

Modèles et analyses statistiques de l'image biomédicale

Frédéric Richard

▶ **To cite this version:**

Frédéric Richard. Modèles et analyses statistiques de l'image biomédicale. Mathématiques [math]. Université René Descartes - Paris V, 2009. tel-00522704

HAL Id: tel-00522704
https://theses.hal.science/tel-00522704

Submitted on 1 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

MÉMOIRE D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

MODÈLES ET ANALYSES STATISTIQUES DE L'IMAGE BIOMÉDICALE

déposé le 26 mai 2009 par

Frédéric RICHARD.

Cette habilitation a été soutenue le 6 novembre 2009 à l'Université Paris Descartes en la présence du jury :

Mme Christine GRAFFIGNE	Professeure	MAP5 CNRS UMR 8145	Présidente
Mme Isabelle MAGNIN	Directrice INSERM	CREATIS CNRS UMR 5220	Rapporteur
M. Grégoire MALANDAIN	Directeur INRIA	Equipe ASCLEPIOS	Rapporteur
M. Alain TROUVÉ	Professeur	CMLA CNRS UMR 8536	Rapporteur
M. Jean-Michel LOUBÈS	Professeur	CNRS UMR 5219	Examinateur
M. Lionel MOISAN	Professeur	MAP5 CNRS UMR 8145	Examinateur



À Véronique.

Table des matières

CURRICULUM VITÆ

SYNTHÈSE DES ACTIVITÉS DE RECHERCHE (2002-2008) 1

1 Considérations préliminaires sur le recalage 3

1.1 Présentation . . . 3
1.2 Cadre variationnel . . . 4
1.3 Similarité . . . 5
1.4 Régularité . . . 6
1.5 Cadre bayesien . . . 7
1.6 Résolution numérique . . . 9
1.7 Estimation paramétrique . . . 10
1.8 Références du chapitre . . . 11

2 Recalage segmentant 15

2.1 Introduction . . . 15
2.2 Modèle à frontières fixes . . . 20
2.3 Modèle à frontières libres . . . 21
2.4 Evaluations . . . 22
2.5 Références du chapitre . . . 26

3 Recalage bi-classifiant 31

3.1 Introduction . . . 31
3.2 Modèle robuste . . . 34
3.3 Modèles bi-classifiants . . . 35
3.4 Evaluation . . . 37
3.5 Références du chapitre . . . 40

4 Recalage K-classifiant de séquences médicales 41

4.1 Contexte . . . 41
4.2 Formulation du problème . . . 43
4.3 Algorithme . . . 44

4.4 Résultats 47
4.5 Références du chapitre 48

5 Estimation SAEM de déformations dans les séquences 55
5.1 Introduction 55
5.2 Cadre statistique 56
5.3 Algorithme d'estimation 59
5.4 Application 63
5.5 Références du chapitre 66

6 Segmentation et recalage en reconstruction faciale 67
6.1 Introduction 67
6.2 Extraction surfacique 69
6.3 Reconstruction cranio-faciale 73
6.4 Résultats 76
6.5 Références du chapitre 77

7 Estimation et test sur textures browniennes anisotropes 79
7.1 Introduction 79
7.2 Champs browniens fractionnaires étendus 80
7.3 Estimation 83
7.4 Tests d'anisotropie 86
7.5 Application à la mammographie 88
7.6 Références du chapitre 91

PROJETS DE RECHERCHE 95

8 Textures anisotropes aléatoires 97
8.1 Présentation 97
8.2 Modèles aléatoires anisotropes 99
8.3 Applications médicales 102
8.4 Références du chapitre 103

SYNTHÈSE DES ACTIVITÉS DE RECHERCHE (2002-2008)

Chapitre 1

Considérations préliminaires sur le recalage

1.1 Présentation

Le recalage est l'une des problématiques majeures du traitement d'images, que soulève de nombreuses applications en imagerie médicale. Etant de nature variée, les problèmes de recalage nécessitent la mise au point de techniques très différentes. Ces techniques, qui sont de nos jours très nombreuses, ont fait l'objet de plusieurs états de l'art circonstanciés [7, 17, 28, 29, 34] plus ou moins en rapport avec certaines applications.

Le problème du recalage d'images se présente de la manière suivante. Soient Ω un ensemble connexe et ouvert de $\mathbb{R}^2$ (dans le cas d'images 2D) ou de $\mathbb{R}^3$ (dans le cas d'images 3D). On définit les images comme des applications de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sur une image I quelconque, on peut faire agir des déformations, c'est à dire des applications injectives définies sur Ω à valeurs $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3). L'action de l'une de ces déformations ϕ sur une image I produit une déformation géométrique de l'image que l'on note I_ϕ et que l'on définit par

$$\forall\, x \in \Omega,\ \ I_\phi(x) := I \circ \phi(x). \tag{1.1}$$

Ces déformations n'affectent pas les niveaux de gris de l'image I. Elles en changent seulement les coordonnées. Toute déformation ϕ est associée de manière univoque à un champ de déplacements $u := \phi - \mathrm{Id}$, où Id est l'application identité. Etant données deux images, une image source I^0 et une image cible I^1, l'objectif du recalage est de trouver une déformation ϕ qui rende l'image source déformée I^0_ϕ aussi proche que possible de l'image cible I^1 ; voir l'illustration sur la figure 1.1.

Le problème de recalage s'exprime sous la forme d'un problème inverse [3, 4, 5]. On peut formuler ce problème en adoptant deux points de vue, variationnel ou bayesien.

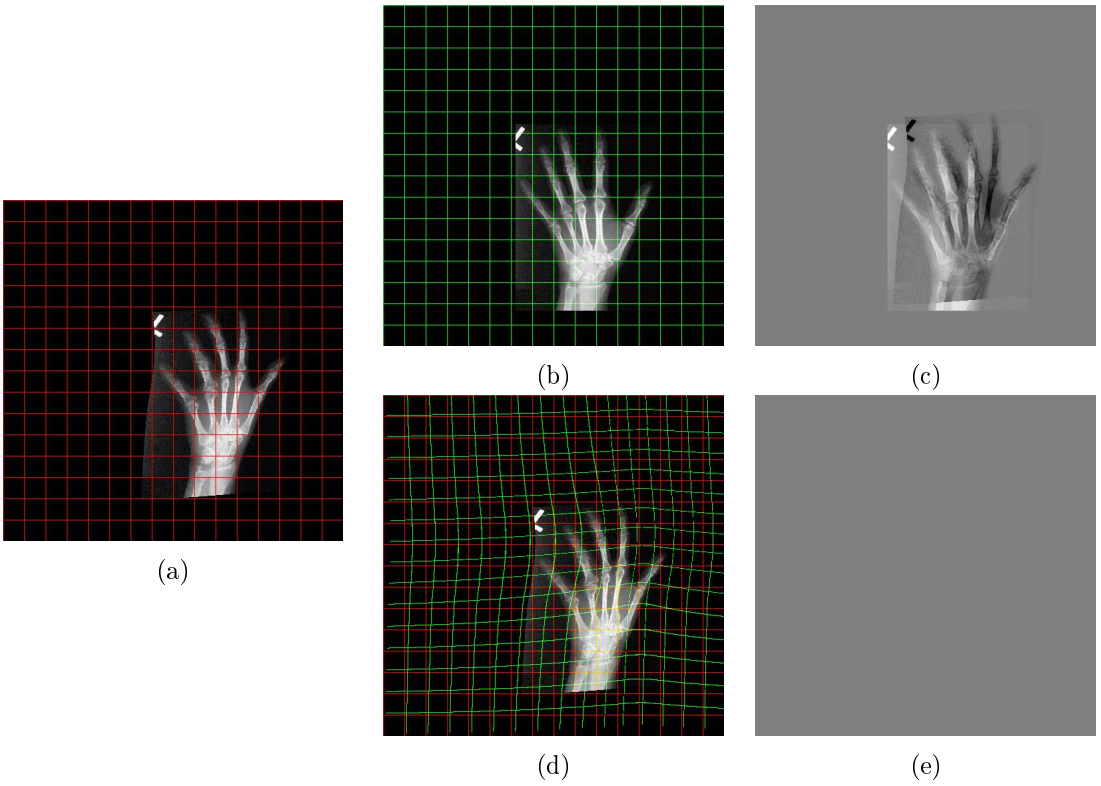


FIG. 1.1 – Recalage de deux images. (a) image cible I^1, (b) image source I^0, (c) différences entre images cible et source $(I^1 - I^0)$, (d) image source déformée I^0_ϕ, (e) différences entre image cible et image source déformée $(I^1 - I^0_\phi)$.

1.2 Cadre variationnel

Dans un cadre variationnel, on considère un espace fonctionnel $\mathcal{W}_1$ (généralement un espace de Sobolev) qui regroupe un ensemble de déformations régulières. Recaler I^0 et I^1 consiste alors à

Problème 1.1. *trouver un élément $\mathcal{W}_1$ qui réalise le minimum d'une énergie de la forme*

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\, R_\Omega(u) + \frac{\gamma_1}{2} S_\Omega(I^0_\phi, I^1), \tag{1.2}$$

sous certaines conditions aux bords de Ω. Dans cette expression, le paramètre γ_1 appartient à $\mathbb{R}^+$ et la fonction $|\cdot|_\Omega$ désigne la norme quadratique usuelle de $L^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.

L'énergie (1.2) est composée d'un terme de régularité R_Ω et d'un terme de similarité S_Ω, pondérés par le paramètre γ_1. Le terme R_Ω garantit que, sous certaines conditions, le problème est bien posé et admet une solution injective. Le terme S_Ω, qui dépend à la fois des images et de la déformation, est d'autant plus faible que l'image déformée I^0_ϕ est proche de l'image cible I^1 en termes de niveaux de gris. Ce terme introduit dans le modèle une contrainte de recalage iconique (*i.e.* basée sur les niveaux de gris).

1.3 Similarité

Parmi les termes de similarité classiques, on compte la somme des différences quadratiques, qui est définie par

$$S_\Omega(I^0_\phi, I^1) = |I^0_\phi - I^1|^2_\Omega = \int_\Omega \left(I^0_\phi(x) - I^1(x)\right)^2 dx. \tag{1.3}$$

En pratique, ce critère a une utilisation limitée car il présuppose que les niveaux de gris sont identiques d'une image à l'autre (à un bruit additif près). Il est inadapté lorsque les niveaux de gris des images que l'on recale ne sont pas les mêmes. Cette situation se rencontre principalement lorsque l'on cherche à recaler des images produites par différentes modalités d'acquisition, l'exemple le plus courant étant le recalage d'images médicales de type anatomique (CT-scans, IRM,...) et d'images de type fonctionnel (TEP,...). Dans cette situation, les relations entre les niveaux de gris des images sont plus complexes qu'une simple relation d'identité.

Il existe à présent de nombreux critères qui permettent de traiter ces relations complexes. Parmi eux, on compte notamment le coefficient de corrélation, qui est adapté lorsque les relations de niveaux de gris sont affines, le rapport de corrélation [24], qui permet d'appréhender toute relation de type fonctionnelle, l'information mutuelle [12, 27, 32, 33], qui est adaptée pour traiter de relations statistiques, ou encore, l'entropie jointe [12, 27] et des termes généraux issus de la théorie de l'information [26]. Pour la plupart, ces critères ont été initialement proposés dans un cadre de recalage rigide. Cependant, plusieurs travaux en ont précisé l'utilisation dans un cadre variationnel non-rigide [8, 26].

Bien que permettant de traiter un large éventail d'applications, les différents critères évoqués ici ont certaines limites. De par leur caractère global, ils permettent de ne gérer que des relations iconiques invariantes sur le domaine des images. D'autre part, ils traduisent des contraintes de recalage qui sont exclusivement iconiques. Autrement dit, ils ne donnent pas la possibilité d'exploiter des sources géométriques de contraintes pouvant être apportées par de points, de contours ou encore de surfaces caractéristiques dans les images. Dans les chapitres 2 et 3, je présenterai plusieurs modèles de recalage qui permettent de pallier ces limitations. Ces modèles ont la particularité de combiner le recalage à une segmentation ou une classification des images. La segmentation apporte une information supplémentaire sur les images qui permet de définir des contraintes géométriques, tandis que la classification donne la possibilité de localiser un critère de similarité iconique en fonction de la classe du pixel.

1.4 Régularité

Le terme de régularité R_Ω a souvent été défini à partir d'énergies de déformation issues de la mécanique des milieux continus. A cet égard, on peut distinguer deux points de vue, celui des petites déformations et celui des grandes déformations.

Dans le cadre des petites déformations, les énergies utilisées s'écrivent généralement

$$A_\Omega(u,v) = \langle Lu, v\rangle_\Omega = \int_\Omega Lu(x)\cdot v(x)\,dx, \tag{1.4}$$

où L est un opérateur linéaire compact défini sur l'espace des déformations $\mathcal{W}_1$. Le terme de régularité R_Ω s'obtient à partir de A_Ω en posant

$$R_\Omega(u) = \frac{1}{2}A_\Omega(u,u). \tag{1.5}$$

Dans mes travaux, je me suis souvent servi de l'énergie de déformation de l'élasticité linéarisée [11]. Celle-ci est caractérisée par un opérateur L qui est définit sur l'espace de Sobolev $\mathcal{W}_1 = H^2(\Omega;\Omega)$ par

$$Lu = -\mathrm{div}\{\lambda\,\mathrm{trace}(\mathbf{e}(u))\mathrm{Id}_M + 2\,\mu\,\mathbf{e}(u)\}, \tag{1.6}$$

avec le tenseur des déformations linéarisé $\mathbf{e}(u)$

$$\mathbf{e}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \tag{1.7}$$

et des constantes positives λ et μ connues sous le nom de paramètres de Lamé.

Les termes de régularité que l'on définit à partir des équations (1.4) et (1.5) ne sont pas adaptés lorsque le recalage des images requiert de grandes déformations. Dans cette situation, ils ne garantissent pas le caractère injectif des solutions.

Dans [18, 20], j'ai construit et étudié un modèle adapté aux grandes déformations. Cette approche est basée sur l'utilisation d'une énergie de déformation d'un matériau hyperélastique [11]. Celle-ci s'obtient simplement en remplaçant dans l'équation (1.6) le tenseur des déformations $\mathbf{e}(u)$ par le tenseur non linéarisé de Green-St Venant

$$\mathbf{E}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u \nabla u^T). \tag{1.8}$$

On construit ainsi un opérateur non-linéaire de l'élasticité $\tilde{L}$. On définit alors le terme de régularité à partir des équations (1.4) et (1.5), en utilisant l'opérateur $\tilde{L}$ au lieu de L. L'énergie de déformation obtenue est celle d'un matériau hyperélastique de St-Venant Kirchhoff [11].

Alternativement au modèle hyperélastique, M. Miller et ses collaborateurs de l'Université Johns Hopkins [9, 14] et A. Trouvé [30, 31] ont parallèlement développé des modèles inspirés de la mécanique des fluides visqueux. La construction de ces modèles repose sur deux principes complémentaires. Le premier principe consiste à

assouplir les contraintes de régularité en les faisant s'exercer non plus directement sur les déplacements mais sur leurs vitesses. Ceci permet de moins pénaliser les grandes déformations et, par là même, de rendre possible leur obtention en tant que solution du problème de minimisation. Le second principe se rapporte à l'utilisation d'une équation de transport qui, tout en permettant de générer les déformations à partir des vitesses, en garantit le caractère injectif.

1.5 Cadre bayesien

Dans une optique bayesienne, on donne tout d'abord un caractère aléatoire aux images observées et aux déformations.

Soit $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une tribu borélienne. On suppose que l'image cible I^1 est observée sur une grille discrète régulière Ω_d de Ω de taille m. On fait l'hypothèse que l'image cible I^1 est un champ de variables aléatoires réelles, définies sur $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et indexées par les points de la grille Ω_d. A x fixé dans Ω_d, $I^1(x)$ est donc une variable aléatoire qui représente le niveau de gris de l'image I^1 en x. Pour ce qui concerne l'image source I^0, elle reste définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. Dans cette section, on considère qu'elle est déterministe et fixée. Cependant, nous verrons par la suite qu'elle peut être interprétée comme un élément du modèle qu'il s'agit d'estimer.

Par ailleurs, on représente les déformations de manière aléatoire. Pour cela, on s'appuie généralement sur une représentation discrète des déformations que l'on obtient par décomposition des déplacements dans une base finie d'applications $\{F_k\}_{k=1}^l$ définies sur Ω à valeurs dans Ω :

$$\forall\, x \in \Omega, \Phi(x) = x + \sum_{k=1}^{l} v_k F_k(x). \tag{1.9}$$

On considère les coefficients de décomposition v_k $(k = 1, \cdots, l)$ comme des variables aléatoires réelles définie sur $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ainsi, la déformation Φ devient la réalisation d'un champ aléatoire indexé sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (selon la dimension de l'image). Dans la suite, on identifiera la déformation Φ avec le vecteur des coefficients de décomposition $v = (v_1, \cdots, v_l)$ qui la caractérise. On définit une loi de probabilité a priori $P(\Phi)$ qui décrit le comportement aléatoire des déformations. On considère souvent Φ comme un vecteur aléatoire gaussien, dont la densité de distribution

$$P(\Phi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{l}{2}}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(v-\nu)^t \Sigma^{-1}(v-\nu)\right) \tag{1.10}$$

est caractérisée par l'espérance ν et la matrice de variance-covariance Σ.

Différentes représentations discrètes des déformations ont été proposées. Dans [4, 10], les représentations reposent sur les bases spectrales de différents opérateurs

L. Il s'agit de bases de Fourier qui sont similaires à celle utilisées par ailleurs dans [15]. Dans [1], la base de décomposition est formée par un ensemble d'applications à noyau reproduisant centrées sur des points de contrôle. Toutes ces bases sont formées de fonctions qui ne sont pas à support compact. Dans [21], j'ai construit une représentation des déformations à partir d'une discrétisation par différence finie. Dans [19, 23], j'ai proposé une représentation qui repose sur une décomposition du domaine Ω en éléments finis (voir le chapitre 5 pour plus de détails). Les bases que j'ai considérées sont toutes composées de fonctions à support compact, ce qui présente des avantages en termes algorithmiques.

On représente ensuite l'image cible I^1 comme une déformation aléatoire bruitée de l'image source I^0 [1, 4, 15, 21, 23]. Pour cela, on définit une loi de probabilité $P(I^1|\phi)$ qui exprime les liens entre les niveaux de gris de l'image source et ceux de l'image cible, conditionnellement aux déformations.

Cette loi, qui constitue un modèle d'observation, peut être définie de la manière suivante. On suppose qu'à x fixé dans Ω_d et à ϕ donné,

$$I^1(x) = I^0_\phi(x) + \eta(x), \tag{1.11}$$

où $\eta(x)$ est une variable gaussienne centrée de variance σ^2. On suppose en outre l'indépendance de toutes les variables $\eta(x)$ et l'indépendance des lois de $I^1(x)$ conditionnellement à Φ et I^0. On obtient alors

$$P\left(I^1 = z|\Phi = \phi\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^m} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{x\in\Omega_d}\left(I^0(\phi(x)) - z(x)\right)^2\right). \tag{1.12}$$

Dans le cadre bayesien, on formule habituellement un problème de recalage qui consiste à

Problème 1.2. *trouver Φ qui réalise le maximum de la probabilité a posteriori $P(\Phi|I^1)$ (ou MAP).*

Or, par une formule de Bayes, la probabilité *a posteriori* s'écrit

$$P(\Phi|I^1) = \frac{P((I^1|\Phi = \phi)\, P(\phi)}{\int_{\mathbb{R}^n} P(I^1|\Phi = \phi')\, P(\phi')\, d\phi'}$$

En posant $\tilde{R}(\phi) = -\log(P(\Phi = \phi))$ et $\tilde{S}(I^0_\phi, I^1) = -\log(P(I^1|\Phi = \phi')$, le problème du MAP revient donc à chercher un vecteur ϕ qui minimise une énergie de la forme

$$\tilde{J}(\phi) \;=\; \tilde{R}(\phi) \;+\; \tilde{S}(I^0_\phi, I^1).$$

Dans la mesure où cette énergie est analogue à celle du problème variationnel, on peut considérer que les problèmes variationnel et bayesien de recalage sont formellement équivalents. Cette équivalence formelle est souvent utilisée pour donner une interprétation stochastique du problème variationnel.

Notons toutefois que les problèmes variationnels ne sont pas strictement équivalents. Les problèmes d'optimisation ne sont pas définis sur les mêmes variables et n'ont pas de raison de conduire à des solutions identiques. Ces deux problèmes donnent également lieu à des techniques de résolution différentes. Pour fonctionner, ces dernières ne nécessitent pas les mêmes conditions. En particulier, la dérivabilité de l'énergie est requise dans le cadre variationnel mais pas dans le cadre bayesien.

1.6 Résolution numérique

Dans le cadre variationnel, les techniques de résolution des problèmes de recalage reposent essentiellement sur des schémas de descente de gradient.

Dans le contexte des petites déformations, ces techniques prennent la forme d'un système dynamique

$$\frac{du_t}{dt} = -\nabla J_1(u_t),$$

où t est un paramètre de temps et ∇J_1 est le gradient de l'énergie définie dans (1.2). La mise en œuvre de ces descentes de gradient se fait à partir de différentes discrétisations : par différences finis [5, 21] ou par décomposition dans des bases spectrales de l'opérateur L [3], dans des bases d'ondelettes [3] ou dans des bases d'éléments éléments finis [22]. Cette mise en œuvre est généralement associée à des schémas de résolution multigrilles qui améliorent les temps de calculs et l'approximation des solutions [3, 5, 22]. Dans les travaux variationnels présentés dans ce document, nous avons utilisé des algorithmes de descente de gradient discrétisés dans des bases d'éléments finis. Dans la communauté, ces bases sont maintenant bien reconnues pour leurs bonnes propriétés locales. Notre mise en œuvre a été faite sous le logiciel libre de calcul scientifique FREEFEM. La librairie ITK, qui est devenue une référence pour le recalage d'images, repose également sur une discrétisation par éléments finis.

Dans le contexte des grandes déformations, les techniques sont différentes des précédentes. Pour la résolution du problème hyperélastique, j'ai construit un algorithme de résolution numérique qui repose sur une linéarisation des équations d'Euler-Lagrange associées au problème de minimisation par pénalisation [18, 20]. J'ai montré la convergence de cet algorithme, ainsi que l'existence d'une solution aux équations d'Euler-Lagrange. L'algorithme que j'ai proposé a été récemment repris par Y. Rouchdy pour être appliqué en imagerie cardiaque [25].

Pour ce qui est des modèles fluides, différents algorithmes ont été proposés. Dans [9], Christensen *et al.* ont proposé un premier algorithme sous-optimal qui consiste en une descente de gradient par rapport aux déplacements. Dans [6], M. Beg *et al.* ont amélioré cette première approche en construisant une descente de gradient par rapport aux vitesses des déplacements.

Dans le cadre bayesien, on compte différentes techniques de résolution parmi lesquelles des gradients stochastiques ou des méthodes de Monte-Carlo [1, 4, 10]. Ces techniques ont été mises en œuvre à partir de représentations des déplacements dans des bases spectrales ou d'applications à noyaux reproduisants. Les éléments de ces bases ont l'inconvénient de ne pas être à support limité. Nous avons utilisé des représentation par différences finies [21] ou éléments finis [19, 23] qui ont de meilleures propriétés locales. Nous avons tiré parti des propriétés markoviennes locales de ces représentations pour concevoir d'autres techniques de résolution basées sur des recuits simulés [19, 21] ou des échantillonneurs de type Gibbs [23]. Certaines de ces techniques seront présentées plus amplement dans le chapitre 5.

1.7 Estimation paramétrique

Le cadre bayesien est particulièrement bien adapté pour la définition de problèmes d'estimation [1, 2, 16, 23]. Ce problème apparaît dans le contexte suivant. On observe un ensemble d'images $\mathbf{I} = (I_1, \cdots, I_n)$ portant sur un même sujet (cerveau, caractère manuscrits,...). Le problème posé est alors de caractériser la variabilité au sein de cette population d'images. On part du principe que les images sont des observations bruitées d'un prototype qui est déformé de manière aléatoire. On caractérise géométriquement la variabilité de la population en identifiant le prototype et la loi de probabilité qui régit ses déformations à partir des observations.

Dans les termes de la section 1.5, le problème peut se formuler de la manière suivante. On considère les images observées I_j comme des champs de variables aléatoires indexées par les points de la grille Ω_d. Le prototype I^0 est une image non observée que l'on définit comme une fonction de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. On établit des relations entre les images observées et le prototype en supposant qu'il existe un ensemble de champs de déformations $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ et un ensemble de champs aléatoires $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ tels que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\forall x \in \Omega_d,\ I_i(x) = I^0_{\Phi_i}(x) + \eta_i(x). \tag{1.13}$$

Les champs aléatoires η_i sont des bruits additifs indépendants. Tout comme le prototype, les déformations sont inconnues.

En fixant la loi de probabilité du bruit, on peut ensuite définir la loi de l'échantillon $\mathbf{I}$ connaissant le prototype I^0 et les déformations $\mathbf{\Phi}$. Par exemple, si l'on suppose que les bruits η_j sont des champs de variables i.i.d. de loi gaussienne centrée et de variance σ, cette loi s'écrit

$$P(\mathbf{I}|\mathbf{\Phi}; \sigma, I^0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{nm}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \Omega_d} \left(I^0(\Phi_i(x)) - I_i(x) \right)^2 \right).$$

Par ailleurs, on définit la loi *a priori* des champs de déformations $(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$, en utilisant la représentation discrète (1.9). Si l'on suppose que les champs sont i.i.d.

de loi donnée par l'équation (1.10), on obtient par exemple

$$P(\mathbf{\Phi};\nu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{nl}{2}}\sqrt{|\Sigma|}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{v}_i-\nu)^t\Sigma^{-1}(\mathbf{v}_i-\nu)\right),$$

où les $\mathbf{v}_i$ sont les vecteurs de coefficients de décomposition des Φ_i.

Pour identifier le prototype, on le met sous forme paramétrique en le décomposant dans une base finie d'applications $\{G_r\}_{r=1}^s$ définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \Omega,\ I^0(x) = \sum_{r=1}^{s} \rho_r G_r(x). \tag{1.14}$$

Le modèle ainsi défini comporte un certain nombre d'inconnues. Tout d'abord, il contient un ensemble de paramètres qui proviennent soit de la définition des distributions de loi (σ,ν,Σ) soit de la paramétrisation du prototype $(\rho_1,\cdots,\rho_s)$. On regroupe ces paramètres dans un vecteur θ. Le modèle a également un ensemble de variables aléatoires non observées qui sont issues des décompositions des champs de déformations. Pour cette raison, le modèle est à données incomplètes.

Dans ce cadre, le problème consiste à estimer les paramètres θ à partir de l'échantillon $\mathbf{I}$. Ce problème statistique est difficile en raison d'une part du caractère incomplet des observations et d'autre part de l'impossibilité de rendre explicite la constante de normalisation de la vraisemblance du modèle. Les techniques de résolution proposées jusqu'à présent [1, 2, 23] sont des versions modifiées de l'algorithme EM (*Expectation Maximization*) introduit dans [13].

Dans le chapitre 5, je présenterai plus en détail la technique que j'ai développé pour la résolution de ce problème.

1.8 Références du chapitre

[1] S. Allassonnière, Y. Amit, and A. Trouvé. Towards a coherent statistical framework for dense deformable template estimation. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B*, 69(1) :3–29, Feb 2007.

[2] S. Allassonnière and E. Kuhn. Stochastic algorithm for parameter estimation for dense deformable template mixture model. *ESAIM : Probability and Statistics*, 2009. To be published.

[3] Y. Amit. A non-linear variational problem for image matching. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(1) :207–224, January 1994.

[4] Y. Amit, U. Grenander, and M. Piccioni. Structural image restoration through deformable templates. *Journal of the American Statistical Association*, 86(414) :376–387, 1991.

[5] R. Bajcsy and S. Kovacic. Multiresolution elastic matching. *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, 46 :1–21, 1989.

[6] M.F. Beg, M. Miller, L. Younès, and A. Trouvé. Computing metrics via geodesics on flows of diffeomorphisms. *International Journal of Computer Vision*, 61(2) :139–157, 2005.

[7] L. Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Computing Surveys*, 24 :325–376, 1992.

[8] C. Chefd'Hotel, G. Hermosillo, and O. Faugeras. A variational approach to multi-modal image matching. In *Proc. IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pages 21–28, University of British Columbia, Vancouver, July 2001. IEEE Computer Society Canada.

[9] G. Christensen, R. Rabbitt, and M. Miller. Deformable templates using large deformation kinematics. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(10) :1435–1447, October 1996.

[10] G. Christensen, R. Rabbitt, and M. Miller. Mathematical textbook of deformable neuroanatomies. In *Proceedings of the National Academy of Science*, volume 90, pages 11944–11948, dec 93.

[11] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity, volume 1 : three-dimensional elasticity.* Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[12] A. Collignon, F. Maes, D. Vandermeulen, et al. Automated multi-modality image registration based on information theory. In Y. Bizais, editor, *Proceedings of the Information Processing in Medical Imaging Conference*, pages 263–274. Kluwer Academic Publishers, 1995.

[13] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society : series B*, 39 :1–38, 1977.

[14] P. Dupuis, U. Grenander, and M. Miller. Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching. *Quarterly of Applied Mathematics*, 56(3) :587–600, 1998.

[15] C.A. Glasbey and K.V. Mardia. A penalized likelihood approach to image warping. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B*, 63(3) :465–514, 2001.

[16] U. Grenander and M. Miller. Computational Anatomy : an emerging discipline. *Quarterly of Applied Mathematics*, 56(4) :617–694, December 1998.

[17] J. Maintz and M. Viergever. A survey of medical image registration. *Medical Image Analysis*, 2(1) :1–36, 1998.

[18] F. Richard. *Modèles élastiques d'ajustement d'images et applications aux paires bilatérales et temporelles de mammographies.* PhD thesis, University Paris Descartes, dec. 2000.

[19] F. Richard and A. Samson. Metropolis-Hastings methods for finite element-based registration. In *Proceedings of the conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'07)*, pages 1–6, Minneapolis, MN, USA, 2007. IEEE Computer Society. .

[20] F.JP Richard. Résolution de problèmes hyperélastiques de recalage d'images. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (Série I)*, 335 :295–299, 2002. (English abstract entitled *The resolution of some hyperelastic image-matching problems*).

[21] F.JP Richard. A comparative study of markovian and variational image-matching techniques in application to mammograms. *Pattern Recognition Letters*, 26(12) :1819–1829, 2005.

[22] F.JP Richard and L. Cohen. A new image registration technique with free boundary constraints : application to mammography. *Computer Vision and Image Understanding*, 89(2) :166–196, 2003.

[23] F.JP Richard, A. Samson, and C. Cuénod. A SAEM algorithm for the estimation of template and deformation parameters in medical image sequences. *Statistics and Computing*, 19(4) :465–478, 2009.

[24] A. Roche, G. Malandain, X. Pennec, and N. Ayache. The correlation ratio as a new similarity measure for multimodal image registration. In *Proceedings of the first international conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'98)*, volume 1496 of *LNCS*, pages 1115–1124, Cambridge, USA, October 1998. Springer Verlag.

[25] Y. Rouchdy, J. Pousin, J. Schaerer, and P. Clarysse. A nonlinear elastic deformable template for soft structure segmentation : application to the heart segmentation in MRI. *Inverse Problems*, 23(3) :1017–1035, 2007.

[26] N. Rougon, C. Petitjean, and F. Prêteux. Variational non rigid image registration using exclusive f-information. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing (ICIP'03)*, volume 2, pages 703–706, Barcelona, Spain, sep 2003.

[27] C. Studholme, D. Hill, and D. Hawkes. Automated 3-d registration of MR and CT images of the head. *Medical Image Analysis*, 1 :163–175, 1996.

[28] P. Thomson and A. Toga. *Handbook of Medical Imaging*, chapter Warping strategy for intersubject registration, pages 569–601. Academic Press, I. Bankman edition, 2000.

[29] A. Toga. *Brain mapping.* Academic Press, 1999.

[30] A. Trouvé. Infinite dimensional group action and pattern recognition. Technical report, DMI, Ecole Normale Supérieure, Paris, France, 1995.

[31] A. Trouvé. Diffeomorphism groups and pattern matching in image analysis. *International Journal of Computer Vision*, 28(3) :213–221, 1998.

[32] P. Viola and W. Wells. Alignment by maximization of mutual information. In *Proceedings of the fifth International Conference Computer Vision (ICCV'95)*, pages 16–23, Cambridge, MA, 1995.

[33] W. Wells, P. Viola, H. Atsumi, et al. Multi-modal volume registration by maximization of mutual information. *Medical Image Analysis*, 1(1) :35–51, 1996.

[34] B. Zitova and J. Flusser. Image registration methods : a survey. *Image and Vision Computing*, 21 :977–1000, 2003.

Chapitre 2

Recalage segmentant

2.1 Introduction

2.1.1 Recalage et segmentation

Dans des modèles usuels de recalage iconiques (voir les sections 1.1 à 1.3 du chapitre 1), les contraintes de similarité reposent exclusivement sur les niveaux de gris des images. Dans de nombreuses applications, les niveaux de gris ne sont pourtant pas les seules caractéristiques de l'image pouvant servir de contraintes de recalage. Très souvent, des éléments géométriques (points, contours, lignes, surfaces, ...) peuvent facilement être repérées dans les images et fournir des informations importantes pour le recalage.

Il existe différentes manières d'exploiter des informations géométriques au sein d'un modèle de recalage s'appuyant sur des contraintes iconiques [1, 31, 32, 33]. Dans une série de travaux [17, 20, 21, 22, 23, 25], je me suis placé dans le cadre où les images possèdent une région d'intérêt commune sur laquelle on souhaite concentrer l'opération de recalage ; en imagerie médicale, cette région d'intérêt peut notamment correspondre à un organe que l'on observe sur un fond. Dans la démarche que j'ai proposée, les informations géométriques sont tirées des contours qui délimitent cette région ou du fond qui l'entoure. Elles sont intégrées dans le modèle de recalage sous la forme de différentes contraintes qui mettent en jeu les conditions aux bords du problème de minimisation.

Dans ma thèse [17], j'ai conçu un premier modèle où le recalage est réalisé en tenant compte à la fois de contraintes iconiques définies à l'intérieur des régions d'intérêt et de contraintes géométriques dérivées des contours de ces régions. Dans ce modèle, les contraintes iconiques sont exprimées au travers d'un critère de similarité classique tandis que les contraintes géométriques sont définies par le biais de conditions aux bords de Dirichlet non-homogènes aux frontières de la région d'intérêt. Dans la formulation du problème, les contraintes géométriques sont fixes pendant

le recalage. Aussi les contours de la région d'intérêt sont-ils supposés correctement délimités dans les deux images avant le recalage.

