

# Etats fondamentaux et excitations de systèmes magnétiques frustrés, du classique au quantique

Soutenance de thèse de Laura Messio

Thèse dirigée par C. Lhuillier (LPTMC) et G. Misguich (IPhT)

Collaborateurs : O. Cépas, J.-C. Domenge, B. Fåk, L. Pierre et P. Viot



14 Septembre 2010

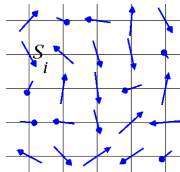
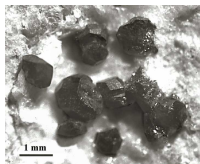
# Plan de la présentation

- I) Propriétés thermodynamiques de modèles de spins classiques non coplanaires
- II) Les états classiques réguliers
- III) Les états fondamentaux quantiques

# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

Supraconducteurs à haute température critique (1986)

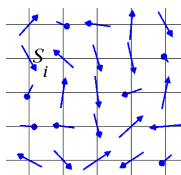
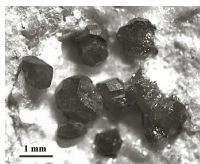
→ intérêt pour les isolants de Mott.



# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

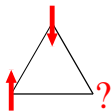
Supraconducteurs à haute température critique (1986)

→ intérêt pour les isolants de Mott.



Qu'est-ce que la frustration ?

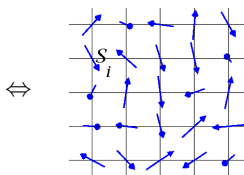
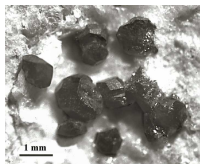
$$E = \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

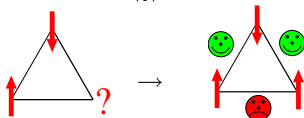
Supraconducteurs à haute température critique (1986)

→ intérêt pour les isolants de Mott.



Qu'est-ce que la frustration ?

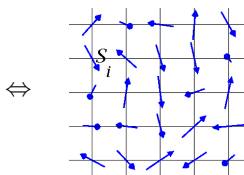
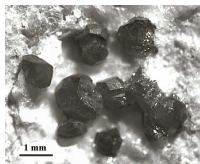
$$E = \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

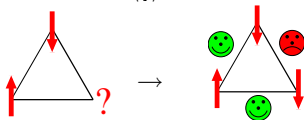
Supraconducteurs à haute température critique (1986)

→ intérêt pour les isolants de Mott.



Qu'est-ce que la frustration ?

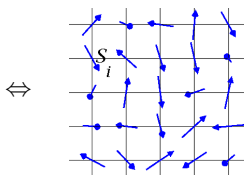
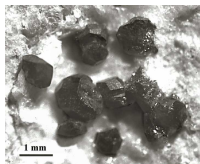
$$E = \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

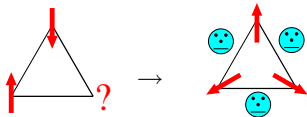
Supraconducteurs à haute température critique (1986)

→ intérêt pour les isolants de Mott.



Qu'est-ce que la frustration ?

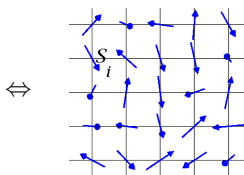
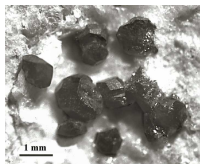
$$E = \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

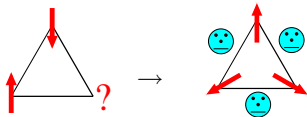
Supraconducteurs à haute température critique (1986)

→ intérêt pour les isolants de Mott.

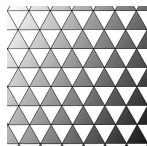


Qu'est-ce que la frustration ?

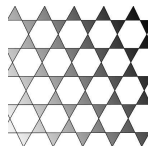
$$E = \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



Réseaux 2D formés de triangles



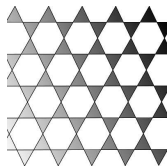
triangulaire



kagome



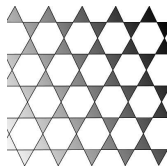
# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D



# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

## **Phases quantiques possibles :**

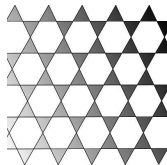
- ▶ Ordre de Néel (semi-classique),
- ▶ Cristal de liens de valence,
- ▶ Liquide de spins...



# Intro : les systèmes magnétiques frustrés 2D

## Phases quantiques possibles :

- ▶ Ordre de Néel (semi-classique),
- ▶ Cristal de liens de valence,
- ▶ Liquide de spins...



- ▶ Cutitmb (Katsumata 2002),

## Réalisations expérimentales :



- ▶ Herbertsmithite (Nocera),



- ▶ Kapellasite (Wills),



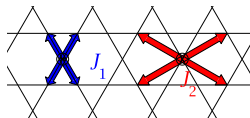
- ▶ Volborthite (Hiroï)...

Partie I  
Propriétés thermodynamiques  
de modèles classiques  
de spins non coplanaires

# Exemple : état cuboctaédrique sur kagome

Etat fondamental classique sur kagome de :

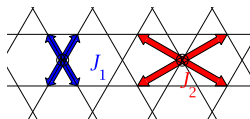
$$E = J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



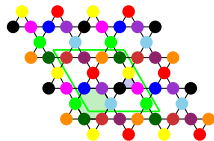
# Exemple : état cuboctaédrique sur kagome

Etat fondamental classique sur kagome de :

$$E = J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



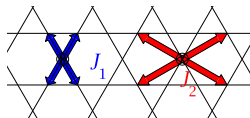
- C'est un état de Néel à 12 sous-réseaux (Domenge *et al.*, PRB 2005) pour  $J_2 > |J_1|/3$  et  $J_1 < 0$ .



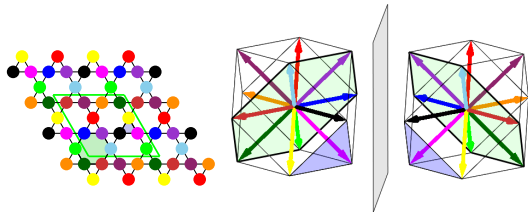
# Exemple : état cuboctaédrique sur kagome

Etat fondamental classique sur kagome de :

$$E = J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



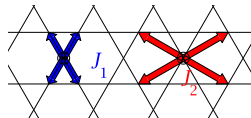
- ▶ C'est un état de Néel à 12 sous-réseaux (Domenge *et al.*, PRB 2005) pour  $J_2 > |J_1|/3$  et  $J_1 < 0$ .
- ▶ Espace du paramètre d'ordre  $\sim O(3) \Rightarrow$  chiralité  $\pm 1$ .



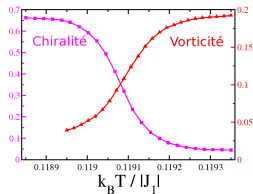
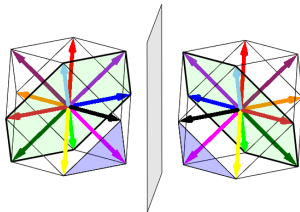
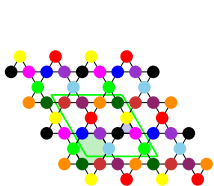
# Exemple : état cuboctaédrique sur kagome

Etat fondamental classique sur kagome de :

$$E = J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



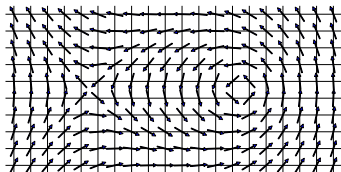
- ▶ C'est un état de Néel à 12 sous-réseaux (Domenge *et al.*, PRB 2005) pour  $J_2 > |J_1|/3$  et  $J_1 < 0$ .
- ▶ Espace du paramètre d'ordre  $\sim O(3) \Rightarrow$  chiralité  $\pm 1$ .
- ▶ Transition **chirale** à température finie avec prolifération des **vortex**.





