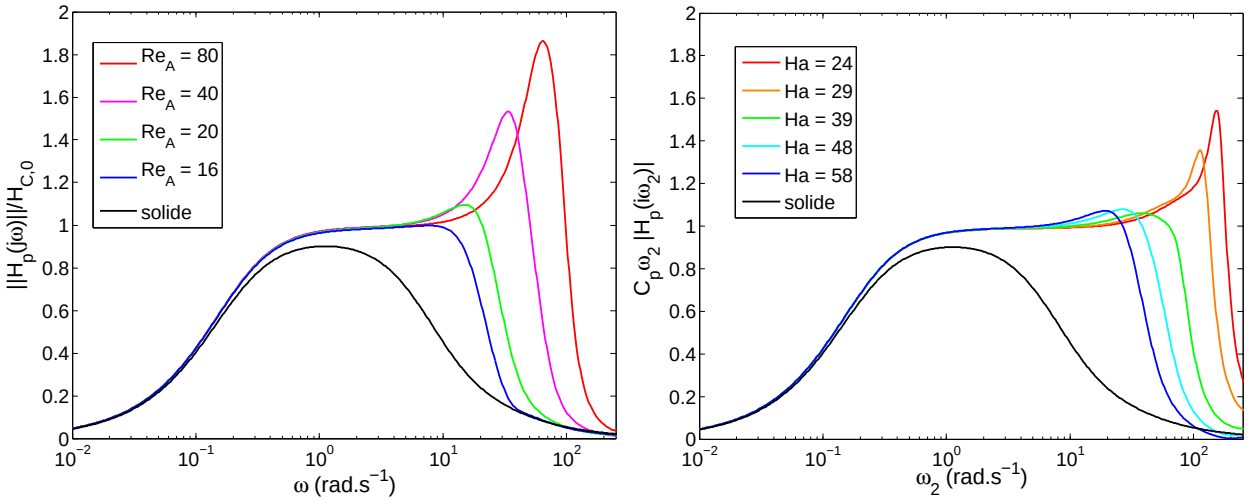


(a) Fonction de transfert polaire.

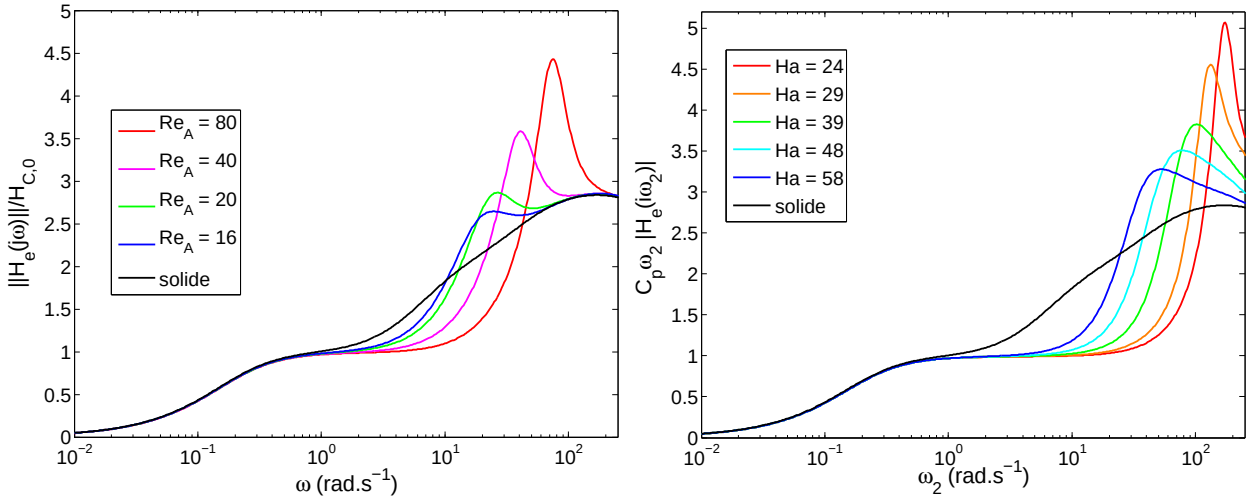


(b) Fonction de transfert équatoriale.

Figure 5.4: Fonction de transfert. A gauche : Re_A varie de 12 à 80. A droite : B_{frein} varie de 0,5 T à 1,2T



(a) Fonction de transfert polaire normalisée



(b) Fonction de transfert équatoriale normalisée.

Figure 5.5: Fonction de transfert normalisée. A gauche : Re_A varie de 12 à 80. A droite : B_{frein} varie de 0,5 T à 1,2T

Tableau 5.5: Fréquences caractéristiques mesurées par identification

(a) Variation de la viscosité

Grandeurs d'entrées			Fluent	Matlab			
ν	Re_A	$Pe = Re_A Pr$	f_{vortex}	fréquence naturelle de H_e $(rad.s^{-1})$		fréquence naturelle deH_p $(rad.s^{-1})$	
	-	-	(Hz)	λ_{ext}	λ_{int}	λ_{ext}	λ_{int}
$20\nu_0$	78,6	10,6	68,13	0,2111	73,49	0,2112	65,80
$40\nu_0$	39,3	5,3	35,70	0,2107	40,04	0,2107	38,05
$75\nu_0$	21,0	2,8	19,24	0,2101	23,49	0,2101	22,87
$100\nu_0$	15,7	2,1	14,72	0,2099	18,49	0,2099	18,71
Solide	0	—	0	0,2077	7,70	0,2076	6,54