Dans le prolongement de ma thèse, en collaboration avec L. Cohen du CEREMADE (CNRS UMR 7534), j'ai proposé un autre modèle dans lequel cette hypothèse n'est plus indispensable. Dans ce modèle, les contraintes géométriques peuvent évoluer au cours du recalage en fonction de l'information que cette opération délivre [20, 21, 22, 25]. Cette évolution est rendue possible par l'utilisation de conditions aux bords libres qui modèrent les contraintes du modèle précédent. Elle est en outre guidée par des contraintes géométriques qui, cette fois-ci, sont définies à l'intérieur de l'énergie au travers d'un troisième terme complétant les termes de similarité iconique et de régularité. Ce modèle permet ainsi de réaliser de manière simultanée le recalage et la segmentation des images.

Les deux modèles de recalage de régions d'intérêt (à frontières fixes et libres) seront présentés avec plus de détails dans les sections 2.2 et 2.3.

Ces travaux ont été effectués à une époque où les recherches sur les modèles combinés de recalage et segmentation en étaient à leurs balbutiements [20, 25, 31, 33]. Ils ont apporté un point de vue original, dont la particularité est de concentrer une opération de recalage non-rigide sur une région d'intérêt dans les images. Ils ont largement contribué aux avancées sur la problématique et ont eu un bon écho dans la communauté des imagistes. Depuis, certaines extensions ont été proposées. Dans [1], une technique variationnelle basée sur les "level-sets" permet de combiner le recalage et la segmentation d'images ayant plusieurs régions d'intérêt. Dans [32], la technique permet de recaler des images issues de différentes modalités d'acquisition et d'intégrer l'information provenant d'un atlas.

2.1.2 Applications en imagerie du sein

Motivations

Les modèles de recalage évoqués plus haut ont été été appliqués à l'imagerie du sein. Les motivations associées à cette application sont les suivantes.

Dans le cadre d'un dépistage ou d'un diagnostic du cancer du sein, les radiologues se servent généralement de la comparaison des mammographies des seins droit et gauche ou de la confrontation des mammographies courantes avec des mammographies antérieures. En permettant de visualiser des asymétries suspectes, la comparaison bilatérale est parfois le seul moyen de localiser des pathologies difficiles à discerner sur une seule mammographie. Quant à la comparaison temporelle, elle permet non seulement de repérer l'apparition d'une lésion ou d'en suivre l'évolution, mais aussi de détecter des lésions subtiles passées inaperçues auparavant. Pour donner une idée de ces comparaisons, les clichés bilatéraux d'une même patiente à deux dates différentes sont présentés sur la figure 2.1.

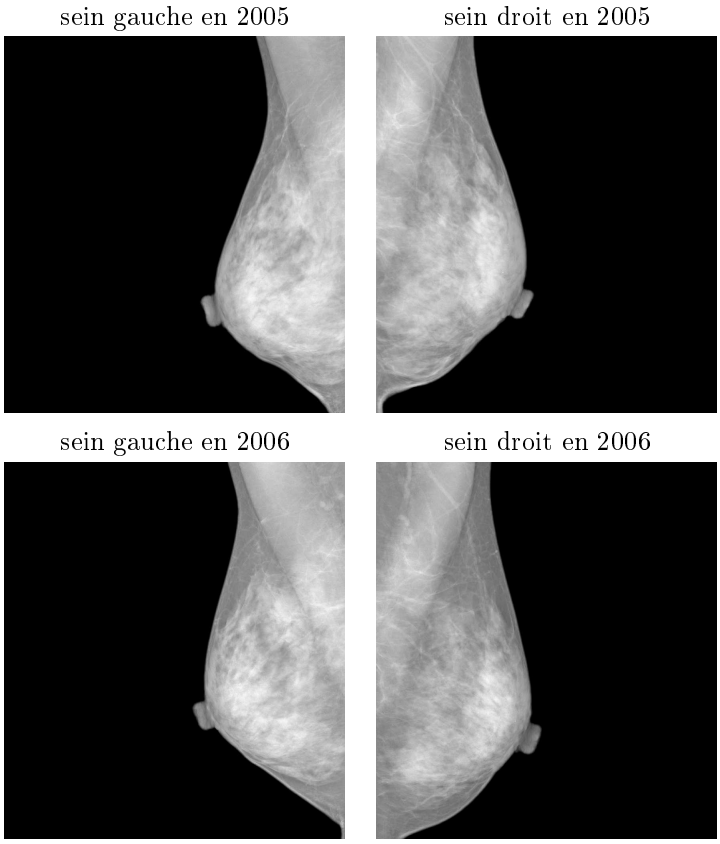


FIG. 2.1 – Comparaisons bilatérale et temporelle de mammographies d'une même patiente.



FIG. 2.2 – Délimitation d'éléments géométriques dans une mammographie.

D'un point de vue médical, ces deux types de comparaison sont d'autant plus pertinents que les seins droit et gauche normaux sont naturellement assez symétriques et que le sein normal est relativement stable au cours du temps [14, 29]. Toutefois, un certain nombre de facteurs peuvent faire varier l'aspect des images et, de ce fait, rendre les comparaisons confuses. Ces facteurs peuvent être d'ordre histologique (cycles mensuels, variations de poids,...), anatomique (asymétries normales des seins) ou encore être liés à l'acquisition des images. Parmi les facteurs d'acquisition les plus influents, on compte la dose de radiation transmise par le système d'imagerie, le positionnement et la compression du sein. Afin d'augmenter la sensibilité des comparaisons aux différences liées à des pathologies, il est donc utile de mettre au point des techniques qui permettent de réduire les variations normales des images dues à ces différents facteurs.

Les différents facteurs évoqués plus haut produisent des variations d'ordre iconique ou géométrique. Certaines variations iconiques provoquées par le changement de paramètres d'acquisition peuvent être atténuées par des techniques de normalisation [11]. Par contre, les variations d'ordre géométrique ne pourront être corrigées que par des techniques de recalage. Des états de l'art des techniques de recalage utilisées en imagerie mammaire ont été présentés dans [9, 13]. Parmi les techniques existantes, on compte des techniques rigides [28, 30] et non-rigides [12, 16, 21, 23, 25, 27].

Recalage du domaine du sein

Très tôt, les techniques de recalage des mammographies ont été conçues à partir d'informations extraites des contours du sein [28]. Comme on le voit sur la figure 2.2, la mammographie (en position médio-latérale) est en effet structurée par une région du sein aux contours évidents. Bien qu'importante, l'information issue des contours du sein est toutefois insuffisante pour recaler précisément l'ensemble du sein. Pour cela, il est indispensable de lui ajouter une information iconique.

Les modèles de recalage de régions d'intérêt se prêtent bien à ces images. Ils

permettent de concentrer le recalage sur le domaine du sein, en excluant le fond et le muscle. En conjuguant pour la première fois les effets bénéfiques de contraintes issus des contours et des niveaux de gris, ces modèles ont permis d'améliorer nettement la précision des recalages obtenus antérieurement.

Evaluations

La majorité des techniques de recalage d'images du sein n'a pas été véritablement évaluée. Dans [10, 30], quelques techniques de recalage ont été comparées. Dans [12], Hipwell et al. ont proposé une validation du recalage qui se fonde sur des mammographies simulées à l'aide d'IRM du sein. Cette validation repose cependant sur un faible nombre de cas. De ce fait, il est difficile de savoir dans quelle mesure et avec quelle précision les techniques de recalage proposées permettent la correction des variations des images.

En collaboration avec P. Bakic et A. Maidment de l'Université de Pennsylvanie, j'ai proposé deux validations systématiques des modèles de recalage de régions d'intérêt. La première repose sur des mammographies simulées à partir d'un modèle anthropomorphique 3D du sein et d'un modèle physique de la déformation de ce modèle [3, 15, 18, 19, 24]. Elle vise à évaluer la capacité de la technique de recalage à corriger des variations dues à la compression du sein. La seconde validation s'appuie sur les projections produites en tomosynthèse du sein [4, 5]. Elle a pour objectif d'évaluer la capacité de la technique à corriger des variations de positionnement et de dose de radiation. Ces validations seront présentées plus en détail dans la section 2.4.

L'efficacité des modèles de recalage présentés ici a été reconnue par la communauté des chercheurs travaillant en imagerie du sein. Ces modèles ont été régulièrement exposés aux congrès internationaux de mammographie numérique [21, 23] et figurent parmi les modèles de référence mentionnés dans différents articles et états de l'art sur le sujet [9, 13, 16].

Avancées futures

Pour finir, notons que les modèles de recalage de mammographies ne tiennent généralement pas compte de la nature projective de ces images. On se contente le plus souvent de calculer une déformation apparente en 2D qui a pour effet de corriger les différences entre images mais qui a peu de liens avec la déformation réelle du sein en 3D.

Toutefois, le contexte de l'imagerie mammaire est actuellement en pleine évolution avec l'émergence de la tomosynthèse du sein [8]. Comme toutes les modalités 3D du sein (stéréomammographie, CT ou IRM du sein), la tomosynthèse produit des séries d'images 2D qui sont chacune focalisée sur un plan de coupe anatomique

du sein. Ainsi, la tomosynthèse permet de limiter les effets de superposition propres à la mammographie. Parmi les modalités 3D, la tomosynthèse est celle qui présente les meilleures caractéristiques pour remplacer la mammographie dans les campagnes de dépistage. Cette modalité produit des images dont la géométrie est similaire à celle de la mammographie. De plus, les images de tomosynthèse s'acquièrent avec un matériel radiologique proche de celui de la mammographie et avec des doses de radiation comparables. Par ailleurs, en utilisant des agents de contraste, la tomosynthèse permet d'obtenir de précieuses informations fonctionnelles en 3D [7]. Tout cela rend cette modalité particulièrement prometteuse pour les années à venir.

Les problématiques évoquées à propos de la comparaison des mammographies restent les mêmes avec l'utilisation de la tomosynthèse. Pour les images 3D de tomosynthèse, le problème de recalage est cependant mieux posé. Par le biais du recalage, on peut espérer trouver des déformations 3D apparentes qui sont proches de celles qui ont réellement lieu dans le sein.

Je poursuis actuellement mes recherches sur le recalage d'images mammaires en collaboration avec M. Hachama (Université de Khemis Miliana) et A.K. Carton (Département de Radiologie de l'Université de Pennsylvanie). Nous travaillons sur l'application du recalage aux images de tomosynthèse avec rehaussement de contraste.

2.2 Modèle à frontières fixes

On reprend ici les notations introduites dans les sections 1.1 et 1.2 du chapitre 1.

On se place dans un cadre où les images source et cible, I^0 et I^1, ont une seule région d'intérêt, localisée sur les sous-ensembles ouverts et connexes Ω_0 et Ω_1 de Ω, respectivement dans I^0 et I^1. On note $\partial\Omega_0$ et $\partial\Omega_1$ les frontières respectives de Ω_0 et Ω_1.

Dans un premier temps, on suppose que les frontières ont été préalablement extraites et qu'elles sont donc connues avant le recalage. On suppose également que l'on a pu associer de manière univoque les frontières $\partial\Omega_0$ et $\partial\Omega_1$. On note ϕ_0 (ou $\mathrm{Id} + u_0$) une fonction bijective et définie sur Ω_1 qui associe les coordonnées de $\partial\Omega_1$ à celles de $\partial\Omega_0$. De manière à restreindre le recalage aux régions d'intérêt, on définit le problème de minimisation non plus sur $\mathcal{W}_1$ mais sur un espace $\mathcal{W}_2$ composé d'applications régulières bijectives de $\overline{\Omega_1}$ dans $\overline{\Omega_0}$ [17, 23]. Il s'agit alors de

Problème 2.1. *trouver un élément de $\mathcal{W}_2$ qui minimise une énergie de la forme*

$$J_2(u) = \frac{1}{2}\, R_{\Omega_1}(u) + \frac{\gamma_1}{2} S_{\Omega_1}(I^0_\phi, I^1) \tag{2.1}$$

avec des conditions aux bords de Dirichlet non-homogènes

$$\forall\, x \in \partial\,\Omega_1,\ u(x) = u_0(x) = \phi_0(x) - x. \tag{2.2}$$

Pour la définition de l'énergie J_2, nous avons pris pour terme R_{Ω_1} le terme de régularisation élastique défini par les équations (1.4) à (1.7), et pour terme de similarité, le critère de somme des différences quadratiques défini par l'équation (1.3). L'énergie J_2 est analogue à l'énergie J_1 du modèle usuel (1.1), à la seule différence que ses termes sont exclusivement définis sur la région d'intérêt Ω_1 de l'image I^1. En prenant en compte l'information disponible sur les contours des régions d'intérêt, la condition aux bords (2.2) permet d'introduire des contraintes géométriques dans le problème de minimisation.

2.3 Modèle à frontières libres

Dans un second temps, on suppose que la région d'intérêt Ω_1 de I^1 est connue, tandis que celle Ω_0 de I^0 ne l'est pas. Il s'agit donc de déterminer cette région d'intérêt inconnue, tout en effectuant le recalage des deux images. Pour cela, on cherche un recalage ϕ qui fait correspondre à la région d'intérêt inconnue Ω_0 la transportée $\phi(\Omega_1)$ de la région d'intérêt connue Ω_1 par ϕ. On définit un espace $\mathcal{W}_3$ composé d'application régulières bijectives de $\overline{\Omega_1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Le problème inverse consiste alors à [20, 22, 25]

Problème 2.2. *trouver un élément u de $\mathcal{W}_3$ qui minimise l'énergie*

$$J_3(u) = \frac{1}{2}\, R_{\Omega_1}(u) + \frac{\gamma_1}{2} S_{\Omega_1}(I^0_\phi, I^1) - \gamma_2 \int_{\Omega_1} S((I^0_\phi(x))^2) \det(\nabla\phi)\, dx, \qquad (2.3)$$

avec des conditions aux bords libres sur $\partial\Omega_1$. Dans cette énergie, $\det(\nabla\phi)$ *est le Jacobien de l'application ϕ et les paramètres de pondération γ_1 et γ_2 sont dans $\mathbb{R}^+$.*

Les deux premiers termes de l'énergie J_3 correspondent aux termes de régularité et de similarité des modèles (1.1) et (2.1). Cependant, l'énergie a un terme supplémentaire qui dépend des niveaux de gris de l'image I^0 et permet de segmenter la région d'intérêt de cette image. Pour expliquer la définition de ce terme, on peut tout d'abord vérifier que

$$\int_{\Omega_1} S((I^0_\phi(x))^2) \det(\nabla\phi)\, dx = \int_{\Omega} S((I^0(x))^2) dx - \int_{\Omega - \phi(\Omega_1)} S((I^0(x))^2) dx. \qquad (2.4)$$

La partie droite de cette égalité comporte un premier terme qui ne dépend pas de la déformation ϕ et ne joue donc aucun rôle dans le problème de minimisation. Quant au second terme de cette même partie, il est défini sur la région $\Omega - \phi(\Omega_1)$. Pour assurer que la région transportée $\phi(\Omega_1)$ de Ω_1 par ϕ corresponde à la région d'intérêt inconnue Ω_0, on veut faire en sorte que la région $\Omega - \phi(\Omega_1)$ soit exclusivement située dans le fond de l'image I^0. Pour inciter à cela, on définit une fonction S qui aura des valeurs faibles lorsque les niveaux de gris de I^0 sont propres au fond de l'image et élevés lorsque cela n'est pas le cas.

Par exemple, supposons qu'il existe un seuil η qui permet de différencier les niveaux de gris du fond de I^0 de ceux de la région d'intérêt Ω_0. On peut alors définir S comme une version régulière de l'application qui vaut 0 sur $]-\infty, \sqrt{\eta}[$ et 1 sur $[\sqrt{\eta}, +\infty[$. D'un point de vue plus général, les valeurs de S au point r de $\mathbb{R}$ peuvent s'interpréter comme la probabilité conditionnelle d'un pixel x d'être situé sur le fond sachant que $(I^0(x))^2 = r$. Dans [25], nous avons construit S à partir d'une estimation empirique de ces probabilités ; la figure 2.3 donne l'allure typique de ces estimations.

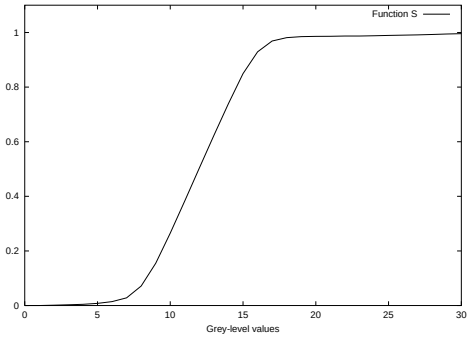


FIG. 2.3 – Allure typique des estimations de la fonction S.

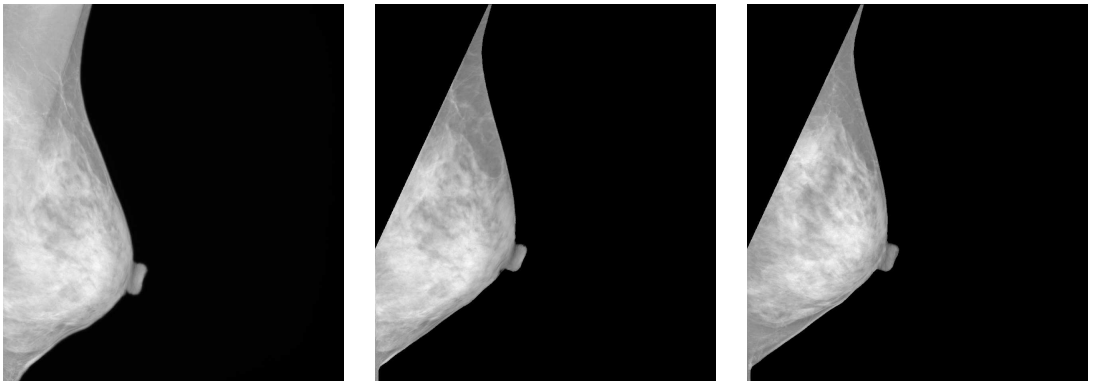
2.4 Evaluations

2.4.1 Effet de la compression

Avant de parler d'évaluation, je présente une illustration des techniques de recalage décrites dans ce chapitre. La figure 2.4 montre un exemple d'application du modèle de recalage avec frontières libres sur une paire temporelle de mammographies. Le modèle de recalage permet de segmenter précisément le domaine du sein dans l'image source à partir de la segmentation préalable de l'image cible. En combinant contraintes iconique et géométrique, il permet à la fois de bien aligner les contours des seins et de réduire les différences entre les images à l'intérieur du sein.

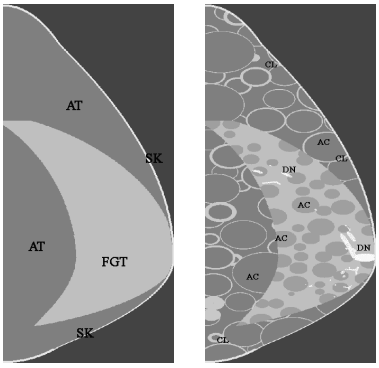
Pour l'évaluation, nous avons travaillé sur des simulations de mammographies de seins soumis à différents degrés de compression. La technique de simulation est fondée sur un modèle 3D anthropomorphique et déformable du sein combiné à un modèle d'acquisition de l'image radiographique [6, 2, 26].

Le modèle de sein (sans compression) se compose d'une grande région ellipsoïdale qui délimite le sein. Cette région comprend une plus petite région ellipsoïdale dans laquelle les tissus sont à prédominance fibro-glandulaire (FGT) et en dehors de laquelle ils sont à prédominance adipeuse. Ces régions, qui sont représentées sur la figure 2.5(a) sont à grande échelle. Comme l'indique la figure 2.5(b), ces régions sont composées de petites structures telles que la peau, les ligaments de Cooper, les compartiments adipeux et des éléments du réseau lactaire. La compression du modèle



(a) (b) (c)

FIG. 2.4 – Recalage d'une paire temporelle de mammographies par le modèle à frontières libres. (a) image source, (b) image source déformée et segmentée, (c) image cible.

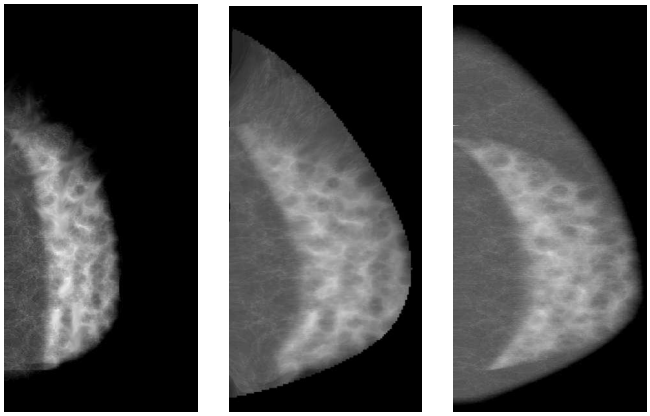


(a) (b)

FIG. 2.5 – Une coupe du modèle de sein. (a) Structures à grande échelle : tissus adipeux (AT) et tissus fibro-glandulaires (FGT), (b) structures à moyenne échelle : compartiments adipeux (AC), ligaments de Cooper (CL) et segments du réseau lactaire (DN).

de sein est simulée à l'aide d'un modèle de déformation élastique par éléments finis, dont les paramètres sont fixés en utilisant les valeurs mesurées expérimentalement et référencées dans la littérature [26]. L'acquisition de l'image radiologique est simulée à partir un modèle simplifié d'acquisition radiographiques à spectre mono-énergétique, à faisceaux de rayons X parallèles et sans dispersion des rayons X [6]. La figure 2.6 montre un exemple synthétique de projections d'un même sein avec différents degrés de compression, ainsi que le résultat du recalage des images.

Nous avons construit onze modèles de sein, en faisant varier les tailles moyennes des compartiments adipeux dans les régions adipeuses et fibro-glandulaires. Pour chacun de ces modèles, nous avons obtenu les mammographies simulées avec quatre différents degrés de compression (5, 6, 7 et 8 cm). Nous avons appliqué la technique de recalage à toutes les paires de mammographies de chaque modèle. Nous avons évalué l'erreur de déplacement sur un ensemble de points identifiés sur la frontière entre région adipeuse et fibro-glandulaire, sur les centres des compartiments adipeux



(a) (b) (c)

FIG. 2.6 – Exemples de mammographies simulées à partir d'un même modèle de sein soumis à différents degrés de compression. Les images (a) et (c) sont les mammographies obtenues avec une compression de 8 cm et 5 cm, respectivement. L'image (b) est le résultat du recalage de l'image (a) sur l'image (c).

de la région adipeuse et sur ceux de la région fibro-glandulaire. Les résultats sont présentés dans la table 2.1.

Les erreurs sont importantes avant recalage, même lorsque les différences de compression sont faibles. Pour une différence de compression de 1 cm, l'erreur moyenne se situe entre 5.2-5.8 mm sur les compartiments adipeux de la région fibro-glandulaire et est d'environ 3.1 mm sur ceux de la région adipeuse. La phase d'initialisation du recalage, qui ne tient compte que de contraintes géométriques, permet de réduire significativement cette erreur initiale. Ceci montre l'intérêt des contraintes géométriques dans le modèle de recalage. Les erreurs après le recalage complet sont faibles et varient peu en fonction de la différence de compression entre les seins observés. Sur la frontière des tissus adipeux et fibro-glandulaire cette erreur se situe entre 1.57 et 1.76 mm, tandis que celles sur les compartiments adipeux est entre 1.46 et 1.54 mm. Pour une différence de compression positive, l'erreur moyenne sur tous les points est de 1.57 mm. Elle est de 1.82 mm si l'on considère aussi les différences négatives. Ceci indique une asymétrie dans la performance de la technique de recalage : on recale mieux lorsque l'image source déformée est celle du sein le moins compressé.

2.4.2 Effet du positionnement et de la dose de radiation

Dans cette partie, je présente des expériences sur des images radiologiques de seins réels ayant été acquises à l'Hôpital de l'Université de Pennsylvanie avec un appareil mammographique (Senographe 2000D, General Electric, Milwaukee, WI) réglé à une résolution de 100 μ^2/pixel. Pour l'acquisition de ces images, l'appareil a été modifié de manière à ce que la position du tube d'émission des rayons X puisse

Points de la frontière entre tissus adipeux et fibro-glandulaires						
DC	-1 cm	1 cm	-2 cm	2 cm	-3 cm	3 cm
AR	5.23±3.60	5.23±3.60	9.68±6.52	9.68±6.52	14.06±9.49	14.06±9.49
AI	1.89±1.67	1.75±1.54	2.38±2.05	2.16±1.82	3.29±2.73	2.80±2.24
RC	1.77±1.51	1.57±1.34	2.08±1.79	1.62±1.38	2.66±2.23	1.76±1.45
Centres des compartiments adipeux de la région fibro-glandulaire						
DC	-1 cm	1 cm	-2 cm	2 cm	-3 cm	3 cm
AR	5.79±3.30	5.79±3.30	11.19±5.27	11.19±5.27	16.62±7.15	16.62±7.15
AI	1.81±1.60	1.64±1.42	2.17±1.73	2.07±1.58	2.84±2.27	2.96±2.05
RC	1.71±1.51	1.48±1.31	1.93±1.56	1.46±1.18	2.32±1.97	1.54±1.29
Centres des compartiments adipeux de la région adipeuse						
DC	-1 cm	1 cm	-2 cm	2 cm	-3 cm	3 cm
AR	3.11±2.70	3.11±2.70	6.15±5.10	6.15±5.10	9.35±7.56	9.35±7.56
AI	0.69±0.84	0.83±0.84	1.24±1.50	1.66±1.40	1.98±2.20	2.78±1.93
RC	0.78±1.03	0.77±1.02	1.46±1.70	1.30±1.55	2.49±2.62	2.01±2.11
Tous les points						
DC	-1 cm	1 cm	-2 cm	2 cm	-3 cm	3 cm
AR	4.92 ± 3.50	4.92 ± 3.50	9.29 ± 6.24	9.29 ± 6.24	13.65 ± 9.01	13.65 ± 9.01
AI	1.63 ± 1.59	1.54 ± 1.45	2.11 ± 1.94	2.04 ± 1.71	2.94 ± 2.59	2.83 ± 2.15
RC	1.56 ± 1.48	1.39 ± 1.31	1.93 ± 1.74	1.52 ± 1.38	2.56 ± 2.27	1.77 ± 1.58
RA	2.27±2.12	2.27±2.12	3.89±3.75	3.89±3.75	5.78±5.17	5.78±5.17

DC=différence de compression AR=avant recalage AI=après initialisation
RC=Recalage Complet RA=Recalage Affine

TAB. 2.1 – Erreurs de déplacement (moyenne et écart-type) exprimées en mm, calculées à différentes étape du recalage non-rigide (avant recalage, après initialisation, après recalage) et après application d'un recalage affine. La différence de compression entre les images recalées est défini comme la différence entre l'épaisseur du sein de l'image source déformé I^0 et celle du sein de l'image cible I^1.

varier dans un plan perpendiculaire au détecteur et être placé dans 9 positions différentes espacées d'un angle de 6.25 degrés ; voir la figure 2.7. Pour chaque sein, on fait l'acquisition d'une mammographie classique en position médio-latérale et de 9 autres projections radiographiques correspondant aux différentes localisations du tube d'émission. Un exemple d'acquisition est montré sur la figure 2.8. La dose totale de radiation utilisée pour acquérir les 9 projections est égale à celle employée pour la mammographie. Autrement dit, la dose de radiation utilisée pour acquérir une projection est 9 fois plus faible que celle de la mammographie. L'angle utilisé pour acquérir la mammographie en position médio-latérale correspond à peu près à celui de la projection central ($K = 5$). L'acquisition des projections est faite le même jour que celle de la mammographie, mais le sein est moins compressé pour les projections qu'il ne l'est pour la mammographie. Entre l'acquisition de la mammographie et des projections, il y a donc des variations de l'angle de projection (position du tube d'émission), du degré de compression du sein et de la dose de radiation.

Pour les expériences, j'ai disposé d'un jeu d'images (mammographies et projections) de 11 seins provenant de 7 patients différents. J'ai appliqué la technique pour recaler la mammographie et chacune des projections de chaque sein. Deux exemples de recalage sont montrés sur la figure 2.9.

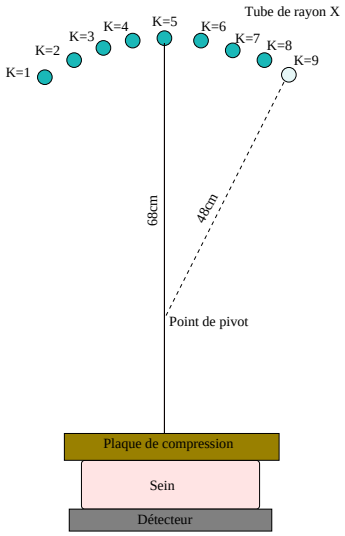


FIG. 2.7 – Systèmes d'acquisition radiologique modifié pour faire varier l'angle du tube d'émission des rayons X (principe d'acquisition à la base de la tomosynthèse du sein).

Pour un angle de projection donné K, j'ai calculé la moyenne sur tous les cas des différences quadratiques (MDQ) entre la mammographie et la Kième projection, avant et après recalage. Ces résultats sont montrés sur la figure 2.10. Le minimum du MDQ est atteint par l'angle de la projection centrale ($K = 5$), qui est l'image la plus proche géométriquement de la mammographie. Lorsque l'on s'écarte de l'angle de projection central (c'est à dire lorsqu'on s'éloigne de la valeur $K = 5$), le MDQ a tendance à croître. Cependant, cette augmentation n'est pas significative. Les résultats suggèrent que la MDQ après recalage a relativement peu de liens avec les différences avant recalage, quel que soit l'angle.

2.5 Références du chapitre

[1] J. An, Y. Chen, F. Huang, et al. A variational PDE based level set method for a simultaneous segmentation and non-rigid registration. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, (MICCAI'05)*, volume 3749 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 286–293. Springer, 2005.

[2] P. Bakic, M. Albert, D. Brzakovic, and A. Maidment. Mammogram synthesis using a 3D simulation. II. Evaluation of synthetic mammogram texture. *Medical Physics*, 29 :2140–2149, 2002.

[3] P. Bakic, F. Richard, and A. Maidment. Effect of breast compression on registration of mammograms. In *Proceedings of the seventh International Workshop on Digital Mammography (IWDM'04)*, Durham, NC, USA, june 2004.

[4] P. Bakic, F. Richard, and A. Maidment. 2D-3D registration of X-ray breast image registration. In J. Pluim et al., editors, *Proceedings of the third Workshop*

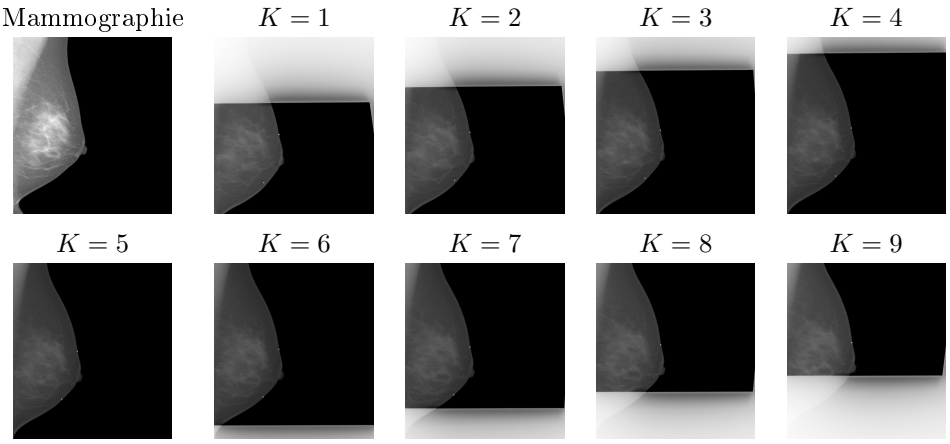


FIG. 2.8 – Projections d'un sein obtenues pour différentes positions K du tube d'émission des rayons X. La mammographie a été acquise dans une position médio-latérale, qui correspond approximativement à la position centrale des projections (image $K = 5$).

on Biomedical Image Registration (WBIR'06), volume 4057 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 84–91, Utrecht, NL, july 2006. Springer.

[5] P Bakic, F. Richard, and A. Maidment. Registration of mammograms and breast tomosynthesis. In S. Astley et al., editors, *Proceedings of the eighth International Workshop on Digital Mammography (IWDM'06)*, volume 4046 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 498–503, Manchester, UK, june 2006. Springer.

[6] P.R. Bakic, M. Albert, D. Brzakovic, and A.D.A. Maidment. Mammogram synthesis using a 3D simulation. I. Breast tissue model and image acquisition simulation. *Medical Physics*, 29 :2131–2139, 2002.

[7] A.K. Carton, J. Li, S. Chen, E. Conant, and A. Maidment. Optimization of contrast-enhanced digital breast tomosynthesis. In *Proceedings of the eighth International Workshop on Digital Mammography (IWDM'06)*, pages 183–189, 2006.

[8] F. Diekmann and U. Bick. Tomosynthesis and contrast-enhanced digital mammography : recent advances in digital mammography. *European Radiology*, 17 :3086–3092, 2007.

[9] Y. Guo, R. Sivaramakrishna, C.-C. Lu, J. Suri, and S. Laxminarayan. Breast image registration techniques : a survey. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 44(1-2) :15–26, 2006.

[10] L. Hadjiiski, H. Chan, B. Sahiner, N. Petrick, and M. Helvie. Automated registration of breast lesions in temporal pairs of mammograms for interval change analysis–local affine transformation for improved localization. *Medical Physics*, 28(6) :1070–1079, 2001.