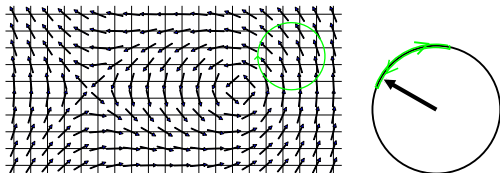
# Les vortex

- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.



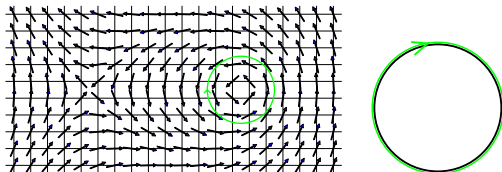
# Les vortex

- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.



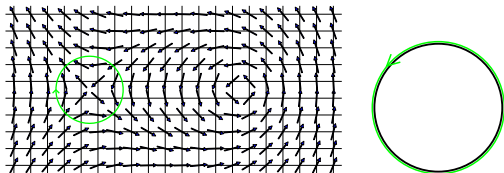
# Les vortex

- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.



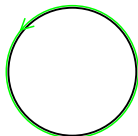
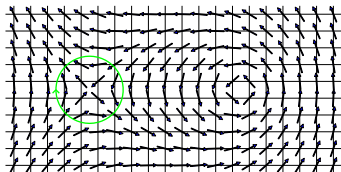
# Les vortex

- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.



## Les vortex

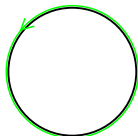
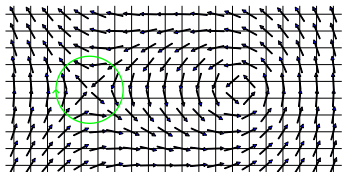
- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.



$$\pi_1(\mathcal{S}_1) = \mathbb{Z}$$

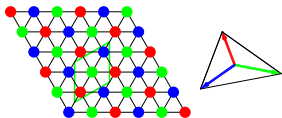
# Les vortex

- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.



$$\pi_1(\mathcal{S}_1) = \mathbb{Z}$$

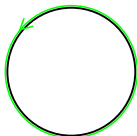
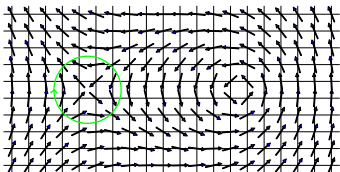
- ▶ Kawamura-Miyashita (1984) : les vortex  $\mathbb{Z}_2$  (spins Heisenberg)



$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$$

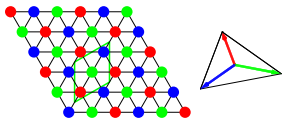
# Les vortex

- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.



$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

- ▶ Kawamura-Miyashita (1984) : les vortex  $\mathbb{Z}_2$  (spins Heisenberg)



$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$$



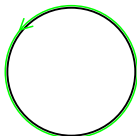
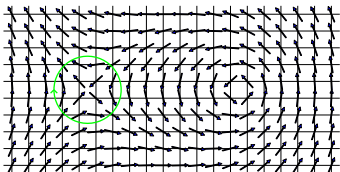
Réseau physique



$SO(3)$

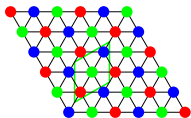
# Les vortex

- ▶ Les vortex  $\mathbb{Z}$  (spins XY)  $\rightarrow$  transition Kosterlitz-Thouless.

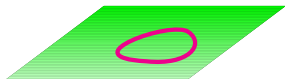


$$\pi_1(\mathcal{S}_1) = \mathbb{Z}$$

- ▶ Kawamura-Miyashita (1984) : les vortex  $\mathbb{Z}_2$  (spins Heisenberg)



$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$$



Réseau physique

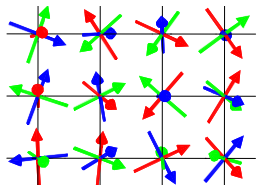


$SO(3)$



# Le modèle jouet

On a choisi un modèle simple :

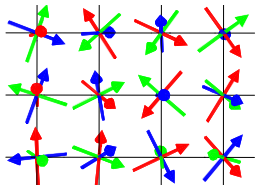


$$E = - \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

Paramètre d'ordre :  $O(3)$

# Le modèle jouet

On a choisi un modèle simple :



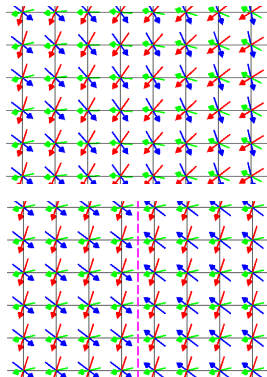
$$E = - \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

Paramètre d'ordre :  $O(3)$

▶ Ondes de spins

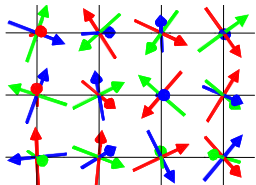
▶ Chiralité

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_i \wedge \mathbf{S}_i$$



# Le modèle jouet

On a choisi un modèle simple :



$$E = - \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

Paramètre d'ordre :  $O(3)$

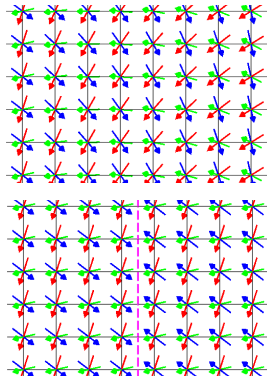
Vorticité  $\mathbb{Z}_2$ :



► Ondes de spins

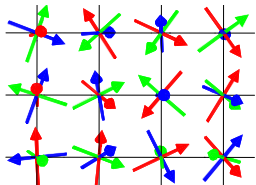
► Chiralité

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_i \wedge \mathbf{S}_i$$



# Le modèle jouet

On a choisi un modèle simple :



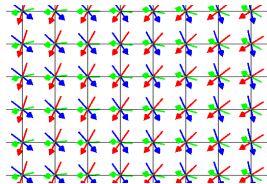
$$E = - \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_i \wedge \mathbf{S}_j$$

Paramètre d'ordre :  $O(3)$

Vorticité  $\mathbb{Z}_2$ :

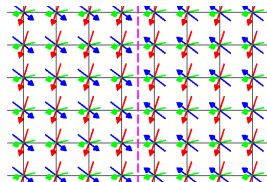


▶ Ondes de spins

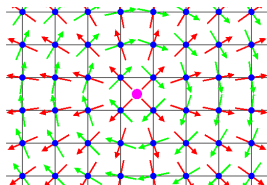


▶ Chiralité

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_i \wedge \mathbf{S}_j$$



▶ Vortex



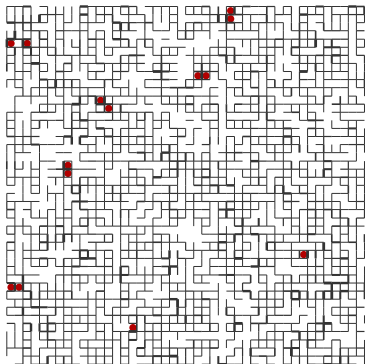
# Les vortex et la transition chirale

Simulations numériques (algorithme Wang-Landau)