(b) Variation du champ magnétique

Grandeurs d'entrées			Fluent	Matlab			
B_{frein}	Ha	$Pe = \frac{2Re_A}{Ha} Pr$	f_{vortex}	fréquence naturelle de H_e $(rad.s^{-1})$		fréquence naturelle de H_p $(rad.s^{-1})$	
(T)	-	-	(Hz)	λ_{ext}	λ_{int}	λ_{ext}	λ_{int}
$0,5$	24,0	17,8	164,05	0,2113	169,76	0,2113	162,90
$0,6$	28,7	14,8	124,05	0,2113	123,63	0,2113	123,33
$0,8$	38,3	11	81,16	0,2114	76,88	0,2113	79,53
$1,0$	47,9	8,8	57,58	0,2113	49,57	0,2112	59,34
$1,2$	57,9	7,4	41,36	0,2111	34,43	0,2110	48,34
Solide	—	—	0	0,2077	7,70	0,2076	6,54

Fréquences naturelles des fonctions de transfert Les tableaux 5.5 présentent les résultats des simulations pour des échantillons liquides en fonction des paramètres d'entrée : Viscosité et champ magnétique de freinage. Sont représentées :

- les fréquences de retournement des vortex, calculées par Fluent à partir de l'équation 2.75 page 58.
- les fréquences naturelles, calculées à partir des pôles π_i des fonctions de transfert identifiées par Matlab et la relation,

$$\pi_i = e^{-\lambda_i t_s} \tag{5.21}$$

Nous remarquons que les fréquences naturelles liées aux transferts externes varient très peu avec la valeur de la viscosité. L'écart est plus grand lorsqu'un champ magnétique continu est appliqué. Nous remarquons également un très bon accord entre les fréquences de retournement des vortex et les fréquences naturelles associées aux transferts internes lorsque la viscosité est faible. Cela signifie que c'est la convection qui assure le transfert de chaleur dans l'échantillon.

Ces fréquences naturelles correspondent précisément dans tous les cas aux maxima des pics de convection observés sur les figures (5.5a) et (5.5b). Cet accord est moins bon pour les plus faibles valeurs de vitesse de convection. Cet écart apparait dès que la conduction thermique représente une part significative du transport de la chaleur. Néanmoins, les fréquences naturelles de la conduction ne sont apparues dans aucune des fonctions de transfert. Cela confirme l'intuition : il n'y a aucune raison physique pour qu'une observation de la température permettent de distinguer la part du transfert due à la conduction de celle due à la convection.

La figure 5.6 présente l'évolution des fréquences naturelles des cas liquides en fonction du nombre de Reynolds Re_A. Les fréquences naturelles, qu'elles proviennent des fonctions polaires ou équatoriales, sont alignées. Une régression linéaire est effectuée pour chacun des jeux de données. Les ordonnées à l'origine λ_0 sont représentées en rouge et en bleu (équateur et pôle respectivement). **On remarque que leur valeurs sont voisines et qu'elles sont proches de la fréquence naturelle d'un échantillon solide.**Ces valeurs sont aussi présentées en rouge et en bleu dans le tableau 5.5.

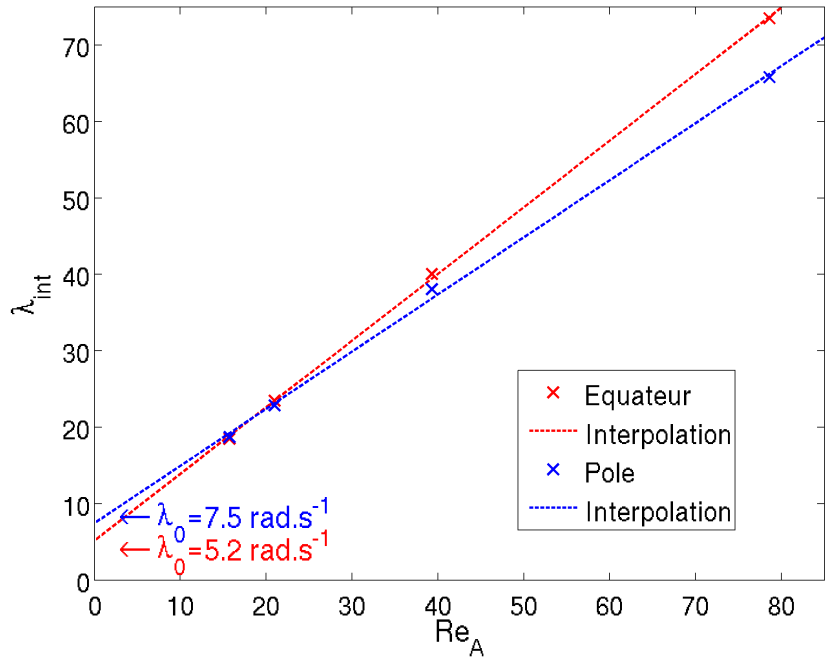


Figure 5.6: Fréquences naturelles des fonctions de transfert pour les cas liquides en fonction du nombre de Reynolds (variation de la viscosité). Les valeurs de λ_0 sont les ordonnées à l'origine des droites d'interpolation.

Ce résultat indique qu'à faible vitesse ($Pe < 5$), la conduction thermique a encore suffisamment d'impact sur les transferts internes pour être observée.

5.4 Conclusion

Une description détaillée des régimes de modulation dans un échantillon solide a été réalisée. Une interprétation physique de ces régimes a été avancée. Des ordres de grandeur des variations de la température induites par la modulation de la puissance Joule ont été dérivés. Ces ordres de grandeurs sont en accord avec le modèle des réservoirs couplés ainsi qu'avec les réponses fréquentielles issues de la simulation numérique.

La technique de calorimétrie modulée inductive développé dans le cadre des programmes de recherche IMPRESS et Thermolab a été présentée. Nous avons détaillé son principe et rappelé ses limitations.