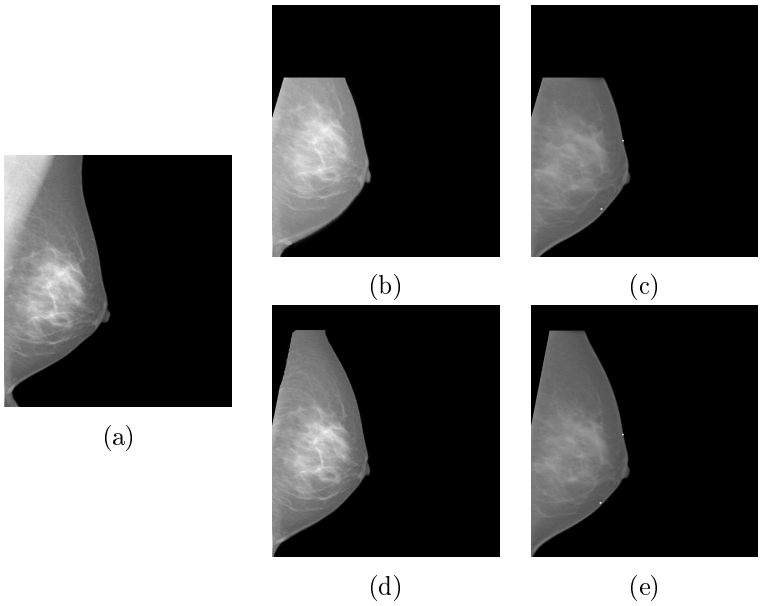


FIG. 2.9 – Recalage d'une mammographie sur les différentes projections d'un même sein. (a) Mammographie en position médio-latérale, mammographies recalées sur les projections à angles (b) $K = 2$ et (d) $K = 5$, projections à angles (c) $K = 2$ et (e) $K = 5$, respectivement.

[11] R. Highnam and J.M. Brady. *Mammographic image analysis.* Kluwer series in Medical Imaging. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht ; Boston, March 1999.

[12] J.H. Hipwell, C. Tanner, W.R. Crum, J.A. Schnabel, and D.J. Hawkes. A new validation method for X-ray mammogram registration algorithms using a projection model of breast X-ray compression. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(9) :1190–1200, 2007.

[13] S. Jasjit and R. Rangayyan, editors. *Recent advances in breast imaging, mammography, and computer-aided diagnosis of breast cancer*, chapter Breast-imaging : a review. SPIE Press, Bellingham WA, USA, 2006.

[14] D.B. Kopans. *Breast imaging (2nd ed.).* Lippincott, Williams & Wilkins, Philadelphia, PA, 1998.

[15] A. Maidment, P. Bakic, N. Ruiter, and F. Richard. Model-based comparison of two breast tissue compression methodologies. In *Proceedings of fourty sixth annual meeting of the American Association of Physicists in Medecine (AAPM'04)*, Pittsburgh, PA, USA, july 2004. (abstract, oral presentation).

[16] K. Marias, C. Behrenbruch, S. Parbhoo, A. Seifalian, and M. Brady. A registration framework for the comparison of mammogram sequences. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 24(6) :782–790, 2005.

[17] F. Richard. *Modèles élastiques d'ajustement d'images et applications aux paires bilatérales et temporelles de mammographies.* PhD thesis, University Paris Descartes, dec. 2000.

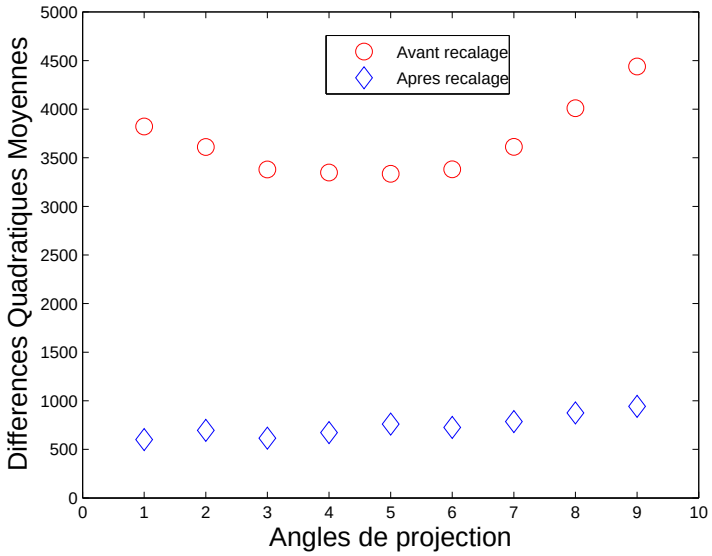


FIG. 2.10 – Evaluation du recalage des mammographies sur les projections à différents angles. Les différences quadratiques moyennes ont été évalué à partir de 11 séries de recalages de mammographie sur des projections tirées de 7 patients différents.

[18] F. Richard. Recalage non-rigide de mammographies simulées à l'aide de modèles synthétiques de seins soumis à différents degrés de compression. In F. Ghorbel et al., editors, *Actes de la troisième conférence Traitement et Analyse de l'Information : Méthodes et Applications (TAIMA'03)*, pages 15–21, Hammamet, Tunisia,, sept 2003. (invited paper).

[19] F. Richard, P. Bakic, and A. Maidment. Non-rigid registration of mammograms obtained with variable breast compression : A phantom study. In J. Gee et al., editors, *Proceedings of the second Workshop on Biomedical Image Registration (WBIR'03)*, volume 2717 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 281–291, Philadelphia, PA, USA, june 2003. Springer.

[20] F. Richard and L. Cohen. A new image registration technique with free boundary constraints : application to mammography. In A. Heyden et al., editors, *Proceedings of the seventh European Conference on Computer Vision (ECCV'02)*, volume 2353 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 531–545, Copenhagen, Denmark, may 2002. Springer. .

[21] F. Richard and L. Cohen. A non rigid mammogram registration technique with free boundary constraints. In H.-O. Peitgen, editor, *Proceedings of the sixth International Workshop on Digital Mammography (IWDM'02)*, pages 213–217, Bremen, Germany, june 2002. Springer.

[22] F. Richard and L. Cohen. Une nouvelle technique de mise en correspondance d'images avec des contraintes aux bords libres : Applications aux mammographies. In R. Andre-Obrecht et al., editors, *Actes de la treizième Conférence Re-*

connaissance de Forme et Intelligence Articilielle (RFIA'02), volume 3, pages 453–462, Angers, France, jan. 2002.

[23] F. Richard and C. Graffigne. An image-matching model for the registration of temporal or bilateral mammogram pairs. In M. Yaffe et al., editors, *Proceedings of the fifth International Workshop on Digital Mammography (IWDM'00)*, pages 756–762, Toronto, Canada, june 2000. Medical Physics Publishing.

[24] F.JP Richard, P. Bakic, and A. Maidment. Mammogram registration : a phantom-based evaluation of mammographic compression effects. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(1) :188–197, 2006.

[25] F.JP Richard and L. Cohen. A new image registration technique with free boundary constraints : application to mammography. *Computer Vision and Image Understanding*, 89(2) :166–196, 2003.

[26] N.V. Ruiter, T.O. Müller, R. Stotzka, H. Gemmeke, J.R. Reichenbach, and W.A. Kaiser. Finite element simulation of the breast's deformation during mammography to generate a deformation model for registration. In *Bildverarbeitung für die Medizin 2003*, pages 86 – 90, 2003.

[27] M. Sallam and K. Bowyer. Registration and difference analysis of corresponding mammogram images. *Medical Image Analysis*, 3(2) :103–118, 1999.

[28] J. Semmlow, A. Shadagopappan, L. Ackerman, et al. A fully automated system for screening Xeromammograms. *Computers and Biomedical Research*, 13 :350–362, 1980.

[29] F.A. Tavassoli. *Pathology of the breast (2nd ed.)*. Appleton & Lange, Stanford, CT, 1999.

[30] S. Van Engeland, P. Snoeren, J. Hendriks, and N. Karssemeijer. A comparison of methods for mammogram registration. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22 :1436–1444, 2003.

[31] B. Vemuri, Y. Chen, and Z. Wang. Registration assisted image smoothing and segmentation. In A. Heyden et al., editor, *Proc. of the European Conference on Computer Vision (ECCV'02)*, volume 3, pages 546–559, Copenhaguen, Denmark, may 2002. Springer.

[32] F. Wang, B. Vemuri, and S. Eisenschenk. Joint registration and segmentation from brain MRI. *Academic Radiology*, 13(9) :1104–1111, 2006.

[33] A. Yezzi, L. Zöllei, and T. Kapur. A variational framework for joint segmentation and registration. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis (MMBIA'01)*, pages 44–51, Kauai, Hawaii, 2001.

Chapitre 3

Recalage bi-classifiant

3.1 Introduction

3.1.1 Points aberrants

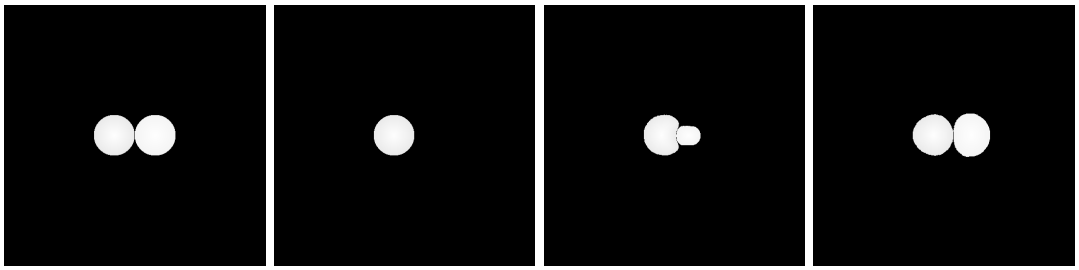
En rendant compte d'une grande variété de relations de dépendance entre les niveaux de gris des images (relations "identique", affines, fonctionnelles, statistiques,...), les critères de similarité évoqués dans la section 1.3 du chapitre 1 permettent de traiter de nombreuses situations. Toutefois, ces critères sont globaux, au sens où ils sont définis de la même manière pour tous les pixels des images. Ils ne permettent donc pas de traiter les situations où la relation de dépendance entre niveaux de gris n'est pas spatialement homogène.

Il existe plusieurs manières d'appréhender ce problème. L'une d'entre elles consiste à décrire les variations d'une image à l'autre par deux types de transformations : une déformation qui rend compte des variations géométriques locales et une transformation iconique qui rend compte des variations locales d'intensité. Dans cette optique, on construit alors des modèles qui permettent de conjuguer un recalage géométrique classique et une transformation iconique des images [7]. Ces modèles, que l'on appelle communément modèles de métamorphose, ont cependant un grand degré de liberté. Par le biais d'une transformation iconique, il est théoriquement possible de corriger toutes les variations entre les images, y compris les variations géométriques qui doivent être corrigées par déformation. La difficulté de l'utilisation d'un modèle de métamorphose est donc de faire la part entre ce qui relève de la transformation iconique et ce qui est du ressort de la déformation géométrique.

Dans [6], j'ai adopté un autre point de vue sur le problème : on considère qu'il y a une relation générale qui régit la dépendance entre les niveaux de gris des images, mais que celle-ci peut ne pas être respectée en certains points appelés points aberrants. Suivant ce principe, j'ai proposé un modèle de recalage robuste dans lequel la contrainte iconique ne prend pas en compte les points considérés comme aberrants.

Contrairement aux modèles de métamorphose, ce modèle n'autorise pas la modification des niveaux de gris de l'image. Il se contente de recaler les images sans chercher à corriger toutes les variations iconiques locales. De ce fait, il ne peut pas corriger des variations géométriques par transformation iconique. Par ailleurs, il comporte des contraintes qui permettent de limiter le nombre de points aberrants et de réduire ainsi le degré de liberté du modèle.

Ce modèle de recalage robuste sera présenté dans la section 3.2. Son application à un exemple synthétique est présentée sur la figure 3.1.



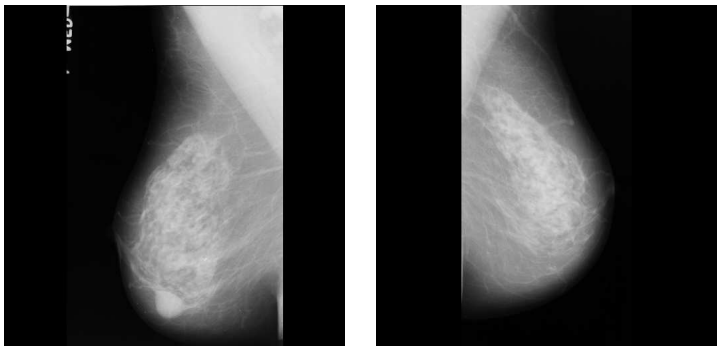
(a) (b) (c) (d)

FIG. 3.1 – Exemple d'application du modèle de recalage robuste. (a) image I^0, (b) image cible I^1. Déformation de l'image I^0 sur l'image cible par recalages (c) classique et (d) robuste. L'image I^0 est composée de deux disques clairs ayant la même taille mais des niveaux de gris légèrement différents. L'image cible I^1 a été formée à partir de l'image I^0 en déplaçant le disque gauche vers la droite et en supprimant le disque droit. Le modèle de recalage classique tend à fusionner les deux disques de I^0 pour n'en former qu'un, tandis que le modèle robuste préserve la séparation entre les deux disques, en faisant correspondre un des disques de I^0 à celui de I^1 et en laissant l'autre inchangé. Le disque inchangé est formé d'un ensemble de points considérés comme aberrants par le modèle robuste.

3.1.2 Recalage et classification

En introduisant la notion de points aberrants, le modèle de recalage robuste sous-tend que les images comportent deux classes de pixels : ceux qui sont conformes à un critère décrivant une dépendance normale des niveaux de gris (points normaux) et ceux qui ne le sont pas (points aberrants). Dans ce modèle, les pixels aberrants sont définis par rapport au modèle de dépendance propre à la classe des pixels normaux. Il est cependant possible de définir des modèles de recalage qui comportent plusieurs classes de pixels, chacune étant caractérisée par des relations spécifiques de dépendance entre niveaux de gris.

La thèse de doctorat de M. Hachama [1], que j'ai co-encadrée entre 2005 et 2008, a eu pour thème principal l'intégration d'informations de classes dans les modèles de recalage. En utilisant des lois de mélange, on a tout d'abord construit un modèle de recalage où les pixels sont répartis en deux classes dont les relations de niveaux de gris sont différentes. Selon le contexte, ces deux classes peuvent être fixées au



(a) (b)

FIG. 3.2 – Comparaison d'images mammaires avec présence de lésions. Les images (a) et (b) forment un couple bilatéral de mammographies. L'image (a) comporte une lésion unilatérale (opacité en bas du sein).

préalable ou considérées comme inconnues [1, 2, 3, 4, 5]. Dans le cas où elles sont inconnues, la technique de résolution permet à la fois de classer les pixels, d'estimer les dépendances de niveau de gris sur chaque classe et de recaler les images. A l'instar des modèles combinant recalage et segmentation, ce modèle original permet donc de réaliser de manière simultanée le recalage et la classification des images.

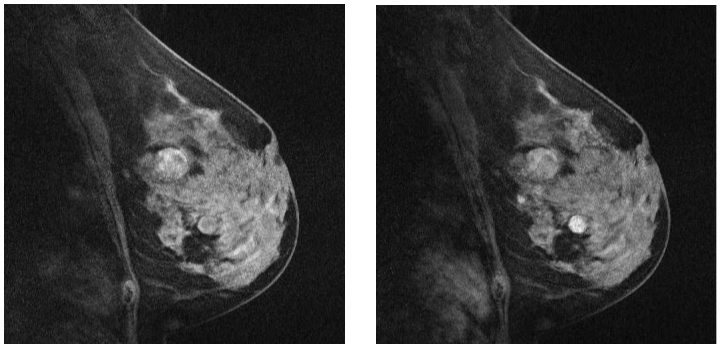
Ce modèle, que je présenterai dans la section 3.3, sera appelé modèle de recalage bi-classifiant.

3.1.3 Applications en imagerie du sein

Les modèles évoqués plus haut ont pour vocation de gérer des situations où les relations entre les niveaux de gris des images varient spatialement. Ce type de situation se produit couramment en imagerie médicale lorsque les images comportent des pathologies. Par exemple, sur la figure 3.2, les mammographies des seins droit et gauche comportent une lésion unilatérale. En dehors de l'emplacement de la lésion, les niveaux de gris des deux images, observées à une échelle grossière, sont approximativement identiques. Au niveau de la lésion dans l'image (a), cette relation d'identité n'est plus valable. Les paires successives de mammographies fournissent des exemples analogues lorsque des lésions apparaissent au cours du temps.

La figure 3.3 donne une autre illustration. Cette fois-ci, il s'agit d'images acquises par résonance magnétique avant et après injection d'un agent de contraste. L'agent de contraste révèle une structure pathologique qui est faiblement visible avant injection. Contrairement aux exemples précédents, il n'y a pas, ici, de différence de structures entre les deux images. L'agent de contraste a simplement pour effet de modifier les niveaux de gris de l'image avant injection de manière différenciée selon que le tissu observé est normal ou pathologique.

Dans la mesure où ils prennent en compte différentes relations de niveaux de gris



(a) (b)

FIG. 3.3 – Comparaison d'images mammaires avec présence de lésions. Les images (a) et (b) sont les coupes IRM d'un même sein acquises respectivement avant et après injection d'un agent de contraste. L'image (b) comprend une lésion qui est rehaussée par l'agent de contraste.

entre les images, les modèles de recalage robuste et bi-classifiant sont bien adaptés pour traiter les situations précédentes. En différenciant les points normaux de points anormaux, ils sont à même de corriger les variations normales des images tout en préservant leurs variations anormales.

Pour les modèles de recalage classifiants, nous avons effectué une validation sur des images du sein [1], qui est présentée dans la section 3.4.2 [1, 2, 3, 4, 5].

3.2 Modèle robuste

Je reprends ici les notations introduites dans les sections 1.1 et 1.2 du chapitre 1.

Pour définir le modèle, on introduit une nouvelle inconnue p qui associe les points du domaine Ω à des valeurs de l'ensemble $[0, 1]$ et rend compte de la probabilité qu'un point x soit aberrant. On définit alors un nouveau problème inverse, qui consiste à

Problème 3.1. *trouver un élément* $\phi = \mathrm{Id} + u$ *de* $\mathcal{W}_1$ *et une application* p *qui minimise l'énergie*

$$J_4(u,p) = \frac{1}{2}R_\Omega(u) + \frac{1}{2\tau}\int_\Omega p^2(x)dx + \frac{1}{2N_g^2}\int_\Omega (1-p(x))(I^0_\phi(x) - I^1(x))^2 dx \quad (3.1)$$

Dans cette énergie, N_g est le niveau de gris maximal des images ($N_g = 255$ pour des images codées sur un octet) et le paramètre τ est dans $]0, 2]$. Comme dans le problème (1.1), le premier terme joue un rôle de régularisation. Nous avons utilisé le terme de régularisation élastique défini par les équations (1.4) à (1.7). Le troisième terme se rapporte au critère usuel des sommes des différences quadratiques défini par l'équation (1.3). Le critère a cependant été modifié de manière à pondérer les différences quadratiques par le degré d'inconsistance $(1 - p(x))$ de chaque pixel x. Le second terme restreint la quantité de points aberrants dans l'image. Lorsque τ

est proche de 0, cette quantité décroît. A la limite, la solution p vaut toujours 0 et le problème de minimisation se ramène à celui du modèle (1.1).

Lorsque $u = \phi - \mathrm{Id}$ est fixé, le problème de minimisation (3.1) est convexe et admet un minimum global que l'on peut expliciter à partir des équation d'Euler :

$$\hat{p} = \tfrac{\tau}{2N_g^2}(I_\phi^0 - I^1)^2. \tag{3.2}$$

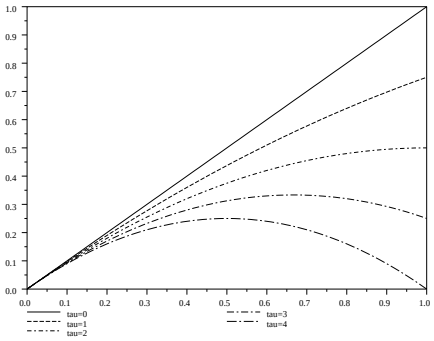


FIG. 3.4 – Graphes des applications h_τ du terme de similarité pour différentes valeurs de τ.

Ainsi, en remplaçant p par $\hat{p}$ dans l'équation (3.1), on obtient la formulation d'un problème de minimisation qui est équivalent au précédent et présente l'avantage d'être exclusivement exprimé par rapport aux déplacements u. Il s'agit de

Problème 3.2. *trouver une déformation $\phi = \mathrm{Id} + u$ de $\mathcal{W}$ qui minimise*

$$\hat{J}_4(u) = \frac{1}{2}A_\Omega(u,u) + \frac{1}{2}\int_\Omega h_\tau\left(\frac{(I_\phi^0(x) - I^1(x))^2}{N_g^2}\right)dx, \tag{3.3}$$

où h_τ est l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par

$$\forall\, v \in [0,1],\ h_\tau(v) = v - \tfrac{\tau}{4}v^2. \tag{3.4}$$

Ce nouveau problème de minimisation est du même type que le problème (1.1). Cependant, le terme de similarité de l'énergie est différent des termes classiques. Ce terme est défini à partir d'une fonction h_τ, dont le graphe est présenté sur la figure 3.4 pour différentes valeurs de τ. Lorsque $\tau = 0$, h_τ est l'identité et le critère de similarité est alors la somme des différences quadratiques. Lorsque τ croît, le graphe de h_τ se courbe dans la direction de 0, ce qui a pour effet d'atténuer de plus en plus l'importance des fortes différences dans le calcul de la contrainte iconique de recalage.

3.3 Modèles bi-classifiants

Pour présenter les modèles de recalage bi-classifiants et en faciliter l'interprétation, je me place dans le cadre bayesien introduit dans la section 1.5 du chapitre 1 et j'en reprends les notations.

On suppose que les pixels de la grille Ω_d sont répartis en deux classes que l'on désigne par les étiquettes 0 et 1. On considère alors un champ d'étiquettes aléatoires E, appelée carte des classes, indexé par les pixels x de Ω_d

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est dans la classe 0,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En outre, on associe à E la carte L des probabilités d'appartenance à la classe 1 de chaque pixel $x \in \Omega_d$

$$L(x) = P(E(x) = 1).$$

On décrit ensuite les relations entre les niveaux de gris des images I^0 et I^1 en prenant en compte l'information de classe. Pour tout x dans Ω_d, on définit la probabilité locale $P(I^1|\phi; I^0, x)$ comme une loi de mélange

$$P(I^1|\phi, L; I^0, x) = P_0(I^1(x); I^0_\phi(x))\,(1 - L(x)) + P_1(I^1(x); I^0_\phi(x))\,L(x), \tag{3.5}$$

où, pour $k = 0, 1$, $P_k(I^1(x); I^0_\phi(x)) = P(I^1|x, \phi, E(x) = k; I^0)$ désigne la loi de la variable aléatoire $I^1(x)$ connaissant $I^0_\phi(x)$ et sachant que x appartient à la classe k. Le choix d'un modèle de loi sur une classe dépend de l'application. Dans le contexte particulier de l'imagerie mammaire, plusieurs modèles de lois peuvent permettre de faire la distinction entre tissus normaux (classe 0) et lésions (classe 1) [1]. Par exemple, on peut supposer que les différences de niveaux de gris entre I^0 et I^1 suivent une loi gaussienne sur les deux classes. On a alors

$$P_k(I^1(x); I^0_\phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_k}(I^0_\phi(x) - I^1(x) - \mu_k)^2\right), \tag{3.6}$$

où, pour $k = 0, 1$, μ_k et σ_k^2 sont les moyennes des lois gaussiennes sur chaque classe.

Ayant défini la loi $P(I^1|\phi, L; I^0, x)$ pour tout x de Ω_d, on fait une hypothèse classique d'indépendance conditionnelle des lois jointes sur les pixels x de Ω_d. On obtient alors la probabilité totale

$$P\left(I^1|\phi, L; I^0\right) = \Pi_{x\in\Omega_d}\left\{P_0(I^1(x); I^0_\phi(x))\,(1 - L(x)) + P_1(I^1(x); I^0_\phi(x))\,L(x)\right\}, \tag{3.7}$$

qui caractérise les relations de niveaux de gris des images I^0 et I^1 sur l'ensemble des points de la grille Ω_d.

Le modèle de mélange précédent permet de concevoir des relations entre les niveaux de gris des images qui dépendent de classes. Il est également possible d'introduire des contraintes spatiales sur les classes des pixels x de Ω_d par le biais de la loi *a priori* $P(\{L(x), x \in \Omega_d\})$ sur la carte des classes. Par exemple, on peut définir cette loi à partir d'un modèle de Bernouilli [1]

$$P(L) = \frac{1}{Z} \exp\left(\alpha_1 \sum_{\{(x,y)\in\Omega_d^2; x\sim y\}} L(x)L(y) - \alpha_2 \sum_{x\in\Omega_d} L(x)\right), \tag{3.8}$$

où les paramètres α_1 et α_2 sont dans $\mathbb{R}^+$ et $x \sim y$ désigne deux pixels x et y voisins selon une relation au 4 ou 8 plus proches voisins.

Par ailleurs, il est théoriquement possible de faire dépendre le champ des déformations des classes en définissant correctement la probabilité $P(\Phi|L)$. Cependant, jusqu'à maintenant, on n'a traité que le cas où Φ et L sont indépendants et donc $P(\Phi|L) = P(\Phi)$.

Dans ce cadre, on cherche à maximiser la probabilité *a posteriori* $P((\Phi, L)|I^1; I^0)$ connaissant les observations I^0 et I^1. En utilisant des formules de Bayes, on obtient

$$P(\Phi, L|I^1; I^0) \propto P(I^1|L, \Phi; I^0)\, P(\phi|L)\, P(L).$$

Pour la résolution de ce problème, M. Hachama s'est ramené formellement à un cadre variationnel en considérant le problème de minimisation de $-\log(P(\Phi, L)|I^1; I^0)$ [1]. L'énergie à minimiser a la forme

$$J_5(\phi, L) = S(I^0, I^1, \phi, L) + R_\phi(\phi) + R_L(L). \tag{3.9}$$

Cette énergie comprend un terme de similarité $S(I^0, I^1, \phi, L)$ qui dépend de la carte de probabilité L, ainsi que deux termes de régularité $R_\phi(\phi)$ et $R_L(L)$ exprimés respectivement sur les déformations ϕ et sur la carte de probabilités L.

Pour la minimisation, nous avons effectué des descentes de gradient sur (ϕ, L), en traitant les cas où la carte L est fixée ou inconnue [1]. Les algorithmes de résolution permettent également d'estimer les paramètres intervenant dans la définition du critère de similarité S.

En permettant le calcul de la carte de probabilité L, ce type d'approche permet de réaliser simultanément le recalage des images et la classification des pixels de l'image.

3.4 Evaluation

3.4.1 Illustration

La figure 3.5 donne une illustration du recalage de mammographies en présence d'une lésion. La lésion en question se situe en haut du sein dans l'image cible. Deux modèles de recalage sont comparés : un modèle classique avec une somme de différences quadratiques comme critère de similarité et le modèle bi-classifiant. Ces deux modèles de recalage corrigent de manière à peu près équivalente les différences normales entre les deux images. Cependant, le modèle classique a pour défaut de réduire les différences produites par la lésion, en déplaçant les tissus les plus clairs de l'image source pour les positionner à l'endroit de la lésion dans l'image cible. Par contre, faisant la distinction entre la lésion et le reste des tissus, le modèle bi-classifiant corrige peu les différences entre les images dues à la lésion. De ce fait,

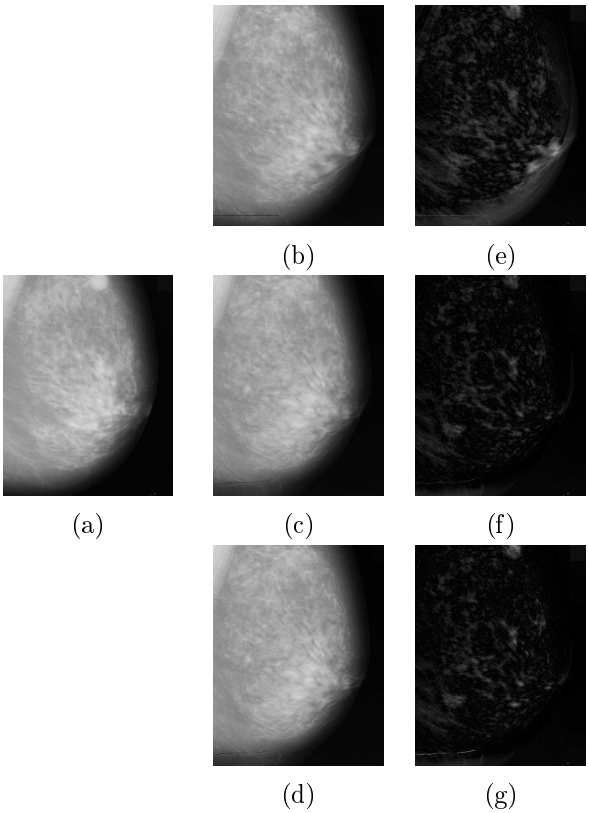


FIG. 3.5 – Application du modèle de recalage bi-classifiant à un couple bilatéral de mammographies comportant une lésion. (a) image cible, (b) image source, image source déformée par recalages (c) classique et (d) bi-classifiant. Différences entre l'image cible et l'image source (e) non déformée et déformée par recalages (f) classique et (g) bi-classifiant.

la lésion est davantage rehaussée dans les différences obtenues après recalage bi-classifiant qu'elle ne l'est dans celles produites après recalage classique.

3.4.2 Effet de la présence de lésions

Je présente ici une validation qui a pour objectif de mettre évidence les propriétés du modèle bi-classifiant lorsque les mammographies comportent des lésions [1].

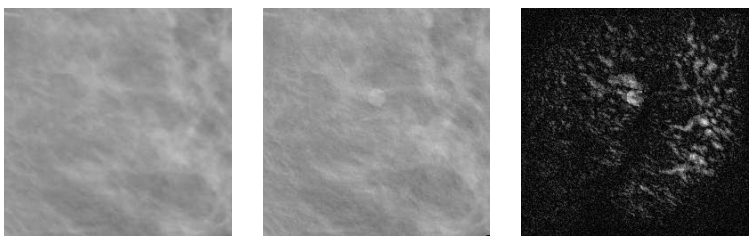


FIG. 3.6 – Exemple de cas simulé. (a) image source, (b) image cible (déformation aléatoire de l'image source avec ajout d'une lésion), (c) différences.

Pour cette validation, nous avons simulé des déformations apparentes 2D que

nous avons appliquées à des images réelles, obtenant ainsi des couples synthétiques de mammographies avec vérité de terrain (voir l'exemple sur la figure 3.6) : une imagette de taille 255×255 extraite d'une mammographie est choisie comme image source I^0. L'image source est alors déformée de manière aléatoire pour former une image cible I^1, en échantillonnant selon une loi *a priori* $P(\Phi)$. Une lésion circulaire est ensuite ajoutée à l'image cible, en faisant varier son centre c, son rayon r et son contraste μ_1. Un bruit blanc gaussien est ajouté à l'image cible. Ce bruit est centré et de variance σ_1^2 sur la lésion et de moyenne μ_0 et de variance σ_0^2 en dehors de la lésion. D'après la section 3.3, les lois de probabilité décrivant la dépendance locale entre les niveaux de gris de I^1 et ceux de I^0 sur les classes 0 (tissus normaux) et 1 (lésions) sont donc de la forme décrite par l'équation (3.6). De plus, la carte des classes L vaut 1 au point x si $|x - c| < r$ et 0 sinon.

Avec ces simulations, nous avons construit une base de données comprenant 432 cas avec lésion et 144 cas sans lésion, avec des valeurs de paramètres variables (taille de la lésion $r \in \{0, 5, 10, 15\}$, contraste de la lésion $\mu_1 \in \{10, 15, 20\}$, moyenne des normes des déplacements $Moy_d \in \{2, 4, 6\}$) et des paramètres fixes ($\mu_0 = 0$, $\sigma_0 = 3.0$ et $\sigma_1 = 3.0$). A chaque couple d'images, nous avons appliqué un modèle de recalage classique avec critère de sommes de différences quadratiques et un modèle bi-classifiant comprenant un terme de régularité de Bernouilli ($\alpha_1 = 7$ et $\alpha_2 = -0.7$) et un terme de similarité défini par un mélange de lois gaussiennes avec μ_1 et σ_1 (paramètres de la classe lésion) inconnus. Nous avons comparé les deux modèles en utilisant comme critère d'erreur la distance moyenne entre déplacements réels et déplacements estimés. La table 3.1 présente les résultats obtenus.

	classique		bi-classifiant	
	Global	Lésion	Global	Lésion
	0.51 ; 0.69	0.91 ; 2.56	0.47 ; 0.61	0.31 ; 1.28
$R = 5$	0.51 ; 0.66	0.55 ; 1.70	0.45 ; 0.60	0.30 ; 1.04
10	0.52 ; 0.69	0.93 ; 2.56	0.45 ; 0.61	0.36 ; 1.37
15	0.53 ; 0.74	0.90 ; 2.69	0.44 ; 0.63	0.41 ; 1.87
$\mu_1 = 10$	0.46 ; 0.62	0.74 ; 1.72	0.45 ; 0.62	0.50 ; 1.96
15	0.50 ; 0.67	0.95 ; 2.41	0.45 ; 0.61	0.34 ; 1.10
20	0.50 ; 0.70	1.08 ; 2.92	0.45 ; 0.60	0.42 ; 0.91
$Moy_d = 2$	0.53 ; 0.59	0.92 ; 2.13	0.53 ; 0.57	0.39 ; 0.80
4	0.56 ; 0.62	0.89 ; 2.32	0.57 ; 0.61	0.30 ; 1.04
6	0.64 ; 1.64	0.67 ; 3.58	1.31 ; 2.20	0.45 ; 3.91

TAB. 3.1 – Comparaison des résultats de recalage par modèle classique avec critère des sommes de différences quadratiques et modèle bi-classifiant. Les colonnes donnent les intervalles de dispersion de niveau 0.6 de l'erreur de recalage (distance entre déplacements réels et calculés). En plus de l'erreur moyenne globale, nous spécifions l'erreur moyenne commise sur la lésion. Chaque ligne donne les résultats moyens obtenus en fixant un paramètre de simulation et en faisant varier les autres.

Globalement, les deux modèles ont la même précision. Toutefois, le modèle bi-classifiant donne de meilleurs résultats sur les lésions. L'écart de performance entre les deux modèles est d'autant plus important que le rayon et le contraste de la lésion augmentent. Les résultats permettent de conclure que le modèle bi-classifiant apporte une amélioration au recalage lorsque les images présentent des lésions.

3.5 Références du chapitre

[1] M. Hachama. *Modèles de recalage classifiant pour les séquences d'images médicales*. PhD thesis, University Paris Descartes, june 2008.