# Les vortex et la transition chirale

Simulations numériques (algorithme Wang-Landau)

Chiralité fixée, paires de vortex :

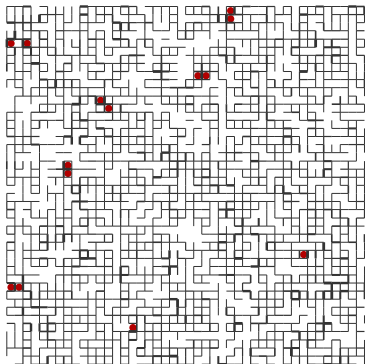


$$T_{\text{apparition}} = 1.1$$

# Les vortex et la transition chirale

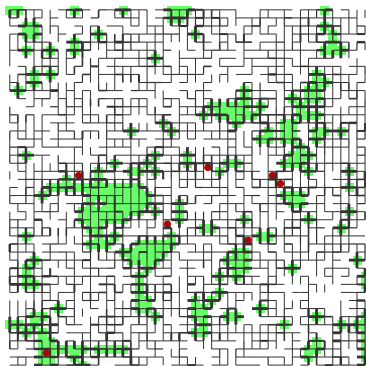
Simulations numériques (algorithme Wang-Landau)

Chiralité fixée, paires de vortex :



$$T_{\text{apparition}} = 1.1$$

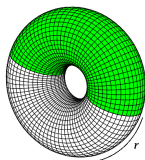
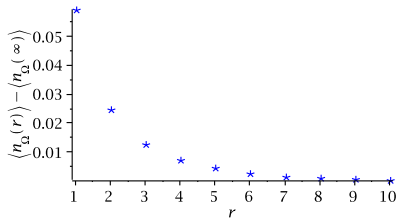
Avec chiralité, vortex isolés près des murs de domaines :



$$T_{\text{apparition}} = 0.97$$

# Les vortex et la transition chirale

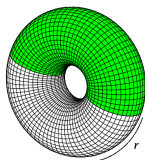
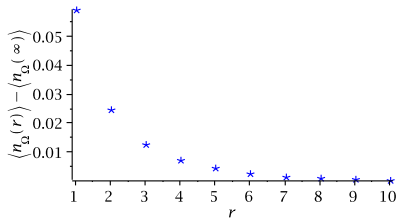
Les vortex sont plus nombreux près des murs de domaines :



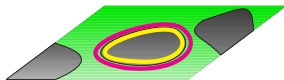


# Les vortex et la transition chirale

Les vortex sont plus nombreux près des murs de domaines :

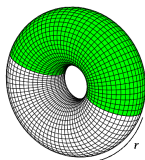
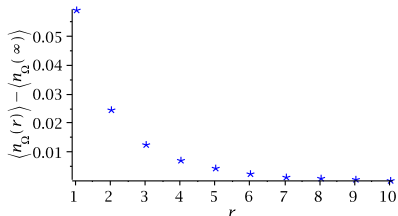


On peut définir la vorticité d'un mur de domaine  $\Omega_{mur} = \Omega_{ext}\Omega_{int} = \pm 1$  :

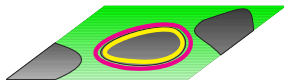


# Les vortex et la transition chirale

Les vortex sont plus nombreux près des murs de domaines :



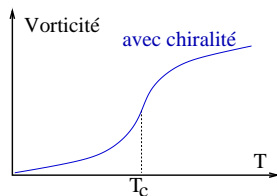
On peut définir la vorticité d'un mur de domaine  $\Omega_{mur} = \Omega_{ext}\Omega_{int} = \pm 1$  :



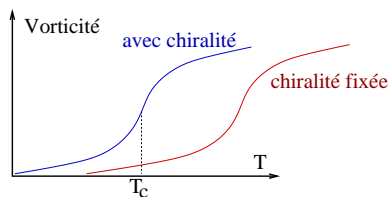
Plusieurs paires sont possibles :

- ▶ vortex-vortex,
- ▶ mur-vortex,
- ▶ mur-mur.

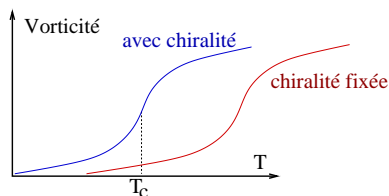
# Conclusion sur la transition chirale et les vortex



# Conclusion sur la transition chirale et les vortex

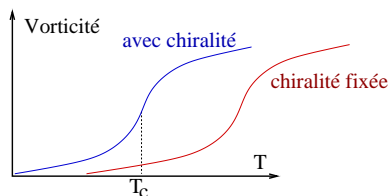


# Conclusion sur la transition chirale et les vortex



- ▶ Les murs de domaines peuvent porter une charge topologique. La création d'une paire vortex-mur coûte moins d'énergie que la création d'une paire vortex-vortex.

# Conclusion sur la transition chirale et les vortex

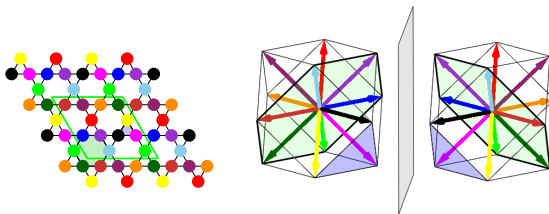


- ▶ Les murs de domaines peuvent porter une charge topologique. La création d'une paire vortex-mur coûte moins d'énergie que la création d'une paire vortex-vortex.
- ▶ Le modèle est proche d'un point tricritique : transition dans la classe d'universalité d'Ising ou du premier ordre.

# Partie II

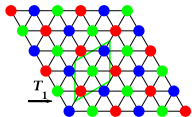
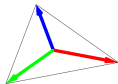
## Les états classiques

### réguliers



# Définition d'un état régulier

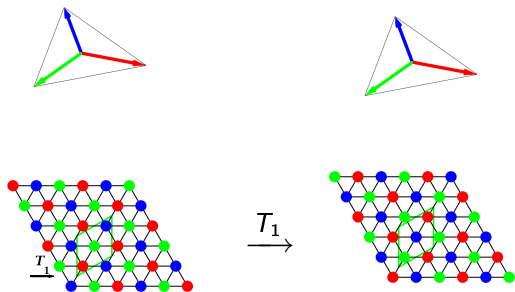
Exemple :





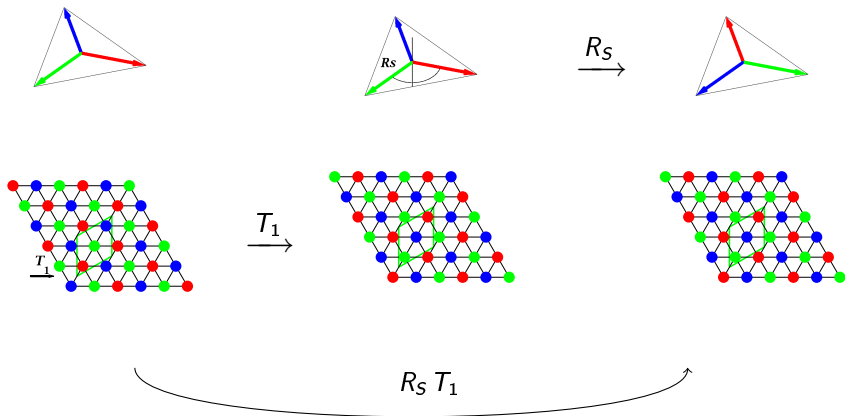
# Définition d'un état régulier

Exemple : cet état de Néel n'est pas invariant par la translation  $T_1$ .



