



**HAL**  
open science

# Factorisations des processus exclusifs en chromodynamique quantique perturbative

Mathieu Segond

► **To cite this version:**

Mathieu Segond. Factorisations des processus exclusifs en chromodynamique quantique perturbative. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT: . tel-00524836

**HAL Id: tel-00524836**

**<https://theses.hal.science/tel-00524836>**

Submitted on 8 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

**Physique théorique**

Présentée par

M. Mathieu SEGOND

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

*« Factorisations des processus exclusifs en chromodynamique quantique perturbative »*

Soutenue le 7 décembre 2007, devant le jury composé de :

A.DJOUADI, Président du jury

G.KORCHEMSKY, Directeur de thèse

S.WALLON, Directeur de thèse

M.KLASSEN, Rapporteur

M.DIEHL, Rapporteur

Y.DOKSHITZER, Examineur

F.ZOMER, Examineur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Propriétés de factorisation colinéaire du processus <math>\gamma^*\gamma^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0</math></b>	<b>5</b>
1.1 Introduction générale à la diffusion profondément inélastique . . . . .	5
1.2 La factorisation colinéaire en QCD . . . . .	8
1.3 Processus exclusifs et factorisation colinéaire . . . . .	20
1.4 Présentation de la cinématique du processus . . . . .	27
1.5 L'amplitude à l'ordre de Born par le calcul direct . . . . .	28
1.6 $\gamma_T^*\gamma_T^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0$ dans la limite de Bjorken généralisée . . . . .	34
1.7 $\gamma_L^*\gamma_L^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0$ pour des virtualités de photons fortement ordonnées . . . . .	44
<b>2 Le Poméron BFKL</b>	<b>53</b>
2.1 Introduction générale du concept de Poméron . . . . .	53
2.2 L'équation intégrale pour l'échange d'un octet de couleur . . . . .	55
2.3 L'équation intégrale BFKL pour l'échange d'un singulet de couleur . . . . .	73
<b>3 <math>k_\perp</math>-factorisation du processus <math>\gamma^*\gamma^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0</math> et test du Poméron BFKL</b>	<b>81</b>
3.1 Introduction aux tests expérimentaux de la dynamique BFKL . . . . .	81
3.2 Grandeurs cinématiques utilisées . . . . .	84
3.3 $k_\perp$ -factorisation de l'amplitude dans l'espace des impulsions transverses . . . . .	87
3.4 Section efficace différentielle de $\gamma_{L,T}^*\gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0$ à l'ordre de Born . . . . .	95
3.4.1 Résultats analytiques pour $M_{\lambda_1\lambda_2}$ des intégrations en $k_\perp$ . . . . .	95
3.4.2 Résultats pour les sections efficaces différentielles . . . . .	107
3.4.3 Contribution de l'échange de quark à la section efficace . . . . .	113
3.5 Sections efficaces différentielles de $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\rho_L^0\rho_L^0$ à l'ordre de Born . . . . .	115
3.5.1 Coupures cinématiques de l'espace des phases . . . . .	115
3.5.2 Bruit de fond dans le détecteur . . . . .	120
3.5.3 Résultats pour les sections efficaces . . . . .	121
3.5.4 Perspectives : la resommation BFKL à l'ordre suivant . . . . .	143
<b>Conclusions</b>	<b>149</b>

**Remerciements**

**155**

# Introduction

Le travail présenté dans cette thèse se situe dans le cadre de la chromodynamique quantique, théorie quantique des champs qui décrit l'interaction forte. L'identification de cette dernière remonte à la découverte du neutron et des processus de désintégration bêta dans les années 30. Ce moment historique marque un tournant dans la description des interactions fondamentales, en ajoutant aux interactions gravitationnelles et électromagnétiques (dont les effets s'observent à des échelles macroscopiques), deux interactions nucléaires, faible et forte, qui ne pourront être correctement appréhendées que dans le cadre d'une théorie quantique. Jusque dans les années 50, les théories proposées pour décrire l'interaction forte (théorie de Yukawa,...) sont essentiellement motivées par la compréhension de la structure et de la cohésion du noyau atomique. Le concept de partons proposé par Feynman [1] a permis d'interpréter des réactions a priori distinctes (annihilation  $e^+e^-$  à grande énergie, collisions leptons-hadrons à grand moment-transféré...) comme résultant de l'interaction incohérente entre constituants ponctuels des hadrons, les partons. L'apparition d'une zoologie de nouvelles particules (découverte des mésons...) produites dans les premiers accélérateurs de particules à haute énergie va permettre de faire émerger une théorie qui exploite les symétries du spectre des particules hadroniques. Dans la limite de Bjorken, les études expérimentales menées à SLAC à la fin des années 60 vont mettre en évidence l'existence des quarks, particules fermioniques qui composent les hadrons et donc identifiées aux partons. La chromodynamique quantique (QCD) s'impose alors comme la théorie de l'interaction forte dont les degrés de libertés élémentaires sont les quarks possédant une charge de couleur et interagissant par l'intermédiaire de gluons, eux aussi colorés. Ainsi, les gluons possèdent une dynamique individuelle dans le cadre de la QCD, théorie de jauge non-abélienne construite à partir du groupe de symétrie de jauge  $SU(3)$  [2], reprenant la caractéristique fondamentale des théories de Yang-Mills proposées dans les années 50 (pour une revue générale, consulter la référence [3]). Les quarks se transforment dans la représentation fondamentale du groupe de jauge  $SU(3)$ , et peuvent donc véhiculer trois couleurs (usuellement dénommées rouge, vert et bleu). Les 8 gluons constituant les bosons de jauge de masse nulle se transforment dans la représentation adjointe du groupe de symétrie.

La QCD présente deux propriétés cruciales pour ses études phénoménologiques : le confinement des degrés de libertés fondamentaux de la théorie, responsable de l'absence d'observation expérimentale directe de quarks ou de gluons (ceux-ci ne peuvent pas se

propager librement et sont liés au sein des hadrons, seules les particules qui se transforment comme des singulets de couleur de SU(3) sont observées expérimentalement), et la liberté asymptotique[4] à courte distance, qui apporte l'image de quarks et de gluons quasiment libres à haute énergie et qui rend possible l'utilisation de la théorie de perturbation.

Nous passerons brièvement en revue dans le chapitre 1, la factorisation colinéaire développée dans la QCD afin de décrire certains processus inclusifs comme la diffusion profondément inélastique (DIS) sous une forme factorisée (dans la limite de grande virtualité du photon) en un sous-processus à courte distance calculé en théorie de perturbation et un processus à grande distance décrit par des objets non-perturbatifs universels, les distributions de partons. L'évolution de ces distributions de partons en fonction de la résolution transverse est donnée par les équations DGLAP (dues à Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli et Parisi [5]) et permettent de resommer les singularités colinéaires responsables des puissances des logarithmes de l'échelle dure (donnée par la virtualité du photon) dominants à chaque ordre de perturbation dans les distributions partoniques. Nous verrons que le développement en produits d'opérateurs définis sur le cône de lumière apporte une assise théorique solide à la factorisation colinéaire.

La description reposant sur la factorisation colinéaire est aussi généralisée au niveau de l'amplitude de certains processus exclusifs (processus pour lesquels toutes les particules contenues dans l'état final sont observées expérimentalement). Nous présenterons plus précisément le cas des amplitudes de distribution, fonctions d'onde d'états hadroniques (donc associées à des amplitudes de probabilité) qui remplacent les distributions de partons (interprétées comme des densités de probabilité) dans la description de processus exclusifs et qui possèdent une définition similaire en terme d'opérateurs non-locaux définis sur le cône de lumière. Ayant présenté ces outils, nous les emploierons dans le cas particulier d'un processus exclusif de production de paires d'états liés hadroniques constitués par des mésons vecteurs de polarisation longitudinale (qui domine et simplifie notre approche), dans les diffusions entre deux photons,

$$\gamma^* \gamma^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0 .$$

Le couplage ponctuel des deux photons aux courants fermioniques permet d'obtenir une expression simple du sous-processus dur, en termes d'interactions entre quark et gluon à une certaine résolution donnée par les virtualités des photons. Nous pourrons alors étudier l'émergence de différentes formes de factorisations de son amplitude de diffusion apparaissant dans divers régimes d'énergie; celles-ci pourront être décrites par des outils théoriques variés (amplitude de distribution généralisée et amplitude de distribution de transition, que nous définirons), ce qui nous permettra de considérer ce processus comme un laboratoire unique pour tester les conditions d'émergence de ces différents formalismes caractérisant les propriétés de factorisation de l'amplitude de diffusion. Les énergies considérées dans ce chapitre correspondent à une contribution dominante de

l'échange de quarks, puisque ceux-ci interviennent à un ordre plus bas que les gluons dans le développement perturbatif en puissance de la constante de couplage fort  $g$ , à savoir à l'ordre  $g^2$ .

Néanmoins l'approche perturbative n'est pas toujours accessible (quand le processus est dépourvu d'échelle dure fournie par exemple par un grand moment transféré ou par la virtualité d'un photon), ce qui a pendant longtemps pesé sur le statut définitif de la QCD pour appréhender les processus de diffusion qui ne peuvent être uniquement compris en termes d'interactions élémentaires entre quarks et gluons. Jusqu'au milieu des années 60, les théories de Regge sont utilisées dans la description des diffusions hadroniques (par exemple les diffusions proton-proton) à grande énergie dans le centre de masse et prévoient notamment l'échange dans la voie  $t$  d'un objet (de nature non-perturbative) possédant les nombres quantiques du vide, le Poméron. Nous présenterons dans le chapitre 2 le statut du Poméron des théories de Regge puis étudierons la nature du Poméron dur décrit dans le cadre de la limite de Regge de la QCD perturbative (lorsque la variable de Mandelstam usuelle  $s$ , définie par le carré de l'énergie dans le centre de masse, est asymptotiquement grande devant les autres échelles mises en jeu dans le processus étudié), résultat de la procédure de resommation BFKL (acronyme de ses inventeurs Balitskii, Fadin, Kuraev et Lipatov [6]) des singularités molles apparaissant à haute énergie. En effet, lorsque l'on considère un processus de diffusion à haute énergie dans le centre de masse, les corrections quantiques décrites dans le cadre de la QCD perturbative, font apparaître des termes proportionnels à des puissances de logarithmes de  $s$  pouvant potentiellement compenser la faible valeur de la constante de couplage de QCD. Il est ainsi indispensable de resommer ces termes singuliers dominants à chaque ordre de perturbation dans une série infinie. Cette resommation est effectuée par l'équation BFKL dans cette approximation dite des "logarithmes dominants". Nous pouvons interpréter cette procédure comme décrivant l'habillage des partons de grand moment longitudinal par des gluons mous, c'est-à-dire émis en cascade et emportant une fraction d'impulsion longitudinale très faible de leur parent, à impulsion transverse fixe. Un des points importants de cette description est la factorisation dans l'espace bidimensionnel des impulsions transverses (ou  $k_{\perp}$ -factorisation) de l'amplitude de diffusion du processus.

Nous considérerons dans le chapitre 3 le processus exclusif  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0$  dans la limite de Regge de QCD. Nous utiliserons dans ce chapitre la factorisation colinéaire pour décrire l'hadronisation en mésons dans l'état final, comme nous l'avons présenté dans le chapitre 1. Le formalisme de l'équation BFKL (introduit au chapitre 2) établit la  $k_{\perp}$ -factorisation en moment transverse de l'amplitude de diffusion du processus, dont la contribution dominante à haute énergie est donnée par l'échange de gluons dans la voie  $t$ . Ce processus de diffusion entre photons virtuels est particulièrement intéressant dans ce cas puisque les virtualités non nulles des photons empêchent la diffusion de l'échelle de

gluons vers la région non-perturbative des moments infrarouges, la  $k_{\perp}$ -factorisation ne permettant pas la séparation entre échelles perturbatives et non-perturbatives, parfaitement réalisée par la factorisation colinéaire. Nous proposerons à partir de l'étude de ce processus exclusif un test fin de la resommation BFKL auprès du projet de collisionneur linéaire international ILC et démontrerons pour cela que les conditions exigées par la factorisation colinéaire (avoir des échelles dures apportées par les virtualités des photons suffisantes) et par la  $k_{\perp}$ -factorisation (qui s'établit dans la limite de grande énergie dans le centre de masse du système  $\gamma^*\gamma^*$ ) sont compatibles avec les conditions expérimentales accessibles dans le cadre du projet de collisionneur linéaire international ILC.

# Chapitre 1

## Propriétés de factorisation

## colinéaire du processus $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$

### 1.1 Introduction générale à la diffusion profondément inélastique

Le processus emblématique pour tenter de comprendre la nature des interactions fortes consiste à révéler la structure interne d'un proton avec une sonde électromagnétique : il s'agit du processus inclusif de diffusion profondément inélastique (DIS, pour Deep-Inelastic-Scattering), dont la section efficace totale inclusive peut être directement mesurée dans une expérience. Elle est obtenue en sommant tous les états finals hadroniques  $X$  intermédiaires possibles (cf. la fig.1.1) et se sépare en un sous-processus leptonique décrit par le tenseur  $L^{\mu\nu}$  et une partie hadronique contenue dans le tenseur  $W_{\mu\nu}$  qui concerne l'interaction entre la sonde très énergétique radiée par l'électron de moment  $k$  -un photon virtuel de moment  $q$  (de genre espace  $q^2 = -Q^2 < 0$ )- et le proton de moment  $P$  :

$$E' \frac{d\sigma^{e^-N}}{d^3k'} = \frac{e^2}{8\pi^2(s - m_p^2)q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \quad (1.1.1)$$

Nous avons introduit l'énergie  $E'$  et l'impulsion  $k'$  du lepton diffusé, la masse  $m_p$  du proton ainsi que les invariants de Lorentz suivants : le carré de l'énergie dans le centre de masse  $s = (P + k)^2$ ,  $\nu = P \cdot q$ ,  $x = Q^2/2\nu$ , et  $y = q \cdot p/k \cdot p$ . Le cas particulier d'une collision élastique est donné par  $x = 1$ .

La partie leptonique peut être calculée exactement. A l'ordre le plus bas dans la constante de couplage électromagnétique  $\alpha_e = e^2/4\pi$  (qui apparaît dans l'équation précédente), on obtient

$$L^{\mu\nu} = 2(k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k \cdot k'), \quad (1.1.2)$$

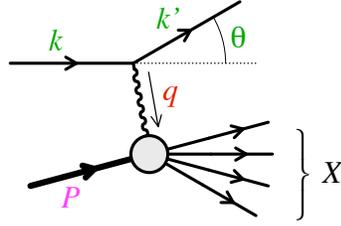


FIG. 1.1 – Le processus de diffusion profondément inélastique d'un électron de moment  $k$  sur un proton de moment  $P$ .

avec un électron de masse nulle. La transition du proton initial  $|N(P)\rangle$  en un état hadronique  $|X\rangle$  est contenue dans l'élément de matrice  $\langle X|J_\mu(0)|N(P)\rangle$  du courant électromagnétique  $J_\mu$  qui se couple au photon, ce qui permet d'écrire le tenseur hadronique selon

$$\begin{aligned} 4\pi W_{\mu\nu} &\equiv \sum_{\text{états } X} \int [d\Phi_X] (2\pi)^4 \delta(P + q - P_X) \\ &\quad \times \langle\langle N(P)|J_\nu^\dagger(0)|X\rangle\langle X|J_\mu(0)|N(P)\rangle\rangle_{\text{spin}} \\ &= \int d^4y e^{iq\cdot y} \langle\langle N(P)|J_\nu^\dagger(y)J_\mu(0)|N(P)\rangle\rangle_{\text{spin}} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

après avoir effectué une translation sur le courant électromagnétique  $J_\nu(0)$  afin de l'exprimer au point d'espace-temps  $y$ ,  $J_\nu^\dagger(y) = e^{i\hat{P}\cdot y} J_\nu^\dagger(0) e^{-i\hat{P}\cdot y}$ , et utilisé la relation de complétude sur les états  $X$ ,  $\sum \int [d\Phi_X] = 1$ .

La symétrie par parité et par renversement du temps,  $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$ , ainsi que l'invariance de jauge  $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$ , permettent d'écrire le tenseur hadronique sous la forme :

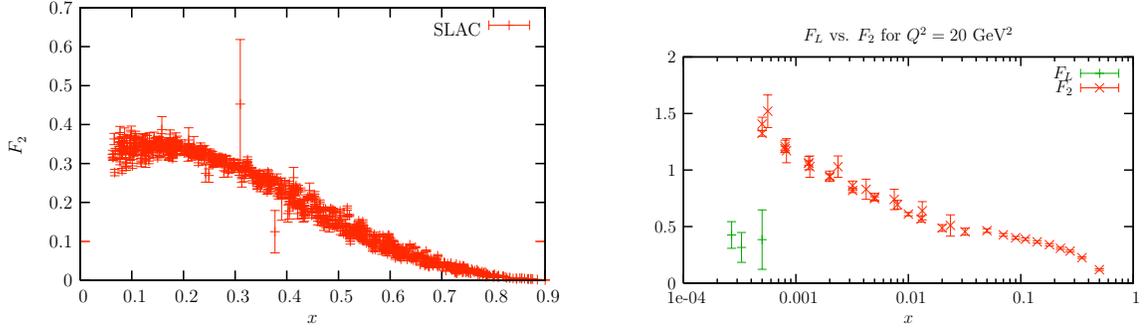
$$W_{\mu\nu} = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{1}{\nu} \left( P_\mu - q_\mu \frac{P\cdot q}{q^2} \right) \left( P_\nu - q_\nu \frac{P\cdot q}{q^2} \right) F_2(x, Q^2). \quad (1.1.4)$$

Dans le repère de moment infini, dans lequel le proton se déplace à une vitesse très proche de celle de la lumière (en négligeant donc sa masse), la section efficace devient :

$$\frac{d\sigma^{e^-N}}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha_e^2}{Q^4} \left[ (1 + (1-y)^2) F_1(x, Q^2) + \frac{1-y}{x} F_L(x, Q^2) \right], \quad (1.1.5)$$

avec  $F_L = F_2 - 2xF_1$ .

Les termes proportionnels aux fonctions de structure  $F_1(x, Q^2)$  et  $F_L(x, Q^2)$  correspondent respectivement aux sections efficaces d'interaction du proton avec un photon virtuel respectivement transverse et longitudinal.


 FIG. 1.2 – mesures des fonctions de structure  $F_2(x, Q^2)$  et  $F_L(x, Q^2)$  à SLAC.

Dans la limite de Bjorken  $Q^2 \rightarrow \infty$  et  $x$  fixe, les études expérimentales menées à SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) à la fin des années 60 (courbes de la fig.1.2) montrent une invariance d'échelle vérifiée par la fonction de structure  $F_2$ , appelée scaling de Bjorken [7] : on observe sur la gauche de la fig.1.2, les mesures de  $F_2(x, Q^2)$  en fonction de  $x$  sur un grand domaine de variation de la virtualité  $Q^2$  du photon ; celles-ci semblent se réunir en une courbe unique et continue, indiquant une très faible dépendance de  $F_2$  en  $Q^2$  dans ce régime cinématique. On observe sur la courbe de droite une large prédominance de  $F_2$  sur  $F_L$  qui prend des valeurs proches de zero (signifiant que la contribution majeure provient des photons de polarisation transverse), en accord avec la relation de Callan-Gross [8] :

$$F_L = F_2 - 2xF_1 = 0. \quad (1.1.6)$$

Feynman et Bjorken proposent alors le modèle des partons naïfs[1], dans lequel le proton est constitué de particules fermioniques ponctuelles, les partons, afin de comprendre l'observation du scaling de Bjorken et la relation de Callan-Gross (1.1.6). La section efficace de collision (élastique dans ce cas) d'un électron avec un parton ponctuel (quark) de charge  $e_q$  qui emporte une fraction  $z$  du moment longitudinal  $P$  du proton s'écrit

$$\frac{d\sigma^{e^-q}}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha_e^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] e_q^2 \frac{1}{2} \delta(x-z). \quad (1.1.7)$$

En multipliant cette section efficace par la densité de probabilité  $q(z)$  de trouver un quark de fraction longitudinale comprise entre  $z$  et  $z + dz$ , puis la comparant avec l'eq.(1.1.5), nous obtenons en intégrant sur  $z$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{q,\bar{q}} \int_0^1 dz q(z) \frac{e_q^2}{2} \delta(x-z), \\ F_2(x) &= 2xF_1(x). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$F_2$  et  $F_1$  ne dépendent que de  $x$  donc le modèle des partons naïfs permet bien de retrouver le scaling de Bjorken ; la relation de Callan-Gross est alors une conséquence directe du spin 1/2 des partons, particules ponctuelles ainsi identifiées aux quarks. Mais ce modèle de partons est équivalent à une théorie de champs libres (comme nous le verrons plus loin) sur le cône de lumière ce qui s'avère bien insuffisant pour décrire l'état hadronique, de même qu'il ne pourra pas dépasser la description du scaling de Bjorken dont la violation est observée à petit  $x$ , et qui sera décrite dans le cadre de la QCD perturbative, apportant ainsi un des premiers tests de validité de la théorie.

## 1.2 La factorisation colinéaire en QCD

Tous les calculs effectués dans le cadre de la QCD perturbative au delà de l'ordre dominant doivent être renormalisés et définis dans un certain schéma de renormalisation. Ceci introduit une échelle dite de renormalisation  $\mu$ , mais dont toute observable physique  $O$  ne doit pas dépendre :

$$\mu^2 \frac{dO(\mu)}{d\mu^2} = 0. \quad (1.2.9)$$

En faisant apparaître la dépendance dans la constante de couplage  $\alpha_s$ , cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{dO(\mu, \alpha_s)}{d\mu^2} &= \left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) O(\mu, \alpha_s) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

avec la fonction  $\beta(\alpha_s) = \mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2}$ . L'équation précédente est résolue en introduisant une dépendance d'échelle dans la constante de couplage fort  $\alpha_s(\mu)$ . Ainsi la fonction  $\beta$  se calcule en théorie de perturbation

$$\beta(\alpha_s) = -\beta_0 \alpha_s^2 - \beta_1 \alpha_s^3 - \dots \quad (1.2.11)$$

où  $\beta_0$  est le coefficient bien connu de l'ordre dominant, avec  $N_c$  le nombre de couleur et  $N_f$  le nombre de saveur de quarks,

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f. \quad (1.2.12)$$

Ainsi à l'ordre dominant,  $\alpha_s(\mu)$  est déterminée par

$$\mu^2 \frac{d\alpha_s(\mu)}{d\mu^2} = -\beta_0 \alpha_s^2 \quad (1.2.13)$$

ce qui se réécrit après introduction de la constante d'intégration  $\Lambda_{QCD}$ ,

$$\alpha_s(\mu) = \frac{1}{\beta_0 \ln(\mu^2 / \Lambda_{QCD}^2)}. \quad (1.2.14)$$

Cette équation exhibe clairement pour un nombre de saveurs inférieur à 16 la liberté asymptotique [4] vérifiée par la QCD.  $\Lambda_{QCD}$ , paramètre fondamental de QCD, ne peut pas être calculé théoriquement mais indique la frontière entre les secteurs perturbatif et non-perturbatif de la théorie. Sa valeur dépend du schéma de renormalisation et se situe autour de 200 MeV. La théorie de perturbation sera donc légitime pour des processus faisant apparaître une échelle dure grande devant  $\Lambda_{QCD}$  de sorte que la constante de couplage  $\alpha_s$  ne soit pas trop importante.

En revenant au modèle des partons naïfs, nous allons voir comment la QCD perturbative permettra de l'améliorer en considérant des partons dont l'échelle transverse typique ne sera plus négligeable devant la virtualité du photon et fera donc apparaître des corrections en puissances de logarithmes de cette échelle transverse, coïncidant ainsi avec la violation du scaling de Bjorken des fonctions de structure : dans le cadre du modèle des partons, ceux-ci ne voient pas leur nombre ni leurs impulsions varier pendant le temps de la collision (ie l'interaction ponctuelle avec la sonde), tandis que dans le cadre de QCD, les partons peuvent acquérir une impulsion transverse importante au cours de la collision : un quark peut par exemple émettre un gluon avant d'interagir avec le photon, et acquérir ainsi un moment transverse  $k_\perp$  non-négligeable avec une probabilité proportionnelle à  $\alpha_s \int dk_\perp^2/k_\perp^2$ . Le domaine d'intégration s'étend d'une échelle  $\mu$  marquant la frontière avec la physique non-perturbative à l'échelle dure  $Q$ , ce qui produira le terme en  $\alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2}$  responsable de la violation de scaling.

Il sera alors possible de calculer une expression des fonctions de structure dans une forme factorisée entre une fonction de distribution partonique qui contiendra les singularités colinéaires (générées par les émissions de partons de moment transverse  $k_\perp \simeq 0$ ) et un terme dur calculable ordre par ordre en théorie de perturbation et débarassé de ces divergences. Nous pouvons illustrer cette procédure dans le cas de  $F_2(x, Q^2)$  qui s'écrit au premier ordre en  $\alpha_s$

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \left[ q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) P_{qq}(x/y) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (1.2.15)$$

Nous avons introduit la distribution de quark "nue"  $q_0$  qui contient les singularités colinéaires et ne peut donc pas faire l'objet d'une observation expérimentale. Nous pouvons alors définir la distribution de quark renormalisée  $q(x, \mu^2)$

$$q(x, \mu^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) P_{qq}(x/y) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (1.2.16)$$

qui dépend de l'échelle de renormalisation  $\mu$ . En assimilant cette échelle de renormalisation à l'échelle de factorisation, nous pouvons dégager une image intuitive assez simple dans laquelle les partons émis avec une impulsion transverse inférieure à  $\mu$  seront considérés comme faisant partie de la structure non-perturbative du proton encodée

par  $q(x, \mu^2)$  tandis que les autres participeront au sous-processus dur (s'opérant sur de courtes distances) calculé en théorie de perturbation. Nous obtenons cette expression factorisée de  $F_2(x, Q^2)$  au premier ordre en  $\alpha_s$  :

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, \mu^2) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} P_{qq}(x/y) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right] \quad (1.2.17)$$

Plus généralement, nous pourrions définir les fonctions de distribution partoniques (PDF, parton distribution function)  $f_j$  -l'indice  $j$  dénote un (anti)quark de saveur ( $\bar{q}$ ) $q$  ou un gluon- qui apparaissent dans les expressions factorisées des fonctions de structure à un ordre de perturbation quelconque (nous justifierons plus loin la forme des termes correctifs) :

$$F_1(x, Q^2) = \sum_j \int_x^1 \frac{dy}{y} C_{1j}(x/y, Q^2/\mu^2) f_j(y, \mu^2) + \mathcal{O}\left(\frac{m_P^2}{Q^2}\right), \quad (1.2.18)$$

$$F_2(x, Q^2) = \sum_j \int_x^1 dy C_{2j}(x/y, Q^2/\mu^2) f_j(y, \mu^2) + \mathcal{O}\left(\frac{m_P^2}{Q^2}\right), \quad (1.2.19)$$

avec la partie dure  $C(x/y, Q^2/\mu^2)$  qui caractérise le sous-processus à courte distance, calculable ordre par ordre en théorie de perturbations, et la partie non-perturbative  $f(y, \mu^2/m^2)$  qui absorbe les phénomènes à grande distance, définie à partir d'élément de matrice d'opérateurs non-locaux sur le cône de lumière comme nous le verrons plus loin. Les dépendances dans l'échelle de factorisation de  $C(x/y, Q^2/\mu^2)$  et de  $f(y, \mu^2/m^2)$  doivent se compenser de sorte que les fonctions de structure  $F_2(x, Q^2)$  soient des observables physiques donc indépendantes de  $\mu$ . Par exemple dans le cas de  $F_2$ , nous pouvons écrire

$$\mu \frac{dF_2(x, Q^2)}{d\mu} = 0. \quad (1.2.20)$$

Nous obtenons donc l'évolution de  $C$  et  $f$  en  $\mu$  décrite par les équations du groupe de renormalisation :

$$\begin{aligned} \mu \frac{dC(Q^2/\mu^2, \alpha_s(\mu))}{d\mu} &= -P(\alpha_s(\mu)) \otimes C(Q^2/\mu^2), \\ \mu \frac{df(\mu^2/m^2, \alpha_s(\mu))}{d\mu} &= +P(\alpha_s(\mu)) \otimes f(\mu^2/m^2, \alpha_s(\mu)), \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

où  $P(\alpha_s(\mu))$  est le noyau de l'opérateur d'évolution équivalent aux fonctions de splitting (1.2.23) présentées ci-dessus à l'ordre le plus bas en  $\alpha_s$ . Avec le choix  $\mu = Q$  pour l'échelle de factorisation, l'équation (1.2.21) du groupe de renormalisation est identique à l'équation DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi) [5] qui gouverne

l'évolution en  $Q^2$  des fonctions de distribution partoniques et permet de resommer les singularités colinéaires responsables des puissances des logarithmes dominants  $(\alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2})^n$  à chaque ordre de perturbation dans les distributions partoniques universelles  $f_i(x, Q^2)$ . A l'ordre  $\alpha_s(Q)$ , nous pouvons écrire

$$Q^2 \frac{\partial f_i(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{ij}(x/y) f_j(y, Q^2) \quad (1.2.22)$$

où les fonctions de splitting  $P_{ij}(z)$  caractérisent la transition dure calculable en théorie de perturbation, d'un parton  $j$  en un parton  $i$  emportant une fraction  $z$  de son moment longitudinal et s'écrivent à l'ordre dominant (LO, Leading-Order) :

$$P_{qq}(z) = C_F \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z), \quad (1.2.23)$$

$$P_{gg}(z) = 2C_A \left( \frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \right) + \frac{11C_A - 2N_f}{6} \delta(1-z), \quad (1.2.24)$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2), \quad (1.2.25)$$

$$P_{gq}(z) = P_{qg}(1-z), \quad (1.2.26)$$

avec  $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ ,  $C_A = N_c = 3$  les Casimir du groupe de gauge  $SU(N_c)$ , et  $N_f$  le nombre de saveur des quarks. La distribution  $1/(1-z)_+$  est définie pour toute fonction régulière  $f(z)$  :

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}. \quad (1.2.27)$$

Notons que les fonctions de splitting sont actuellement connues jusqu'à l'ordre NNLO (Next-to-Next-to-Leading Order [9]). L'équation intégral-différentielle générique DGLAP prédit la dépendance en  $Q^2$  des distributions partoniques et indique ainsi comment les densités de quarks et de gluons sont modifiées en fonction de la résolution spatiale de la sonde (de taille transverse typique  $1/Q$ ). Une transformation de Mellin permet de démêler la convolution et rend ainsi l'équation algébrique, dont l'expression peut alors être évaluée numériquement. La stratégie consiste alors à faire un fit expérimental des distributions partoniques à une certaine échelle  $Q_0$  relativement basse en dessous de laquelle la théorie de perturbation ne s'applique plus, et en utilisant les équations DGLAP nous pouvons en déduire la valeur des distributions partoniques à une échelle supérieure  $Q$ , permettant ainsi de comparer les valeurs prédites des fonctions de structure aux mesures expérimentales sur un grand intervalle de  $Q$ .

Essayons de comprendre les origines dynamiques de la factorisation colinéaire qui permet de resommer les singularités colinéaires à chaque ordre de perturbation dans les distributions partoniques universelles  $f_i(x, Q^2)$  qualifiant la structure intrinsèquement

non perturbative du proton : la description réalisée dans le cadre de l'équation DGLAP repose sur des émissions successives de partons émis avec des impulsions transverses fortement ordonnées :  $Q^2 \gg k_{\perp n}^2 \gg \dots \gg k_{\perp 1}^2 \gg \mu^2$  où l'échelle de factorisation  $\mu$  marque la frontière entre le régime perturbatif et la région non perturbative (étalée sur de grandes distances, qui concerne donc les effets du confinement des degrés de liberté de la théorie) dont l'information est contenue dans les distributions partoniques. La séparation des échelles de temps est cruciale pour établir la factorisation : si nous considérons un parton parent de moment  $p$  se scindant en deux partons fils (qui emportent les fractions d'impulsion respectives  $z$  et  $(1-z)$ ), le temps typique de cette fluctuation sera de l'ordre de  $\frac{2z(1-z)p}{k_{\perp}^2}$  alors que le temps d'interaction typique de ce parton avec le photon virtuel (au cours de la collision) sera de l'ordre de  $\frac{p}{Q^2}$  par conséquent bien inférieur (pour les contributions colinéaires considérées) à l'échelle de temps typique de fluctuation d'un parton dans le hadron. Ainsi les fluctuations des partons dans le proton donnant lieu aux singularités colinéaires s'opèrent sur des échelles de temps bien supérieure à celle du processus dur et seront donc intégrées dans les fonctions de distributions partoniques. Nous pouvons retrouver le même argument d'après la dilatation du temps de vie moyen d'un parton dans le proton quand on se place dans le repère de Bjorken, dans lequel le moment du proton tend vers l'infini. Le théorème de factorisation [10] permet de justifier le calcul de l'évolution en  $Q^2$  à tous les ordres en théorie de perturbation indépendamment de l'échelle  $\mu$ .

Nous allons maintenant présenter l'approche basée sur le développement en produits d'opérateurs (OPE, operator product expansion, cf.[11]) définis sur le cône de lumière, valide à grand  $Q^2$ , qui permet d'obtenir une démonstration rigoureuse de la factorisation colinéaire pour le processus DIS notamment, et de qualifier précisément les termes correctifs à la factorisation colinéaire en puissance de  $\frac{1}{Q^2}$  qui apparaissent dans les expressions factorisées (1.2.18) et (1.2.19) des fonctions de structure. Pour cela, partant de l'expression (1.1.4) du tenseur hadronique  $W_{\mu\nu}$  nous en déduisons l'expression de l'amplitude  $T_{\mu\nu}$  du processus vers l'avant (sans transfert de quadri-impulsion)

$$4\pi T_{\mu\nu} \equiv i \int d^4y e^{iq \cdot y} \langle \langle N(P) | T [J_{\mu}^{\dagger}(y) J_{\nu}(0)] | N(P) \rangle \rangle_{\text{spin}} , \quad (1.2.28)$$

dont la partie imaginaire (définie comme la discontinuité le long de la coupure  $1/x \geq 1$  dans le plan  $\omega = 1/x$  complexe) est reliée à celle de  $W^{\mu\nu}$  par le théorème optique (démontré à partir de l'unitarité de la matrice S, cf.[12]) :

$$W_{\mu\nu} = 2 \text{Im} T_{\mu\nu} . \quad (1.2.29)$$

Nous allons développer le T-produit des courants apparaissant dans l'expression (1.2.43) de  $T_{\mu\nu}$  en utilisant les techniques de l'OPE : considérons pour cela un produit

d'opérateurs locaux  $\mathcal{A}(y)\mathcal{B}(0)$ . Le développement en produit d'opérateurs consiste à considérer la limite  $y^\mu \rightarrow 0$  où les deux opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont évalués au même point d'espace-temps, conduisant au comportement singulier du corrélateur précédent qui peut alors se développer sous la forme suivante

$$\mathcal{A}(y)\mathcal{B}(0) \underset{y^\mu \rightarrow 0}{=} \sum_i C_i(y) \mathcal{O}_i(0), \quad (1.2.30)$$

où les  $C_i(y)$  sont des  $c$ -nombres fonctions de  $y^\mu$ , appelés coefficients de Wilson, qui contiennent la singularité en  $y^\mu \rightarrow 0$  et les  $\mathcal{O}_i$  sont des opérateurs locaux réguliers possédant les même nombres quantiques que le corrélateur  $\mathcal{A}(y)\mathcal{B}(0)$ .

Dans le cas du processus DIS que nous considérons dans la limite de Bjorken, nous allons voir que le domaine cinématique qui domine le développement du T-produit  $T[J_\mu^\dagger(y)J_\nu(0)]$  n'est pas donné par la limite  $y^\mu \rightarrow 0$ , mais par la distance invariante d'espace temps  $y^2 \rightarrow 0$  : en effet, si nous écrivons le quadri-moment du photon dans un référentiel où

$$q^\mu = \frac{1}{m_P}(\nu, 0, 0, \sqrt{\nu^2 + m_P^2 Q^2}), \quad (1.2.31)$$

ses composantes  $q^+ \equiv \frac{q^0+q^3}{\sqrt{2}}$  et  $q^- \equiv \frac{q^0-q^3}{\sqrt{2}}$  sur le cône de lumière deviennent dans la limite de Bjorken où  $Q^2 \rightarrow \infty$  et  $x \rightarrow \text{cste}$  (donc  $\nu \rightarrow \infty$ ),

$$q^+ \sim \text{cste} \frac{\nu}{m_P}, \quad q^- \sim \text{cste} m_P x. \quad (1.2.32)$$

L'intégration sur  $y^\mu$  dans l'expression (1.1.3) de  $W^{\mu\nu}$  donne une contribution non nulle seulement pour des valeurs finies de  $|q \cdot y| = |q^+y^- + q^-y^+ - q_\perp \cdot y_\perp|$  apparaissant dans la phase oscillante  $e^{iq \cdot y}$ , c'est à dire dans la région

$$y^- \sim \text{cste} \frac{m_P}{\nu}, \quad y^+ \sim \text{cste} \frac{1}{m_P x}. \quad (1.2.33)$$

La distance invariante  $y^2 = 2y^+y^- - y_\perp^2 \leq 2y^+y^-$  qui sépare les deux courants vérifie donc dans la limite de Bjorken,  $y^2 \leq \text{cste} \frac{1}{Q^2}$ . D'autre part, dans la région physique du processus de diffusion profondément inélastique,  $q^2 \leq 0$  et  $P_X^2 \geq m_P^2$ , nous pouvons remplacer le produit des courants dans l'expression (1.1.3) de  $W^{\mu\nu}$  par leur commutateur qui s'annule pour un quadri-vecteur  $y^\mu$  de genre espace (condition de causalité).

Nous obtenons finalement dans la limite de Bjorken, une contribution dominante du processus DIS dans la région du cône de lumière, représentée sur la fig.(1.3)

$$0 \leq y^2 \leq \text{cste} \frac{1}{Q^2}. \quad (1.2.34)$$

Le produit ordonné en temps précédent possède une décomposition simple qui exploite l'invariance de Lorentz et la conservation des courants

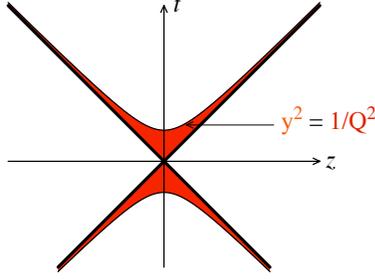


FIG. 1.3 – Région d'espace-temps qui domine dans la limite de Bjorken.

$$\begin{aligned}
 T[J_\mu^\dagger(y)J_\nu(0)] &= (\partial_\mu \partial'_\nu - g_{\mu\nu} \partial \cdot \partial') \mathcal{O}_1(y, 0) \\
 &+ (g_{\mu\lambda} \partial \cdot \partial' - \partial_\lambda \partial'_\mu) (g_{\rho\nu} \partial \cdot \partial' - \partial_\rho \partial'_\nu) \mathcal{O}_2^{\lambda\rho}(y, 0) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{1.2.35}$$

dont nous n'avons pas fait apparaître la partie antisymétrique qui ne contribue pas aux fonctions de structure moyennées sur le spin. Les opérateurs de dérivée partielle  $\partial_\mu$  et  $\partial'_\mu$  agissent respectivement sur les variables de gauche et de droite dans l'argument des opérateurs bilocaux  $\mathcal{O}(x, x')$ . Le développement sur le cône de lumière (quand  $y^2 \rightarrow 0$ ) de ces opérateurs fait apparaître une base d'opérateurs locaux composites qui réalisent une représentation du groupe de Lorentz, ce qui nous permet de les noter  $\mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_s}$  avec  $s$  le spin de l'opérateur et l'index  $i$  qui distingue différents opérateurs de même structure de Lorentz :

$$\mathcal{O}_1(y, 0) = \sum_{i,s} C_{1,s}^{(i)}(y^2) y_{\mu_1} \dots y_{\mu_s} \mathcal{O}_{1,i}^{\mu_1 \dots \mu_s}(0) . \tag{1.2.36}$$

$$\mathcal{O}_2^{\lambda\rho}(y, 0) = \sum_{i,s} C_{2,s}^{(i)}(y^2) y_{\mu_1} \dots y_{\mu_s} \mathcal{O}_{2,i}^{\mu_1 \dots \mu_s \lambda\rho}(0) . \tag{1.2.37}$$

Après deux intégrations par partie successives, faisant agir les dérivées partielles sur le terme  $e^{iq \cdot y}$  et négligeant les termes de bord, nous pouvons écrire pour expression de  $T_{\mu\nu}$  :

$$\begin{aligned}
 4\pi T_{\mu\nu} &= i(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \sum_{i,s} \left\langle \left\langle N(P) \left| \mathcal{O}_{1,i}^{\mu_1 \dots \mu_s}(0) \right| N(P) \right\rangle \right\rangle_{\text{spin}} \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{1,s}^{(i)}(y^2) y_{\mu_1} \dots y_{\mu_s} \\
 &+ i(g_{\mu\lambda} q^2 - q_\lambda q_\mu) (g_{\rho\nu} q^2 - q_\rho q_\nu) \sum_{i,s} \left\langle \left\langle N(P) \left| \mathcal{O}_{2,i}^{\mu_1 \dots \mu_s \lambda\rho}(0) \right| N(P) \right\rangle \right\rangle_{\text{spin}} \\
 &\times \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{2,s}^{(i)}(y^2) y_{\mu_1} \dots y_{\mu_s} .
 \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Les éléments de matrice des opérateurs composites entre les états  $|N(P)\rangle$  du proton présentent les structures tensorielles suivantes :

$$\left\langle \langle N(P) | \mathcal{O}_{1,i}^{\mu_1 \dots \mu_s}(0) | N(P) \rangle \right\rangle_{\text{spin}} = P^{\mu_1} \dots P^{\mu_s} A_{1,s}^{(i)} + \text{termes de trace}, \quad (1.2.39)$$

$$\left\langle \langle N(P) | \mathcal{O}_{2,i}^{\mu_1 \dots \mu_s \lambda \rho}(0) | N(P) \rangle \right\rangle_{\text{spin}} = P^\lambda P^\rho P^{\mu_1} \dots P^{\mu_s} A_{2,s+2}^{(i)} + \text{termes de trace}, \quad (1.2.40)$$

où les termes de trace contiennent des tenseurs métriques  $g_{\mu_i \mu_j}$  (donnant lieu à des termes sous-dominants dans la limite de Bjorken) et les  $A_s^{(i)}$  sont des éléments de matrice d'opérateurs .

En définissant les transformées de Fourier des fonctions coefficients  $C_s^{(i)}$  par

$$i \tilde{C}_{1,s}^{(i)}(Q^2) \left(\frac{Q^2}{2}\right)^{-s-1} q_{\mu_1} \dots q_{\mu_s} = \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{1,s}^{(i)}(y^2) y_{\mu_1} \dots y_{\mu_s} \quad (1.2.41)$$

$$\frac{-i}{2} \tilde{C}_{2,s+2}^{(i)}(Q^2) \left(\frac{Q^2}{2}\right)^{-s-3} q_{\mu_1} \dots q_{\mu_s} = \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{2,s}^{(i)}(y^2) y_{\mu_1} \dots y_{\mu_s}, \quad (1.2.42)$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2 \sum_{i,s} \left[ A_{1,s}^{(i)} \tilde{C}_{1,s}^{(i)}(Q^2) \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{Q^2} A_{2,s+2}^{(i)} \tilde{C}_{2,s+2}^{(i)}(Q^2) \left( P_\mu - q_\mu \frac{P \cdot q}{q^2} \right) \left( P_\nu - q_\nu \frac{P \cdot q}{q^2} \right) \right] \omega^s \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

en ayant défini  $\omega = \frac{2P \cdot q}{-q^2} = \frac{1}{x}$ . Le tenseur  $T_{\mu\nu}$  est pair en  $\omega$  (symétrie de croisement) donc la somme dans l'expression précédente s'effectue sur des valeurs paires du spin  $s$ . La série converge dans le disque de rayon  $0 < \omega < 1$ , mais cette région cinématique n'est pas accessible physiquement. Nous allons atteindre la région physique  $\omega \geq 1$  en

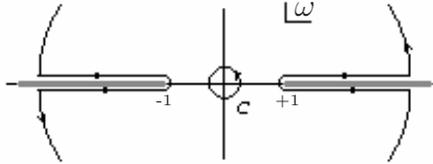


FIG. 1.4 – Le contour d'intégration  $C$  dans le plan complexe  $\omega$ , déformé dans la région physique.

considérant l'intégrale de la fonction analytique  $\frac{T_{\mu\nu}(\omega)}{\omega^s}$  dans le plan complexe  $\omega$  sur le

contour  $C$  (cf. la fig.1.4) que nous déformons afin qu'il entoure les coupures situées sur l'axe réel pour  $\omega \leq -1$  et  $\omega \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{T_{\mu\nu}}{\omega^n} &= \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^n} \frac{T_{\mu\nu}(\omega + i\epsilon) - T_{\mu\nu}(\omega - i\epsilon)}{2i} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^n} W_{\mu\nu} \end{aligned}$$

d'après l'eq.(1.2.29). Nous obtenons donc

$$2 \int_0^1 dx x^{n-2} W_{\mu\nu} = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{T_{\mu\nu}}{\omega^n}. \quad (1.2.44)$$

D'après l'expression (1.2.43), l'intégration sur le contour  $C$  se réduit simplement à

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{d\omega}{\omega^{n-s}} = \delta_{s,n-1}. \quad (1.2.45)$$

Nous pouvons ainsi écrire les règles de somme des moments de Mellin des fonctions de structure  $F_1$  et  $F_2$  en utilisant la relation de dispersion précédente (1.2.44) qui relie l'expression (1.2.43) de l'amplitude Compton vers l'avant  $T_{\mu\nu}$  aux fonctions de structure  $F_1$  et  $F_2$  définies dans la décomposition (1.1.4) du tenseur hadronique  $W_{\mu\nu}$  :

$$\int dx x^{n-1} F_1(x, Q^2) = \sum_i A_{1,n}^{(i)} \tilde{C}_{1,n}^{(i)}(Q^2) \quad (1.2.46)$$

$$\int dx x^{n-2} F_2(x, Q^2) = \sum_i A_{2,n}^{(i)} \tilde{C}_{2,n}^{(i)}(Q^2). \quad (1.2.47)$$

Les équations précédentes établissent ainsi, dans le formalisme du développement en produit d'opérateurs sur le cône de lumière, la propriété de factorisation colinéaire entre les fonctions coefficients  $\tilde{C}_n^{(i)}$  qui décrivent le sous-processus dur et calculables perturbativement, et les éléments de matrice  $A_n^{(i)}$  de nature non-perturbative, équivalents aux moments de Mellin des densités partoniques qui apparaissaient dans les formes factorisées des eqs.(1.2.18) et (1.2.19). Notons que dans le cas de champs sans interaction, ces quantités sont indépendantes de  $Q^2$  ce qui conduit au scaling de Bjorken. La dépendance dans l'échelle de renormalisation des opérateurs apparaissant dans les  $A_n^{(i)}$  introduira une dépendance logarithmique en  $Q^2$  qui brisera cette invariance d'échelle. Nous allons maintenant caractériser plus précisément la forme des opérateurs locaux composites qui dominent le développement sur le cône de lumière des opérateurs bilocaux donnés par les eqs.(1.2.36) et (1.2.37) que nous écrivons de manière générique :

$$\mathcal{O}(y, 0) = \sum_{i,s} C_s^{(i)}(y^2) y_{\mu_1} \cdots y_{\mu_s} \mathcal{O}_i^{\mu_1 \cdots \mu_s}(0). \quad (1.2.48)$$

Pour cela nous introduisons le twist  $\tau_{s,i}$  de l'opérateur  $\mathcal{O}_i^{\mu_1\cdots\mu_s}$ , défini comme la différence de sa dimension canonique  $d_{s,i}$  et de son spin  $s$ . Le comportement singulier de la fonction coefficient  $C_s^{(i)}(y^2)$  lorsque  $y^2 \rightarrow 0$  détermine ainsi la classe d'opérateurs qui domine le développement sur le cône de lumière dans la limite de Bjorken, et s'écrit

$$C_s^{(i)}(y^2) \underset{y^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(y^2)^{d_j - \tau_{s,i}/2}}. \quad (1.2.49)$$

$d_j = 3$  est la dimension canonique du courant électromagnétique et nous constatons que le twist est la quantité pertinente pour déterminer la puissance de la singularité des fonctions coefficients sur le cône de lumière et donc du comportement dominant à grand  $Q^2$  de leurs transformées de Fourier directement reliées aux fonctions de structure dans les eqs.(1.2.46) et (1.2.47). Les opérateurs  $\mathcal{O}_i^{\mu_1\cdots\mu_s}$  de twist le plus bas égal à 2 sont donc à l'origine du comportement dominant des fonctions de structure  $F_1$  et  $F_2$  de DIS. Les contributions sous-dominantes qui correspondent à des opérateurs de twist plus élevé sont supprimées en puissance de  $1/Q^2$ , comme nous l'avions anticipé dans les expressions (1.2.18) et (1.2.19).

Nous pouvons définir trois types d'opérateurs composites locaux de twist minimal égal à 2 et invariants de jauge en exploitant leur propriétés de transformation par le groupe de saveur  $SU(N_f)$  (symétrie exacte puisque les masses des quarks sont négligées) :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_q^{\mu_1\cdots\mu_s}(x) &= i^{s-1} \bar{\psi}_f(x) \gamma^{\{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_s\}} \psi_f(x) \\ \mathcal{O}_g^{\mu_1\cdots\mu_s}(x) &= i^{s-2} F_\alpha^{\{\mu_1}(x) D^{\mu_2} \dots D^{\mu_{s-1}} F^{\mu_s\}\alpha}(x) \\ \mathcal{O}_{NS}^{a, \mu_1\cdots\mu_s}(x) &= i^{s-1} \bar{\psi}_f(x) \lambda^a \gamma^{\{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_s\}} \psi_f(x), \end{aligned} \quad (1.2.50)$$

les crochets signifient une symétrisation des indices de Lorentz (nous considérons des fonctions de structure non polarisées) et la soustraction des termes de trace, les dérivées covariantes  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a t^a$  assurent l'invariance de jauge des opérateurs. Ces opérateurs locaux ont une dimension canonique égale à  $s+2$  et un spin  $s$ , leur twist est bien égal à 2. Les opérateurs  $\mathcal{O}_q^{\mu_1\cdots\mu_s}$  et  $\mathcal{O}_g^{\mu_1\cdots\mu_s}$  se transforment comme des singulets sous le groupe de saveur, tandis que l'opérateur  $\mathcal{O}_{NS}^{a, \mu_1\cdots\mu_s}$  appartient à la représentation adjointe du groupe  $SU(N_f)$  (les  $\lambda^a$  sont les générateurs du groupe avec  $a = 1, \dots, N_f^2 - 1$ ) et sera appelé opérateur composite non-singulet (NS). Notons que les opérateurs composites singulets, possédant les même nombres quantiques, donneront lieu à un mélange d'opérateurs sous l'action du groupe de renormalisation ; puisque les moments de Mellin des fonctions de structure sont des quantités physiques, ils ne dépendent pas de l'échelle de renormalisation ; les éléments de matrice  $A_n^{(i)}$  et les transformées de Fourier des fonctions coefficients  $\tilde{C}_n^{(i)}$  vérifieront alors

$$\sum_j \left( \mu \frac{d}{d\mu} \delta_{ij} + \gamma_{n,ij} \right) A_n^{(j)} = 0 \quad (1.2.51)$$

$$\sum_j \left( \mu \frac{d}{d\mu} \delta_{ij} - \gamma_{n,ij} \right) \tilde{C}_n^{(j)} = 0, \quad (1.2.52)$$

en accord avec les eqs.(1.2.21), les matrices (non-diagonales) des dimensions anormales  $\gamma_{n,ij}$  étant les moments de Mellin des fonctions de splitting  $P_{i,j}(x, \bar{\alpha}_s)$  :

$$\int_0^1 dx x^{n-1} \frac{\alpha_s}{\pi} P_{ij}(x) = -\gamma_{n,ij}. \quad (1.2.53)$$

En nous inspirant de la terminologie utilisée dans le cadre du développement en produit d'opérateurs, nous pouvons attribuer aux distributions de partons une définition opératorielle qui fait apparaître des éléments de matrice d'un produit d'opérateurs non-local de twist 2 [13, 14, 15]. Nous considérons pour cela une quantification dans la jauge (non-covariante) du cône de lumière [17, 26] (munie de la condition de jauge  $A^+ = 0$ ) dans laquelle les relations de commutation des champs indépendants sont évaluées à un temps relatif  $x^+ = 0$  sur le cône de lumière, ce qui permet de construire un lagrangien qui s'exprime uniquement à partir des degrés de liberté physique de la théorie : deux des quatre composantes des champs de matière  $\psi$  sont éliminées afin de ne considérer que la "bonne" composante  $\psi^+$  apparaissant dans la décomposition sur les deux composantes  $\psi = \psi^+ + \psi^-$ , définies par  $\psi^+ = \Pi^+ \psi$  et  $\psi^- = \Pi^- \psi$  avec les projecteurs sur les composantes + et - respectivement donnés par  $\Pi^+ = \frac{1}{2} \gamma^- \gamma^+$  et  $\Pi^- = \frac{1}{2} \gamma^+ \gamma^-$  ( $\Pi^+ + \Pi^- = 1$ ,  $(\Pi^\pm)^2 = \Pi^\pm$  et  $\Pi^+ \Pi^- = 0$ ). Ainsi  $\gamma^+ \psi$  ne contenant que la bonne composante  $\psi^+$ , nous pouvons écrire une décomposition en modes de Fourier qui fait apparaître les opérateurs de création  $d^\dagger$  (d'antiquarks) et d'annihilation  $b$  (de quarks)

$$\begin{aligned} \gamma^+ \psi(0, x^-, x_\perp) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int_0^\infty \frac{dk^+}{2k^+} \int d^2 k_\perp [\gamma^+ u(k, s) e^{-ik \cdot x} b(k^+, k_\perp, s) \\ & + \gamma^+ v(k, s) e^{ik \cdot x} d^\dagger(k^+, k_\perp, s)]. \end{aligned} \quad (1.2.54)$$

La distribution de quarks  $f_q(z)$  s'écrit alors comme l'élément de matrice entre l'état hadronique  $|N(P)\rangle$  de l'opérateur  $b^\dagger(zP^+, k_\perp, s) b(zP^+, k_\perp, s)$  qui compte le nombre de quarks emportant la fraction d'impulsion longitudinale  $z$  :

$$f_q(z) dz = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int_0^\infty \frac{d(zP^+)}{2zP^+} \int d^2 k_\perp \langle N(P) | b^\dagger(zP^+, k_\perp, s) b(zP^+, k_\perp, s) | N(P) \rangle. \quad (1.2.55)$$

D'après ce qui précède, la distribution de quarks  $f_q(z)$  s'écrit donc en fonction des bonnes

composantes  $\psi^+$  des champs de matière (puisque  $\bar{\psi}\gamma^+\psi = \bar{\psi}^+\gamma^+\psi^+$ ) :

$$\begin{aligned} f_q(z) &= \frac{1}{2\pi} \int dx^- e^{-izP^+x^-} \langle N(P) | \bar{\psi}(0, x^-, 0_\perp) \gamma^+ \psi(0, 0, 0_\perp) | N(P) \rangle \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int dx^- e^{-izP^+x^-} \langle N(P) | \bar{\psi}(x^-) \gamma^+ \psi(0) | N(P) \rangle . \end{aligned} \quad (1.2.56)$$

De même nous aurons la définition suivante pour les distributions de gluons :

$$\begin{aligned} f_g(z) &= \frac{1}{2\pi z P^+} \int dx^- e^{-izP^+x^-} \langle N(P) | F_a^{+\nu}(0, x^-, 0_\perp) F_{b,\nu}^+(0, 0, 0_\perp) | N(P) \rangle \\ &\equiv \frac{1}{2\pi z P^+} \int dx^- e^{-izP^+x^-} \langle N(P) | F_a^{+\nu}(x^-) F_{b,\nu}^+(0) | N(P) \rangle \end{aligned} \quad (1.2.57)$$

Remarquons enfin que nous avons pu négliger la ligne de Wilson

$$W(0, x^-) = P e^{ig \int_0^{x^-} dy^- A_a^+(0, y^-, 0_\perp) t^a} \quad (1.2.58)$$

assurant l'invariance de jauge des corrélateurs non-locaux précédents car nous nous sommes placés dans la jauge du cône de lumière  $A^+ = 0$ . Une définition invariante de jauge des distributions de quarks et de gluons doit donc contenir ce lien de jauge entre les deux opérateurs locaux. Nous pouvons enfin relier aisément les moments de Mellin des PDF ainsi définies aux opérateurs de twist 2 (1.2.50) qui dominent l'OPE : par exemple la distribution de quarks  $f_q(z)$  sera bien associée à l'opérateur local singulet  $\mathcal{O}_q^{\mu_1 \dots \mu_s}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z^{n-1} f_q(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle N(P) | [(\partial^+)^m \bar{\psi}(0)] \gamma^+ \psi(0) | N(P) \rangle \\ &\quad \times \int_0^1 dz z^{n-1} \int dx^- (x^-)^m e^{-izP^+x^-} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle N(P) | [(\partial^+)^m \bar{\psi}(0)] \gamma^+ \psi(0) | N(P) \rangle \\ &\quad \times \int_0^1 dz z^{n-1} 2\pi \frac{1}{iP^+} \delta(z) \frac{m!}{(izP^+)^m} \\ &= \frac{1}{(P^+)^n} \langle N(P) | [(-i\partial^+)^{(n-1)} \bar{\psi}(0)] \gamma^+ \psi(0) | N(P) \rangle \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

ce qui est bien équivalent dans les notations des eqs.(1.2.39) et (1.2.50) à

$$A_q^{(n)} = \frac{1}{(P^+)^n} \langle N(P) | \mathcal{O}_q^{+\dots+}(0) | N(P) \rangle . \quad (1.2.60)$$

### 1.3 Processus exclusifs et factorisation colinéaire

Les théorèmes justifiant la factorisation colinéaire des processus inclusifs [10, 13, 18, 19] ont été généralisés à certains processus exclusifs [20, 21, 22, 23], processus pour lesquels toutes les particules contenues dans l'état final sont observées expérimentalement : l'amplitude du processus exclusif considéré, muni d'une échelle dure, sera factorisée en une amplitude décrivant le sous-processus dur à partir d'interactions entre quarks et gluons s'opérant sur de courtes distances, convoluée avec la partie non-perturbative contenant la dynamique à grande distance ; en effet la factorisation de la dynamique observée précédemment pour le processus DIS dans la limite de Bjorken au niveau de la section efficace inclusive  $\gamma^*p$  et reliée à l'amplitude vers l'avant (sans transfert d'impulsion) du processus  $\gamma^*p \rightarrow \gamma^*p$  par le théorème optique, peut aussi être observée au niveau de l'amplitude du processus exclusif DVCS (Deeply Virtual Compton Scattering, diffusion Compton profondément inélastique)  $\gamma^*p \rightarrow \gamma p$ , dans la limite de Bjorken avec transfert d'impulsion non nul, comprenant au moins un photon virtuel nécessaire afin d'établir la factorisation.