[2] M. Hachama, A. Desolneux, and F. Richard. Combining registration and abnormality detection in mammography. In J. Pluim et al., editors, *Proceedings of the third Workshop on Biomedical Image Registration (WBIR'06)*, volume 4057 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 178–185, Utrecht, NL, july 2006. Springer.

[3] M. Hachama, A. Desolneux, and F. Richard. A mammogram registration technique dealing with outliers. In *Proceedings of the third International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI'06)*, pages 458–461, Arlington, VA, USA, april 2006. IEEE Computer Society.

[4] M. Hachama, A. Desolneux, and F. Richard. A probabilistic approach for the simultaneous mammogram registration and abnormality detection. In S. Astley et al., editors, *Proceedings of the eighth International Workshop on Digital Mammography (IWDM'06)*, volume 4046 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 205–212, Manchester, UK, june 2006. Springer.

[5] M. Hachama, F. Richard, and A. Desolneux. Combiner le recalage des images et la détection des lésions en mammographies. In *Actes des deuxième Journées d'Études Algéro-Françaises en Imagerie Médicale (JETIM'06)*, Tipaza, Algeria, nov. 2006.

[6] F. Richard. A new approach for the registration of images with inconsistent differences. In J. Kittler et al., editors, *Proceedings of the seventeenth conference on International Conference on Pattern Recognition (ICPR'04)*, volume 4, pages 649–652, Cambridge, UK, august 2004. IEEE Computer Society. .

[7] A. Trouvé and L. Younès. Metamorphoses through Lie group action. *Foundation of Computational Mathematics*, 5(2) :173–198, 2005.

Chapitre 4

Recalage K-classifiant de séquences médicales

4.1 Contexte

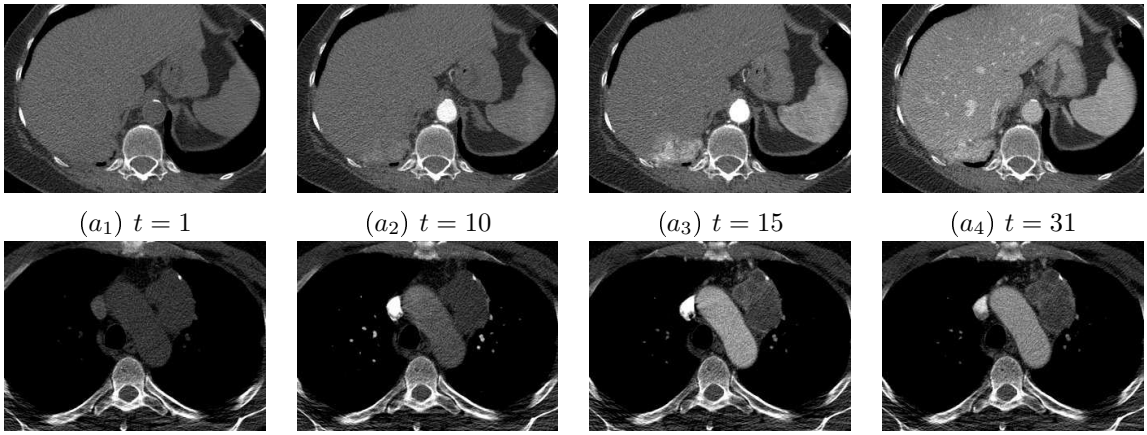
L'utilisation de systèmes dynamiques d'imagerie moléculaire *in vivo* est l'une des tendances fortes des avancées médicales contemporaines. Ces systèmes produisent des séquences d'images 2D ou 3D qui permettent de visualiser l'activité temporelle d'une cible biochimique ou pharmacologique dans les organes vivants. Parmi ces systèmes, on compte notamment

- l'imagerie par tomographie numérique scanner ou par résonance magnétique avec rehaussement de contraste (DCE-CT scans [6] ou DCE-MRI [8]), qui permettent toutes les deux de suivre la diffusion d'un agent de contraste dans les tissus des organes (voir l'illustration sur la figure 4.1),
- la tomographie par émission de positons dynamique (DPET) qui mesurent la diffusion d'un agent radioactif dans les organes.

A partir de ces séquences, on cherche généralement à décrire et analyser l'activité de la molécule cible sur des régions d'intérêt qui correspondent à des structures spatialement homogènes ou temporellement fixes.

Dans ce chapitre, je présente une étude menée sur les séquences DCE-CT scans ou DCE-IRM en collaboration avec l'équipe de C.A. Cuénod de l'Hôpital européen Georges Pompidou.

L'examen des séquences DCE-CT scans ou IRM est basé sur l'appréciation de la vascularisation des tissus observés. Pour se développer, tous les tissus ont besoin de nutriments (comme par exemple l'oxygène) qui leur sont apportés par les vaisseaux sanguins. Le développement d'un tissu cancéreux, qui a lui-même ce type de besoin, s'accompagne de la formation de nouveaux vaisseaux. Ce phénomène important, que l'on appelle angiogénèse, est l'un de ceux que l'on cherche à observer par le biais des séquences. A la différence d'examens d'imagerie qui n'apportent qu'une information



(a_1) $t = 1$ (a_2) $t = 10$ (a_3) $t = 15$ (a_4) $t = 31$

(b_1) $t = 1$ (b_2) $t = 10$ (b_3) $t = 20$ (b_4) $t = 30$

FIG. 4.1 – Images extraites de séquences DCE-CT de l'abdomen (images a_1 à a_4) et du thorax (images b_1 à b_4).

morphologique sur les tissus (par exemple, le CT-scan ou l'IRM), les séquences donnent une information complémentaire sur la prise de contraste des tissus, que l'on nomme rehaussement. La cinétique dynamique du rehaussement, c'est-à-dire la rapidité avec laquelle ce rehaussement apparaît et disparaît, est fondamentale pour différencier les tissus et, en particulier pour distinguer une tumeur maligne d'une tumeur bénigne. L'analyse de cette cinétique pouvant être extrêmement riche, les séquences DCE-CT scans et IRM constitue un outil privilégié pour le diagnostic.

Toutefois, ces séquences sont difficiles à analyser pour plusieurs raisons :

- le bruit et autres limitations du signal, qui sont inhérents au système d'acquisition,
- les mouvements volontaires et involontaires du sujet au cours de l'acquisition,
- la complexité des images et des organes observés.

Ces difficultés sont les principales motivations pour le développement de techniques mathématiques qui puissent faciliter l'interprétation et l'exploitation des séquences.

La nature du bruit dans les séquences dépend fortement du système d'acquisition et du sujet observé. Par exemple, en imagerie DPET du petit animal [5], la résolution spatiale est faible et les sujets ont des structures anatomiques très fines. Ces deux facteurs provoquent des mélanges de structures à l'intérieur d'un même pixel, appelés effets de volume partiel. Dans les séquences DCE-CT scans des organes humains, cet effet est moins fort du fait de la meilleure résolution des images. Cependant, les images étant acquises avec de faibles doses de rayons X, leur rapport signal-à-bruit est médiocre. Du fait de la diversité du bruit, les techniques de débruitage sont variées et spécifiques aux systèmes d'acquisition. Par exemple, pour les séquences DPET, on peut définir un critère statistique sur le bruit pour détecter des régions peu affectées par les effets de volume partiel. On s'appuie alors sur ces régions pour débruiter les courbes temporelles retraçant l'activité locale de la molécule cible [5].

Pour les séquences DCE-CT scans, des courbes temporelles débruitées sont estimées en utilisant un modèle *a priori* de rehaussement de contraste. Ce modèle découle d'hypothèses pharmaco-cinétiques sur la circulation de l'agent de contraste [4, 9] ou d'hypothèses mathématiques sur la forme des courbes [7].

Le mouvement observé dans les séquences se corrige au moyen d'un recalage des images. Toutefois, les méthodes classiques de recalage ne peuvent pas être appliquées aux séquences rehaussées : les courbes temporelles traduisant la cinétique du rehaussement ont un caractère local dont on ne peut rendre compte avec des critères globaux de similarité tels que la somme des différences quadratiques, le rapport ou le coefficient de corrélation, ou encore l'information mutuelle. Pour réaliser le recalage, il est indispensable de disposer d'une information locale sur les courbes temporelles de rehaussement. Ceci dit, ce type d'information peut difficilement s'estimer de manière complète et fiable sans une correction du mouvement. De ce fait, la correction du mouvement et l'estimation des courbes de rehaussement sont deux problèmes interdépendants, qu'il convient de traiter simultanément.

Dans ce chapitre, je décris un algorithme qui permet à la fois de corriger le mouvement dans les séquences et d'estimer les courbes temporelles d'activité de l'agent de contraste [1, 2, 3]. L'architecture de celui-ci rend possible la communication de deux modules, l'un de recalage des images et l'autre d'estimation des courbes de rehaussement. Le module d'estimation repose sur une classification qui permet d'accélérer le procédé et de le rendre plus robuste au mouvement dans la séquence.

La méthode d'estimation construite dans l'algorithme est spécifique aux séquences de DCE-CT scans/IRM. Cependant, l'architecture de l'algorithme est générique. En adaptant le module d'estimation, il est donc possible d'utiliser l'algorithme pour traiter d'autres types de séquences. En collaboration avec R. Maroy du CEA Service hospitalier Frédéric Joliot, nous adaptons actuellement l'algorithme pour le traitement de séquences DTEP du petit animal. Une autre adaptation à l'imagerie cardiaque est également prévue en collaboration avec N. Rougon de l'équipe multimédia de TELECOM & Management SudParis.

4.2 Formulation du problème

Le cadre mathématique est le suivant. On dispose d'une séquence d'images $\{I^j\}_{j=1}^n$ d'un même objet, qui sont définies sur Ω et acquises à n temps successifs $\{t_j\}_{j=1}^n$ d'un intervalle $[0, T]$. A cette séquence, on peut associer un ensemble de courbes temporelles de niveaux de gris $C^y = \{I^j(y)\}_{j=1}^n$ pour y dans Ω. Ces courbes traduisent les dynamiques locales d'apparition et de disparition de rehaussements induits par la présence d'un agent de contraste. Ces courbes de rehaussement ne sont donc généralement pas constantes. En outre, elles varient localement en fonction du type de tissu observé. Enfin, l'observation de ces courbes est dégradée en raison d'un bruit

d'acquisition et des mouvements du sujet.

Le sujet pouvant se déplacer au cours de l'acquisition, les images observées successivement sur un même ensemble de pixels ne renvoient pas nécessairement à la même partie physique du sujet. Il est donc indispensable de réexprimer les coordonnées de toutes les images de manière à ce qu'une même coordonnée renvoie à l'observation d'un même élément physique du sujet, quel que soit le temps considéré. Pour changer les coordonnées d'une image I^j de la séquence, on la compose avec une application ϕ définie sur un domaine de référence fixé Ω_0 et à valeurs dans Ω. On obtient ainsi une image déformée $I^j \circ \phi$ que l'on note I^j_ϕ. On appelle séquence déformée, une série d'images $\{I^j_{\phi_j}\}_{j=1}^n$ auxquelles on a appliqué un ensemble de déformations $\{\phi_j\}_{j=1}^n$.

Dans ce contexte, le problème consiste à calculer une séquence d'images débruitée et corrigée des mouvements de l'objet. Cette séquence, que l'on nomme modèle spatio-temporel et que l'on note M, est une application définie sur $\Omega_0 \times [0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. A partir d'un tel modèle, il est possible de définir une courbe de rehaussement sans bruit et sans mouvement $\{M(x,t), t \in [0,T]\}$ en chaque point x de Ω_0.

4.3 Algorithme

4.3.1 Recalage et estimation

L'algorithme se divise en deux modules qui interagissent entre eux : le premier module (Module R) est dédié au recalage tandis que le second (module E) porte sur l'estimation du modèle spatio-temporel.

Dans le module R, on part d'une estimation courante $\widehat{M}$ du modèle spatio-temporel. On effectue le recalage de ce modèle avec les images observées : pour tout temps t_j $(j = 1, \cdots, n)$, le modèle $\widehat{M}(\cdot, t_j)$ pris au temps t_j est recalé sur l'image observée I^j au moyen d'une application $\widehat{\psi^j}$ définie sur Ω à valeurs dans Ω_0. On note $\widehat{\phi_j}$ l'inverse de l'application $\widehat{\psi^j}$. L'application $\widehat{\psi^j}$ est obtenue en minimisant une énergie de la forme de celle de l'équation (1.2), avec le terme de régularité élastique défini par les équations (1.4) à (1.7). A partir de ces applications, on forme ensuite une séquence déformée $I^j_{\widehat{\phi^j}}$, pour $j = 1, \cdots, n$. En outre, pour tout y de Ω_0, on définit la courbe de rehaussement empirique $C^y_{\widehat{\phi}} = \{I^j_{\widehat{\phi^j}}(y)\}_{j=1}^n$. L'ensemble de ces courbes constituent l'entrée du module E, à partir de laquelle on fait une nouvelle estimation du modèle spatio-temporel. En alternant les modules R et E, on obtient ainsi un algorithme itératif qui, après convergence, apporte une solution au problème posé. La dernière estimation $\widehat{M}$ est une séquence d'images débruitée et corrigée du mouvement.

L'estimation dans le module E est le point clef de l'algorithme. Pour le bon fonctionnement de celui-ci, il faut faire en sorte que l'estimation du modèle spatio-

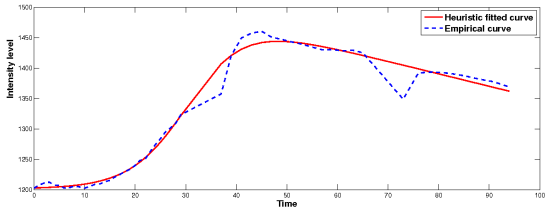


FIG. 4.2 – Ajustement d'une courbe profilée à une courbe temporelle empirique.

temporel traduise exclusivement les dynamiques iconiques des rehaussements, en évitant qu'elle reflète un quelconque mouvement dans la séquence. Autrement dit, l'estimation doit être robuste aux mouvements de la séquence. Pour assurer cela, nous avons proposé plusieurs stratégies que je vais décrire dans la prochaine section.

4.3.2 Classification et estimation paramétrique

La principale stratégie d'estimation, qui fait toute l'originalité de l'algorithme, consiste à utiliser une classification des pixels en fonction de leur courbes de rehaussement empiriques $C^y_{\widehat{\phi}}$ $(y \in \Omega_0)$.

On se place sur une grille discrète Ω_0^d de Ω_0. On fait l'hypothèse que les points de Ω_0^d peuvent être partitionnés en un nombre fini K de classes ayant une même dynamique de rehaussement :

$$\Omega_0^d = \cup_{k=1}^K \Omega_k \text{ et } \forall\, k \neq k',\ \Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset.$$

On note $M^k = \{M^k(t), t \in [0,T]\}$ la courbe temporelle de rehaussement de la classe k. Le nombre de classes et les courbes de rehaussement des classes sont inconnus.

La seconde stratégie consiste à imposer une forme *a priori* aux courbes de rehaussement des classes. La forme choisie est fortement liée à l'application. Pour les séquences de DET-CT scans ou IRM, on suppose que, pour toute classe k,

$$M^k(t) = P(t, p^k) = \frac{p_2^k + p_5^k t}{1 + \exp\left(-p_4^k (t - p_3^k)\right)} + p_1^k, \tag{4.1}$$

où $p^k = \{p_i^k\}_{i=1}^5$ est un jeu de cinq paramètres caractérisant la courbe [7]. L'ajustement d'une courbe temporelle empirique à cette forme paramétrée est illustré sur la figure 4.2.

Pour estimer la courbe de rehaussement d'une classe k, on ajuste une courbe paramétrée de la forme (4.1) à la moyenne des courbes temporelles empiriques des pixels de la classe selon un critère des moindres carrés : on calcule les moyennes $\overline{M}_j^k = \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{y \in \Omega_k} I^j_{\widehat{\phi}_j}(y)$ pour tout temps j fixé dans $\{1, \cdots, n\}$. On pose ensuite $\widehat{M}^k = P(\cdot, \hat{p}^i)$, où

$$\hat{p}^i = \arg\min_{p \in \mathbb{R}^5} \sum_{j=1}^n |P(t_j, p) - \overline{M}_j^k|^2.$$

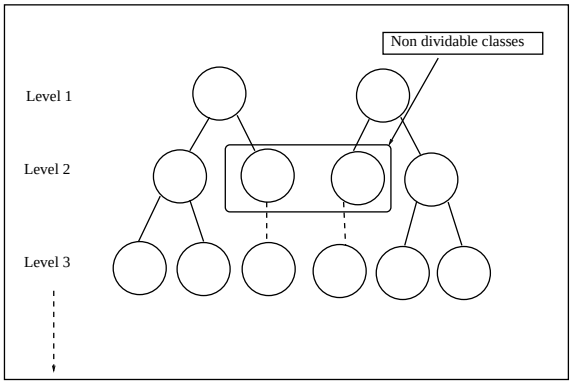


FIG. 4.3 – Classification hiérarchique descendante.

Pour estimer le nombre de classes et les courbes de rehaussement de chaque classe, nous avons mis en œuvre une technique de classification hiérarchique descendante. Comme cela est illustré sur la figure 4.3, cette technique produit un arbre dont les nœuds représentent des ensembles de pixels. D'un niveau à l'autre de l'arbre, ces ensembles sont imbriqués : un ensemble de niveau $h+1$ ($h>0$) admet un ensemble parent de niveau h dans lequel il est inclus. L'arbre est construit en séparant les ensembles successivement aux différents niveaux de l'arbre. Une partition initiale des points de Ω_0^d est tout d'abord associée au plus haut niveau de l'arbre (niveau 1) selon un procédé qui est expliqué plus loin. Etant donnés les ensembles de niveau h, on forme les ensembles de niveau $h+1$ de la manière suivante. Tous les ensembles de niveau h sont divisés en deux sous-ensembles, au moyen d'une version modifiée de l'algorithme K-means, que l'on précisera ultérieurement. On calcule ensuite une courbe de rehaussement représentative de chaque sous-ensemble en utilisant le critère des moindres carrés évoqué précédemment. Puis, on calcule des distances entre les courbes de rehaussement prises deux par deux. Si l'une des courbes associée à deux sous-ensembles E_1 et E_2 issus d'un même ensemble E de niveau h est suffisamment distante des courbes des autres sous-ensembles, alors l'ensemble E est scindée en deux et les sous-ensembles E_1 et E_2 deviennent des ensembles de niveau $h+1$. Sinon, l'ensemble E n'est pas divisé et demeure au niveau $h+1$. On considère qu'une courbe m^1 est suffisamment distante d'une autre courbe m^2 lorsque

$$\min_{j=1,\cdots,n} |m^1(t_j) - m^2(t_j)| > \eta,$$

où η est un seuil fixé en fonction de la variance du bruit dans les images. On arrête la construction de l'arbre lorsqu'aucun ensemble n'a été divisé à un niveau donné. Les ensembles représentés sur le dernier niveau de l'arbre forment une partition de Ω_0^d, que l'on retient comme résultat final de la classification hiérarchique.

On décrit à présent l'algorithme de type K-means servant à la construction de l'arbre. On part d'un ensemble fini E de pixels y de Ω_0^d, auxquels sont associées les courbes de rehaussement $\{C^y_{\widehat{\phi}}\}_{y\in E}$. On estime une première partition des pixels de

E en deux classes $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$. Ensuite, on alterne successivement deux étapes jusqu'à convergence de l'algorithme :

Etape 1. A partir d'une partition courante de E en deux ensembles $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$, on estime les courbes de rehaussement $\hat{m}^1$ et $\hat{m}^2$ des ensembles 1 et 2.

Etape 2. A partir d'une estimation courante des courbes $\hat{m}^1$ et $\hat{m}^2$ des ensembles 1 et 2, on met à jour les ensembles $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$ formant la partition de E. Pour cela, on met chaque point y de E dans l'ensemble i pour lequel la somme $\sum_{j=1}^{n} \mid \hat{m}^i(t_j) - \overline{C}_j^y \mid^2$ est la plus petite.

Pour l'initialisation de la classification hiérarchique, on utilise une technique qui exploite des propriétés spécifiques aux DCE-CT scans. En unité d'Hounsfield, l'air a une intensité faible dont la valeur est en dessous de -1000, tandis que celle de l'os compact est au-dessus de 4000. En utilisant ces seuils bas et haut, on peut donc séparer les pixels situés sur l'air, ceux sur les os compacts et les autres pixels.

A la fin de la construction de l'arbre, on a une étape d'étayage qui vise à supprimer d'éventuelles classes aberrantes. Une classe est considérée comme aberrante lorsque les variations moyennes du profil sont négatives, *i.e.*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{M}^k(t_j) - \widehat{M}^k(t_0) \right) < 0.$$

Lorsqu'une classe est supprimée, les pixels qu'elle contient sont affectés à la classe restante la plus proche, selon un critère de distance moyenne entre la courbe de rehaussement de la classe et la courbe de rehaussement du pixel.

A la suite de la classification hiérarchique, on obtient une partition des pixels de la grille Ω_0^d en $\widehat{K}$ classes et, pour chaque classe k de la partition, une estimation de la courbe de rehaussement $\widehat{M}^k$. A partir de ces éléments, on estime le modèle spatio-temporel en posant pour tout k dans $\{1, \cdots, \widehat{K}\}$ et tout pixel y de Ω^k,

$$\widehat{M}(y,t) = \widehat{M}^k(t), \forall\, t \in [0,T].$$

On obtient ensuite un modèle spatio-temporel $\widehat{M}$ sur tout le domaine Ω_0 en interpolant les points de la grille Ω_0^d.

4.4 Résultats

Nous avons appliqué l'algorithme de recalage K-classifiant à des séquences de DCE-CT scans. Cette application est illustrée sur les figures 4.4 et 4.5 à partir d'exemples typiques de séquences abdominale et thoracique.

Ces séquences ont été acquises toutes les secondes après injection d'un agent de contraste iodisé, avec une résolution dans le plan axial de 512x512 pixels. Nous travaillons en 2D sur un même niveau axial. En raison de doses de radiation réduites,

les images ont un rapport signal à bruit assez faible. De plus, les tissus observés sont déformés au cours de la séquence à cause des respirations du patient, de ses pulsations cardiaques, de ses contractions gastriques involontaires ou encore de ses éventuels mouvements volontaires.

Sur les figures 4.6 et 4.7, on voit les classifications et les moyennes des courbes temporelles des pixels de chaque classe, avant et après l'application de l'algorithme.

Dans la première séquence, on observe notamment des pics aux 35ème et 75ème secondes, qui correspondent à la reprise de la respiration du patient après des périodes d'apnée. Ces pics sont atténués par le recalage. Dans la seconde séquence, les courbes de rehaussement des différents tissus sont bien séparées après le recalage. En particulier, parmi les courbes ayant les intensités les plus fortes, on distingue bien celles de l'aorte, de la veine cave supérieure et des os compacts. Nous avons pu observer que le recalage permet d'améliorer la classification initiale des tissus en permettant la suppression ou la correction de classes aberrantes de pixels mal recalés. Le modèle spatio-temporel et les classifications ont été examinées par le radiologue de notre équipe, qui en a certifié l'intérêt et l'exactitude fonctionnelle [3]. Nous avons effectué une évaluation quantitative du recalage K-classifiant sur plu-

Première séquence		
Région	avant recalage	après recalage
Aorte	0.917	0.911
Estomac	0.865	0.912
Foie	0.964	0.976
Lésion	0.794	0.825
Rate	0.865	0.940

Seconde séquence		
Région	avant recalage	après recalage
Aorte	0.950	0.952
Trachée	0.859	0.946
Poumons	0.948	0.979
Lésion	0.903	0.910

TAB. 4.1 – Evaluation quantitative du recalage K-classifiant.

sieurs séquences manuellement segmentées. La classification obtenue après recalage est comparée à la classification de la vérité de terrain en utilisant le coefficient de Jaccard. Celui-ci indique le taux de recouvrement des régions issues de l'algorithme et de la vérité de terrain, indépendamment de la taille des régions. Les valeurs de ce coefficient sont entre 0 et 1, 0 étant le plus mauvais taux de recouvrement et 1 le meilleur. Les résultats sont rapportés sur la table 4.1. Ces résultats montrent une nette amélioration de la classification apportée par le recalage, en particulier pour les régions dont le coefficient de Jaccard est initialement faible.

4.5 Références du chapitre

[1] M. Hachama. *Modèles de recalage classifiant pour les séquences d'images médicales*. PhD thesis, University Paris Descartes, june 2008.

[2] M. Hachama, F. Richard, D. Balvay, R. Thiam, A. Desolneux, and C. Cuénod. Recalage classifiant de séquences d'images de perfusion. In *Actes des troisièmes Journées d'Études Algéro-Françaises en Imagerie Médicale (JETIM'08)*, Blida, Algeria, nov. 2008.

[3] M. Hachama, F.JP Richard, D. Balvay, R. Thiam, A. Desolneux, and C. Cuénod. A classifying registration technique for the estimation of enhancement curves of DCE-CT scan sequences. *Medical Image Analysis*, 2008. accepted with minor revisions.

[4] P. Hayton, M. Brady, L. Tarassenko, and N. Moore. Analysis of dynamic MR breast images using a model of contrast enhancement. *Medical Image Analysis*, 1 :207–224, 1997.

[5] R. Maroy, R. Boisgard, C. Comtat, V. Frouin, P. Cathier, E. Duchesnay, F. Dolle, P.E. Nielsen, R. Trebossen, and B. Tavitian. Segmentation of rodent whole-body dynamic PET images : an unsupervised method based on voxel dynamics. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 27(3) :342–354, 2008.

[6] K.A. Miles. Perfusion CT for the assessment of tumor vascularity : which protocol ? *British Journal of Radiology*, 76(1) :36–42, 2003.

[7] P.J. Moate, L. Dougherty, M. Schnall, et al. A modified logistic model to describe gadolinium kinetics in breast tumors. *Magnetic Resonance Imaging*, 22(467–473), 2004.

[8] J.P. O'Connor, A. Jackson, G. Parker, and G. Jayson. DCE-MRI biomarkers in the clinical evaluation of antiangiogenic and vascular disrupting agents. *British Journal of Cancer*, 96(2) :189–195, 2007.

[9] P.S. Tofts. Modeling tracer kinetics in dynamic Gd-DTPA MR imaging. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 7(1) :91–101, 1997.

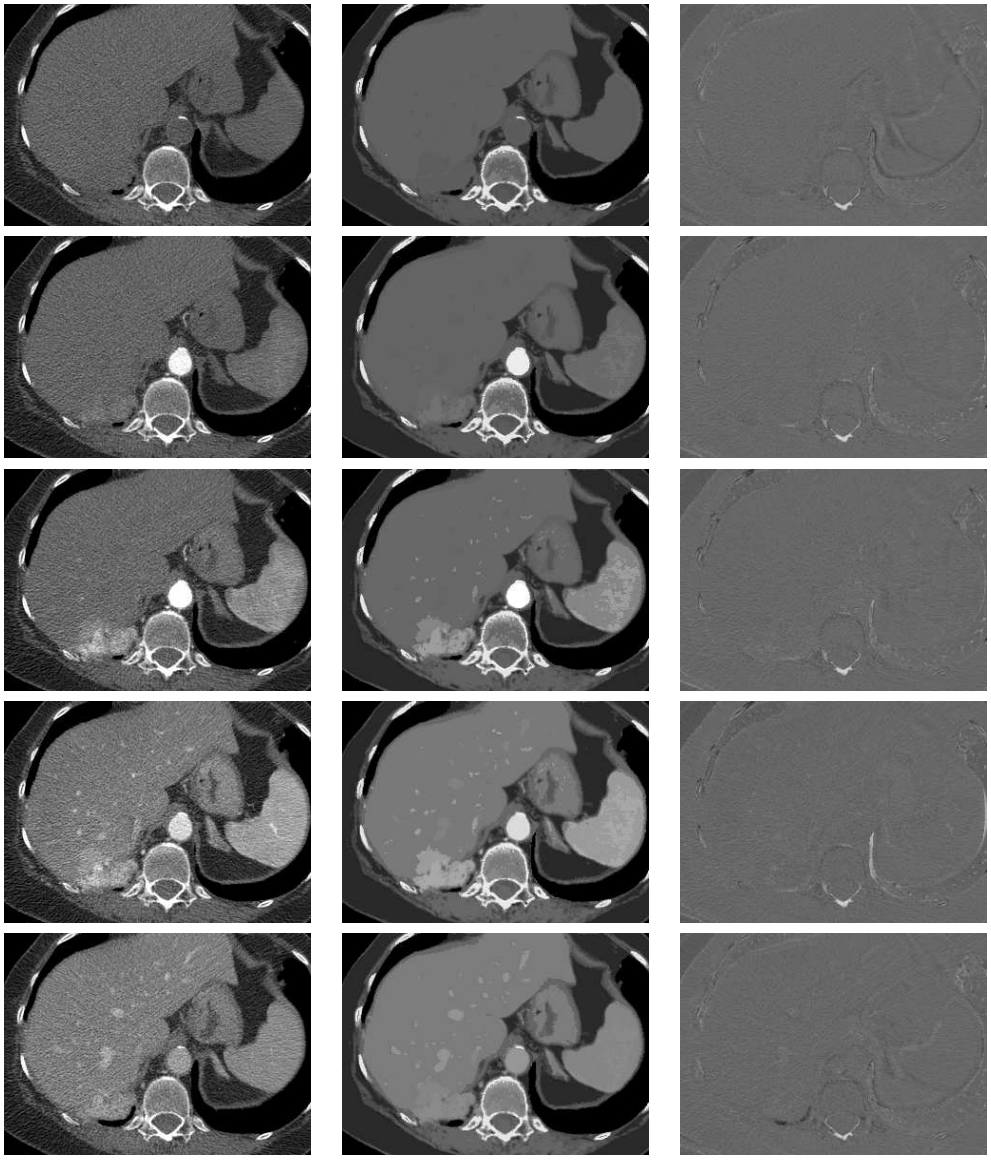


FIG. 4.4 – Une séquence abdominale de DCE-CT scans. Colonne 1 : quelques images de la séquence originale, colonne 2 : l'estimation du modèle spatio-temporel, colonne 3 : les différences entre la séquence originale et le modèle.

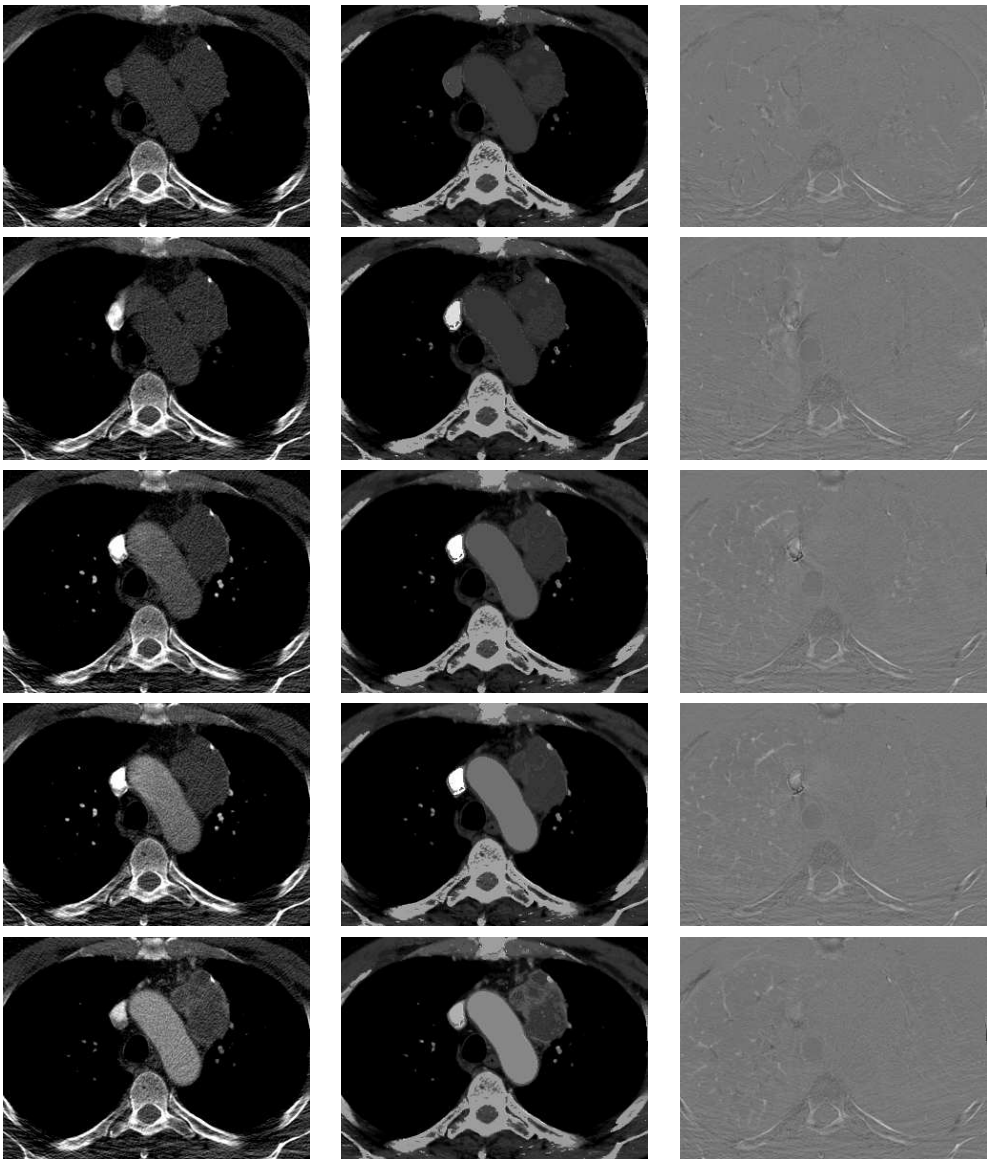


FIG. 4.5 – Une séquence thoracique de DCE-CT scans. Colonne 1 : quelques images de la séquence originale, colonne 2 : l'estimation du modèle spatio-temporel, colonne 3 : les différences entre la séquence originale et le modèle.