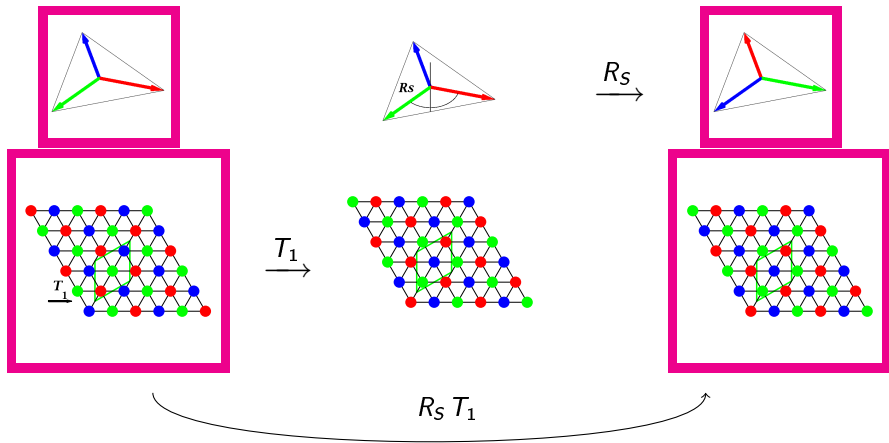
# Définition d'un état régulier

Exemple : cet état de Néel n'est pas invariant par la translation  $T_1$ , mais il l'est par  $T_1$  suivie d'une rotation globale des spins  $R_S$ .



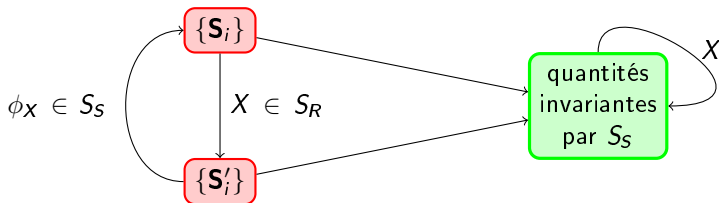
# Définition d'un état régulier

Exemple : cet état de Néel n'est pas invariant par la translation  $T_1$ , mais il l'est par  $T_1$  suivie d'une rotation globale des spins  $R_S$ .



# Définition d'un état régulier

On connaît le réseau et ses symétries  $S_R$ , l'espace des spins et ses symétries  $S_S$ .



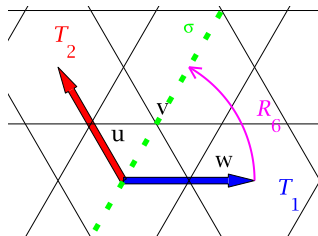
Définition :

Un état classique est *régulier* pour la symétrie du réseau  $X$  si il existe une transformation globale des spins  $\phi_X$  telle que l'état soit invariant par  $\phi_X X$ .

# Comment trouver tous les états réguliers ?

Leur recherche se passe en deux étapes.

Exemple du réseau kagome  
avec spins Heisenberg

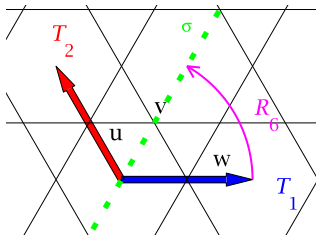


# Comment trouver tous les états réguliers ?

Leur recherche se passe en deux étapes.

(1) Trouver les  $\phi_X$  de  $S_S$  qui respectent la structure algébrique de  $S_R$ .

Exemple du réseau kagome  
avec spins Heisenberg



(1) Contraintes algébriques sur les  $\phi_X$  de  $O_3$  :

$$\phi_{T_1} \phi_{T_2} = \phi_{T_2} \phi_{T_1} \quad \phi_{T_1} \phi_{R_6} \phi_{T_2} = \phi_{R_6}$$

$$\phi_{R_6} \phi_{\sigma} \phi_{R_6} = \phi_{\sigma} \quad \phi_{T_1} \phi_{\sigma} = \phi_{\sigma} \phi_{T_2}$$

$$\phi_{R_6}^6 = I \quad \phi_{\sigma^2} = I$$

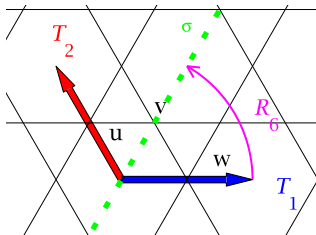
$$\phi_{R_6} \phi_{T_1} \phi_{T_2} = \phi_{T_2} \phi_{R_6}.$$

# Comment trouver tous les états réguliers ?

Leur recherche se passe en deux étapes.

- (1) Trouver les  $\phi_X$  de  $S_S$  qui respectent la structure algébrique de  $S_R$ ,
- (2) Pour chaque ensemble de  $\phi_X$ , trouver les états compatibles.

Exemple du réseau kagome  
avec spins Heisenberg



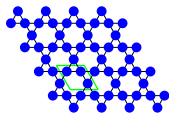
- (1) Contraintes algébriques sur les  $\phi_X$  de  $O_3$  :

$$\begin{aligned}\phi_{T_1}\phi_{T_2} &= \phi_{T_2}\phi_{T_1} & \phi_{T_1}\phi_{R_6}\phi_{T_2} &= \phi_{R_6} \\ \phi_{R_6}\phi_{\sigma}\phi_{R_6} &= \phi_{\sigma} & \phi_{T_1}\phi_{\sigma} &= \phi_{\sigma}\phi_{T_2} \\ \phi_{R_6}^6 &= I & \phi_{\sigma^2} &= I \\ \phi_{R_6}\phi_{T_1}\phi_{T_2} &= \phi_{T_2}\phi_{R_6}.\end{aligned}$$

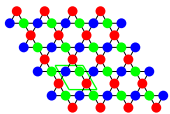
- (2) Contraintes sur les états de spins :

$$\phi_{\sigma}\mathbf{S}_v = \mathbf{S}_v, \quad \phi_{T_1}\phi_{T_2}\phi_{R_6}^3\mathbf{S}_v = \mathbf{S}_v.$$

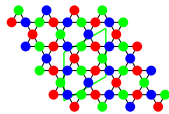
# Tous les états réguliers sur le réseau kagome



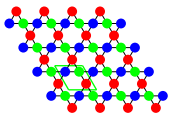
Etat ferromagnétique



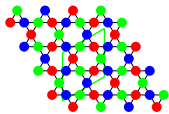
Etat  $q = 0$



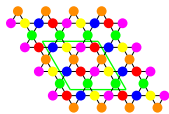
Etat  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$



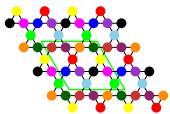
Etat  $q = 0$  parapluie



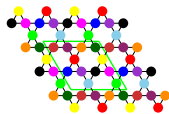
Etat  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  parapluie