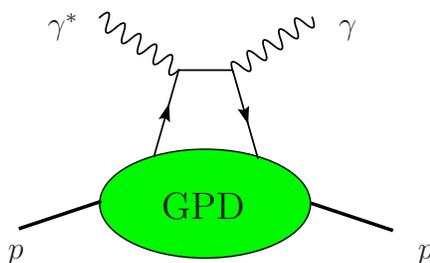


FIG. 1.5 – GPD apparaissant dans la factorisation colinéaire du processus DVCS.

L'objet caractérisant la partie non-perturbative du processus sera appelé distribution partonique généralisée (GPD pour Generalized Parton Distributions, cf. les articles de revue [24, 25]), et sera défini à partir des mêmes opérateurs sur le cône de lumière que ceux entrant dans la définition des distributions partoniques usuelles, mais possèdera en plus de la dépendance dans la fraction d'impulsion longitudinale, une dépendance en impulsion transférée, donnant ainsi accès à la distribution de partons dans l'espace transverse à la direction d'incidence du nucléon.

Les PDF (interprétées comme des densités de probabilité) pourront aussi être remplacées dans la description de processus exclusifs par des fonctions d'onde d'états hadroniques (donc associées à des amplitudes de probabilité) sur le cône de lumière, possédant une définition similaire à celles-ci en terme d'opérateurs non-locaux définis sur le cône de lumière. Nous présentons dans la suite de tels objets appelés amplitudes de distributions (DA pour Distribution Amplitude), développés par Brodsky et Lepage [26, 29] dans la description du facteur de forme du pion ( $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  étudié par exemple dans la réaction  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\pi^0$ ) ou encore pour la production exclusive de paires de mésons dans les

diffusions à deux photons.

Nous avons vu que la quantification sur le cône de lumière permettait de construire un lagrangien qui s'exprime uniquement à partir des degrés de liberté physique de la théorie : en effet, dans la quantification usuelle (canonique à temps égal), le terme d'interaction du lagrangien peut créer des particules à partir du vide, pouvant ainsi faire apparaître dans l'espace de Fock d'un hadron des termes déconnectés (par exemple un état constitué de  $|q\bar{q}\rangle$  et  $|q\bar{q}g\rangle$ ). La quantification non covariante sur le cône de lumière permet de résoudre ce problème en faisant de l'état du vide un état propre du hamiltonien défini ainsi sur le cône de lumière, qui ne se mélangera pas avec les autres états de Fock générés en faisant agir les opérateurs création de quarks, d'antiquarks et de gluons sur le vide : par exemple l'état  $|q\bar{q}\rangle = b^\dagger(k_1^+, k_{1\perp}, s_1) d^\dagger(k_2^+, k_{2\perp}, \lambda_2)$  correspond à une paire de quark-antiquark de valence de composantes  $k_i^+$  positive et d'hélicité  $\lambda_i$ . Ces états de Fock (l'état  $|q\bar{q}\rangle$  de valence, habillé des quarks et gluons de la mer  $|q\bar{q}g\rangle$ ,  $|q\bar{q}gg\rangle\dots$ ) constituent ainsi une base sur laquelle on peut formellement décomposer un état hadronique ; dans le cas d'un méson vecteur de moment  $P = (P^+, P_\perp)$ , on peut écrire par exemple :

$$|M_V; P\rangle = \sum_{n, \lambda_i} \int \prod_i dx_i \delta(1 - \sum_j x_j) d^2k_{\perp i} \delta(\sum_j k_{\perp j}) \times \psi_{n, M_V}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) |n; (x_i P^+, x_i P_\perp + k_{\perp i}), \lambda_i\rangle. \quad (1.3.61)$$

La fonction d'onde  $\psi_{n, M_V}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ , s'interprétant comme l'amplitude de probabilité de trouver des partons de moments  $(x_i P^+, x_i P_\perp + k_{\perp i})$  dans le méson vecteur, est la transformée de Fourier de la fonction d'onde de Bethe-Salpeter d'énergie positive évaluée à temps (sur le cône de lumière)  $y^+ = 0$ , faisant donc apparaître l'élément de matrice non-diagonal, entre le vide et l'état lié constitué par le méson vecteur, du produit ordonné des deux champs fermioniques définis en deux points différents  $T\psi(y)\bar{\psi}(0)$ . En intégrant la fonction d'onde sur les moments transverses des partons constituant cet état, jusqu'à l'échelle  $Q^2$  donnée par le (carré du) moment dur transféré au méson dans le processus, nous obtenons alors l'amplitude de distribution  $\phi(z, Q)$  définie par

$$\langle 0 | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \psi(y^-) | V_L(p) \rangle_{y^2 \rightarrow 0} = f_V p^+ \int_0^1 dz e^{-iz(p \cdot y)} \phi(z, Q) \quad (1.3.62)$$

pour un méson vecteur d'hélicité longitudinale (nous ne précisons pas pour l'instant son contenu en saveur de quarks), de constante de couplage  $f_V$ .  $\phi$  est normalisée à l'unité. Elle s'interprète alors comme l'amplitude de probabilité de trouver une paire de quark-antiquark de valence, colinéaires jusqu'à l'échelle transverse typique  $1/Q$  dans le méson vecteur (la contribution des autres états de Fock étant supprimés en puissance de  $1/Q^2$  par parton supplémentaire). Elle est définie à partir du corrélateur non-local de twist

dominant égal à 2 identique à celui de la distribution de quarks (1.2.56) dans le proton, mais dont l'élément de matrice est cette fois non-diagonal, pris entre l'état du vide  $|0\rangle$  de l'espace de Fock et l'état lié hadronique  $|V_L(p)\rangle$ . Les contributions de twist plus élevé seront supprimées en puissance de  $1/Q^2$ . Notons que pour rendre cette définition invariante de jauge nous devons rajouter une ligne de Wilson (cf. l'eq.(1.2.58)) entre les deux champs du corrélateur non-local.

Nous pouvons déterminer l'expression analytique de l'amplitude de distribution de deux façons. La première consiste à obtenir son comportement dominant à grand  $Q^2$  (et  $z$  fixé) par un développement en produit d'opérateurs [27, 28] du corrélateur non local dans la région du cône de lumière donnée par la séparation invariante  $y^2 \simeq \text{cste} \frac{1}{Q^2}$ , de manière similaire à l'OPE effectuée pour le processus de diffusion profondément inélastique puisque les corrélateurs non-locaux sont identiques dans les deux cas. En réécrivant par simple translation l'eq.(1.3.62) selon

$$\langle 0|\bar{\psi}(y^-)\gamma^+\psi(-y^-)|V_L(p)\rangle = f_V p^+ \int_0^1 dz e^{i(2z-1)p^+y^-} \phi(z, Q) \quad (1.3.63)$$

et développant en puissance de  $y^-$  les deux membres de l'équation précédente, il vient

$$\langle 0|\bar{\psi}(0)\gamma^+(i\overleftrightarrow{D}^+)^n\psi(0)|V_L(p)\rangle = f_V(p_+)^{n+1} \int_0^1 dz (2z-1)^n \phi(z, Q), \quad (1.3.64)$$

avec  $\overleftrightarrow{D}^+ = \overrightarrow{D}^+ - \overleftarrow{D}^+$ . Nous voyons bien apparaître les opérateurs locaux de twist deux qui dominaient dans le cas des distributions de quarks de DIS. Toutefois leur renormalisation introduira un mélange avec les opérateurs de mêmes nombres quantiques mais présentant des termes de dérivées totales qui étaient négligés dans le cas de la diffusion profondément inélastique, puisque l'on considèrerait leurs éléments de matrice diagonaux (sans transfert d'impulsion), qui ne pourront plus l'être ici :

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \langle 0|\bar{\psi}\gamma^+(\overleftrightarrow{D}^+)^n\psi|V_L(p)\rangle = \sum_{m=0}^n \Gamma_{nm} \langle 0|(\partial^+)^{n-m} [\bar{q}\gamma^+(\overleftrightarrow{D}^+)^m\psi]|V_L(p)\rangle. \quad (1.3.65)$$

Afin de déterminer un ensemble d'opérateurs qui ne se mélangent pas après renormalisation, nous devons donc diagonaliser la matrice  $\Gamma_{nm}$  et trouver ses vecteurs propres. A l'ordre dominant, les valeurs propres sont données par les éléments diagonaux et correspondent à la dimension anormale usuelle des opérateurs sans dérivées totales  $\bar{\psi}(0)\gamma^+(i\overleftrightarrow{D}^+)^n\psi(0)$ , (obtenue par transformation de Mellin de la fonction de splitting  $P_{qq}$ , à un facteur -2 près)

$$\gamma_n^{(0)} = C_F \left( 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} + 4 \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \right). \quad (1.3.66)$$

Les vecteurs propres sont alors donnés par les opérateurs conformes locaux [27, 30, 31]

$$\mathcal{O}_n(x) = (i\partial^+)^n \left[ \bar{\psi}(x)\gamma^+ C_n^{3/2} \left( \frac{\overrightarrow{D^+} - \overleftarrow{D^+}}{\overrightarrow{\partial} + \overleftarrow{\partial}} \right) \psi(x) \right] \quad (1.3.67)$$

avec  $(\partial^+)^n (\overrightarrow{D^+} / \overrightarrow{\partial})^k = (\partial^+)^{n-k} (\overrightarrow{D^+} / \overrightarrow{\partial})^k$ . Notons que ces opérateurs sont protégés d'un mélange avec des opérateurs de spin conforme différent (défini comme la demi-somme de la dimension canonique et du spin), à l'ordre dominant, grâce à la symétrie conforme de la théorie sur le cône de lumière (réduite aux transformations du sous-groupe conforme colinéaire  $SL(2, R)$ , cf. l'article [32]). L'égalité (1.3.64) devient alors (en omettant le facteur contenant la dépendance dans l'échelle de renormalisation)

$$\langle 0 | \mathcal{O}_n(0) | V_L(p) \rangle = f_V(p_+)^{n+1} \int_0^1 dz (2z-1)^n C_n^{3/2} (2z-1) \phi(z, Q). \quad (1.3.68)$$

En inversant la relation précédente, l'amplitude de distribution peut se développer en termes des polynômes de Gegenbauer  $C_n^{3/2}$

$$\phi(z, Q) = 6z(1-z) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}(Q) C_{2n}^{3/2} (2z-1) \right) \quad (1.3.69)$$

avec le coefficient qui contient l'information non-perturbative

$$a_{2n}(Q) = \frac{2(2n+3)}{3(n+1)(n+2)} \frac{1}{f_V(p_+)^{n+1}} \langle 0 | \mathcal{O}_n(0, Q) | V_L(p) \rangle \quad (1.3.70)$$

à travers l'élément de matrice de l'opérateur conforme local  $\mathcal{O}_n$  dépendant de l'échelle de renormalisation  $\mu = Q$ , qui s'exprime en fonction de sa valeur à une échelle de référence  $Q_0$

$$\langle 0 | \mathcal{O}_n(0, Q) | V_L(p) \rangle = \langle 0 | \mathcal{O}_n(0, Q_0) | V_L(p) \rangle \left( \frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(Q_0)} \right)^{\frac{\gamma_n^{(0)}}{4\pi\beta_0}}. \quad (1.3.71)$$

La méthode alternative (mais équivalente) pour obtenir l'expression (1.3.69) consiste à dériver en théorie de perturbation (à l'ordre des logarithmes dominants) une équation d'évolution en  $Q^2$  directement pour l'amplitude de distribution : celle-ci resomme les puissances de  $\alpha_s \ln(Q^2)$  provenant de l'intégration sur les moments transverses fortement ordonnés des partons émis le long du cône de lumière, comme le faisait l'équation d'évolution DGLAP pour les fonctions de distributions partoniques. Elle est désignée par l'acronyme de ses inventeurs Efremov-Radyushkin-Brodsky-Lepage [27, 29] et s'écrit

$$Q^2 \frac{d\phi(z, Q)}{dQ^2} = \int_0^1 dy V(z, y) \phi(y, Q), \quad (1.3.72)$$

où le noyau s'écrit à l'ordre dominant en  $\alpha_s(Q^2)$

$$V(z, y) = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} C_F \left[ \frac{1-z}{1-y} \left( 1 + \frac{1}{z-y} \right) \theta(z-y) + \frac{z}{y} \left( 1 + \frac{1}{y-z} \right) \theta(y-z) \right]_+, \quad (1.3.73)$$

avec

$$[f(z, y)]_+ \equiv f(z, y) - \delta(z-y) \int_0^1 dt f(t, z). \quad (1.3.74)$$

En déterminant les fonctions propres du noyau de l'équation ERBL, on obtient l'expression de l'amplitude de distribution  $\phi(z, Q)$  équivalente à celle donnée en (1.3.69).

Nous avons vu que la distribution de quarks généralisée se définissait à partir du même corrélateur non-local sur le cône de lumière  $\bar{\psi} \gamma^+ \psi$  apparaissant dans les PDF (1.2.56) et DA (1.3.62) de twist dominant, entre les états hadroniques du proton de moment initial  $p$  et final  $p'$ , s'exprimant ainsi comme la transformée de Fourier de l'élément de matrice  $\langle p' | \bar{\psi} \gamma^+ \psi | p \rangle$ . Les GPD, que nous représentons sous une forme générique donnée par le diagramme en "sac à main" (cf. la Fig.1.5) caractéristique de la factorisation du processus DVCS, possèdent une dépendance en  $x$ , fractions d'impulsion moyenne du parton entre les états initiaux et finaux, en  $\xi$  qui paramétrise la perte d'impulsion longitudinale de ce même parton entre les états initiaux et finaux (mesurant l'asymétrie de la GPD, ou la torsion en anglais), et en  $t$ , le carré du moment transféré au cours du processus. Les équations d'évolution des GPD se réduiront dans deux cas limite aux équations d'évolution DGLAP et ERBL étudiées précédemment :

- dans la limite vers l'avant ( $t = 0$ ), les GPD se réduisent aux distributions partoniques dont l'évolution est décrite par les équations DGLAP ;
- dans la limite  $\xi \rightarrow \pm 1$ , l'état initial (ou final) possédant une impulsion nulle sur le cône de lumière  $p^+ = 0$  (ou  $p'^+ = 0$ ) est alors équivalent à l'état du vide (du point de vue des équations d'évolution) présent dans la définition des amplitudes de distribution, l'équation d'évolution des GPD est alors équivalente à l'équation ERBL.

Ceci permet de diviser le domaine de variation de  $x \in [-1, 1]$  en trois régions cinématiques distinctes (cf. Fig.1.6, d'après [24]) : la région DGLAP composée des deux intervalles déconnectés  $x \in [\xi, 1]$  (qui décrit l'émission puis la réabsorption d'un quark) et  $x \in [-1, -\xi]$  (émission puis réabsorption d'un antiquark), et la région ERBL  $x \in [-\xi, \xi]$  (qui caractérise l'émission d'une paire quark/anti-quark du proton initial permettant ainsi de sonder son contenu en méson).

Nous nous intéresserons également à des objets analogues aux GPD mais obtenus par croisement, les amplitudes de distribution généralisées (GDA pour Generalized Distribution Amplitude) [20, 37], là encore définie à partir des mêmes opérateurs sur le cône de lumière, mais dont les éléments de matrice cette fois sont pris entre l'état du vide et un état final hadronique composite, par exemple une paire de pions produite dans un processus d'annihilation entre photons  $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi\pi$  près du seuil [37]. Leur évolution est aussi décrite par les équations ERBL et elles possèdent un développement [38] analogue

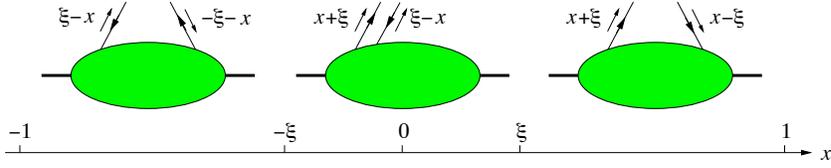


FIG. 1.6 – Les 3 régions cinématiques des GPD.

à celui des amplitudes de distribution donné en (1.3.69).

Mentionnons enfin l'existence des amplitudes de distribution de transition (TDA pour Transition Distribution Amplitude) [40] généralisant les GPD pour des éléments de matrice d'états initial et final de nombres quantiques différents; dans le cas d'une définition à partir du produit d'opérateurs de quark-antiquark, ces TDA mésoniques permettent de décrire par exemple la transition non-perturbative d'un photon en un pion dans le processus factorisé de diffusion d'un photon virtuel (dont la virtualité apporte l'échelle dure) sur un photon à faible moment transféré, produisant un méson générique  $M$  et un pion dans l'état final,  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi M$ . Les TDA définies à partir des corrélateurs non-locaux à trois quarks (qui entrent dans la définition des amplitudes de distribution baryoniques [32]) permettent de décrire les transitions baryon-méson ou baryon-photon, par exemple dans le processus  $\bar{p}p \rightarrow \gamma^*\pi^0$ , et sont appelées TDA baryoniques.

Ayant présenté dans le cadre de la factorisation colinéaire, l'utilisation des amplitudes de distribution dans la description de l'état final hadronique de certains processus exclusifs, nous nous proposons d'étudier le processus de production exclusive de paires de mésons vecteurs  $\rho$  neutre de polarisation longitudinale dans les collisions entre photons virtuels

$$\gamma^*(q_1)\gamma^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_1)\rho_L^0(k_2) \quad (1.3.75)$$

dans différents régimes d'énergie de la chromodynamique quantique. Il offre la possibilité de sonder les états liés hadroniques constitués par les mésons finaux en tirant profit du couplage ponctuel des deux photons aux courants fermioniques qui permet d'obtenir une expression simple en termes d'interactions entre quark et gluon du sous-processus dur à une certaine résolution donnée par les virtualités des photons. Ce processus révélera différentes propriétés de factorisation de l'amplitude de diffusion (suivant le régime cinématique envisagé); nous pourrons ainsi le considérer comme un laboratoire unique pour tester l'utilisation de différents formalismes adaptés à la description de ces formes factorisées de l'amplitude de diffusion.

Ce travail a été publié dans l'article [39]. Nous verrons que ce processus est dominé à haute énergie (aussi appelée limite de Regge) dans le centre de masse (déterminée par la variable  $s$  de Mandelstam) par la contribution de l'échange de gluons dans la voie  $t$ , décrit dans le cadre de la  $k_\perp$ -factorisation en moment transverse, ce que nous

introduirons dans le chapitre 2 et appliquerons au cas particulier de notre étude dans le chapitre 3. A plus faible énergie, nous pouvons nous attendre à une contribution non négligeable d'échanges de quarks, puisque ceux-ci interviennent à un ordre plus bas dans le développement perturbatif en puissance de la constante de couplage fort  $g$ , à savoir à l'ordre  $g^2$ . L'étude de ce processus avec échange de quarks est la motivation principale de ce chapitre. La contribution de l'ordre de Born du traitement perturbatif du processus avec échange de quark est décrite par le même ensemble de diagrammes que ceux qui contribuent à la diffusion de paires de photons réels produisant des mésons  $\pi$ , dans le processus  $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$  qui a été étudié initialement à grand transfert d'impulsion, par Brodsky et Lepage [33]. L'amplitude de diffusion  $M$  s'écrit sous une forme factorisée entre une partie dure  $M_H$  calculable perturbativement et convoluée avec les amplitudes de distribution des mésons. Nous illustrons une telle factorisation de l'amplitude de diffusion de notre processus dans la Fig.1.7.

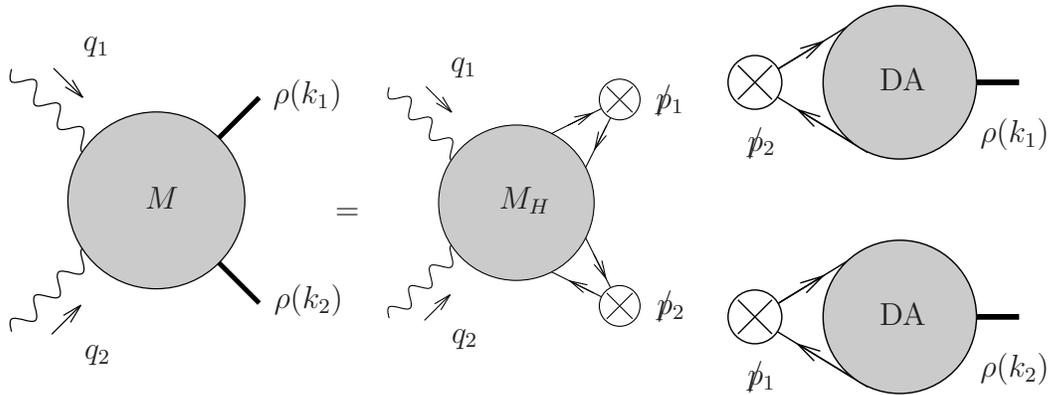


FIG. 1.7 – L'amplitude du processus  $\gamma^*(q_1)\gamma^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_1)\rho_L^0(k_2)$  dans la factorisation colinéaire.

Nous pouvons considérer notre travail comme un complément de [33] pour le cas de la diffusion de photons virtuels, c'est à dire avec des polarisations transverses et longitudinales, dans la cinématique particulière vers l'avant, c'est à dire sans transfert d'impulsion (voir également la référence [35]).

Les virtualités  $Q_i^2 = -q_i^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ ,  $i = \{1, 2\}$ , fournissent les échelles dures de notre processus (1.3.75), justifiant ainsi l'utilisation de la factorisation colinéaire de QCD à des termes correctifs en puissance de  $1/Q_i^2$  afin de décrire les mésons  $\rho$  finals au moyen de leurs amplitudes de distribution : dans cette approche, nous effectuons la convolution (sur les fractions d'impulsion longitudinales  $z_i$  des quarks entrant dans les mésons vecteurs) entre la partie dure  $M_H$  de l'amplitude du sous-processus dur calculée perturbativement à partir des règles de Feynman et les amplitudes de distribution  $\phi(z_i)$  pour caractériser l'hadronisation en mésons  $\rho$  dans la partie non-perturbative. La contribution à l'ordre de Born de l'amplitude de diffusion est ainsi calculée d'une manière semblable

à celle développée initialement par Brodsky et Lepage mais dans une cinématique très différente : dans notre cas les virtualités des photons fournissent l'échelle dure, et non le transfert d'impulsion aux mésons produits dans l'état final.

## 1.4 Présentation de la cinématique du processus

Nous établissons dans cette section la cinématique utilisée, qui se simplifie dans le régime particulier vers l'avant (forward) que nous étudions. La prise en compte de l'impulsion transférée ne changerait pas nettement notre résultat mais rendrait nécessaire l'introduction de structures tensorielles plus compliquées. Nous employons une décomposition sur la base des deux vecteurs de Sudakov (équivalents aux deux vecteurs du cône de lumière)  $p_1$  et  $p_2$  tels que

$$p_1^2 = p_2^2 = 0 \quad (1.4.76)$$

et

$$2p_1 \cdot p_2 = s. \quad (1.4.77)$$

Notons qu'ici  $s$  n'est qu'un intermédiaire de calcul défini par la relation précédente, sans signification physique particulière bien qu'il soit évidemment possible de le réécrire en fonction de quantités qui possèdent une interprétation cinématique comme nous le verrons plus loin dans la relation (1.4.81).

Ainsi nous écrivons les impulsions des photons selon

$$q_1 = p_1 - \frac{Q_1^2}{s}p_2 \quad q_2 = p_2 - \frac{Q_2^2}{s}p_1, \quad (1.4.78)$$

et celles des mésons finals selon

$$k_1 = (1 - \frac{Q_2^2}{s})p_1 \quad k_2 = (1 - \frac{Q_1^2}{s})p_2. \quad (1.4.79)$$

Nous traitons les mésons vecteurs dans l'approximation de masse nulle, comme nous l'observons d'après  $k_1$  et  $k_2$  qui sont respectivement colinéaires à  $p_1$  et  $p_2$ . La positivité de l'énergie des mésons  $\rho$  produits exige que  $s \geq Q_i^2$ . L'invariant de Mandelstam habituel correspondant au carré de l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse, que nous noterons  $W^2$  dans ce chapitre, s'écrit donc

$$W^2 = (q_1 + q_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = s(1 - \frac{Q_1^2}{s})(1 - \frac{Q_2^2}{s}), \quad (1.4.80)$$

ou de manière équivalente

$$s = \frac{1}{2} [Q_1^2 + Q_2^2 + W^2 + \lambda(Q_1^2, Q_2^2, -W^2)] , \quad (1.4.81)$$

avec la quantité  $\lambda(x, y, z) \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2zy}$ , tandis que le carré du transfert minimum d'impulsion noté  $t_{min}$  et qui correspond au cas vers l'avant s'écrit

$$t_{min} = (q_2 - k_2)^2 = (q_1 + k_1)^2 = -\frac{Q_1^2 Q_2^2}{s}. \quad (1.4.82)$$

Il est important de souligner que contrairement au cas étudié dans les Refs.[33, 35],  $t_{min}$  n'est pas forcément grand devant  $\Lambda_{QCD}^2$ , selon les valeurs respectives de  $Q_1^2$ ,  $Q_2^2$  et  $W^2$ , donc l'échelle dure sur laquelle nous pourrions développer notre traitement perturbatif ne sera apportée que par les virtualités  $Q_i^2$  des photons. Ceci nous permet d'envisager que la démonstration que nous effectuons dans la cinématique vers l'avant pourra se généraliser au cas d'un transfert d'impulsion quelconque.

## 1.5 L'amplitude à l'ordre de Born par le calcul direct

L'amplitude  $\mathcal{M}$  de diffusion du processus (1.3.75) peut être écrite sous la forme

$$\mathcal{M} = T^{\mu\nu} \epsilon_\mu(q_1) \epsilon_\nu(q_2), \quad (1.5.83)$$

où le tenseur  $T^{\mu\nu}$  possède une décomposition simple dans la cinématique considérée, qui est explicitement cohérente avec la covariance de Lorentz ainsi qu'avec l'invariance de jauge électromagnétique :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_T^{\mu\nu} (T^{\alpha\beta} g_{T\alpha\beta}) + (p_1^\mu + \frac{Q_1^2}{s} p_2^\mu)(p_2^\nu + \frac{Q_2^2}{s} p_1^\nu) \frac{4}{s^2} (T^{\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{1\beta}), \quad (1.5.84)$$

avec le projecteur dans le sous-espace transverse

$$g_T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2}. \quad (1.5.85)$$

En effet, nous pouvons simplement vérifier l'invariance de jauge de QED qui s'écrit

$$T^{\mu\nu} q_{1\mu} = T^{\mu\nu} q_{2\nu} = 0. \quad (1.5.86)$$

Le premier terme du membre de droite de l'éq. (1.5.84) contribue dans le cas des photons transversalement polarisés et le second pour les photons virtuels longitudinaux.

Nous considérons la cinématique vers l'avant afin de simplifier les calculs mais nous verrons aussi que cela sera suffisant lorsque nous exploiterons les résultats obtenus afin de les comparer au cas de la limite de Regge de QCD, étudiée dans les chapitres suivants.

Le choix de l'approximation colinéaire nous permet d'écrire les impulsions des quarks et des antiquarks qui constituent les mésons  $\rho$  selon

$$\begin{aligned} \ell_1 &\sim z_1 k_1, & \ell_2 &\sim z_2 k_2 \\ \tilde{\ell}_1 &\sim \bar{z}_1 k_1, & \tilde{\ell}_2 &\sim \bar{z}_2 k_2. \end{aligned} \quad (1.5.87)$$

puisque ceux-ci sont presque colinéaires aux mésons et volent dans la direction du cône de lumière donnée par le vecteur  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Afin d'effectuer la factorisation à chacun des deux vertex (représentés en haut et en bas sur la Fig.1.7) marquant la frontière entre les deux régimes perturbatif et hadronisé, nous utilisons l'identité de Fierz afin de refermer les indices spinoriels des champs fermioniques (non contractés par le théorème de Wick) dans le terme dur (cf. la Fig.1.7) en utilisant la seule structure de Lorentz compatible avec les nombres quantiques des mésons vecteurs :

$$\langle V(k_1) | \bar{\psi}_\alpha^i(x) \psi_\beta^j(0) | 0 \rangle = \frac{\delta^{ij}}{4N_c} (\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \langle V(k_1) | \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(0) | 0 \rangle ;$$

ainsi une matrice  $\gamma_\mu$  (de même qu'un facteur  $\frac{\delta^{ij}}{4N_c}$ ) apparaît à la place de chaque paire ouverte de quarks-antiquarks dans le calcul de la trace du terme dur  $M_H$  et sera contractée avec les vecteur de sudakov  $p_1$  ou  $p_2$  dans le cas du méson de moment respectif  $k_1$  ou  $k_2$  (cf. la Fig.1.7) ; l'autre matrice  $\gamma_\mu$  s'insère entre les champs fermioniques pris entre les états du vide et du méson vecteur, terme qui définit l'amplitude de distribution  $\phi(z)$  du méson  $\rho^0$  longitudinal et s'écrivant dans ce cas pour des quarks de saveur  $q = (u, d)$

$$\langle \rho_L^0(k) | \bar{q}(x) \gamma^\mu q(0) | 0 \rangle = \frac{f_\rho}{\sqrt{2}} k^\mu \int_0^1 dz e^{iz(kx)} \phi(z) , \quad (1.5.88)$$

avec la constante de couplage  $f_\rho$  du méson de contenu en saveur  $|\rho^0\rangle = 1/\sqrt{2}(|\bar{u}u\rangle - |\bar{d}d\rangle)$ . La contraction de l'indice de lorentz s'effectuera avec les vecteurs de sudakov  $p_2$  ou  $p_1$  dans le cas du méson de moment respectif  $k_1$  ou  $k_2$  (cf. la Fig.1.7). Afin de simplifier la notation, nous avons omis la ligne de Wilson qui assure l'invariance de jauge de cet objet.

L' amplitude de diffusion  $\mathcal{M}$  du processus s'écrit donc dans le cadre de la factorisation colinéaire

$$\mathcal{M} = \int_0^1 dz_1 dz_2 \mathcal{M}_{\mathcal{H}}(z_1, z_2, Q_1, Q_2, s) \phi(z_1) \phi(z_2). \quad (1.5.89)$$

La dépendance en  $s$  peut s'exprimer en terme de la quantité physique  $W^2$  en utilisant l'eq.(1.4.81).

Le travail suivant consiste à dénombrer correctement le nombre de diagrammes de Feynman possibles qui contribuent à l'expression du terme dur  $M_H$ . Une manière systématique consiste à les répertorier par classes de topologies distinctes ce qui nous permet de comptabiliser 20 diagrammes à répartir en 2 classes. La première classe correspond aux diagrammes où les deux photons virtuels se couplent à deux lignes de quark différentes. De cette façon, on peut établir 8 diagrammes différents, comme illustré dans la Fig.1.8.

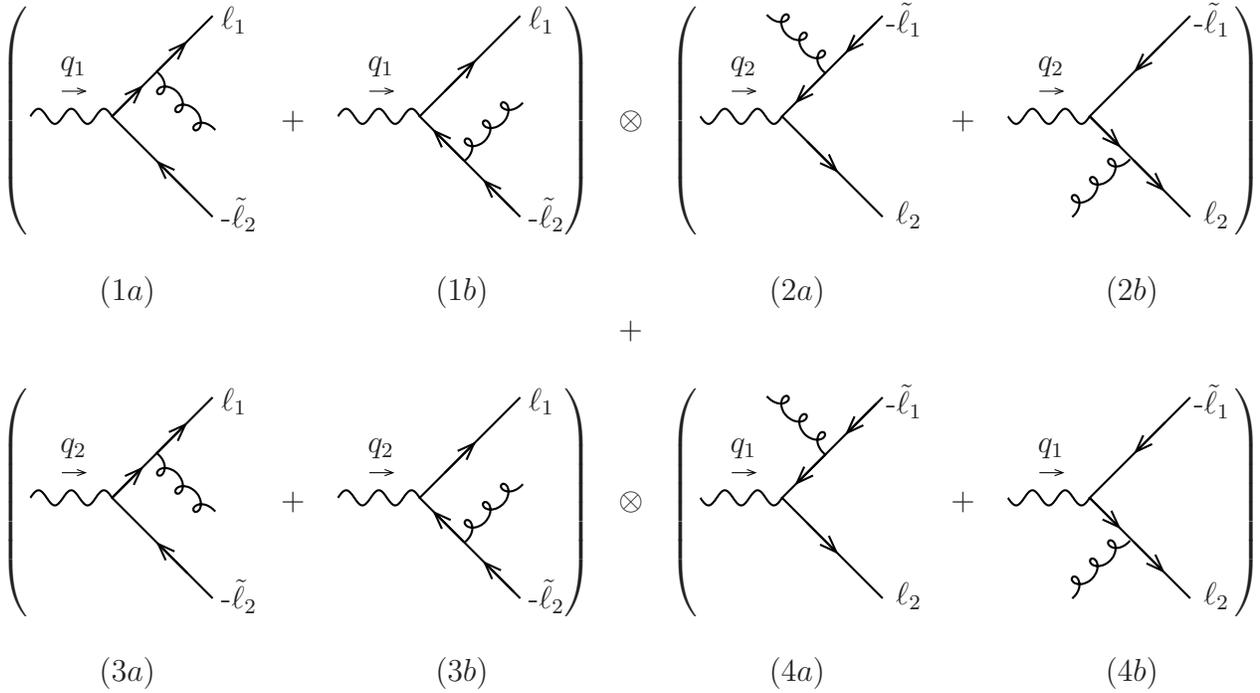


FIG. 1.8 – Diagrammes de Feynman contribuant à  $M_H$ , pour lesquels les photons virtuels se couplent à différents courants fermioniques.

La seconde classe de diagrammes correspond au cas où les deux photons virtuels sont couplés à la même ligne de quark, résultant de 12 contributions différentes, comme illustré dans la Fig.1.9. Nous allons voir comment ces deux classes de diagrammes se simplifient selon le cas des polarisations transverse ou longitudinale.

Considérons tout d'abord le cas des photons de polarisation longitudinale, dont le vecteur polarisation s'écrit

$$\epsilon_{\parallel}(q_1) = \frac{1}{Q_1}q_1 + \frac{2Q_1}{s}p_2 \quad \text{et} \quad \epsilon_{\parallel}(q_2) = \frac{1}{Q_2}q_2 + \frac{2Q_2}{s}p_1. \quad (1.5.90)$$

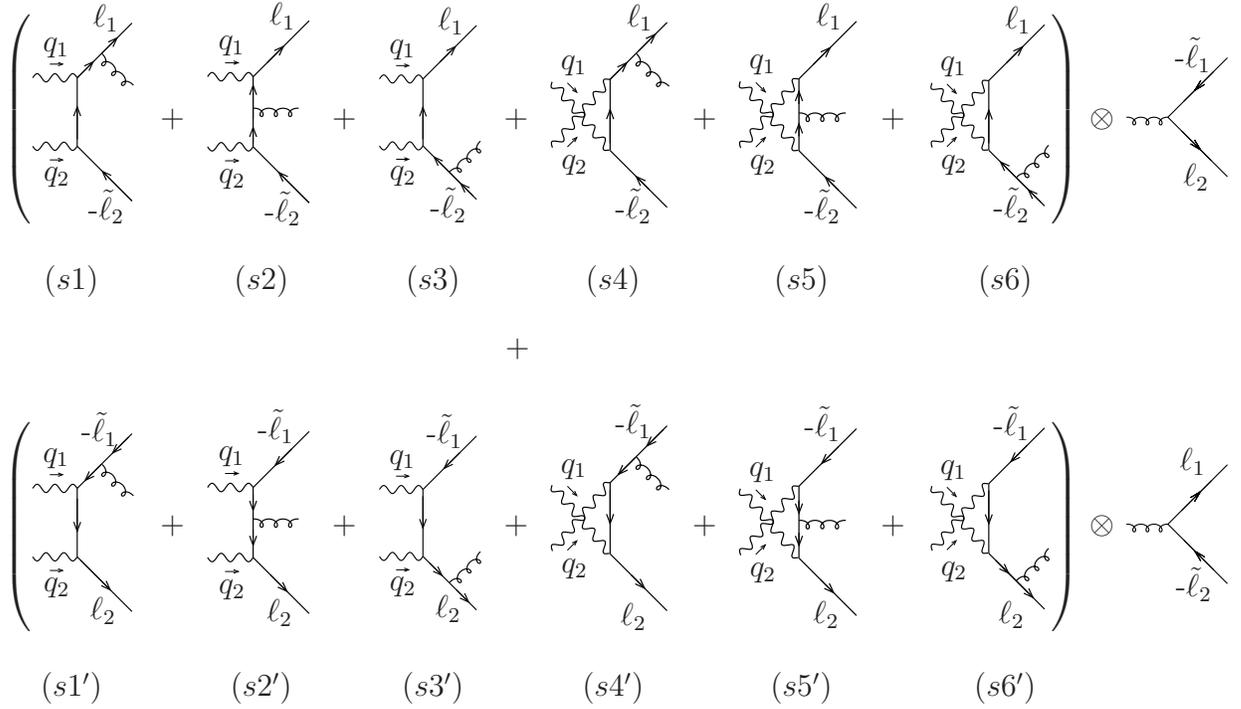


FIG. 1.9 – Diagrammes de Feynman contribuant à  $M_H$ , pour lesquels les photons virtuels se couplent aux mêmes courants fermioniques.

En raison de l'invariance de jauge électromagnétique de l'amplitude totale, apparaissant dans les eqs.(1.5.86), nous pouvons simplifier le calcul des diagrammes de Feynman dénombrés, en ne considérant dans l'expression du vecteur polarisation longitudinale du photon 1 (resp. 2) que le terme proportionnel à  $p_2$  (resp.  $p_1$ ). En conséquence, les seuls diagrammes de contribution non nulle dans cette cinématique vers l'avant et calculés dans la jauge de Feynman seront  $(1b) \otimes (2a)$ ,  $(3a) \otimes (4b)$  pour la première classe, et  $(s2)$ ,  $(s2')$  pour la seconde. Ainsi, seulement quatre diagrammes illustrés dans la Fig.1.10 contribuent pour des polarisations longitudinales des photons dans notre cinématique.

Dans le cas des photons virtuels transversalement polarisés, décrit par le premier terme de l'eq.(1.5.84), nous devons contracter les deux indices de polarisation par le projecteur  $g_{\mu\nu}^T$  dans le plan transverse bidimensionnel à  $p_1$  et  $p_2$ . Les quatre diagrammes de contribution non nulle correspondant au couplage des photons à des lignes de quarks différentes sont  $(1a) \otimes (2b)$ ,  $(1b) \otimes (2a)$ ,  $(3a) \otimes (4b)$  et  $(3b) \otimes (4a)$ . Quand les photons se couplent à la même ligne de quark, la contraction mentionnée ci-dessus tue les diagrammes  $(s2)$ ,  $(s2')$  et  $(s5)$ ,  $(s5')$ , pour lesquels le gluon est émis du quark reliant les deux photons virtuels. Dans cette deuxième classe de diagrammes, 8 diagrammes contribuent ainsi. Nous dessinons dans la Fig.1.11 l'ensemble des douze diagrammes qui contribuent

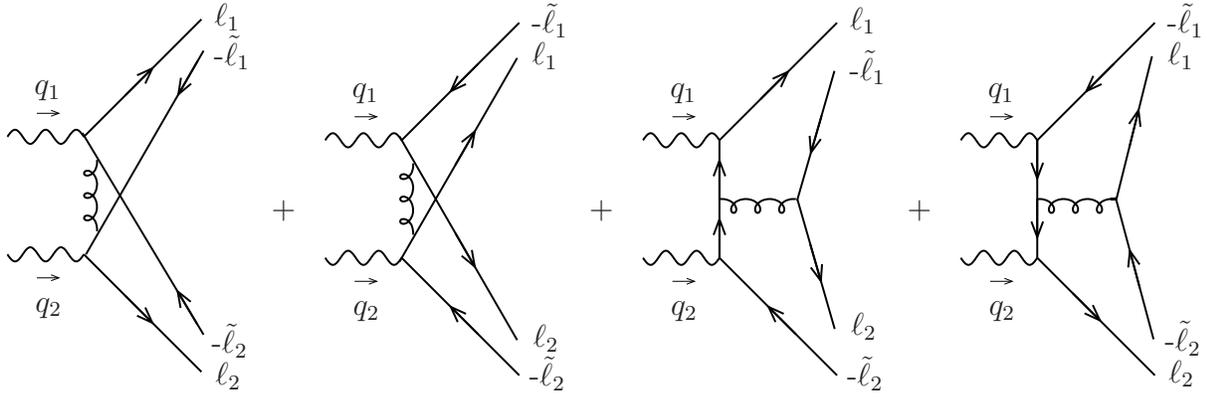


FIG. 1.10 – Diagrammes de Feynman contribuant à  $M_H$  pour des photons virtuels longitudinaux.

dans le cas de photons virtuels transverses.

Nous pouvons noter que dans cette cinématique particulière, les seuls diagrammes qui contribuent simultanément aux cas des polarisations longitudinales et transverses des photons virtuels sont ceux notés (1b)  $\otimes$  (2a), (3a)  $\otimes$  (4b) dans la Fig.1.8, qui apparaissent aussi comme les deux premiers diagrammes des Fig.1.10 et Fig.1.11.

Nous donnons brièvement quelques détails du calcul du diagramme (1a)  $\otimes$  (2b) pour des photons transverses, qui donnera la même contribution que le diagramme (1b)  $\otimes$  (2a) :

$$\begin{aligned}
 T_{(1a)\otimes(2b)}^{\alpha\beta} g_{T\alpha\beta} &= (-i)(-1)f_\rho^2 \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \text{Tr} \left[ \not{k}_1 (-ig\gamma^\rho t^a) \frac{i(\not{q}_1 - \bar{z}_2 \not{k}_2)}{(q_1 - \bar{z}_2 k_2)^2} \right. \\
 &\quad \left. \times (-ie_q \gamma_T^\alpha) \not{k}_2 (-ig\gamma_\rho t^a) \frac{i(\not{q}_2 - \bar{z}_1 \not{k}_1)}{(q_2 - \bar{z}_1 k_1)^2} (-ie_q \gamma_{T\alpha}) \frac{-i}{(z_1 k_1 - q_1 + \bar{z}_2 k_2)^2} \right] \left( \frac{1}{4N_c} \right)^2 \\
 &= -\frac{e^2(Q_u^2 + Q_d^2) g^2 C_F f_\rho^2}{4 N_c s} \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \\
 &\quad \times \left( 1 - \frac{Q_2^2}{s} \right) \left( 1 - \frac{Q_1^2}{s} \right) \left( \frac{1}{(\bar{z}_2 + z_2 \frac{Q_1^2}{s})^2 (\bar{z}_1 + z_1 \frac{Q_2^2}{s})^2} \right) \quad (1.5.91)
 \end{aligned}$$

où l'on a fait apparaître le facteur  $(\frac{1}{4N_c})^2$  en appliquant deux fois l'identité de Fierz, les constantes de couplage  $f_\rho^2$  provenant des deux DA,  $e_q^2 = \frac{e^2(Q_u^2 + Q_d^2)}{2}$  avec  $Q_u = 2/3$  ( $Q_d = -1/3$ ) dénotant la charge électrique du quark de saveur  $u$  ( $d$ ), et enfin  $\text{Tr}[t^a t^a] = N_c C_F$  avec  $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$  et  $N_c = 3$ .

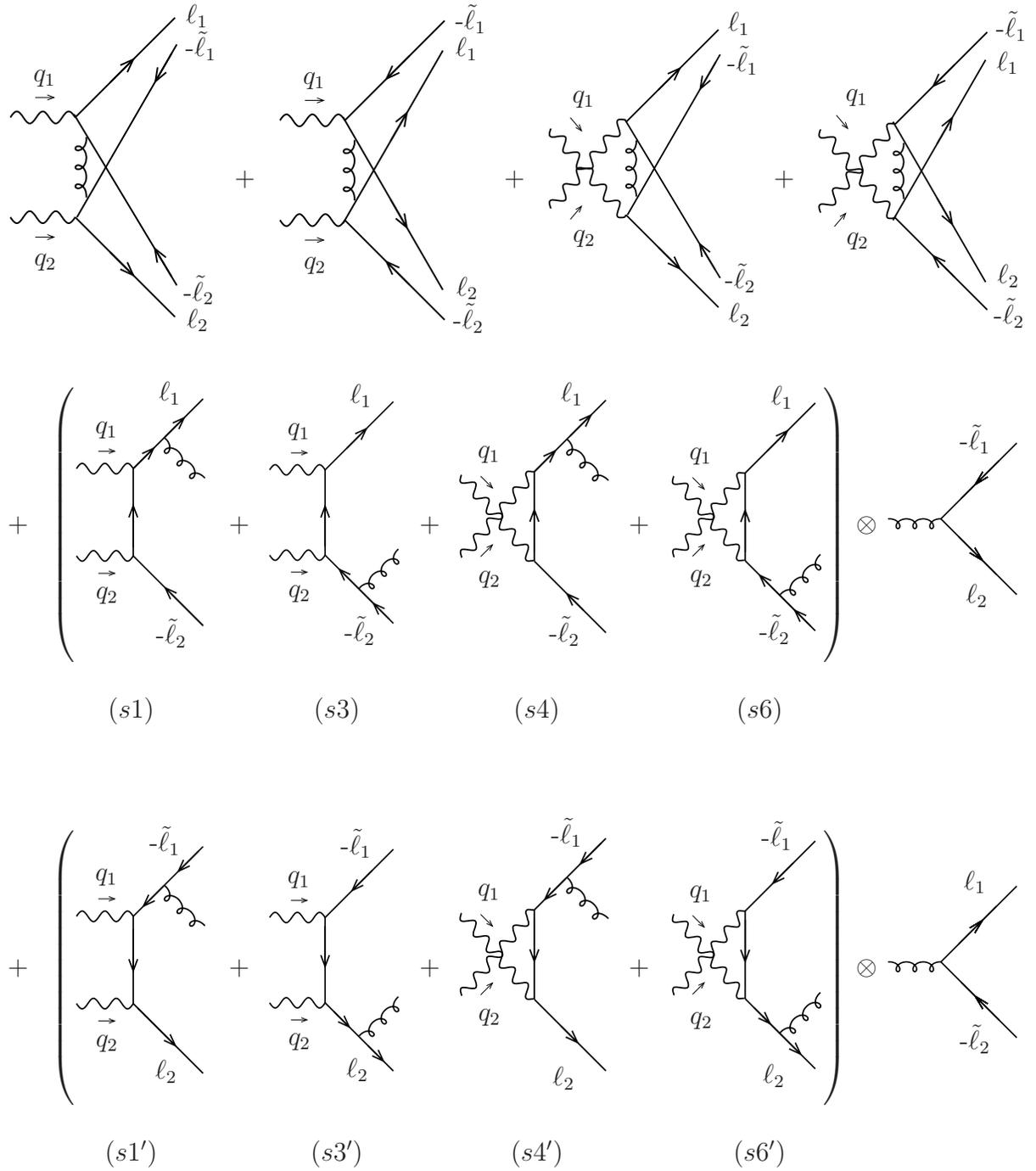


FIG. 1.11 – Diagrammes de Feynman contribuant à  $M_H$  pour des photons virtuels transverses.

Nous procédons de la même manière pour obtenir les composantes scalaires qui apparaissent dans l'expression (1.5.84) de l'amplitude de diffusion en évaluant dans la jauge de Feynman les expressions associées aux diagrammes précédents puis en contractant la structure tensorielle de l'amplitude totale obtenue sur le tenseur  $g_{T\alpha\beta}$  afin d'en déduire la composante transverse et sur  $p_{2\alpha} p_{1\beta}$  pour la composante longitudinale.

$$T^{\alpha\beta} g_{T\alpha\beta} = -\frac{e^2(Q_u^2 + Q_d^2)g^2 C_F f_\rho^2}{4 N_c s} \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \quad (1.5.92)$$

$$\times \left\{ 2 \left(1 - \frac{Q_2^2}{s}\right) \left(1 - \frac{Q_1^2}{s}\right) \left[ \frac{1}{(z_2 + \bar{z}_2 \frac{Q_1^2}{s})^2 (z_1 + \bar{z}_1 \frac{Q_2^2}{s})^2} + \frac{1}{(\bar{z}_2 + z_2 \frac{Q_1^2}{s})^2 (\bar{z}_1 + z_1 \frac{Q_2^2}{s})^2} \right] + \left( \frac{1}{\bar{z}_2 z_1} - \frac{1}{\bar{z}_1 z_2} \right) \left[ \frac{1}{1 - \frac{Q_2^2}{s}} \left( \frac{1}{\bar{z}_2 + z_2 \frac{Q_1^2}{s}} - \frac{1}{z_2 + \bar{z}_2 \frac{Q_1^2}{s}} \right) - (1 \leftrightarrow 2) \right] \right\},$$

$$T^{\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{1\beta} = -\frac{s^2 f_\rho^2 C_F e^2 g^2 (Q_u^2 + Q_d^2)}{8 N_c Q_1^2 Q_2^2} \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \quad (1.5.93)$$

$$\times \left\{ \frac{(1 - \frac{Q_1^2}{s})(1 - \frac{Q_2^2}{s})}{(z_1 + \bar{z}_1 \frac{Q_2^2}{s})(z_2 + \bar{z}_2 \frac{Q_1^2}{s})} + \frac{(1 - \frac{Q_1^2}{s})(1 - \frac{Q_2^2}{s})}{(\bar{z}_1 + z_1 \frac{Q_2^2}{s})(\bar{z}_2 + z_2 \frac{Q_1^2}{s})} + \frac{1}{z_2 \bar{z}_1} + \frac{1}{z_1 \bar{z}_2} \right\}.$$

Nous pourrions simplifier l'expression précédente en notant la symétrie en  $(z_i \leftrightarrow \bar{z}_i)$  mais cette écriture respecte l'ordre des diagrammes présentés dans la Fig.1.10 auxquels nous pouvons ainsi associer les expressions analytiques correspondantes dans l'eq.(1.5.93). Les résultats ci-dessus sont obtenus pour des valeurs arbitraires non nulles des virtualités  $Q_i$  des photons. Un examen plus précis des formules (1.5.92) et (1.5.93) mène à la conclusion que les intégrations sur les fractions d'impulsion longitudinale  $z_i$  (des quarks entrant dans les mésons) sont convergentes du fait des valeurs non nulles des virtualités  $Q_i$ .

Enfin nous remarquons que la composante transverse de l'amplitude se comporte en  $1/W^2$  tandis que la partie longitudinale se comporte comme  $1/(Q_1 Q_2)$ . Ceci montre que l'ordre de grandeur relatif des deux composantes transverse et longitudinale de l'amplitude est différent suivant la région cinématique considérée et nous suggère d'étudier les propriétés de factorisation de l'amplitude dans deux régimes cinématiques différents.

## 1.6 $\gamma_T^* \gamma_T^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ dans la limite de Bjorken généralisée

Nous considérons notre processus dans la région cinématique où l'énergie  $W$  dans le centre de masse de la collision est bien plus petite que la virtualité  $Q_1$  de photon la plus élevée mais reste perturbative ( $W^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ )

$$\frac{W^2}{Q_1^2} = \frac{s}{Q_1^2} \left(1 - \frac{Q_1^2}{s}\right) \left(1 - \frac{Q_2^2}{s}\right) \approx 1 - \frac{Q_1^2}{s} \ll 1, \quad (1.6.94)$$

ce qui conduit à des conditions similaires à celles des refs.[20, 37] dédiées à l'étude du processus  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi\pi$  près du seuil. Dans ces références, il est démontré qu'avec des photons initiaux transverses, l'amplitude de diffusion se factorise au twist dominant comme une convolution entre une fonction coefficient calculable en théorie de perturbation et une amplitude de distribution généralisée qui contient l'information sur la partie non perturbative du processus. Nous obtiendrons une semblable factorisation de l'expression (1.5.92) avec une GDA également dans le cas de notre processus (1.3.75), comme nous l'illustrons dans la Fig.1.12, si  $Q_1$  et  $Q_2$  ne sont pas paramétriquement proches (nous traiterons ce cas particulier à la fin de cette section), c'est-à-dire

$$1 - \frac{Q_1^2}{s} \ll 1 - \frac{Q_2^2}{s}. \quad (1.6.95)$$

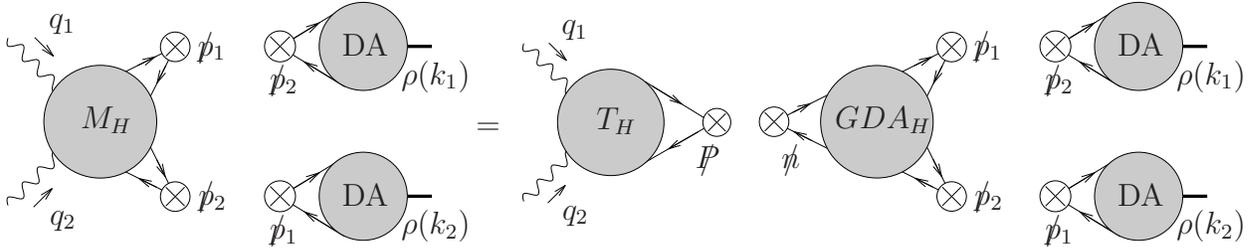


FIG. 1.12 – Factorisation de l'amplitude en termes d'une GDA, exprimée comme une convolution d'une partie dure  $GDA_H$  avec les DA des mésons.