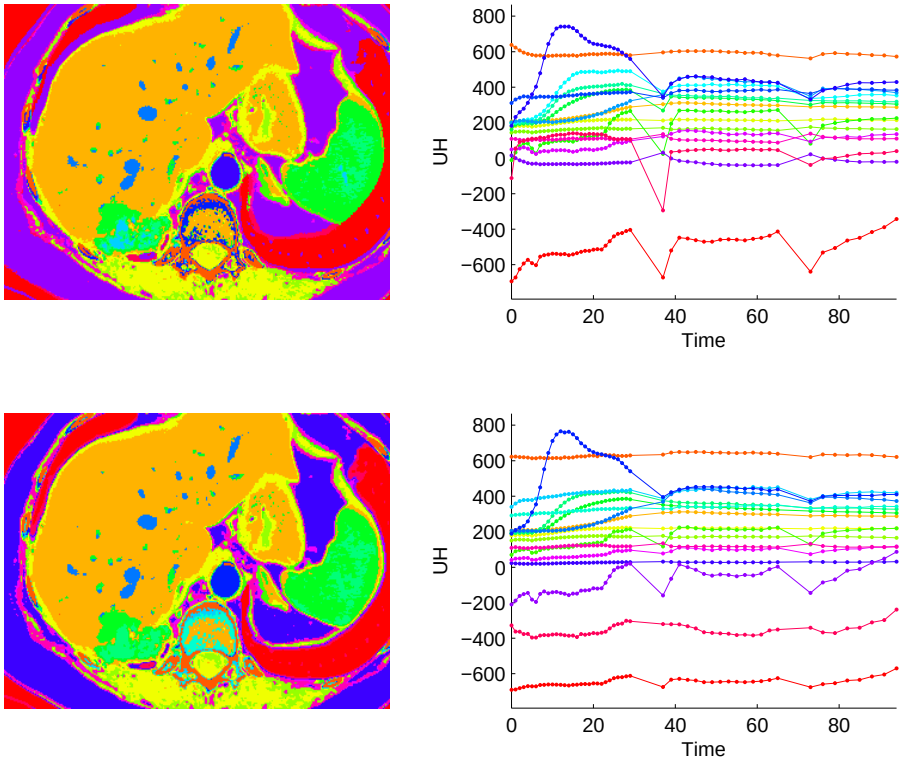


FIG. 4.6 – Séquence abdominale. Sur la 1ère colonne : classification de l'image obtenue à l'initialisation avant le recalage (1ère ligne) et après l'application de complète de l'algorithme (seconde ligne). Sur la seconde colonne : moyennes des courbes temporelles de pixels de chaque classe correspondant aux classifications de la 1ère colonne.

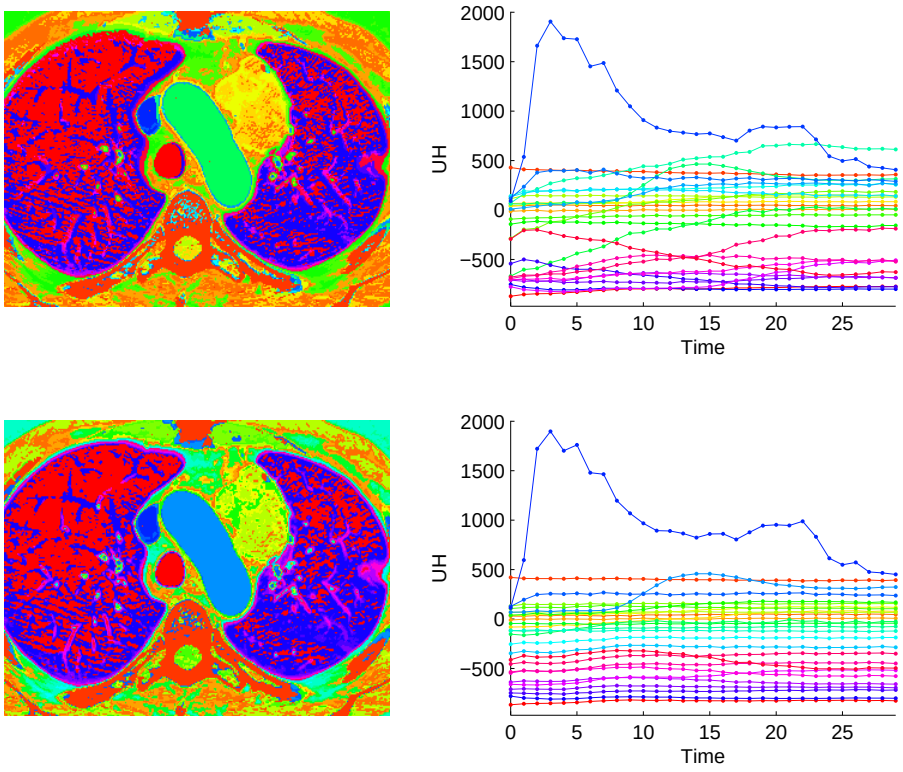


FIG. 4.7 – Séquence thoracique. Sur la 1ère colonne : classification de l'image obtenue à l'initialisation avant le recalage (1ère ligne) et après l'application de complète de l'algorithme (seconde ligne). Sur la seconde colonne : moyennes des courbes temporelles de pixels de chaque classe correspondant aux classifications de la 1ère colonne.

Chapitre 5

Estimation SAEM de déformations dans les séquences

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, je présente une série de recherches ayant été effectuées en collaboration avec A. Samson (MAP5) [10, 11]. Ces recherches s'appliquent aux séquences d'images donnant une observation au cours du temps d'un objet qui se déforme. Il s'agit notamment des séquences de CT-scans de différentes parties du corps humain (thorax, abdomen,...) que j'ai présentées dans l'introduction du chapitre 4 (cf. les illustrations de la figure 4.1). Pour l'analyse de ces séquences, il s'avère souvent utile d'effectuer un certain nombre de tâches telles que le débruitage ou la segmentation des images ou encore la correction du mouvement. La réalisation de ces tâches est facilitée par l'apport d'informations sur les déformations apparentes dans la séquence.

Notre étude a pour objectif général l'extraction d'informations sur ces déformations. Pour cela, nous avons conçu un modèle statistique qui décrit l'observation et les déformations dans la séquence. Nous avons ensuite mis en place une technique d'estimation paramétrique qui permet d'adapter le modèle à chaque séquence.

Dans notre approche de modélisation, chaque image d'une séquence est interprétée comme l'observation bruitée d'un modèle d'image (appelé prototype) qui se déforme de manière aléatoire selon une distribution de loi de probabilité. Cette approche par prototype déformable est à rapprocher de celle qui prévaut dans les travaux de [1, 2, 8]. Ces derniers visent à décrire la variabilité d'une population d'images (non ordonnées) portant sur un même thème (cerveau humain, caractères manuscrits,...). S'inspirant des idées de Grenander sur la théorie des formes [7], la variabilité y est analysée d'un point de vue géométrique en considérant que les images sont issues de déformations d'un prototype et en caractérisant la loi de ces déformations. Dans [1, 2], le prototype et les déformations sont tous les deux représentés par une somme pondérée de noyaux fonctionnels et les deux vecteurs de

poids de ces sommes sont supposés distribués selon une loi gaussienne. Les paramètres des distributions du prototype et des déformations (moyennes et matrices de variance-covariance des lois gaussiennes) sont estimées par des techniques de maximum *a posteriori* [1] ou de SAEM [2]. Les techniques ont été appliquées à l'analyse d'images de caractères manuscrits. Ces images sont petites, binaires et de faible complexité. Tel que présentées dans [1, 2], elles ne peuvent pas facilement s'appliquer aux images complexes et de grande dimension qui font l'objet de notre étude : le nombre de paramètres associés aux représentations du prototype et des déformations est trop grand et conduit à des calculs rédhibitoires en pratique.

Une de nos contributions principales est la conception d'un modèle statistique qui permet de traiter des séquences d'images complexes et de grande dimension. Ce modèle repose sur des représentations parcimonieuses du prototype et des déformations qui, tout en étant basées sur une décomposition en éléments finis commune du domaine du prototype, sont adaptées à la géométrie des images observées. Cette adaptation permet de réduire considérablement le nombre de paramètres et, par là-même, la complexité du problème d'estimation.

Par ailleurs, dans le cadre de ce modèle, nous avons construit une technique d'estimation paramétrique de type SAEM qui apporte une solution statistique au problème posé par le faible nombre d'observations dans les séquences. Cette technique est une version stochastique de l'EM qui est fondée sur une approximation stochastique de la distribution *a priori* et combinée à une procédure de simulation de type Markov Chain Monte Carlo [9]. Pour la conception de la procédure de simulation, nous avons tiré parti de propriétés markoviennes qui sont spécifiques à nos représentations du prototype et des déformations, ce qui permet d'avoir une bonne convergence de la technique.

5.2 Cadre statistique

5.2.1 Modèle d'observation

Un objet non-rigide qui subit des déformations sur un intervalle de temps $[0, T]$ est observé au travers d'une suite finie d'images. Dans notre application, l'objet observé est une partie du corps humain comprenant plusieurs organes. Pour décrire les déformations, nous notons $\mathcal{D}$ un domaine de référence, sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}^3$. Nous notons alors ϕ l'application bijective de $\mathcal{D} \times [0, T]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui donne la position $\phi(z, t)$ au temps t du point matériel situé dans la position z du domaine de référence (voir la figure 5.1 pour une illustration). Chaque application $\phi(\cdot, t)$ est bijective et a donc une inverse que nous noterons $\psi(\cdot, t)$; la valeur $\psi(x, t)$ donne la position dans le domaine de référence du point matériel qui est localisé en x au temps t. Dans notre problème, les déformations physiques de l'objet sont inconnues.

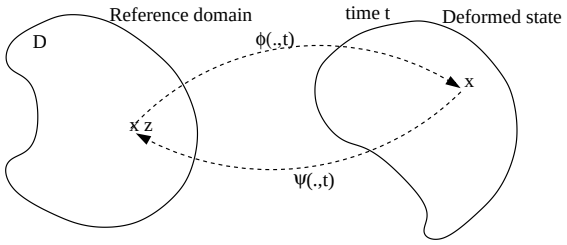


FIG. 5.1 – Les déformations de l'objet.

Nous présentons uniquement une description bidimensionnelle de la méthode. Aussi les observations seront-elles limitées à une partie de l'objet située dans un plan horizontal de $\mathbb{R}^3$. En première approximation, nous supposerons que pendant la déformation, cette partie de l'objet reste dans le plan, c'est à dire qu'il n'y a pas de déplacements dans la direction verticale au plan. Par la suite, le domaine $\mathcal{D}$ désignera exclusivement le plan horizontal d'intérêt. Les applications ϕ seront en outre identifiées avec leurs restrictions sur ce plan.

Les images sont acquises à n_t temps $\{t_1, \ldots, t_{n_t}\}$ sur une grille discrète uniforme fixe de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{G} = \{x_n, n = 1, \ldots, n_g\}$ de dimension n_g. Nous notons y_{in} la valeur de niveau de gris observée dans la position x_n au temps t_i. En raison du bruit d'acquisition, les images constituent des observations bruitées des propriétés physiques de l'objet. De plus, tout au long de la séquence, l'objet est observé tel qu'il se déforme à partir d'un point de vue fixe. Nous notons f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ qui décrit une image non bruitée de l'objet dans le domaine de référence $\mathcal{D}$. Le modèle d'observation s'écrit alors

$$\begin{aligned} y_{in} &= f(\psi(x_n, t_i)) + \varepsilon_{in}, \forall i \in \{1, \ldots, n_t\}, \forall\, n \in \{1, \ldots, n_g\}, \\ \varepsilon_{in} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{aligned} \tag{5.1}$$

où (ε_{in}) est un bruit d'acquisition de nature aléatoire, que nous supposons indépendant et identiquement distribué selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2. Dans la suite, l'application f sera appelée le prototype.

Nous supposons que le domaine $\mathcal{D}$ peut être partitionné en n_e régions sur lesquelles les niveaux de gris sont homogènes. Nous considérons une partition de $\mathcal{D}$ définie par des régions triangulaires. Nous notons p_e un triangle de la partition et $\dot{p}_e$ l'intérieur du triangle. Nous avons

$$\mathcal{D} = \cup_{e=1}^{n_e} p_e \quad \text{et} \quad \forall e_1 \neq e_2, \dot{p}_{e_1} \cap \dot{p}_{e_2} = \emptyset.$$

Les régions p_e, appelées éléments finis, sont entièrement définies par les sommets du triangle. Nous notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des sommets de tous les triangles formant la partitions et n_v le nombre de sommets.

Nous supposons que le prototype f est constant sur chaque élément fini de la

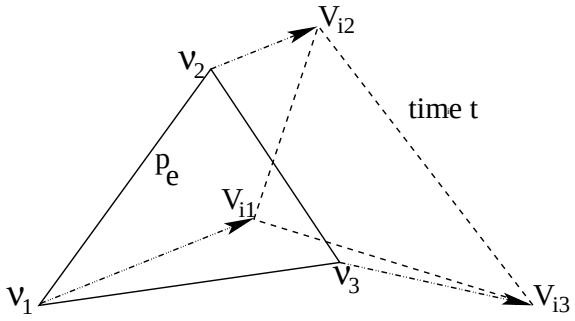


FIG. 5.2 – Déplacement d'un élément fini au temps t_j.

partition. Soit ρ_e le niveau de gris f sur le triangle p_e. Le prototype s'écrit alors

$$\forall\, z \in \mathcal{D}, f(z) = \sum_{e=1}^{n_e} \rho_e \mathbb{1}_{z \in p_e}. \tag{5.2}$$

5.2.2 Modèle de déformation

Nous supposons que les déformations $\phi(\cdot, t_i)$ sont continues et affines par morceaux sur la partition et qu'elles sont inversibles sur $\mathcal{D}$.

Nous décrivons maintenant l'effet de $\phi(\cdot, t_i)$ sur le triangle p_e. Soient ν_j les coordonnées du j^e sommet dans $\mathcal{D}$ et v_{ij} la position de ce sommet au temps t_i. L'image $\phi(p_e, t_i)$ de l'élément fini p_e par $\phi(\cdot, t_i)$ reste un triangle, qui est entièrement caractérisé par les sommets $\{v_{ij}, j \in \mathcal{N}_e\}$ définis par le déplacement des sommets de p_e au temps t_i ($\mathcal{N}_e$ désigne l'ensemble des indices des sommets de l'élément fini p_e). En outre, étant affine par morceaux, la déformation $\phi(\cdot, t_i)$ est entièrement caractérisée par l'ensemble des positions des sommets $\{v_{ij}, j = 1, \ldots, n_v\}$ au temps t_i.

Par ailleurs, nous introduisons une représentation aléatoire des déformations, en supposant qu'au temps t_i, le vecteur $\mathbf{v}_i = (v_{ij})_{j=1}^{n_v}$ des positions des sommets est un vecteur aléatoire. L'ensemble des vecteurs $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^{n_t}$ représente les variations aux différents temps autour des positions $\nu = (\nu_j)_{j=1}^{n_v}$ des sommets dans le domaine de référence. La définition d'une loi de probabilité décrivant ces vecteurs dépend de l'application. Dans notre application, nous supposerons que les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale multidimensionnelle de moyenne ν et de matrice de variance covariance Σ.

Afin de réduire la complexité algorithmique, nous faisons des hypothèses supplémentaires sur les dépendances des déplacements des sommets. Nous définissons une structure de voisinage sur l'ensemble des sommets, en déclarant que deux sommets sont voisins si et seulement si ils sont distincts et sur un même élément fini. Ainsi doté d'une structure de voisinage, l'ensemble $\mathcal{N}$ devient un graphe. Sur ce graphe, nous supposons que les positions des sommets sont markoviennes, c'est à dire que la distribution conditionnelle de la position d'un sommet connaissant celles des autres ne dépend que de celles de ses voisins.

5.2.3 Modèle statistique complet

En simplifiant l'expression du terme $f(\psi(x_n, t_i))$ de l'équation (5.1) conformément aux hypothèses faites plus haut, nous obtenons

$$\begin{aligned} y_{in} &= \sum_{e=1}^{n_e} \rho_e \mathbb{1}_{x_n \in \{v_{ij}, j \in \mathcal{N}_e\}} + \varepsilon_{in}, \forall i \in \{1, \ldots, n_t\}, \forall\, n \in \{1, \ldots, n_g\}, \\ \varepsilon_{in} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), iid \\ \mathbf{v}_i &\sim \mathcal{N}(\nu, \Sigma), iid \end{aligned} \tag{5.3}$$

où $\mathbf{y}_i = (y_{in})_{n=1}^{n_g}$ est le vecteur des valeurs de niveau de gris de l'image observée au temps t_i, $\rho = (\rho_e)_{e=1}^{n_e}$ le vecteur formé par les niveaux de gris du prototype, $\mathbf{v}_i = (v_{ij})_{j=1}^{n_v}$ les positions des sommets au temps t_i, (ε_{in}) le bruit d'acquisition.

A présent, notre but est de construire une méthode d'estimation des paramètres $\theta = (\rho, \sigma^2, \nu, \Sigma)$.

Ce modèle statistique est un modèle à effets mixtes non-linéaire dans lequel les déplacements non observés $\mathbf{v}_i$ peuvent s'interpréter comme des effets aléatoires et les positions ν comme des effets fixes. De par la définition du prototype, la régression des variables y_{in} sur les variables descriptives x_n est non-linéaire.

Pour la suite, nous écrivons le modèle sous une forme matricielle. Nous notons $\mathbf{y} = (y_{in})_{in}$ le vecteur formé par les valeurs de niveau de gris des n_t images, $\varepsilon = (\varepsilon_{in})_{in}$ les erreurs résiduelles et $\mathbf{v} = (v_{ij})_{ij}$ les vecteurs donnant les positions des sommets aux différents temps. Nous définissons $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{n_g}$ et pour tout $e = 1, \ldots, n_e$ le vecteur colonne aléatoire $W_e(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ de taille $n_t n_g$ dont le $(in)^e$ élément est constitué par la variable aléatoire $\mathbb{1}_{x_n \in \{v_{ij}, j \in \mathcal{N}_e\}}$. Le vecteur $W_e(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ est une fonction non-linéaire de $\mathbf{v}$. Nous considérons également la matrice aléatoire

$$W(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = (W_1(\mathbf{v}, \mathbf{x}) | \ldots | W_{n_e}(\mathbf{v}, \mathbf{x}))$$

construite par concaténation horizontale des vecteurs $W_e(\mathbf{v}, \mathbf{x})$. Avec ces notations, nous obtenons l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= W(\mathbf{v}, \mathbf{x})\rho + \varepsilon, \\ \varepsilon &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I), iid \\ \mathbf{v}_i &\sim \mathcal{N}(\nu, \Sigma), iid, \quad i = 1, \ldots, n_t. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dans [11], nous avons montré que le champ aléatoire $\mathbf{v}_i | \mathbf{y}_i$ au temps t_i est markovien sur le graphe $\mathcal{N}$ en utilisant le théorème de Hammersley-Clifford [6].

5.3 Algorithme d'estimation

Dans cette partie, nous présentons la construction d'un algorithme SAEM pour l'estimation des paramètre du modèle défini par l'équation (5.4).

5.3.1 Le problème statistique

Le modèle (5.4) est un modèle à données incomplètes dans lequel $\mathbf{y}$ regroupent les données observées, $\mathbf{v}$ les données manquantes (ou non observées) et le couple $(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ les données complètes.

Du fait de la non linéarité de la fonction de régression des données non observées, la vraisemblance n'a pas de forme explicite. Aussi l'estimation de θ constitue-t-elle un véritable défi. Nous nous sommes intéressés à une version stochastique du fameux algorithme EM introduit dans [5] pour l'estimation paramétrique dans des modèles à données incomplètes.

L'algorithme classique EM repose sur une procédure itérative qui a pour but de maximiser l'espérance conditionnelle de la log-vraisemblance $p(\mathbf{y}, \mathbf{v}; \theta)$ des données complètes par rapport aux paramètres θ. L'itération k de l'EM se compose de deux étapes successives communément appelées étape "expectation" (E-step) et étape "maximization" (M-step) :

E-step l'espérance conditionnelle de la log-vraisemblance complète, connaissant les observations $\mathbf{y}$ et une approximation courante $\theta^{(k-1)}$ des paramètres est évaluée

$$\forall\, \theta,\ Q^{(k)}(\theta) = \mathbb{E}(\log p(\mathbf{y}, \mathbf{v}; \theta) | \mathbf{y}; \theta^{(k-1)}).$$

M-step l'approximation des paramètres est mise à jour

$$\theta^{(k)} = \arg\max_{\theta} Q^{(k)}(\theta).$$

Les valeurs initiales de θ sont choisies de manière arbitraire.

L'algorithme EM ne peut pas s'appliquer directement lorsque l'espérance conditionnelle $Q^{(k)}$ ne peut être calculée explicitement dans l'E-step, ce qui est le cas pour les modèles mixtes non linéaires. Pour faire face à ce genre de situation, Delyon, Lavielle et Moulines ont proposé d'approcher $Q^{(k)}$ de manière stochastique à partir d'un échantillonnage de la distribution *a posteriori* [4]. Dans leur algorithme, appelé SAEM (Stochastic Approximation Expectation Maximization), l'E-step classique de l'algorithme EM est remplacé par deux nouvelles étapes, une étape de simulation (S-step) et une autre d'approximation stochastique (SA-step) :

S-step les données non observées $\mathbf{v}^{(k)}$ sont échantillonnées à partir de la distribution *a posteriori* $p(\mathbf{v}|\mathbf{y}; \theta^{(k-1)})$.

SA-step la log-vraisemblance complète est approchée à partir des simulations des données non observées

$$Q^{(k)}(\theta) = (1 - \gamma_k) Q^{(k-1)}(\theta) + \gamma_k \log(p(\mathbf{y}, \mathbf{v}^{(k)}; \theta^{(k-1)})),$$

où $(\gamma_k)_k$ est une suite de valeurs positives décroissantes.

La S-step du SAEM nécessite un échantillonnage de la distribution *a posteriori*. Dans de nombreuses situations, cette distribution ne peut pas être échantillonnée directement. Afin de remédier à cela, Kuhn et Lavielle ont proposé de combiner le SAEM avec un schéma d'échantillonnage Monte Carlo Chaîne de Markov (MCMC) [9]. Dans leur algorithme, la S-step de l'itération k repose sur la construction d'une chaîne de Markov non-homogène qui a $p(\mathbf{v}|\mathbf{y};\theta^{(k-1)})$ pour distribution stationnaire unique. Kuhn et Lavielle ont prouvé la convergence de l'algorithme combiné SAEM/MCMC sous des hypothèses générales. La plus restrictive de ces hypothèses est que les variables non observées soient dans un ensemble compact. Toutefois, Allassonnière *et al* ont récemment généralisé ce résultat de convergence au cas où les variables non observées ne sont pas dans un compact [3].

5.3.2 Application du SAEM

Convergence

Dans [11], nous avons montré que la log-vraisemblance des données complètes $(\mathbf{y},\mathbf{v})$ du modèle (5.4) s'écrit sous la forme

$$\log p(\mathbf{y},\mathbf{v};\theta) \quad = \quad -\Psi(\theta) + \sum_{i=1}^{5} \langle S_i(\mathbf{y},\mathbf{v}), \Phi_i(\theta)\rangle,$$

avec $\Psi(\theta) = K(\theta) + \frac{n_t}{2}\nu^t\Sigma^{-1}\nu$,

$$\begin{array}{l} S_1(\mathbf{y},\mathbf{v}) = W(\mathbf{v},\mathbf{x})^t\mathbf{y}, \quad S_2(\mathbf{y},\mathbf{v}) = W(\mathbf{v},\mathbf{x})^tW(\mathbf{v},\mathbf{x}), \quad S_3(\mathbf{y},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n_t}\mathbf{v}_i, \\ S_4(\mathbf{y},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n_t}\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^t, \quad S_5(\mathbf{y},\mathbf{v}) = \mathbf{y}^t\mathbf{y}, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lll} \Phi_1(\theta) = -\sigma^{-2}\rho^t, & \Phi_2(\theta) = \frac{1}{2}\sigma^{-2}\rho^t\rho, & \Phi_3(\theta) = -\nu^t\Sigma^{-1}, \\ \Phi_4(\theta) = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}, & \Phi_5(\theta) = \frac{1}{2}\sigma^{-2}. & \end{array}$$

Le modèle appartient donc à la famille de distributions exponentielles, ce qui garantit la convergence de l'algorithme SAEM [4]. De plus, nous avons explicité les SA-step et M-step :

SA-step

$$s_1^{(k)} = (1-\gamma_k)s_1^{(k-1)} + \gamma_k W(\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{x})^t\mathbf{y}, \tag{5.5}$$

$$s_2^{(k)} = (1-\gamma_k)s_2^{(k-1)} + \gamma_k W(\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{x})^tW(\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{x}), \tag{5.6}$$

$$s_3^{(k)} = (1-\gamma_k)s_3^{(k-1)} + \gamma_k \sum_{i=1}^{n_t}\mathbf{v}_i^{(k)}, \tag{5.7}$$

$$s_4^{(k)} = (1-\gamma_k)s_4^{(k-1)} + \gamma_k \sum_{i=1}^{n_t}\mathbf{v}_i^{(k)}\mathbf{v}_i^{(k)t}. \tag{5.8}$$

M-Step

$$\rho^{(k)} = (s_2^{(k)})^{-1} s_1^{(k)}, \tag{5.9}$$

$$\sigma^{2(k)} = \frac{1}{n_g}(\mathbf{y}^t\mathbf{y} - 2\rho^{(k)t} s_1^{(k)} + \rho^{(k)t} s_2^{(k)} \rho^{(k)}), \tag{5.10}$$

$$\nu^{(k)} = \frac{1}{n_t} s_3^{(k)}, \tag{5.11}$$

$$\Sigma^{(k)} = \frac{1}{n_t} s_4^{(k)} - \nu^{(k)t}\nu^{(k)}. \tag{5.12}$$

La matrice inverse Γ de Σ est nécessaire dans la S-step du SAEM. Or, la matrice $\Sigma^{(k)}$ est mal-conditionnée et le calcul de son inverse est instable. En particulier, lorsque la position du sommet v_{ij} est presque fixe au cours de la séquence, l'élément sur la diagonale de Σ correspondant à ce sommet est très petit (ou nul) et Σ n'est donc pas inversible. C'est pourquoi, pour éviter ce problème, nous avons remplacé $\Sigma^{(k)}$ par $\Sigma^{(k)} + \lambda I_{2n_g}$, où I_{2n_g} est la matrice identité de taille $2n_g \times 2n_g$ et λ une valeur positive fixée. Nous avons montré expérimentalement que le choix du paramètre λ avait peu d'effet sur les résultats d'estimation. En pratique, nous l'avons fixé à $\lambda = 1$. D'après ce qui précède, nous obtenons comme estimateur de Γ à l'itération k du SAEM

$$\Gamma^{(k)} = (\Sigma^{(k)} + \lambda I_{2n_g})^{-1}. \tag{5.13}$$

S-step

Le choix de la méthode MCMC dans la S-step est cruciale pour avoir une bonne convergence de l'algorithme.

A une itération k de la S-step, les vecteurs $\mathbf{v}_i$ peuvent être mis à jour séparément, dans la mesure où, par hypothèse, les positions des sommets sont indépendants en temps. La dimension du vecteur $\mathbf{v}_i$ étant grande, une simulation directe du vecteur entier $\mathbf{v}_i^{(k)}$ selon la distribution $p(\mathbf{v}_i|\mathbf{y}_i;\theta^{(k-1)})$ n'est pas adéquate. Pour cette raison, il est indispensable de simuler $\mathbf{v}_i^{(k)}$ coordonnée par coordonnée au moyen d'un échantillonneur de Gibbs.

Pour chaque temps t_i, tous les sommets sont successivement visités et pour chaque sommet j, nous mettons à jour la position v_{ij} en échantillonnant selon la distribution cible

$$\pi_{ij}^{(k)}(v_{ij}) = p\left(v_{ij}|\{v_{il}^{(k-1)}, l<j\}, \{v_{il}^{(k)}, j<l\}, \mathbf{y}_i; \theta^{(k-1)}\right), \tag{5.14}$$

Du fait que cette distribution est connue à une constante près, nous couplons l'algorithme de Gibbs à un schéma de Metropolis-Hasting (MH). Nous obtenons ainsi un algorithme de type Metropolis-Hastings-Within-Gibbs (MHWG).

Sachant que le champ aléatoire $\mathbf{v}|\mathbf{y}$ est markovien, la distribution cible dépend seulement des positions des sommets dans le voisinage de j. Cela implique que la

simulation de chaque v_{ij} ne met en jeu que quelques sommets localisés dans le voisinage de j.

A l'itération k du SAEM, l'algorithme MH qui permet de mettre à jour le vecteur courant $v_{ij}^{(k-1)}$ se résume à trois étapes

MH1 Une position candidate v'_{ij} est tirée au sort selon une loi de distribution $q_{ij}^{(k)}$ décrite plus loin.

MH2 Nous calculons la probabilité d'acceptation

$$\alpha = \min\left(\frac{\pi_{ij}^{(k)}(v'_{ij})}{\pi_{ij}^{(k)}(v_{ij}^{(k-1)})}\frac{q_{ij}^{(k)}(v_{ij}^{(k-1)})}{q_{ij}^{(k)}(v'_{ij})}, 1\right).$$

MH3 Nous simulons la réalisation u d'une variable uniforme $\mathcal{U}[0,1]$. Si $u < \alpha$ alors $v_{ij}^{(k)} = v'_{ij}$, sinon $v_{ij}^{(k)} = v_{ij}^{(k-1)}$.

Le choix de la distribution q_{ij} de l'étape **MH1** est déterminant pour la rapidité de la convergence du SAEM. Nous l'avons défini minutieusement afin de garantir un tirage raisonnable de position candidate. Soit $c_{ij}^{(k)}$ l'ensemble des points de l'intérieur du polygone formé par les positions courantes $v_{il}^{(k-1)}$ ou $v_{il}^{(k)}$ des sommets voisins de j. Le candidat v'_{ij} est choisi dans l'ensemble $c_{ij}^{(k)}$, en excluant tout point qui générerait des singularités dans la triangulation (croisement d'arêtes de triangles). Le choix des candidats garantit que les déformations restent bijectives. La sélection de v'_{ij} est faite en tirant selon la loi de distribution uniforme $q_{ij}^{(k)}$ sur l'ensemble des points non singuliers de $c_{ij}^{(k)}$. Ne dépendant pas de la position courante $v_{ij}^{(k-1)}$, cette distribution est symétrique au sens où $q_{ij}^{(k)}(v'_{ij}) = q_{c_{ij}^{(k)}}(v'_{ij}) = q_{c_{ij}^{(k)}}(v_{ij}^{(k-1)}) = q_{ij}^{(k)}(v_{ij}^{(k-1)})$ ($q_{c_{ij}^{(k)}}(\cdot)$ désigne la densité de la distribution uniforme sur l'ensemble $c_{ij}^{(k)}$). Aussi la probabilité d'acceptation se simplifie de la manière suivante

$$\alpha = \min\left(\frac{\pi_{ij}^{(k)}(v'_{ij})}{\pi_{ij}^{(k)}(v_{ij}^{(k-1)})}, 1\right).$$

5.4 Application

Nous avons appliqué l'algorithme SAEM aux séquences de CT-scans présentées dans le chapitre 4 (voir la figure 4.1). En raison de l'utilisation d'agents de contraste, ces séquences ont des dynamiques de niveau de gris qui ne sont pas constantes au cours du temps. Comme ce type de dynamique n'est pas pris en compte dans le modèle décrit dans ce chapitre, nous avons réalisé nos expériences sur la fin de la séquence lorsque la diffusion de l'agent de contraste atteint un état stationnaire et les niveaux de gris associés aux différents tissus restent constants au cours du temps.

Pour l'initialisation du prototype et de la partition en éléments finis, nous avons établi une procédure qui repose sur la segmentation préalable d'une des images des séquences [11]. Les paramètres de mise en œuvre sont : la suite de pondérations

$(\gamma_k)_{k\geq 0}$ de la SA-step qui est fixée à 1 pendant les 100 premières itérations et vaut $\gamma_k = (k - K)^{-1}$ durant les itérations K suivantes. A chaque S-step, 5 itérations de Metropolis-Hasting sont effectuées.

L'application de l'algorithme sur une séquence est illustrée sur les figures 5.3 et 5.4. La figure 5.3 montre deux estimations de prototypes qui permettent d'en apprécier la qualité et la précision. La figure 5.4 montre une application possible de la technique à la correction au débruitage de la séquence.

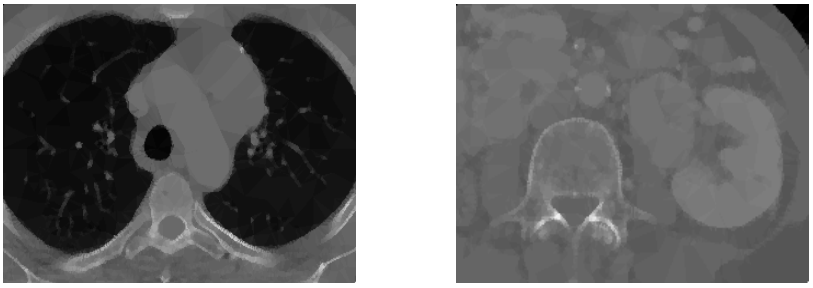
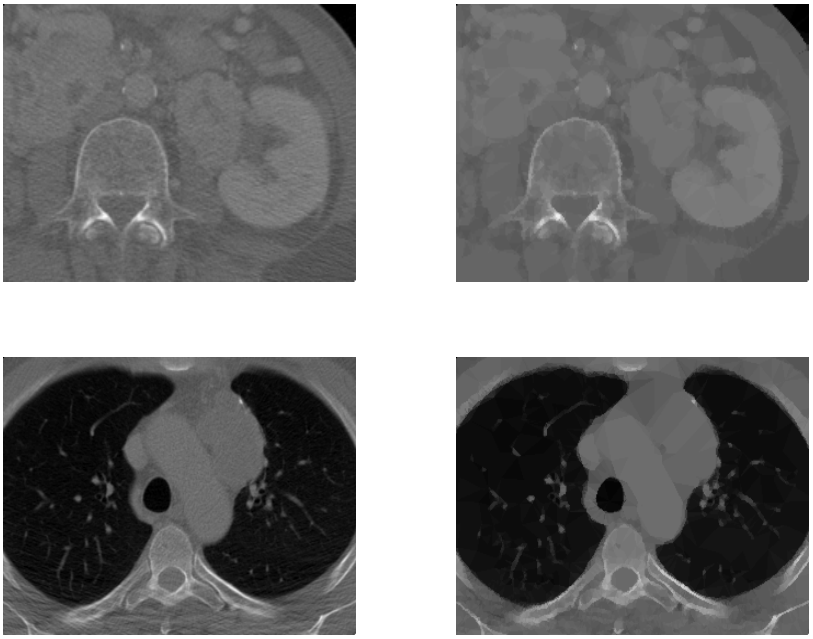


FIG. 5.3 – Exemples de prototypes estimés.



Observations Prototypes recalés

FIG. 5.4 – Débruitage de la séquence par recalage de prototypes sur les observations.