Etat octaédrique



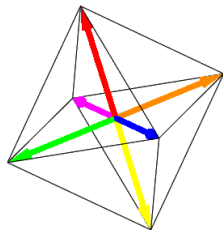
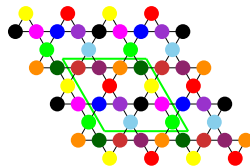
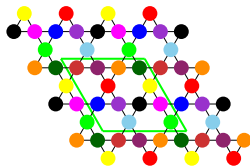
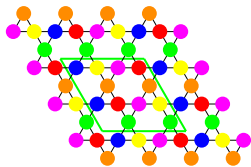
Etat cuboc1



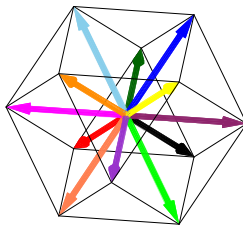
Etat cuboc2



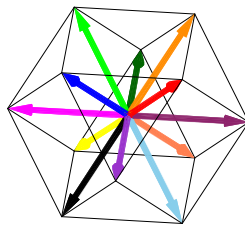
# Tous les états réguliers sur le réseau kagome



Etat octaédrique



Etat cuboc1



Etat cuboc2 ( $J_1 - J_2$ )

# Intérêt des états réguliers

- ▶ Tous les états réguliers (sauf parapluies) sont des extrema ou points selles de l'énergie dès qu'elle respecte  $S_R$  et  $S_S$ . Ils sont donc des candidats pour l'état fondamental.

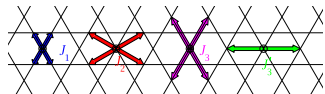
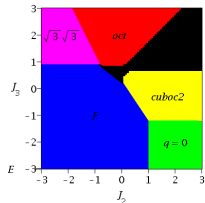
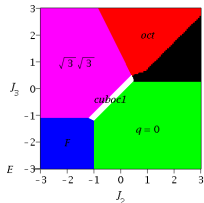


Fig :  $J'_3 = 0.2$ ,  
 $J_1 = 1$  à gauche  
 $J_1 = -1$  à droite



# Intérêt des états réguliers

- Tous les états réguliers (sauf parapluies) sont des extrema ou points selles de l'énergie dès qu'elle respecte  $S_R$  et  $S_S$ . Ils sont donc des candidats pour l'état fondamental.

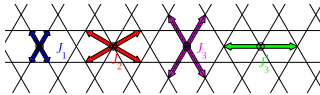
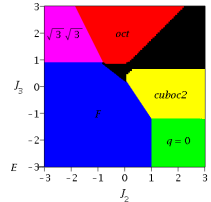
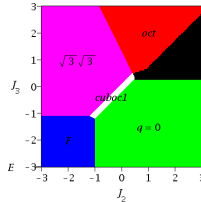
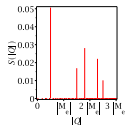
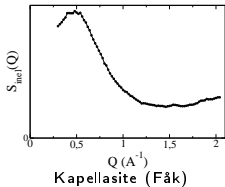


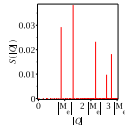
Fig :  $J_3' = 0.2$ ,  
 $J_1 = 1$  à gauche  
 $J_1 = -1$  à droite



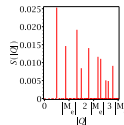
- Les résultats expérimentaux peuvent être comparés aux facteurs de structure de ces états.



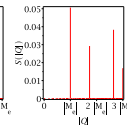
**cuboc2**



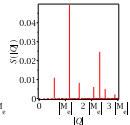
cuboc1



oct



q = 0



$\sqrt{3}\sqrt{3}$

# Intérêt des états réguliers

- Tous les états réguliers (sauf parapluies) sont des extrema ou points selles de l'énergie dès qu'elle respecte  $S_R$  et  $S_S$ . Ils sont donc des candidats pour l'état fondamental.

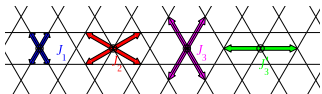
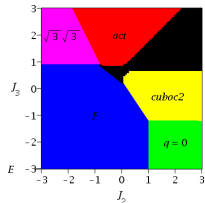
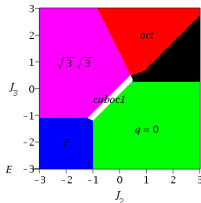
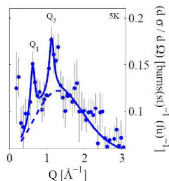


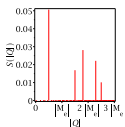
Fig :  $J'_3 = 0.2$ ,  
 $J_1 = 1$  à gauche  
 $J_1 = -1$  à droite



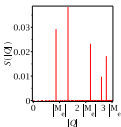
- Les résultats expérimentaux peuvent être comparés aux facteurs de structure de ces états.



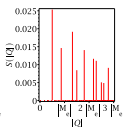
Volborthite (Nielsen)



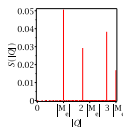
cuboc2



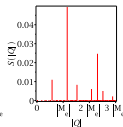
cuboc1



oct



$q = 0$



$\sqrt{3}\sqrt{3}$

Partie III  
Les états fondamentaux  
quantiques

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$|0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} | \\ \hline i \\ \hline \end{array} \right\rangle$$

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} \right\rangle$$

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$$



# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$$

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right\rangle$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2\hat{S} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2\hat{S} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

Excitations=spinons

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{a}_i \hat{b}_j - \hat{a}_j \hat{b}_i)$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2\hat{S}_i^- = \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger + \hat{b}_i \hat{b}_i^\dagger$$

Excitations=spinons

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{a}_i \hat{b}_j - \hat{a}_j \hat{b}_i)$$

$$\hat{A}_{ij}^\dagger |0_{ij}\rangle = \frac{1}{2} \left( \left| \begin{array}{c} \uparrow_i \\ \downarrow_j \end{array} \right\rangle - \left| \begin{array}{c} \downarrow_i \\ \uparrow_j \end{array} \right\rangle \right)$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2\hat{S} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

Excitations=spinons

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{a}_i \hat{b}_j - \hat{a}_j \hat{b}_i)$$

$$\hat{A}_{ij}^\dagger |0_{ij}\rangle = \frac{1}{2} \left( \left| \begin{array}{c} \uparrow_i \\ \downarrow_j \end{array} \right\rangle - \left| \begin{array}{c} \downarrow_i \\ \uparrow_j \end{array} \right\rangle \right)$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2\hat{S} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

Excitations=spinons

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (S^2 - 2\hat{A}_{ij}^\dagger \hat{A}_{ij})$$

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow\downarrow \\ \uparrow\downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{a}_i \hat{b}_j - \hat{a}_j \hat{b}_i)$$

$$\hat{A}_{ij}^\dagger |0_{ij}\rangle = \frac{1}{2} \left( \left| \begin{array}{c} \uparrow_i \\ \downarrow_j \end{array} \right\rangle - \left| \begin{array}{c} \downarrow_i \\ \uparrow_j \end{array} \right\rangle \right)$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2S = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

Excitations=spinons

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (S^2 - 2\hat{A}_{ij}^\dagger \hat{A}_{ij})$$

$$\xrightarrow{MF} \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (S^2 - 2\hat{A}_{ij}^\dagger \mathcal{A}_{ij} - 2\mathcal{A}_{ij}^* \hat{A}_{ij} + 2|\mathcal{A}_{ij}|^2) + \sum_i \lambda_i (2S - \hat{n}_i)$$



# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow\downarrow \\ \uparrow\downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{a}_i \hat{b}_j - \hat{a}_j \hat{b}_i)$$

$$\hat{A}_{ij}^\dagger |0_{ij}\rangle = \frac{1}{2} \left( \left| \begin{array}{c} \uparrow_i \\ \downarrow_j \end{array} \right\rangle - \left| \begin{array}{c} \downarrow_i \\ \uparrow_j \end{array} \right\rangle \right)$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2S = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

Excitations=spinons

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (S^2 - 2\hat{A}_{ij}^\dagger \hat{A}_{ij})$$

$$\xrightarrow{MF} \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (S^2 - 2\hat{A}_{ij}^\dagger \mathcal{A}_{ij} - 2\mathcal{A}_{ij}^* \hat{A}_{ij} + 2|\mathcal{A}_{ij}|^2) + \sum_i \lambda_i (2S - \hat{n}_i)$$

Un ensemble de paramètres complexes  $\{\mathcal{A}_{ij}\}$  est appelé un Ansatz.