Une nouvelle méthode de mesure de la réponse fréquentielle des échantillons a été proposée. Sa faisabilité théorique a été démontrée en utilisant la simulation numérique. Utilisée conjointement avec le modèle de réservoirs couplés, elle permet de s'affranchir de certaines des limitations de l'approche proposée par Fecht et Johnson (1991) ($Bi < 0,02$, détermination des coefficients géométriques). En utilisant les températures mesurées en position polaire et équatoriale, cette méthode permet de déterminer les propriétés thermiques globales de l'échantillon (C_p et h_{int}). Elle permet de montrer la difficulté de déduire la conductivité thermique à partir du coefficient d'échange interne. Ceci est illustré sur la figure (10) de la partie 5.3.1 page 123). La modélisation proposée par Wunderlich et Fecht (2005) (équations 5.19) ne rend pas compte de l'évolution de ce coefficient d'échange en fonction de l'épaisseur de peau e.m..

La réponse fréquentielle des échantillons liquides a été déterminée à partir de simulations numériques. Par rapport à un échantillon solide, nous avons constaté une nette différence, tant qualitative que quantitative . Pour des faibles vitesses, la présence de conduction est observée. Combinée avec les techniques de freinages magnétiques, cette approche peut permettre la mesure de la conductivité thermique.

Perspectives : A la lumière des résultats obtenus pour les réponses fréquentielles des échantillons liquides et solides, la question de la faisabilité technique de la méthode proposée demeure. Une validation expérimentale est nécessaire pour valider l'approche système proposé dans ce chapitre.

La prise en compte de la turbulence est inutile. En effet, dans ces conditions, l'augmentation des transferts internes rend impossible l'observation de trace de la conductivité thermique. De plus, à moins d'utiliser une simulation numérique directe (Ai, 2004), la réponse fréquentielle identifiée restera attachéeau modèle de turbulence choisi. Toutefois, il reste que la mesure de la capacité calorifique est considérablement facilitée.

A la lumière de nos résultats, l'utilisation de la méthode de calorimétrie inductive proposée par Fecht et Johnson (1991) pour déterminer la conductivité thermique dans un liquide parait inadaptée. La méthode inversee utilisée par Tsukada *et al.* (2007) est aussi sujette à caution.

En utilisant un champ magnétique freinant, les auteurs mesurent une vitesse de convection de l'ordre de $5\,cm.s^{-1}$. Ils affirment que cette valeurs de vitesse est suffisamment faible pour négliger les transports par convection dans leur modèle thermique inverse.

Dans la simulation correspondant à une viscosité égale à $100\nu_0$, la vitesse maximale à la surface est de l'ordre de $5\,cm.s^{-1}$. Les réponses fréquentielles, ainsi que les fréquences naturelles, montrent une augmentation d'un facteur deux du coefficient d'échange thermique interne (tableau 5.5). Ainsi, négliger la convection dans l'échantillon revient à surestimer la conductivité thermique d'un même facteur.

La conductivité thermique peut néanmoins être mesurée à l'aide d'un tel dispositif expérimental en procédant de la façon suivante. Sur la figure 5.6, les fréquences naturelles des transferts internes évoluent de manière linéaire avec le nombre de Reynolds. Mesurer la réponse fréquentielle pour différentes valeurs du champ magnétique pourrait permettre de déduire le coefficient de transfert lié à la conduction dans un échantillon liquide.

L'utilisation d'un modèle de thermique inverse (Prud'homme et Nguyen, 2001) prenant en compte la convection laminaire présente dans ces expériences est une piste prometteuse pour la mesure de conductivité dans les liquides.

Conclusion générale

Rappelons les objectifs de notre thèse.

– **Discerner les phénomènes physiques qu'il est nécessaire de prendre en compte pour simuler une expérience de calorimétrie modulée.**

Une analyse physique, fondée sur les ordres de grandeur associés aux phénomènes électromagnétiques, mécaniques et thermiques, a permi de bâtir une stratégie de modélisation des expériences en microgravité. Le brassage e.m. a été identifié comme principale source de convection dans l'échantillon. Ignorant la convection provoquée par les mouvements de la surface libre, nous avons découplé le problème de l'induction et de la mécanique des fluides. Négligeant les phénomènes de thermoconvection, nous avons découplé l'écoulement de la thermique. Nous avons rendu possible la réalisation d'études paramétriques basées sur la simulation instationnaire de transferts de chaleur dans des échantillons chauffés et brassés électromagnétiquement pendant des temps longs, i.e. plusieurs milliers de pas de temps.

– **Produire des résultats à partir des modèles choisis afin de s'assurer de la pertinence des simulations.**

Sans observations expérimentales, la validation de résultats produits par simulation n'est pas aisée. Outre les validations internes que sont la convergence en pas de temps et d'espace, la comparaison des résultats numériques aux ordres de grandeur issus de l'analyse physique nous a assuré de la pertinence de ces simulations. Ces résultats ont fait l'objet d'une communication orale au Congrès Français de Mécanique 2007 (Schetelat et Etay, 2007).

– **Permettre de valider ces modèles numériques.**

Cet objectif est le plus ambitieux. Nous avons anticipé les problèmes d'instabilités (rotation, oscillation) et cherché à y remédier en travaillant le design de l'inducteur. A cette fin, un code de calcul 3-D semi-analytique de l'induction a été developpé. Celui-ci a été validé par comparaison de ses résultats avec ceux produits par un code commercial basé sur les éléments finis (COMSOL) sur une configuration 3D (Schetelat *et al.*, 2009). Le code "Lohofer"

permet la description de géométries complexes. Basé sur des solutions analytiques, il permet la caractérisation complète d'un inducteur (position d'équilibre en fonction du courant, stabilité mécanique, couple e.m., puissance Joule) en quelques minutes. De nombreuses géométries ont été testées. Une position d'équilibre satisfaisante, pour la visibilité et la fonte de l'échantillon, a pu être produite par cette démarche. Néanmoins, aucune des géométries n'a permis de réduire le couple électromagnétique. De plus, l'expérience nous mène à conclure que le phénomène de rotation ne peut être abordé de manière satisfaisante en supposant que l'échantillon est une sphère parfaite. Par exemple, la forme de la surface libre conditionne les directions de rotation autorisée. La minimisation de la rotation par le biais du code "Lohofer" reste limitée. L'étude des instabilités (rotation, oscillation) et des moyens possibles pour les supprimer mérite à elle seule bien plus qu'un travail de thèse.