En effet, dans les limites des eqs.(1.6.94) et (1.6.95), la contribution des quatre diagrammes en oreilles de chat (cats-ears diagrams) qui figurent dans la première ligne de la Fig.1.11, et dont l'expression analytique correspondante apparaît dans la deuxième ligne de l'eq.(1.5.92) de l'amplitude transverse, est négligeable dans cette limite cinématique et le terme dominant est donc donné par la dernière ligne de l'eq.(1.5.92), c'est à dire

$$T^{\alpha\beta} g_{T\alpha\beta} \approx \frac{e^2(Q_u^2 + Q_d^2) g^2 C_F f_\rho^2}{4 N_c W^2} \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \quad (1.6.96)$$

$$\left( \frac{1}{\bar{z}_2 z_1} - \frac{1}{\bar{z}_1 z_2} \right) \left( \frac{1}{\bar{z}_1 + z_1 \frac{Q_2^2}{s}} - \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1 \frac{Q_2^2}{s}} \right).$$

La virtualité  $Q_2$  joue le rôle de régulateur des singularités qui apparaissent sur les frontières du domaine de variation des variables  $z_i$  dans l'expression (1.6.96) (nous pouvons comparer cette expression avec celle obtenue dans la Ref.[37]). Avant d'identifier les termes qui apparaissent dans l'équation factorisée (1.6.96) par un calcul différent qui supposera une forme factorisée, nous discutons préalablement des conditions qui rendent possibles cette factorisation. Dans la Fig.1.11, les diagrammes qui contribuent dans la région de scaling (1.6.94) avec (1.6.95) sont  $(s3)$ ,  $(s3')$  et  $(s6)$ ,  $(s6')$ . La somme de ces quatre diagrammes peut se factoriser en une partie dure convoluée avec une partie molle (mais encore perturbative). En effet, la virtualité typique du quark dur reliant les deux photons virtuels est de l'ordre de  $Q_1^2$  pour les diagrammes  $(s3)$ ,  $(s3')$  et  $s$  pour  $(s6)$ ,  $(s6')$ , tandis que la virtualité du quark reliant le gluon émis au photon virtuel est de l'ordre de  $W^2$ , qui est négligeable devant  $Q_1^2$  et  $s$  dans la région cinématique considérée. Les conditions semblent ainsi réunies pour réécrire l'amplitude du processus étudié dans ce régime cinématique comme une convolution entre un sous-processus dur à courte-distance, qui fait apparaître l'échange d'un quark dur de virtualité  $Q_1^2$  et donc s'opérant sur une échelle de temps typique très courte de l'ordre de  $1/Q_1$  et un processus comparativement mou caractérisé par des virtualités typiques bien plus faibles donc s'étalant sur de plus larges distances et dont l'information sera encodée dans un objet universel, la GDA de twist dominant pour une paire de mésons  $\rho_L^0$ .

Nous partons de sa définition générale en introduisant le vecteur

$$P = k_1 + k_2 \approx p_1, \quad (1.6.97)$$

tandis que les champs fermioniques apparaissant dans le corrélateur non-local de twist 2 (dont les éléments de matrice définissent la GDA considérée) sont définis le long de la direction du cône de lumière portée par le vecteur

$$n^\mu = \frac{p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2}. \quad (1.6.98)$$

(il s'agit simplement d'une redéfinition du vecteur de Sudakov  $p_2$  qui fait apparaître le vecteur du cône de lumière  $n^\mu$  plus usité dans le formalisme standard des GPD et GDA). Dans notre cinématique, la variable usuelle

$$\zeta = \frac{k_1 \cdot n}{P \cdot n} \quad (1.6.99)$$

qui décrit le partage sur le cône de lumière de l'impulsion totale entre les deux mésons dans l'état final devient  $\zeta \approx 1$ .

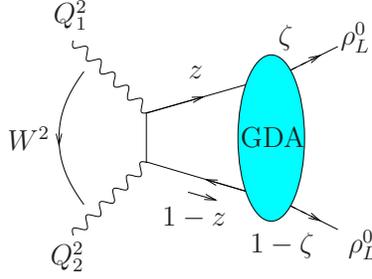


FIG. 1.13 – Variables cinématiques de la GDA.

Ainsi la GDA  $\Phi_q(z, \zeta, W^2)$  pour la paire de mésons  $\rho_L^0$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \langle \rho_L^0(k_1) \rho_L^0(k_2) | \bar{q}(-\alpha n/2) \not{n} e^{-ig \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} dy n_\nu A^\nu(y)} q(\alpha n/2) | 0 \rangle \\ &= \int_0^1 dz e^{-i(2z-1)\alpha(nP)/2} \Phi^{\rho_L\rho_L}(z, \zeta, W^2), \quad q = u, d. \end{aligned} \quad (1.6.100)$$

où nous avons formellement écrit la ligne de Wilson gluonique (qui fera implicitement apparaître dans son développement à tous les ordres de perturbation un produit ordonné des champs de jauge  $A^\nu(y)$ ) qui assure l'invariance de jauge de QCD du corrélateur de champs fermioniques.

Nous nous proposons de calculer la GDA  $\Phi_q(z, \zeta, W^2)$  à l'ordre de Born en théorie de perturbation à partir de sa précédente définition.

Montrons tout d'abord que la ligne de Wilson s'annule dans notre cinématique. Nous développons la ligne de Wilson et l'opérateur de matrice S contenant le lagrangien d'interaction (ie entre le champ de jauge et le courant fermionique) au premier ordre dans le couplage  $g$ , ce qui donnera bien une amplitude à l'ordre  $g^2$ , ie à un gluon échangé. Nous obtenons (à un facteur multiplicatif près)

$$n_\mu g^2 \int d^4v \langle \rho_L^0(k_1) \rho_L^0(k_2) | T[\bar{q}(-\alpha n/2) \gamma^\mu \left[ \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} dy n_\nu A^\nu(y) \right] q(\alpha n/2) \bar{q}(v) \not{A}(v) q(v)] | 0 \rangle. \quad (1.6.101)$$

Après application de l'identité de Fierz afin de refermer les indices fermioniques et une fois ordonnés les opérateurs fermioniques dans deux corrélateurs non-locaux afin de faire apparaître les amplitudes de distribution DA des deux mésons  $\rho$  finals, nous obtenons

$$n_\mu \langle \rho_L^0(k_1) | \bar{q}(-\alpha n/2) \gamma^\delta q(v) | 0 \rangle \langle \rho_L^0(k_2) | \bar{q}(v) \gamma^\sigma q(\alpha n/2) | 0 \rangle Tr[\gamma^\delta \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\beta] n_\beta + (k_1 \leftrightarrow k_2), \quad (1.6.102)$$

où nous avons omis le propagateur du gluon provenant de la contraction des deux champs de jauge. La ligne de Wilson originale résulte à cet ordre en la présence du vecteur  $n_\beta$

dans l'expression ci-dessus. La seule contribution non nulle au twist dominant prend la forme

$$\langle \rho_L^0(k_1) | \bar{q}(-\alpha n/2) \not{n} q(v) | 0 \rangle \langle \rho_L^0(k_2) | \bar{q}(v) \not{n} q(\alpha n/2) | 0 \rangle \text{Tr}[\not{p}_1 \not{n} \not{p}_1 \not{n}] + (k_1 \leftrightarrow k_2), \quad (1.6.103)$$

qui est illustrée diagrammatiquement dans la Fig.1.14.

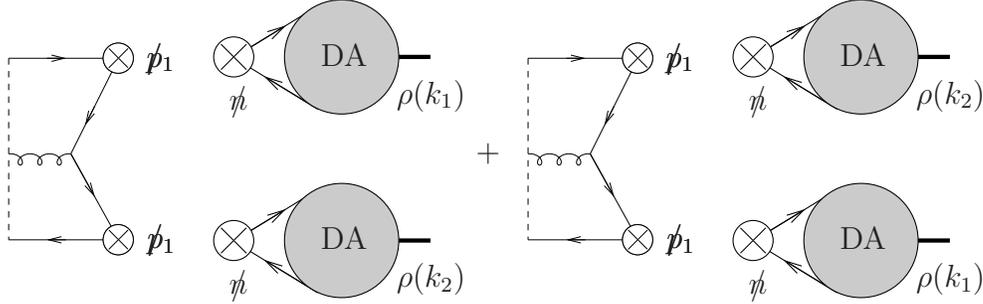


FIG. 1.14 – Ligne de Wilson non abélienne contribuant à la GDA, exprimée comme une convolution d'une partie dure avec les DA des mésons.

Cette quantité est nulle puisque dans notre cinématique un des deux éléments de matrice qui définissent les DA des mésons  $\rho$  et apparaissent dans l'eq.(1.6.103) s'annule. En effet, l'élément de matrice  $\langle \rho_L^0(k_2) | \bar{q}(v) \gamma^\mu q(\alpha n/2) | 0 \rangle$  est proportionnel au quadrivecteur  $k_2^\mu$  lui même proportionnel à  $n^\mu$ . Le raisonnement est identique pour la contribution ( $k_1 \leftrightarrow k_2$ ). Notons que cette annulation de la ligne de Wilson gluonique n'est vraie dans notre cas que pour des raisons cinématiques particulières, conséquence directe de notre restriction au cas vers l'avant (sans transfert de quadri-impulsion) où les mésons vecteurs produits dans l'état final se propagent dans les deux directions opposées du cône de lumière. Enfin, nous avons eu un indice de cette annulation lorsque nous avons précédemment observé la disparition des diagrammes ( $s_2$ ), ( $s_2'$ ), ( $s_5$ ), et ( $s_5'$ ) par le calcul direct des diagrammes impliqués.

Les contributions au calcul du corrélateur apparaissant dans la définition de la GDA en (1.6.100) et de l'opérateur de matrice S contenant le lagrangien d'interaction développé à l'ordre  $g^2$  sont illustrées dans la Fig.1.15. Ce qui conduit au final à l'expression suivante pour la GDA

$$\Phi^{\rho_L \rho_L}(z, \zeta \approx 1, W^2) = -\frac{f_\rho^2 g^2 C_F}{2 N_c W^2} \int_0^1 dz_2 \phi(z) \phi(z_2) \left[ \frac{1}{z \bar{z}_2} - \frac{1}{\bar{z} z_2} \right]. \quad (1.6.104)$$

La partie dure  $T_H$  de l'amplitude est représentée par les diagrammes de la Fig.1.16. Le propagateur du quark reliant les deux photons correspond bien au quark dur (de

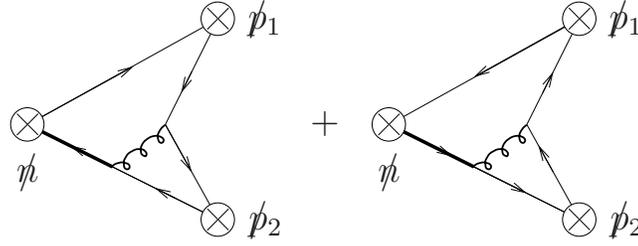


FIG. 1.15 – Contributions non nulles de la partie dure de la GDA à l'ordre de Born. Les lignes en caractère gras correspondent aux propagateurs des quark et gluon.

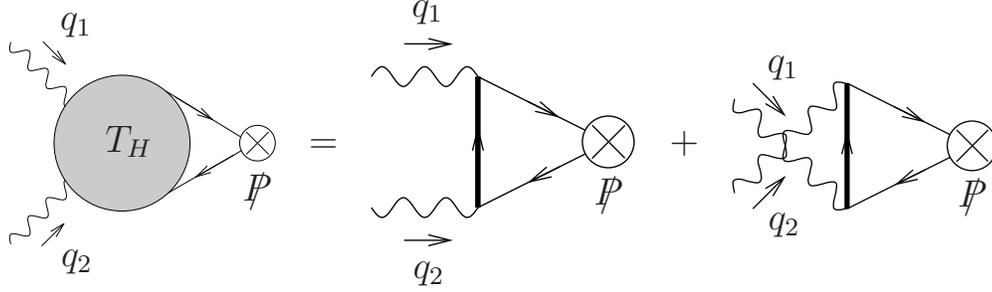


FIG. 1.16 – Développement du terme dur  $T_H$  à l'ordre  $g^2$ . Les lignes en caractère gras correspondent au propagateur du quark frappé par la paire de photons.

virtualité de l'ordre de  $s$  ) dont nous avons précédemment discuté.

Dans le cas d'un quark de saveur  $q$ , nous obtenons

$$T_H(z) = -4e^2 N_c Q_q^2 \left( \frac{1}{\bar{z} + z \frac{Q_2^2}{s}} - \frac{1}{z + \bar{z} \frac{Q_2^2}{s}} \right) \quad (1.6.105)$$

En convoluant sur la variable  $z$  la GDA donnée par l' Eq. (1.6.104) avec le terme dur (1.6.105) , nous retrouvons exactement l'expression de l'amplitude transverse  $T^{\alpha\beta} g_{T\alpha\beta}$  dérivée précédemment en (1.6.96) dans la limite cinématique considérée, ce qui nous permet de l'écrire sous la forme

$$T^{\alpha\beta} g_{T\alpha\beta} = \frac{e^2}{2} (Q_u^2 + Q_d^2) \int_0^1 dz \left( \frac{1}{\bar{z} + z \frac{Q_2^2}{s}} - \frac{1}{z + \bar{z} \frac{Q_2^2}{s}} \right) \Phi^{\rho L \rho L}(z, \zeta \approx 1, W^2) . \quad (1.6.106)$$

Notons que cette équation (1.6.106) correspond au cas particulier  $\zeta \rightarrow 1$  de l'équation originale dérivée par D. Müller et al [20].

Enfin, bien qu'en général les GDAs soient des fonctions complexes, dans notre étude considérée dans l'approximation de Born, la partie dure (1.6.105) ainsi que la GDA

(1.6.104) sont des quantités réelles. Ceci est dû à l'utilisation de DA réelles pour décrire les mésons finals ainsi que de l'absence de coupure dans le canal  $s$  des diagrammes durs à l'ordre de Born. La prise en compte des corrections radiatives pourra avoir comme conséquence de faire apparaître une partie imaginaire dans l'amplitude de diffusion. Des propriétés semblables, notamment l'absence de partie imaginaire de la GDA perturbative sont discutées également dans la Ref.[35], dans une cinématique différente.

Nous allons maintenant tenter de décrire de manière unifiée les deux cas correspondants aux situations opposées  $Q_1^2 \gg W^2$  et  $Q_2^2 \gg W^2$ . Ce travail assez artificiel (puisque le processus est symétrique dans l'échange des indices 1 et 2 nous pouvons déduire un cas de l'autre) nous conduira pourtant à une expression de l'amplitude non dénuée d'intérêt.

Nous utiliserons dans la suite la décomposition suivante sur la nouvelle base  $(P_A, P_B)$  de vecteurs sur le cône de lumière, sur laquelle les impulsions des mésons vecteur peuvent être développées selon :

$$k_1 = 2x\bar{\zeta}P_A + \zeta P_B + k_T \quad (1.6.107)$$

$$k_2 = 2x\zeta P_A + \bar{\zeta}P_B - k_T \quad (1.6.108)$$

ainsi que celles des photons selon :

$$q_1 = (-\alpha + x)P_A + \beta P_B \quad (1.6.109)$$

$$q_2 = (\alpha + x)P_A + \bar{\beta}P_B \quad (1.6.110)$$

où nous avons introduit le paramètre  $x \ll 1$  ; en utilisant les relations (1.4.78) et (1.4.79) nous obtenons

$$\alpha + x = \frac{2x\zeta}{1 - \frac{Q_1^2}{s}} - \frac{Q_2^2}{s} \frac{2x\bar{\zeta}}{1 - \frac{Q_2^2}{s}} \quad (1.6.111)$$

$$\beta = \frac{\zeta}{1 - \frac{Q_2^2}{s}} - \frac{Q_1^2}{s} \frac{\bar{\zeta}}{1 - \frac{Q_1^2}{s}} \quad (1.6.112)$$

Deux conditions physiques émergent sur la coexistence de  $\alpha$  et  $\beta$  afin d'obtenir les relations  $q_1^2 = -Q_1^2$  et  $q_2^2 = -Q_2^2$  :  $\alpha > 0$  et  $\beta < 1$  d'une part, et  $\alpha < 0$  et  $\beta > -1$  d'autre part. Dans cette base les matrices  $\gamma$  s'écrivent

$$\gamma^\mu = \gamma_B P_B^\mu + \gamma_A P_A^\mu + \gamma_T \quad (1.6.113)$$

et plus généralement n'importe quel quadrivecteur  $x^\mu$  se décomposera selon

$$x^\mu = x_B P_B^\mu + x_A P_A^\mu + x_T \quad (1.6.114)$$

Nous faisons tout d'abord le calcul de l'amplitude dans l'hypothèse de factorisation que nous avons justifiée dans le paragraphe précédent. Nous allons donc calculer le terme

dur ainsi que la GDA et les convoluer sur la variable cinématique adéquate. Ainsi nous commençons par calculer de manière univoque l'élément de matrice du corrélateur non local définissant la GDA (le long de la direction du cône de lumière engendrée par le vecteur  $P_B$ ) pour des valeurs (pour l'instant) quelconques du paramètre  $\zeta$  qui contrôle le partage entre les deux hadrons de la fraction d'impulsion totale sur le vecteur du cône de lumière  $P_B$ . Comme précédemment, nous calculons cet élément de matrice en considérant le terme d'interaction développé à l'ordre de Born qui produit l'échange de gluon.

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\rho_L\rho_L}(z, \zeta, W^2) &= \frac{P_{B\mu}}{P_A \cdot P_B} \frac{(ig)^2}{2!} \int \frac{dx^\mu}{2\pi} d^4u d^4v e^{i(2z-1)\frac{P_B \cdot x}{2}} \\
 &< \rho_L^0(k_1)\rho_L^0(k_2) | T \left[ \bar{q}(-x/2)\gamma_B q(x/2)\bar{q}(u)A_a^\alpha(u)t^a\gamma_\alpha q(u)\bar{q}(v)A_b^\beta(v)t^b\gamma_\beta q(v) \right] | 0 > \\
 &= \frac{c_{GDA}}{XY} \int dz_1 dz_2 \phi(z_1)\phi(z_2) \int \frac{dx_A}{2\pi} e^{i(2z-1)\frac{x_A}{2}} \left[ \frac{-\zeta}{\bar{z}_1 z_2} e^{i\frac{x_A}{2}[\zeta(\bar{z}_1-z_1)+\bar{\zeta}]} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\zeta}{z_1 \bar{z}_2} e^{i\frac{x_A}{2}[\zeta(\bar{z}_1-z_1)-\bar{\zeta}]} + \frac{-\bar{\zeta}}{z_1 \bar{z}_2} e^{i\frac{x_A}{2}[\bar{\zeta}(\bar{z}_2-z_2)+\zeta]} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}_1 z_2} e^{i\frac{x_A}{2}[\bar{\zeta}(\bar{z}_2-z_2)-\zeta]} \right] \\
 &= \frac{c_{GDA}}{XY} \left[ \int dz_2 \left( \phi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{\zeta}{\zeta-z} \frac{\phi(z_2)}{z_2} \theta(\zeta-z) + \phi\left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right) \frac{-\zeta}{\zeta-\bar{z}} \frac{\phi(\bar{z}_2)}{\bar{z}_2} \theta(\zeta-\bar{z}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \int dz_1 \left( \phi\left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right) \frac{-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} \frac{\phi(\bar{z}_1)}{\bar{z}_1} \theta(z-\zeta) + \phi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-z} \frac{\phi(z_1)}{z_1} \theta(\bar{z}-\zeta) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.6.115}$$

avec les facteurs multiplicatifs qui regroupent toutes les constantes du problème

$$c_{GDA} = \frac{f_\rho^2 g^2 C_F}{8 s N_c^2}, \tag{1.6.116}$$

$$X = 1 - \frac{Q_1^2}{s}, \quad Y = 1 - \frac{Q_2^2}{s} \tag{1.6.117}$$

et ainsi

$$W^2 = sXY. \tag{1.6.118}$$

L'intégration sur  $x_A$  donne des fonctions delta qui mènent à différents changements de variables qui apparaissent dans l'argument des amplitudes de distribution  $\phi$  des mésons. Les contraintes provenant du domaine de définition de ces dernières donnent les fonctions thêta. Nous avons là encore omis la ligne de Wilson entre les champs de quark définis aux points  $-\frac{x}{2}$  et  $\frac{x}{2}$  puisque son calcul donne zéro dans notre cinématique vers l'avant  $t = t_{min}$ .

Nous obtenons l'expression du terme dur par un calcul perturbatif identique au précédent que nous avons représenté par les diagrammes de la Fig(1.16) et le résultat

analytique (1.6.105).

Convoluant sur la variable  $z$  cette partie dure avec l'expression (1.6.116) obtenue pour la GDA, nous obtenons l'expression suivante pour l'amplitude transverse

$$M(\zeta, W^2) = \int_0^1 dz c_H \left[ \frac{1}{z-\beta} + \frac{1}{z-\bar{\beta}} \right] \Phi^{\rho_L \rho_L}(z, \zeta, W^2) \quad (1.6.119)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dz \frac{c_H c_{GDA}}{XY} \left[ \frac{1}{z-\beta} + \frac{1}{z-\bar{\beta}} \right] \left[ \int dz_2 \phi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{\zeta}{\zeta-z} \frac{\phi(z_2)}{z_2} \theta(\zeta-z) + (z \leftrightarrow \bar{z}) \right. \\ &\left. + \int dz_1 \phi\left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right) \frac{-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} \frac{\phi(\bar{z}_1)}{\bar{z}_1} \theta(z-\zeta) + (z \leftrightarrow \bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (1.6.120)$$

avec

$$c_H = 4ie_q^2 N_c. \quad (1.6.121)$$

Nous souhaitons maintenant comparer l'expression précédente (1.6.120) de l'amplitude obtenue en supposant la factorisation, à l'expression (1.5.92) qui découle du calcul direct et réécrite dans cette limite cinématique. Pour cela, nous négligeons toujours la contribution des diagrammes en oreilles de chat (dessinés dans la première ligne de la Fig.1.11) apparaissant dans la deuxième ligne de l'amplitude transverse (1.5.92) car elle sera négligeable dans les 2 cas possibles (étant proportionnelle à  $XY$ )  $Q_1^2 \gg W^2$  ou  $Q_2^2 \gg W^2$  que l'on peut écrire  $X \ll 1$  ou  $Y \ll 1$  d'après (1.6.94). Nous devons conserver par contre l'intégralité de la troisième ligne qui contribuera pour moitié dans le cas  $X \ll 1$  et pour son autre moitié dans le cas  $Y \ll 1$ . Afin de pouvoir effectuer cette comparaison nous devons réaliser des changements de variables d'intégration (les fractions d'impulsion  $z_i$  qui apparaissent comme argument des deux amplitudes de distribution (DA) des mésons) différents pour chacun des quatre termes de la troisième ligne de l'expression (1.5.92).

Quand le gluon se couple à la ligne du quark entrant dans le deuxième méson (d'impulsion  $k_2$ ), correspondant au diagramme de topologie B2 dans les notations de l'article[35], nous effectuons le changement de variable suivant :

$$z_1 = \frac{z}{\zeta} \quad \text{dans} \quad \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \frac{1}{\bar{z}_1 z_2} \left[ \frac{1}{1 - \frac{Q_1^2}{s}} \left( \frac{1}{\bar{z}_1 + z_1 \frac{Q_2^2}{s}} - \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1 \frac{Q_2^2}{s}} \right) \right] \quad (1.6.122)$$

et de la même manière pour un signe opposé du courant de quark

$$\bar{z}_1 = \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \quad \text{dans} \quad \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \frac{-1}{\bar{z}_2 z_1} \left[ \frac{1}{1 - \frac{Q_1^2}{s}} \left( \frac{1}{\bar{z}_1 + z_1 \frac{Q_2^2}{s}} - \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1 \frac{Q_2^2}{s}} \right) \right]. \quad (1.6.123)$$

Pour l'autre classe de diagrammes (de type B1 dans les notations de l'article[35]), nous

effectuons le changement de variable suivant :

$$\bar{z}_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \quad \text{dans} \quad \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \frac{-1}{\bar{z}_1 z_2} \left[ \frac{1}{1 - \frac{Q_2^2}{s}} \left( \frac{1}{\bar{z}_2 + z_2 \frac{Q_1^2}{s}} - \frac{1}{z_2 + \bar{z}_2 \frac{Q_1^2}{s}} \right) \right] \quad (1.6.124)$$

et de la même manière pour un signe opposé du courant de quark

$$z_2 = \frac{z}{\zeta} \quad \text{dans} \quad \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \frac{1}{\bar{z}_2 z_1} \left[ \frac{1}{1 - \frac{Q_2^2}{s}} \left( \frac{1}{\bar{z}_2 + z_2 \frac{Q_1^2}{s}} - \frac{1}{z_2 + \bar{z}_2 \frac{Q_1^2}{s}} \right) \right]. \quad (1.6.125)$$

Nous obtenons finalement une nouvelle expression pour l'amplitude obtenue après le calcul direct, donnée par

$$g_{T \alpha \beta} T^{\alpha \beta}(\zeta, W^2) = \quad (1.6.126)$$

$$\int_0^1 dz dz_2 \frac{c_D}{XY} \left[ \frac{1}{z - \frac{\zeta}{Y}} + \frac{1}{z + \frac{\zeta}{Y}(1 - Y)} \right] \phi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{\zeta}{\zeta - z} \frac{\phi(z_2)}{z_2} \theta(\zeta - z) + (z \leftrightarrow \bar{z})$$

$$+ \int_0^1 dz dz_1 \frac{c_D}{XY} \left[ \frac{1}{z - (\frac{\bar{\zeta}}{X} + \zeta)} + \frac{1}{z + (\frac{\bar{\zeta}}{X} - 1)} \right] \phi\left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right) \frac{-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \frac{\phi(\bar{z}_1)}{\bar{z}_1} \theta(z - \zeta) + (z \leftrightarrow \bar{z})$$

avec

$$c_D = i e_q^2 \frac{f_\rho^2 g^2 C_F}{2 s N_c}. \quad (1.6.127)$$

Nous pouvons vérifier que

$$c_D = c_H c_{GDA}. \quad (1.6.128)$$

Mais nous devons interpréter les relations (1.6.120) et (1.6.127) avec prudence. En effet, la cinématique nous apporte une dernière contrainte que nous avons passée sous silence jusqu'à présent : nous considérons le cas particulier sans transfert d'impulsion  $t = t_{min}$ , ce qui signifie que l'impulsion transverse des mésons doit s'annuler :

$$k_\perp^2 = 2x\zeta\bar{\zeta} = 0 \quad (1.6.129)$$

Ceci peut être réalisé dans deux cas  $\zeta \approx 0$  ou  $\zeta \approx 1$ . Ainsi les expressions de l'amplitude transverse obtenue après calcul factorisé (1.6.120) et calcul direct (1.6.127) semblent dépendre d'un paramètre cinématique  $\zeta$  quelconque alors qu'il ne peut prendre en fait que deux valeurs qui sont en fait les bords de son domaine de définition. En effet, quand  $Q_1 > Q_2$ , le comportement de  $s$  implique que  $X \ll 1$  et cela correspond au cas  $\zeta \approx 1$  : le méson de quadri-moment  $k_1$  emporte la quasi-totalité de l'impulsion disponible le long du vecteur du cône de lumière  $P_B$  dans la direction duquel vole la GDA. Les premières lignes des expressions de l'amplitude transverse obtenue après calcul factorisé (1.6.120)

et calcul direct (1.6.127) sont égales tandis que la seconde ligne s'annule et nous obtenons bien d'après (1.6.128)

$$g_{T\alpha\beta} T^{\alpha\beta}(\zeta = 1, W^2) = M(\zeta = 1, W^2). \quad (1.6.130)$$

Ce résultat est bien entendu identique à celui obtenu en (1.6.106). Evidemment dans l'autre cas, quand  $Q_2 > Q_1$ ,  $Y \ll 1$  et nous obtenons

$$g_{T\alpha\beta} T^{\alpha\beta}(\zeta = 0, W^2) = M(\zeta = 0, W^2). \quad (1.6.131)$$

Finalement, les expressions de l'amplitude de diffusion pour des photons virtuels transverses obtenues en (1.6.120) dans l'hypothèse de factorisation avec une GDA (elle même réécrite en un terme dur factorisé avec les deux DA des mésons finals) et en (1.6.127) d'après un calcul direct qui ne repose que sur la factorisation avec les deux DA des mésons finals sont bien égales dans les deux limites  $X \ll 1$  et  $Y \ll 1$  concernées pour observer la factorisation avec une GDA. Celles-ci n'apportent rien de plus que l'expression précédemment établie en (1.6.106) mais elles font apparaître une dépendance en  $\zeta$ , qui, bien que réduite aux cas  $\zeta \approx 1$  ou  $\zeta \approx 0$  s'avère néanmoins intéressante si l'on cherche à l'extrapoler au cas  $\zeta$  quelconque qui ne sera accessible que pour une valeur quelconque du carré du moment transféré  $t$ . Bien que nous nous soyons limités, par simplicité, à la cinématique vers l'avant, nous espérons que des résultats semblables puissent être obtenus dans une cinématique plus générale, pour des valeurs quelconques de l'impulsion transférée. Notons aussi la forte proximité entre ces expressions et celle de la GDA écrite en terme d'une double DA de l'article Ref.[35], ce qui rend notre étude étroitement liée à la limite perturbative de l'amplitude de distribution sur le cône de lumière de deux pions étudiée dans cette référence pour des collisions  $\gamma_T^* \gamma_T$ . Cette dernière partie était aussi motivée par la perspective de démontrer la factorisation dans le cas de virtualités de photons identiques  $Q_1 = Q_2$ , or dans ce cas, nous obtenons un terme fini mais sous-dominant dans l'expression de l'amplitude obtenue par le calcul direct, ce que l'on peut aussi constater dans l'expression factorisée, ainsi ce cas particulier présente une contribution à l'amplitude de twist plus élevé. Nous détaillons ce point dans l'article [36].

## 1.7 $\gamma_L^* \gamma_L^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ pour des virtualités de photons fortement ordonnées

Analysons maintenant le cas des photons longitudinalement polarisés dans une limite cinématique différente,

$$Q_1^2 \gg Q_2^2, \quad (1.7.132)$$

qui se caractérise donc par un ordonnancement fort des virtualités des photons 1 et 2. Nous pouvons ainsi voir le photon 2 de virtualité  $Q_2$  comme un objet mou, en comparaison de la sonde dure constituée par le photon 1 de virtualité  $Q_1$ . Cette limite ressemble à

la limite de Bjorken dans laquelle la factorisation du processus de diffusion profondément inélastique (DIS) d'un photon virtuel dur sur une cible hadronique (proton) s'opère.

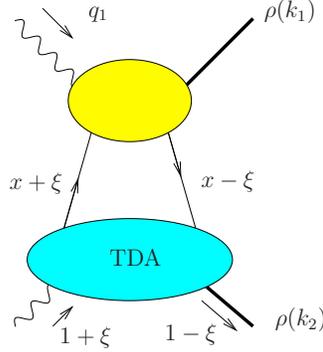


FIG. 1.17 – Variables cinématiques de la TDA.

Dans ce régime, en nous inspirant de [40], nous pouvons donc nous attendre à ce que l'amplitude pour des photons initiaux longitudinalement polarisés se factorise comme une convolution d'une fonction coefficient calculable perturbativement et d'une amplitude de distribution de transition (TDA)  $\gamma \rightarrow \rho$  définies à partir du corrélateur non-local fermionique de twist 2 pris entre les états asymptotiques initial ( $\gamma$ ) et final ( $\rho$ )

$$\int \frac{dz^-}{2\pi} e^{-ixP^+z^-} \langle \rho_L^0(k_2) | \bar{q}(-z^-/2) \gamma^+ q(z^-/2) | \gamma^*(q_2) \rangle . \quad (1.7.133)$$

Les propriétés de factorisation de l'amplitude de diffusion dans ce régime cinématique sont par convention décrites en employant les notations standard des GPDs (cf. la Fig.1.17), que nous allons faire apparaître dans les grandeurs cinématiques mises en jeu pour décrire le processus. Nous réécrivons ainsi les impulsions selon

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{1+\xi} n_1 - 2\xi n_2 , & k_1 &= \frac{1 - \frac{Q_2^2}{s}}{1+\xi} n_1 \\ q_2 &= -\frac{Q_2^2}{(1+\xi)s} n_1 + (1+\xi) n_2 , & k_2 &= (1-\xi) n_2 , \end{aligned} \quad (1.7.134)$$

où  $\xi$  est le paramètre de torsion (skewedness) égal à

$$\xi = \frac{Q_1^2}{(2s - Q_1^2)} \quad (1.7.135)$$

qui décrit la perte d'impulsion longitudinale du photon incident. Nous pouvons utiliser la formule (1.4.81) qui relie  $s$  à l'énergie de la collision  $W$  afin d'écrire  $\xi$  en fonction de grandeurs physique. Nous définissons là encore de nouveaux vecteurs du cône de lumière  $n_i$  qui s'expriment en fonction des anciens vecteurs de Sudakov  $p_i$  selon

$$p_1 = \frac{1}{1 + \xi} n_1, \quad p_2 = (1 + \xi) n_2, \quad (1.7.136)$$

avec

$$p_1 \cdot p_2 = n_1 \cdot n_2 = s/2. \quad (1.7.137)$$

Nous introduisons également l'impulsion moyenne  $P$  de la cible et le transfert  $\Delta$  d'impulsion par

$$P = \frac{1}{2}(q_2 + k_2), \quad \Delta = k_2 - q_2. \quad (1.7.138)$$

Nous nous sommes restreint dans notre étude au cas particulier vers l'avant

$$t = t_{min} = -2\xi \frac{Q_2^2}{1 + \xi}. \quad (1.7.139)$$

Dans la région définie par l'eq.(1.7.132) nous pouvons fixer  $Q_2 = 0$  à l'intérieur de l'expression (1.5.93), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \{ \dots \} \quad (1.7.140) \\ & = \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \left\{ \frac{(1 - \xi)}{\bar{z}_1 [\bar{z}_2 (1 + \xi) + 2\xi z_2]} + \frac{(1 - \xi)}{z_1 [z_2 (1 + \xi) + 2\xi \bar{z}_2]} + \frac{1}{z_2 \bar{z}_1} + \frac{1}{z_1 \bar{z}_2} \right\}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant chercher à écrire l' Eq.(1.7.140) sous une forme qui fera apparaître une factorisation entre deux objets que l'on pourra identifier comme le terme dur et la TDA, ceci étant illustré dans la Fig.1.18.

Pour cela, nous examinons plus étroitement les diagrammes associés à chacun des quatre termes de (1.7.140). Par exemple, le deuxième terme de (1.7.140), correspondant au deuxième diagramme dessiné dans la Fig.1.10, suggère l'introduction de la nouvelle variable cinématique  $x$ ,  $x \in [\xi, 1]$ , définie à travers

$$z_2 = \frac{x - \xi}{1 - \xi} \quad (1.7.141)$$

et s'écrit ainsi

$$\int_0^1 dz_2 \frac{\phi(z_2)(1 - \xi)}{z_1 [z_2 (1 + \xi) + 2\xi \bar{z}_2]} = \int_{\xi}^1 dx \frac{\phi\left(\frac{x - \xi}{1 - \xi}\right)}{z_1 (x + \xi)}. \quad (1.7.142)$$

Nous pouvons donc écrire de manière explicite la contribution de la région d'intégration DGLAP  $x \in [\xi, 1]$  dans l'expression de l'amplitude, ce qui nous permettra ainsi d'identifier aisément le terme correspondant à la TDA. La convolution entre le terme dur et

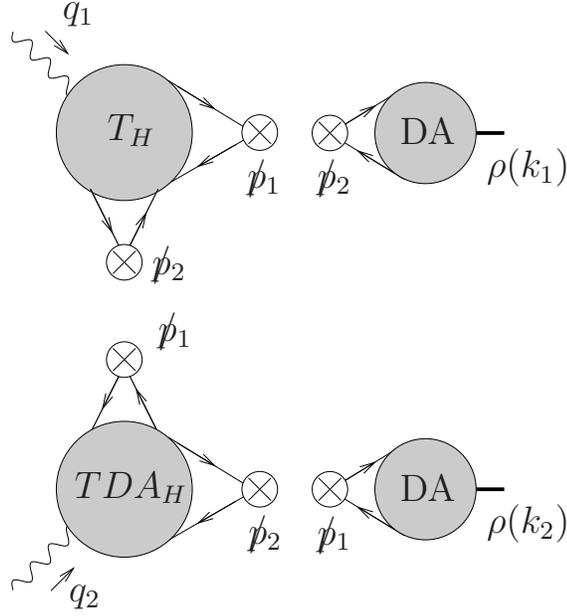


FIG. 1.18 – Factorisation de l’amplitude avec une TDA.

la TDA s’effectuera sur cette variable  $x$  dans l’expression factorisée de l’amplitude. Nous transformons de la même manière les autres termes de l’eq.(1.7.140) afin de représenter l’amplitude sous la forme

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \{ \dots \} \\
 &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dz_1 \phi(z_1) \left( \frac{1}{\bar{z}_1(x-\xi)} + \frac{1}{z_1(x+\xi)} \right) \\
 & \times \left[ \Theta(1 \geq x \geq \xi) \phi\left(\frac{x-\xi}{1-\xi}\right) - \Theta(-\xi \geq x \geq -1) \phi\left(\frac{1+x}{1-\xi}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{1.7.143}$$

avec la fonction  $\Theta(a \geq x \geq b) = \Theta(a-x)\Theta(x-b)$ . Cette expression factorisée suggère l’identification de

$$\int_0^1 dz_1 \phi(z_1) \left( \frac{1}{\bar{z}_1(x-\xi)} + \frac{1}{z_1(x+\xi)} \right) \tag{1.7.144}$$

comme la fonction coefficient  $T_H$  (à un facteur multiplicatif près) caractérisant le sous-

processus dur à courte distance, et de

$$T(x, \xi, t_{min}) \equiv N_c \left[ \Theta(1 \geq x \geq \xi) \phi \left( \frac{x - \xi}{1 - \xi} \right) - \Theta(-\xi \geq x \geq -1) \phi \left( \frac{1 + x}{1 - \xi} \right) \right] \quad (1.7.145)$$

comme la TDA décrivant la transition  $\gamma_L^* \rightarrow \rho_L^0$  se produisant sur de plus larges distances.

Nous allons justifier l'identification précédente en partant des définitions originales des deux objets mis en scène dans la factorisation de l'amplitude. Le terme dur  $T_H(z_1, x)$  apparait dans la Fig.1.18, et son interprétation diagrammatique est illustrée à l'ordre  $g^2$  dans la Fig.1.19. Ce qui signifie que le gluon échangé se trouve dans le terme dur dans ce cas alors que celui-ci se trouvait dans le terme mou dans le cas de la factorisation précédente impliquant une GDA.

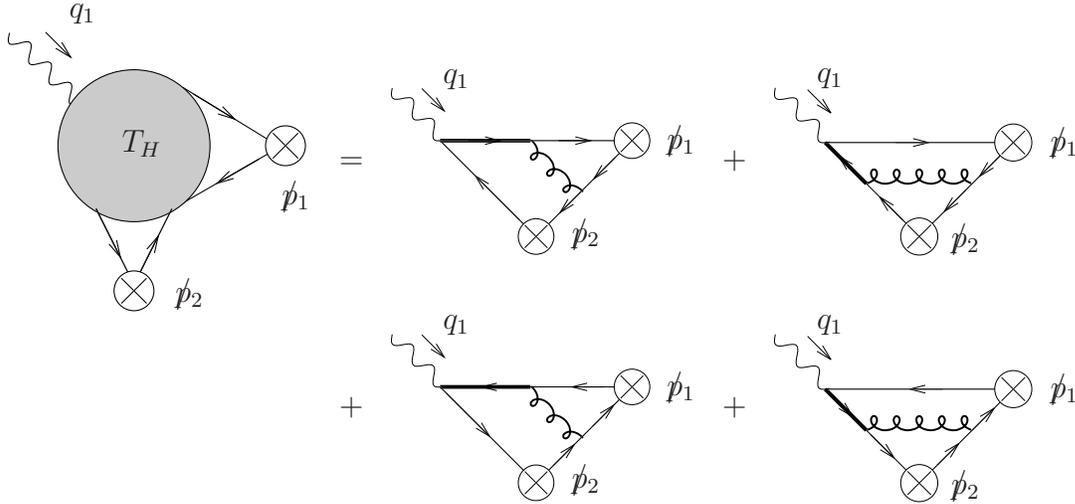


FIG. 1.19 – Le terme dur  $T_H$  à l'ordre  $g^2$ .

Nous devons calculer les contributions de quatre diagrammes et obtenons au total, pour un méson constitué de quarks de saveur  $q$ ,

$$T_H(z_1, x) = -i f_\rho g^2 e Q_q \frac{C_F \phi(z_1)}{2 N_c Q_1^2} \epsilon^\mu(q_1) \left( 2\xi n_{2\mu} + \frac{1}{1 + \xi} n_{1\mu} \right) \times \left[ \frac{1}{z_1(x + \xi - i\epsilon)} + \frac{1}{\bar{z}_1(x - \xi + i\epsilon)} \right]. \quad (1.7.146)$$

Cette expression coincide bien avec le terme dur de l'amplitude d'électroproduction du méson  $\rho$ . Notons que la structure tensorielle obtenue est bien en accord avec celle de la

partie longitudinale de l'eq.(1.5.84) :

$$2\xi n_2^\mu + \frac{1}{1+\xi} n_1^\mu = p_1^\mu + \frac{Q_1^2}{s} p_2^\mu \quad (1.7.147)$$

Traisons maintenant le cas du terme mou, caractérisé par la virtualité typique  $Q_2^2$  du photon 2 très inférieure à celle du photon 1. Nous partons de la définition de la TDA  $T(x, \xi, t_{min})$  qui décrit la transition  $\gamma_L^*(q_2) \rightarrow \rho_L^q(k_2)$  à partir de l'élément de matrice pris entre les états asymptotiques entrant et sortant (in et out) du corrélateur non-local fermionique de twist dominant. Un calcul perturbatif à l'ordre le plus bas dans le couplage électromagnétique  $e$  mène à l'expression suivante, pour une saveur  $q$  du quark constituant le méson :

$$\begin{aligned} & \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix(P.z)} \langle \rho_L^q(k_2) | \bar{q}(-z/2) \hat{n} e^{-ieQ_q \int_{z/2}^{-z/2} dy_\mu A^\mu(y)} q(z/2) | \gamma^*(q_2) \rangle \\ &= \frac{e Q_q f_\rho}{P^+} \frac{2}{Q_2^2} \epsilon_\nu(q_2) \left( (1+\xi)n_2^\nu + \frac{Q_2^2}{s(1+\xi)} n_1^\nu \right) T(x, \xi, t_{min}) , \end{aligned} \quad (1.7.148)$$

où  $T(x, \xi, t_{min})$  s'écrit exactement comme dans l'expression identifiée (1.7.145) d'après le calcul direct de l'amplitude. Le vecteur  $P$  s'exprime simplement dans notre cinématique

$$P = \frac{q_2 + k_2}{2} \approx n_2 \quad (1.7.149)$$

et le vecteur du cône de lumière  $n$  le long duquel sont définis les champs fermioniques qui apparaissent dans le corrélateur non local de la TDA est donné par

$$n = \frac{n_1}{n_1 \cdot n_2} . \quad (1.7.150)$$

Les diagrammes correspondant à ce calcul perturbatif sont représentés dans la Fig.1.20.

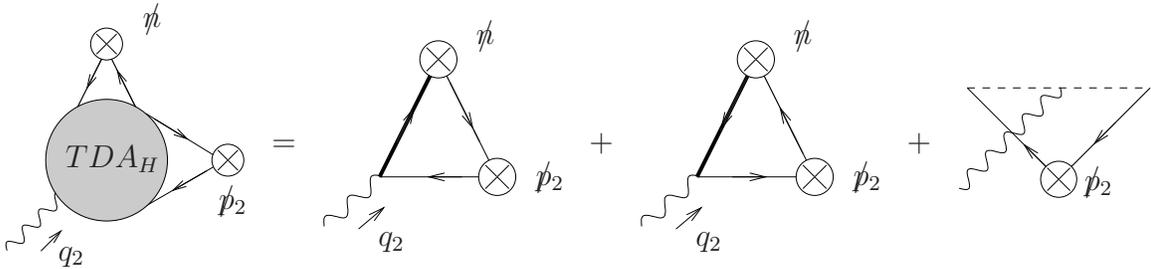


FIG. 1.20 – La partie dure de la TDA à l'ordre  $e Q_q$ .

Comme nous l'avons vu, aucun gluon ne participe au sous-processus mou  $\gamma_L^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_2)$  dont la description est assurée par la TDA, qui se ramène ainsi à un pur processus

électromagnétique. Nous avons explicitement fait apparaître la ligne de Wilson dans l'expression (1.7.148) de la TDA, qui assure donc (à tous les ordres de perturbation d'après sa forme exponentiée) l'invariance de jauge abélienne du corrélateur non-local le long de la ligne du cône de lumière engendrée par le vecteur  $n$ . De même nous avons omis pour la simplicité de la notation la ligne de Wilson non-abélienne qui ne joue aucun rôle dans ce cas.

Notons enfin que le facteur

$$(1 + \xi)n_2^\nu + \frac{Q_2^2}{s(1 + \xi)}n_1^\nu = p_2^\nu + \frac{Q_2^2}{s}p_1^\nu \quad (1.7.151)$$

fait apparaître le deuxième terme de la structure tensorielle attendue pour l'amplitude longitudinale d'après l'Eq.(1.5.84).

En particulier, la contribution du membre de droite de (1.7.148) proportionnel au vecteur  $n_1^\nu$  (ou encore  $p_1^\nu$ ) correspond à la contribution du développement à l'ordre perturbatif considéré de la ligne de Wilson électromagnétique, illustrée par le dernier diagramme de la Fig.1.20.

En tenant compte de tous les facteurs multiplicatifs et en reconstituant la structure de saveur des mésons  $\rho^0$ , nous obtenons la forme factorisée de l'amplitude  $T^{\alpha\beta}p_{2\alpha}p_{1\beta}$  impliquant une TDA pour des photons de virtualités fortement ordonnées

$$T^{\alpha\beta}p_{2\alpha}p_{1\beta} = -if_\rho^2 e^2 (Q_u^2 + Q_d^2) g^2 \frac{C_F}{8N_c} \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dz_1 \left[ \frac{1}{\bar{z}_1(x - \xi)} + \frac{1}{z_1(x + \xi)} \right] T(x, \xi, t_{min}). \quad (1.7.152)$$

Notons que dans cette analyse perturbative, nous n'avons accès qu'au domaine cinématique DGLAP donné par  $1 \geq |x| \geq \xi$ , qui correspond à l'émission suivie d'une réabsorbition d'un quark (resp. d'un antiquark) dans la TDA, ce que l'on observe au premier ordre de perturbation dans le premier diagramme (resp. dans le second) de la Fig.1.20. C'est une conséquence du domaine de définition de l'amplitude de distribution utilisée pour décrire l'hadronisation en mésons  $\rho$  dans l'état final ainsi que de l'approximation de Born dans laquelle se situe cette étude. Les calculs de notre processus au-delà de l'approximation de Born mèneraient à une factorisation entre une partie dure modifiée par les corrections radiatives et une TDA qui absorberait - en employant les équations d'évolution DGLAP-ERBL - les divergences infrarouges et colinéaires provoquées par ces corrections radiatives. L'évolution régie par ces équations d'évolution relie en fait la région DGLAP à la fois à la région ERBL et à la région DGLAP, comme cela est discuté par exemple dans la Ref. [23].

Enfin, le choix adopté pour l'ordonnement des virtualités  $Q_1^2 \gg Q_2^2$  est arbitraire et peut parfaitement être remplacé par le cas opposé  $Q_1^2 \ll Q_2^2$ . Du fait de la symétrie

du processus, la factorisation obtenue dans ce cas fera apparaître une TDA décrivant la transition  $\gamma^*(q_1) \rightarrow \rho_L^0(k_1)$  à large distance.

Notons enfin que les deux domaines cinématiques précédemment étudiés dans le cas des factorisations basées sur une TDA ou une GDA ont une intersection non nulle comme nous le montrons dans la Fig.1.21. Dans cette figure, les différents domaines où les amplitudes transverse (pour le processus  $\gamma_T^*\gamma_T^* \rightarrow \rho_L\rho_L$ ) et longitudinale ( $\gamma_L^*\gamma_L^* \rightarrow \rho_L\rho_L$ ) dominant sont présentés. A l'intérieur de leur intersection, nous obtenons deux formules de factorisations différentes suivant les deux polarisations possibles des photons virtuels : nous pouvons alors conclure que les états de polarisation des photons dictent la factorisation impliquant une GDA ou une TDA dans ce domaine cinématique. La Fig. 1.21 illustre également que la factorisation colinéaire de QCD n'est plus de twist dominant (est supprimée) dans la région où les virtualités  $Q_i^2$  sont paramétriquement proches. Enfin, la limite de grand  $W^2$  concerne le domaine perturbatif de Regge qui sera étudié dans les chapitres suivants. Nous utiliserons alors les expressions générales de l'amplitude obtenues en (1.5.92) et (1.5.93) dans le calcul direct afin de comparer leurs contributions respectives à celle de l'échange de gluons, supposé dominer la section efficace dans la limite cinématique de Regge.

Nous avons limité notre analyse au cas de mésons  $\rho^0$  longitudinalement polarisés. De cette façon, nous avons évité les problèmes potentiellement liés à la rupture de la factorisation colinéaire de QCD pour des GDA ou TDA faisant apparaître des DAs de mésons transverses dans les limites de leurs domaine de définition, cf. Ref.[41]. Il serait intéressant de savoir, si une telle formule de factorisation impliquant une GDA ou une TDA peut également être obtenue dans ce cas.

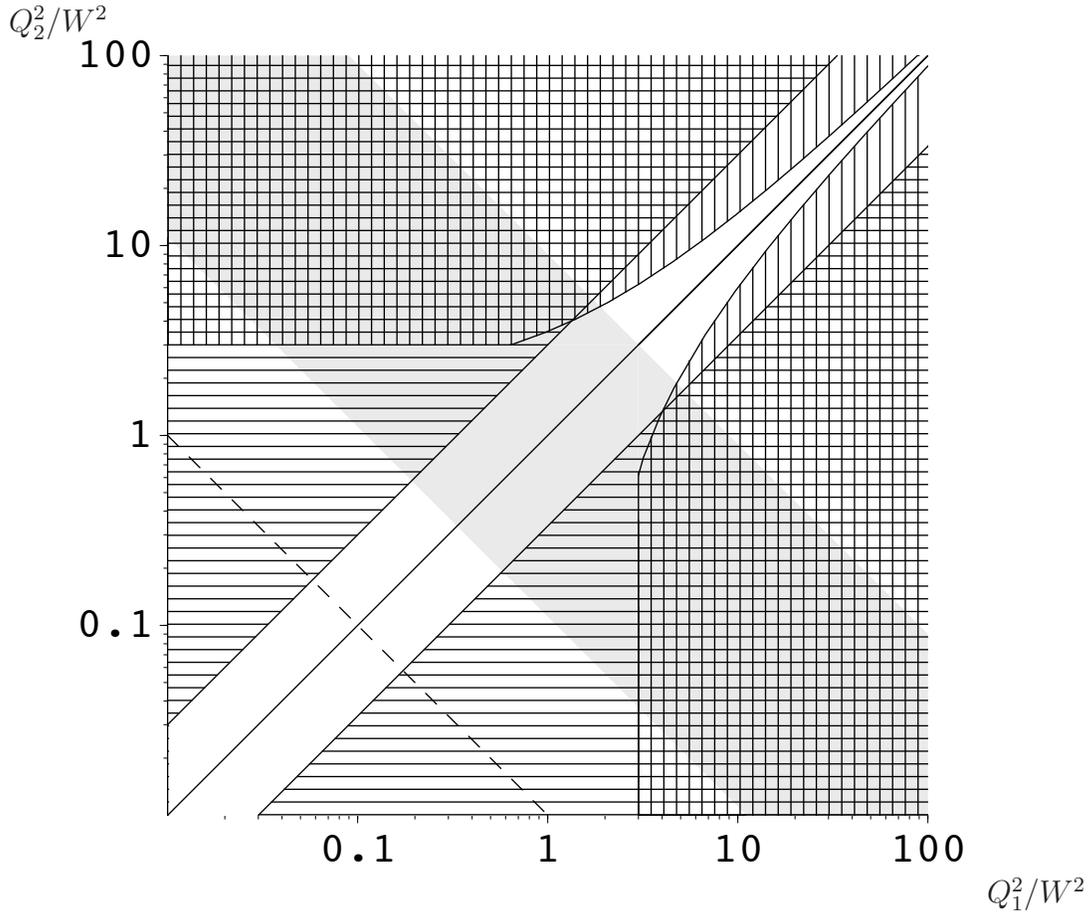


FIG. 1.21 – Différentes régions cinématiques accessibles. Dans le domaine (1), denoté par des lignes verticales, la factorisation avec une GDA s'opère. Cette région est la réunion de deux domaines déconnectés : celui apparaissant en bas à droite est donné par les conditions  $1 - Q_2^2/s \geq c(1 - Q_1^2/s)$  et  $Q_1^2/W^2 \geq c$  tandis que celui de la région en haut à gauche correspond à  $1 - Q_1^2/s \geq c(1 - Q_2^2/s)$  et  $Q_2^2/W^2 \geq c$ , où  $c$  est un nombre arbitrairement grand. Dans le domaine (2), denoté par des lignes horizontales, la factorisation implique une TDA. Cette région correspond aux conditions cinématiques  $Q_1^2/Q_2^2 \geq c$  ou  $Q_1^2/Q_2^2 \leq 1/c$ . Dans la région d'intersection de ces deux domaines, les deux factorisations sont valides, tandis qu'à l'extérieur, aucune factorisation -ni en termes d'une GDA ni d'une TDA- n'est établie à l'ordre dominant. Afin de tracer ces conditions, nous avons choisi  $c = 3$ . La bande grise représente le domaine cinématique où les amplitudes avec des photons transverses et longitudinaux, calculées à l'ordre de Born dans la Sec. 1.5 ont des ordres de grandeur comparables. En dessous de la ligne hachurée, le domaine correspond à la limite de Regge perturbative.

# Chapitre 2

## Le Poméron BFKL

### 2.1 Introduction générale du concept de Poméron

Bien avant l'existence de QCD, de nombreuses tentatives furent proposées pour décrire les processus d'interaction forte ; la théorie de Regge correspond à l'une d'entre elles. Basée sur l'invariance de Lorentz , l'unitarité et l'analyticité de la matrice  $S$ , elle eut de nombreux succès dans la description des diffusions hadron-hadron dans la limite cinématique de Regge correspondant à une grande énergie dans le centre de masse et un faible moment transféré :  $s \gg -t$ . Elle part du développement en ondes partielles  $A_l(t)$  de l'amplitude de diffusion  $A(s,t)$  d'un processus dans le canal  $t$  sur la base des polynômes de Legendre (développement déjà utilisé dans la théorie des collisions quantiques non relativistes) :

$$A(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) A_l(t) P_l\left(1 + \frac{2s}{t}\right), \quad (2.1.1)$$

où  $l$  est le moment angulaire relatif entre les 2 particules. Après prolongement analytique en  $l$ , les états virtuels échangés dans la voie  $t$  possèdent un moment angulaire complexe. Une modification du contour d'intégration fait apparaître une structure analytique faite de pôles et de coupures ; dans le cas particulier des pôles simples (appelés pôles de Regge) et dans la limite cinématique de Regge, l'amplitude de diffusion est dominée par la singularité la plus à droite (de partie réelle de  $l$  la plus élevée) appelée Poméron, et prend la forme suivante :

$$A(s, t) \sim s^{\alpha_P(t)}, \quad (2.1.2)$$

où  $\alpha_P(t)$  est la trajectoire (dite de Regge) du Poméron dans le plan de  $l$  complexe. En général , l'échange de particules virtuelles dans la voie  $t$  correspond à une résonance dans l'amplitude de diffusion ; les diagrammes de Chew-Frautschi (1962) (utilisés pour la phénoménologie des processus de diffusion entre deux hadrons) représentant le spin

en fonction de la masse au carré de résonnances connues (comme des mésons légers) présentaient un alignement sur des trajectoires linéaires. Le Poméron peut être ainsi compris comme l'échange d'un 'objet' de moment angulaire  $l$  complexe et de masse  $m$  qui sont reliés par  $\alpha_P(m^2) = l$  et possédant les nombres quantiques du vide. Par analogie avec les diagrammes de Chew-Frautschi des particules connues, on s'attendait à trouver des particules réelles sur la trajectoire du Poméron; différents modèles furent proposés et conduirent par exemple Donnachie et Landschoff à décrire toutes les données des diffusions hadroniques élastiques et inélastiques à partir de la trajectoire  $\alpha_P(t) = 1 + 0.08 + 0.25t$ . Mais ceci viole explicitement un résultat crucial en théorie des champs démontré par Froissart (en 1961) à partir des premiers principes d'analyticité et d'unitarité de la matrice  $S$  : la section efficace totale d'un processus hadronique possède une borne supérieure qui la contraint de croître au plus comme une constante multipliée par  $\frac{\ln^2(s)}{m_\pi^2}$  ( $m_\pi$  est la masse du pion, particule la plus légère du spectre hadronique) : en repartant de l'expression à haute énergie de l'amplitude  $A(s, t)$  et en utilisant le théorème optique qui relie la partie imaginaire de l'amplitude élastique  $A(s, t = 0)$  à la section efficace totale on obtient son comportement à haute énergie :

$$\sigma_{TOT} \sim s^{\alpha_{P(0)}-1} \quad (2.1.3)$$

qui entre en contradiction avec la borne de Froissart pour  $\alpha_{P(0)} > 1$ . Des méthodes d'unitarisation furent proposées afin d'y remédier, dans le cadre des théories de Regge (échanges multi-pomérons...).