# Les bosons de Schwinger en champ moyen

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0_i\rangle = \left| \begin{array}{c} \uparrow\downarrow \\ \uparrow\downarrow \end{array} \right\rangle$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{a}_i \hat{b}_j - \hat{a}_j \hat{b}_i)$$

$$\hat{A}_{ij}^\dagger |0_{ij}\rangle = \frac{1}{2} \left( \left| \begin{array}{c} \uparrow_i \\ \downarrow_j \end{array} \right\rangle - \left| \begin{array}{c} \downarrow_i \\ \uparrow_j \end{array} \right\rangle \right)$$

$$2\hat{S}_i^z = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i$$

$$2S = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

Excitations=spinons

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (S^2 - 2\hat{A}_{ij}^\dagger \hat{A}_{ij})$$

$$\xrightarrow{MF} \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (S^2 - 2\hat{A}_{ij}^\dagger \mathcal{A}_{ij} - 2\mathcal{A}_{ij}^* \hat{A}_{ij} + 2|\mathcal{A}_{ij}|^2) + \sum_i \lambda_i (2S - \hat{n}_i)$$

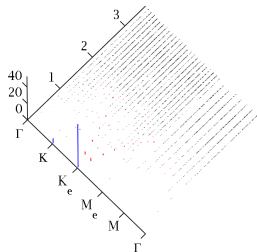
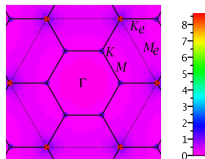
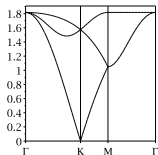
Un ensemble de paramètres complexes  $\{\mathcal{A}_{ij}\}$  est appelé un Ansatz.

On cherche un Ansatz tel que  $\mathcal{A}_{ij} = \langle \hat{A}_{ij} \rangle_{GS}$ .

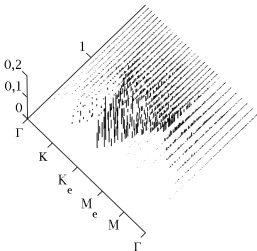
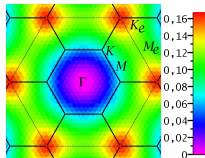
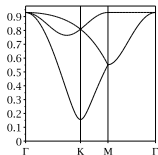
# L'ordre à longue portée (LRO) en SBMFT

A la limite thermodynamique pour  $T = 0$ , deux possibilités

1. le gap tend vers 0  $\rightarrow$  phase Néel.  
Exemple : kagome,  $S = 0.5 > S_c$



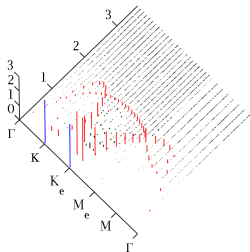
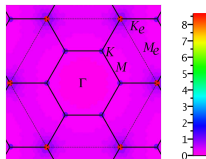
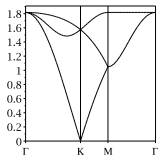
2. le gap tend vers une limite finie,  
Exemple : kagome,  $S = 0.2 < S_c$



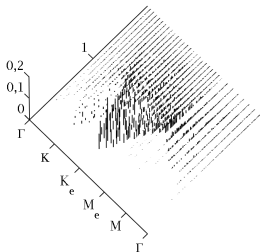
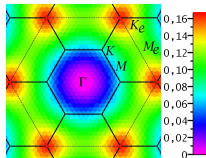
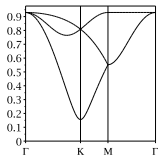
# L'ordre à longue portée (LRO) en SBMFT

A la limite thermodynamique pour  $T = 0$ , deux possibilités

1. le gap tend vers 0  $\rightarrow$  phase Néel.  
Exemple : kagome,  $S = 0.5 > S_c$



2. le gap tend vers une limite finie,  
Exemple : kagome,  $S = 0.2 < S_c$

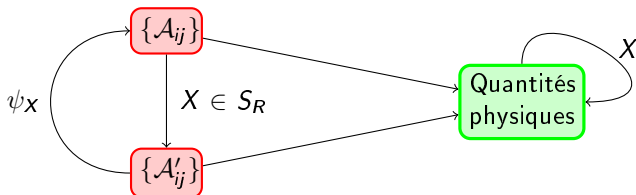


# Les groupes de symétries projectives

Invariance de jauge locale  $\psi : \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\alpha_i} a_i \\ e^{i\alpha_i} b_i \end{pmatrix}$  n'affecte pas les quantités physiques.

# Les groupes de symétries projectives

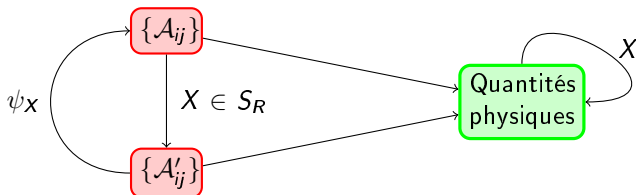
Invariance de jauge locale  $\psi : \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\alpha_i} a_i \\ e^{i\alpha_i} b_i \end{pmatrix}$  n'affecte pas les quantités physiques.



$\{\psi_X X\} =$  groupe de symétries projectives (Wen PRB 2002)

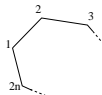
# Les groupes de symétries projectives

Invariance de jauge locale  $\psi : \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\alpha_i} a_i \\ e^{i\alpha_i} b_i \end{pmatrix}$  n'affecte pas les quantités physiques.