Les premiers essais expérimentaux de la visualisation sous rayon X de l'écoulement dans un échantillon lévité n'ont pas donné les résultats attendus (Schetelat *et al.*, 2008). Le post-traitement des données expérimentales met en évidence le piègeage des particules par la surface. Nous avons interprété ce phénomène comme étant significatif d'un mauvais mouillage des particules de WC par de l'alumium liquide. En élaborant des échantillons à base de nickel, connu pour mouiller le WC, les particules restent dans le coeur de la charge. Ce changement rend possible de nouveaux essais.

- **Utiliser les modèles ensemble pour réaliser un "banc d'essai virtuel" et ainsi tester les techniques de calorimétrie.**

La mise en place d'une stratégie de simulation économique en temps de calcul a permis de simuler les protocoles expérimentaux des techniques de calorimétrie modulée. Ces simulations ont confirmé la pertinence des mesures de capacité calorifique, que ce soit pour des échantillons solides ou liquides (Schetelat et Etay, 2008). En revanche, l'évaluation des effets de la convection sur les transferts de chaleur discréditent toutes les techniques de mesure de conductivité thermique dans des charges liquides. Toutes les techniques de notre connaissance négligent la convection alors que celle-ci transporte, dans le meilleur des cas, c'est à dire sous un champ magnétique permanent d'une intensité de $4T$, autant de chaleur que la conduction.

Grâce à l'outil numérique, nous avons démontré la faisabilité d'une nouvelle approche utilisant des techniques éprouvées de traitement du signal (Schetelat et Etay, 2009). Elle permet de s'affranchir de la restriction aux échantillons présentant de faibles nombres de Biot, ainsi que des paramètres de calages. L'implémentation de cette technique sur l'ISS a été recommandé lors du Thermolab Progress Meeting ayant eu lieu a Stockholm le 3 juin 2008, cette

recommandation fait également partie de la conclusion finale du projet MAP-Thermolab.

Recommandations

Sur la base de ces études, nous avançons des recommandations pour la mesure de la conductivité thermique d'une charge liquide.

La variété des sources de convection rend impossible leur suppression simultanément. Même moyens techniques extrêmes, comme l'utilisation de la microgravité, ne permettent pas de s'en affranchir complètement. Le freinage de l'écoulement par l'imposition d'un champ magnétique constant apparaît comme une solution technique bien plus crédible. En découplant totalement la lévitation du chauffage par superposition de champs magnétiques bipolaire et quadripolaire, laser, etc, cette technique devient réalisable sur terre. Un problème subsiste quant à son utilisation pour l'analyse d'échantillon présentant un bas point de fusion. L'existence d'une valeur de champ magnétique minimum pour assurer la lévitation impose une puissance thermique minimum dissipée dans l'échantillon.

L'identification de la fonction de transfert d'un échantillon liquide lévité sur terre est techniquement réalisable. Cette détermination peut être menée, pour des écoulements d'intensités contrôlables via l'application de champs magnétiques continus. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, mesurer une réponse fréquentielle pour plusieurs intensités de la vitesse, pour peu que ces vitesses soient suffisamments faibles, permet d'évaluer le temps caractéristique de la conduction intrinsèque du liquide. Néanmoins, la mesure de ce temps n'est pas suffisante pour remonter directement à la conductivité.

La résolution du problème inverse de la conduction **et** de la convection de la chaleur dans un échantillon lévité avec freinage par imposition de champ magnétique constant permettra d'atteindre ce résultat. La résolution de problèmes inverses a déjà été appliquée à des problèmes de transport de chaleur par convection naturelle en cavité fermée (Prud'homme et Nguyen, 2001). De plus, l'utilisation de la modulation harmonique du chauffage est un moyen limité et laborieux d'observation. L'identification, si elle est correctement réalisée, est bien plus riche en information sur le système à analyser. Afin de coupler ces deux approches (identification et modèle inverse), il sera intéressant que la résolution du problème direct soit basée sur une formulation harmonique du transport de la chaleur.

Bibliographie

M. Adachi, T. Aoyagi, A. Mizuno et H. Watanabe M., Kobatake : Density measurement of silicon melt using electromagnetic levitation method under static magnetic fields. *In Thrid International Symposium on Physical Sciences in Space (ISPS 2007)*, 2007.

X. Ai : *The instability analysis and direct numerical simulation of turbulent flows in electromagnetically levitated droplets.* Thèse de doctorat, WASHINGTON STATE UNIVERSITY, 2004.

B. Bardet : *Levitation electromagnetique : Expériences terrestres et simulations numériques.* Thèse de doctorat, Ecole Doctorale «Mécanique et Energétique», 2006.

R. Berton : *Magnéto-Hydrodynamique.* Masson, 1991.

A.-M. Bianchi, Y. Fautrelle et J. Etay : *Transferts Thermiques.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.

V. Bojarevics et K. Pericleous : Modelling electromagnetically levitated liquid droplet oscillations. *ISIJ Int.*, 43:890–8, 2003.

J. Brillo, A. Bytchkov, I. Egry, L. Hennet, G. Mathiak, I. Pozdnyakova, D. Price, D. Thiaudiere et D. Zanghi : Local structure in liquid binary al-cu and al-ni alloys. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 352(38-39):4008 – 4012, 2006. ISSN 0022-3093. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TXM-4KXVD7P-6/2/382fe4f16bdba4656ed635ad8c112b9e`.