Dès que QCD fut établie comme théorie quantique des interactions fortes, Balitskii, Fadin, Kuraev et Lipatov s'intéressèrent à la limite de Regge et proposèrent une tentative de description du Poméron à partir des degrés de libertés élémentaires de la théorie, constitués de champs de quarks et de gluons. L'évaluation de l'amplitude de diffusion à haute énergie permet de considérer un développement perturbatif en puissance de  $\alpha_s$  qui est faible dans ce régime d'énergie d'après la liberté asymptotique, si le processus présente une échelle dure : l'approche BFKL suppose en effet cette condition réalisée. Mais ces termes sont compensés par des termes divergents en puissance de  $\ln s$  provenant de l'émission de particules molles (divergences infra-rouge intrinsèques à la théorie); par conséquent la série de perturbations ne peut être tronquée après quelques termes et conduit à une resommation d'une série infinie en puissance de  $\alpha_s \ln s$  qui aboutit à une équation intégrale de l'amplitude de diffusion appelée équation BFKL [6]. Dans cette approximation des logarithmes dominants (LLA pour leading log approximation ou encore LO pour leading order), les diagrammes de Feynman resommés correspondent à des diagrammes en forme d'échelle constitués de deux gluons reggeizés dans la voie  $t$  (gluons dont le propagateur est habillé du fait des interactions et qui acquièrent une trajectoire de Regge) interagissant en échangeant dans la voie  $s$  des gluons réels (représentés par les barreaux horizontaux de l'échelle). Puisque le Poméron (mou) de Regge transportait les nombres quantiques du vide, l'équation BFKL doit décrire l'échange d'un singulet

de couleur dans la voie  $t$ . Mais cette description présente quelques limites intrinsèques : elle prévoit que  $\alpha_P(0) = c\alpha_s$  où  $c$  est une constante strictement positive, ce qui conduit à la violation de la borne de Froissart à l'échelle perturbative. Elle prédit de plus que la densité de gluons diverge à très haute énergie (saturation)[43]. De nombreuses tentatives ont depuis été proposées pour tenter de restaurer l'unitarité de la théorie (équation Balitsky-Kovchegov[44], Color Glass Condensate[45]...).

## 2.2 L'équation intégrale pour l'échange d'un octet de couleur

Nous allons considérer, dans la limite de Regge de QCD, l'échange d'octet de couleur dans la voie  $t$  dans un processus de collision de deux quarks hautement énergétiques, de masse nulle, dont les impulsions sont données par les deux vecteurs de Sudakov  $p_1$  et  $p_2$ , qui sont donc deux vecteurs du cône de lumière de direction opposée. A l'ordre des arbres, la limite  $s \gg -t = |q^2|$ , correspond à l'échange d'un gluon mou de quadri-moment  $q$ , de composantes très inférieures à  $\sqrt{s}$ . Quand nous aurons à considérer les corrections quantiques de ce processus, nous verrons apparaître des termes divergents dans l'infrarouge dus à l'intégration sur les impulsions longitudinales des particules molles émises en cascade au cours de la collision. Ces termes divergents apparaîtront sous la forme de puissances de  $\ln(\frac{s}{k^2})$ , qui seront resommées au sein d'une série perturbative en  $(\alpha_s \ln(\frac{s}{k^2}))^n$ , afin de conduire à l'expression d'une amplitude finie. Nous nous proposons de calculer cette expression, dans cette approximation dite des logarithmes dominants, tout d'abord dans le cas de l'échange d'un octet de couleur dans la voie  $t$  puis dans celui du singulet de couleur, le Poméron, en nous inspirant librement des revues de Lipatov[46], Forshaw et Ross[47], Del Duca[48] et Kirschner[49].

L'émission de particules molles est décrite dans l'approximation eikonale, qui consiste à négliger la variation subie par la quadri-impulsion d'une particule très énergétique qui émet une particule molle. Nous pouvons donc écrire pour le vertex du haut de l'amplitude à l'ordre des arbres  $A_0^{(8)}$ , en utilisant le facteur  $-ig(\tau^a)\gamma_\mu$  pour l'interaction quark-gluon :

$$-ig(\tau^a)\bar{u}(\lambda'_1, p_1 - q)\gamma_\mu u(\lambda_1, p_1) = -2ig(\tau^a)p_1^\mu \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \quad (2.2.4)$$

pour des spineurs normalisés selon

$$u^\dagger(\lambda'_1, p_1)u(\lambda_1, p_1) = 2E\delta_{\lambda'_1 \lambda_1} . \quad (2.2.5)$$

Nous calculerons dans la suite des éléments de matrice  $T$ , plutôt que de matrice  $S = 1 + iT$  donc nous devons ajouter un facteur  $(-i)$  dans l'expression obtenue des amplitudes à partir des règles de Feynman. Les propagateurs des quarks et des gluons (de moment générique  $k$ ) s'écriront respectivement dans la jauge de Feynman selon  $i\frac{\not{k}}{k^2}$  et

$\frac{-ig_{\mu\nu}\delta_{ab}}{k^2}$  (les indices de Kronecker sur les indices de couleur seront considérés implicitement pour les fermions, nous noterons simplement  $\tau^a$  les générateurs du groupe de gauge dans leur représentation fondamentale apparaissant à chaque vertex quark-gluon).

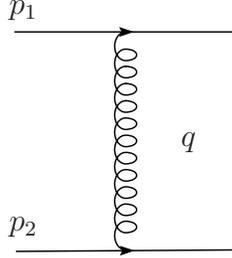


FIG. 2.1 – Amplitude d'échange d'un octet de couleur à l'ordre des arbres.

Nous obtenons alors pour l'amplitude d'échange d'un octet de couleur à l'ordre le plus bas

$$\begin{aligned} A_0^{(8)} &= (-i)(-ig2p_1^\mu)(-ig2p_2^\nu)\frac{-ig_{\mu\nu}\delta_{\lambda'_1\lambda_1}\delta_{\lambda'_2\lambda_2}}{q^2}G_0^{(8)} \\ &= 8\pi\alpha_s\frac{s}{t}\delta_{\lambda'_1\lambda_1}\delta_{\lambda'_2\lambda_2}G_0^{(8)} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

avec le facteur de couleur  $G_0^{(8)} = \tau^a \otimes \tau^a$  qui contient les deux générateurs de SU(3) dans leur représentation fondamentale.

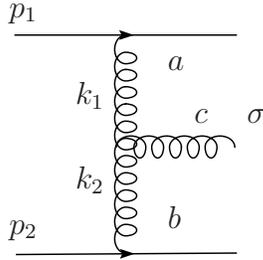


FIG. 2.2 – Diagramme (a) de l'amplitude  $A_{2\rightarrow(3)}^{(8)\sigma}$ .

Nous allons maintenant calculer l'amplitude  $A_{2\rightarrow(3)}^{(8)\sigma}$  à l'ordre suivant ( $g^3$ ) en théorie de perturbation, qui est composée de 5 diagrammes représentés dans les figures (2.2), (2.3), (2.4) et qui décrit l'émission de toutes les façons possibles d'un gluon mou réel dans l'état final. Le diagramme (a) est calculé en utilisant le vertex à 3 gluons donné par

$$-gf_{abc}[g^{\mu\nu}(k_1+k_2)^\sigma + g^{\mu\sigma}(k_2-2k_1)^\nu - g^{\nu\sigma}(2k_2-k_1)^\mu] \quad (2.2.7)$$

pour des moments  $k_1$  et  $k_2$  orientés vers le bas. Ainsi

$$A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}(a) = (-i)(-ig2p_{1\mu})(-ig2p_{2\nu}) \frac{-i-i}{k_1^2} \frac{-i-i}{k_2^2} \delta_{\lambda_1 \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} \tau^a \otimes \tau^b \\ \times g(-f_{abc})[g^{\mu\nu}(k_1 + k_2)^\sigma + g^{\mu\sigma}(k_2 - 2k_1)^\nu - g^{\nu\sigma}(2k_2 - k_1)^\mu]. \quad (2.2.8)$$

Dans la limite de Regge, l'ordonnancement fort des impulsions longitudinales des particules molles émises en cascade nous permet d'exploiter la décomposition de la quadri-impulsion  $k_i$  du gluon  $i$  dans la base de Sudakov selon  $k_i = \rho_i p_1 + \lambda_i p_2 + k_\perp$ , où  $k_\perp^2 = -\underline{k}^2$ , particulièrement adaptée dans la configuration cinématique de Regge car le produit scalaire  $2p_1 \cdot p_2$  fait apparaître le grand paramètre  $s$ . Les composantes (longitudinales) de ces quadri-moments selon  $p_1$  et  $p_2$  doivent être positives (condition de positivité des énergies correspondantes dans tout référentiel), ce qui conduit aux inégalités suivantes :  $1 > \dots > \rho_i > \rho_{i+1} > \dots > 0$  et  $1 > \dots > |\lambda_{i+1}| > |\lambda_i| > \dots > 0$ . Celles-ci deviendront des inégalités fortement ordonnées dans la limite de Regge :  $1 \gg \rho_i \gg \rho_{i+1}$  et  $1 \gg |\lambda_{i+1}| \gg |\lambda_i|$ , tandis que les moments transverses sont du même ordre de grandeur, c'est-à-dire équivalents à une échelle transverse typique  $\underline{k}^2$  qui n'est pas fixée de manière univoque au LO (cela n'a pas d'effet sur les logarithmes de  $s$ ) :  $(\underline{k}_i - \underline{k}_{i+1})^2 \simeq \underline{k}_1^2 \simeq \underline{k}_{n+1}^2 \simeq \underline{k}^2$ .

Ceci nous permet de simplifier l'expression suivante selon

$$2p_{1\mu}2p_{2\nu}[g^{\mu\nu}(k_1 + k_2)^\sigma + g^{\mu\sigma}(k_2 - 2k_1)^\nu - g^{\nu\sigma}(2k_2 - k_1)^\mu] = \quad (2.2.9) \\ -2s[\rho_1 p_1^\sigma + \lambda_2 p_2^\sigma - (k_1 + k_2)_\perp^\sigma].$$

Ainsi la contribution du diagramme (a) devient

$$A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}(a) = -i2sg^3[\rho_1 p_1^\sigma + \lambda_2 p_2^\sigma - (k_1 + k_2)_\perp^\sigma] \frac{1}{\underline{k}_1^2 \underline{k}_2^2} \delta_{\lambda_1 \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} f_{abc} \tau^a \otimes \tau^b \quad (2.2.10)$$

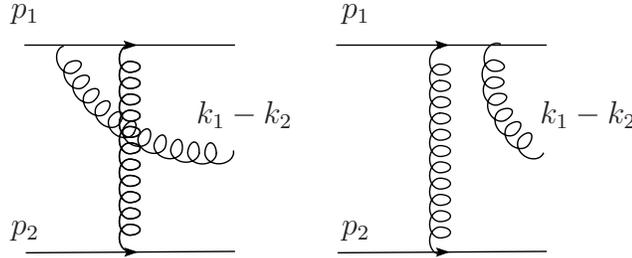


FIG. 2.3 – Diagrammes (b) et (c) de l'amplitude  $A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}$ .

De même nous calculons la contribution du diagrammes (b)

$$A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}(b) = (-i)\bar{u}(\lambda'_1, p_1 - k_1)(-ig\gamma_\mu) i \frac{\not{p}'_1 - \not{k}'_1 + \not{k}'_2}{(p_1 - k_1 + k_2)^2} (-ig\gamma_\sigma) u(\lambda_1, p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k_2^2} \\ \times \bar{u}(\lambda'_2, p_2 + k_2)(-ig\gamma_\nu) u(\lambda_2, p_2) (\tau^b \tau^c \otimes \tau^b) \quad (2.2.11)$$

Nous faisons apparaître la somme sur les indices de polarisation des spineurs au numérateur du propagateur du quark afin d'utiliser l'approximation eikonale selon  $p_1$  pour les vertex  $(-ig\gamma_\mu)$  et  $(-ig\gamma_\sigma)$ , selon  $p_2$  pour le vertex du bas. Si nous ajoutons à l'expression obtenue celle du diagramme (c), utilisant  $(p_1 - k_1 + k_2)^2 \simeq -(p_1 - k_2)^2 \simeq s\lambda_2$  dans notre cinématique afin de faire apparaître la constante de structure  $f_{abc}$  à partir du commutateur  $\tau^b$  et  $\tau^c$ , nous obtenons

$$A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}((b) + (c)) = -i2sg^3 \frac{\underline{k}_1^2 2p_1^\sigma}{\underline{k}_1^2 \underline{k}_2^2 s \lambda_2} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} f_{abc} \tau^a \otimes \tau^b \quad (2.2.12)$$

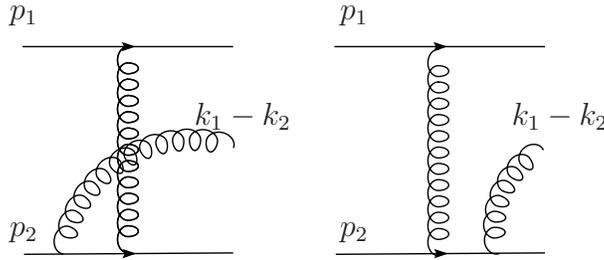


FIG. 2.4 – Diagrammes (d) et (e) de l'amplitude  $A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}$ .

Nous en déduisons aisément par symétrie la contribution des diagrammes (d) et (e) :

$$A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}((d) + (e)) = -i2sg^3 \frac{\underline{k}_2^2 2p_2^\sigma}{\underline{k}_1^2 \underline{k}_2^2 s \rho_1} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} f_{abc} \tau^a \otimes \tau^b. \quad (2.2.13)$$

En additionnant ces 5 diagrammes, nous obtenons finalement

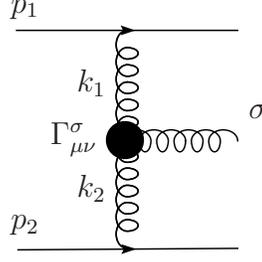
$$A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma} = \frac{-i2g^3 2p_1^\mu 2p_2^\nu}{\underline{k}_1^2 \underline{k}_2^2} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} f_{abc} \tau^a \otimes \tau^b \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(k_1, k_2) \quad (2.2.14)$$

avec

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma(k_1, k_2) = \frac{2p_{1\nu} p_{2\mu}}{s} \left[ \left( \rho_1 + \frac{2\underline{k}_1^2}{s\lambda_2} \right) p_1^\sigma + \left( \lambda_2 + \frac{2\underline{k}_2^2}{s\rho_1} \right) p_2^\sigma - (k_1 + k_2)_\perp^\sigma \right]. \quad (2.2.15)$$

Nous avons fait apparaître un objet fondamental dans notre approche : le vertex effectif (non local) de Lipatov  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma(k_1, k_2)$  qui décrit la production réelle d'un gluon de moment  $k_1 - k_2$  dans la voie  $s$ , connecté de toutes les manières possibles à ses plus proches voisins. Notons aussi qu'il permet à l'amplitude  $A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}$  de vérifier l'invariance de jauge de QCD d'après

$$(k_1 - k_2) \cdot \Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2) = 0. \quad (2.2.16)$$


 FIG. 2.5 – Amplitude  $A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}$ .

Nous avons dérivé son expression en considérant des gluons mous émis par des quarks ultra relativistes mais nous pouvons montrer que ce vertex effectif aura la même expression en les remplaçant par des gluons, l'approximation eikonale restant valide indépendamment du spin de la particule énergétique émettant un gluon mou. Nous devons à cette fin remarquer que les gluons verticaux (virtuels) possèdent des polarisations non-physiques qui dominent dans la limite de Regge : en effet, en décomposant la matrice de polarisation des propagateurs des gluons en une partie longitudinale et une transverse, le tenseur  $g^{\mu\nu}$  s'écrit

$$g^{\mu\nu} = g_{\parallel}^{\mu\nu} + g_{\perp}^{\mu\nu} \simeq g_{\parallel}^{\mu\nu} = \frac{p_1^\mu p_1^\nu + p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \quad (2.2.17)$$

du fait de la grande valeur de  $s = 2p_1 \cdot p_2$ . Si les indices de Lorentz  $\mu$  et  $\nu$  se trouvent respectivement du côté des particules incidentes de moment  $p_1$  (en haut) et  $p_2$  (en bas) alors la contribution dominante sera

$$g^{\mu\nu} \simeq \frac{2p_1^\nu p_2^\mu}{s} \quad (2.2.18)$$

C'est bien ce terme qui apparaît en facteur de l'expression du vertex effectif.

Nous pouvons donc supposer une généralisation de l'expression  $A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}$  au cas où  $n$  gluons réels sont produits dans l'état final en utilisant ce vertex effectif le long de la chaîne de gluons, dont l'amplitude de diffusion de deux quarks d'hélicité  $\lambda_1, \lambda_2$  en deux quarks (d'hélicité  $\lambda'_1, \lambda'_2$ ) plus  $n$  gluons (réels) horizontaux s'écrit :

$$A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}(k_1, \dots, k_n) = i2s g^{n+2} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_n^{(8)} \frac{i}{k_1^2} \prod_{i=1}^n \frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i} \frac{i}{k_{i+1}^2} \quad (2.2.19)$$

avec le facteur de couleur  $G_n^{(8)} = \prod_{i=1}^n f_{a_i a_{i+1} b_i} \tau^{a_i} \otimes \tau^{a_{n+1}}$  pour des gluons réels de couleur  $b_i$ .

A partir des règles de coupures (Cutkosky), nous allons pouvoir calculer la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion (de la contribution du canal  $s$ ) avec échange

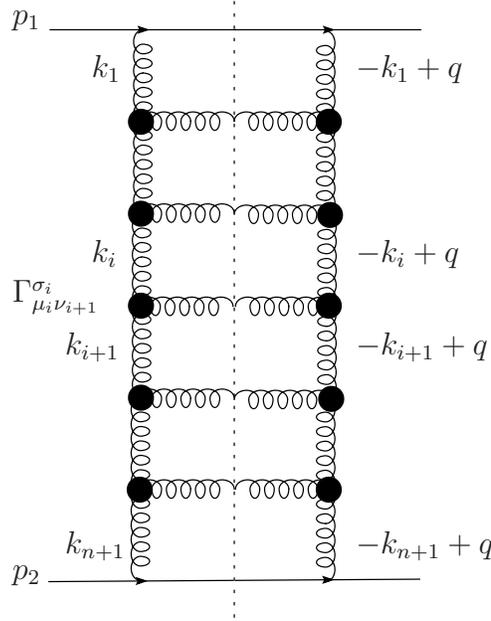


FIG. 2.6 – Partie imaginaire de l'Amplitude  $A_n^{(8)}(s, t)$ .

d'octet de couleur dans la voie  $t$  à  $n + 1$  boucles en utilisant l'amplitude de production de  $n$  gluons réels  $A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}(k_1, \dots, k_n)$  dans l'état intermédiaire, modifiée afin d'intégrer l'hypothèse de réggéisation des gluons de moments  $k_i$ .

$$\begin{aligned} \text{Im } A_n^{(8)}(s, t) &= & (2.2.20) \\ \frac{1}{2} \int dV_{EP(n+2)} A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}(k_1, \dots, k_n) A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\dagger\tau_1 \dots \tau_n}(k_1, \dots, k_n) \prod_{i=1}^n (-g_{\sigma_i \tau_i}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}(k_1, \dots, k_n) &= i2s g^{n+2} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_n^{(8)} \frac{i}{k_1^2} \left( \frac{1}{\rho_1} \right)^{\epsilon_G(k_1^2)} & (2.2.21) \\ &\times \prod_{i=1}^n \frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i} \frac{i}{k_{i+1}^2} \left( \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \right)^{\epsilon_G(k_{i+1}^2)}. \end{aligned}$$

Le propagateur du  $i$ ème gluon reggézé (vertical, de moment  $k_i$ ) connecté au vertex effectif  $\Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i}(k_i, k_{i+1})$  s'écrit simplement  $i \frac{g_{\mu\nu}}{k_i^2}$ , mais il est habillé d'un terme correctif en  $(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i})^{\epsilon_G(k_i^2)}$  qui correspond précisément à l'hypothèse de reggéisation de cette particule,

et introduit les corrections radiatives (virtuelles) de l'amplitude. Nous détaillerons ce point dans la suite de la démonstration. L'amplitude  $A_n^{(8)}$  obtenue sera ainsi décrite par des diagrammes en forme d'échelle dont les  $n$  barreaux horizontaux constitués par des gluons réels sont attachés aux gluons reggézés dans la voie  $t$  par des vertex effectifs  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ . Nous pouvons montrer dans l'approximation des logarithmes dominants que les autres diagrammes (boucles de quarks...) qui ne correspondent pas à des diagrammes d'échelle effective générée par les vertex effectifs de Lipatov sont supprimés.

La partie imaginaire de l'amplitude de diffusion avec échange d'octet de couleur dans la voie  $t$  et resumée à tous les ordres de perturbation s'écrira donc :

$$\begin{aligned} \text{Im } A^{(8)}(s, t) &= \tag{2.2.22} \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int dV_{EP^{(n+2)}} A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}(k_1, \dots, k_n) A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\dagger \tau_1 \dots \tau_n}(k_1, \dots, k_n) \prod_{i=1}^n (-g_{\sigma_i \tau_i}). \end{aligned}$$

Le volume d'espace des phases accessible à la réaction étant :

$$\begin{aligned} \int dV_{EP^{(n+2)}} &= \tag{2.2.23} \\ s^{n+1} K_n \int \prod_{i=1}^{n+1} d\rho_i d\lambda_i d^2 \underline{k}_i \delta((p_1 - k_1)^2) \delta((p_2 + k_{n+1})^2) \prod_{j=1}^n \delta((k_j - k_{j+1})^2) \end{aligned}$$

avec  $K_n = \frac{1}{2^3 \pi^2} \left( \frac{1}{2(2\pi)^3} \right)^n$ , les fonctions  $\delta$  proviennent des conditions de couche de masse vérifiées par les particules intermédiaires de moments  $p_1 - k_1$  et  $p_2 + k_{n+1}$  pour les quarks et  $k_i - k_{i+1}$  pour les gluons.

Nous considérons la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion avec échange d'octet de couleur dans la voie  $t$  à l'ordre  $n$

$$\begin{aligned} \text{Im } A_n^{(8)}(s, t) &= \frac{1}{2} \int dV_{EP^{(n+2)}} A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}(k_1, \dots, k_n) A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\dagger \tau_1 \dots \tau_n}(k_1, \dots, k_n) \prod_{i=1}^n (-g_{\sigma_i \tau_i}) \\ &= \frac{1}{2} \int dV_{EP^{(n+2)}} (2sg^2)^2 \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} (-1)^n G_n^{(8)} \otimes G_n^{(8)} \\ &\times \frac{i}{\underline{k}_1^2} \left( \frac{1}{\rho_1} \right)^{\epsilon_G(k_1^2)} \frac{-i}{(\underline{k}_1 - \underline{q})^2} \left( \frac{1}{\rho_1} \right)^{\epsilon_G((k_1 - q)^2)} \\ &\times \prod_{i=1}^n g^2 \frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i} \frac{i}{\underline{k}_{i+1}^2} \left( \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \right)^{\epsilon_G(k_{i+1}^2)} (-g_{\sigma_i \tau_i}) \\ &\times \prod_{i=1}^n \frac{2p_1^{\mu'_i} p_2^{\nu'_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu'_i \nu'_{i+1}}^{\tau_i} \frac{-i}{(\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2} \left( \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \right)^{\epsilon_G((k_{i+1} - q)^2)}. \end{aligned}$$

Nous obtenons le facteur de couleur (que nous détaillons plus loin) :

$$(-1)^n G_n^{(8)} \otimes G_n^{(8)} = -\left(-\frac{N}{2}\right)^n \frac{N}{4} G_0^{(8)}$$

et l'expression suivante pour la contraction des vertex effectifs  $(-g_{\sigma_i \tau_i}) \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i} \Gamma_{\mu'_i \nu'_{i+1}}^{\tau_i}$  (notons que le vertex de droite  $\Gamma_{\mu'_i \nu'_{i+1}}^{\tau_i}$  contient les quadri-impulsions de signe opposé du fait de la conjugaison hermitienne de l'amplitude  $A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8) \dagger \tau_1 \dots \tau_n}$ ) :

$$\begin{aligned} & \frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i}(k_i, k_{i+1}) (-g_{\sigma_i \tau_i}) \frac{2p_1^{\mu'_i} p_2^{\nu'_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu'_i \nu'_{i+1}}^{\tau_i}(-k_i - q, -(k_{i+1} - q)) \\ &= 2 \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_i^2 (\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{i+1}^2 (\underline{k}_i - \underline{q})^2}{(\underline{k}_i - \underline{k}_{i+1})^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

donc

$$\begin{aligned} Im A_n^{(8)}(s, t) &= \int dV_{EP(n+2)} \frac{N}{4} A_0^{(8)} (-N)^n \frac{g^2 s \underline{q}^2}{\underline{k}_1^2 (\underline{k}_1 - \underline{q})^2} \left( \frac{1}{\rho_1} \right)^{\epsilon_G(k_1^2) + \epsilon_G((k_1 - q)^2)} \\ &\times \prod_{i=1}^n \frac{g^2}{\underline{k}_{i+1}^2 (\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2} \left( \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \right)^{\epsilon_G(k_{i+1}^2) + \epsilon_G((k_{i+1} - q)^2)} \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_i^2 (\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{i+1}^2 (\underline{k}_i - \underline{q})^2}{(\underline{k}_i - \underline{k}_{i+1})^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Nous allons démontrer cette relation par récurrence, ce qui revient aussi à démontrer l'expression (2.2.21) de l'amplitude coupée de production de n gluons dans l'état final  $A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8) \sigma_1 \dots \sigma_n}$ .

Modifions tout d'abord l'expression du volume d'espace des phases (2.2.23) dans la limite de Regge, où l'on tient compte de l'ordonnancement fort des impulsions longitudinales des particules reggézées.

$$\begin{aligned} \int dV_{EP(n+2)} &= s^{n+1} K_n \int \prod_{i=1}^{n+1} d\rho_i d\lambda_i d^2 \underline{k}_i \delta((p_1 - k_1)^2) \delta((p_2 + k_{n+1})^2) \prod_{j=1}^n \delta((k_j - k_{j+1})^2) \\ &= s^{n+1} K_n \int \prod_{i=1}^{n+1} d\rho_i d\lambda_i d^2 \underline{k}_i \delta(-s(1 - \rho_1)\lambda_1 - \underline{k}_1^2) \delta(s(1 + \lambda_{n+1})\rho_{n+1} - \underline{k}_{n+1}^2) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^n \delta(s(\rho_j - \rho_{j+1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) - (\underline{k}_j - \underline{k}_{j+1})^2) \\ &= s^{n+1} K_n \int \prod_{i=1}^{n+1} d\rho_i d\lambda_i d^2 \underline{k}_i \delta(-s\lambda_1 - \underline{k}_1^2) \delta(s\rho_{n+1} - \underline{k}_1^2) \prod_{j=1}^n \delta(-s\rho_j \lambda_{j+1} - \underline{k}_j^2) \\ &= K_n \prod_{i=1}^n \int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i} \prod_{j=1}^{n+1} d^2 \underline{k}_j \int_0^1 d\rho_{n+1} \delta(s\rho_{n+1} - \underline{k}_1^2). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Nous pouvons dès maintenant remarquer que ces intégrales intriquées en  $\int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i}$  donneront les termes divergents en  $\ln(\frac{s}{\underline{k}^2})$  qui seront resommés dans la série perturbative  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_s \ln(\frac{s}{\underline{k}^2}))^n$ .

Revenons maintenant à l'expression du propagateur du  $i$ -ème gluon reggézé de moment  $k_i$ . A partir des moments des reggéons entrant ( $k_{i-1}$ ) et sortant ( $k_{i+1}$ ) dans cet  $i$ ème barreau vertical, nous pouvons définir le carré d'une énergie  $s_i$  dans le centre de masse partielle pour ce sous-système dont l'expression sera simplement (de même le moment transféré partiel sera  $t_i = k_i^2$ ) :

$$\begin{aligned}
 s_i &= (k_{i-1} - k_{i+1})^2 \\
 &= s(\rho_{i-1} - \rho_{i+1})(\lambda_{i-1} - \lambda_{i+1}) - (\underline{k}_{i-1} - \underline{k}_{i+1})^2 \\
 &= -s\rho_{i-1}\lambda_{i+1} - (\underline{k}_{i-1} - \underline{k}_{i+1})^2 \\
 &= \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \underline{k}^2
 \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

où l'on a négligé le terme  $(\underline{k}_{i-1} - \underline{k}_{i+1})^2$  provenant des moments transverses devant  $s\rho_{i-1}\lambda_{i+1}$  puis on a remplacé  $-s\lambda_{i+1}$  par  $\frac{\underline{k}^2}{\rho_i}$  d'après la condition de couche de masse du gluon réel de moment  $k_i - k_{i+1}$  produit dans la voie  $s$ . Ainsi nous pouvons formuler l'hypothèse de reggézation du gluon de moment  $k_i$  par un ansatz sur la forme du propagateur de cette particule, qui sera habillé d'un facteur multiplicatif

$$\left( \frac{s_i}{\underline{k}^2} \right)^{\epsilon_G(k_i^2)} \tag{2.2.28}$$

traduisant le comportement caractéristique d'une particule acquérant une trajectoire de Regge qui s'écrit dans le cas du gluon :

$$\alpha_G(t) = 1 + \epsilon_G(t) \tag{2.2.29}$$

avec

$$\epsilon_G(t) = \frac{\alpha_s N}{4\pi^2} \int d^2 \underline{k} \frac{t}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{q})^2} \tag{2.2.30}$$

Nous en déduisons ainsi l'expression du propagateur habillé du gluon reggézé de moment  $k_i$  dans l'hypothèse dite du Bootstrap :

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}(k_i) &= i \frac{g_{\mu\nu}}{\underline{k}_i^2} \left( \frac{s_i}{-t_i} \right)^{\epsilon_G(k_i^2)} \\
 &= i \frac{g_{\mu\nu}}{\underline{k}_i^2} \left( \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \right)^{\epsilon_G(k_i^2)}
 \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

d'après (2.2.27). Nous verrons comment le comportement de l'amplitude que l'on obtiendra en resommant les logarithmes dominants à tous les ordres de perturbation viendra justifier à posteriori cette hypothèse du Bootstrap.

Nous avons déjà vérifié la validité de l'expression (2.2.19) à l'ordre  $n = 1$  sans faire l'hypothèse de reggézation, supposons donc la relation vraie au rang  $n$  et rajoutons un vertex effectif qui produit un gluon réel supplémentaire de moment  $\underline{k}_{n+1} - \underline{k}_{n+2}$  afin de déterminer l'expression de la partie imaginaire de l'amplitude correspondante obtenue :

$$\begin{aligned}
 Im A'_{n+1}{}^{(8)}(s, t) &= \int dV'_{EP^{(n+2)}} \int \frac{d^4 k_{n+2}}{(2\pi)^3} \delta((k_{n+2} - k_{n+1})^2) \delta((p_2 + k_{n+2})^2) \\
 &\times \frac{N}{4} A_0^{(8)} (-N)^n \frac{g^2 s \underline{q}^2}{\underline{k}_1^2 (\underline{k}_1 - \underline{q})^2} \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\epsilon_G(k_1^2) + \epsilon_G((k_1 - q)^2)} \\
 &\times \prod_{i=1}^n \frac{g^2}{\underline{k}_{i+1}^2 (\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2} \left(\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}\right)^{\epsilon_G(k_{i+1}^2) + \epsilon_G((k_{i+1} - q)^2)} \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_i^2 (\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{i+1}^2 (\underline{k}_i - \underline{q})^2}{(\underline{k}_i - \underline{k}_{i+1})^2} \right] \\
 &\times \left(-\frac{N}{2}\right) g^2 \left[ \frac{2p_1^{\mu_{n+1}} p_2^{\nu_{n+2}}}{s} \Gamma_{\mu_{n+1} \nu_{n+2}}^{\sigma_{n+1}}(k_{n+1}, k_{n+2}) \frac{i}{\underline{k}_{n+2}^2} \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}}\right)^{\epsilon_G(k_{n+2}^2)} (-g_{\sigma_{n+1} \tau_{n+1}}) \right. \\
 &\times \left. \frac{-i}{(\underline{k}_{n+2} - \underline{q})^2} \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}}\right)^{\epsilon_G((k_{n+2} - q)^2)} \frac{2p_1^{\mu'_{n+1}} p_2^{\nu'_{n+2}}}{s} \Gamma_{\mu'_{n+1} \nu'_{n+2}}^{\tau_{n+1}}(-(k_{n+1} - q), -(k_{n+2} - q)) \right]
 \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

où l'intégration sur le volume d'espace des phases  $\int dV'_{EP^{(n+2)}}$  correspond à  $\int dV_{EP^{(n+2)}}$  amputé de la condition de couche de masse  $\delta((p_2 + k_{n+1})^2)$  et nous pouvons donc écrire d'après l'équation (2.2.26) :

$$\begin{aligned}
 &\int dV'_{EP^{(n+2)}} \int \frac{d^4 k_{n+2}}{(2\pi)^3} \delta((k_{n+2} - k_{n+1})^2) \delta((p_2 + k_{n+2})^2) = s^{n+1} K_n \int \prod_{i=1}^{n+1} d\rho_i d\lambda_i d^2 \underline{k}_i \\
 &\times \delta((p_1 - k_1)^2) \prod_{j=1}^n \delta((k_j - k_{j+1})^2) \frac{s}{2(2\pi)^3} \int d\rho_{n+2} d\lambda_{n+2} d^2 \underline{k}_{n+2} \delta((k_{n+2} - k_{n+1})^2) \delta((p_2 + k_{n+2})^2) \\
 &= s K_{n+1} \prod_{i=1}^n \int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i} \prod_{j=1}^{n+1} d^2 \underline{k}_j \int_{\rho_{n+2}}^1 d\rho_{n+1} \int_0^1 d\rho_{n+2} d\lambda_{n+2} d^2 \underline{k}_{n+2} \delta(-s\rho_{n+1}\lambda_{n+2} - \underline{k}^2) \delta(s\rho_{n+2} - \underline{k}^2) \\
 &= K_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} \int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i} \prod_{j=1}^{n+2} d^2 \underline{k}_j \int_0^1 d\rho_{n+2} \delta(s\rho_{n+2} - \underline{k}^2) \\
 &= \int dV_{EP^{(n+1+2)}}
 \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

En utilisant l'expression (2.2.21) obtenue après contraction des deux vertex effectifs,  $Im A'_{n+1}{}^{(8)}$  devient :

$$\begin{aligned}
Im A'_{n+1}^{(8)}(s, t) &= \int dV_{EP(n+1+2)} \frac{N}{4} A_0^{(8)} (-N)^n \frac{g^2 s \underline{q}^2}{\underline{k}_1^2 (\underline{k}_1 - \underline{q})^2} \left( \frac{1}{\rho_1} \right)^{\epsilon_G(k_1^2) + \epsilon_G((k_1 - q)^2)} \\
&\times \prod_{i=1}^n \frac{g^2}{\underline{k}_{i+1}^2 (\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2} \left( \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \right)^{\epsilon_G(k_{i+1}^2) + \epsilon_G((k_{i+1} - q)^2)} \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_i^2 (\underline{k}_{i+1} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{i+1}^2 (\underline{k}_i - \underline{q})^2}{(\underline{k}_i - \underline{k}_{i+1})^2} \right] \\
&\times \left( -\frac{N}{2} \right) \frac{2g^2}{\underline{k}_{n+2}^2 (\underline{k}_{n+2} - \underline{q})^2} \left( \frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}} \right)^{\epsilon_G(k_{n+2}^2) + \epsilon_G((k_{n+2} - q)^2)} \\
&\times \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_{n+1}^2 (\underline{k}_{n+2} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{n+2}^2 (\underline{k}_{n+1} - \underline{q})^2}{(\underline{k}_{n+1} - \underline{k}_{n+2})^2} \right] \\
&= Im A_{n+1}^{(8)}(s, t)
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

qui correspond bien à l'expression (2.2.25) au rang  $n + 1$ .

Nous avons donc démontré que l'expression (2.2.25) de  $Im A_n^{(8)}(s, t)$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

Puisque l'expression (2.2.25) de  $Im A_n^{(8)}(s, t)$  découle directement (cf. l'éq.(2.2.22)) de celle de l'amplitude de production ouverte de  $n$  gluons réels dans la voie  $s$ ,  $A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}$ , donnée par l'équation (2.2.21), nous avons également démontré la validité de cette expression pour tout  $n \geq 0$ .

Ajoutons quelques détails sur l'obtention du facteur de couleur à l'ordre  $n$  : nous avons noté  $G_n^{(8)} = \prod_{i=1}^n f_{a_i a_{i+1} b_i} \tau^{a_1} \otimes \tau^{a_{n+1}}$ . Ecrivons plus généralement l'amplitude de diffusion avec échange d'octet de couleur à l'ordre  $n$  en faisant apparaître explicitement la structure de couleur apparaissant aux vertex quark-gluon en haut et en bas de l'échelle :

$$A^{(8)} = A_{a_{n+1} a'_{n+1}}^{a_1 a'_1 (8)} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}})$$

Jusqu'à présent nous considérons seulement la partie imaginaire de l'amplitude dont l'expression nous est fournie par l'intermédiaire des règles de coupures. Mais lorsque nous aurons à reconstruire l'amplitude complète, il faudra tenir compte des contributions provenant du canal  $u$  de notre processus, i.e. quand  $s$  et  $u$  sont interchangés. Le canal  $u$  ne donne une contribution non triviale qu'au niveau de la partie réelle de l'amplitude car l'argument de  $\ln(\frac{u}{t})$  est strictement positif. De plus, cette amplitude  $A(u, t)_{a_{n+1} a'_{n+1}}^{a_1 a'_1 (8)}$ , non projetée sur les états de couleur externes à l'échelle de gluons, sera égale et opposée en signe à la partie réelle de l'amplitude  $A(s, t)_{a_{n+1} a'_{n+1}}^{a_1 a'_1 (8)}$  dans le canal  $s$ , conséquence directe de l'approximation  $u \simeq -s$  valide dans la limite de Regge : nous pouvons le vérifier simplement à une boucle ( $n = 0$ ) en utilisant l'expression de l'Amplitude d'échange d'un octet de couleur à l'ordre des arbres  $A_0^{(8)}$  (2.2.6) afin d'évaluer les deux contributions de  $A_1^{(8)}$  provenant des voies croisées  $s$  et  $u$ , dont les parties réelles (non projetées sur les états de couleur externes) sont respectivement proportionnelles à  $\frac{s}{t} \ln(\frac{s}{\underline{k}^2}) \epsilon_G(t)$  et

$\frac{u}{t} \ln(\frac{-u}{k^2}) \epsilon_G(t)$  qui sont bien deux quantités égales en module et de signe opposé dans la limite de Regge. En tenant compte des facteurs de couleur, on obtient simplement

$$A_1^{(8)} = A_0^{(8)} \ln(\frac{s}{k^2}) \epsilon_G(t). \quad (2.2.35)$$

Alors,

$$\begin{aligned} A^{(8)} &= A(s, t)_{a_{n+1}a'_{n+1}}^{(8)a_1a'_1} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) + A(u, t)_{a_{n+1}a'_{n+1}}^{(8)a_1a'_1} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a'_{n+1}} \tau^{a_{n+1}}) \\ &= A(s, t)_{a_{n+1}a'_{n+1}}^{(8)a_1a'_1} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) - ReA(s, t)_{a_{n+1}a'_{n+1}}^{(8)a_1a'_1} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a'_{n+1}} \tau^{a_{n+1}}) \end{aligned}$$

Ainsi en considérant les parties réelles :

$$\begin{aligned} ReA^{(8)} &= ReA^{(8)}(s, t) + ReA^{(8)}(u, t) \\ &= ReA_{a_{n+1}a'_{n+1}}^{(8)a_1a'_1}(s, t) (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes ([\tau^{a_{n+1}}, \tau^{a'_{n+1}}]) \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Et en notant  $A_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}$  la partie antisymétrique de  $A_{a_{n+1}a'_{n+1}}^{(8)a_1a'_1}$  sur les indices de couleur  $a_{n+1}$  et  $a'_{n+1}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} ReA^{(8)} &= ReA_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}(s, t) (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) \\ &\quad - A_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}(u, t) (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Comme les structures de couleur des parties réelle et imaginaire de  $A_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}(s, t)$  seront bien entendu identiques, nous en déduisons l'expression suivante pour l'amplitude complète avec échange d'octet de couleur dans la voie  $t$ , qui tient compte des contributions des voies  $s$  et  $u$  :

$$\begin{aligned} A^{(8)} &= A_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}(s, t) (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) \\ &\quad - A_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}(u, t) (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Ainsi, pour résumer notre démarche : nous calculons la partie imaginaire de l'amplitude  $ImA_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}(s, t)$  (antisymétrique en  $a_{n+1}$  et  $a'_{n+1}$ ) dans le canal  $s$  à partir des règles de coupures et nous obtenons les facteurs de couleur par projection sur les états de couleur  $(\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}})$  des lignes de quarks externes en haut et en bas de l'échelle gluonique. Nous en déduisons alors l'amplitude correspondante  $A_{[a_{n+1}, a'_{n+1}]}^{(8)a_1a'_1}(s, t) (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}})$  dans le canal  $s$ . En ajoutant la contribution du canal  $u$  que nous obtenons à partir de l'amplitude précédente en substituant  $s$  et  $u$  et en la multipliant par  $(-1)$  d'après (2.2.38), nous reconstruisons ainsi l'amplitude de diffusion complète avec échange d'octet de couleur dans la voie  $t$ .

Ainsi la structure de couleur de l'amplitude totale sera antisymétrique sur les indices de couleurs  $a_{n+1}$  et  $a'_{n+1}$  apparaissant au bas de l'échelle de reggéons. Dans la suite, nous ne noterons plus explicitement l'antisymétrie du facteur de couleur purement gluonique (non contracté sur les états de couleur des lignes des quarks externes) apparaissant dans l'expression de l'amplitude  $A_{a_{n+1}a'_{n+1}}^{a_1a'_1(8)}$  afin d'alléger les notations mais nous utiliserons cette propriété pour établir par récurrence son expression :  
 Calculons pour  $n=1$  (premier terme d'interaction entre gluons reggézés) le facteur de couleur :

$$\begin{aligned} (-1)G_1^{(8)} \otimes G_1^{(8)} &= -f_{a_1a_2b_1}f_{a'_1a'_2b_1}(\tau^{a_1}\tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_2}\tau^{a'_2}) \\ &= -\frac{1}{2}(f_{a_1a_2b_1}f_{a'_1a'_2b_1} - f_{a_1a'_2b_1}f_{a'_1a_2b_1})(\tau^{a_1}\tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_2}\tau^{a'_2}) \end{aligned}$$

d'après la discussion précédente. En utilisant l'identité de Jacobi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (-1)G_1^{(8)} \otimes G_1^{(8)} &= -\frac{1}{2}(-f_{a_1a'_1b_1}f_{a'_2a_2b_1})(\tau^{a_1}\tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_2}\tau^{a'_2}) \\ &= \frac{1}{8}(f_{a_1a'_1b_1}f_{b_1a_2a'_2}f_{a_1a'_1f}f_{a_2a'_2g})\tau^f \otimes \tau^g \\ &= \frac{N}{2} \frac{N}{4} G_0^{(8)} \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

avec  $G_0^{(8)} = \tau^a \otimes \tau^a$ .

Pour trouver la relation de récurrence qui lie les expressions des facteurs de couleur aux ordres  $n$  et  $n + 1$  nous partons de l'échelle de gluons à l'ordre  $n$  qui fait apparaître le facteur :

$$\begin{aligned} (-1)^n G_n^{(8)} \otimes G_n^{(8)} &= (-1)^n f_{a_1a_2b_1} \dots f_{a_n a_{n+1} b_n} f_{a'_1 a'_2 b_1} \dots f_{a'_n a'_{n+1} b_n} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) \\ &= (-1)^n f_{a_1a_2b_1} f_{a'_1a'_2b_1} \dots \left(-\frac{1}{2}\right) f_{a_n a'_n b_n} f_{a_{n+1} a'_{n+1} b_n} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+1}} \tau^{a'_{n+1}}) \end{aligned}$$

après avoir utilisé comme précédemment l'antisymétrie sur les indices de couleur  $a_{n+1}$  et  $a'_{n+1}$  des gluons du bas de l'échelle connectés à la ligne de quark puis l'identité de Jacobi. Connectons maintenant un barreau horizontal supplémentaire à l'échelle gluonique, nous obtenons alors le facteur de couleur à l'ordre  $n + 1$  :

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} G_{n+1}^{(8)} \otimes G_{n+1}^{(8)} &= (-1) f_{a_1a_2b_1} f_{a'_1a'_2b_1} \dots (-1) f_{a_n a_{n+1} b_n} f_{a'_n a'_{n+1} b_n} \\ &\quad \times (-1) f_{a_{n+1} a_{n+2} b_{n+1}} f_{a'_{n+1} a'_{n+2} b_{n+1}} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+2}} \tau^{a'_{n+2}}) \\ &= (-1) f_{a_1a_2b_1} f_{a'_1a'_2b_1} \dots (-1) f_{a_n a_{n+1} b_n} f_{a'_n a'_{n+1} b_n} \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{2}\right) f_{a_{n+1} a'_{n+1} b_{n+1}} f_{a_{n+2} a'_{n+2} b_{n+1}} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+2}} \tau^{a'_{n+2}}) \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

en ayant reproduit exactement le même calcul qu'au rang  $n$ , mais en exploitant cette fois l'antisymétrie sur les indices de couleur  $a_{n+2}$  et  $a'_{n+2}$ . Mais nous voyons alors que la constante de structure  $f_{a_{n+1}a'_{n+1}b_{n+1}}$  va créer la propriété d'antisymétrie au rang  $n$  sur les indices  $a_{n+1}$  et  $a'_{n+1}$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{n+1} G_{n+1}^{(8)} \otimes G_{n+1}^{(8)} \\
 &= (-1) f_{a_1 a_2 b_1} f_{a'_1 a'_2 b_1} \cdots \left(-\frac{1}{2}\right) f_{a_n a'_n b_n} f_{a_{n+1} a'_{n+1} b_n} \\
 &\quad \times \left(-\frac{1}{2}\right) f_{a_{n+1} a'_{n+1} b_{n+1}} f_{a_{n+2} a'_{n+2} b_{n+1}} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+2}} \tau^{a'_{n+2}}) \\
 &= (-1) f_{a_1 a_2 b_1} f_{a'_1 a'_2 b_1} \cdots \left(-\frac{1}{2}\right) f_{a_n a'_n b_n} \left(-\frac{N}{2}\right) f_{a_{n+2} a'_{n+2} b_n} (\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_{n+2}} \tau^{a'_{n+2}}) \\
 &= \left(-\frac{N}{2}\right) (-1)^n G_n^{(8)} \otimes G_n^{(8)} \tag{2.2.41}
 \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons un facteur  $(-\frac{N}{2})$  lorsque nous connectons un barreau horizontal supplémentaire à l'échelle gluonique. D'après cette relation de récurrence entre les facteurs de couleur apparaissant à l'ordre  $n+1$  et à l'ordre  $n$ , nous en déduisons l'expression pour tout  $n$  utilisée dans l'équation (2.2.25) :

$$\begin{aligned}
 (-1)^n G_n^{(8)} \otimes G_n^{(8)} &= \left(-\frac{N}{2}\right)^{n-1} (-1) G_1^{(8)} \otimes G_1^{(8)} \\
 &= -\left(-\frac{N}{2}\right)^n \frac{N}{4} G_0^{(8)} \tag{2.2.42}
 \end{aligned}$$

Notons que cette discussion est cruciale à plus d'un titre : ce facteur  $(-\frac{N}{2})$  apparaissant dans l'équation (2.2.25) sera responsable d'une compensation termes à termes à tous les ordres (nous pouvons vérifier pour  $n = 1$  l'annulation entre les diagrammes comportant plus de deux gluons dans le canal  $t$  et ceux qui n'ont pas une topologie d'échelle exacte, générés par les diagrammes des figures 2.3 et 2.4 de l'amplitude  $A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}$ ) qui conduira à la forme particulièrement simple en  $(\frac{s}{t})^{\epsilon_G(t)}$  de l'amplitude de diffusion  $A^{(8)}(s, t)$  avec échange d'octet de couleur dans la voie  $t$ . Cette simplification considérable ne se produira pas dans le cas de l'échange de singulet de couleur, dont l'expression de l'amplitude de diffusion  $Im A_n^{(1)}(s, t)$  à l'ordre  $n$  ne différera de celle de l'octet qu'à travers la valeur du facteur de couleur correspondant.

Repartons de l'expression (Eq.2.2.25) de  $Im A_n^{(8)}(s, t)$  et considérons sa transformée de Mellin  $F_n^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q})$  afin de nous débarrasser des intégrales intriquées, que nous définissons par :

$$\int_1^\infty d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \frac{Im A_n^{(8)}(s, t)}{A_0^{(8)}(s, t)} \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} = \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{q})^2} F_n^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q}) \tag{2.2.43}$$

Récrivons tout d'abord le terme d'intégration sur le volume élémentaire d'espace des phases (2.2.26) :

$$\int dV_{EP(n+2)} = K_n \left(\frac{\underline{k}^2}{s}\right) \prod_{i=1}^{n+1} \int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i} \delta(s\rho_{n+1} - \underline{k}^2) \int \prod_{j=1}^{n+1} d^2 \underline{k}_j \quad (2.2.44)$$

avec  $\rho_{n+2} = 0$  et  $\rho_0 = 1$ . Ce qui nous permet d'écrire la transformée de Mellin de  $Im A_n^{(8)}(s, t)$  selon :

$$\begin{aligned} & \int d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \frac{Im A_n^{(8)}(s, t)}{A_0^{(8)}(s, t)} \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} = \underline{q}^2 K_n \frac{N}{4} (-N)^n 4\pi\alpha_s (4\pi\alpha_s)^n \\ \times & \int \prod_{j=1}^n \frac{d^2 \underline{k}_j}{\underline{k}_j^2 (\underline{k}_j - \underline{q})^2} \frac{d^2 \underline{k}_{n+1}}{\underline{k}_{n+1}^2 (\underline{k}_{n+1} - \underline{q})^2} \int d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} s \frac{\underline{k}^2}{s} \prod_{i=1}^{n+1} \int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i} \delta(s\rho_{n+1} - \underline{k}^2) f_i\left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i}\right) \\ \times & \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_j^2 (\underline{k}_{j+1} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{j+1}^2 (\underline{k}_j - \underline{q})^2}{(\underline{k}_j - \underline{k}_{j+1})^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

où  $f_i\left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i}\right) = \left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i}\right)^{\epsilon_G(k_i^2) + \epsilon_G((k_i - q)^2)}$  et  $g^2 = 4\pi\alpha_s$ . Nous obtenons la transformée de Mellin suivante

$$\begin{aligned} & \int d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} s \frac{\underline{k}^2}{s} \prod_{i=1}^{n+1} \int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i} \delta(s\rho_{n+1} - \underline{k}^2) f_i\left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i}\right) \\ & = \prod_{i=1}^{n+1} \int_0^{\rho_{i-1}} \frac{d\rho_i}{\rho_i} f_i\left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i}\right) \rho_{n+1}^\omega \\ & = \prod_{i=1}^{n+1} \int d\tau_i \tau_i^{\omega-1} f_i\left(\frac{1}{\tau_i}\right) \\ & = \prod_{i=1}^{n+1} \int d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} f_i\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \\ & = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\omega - \epsilon_G(-\underline{k}_i^2) - \epsilon_G(-(\underline{k}_i - \underline{q})^2)} \end{aligned}$$

dans la limite de Regge et où l'on a utilisé l'expression de la transformée de Mellin usuelle :

$$\int d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^\alpha (\ln s)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{(\omega - \alpha)^{\beta+1}}$$

Ainsi (2.2.25) devient

$$\begin{aligned}
 \int d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \frac{Im A_n^{(8)}(s, t)}{A_0^{(8)}(s, t)} \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha_s N}{4\pi^2}\right)^{n+1} (-1)^n \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{q})^2} \frac{\underline{q}^2}{\omega - \epsilon_G(-\underline{k}^2) - \epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)} \\
 &\times \int d^2 \underline{k}_{n+1} \delta(\underline{k} - \underline{k}_{n+1}) \prod_{j=1}^n \int \frac{d^2 \underline{k}_j}{\underline{k}_j^2 (\underline{k}_j - \underline{q})^2} \frac{1}{\omega - \epsilon_G(-\underline{k}_j^2) - \epsilon_G(-(\underline{k}_j - \underline{q})^2)} \\
 &\times \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_j^2 (\underline{k}_{j+1} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{j+1}^2 (\underline{k}_j - \underline{q})^2}{(\underline{k}_j - \underline{k}_{j+1})^2} \right].
 \end{aligned}$$

La transformée de Mellin de la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion  $A^{(8)}(s, t)$  avec échange d'octet de couleur dans la voie  $t$  et production ouverte de  $n$  gluons dans le canal  $s$ , devient, après resommation de la série perturbative :

$$\begin{aligned}
 F^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q}) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha_s N}{4\pi^2}\right)^{n+1} (-1)^n \frac{\underline{q}^2}{\omega - \epsilon_G(-\underline{k}^2) - \epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)} \\
 &\times \int d^2 \underline{k}_{n+1} \delta(\underline{k} - \underline{k}_{n+1}) \prod_{j=1}^n \int \frac{d^2 \underline{k}_j}{\underline{k}_j^2 (\underline{k}_j - \underline{q})^2} \frac{1}{\omega - \epsilon_G(-\underline{k}_j^2) - \epsilon_G(-(\underline{k}_j - \underline{q})^2)} \\
 &\times \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_j^2 (\underline{k}_{j+1} - \underline{q})^2 + \underline{k}_{j+1}^2 (\underline{k}_j - \underline{q})^2}{(\underline{k}_j - \underline{k}_{j+1})^2} \right] \tag{2.2.46}
 \end{aligned}$$

Seule la première ligne subsiste pour le terme de Born correspondant à l'ordre  $n = 0$ , c'est à dire sans interaction entre les deux gluons verticaux réggéizés dans la voie  $t$ . Les termes d'ordre  $n$  successifs ( $n \geq 1$ ) correspondent aux corrections perturbatives contenant  $n$  gluons réels produits dans le canal  $s$  véhiculant, par l'intermédiaire du vertex effectif  $\Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i}$ , l'interaction entre les deux gluons réggéizés. Si cette série converge absolument et uniformément, alors  $F^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q})$  sera solution de l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 F^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q}) &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha_s N}{4\pi^2}\right) \frac{\underline{q}^2}{\omega - \epsilon_G(-\underline{k}^2) - \epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)} \\
 &- \frac{\alpha_s N}{4\pi^2} \int d^2 \underline{k}' \frac{F^{(8)}(\omega, \underline{k}', \underline{q})}{\omega - \epsilon_G(-\underline{k}^2) - \epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)} \frac{1}{\underline{k}'^2 (\underline{k}' - \underline{q})^2} \\
 &\times \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}^2 (\underline{k}' - \underline{q})^2 + \underline{k}'^2 (\underline{k} - \underline{q})^2}{(\underline{k} - \underline{k}')^2} \right] \tag{2.2.47}
 \end{aligned}$$

dont le premier terme extérieur au noyau correspond évidemment au terme de Born. L'action du noyau sur  $F^{(8)}(\omega, \underline{k}', \underline{q})$  reconstruit toute la série perturbative qui apparaît explicitement en (2.2.46). Nous faisons l'ansatz  $F^{(8)}$  indépendant de  $\underline{k}'$ . Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} (\omega - \epsilon_G(-\underline{k}^2) - \epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)F^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q}) &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{\alpha_s N}{4\pi^2} \right) \underline{q}^2 \\ + (\epsilon_G(-\underline{q}^2) - \epsilon_G(-\underline{k}^2) - \epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)F^{(8)}(\omega, \underline{k}, \underline{q}) & \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

d'après l'expression de  $\epsilon_G(t)$  en (2.2.30). En recherchant une solution  $F^{(8)}(\omega, \underline{q})$  indépendante de  $\underline{k}$ , nous obtenons simplement

$$F^{(8)}(\omega, \underline{q}) = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha_s N}{4\pi^2} \frac{\underline{q}^2}{\omega - \epsilon_G(-\underline{q}^2)}. \quad (2.2.49)$$

Nous pouvons remarquer que cette simplification importante de l'équation (2.2.48) repose de manière cruciale sur la valeur du facteur de couleur  $\frac{N}{2}$  dans le cas de l'échange d'octet.