Pour évaluer la précision de l'estimation des paramètres, nous avons effectué quelques expériences sur des données synthétiques. En utilisant le prototype et les valeurs de paramètres estimés sur les séquences réelles, nous avons simulé dix sé-

quences de cinq images de la manière suivante :

1. simulation de déplacements de sommets $\mathbf{v}$ avec un échantillonneur de Gibbs,
2. application des déplacements simulés au prototype pour former une image déformée,
3. addition d'un bruit à l'image déformée.

Nous avons appliqué l'algorithme SAEM à ces séquences et calculé le biais relatif et la variance de chaque estimateur. Les résultats, qui sont présentés dans la table 5.1, montrent que les biais sont très faibles en dépit du faible nombre d'échantillons et que les erreurs relatives sont satisfaisantes.

param.	unité	dimension	biais relatif (%)	écart-type relatif(%)
ρ	niveaux de gris	1069	-0.03	3.3
σ	niveaux de gris	1	7.4	7.4
ν	pixels	1106	0.6	5.9
Σ^{-1} (*)		15180	0	0.03

TAB. 5.1 – Estimation des paramètres sur données synthétiques. (*) Pour l'estimation de Σ^{-1}, le biais et la variance sont exprimés en valeur absolue.

Nous avons ensuite évaluer l'impact du nombre d'éléments de la triangulation sur l'estimation. Pour cela, nous avons construit 5 prototypes de taille décroissante, en décimant la triangulation utilisée pour les simulations. Les tailles des prototypes décimés sont respectivement de 453, 353, 253, 153 et 103 sommets, le prototype initial étant de taille 553. Les résultats d'estimation sur ces prototypes sont présentés dans la table 5.2.

n_v	553 (^{1})		453		353		253		153		103	
Proto.	7.4		7.4		7.7		8.4		10.7		11.9	
σ	7	(7)	22	(22)	33	(33)	56	(56)	119	(119)	151	(151)
ν	0.6	(5.9)	0.1	(4.6)	0.1	(4.2)	0.3	(5.9)	-0.3	(2.5)	-0.3	(3.6)
Σ^{-1} (^{2})	0	(0.03)	0	(0.03)	0	(0.04)	0	(0.04)	0	(0.06)	0	(0.07)

TAB. 5.2 – Effet de la décimation de la triangulation du prototype sur les biais et variance relatives des estimateurs de paramètres. (^{1}) Cette taille est celle du prototype initial utilisé pour les simulations. (^{2}) Pour l'estimation de Σ^{-1}, le biais et la variance sont exprimés en valeur absolue.

L'erreur est relativement stable en dépit de la décimation, que ce soit pour le prototype ou les paramètres de déplacement ν et Σ^{-1}. Par contre, l'estimation de la variance du bruit est très affectée par la décimation.

Ces résultats montrent que l'estimation est robuste à la décimation : la réduction du nombre de sommet n'induit pas de faux déplacements mais influe simplement sur l'estimation du bruit. Du fait de cette propriétés, nous estimons qu'il est possible de mettre en place une stratégie d'estimation "coarse-to-fine" dans laquelle on

chercherait une initialisation grossière du prototype que l'on raffinerait ensuite petit à petit au cours des itérations.

5.5 Références du chapitre

[1] S. Allassonnière, Y. Amit, and A. Trouvé. Towards a coherent statistical framework for dense deformable template estimation. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B*, 69(1) :3–29, Feb 2007.

[2] S. Allassonnière and E. Kuhn. Stochastic algorithm for parameter estimation for dense deformable template mixture model. *ESAIM : Probability and Statistics*, 2009. To be published.

[3] S. Allassonnière, E. Kuhn, and A. Trouvé. Bayesian deformable models building vis stochastic approximation algorithm : a convergence study. *HAL-CNRS*, 2007.

[4] B. Delyon, M. Lavielle, and E. Moulines. Convergence of a stochastic approximation version of the EM algorithm. *Annals of Statistics*, 27 :94–128, 1999.

[5] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society : series B*, 39 :1–38, 1977.

[6] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6 :721–741, 1984.

[7] U. Grenander. *General Pattern Theory*. Oxford University Press, 1994.

[8] U. Grenander and M. Miller. Computational Anatomy : an emerging discipline. *Quarterly of Applied Mathematics*, 56(4) :617–694, December 1998.

[9] E. Kuhn and M. Lavielle. Coupling a stochastic approximation version of EM with a MCMC procedure. *ESAIM : Probability and Statistics*, 8 :115–131, 2004.

[10] F. Richard and A. Samson. Metropolis-Hastings methods for finite element-based registration. In *Proceedings of the conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'07)*, pages 1–6, Minneapolis, MN, USA, 2007. IEEE Computer Society. .

[11] F.JP Richard, A. Samson, and C. Cuénod. A SAEM algorithm for the estimation of template and deformation parameters in medical image sequences. *Statistics and Computing*, 19(4) :465–478, 2009.

Chapitre 6

Segmentation et recalage en reconstruction faciale

6.1 Introduction

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués dans le cadre d'un projet multidisciplinaire réunissant des anatomistes du laboratoire d'anatomie fonctionnelle de l'Université Paris Descartes (F. Tilotta et JF. Gaudy), un radiologue du centre d'imagerie médicale de l'Hôpital St Cloud Val d'Or (S. Verdeille) et des mathématiciens du MAP5 (M. Bérar, S. Gey, J. Glaunès, F. Richard et Y. Rozenholc). Le thème du projet est la reconstruction faciale. Il est axé sur une base de données de CT-scans de la tête d'individus sains, qui a été acquise pendant la thèse de F. Tilotta (2005-2008). Les travaux effectués sont décrits en détail dans deux articles [10, 11] écrits pour *Forensic Science International*, qui est la revue de référence en médecine légale.

En médecine légale, la reconstruction cranio-faciale désigne un procédé qui a pour finalité de retrouver la morphologie du visage à partir de l'observation du crâne. Ce type de procédé est utilisé pour l'identification de personnes décédées inconnues, quand les autres méthodes d'identification telles que l'analyse dentaire ou des séquences ADN n'apportent pas des résultats satisfaisants. Les méthodes traditionnelles sont manuelles (sculpture, dessin,...). Elles sont donc relativement difficiles à mettre en œuvre et présentent l'inconvénient majeur d'être subjectives [2].

Ces dernières années, la reconstitution faciale a connu un nouvel essor grâce au développement de l'informatique et de l'imagerie médicale [5, 16]. A présent, de nouvelles approches permettent de réduire les délais de réalisation et la part de subjectivité introduite dans la technique de reconstruction. La reconstruction faciale par ordinateur s'obtient habituellement en ajustant un (ou plusieurs) prototype facial à un crâne sec. Les approches d'ajustement sont essentiellement éparses [3, 4,

15] ou denses [7, 10, 14], selon que le prototype est défini sur un ensemble fini de points anatomiques faciaux ou sur l'ensemble des surfaces crânienne et faciale.

Que ce soit en approche éparse ou dense, le prototype est habituellement construit à partir des individus d'une base de données. Par conséquent, la qualité du prototype dépend de cette base de données. En approche éparse [4, 15], la base de données se réduit habituellement à des mesures d'épaisseurs de tissus mous qui sont faites en quelques points anatomiques sur un large ensemble d'individus au moyen d'instrumentations non-invasives. En approche dense, la base de données se compose de surfaces crâniennes et faciales de plusieurs individus, qui s'observent préférentiellement à partir de CT-scans de la tête. Or, cette technique d'imagerie a l'inconvénient d'être invasive. Aussi les bases de données de CT-scans sont le plus souvent limitées en taille et comportent peu d'individus sains.

La première partie du projet a été consacrée à la construction d'une base de données conséquente pour la reconstruction faciale [11]. Sous sa forme brute, cette base est constituée des CT-scans des têtes d'une population d'individus sains. En outre, nous avons mis au point une technique de segmentation des CT-scans qui permet d'en extraire les surfaces crâniennes et faciales sous la forme d'un maillage tri-dimensionnel. Ainsi, la base de données a pu être complétée par les surfaces extraites de chaque individu. De plus, en nous appuyant sur les surfaces extraites, nous avons fait des mesures d'épaisseurs de tissus mous en des points anatomiques définis, renouvelant ainsi les mesures précédemment faites dans la littérature. La technique d'extraction des surfaces est présentée dans la section 6.2.

Les méthodes de reconstruction existantes ajustent habituellement le prototype au crâne sec, en considérant le crâne et le visage dans leur globalité. Aussi ces méthodes mettent plutôt l'accent sur les similarités globales et grossières entre les individus et négligent la variabilité locale de la morphologie faciale.

Dans la seconde partie du projet, nous avons conçu une technique de reconstruction qui tient compte de cette variabilité locale. La technique que nous avons proposée repose sur une représentation des surfaces basée sur la notion mathématique de courants [12, 13]. Cette représentation, qui a d'ores et déjà fait ses preuves dans de nombreuses autres applications médicales [1, 6], permet d'appréhender les surfaces comme des champs de vecteurs définis sur l'espace entier. Elle offre plusieurs caractéristiques essentielles à la conception de notre technique de reconstruction faciale. Géométriquement, le cadre mathématique des courants est particulierement bien adapté pour la définition et le calcul de distances entre surfaces. Les objets mathématiques associés aux surfaces sont dans un espace vectoriel. Ceci permet de définir une notion de moyenne de surfaces, qui est fondamentale pour la reconstruction faciale. Par ailleurs, la reconstruction faciale nécessite le recalage d'objets qui peuvent être éloignés géométriquement. Le cadre des courants offre la possibilité de définir des actions de déformations de surfaces (rigide ou non-rigide) qui permettent

de réaliser ces recalages avec précision. Un des avantages majeurs des courants est la simplicité de la représentation des surfaces qu'ils manipulent. Aucune paramétrisation n'est utilisée, la surface étant seulement représentée par un nuage de points, lui-même associé à un ensemble de vecteurs normaux. Mathématiquement, cette souplesse des courants facilite la manipulation locale des surfaces. La technique de reconstruction faciale basées sur les courants sera présentée dans la section 6.3.

6.2 Extraction surfacique

Dans cette partie, je présente les différentes techniques mises au point pour l'extraction des surfaces osseuse et faciale des CT-scans de la tête.

6.2.1 Extraction des contours

Pour localiser les tissus d'intérêt (tissu osseux ou tissus mous) sur les coupes de CT-scans, nous utilisons une technique de seuillage. Cette étape est relativement simple en raison du caractère des images radiologiques et de leur acquisition. En effet, le protocole d'acquisition des données par rayons X garantie que les niveaux de gris des tissus d'intérêt appartiennent à des plages bien distinctes. Ces plages de niveaux de gris établis en Unités Hounsfield (UH), sont référencées dans la littérature et sont stables d'une acquisition à l'autre. Selon cette échelle, la graisse s'approche de -100 UH, le muscle d'environ +100 UH, l'os trabéculaire varie de +100 à +300 UH et l'os cortical s'étend au-dessus de l'os trabéculaire jusqu'à environ +2000 UH. La segmentation est illustrée sur la figure 6.1.



(a) (b) (c)

FIG. 6.1 – Segmentation d'un CT-scan. (a) coupe, segmentations (b) des tissus osseux (c) des tissus mous.

A la suite de la segmentation, nous extrayons deux courbes, l'une qui enveloppe les tissus osseux et l'autre les tissus mous. Ces deux courbes sont construites en utilisant le même procédé et en respectant plusieurs contraintes :

- construire des courbes fermées qui enveloppent les régions d'intérêt en comblant les creux et les trous qu'elles comportent.
- faire en sorte que les courbes épousent précisément la limite des régions d'intérêt (os ou tissus mous).

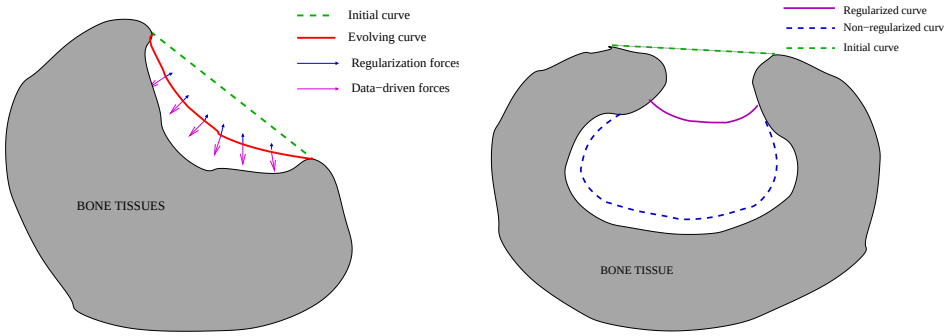


FIG. 6.2 – Dynamique de l'évolution de courbe.

L'enveloppe est obtenue en faisant évoluer une courbe qui englobe initialement l'ensemble de la région d'intérêt. Cette évolution se fait sous l'action de trois forces. Comme cela est illustré sur la figure 6.2, la première de ces forces aspire vers l'intérieur de la courbe les points de la courbe qui ne sont pas fixés sur la région d'intérêt. En chaque point où elle agit, cette force d'aspiration est constante et toujours orientée dans le sens de la normale interne à la courbe au point considéré. Comme la région d'intérêt est toujours située à l'intérieur de la courbe, la force d'aspiration a pour effet d'acheminer la courbe vers les frontières de la région où elle doit se fixer. La seconde force, dite force d'adhésion, s'ajoute à la force d'aspiration sur les points de la courbe dont un voisin sur la courbe est déjà placé sur une frontière d'intérêt. Elle renforce ainsi l'adhésion de la courbe aux régions d'intérêt. Tout comme la force d'aspiration, elle agit dans le sens de la normale interne à la courbe et de manière constante. Les forces d'aspiration et d'adhésion constituent l'attache aux données. Elles permettent de guider fidèlement la courbe vers les frontières de la région devant être enveloppée.

A elles seules, ces deux forces ne sont cependant pas suffisantes pour extraire la courbe. Appliquées seules, elles ont tendance à trop attirer les courbes vers l'intérieur des creux et des trous que comportent les régions d'intérêt. C'est pourquoi, il est indispensable d'introduire une troisième force capable d'atténuer ce phénomène. Pour définir cette force, l'idée est la suivante. Lorsqu'une courbe progresse dans un creux sous l'effet des forces d'aspiration et d'adhésion, sa courbure en chaque point tend à augmenter, ce qui la rend de plus en plus irrégulière. Par conséquent, en régularisant la courbe, il est possible de contre-balancer l'effet de ces deux forces à l'intérieur du creux. La troisième force est donc une force de régularisation par courbure moyenne : en chaque point de la courbe qui n'est pas déjà fixé sur une région d'intérêt, cette force est appliquée dans la direction de la normale et dans le sens donné par le signe de la courbure, et proportionnelle à la racine cubique de la courbure. Cette force tend à réduire la courbure partout sur la courbe. Lorsque la force de régularisation agit seule, la courbe évolue vers un segment de droite (courbe dont la courbure est zéro en tout point). Lorsque la force de régularisation



FIG. 6.3 – Extraction de contour par évolution de courbes.

est appliquée en association avec les forces d'aspiration et d'adhésion, la courbe évolue suivant un compromis entre la régularité et la précision de son ajustement aux frontières de la région d'intérêt.

L'évolution de la courbe s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dC}{dt}(t) = E(C(t)) \left(p_1 k^{\frac{1}{3}}(t) + p_2 + p_3 \left(\frac{dE}{ds^+}(C(t)) + \frac{dE}{ds^-}(C(t)) \right) \right) N(t). \qquad (6.1)$$

Dans la partie droite de l'équation, $C(t)$ représente la courbe au temps t et $\frac{dC}{dt}(t)$ sa dérivée temporelle, qui traduit formellement son évolution au cours du temps. La partie gauche de l'équation décrit les forces agissant sur la courbe. Le terme E est l'une des images binaires obtenues après segmentation. Le terme $E(C(t))$ pondère les forces qui agissent au point $C(t)$ de la courbe. Comme ce terme vaut 0 si $C(t)$ est sur une zone d'intérêt (tissu osseux ou tissu mou), il annule les forces lorsqu'un point de la courbe atteint une région d'intérêt. Il permet ainsi de fixer la courbe sur la région en question. La quantité $N(t)$ est la normale unitaire interne à la courbe au point $C(t)$. Elle donne la direction d'évolution de la courbe en chaque point. Dans cette direction, la vitesse d'évolution dépend essentiellement des autres termes, qui traduisent les forces en présence :

- $p_1 k^{\frac{1}{3}}(t)$ est la force de régularisation, $k(t)$ étant la courbure signée de la courbe et p_1 est une constante positive qui pondère la régularisation.
- p_2 est la force d'aspiration. Il s'agit d'une constante positive.
- $p_3(\frac{dE}{ds^+}(C(t)) + \frac{dE}{ds^-}(C(t)))$ est la force d'adhésion. Les quantités $\frac{dE}{ds^+}(C(t))$ et $\frac{dE}{ds^+}(C(t))$ représentent les dérivées de l'image E à droite et à gauche du point de la courbe et le long de la courbe. Ces dérivées sont différentes de zéro lorsque les voisins à droite ou à gauche d'un point de la courbe ont une étiquette différente de celle du point. Si ce n'est pas le cas, il n'y pas de force d'adhésion. Si c'est le cas, le terme produit une force d'adhésion qui vient s'ajouter à la force d'aspiration. p_3 est une constante positive qui détermine le poids de la force d'adhésion.

On initialise la courbe sur l'enveloppe convexe des tissus osseux ou des tissus mous. Ensuite, en utilisant l'équation décrite plus haut, nous faisons évoluer des

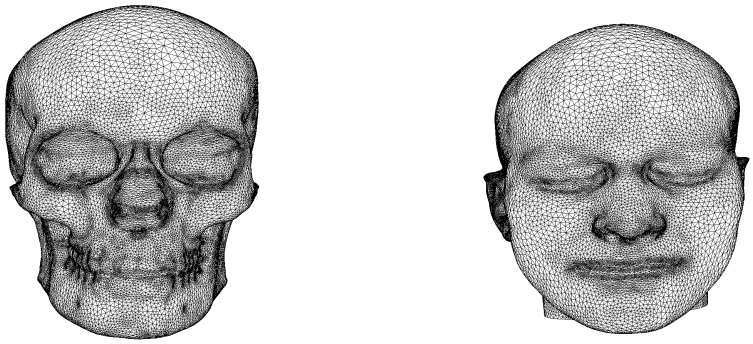


FIG. 6.4 – Maillages complets de surfaces crânienne et faciale.

courbes entre les sommets successifs de l'enveloppe convexe. Les différentes régions de la surface du massif crânio-facial ou du visage n'ont pas toutes les mêmes caractéristiques de courbure. Aussi est-il difficile de sélectionner une même valeur de poids de régularité pour le calcul des enveloppes sur les différentes coupes. Pour pallier cette difficulté, nous utilisons un procédé itératif qui fait croître progressivement la valeur attribuée à la force d'aspiration p_2 et l'adapte localement au massif cranio-facial [11].

6.2.2 Surfaces maillées

A l'issue de l'étape précédente, nous disposons pour chaque coupe d'un polygone fermé qui est une approximation discrète du contour extérieur de l'objet à repérer au niveau de la coupe. A l'aide d'un algorithme de programmation dynamique, nous calculons un maillage triangulaire qui relie les courbes des coupes successives. Nous empilons ensuite les maillages entre coupes pour former le maillage de la surface complète. Le maillage obtenu par empilement a le défaut d'être lié à la géométrie sous-jacente de l'image et de ce fait sujet aux *artefacts* classiques qu'elle présente (marche d'escalier). Pour remédier à ce défaut, il est nécessaire d'appliquer une régularisation. Cette étape est réalisée l'aide du logiciel YAMS de P. Frey, qui régularise le maillage (courbure, taille et géométrie des triangles) tout en préservant de bonnes qualités géométriques. Un exemple de maillages complets de crâne et de visage est montré sur la figure 6.4.

Par ailleurs, en chaque sommet du maillage de la surface osseuse, on calcule les normales extérieures et leur intersection avec le maillage de la surface peau. En chaque point de la surface os, on définit ainsi le long de la normale extérieure, une épaisseur de tissus mous. Ce procédé est illustré sur la figure 6.5.

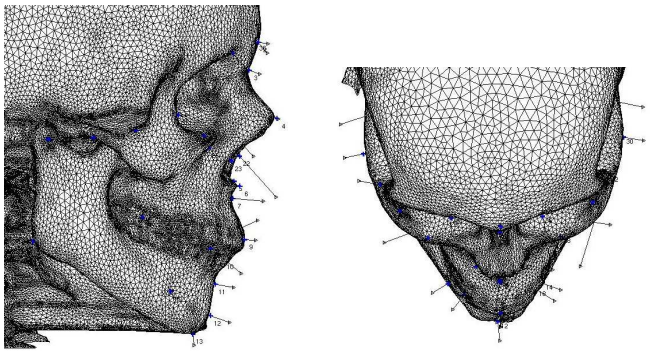


FIG. 6.5 – Epaisseurs de tissus mous sur la surface crânienne.

6.3 Reconstruction cranio-faciale

Dans cette partie, je présente la technique de reconstruction faciale que nous avons mise au point.

6.3.1 Champs de vecteurs normaux étendus

Dans un premier temps, j'introduis le modèle mathématique de surface sous-jacent à notre approche. Ce modèle est directement inspiré des idées de l'article [12].

Soit une surface arbitraire S à laquelle on associe l'ensemble des vecteurs normaux unitaires orientés. On note $\vec{S}(x)$ le vecteur normal au point x de S. L'application $x \mapsto \vec{S}(x)$ est le champ de vecteurs normaux intrinsèque à la surface. On transforme ce champ en un nouveau champ qui n'est plus exclusivement défini sur la surface mais sur l'espace entier. Pour cela, pour $\sigma > 0$, on considère le noyau gaussien tridimensionnel

$$k_\sigma(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Le nouveau champ, que l'on appelle Champ des Vecteurs Normaux Etendus (CVNE) et que l'on note $\vec{S}^\sigma$, est alors défini pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ par

$$\vec{S}^\sigma(x) = \int_S k_\sigma(|y-x|)\vec{S}(y)dS(y),$$

où

- $|y-x|$ est la norme euclidienne du vecteur $y-x$,
- l'intégrale $\int_S$ est prise sur toute la surface S,
- $dS(x)$ représente l'élément infinitésimal de la surface au point y.

Intuitivement, ce nouveau champ donne à la surface une épaisseur dans l'espace, en lui appliquant un lissage gaussien.

En pratique, nous utilisons une version discrète basée sur un maillage triangulaire de surface. Soit $\mathbf{S}$ une surface triangulée correspondant à S. Pour un triangle t de

$\mathbf{S}$, on dispose des sommets (a_t, b_t, c_t) et du barycentre $O_t = \frac{a_t+b_t+c_t}{3}$. Nous calculons le vecteur normal (non-unitaire) avec la formule

$$n_t = \frac{1}{2}(b_t - a_t) \wedge (c_t - a_t),$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace. Ce vecteur est orthogonal au triangle et de norme la surface du triangle. Nous obtenons une formule approchée qui permet de calculer le CVNE en chaque point de l'espace :

$$\vec{S}^\sigma(x) \simeq \sum_t k_\sigma(|O_t - x|)n_t,$$

où la somme est effectuée sur tous les triangles du maillage.

L'ensemble des CVNE a une structure d'espace vectoriel. Dans cet espace, l'addition interne de deux CVNE $\vec{S}^\sigma$ et $\vec{T}^\sigma$ est le CVNE vérifiant $\vec{S}^\sigma(x)+\vec{T}^\sigma(x)$ en chaque point x de l'espace. La multiplication externe d'un CVNE $\vec{S}^\sigma$ par un scalaire r est le CVNE vérifiant $r\vec{S}^\sigma(x)$ en chaque point x de l'espace.

En outre, cet espace vectoriel peut être muni d'un produit scalaire défini par

$$\left\langle \left\langle \vec{S}^\sigma, \vec{T}^\sigma \right\rangle \right\rangle_\sigma = \int_S \int_T k_\sigma(|y - x|)\langle \vec{S}(x), \vec{T}(y)\rangle dS(x)dT(y),$$

où $\langle u, v\rangle$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^3$.

En utilisant les maillages $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ pour approcher les surfaces S et T, cette formule devient

$$\left\langle \left\langle \vec{S}^\sigma, \vec{T}^\sigma \right\rangle \right\rangle_\sigma \simeq \sum_s \sum_t k_\sigma(|O_t - O_s|)\langle n_s, n_t\rangle,$$

où la double somme est effectuée sur tous les triangles des surfaces maillées $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$.

A partir de ce produit scalaire, on peut définir une distance entre les surfaces S et T

$$d_\sigma(\vec{S}^\sigma, \vec{T}^\sigma) = \sqrt{\left\langle \left\langle \vec{S}^\sigma, \vec{S}^\sigma \right\rangle \right\rangle_\sigma + \left\langle \left\langle \vec{T}^\sigma, \vec{T}^\sigma \right\rangle \right\rangle_\sigma - 2\left\langle \left\langle \vec{S}^\sigma, \vec{T}^\sigma \right\rangle \right\rangle_\sigma},$$

qui dépend implicitement du noyau k_σ.

6.3.2 Patchs

Pour rendre locale notre approche de reconstruction, nous travaillons sur des morceaux des surfaces osseuses. Chacun de ces morceaux correspond à une partie anatomique que l'on a prédéfinie à partir d'un ensemble ordonné de points anatomiques craniens (appelées patchs). On nomme patch-os un morceau de surface crânienne correspondant à un patch.

Pour l'extraction d'un patch-os d'une surface crânienne, nous localisons manuellement les points anatomiques sur la surface. A l'aide d'une méthode combinant les algorithmes de Surashky *et al.* [9] et de *Fast Marching Algorithm* [8], nous calculons

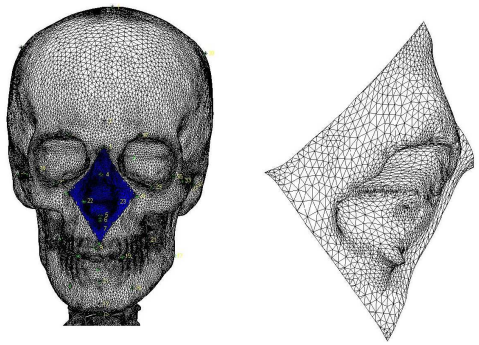


FIG. 6.6 – Extraction de patch-os sur le patch nasal.

ensuite les géodésiques qui relient les points anatomiques successifs du patch. Le patch-os est alors obtenu comme le morceau de surface entre les géodésiques. Une illustration de l'extraction d'un patch-os est présentée sur la figure 6.6.

A chaque patch-os, on associe un morceau de surface faciale appelé patch-peau. Pour un individu donné, on projette les points anatomiques du patch-os sur la surface faciale, avec une approche par points les plus proches. On calcule ensuite les géodésiques entre les points projetés de la surface faciale et on définit le patch-peau comme le morceau de surface faciale entre les géodésiques.

Par ailleurs, nous alignons les patchs-os B_i sur un patch de référence B_0 en nous appuyant sur les points anatomiques. Cet alignement est obtenu en minimisant la distance $d_\sigma(\overrightarrow{\varphi(B_i)}^\sigma, \vec{B}_0^\sigma)$ sur l'ensemble des transformations semi-rigides φ (rotation, translation et dilatation) [12]. Pour un individu i donné, on note d_σ^{0i} le minimum réalisé, φ_{i0} la transformation qui réalise le minimum et $\varphi_{i0}(B_i)$ la surface déformée qui lui est associée. Nous appliquons en outre la même déformation au patch-peau S_i correspondant au patch-os B_i. Nous obtenons ainsi un patch-peau aligné $\varphi_{i0}(S_i)$.

6.3.3 Estimation de la surface faciale

Le problème de la reconstruction faciale peut se formuler de la manière suivante. Disposant d'une collection de n individus pour lesquels les surfaces crâniennes et faciales sont connues, on cherche à estimer la surface faciale associée à la surface crânienne d'un nouvel individu.

Dans le contexte de notre étude, les reconstructions sont restreintes aux régions d'intérêt formés par les patchs. Nous notons B_0 le patch-os de l'individu dont la surface faciale est à reconstruire et $(B_i, S_i)_{i=1}^n$ l'ensemble de couples de patch-os et patch-peau disponibles dans la base de données.

Notre approche de reconstruction se décompose en trois étapes. Tout d'abord, comme cela est précisé dans la section 6.3.2, les patchs-os et patch-peau de la base de données sont extraits et alignés en prenant pour référence le patch-os B_0. Nous obte-

nons ainsi une collection de patchs-peau et de patch-os alignés $(\varphi_{i0}(B_i), \varphi_{i0}(S_i))_{i=1}^n$. Nous définissons ensuite une moyenne de surfaces

$$\widehat{\vec{S}_0^\sigma} := \frac{\sum_{i=1}^n w_{i0} \overrightarrow{\phi_{i0}(S_i)^\sigma}}{\sum_{j=1}^n w_{j0}}, \tag{6.2}$$

pondérés par des poids w_{i0} que nous spécifierons par la suite. Cette moyenne donne une estimation de la surface faciale associée au patch-os B_0. Cependant, elle est exprimée dans l'espace des CVNE. De ce fait, elle ne peut pas se représentée sous la forme d'une surface. Pour obtenir une estimation sous forme surfacique, nous réalisons une dernière étape. Nous choisissons la surface alignée $\phi_{i0}(S_i)$ qui est la plus proche de $\widehat{\vec{S}_0^\sigma}$ au sens de la distance d_σ. Puis, nous recalons cette surface avec la surface $\widehat{\vec{S}_0^\sigma}$ en utilisant la méthode non-rigide décrite dans [12]. La surface recalée que nous obtenons alors est l'estimation finale de la surface faciale associée à B_0.

Les poids w_{i0} sont fixés en fonction de la similarité entre les patchs-os B_i et B_0 :

$$w_{i0} = \begin{cases} 0, & \text{si } d_\sigma^{0i} > c\, d_\sigma^0, \\ \frac{1}{d_\sigma^{0i}}, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $d_\sigma^0 = \min_{i=1}^n d_\sigma^{0i}$ est le minimum des distances des patchs-os au patch de référence B_0. Le seuil c a été fixé d'après les résultats d'expériences dans l'intervale $[1, +\infty[$ à la valeur 1.4. La taille σ du noyau k_σ est fixée à la valeur 4.

6.4 Résultats

Dans cette partie, je présente à grands traits les résultats concernant cette étude. Pour une description détaillée et commentée de ces derniers, je renvoie le lecteur aux articles [10, 11].

Les avancées que notre étude a permis de réaliser sont de trois ordres.

En premier lieu, nous avons construit une base de données dédiée à la tête humaine. Cette base de données est constituée de plus de 80 CT-scans de la tête d'individus présumés sains. Ces images sont complétées par les maillages des surfaces crâniennes et faciales, qui ont extraites des CT-scans en utilisant notre technique d'extraction de surface. La base de données qui a été constituée répond à une demande importante de la part de communautés qui ne sont pas seulement concernées par la reconstruction faciale. Elle donne la possibilité exceptionnelle de travailler sur des données d'individus sains qui sont difficiles à acquérir et à trouver en raison du caractère invasif de la technique d'imagerie utilisée.

Par ailleurs, en nous appuyant sur les surfaces maillées, nous avons calculé les épaisseurs moyennes des tissus mous sur une partie de la base constituée de 47 sujets féminins à l'emplacement de plusieurs points anatomiques du crâne. Les résultats obtenus, qui ont été comparés avec ceux de la littérature, apportent de nouvelles

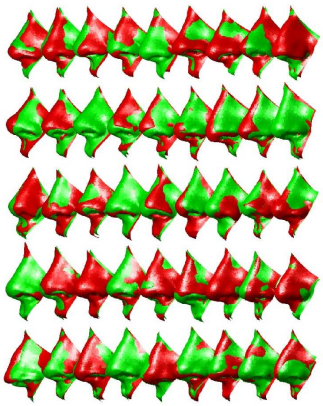


FIG. 6.7 – Comparaison entre les patchs-peau estimés (en vert) et les vrais patchs-peau (en rouge).

données expérimentales qui peuvent servir de référence non seulement pour la reconstruction faciale mais aussi d'autres études concernant la tête humaine (chirurgie, archéologie,...).

Enfin, en utilisant la base de données, nous avons évalué notre technique de reconstruction faciale. Nous nous sommes intéressés au nez et au menton. Nous avons effectué une validation croisée pour calculer une erreur moyenne de reconstruction. Cette validation croisée est illustrée sur la figure 6.7. Les résultats que nous obtenons dépassent ceux rapportés dans la littérature et en particulier, ceux de [14]. Pour la région nasale, nous obtenons une erreur moyenne de 0.99mm, alors que celle de Vandermeulen et al. est d'environ 2,56mm. Sur la région mentonnière, nous avons également une erreur de 0.99mm alors que celle de Vandermeulen et al. est située entre 2 et 2,5mm.

6.5 Références du chapitre

[1] G. Auzias, J. Glaunès, A. Cachia, P. Cathier, E. Bardinet, O. Colliot, J.F. Mangin, A. Trouvé, and S. Baillet. Multi-scale diffeomorphic cortical registration under manifold sulcal constraints. In *Proceedings of the fifth IEEE International Symposium on Biomedical Imaging : From Nano to Macro (ISBI 2008)*, pages 1127–1130, 2008.

[2] J-P. Beauthier. *Traité de médecine légale*, chapter La reconstitution faciale, pages 537–562. De Boeck University, 2008.

[3] M. Berar, M. Desvignes, G. Bailly, et al. 3D semi-landmarks-based statistical face reconstruction. *Journal of Computing and Information Technology*, 1 :31–43, 2006.

[4] P. Claes, D. Vandermeulen, S. De Greef, et al. Craniofacial reconstruction using a combined statistical model of face shape and soft tissue depths : methodology

and validation. *Forensic Science International*, 159S(1) :147–158, 2006.

[5] S. De Greef and G. Willems. Three-dimensional cranio-facial reconstruction in forensic identification : latest progress and new tendencies in the 21st century. *Forensic Science International*, 50(1) :12–17, 2005.

[6] S. Durrleman, X. Pennec, A. Trouvé, A.P. Thompson, and N. Ayache. Inferring brain variability from diffeomorphic deformations of currents : an integrative approach. *Medical Image Analysis*, 12(5) :626–637, october 2008.

[7] G. Quatrehomme, S. Cotin, G. Subsol, et al. A fully three-dimensional method for facial reconstruction based on deformable models. *Journal of Forensic Sciences*, 42(4) :649–652, 1997.