A. Chaudhuri, D. Bonnell, F. L.A. et J. Margrave : *High Temp. Sci. 2*, page 203, 1970.

J. Coirier : *Mécanique des milieux continus.* Dunod, 2001.

P. Davidson : *An introduction to Magnetohydrodynamics.* Cambridge University Press, 2001.

Y. Delannoy, D. Pelletier, J. Etay et F. Y. : Stirring and mass transfer in a 1-phase induction system. *In Proceedings of the international PAMIR conference, Ramatuelle (France)*, 2002.

I. Egry : Properties, nucleation and growth of undercooled liquid metals : Results of the tempus msl-1 mission. *J. Jpn. Soc. Microgravity Appl*, 15(4):215–224, 1998. URL `http://elib.dlr.de/15234/`.

I. Egry, A. Diefenbach, W. Dreier et P. J. : Containerless processing in space-thermophysical property measurements using electromagnetic levitation 22 (2) 569-578. *International Journal of Thermophysics*, 22(2):569–578, 2001.

I. Egry, G. lohoefer et G. Jacobs : Surface tension of liquid metals : Results from measurement on ground and in space. *Physical Review Letters*, 75(22):4043–4046, 1995.

N. El-Kaddah et J. Szekely : The electromagnetic force field, fluid flow field, and temperature profile in levitated metal droplets. *Metallurgical transactions B*, 14B:401–410, 1983.

J. Etay, Y. Fautrelle, A. Gagnoud, Y. Duterrail, D. Perrier et B. Bardet : Lévitation électromagnétique de gouttes - présentation du projet maglev - premiers résultats. *Mécanique & Industries*, 5(5):627–634, sep 2004. URL `http://dx.doi.org/10.1051/meca:2004066`.

N. Eustathopoulos, M. Nicholas et B. Devret : *Wettability at high temperature.* Pergamon, 1999.

H. Fecht et R. K. Wunderlich : The thermolab project : Thermophysical properties of industrially relevant liquid metal alloys. *In* O. Minster et E. B. Schürmann. European Space Agency, éditeurs : *Microgravity Research and Aplications in Physical Sciences and Biotechnology, Proceedings of the First International Symposium held 10-15 September, 2000 in Sorrento, Italy.*, 2001.

H. Fecht et W. Johnson : A conceptual approach for non-contact calorimetry in space. *Rev. Sci. Instr.*, 62:1299–1303, 1991.

M. G. Frohberg : Thirty years of levitation melting calorimetry - a balance. *Thermochimica Acta*, 337(1-2):7 – 17, 1999. ISSN 0040-6031. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/B6THV-3Y9N01M-2/2/1bd25edbe91ab06480cddcda04b2907d`.

E. Fromm et H. Jehn : Electromagnetic forces and power absorption levitation melting. *BRIT. I. APPL. PHYS.*, 16, 1965.

E. Gemlin : Classical rtemperature-modulated calorimetry : A review. *Thermochemica Acta*, 304/305:1–26, 1997.

Guo, Teodorescu, Wang, Overfelt et D. J. Peter : Uncertainty effect in modulated heat measurement of electromagnetically heated samples. 2005.

H. Hartmann, P. K. Galenko, D. HollandMoritz, M. Kolbe, D. M. Herlach et O. Shuleshova : Nonequilibrium solidification in undercooled ti[sub 45]al[sub 55] melts. *Journal of Applied Physics*, 103(7):073509, 2008. URL `http://link.aip.org/link/?JAP/103/073509/1`.

D. M. Herlach : *ESA*, page 399 1984, 1984.

D. Herlach, R. Cochrane, I. Egry, H. Fecht et A. Greer : Containrless processing in the study of metallic melt and their solidification. *Int. Mater. Rev.*, 38:273–347, 1993.

T. Hibiya et I. Egry : Thermophysical property measurements of high temperature melts : results from the development and utilization of space. *Measurement Science and Technology*, 16:317–326, 2005.

W. H. Hofmeister, R. Bayuzick et S. Krishnan : Optical pyrometry on tempus : a critical assessment of non contact temperature measurement in low earth orbit. *Proc. SPIE*, 2809:288–302, 1996.

J. R. Howell et R. Siegel : *Thermal Radiation Heat Transfer*. Hemisphere, 1981.

R. W. Hyers, G. Trapaga et B. Abedian : Laminar-turbulent transition in an electromagnetically levitated droplet. *Metallurgical and materials transactions B*, 34:29–36, 2003.

R. Hyers : Fluid flow effects in levitated droplets. *Measurement Science and Technology*, 16:394–401, 2005.

T. IIDA et R. I. GUTHERIE : *The Physical Properties of Liquid Materials.* Oxford science publications, 1988.

H. KOBATAKE, H. FUKUYAMA, I. MINATO, T. TSUKADA et S. AWAJI : Noncontact measurement of thermal conductivity of liquid silicon in a static magnetic field. *Applied Physics Letters*, 90(9):094102, 2007. URL `http://link.aip.org/link/?APL/90/094102/1`.

Y. KRAFTMAKHER : Modulation calorimetry and related techniques. *Physics Reports*, 356(117):1–117, 2002. URL `http://www.ingentaconnect.com/content/els/03701573/2002/00000356/00000001/art00031`.

H. LAMB : *Hydrodynamics.* ISBN 0-521-05515-6. Cambridge University Press, sixth édition, 1975.

D. LEENOV et A. KOLIN : Theory of electromagnetophoresis. i.magnetohydrodynamic forces experienced by spherical & symmetrically oriented cylindrical particles. *J. Of Chemical Phys*, 22(4):683–688, 1954.