Nous pouvons également observer une simplification de même nature (à deux boucles) entre les diagrammes générés par le vertex effectif dont la topologie ne correspond pas à celle d'une échelle exacte (représentés par les diagrammes (b),(c) de la Fig.(2.3) et (d),(e) de la Fig.(2.4) pour l'amplitude coupée  $A_{2 \rightarrow (3)}^{(8)\sigma}$ ) et ceux correspondant à trois gluons échangés dans la voie t.

Nous observons ici cette compensation s'opérer à tous les ordres au sein de l'équation intégrale (2.2.48) : en effet, les termes  $\epsilon_G(-\underline{k}^2)$  et  $\epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)$  du membre de gauche correspondent aux corrections radiatives dans l'approximation des logarithmes dominants introduites par l'hypothèse 'microscopique' de reggézation des gluons verticaux qui consistait à modifier leur propagateur suivant l'ansatz (2.2.31), tandis que les termes  $\epsilon_G(-\underline{k}^2)$  et  $\epsilon_G(-(\underline{k} - \underline{q})^2)$  du membre de droite de l'équation (2.2.48) proviennent des deux termes issus de la contraction des vertex effectifs, qui génèrent les diagrammes dont la topologie n'est pas celle d'une échelle exacte. Nous verrons que cette annulation n'existera plus dans le cas d'un échange de singlet de couleur, ce qui conduira à une équation intégrale bien plus délicate à résoudre.

En prenant la transformée de Mellin inverse de  $F^{(8)}(\omega, \underline{q})$  et en déformant le contour C (droite parallèle à l'axe imaginaire et située à droite des singularités de l'intégrand) de sorte qu'il encercle le pôle simple apparaissant en (2.2.49), nous obtenons, d'après (2.2.25) :

$$\begin{aligned}
 \text{Im } A^{(8)}(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Im } A_n^{(8)}(s, t) \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_C d\omega \left(\frac{s}{k^2}\right)^\omega A_0^{(8)} \int \frac{d^2 \underline{k}}{k^2(k-\underline{q})^2} F^{(8)}(\omega, \underline{q}) \\
 &= -\frac{\pi}{2} A_0^{(8)} \epsilon_G(t) \left(\frac{s}{k^2}\right)^{\epsilon_G(t)}. \tag{2.2.50}
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors l'amplitude  $A^{(8)}(s, t)$  dont (2.2.50) est la partie imaginaire, dans l'approximation des logarithmes dominants :

$$A^{(8)}(s, t) = \frac{\pi \epsilon_G(t)}{2 \sin(\pi \epsilon_G(t))} A_0^{(8)} \left(\frac{s}{t}\right)^{\epsilon_G(t)} \tag{2.2.51}$$

En remplaçant  $A_0^{(8)}$  par son expression (2.2.6) et en notant  $K_c = \delta_{\lambda_1 \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} G_0^{(8)}$ , nous obtenons une puissance de  $\frac{s}{t}$  supplémentaire ce qui induit un comportement de l'amplitude  $A_n^{(8)}(s, t)$  en  $(\frac{s}{t})^{\alpha_G(t)}$ , avec  $\alpha_G(t)$  la trajectoire de Regge du gluon donnée en (2.2.29) :

$$A^{(8)}(s, t) = 4\pi\alpha_s K_c \frac{\pi \epsilon_G(t)}{\sin(\pi \epsilon_G(t))} \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha_G(t)} \tag{2.2.52}$$

On en déduit aisément la contribution du canal  $u$  en tenant compte du signe  $(-)$  et de la substitution de  $s$  en  $u$  d'après la discussion précédente concernant l'eq.(2.2.38) :

$$A^{(8)}(u, t) = -4\pi\alpha_s K_c \frac{\pi \epsilon_G(t)}{\sin(\pi \epsilon_G(t))} \left(\frac{u}{t}\right)^{\alpha_G(t)} \tag{2.2.53}$$

Ainsi en sommant les deux expressions précédentes nous obtenons l'amplitude de diffusion complète pour l'échange d'un octet de couleur dans la voie  $t$  :

$$A^{(8)} = 4\pi\alpha_s K_c \frac{\pi \epsilon_G(t)}{\sin(\pi \epsilon_G(t))} \left(\frac{s}{-t}\right)^{\alpha_G(t)} [e^{-i\pi\alpha_G(t)} + \eta^{(8)}] \tag{2.2.54}$$

ce qui correspond bien au comportement attendu de l'amplitude d'échange dans la voie  $t$  d'une particule de moment au carré  $t = -\underline{q}^2$  qui suit une trajectoire de Regge donnée par  $\alpha_G(t) = 1 + \epsilon_G(t)$ , de signature impaire  $\eta^{(8)} = -1$ . Nous voyons d'après l'expression (2.2.29) que  $\alpha_G(t=0) = 1$  : c'est bien la trajectoire de Regge d'une particule de masse

nulle et de spin 1. Ainsi l'hypothèse de reggeization du gluon est vérifiée, ce qui justifie à posteriori l'ansatz (2.2.31) utilisé pour modifier les propagateurs des gluons reggézés constituant les barreaux verticaux de l'échelle gluonique, dont le comportement collectif décrit par l'amplitude d'échange dans la voie  $t$  d'un octet de couleur est bien celui d'une particule de Regge possédant les nombres quantiques du gluon.

## 2.3 L'équation intégrale BFKL pour l'échange d'un singulet de couleur

Nous avons obtenu la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion  $Im A^{(8)}$  d'un gluon reggézé dans la voie  $t$  à partir de l'amplitude de diffusion  $A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}$  dans la cinématique multi-Regge de deux quarks produisant deux quarks et  $n$  gluons réels, resommée à tous les ordres de perturbation. Dans le cas de l'échange d'un Poméron qui possède les nombres quantiques du vide, nous n'aurons plus à considérer un octet de couleur mais un état singulet de couleur se propageant dans la voie  $t$ , puisque l'échelle de gluons ne véhiculera plus de charge de couleur. Nous allons voir comment cette différence cruciale occasionnera une modification importante entre les équations intégrales décrivant l'échange d'un Poméron ou d'un gluon reggézé dans la voie  $t$ . Notons tout d'abord que l'ordre le plus bas permettant de véhiculer une charge de couleur nulle nécessite l'échange d'au moins deux gluons dans la voie  $t$ , qui constitue ainsi un modèle pour la description du poméron dur à l'ordre de Born. Dans ce cas les indices de couleur des deux gluons ne sont plus projetés sur les générateurs de  $SU(3)$  apparaissant à chaque couplage avec les deux lignes de quark externes, que nous avons notés  $(\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a_2} \tau^{a'_2})$  pour un diagramme du canal  $s$  et  $(\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes (\tau^{a'_2} \tau^{a_2})$  pour un diagramme du canal  $u$ . En effet nous aurons pour les deux contributions précédentes le même projecteur sur les états externes singulet de couleur, donc faisant apparaître  $Tr(\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes Tr(\tau^{a'_2} \tau^{a_2})$  au lieu des deux projecteurs précédent, que nous notons, une fois normalisé et les indices de couleur contractés avec ceux provenant des propagateurs des gluons :

$$\begin{aligned} G_0^{(1)} &= \frac{Tr(\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes Tr(\tau^{a'_2} \tau^{a_2})}{N^2} \\ &= \frac{N^2 - 1}{4N^2} . \end{aligned} \tag{2.3.55}$$

Nous constatons alors que la somme de la partie réelle de l'amplitude de la contribution du canal  $s$  et de l'amplitude de la contribution du canal  $u$  est nulle, ce qui signifie que seule la partie imaginaire de la contribution du canal  $s$  contribue dans le cas de l'échange d'un singulet de couleur. L'amplitude de diffusion, purement imaginaire, s'écrit à l'ordre de perturbation le plus bas :

$$A_1^{(1)} = K^{(1)} \int d^2 \underline{k} \frac{t}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{q})^2} \quad (2.3.56)$$

avec

$$K^{(1)} = 4i\alpha_s^2 \frac{s}{t} \delta_{\lambda_1 \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} G_0^{(1)} \quad (2.3.57)$$

Cette expression ne fait pas apparaître de facteur en  $\ln(\frac{s}{\underline{k}^2})$  contrairement à celle de l'échange d'un octet de couleur au même ordre de perturbation. De même si nous estimons l'expression resommée de l'amplitude  $A^{(1)}$  à tous les ordres comme nous l'avons fait pour le gluon réggéizé (cf. Eq.(2.2.54)), celle-ci sera supprimée d'une puissance de  $\frac{s}{\underline{k}^2}$  par rapport à l'expression (2.2.54) de  $A^{(8)}$  ce qui conduira à un facteur de signature  $[e^{-i\pi\alpha_P(t)} + \eta^{(1)}]$  avec la signature du Poméron

$$\eta^{(1)} = +1 \quad (2.3.58)$$

qui est donc paire. En effet, en développant la trajectoire de Regge du Poméron  $\alpha_P(t)$  en puissance de  $\alpha_s$  dans le facteur de signature précédent, la partie réelle s'annule (qui correspond bien à l'annulation entre la partie réelle de la contribution du canal  $s$  avec la contribution, toujours réelle, du canal  $u$ ) et nous obtenons bien une amplitude purement imaginaire à l'ordre dominant :

$$[e^{-i\pi\alpha_P(t)} + \eta^{(1)}] = i \mathcal{O}(\alpha_s) . \quad (2.3.59)$$

Les règles de coupures nous permettant d'établir l'expression de la partie imaginaire de l'amplitude  $Im A^{(8)}(s, t)$  dans le canal  $s$  seront donc suffisantes pour en déduire directement l'expression de l'amplitude totale pour l'échange du Poméron dans la voie  $t$ .

Nous allons définir la transformée de Mellin  $f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{q})$  de l'amplitude d'échange du Poméron BFKL comme nous l'avons fait précédemment pour celle du gluon réggéizé et en déduire l'équation intégrale correspondante appelée équation BFKL.

$$\int_1^\infty d\left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right) \frac{A^{(1)}}{s K^{(1)}} \left(\frac{s}{\underline{k}^2}\right)^{-\omega-1} = \int \frac{d^2 \underline{k}_1 d^2 \underline{k}_2}{\underline{k}_2^2 (\underline{k}_1 - \underline{q})^2} f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{q}) \quad (2.3.60)$$

Notons que certains auteurs utilisent une définition plus symétrique, ce qui donnera une expression légèrement différente de l'équation BFKL et de sa solution mais sera sans conséquence sur l'expression de l'amplitude  $A^{(1)}$ . Nous appellerons abusivement cette fonction  $f_\omega^{BFKL}$ , fonction de Green de l'équation BFKL, qui est en réalité une fonction de Green contractée sur les indices de Lorentz des moments des gluons entrant  $\underline{k}_1, -\underline{k}_1 + \underline{q}$  et sortant  $\underline{k}_2, -\underline{k}_2 + \underline{q}$  de l'échelle gluonique.

Afin d'établir l'équation intégrale vérifiée par  $f_\omega^{BFKL}$  nous utiliserons celle démontrée pour le cas de l'échange du gluon réggéizé, en remarquant que la normalisation adoptée

en (2.3.60) permet d'obtenir une expression très simple de  $f_\omega^{BFKL}$  à l'ordre de Born ( $n = 0$ ) en calculant la transformée de Mellin  $f_{1\omega}^{BFKL}$  de  $A_1^{(1)}$  en (2.3.56) :

$$f_\omega^{Born}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{r}) = \frac{1}{\omega} \delta^{(2)}(\underline{k}_1 - \underline{k}_2). \quad (2.3.61)$$

La seule différence (mis à part les expressions des termes d'ordre de Born à l'extérieur du noyau intégral du fait des normalisations choisies pour les fonctions de Green) réside dans l'expression du facteur de couleur contenu dans le noyau intégral de l'équation, qui apparaît donc à chaque nouvelle itération, c'est à dire à chaque fois qu'un gluon réel est produit par l'intermédiaire de l'apparition d'un vertex effectif supplémentaire le long de l'échelle. Calculons donc sa valeur pour l'échange d'un Poméron. Dans ce cas les constantes de structure apparaissant le long de l'échelle sont contractées sur des états de couleur externes  $Tr(\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) \otimes Tr(\tau^{a_{n+2}} \tau^{a'_{n+2}})$  symétriques en  $(a_1, a'_1)$  et  $(a_{n+2}, a'_{n+2})$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} G_{n+1}^{(1)} \otimes G_{n+1}^{(1)} \\ = & (-1) f_{a_1 a_2 b_1} f_{a'_1 a'_2 b_1} \dots (-1) f_{a_n a_{n+1} b_n} f_{a'_n a'_{n+1} b_n} \\ & \quad \times (-1) f_{a_{n+1} a_{n+2} b_{n+1}} f_{a'_{n+1} a'_{n+2} b_{n+1}} \frac{Tr(\tau^{a_1} \tau^{a'_1}) Tr(\tau^{a_{n+2}} \tau^{a'_{n+2}})}{N^2} \\ = & (-1) f_{a_1 a_2 b_1} f_{a'_1 a'_2 b_1} \dots (-1) f_{a_n a_{n+1} b_n} f_{a'_n a'_{n+1} b_n} (-1) f_{a_{n+1} a_{n+2} b_{n+1}} f_{a'_{n+1} a'_{n+2} b_{n+1}} \frac{\delta^{a_1 a'_1} \delta^{a_{n+2} a'_{n+2}}}{4N^2} \\ = & (-1) f_{a_1 a_2 b_1} f_{a'_1 a'_2 b_1} \dots (-1) f_{a_n a_{n+1} b_n} f_{a'_n a'_{n+1} b_n} (-N) \frac{\delta^{a_1 a'_1} \delta^{a_{n+1} a'_{n+1}}}{4N^2} \\ = & (-N) (-1)^n G_n^{(1)} \otimes G_n^{(1)} \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

Nous obtenons donc un facteur de couleur  $(-N)$  alors que nous avons trouvé ce facteur égal à  $(-\frac{N}{2})$  pour l'amplitude d'échange du gluon réggéizé. Cette différence sera lourde de conséquences sur l'expression de l'équation intégrale qui en résulte comme nous le verrons plus loin.

Nous déduisons l'équation intégrale BFKL vérifiée par la fonction de Green qui décrit l'échange du Poméron dur à l'ordre des logarithmes dominants  $f_\omega^{BFKL}$ , par analogie avec l'équation intégrale obtenue pour l'échange du gluon réggéizé, en remplaçant le terme de Born par l'expression obtenue en (3.3.3) et le facteur de couleur  $(-\frac{N}{2})$  par  $(-N)$  apparaissant dans le terme  $-\frac{\alpha_s N}{4\pi^2}$  du noyau intégral. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} & (\omega - \epsilon_G(-\underline{k}_1^2) - \epsilon_G(-(\underline{k}_1 - \underline{q})^2)) f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{q}) = \\ \delta^{(2)}(\underline{k}_1 - \underline{k}_2) - \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2 \underline{k}' & \frac{f_\omega^{BFKL}(\underline{k}', \underline{k}_2, \underline{q})}{\underline{k}_1^2 (\underline{k}' - \underline{q})^2} \left[ \underline{q}^2 - \frac{\underline{k}_1^2 (\underline{k}' - \underline{q})^2 + \underline{k}'^2 (\underline{k}_1 - \underline{q})^2}{(\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

en ayant défini  $\bar{\alpha}_s = \frac{\alpha_s N}{\pi}$ .

La simplification importante qui s'opérait dans l'équation intégrale (2.2.48) pour l'échange d'octet de couleur et permettait d'en déduire une forme très simple de la solution  $F^{(8)}(\omega, \underline{q})$  obtenue en (2.2.49), n'aura plus lieu dans l'équation BFKL en raison de la valeur du facteur de couleur ( $-N$ ) : la partie du membre de gauche qui contient les corrections virtuelles contenues dans les fonctions  $\epsilon_G(-\underline{k}_1^2)$  et  $\epsilon_G(-(\underline{k}_1 - \underline{q})^2)$  (qui décrivent la réggéization des gluons le long des barreaux verticaux de l'échelle) ne se compensent plus exactement avec les deux derniers termes issus des vertex effectifs correspondant aux diagrammes de production réelle de gluons dans la voie  $s$  (n'ayant pas une topologie d'échelle exacte).

Notons que les divergences infrarouges des termes de production de gluons réels se compensent exactement avec celles provenant des corrections virtuelles, ce qui rend l'équation BFKL convergente dans l'infra-rouge : nous pouvons faire apparaître les divergences de  $\epsilon_G(-\underline{k}_1^2)$  en  $\underline{k}' = 0$  et en  $\underline{k}' = \underline{k}_1$  comme des divergences 'doubles' (au sens de la régularisation dimensionnelle) en  $\underline{k}' = \underline{k}_1$  à partir d'un simple changement de variable :

$$\begin{aligned} \epsilon_G(-\underline{k}_1^2) &= \frac{\bar{\alpha}_s}{4\pi} \int d^2 \underline{k}' \frac{-\underline{k}_1^2}{\underline{k}'^2 (\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} \\ &= \frac{\bar{\alpha}_s}{4\pi} \int d^2 \underline{k}' \frac{-2\underline{k}_1^2}{(\underline{k}' - \underline{k}_1)^2 (\underline{k}'^2 + (\underline{k}' - \underline{k}_1)^2)}. \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

L'équation BFKL s'écrit alors sous une forme explicitement convergente dans l'infra-rouge, quand  $\underline{k}' = \underline{k}_1$  et  $\underline{k}' = \underline{q}$  :

$$\begin{aligned} \omega f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{q}) &= \delta^{(2)}(\underline{k}_1 - \underline{k}_2) + \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2 \underline{k}' \frac{-\underline{q}^2}{\underline{k}_1^2 (\underline{k}' - \underline{q})^2} f_\omega^{BFKL}(\underline{k}', \underline{k}_2, \underline{q}) \\ &+ \frac{1}{(\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} \left[ f_\omega^{BFKL}(\underline{k}', \underline{k}_2, \underline{q}) - \frac{\underline{k}_1^2}{\underline{k}'^2 + (\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{q}) \right] \\ &+ \frac{1}{(\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} \left[ \frac{\underline{k}'^2 (\underline{k}_1 - \underline{q})^2}{\underline{k}_1^2 (\underline{k}' - \underline{q})^2} f_\omega^{BFKL}(\underline{k}', \underline{k}_2, \underline{q}) - \frac{(\underline{k}_1 - \underline{q})^2}{(\underline{k}' - \underline{q})^2 + (\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{q}) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

Nous pouvons finalement lier l'annulation entre les divergences issues des corrections virtuelles molles introduites par la réggéization des gluons verticaux avec celles qui proviennent du brehmsstrahlung de gluons (mous) réels émis dans le canal  $s$  au théorème KLN (Kinoshita, Lee, Nauenberg [50]).

L'équation précédente devient dans le cas sans transfert d'impulsion (forward) :

$$\omega f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0) = \delta^{(2)}(\underline{k}_1 - \underline{k}_2) + K^{BFKL} \otimes f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0) \quad (2.3.66)$$

avec

$$\begin{aligned}
 & K^{BFKL} \otimes f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0) \\
 = & \frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} \int d^2 \underline{k}' \frac{1}{(\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} \left[ f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}', \underline{k}_2, 0) - \frac{k_1^2}{\underline{k}'^2 + (\underline{k}' - \underline{k}_1)^2} f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0) \right]. \quad (2.3.67)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser l'ensemble complet de fonctions propres  $\phi_{\nu}^n$  du noyau  $K^{BFKL}$

$$\phi_{\nu}^n(\underline{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\underline{k}^2)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{in\theta} \quad (2.3.68)$$

avec la paramétrisation polaire habituelle pour les vecteurs bidimensionnels transverses  $\underline{k}_i = (k_i, \theta_i)$ . Ces fonctions vérifient les relations d'orthonormalisation

$$\int d^2 \underline{k} \phi_{\nu}^n(\underline{k}) \phi_{\nu'}^{n'*}(\underline{k}) = \delta(\nu - \nu') \delta(n - n') \quad (2.3.69)$$

et de complétude

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \phi_{\nu}^n(\underline{k}_1) \phi_{\nu}^{n*}(\underline{k}_2) = \delta^{(2)}(\underline{k}_1 - \underline{k}_2). \quad (2.3.70)$$

En faisant agir le noyau intégral  $K^{BFKL}$  sur la fonction propre  $\phi_{\nu}^n$ , nous en déduisons l'expression de la valeur propre  $\omega_n(\nu)$  correspondante

$$\omega_n(\nu) = \bar{\alpha}_s \chi_n(\nu), \quad (2.3.71)$$

avec la fonction caractéristique  $\chi_n(\nu)$  de spin conforme  $n$  quelconque donnée par

$$\chi_n(\nu) = 2(\psi(1) - \text{Re}[\psi(\frac{|n|+1}{2} + i\nu)]), \quad (2.3.72)$$

où  $\psi$  est la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma$

$$\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x). \quad (2.3.73)$$

En utilisant la relation (2.3.70), nous obtenons finalement l'expression de la solution  $f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0)$  de l'équation BFKL en absence de transfert d'impulsion, donnée par

$$\begin{aligned}
 f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{\phi_{\nu}^n(\underline{k}_1) \phi_{\nu}^n(\underline{k}_2)}{\omega - \omega_n(\nu)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} \right)^{i\nu} \frac{e^{in(\theta_1 - \theta_2)}}{2\pi^2 k_1 k_2} \frac{1}{\omega - \omega_n(\nu)}. \quad (2.3.74)
 \end{aligned}$$

La solution générale pour des valeurs arbitraires de  $t$  présentée par Lipatov [52] presque dix ans après celle du cas forward, nécessite d'effectuer une transformation de Fourier à deux dimensions pour écrire l'équation BFKL dans l'espace bidimensionnel des paramètres d'impact. L'invariance conforme du noyau (plus précisément sous l'action d'une transformation du sous-groupe conforme transverse  $SL(2, \mathbb{C})$ ) permet alors de trouver un développement de la solution de l'équation BFKL pour un moment transféré quelconque sur la base des fonctions propres  $E_n^\nu$  du noyau invariant conforme. Nous ne considérerons pas ce cas général dans cette thèse.

La somme sur l'indice du spin conforme  $n$  se réduit à son premier terme dominant  $n = 0$  pour donner

$$f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} \right)^{i\nu} \frac{1}{2\pi^2 k_1 k_2} \frac{1}{\omega - \omega(\nu)} \quad (2.3.75)$$

où l'intégration sur les angles  $\theta_i$  a été réalisée (donnant un facteur  $\pi^2$ ). La fonction  $\omega(\nu)$  est la fonction caractéristique BFKL de spin conforme nul, définie

$$\omega(\nu) = \bar{\alpha}_s \chi(\nu) , \quad (2.3.76)$$

avec

$$\chi(\nu) = 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2} + i\nu\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - i\nu\right) . \quad (2.3.77)$$

Nous avons ainsi obtenu l'expression de la solution de l'équation BFKL sans transfert d'impulsion décrivant ainsi la propagation du Poméron dur dans une diffusion élastique entre deux quarks sur leur couche de masse. Nous observons une dépendance en la variable continue  $\nu$  de la singularité apparaissant pour des valeurs  $\omega = \omega(\nu)$  du moment de Mellin conjugué de  $s$ . Celle-ci fait apparaître une coupure plutôt qu'un pôle simple que nous ne pouvons associer directement à une valeur définie de l'intercept du Poméron comme cela avait été le cas pour l'échange d'un octet de couleur (2.2.38). Néanmoins, nous verrons précisément au chapitre 3, qu'en effectuant l'intégration en  $\nu$  dans l'approximation du point selle valable à grande rapidité, nous réduirons la coupure précédente à son point de branchement donné par  $\omega = \omega(\nu = 0)$  qui correspond bien à la singularité dominante dans le plan de la variable complexe  $\omega$ . Ainsi, en prenant la transformée de Mellin inverse de  $f_\omega(r^2 = 0)$  nous obtiendrons dans l'expression de l'amplitude  $A^{(1)}$  un terme en  $\left(\frac{s}{-t}\right)^{\omega(0)}$  caractéristique de la propagation d'une particule (appelée le Poméron dans notre cas, véhiculant les nombres quantiques du vide dans la voie  $t$ ) acquérant une trajectoire de Regge. Nous pourrions alors définir  $\omega(\nu = 0)$  comme l'intercept  $\epsilon_P(t_{min})$  du Poméron à l'ordre des logarithmes dominants (LO), apparaissant dans la trajectoire de Regge du Poméron

$$\alpha_P(t_{min}) = 1 + \epsilon_P(t_{min}) . \quad (2.3.78)$$

Bien que l'équation BFKL et donc l'expression  $f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{q})$  soient débarrassées de divergences infrarouges comme nous l'avons vu, celles-ci réapparaissent au niveau de l'amplitude (2.3.60). Mais le Poméron se couple en réalité à des hadrons (donc des objets neutres de couleur) via des interactions microscopiques avec les partons virtuels qui les constituent, ce qui permettra de restaurer l'invariance de jauge de QCD et de débarrasser définitivement de ces divergences infrarouges l'amplitude d'échange du Poméron BFKL au cours d'un processus hadronique 'physique' : le couplage du Poméron à chaque hadron sera décrit par des facteurs d'impact  $\Phi_i$ , qui contiendront les détails microscopiques des fonctions d'onde des partons à l'intérieur du hadron et pourront dans certains cas être en partie calculable perturbativement. L'expression de  $f_\omega(\underline{r}^2)$  se met alors sous la forme

$$f_\omega(\underline{r}^2) = \int \frac{d^2\underline{k}_1}{(\underline{k}_1 - \underline{r})^2} \frac{d^2\underline{k}_2}{\underline{k}_2^2} \Phi_1(\underline{k}_1, \underline{r}) \Phi_2(\underline{k}_2, \underline{r}) f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{r}) \quad (2.3.79)$$

appelée représentation en facteurs d'impact ou  $k_\perp$ -factorisation [51] de l'amplitude. Nous avons explicitement démontré cette factorisation dans le cas du couplage du Poméron dur à deux lignes de quarks  $i$  dont nous pouvons écrire l'expression très simple des facteurs d'impact correspondant  $\Phi_i = 2\pi g^2 \delta_{\lambda'_i \lambda_i}$ .

Nous verrons cette  $k_\perp$ -factorisation de l'amplitude apparaître de nouveau au chapitre 3, afin de décrire l'échange du Poméron dans le processus

$$\gamma_{L,T}^*(q_1) \gamma_{L,T}^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_1) \rho_L^0(k_2), \quad (2.3.80)$$

pour lequel les photons virtuels donnent naissance à une paire de quark-antiquark de taille transverse typique ( $1/Q_i$ ) dont le couplage au Poméron sera décrit par l'intermédiaire des facteurs d'impact correspondant  $\Phi_i(\underline{k}_i, \underline{r})$  qui s'annuleront pour  $\underline{k}_i = 0$  ou  $\underline{k}_i = \underline{r}$ , régularisant ainsi les divergences apparaissant dans les dénominateurs de l'expression (2.3.79) de  $f_\omega(\underline{r}^2)$ .



# Chapitre 3

## $k_{\perp}$ -factorisation du processus $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ et test du Poméron BFKL

### 3.1 Introduction aux tests expérimentaux de la dynamique BFKL

La pertinence phénoménologique de la dynamique BFKL a été largement consacrée à HERA, dans le processus de diffusion profondément inélastique présenté au chapitre 1 : les densités de gluons subissent une croissance importante quand l'énergie  $s$  du collisionneur augmente ( $x$  décroît), ce qui est décrit à la fois par BFKL (dans le cas forward) et par DGLAP [53] (jusqu'à l'ordre Next-to-Leading). La limite diffractive de DIS [54] observée dans les événements qui présentent un gap dans le détecteur entre le proton et les jets produits dans l'état final, est elle aussi décrite par les deux approches précédentes. Un autre processus étudié à HERA afin de tester BFKL à grande valeur de l'impulsion transférée (qui fournit l'échelle dure du processus) est la production exclusive de mésons vecteurs : le photon virtuel produit une paire quark-antiquark qui s'hadronise en méson vecteur dans l'état final, et celle-ci interagit avec le proton en échangeant un Poméron BFKL : les données des expériences H1 et ZEUS sont assez bien décrites par cette approche [55].

La resommation BFKL a aussi été étudiée dans les collisionneurs hadron-hadron : les jets de Mueller-Navelet, dont l'échelle dure est apportée par l'impulsion  $p_T$  transverse, sont séparés par un large gap en rapidité dans l'état final, sans transfert d'impulsion. Les données [56] de Tévatron I présentent un assez bon accord avec l'approche BFKL resommée à l'ordre Next-to-Leading-Log, que nous présenterons à la fin de ce chapitre. L'analyse de celles de CDF est en cours pour des valeurs du gap en rapidité plus élevées. Cette étude se poursuivra au LHC, qui permettra d'atteindre des rapidités encore plus

élevées pour ce processus. Le Tevatron permet aussi d'étudier un autre processus de production de jets séparés par un gap en rapidité mais dont l'échelle dure est cette fois fournie par les énergies  $E_T$  des jets produits [57] avec un transfert d'impulsion non nul. Enfin, le processus dont l'état final constitué d'un proton (diffusé) et d'un jet avec un grand  $p_T$  [58] qui fournit l'échelle dure peut aussi être observé, nécessitant pour cela un modèle pour le couplage du Poméron au proton. Ce processus a aussi été étudié jusqu'à l'ordre Next-to-Leading-Log.

Nous avons vu qu'il est assez difficile de proposer un test univoque de la resommation BFKL, bien souvent parce que les processus étudiés nécessitent l'inclusion d'un outil décrivant la partie non-perturbative du processus, par exemple dans le cas de DIS l'échelle dure est fournie par la virtualité du photon mais le couplage au proton fera nécessairement apparaître des échelles infrarouges. Ainsi un processus faisant intervenir des objets de petites tailles transverses, comme la diffusion entre photons virtuels est particulièrement adapté puisque les virtualités non nulles des photons empêchent la diffusion de l'échelle de gluons vers la région non-perturbative des moments infrarouges. Les collisions  $\gamma^*\gamma^*$  ont donc naturellement été observées tout d'abord au niveau de la section efficace totale, produisant le plus grand nombre d'événements. Ce processus a été étudié à LEP (qui fonctionnait d'abord à une énergie voisine de la masse du Z, puis à partir de l'année 2000, jusqu'à 209.2 GeV) à l'ordre Leading-Log [59] et Next-to-Leading-Log [60] ainsi que dans le modèle des dipôles [61]. Le point crucial pour révéler la resommation BFKL dans les collisions  $\gamma^*\gamma^*$  réside dans la possibilité de mesurer un nombre suffisant d'événements, ce qui dépend des caractéristiques expérimentales du collisionneur (luminosité, énergie et angle de détection des leptons diffusés qui doit être le plus faible possible, nous reviendrons sur ce point plus loin). L'angle de détection minimal à LEP est assez élevé (30 mrad), les énergie et luminosité sont assez limitées, ce qui n'a pas permis d'obtenir une statistique d'événements suffisante pour conclure à l'observation des effets de resommation BFKL. Citons enfin la production diffractive de mésons  $J/\Psi$  (dont la masse fournit l'échelle dure de ce processus exclusif) étudiée dans les collisions  $\gamma\gamma$  [64].

La prochaine génération de collisionneurs linéaires offrira une possibilité de tester avec une grande finesse les dynamiques particulières de QCD en produisant un grand nombre d'événements dans les collisions  $\gamma^*\gamma^*$ . Nous considérerons de plus un processus exclusif qui présente l'intérêt d'offrir une étude expérimentale des états finals bien plus fine qu'au niveau de la section efficace totale de la collision  $\gamma^*\gamma^*$ . En choisissant des événements dans lesquels deux mésons vecteurs sont produits dans la diffusion de paires de photons virtuels fortement énergétiques, nous avons accès au régime cinématique dans lequel l'approche perturbative est justifiée. Si de plus nous choisissons les événements avec des virtualités comparables de photons, la dynamique perturbative de Regge de QCD décrite dans le formalisme de l'équation BFKL que nous avons introduite au chapitre précédent, devrait dominer l'évolution partonique conventionnelle réalisée par l'équation DGLAP. Nous allons donc calculer la section efficace dans la limite de Regge

du processus

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \rho_L^0 \rho_L^0, \quad (3.1.1)$$

illustré dans la Fig.3.1 afin de faire des prédictions phénoménologiques pertinentes dans le cadre du projet de collisionneur linéaire ILC.

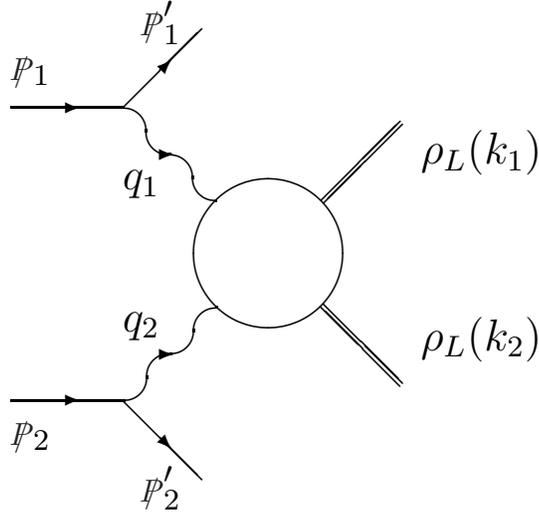


FIG. 3.1 – Amplitude du processus  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \rho_L^0 \rho_L^0$ .

Le double étiquetage des leptons finals donne en particulier la possibilité de séparer les contributions des diverses polarisations des photons contribuant à (3.1.1) dans le sous-processus

$$\gamma_{L,T}^*(q_1) \gamma_{L,T}^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_1) \rho_L^0(k_2). \quad (3.1.2)$$

La limite à haute énergie dans le centre de masse du processus (3.1.2) nous permettra d'utiliser le formalisme BFKL introduit au chapitre 2 et la factorisation dans l'espace des impulsions transverses qui en découle. Nous établirons la valeur de la section efficace du processus (3.1.1) avec échange du Poméron BFKL dans le canal  $t$  à l'ordre de Born pour une valeur quelconque de l'impulsion transférée. Nous considérerons aussi la possibilité des contributions d'échange de quarks évaluées dans le chapitre 1 apparaissant pour des valeurs plus faibles de  $s_{\gamma^* \gamma^*}$  et nous les comparerons à l'échange du Poméron BFKL. Notons que ce processus a été étudié avec resommation BFKL complète dans le cas particulier d'un moment transféré nul à l'ordre des logarithmes dominants LL ainsi qu'à l'ordre suivant NLL ([67] et [89]). Nous avons publié ces travaux dans l'article [66]. Nous évaluerons à la fin de ce chapitre les effets de la resommation BFKL complète du processus (3.1.1) dans cette dynamique restreinte à  $t = 0$ , en exploitant l'approche de [67].

## 3.2 Grandeurs cinématiques utilisées

La section efficace pour le processus (3.1.1) de la Fig.3.1 est liée à l'amplitude du processus (3.1.2), illustrée dans la Fig.3.2, par les facteurs de flux habituels de Weisacker-Williams pour les photons respectivement polarisés transversalement et longitudinalement

$$t(y_i) = \frac{1 + (1 - y_i)^2}{2}, \quad l(y_i) = 1 - y_i, \quad (3.2.1)$$

où les  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont les fractions d'impulsion longitudinale des photons de rayonnement de freinage (Bremsstrahlung) par rapport aux leptons incidents. Cette relation s'écrit [70]

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0)}{dy_1 dy_2 dQ_1^2 dQ_2^2} \\ &= \frac{1}{y_1 y_2 Q_1^2 Q_2^2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 [l(y_1) l(y_2) \sigma(\gamma_L^* \gamma_L^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0) + t(y_1) l(y_2) \sigma(\gamma_T^* \gamma_L^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0) \\ &+ l(y_1) t(y_2) \sigma(\gamma_L^* \gamma_T^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0) + t(y_1) t(y_2) \sigma(\gamma_T^* \gamma_T^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0)] . \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

La présence d'échelles dures  $Q_i^2$  nous permet d'appliquer la factorisation colinéaire à chaque vertex  $q\bar{q}$  des mésons et d'utiliser les amplitudes de distribution (1.3.62) pour décrire le contenu en paires  $q\bar{q}$  des mésons  $\rho$ , comme nous l'avons fait au chapitre 1 pour décrire l'échange de quarks dominant l'amplitude de diffusion du processus à énergie plus modérée, ce que nous illustrons de nouveau dans la Fig.3.2.

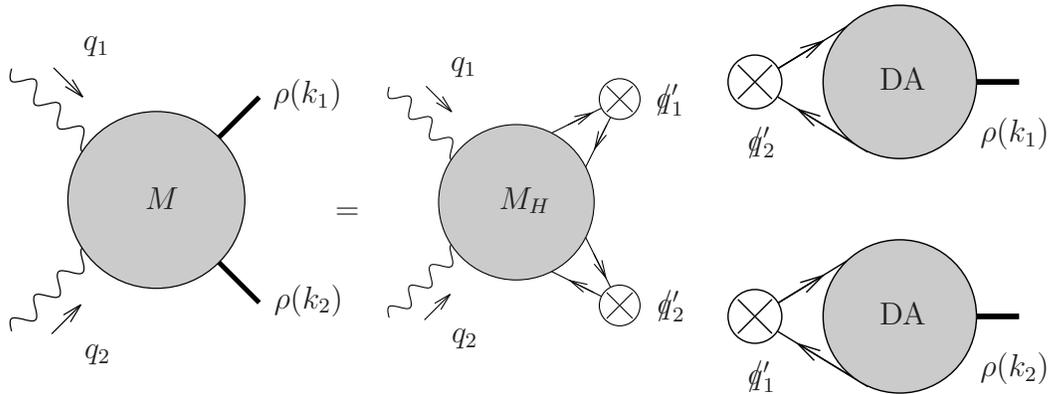


FIG. 3.2 – L'amplitude du processus  $\gamma^*(q_1)\gamma^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_1)\rho_L^0(k_2)$  décrit par la factorisation colinéaire à chaque vertex  $q\bar{q}\rho$ .

Dans la suite (sauf dans la section 3.4.3), l'amplitude  $M_H$  sera décrite en utilisant la représentation en facteur d'impact, valide à énergie élevée dans le centre de masse,

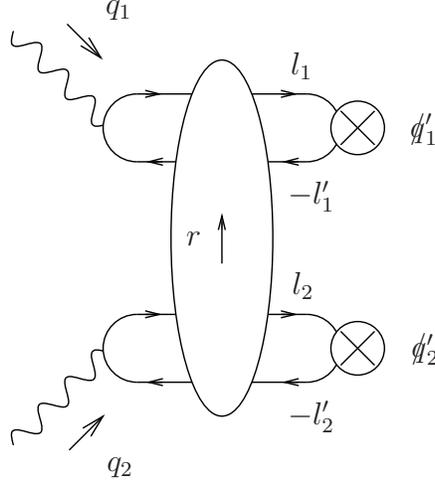


FIG. 3.3 – L’amplitude  $M_H$  dans la représentation d’impact. La bulle verticale symbolise l’interaction de deux dipôles  $q\bar{q}$  à travers l’échange de gluons à haute énergie  $s$ .

que nous avons présenté dans le second chapitre de cette thèse, et que nous représentons dans la Fig.3.3.

Nous allons maintenant préciser les grandeurs cinématiques de notre processus. Nous définissons pour cela les vecteurs  $q'_1$  et  $q'_2$  de Sudakov (équivalents aux vecteurs du cône de lumière) comme nous l’avons fait dans le premier chapitre, qui forment une base naturelle pour décrire la diffusion de deux particules tachyoniques que sont les photons virtuels, et qui satisfont  $2q'_1 \cdot q'_2 \equiv s \sim 2q_1 \cdot q_2$ . L’énergie dans le centre de masse usuelle  $s_{\gamma^* \gamma^*}$  est liée à la variable auxiliaire  $s$  par  $s_{\gamma^* \gamma^*} = s - Q_1^2 - Q_2^2$ . L’impulsion transférée dans le canal  $t$  est  $r = k_1 - q_1$ . Dans cette base, les impulsions des photons entrants s’écrivent

$$q_1 = q'_1 - \frac{Q_1^2}{s} q'_2 \quad \text{and} \quad q_2 = q'_2 - \frac{Q_2^2}{s} q'_1. \quad (3.2.3)$$

Les vecteurs de polarisation des photons longitudinalement polarisés sont

$$\epsilon_{\mu}^{L(1)} = \frac{q_{1\mu}}{Q_1} + \frac{2Q_1}{s} q'_{2\mu} \quad \text{and} \quad \epsilon_{\mu}^{L(2)} = \frac{q_{2\mu}}{Q_2} + \frac{2Q_2}{s} q'_{1\mu}, \quad (3.2.4)$$

avec  $\epsilon_{L(i)}^2 = 1$  et  $q_i \cdot \epsilon_{L(i)} = 0$ , tandis que les vecteurs de polarisation des photons transversalement polarisés sont des vecteurs bidimensionnels qui satisfont  $\epsilon_{T(i)}^2 = -1$  ( $i = 1, 2$ ) et  $q_i \cdot \epsilon_{T(i)} = 0$ .

Nous notons l’impulsion des quarks et des antiquarks entrant dans les fonctions d’onde des mésons comme  $l_1$  et  $l'_1$  pour la partie supérieure du diagramme du processus,  $l_2$  et  $l'_2$  pour la partie inférieure (voir la Fig.3.3). Les impulsions des mésons vecteurs

peuvent être projetées dans la base (3.2.3) sous la forme

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha(k_1) q'_1 + \frac{\underline{r}^2}{\alpha(k_1) s} q'_2 + r_\perp, \\ k_2 &= \beta(k_2) q'_2 + \frac{\underline{r}^2}{\beta(k_2) s} q'_1 - r_\perp. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Notons que notre convention est telle que pour n'importe quel vecteur  $v_\perp$  transverse de l'espace minkowskien,  $\underline{v}$  dénote sa forme euclidienne. Dans ce qui suit, nous traiterons les mésons  $\rho$  comme des objets sans masse donc se propageant dans les deux directions opposées définies par les vecteurs du cône de lumière  $q'_1$  et  $q'_2$ . Les quantités  $\alpha$  et  $\beta$  sont très proche de l'unité, et s'écrivent

$$\begin{aligned} \alpha(k_1) &\simeq 1 - \frac{Q_2^2 + \underline{r}^2}{s} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right), \\ \beta(k_2) &\simeq 1 - \frac{Q_1^2 + \underline{r}^2}{s} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right), \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

où  $\underline{r}^2 = -r_\perp^2$ . Ces quantités seront remplacées par 1 dans les applications phénoménologiques des sections 3.4 et 3.5. Dans cette décomposition, nous pouvons relier directement  $t = r^2$  à  $\underline{r}^2$  à travers l'approximation

$$t \sim -\frac{Q_1^2 Q_2^2}{s} - \underline{r}^2 \left(1 + \frac{Q_1^2}{s} + \frac{Q_2^2}{s} + \frac{\underline{r}^2}{s}\right) \quad (3.2.7)$$

A partir de l'eq.(3.2.7), le seuil de moment transféré  $|t|_{min}$  est donné par  $|t|_{min} = Q_1^2 Q_2^2 / s$ , correspondant à  $r_\perp = 0$ . Dans la gamme cinématique qui nous intéresse, la relation (3.2.7) peut être approximée en  $\underline{r}^2 = -t$ , dans la limite de Regge. Nous faisons le lien avec le processus  $e^+e^-$  en employant la même base de Sudakov pour les deux leptons entrants :

$$p_1 = \frac{1}{y_1} q'_1 + y_1 \frac{\underline{p}_1^2}{s} q'_2 + p_{\perp 1} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{1}{y_2} q'_2 + y_2 \frac{\underline{p}_2^2}{s} q'_1 + p_{\perp 2}, \quad \text{avec} \quad \underline{p}_i^2 = \frac{1 - y_i}{y_i^2} Q_i^2. \quad (3.2.8)$$

Ainsi nous obtenons

$$s_{e^+e^-} = \frac{s}{y_1 y_2} \left(1 + \frac{(1 - y_1)(1 - y_2) Q_1^2 Q_2^2}{s^2}\right) - 2\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2.$$

Dans la suite, puisque nous gardons seulement la contribution dominante en  $\mathcal{O}(s)$ , nous employons la relation approchée  $s_{e^+e^-} \sim s/(y_1 y_2)$ .

### 3.3 $k_{\perp}$ -factorisation de l'amplitude dans l'espace des impulsions transverses

Utilisons le formalisme que nous avons présenté dans le chapitre 2 consacré à l'équation BFKL : la transformé de Mellin inverse  $f_{\omega}(\underline{r}^2)$  de l'amplitude de diffusion peut être définie par

$$A(s, t) = i s \int \frac{d\omega}{2i\pi} e^{\omega Y} f_{\omega}(\underline{r}^2), \quad (3.3.1)$$

où  $Y$  est la rapidité qui s'écrit  $Y = \ln(s/s_0)$ .  $s_0$  est une échelle caractéristique dans le plan transverse, que nous avons notée  $\underline{k}^2$  et qui est fixé arbitrairement à l'ordre des logarithmes dominants.

$f_{\omega}(\underline{r}^2)$  s'exprime comme une convolution dans l'espace bidimensionnel des impulsions transverses entre les facteurs d'impact haut  $\Phi_1^{ab}(\underline{k}_1)$  et bas  $\Phi_2^{ab}(\underline{k}_2)$  (nous notons maintenant explicitement les indices de couleur  $a, b$ ) se couplant aux vertex haut et bas du poméron BFKL représenté par la fonction de Green de l'équation BFKL  $f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{r})$  avec  $\underline{r}$  l'impulsion transverse transférée dans le canal  $t$ , comme nous l'avons vu au chapitre 2 :

$$f_{\omega}(\underline{r}^2) = \int \frac{d^2 \underline{k}_1}{(\underline{k}_1 - \underline{r})^2} \frac{d^2 \underline{k}_2}{\underline{k}_2^2} \Phi_1^{ab(L,T)}(\underline{k}_1, \underline{r}) \Phi_2^{ab(L,T)}(\underline{k}_2, \underline{r}) f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{r}). \quad (3.3.2)$$

Afin de faire le lien avec notre étude à l'ordre de Born, notons que dans ce cas, la fonction de Green  $f_{\omega}^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{r})$  se réduit à une simple fonction delta de Dirac sur les impulsions des gluons échangés dans le canal  $t$ , entrant ( $\underline{k}_1$ ) et sortant ( $\underline{k}_2$ ) du noyau d'évolution BFKL

$$f_{\omega}^{Born}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{r}) = \frac{1}{\omega} \delta^{(2)}(\underline{k}_1 - \underline{k}_2), \quad (3.3.3)$$

expression que nous avons obtenue pour la solution sans interaction (donc sans noyau intégral) de l'équation intégrale BFKL. Ceci conduit à la représentation (cf. Fig.3.4) en facteur d'impact de l'amplitude de diffusion pour le processus (3.1.2), (que nous notons  $\mathcal{M}$  à l'ordre de Born)

$$\mathcal{M} = i s \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{r} - \underline{k})^2} \Phi_1^{ab(L,T)}(\underline{k}, \underline{r}) \Phi_2^{ab(L,T)}(\underline{k}, \underline{r}), \quad (3.3.4)$$

après avoir extrait le résidu en  $\omega = 0$  dans l'expression de l'amplitude (3.3.1).  $\Phi_1^{ab(L,T)}(\underline{k}, \underline{r})$  et  $\Phi_2^{ab(L,T)}(\underline{k}, \underline{r})$  sont les facteurs d'impact qui contiennent respectivement la description des transitions  $\gamma_{L,T}^*(q_1) \rightarrow \rho_L^0(k_1)$  et  $\gamma_{L,T}^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_2)$  via l'échange de

deux gluons de moments  $\underline{k}$  et  $\underline{r} - \underline{k}$  dans le canal  $t$ . Ils peuvent s'écrire à partir de la discontinuité dans le canal  $s$  des éléments de matrice  $S$  correspondant à ces sous-processus, dont les indices de Lorentz seront projetés sur les vecteurs de Sudakov provenant des polarisations longitudinales (donnant les facteurs  $\frac{2q_2'^{\mu}q_1'^{\nu}}{s}$  et  $\frac{2q_2'^{\nu}q_1'^{\mu}}{s}$  des gluons virtuels, c'est à dire que la projection s'opèrera selon  $q_2'$  dans le cas du facteur d'impact du haut  $\Phi_1^{ab(L,T)}$  et selon  $q_1'$  pour le facteur d'impact du bas  $\Phi_2^{ab(L,T)}$ ) qui dominent dans la limite de Regge comme nous l'avons détaillé dans le chapitre 2 :

$$\Phi_1^{ab(L,T)}(\underline{k}, \underline{r}) = \int \frac{d\beta}{(2\pi)^2 s} S_{\mu\nu}^{\gamma_{L,T}^*(q_1) \rightarrow \rho_L^0(k_1)} q_2'^{\mu} q_2'^{\nu}, \quad (3.3.5)$$

$$\Phi_2^{ab(L,T)}(\underline{k}, \underline{r}) = \int \frac{d\alpha}{(2\pi)^2 s} S_{\mu\nu}^{\gamma_{L,T}^*(q_2) \rightarrow \rho_L^0(k_2)} q_1'^{\mu} q_1'^{\nu}. \quad (3.3.6)$$

Les variables d'intégration  $\alpha$  et  $\beta$  sont les fractions d'impulsion longitudinale du moment  $k$  du gluon échangé dans la voie  $t$  dont la décomposition de Sudakov s'écrit :

$$k = \alpha q_1' + \beta q_2' + k_{\perp}. \quad (3.3.7)$$

Cette écriture correspond bien à la  $k_{\perp}$ -factorisation de l'amplitude que l'on observe simplement à l'ordre de Born : dans la limite de Regge, du fait de l'ordonnement fort des impulsions longitudinales, nous pourrions négliger la composante  $\alpha$  devant les autres composantes longitudinales (selon  $q_1'$ ) qui se propagent dans la boucle de la partie haute du processus décrit par le facteur d'impact  $\Phi_1^{ab(L,T)}$  (3.3.5) qui ne contiendra donc que l'élément d'intégration selon  $\beta$  (provenant de  $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} = \frac{s}{2} \int \frac{d\alpha}{(2\pi)^2} \int \frac{d\beta}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\perp}$ , le facteur  $2s$  étant absorbé dans  $S_{\mu\nu}$ ). De même  $\Phi_2^{ab(L,T)}$  (3.3.6) ne contiendra que l'intégration selon  $\alpha$  (la composante  $\beta$  y sera négligée). L'amplitude (3.3.4) calculée à l'ordre de Born dépend linéairement de  $s$  (ou de  $s_{\gamma^* \gamma^*}$  en négligeant les termes d'ordre  $Q_i^2/s$ ) puisque les facteurs d'impact sont indépendants de  $s$ . Nous allons préciser dans ce qui suit le détail des calculs menant à l'expression de ces facteurs d'impact à l'ordre dominant [71] (celle-ci sera aussi utilisée quand nous considérerons l'interaction entre les deux gluons reggézés dans la voie  $t$  resommée à tous les ordres dans l'approximation des logarithmes dominants via l'équation BFKL). Actuellement le facteur d'impact vers l'avant (limite forward)  $\gamma_L^*(Q^2) \rightarrow \rho_L^0$  a été calculé jusqu'à l'ordre suivant des logarithmes dominants dans [72].

Ils sont obtenus en faisant l'hypothèse de l'approximation colinéaire à chaque vertex  $q\bar{q}$  des mésons  $\rho$ , tout en projetant les moments des (anti)quarks sur la base de Sudakov

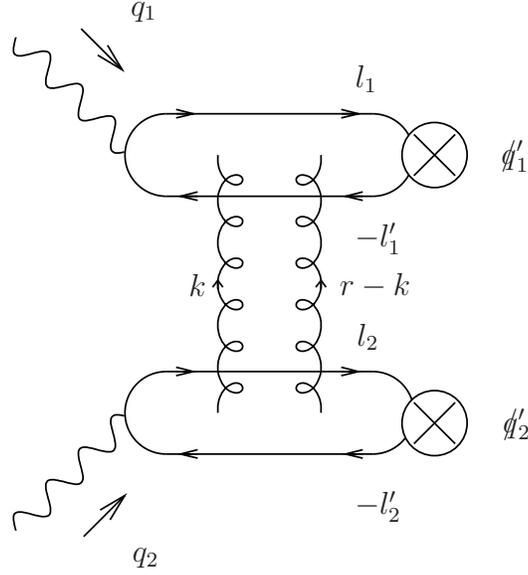


FIG. 3.4 – Amplitude  $M_H$  à l'ordre de Born. Les gluons se propageant dans le canal  $t$  sont attachés aux lignes de quarks de toutes les manières possibles.