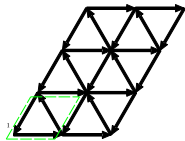
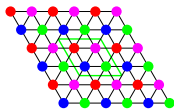
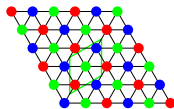
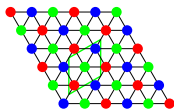
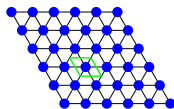
$\{\psi_X X\}$  = groupe de symétries projectives (Wen PRB 2002)

→ Familles d'Ansätze caractérisées par leurs flux autour de boucles

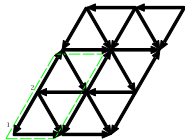


$$\phi_{12\dots 2n} = \text{phase de } \mathcal{A}_{12}(-\mathcal{A}_{23}^*) \cdots (-\mathcal{A}_{2n,1}^*)$$

# Résultats sur le réseau triangulaire



$$\{\mathcal{A}_{ij}\}(\phi = 0)$$

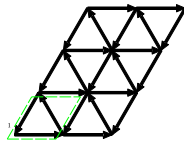
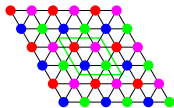
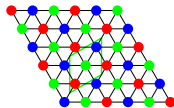
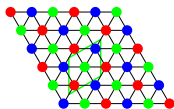
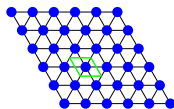


$$\{\mathcal{A}_{ij}\}(\phi = \pi)$$

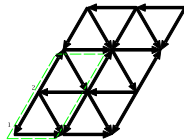
Wang et al., PRB 06



# Résultats sur le réseau triangulaire, $S \rightarrow \infty$



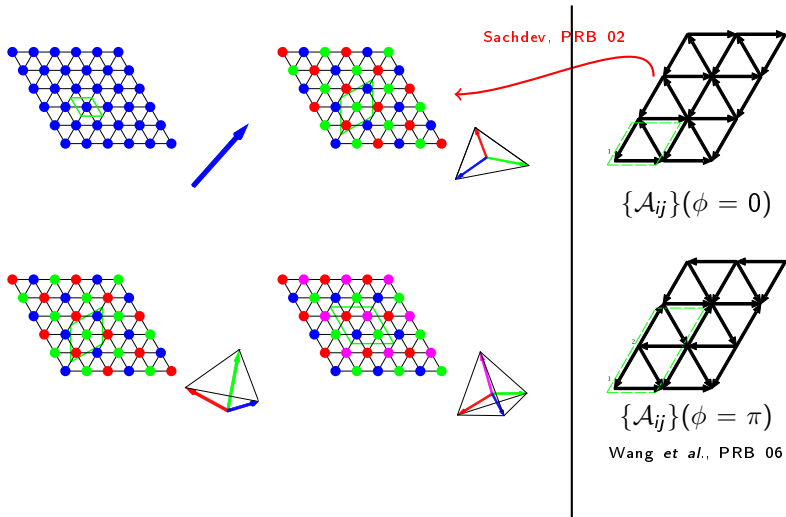
$$\{\mathcal{A}_{ij}\}(\phi = 0)$$



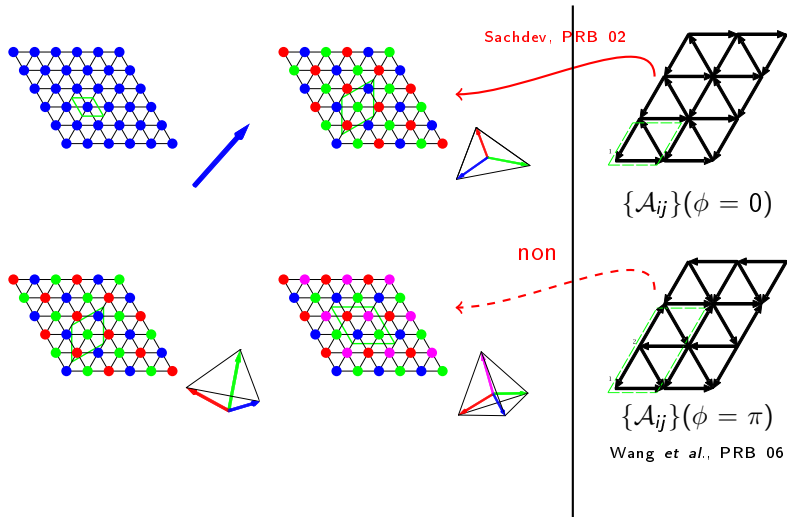
$$\{\mathcal{A}_{ij}\}(\phi = \pi)$$

Wang et al., PRB 06

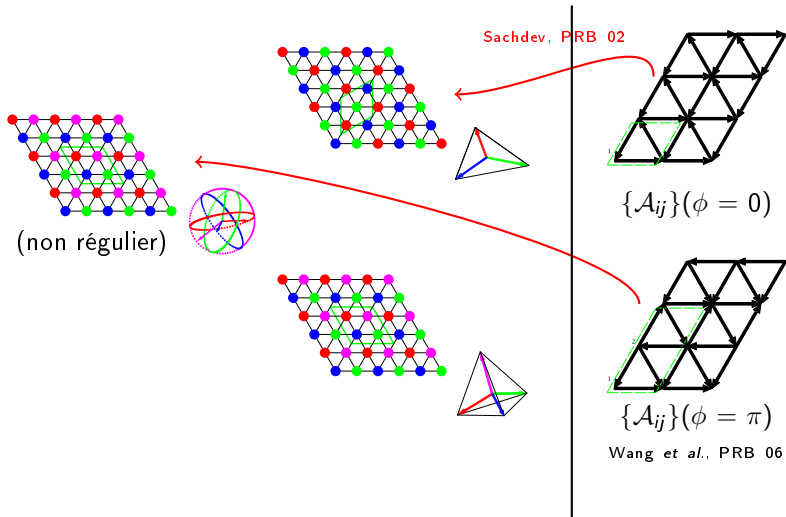
# Résultats sur le réseau triangulaire, $S \rightarrow \infty$



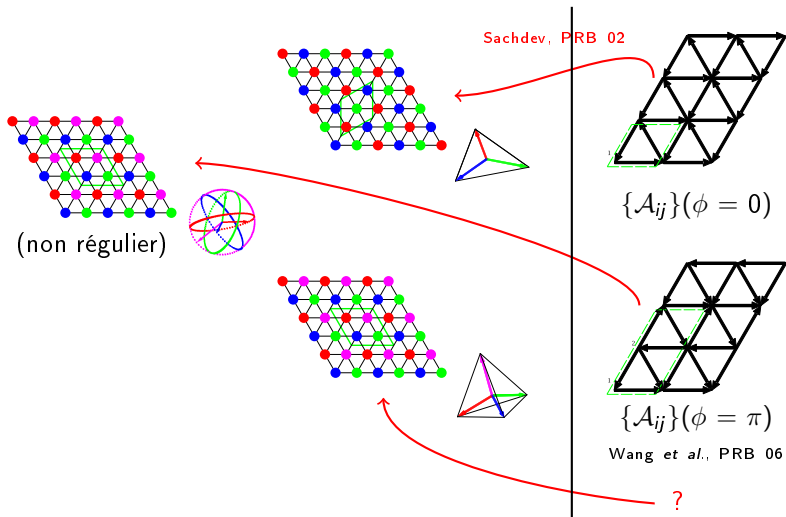
# Résultats sur le réseau triangulaire, $S \rightarrow \infty$



# Résultats sur le réseau triangulaire, $S \rightarrow \infty$



# Résultats sur le réseau triangulaire, $S \rightarrow \infty$



## La chiralité et les flux

Flux  $\phi_{1234} = \text{phase de } \mathcal{A}_{12}(-\mathcal{A}_{23}^*)\mathcal{A}_{34}(-\mathcal{A}_{41}^*) : \text{invariant de jauge.}$

$$\begin{aligned} & 8\widehat{A}_{12}\widehat{A}_{24}^\dagger\widehat{A}_{34}\widehat{A}_{41}^\dagger = \\ & (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)(\mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4) + (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3)(\mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1) - (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3)(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_4) + S^4 \\ & + S^2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1) \\ & + iS \underbrace{(\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3) - \mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{S}_3 \wedge \mathbf{S}_4) + \mathbf{S}_3 \cdot (\mathbf{S}_4 \wedge \mathbf{S}_1) - \mathbf{S}_4 \cdot (\mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2))}_{\text{Si } \neq 0, \text{ état chiral}}. \end{aligned}$$