M. LESIEUR : *Turbulence in Fluids.* Kluwer Academic Publishers, troisième édition révisée et complétée, édition, 1997.

K. LEVENBERG : A method for the solution of certain problems in least squares. *Quarterly Journal on Applied Mathematics*, 2:164–168, 1944.

B. Q. LI : Effect of convection on the measurement of thermophysical properties using levitated droplets. *Annals of the New York Academy of Sciences. Issue Interdisciplinary Transport Phenomena in the Space Sciences*, 1077:1–32, 2006.

G. LOHOEFER : An electrically conducting sphere in a three-dimensional, alternating magnetic field. *IMA journal of applied Mathematics*, 68:1–21, 2003.

G. LOHOEFER et J. PILLER : The new iss electromagnetic levitation facility : 'msl-eml'. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 0764:1–5, 2001.

A. J. MESTEL : Diffusion of an alternating magnetic field into a sharply cornered conductive region. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 405:49–63, 1986. URL `http://www.jstor.org/stable/2397820`.

H. Moffatt : High frequency excitation of liquid metal systems. *In Metallurgical application of magnetohydrodynamics*, 1982. ISBN : 0 904357 60 0.

H. Moffatt : On the behavior of a suspension of conducting particules to a time-periodic magnetic field. *Journal of fluid mechanic*, 218:509–529, 1990.

H. Moffatt et M. Proctor : *Metallurgical application of magnetohydrodynamics*. 1982. ISBN : 0 904357 60 0.

R. Moreau : *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Publisher, 1990.

E. C. Okress, D. M. Wroughton, G. Comenetz, P. H. Brace et J. C. R. Kelly : Electromagnetic levitation of solid and molten metals. *Journal of applied physics*, 23 (5):545–552, 1952.

J. Priede et G. Gerbeth : Stability analysis of an electromagnetically levitated sphere. *JOURNAL OF APPLIED PHYSICS*, 100:1–10, 2006.

J. Priede et G. Gerbeth : Spin-up instability of electromagnetically levitated spherical bodies. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(1):349–353, 2000.

M. Prud'homme et T. H. Nguyen : Solution of inverse free convection problems by conjugate gradient method : effects of rayleigh number. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(11):2011 – 2027, 2001. ISSN 0017-9310. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V3H-42GD453-1/2/d8e5d6d77b709992f99242fe58dcce37`.

L. Racz et I. Egry : Advanced in the mesurement of density and thermal expension of undercooled liquid metals. *Rev. Sci. Instr.*, 66(8):4254–4258, 1995.

J. S. Rayleigh : On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. London*, page 29 :71., 1879.

T. Richardsen et G. Lohoefer : Contactless electrical conductivity of electromagnetically levitated melts. *Int. J. Thermophys.*, 20(4):1029–39, 1999.

A. J. Rulison et W.-K. Rhim : A non contact measurement technique for specific heat and total hemispherical emissivity of undercooled refractory materials. *Rev. Sci. Instrum.*, 65 (3), 1994.

P. Schetelat, T. Breville, M. Di Michiel et J. Etay : Electromagnetic levitation - ersf experiments. *In 7th Pamir International Conference on Fundamental and Applied MHD*, 2008.

P. Schetelat, M. Dumont, C. Courtessol, J. Etay et R. ERNST : 3d numerical modeling of electromagnetic levitation. *In Abstract submitted to EPM 2009, Dresden (Germany) - Oct. 19-23, 2009.*, 2009.

P. Schetelat et J. Etay : A new approach for non-contact calorimetry : system identification using pseudo-white noise perturbation. *Heat and mass transfer (soumis)*, 2009.

P. Schetelat et J. Etay : Influence de la convection sur la mesure indirecte de la capacité calorifique et de la conductivité thermique d'alliage métallique en lévitation utilisant la calorimétrie modulée. *In Congrès Français de Mécanique 2007*. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc - 92400 Courbevoie, 2007.

P. Schetelat et J. Etay : Inductive modulated calorimetry analytical model versus numerical simulation. *COMPEL : The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(2):436–444, 2008.

S. Schiller, U. Heisig et S. Panzer : *Electron beam technology*. Wiley, 1982.

E. Schwartz et J. Szekely : The free-surface shape and temperature distribution produced in liquid metal droplet by heating coil pulses in the tempus electromagnetic levitation facility. *Metallurgical and materials transactions B*, 29B:1127–1134, 1998.

K. Steiglitz et L. McBride : A technique for the identification of linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 10:461–464, 1965.

P. Sullivan et G. Seidel : *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A210:58, 1966.

P. Sullivan et G. Seidel : Steady state, ac-temperature calorimetry. *Phys. Rev.*, 173:679–685, 1968.

T. Tanaka, K. Hack, T. Iida et S. Hara : Application of thermodynamic databases to the evaluation of surface tensions of molten alloys, salt mixtures and oxide mixtures. *Zeitschrift für Metallkunde*, 87(5):380–389, 1996.

G. Teodorescu, P. Jones, R. Overfelt et B. Guo : Spectral-normal emissivity of electromagnetic heated ni at high temperature. *In Materials Science & Technology conference and exhibition, Pittsburgh, PA*, 2005.

T. Tsukada, H. Fukuyama et H. Kobatake : Determination of thermal conductivity and emissivity of electromagnetically levitated high-temperature droplet based on the periodic laser-heating method : Theory. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(15-16):3054 – 3061, 2007. ISSN 0017-9310. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V3H-4N7YH0B-6/2/eb576c819f7b59885db16dad441490f1`.

D. Voss, O. Minster, D. Jarvis, P. Manieri, W. Dreier, R. Kuhl, I. Egry, D. Herlach, M. Kolbe, T. Volkmann, G. Lohoefer, D. Holland-Moritz, W. Loeser, R. Hermann, C. Gandin, L. Battezzati, J. Etay, H. Fecht, R. Wunderlich, E. Ricci, G. Pottlacher et S. Seetharaman : Electromagnetic levitation on board the international space station. *In 3rd Int.Symp. on Physical Sciences in Space - ISPS2007 - Nara, Japon, 22-26 Oct.*, 2007.