$q'_1, q'_2,$

$$\begin{aligned}
 l_1 &= z_1 q'_1 + l_{\perp 1} + z_1 r_{\perp} - \frac{(l_{\perp 1} + z_1 r_{\perp})^2}{z_1 s} q'_2, \\
 l'_1 &= \bar{z}_1 q'_1 - l_{\perp 1} + \bar{z}_1 r_{\perp} - \frac{(-l_{\perp 1} + \bar{z}_1 r_{\perp})^2}{\bar{z}_1 s} q'_2, \\
 l_2 &= z_2 q'_2 + l_{\perp 2} - z_2 r_{\perp} - \frac{(l_{\perp 2} - z_2 r_{\perp})^2}{z_2 s} q'_1, \\
 l'_2 &= \bar{z}_2 q'_2 - l_{\perp 2} - \bar{z}_2 r_{\perp} - \frac{(-l_{\perp 2} - \bar{z}_2 r_{\perp})^2}{\bar{z}_2 s} q'_1.
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Dans l'approximation colinéaire, nous négligeons les impulsions transverses relatives  $l_{i\perp}$  des (anti)quarks entrant à chaque vertex  $q\bar{q}$  des mésons  $\rho$ . Nous allons établir l'expression de  $\Phi_1^{ab(L,T)}$  et en déduire celle de  $\Phi_2^{ab(L,T)}$  par symétrie. Notons que  $\underline{k}$  et  $\underline{r}$  apparaîtront en  $-\underline{k}$  et  $-\underline{r} + \underline{k}$  dans l'expression de  $\Phi_2^{ab(L,T)}$ . Nous devons considérer 6 diagrammes de topologie distincte participant à l'expression de  $\Phi_1^{ab(L,T)}$ , représentés dans la Fig.3.5 et dont nous détaillons les expressions des sous processus durs produisant une paire quark-antiquark ouverte (donc décrits par leurs spineurs de Dirac) de moments  $l_1$  et  $l'_1$ . Nous utilisons un vecteur polarisation des photons  $\epsilon$  générique. Nous omettons par simplicité les constantes multiplicatives ainsi que les indices de polarisation des photons. Nous obtenons les 6 contributions suivantes au tenseur  $S_{\mu\nu}$  :

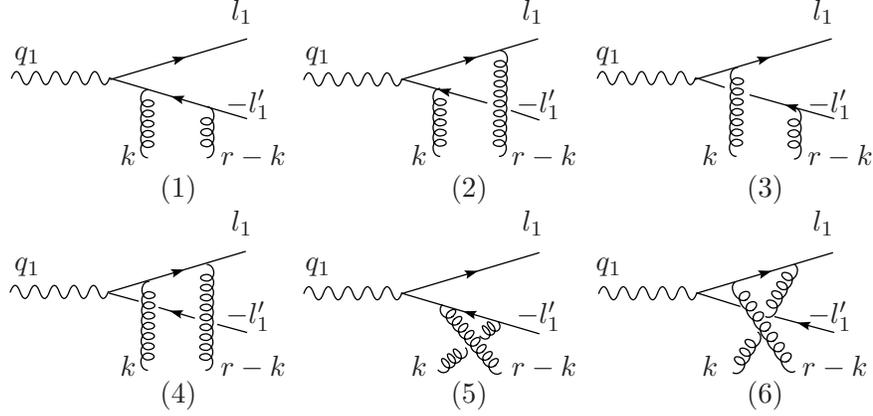


FIG. 3.5 – Diagrammes contribuant au calcul du facteur d'impact  $\Phi_1^{ab(L,T)}$ .

$$S_{\mu\nu}^{(1)} = \bar{u}(l_1) \not{\epsilon} \frac{l_1 - q_1}{(l_1 - q_1)^2 + i\epsilon} \gamma_{\mu} \frac{l_1 - q_1 + k}{(l_1 - q_1 + k)^2 + i\epsilon} \gamma_{\nu} v(l'_1), \quad (3.3.9)$$

$$S_{\mu\nu}^{(2)} = \bar{u}(l_1) \gamma_{\nu} \frac{q_1 - l'_1 - k}{(q_1 - l'_1 - k)^2 + i\epsilon} \not{\epsilon} \frac{-l'_1 - k}{(-l'_1 - k)^2 + i\epsilon} \gamma_{\mu} v(l'_1), \quad (3.3.10)$$

$$S_{\mu\nu}^{(3)} = \bar{u}(l_1) \gamma_{\mu} \frac{l'_1 + k}{(l_1 + k)^2 + i\epsilon} \not{\epsilon} \frac{l'_1 - q_1 + k}{(l_1 - q_1 + k)^2 + i\epsilon} \gamma_{\nu} v(l'_1), \quad (3.3.11)$$

$$S_{\mu\nu}^{(4)} = \bar{u}(l_1) \gamma_{\nu} \frac{q_1 - l'_1 - k}{(q_1 - l'_1 - k)^2 + i\epsilon} \gamma_{\mu} \frac{-l'_1 + q_1}{(q_1 - l'_1)^2 + i\epsilon} \not{\epsilon} v(l'_1), \quad (3.3.12)$$

$$S_{\mu\nu}^{(5)} = \bar{u}(l_1) \not{\epsilon} \frac{l_1 - q_1}{(l_1 - q_1)^2 + i\epsilon} \gamma_{\nu} \frac{-l'_1 - k}{(l'_1 + k)^2 + i\epsilon} \gamma_{\mu} v(l'_1), \quad (3.3.13)$$

$$S_{\mu\nu}^{(6)} = \bar{u}(l_1) \gamma_{\mu} \frac{l_1 + k}{(l_1 + k)^2 + i\epsilon} \gamma_{\nu} \frac{q_1 - l'_1}{(l'_1 - q_1)^2 + i\epsilon} \not{\epsilon} v(l'_1). \quad (3.3.14)$$

Pour des photons longitudinalement polarisés, nous pouvons écrire le vecteur de polarisation  $\epsilon_{\mu}^{L(1)} = \frac{2Q_1}{s} q'_{2\mu}$  en exploitant l'invariance de jauge électromagnétique de l'amplitude. Ainsi nous obtenons après contraction sur les vecteurs de Sudakov  $q_2^{\mu}$  et  $q_2^{\nu}$  (nous omettons dans la suite les facteurs constants ainsi que les spineurs) :

$$\int d\beta S_{\mu\nu}^{(1,L)} q_2^{\mu} q_2^{\nu} = \int d\beta \frac{z_1 \bar{z}_1}{-z_1^2 r^2 - \mu_1^2 \beta_1 - \beta}, \quad (3.3.15)$$

$$\int d\beta S_{\mu\nu}^{(2,L)} q_2'^{\mu} q_2'^{\nu} = \int d\beta \frac{1}{s} \frac{1}{(\beta - \beta_3)(\beta - \beta_2)}, \quad (3.3.16)$$

$$\int d\beta S_{\mu\nu}^{(3,L)} q_2'^{\mu} q_2'^{\nu} = \int d\beta \frac{1}{s} \frac{1}{(\beta - \beta_4)(\beta - \beta_1)}, \quad (3.3.17)$$

$$\int d\beta S_{\mu\nu}^{(4,L)} q_2'^{\mu} q_2'^{\nu} = \int d\beta \frac{z_1 \bar{z}_1}{-\bar{z}_1^2 r^2 - \mu_1^2} \frac{1}{\beta_3 - \beta}, \quad (3.3.18)$$

$$\int d\beta S_{\mu\nu}^{(5,L)} q_2'^{\mu} q_2'^{\nu} = \int d\beta \frac{z_1 \bar{z}_1}{-z_1^2 r^2 - \mu_1^2} \frac{1}{\beta - \beta_2}, \quad (3.3.19)$$

$$\int d\beta S_{\mu\nu}^{(6,L)} q_2'^{\mu} q_2'^{\nu} = \int d\beta \frac{z_1 \bar{z}_1}{-\bar{z}_1^2 r^2 - \mu_1^2} \frac{1}{\beta - \beta_4}, \quad (3.3.20)$$

avec les pôles simples  $\beta_i$  donnés par :

$$\beta_1 = \frac{-\underline{k}^2 + 2z_1 \underline{k} \cdot \underline{r} - \bar{z}_1 Q_1^2 - \frac{\bar{z}_1^2}{z_1} r^2}{\bar{z}_1 s} + i\epsilon, \quad (3.3.21)$$

$$\beta_2 = \frac{\underline{k}^2 - 2\bar{z}_1 \underline{k} \cdot \underline{r}}{\bar{z}_1 s} - i\epsilon, \quad (3.3.22)$$

$$\beta_3 = \frac{-\underline{k}^2 + 2\bar{z}_1 \underline{k} \cdot \underline{r} - z_1 Q_1^2 - \frac{\bar{z}_1^2}{z_1} r^2}{z_1 s} + i\epsilon, \quad (3.3.23)$$

$$\beta_4 = \frac{\underline{k}^2 - 2z_1 \underline{k} \cdot \underline{r}}{z_1 s} - i\epsilon, \quad (3.3.24)$$

avec  $\mu_i^2 = Q_i^2 z_i \bar{z}_i + m^2$ , où  $m$  est la masse du quark. La limite  $m \rightarrow 0$  est régulière et nous nous limiterons au cas des quarks légers, prenant de ce fait  $m = 0$ . Nous pouvons refermer le contour d'intégration dans le plan  $\beta$ -complexe sur le demi-cercle inférieur qui contiendra les pôles  $\beta_2$  et  $\beta_4$  n'apparaissant que pour les contributions (5), (6), (2) et (3), dont la somme sera (dans l'ordre d'apparition et en omettant les autres termes constants)

$$\int d\beta S_{\mu\nu}^{(L)} q_2^{\prime\mu} q_2^{\prime\nu} = z_1 \bar{z}_1 \left( \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} - \frac{1}{(z_1 \underline{r} - \underline{k})^2 + \mu_1^2} - \frac{1}{(\bar{z}_1 \underline{r} - \underline{k})^2 + \mu_1^2} \right). \quad (3.3.25)$$

Notons que nous pouvons refermer le contour sur le grand cercle car la somme des 6 intégrands converge plus vite que  $\frac{1}{|\beta|}$  quand  $\beta$  tend vers l'infini : les intégrands des contributions (2) et (3) convergent alors en  $\frac{1}{\beta^2}$ , tandis que le facteur devant  $\frac{1}{\beta}$  s'annule dans la somme des contributions (1) avec (5) et (4) avec (6).

Nous procédons de la même manière qu'au chapitre 1 pour décrire l'hadronisation de la paire de quark-antiquark en mésons  $\rho_L^0$  : nous refermons les indices spinoriels en utilisant l'identité de Fierz afin de faire apparaître la structure de Lorentz ( $\gamma_{\mu}$ ) correspondant aux nombres quantiques du méson vecteur. En rétablissant les couplages, la structure de couleur ainsi que les termes constants, nous obtenons pour les photons longitudinalement polarisés, l'expression suivante du facteur d'impact :

$$\Phi_i^{ab(L)}(\underline{k}, \underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} 8\pi^2 \alpha_s \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{\delta^{ab}}{2N_c} Q_i f_{\rho} \alpha(k_i) \int_0^1 dz_i z_i \bar{z}_i \phi(z_i) P_P(z_i, \underline{k}, \underline{r}, \mu_i), \quad (3.3.26)$$

avec

$$P_P(z_i, \underline{k}, \underline{r}, \mu_i) = \frac{1}{z_i^2 \underline{r}^2 + \mu_i^2} + \frac{1}{\bar{z}_i^2 \underline{r}^2 + \mu_i^2} - \frac{1}{(z_i \underline{r} - \underline{k})^2 + \mu_i^2} - \frac{1}{(\bar{z}_i \underline{r} - \underline{k})^2 + \mu_i^2}. \quad (3.3.27)$$

Pour les photons transversalement polarisés, on obtient de même

$$\begin{aligned} \Phi_i^{ab(T)}(\underline{k}, \underline{r}) \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} 4\pi^2 \alpha_s \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{\delta^{ab}}{2N_c} f_{\rho} \alpha(k_i) \int_0^1 dz_i (z_i - \bar{z}_i) \phi(z_i) \underline{\epsilon} \cdot \underline{Q}(z_i, \underline{k}, \underline{r}, \mu_i), \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

où

$$\underline{Q}(z_i, \underline{k}, \underline{r}, \mu_i) = \frac{z_i \underline{r}}{z_i^2 \underline{r}^2 + \mu_i^2} - \frac{\bar{z}_i \underline{r}}{\bar{z}_i^2 \underline{r}^2 + \mu_i^2} + \frac{\underline{k} - z_i \underline{r}}{(z_i \underline{r} - \underline{k})^2 + \mu_i^2} - \frac{\underline{k} - \bar{z}_i \underline{r}}{(\bar{z}_i \underline{r} - \underline{k})^2 + \mu_i^2} \quad (3.3.29)$$

est proportionnel au facteur d'impact de la production ouverte de paire de quark-antiquark à partir d'un photon transversalement polarisé.

Les facteurs d'impact (3.3.27) et (3.3.29) s'annulent quand  $\underline{k} \rightarrow 0$  ou  $\underline{r} - \underline{k} \rightarrow 0$  à cause de l'invariance de jauge de QCD.

Notons que les facteurs multiplicatifs des expressions (3.3.26 et 3.3.28) diffèrent d'un facteur  $2Q_i$ , qui provient du terme de contribution non supprimée par l'invariance de jauge du vecteur de polarisation longitudinale (3.2.4).

Dans les formules (3.3.26 et 3.3.28),  $\phi$  est l'amplitude de distribution du meson  $\rho^0$  final polarisé longitudinalement, que nous avons utilisée au chapitre 1 pour décrire l'hadronisation des paires quark-antiquarks en mésons vecteurs dans l'état final dans la factorisation colinéaire. Nous avons vu que dans le cas d'un quark  $q$  d'une seule saveur (cf. l'eq.(1.3.62)), elle est définie par

$$\langle 0 | \bar{q}(x) \gamma^{\mu} q(-x) | \rho_L(p) \rangle = f_{\rho} p^{\mu} \int_0^1 dz e^{i(2z-1)(px)} \phi(z), \quad (3.3.30)$$

où la constante de couplage est  $f_{\rho} = 216$  MeV et les liens de jauge sont omis pour simplifier la notation. Les amplitudes pour la production des mésons  $\rho^0$  sont obtenues à partir de (3.3.30) en notant que  $|\rho^0\rangle = 1/\sqrt{2}(|\bar{u}u\rangle - |\bar{d}d\rangle)$ .

Nous avons vu également qu'en raison de l'invariance conforme colinéaire l'amplitude de distribution  $\phi(z)$  (3.3.30) possède un développement en termes des polynômes de Gegenbauer (en omettant la dépendance dans l'échelle de renormalisation fixée à l'échelle de factorisation  $\mu = Q$ )

$$\phi(z) = 6z(1-z) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} C_{2n}^{3/2}(2z-1) \right) \quad (3.3.31)$$

que nous restreignons dans cette étude phénoménologique au terme asymptotique ( $a_{2n} = 0$ ) dominant le développement [32, 73], excepté pour une brève discussion à la fin de ce chapitre.

Notons que l'eq.(3.3.30) correspond à l'amplitude de twist dominant. Un tel objet peut être employé à proprement parler seulement pour des  $Q^2$  asymptotiquement grands. Dans l'application phénoménologique des sections 3.4.2 et 3.5.3, et afin d'obtenir des sections efficaces mesurables, la diminution drastique des amplitudes avec l'augmentation des virtualités des photons  $Q_i^2$ , combinée aux conditions expérimentales du projet de collisionneur linéaire ILC, exige des valeurs plutôt basses de  $Q_i^2$  (de l'ordre de 1 GeV<sup>2</sup>) pour lesquelles les contributions de twist sous-dominant pourraient être significatives. Ceci peut être pris en considération dans une approche plus phénoménologique qui incorporera la distribution de quark intrinsèque dépendant de  $k_T$  et qui dépasse la factorisation colinéaire de QCD [74] utilisée ici. Nous ne considérons pas ces effets ici et nous nous situons uniquement dans le cadre théorique offert par l'approximation colinéaire.

Les amplitudes de diffusion  $\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2}$  du processus (3.1.2) porteront les indices  $\lambda_1 \lambda_2$  des polarisations des photons virtuels incidents. Afin de les évaluer, nous utilisons l'eq.(3.3.4)

associée aux eqs.(3.3.26-3.3.29) complétées par les choix suivants des vecteurs de polarisation transverse des photons

$$\underline{\epsilon}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp 1, -i) \quad (3.3.32)$$

et des vecteurs de polarisation longitudinale donné en (3.2.4). Dans le cas où les deux photons sont longitudinaux,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  :

$$\mathcal{M}_{00} = i s C Q_1 Q_2 \int_0^1 dz_1 dz_2 z_1 \bar{z}_1 \phi(z_1) z_2 \bar{z}_2 \phi(z_2) M_{00}(z_1, z_2), \quad (3.3.33)$$

avec

$$M_{00}(z_1, z_2) = \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{r} - \underline{k})^2} P_P(z_1, \underline{k}, \underline{r}, \mu_1) P_P(z_2, -\underline{k}, -\underline{r}, \mu_2); \quad (3.3.34)$$

Dans le cas où l'un des deux photons est longitudinal (celui d'indice 1, c'est à dire de la partie supérieure du diagramme de la Fig.(3.4)), l'autre transverse  $\lambda_2 = +, -$  :

$$\mathcal{M}_{0\lambda_2} = i s \frac{C}{2} Q_1 \int_0^1 dz_1 dz_2 z_1 \bar{z}_1 \phi(z_1) (z_2 - \bar{z}_2) \phi(z_2) M_{0\lambda_2}(z_1, z_2), \quad (3.3.35)$$

avec

$$M_{0\lambda_2}(z_1, z_2) = \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{r} - \underline{k})^2} P_P(z_1, \underline{k}, \underline{r}, \mu_1) \underline{Q}(z_2, -\underline{k}, -\underline{r}, \mu_2) \cdot \underline{\epsilon}^{\lambda_2}. \quad (3.3.36)$$

Dans le cas symétrique au précédent ( $\lambda_1 = +, -$  et  $\lambda_2 = 0$ ), nous avons :

$$\mathcal{M}_{\lambda_1 0} = i s \frac{C}{2} Q_2 \int_0^1 dz_1 dz_2 (z_1 - \bar{z}_1) \phi(z_1) z_2 \bar{z}_2 \phi(z_2) M_{\lambda_1 0}(z_1, z_2), \quad (3.3.37)$$

avec

$$M_{\lambda_1 0}(z_1, z_2) = \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{r} - \underline{k})^2} \underline{Q}(z_1, \underline{k}, \underline{r}, \mu_1) \cdot \underline{\epsilon}^{\lambda_1} P_P(z_2, -\underline{k}, -\underline{r}, \mu_2). \quad (3.3.38)$$

Enfin dans le cas où les deux photons sont transverses,  $\lambda_1 = +, -, \lambda_2 = +, -$  :

$$\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2} = i s \frac{C}{4} \int_0^1 dz_1 dz_2 (z_1 - \bar{z}_1) \phi(z_1) (z_2 - \bar{z}_2) \phi(z_2) M_{\lambda_1 \lambda_2}(z_1, z_2), \quad (3.3.39)$$

avec

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}(z_1, z_2) = \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{r} - \underline{k})^2} \underline{Q}(z_1, \underline{k}, \underline{r}, \mu_1) \cdot \underline{\epsilon}^{\lambda_1(1)} \underline{Q}(z_2, -\underline{k}, -\underline{r}, \mu_2) \cdot \underline{\epsilon}^{\lambda_2(2)}. \quad (3.3.40)$$

Nous avons noté  $C = 2\pi \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_{\rho}^2$ . Finalement, nous pouvons écrire la section efficace différentielle dans la limite de Regge (négligeant les termes d'ordre  $Q_i^2/s$ ) en termes des amplitudes ci-dessus, selon

$$\frac{d\sigma^{\gamma_{\lambda_1}^* \gamma_{\lambda_2}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0}}{dt} = \frac{|\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2}|^2}{16\pi s^2} \quad (3.341)$$

qui ne dépendra pas de  $s$ .

### 3.4 Section efficace différentielle de $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ à l'ordre de Born

#### 3.4.1 Résultats analytiques pour $M_{\lambda_1 \lambda_2}$ des intégrations en $k_{\perp}$

Dans cette section nous récapitulons les résultats pour les amplitudes  $M_{\lambda_1 \lambda_2}$  obtenues après avoir effectué analytiquement les intégrales en  $k_{\perp}$ . De telles expressions analytiques nous donnent la possibilité d'étudier de diverses limites cinématiques dans les variables  $Q_1^2, Q_2^2, t$ . Les intégrations en  $k_{\perp}$  ont été faites en utilisant la méthode de Ref.[65] qui exploite d'une manière efficace des changements de variables de type conforme sur les intégrales impliquées, techniques issues des théories conformes des champs bidimensionnelles. L'intégrale générique en  $k_{\perp}$  traitée ici implique un intégrant qui correspond à un diagramme en boîte à deux propagateurs massifs distincts et à deux propagateurs sans masse. Pour cette raison, les intégrations en  $k_{\perp}$  s'expriment à la fin en termes d'expression assez volumineuses.

Dans le cas transverse-transverse (TT), l'amplitude peut être exprimée en fonction de deux termes faisant apparaître les projecteurs orthogonaux sur l'espace transverse bidimensionnel :

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}(z_1, z_2) = \left[ a(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) \left( \delta^{ij} - \frac{r^i r^j}{r^2} \right) + b(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) \frac{r^i r^j}{r^2} \right] \epsilon_i^{\lambda_1} \epsilon_j^{\lambda_2}, \quad (3.4.1)$$

où  $r^i$  est la composante  $i$  de  $\underline{r}$ .

Pour le cas longitudinal-transverse (LT), reconstituant la dépendance selon toutes les variables, on définit à partir de (3.3.36) et de (3.3.38), la fonction scalaire suivante :

$$M_{0\lambda}(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) = f(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) \underline{r} \cdot \underline{\epsilon}^{\lambda}, \quad (3.4.2)$$

et de manière équivalente :

$$M_{\lambda 0}(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) = f(\underline{r}; Q_2, Q_1; z_2, z_1) \underline{r} \cdot \underline{\epsilon}^{\lambda}. \quad (3.4.3)$$

Pour le cas longitudinal-longitudinal (LL), nous pouvons écrire l'amplitude comme

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{00}(z_1, z_2) = & - \left( \frac{1}{z_1^2 r^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{\bar{z}_1^2 r^2 + \mu_1^2} \right) J_{3\mu_2}(z_2) - \left( \frac{1}{z_2^2 r^2 + \mu_2^2} + \frac{1}{\bar{z}_2^2 r^2 + \mu_2^2} \right) J_{3\mu_1}(z_1) \\ & + J_{4\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) + J_{4\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, \bar{z}_2). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$J_{3\mu}$  et  $J_{4\mu_1\mu_2}$  sont des intégrales bidimensionnelles avec respectivement 3 propagateurs (1 massif) et 4 propagateurs (2 massifs, avec différentes masses), elles sont finies dans l'infrarouge et l'ultraviolet. Leurs expressions sont données ci-dessous.

Dans la suite nous collectons les expressions analytiques des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $f$  ainsi que toutes les intégrales utiles à cette fin qui apparaissent en développant les expressions (3.3.40), (3.3.38), (3.3.36) et (3.3.34), afin d'obtenir

$$\begin{aligned} a(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) = & \frac{1}{2} [I_{3\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) + I_{3\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - I_{3\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, z_2) - I_{3\mu_1\mu_2}(z_1, \bar{z}_2)] \\ & - \frac{r^2}{2} [I_{4\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) - I_{4\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, \bar{z}_2)] \\ & - \frac{1}{r^2} [J_{\mu_1\mu_2}^c(z_1, \bar{z}_2) + J_{\mu_1\mu_2}^c(\bar{z}_1, z_2) - J_{\mu_1\mu_2}^c(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - J_{\mu_1\mu_2}^c(z_1, z_2)], \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned} b(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) = & \left[ \frac{z_1 z_2}{(z_1^2 r^2 + \mu_1^2)(z_2^2 r^2 + \mu_2^2)} - \frac{z_1 \bar{z}_2}{(z_1^2 r^2 + \mu_1^2)(\bar{z}_2^2 r^2 + \mu_2^2)} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{z}_1 z_2}{(\bar{z}_1^2 r^2 + \mu_1^2)(z_2^2 r^2 + \mu_2^2)} + \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{(\bar{z}_1^2 r^2 + \mu_1^2)(\bar{z}_2^2 r^2 + \mu_2^2)} \right] r^2 I_2 \\ & + \left( \left[ \frac{z_1}{z_1^2 r^2 + \mu_1^2} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1^2 r^2 + \mu_1^2} \right] [I_{2\mu_2}(\bar{z}_2) - I_{2\mu_2}(z_2) + r^2(\bar{z}_2 - z_2)I_{3\mu_2}(z_2)] + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\ & + r^2 \left[ \frac{1}{2} + 2z_1 z_2 - (z_1 + z_2) \right] [I_{4\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) + I_{4\mu_1\mu_2}(z_1, \bar{z}_2)] \\ & + \left[ -\frac{1}{2} + (z_1 + z_2) \right] I_{3\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) + \left[ \frac{3}{2} - (z_1 + z_2) \right] I_{3\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \\ & + \left[ z_1 - z_2 - \frac{1}{2} \right] I_{3\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, z_2) + \left[ z_2 - z_1 - \frac{1}{2} \right] I_{3\mu_1\mu_2}(z_1, \bar{z}_2) \\ & + \frac{1}{r^2} [J_{\mu_1\mu_2}^c(z_1, \bar{z}_2) + J_{\mu_1\mu_2}^c(\bar{z}_1, z_2) - J_{\mu_1\mu_2}^c(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - J_{\mu_1\mu_2}^c(z_1, z_2)], \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned}
f(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) &= \left[ \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} \right] \left[ \frac{z_2}{z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} - \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right] I_2 \\
&+ 2 \left[ \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} - \frac{z_2}{z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right] I_{3\mu_1}(z_1) + (\bar{z}_2 - z_2) \left[ \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} \right] I_{3\mu_2}(z_2) \\
&+ (z_2 - \bar{z}_2) [I_{4\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) + I_{4\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, z_2)] + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} \right] [I_{2\mu_2}(\bar{z}_2) - I_{2\mu_2}(z_2)] \\
&+ \frac{1}{r^2} [I_{3\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, z_2) - I_{3\mu_1\mu_2}(z_1, \bar{z}_2) + I_{3\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) - I_{3\mu_1\mu_2}(\bar{z}_1, \bar{z}_2)]. \tag{3.4.7}
\end{aligned}$$

Certaines intégrales sont divergentes :

$$I_2 = \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{r})^2}, \tag{3.4.8}$$

$$I_{2m}(a) = \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2 ((\underline{k} - a\underline{r})^2 + m^2)}, \tag{3.4.9}$$

$$I_{3m}(a) = \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{r})^2 ((\underline{k} - a\underline{r})^2 + m^2)}, \tag{3.4.10}$$

$$I_{3m_a m_b}(a, b) = \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2 ((\underline{k} - a\underline{r})^2 + m_a^2) ((\underline{k} - b\underline{r})^2 + m_b^2)}, \tag{3.4.11}$$

$$I_{4m_a m_b}(a, b) = \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{r})^2 ((\underline{k} - a\underline{r})^2 + m_a^2) ((\underline{k} - b\underline{r})^2 + m_b^2)}, \tag{3.4.12}$$

tandis que d'autres sont finies :

$$J_{2m_a m_b}(a, b) = \int \frac{d^d \underline{k}}{((\underline{k} - a\underline{r})^2 + m_a^2) ((\underline{k} - b\underline{r})^2 + m_b^2)}, \tag{3.4.13}$$

$$J_{m_a m_b}^c(a, b) = \int \frac{d^d \underline{k} (\underline{k} \cdot \underline{r})}{\underline{k}^2 ((\underline{k} - a\underline{r})^2 + m_a^2) ((\underline{k} - b\underline{r})^2 + m_b^2)}, \tag{3.4.14}$$

$$\begin{aligned}
K_{m_a m_b}(a, b) &= \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2} \left[ \frac{1}{(b^2 \underline{r}^2 + m_b^2) [( \underline{k} - a\underline{r} )^2 + m_a^2]} + \frac{1}{(a^2 \underline{r}^2 + m_a^2) [( \underline{k} - b\underline{r} )^2 + m_b^2]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2r^2}{[\underline{k}^2 + (\underline{r} - \underline{k})^2] (a^2 \underline{r}^2 + m_a^2) (b^2 \underline{r}^2 + m_b^2)} \right], \tag{3.4.15}
\end{aligned}$$

$$L_{m_a m_b}(a, b) = \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2} \left[ \frac{1}{(a^2 \underline{r}^2 + m_a^2) [( \underline{k} - b\underline{r} )^2 + m_b^2]} \right. \tag{3.4.16}$$

$$\left. - \frac{r^2}{[\underline{k}^2 + (\underline{r} - \underline{k})^2] (a^2 \underline{r}^2 + m_a^2) (b^2 \underline{r}^2 + m_b^2)} \right], \tag{3.4.17}$$

$$N_{m_a m_b}(a, b) = \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2} \left[ \frac{1}{(a^2 \underline{r}^2 + m_a^2)[(\underline{k} - b \underline{r})^2 + m_b^2]} \right. \quad (3.4.18)$$

$$\left. - \frac{1}{(b^2 \underline{r}^2 + m_b^2)[(\underline{k} - a \underline{r})^2 + m_a^2]} \right], \quad (3.4.19)$$

$$J_{3\mu}(a) = \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{r})^2} \left[ \frac{1}{(\underline{k} - \underline{r} a)^2 + \mu^2} - \frac{1}{a^2 \underline{r}^2 + \mu^2} + (a \leftrightarrow \bar{a}) \right], \quad (3.4.20)$$

$$J_{4\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2) = \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{r})^2} \quad (3.4.21)$$

$$\times \left[ \frac{1}{((\underline{k} - \underline{r} z_1)^2 + \mu_1^2)((\underline{k} - \underline{r} z_2)^2 + \mu_2^2)} - \frac{1}{(z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2)(z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2)} + (z \leftrightarrow \bar{z}) \right].$$

Bien que les intégrales divergentes (3.4.8-3.4.12) apparaissent dans les formules (3.4.5), (3.4.6) et (3.4.7), les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $f$  sont évidemment des quantités finies. Nous devons pour cela évaluer chaque intégrale dans un schéma de régularisation dimensionnelle et vérifier que les termes divergents s'annulent mutuellement. Afin de rendre le calcul en régularisation dimensionnelle possible pour les intégrales  $I_{3m}$ ,  $I_{3m_1 m_2}$  et  $I_{4m_1 m_2}$ , contenant des propagateurs massifs et sans masse, elles doivent être exprimées en fonction d'intégrales divergentes plus simples  $I_2$  et  $I_{2m}$  selon

$$I_{3m_1 m_2}(z_1, z_2) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + m_1^2} + \frac{1}{z_2^2 \underline{r}^2 + m_2^2} \right) J_{2m_1 m_2}(z_1, z_2) \quad (3.4.22)$$

$$+ \left( \frac{z_1}{z_1^2 \underline{r}^2 + m_1^2} + \frac{z_2}{z_2^2 \underline{r}^2 + m_2^2} \right) J_{m_1 m_2}^c(z_1, z_2) + \frac{1}{2(z_2^2 \underline{r}^2 + m_2^2)} I_{2m_1}(z_1) + \frac{1}{2(z_1^2 \underline{r}^2 + m_1^2)} I_{2m_2}(z_2),$$

$$I_{4m_1 m_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(z_1^2 \underline{r}^2 + m_1^2)(z_2^2 \underline{r}^2 + m_2^2)} + \frac{1}{(\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + m_1^2)(\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + m_2^2)} \right) I_2$$

$$+ \frac{1}{2} J_{4m_1 m_2}(z_1, z_2), \quad (3.4.23)$$

$$I_{3m}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z^2 \underline{r}^2 + m^2} + \frac{1}{\bar{z}^2 \underline{r}^2 + m^2} \right) I_2 + \frac{1}{2} J_{3m}(z). \quad (3.4.24)$$

Nous pouvons utiliser les expressions des intégrales divergentes  $I_2$  et  $I_{2m}$  et des intégrales définies  $J_{m_1 m_2}^c$ ,  $J_{2m_1 m_2}$ ,  $J_{4m_1 m_2}$  et  $J_{3m}$  (dont nous détaillerons le calcul plus loin) calculées dans [65] afin de vérifier explicitement l'annulation des divergences. Néanmoins les expressions obtenues pour les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $f$  ne sont pas satisfaisantes afin de les exploiter numériquement : elles contiennent en effet des termes menant à des instabilités

numériques dans notre code d'intégration multidimensionnelle (que nous utiliserons plus loin afin d'intégrer les amplitudes obtenues sur l'espace des phases de notre processus et d'obtenir ainsi des prédictions pour les sections efficaces) et pour cette raison nous choisirons de les réécrire en fonctions d'intégrales explicitement convergentes.

$$\begin{aligned}
 a(\underline{r}, z_1, z_2) = & \tag{3.4.25} \\
 & \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{z_1}{(z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2)} + \frac{z_2}{(z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2)} + \frac{1}{r^2} \right] J_{\mu_1 \mu_2}^c(z_1, z_2) + \frac{1}{4} K(z_1, z_2) \right. \\
 & + (z_1 \leftrightarrow \bar{z}_1, z_2 \leftrightarrow \bar{z}_2) - (z_1 \leftrightarrow \bar{z}_1) - (z_2 \leftrightarrow \bar{z}_2) \\
 & + \frac{r^2}{4} [J_{4\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_1, z_2) - J_{4\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2)] + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2)} + \frac{1}{(z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2)} + \frac{1}{(\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2)} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{(\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2)} \right] [J_{2\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_1, z_2) - J_{2\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b(\underline{r}, z_1, z_2) = & \tag{3.4.26} \\
 & \frac{r^2}{2} \left[ \frac{z_1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} \right] [\bar{z}_2 - z_2] J_{3\mu_2}(z_2) + (1 \leftrightarrow 2) \\
 & + r^2 \left[ \frac{1}{2} + 2z_1 z_2 - (z_1 + z_2) \right] [J_{4\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2) + J_{4\mu_1 \mu_2}(z_1, \bar{z}_2)] + \left[ -\frac{1}{2} + z_1 + z_2 \right] \left[ \left( \frac{z_1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{z_2}{z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) J_{\mu_1 \mu_2}^c(z_1, z_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) J_{2\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2) \right] + \left[ \frac{3}{2} - (z_1 + z_2) \right] \\
 & \times \left[ \left( \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) J_{\mu_1 \mu_2}^c(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) J_{2\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \right] \\
 & + \left[ z_1 - z_2 - \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{z_2}{z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) J_{\mu_1 \mu_2}^c(\bar{z}_1, z_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) \right. \\
 & \times J_{2\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_1, z_2) \left. \right] + \left[ z_2 - z_1 - \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{z_1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) J_{\mu_1 \mu_2}^c(z_1, \bar{z}_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right) J_{2\mu_1 \mu_2}(z_1, \bar{z}_2) \right] + \frac{1}{r^2} [J_{\mu_1 \mu_2}^c(z_1, \bar{z}_2) + J_{\mu_1 \mu_2}^c(\bar{z}_1, z_2) - J_{\mu_1 \mu_2}^c(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \\
 & - J_{\mu_1 \mu_2}^c(z_1, z_2)] + L_{\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_1, z_2) + L_{\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_2, z_1) - \frac{1}{4} [K_{\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2) + K(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \\
 & + K_{\mu_1 \mu_2}(z_1, \bar{z}_2) + K_{\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_1, z_2)] + \frac{z_2 - z_1}{2} [N_{\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2) + N_{\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_2, \bar{z}_1)] \\
 & + \frac{z_1 + z_2}{2} [N_{\mu_1 \mu_2}(z_1, \bar{z}_2) + N_{\mu_1 \mu_2}(z_2, \bar{z}_1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(\underline{r}, z_1, z_2) = & \tag{3.4.27} \\
 & \left[ \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} - \frac{z_2}{z_2^2 \underline{r}^2 + \mu_2^2} \right] J_{3\mu_1}(z_1) \\
 & + \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2} \left[ J_{4\mu_1 \mu_2}(z_1, z_2) + J_{4\mu_1 \mu_2}(\bar{z}_1, z_2) - \left( \frac{1}{z_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{\bar{z}_1^2 \underline{r}^2 + \mu_1^2} \right) J_{3\mu_2}(z_2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{1}{r^2} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_1^2 r^2 + \mu_1^2} + \frac{1}{z_2^2 r^2 + \mu_2^2} \right) J_{2\mu_1\mu_2}(z_1, z_2) + \left( \frac{z_1}{z_1^2 r^2 + \mu_1^2} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{z_2}{z_2^2 r^2 + \mu_2^2} \right) J_{\mu_1\mu_2}^c(z_1, z_2) \right] - (z_1 \leftrightarrow \bar{z}_1, z_2 \leftrightarrow \bar{z}_2) + (z_1 \leftrightarrow \bar{z}_1) - (z_2 \leftrightarrow \bar{z}_2) \right) \\
 & + \frac{1}{2r^2} [N(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - N(z_1, z_2) + N(z_1, \bar{z}_2) - N(\bar{z}_1, z_2)] .
 \end{aligned}$$

Nous faisons apparaître les termes divergents en puissance de  $\epsilon$  dans un schéma de régularisation dimensionnelle de dimension  $d = 2 + 2\epsilon$ .

L'intégrale la plus simple à calculer est  $I_{2m}$ . En utilisant la paramétrisation de Feynman conventionnelle, nous obtenons

$$I_{2m} = \pi^{1+\epsilon} \Gamma(1-\epsilon) (\underline{p}^2 + m^2)^{-1+\epsilon} \int_0^1 d\alpha \alpha^{\epsilon-1} \left( 1 - \alpha \frac{\underline{p}^2}{\underline{p}^2 + m^2} \right)^{\epsilon-1} . \quad (3.4.28)$$

L'intégration sur le paramètre  $\alpha$  conduit à la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1$ ,

$$I_{2m} = \pi^{1+\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon (\underline{p}^2 + m^2)^{1-\epsilon}} {}_2F_1 \left( 1 - \epsilon, \epsilon, 1 + \epsilon; \frac{\underline{p}^2}{\underline{p}^2 + m^2} \right) \quad (3.4.29)$$

dont nous transformons l'argument avec la transformation d'Euler  $z \rightarrow z/(z-1)$  afin d'obtenir l'expression

$$I_{2m} = \frac{\pi}{\epsilon (\underline{p}^2 + m^2)} (1 + \epsilon (\ln \pi - \Psi(1) - \ln m^2 + 2 \ln(\underline{p}^2 + m^2))) . \quad (3.4.30)$$

Dans le cas de masse nulle (notons que cette intégrale apparaît dans la trajectoire de Regge du gluon  $\epsilon_G(t)$ ), nous obtenons

$$I_2 = \frac{2\pi}{r^2 \epsilon} (1 + \epsilon (\ln(\pi r^2) - \Psi(1))) . \quad (3.4.31)$$

Nous utiliserons les parties finies de  $I_2$  et  $I_{2m}$  pour obtenir les expressions analytiques des intégrales où elles apparaissent. Nous écrivons donc les intégrales finies  $K_{m_a m_b}$ ,  $L_{m_a m_b}$  et  $M_{m_a m_b}$  en fonction des parties finies de  $I_2$  et  $I_{2m}$  puisque nous vérifions que les termes divergents (en  $1/\epsilon$ ) se compensent.

$$\begin{aligned}
 K_{m_1 m_2}(z_1, z_2) & = \frac{1}{z_2^2 r^2 + m_2^2} I_{2m_1}(z_1) + \frac{1}{z_1^2 r^2 + m_1^2} I_{2m_2}(z_2) \\
 & \quad - \frac{r^2}{(z_1^2 r^2 + m_1^2)(z_2^2 r^2 + m_2^2)} I_2 , \quad (3.4.32)
 \end{aligned}$$

$$L_{m_1 m_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^2 r^2 + m_1^2} I_{2m_2}(z_2) - \frac{r^2}{2(z_1^2 r^2 + m_1^2)(z_2^2 r^2 + m_2^2)} I_2 , \quad (3.4.33)$$

$$N_{m_1 m_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^2 r^2 + m_1^2} I_{2m_2}(z_2) - \frac{1}{z_2^2 r^2 + m_2^2} I_{2m_1}(z_1). \quad (3.4.34)$$

L'intégrale  $J_{2m_a m_b}$  qui ne possède que deux propagateurs massifs s'obtient là encore à partir de la paramétrisation de Feynman :

$$\begin{aligned} J_{2m_a m_b} &= \int \frac{d^d \underline{k}}{((\underline{k} - \underline{r}a)^2 + m_a^2)((\underline{k} - \underline{r}b)^2 + m_b^2)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{r^2(a-b)^2 + m_a^2 + m_b^2 + \sqrt{\lambda}}{r^2(a-b)^2 + m_a^2 + m_b^2 - \sqrt{\lambda}}, \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

où nous avons introduit

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz, \quad (3.4.36)$$

ainsi que

$$\lambda = \lambda(-r^2(a-b)^2, \alpha^2, \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)r^2(a-b)^2 + r^4(a-b)^4. \quad (3.4.37)$$

Pour  $J_{m_a m_b}^c$  nous obtenons de même

$$\begin{aligned} J_{m_a m_b}^c &= \frac{2\pi r^2(a-b)}{\sqrt{\lambda}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda} + m_a^2 - m_b^2 + r^2(a^2 - b^2)} \ln \frac{a(\sqrt{\lambda} + r^2(a-b)^2 + m_a^2 - m_b^2)}{b(\sqrt{\lambda} - r^2(a-b)^2 + m_a^2 - m_b^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda} + m_b^2 - m_a^2 + r^2(b^2 - a^2)} \ln \frac{a(\sqrt{\lambda} - r^2(a-b)^2 - m_a^2 + m_b^2)}{b(\sqrt{\lambda} + r^2(a-b)^2 - m_a^2 + m_b^2)} \right] \\ &\quad - \frac{\pi}{a(b^2 r^2 + m_b^2) - b(a^2 r^2 + m_a^2)} \ln \frac{a(b^2 r^2 + m_b^2)}{b(a^2 r^2 + m_a^2)}. \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

Les termes en  $\ln \frac{a}{b}$  sont à priori divergents quand  $a$  ou  $b$  tend vers zero mais ils se compensent mutuellement du fait de la symétrie avec laquelle  $J_{m_a m_b}^c$  apparaît dans  $a$ ,  $b$  et  $f$ . Nous devons néanmoins les faire explicitement disparaître afin de pouvoir espérer une utilisation stable dans un code d'intégration numérique des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $f$  en fonction desquels les amplitudes s'expriment.

Nous reproduirons le calcul de l'intégrales finie  $J_{3m}$  selon la méthode développée dans [65]. Nous reprendrons le calcul de  $J_{4m_1 m_2}$  en suivant là encore la même démarche mais nous modifierons les expressions analytiques des intégrales intermédiaires (dont nous ne détaillons pas le calcul ici) afin de regrouper au maximum tous les termes pouvant

potentiellement mener à des instabilités numériques, ce qui s'avère indispensable pour exploiter finalement l'expression assez volumineuse de  $J_{4m_1m_2}$  que nous obtiendrons.

La méthode consiste à effectuer une transformation conforme spéciale dans l'espace bidimensionnel des moments transverses afin de réduire le nombre de propagateurs non massifs des intégrales finies  $J_{3m}$  et  $J_{4m_1m_2}$ , technique habituellement utilisée en théorie conforme bidimensionnelle [92] dans l'espace des coordonnées mais utilisée ici dans l'espace des impulsions. Notons qu'il est crucial de rester dans un espace de dimension exactement égale à deux pour que cette simplification fonctionne. Dans le cas de  $J_{3m}$ , l'inversion

$$\underline{k} \rightarrow \frac{\underline{K}}{\underline{K}^2}, \quad \underline{r} \rightarrow \frac{\underline{R}}{\underline{R}^2}, \quad m \rightarrow \frac{1}{M} \quad (3.4.39)$$

permet d'écrire

$$J_{3m} = R^2 \int \frac{d^2 \underline{K}}{(\underline{K} - \underline{R})^2} \left( \frac{K^2 R^2}{(\underline{R} - a \underline{K})^2 + \frac{K^2 R^2}{M^2}} - \frac{1}{a^2 r^2 + m^2} + (a \leftrightarrow \bar{a}) \right). \quad (3.4.40)$$

Nous réalisons alors une translation  $\underline{K} = \underline{R} + \underline{k}'$  suivie d'une autre inversion (la succession de ces trois transformations définit la transformation conforme spéciale)

$$\underline{k}' \rightarrow \frac{\underline{k}}{\underline{k}^2}, \quad \underline{R} \rightarrow \frac{\underline{r}}{\underline{r}^2}, \quad M \rightarrow \frac{1}{m}, \quad (3.4.41)$$

ce qui mène à

$$J_{3m} = \frac{1}{r^2} \int \frac{d^2 \underline{k}}{\underline{k}^2} \left[ \frac{(\underline{r} + \underline{k})^2}{(r^2 a^2 + m^2) \left( \left( \frac{\underline{k} - \underline{r}}{r^2 \bar{a}^2 + m^2} \right)^2 + \frac{m^2 r^4}{(r^2 \bar{a}^2 + m^2)^2} \right)} - \frac{1}{a^2 r^2 + m^2} + (a \leftrightarrow \bar{a}) \right]. \quad (3.4.42)$$

Expression que nous pouvons aisément calculer en utilisant les paramètres de Feynman, et nous obtenons

$$J_{3m} = \frac{2\pi}{r^2} \left\{ \left( \frac{1}{r^2 a^2 + m^2} - \frac{1}{r^2 \bar{a}^2 + m^2} \right) \ln \frac{r^2 a^2 + m^2}{r^2 \bar{a}^2 + m^2} + \left( \frac{1}{r^2 a^2 + m^2} + \frac{1}{r^2 \bar{a}^2 + m^2} + \frac{2}{r^2 a \bar{a} - m^2} \right) \ln \frac{(r^2 a^2 + m^2)(r^2 \bar{a}^2 + m^2)}{m^2 r^2} \right\}. \quad (3.4.43)$$

Nous effectuons une transformation conforme spéciale identique dans l'expression de  $J_{4mm}$  ce qui nous permet de la réécrire en faisant apparaître une intégrale  $J_{3\alpha\beta}$  à 3 propagateurs mais cette fois divergente. Nous pourrions alors utiliser un schéma de régularisation dimensionnelle pour l'évaluer.

$$J_{4\mu_1\mu_2} = \frac{1}{\underline{r}^2} \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2} \quad (3.4.44)$$

$$\times \left\{ \frac{((\underline{k} - \underline{r}))^2}{(r^2 \bar{z}_1 + \mu_1^2) \left( \left( \underline{k} + \underline{r} \frac{z_1 \bar{z}_1 r^2 - \mu_1^2}{\bar{z}_1^2 r^2 + \mu_1^2} \right)^2 + \frac{r^4 \mu_1^2}{(r^2 z_1^2 + \mu_1^2)^2} \right)} (r^2 \bar{z}_2 + \mu_2^2) \left( \left( \underline{k} + \underline{r} \frac{z_2 \bar{z}_2 r^2 - \mu_2^2}{\bar{z}_2^2 r^2 + \mu_2^2} \right)^2 + \frac{r^4 \mu_2^2}{(r^2 z_2^2 + \mu_2^2)^2} \right)} - \frac{1}{(r^2 \bar{z}_1 + \mu_1^2)(r^2 \bar{z}_2 + \mu_2^2)} + (z \leftrightarrow \bar{z}) \right\}.$$

Nous pouvons donc identifier l'intégrale générique suivante dans l'expression de  $J_{4\mu_1\mu_2}$  :

$$J_{3\alpha\beta} = \int \frac{d^2 \underline{k} ((\underline{k} - \underline{r}))^2}{\underline{k}^2 [(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2] [(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]}, \quad (3.4.45)$$

qui est divergente à la fois dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet. Bien entendu ces divergences se suppriment au sein de  $J_{4\mu_1\mu_2}$  qui est convergente. Nous pouvons alors écrire  $J_{3\alpha\beta}$  comme la somme de deux intégrales

$$J_{3\alpha\beta} = J_{3\alpha\beta}^{UV} + J_{3\alpha\beta}^{IR} \quad (3.4.46)$$

où

$$J_{3\alpha\beta}^{UV} = \int \frac{d^d \underline{k} \underline{k}^2}{[(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2] [(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]} \quad (3.4.47)$$

est divergente dans l'ultraviolet et

$$J_{3\alpha\beta}^{IR} = \int \frac{d^d \underline{k} [((\underline{k} - \underline{r}))^2 - (\underline{k}^2)^2]}{\underline{k}^2 [(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2] [(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]} \quad (3.4.48)$$

est divergente dans l'infrarouge. Nous pourrions donc maintenant utiliser la régularisation dimensionnelle pour calculer les parties finies de ces intégrales, tout en vérifiant que les pôles en  $1/\epsilon$  caractérisant les divergences UV et IR disparaissent bien en évaluant l'intégrale finie  $J_{4\mu_1\mu_2}$  donné par l'expression (3.4.44). Le calcul de  $J_{3\alpha\beta}^{UV}$  s'effectue de manière standard

$$J_{3\alpha\beta}^{UV} = \pi \left\{ -\frac{\pi^\epsilon \Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 \beta^2) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2r^2(a-b)^2} \ln \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right. \quad (3.4.49)$$

$$- \frac{\sqrt{\lambda}}{2r^2(a-b)^2} \ln \frac{r^2(a-b)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda}}{r^2(a-b)^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{\lambda}}$$

$$- \frac{[\sqrt{\lambda} - \alpha^2 + \beta^2 - r^2(a^2 - b^2)]^2}{4r^2(a-b)^2 \sqrt{\lambda}} \ln \frac{\sqrt{\lambda} - r^2(a-b)^2 - \alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\lambda} + r^2(a-b)^2 - \alpha^2 + \beta^2}$$

$$\left. - \frac{[\sqrt{\lambda} - \beta^2 + \alpha^2 - r^2(b^2 - a^2)]^2}{4r^2(a-b)^2 \sqrt{\lambda}} \ln \frac{\sqrt{\lambda} - r^2(a-b)^2 + \alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{\lambda} + r^2(a-b)^2 + \alpha^2 - \beta^2} \right\}. \quad (3.4.50)$$

et nous écrivons  $J_{3\alpha\beta}^{IR}$  en termes de 5 intégrales génériques qui elles-mêmes pourront s'écrire en fonctions d'autres intégrales :

$$\begin{aligned}
 J_{3\alpha\beta}^{IR} = & \int d^d \underline{k} \frac{2\underline{r}^2}{[(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2][(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]} + r^4 \int \frac{d^d \underline{k}}{\underline{k}^2[(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2][(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]} \\
 & - 4r^2 \int \frac{d^d \underline{k} \underline{k} \cdot \underline{r}}{\underline{k}^2[(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2][(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]} - 4 \int \frac{d^d \underline{k} \underline{k} \cdot \underline{r}}{[(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2][(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]} \\
 & + 4 \int \frac{d^d \underline{k} (\underline{k} \cdot \underline{r})^2}{\underline{k}^2[(\underline{k} - \underline{r}a)^2 + \alpha^2][(\underline{k} - \underline{r}b)^2 + \beta^2]}. \tag{3.4.51}
 \end{aligned}$$

Nous ne reproduisons pas ici les détails de ces calculs mais notons toutefois que les termes en  $\ln \frac{a}{b}$  menant à des instabilités numériques sont essentiellement contenus dans les intégrales 3 et 5. D'autres termes spurieux en  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$  sont aussi contenus dans l'intégrale 5 et pourront mener à des instabilités du code d'intégration numérique où ces expressions apparaissent ; elles correspondent physiquement au cas  $r^2 = Q_i^2$ , conduisant à  $a = 0$  or  $b = 0$  dans l'expression finale de  $J_{4\mu_1\mu_2}$ . Nous calculons les expressions analytiques de ces intégrales de sorte que ces facteurs disparaissent explicitement. Notons également que toutes ces intégrales sont régulières sauf la seconde. Puisque les termes divergents disparaissent dans l'expression de  $J_{4\mu_1\mu_2}$ , nous prenons les termes finis de toutes les intégrales divergentes calculées précédemment et nous obtenons l'expression finale de  $J_{4\mu_1\mu_2}$  :

$$\begin{aligned}
 J_{4\mu_1\mu_2} = & \tag{3.4.52} \\
 & \frac{1}{r^2(r^2 \bar{z}_1^2 + \mu_1^2)(r^2 \bar{z}_2^2 + \mu_2^2)} J_{3\alpha\beta}^{finite} \left( \frac{-z_1 \bar{z}_1 r^2 + \mu_1^2}{\bar{z}_1^2 r^2 + \mu_1^2}, \frac{-z_2 \bar{z}_2 r^2 + \mu_2^2}{\bar{z}_2^2 r^2 + \mu_2^2}, \frac{r^2 \mu_1}{r^2 \bar{z}_1^2 + \mu_1^2}, \frac{r^2 \mu_2}{r^2 \bar{z}_2^2 + \mu_2^2}, r \right) \\
 & + \frac{1}{r^2(r^2 z_1^2 + \mu_1^2)(r^2 z_2^2 + \mu_2^2)} J_{3\alpha\beta}^{finite} \left( \frac{-z_1 \bar{z}_1 r^2 + \mu_1^2}{z_1^2 r^2 + \mu_1^2}, \frac{-z_2 \bar{z}_2 r^2 + \mu_2^2}{z_2^2 r^2 + \mu_2^2}, \frac{r^2 \mu_1}{r^2 z_1^2 + \mu_1^2}, \frac{r^2 \mu_2}{r^2 z_2^2 + \mu_2^2}, r \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 J_{3\alpha\beta}^{finite}(a, b, \alpha, \beta, r) = & \tag{3.4.53} \\
 & \frac{\pi}{4} \left\{ \left( \frac{8}{a-b} + \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{(a-b)^2 r^2} \right) \ln \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{4r^2 \left( -4 + r^2 \left( \frac{a}{a^2 r^2 + \alpha^2} + \frac{b}{b^2 r^2 + \beta^2} \right) \right) \ln \frac{b^2 r^2 + \beta^2}{a^2 r^2 + \alpha^2}}{a(a-b)br^2 + b\alpha^2 - a\beta^2} \right. \\
 & - 2 \ln \frac{\alpha^2 \beta^2}{r^4} + \frac{2r^4}{(a^2 r^2 + \alpha^2)(b^2 r^2 + \beta^2)} \left( \ln \frac{\alpha^2 \beta^2}{r^4} - 2 \ln \frac{\alpha^2 \beta^2}{(a^2 r^2 + \alpha^2)(b^2 r^2 + \beta^2)} \right) \\
 & \left. - \frac{8}{(a-b)(a(a-b)br^2 + b\alpha^2 - a\beta^2)} \left( -a^2 r^2 + b^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \left( -(a-b)^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda} \right) \left( \frac{-a(b^2 r^2 + \beta^2)}{b} \ln \left( 1 + \frac{b^2 r^2}{\beta^2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (a^2 r^2 + \alpha^2) \ln \frac{a^2 r^2 + \alpha^2}{\beta^2} \right) + \left( (a-b)^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda} \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left( \frac{-b(a^2 r^2 + \alpha^2)}{a} \ln \left( 1 + \frac{a^2 r^2}{\alpha^2} \right) + (b^2 r^2 + \beta^2) \ln \frac{b^2 r^2 + \beta^2}{\alpha^2} \right) \right] \\
& + \left( \frac{\left( a^2 r^2 - b^2 r^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{\lambda} \right)^2}{(a-b)^2 r^2 \sqrt{\lambda}} + \frac{8(a-b)r^4 \left( -4 + r^2 \left( \frac{a}{a^2 r^2 + \alpha^2} + \frac{b}{b^2 r^2 + \beta^2} \right) \right)}{\left( (a^2 - b^2) r^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{\lambda} \right) \sqrt{\lambda}} \right) \\
& + \left. \frac{8\sqrt{\lambda}}{(a-b)(a(a-b)br^2 + b\alpha^2 - a\beta^2)} \right) \ln \frac{(a-b)^2 r^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{\lambda}}{-(a-b)^2 r^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{\lambda}} \\
& + \left( \frac{-\left( -a^2 r^2 + b^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda} \right)^2}{(a-b)^2 r^2 \sqrt{\lambda}} + \frac{8(a-b)r^4 \left( -4 + r^2 \left( \frac{a}{a^2 r^2 + \alpha^2} + \frac{b}{b^2 r^2 + \beta^2} \right) \right)}{\left( (-a^2 + b^2) r^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda} \right) \sqrt{\lambda}} \right) \\
& \times \ln \frac{-(a-b)^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda}}{(a-b)^2 r^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda}} + \left[ \frac{16r^2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{2r^2 \left( 4 + r^2 \left( -\frac{1}{a^2 r^2 + \alpha^2} - \frac{1}{b^2 r^2 + \beta^2} \right) \right)}{\sqrt{\lambda}} \right. \\
& \left. - 8 \frac{(a^2 - b^2) r^2 + \alpha^2 - \beta^2}{(a-b)\sqrt{\lambda}} - \frac{2\sqrt{\lambda}}{(a-b)^2 r^2} \right] \ln \frac{(a-b)^2 r^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\lambda}}{(a-b)^2 r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{\lambda}} \Bigg\} .
\end{aligned}$$

Nous avons rajouté des termes additionnels en  $\ln r^2$  dans l'expression de  $J_{3\alpha\beta}$  afin de faire apparaître des arguments sans dimensions dans les logarithmes, puisque ceux-ci se compensent mutuellement dans l'expression de  $J_{4\mu_1\mu_2}$ , étant finie dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet. Toutes les expressions obtenues précédemment dans l'intégration analytique en  $k_{\perp}$  sont implémentées dans un code Mathematica afin de reconstruire les amplitudes qui en dépendent. Notons que nous avons apporté un soin particulier à tester, au niveau des amplitudes (3.3.34), (3.3.36), (3.3.38) et (3.3.40), que nous obtenions des valeurs numériques (en affectant des valeurs particulières aux paramètres) identiques en effectuant ces intégrales numériquement (avec une paramétrisation polaire par exemple) dans Mathematica ou à partir des expressions analytiques précédemment dérivées. Le temps de calcul nécessaire à l'intégration numérique exclut radicalement de s'en servir pour obtenir directement la valeur des amplitudes et des sections efficaces du processus. Nous utiliserons de plus un code d'intégration mutidimensionnelle en fortran (Vegas) couplé à notre code Mathematica qui compile les expressions analytique de toutes les intégrales dans les expressions des amplitudes, afin de prédire les valeurs des sections efficaces. Il serait ainsi tout à fait impossible d'obtenir des prédictions pour les sections

efficaces dans une approche purement numérique ce qui justifie d'un point de vue pratique les calculs analytiques présentés dans ce chapitre.