[8] J. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science*. Cambridge University Press, 1999.

[9] V. Surazhsky, T. Surazhsky, D. Kirsanov, et al. Fast exact and approximate geodesics on meshes. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2005*, volume 24, pages 553–560, 2005.

[10] F. Tilotta, J. Glaunès, F.JP Richard, and Y. Rozenholc. A local technique based on vectorized surfaces for craniofacial reconstruction. *Forensic Science International*, 2009. Submitted.

[11] F. Tilotta, F.JP Richard, J. Glaunès, M. Berar, S. Gey, S. Verdeille, Y. Rozenholc, and J.F. Gaudy. Construction and analysis of a head CT-scan database for craniofacial reconstruction. *Forensic Science International*, 191(1-3) :112.e1–112.e12, 2009.

[12] M. Vaillant and J. Glaunès. Surface matching via currents. In Gary E. Christensen and Milan Sonka, editors, *Proceedings of the nineteenth international conference on Information Processing in Medical Imaging (IPMI'2005)*, volume 3565 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 381–392. Springer, 2005.

[13] M. Vaillant, A. Qiu, J. Glaunès, and M.I. Miller. Diffeomorphic metric surface mapping in subregion of the superior temporal gyrus. *NeuroImage*, 34(3) :1149 – 1159, 2007.

[14] P. Vandermeulen, P. Claes, D. Loecks, et al. Computerized craniofacial reconstruction using ct-derived implicit surface representations. *Forensic Science International*, 159S :164–174, 2006.

[15] P. Vanezis, M. Vanezis, G. McCombe, et al. Facial reconstruction using 3-d computer graphics. *Forensic Science International*, 108 :81–95, 2000.

[16] C. Wilkinson. Computerized forensic facial reconstruction : A review of current systems. *Forensic Science, Medicine, and Pathology*, 1(3) :173–177, 2005.

Chapitre 7

Estimation et test sur textures browniennes anisotropes

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, je présente un ensemble de travaux concernant un modèle étendu de champ brownien fractionnaire introduit par A. Bonami et A. Estrade dans [4]. J'ai effectué ces travaux en collaboration avec H. Biermé dans le cadre du projet ANR "Milieux poreux : modèles et images" (Mipomodim, 05-BLAN-017) dirigé par A. Estrade entre 2005 et 2008.

Le modèle en question a été défini en considérant une classe de champs gaussiens (à accroissement stationnaire) dont le variogramme v est caractérisé par une fonction paire et positive f satisfaisant la relation

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, v(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{iy\cdot\zeta} - 1\right|^2 f(\zeta) d\zeta, \tag{7.1}$$

et la condition $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |\zeta|^2)\, f(\zeta) d\zeta < \infty$ [4]. Dans cette classe, un champ est isotrope lorsque la fonction f, appelée densité spectrale du champ, est radiale. Il est anisotrope lorsque f dépend de la direction $\arg(\zeta)$ de ζ. Parmi les exemples de cette classe, on compte les champs dont la densité spectrale est de la forme

$$f(\zeta) = |\zeta|^{-2h(\arg(\zeta))-d}, \tag{7.2}$$

où h est une fonction mesurable paire définie sur la sphère unité S^{d-1} de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $]0,1[$. Ces champs constituent une généralisation des champs browniens fractionnaires. Ces derniers, qui sont isotropes, s'obtiennent lorsque h est presque partout égale à une constante H dans $]0,1[$. Quand la fonction h varie en fonction de la direction, le champ associé est anisotrope. Les champs dont la densité est de la forme (7.2) seront appelés Champs Browniens Fractionnaires Etendus (CBFE). Dans le cadre des CBFE, l'anisotropie du champ est caractérisé par la fonction h, que nous nommerons indice de Hurst directionnel.

Nous avons apporté deux contributions importantes à l'étude des CBFE, la première concernant l'estimation de l'indice de Hurst directionnel et la seconde portant sur les tests d'anisotropie.

L'anisotropie d'un CBFE se manifeste au travers d'une régularité directionnelle, que l'on caractérise au moyen de l'indice de Hurst directionnel. Comme cela est montré dans [4], cette régularité directionnelle s'appréhende au travers des transformées de Radon du champ dans les différentes directions. Dans [3], nous avons construit des estimateurs directionnels de cette régularité, qui sont basés sur les variations quadratiques généralisées. Nous avons montré un résultat de convergence de ces estimateurs, avec normalité asymptotique. Nous avons en outre évalué la précision de ces estimateurs et donné des éclairages sur leur mise en œuvre à partir d'exemples synthétiques.

Dans [14], nous nous sommes concentrés sur le problème de la construction de tests statistiques pour décider si un CBFE est isotrope ou pas. Nous avons conçu des stratégies statistiques de test d'hypothèse qui mettent en jeu les estimateurs précédents. Pour autant, le résultat de convergence obtenu pour l'estimation ne s'applique pas dans ce nouveau cadre. Ce résultat garantit la normalité asymptotique des estimateurs pris dans une seule direction à la fois, alors que les statistiques de test sont définies comme des combinaisons d'estimateurs corrélés dans plusieurs directions. Pour établir la normalité asymptotique des statistiques de tests, nous avons donc tenu compte des corrélations entre les estimateurs. Pour les tests, nous avons également fait une étude numérique à partir d'exemples synthétiques.

Par ailleurs, nous avons appliqué les tests d'anisotropie aux textures mammographiques. En collaboration avec le Département de Radiologie de l'Université de Pennsylvanie, nous avons construit une base de données de mammographies numériques. Sur cette base de données, nous avons prouvé expérimentalement le caractère anisotrope des mammographies et l'adéquation du modèle CBFE aux textures de ces images.

Enfin, ces travaux ont été le point de départ d'un projet plus vaste sur les modèles anisotropes de texture et leurs applications en imagerie médicale. Ce projet a été sélectionné par l'Agence Nationale de la Recherche pendant la campagne 2009 du programme blanc comme *projet interdisciplinaire*. Il sera présenté plus longuement dans le chapitre 8.

7.2 Champs browniens fractionnaires étendus

7.2.1 Quelques propriétés d'un champ aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Un champ aléatoire X de dimension d est une application de $\Omega \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $X(\cdot, y) := X(y)$ est une variable aléatoire

réelle sur Ω pour tout $y \in \mathbb{R}^d$. Lorsque $d = 1$, un tel champ est appelé processus aléatoire et peut servir pour la modélisation de signaux unidimensionnels. Nous nous intéresserons aux cas $d = 2$ ou $d = 3$ lorsque le champ X est utilisé pour représenter une image aléatoire 2D ou 3D qui est définie sur Ω et dont les valeurs de niveau de gris sont dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'un champ aléatoire est gaussien lorsque toute combinaison linéaire de ses variables aléatoires associées est une variable gaussienne. La loi d'un champ aléatoire gaussien centré est caractérisé par sa fonction de covariance. Un champ X est à accroissement stationnaire si la loi de probabilité du champ $X(\cdot+z)-X(z)$ est la même que celle de $X(\cdot)-X(0)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$. Cette propriété s'utilise pour rendre compte de l'homogénéité de l'image. Un champ gaussien centré à accroissement stationnaire est caractérisé par son variogramme :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \;\; v(y) = \mathbb{E}((X(y) - X(0))^2). \tag{7.3}$$

Les champs gaussiens à accroissement stationnaire dont le variogramme est de la forme (7.1) sont appelés des champs gaussiens à densité spectrale. Les champs browniens fractionnaires étendus caractérisés par une densité spectrale de la forme (7.2) sont de ce type.

Parmi les propriétés d'un champ aléatoire, les propriétés hölderiennes sont celles qui permettent de traduire le plus directement la régularité du champ. Un champ aléatoire X a une régularité de Hölder uniforme d'ordre α dans $]0, 1[$ si, pour tout $T > 0$, il existe une variable aléatoire A à valeurs strictement positives telle que $\mathbb{P}(A < +\infty) = 1$ et qui vérifie presque sûrement

$$\forall y, z \in [-T, T]^d, \quad |X(y) - X(z)| \leq A|y - z|^\alpha. \tag{7.4}$$

Si la condition de Hölder uniforme est vérifiée pour α dans $]0, \beta[$, mais pas pour $\alpha \in]\beta, 1[$, alors on dit que β est l'exposant critique de Hölder. Cet exposant caractérise la régularité du champ aléatoire. Du point de vue de l'image, cet exposant sera d'autant plus faible que la texture est rugueuse.

Dans le cadre général des champs gaussiens à densité spectrale, les propriétés hölderiennes se déduisent des comportements asymptotiques du variogramme en 0 ou de ceux de la densité spectrale en $+\infty$. Pour préciser cela, introduisons quelques notations. Soit f une densité spectrale définie de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Si, pour une valeur de H fixée dans $]0, 1[$ et quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $A, B_1, B_2 > 0$ et un ensemble de mesure non nulle E de S^{d-1} vérifiant pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|\xi| \geq A \;\Rightarrow\; B_2|\xi|^{-2H-d-\varepsilon}\mathbf{1}_E\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \leq f(\xi) \leq B_1|\xi|^{-2H-d+\varepsilon},$$

alors nous notons

$$f(\xi) \underset{+\infty}{\asymp} |\xi|^{-2H-d}.$$

De la même manière, considérons un variogramme v. Si, pour une valeur de H fixée dans $(0,1)$ et quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta, C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$|y| \leq \delta \;\Rightarrow\; C_2|y|^{2H+\varepsilon} \leq v(y) \leq C_1|\xi|^{2H-\varepsilon},$$

alors nous notons

$$v(y) \underset{0}{\asymp} |y|^{2H}.$$

Le théorème suivant, qui est montré dans [4], rappelle les liens entre la régularité hölderienne des champs et les propriétés asymptotiques de leur variogramme ou de leur densité spectrale.

Théorème 7.1. *Soit X un champ gaussien centré à accroissement stationnaire de variogramme v et de densité spectrale f. Le champ X admet H comme exposant de Hölder critique, si pour H fixé dans $]0,1[$, l'une des deux conditions suivantes est remplie*

(a) $f(\xi) \underset{+\infty}{\asymp} |\xi|^{-2H-d}$,

(b) $v(y) \underset{0}{\asymp} |y|^{2H}$.

De plus, la condition (a) implique la condition (b).

7.2.2 Régularité d'un CBFE

Le théorème 7.1 permet d'établir que l'exposant de Hölder critique d'un CBFE est égal à la valeur minimale de l'indice de Hurst directionnel sur S^{d-1} :

$$H = \operatorname*{essinf}_{S^{d-1}}(h), \tag{7.5}$$

Cette valeur H sera appelée indice de Hurst minimal. A l'instar de l'indice de Hurst du champ brownien fractionnaire, cet indice caractérise la rugosité des textures. Cependant, il est indépendant des directions et ne peut donc pas rendre compte de l'anisotropie d'un CBFE.

Afin de pouvoir appréhender l'anisotropie d'un CBFE, A. Bonami et A. Estrade préconisent d'utiliser les transformées de Radon du champ X, que l'on définit pour toute direction θ de S^{d-1} par

$$\forall t \in \mathbb{R},\;\; R_\theta X(t) = \int_{\langle\theta\rangle^\perp} X(s+t\theta)\rho(s)ds, \tag{7.6}$$

avec une fenêtre ρ dans la classe de Schwartz [4]. Dans le cas où X est gaussien à densité spectrale, on peut montrer que le processus $R_\theta X$ est également gaussien et de densité spectrale

$$\forall p \in \mathbb{R},\;\; \mathcal{R}_\theta f(p) = \int_{\langle\theta\rangle^\perp} f(\xi + p\theta)\,|\widehat{\rho}(\xi)|^2\,d\xi. \tag{7.7}$$

De plus, si X est un CBFE d'indice directionnel h, alors

$$\mathcal{R}_\theta f(p) \underset{+\infty}{\asymp} |p|^{-2h(\theta)-d}.$$

Le processus $R_\theta X$ se comporte asymptotiquement comme un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hölder critique $\tilde{h}(\theta) = h(\theta) + \frac{d-1}{2}$ [4] (lorsque $\tilde{h}(\theta) < 1$). Par conséquent, la régularité de la transformée de Radon dépend entièrement de la régularité du champ dans la direction orthogonale à la projection.

Remarquons que la transformée de Radon de X est davantage régulière que celle du champ. L'exposant de Hölder des transformées pouvant être supérieur à 1, nous entendons sa définition dans un sens étendu [14].

Une autre approche pour analyser un champ aléatoire X dans une direction donnée consiste à le restreindre sur des lignes orientées dans cette direction. La restriction d'un champ X sur une droite droite Δ identifiée par un point y_0 de $\mathbb{R}^d$ et une direction θ de S^{d-1} est définie par le processus $X_\Delta = \{X(y_0 + t\theta); t \in \mathbb{R}\}$. Lorsque X est gaussien à densité spectrale, ce processus est également gaussien à densité spectrale. Si, de plus, X est un CBFE, sa densité spectrale vérifie $f_\theta(p) \underset{+\infty}{\asymp} |p|^{-2H-1}$. Autrement dit, l'exposant de Hölder critique d'un processus-ligne d'un CBFE ne dépend que de l'indice de Hurst minimal H du champ, qui est lui-même indépendant de la direction.

7.3 Estimation

7.3.1 Variations quadratiques généralisées

Comme cela est mentionné plus haut, l'indice directionnel de Hurst $h(\theta)$ d'un CBFE dans une direction donnée θ peut se déduire de l'indice de Hurst de la transformée de Radon du champ dans la direction perpendiculaire à cette direction. Par conséquent, le problème de l'estimation de l'indice de Hurst directionnel se réduit au problème de l'estimation des indices de Hurst de champs projetés. Or, ces champs projetés se comportent localement comme des mouvements browniens fractionnaires (dont la définition est étendue pour prendre en compte des valeurs de l'indice de Hurst supérieures à 1). C'est pourquoi, pour l'estimation de l'indice de Hurst directionnel d'un CBFE, il est judicieux de recourir aux techniques d'estimation de l'indice de Hurst d'un mouvement brownien fractionnaire.

Jusqu'à présent, beaucoup de méthodes ont été proposées pour estimer l'indice de Hurst du mouvement brownien fractionnaire (pour une revue exhaustive, voir par exemple [2]). Nous avons travaillé avec les variations quadratiques généralisées, qui présentent de bonnes propriétés d'estimation.

Le principe de l'estimation par des variations quadratiques généralisées est le suivant. Soit Y un processus gaussien centré à accroissement stationnaire de densité

spectrale f. Soit

$$\left\{Y\left(\frac{k}{N}\right); 0 \leq k \leq N\right\}$$

une séquence observée. On considère la séquence stationnaire formée par les accroissements du second ordre de Y avec un pas $u \in \mathbb{N}^*$

$$\forall\, p \in \mathbb{Z},\ Z_{N,u}(Y)(p) = Y\left(\frac{p+2u}{N}\right) - 2Y\left(\frac{p+u}{N}\right) + Y\left(\frac{p}{N}\right). \tag{7.8}$$

Les variations quadratiques généralisées de Y d'ordre 2 sont alors définies par

$$V_{N,u}(Y) = \frac{1}{N-2u+1} \sum_{p=0}^{N-2u} \left(Z_{N,u}(Y)(p)\right)^2. \tag{7.9}$$

Notons que

$$\mathbb{E}(V_{N,u}(Y)) = \mathbb{E}((Z_{N,u}(Y)(0))^2) = \mathbb{E}\left(Y\left(\frac{2u}{N}\right) - 2Y\left(\frac{u}{N}\right) + Y(0)\right)^2,$$

On peut interpréter $\mathbb{E}(V_{N,u}(Y))$ comme une version discrète de la dérivée seconde du variogramme de Y autour de 0. De plus, selon la Proposition 1.1 de [3],

$$\mathbb{E}(V_{N,u}(Y)) \underset{N\to+\infty}{\sim} c_H N^{-2H} u^{2H},$$

pour une constante $c_H > 0$, lorsque , pour une valeur $H \in \left(0, \frac{7}{4}\right)$ et une constante $c > 0$, la densité spectrale f vérifie $f(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\sim} c|\xi|^{-2H-1}$. Intuitivement, on peut donc définir l'estimateur de H suivant

$$\widehat{H}_N = \frac{1}{2\log(2)} \log\left(\frac{V_{N,2}(Y)}{V_{N,1}(Y)}\right). \tag{7.10}$$

Dans [3, 12], la convergence de cet estimateur vers H avec normalité asymptotique est démontrée sous certaines conditions appropriées sur le variogramme de Y ou sur sa densité spectrale.

7.3.2 Estimation de l'indice de Hurst directionnel

Dans le contexte particulier des CBFE de dimension $d = 2$, nous utilisons les variations quadratiques généralisées sur les transformées de Radon des champs. Soient $V_{N,u}(\theta)$ les variations de la projection $Y = R_\rho X(\theta, \cdot)$ définies par les équations (7.6), (7.8) et (7.9) pour $\theta \in S^1 \simeq [-\pi, \pi[$. Dans le théorème 2.3. de [3], nous avons montré que

$$\hat{h}(\theta) = \frac{1}{2\log(2)} \log\left(\frac{V_{N,2}(\theta)}{V_{N,1}(\theta)}\right) - \frac{1}{2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} h(\theta), \tag{7.11}$$

presque sûrement et avec normalité asymptotique. Cette convergence est garantie à condition que la densité spectrale $R_\rho X(\theta, \cdot)$ vérifie

$$\mathcal{R}_\theta f(\xi) = |\xi|^{-2h(\theta)-2} + \underset{|\xi|\to+\infty}{o}\left(|\xi|^{-2h(\theta)-2-s}\right),$$

pour tout $s \in]0,1[$, ce qui est le cas lorsque h est continûment différentiable dans le voisinage de θ. Ce théorème assure la convergence théorique des estimateurs construits vers l'indice de Hurst dans la direction considérée.

Parlons maintenant de la mise en œuvre de ces estimateurs de l'indice de Hurst directionnel. En pratique, on observe une image sur une grille rectangulaire de taille $M+1 \times M+1$, où $M = 2^m$ pour $m \in \mathbb{N}$. On suppose que l'image est la réalisation en 2D d'un CBFE sur le sous-ensemble $\{\left(\frac{k}{M}, \frac{l}{M}\right),\ 0 \leq k,l \leq M\}$ de $[0,1]^2$, le niveau de gris $x(k,l)$ de l'image au pixel (k,l) correspondant à la valeur du champ aléatoire en $\left(\frac{k}{M}, \frac{l}{M}\right)$.

Nous discrétisons les estimateurs de la manière suivante. Nous calculons les moyennes sur les lignes (resp. les colonnes) y_1 (resp. y_2) de x :

$$\forall\, 0 \leq k,l \leq M,\ \ y_1(l) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(k,l) \ \text{ et } \ y_2(k) = \frac{l}{M+1}\sum_{l=0}^{M} x(k,l). \qquad (7.12)$$

Ces moyennes représentent des versions discrètes de la transformée de Radon telle que définie dans les directions horizontale et verticale avec une fonction ρ valant 1 sur $[-1/M, 1+1/M]$ et 0 ailleurs.

Pour $e = 1,2$, nous considérons alors les sous-échantillons $\left(y_e\left(2^\nu k\right)\right)_{0 \leq k \leq 2^{-\nu}M}$ de y_e, obtenus avec un facteur de sous-échantillonnage $\nu \in \mathbb{N}$ vérifiant $2^{\nu+1}u < M$. Ensuite, nous calculons les variations quadratiques discrètes $v^\nu_{e,u}$ des sous-échantillons pour les paramètres de dilatation $u = 1,2$

$$v^\nu_{e,u} = \frac{1}{\tilde{M}+1}\sum_{p=0}^{\tilde{M}} (y_e(sp) - 2\,y_e(s(p+u)) + y_e(s(p+2u)))^2, \qquad (7.13)$$

avec $s = 2^\nu$ et $\tilde{M} = M/2^\nu - 2u$.

Enfin, conformément à (7.11), nous définissons l'estimateur discret $\hat{h}^\nu_e$ des indices de Hurst h_e dans les directions $e = 1,2$

$$\hat{h}^\nu_e = \frac{1}{2\log(2)} \log\left(\frac{v^\nu_{e,2}}{v^\nu_{e,1}}\right) - \frac{1}{2}. \qquad (7.14)$$

Dans [3], nous avons étudié l'effet de cette discrétisation sur l'estimation. En particulier, nous avons montré que pour $e = 1,2$, l'estimateur $\hat{h}^\nu_e$ converge vers h_e, sous réserve que

$$\nu \ > \ m\ \frac{h_e - H + 1/2}{h_e + 1/2}.$$

Cette condition est purement théorique et ne peut être utilisée en pratique. Aussi avons-nous réalisé une étude numérique à partir d'exemples synthétiques pour évaluer l'effet du facteur de sous-échantillonnage ν. Lorsque ν est petit, les estimateurs ont tendance à sous-estimer la véritable valeur. Lorsque ν croît, les estimateurs deviennent de moins en moins biaisés, mais leur variance augmente. Pour $m = 9$, nous avons trouvé un bon compromis biais/variance avec un facteur $\nu = 2$.

7.4 Tests d'anisotropie

7.4.1 Définitions

Soit X un CBFE d'indice de Hurst directionnel h et d'indice de Hurst minimal H. Le champ est isotrope si $h \equiv H$.

Idéalement, nous voudrions donc tester

$$\text{l'hypothèse nulle } \mathbf{H}_0 : \ h \equiv H \text{ (isotropie) contre}$$
$$\text{l'hypothèse alternative } \mathbf{H}_1 : \ \exists\, \theta_1 \neq \theta_2,\ h(\theta_1) \neq h(\theta_1) \text{ (anisotropie).}$$

Cependant, un tel test requiert l'estimation des indices de Hurst h dans toutes les directions. En pratique, cela implique de discrétiser la transformée de Radon dans une direction arbitraire. Or, en dehors des directions horizontale, verticale et diagonales, une telle discrétisation nécessite une interpolation du champ observé. De ce fait, l'estimation de l'indice de Hurst risque d'être biaisé.

Afin d'éviter les problèmes d'estimation liés à l'interpolation et d'avoir une mise en œuvre fiable du test, nous avons restreint la définition du test aux directions verticale et horizontale. Soient $\theta_1 = (0,1)$ et $\theta_2 = (1,0)$ les directions verticale et horizontale du plan. Notons $h_1 = h(\theta_1)$ et $h_2 = h(\theta_2)$ l'indice de Hurst dans les directions θ_1 et θ_2, respectivement. Nous testons l'hypothèse nulle

$$\mathbf{H}_0 : h_1 = h_2 \text{ (isotropie) contre } \mathbf{H}_1 : h_1 \neq h_2 \text{ (anisotropie).}$$

En supposant que h est continu dans le voisinage de θ_1 et θ_2, l'hypothèse $\mathbf{H}_1$ implique que $H = \operatorname{essinf}_{[-\pi,\pi[} h \neq \operatorname{esssup}_{[-\pi,\pi[} h$. De manière naturelle, on définit la statistique de test

$$\hat{d} = \left| \hat{h}_1 - \hat{h}_2 \right|, \tag{7.15}$$

où $\hat{h}_1 = \hat{h}(\theta_1)$ et $\hat{h}_2 = \hat{h}(\theta_1)$ sont les estimateurs de h_1 et h_2 décrits par l'équation (7.11). Nous nous attendons à ce que les valeurs de $\hat{d}$ soient élevées lorsque le champ X est anisotrope. De ce fait, l'intervalle de rejet associé au test est de la forme

$$R_1 = \{\hat{d} > c_1\}, \tag{7.16}$$

où c_1 est une constante positive.

Ce premier test permet d'évaluer l'anisotropie lorsqu'elle se manifeste dans les directions horizontale et verticale. Il ne permet pas de détecter des champs anisotropes dont l'indice de Hurst est le même dans ces deux directions. Pour pallier ce défaut, nous avons mis au point un second test qui prend en compte les autres directions au travers d'une estimation de l'indice de Hurst minimal H. Nous testons

$$\mathbf{H}_0 : H = h_1 = h_2 \text{ (isotropie) contre } \mathbf{H}_1 : H \neq h_1 \text{ ou } H \neq h_2 \text{ (anisotropie).}$$

Dans ce cas, nous prenons comme statistique de test

$$\hat{\delta} = \left| \max(\hat{h}_1, \hat{h}_2) - \hat{H} \right|, \tag{7.17}$$

où $\hat{H}$ est un estimateur de l'indice de Hurst minimal [3, 14]. L'intervalle de rejet du second test est de la forme

$$R_2 = \{\hat{\delta} > c_2\}, \tag{7.18}$$

où c_2 est une constante positive.

7.4.2 Convergence des statistiques de tests

Dans [14], nous avons démontré un résultat de convergence concernant la statistique du premier test.

Théorème 7.2. *Soit X un CBFE dont l'indice de Hurst directionnel h est continûment dérivable dans le voisinage de θ_1 et θ_2. Alors, presque sûrement*

$$\hat{h}_1 - \hat{h}_2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} h_1 - h_2$$

avec, pour une constante $\gamma > 0$,

$$\sqrt{N}\left(\hat{h}_1 - \hat{h}_2 - (h_1 - h_2)\right) \underset{N\to+\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\left(0, \gamma^2\right).$$

Ce théorème assure que, sous l'hypothèse nulle $\mathbf{H}_0$ du premier test,

$$\sqrt{N}\hat{d} \underset{N\to+\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} |\mathcal{N}\left(0, \gamma^2\right)|$$

tandis que sous l'hypothèse alternative $\mathbf{H}_1$, presque sûrement,

$$\sqrt{N}\hat{d} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Le résultat implique en outre que lorsque N est suffisamment grand, le seuil c_1 de l'intervalle de rejet à un niveau de confiance α a la forme $\gamma/\sqrt{N}\, t_\alpha$, où t_α est le $(1-\alpha/2)$-quantile d'une distribution gaussienne centrée réduite. Le théorème apporte une justification théorique au premier test.

La partie du théorème sur la convergence presque sûre est une conséquence directe de (7.11). Par contre, la démonstration de la convergence en loi nécessite la prise en compte des corrélations entre les estimateurs $\hat{h}_1$ et $\hat{h}_2$, qui sont définis à partir des transformées de Radon du même champ aléatoire. Dans la démonstration, nous montrons que les estimateurs sont asymptotiquement presque indépendants.

7.4.3 Mise en œuvre

En utilisant les estimateurs discrets décrits dans la section 7.3.2, nous définissons les statistiques empiriques des tests d'anisotropie : pour le premier test,

$$\hat{d}^\nu = |\hat{h}_1^\nu - \hat{h}_2^\nu|$$

et pour le second,

$$\hat{\delta}^\nu = |\max(\hat{h}_1^\nu, \hat{h}_2^\nu) - \widehat{H}|,$$

où $\widehat{H}$ est une estimation de l'indice de Hurst minimal obtenue à partir des processus-ligne [3]. Nous précisons ensuite la forme empirique des intervalles de rejet associés aux tests : pour le premier test,

$$R_1^\nu = \{\hat{d}^\nu > c_1^\nu\}, \tag{7.19}$$

et pour le second

$$R_2^\nu = \{\hat{\delta}^\nu > c_2^\nu\}. \tag{7.20}$$

Il reste alors à fixer les différents paramètres des intervalles de rejets, à savoir le facteur de sous-échantillonnage ν et les seuils de rejet c_1^ν et c_2^ν. Dans la mesure où le théorème 7.2 ne donne pas de valeur explicite à la variance γ, il ne nous permet pas de fixer le seuil de rejet c_1^ν. Ce théorème ne permet pas non plus de fixer ν.

Pour fixer les paramètres de manière optimale, nous avons eu recours à une étude numérique basée sur des simulations de CBFE [14]. En étudiant la variance des statistiques de test, nous avons pu fixer des seuils de rejet correspondant à un niveau de confiance de 95%. Lorsque $m = 9$ et $M = 2^9$, nous avons obtenu pour le premier test, $c_1^0 = 0.16$ avec $\nu = 0$ et $c_1^2 = 0.3$ avec $\nu = 2$, et pour le second test $c_2^2 = 0.2$ avec $\nu = 2$.

7.5 Application à la mammographie

7.5.1 Contexte

L'apparence radiographique du sein dépend essentiellement de la distribution et de la part relative des tissus adipeux et fibro-glandulaires qu'il contient. Tandis que les tissus adipeux sont radio-transparents et tendent à obscurcir l'image, les tissus fibro-glandulaires atténuent les rayons X et éclaircissent l'image. La densité de l'image désigne l'aspect clair des images causés par la présence des tissus fibro-glandulaires du sein. A la fin des années 60, Wolfe a avancé l'idée que le risque de cancer du sein pouvait être évalué à partir de l'observation de l'apparence et des motifs du parenchyme [15]. Ces premiers travaux ont suscité de vives polémiques et motivé de nombreuses études sur les relations entre la densité du sein et le risque de cancer [5] qui ont finalement mis en évidence d'importantes corrélations entre un accroissement de la densité mammaire et le risque de cancer.

Dans dans la plupart des analyses épidémiologiques, l'évaluation de la densité du sein, qui est faite de manière qualitative par des radiologues, est sujette à des variations inter-observateurs. Aussi, dès le début des années 1990, des chercheurs ont tenté de mettre en place des mesures quantitatives et automatiques de la densité ; voir les actes des "International Workshops on Digital Mammography" (par exemple

[1]). Certaines de ces mesures sont construites à partir d'une estimation de la dimension fractale [7, 8]. Récemment, certains chercheurs se sont plus particulièrement attachés à cerner la nature stochastique de la texture mammographique en utilisant des modèles aléatoires assimilables aux champs browniens fractionnaires tels que les "1/f noise" [6, 9, 10, 11]. A partir de ces modèles de textures, ces chercheurs ont effectué des mesures des paramètres du modèle et validé empiriquement le modèle.

Des mesures de paramètres liés à l'indice de Hurst faites sur les mammographies classiques et numériques ont été publiées indépendamment dans plusieurs articles [6, 7, 8, 10, 11, 13]. Caldwell et al. [8] et Byng et al. [7] ont utilisé la méthode de "Box counting" pour l'estimation de la dimension fractale sur toute l'image. A partir de 70 mammographies classiques, ils obtiennent des valeurs entre 2.2 et 2.5 avec un écart-type de 0.02, ce qui correspond à un indice de Hurst entre 0.5 et 0.8. Kestener et al. ont calculé l'indice de Hurst sur des petites régions de taille 512×512 de mammographies classiques extraites de la base de données DDSM [13]. Les valeurs qu'ils obtiennent sont dans les intervalles $[0.20; 0.35]$ et $[0.55; 0.75]$, pour des régions d'intérêt qui sont respectivement à prédominance adipeuse ou glandulaire. Dans [11], les auteurs ont utilisé une technique spectrale pour estimer la régularité du coefficient β du modèle "1/f noise". Sur 104 régions d'intérêt extraites de 26 mammographies numériques, les valeurs de β sont dans l'intervalle $[1.32; 1.44]$, ce qui correspond à une valeur de l'indice de Hurst H dans $[0.32; 0.44]$. Dans un autre article, les mêmes auteurs indiquent des valeurs de β dans $[1.42, 1.51]$, c'est à dire de H dans $[0.42; 0.51]$ pour des régions d'intérêt extraites de 60 mammographies classiques [10]. Ces valeurs sont conformes à celles obtenues indépendamment dans [6].

7.5.2 Matériel et méthode

Notre base de données est constituée de 58 cas, chaque cas étant lui-même composé des mammographies numériques des seins droit et gauche d'une patiente. Les images ont été acquises en position médio-latérale au moyen d'un Senographe 2000D (General Electric Medical Systems, Milwaukee, WI), avec une résolution spatiale de 0.1mm^2 par pixel (taille de l'image : 1914x2294 pixels). Les images ont été fournie gracieusement par le Département de radiologie de l'Université de Pennsylvanie. Dans chaque image de la base de données, nous avons extrait manuellement une région d'intérêt de taille 512×512 dans la partie la plus dense du sein. Comme cela est indiqué sur la figure 7.1, nous avons calculé les transformées de Radon discrètes de ces régions dans les directions horizontale et verticale (équation (7.12)) et estimé les indices de Hurst directionnel dans ces deux directions (équation (7.14), pour $\nu = 0, 2$). Nous avons également calculé l'indice de Hurst minimal en utilisant les estimateurs-ligne [14]. Notons que pour les mammographies, les directions verticale (ligne) et horizontale (colonne), qui sont indiquées par les indices 1 et 2, correspondent respectivement aux directions perpendiculaire et parallèle à la paroi

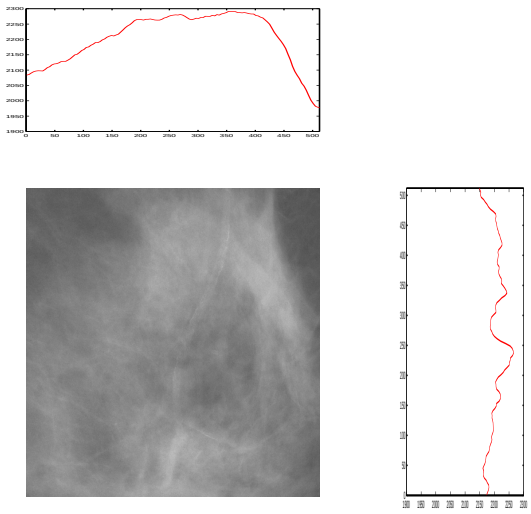


FIG. 7.1 – Une région d'intérêt extraite d'une mammographie numérique et ses projections verticale et horizontale (cas 83, feb05, rm).

de soutien du sein.

7.5.3 Régularité et anisotropie des mammographies

Les estimations de l'indice Hurst minimal (obtenues à partir des estimateurs-ligne) sont dans l'intervalle $[0.18; 0.42]$, ont une moyenne de 0.31 et un écart-type de 0.05. Sur les figures 7.2 (a) et (b), nous pouvons observer que les valeurs estimées ont des distributions empiriques équivalentes dans les deux directions et sont approximativement égales sur chaque image. Cette observation est conforme à la propriété théorique d'un CBFE selon laquelle les restrictions de ces champs sur les lignes ont la même régularité dans toutes les directions.

Sur la figure 7.2 (c), nous pouvons voir que les indices de Hurst horizontal et vertical ont des distributions empiriques similaires. Les valeurs estimées à la verticale et l'horizontale sont en moyenne de 0.45 et 0.55, avec un écart-type d'environ 0.15. Les mammographies semblent donc légèrement plus régulières dans la direction parallèle à la paroi de soutien que dans la direction perpendiculaire. Par ailleurs, les valeurs des indices de Hurst minimal et des indices de Hurst directionnels ne sont pas du même ordre, ce qui est indicateur de l'anisotropie des images.