J. Westerweel : *Digital Particle Image Velocimetry : Theory and Application.* Delft University Press, 1993.

R. Wunderlich et H. Fecht : Modulated electromagnetic induction calorimetry of reactive metallic liquids. *Measurement Science and Technology*, 16:402–416, 2005.

R. K. Wunderlich, C. Ettl et H. Fecht : Specific heat and thermal transport measurements of reactive metallic alloys by non contact calorimetry in reduced gravity. *International Journal of Thermophysics*, 22(2):579–591, 2001.

R. Wunderlich et H. J. Fecht : Thermophysical properties of bulk metallic glass forming alloys in the stable and undercooled liquid phase- a microgravity investigation. *Material Transaction . JIM,*, 42:565–78, 2001.

R. Wunderlich, D. Lee, W. Johnson et H. Fecht : Non contact modulation calorimetry of metallic liquid in low earth orbit. *Physical Review B*, 55(1):26–29, 1997.

H. Yasuda, I. Ohnaka, Y. Ninomiya, R. Ishii, S. Fujita et K. Kishio : Levitation of metallic melt by using the simultaneous imposition of the alternating and the static magnetic fields. *Journal of Crystal Growth*, 260(3-4):475 – 485, 2004. ISSN 0022-

0248. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJ6-49V3J26-1/2/d01d3b475bf8cac8700ad1970d98f68f.

Annexe A

Propriétés physiques

Tableau A.1: Propriétés physiques des liquides (Eustathopoulos *et al.*, 1999; IIda et Gutherie, 1988)

Propriété	Unité	Ni (l)	Al (l)	TiAlNb (l)
Masse volumique	$[\rho] = kg.m^{-3}$	8900	2700	3860
Capacité calorifique	$[c_p] = J.kg^{-1}.K^{-1}$	—	—	860
Conductivité thermique	$[\kappa_{th}] = W.m^{-1}.K^{-1}$	—	—	23,1
Température de fusion	$[T_f] = K$	1726	933	1763
Viscosité cinématique	$[\nu] = m^2.s^{-1}$	—	—	$9,5.10^{-7}$
Dilatabilité thermique	$[\beta] = K^{-1}$	—	—	$1,05.10^{-5}$
Tension de surface	$[\Gamma] = mJ.m^{-2}$ $(\Delta T = T - T_f)$	$867 - 0,15\Delta T$	$1838 - 0,42\Delta T$	$1237 - 0,50\Delta T$
Emissivité	$[\epsilon] = \emptyset$	0,3	0,1	0,4
Conductivité électrique	$[\sigma_{el}] = \Omega^{-1}.m^{-1}$	$14,3.10^6$	$5,1.10^6$	$5,26.10^5$
Prandtl	[-]	—	—	0,19

Tableau A.2: Propriétés physiques des gaz

Propriété	Unité	Heluim	Argon
Masse volumique	$[\rho] = kg.m^{-3}$	0,1604	1,602
Capacité calorifique	$[c_p] = J.kg^{-1}.K^{-1}$	5193	520
Conductivité thermique	$[\kappa_{th}] = W.m^{-1}.K^{-1}$	0,142	0,0177
Viscosité cinématique	$[\nu] = m^2.s^{-1}$	$1,242.10^{-4}$	$1,670.10^{-6}$
Dilatabilité thermique	$[\beta] = K^{-1}$	T^{-1}	T^{-1}
Nombre de Prandtl	—	$0,7288$	$0,0786$

Annexe B

Calcul des forces électromagnétiques dues à un inducteur monophasé

B.1 Champ magnétique

La configuration étudiée étant axisymétrique, on choisit de travailler en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Le champ magnétique $\mathbf{B}$ est poloïdal et le potentiel du champ magnétique $\mathbf{A}$, tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, est azimuthal.

$$\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$$

$$\mathbf{A} = (0, A, 0)$$

Pour des courants inducteurs monofréquencés, de pulsation ω_1 , A peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A} = |A| \cos(\omega_1 t + \phi) \\
&|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{z})| \cos(\omega_\mathbf{1} \mathbf{t} + \phi) \text{ et } \phi = \phi(r, z) \\
&\quad A = A^c \cos(\omega_1 t) - A^s \sin(\omega_1 t) = \Re(\hat{A} e^{i\omega_1 t}) \\
&\hat{A} = A^c + iA^s \\
&\left|\hat{A}\right| = (A^{c2} + iA^{s2})^{1/2}, \tan\phi = \tfrac{A^c}{A^s}
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z) = (-\frac{\partial A}{\partial z}, 0, \frac{1}{r}\frac{\partial (rA)}{\partial r})$

$$B_r = -\frac{\partial |A|}{\partial z}\cos(\omega_1 t + \phi) + |A|\frac{\partial \phi}{\partial z}\sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$B_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r|A|)}{\partial r}\cos(\omega_1 t + \phi) - |A|\frac{\partial (r\phi)}{\partial r}\sin(\omega_1 t + \phi)\right)$$

B.2 Densité de courant induit

La densité des courants électriques induits est donnée par la loi d'hom :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Dnas le cas, à vérifier à postériori, où $Rm << R\omega$ cette loi se réduit à

$$\mathbf{j} = \sigma_{el}\mathbf{E}$$

D'autre poart la loi de Faraday donne

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t}$$

C'est à dire

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

Il existe donc un potentiel Ψtel que

$$\nabla \Psi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

On choisi un potentiel constant. Ce qui fixe les conditions à la limite pour le problème de $\mathbf{A}$. L'expression de la desnité de courant induit est donc