En combinant les équations (3.3.39) et (3.4.1), puis en utilisant  $|M_{++}|^2 = |M_{--}|^2$ , nous obtenons dans le cas de deux photons de même polarisation transverse :

$$|\mathcal{M}_{++}|^2 = |\mathcal{M}_{--}|^2 = s^2 \frac{C^2}{64} \times \left| \int_0^1 dz_1 dz_2 (z_1 - \bar{z}_1) \phi(z_1) (z_2 - \bar{z}_2) \phi(z_2) (b(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) - a(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2)) \right|^2, \quad (3.4.54)$$

et de la même manière, dans la cas de deux polarisations transverses différentes :

$$|\mathcal{M}_{+-}|^2 = s^2 \frac{C^2}{64} \times \left| \int_0^1 dz_1 dz_2 (z_1 - \bar{z}_1) \phi(z_1) (z_2 - \bar{z}_2) \phi(z_2) (b(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) + a(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2)) \right|^2. \quad (3.4.55)$$

Pour le cas longitudinal-transverse (LT), reconstituant la dépendance selon toutes les variables, on définit de (3.3.36) et de (3.3.38), la fonction scalaire suivante :

$$M_{0\lambda}(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) = f(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) \underline{r} \cdot \underline{\epsilon}^\lambda, \quad (3.4.56)$$

et de manière équivalente :

$$M_{\lambda 0}(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) = f(\underline{r}; Q_2, Q_1; z_2, z_1) \underline{r} \cdot \underline{\epsilon}^\lambda, \quad (3.4.57)$$

ce qui conduit à

$$|\mathcal{M}_{0+}|^2 = |\mathcal{M}_{0-}|^2 = s^2 \frac{C^2}{8} Q_1^2 \underline{r}^2 \left| \int_0^1 dz_1 dz_2 z_1 \bar{z}_1 \phi(z_1) (z_2 - \bar{z}_2) \phi(z_2) f(\underline{r}; Q_1, Q_2; z_1, z_2) \right|^2. \quad (3.4.58)$$

On en déduit dans le cas symétrique transverse-longitudinal (TL) :

$$|\mathcal{M}_{+0}|^2 = |\mathcal{M}_{-0}|^2 = s^2 \frac{C^2}{8} Q_2^2 \underline{r}^2 \left| \int_0^1 dz_1 dz_2 z_2 \bar{z}_2 \phi(z_2) (z_1 - \bar{z}_1) \phi(z_1) f(\underline{r}; Q_2, Q_1; z_2, z_1) \right|^2. \quad (3.4.59)$$

Afin d'accomplir l'évaluation de l'amplitude  $\mathcal{M}$ , nous devons effectuer l'intégration sur les fractions d'impulsion  $z_1$  et  $z_2$  des quarks dans les mésons  $\rho$ . Pour des valeurs arbitraires de  $t$ , il ne semble pas possible d'effectuer analytiquement ces intégrations. Ainsi nous les évaluons numériquement. Notons toutefois l'absence de singularité (end-point singularity) dans la limite  $z_{1(2)} \rightarrow 0$  ou  $z_{1(2)} \rightarrow 1$  qui correspondent aux bords du domaine de définition de ces variables. En effet, bien que les polarisations longitudinales (cf. la définition de  $P_P$  en (3.3.27)) impliquent des divergences en  $1/z$  et  $1/(1-z)$ , celles-ci sont compensées par le facteur  $z\bar{z}$ . Tandis que pour les polarisations transverses, aucune divergence n'apparaît puisque  $\underline{Q}$  (défini dans l'eq.(3.3.29)) est régulier. Dans la limite vers l'avant,  $t = t_{min}$  (pour laquelle seule l'amplitude (LL) est non nulle), qui sera utile dans la discussion de la section 3.5, l'intégration sur les  $z_i$  peut être effectuée analytiquement, avec le résultat que nous démontrerons plus loin :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{00} = & -is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_{\rho}^2 \frac{9\pi^2}{2} \frac{1}{Q_1^2 Q_2^2} \left[ 6 \left( R + \frac{1}{R} \right) \ln^2 R + 12 \left( R - \frac{1}{R} \right) \ln R \right. \\ & + 12 \left( R + \frac{1}{R} \right) + \left( 3R^2 + 2 + \frac{3}{R^2} \right) (\ln(1-R) \ln^2 R - \ln(R+1) \ln^2 R \\ & \left. - 2 \text{Li}_2(-R) \ln R + 2 \text{Li}_2(R) \ln R + 2 \text{Li}_3(-R) - 2 \text{Li}_3(R) \right], \end{aligned} \quad (3.4.60)$$

avec le rapport des virtualités  $R = Q_1/Q_2$ . Quand  $Q_1 = Q_2$ , l'expression (3.4.60) se simplifie en

$$\mathcal{M}_{00} = is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_{\rho}^2 \frac{9\pi^2}{Q^4} (14\zeta(3) - 12). \quad (3.4.61)$$

### 3.4.2 Résultats pour les sections efficaces différentielles

Les formules de  $M_{\lambda_1 \lambda_2}$  obtenues dans la partie 3.4 nous permettent d'évaluer les sections efficaces (3.3.41) de double production diffractive de mésons  $\rho^0$  pour différentes hélicités des photons virtuels. Dans nos évaluations nous employons comme constante de couplage QCD l'expression à trois-boucle  $\alpha_s(Q_1 Q_2)$  avec  $\lambda_{\overline{ms}}^{(4)} = 305 \text{ MeV}$  (voir, par exemple [75]). Le running de  $\alpha_s$  est en principe un effet sous-dominant dans notre approche des logarithmes dominants. Néanmoins, numériquement, comme nous le discutons dans la section 3.5.3, la dépendance de nos prévisions à l'égard du choix de  $\alpha_s$  est négligeable à l'ordre de Born, mais est plus subtile quand les effets de resommation BFKL à l'ordre des logarithmes dominants sont pris en considération.

Dans la Fig.3.6 nous montrons la dépendance en  $t$  des sections efficaces des processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  pour différentes valeurs de  $Q = Q_1 = Q_2$ . Nous notons tout d'abord la diminution considérable de toutes les sections efficaces quand les virtualités  $Q_{1,2}^2$  augmentent. Dans le cas (LL), ceci apparaît après une analyse

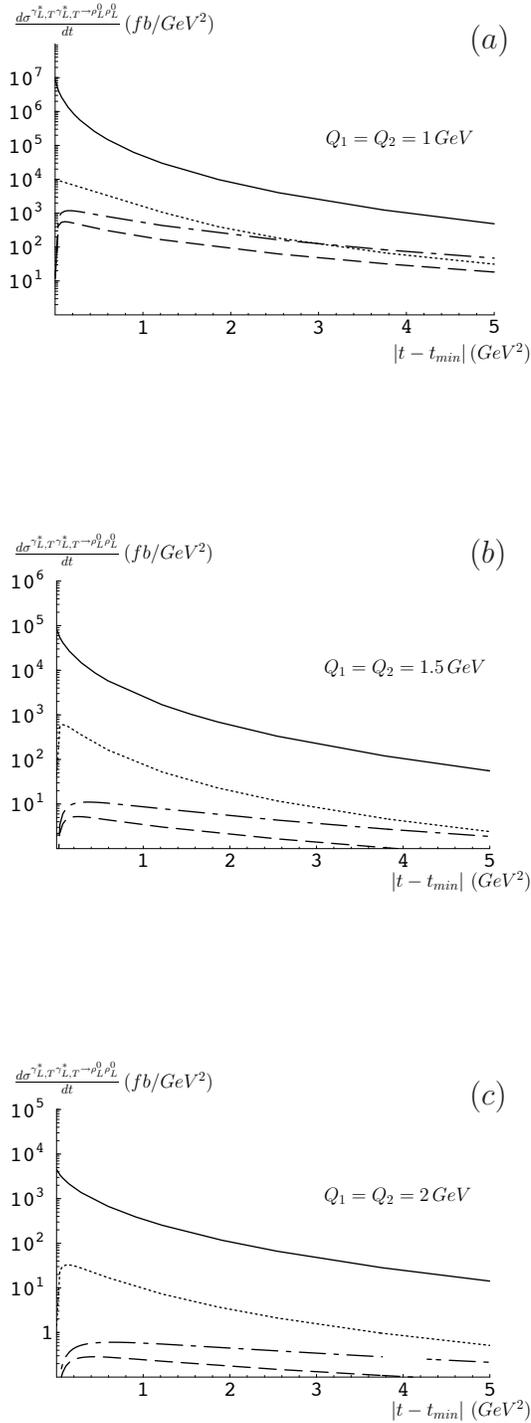


FIG. 3.6 – Sections efficaces différentielles du processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ . La courbe solide correspond aux mode  $\gamma_L^* \gamma_L^*$ , celle composée de points au mode  $\gamma_L^* \gamma_T^*$ , enfin celles composées de tirets et de tirets pointés au modes  $\gamma_T^* \gamma_{T'}^*$  avec respectivement des polarisations transverses identiques  $T = T'$  et différentes  $T \neq T'$ . Les différentes figures (a), (b), (c) correspondent aux différentes valeurs de  $Q_1 = Q_2$ .

dimensionnelle évidente, puisque

$$\mathcal{M}_{LL} \propto \frac{s f_{\rho}^2}{Q^4}$$

(pour  $Q_1 = Q_2 = Q$ ), en accord avec (3.4.61). Deuxièmement, toutes les sections efficaces différentielles qui impliquent au moins un photon transverse disparaissent quand  $t = t_{min}$ . Ceci est dû à l'annulation de la fonction  $\underline{Q}$  pour  $\underline{r} = 0$  apparaissant dans le facteur d'impact transverse (cf. (3.3.29)). Ce fait est lié à la conservation d'hélicité dans le canal  $s$  à  $t = t_{min}$ . En effet, puisque les gluons échangés dans le canal  $t$  portent des polarisations "non-sense" (ie. longitudinales selon la terminologie consacrée par Gribov), la conservation d'hélicité doit se produire séparément dans chaque facteur d'impact.

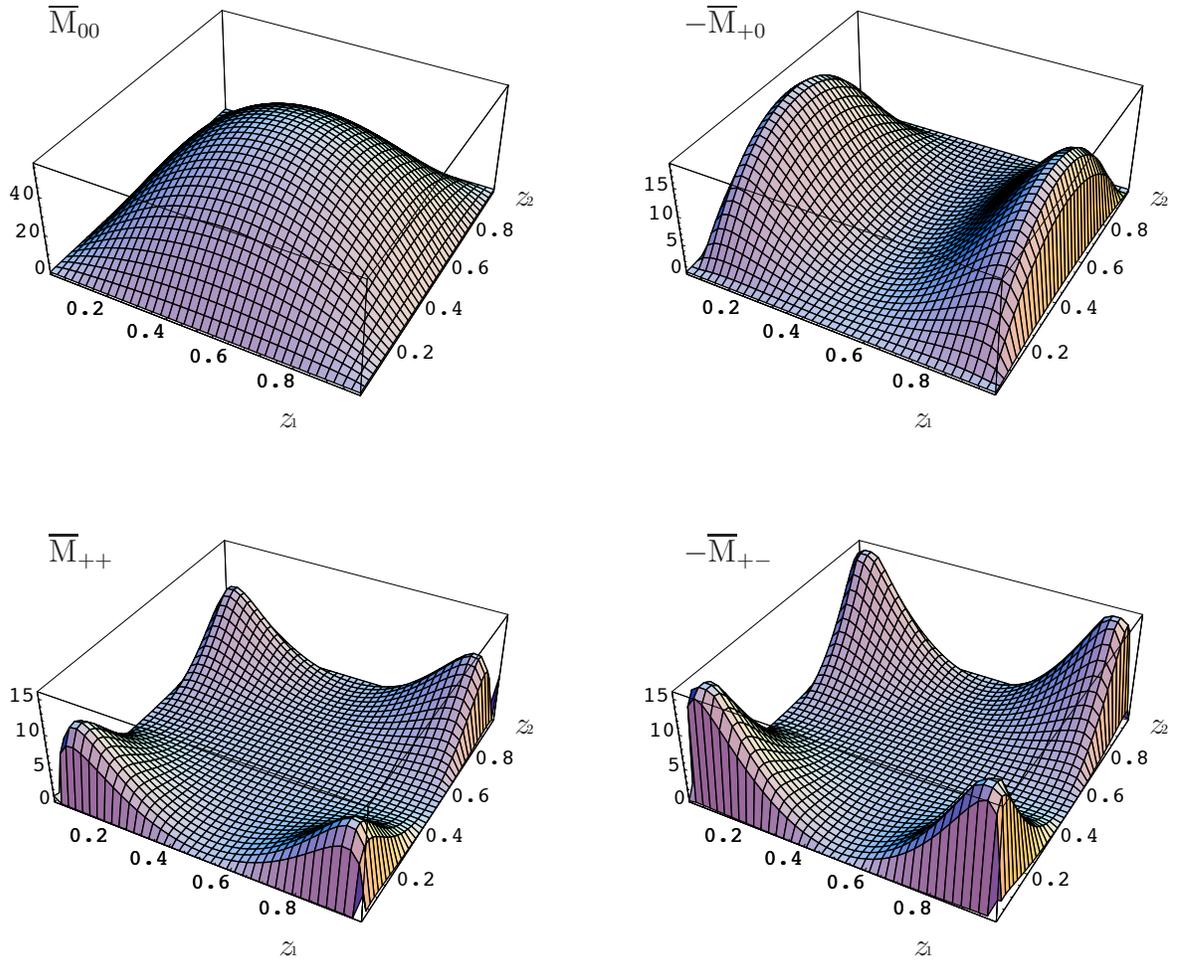


FIG. 3.7 – Amplitudes  $\overline{M}_{00}$ ,  $-\overline{M}_{+0}$ ,  $\overline{M}_{++}$ ,  $-\overline{M}_{+-}$  comme fonctions de  $z_1$  et  $z_2$ , pour  $-t = 0.16 \text{ GeV}^2$  et  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ GeV}$ .

Dans la Fig.3.7, nous montrons la forme des intégrants  $\overline{M}_{\lambda_1, \lambda_2}$  des diverses amplitudes  $\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2}$  en fonction de  $z_1$  et  $z_2$ , tels qu'ils apparaissent dans les formules (3.3.35), (3.3.37) et (3.3.39) :

$$\overline{M}_{00} = z_1 \bar{z}_1 \phi(z_1) z_2 \bar{z}_2 \phi(z_2) M_{00}(z_1, z_2), \quad (3.4.62)$$

et pour  $\lambda_i = +, -$

$$\overline{M}_{\lambda_1 0} = (z_1 - \bar{z}_1) \phi(z_1) z_2 \bar{z}_2 \phi(z_2) M_{\lambda_1 0}(z_1, z_2), \quad (3.4.63)$$

$$\overline{M}_{\lambda_1 \lambda_2} = (z_1 - \bar{z}_1) \phi(z_1) (z_2 - \bar{z}_2) \phi(z_2) M_{\lambda_1 \lambda_2}(z_1, z_2). \quad (3.4.64)$$

$M_{\lambda_1 \lambda_2}(z_1, z_2)$  est symétrique sous  $(z_i \leftrightarrow \bar{z}_i)$  pour une polarisation longitudinale  $\lambda_i = 0$  (cf. l'eq.(3.3.27)) et antisymétrique sous  $(z_i \leftrightarrow \bar{z}_i)$  pour une polarisation transverse  $\lambda_i = +, -$  (cf. l'eq.(3.3.29)) ; ainsi les facteurs  $z_i \bar{z}_i$  pour  $\lambda_i = 0$  et  $z_i - \bar{z}_i$  pour  $\lambda_i = +, -$  assurent la symétrie de  $\overline{M}_{\lambda_1 \lambda_2}$  sous  $(z_i \leftrightarrow \bar{z}_i)$  comme nous pouvons le voir sur les graphes de la Fig.3.7. Par ailleurs, en raison des amplitudes de distribution  $\phi(z_i)$  des mésons  $\rho_L^0$ ,  $\overline{M}_{\lambda_1 \lambda_2}(z_1, z_2)$  s'annule pour n'importe quelle polarisation sur les bords du domaine de définition. Ainsi la contribution d'une polarisation transverse disparaît dans la région centrale  $z_i = \bar{z}_i = 1/2$  et également dans la région de bord du domaine  $z_i$  près de 0 ou de 1, de sorte que l'espace des phases disponible en  $z_i$  soit fortement réduit pour la section efficace différentielle résultante, ceci étant en accord avec la dominance des photons longitudinaux (conservation d'hélicité) dans le processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ .

L'amplitude impliquant au moins un photon transverse a un maximum à une valeur de  $-t$  petite devant le produit  $Q_1 Q_2$ . La Fig.3.7 correspond à  $-t = 0.16 \text{ GeV}^2$  qui est une valeur de  $-t$  typique dans la région où les sections efficaces avec des photons transverses de la Fig.3.6 sont maximales.

Une forme singulièrement caractéristique apparaît dans les amplitudes avec deux pho-

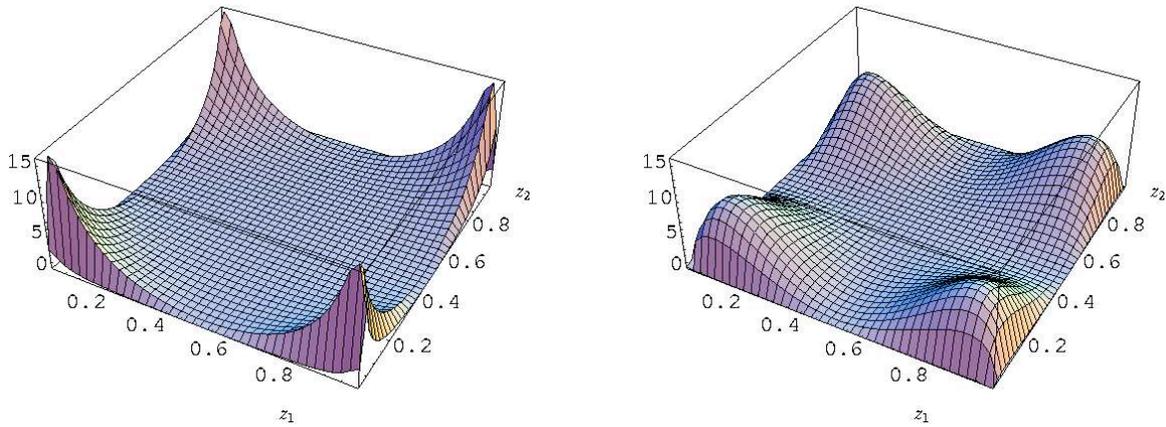


FIG. 3.8 – Amplitude  $-\overline{M}_{+-}$ , pour  $-t = 0.01 \text{ GeV}^2$  (à gauche) et  $-t = 0.8 \text{ GeV}^2$  (à droite), avec  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ GeV}$ .

tons transverses, comme nous le voyons sur les deux graphiques inférieurs de la Fig.3.7. Quand la valeur de  $t$  se rapproche de son minimum  $t_{min}$ , les crêtes des amplitudes deviennent très étroites, comme sur le graphique de gauche de la Fig.3.8 pour  $\overline{M}_{+-}$ . Pour  $t$  qui tend vers  $t_{min}$ , elles sont pratiquement concentrées sur la frontière du domaine, ce qui mène à l'annulation de l'amplitude intégrée sur les fractions d'impulsion  $z_i$ . D'autre part, quand la valeur de  $t$  augmente à partir de celle correspondant au maximum des sections efficaces différentielles de la Fig.3.7, les pics décroissent et s'étalent comme nous le voyons pour  $\overline{M}_{+-}$  sur la partie droite de la Fig.3.8.

Dans le cas des polarisations LT, la forme de l'amplitude  $\overline{M}_{+0}$ , qui contient seulement un facteur  $(z_i - \bar{z}_i)$ , est montrée dans le panneau supérieur droit de la Fig.3.7. Sa comparaison avec le panneau supérieur gauche, montrant la forme de l'amplitude  $\overline{M}_{00}$ , mène à la conclusion évidente que  $\overline{M}_{+0}$  se comporte bien comme  $\overline{M}_{+-}$  dans une direction de  $z_i$  et comme  $\overline{M}_{00}$  dans l'autre. En particulier, la présence d'une polarisation transverse mène aussi à l'annulation de  $\overline{M}_{+0}$  pour la valeur seuil du moment transféré  $t = t_{min}$ . D'autre part, la présence d'une polarisation longitudinale augmente l'amplitude  $\overline{M}_{+0}$  pour des petites valeurs de  $t$  (rappelons que  $\overline{M}_{00}$  est maximum dans le cas  $t = t_{min}$ ). Ainsi la concurrence de ces deux mécanismes tend à situer le maximum de la section efficace déterminée par  $\overline{M}_{+0}$  plus près de  $t_{min}$  que dans le cas de la section efficace donnée par  $\overline{M}_{+-}$ . Ceci est illustré dans Fig.3.9 où l'on observe la dépendance en  $t$  des sections efficaces différentielles pour tous les états de polarisation en échelle Log-Log.

Troisièmement, nous montrons dans la Fig.3.10 la dépendance en  $t$  de la section efficace différentielle du processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  pour des valeurs là encore fixées des virtualités  $Q = Q_1 = Q_2 = 1$  GeV, mais sur un domaine cinématique plus étendu où le moment transféré peut prendre des valeurs bien plus grandes que celles des virtualités  $Q_i$  des photons. Naturellement, dans cette région cinématique les sections efficaces sont fortement supprimées. Néanmoins, la Fig.3.10 illustre le fait prévu que la hiérarchie des sections efficaces est différente dans deux régions : à grand  $t$ , la section efficace  $\gamma_T^* \gamma_T^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  domine celle du processus  $\gamma_L^* \gamma_L^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  (qui est la section efficace dominante à petit  $t$ ), puisque les photons virtuels sont presque sur couche quand l'échelle dure est fournie par  $t$  grand devant les virtualités  $Q_1$  et  $Q_2$  des photons, et ont donc tendance à être polarisés transversalement. Nous pouvons aussi considérer ce phénomène du point de vue de la conservation d'hélicité dans le canal  $s$  qui peut être plus favorablement violée quand les gluons reggézés dans le canal  $t$  emportent une impulsion importante ( $|t - t_{min}| \simeq \underline{r}^2$ ).

Pour conclure cette sous-section, nous notons que toutes les sections efficaces du processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  prendront leurs valeurs maximales dans la région cinématique vers l'avant (forward) c'est à dire sans déviation. Les prévisions phénoménologiques obtenues en ne considérant que le cas limite sans moment transféré donneront donc la tendance générale du comportement des sections efficaces intégrées sur l'espace de phase

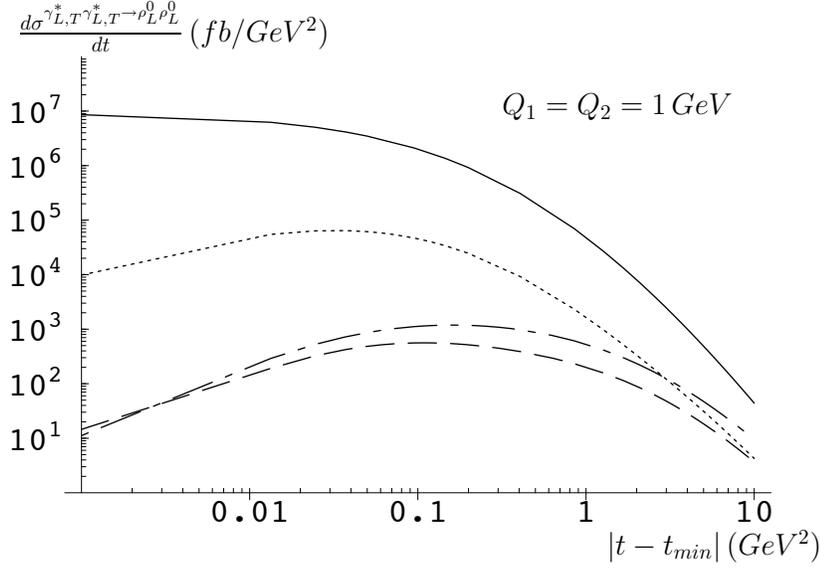


FIG. 3.9 – Sections efficaces différentielles du processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ , pour de faibles valeurs de  $t$ . La courbe solide correspond au mode  $\gamma_L^* \gamma_L^*$ , celle composée de points au mode  $\gamma_L^* \gamma_T^*$ , enfin celles composées de tirets et de tirets pointés au modes  $\gamma_T^* \gamma_{T'}^*$  avec respectivement des polarisations transverses identiques  $T = T'$  et différentes  $T \neq T'$ , tracées pour  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ GeV}$ .

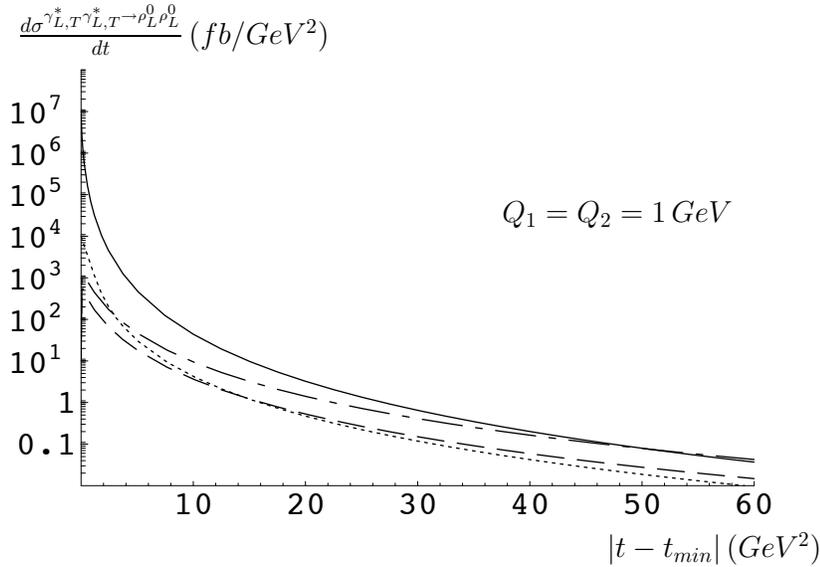


FIG. 3.10 – Sections efficaces différentielles du processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ , pour de faibles valeurs de  $t$ . La courbe solide correspond au mode  $\gamma_L^* \gamma_L^*$ , celle composée de points au mode  $\gamma_L^* \gamma_T^*$ , enfin celles composées de tirets et de tirets pointés aux modes  $\gamma_T^* \gamma_{T'}^*$  avec respectivement des polarisations transverses identiques  $T = T'$  et différentes  $T \neq T'$ , tracées pour  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ GeV}$ .

de la collision. Mais contrairement au cas des photons réels, les photons considérés ici sont virtuels et ne se propageront pas dans une direction exactement colinéaire à celle du faisceau de leptons du collisionneur linéaire  $e^+e^-$ . De ce fait, les mésons  $\rho$  sortants pourront être observés dans un détecteur. Ainsi, la seule difficulté consistera à étiqueter les leptons diffusés après radiations de photons virtuels, puisque la section efficace est dominée par des petites (mais cependant grandes devant  $\Lambda_{QCD}$  afin de garantir la convergence infrarouge) valeurs de  $Q_{1,2}^2$ . Dans cette section, nous n'avons pas encore pris en compte les flux de photons virtuels, ce qui amplifiera à la fois la dominance de la région des petits  $Q^2$  aussi bien que celle des petits  $y_i$ , caractéristique de leptons diffusés avec un angle très faible. Ceci sera discuté en détail dans la section 3.5. En particulier, on verra que les sections efficaces différentielles sont expérimentalement assez grandes et suffisantes pour que la dépendance en  $t$  soit mesurée jusqu'à quelques  $\text{GeV}^2$ . Notons enfin qu'à ce stade de l'étude, il n'y a aucune dépendance en  $s$  de la section efficace du processus  $\gamma_{L,T}^* \gamma_{L,T}^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$ . Celle-ci apparaîtra après avoir tenu compte de l'espace des phases de la collision complète au niveau leptonique ainsi que de l'interaction entre les gluons reggézés, décrite par l'évolution BFKL.

### 3.4.3 Contribution de l'échange de quark à la section efficace

Le processus (3.1.2) décrit ci-dessus comporte des échanges de gluons qui dominant à haute énergie. Cependant, à énergie plus modérée, le processus peut être décrit par double échange de quark. Ceci a été étudié dans le chapitre 1, dans le cas restrictif  $t = t_{min}$ . La Fig.3.11 montre en particulier les diagrammes considérés précédemment qui contribuent à l'amplitude  $M_H$  (voir la Fig.3.2) pour le processus  $\gamma_L^*(q_1) \gamma_L^*(q_2) \rightarrow \rho_L(k_1) \rho_L(k_2)$ . En utilisant les eqs.(1.5.93) et (1.5.92) calculées dans le premier cha-

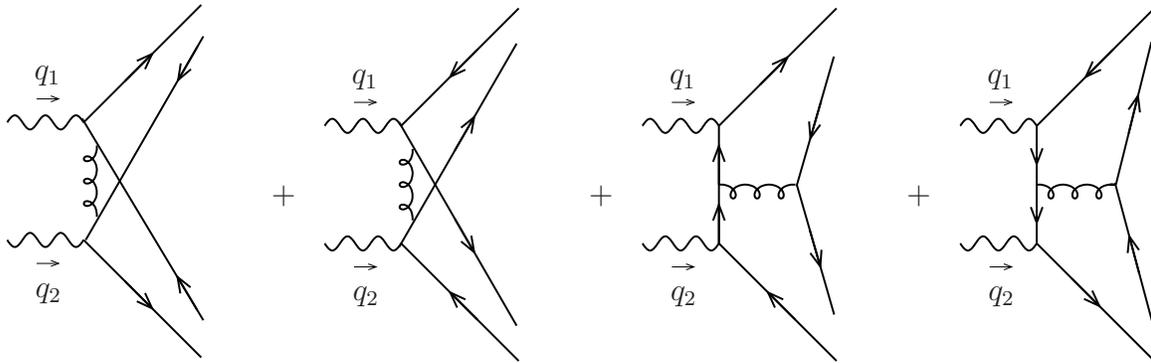


FIG. 3.11 – Diagrammes de Feynman contribuant à  $M_H$  dans le cas de photons virtuels longitudinaux.

pitre ainsi que l'amplitude de distribution asymptotique des mésons  $\rho_L^0$  (3.3.31), nous

obtenons après intégration analytique sur  $z_i$  l'amplitude de diffusion pour les photons longitudinalement polarisés

$$\mathcal{M}_{00}^{q\bar{q}} = -40 \pi^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \frac{\alpha_s \alpha_{em} f_\rho^2}{s} \left[ 1 + \frac{\left( 1 + \frac{Q_1^2}{s} + 2 \frac{Q_1^2 \ln \frac{Q_1^2}{s}}{1 - \frac{Q_1^2}{s}} \right) \left( 1 + \frac{Q_2^2}{s} + 2 \frac{Q_2^2 \ln \frac{Q_2^2}{s}}{1 - \frac{Q_2^2}{s}} \right)}{\left( 1 - \frac{Q_1^2}{s} \right) \left( 1 - \frac{Q_2^2}{s} \right)} \right] \quad (3.4.65)$$

et pour les photons transversalement polarisés

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{TT}^{q\bar{q}} &= \mathcal{M}_{++}^{q\bar{q}} + \mathcal{M}_{--}^{q\bar{q}} \quad (3.4.66) \\ &= -40 \pi^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \frac{\alpha_s \alpha_{em} f_\rho^2}{s} \frac{\left( \frac{7}{2} + \frac{2 \left( 1 + \frac{Q_1^2}{s} \right) \ln \frac{Q_1^2}{s}}{1 - \frac{Q_1^2}{s}} \right) \left( \frac{7}{2} + \frac{2 \left( 1 + \frac{Q_2^2}{s} \right) \ln \frac{Q_2^2}{s}}{1 - \frac{Q_2^2}{s}} \right) - \frac{1}{4}}{\left( 1 - \frac{Q_1^2}{s} \right) \left( 1 - \frac{Q_2^2}{s} \right)}. \end{aligned}$$

Dans la limite de grand  $s$ , on obtient respectivement

$$\mathcal{M}_{00}^{q\bar{q}} \simeq -80 \pi^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \frac{\alpha_s \alpha_{em} f_\rho^2}{Q_1 Q_2} \quad (3.4.67)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{TT}^{q\bar{q}} &\simeq -40 \pi^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \frac{\alpha_s \alpha_{em} f_\rho^2}{s} \left( 4 \ln \frac{Q_1^2}{s} \ln \frac{Q_2^2}{s} + 14 \ln \frac{Q_1 Q_2}{s} + 12 \right) \quad (3.4.68) \\ &= -40 \pi^2 \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \frac{\alpha_s \alpha_{em} f_\rho^2}{s} \left( 4 \ln^2 \frac{Q_1 Q_2}{s} + 14 \ln \frac{Q_1 Q_2}{s} - 4 \ln^2 Q_1 / Q_2 + 12 \right), \end{aligned}$$

les autres amplitudes ne contribuant pas à  $t = t_{min}$ .

Ces expressions doivent être comparées aux 2 contributions correspondantes avec échange de gluons discutées dans les sections précédentes. L'amplitude purement longitudinale LL est presque constante autour de  $t = t_{min}$ , et est donnée en (3.4.60). L'amplitude purement transverse TT (3.4.1) se comporte selon

$$\mathcal{M}_{TT}^{gg} \simeq -i a \frac{\pi}{2} s \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2 \frac{|t - t_{min}|}{Q_1^3 Q_2^3}, \quad (3.4.69)$$

où la constante  $a = 253.5$  est extraite à partir d'un fit numérique.

Les eqs.(3.4.65 - 3.4.69) confirment ce que nous avons établi dans le chapitre 2 consacré à l'introduction à l'équation BFKL : dans la limite de Regge l'échange de deux gluon domine sur le double échange de quark. En effet, la comparaison des expressions (3.4.67) et (des 3.4.68) avec les formules (3.4.60) et (3.4.69) montre que les contributions

gluoniques sont proportionnelles à  $s$  (en accord avec la règle de comptage habituelle  $s^{\sum \sigma_i - N + 1}$ , où  $N$  est le nombre de particules de spin  $\sigma_i$  échangées dans le canal  $t$ ). Dans le cas des photons longitudinalement polarisés qui ne disparaît pas à  $t_{min}$ , et pour les mêmes virtualités de photon  $Q_1^2 = Q_2^2 = Q^2$ , nous considérons le rapport

$$\mathcal{R}_{LL} = \frac{\mathcal{M}_{00}^{q\bar{q}}}{\mathcal{M}_{00}^{gg}} = \frac{32 (Q_u^2 + Q_d^2)}{28 \zeta(3) - 24} \frac{Q^2}{s \alpha_s}. \quad (3.4.70)$$

Pour une valeur typique de  $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ , dès que  $s$  ( $\simeq s_{\gamma^* \gamma^*}$ ) sera supérieur à  $4 \text{ GeV}^2$ , ce qui semble être toujours le cas à ILC, ce rapport sera supérieur à l'unité. (3.4.60) dominera ainsi complètement (3.4.65), et ce de plusieurs ordres de grandeur. En fait,  $s_{\gamma^* \gamma^*}$  peut atteindre une valeur assez basse comme  $4 \text{ GeV}^2$ , en raison de l'énergie importante emmenée par les leptons sortants due au pic des flux de Weizsäcker-Williams pour des  $\gamma^*$  faiblement énergétiques. Nous discuterons cet effet dans la section suivante au niveau du processus  $e^+ e^-$ , après avoir effectué l'intégration de l'espace de phase de la section efficace différentielle à  $t_{min}$ . On montrera néanmoins que la contribution avec échange de quarks est réellement négligeable dans presque tout l'espace de phase accessible à l'ILC.

Dans le cas de la contribution de deux gluons avec des photons virtuels transverses (3.4.69), laquelle disparaît à  $t_{min}$ , sa dominance sur la contribution correspondante des quarks (3.4.66) apparaît très rapidement quand  $|t - t_{min}|$  commence à augmenter, et persiste dans la région essentielle de l'espace de phase (cf. l'eq.(3.4.69) est fortement piquée autour de  $t - t_{min} = k \text{ } 0.01 \text{ GeV}^2$  où  $k$  est de l'ordre de 1-10). Cette dominance sera également discutée plus en détails au niveau du processus  $e^+ e^-$  dans la section suivante.

## 3.5 Sections efficaces différentielles de $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \rho_L^0 \rho_L^0$ à l'ordre de Born

### 3.5.1 Coupures cinématiques de l'espace des phases

Notre but est maintenant d'évaluer la section efficace du processus  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  dans les conditions expérimentales prévues dans le cadre du projet de collisionneur linéaire International Linear Collider (ILC) [76]. Ce projet, actuellement dans la phase de recherche et développement, est pour l'instant prévu pour un budget avoisinant 7 Milliards d'euros, comparable à celui du LHC. Les motivations physiques initiales du collisionneur ILC se situent dans l'approfondissement des études qui seront menées au LHC : compréhension plus fine du mécanisme de Higgs (s'il est découvert au LHC) au sein du Modèle Standard et de ses extensions supersymétriques, détection de signaux de partenaires supersymétriques, test de scénarios avec dimensions supplémentaires... Pour une

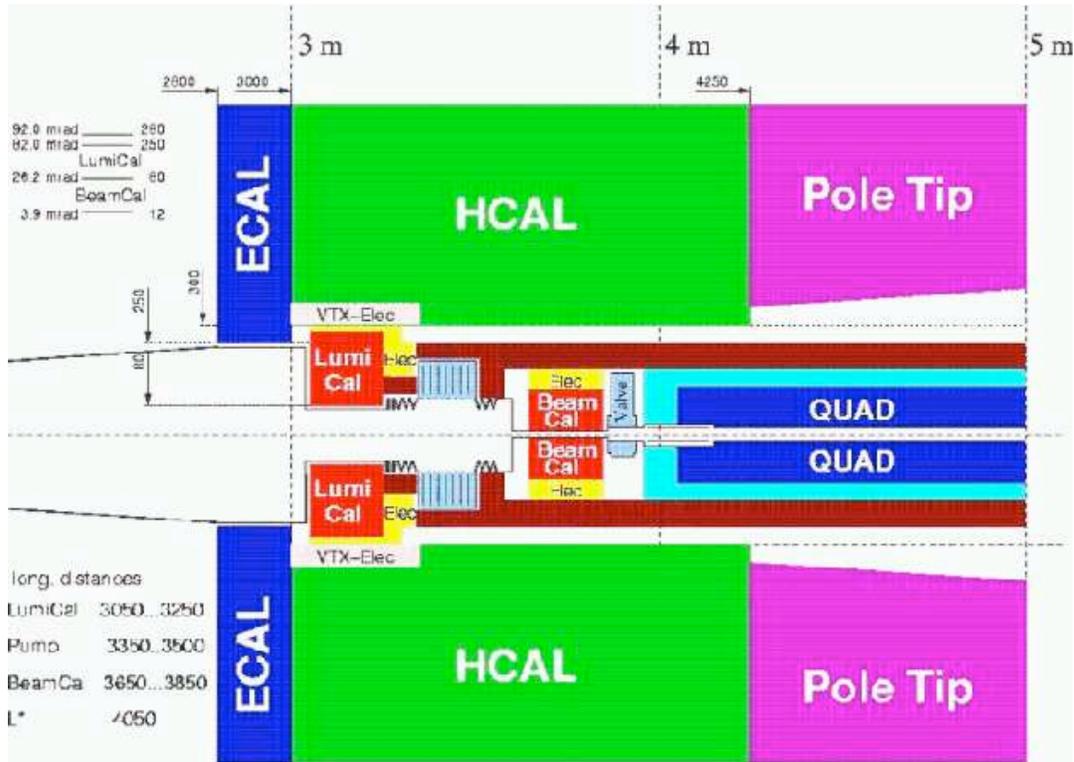


FIG. 3.12 – Le projet de détecteur LDC comprenant le calorimètre électromagnétique Beam-Cal.

revue complète consulter la Réf.[77].

L'énergie prévue pour le faisceau sera de 500 GeV et sa luminosité, supérieure d'un facteur  $10^3$  à celle de LEP, sera de  $125 \text{ fb}^{-1}$  par an pendant les quatre premières années de fonctionnement. Le collisionneur permettra également d'effectuer des changements d'énergie du faisceau (entre 200 et 500 GeV, ce qui permettra d'inclure les seuils de production de paires de quarks top, du boson de Higgs ainsi que de diverses réactions impliquant des particules supersymétriques) dans un intervalle de temps assez court entre deux fonctionnements. Une extension à 1 TeV avec une luminosité de  $1 \text{ ab}^{-1}$  est aussi prévue.

En ce qui concerne le détecteur, nous avons choisi de nous concentrer sur la proposition Large Detector Concept [78] qui offre la possibilité d'accéder à la région très proche de la direction d'incidence des leptons (vers l'avant) grâce au calorimètre électromagnétique BeamCal qui sera vraisemblablement installé autour de l'axe du faisceau à 3.65 m du point d'interaction, permettant ainsi de détecter des particules très colinéaires au faisceau : l'angle minimal de détection est de 4 mrad. Cette caractéristique est idéale pour observer des processus diffractifs, donnant un nombre d'événements maximal dans la région vers l'avant. La luminosité prévue est elle aussi suffisante pour observer ces processus, même dans le cas exclusif. Une coupe transversale des détecteurs prévus dans la

collaboration LDC est illustrée dans la Fig.3.12. BeamCal détectera des particules émises jusqu'à 40 mrad, celles dont l'angle d'émission sera supérieur (compris entre 40 mrad et 150 mrad) seront détectées dans le second calorimètre, LumiCal, qui sert également à fournir une mesure précise de la luminosité intégrée. Enfin, les dernières études de calorimétrie de cette région du détecteur mentionnent un troisième calorimètre, GamCal, destiné au diagnostic du faisceau (tout comme BeamCal) et capable de détecter des particules pour des angles inférieurs à 4 mrad. Ces calorimètres ont été initialement conçus afin de tirer profit de l'étude du beamstrahlung du collisionneur, c'est à dire des radiations provenant d'un faisceau de particules chargées, causées par son interaction avec le champ électromagnétique de l'autre faisceau. Le beamstrahlung contient une information précieuse sur la structure des deux faisceaux (taille transverse, distance au point d'interaction...), c'est pourquoi il est utilisé pour la calibration des faisceaux et pour l'optimisation de la luminosité.

Les hypothèses expérimentales que nous avons retenues pour notre étude sont le fruit de discussions avec nos collègues expérimentateurs R.Poeschl et F.Richard du Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL) d'Orsay, tous deux impliqués dans ce projet de collisionneur linéaire ILC.

La section efficace (dont les bornes d'intégration vont être justifiées dans le texte qui suit) qui tient compte de toutes les contraintes cinématiques, est donnée par

$$\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L \rho_L}}{dt} = \int_{Q_{1min}^2}^{Q_{1max}^2} dQ_1^2 \int_{Q_{2min}^2}^{Q_{2max}^2} dQ_2^2 \int_{\epsilon}^{y_{max}} dy_1 \int_{\frac{Q_1 Q_2}{s y_1}}^{y_{max}} dy_2 \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L \rho_L}}{dt dy_1 dy_2 dQ_1^2 dQ_2^2}, \quad (3.5.1)$$

avec  $Q_{1min} = 1$  GeV,  $Q_{1max} = 4$  GeV,  $\epsilon = 10^{-6}$  and  $y_{max} = 0.6$ .

La section efficace (3.5.1) peut être évaluée en combinant les formules des sections efficaces (3.2.2), (3.3.41) et les résultats obtenus dans la section 3.4 pour les amplitudes suivant les différentes hélicités possibles.

Une importante caractéristique de la formule (3.5.1) a pour conséquence d'apporter une contribution dominante du processus  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  pour des faibles valeurs des virtualités  $Q_i$  comme nous l'avons vu dans les sections précédentes au niveau des photons virtuels. L'intégration sur les variables  $Q_i, y_i$  est aussi très piquée sur la région de l'espace des phases où les variables  $Q_i, y_i$  sont petites, du fait des facteurs en  $1/(y_i Q_i^2)$  dans l'expression (3.2.2) venant des flux de Weizsäcker-Williams, ce qui amplifiera cet effet. Nous montrerons dans la suite que cette partie dominante de l'espace des phases est accessible expérimentalement en utilisant le calorimètre BeamCal.

Le domaine d'intégration dans (3.5.1) est fixé par les considérations suivantes. Dans le référentiel du laboratoire, qui est également celui du centre de masse pour un collisionneur linéaire, l'expression habituelle des fractions d'impulsion emportées par les photons radiés par rapport à celle des leptons entrants et les virtualités des photons de bremsstrahlung, sont respectivement données par

$$y_i = \frac{E - E'_i \cos^2(\theta_i/2)}{E} \quad \text{et} \quad Q_i^2 = 4EE'_i \sin^2(\theta_i/2), \quad (3.5.2)$$

où  $E$  est l'énergie du faisceau, alors que  $E'_i$  et  $\theta_i$  sont respectivement l'énergie et l'angle de diffusion des leptons sortants. Nous considérons une énergie du faisceau  $\sqrt{s} = 2E = 500$  GeV. La contrainte expérimentale venant de l'angle minimal  $\theta_{min}$  de détection autour du tube du faisceau sera donnée par  $\theta_{max} = \pi - \theta_{min} > \theta_i > \theta_{min}$  et conduira à la contrainte suivante sur  $y_i$

$$y_i > f(Q_i) = 1 - \frac{Q_i^2}{s \tan^2(\theta_{min}/2)}, \quad (3.5.3)$$

où la contrainte sur la limite supérieure de  $y_i$  provenant de  $\theta_{max}$  est complètement négligeable à cette énergie dans le centre de masse. La condition introduite sur l'énergie des leptons diffusés  $E_{max} > E'_i > E_{min}$  résulte en

$$y_{i\,max} = 1 - \frac{E_{min}}{E} > y_i > 1 - \frac{E_{max}}{E}. \quad (3.5.4)$$

De plus nous imposons que  $s_{\gamma^*\gamma^*} = y_1 y_2 s > c Q_1 Q_2$  (où  $c$  est une constante arbitraire de l'ordre de 1), condition exigée par la cinématique de Regge pour laquelle la représentation en facteur d'impact est valide. Dans la sous-section 3.5.3, nous montrons que ce paramètre  $c$  peut être ajusté afin de choisir précisément l'espace des phases de la diffusion  $e^+e^-$  de sorte que la contribution avec échanges de quark (discutés dans la sec.3.4.3) soit complètement négligeable devant celle des gluons.

Nous choisissons arbitrairement  $Q_i$  supérieur à 1 GeV puisque les virtualités fournissent l'échelle dure du processus qui rend légitime l'utilisation de la théorie de perturbation.  $Q_{i\,max}$  sera fixé à 4 GeV, puisque les diverses amplitudes impliquées sont parfaitement négligeables pour des valeurs plus élevées des virtualités  $Q_i$  (voir la section 3.4.2). Les contraintes sur  $y_{i\,min}$  discutées jusqu'ici sont récapitulées par les conditions suivantes

$$y_{1\,min} = \max\left(f(Q_1), 1 - \frac{E_{max}}{E}\right) \quad \text{et} \quad y_{2\,min} = \max\left(f(Q_2), 1 - \frac{E_{max}}{E}, \frac{c Q_1 Q_2}{s y_1}\right) \quad (3.5.5)$$

D'autres simplifications des conditions (3.5.5) peuvent être faites en tenant compte de l'unique condition sur la valeur maximale de d'énergie des leptons diffusés qui vient de la cinématique (nous supposons qu'il n'y a pas de contrainte particulière imposée par le détecteur limitant l'énergie maximale des leptons sortants), c.-à-d.  $E_{max} = E$ .

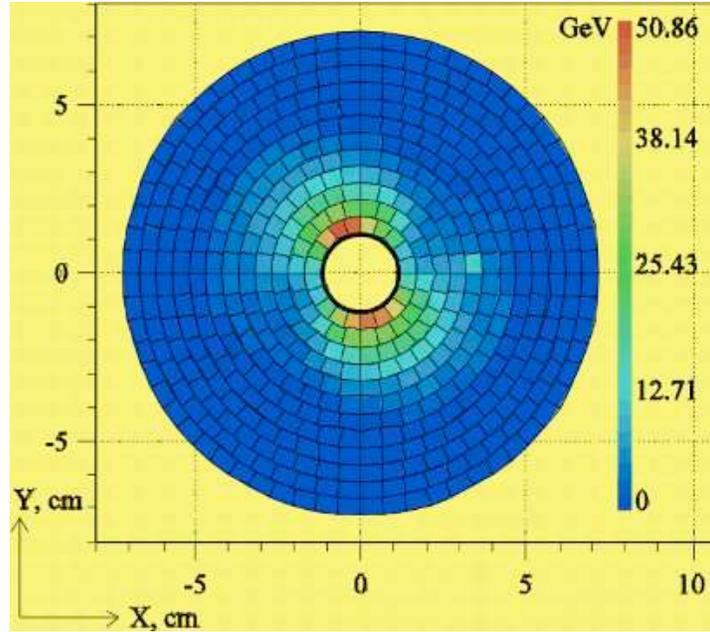


FIG. 3.13 – Dépôt en énergie (en GeV) dans chaque cellule du détecteur BeamCal produit par le beamstrahlung.

Le calorimètre BeamCal permet en principe de détecter des particules jusqu'à 4 mrad. Notons qu'afin d'avoir accès à n'importe quel processus inclusif [63] ou diffractif à  $s$  élevé, on a besoin d'atteindre des angles de diffusion minimaux  $\theta_{min}$  très petits (inférieurs à 25 mrad pour observer une statistique suffisante à Tesla [63]). Atteindre des valeurs de  $\theta_{min}$  de quelques mrad représente une étape technologique importante qui n'était pas faisable il y a quelques années. Plus précisément, ce calorimètre sensible aux traces des particules mesure un dépôt d'énergie pour un angle de diffusion compris entre 4 mrad et 26 mrad. Mais ce détecteur est également pollué par le beamstrahlung de photons, spécialement pour des angles très petits (limite de photons réels) (voir la Fig.3.13).

Nous supposons une identification non ambiguë seulement pour des particules dont les énergies sont supérieures à 100 GeV. En effet, l'efficacité de la détection d'un électron dépend de son énergie et s'améliore quand l'énergie augmente. Elle est au-dessus de 70% dans la partie de l'espace des phases qui domine la section efficace (petites valeurs des  $y_i$ , ce qui correspond à des leptons perdant très peu d'énergie en émettant un photon, soit  $E'_i \simeq E_i$ ). Une évaluation précise de cette efficacité exigerait d'écrire une simulation Monte Carlo pour reconstruire la contribution du beamstrahlung, ce qui est au delà de la portée de notre travail. Ceci fixe la valeur maximale de  $y_i$  à  $y_{i\ max} = 1 - \frac{E_{min}}{E} = 0.6$  avec  $E_{min} = 100$  GeV et  $E = 250$  GeV.

Une si grande valeur de  $E_{min}$  pourrait à première vue mener à une réduction forte de l'espace des phases en principe accessible. On pourrait en effet élargir le volume d'espace

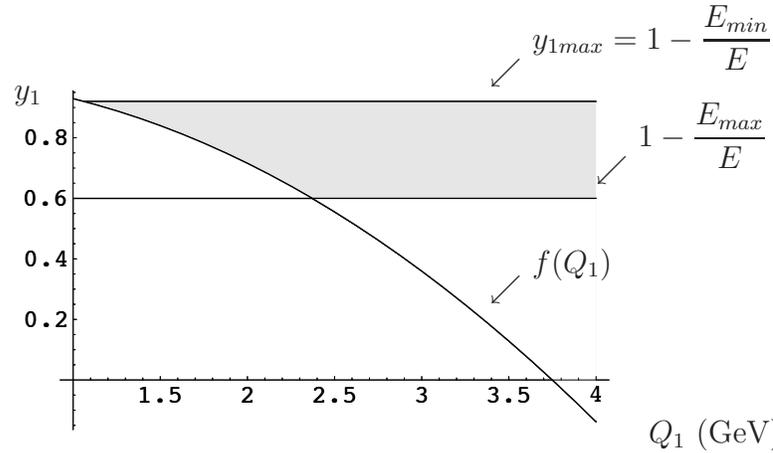


FIG. 3.14 –  $y_1$  Domaine d'integration pour  $\theta_{min} = 10$  mrad,  $E_{min} = 20$  GeV et  $E_{max} = 100$  GeV.

des phases concerné en considérant aussi les particules dont les énergies  $E'_i$  sont comprises entre 100 GeV et 20 GeV avec des angles de diffusion correspondant  $\theta_i$  supérieur à 10 mrad (voir la Fig.3.13), mais la contribution de ce domaine sera négligeable (voir la Fig.3.14) puisque la limite inférieure de  $y_i$  (voir l'Eq.(3.5.5)) nous empêche d'atteindre les petites valeurs de  $y_i$  et  $Q_i$  qui donnent la contribution dominante à la section efficace. Nous négligeons donc sans risque la contribution de cette région de l'espace des phases et supposons dans la suite que  $E_{min} = 100$  GeV et  $\theta_{min} = 4$  mrad.

Ainsi, avec  $\theta_{min} = 4$  mrad et  $\sqrt{s} = 500$  GeV, nous avons  $s \tan^2(\theta_{min}/2) = 1$  GeV<sup>2</sup>, ce qui signifie que  $f(Q) \leq 0$  pour  $Q^2 \geq 1$  GeV<sup>2</sup>. Les relations (3.5.5), avec  $E_{max} = E$ , se réduisent à la seule condition  $y_{2min} = \frac{Q_1 Q_2}{s y_1}$ . A cela doit être ajouté une condition supplémentaire afin de stabiliser le code numérique : elle consiste à imposer  $y_{1min} = \epsilon$ , où  $\epsilon$  est un cut-off numérique : bien que la limite de Regge nous fournisse la condition que  $y_1 \frac{Q_1 Q_2}{s y_2} \geq \frac{Q_{1min} Q_{2min}}{s y_{2max}} = 6.610^{-6}$  ce qui procure de fait une borne inférieure à  $y_1$ , nous devons néanmoins imposer cette coupure numérique en affectant une valeur à  $\epsilon$  inférieure à la borne inférieure précédente. Cette coupure n'a aucun effet pratique (nous pouvons nous en persuader en notant que les résultats de l'intégration en sont bien indépendants), excepté d'éviter des instabilités numériques dans le code d'intégration. La discussion ci-dessus justifie les bornes d'intégration qui apparaissent dans la formule (3.5.1).

### 3.5.2 Bruit de fond dans le détecteur

BeamCal est un calorimètre électromagnétique qui ne peut pas distinguer les charges des particules. Ainsi, il est important de vérifier que les sections efficaces de tous les processus autres que  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  qui pourraient mener à des états finals qui peuvent être confondus avec l'état final de notre processus seront supprimées. Ainsi, l'état final du processus  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \rho_L^0 \rho_L^0$ , pour des photons apparaissant dans le détecteur avec le

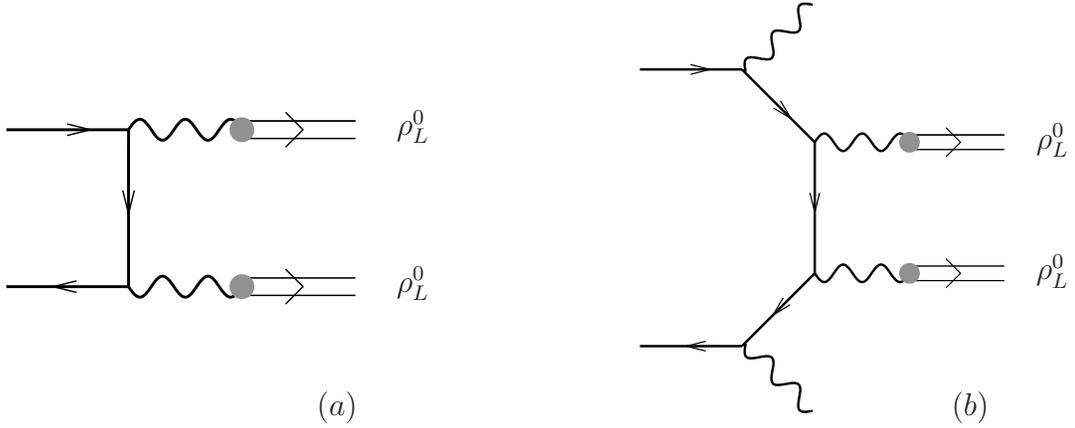


FIG. 3.15 – Exemple de diagrammes à l'ordre de Born des processus  $e^+e^- \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  (a) et  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \rho_L^0 \rho_L^0$  (b).

même dépôt d'énergie que les leptons sortants, ne peut pas être distingué de l'état final de  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$ .