Cette anisotropie est davantage manifeste sur les figures 7.3 (a) et (b). Sur la figure 7.3 (a), il y a environ 43 % des mammographies pour lesquelles l'estimation de la différence $\hat{d}^0$ est au-dessus du seuil de rejet, ce qui veut dire que 43 % des cas sont classés anisotropes par le premier test d'anisotropie. Le premier test d'anisotropie ne peut cependant pas détecter des cas anisotropes pour lesquels les indices de Hurst horizontal et vertical sont du même ordre. De tels cas peuvent cependant

être détectés par le second test d'anisotropie. Sur la figure 7.3 (b), nous voyons que le second test détecte environ 60 % de cas anisotropes. Ces résultats signifient que selon le modèle des CBFE, nous avons au moins 60 % de cas pouvant être considérés comme anisotropes avec un niveau de confiance d'environ 95 %.

Nos estimations du paramètre de Hurst minimal sont proches de celles obtenues par Heine et al. sur les mammographies numériques [11]. Dans la lignées des études de [6, 10, 11], nos expériences confirment la pertinence du modèle de champ brownien fractionnaire pour la caractérisation de la densité mammaire. Cependant, elles révèlent que l'hypothèse d'isotropie sur laquelle repose les modèles de champs précédemment utilisés n'est pas valide en pratique. Nous concluons que le modèle de CBFE est plus pertinent qu'un simple modèle de champ brownien fractionnaire (isotrope) pour la description des textures mammographiques.

D'un point de vue médical, cette conclusion suggère de prendre en compte l'anisotropie pour l'analyse de la densité mammaire et l'évaluation du risque de cancer du sein. L'étude des relations entre les indicateurs d'anisotropie et ce risque fait partie des projets que nous menons actuellement.

7.6 Références du chapitre

[1] S. Astley et al., editors. *8th International Workshop on Digital Mammography*, volume 4046 of *Lecture Notes in Computer Science*, Manchester, UK, June 2006. Springer.

[2] J. M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, et al. Semi-parametric estimation of the long-range dependence parameter : a survey. In *Theory and applications of long-range dependence*, pages 557–577. Birkhauser Boston, 2003.

[3] H. Biermé and F.JP Richard. Estimation of anisotropic gaussian fields through Radon transform. *ESAIM : Probability and Statistics*, 12(1) :30–50, 2008.

[4] A. Bonami and A. Estrade. Anisotropic analysis of some Gaussian models. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9 :215–236, 2003.

[5] N.F. Boyd, B. O'Sullivan, J.E. Campbell, et al. Mammographic signs as risk factors for breast cancer. *British Journal of Cancer*, 45 :185–193, 1982.

[6] A. Burgess, F. Jacobson, and P. Judy. Human observer detection experiments with mammograms and power-law noise. *Medical Physics*, 28(4) :419–437, 2001.

[7] J. Byng, N. N. Boyd, and E. others Fishell. Automated analysis of mammographic densities. *Physics in Medecine and Biology*, 41 :909–923, 1996.

[8] C. Caldwell, S. Stapleton, D. Holdsworth, et al. Characterisation of mammographic parenchymal patterns by fractal dimension. *Physics in Medecine and Biology*, 35(2) :235–247, 1990.

[9] B. Grosjean and L. Moisan. A-contrario detectability of spots in textured backgrounds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 33(3) :313–337, 2009.

[10] J. Heine, S. Deine, R. Velthuizen, et al. On the statistical nature of mammograms. *Medical Physics*, 26(11) :2254–2269, 1999.

[11] J. Heine and R. Velthuizen. Spectral analysis of full field digital mammography data. *Medical Physics*, 29(5) :647–661, 2002.

[12] J. Istas and G. Lang. Quadratic variations and estimation of the local Holder index of a Gaussian process. *Annales de l'institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 33(4) :407–436, 1997.

[13] P. Kestener, J.-M. Lina, P. Saint-Jean, et al. Wavelet-based multifractal formalism to assist in diagnosis in digitized mammograms. *Image Analysis and Stereology*, 20 :169–174, 2001.

[14] F.JP Richard and H. Biermé. Statistical tests of anisotropy for fractional brownian textures. application to full-field digital mammography. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007. accepted with minor revisions.

[15] J.N. Wolfe. Ducts as a sole indicator of breast carcinoma. *Radiology*, 89 :206–210, 1967.

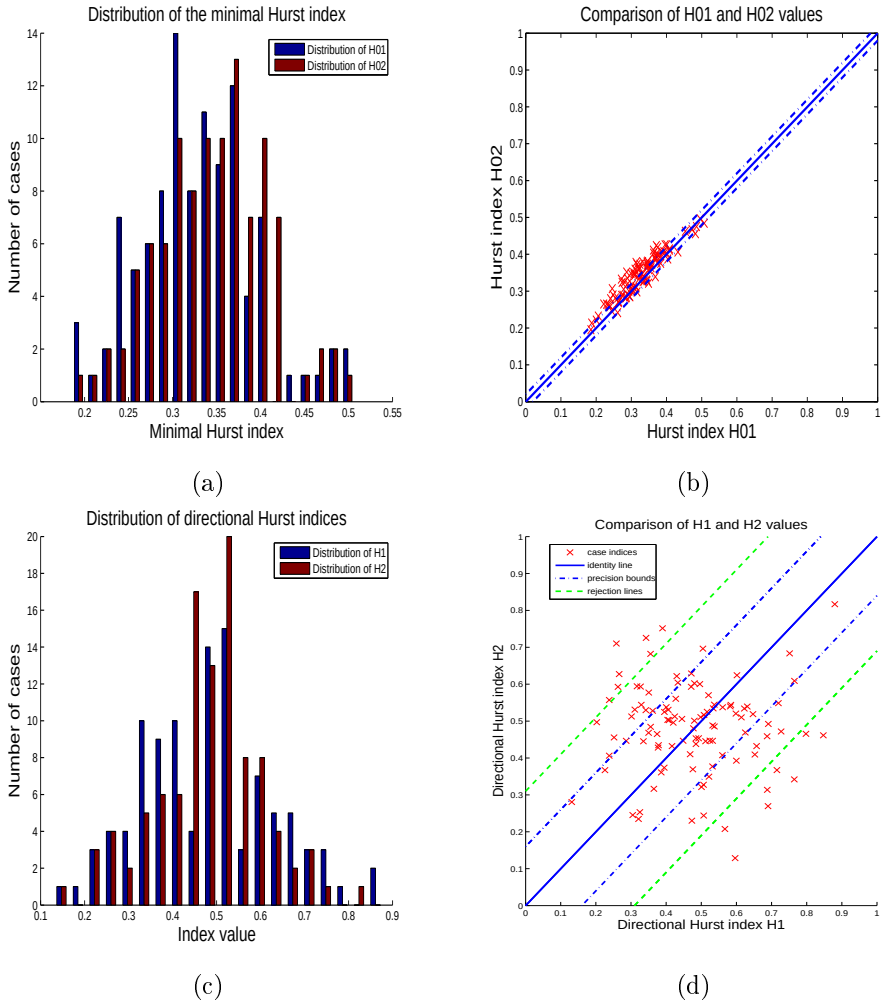
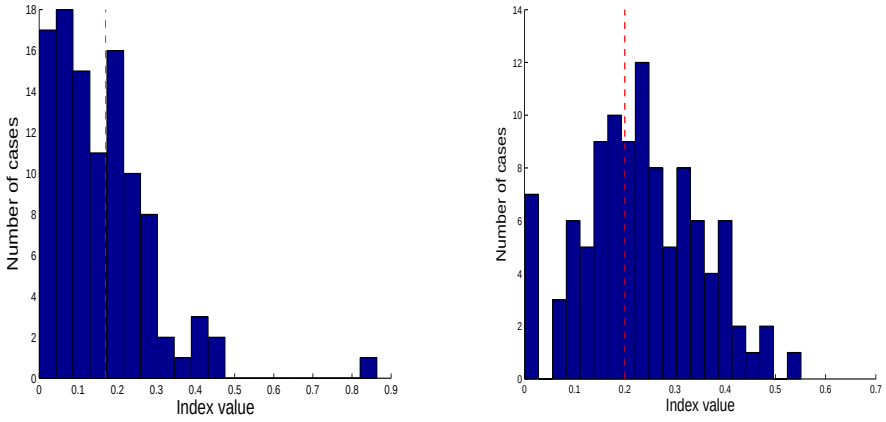


FIG. 7.2 – (a) Distribution empirique de l'indice de Hurst minimal des mammographies, estimé au moyen des estimateurs-ligne. (b) Estimations-ligne horizontale et verticale de l'indice de Hurst minimal sur chacune des mammographies. (c) Distribution empirique des indices de Hurst horizontal et vertical estimés au moyen des estimateurs-projection à la verticale et à l'horizontale ($\hat{h}_1^2$ et $\hat{h}_2^2$). (d) Estimations horizontale et verticale de l'indice de Hurst directionnel sur chacune des mammographies.



(a) (b)

FIG. 7.3 – Distribution empirique des estimateurs (a) $\hat{d}^0 = |\hat{h}_1^0 - \hat{h}_2^0|$ et (b) $\hat{\delta}^2 = |\max(\hat{h}_1^2, \hat{h}_2^2) - \hat{h}_0)|$. La ligne hachurée rouge indique le seuil de rejet du test d'anisotropie correspondant à l'estimateur.

PROJETS DE RECHERCHE

Chapitre 8

Textures anisotropes aléatoires

8.1 Présentation

Dans ce chapitre, je présente un projet de recherche sur l'analyse de texture qui a été sélectionné par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du programme blanc 2009 en tant que *projet interdisciplinaire* [33]. Je serai coordinateur de ce projet entre 2009 et 2013. Ce projet de recherche comprend une thématique médicale concernant le cancer du sein. Cette thématique a été développée sous ma coordination au sein d'un autre projet porté par F. Clavel-Chapelon (ERI-20 Inserm). Ce dernier, qui est intitulé "Densité du sein et aspect mammographique comme facteurs de risque du cancer du sein", a été sélectionné par l'Institut national du cancer (INCA) en 2009 dans le programme "recherche en sciences humaines et sociales, en santé publique et en épidémiologie".

L'analyse de texture est l'un des problèmes fondamentaux du traitement d'images, qui comporte de nombreuses applications non seulement en imagerie médicale mais également en imagerie satellitale et en indexation de bases de données. La texture, qui est un phénomène de nature périodique dans l'image, peut s'appréhender au travers de différentes approches mathématiques (géométrique, variationnelle, probabiliste, statistique,...). Dans le projet, le problème de l'analyse de texture est abordé d'un point de vue probabiliste et statistique, en considérant l'image comme la réalisation d'un champ aléatoire dont les propriétés traduisent celles de la formation de la texture. Ainsi, le projet est résolument placé à l'intersection de la théorie des probabilités, des statistiques et du traitement d'images. De ce point de vue, il s'inscrit dans la continuité du projet multidisciplinaire ANR Mipomodim "Milieux poreux : modèles et images" (05-BLAN-0017, A. Estrade) auquel j'ai participé entre 2005 et 2008. Il fédère les équipes de probabilités et du traitement d'images du MAP5, auxquelles sont associées des chercheurs provenant de l'UMR LTCI (CNRS 5141) à Telecom ParisTech, de l'équipe d'accueil 3454 à l'Université Paris 10-Nanterre, de l'UMR MAPMO (CNRS 6628) à l'Université d'Orléans et de l'UMR GREMAQ

(CNRS 5604) à l'Université de Toulouse 1.

Pour analyser l'aspect textural des images au moyen d'un modèle de champ aléatoire, on s'appuie habituellement sur les paramètres qui caractérisent le modèle. Par exemple, en analyse fractale, on se sert de l'indice de Hurst associé au modèle de champ brownien fractionnaire pour caractériser la rugosité des textures. Ce type d'analyse a suscité un grand intérêt en imagerie médicale [13]. Elle a été utilisée en mammographie pour caractériser la densité mammaire, classifier les types de sein, évaluer le risque de cancer du sein [19], ou encore quantifier la détectabilité de lésion [17], ainsi qu'en radiographie osseuse pour caractériser l'état de l'architecture osseuse et évaluer un risque de fracture ostéoporotique [2, 18].

Le projet se concentre sur deux applications médicales qui sont d'une importance majeure en Santé publique : le cancer du sein et les maladies ostéo-articulaires telles que l'ostéoporose. Il a pour vocation d'amener les mathématiciens à interagir avec les acteurs du secteur de la santé afin de proposer des solutions à des problèmes médicaux de premier plan. Aussi le projet inclut-il plusieurs partenaires privilégiés dans les domaines d'applications considérés : l'unité INSERM U-658 (C.-L. Benhamou, Centre Hospitalier Régional d'Orléans), l'unité INSERM ERI-20 (F. Clavel-Chapelon, Institut Gustave Roussy, Villejuif), et le Département de radiologie de l'Université de Pennsylvanie (A. Maidment, USA). Les membres de l'unité INSERM U-658 s'intéressent principalement à la caractérisation des tissus osseux et à la qualité de l'architecture osseuse à partir de l'imagerie. L'un de ses objectifs à long terme est de compléter l'examen densitométrique utilisé en pratique clinique par une analyse de la texture osseuse effectuée sur la radiographie. L'activité de l'unité INSERM ERI-20 est consacrée à l'épidémiologie du cancer du sein. Elle est axée sur la base de données E3N, qui résulte d'une enquête de cohorte impliquant 100000 femmes volontaires. En s'appuyant sur cette base de données, un des objectifs à long terme est de répondre à un ensemble de questions fondamentales sur l'aspect des mammographies et ses liens avec des facteurs de risque avérés. L'équipe du département de radiologie de l'Université de Pennsylvanie s'intéresse principalement à la mise au point de techniques d'acquisition d'images mammaires 3D telles que la tomosynthèse du sein. Cette dernière repose sur la reconstruction tomographique du volume du sein à partir de projections radiographiques obtenues dans un nombre limité de directions. L'utilisation de tomosynthèses permet de réduire les effets de superposition des tissus qui sont fréquents en mammographie classique. Dans les prochaines années, cette technique pourrait remplacer la mammographie dans les examens de dépistage du cancer du sein. Dans cette perspective, il est intéressant à l'heure actuelle de comparer les propriétés texturales de la tomosynthèse en 3D et de la mammographie en 2D.

Les applications précédentes soulèvent un problème d'ordre méthodologique qui nous concerne au premier plan, celui de la caractérisation de l'apparence des radio-

graphies (mammographies, tomosynthèses du sein ou radiographies de l'os). Pour traiter ce problème, nous avons pris le parti de procéder en deux étapes : (1) proposer un modèle aléatoire pour la description des textures des images radiologiques et en vérifier son adéquation aux données, (2) à partir des paramètres du modèles, construire des indices de texture pertinents pour répondre aux questions médicales. En raison du caractère fortement "anisotrope" des radiographies osseuses et mammaires, la modélisation de ces images constitue cependant un défi mathématique. Les modèles courants utilisés pour décrire ces images radiologiques reposent sur des hypothèses simplistes d'isotropie qui ne sont pas vérifiées en pratique [2, 18, 19]. De par leur caractère réducteur, ces hypothèses peuvent masquer certaines informations qui pourraient s'avérer importantes pour l'exploitation médicale de l'analyse de texture.

La modélisation et l'étude de l'anisotropie est un problème général de la théorie des probabilités. Au sens strict, un champ aléatoire est anisotrope s'il n'est pas invariant par rapport aux rotations du plan ou de l'espace. Toutefois, on peut entendre l'anisotropie d'un champ aléatoire dans un sens plus large qui indique l'absence d'une invariance généralement supposée dans la construction mathématique du modèle aléatoire (non-stationnarité, changement de comportement en échelle, inhomogénéité,...). L'étude théorique de modèles anisotropes soulève un grand nombre de problèmes ouverts dont la résolution est importante pour mener à bien les applications. En premier lieu, il convient de définir mathématiquement l'anisotropie et de savoir comment l'appréhender au travers des modèles. Pour beaucoup de modèles anisotropes, il reste également à mettre en place des stratégies d'estimation paramétrique et de tests d'adéquation des modèles aux données. Par ailleurs, il reste encore à définir des techniques de simulation précises des champs aléatoires définis. Toutes ces questions sont à l'étude dans le cadre du projet.

8.2 Modèles aléatoires anisotropes

L'anisotropie de champs aléatoires peut se définir de différentes manières. Dans le chapitre 7, nous avons étudié certains modèles anisotropes de champs aléatoires appartenant à l'ensemble des champs gaussiens à densité spectrale. Dans le cadre du projet, nous nous intéressons à un ensemble beaucoup plus vaste de modèles anisotropes, qui recouvrent le champ d'investigation de tous les participants. Nous distinguons trois types de modèles anisotropes :

- les champs gaussiens anisotropes à densité spectrale,
- les champs stationnaires déformés,
- les champs germe-grain.

Modèle	Densité spectrale	Paramètres	Réf.
Champ brownien fractionnaire	$f(\zeta) = \|\zeta\|^{-2H-d}$, $\|\zeta\| = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_d^2)^{\frac{1}{2}}$.	$H \in (0,1)$ indice de Hurst.	[7, 8, 34]
Champ brownien fractionnaire étendu	$f(\zeta) = \|\zeta\|^{-2H(\arg(\zeta))-d}$.	$H(\arg(\zeta)) \in (0,1)$ dépend de la direction fréquentielle.	[7, 8, 34]
Champ à fonction topothésie	$f(\zeta) = C(\arg(\zeta))\|w\|^{-2H-d}$.	$C(\arg(\zeta)) \in \mathbb{R}$ dépend de la direction fréquentielle.	[14]
Champ brownien multi-fractionnaire	$f(\zeta) = \|\zeta\|^{-2H(x)-2}$.	$H(x) \in (0,1)$ dépend de la position x.	[1, 27]
Champ à autosimilarité matricielle	$f(\zeta) = \|\zeta\|_E^{-2-\mathrm{tr}(E)}$, $\|c^E\zeta\|_E = c\|\zeta\|_E$.	E est une matrice $d \times d$	[5]

TAB. 8.1 – Tableau récapitulatif des modèles de champs gaussiens anisotropes à densité spectrale.

8.2.1 Champs gaussiens anisotropes à densité spectrale

Ces modèles anisotropes sont obtenus par différentes extensions du modèle isotrope de champ brownien fractionnaire, qui est lui-même une généralisation en dimension d ($d = 2$ ou $d = 3$) du fameux mouvement brownien fractionnaire [25]. Ces extensions sont obtenues dans le cadre des champs gaussiens à densité spectrale dont la définition est donnée dans la section 7.2 du chapitre 7. Elles se fondent sur la caractérisation du variogramme des champs par leur densité spectrale (cf. équation (7.1)). En donnant différentes formes non radiales à la densité spectrale, on obtient différentes sortes de champs anisotropes, que l'on résume de manière synthétique dans le tableau 8.1. Certains de ces modèles ont été appliqués aux radiographies d'os pour la caractérisation de maladies ostéo-articulaires [2, 6, 18, 30, 31] ainsi qu'à la mammographie [6, 34]. Il subsiste de nombreuses questions non résolues concernant la simulation de ces modèles et l'estimation de leurs paramètres. Dans le projet ANR, nous proposons de nombreuses pistes de recherche pour leur apporter des solutions [33].

8.2.2 Champs stationnaires déformés

Une façon simple d'obtenir ce type de modèles consiste à considérer des déformations géométriques de champs aléatoires stationnaires. Les auteurs de [16] montrent que le drap brownien fractionnaire, introduit par Kamont [21], peut aussi être vu comme un champ stationnaire déformé. Ce modèle, qui a des indices de Hurst différents dans des directions orthogonales, a également été obtenu par intégration par rapport au bruit blanc [22] et utilisé pour la modélisation des radiographies d'os et la caractérisation des maladies ostéo-articulaires [8, 21]. L'une des questions concernant ce type de modèle est alors de retrouver la déformation et le champ stationnaire sous-jacent.

8.2.3 Champs germe-grain

Ces modèles sont classiques en géométrie aléatoire : on lance aléatoirement des points (germes) dans l'espace et des parties compactes les contenant (grains). De nombreux champs aléatoires peuvent alors être construits à partir de ces modèles. Ainsi, les champs de type shot-noise [32] sont obtenus en considérant la superposition de ces grains.

Lorsque les grains sont des boules, le shot-noise fournit le nombre de boules aléatoires recouvrant chaque point [3]. Par leur construction, les champs de type shot-noise ne sont pas gaussiens. Les techniques courantes d'estimation paramétrique ne sont donc plus adaptées à ce type de modèle pour lesquels une caractérisation par des statistiques d'ordre 2 n'est pas possible. Les paramètres statistiques d'intérêt pour les modèles shot-noise sont l'intensité du processus ponctuel des germes et la loi des grains ou certaines de ses caractéristiques. Récemment, des méthodes d'estimation ont été proposées dans le cadre des processus shot-noise unidimensionnels [15]. Des modèles shot-noise multidimensionnels ont été étudiés par [4, 20]. Les questions concernant l'estimation paramétrique pour ces modèles demeurent cependant ouverts.

Toujours dans le cadre des modèles champs germe-grain, on peut construire des modèles ne reposant pas sur une superposition globale des grains, comme c'est le cas pour les modèles shot-noise. Ainsi, le modèle feuilles mortes, construit par recouvrements successifs des grains, est un outil efficace de modélisation des images naturelles [9, 26]. Dans le cadre de l'analyse d'images de radiographie, il est prometteur de considérer des variantes de ces modèles, en particulier le modèle feuilles mortes "transparentes", construits par ajouts successifs de grains ayant chacun un facteur de transparence. Ce modèle étant nouveau, son étude mathématique reste à faire, tant en ce qui concerne ses propriétés que l'estimation de ses paramètres ou sa synthèse.

Il est également possible de considérer des modèles booléens qui renvoient la valeur 1 si le point de l'espace est recouvert par l'un des grains. Ces modèles ont fait l'objet de nombreuses études en géométrie stochastique [26]. Ils peuvent servir à la simulation d'altérations aléatoires ou à la modélisation de matériaux binaires 3D comme l'os par exemple. Il semble alors naturel de considérer des transformations projectives de ces champs pour la modélisation d'images radiographiques et d'étudier l'influence des paramètres 3D sur les propriétés des images obtenues.

Enfin, on peut aussi considérer les champs germe-grain selon une troisième approche en ne gardant que l'information booléenne. L'ensemble des points recouverts par au moins un grain constitue un ensemble aléatoire (son complémentaire aussi) dont les propriétés morphologiques et topologiques ont été largement étudiées par les spécialistes de la géométrie aléatoire. Les champs indexés en 3D ainsi obtenus

peuvent être utilisés pour modéliser des matériaux bi-phasiques comme le tissu osseux par exemple. En décrivant par ailleurs d'un point de vue mathématique le procédé d'imagerie (coupes, scanner, radiographie,...) appliqué au matériau concerné, on obtient un modèle pour l'image 2D directement relié au modèle 3D.

8.3 Applications médicales

8.3.1 Maladies ostéo-articulaires

La résistance du tissu osseux n'est pas simplement liée à la densité osseuse, mais dépend également de la micro-architecture trabéculaire de l'os. Des études ont montré que les propriétés structurelles et mécaniques de l'os spongieux étaient anisotropes et ont suggéré d'utiliser l'anisotropie pour prédire un risque de fracture [10]. En effet, quel que soit le degré de précision de caractérisation de la micro-architecture trabéculaire, l'orientation des travées et l'orientation des tests mécaniques constituent toujours des déterminants puissants de la résistance osseuse. Partant de ce principe, diverses recherches ont été lancées pour modéliser la micro-architecture trabéculaire à partir de l'observation de radiographies d'os et caractériser cette dernière en définissant divers indices d'anisotropies [12]. Le but commun à ces recherches est de parvenir à prédire un risque de fracture à partir des indices extraits de l'image ou encore d'une combinaison de ces derniers avec certains facteurs cliniques classiques.

L'analyse des textures des radiographies d'os est l'une des voies qui a été suivie pour caractériser la micro-architecture trabéculaire. Dans cette optique, certains auteurs se sont appuyés sur l'analyse fractale, basée sur le modèle isotrope de mouvement brownien fractionnaire [2, 18] : les résultats des analyses fractales de texture étant rendues sur un diagramme polaire [18], une tentative de mesure d'anisotropie a été effectuée sur la forme du diagramme, en particulier en comparant un os porteur (calcaneum) avec un os non porteur (radius) [24]. Mais l'interprétation de ces variations rotationnelles d'irrégularité de texture reste très difficile, et assez éloignée de l'orientation des travées. Pour pallier ce défaut, certains auteurs se sont placés dans le cadre des modèles de champs browniens fractionnaires étendus pour mettre en place une méthode d'analyse de l'anisotropie dite "méthode des moyennes directionnelles" [23]. Toutefois, nous avons remarqué que les propriétés théoriques de ces modèles n'étaient pas observées sur les radiographies d'os, ce qui suggère que ces modèles ne sont pas parfaitement adaptés à ces images [6, 31, 30]. Le problème de la modélisation des images osseuses reste donc un défi mathématique que nous voulons relever dans le cadre du projet.

Par ailleurs, l'anisotropie de texture osseuse sur images projetées doit être confrontée à l'anisotropie réelle de l'objet en 3D [29]. Nos expériences ont montré que les altérations aléatoires apportées à une structure anisotrope aggravaient son anisotro-

pie [28]. Ces aspects de correspondance 2D-3D paraissent nécessaires à la validation d'indices d'anisotropie, d'autant que l'enjeu est de fournir un indice pertinent de risque basé sur la structure, en l'améliorant grâce à l'anisotropie.

En particulier, l'os trabéculaire est organisé en un réseaux complexes de plaques et poutres et des études récentes [35] montrent qu'il est important de tenir compte de ces deux composantes pour obtenir des indicateurs fiables de l'état de la micro-architecture osseuse.

8.3.2 Cancer du sein

Dans nos travaux antérieurs, nous avons montré expérimentalement la pertinence des champs browniens fractionnaires anisotropes pour la modélisation des textures mammographiques (voir le chapitre 7 et l'article [34]). Cependant, l'analyse de la régularité directionnelle que nous avons faite est limitée aux directions horizontale et verticale. Nous souhaitons étendre cette analyse directionnelle en utilisant des rotations discrètes dans des directions quelconques du plan et contrôlant l'erreur d'estimation paramétrique induite par ces rotations. Par ailleurs, nous avons appliqué nos méthodes à des mammographies directement numériques alors que le contexte clinique de ce projet impose de travailler sur des mammographies classiques numérisées. Il s'agit donc de prendre en compte cette spécificité de la formation de l'image dans le modèle de champ et d'en étudier l'effet de la numérisation sur l'estimation des paramètres. D'une manière plus générale, nous nous intéresserons aux problèmes du passage continu au discret dans les modèles aléatoires considérés.

Dans une toute autre perspective, des travaux ont été menés pour évaluer directement la densité des seins à partir de mesures d'aire [11] et de mesures de volume [36]. Ces mesures, qui sont effectuées sans en référer à l'aspect textural des images, ont été mises en relation avec un risque de cancer du sein. Nous chercherons à trouver des corrélations entre les mesures de densité et les indices texturaux extraits des images en utilisant la base E3N de notre partenaire Inserm.

Par ailleurs, en suivant les analyses développées dans [17], nous travaillerons sur la caractérisation de la détectabilité des lésions par rapport au contraste et aux paramètres de forme. En fonction des propriétés du modèle de texture, des contrastes et mesures de forme spécifiques pourraient voir le jour, ce qui poserait la question de l'adéquation entre la détectabilité prédite par le modèle et la détectabilité mesurée empiriquement à partir d'expériences psycho-visuelles sur des sujets.

8.4 Références du chapitre

[1] A. Benassi, S. Jaffard, and D. Roux. Elliptic Gaussian random processes. *Revista Mathemática Iberoamericana*, 13(1) :19–89, 1997.

[2] C.L. Benhamou, S. Poupon, E. Lespessailles, S. Loiseau, R. Jennane, V. Siroux, W. Ohley, and L. Pothuaud. Fractal analysis of radiographic trabecular bone texture and bone mineral density. *Journal of Bone and Mineral Research*, 16(4) :697–703, 2001.

[3] H. Biermé and A. Estrade. Poisson microballs : self-similarity and X-ray transforms. *Advances in Applied Probability*, 38 :1–20, 2006.

[4] H. Biermé, A. Estrade, and I. Kaj. Self-similar random fields and rescaled random balls models. Submitted Preprint, 2007.

[5] H. Biermé, M. M. Meerschaert, and H. P. Scheffler. Operator scaling stable random fields. *Stochastic Processes and their Applications*, 117(3) :312–332, 2007.

[6] H. Biermé, F. Richard, M. Rachidi, and C.L. Benhamou. Anisotropic texture modeling and applications to medical image analysis. In H. Ammari, editor, *ESAIM Proceedings : Mathematical Methods for Imaging and Inverse Problems*, volume 26, pages 100–122, 2009.

[7] H. Biermé and F.JP Richard. Estimation of anisotropic gaussian fields through Radon transform. *ESAIM : Probability and Statistics*, 12(1) :30–50, 2008.

[8] A. Bonami and A. Estrade. Anisotropic analysis of some Gaussian models. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9 :215–236, 2003.

[9] C. Bordenave, Y. Gousseau, and F. Roueff. The dead leaves model : an example of a general tessellation. *Advances in Applied Probability*, 38(1) :31–46, 2006.

[10] B. Brunet-Imbault, G. Lemineur, C. Chappard, et al. A new anisotropy index on trabecular bone radiographic images using the fast Fourier transform. *BMC Medical Imaging*, 5(4) :1–11, 2005.

[11] J. Byng, N. Boyd, E. Fishell, et al. The quantitative analysis of mammographic density. *Physics in Medecine and Biology*, 39 :1629–1638, 1994.

[12] C. Chappard, B. Brunet-Imbault, G. Lemineur, B. Giraudeau, Basillais A., and C.L. Benhamou. Anisotropy changes in post-menopausal osteoporosis : Characterization by a new index applied to trabecular bone radiographic images. *Osteoporosis International*, 16 :1193–1202, 2005.

[13] C.-C. Chen, J. Daponte, and M. Fox. Fractal feature analysis and classification in medical imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8(2) :133–142, 1989.

[14] S. Davies and P. Hall. Fractal analysis of surface roughness by using spatial data. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B*, 61 :3–37, 1999.

[15] G. Faÿ, F. Roueff, and P. Soulier. Estimation of the memory parameter of the infinite source Poisson process. *Bernoulli*, 13(2) :473–491, 2007.

[16] M. G. Genton, O. Perrin, and M. Taqqu. Self-similarity and Lamperti transformation for random fields. *Stochastic Models*, 23 :397–411, 2007.

[17] B. Grosjean and L. Moisan. A-contrario detectability of spots in textured backgrounds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 33(3) :313–337, 2009.

[18] R. Harba, G. Jacquet, R. Jennane, et al. Fractal organization of trabecular bone images on calcaneus radiographs. *Journal of Bone and Mineral Research*, 9 :1909–1918, 1994.

[19] J. Heine and P. Malhorta. Mammographic tissue, breast cancer risk, serial image analysis, and digital mammography : tissue and related risk factors. *Academic Radiology*, 9 :298–316, 2002.

[20] I. Kaj, L. Leskelä, I. Norros, and V. Schmidt. Scaling limits for random fields with long-range dependence. *Annals of Probability*, 35(2) :528–550, 2007.

[21] A. Kamont. On the fractional anisotropic Wiener field. *Probability and Mathematical Statistics*, 16 :85–98, 1996.

[22] S. Leger. *Analyse stochastique de signaux multi-fractaux et estimations de paramètres*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2000.

[23] G. Lemineur, R. Harba, R. Jennane, et al. Fractal anisotropy measurement of bone texture radiographs. In *First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing*, pages 275–278, 2004.

[24] E. Lespessailles, G. Jacquet, R. Harba, R. Jennane, T. Loussot, J.F. Viala, and C.L. Benhamou. Anisotropy measurement obtained by fractal analysis of trabecular bone at the calcaneus and radius. *Revue du Rhumatisme*, 63 :337–343, 1996.

[25] B. B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional Brownian motion, fractionnal noises and applications. *SIAM Review*, 10 :422–437, 1968.

[26] G. Matheron. Modèle séquentiel de partition aléatoire. Technical report, Centre de Morphologie Mathématique, 1968.

[27] R.F. Peltier and J. Levy Vehel. Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results. Technical report, INRIA, 1996.

[28] L. Pothuaud, P. Levitz, and C.L. Benhamou. *Simulation of osteoporosis bone changes : effects on the degree of anisotropy*, volume 1, chapter "Noninvasive assessment of trabecular bone architecture and the competence of bone". Advances in experimental medicine and biology, pages 111–121. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New-York, 2001.

[29] L. Pothuaud, P. Porion, E. Lespessailles, C.L. Benhamou, and P. Levitz. A new method for three-dimensionnal skeleton graph analysis of porous media : application to trabecular bone microarchitecture. *Journal of Microscopy*, 14 :149–161, 2000.

[30] M. Rachidi, F. Richard, H. Biermé, E. Lespessailles, C. Chappard, and CL. Benhamou. Conception of a composite osteoporosis fracture index including bone texture analysis and bone mineral density. In *Proceedings of the eighteenth International Bone Densitometry Workshop (IBDW'08)*, Foggia, Italy, june 2008. (abstract, oral presentation).

[31] M. Rachidi, F. Richard, H. Biermé, C. Roux, P. Fardellone, E. Lespessailles, C. Chappard, and CL. Benhamou. Osteoporosis risk assessment : A composite index combining clinical risk factors and biophysical parameters. In *Proceedings of the thirtieth annual meeting of the American Society for Bone and Mineral Research (ASBMR'08)*, Montreal, USA, sept 2008. (abstract, poster).

[32] J. Rice. On generalized shot noise. *Advances in Applied Probability*, 9 :553–565, 1977.

[33] F. Richard et al. Modélisation de l'Anisotropie de textures. Application à l'imagerie médicale (MATAIM). Technical report, University Paris Descartes, nov. 2008. ANR-Grant Proposal.

[34] F.JP Richard and H. Biermé. Statistical tests of anisotropy for fractional brownian textures. application to full-field digital mammography. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007. accepted with minor revisions.

[35] M. Stauber and R. Muller. Volumetric spatial decomposition of trabecular bone into rods and plates-a new method for local bone morphometry. *Bone*, 38 :475–484, 2005.

[36] S. Van Engeland, P. Snoeren, H. Huisman, et al. Volumetric breast density estimation full-field digital mammograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(3) :273–282, 2008.