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{ et } \mathbf{j} = -\sigma_{el}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{d'où } \mathbf{j} = (0, j(r,z,t), 0)$$

avec

$$j = \sigma_{el}\omega_1 |A| \sin(\omega_1 t + \phi) = \sigma_{el}\omega_1 \left(A^c \sin(\omega_1 t) + A^s \cos(\omega_1 t)\right)$$

B.3 Forces électromagnétiques

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (F_r, 0, F_z)$$

$$\mathbf{F} = \sigma_{el}\omega_1 |A| \left[\frac{\nabla |A|}{2} \sin\left(2(\omega_1 t + \phi)\right) - |A| \nabla\phi \sin^2\left(\omega_1 t + \phi\right)\right]$$

On décompose cette force en une partie moyenne sur une période, notée $\langle \mathbf{F} \rangle$, et une partie pulsante $\mathbf{F_p}$

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} dt = -\frac{\sigma_{el}\omega_1 |A|^2 \nabla\phi}{2}$$

et

$$\mathbf{F}_p = -\frac{\sigma_{el}\omega_1 |A|}{2} \left[\nabla |A| \sin\left(2(\omega_1 t + \phi)\right) - |A| \nabla\phi \cos\left(2(\omega_1 t + \phi)\right)\right]$$

B.4 Puissance dans la charge

Comme $j = \omega_1 \left(A^c \sin(\omega_1 t) + A^s \cos(\omega_1 t)\right)$, la densité de puissance Joule est :

$$\frac{j^2}{\sigma_{el}} = \sigma_{el}\omega_1^2 \left[A^{c2} \sin^2(\omega_1 t) + A^{s2} \cos^2(\omega_1 t) + 2A^s A^c \cos(\omega_1 t) \sin(\omega_1 t)\right]$$

$$\frac{j^2}{\sigma_{el}} = \frac{\sigma_{el}\omega_1^2}{2} \left[\left(A^{s2} + A^{c2}\right) + \left(A^{s2} - A^{c2}\right) \cos(2\omega_1 t) + 2A^s A^c \sin(2\omega_1 t)\right]$$

Donc moyenné sur une période :

$$\left\langle \frac{j^2}{\sigma_{el}} \right\rangle = \frac{\sigma_{el}\omega_1^2}{2} \left(A^{s2} + A^{c2}\right) = \frac{\sigma_{el}\omega_1^2}{2} \left|\hat{A}\right|^2 = \frac{\sigma_{el}\omega_1^2}{2} \hat{A}\bar{\hat{A}}$$

La puissance Joule dissipé, pour une géométrie donné, évolue alors comme le carré de la fréquence du courant inducteur.

B.5 Equation de l'induction

Les équations

$$\begin{cases} \mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{j} = -\sigma_{el} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{en axisymétrique} \Rightarrow \begin{cases} \mu_0 j_\theta = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ j_\theta = -\sigma_{el} \frac{\partial A}{\partial t} \end{cases}$$

$$\mu_0 \sigma_{el} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

En utilisant la forme du potentiel vecteur (), l'equation de 'linduction devient :

- En coordonnées cylindrique (r, θ, z) :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) \hat{A} = i\mu_0 \sigma_{el} \omega_1 \hat{A}$$

  où $\hat{A}$ est porté par $\mathbf{e}_\theta$.

- En coordonnées sphériques centrées sur le centre de la sphère (r, θ, ϕ) :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \hat{A} = i\mu_0 \sigma_{el} \omega_1 \hat{A} \tag{B.1}$$

  où $\hat{A}$est porté par $\mathbf{e}_\phi$.

Exemple de la sphère placée dans un champ uniforme à l'infini en coordonnées sphériques

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \hat{A} = i\mu_0 \sigma_{el} \omega_1 \hat{A} \tag{B.2}$$

Dans l'air, le vecteur potentiel est solution de l'équation sans second membre :

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \hat{A} = 0 \tag{B.3}$$

Posons $A = \sum A_n$ avec $A_n = \alpha_n r^n f_n(\cos\theta) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_n}{\partial r}\right) = n(n+1)r^{n-2}f_n$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_n}{\partial\theta}\right) = r^{n-2}\left[-2\cos\theta f_n' + \sin^2\theta f_n''\right]$$

L'équation pour $A_n$est donc

$$n(n+1)r^{n-2}f_n + r^{n-2}\left[-2\cos\theta f_n' + \sin^2\theta f_n''\right] - \frac{r^{n-2}}{\sin^2\theta}f_n = 0$$

$$\sin^2\theta f_n'' - -2\cos\theta f_n' + \left(n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)f_n = 0$$

$$(1-\cos^2\theta)f_n'' - 2\cos\theta f_n' + \left(n(n+1) - \frac{1}{(1-\cos^2\theta)}\right)f_n = 0$$

Pour les n non négatifs, les solutions sont les fonctions de Legendre associées d'ordre 1 $P_n^1(\cos\theta)$. On a alors :

$$\hat{A} = \sum \alpha_n r_n P_n^1(\cos\theta)$$

avec $P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta$ $P_2^1(\cos\theta) = 3\cos\theta\sin\theta$et $P_3^1(\cos\theta) = \frac{3}{2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)$

Les $\alpha_n$sont données par les conditions limites à l'infini : $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e_z}$avec $e_z = \cos\theta e_r - \sin\theta e_\theta$ et donc en coordonnées sphériques :

$B(r\to\infty) = (B_0\cos\theta, -B_0\sin\theta, 0)$

Comme $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}, -\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}, 0\right)$$

$$A_\phi|_{r\to\infty} = \frac{B_0}{2}r\sin\theta$$

Ceci nous définis tous les α_n sont nuls sauf $\alpha_1 = \frac{B_0}{2}$. Sur la surface, on choisi un potentiel nul :

Dans l'air $\hat{A} = \frac{B_0}{2}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r \sin\theta$