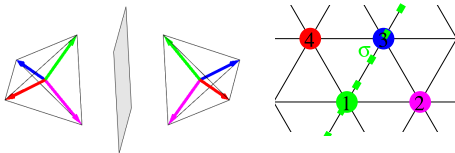
# La chiralité et les flux

Flux  $\phi_{1234} = \text{phase de } \mathcal{A}_{12}(-\mathcal{A}_{23}^*)\mathcal{A}_{34}(-\mathcal{A}_{41}^*) : \text{invariant de jauge.}$

$$\begin{aligned} & 8\widehat{A}_{12}\widehat{A}_{24}^\dagger\widehat{A}_{34}\widehat{A}_{41}^\dagger = \\ & (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)(\mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4) + (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3)(\mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1) - (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3)(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_4) + S^4 \\ & + S^2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1) \\ & + iS \underbrace{(\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3) - \mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{S}_3 \wedge \mathbf{S}_4) + \mathbf{S}_3 \cdot (\mathbf{S}_4 \wedge \mathbf{S}_1) - \mathbf{S}_4 \cdot (\mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2))}_{\text{Si } \neq 0, \text{ état chiral}}. \end{aligned}$$

$$\phi_{1234} = \pm\pi/3, \neq 0, \neq \pi.$$

$$\text{Chiralité } \chi_{123} \neq 0.$$



# La chiralité et les flux

Flux  $\phi_{1234} = \text{phase de } \mathcal{A}_{12}(-\mathcal{A}_{23}^*)\mathcal{A}_{34}(-\mathcal{A}_{41}^*) : \text{invariant de jauge.}$

$$8\widehat{A}_{12}\widehat{A}_{24}^\dagger\widehat{A}_{34}\widehat{A}_{41}^\dagger =$$

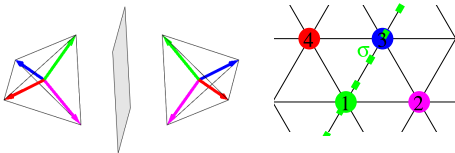
$$(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)(\mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4) + (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3)(\mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1) - (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3)(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_4) + S^4$$

$$+ S^2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1)$$

$$+ iS \underbrace{(\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3) - \mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{S}_3 \wedge \mathbf{S}_4) + \mathbf{S}_3 \cdot (\mathbf{S}_4 \wedge \mathbf{S}_1) - \mathbf{S}_4 \cdot (\mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2))}_{\text{Si } \neq 0, \text{ état chiral}}.$$

$$\phi_{1234} = \pm\pi/3, \neq 0, \neq \pi.$$

$$\text{Chiralité } \chi_{123} \neq 0.$$



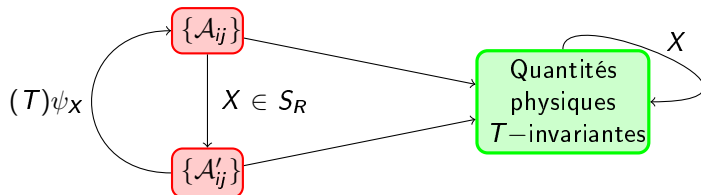
$$\phi_{1234} \xrightarrow{\sigma} -\phi_{1234} \quad \Rightarrow \quad \text{pas d'Ansatz symétrique associé.}$$

$$\chi_{123} \xrightarrow{\sigma} -\chi_{123}$$



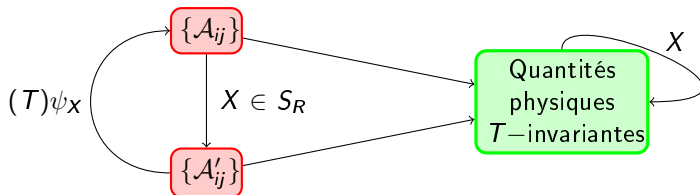
# Les groupes élargis de symétries projectives

$\{(T)\psi_X X\}$  = groupe de symétries projectives élargis



# Les groupes élargis de symétries projectives

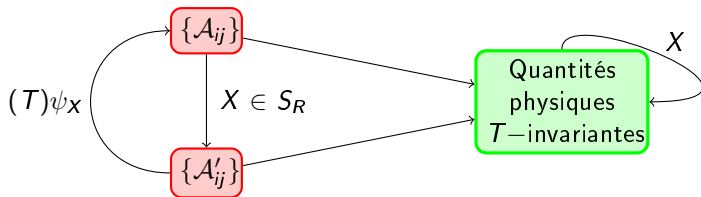
$\{(T)\psi_X X\}$  = groupe de symétries projectives élargis



→ Ansätze de liquides de spins chiraux.

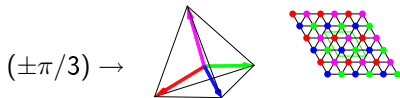
# Les groupes élargis de symétries projectives

$\{(T)\psi_X X\}$  = groupe de symétries projectives élargis



→ Ansätze de liquides de spins chiraux.

4 Ansätze sur le réseau triangulaire :  $(0)$ ,  $(\pi)$ ,  $(\pm 2\pi/3)$  et  $(\pm \pi/3)$ .



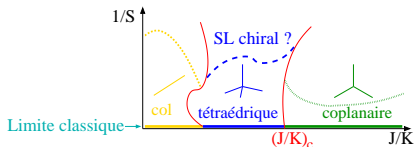
# Liquide de spins chiral : état fondamental ?

Aucun liquide de spins chiral n'a encore été observé.

Un état fondamental classique chiral peut donner naissance à un liquide de spins chiral par ajout des fluctuations quantiques.

- ▶ réseau triangulaire avec échange cyclique : état tétraédrique (Kubo-Momoï 1997, Misguich 1998)

$$H = J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j + K \sum_{\square} (P_{ijkl} + P_{lkji}).$$



- ▶  $J_1 J_2$  sur kagome : état cuboctaédrique (Domenge, 2005), réalisation expérimentale : kapellasite.

# Conclusions et perspectives

- ▶ La SBMFT
  - ▶ Ansätze minimalistes,

# Conclusions et perspectives

- ▶ La SBMFT
  - ▶ Ansätze minimalistes,
  - ▶ PSG de Wen → classification des liquides de spins, mais limite classique incomprise,

# Conclusions et perspectives

- ▶ La SBMFT
  - ▶ Ansätze minimalistes,
  - ▶ PSG de Wen → classification des liquides de spins, mais limite classique incomprise,
  - ▶ PSG élargi → états chiraux (Néel ou liquides) : nouvelles possibilités pour la SBMFT.

# Conclusions et perspectives

- ▶ La SBMFT
  - ▶ Ansätze minimalistes,
  - ▶ PSG de Wen → classification des liquides de spins, mais limite classique incomprise,
  - ▶ PSG élargi → états chiraux (Néel ou liquides) : nouvelles possibilités pour la SBMFT.
- ▶ Etats classiques réguliers : parents de liquides de spins



# Conclusions et perspectives

- ▶ La SBMFT
  - ▶ Ansätze minimalistes,
  - ▶ PSG de Wen → classification des liquides de spins, mais limite classique incomprise,
  - ▶ PSG élargi → états chiraux (Néel ou liquides) : nouvelles possibilités pour la SBMFT.
- ▶ Etats classiques réguliers : parents de liquides de spins  
→ intérêt renouvelé pour les modèles classiques de spins non coplanaires (transition chirale).