Nous allons montrer que le processus  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \rho_L^0 \rho_L^0$  mène à une section efficace négligeable à l'ILC. Nous partons tout d'abord du processus  $e^+e^- \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  illustré dans la Fig.3.15(a), qui est étudié dans la Ref.[79, 80]. Sa section efficace différentielle se comporte typiquement selon

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \frac{\alpha_{em}^4 f_{\rho}^4}{s^2 m_{\rho}^4}, \quad (3.5.6)$$

avec les virtualités des propagateurs de photons égales à  $m_{\rho}^2$ . Des expressions plus précises peuvent être trouvées dans [80], si on identifie  $g_{V\gamma} = f_{\rho} m_{\rho}$ .

Quand nous considérons le processus concurrent  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \rho_L^0 \rho_L^0$ , qui rajoute deux photons de bremsstrahlung additionnels au processus précédent, comme nous le représentons dans la Fig.3.15(b), nous obtenons

$$\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \rho_L \rho_L}}{dt dy_1 dy_2 dQ_1^2 dQ_2^2} / \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L \rho_L}}{dt dy_1 dy_2 dQ_1^2 dQ_2^2} \simeq \frac{\alpha_{em}^2 Q_1^4 Q_2^4}{\alpha_s^4 s^2 m_{\rho}^4} \quad (3.5.7)$$

ce qui est supprimé aux énergies de ILC, et serait d'ordre de grandeur comparable seulement pour des accélérateurs d'énergie de l'ordre de quelques GeV.

### 3.5.3 Résultats pour les sections efficaces

Nous présentons maintenant dans la Fig.3.16 les sections efficaces  $\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L \rho_L}}{dt}$  en fonction de  $t$  pour les différentes polarisations, qui sont tracées après avoir intégré la section efficace différentielle (3.5.1) sur l'espace des phases considéré pour la réaction (qui fait apparaître les variables cinématiques  $Q_i$  et  $y_i$  ainsi que les fractions d'impulsion

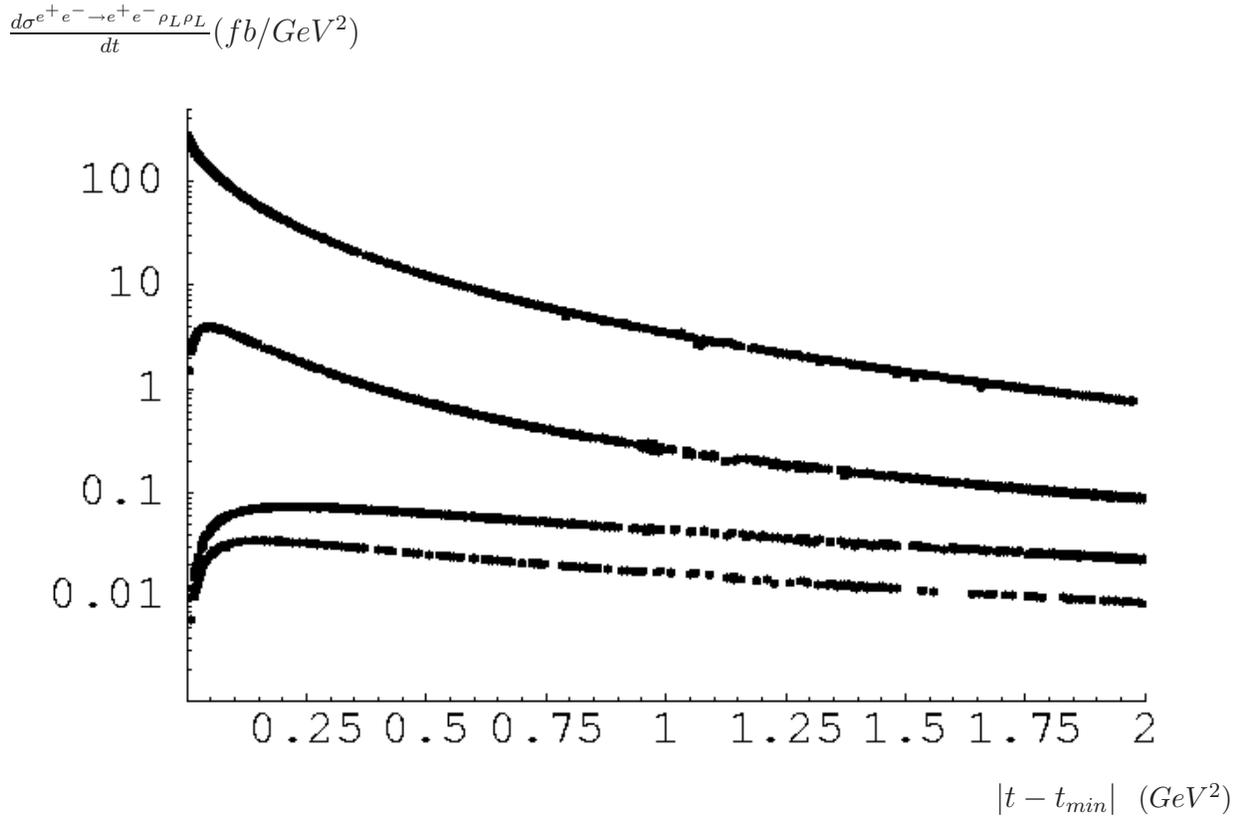


FIG. 3.16 – Sections efficaces pour le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\rho_L^0\rho_L^0$ . Partant d'en haut, les courbes correspondent aux modes  $\gamma_L^*\gamma_L^*$ ,  $\gamma_L^*\gamma_T^*$ ,  $\gamma_T^*\gamma_T^*$  avec  $T \neq T'$  et  $\gamma_T^*\gamma_T^*$  avec  $T = T'$ .

$z_i$  des quarks entrant dans les mésons ). Nous avons utilisé les hypothèses suivantes : la constante de couplage de QCD est supposée dépendre des échelles du processus selon  $\alpha_s(\sqrt{Q_1Q_2})$ , que nous traitons à trois boucles, le paramètre  $c$  qui entre dans la condition de la limite de Regge est fixé égal à 1, et l'énergie dans le centre de masse est fixée à sa valeur nominale  $\sqrt{s} = 500$  GeV.

La Fig.3.16 montre pour les collisions  $e^+e^-$  les mêmes sections efficaces différentielles reliées à différentes hélicités des photons (comme nous l'avions fait au niveau du sous-processus entre photons virtuels dans la Fig.3.6). Nous voyons que les formes des courbes correspondantes sont semblables bien qu'elles mènent à des valeurs tout à fait différentes des sections efficaces. Les sections efficaces correspondant aux photons composés d'au moins une polarisation transverse s'annulent comme c'était le cas au niveau  $\gamma^*\gamma^*$  (cf. la sous-section 3.4.2) à  $t = t_{min}$ . De même, chacune d'elles présente un maximum dans la région de très petit moment transféré  $t$ . Ces maxima sont montrés plus précisément sur la Fig.3.17 en double échelle logarithmique.

Sur ce point une remarque d'ordre technique s'impose. En examinant la courbe supérieure

$$\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0}}{dt} (fb/GeV^2)$$

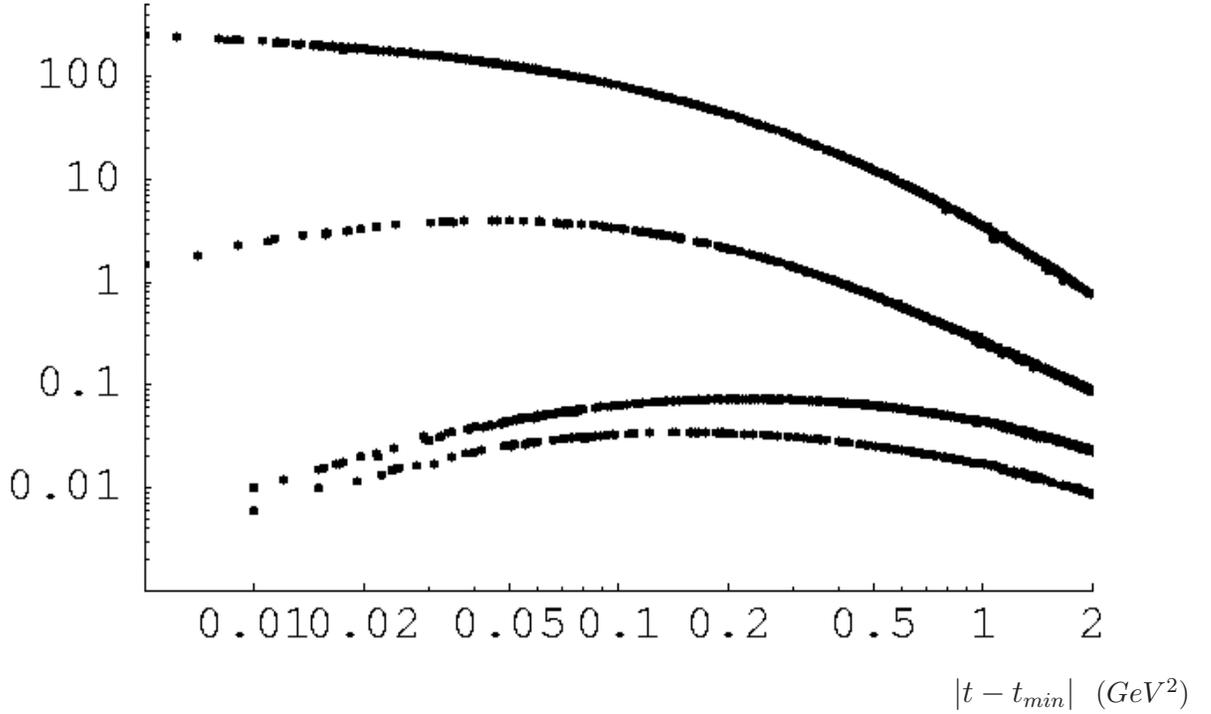


FIG. 3.17 – Sections efficaces pour le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  en échelle Log-Log. Partant d'en haut, les courbes correspondent aux modes  $\gamma_L^*\gamma_L^*$ ,  $\gamma_L^*\gamma_{T'}^*$ ,  $\gamma_T^*\gamma_{T'}^*$  avec  $T \neq T'$  et  $\gamma_T^*\gamma_{T'}^*$  avec  $T = T'$ .

de la Fig.3.17 reliée à l'amplitude  $\mathcal{M}_{00}$ , on voit que les points correspondant à la région  $|t - t_{min}| \neq 0$  approchent continuellement le point situé sur l'axe  $|t - t_{min}| = 0$ . Ce point  $|t - t_{min}| = 0$  est particulièrement important parce qu'il donne le maximum de la section efficace totale (puisque les polarisations transverses disparaissent à la valeur seuil du moment transféré  $t_{min}$ ) et ainsi dicte pratiquement la tendance de toute la section différentielle qui diminue fortement avec  $t$  (pour toutes les polarisations) et qui est fortement piquée vers l'avant (pour le cas longitudinal). Nous retrouvons ici la description que nous avons faites au niveau  $\gamma^*\gamma^*$  dans la sous-section 3.4.2. L'évaluation précise de cette région de faibles valeurs de  $t$  ainsi que de ce point à  $t_{min}$  sera particulièrement cruciale afin de prédire un nombre d'événements mesurables avec une grande fiabilité.

En raison d'instabilités du code d'intégration numérique, la valeur de la section efficace différentielle au point  $|t - t_{min}| = 0$  doit être évaluée d'une manière différente : en effet, comme nous l'avons vu, les expressions des intégrales en  $\underline{k}$  qui apparaissent

dans les amplitudes de la section (3.4.1) présentent, après intégration analytique, des expressions assez imposantes qui font surtout apparaître des irrégularités pour certaines valeurs très particulières des paramètres dont elles dépendent : ces combinaisons peuvent être comprises analytiquement mais nécessitent des régularisations systématiques qui en pratique sont difficilement implémentables dans un code numérique et nécessiteraient surtout un investissement supplémentaire en temps. Cela nous donnera par ailleurs l'occasion de tester la cohérence des résultats que l'on prédit pour la valeur de la section efficace différentielle au point  $|t - t_{min}| = 0$  : nous allons devoir digresser quelque peu en retournant à l'expression générique de l'amplitude de diffusion de notre processus dans le formalisme BFKL et nous en déduirons alors, dans la limite sans interaction entre gluons reggézés (limite où les effets BFKL s'annulent, correspondant à  $\alpha_s \rightarrow 0$  dans la fonction de Green), l'expression analytique de l'amplitude de diffusion à l'ordre de Born dans le cas vers l'avant. Quand nous utiliserons notre code numérique afin d'obtenir la valeur de la section efficace différentielle prédite pour ILC à partir de cette approche, nous devons retrouver un résultat identique à la valeur de la section efficace différentielle obtenue précédemment dans la limite  $|t - t_{min}| \simeq 0$  que nous pouvons lire sur la courbe Fig.3.17.

Dans le formalisme BFKL, nous l'avons vu, la transformé de Mellin inverse  $f_\omega(\underline{r}^2)$  de l'amplitude de diffusion est définie par

$$A(s, t) = is \int \frac{d\omega}{2i\pi} e^{\omega Y} f_\omega(\underline{r}^2), \quad (3.5.8)$$

avec

$$f_\omega(\underline{r}^2) = \int \frac{d^2\underline{k}_1}{(\underline{k}_1 - \underline{r})^2} \frac{d^2\underline{k}_2}{\underline{k}_2^2} \Phi_1^{ab(L,T)}(\underline{k}_1, \underline{r}) \Phi_2^{ab(L,T)}(\underline{k}_2, \underline{r}) f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{r}). \quad (3.5.9)$$

Dans le cas particulier sans transfert d'impulsion, la solution de spin conforme nul  $f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0)$  de l'équation BFKL s'écrit

$$f_\omega^{BFKL}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} \right)^{i\nu} \frac{1}{2\pi^2 k_1 k_2} \frac{1}{\omega - \omega(\nu)}. \quad (3.5.10)$$

La représentation en facteurs d'impact de la transformé de Mellin inverse  $f_\omega(0)$  de l'amplitude de diffusion vers l'avant devient

$$f_\omega(0) = \frac{1}{2} \int \frac{dk_1^2}{k_1^3} \frac{dk_2^2}{k_2^3} \Phi_1^{ab(L)}(k_1, 0) \Phi_2^{ab(L)}(k_2, 0) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{1}{\omega - \omega(\nu)} \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} \right)^{i\nu}, \quad (3.5.11)$$

où l'intégration sur les angles  $\theta_i$  a été réalisée (donnant un facteur  $\pi^2$ ). La fonction  $\omega(\nu)$  est la fonction caractéristique BFKL de spin conforme nul,

$$\omega(\nu) = \bar{\alpha}_s \chi(\nu), \quad (3.5.12)$$

avec  $\bar{\alpha}_s \equiv \alpha_s N_c / \pi$  et

$$\chi(\nu) = 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2} + i\nu\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - i\nu\right), \quad \psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x). \quad (3.5.13)$$

Nous avons vu en (3.3.26) que le facteur d'impact  $\gamma_L^* \rightarrow \rho_L$  à  $t = t_{min}$  s'exprime selon

$$\Phi_i^{ab}(k, r=0) = \mathcal{C}^{ab} Q_i \int_0^1 dz z \bar{z} \phi(z) \left[ \frac{1}{m_i^2} - \frac{1}{k^2 + m_i^2} \right], \quad (3.5.14)$$

où  $m_i^2 = Q_i^2 z \bar{z}$  (avec  $\bar{z} = 1 - z$ ),  $\phi(z)$  la DA du méson vecteur produit dans l'état final et

$$\mathcal{C}^{ab} = \frac{1}{(2\pi)^2} 16\pi^2 \alpha_s \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{\delta^{ab}}{2N_c} f_{\rho}, \quad (3.5.15)$$

tandis que le facteur d'impact (3.3.28) pour une polarisation transverse, s'annule dans le cas sans transfert d'impulsion. En utilisant les eqs.(3.5.14) et (3.5.15) dans (3.5.11) nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{\omega}(r^2=0) &= 4\pi\alpha_s^2 \alpha_{em} \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} f_{\rho}^2 Q_1 Q_2 \int_0^1 dz_1 z_1 \bar{z}_1 \phi(z_1) \int_0^1 dz_2 z_2 \bar{z}_2 \phi(z_2) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{1}{\omega - \omega(\nu, n)} \left[ \int \frac{dk_1^2}{k_1^3} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{k_1^2 + m_1^2} \right) k_1^{2i\nu} \right] \left[ \int \frac{dk_2^2}{k_2^3} \left( \frac{1}{m_2^2} - \frac{1}{k_2^2 + m_2^2} \right) k_2^{-2i\nu} \right] \\ &= 4\pi\alpha_s^2 \alpha_{em} \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} f_{\rho}^2 Q_1 Q_2 \int_0^1 dz_1 z_1 \bar{z}_1 \phi(z_1) \int_0^1 dz_2 z_2 \bar{z}_2 \phi(z_2) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{1}{\omega - \omega(\nu, n)} I(z_1, \nu) I(z_2, -\nu), \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

où  $I(z, \nu)$  s'écrit

$$\begin{aligned} I(z, \nu) &= \int \frac{dk^2}{k^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{k^2 + m^2} \right) k^{2i\nu} \\ &= - (m^2)^{-\frac{3}{2} + i\nu} \Gamma\left(\frac{3}{2} - i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right) \\ &= - (Q_1^2)^{-\frac{3}{2} + i\nu} (z\bar{z})^{-\frac{3}{2} + i\nu} \Gamma\left(\frac{3}{2} - i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Nous utilisons la fonction Beta d'Euler donnée par la relation usuelle

$$B(p, q) = \int_0^1 dz z^{p-1} \bar{z}^{q-1} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (3.5.18)$$

afin d'effectuer l'intégration sur les  $z_i$  selon

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dz z \bar{z} \phi(z) I(z, \nu) \\
 &= -(Q_1^2)^{-\frac{3}{2}+i\nu} \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right) \int_0^1 dz 6 (z\bar{z})^{\frac{1}{2}+i\nu} \\
 &= -6 (Q_1^2)^{-\frac{3}{2}+i\nu} \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu\right)}{\Gamma(3+2i\nu)} \\
 &= -6 (Q_1^2)^{-\frac{3}{2}+i\nu} \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu\right)}{\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{2(2+i\nu)-\frac{1}{2}} \Gamma(2+i\nu) \Gamma\left(\frac{5}{2}+i\nu\right)}{3+2i\nu}} \\
 &= -6\sqrt{\pi} 2^{-2-2i\nu} (Q_1^2)^{-\frac{3}{2}+i\nu} \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu\right)}{\Gamma(2+i\nu)}. \quad (3.5.19)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 f_\omega(r^2=0) &= 9\pi^2 \alpha_s^2 \alpha_{em} \frac{N_c^2-1}{N_c^2} f_\rho^2 Q_1 Q_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{1}{\omega-\omega(\nu)} (Q_1^2)^{-3/2+i\nu} (Q_2^2)^{-3/2-i\nu} \\
 &\times \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}-i\nu\right) \Gamma^2\left(\frac{3}{2}+i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}-i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)}{\Gamma(2-i\nu) \Gamma(2+i\nu)}. \quad (3.5.20)
 \end{aligned}$$

Nous voyons que la dépendance en la variable continue  $\nu$  de la singularité associée à des valeurs  $\omega = \omega(\nu)$  du moment de Mellin conjugué de  $s$ , fait apparaître une coupure plutôt qu'un pôle simple que nous ne pouvons associer directement à une valeur définie de l'intercept du Poméron comme cela avait été le cas pour l'échange d'un octet de couleur (cf. l'expression (2.2.49) de la transformée de Mellin de  $A^{(8)}$ ). Néanmoins, nous verrons plus loin qu'en effectuant l'intégration en  $\nu$  dans l'approximation du point selle valable à grande rapidité, nous réduirons la coupure précédente à son point de branchement donné par  $\omega = \omega(\nu=0)$  qui correspond bien à la singularité dominante dans le plan de la variable complexe  $\omega$  et qui mènera à définir  $\omega(\nu=0)$  comme l'intercept du Poméron à l'ordre des logarithmes dominants.

En prenant la transformée de Mellin de  $f_\omega(r^2=0)$ , nous en déduisons l'expression cherchée de l'amplitude  $A(s, t=t_{min})$

$$\begin{aligned}
 A(s, t_{min}, Q_1, Q_2) &= is 9\pi^2 \alpha_s^2 \alpha_{em} \frac{N_c^2-1}{N_c^2} f_\rho^2 \frac{1}{(Q_1 Q_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{\omega(\nu)Y} \left(\frac{Q_1^2}{Q_2^2}\right)^{i\nu} \\
 &\times \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}-i\nu\right) \Gamma^2\left(\frac{3}{2}+i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}-i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)}{\Gamma(2-i\nu) \Gamma(2+i\nu)}. \quad (3.5.21)
 \end{aligned}$$

Définissant  $R = Q_1/Q_2$  nous pouvons écrire

$$A(s, t_{min}, Q_1, Q_2) = is \frac{N_c^2-1}{N_c^2} \frac{9\pi^2 \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2}{(Q_1 Q_2)^2} J(Y, R), \quad (3.5.22)$$

avec

$$J(Y, R) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{\omega(\nu)Y} R^{2i\nu} \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2} - i\nu\right) \Gamma^2\left(\frac{3}{2} + i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} - i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)}{\Gamma(2 - i\nu) \Gamma(2 + i\nu)}. \quad (3.5.23)$$

L'intérêt tout particulier de cette écriture nous permet, une fois obtenue l'intégrale  $J$ , d'en déduire l'expression de l'amplitude de diffusion dans deux cas : l'ordre de Born qui sera donné par la limite sans évolution du noyau BFKL, ce qui correspond à une rapidité  $Y \rightarrow 0$  (ou de manière équivalente à  $\alpha_s \rightarrow 0$  dans l'expression de  $\omega(\nu)$  signifiant ainsi que les gluons horizontaux véhiculant l'interaction entre les deux gluons échangés dans la voie  $t$  ne se couplent plus à ces derniers), et le cas général avec resommation BFKL complète pour une valeur arbitraire de la rapidité  $Y$ . Nous allons démontrer l'expression de  $A(s, t_{min}, Q_1, Q_2)$  à l'ordre de Born en évaluant l'intégrale  $J(Y = 0, R)$  à partir de la somme des résidus des pôles apparaissant dans son intégrant.

Nous effectuons un changement de la variable d'intégration réelle  $\nu$  en  $\gamma = \frac{1}{2} + i\nu$ , communément utilisée dans le formalisme BFKL (il s'agit de la dimension anormale) afin d'exploiter les propriétés analytiques de l'intégrand et ainsi évaluer l'intégrale  $J$ . Nous pouvons donc écrire

$$J(0, R) = \frac{1}{R} \int_{1/2 - i\infty}^{1/2 + i\infty} \frac{d\gamma}{i} g(\gamma) \quad (3.5.24)$$

où

$$g(\gamma) \equiv R^{2\gamma} g_1(\gamma) \quad (3.5.25)$$

et

$$g_1(\gamma) \equiv \frac{\pi^3 \gamma (1 - \gamma)}{\Gamma(5/2 - \gamma) \Gamma(3/2 + \gamma) \sin^3(\pi\gamma)}. \quad (3.5.26)$$

Nous définissons aussi les fonctions  $f(\gamma)$  et  $f_1(\gamma)$  par

$$g(\gamma) \equiv \frac{f(\gamma)}{\sin^3(\pi\gamma)} \equiv R^{2\gamma} \frac{f_1(\gamma)}{\sin^3(\pi\gamma)}. \quad (3.5.27)$$

$f(\gamma)$  et  $f_1(\gamma)$  sont analytiques dans le plan  $\gamma$  complexe, en effet nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f_1(\gamma) &= \frac{\pi^3 \gamma (1 - \gamma)}{\Gamma(5/2 - \gamma) \Gamma(3/2 + \gamma)} \\ &= \frac{\pi^2 \gamma (1 - \gamma) \cos \pi\gamma}{(1/2 - \gamma)(1/2 + \gamma)(3/2 - \gamma)}. \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

Ainsi la structure en pôle de l'intégrand  $g(\gamma)$  est uniquement contenue dans le dénominateur  $\sin^3(\pi\gamma)$ , ce qui signifie que  $g(\gamma)$  possède des pôles triples pour des valeurs entières de  $\gamma$  sauf en  $\gamma = 0, 1$  où ce sont des pôles doubles du fait de la compensation avec les termes  $\gamma, 1 - \gamma$  du numérateur.

Le chemin d'intégration dans le plan complexe apparaissant en (3.5.24) correspond à la droite parallèle à l'axe imaginaire passant par  $\gamma = 1/2$ .  $g(\gamma)$  étant analytique dans le plan complexe excepté sur la droite réelle où sont localisé ses pôles, nous pouvons déformer continûment le contour d'intégration de sorte qu'il entoure tous les pôles situés sur l'axe réel négatif, incluant le pôle double en 0, c'est à dire pour des valeurs de  $\gamma = -n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

Nous considérons d'abord le cas des pôles triples obtenus pour  $\gamma = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . En écrivant  $\gamma = x - n$  avec  $x \ll 1$ , nous développons  $\sin \pi(x - n)$  jusqu'au troisième ordre en  $x$  pour obtenir

$$g(\gamma) = \frac{f(x - n)}{\sin^3 \pi(x - n)} \simeq \frac{(-1)^n}{(\pi x)^3} \left[ 1 + \frac{\pi^2 x^2}{2} \right] f(x - n). \quad (3.5.29)$$

Le résidu au point  $\gamma = -n$  est donné par la limite  $x \rightarrow 0$ , qui s'écrit donc pour un pôle triple

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\gamma=-n} g(\gamma) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{(-1)^n}{(\pi x)^3} \left[ 1 + \frac{\pi^2 x^2}{2} \right] f(x - n) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi^3} (f''(-n) + \pi^2 f(-n)). \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

En utilisant les fonctions auxiliaires  $g_1(\gamma)$  et  $f_1(\gamma)$  nous pouvons réécrire l'expression précédente en isolant la contribution du cas particulier  $R = 1$  :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\gamma=-n} g(\gamma) &= \frac{(-1)^n}{2\pi^3} \left( \frac{1}{R^{2n}} (f_1''(-n) + \pi^2 f_1(-n)) + \frac{1}{R^{2n}} (4 \ln^2 R f_1(-n) + 4 \ln R f_1'(-n)) \right) \\ &= \frac{1}{R^{2n}} \text{Res}_{\gamma=-n} g_1(\gamma) + (-1)^n \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{R^{2n}} (\ln^2 R f_1(-n) + \ln R f_1'(-n)) \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

avec

$$\text{Res}_{\gamma=-n} g_1(\gamma) = \frac{(-1)^n}{2\pi^3} (f_1''(-n) + \pi^2 f_1(-n)). \quad (3.5.32)$$

A cause du facteur  $\frac{1}{R^{2n}}$  dans (3.5.31) et absent de (3.5.32), nous voyons instantanément que la somme sur tous les résidus donnera une série entière qui convergera vers une fonction de structure analytique très différente suivant les cas  $R = 1$  ou  $R$  quelconque. Dans tous les cas, nous avons besoin d'établir d'après l'eq.(3.5.28), l'expression de  $f_1$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 au point  $\gamma = -n$

$$\begin{aligned} f_1(-n) &= (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{3}{(2n-1)} + \frac{2}{(2n+1)} + \frac{3}{(2n+3)} \right), \\ f_1'(-n) &= (-1)^n \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{3}{(2n-1)^2} + \frac{2}{(2n+1)^2} + \frac{3}{(2n+3)^2} \right), \\ f_1''(-n) &= -\pi^2 f_1(-n) + (-1)^n 2\pi^2 \left( \frac{3}{(2n-1)^3} + \frac{2}{(2n+1)^3} + \frac{3}{(2n+3)^3} \right), \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

ce qui conduit, d'après l'eq.(3.5.32), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  à

$$\text{Res}_{\gamma=-n} g_1(\gamma) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{3}{(2n-1)^3} + \frac{2}{(2n+1)^3} + \frac{3}{(2n+3)^3} \right]. \quad (3.5.34)$$

En effectuant la somme sur tous les résidus en  $\gamma = -n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{\gamma=-n} g_1(\gamma) = \frac{63\zeta(3) - 46}{9\pi} \quad (3.5.35)$$

avec la fonction  $\zeta$  de Riemann.

Nous devons maintenant considérer le pôle double en  $\gamma = 0$ . Pour cela nous définissons la fonction

$$h_1(\gamma) = \gamma^2 g_1(\gamma) \quad (3.5.36)$$

qui est holomorphe en  $\gamma = 0$ . Nous obtenons alors

$$h_1(0) = \frac{8}{3\pi} \quad \text{et} \quad h_1'(0) = -\frac{8}{9\pi}. \quad (3.5.37)$$

Donc le résidu de  $g_1(\gamma)$  en 0 sera

$$\text{Res}_{\gamma=0} g_1(\gamma) = h_1'(0) = -\frac{8}{9\pi}, \quad (3.5.38)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{\gamma=-n} g_1(\gamma) = \frac{7\zeta(3) - 6}{\pi}. \quad (3.5.39)$$

Ainsi, l'intégrale  $J(0, R = 1)$  est obtenue en sommant les résidus de  $g_1(\gamma)$  situés à l'intérieur du contour d'intégration :

$$J(0, 1) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{\gamma=-n} g_1(\gamma) = 14\zeta(3) - 12. \quad (3.5.40)$$

Nous en déduisons, d'après l'eq.(3.5.22), l'expression de l'amplitude dans le cas particulier de virtualités des photons identiques  $Q_1 = Q_2 = Q$  à l'ordre de Born

$$A^{\text{Born}}(s, t_{\min}, Q) = is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_{\rho}^2 \frac{9\pi^2}{Q^4} (14\zeta(3) - 12). \quad (3.5.41)$$

Nous allons traiter maintenant le cas général, qui correspond à une valeur quelconque de  $R$ . Nous considérons le cas  $R \geq 1$  qui correspond bien au contour d'intégration refermé dans le demi-plan de gauche comme celui que nous avons utilisé précédemment. Si nous définissons

$$h(\gamma) = R^{2\gamma} h_1(\gamma) \quad (3.5.42)$$

nous pouvons extraire simplement l'expression du résidu  $h'(0)$  du pôle en 0 pour  $R$  quelconque à partir de celui obtenu dans le cas  $R = 1$  (donné par  $h'_1(0)$  en (3.5.38))

$$\begin{aligned} h'(0) &= 2 \ln R h_1(0) + h'_1(0) \\ &= \frac{16}{3\pi} \left( \ln R - \frac{1}{6} \right) . \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

En comparant les expressions (3.5.43) du résidu du pôle en 0 et (3.5.31) du résidu du pôle en  $\gamma = -n$  nous en concluons que le résidu du pôle double en 0 domine l'expression de  $J(0, R)$  pour  $R \gg 1$ , c'est à dire pour des photons de virtualités fortement ordonnées. Cette limite particulière est très intéressante car elle correspond à la limite de diffusion profondément inélastique d'un photon de virtualité  $Q_1$  sur une cible photonique de virtualité  $Q_2 \ll Q_1$  décrite dans l'approximation colinéaire dans le modèle des partons habituel, que nous avons déjà rencontrée pour ce processus dans le cas de l'échange de quarks. Ainsi nous injectons l'expression

$$J(0, R \gg 1) \sim \frac{32}{3} \left( \frac{\ln R}{R} - \frac{1}{6R} \right) \quad (3.5.44)$$

dans la formule (3.5.22) pour obtenir l'expression dominante de l'amplitude pour des virtualités fortement ordonnées

$$A^{\text{Born}}(s, t_{\min}, Q_1 \gg Q_2) = is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2 \frac{96\pi^2}{Q_1^2 Q_2^2} \left( \frac{Q_2}{Q_1} \ln \frac{Q_1}{Q_2} - \frac{Q_2}{6Q_1} \right) . \quad (3.5.45)$$

L'expression du résidu (3.5.31) en  $\gamma = -n$  nous procure ainsi un développement en twist de l'amplitude de diffusion donné par les puissances successives en  $1/R^2$  pour des valeurs fixes de la virtualité  $Q_2$  de la cible.

Nous pouvons obtenir une resommation complète de ce développement en twist, en sommant tous les résidus des pôles triples en  $\gamma = -n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) donnés par l'eq.(3.5.31) et celui du pôle double en  $\gamma = 0$  donné par l'eq.(3.5.43) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{\gamma=-n} g(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{\gamma=-n} \left( \frac{1}{R^{2n}} g_1(\gamma) + (-1)^n \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{R^{2n}} (\ln^2 R f_1(-n) + \ln R f'_1(-n)) \right) + h'(0). \quad (3.5.46)$$

Les puissances de  $n$  apparaissant dans les dénominateurs des expressions (3.5.33) de  $f_1$ ,  $f_1'$  et (3.5.34) du résidu de  $g_1(\gamma)$  en  $\gamma = -n$  vont faire apparaître les fonctions polylogarithmes  $\text{Li}_2$  et  $\text{Li}_3$  définies par :

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}, \quad (3.5.47)$$

$$\text{Li}_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^3}. \quad (3.5.48)$$

Nous obtenons finalement pour  $J(0, R)$  dans le cas général

$$\begin{aligned} J(0, R) &= \frac{2\pi}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{\gamma=-n} g(\gamma) \\ &= -6 \left( R + \frac{1}{R} \right) - 6 \left( R - \frac{1}{R} \right) \ln R - 3 \left( R + \frac{1}{R} \right) \ln^2 R \\ &+ \left[ \frac{3}{R} + 2 + 3R^2 \right] \left[ \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{R} \right) - \ln \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \right) \frac{\ln^2 R}{2} \right. \\ &\left. + \left( \text{Li}_2 \left( \frac{1}{R} \right) - \text{Li}_2 \left( -\frac{1}{R} \right) \right) \ln R + \left( \text{Li}_3 \left( \frac{1}{R} \right) - \text{Li}_3 \left( -\frac{1}{R} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5.49)$$

Nous allons transformer cette expression en utilisant les relations de Landen pour  $\text{Li}_3$

$$\text{Li}_3(x) = \text{Li}_3 \left( \frac{1}{x} \right) - \frac{\pi^2}{6} \ln(-x) - \frac{1}{6} \ln^3(-x), \quad (3.5.50)$$

et d'Euler pour  $\text{Li}_2$  (cf. le chapitre 6 de la Ref.[81]),

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2 \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{2} \ln^2(-z) - \frac{\pi^2}{6} \quad (3.5.51)$$

afin de ne faire apparaître que des arguments  $R$  ou  $-R$ . Nous devons attacher une importance toute particulière aux phases qui apparaissent lorsque ces arguments traversent les coupures des fonctions logarithmes ou polylogarithmes impliquées. Par exemple l'expression précédente peut s'écrire pour un réel  $x > 1$  si l'on prend une prescription  $-i\pi$  le long de la coupure du logarithme,

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2 \left( \frac{1}{z} \right) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2 z + i\pi \ln z. \quad (3.5.52)$$

Nous obtenons alors en utilisant l'eq.(3.5.22), l'expression de l'amplitude de diffusion à l'ordre de Born pour des valeurs quelconques des virtualités photoniques

$$\begin{aligned}
 A^{Born}(s, t_{min}, Q_1 R Q_2, Q_2) = & \\
 & -is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2 \frac{9\pi^2}{2} \frac{1}{Q_1^2 Q_2^2} \left[ 6 \left( R + \frac{1}{R} \right) \ln^2 R + 12 \left( R - \frac{1}{R} \right) \ln R \right. \\
 & + 12 \left( R + \frac{1}{R} \right) + \left( 3R^2 + 2 + \frac{3}{R^2} \right) (\ln(1-R) \ln^2 R - \ln(R+1) \ln^2 R \\
 & \left. - 2 \text{Li}_2(-R) \ln R + 2 \text{Li}_2(R) \ln R + 2 \text{Li}_3(-R) - 2 \text{Li}_3(R) \right] . \quad (3.5.53)
 \end{aligned}$$

Nous avons déjà présenté ce résultat dans l'eq.(3.4.60). Comme prévu, nous pouvons utiliser cette formule afin d'obtenir le développement en twist jusqu'à l'ordre souhaité. Nous l'illustrons en donnant la première correction au terme dominant dans la limite de diffusion profondément inélastique obtenue en (3.5.45)

$$\begin{aligned}
 A^{Born}(s, t_{min}, Q_1 = R Q_2, Q_2) & \quad (3.5.54) \\
 = is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2 \frac{96\pi^2}{Q_2^4 R^2} & \left[ \frac{1}{R} \left( \ln R - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{R^3} \left( \frac{2}{5} \ln^2 R + \frac{47}{75} \ln R + \frac{1307}{2250} \right) + \dots \right] .
 \end{aligned}$$

Puisque l'eq.(3.5.53) implique plusieurs fonctions logarithmes et polylogarithmes, sa structure analytique faite de coupures doit être modifiée en vue de l'utiliser dans notre code d'intégration numérique, afin de réduire au minimum les termes susceptibles de donner des phases imaginaires lorsque l'argument des fonctions traversent leurs coupures (ie quand  $R > 1$  ou  $R < 1$  suivant les cas). Nous pouvons nous débarrasser du terme en  $\ln(1-R)$  en utilisant une autre relation d'Euler pour  $\text{Li}_2$ ,

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \ln z \ln(1-z) , \quad (3.5.55)$$

ce qui nous permet de réécrire l'amplitude de diffusion (nous reprenons la notation  $\mathcal{M}_{00} = A^{Born}(s, t_{min}, Q_1 = R Q_2, Q_2)$ ) selon

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{00} = -is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2 \frac{9\pi^2}{2} \frac{1}{Q_1^2 Q_2^2} & \left[ 6 \left( R + \frac{1}{R} \right) \ln^2 R \quad (3.5.56) \right. \\
 + 12 \left( R - \frac{1}{R} \right) \ln R + 12 \left( R + \frac{1}{R} \right) & + \left( 3R^2 + 2 + \frac{3}{R^2} \right) \left( \left( \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2(1-R) \right) \ln R \right. \\
 \left. - \ln(R+1) \ln^2 R - 2 \text{Li}_2(-R) \ln R + \text{Li}_2(R) \ln R + 2 \text{Li}_3(-R) - 2 \text{Li}_3(R) \right] & .
 \end{aligned}$$

A présent, les phases imaginaires ne peuvent provenir que de  $\text{Li}_2(R)$  et de  $\text{Li}_3(R)$  le long de leurs coupures respectives (lorsque  $R > 1$ ) et nous pouvons vérifier aisément que celles-ci se compensent exactement, en utilisant les relations (3.5.50) et (3.5.52). Par conséquent, nous pouvons sans risque employer les parties réelles de ces fonctions

polylogarithmes dans l'expression (3.5.56) et l'intégrer numériquement à l'aide de notre code en Fortran (où les fonctions polylogarithmes sont implémentées à partir d'un package externe sous la forme de fonctions de Nielsen généralisées).

On s'attend à ce que le collisionneur ILC fonctionne à une énergie nominale de 500 GeV, bien qu'elle pourrait être prolongée afin de couvrir une gamme entre 200 GeV et 1 TeV. En raison de cette possibilité, nous discutons ci-dessous des conséquences sur nos prévisions pour les sections efficaces mesurées en fonction de l'énergie disponible dans la collision, et ce, dans les mêmes conditions expérimentales données par les caractéristiques du détecteur BeamCal. Nous reprenons donc les bornes d'intégration génériques sur  $y_i$  établies en (3.5.4) et (3.5.5) en faisant cette fois varier  $E$ . Nous discutons aussi des effets de nos diverses hypothèses sur la section efficace différentielle  $\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0}}{dt}$  au point  $t_{min}$ , et des conséquences que nous en tirerons sur le comportement de la section efficace totale.

$$\frac{d\sigma^{t_{min}}}{dt} (fb/GeV^2)$$

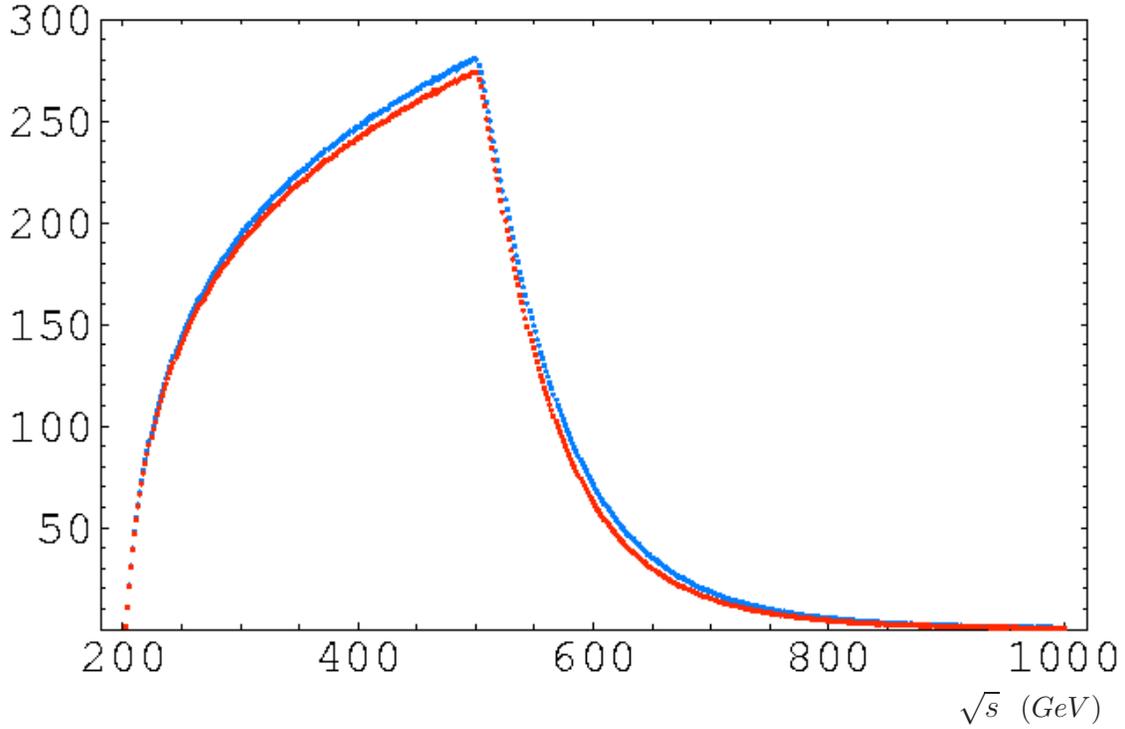


FIG. 3.18 – Sections efficaces pour le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  à  $t = t_{min}$  pour différents  $\alpha_s$  : les courbes bleue et rouge pour  $\alpha_s$  donné respectivement à une et trois boucles, avec  $c = 1$ .

La Fig.3.18 présente la section efficace à  $t_{min}$  en fonction de l'énergie dans le centre de

masse leptonique  $\sqrt{s}$  pour différentes prescriptions de la constante de couplage fort  $\alpha_s$ . Afin d'étudier la sensibilité de nos prévisions dans ces choix, nous traçons la section efficace différentielle vers l'avant dans deux cas : la courbe bleue correspond à  $\alpha_s(\sqrt{Q_1 Q_2})$  à une boucle et la rouge à  $\alpha_s(\sqrt{Q_1 Q_2})$  à trois boucles. Les courbes de la Fig.3.18 sont très proches l'une de l'autre, ce qui signifie comme prévu que les corrections radiatives dans la constante de couplage de QCD mènent à une faible incertitude sur la section efficace totale.

Les formes des courbes de la Fig.3.18 distinguent deux domaines différents : si la gamme d'énergie  $\sqrt{s}$  prévue est inférieure à 500 GeV, la fonction  $f(Q_i)$  (cf. équation (3.5.3)) apparaissant comme une contrainte sur la valeur minimum de  $y_i$  dans le domaine d'intégration sur l'espace des phases ne joue aucun rôle à  $\theta_{min} = 4$ . En raison de la condition que nous avons supposée sur la valeur minimale de détection des énergies des leptons diffusés dans la section 3.5.1, le domaine d'intégration de  $y_i$  devient très étroit (cf. équation (3.5.4)) quand  $\sqrt{s}$  décroît jusqu'à 200 GeV et provoque ainsi une chute brutale de la section efficace à cette énergie. De-même la section efficace augmente avec  $\sqrt{s}$  entre 200 et 500 GeV.

Sur la seconde portion de la courbe, si  $\sqrt{s}$  devient supérieur à 500 GeV,  $f(Q_i)$  coupera la petite région de  $y_i$  (qui contribue principalement en raison des flux de photons de Weizsäcker-Williams) quand  $\sqrt{s}$  augmente. Ainsi la section efficace s'effondre entre 500 GeV et 1 TeV. Ceci est dû à la limitation provoquée par l'angle minimal de détection offert par le calorimètre de BeamCal, qui est ainsi optimal pour notre processus quand  $\sqrt{s} = 500$  GeV. Cet effet sur  $f(Q_i)$  pourrait être compensé si nous pouvions augmenter la valeur des virtualités  $Q_i$  mais ceci serait complètement supprimé en raison de la diminution considérable de l'amplitude avec  $Q_i$  comme nous l'avons vu au niveau de la collision entre photons. Nous pouvons aussi expliquer cet effet de manière plus intuitive : puisque nous avons choisit une coupure dure  $Q_{i\ min} = 1$  GeV pour effectuer notre calcul perturbatif, l'angle minimum correspondant de diffusion des leptons se comportant en  $2 Q_{i\ min}/\sqrt{s}$  deviendra inférieur à la coupure angulaire (de 4mrad) expérimentale imposée par la résolution du calorimètre dès que  $\sqrt{s}$  dépassera 500 GeV, ainsi le flux de leptons sera trop colinéaire au faisceau pour être observé dans le détecteur, donnant ainsi lieu à une chute brutale des sections efficaces entre 500 GeV et 1 TeV.

Il est enfin très rassurant pour la cohérence de notre travail, que la valeur obtenue de la section efficace différentielle (que nous pouvons lire sur la courbe de la Fig.3.18) quand  $\sqrt{s} = 500$  GeV dans cette approche, soit bien la même que celle que nous lisons sur la courbe de la Fig.3.17 reliée à l'amplitude  $\mathcal{M}_{00}$  quand  $|t - t_{min}| \simeq 0$ .

Nous pouvons finalement remarquer que l'espace des phases introduit pour décrire la collision au niveau  $e^+e^-$  en utilisant les caractéristiques expérimentales offertes à ILC fait apparaître une dépendance en  $s$  des sections efficaces qui était absente au niveau  $\gamma^*\gamma^*$ , fait bien connu pour l'ordre de Born de l'amplitude d'échange du Poméron BFKL.

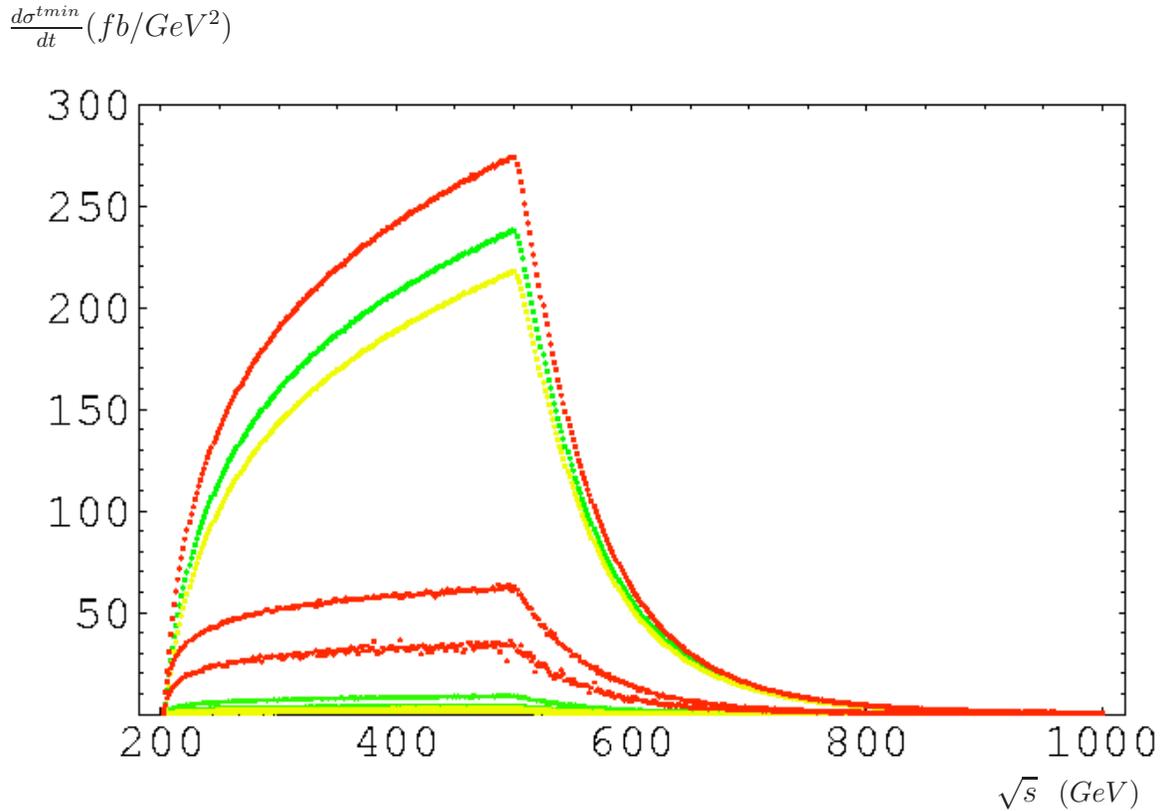


FIG. 3.19 – Sections efficaces pour le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\rho_L^0\rho_L^0$  à  $t = t_{min}$  pour différentes valeurs du paramètre  $c$  : la courbe rouge correspond à  $c = 1$ , la verte à  $c = 2$  et la jaune à  $c = 3$ . Pour chaque valeur du paramètre  $c$ , par ordre décroissant les courbes correspondent à l'échange de gluons, l'échange de quarks avec des photons virtuels longitudinaux et l'échange de quarks avec des photons virtuels transverses.

La Fig.3.19 montre la section efficace à  $t_{min}$  pour différentes valeurs du paramètre  $c$  qui entre dans la condition cinématique de la limite de Regge  $s_{\gamma^*\gamma^*} = y_1 y_2 s > c Q_1 Q_2$ . La valeur du paramètre  $c$  commande la dominance des contributions gluoniques dans l'amplitude de diffusion : l'augmentation de  $c$  induit une suppression accrue de la contribution des échanges de quarks. Pour observer cet effet, nous présentons la contribution des quarks et des gluons sur le même graphe : nous employons l'espace des phases habituel pour le processus étudié  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\rho_L^0\rho_L^0$  (cf. l'eq.(3.2.2)) avec les expressions des amplitudes obtenues avec échange de quarks (3.4.65) et (3.4.66), et effectuons leur intégration numérique sur  $y_i, Q_i$  avec les mêmes coupures que celles utilisées pour le processus avec échange de deux gluon reggézés (cf. la section 3.5.1). Pour chaque valeur de  $c$  nous traçons les trois courbes correspondant aux processus d'échanges de deux gluons

reggézés (à  $t_{min}$  donc dans le seul cas des photons virtuels longitudinaux) et d'échanges de quarks dans le cas des photons virtuels longitudinaux et transverses.

L'intégration numérique dans le cas des amplitudes correspondant à l'échange de quarks nécessite une discussion supplémentaire : l'expression (3.4.66) donnant l'amplitude de diffusion dans le cas de l'échange de quarks dans les collisions entre photons de polarisation transverse n'est pas divergente quand  $Q_i^2 \rightarrow s$  car cette limite est seulement valide si  $s(1 - Q_1^2/s)(1 - Q_2^2/s)$  est fini et positif puisque cette quantité correspond dans notre notation du chapitre 1, à l'énergie dans le centre de masse des photons virtuels c'est-à-dire  $s_{\gamma^*\gamma^*}$ . Afin d'éviter des instabilités numériques lors de l'intégration, nous ajoutons la condition supplémentaire  $y_1 y_2 s > Q_1^2, Q_2^2$  dans notre code et qui s'appliquera donc aux trois amplitudes à intégrer. Nous pouvons vérifier que cette contrainte supplémentaire ne change pas nos résultats pour les autres contributions, à savoir pour l'échange de deux gluons et l'échange de quarks avec des photons virtuels longitudinaux.

Comme prévu, la contribution des quarks est supprimée en augmentant  $c$  et devient complètement négligeable dès que  $c$  excède 2. Les discussions qui précèdent concernent le cas vers l'avant  $t = t_{min}$ , ce qui détermine la tendance de la section efficace dans le cas général. Pour cette raison nous espérons que les conclusions que nous avons obtenues seront également valides au niveau de la section efficace totale intégrée en  $t$ . Ainsi, nous allons considérer que l'échange de quarks est négligeable dans ce qui suit. Nous obtenons finalement les résultats suivants pour la section efficace totale intégrée sur  $t$ . Nous proposerons trois prédictions qui diffèrent par le choix de la définition de la constante de couplage fort et par le choix de la valeur du paramètre  $c$  qui commande la dominance de l'échange des gluons sur les quarks.

Tout d'abord nous choisissons  $\alpha_s(\sqrt{Q_1 Q_2})$  à trois boucles, la constante  $c = 1$ , l'énergie dans le centre de masse  $\sqrt{s} = 500$  GeV et nous obtenons (les incertitudes numériques, incluses dans le nombre de chiffres significatifs, sont bien inférieures aux incertitudes liées aux hypothèses théoriques que nous discutons plus loin) :

$$\begin{aligned}\sigma^{LL} &= 32.4 \text{ fb} \\ \sigma^{LT} &= 1.5 \text{ fb} \\ \sigma^{TT} &= 0.2 \text{ fb}\end{aligned}\tag{3.5.57}$$

et ainsi

$$\sigma^{Total} = 34.1 \text{ fb}.\tag{3.5.58}$$

Avec une luminosité intégrée nominale de  $125 \text{ fb}^{-1}$ , ceci conduira à observer  $4.26 \cdot 10^3$  événements par an.

Deuxièmement, avec les choix de  $\alpha_s(\sqrt{Q_1 Q_2})$  à une boucle, la constante  $c = 1$  et l'énergie  $\sqrt{s} = 500$  Gev, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma^{LL} &= 33.9 \text{ fb} \\ \sigma^{LT} &= 1.5 \text{ fb} \\ \sigma^{TT} &= 0.2 \text{ fb}\end{aligned}\tag{3.5.59}$$

ce qui conduit à

$$\sigma^{Total} = 35.6 \text{ fb}.\tag{3.5.60}$$

Comme nous pouvions l'espérer, nous constatons que la transition de trois à une boucle dans l'expression de la constante de couplage de QCD aura une incidence sous-dominante. Ce résultat permettra de mesurer  $4.45 \cdot 10^3$  événements par an avec la luminosité intégrée nominale prévue de  $125 \text{ fb}^{-1}$ .

Troisièmement, nous choisissons  $\alpha_s(\sqrt{Q_1 Q_2})$  à trois boucles, la même énergie  $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$  et la constante  $c$  fixée à 2 (nous avons précédemment constaté la suppression complète de la contribution d'échanges de quarks à cette valeur du paramètre  $c$ ) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma^{LL} &= 28.1 \text{ fb} \\ \sigma^{LT} &= 1.3 \text{ fb} \\ \sigma^{TT} &= 0.2 \text{ fb}\end{aligned}\tag{3.5.61}$$

ce qui implique

$$\sigma^{Total} = 29.6 \text{ fb}.\tag{3.5.62}$$

Ce résultat mènera à  $3.7 \cdot 10^3$  événements mesurables par an avec la luminosité de  $125 \text{ fb}^{-1}$ .

Enfin, nous considérons les mêmes hypothèses que précédemment, excepté pour la valeur de  $c$  qui est maintenant fixée à  $c = 10$  afin de prendre en compte une condition moins favorable donnée par la limite cinématique de Regge (l'espace de phases de la collision est ainsi réduit par rapport aux cas précédents où  $c$  prend des valeurs de l'ordre de 1) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma^{LL} &= 19.3 \text{ fb} \\ \sigma^{LT} &= 0.9 \text{ fb} \\ \sigma^{TT} &= 0.11 \text{ fb}\end{aligned}\tag{3.5.63}$$

ce qui conduit à

$$\sigma^{Total} = 20.3 \text{ fb}.\tag{3.5.64}$$

Ce résultat correspond à  $2.5 \cdot 10^3$  événements mesurables par an avec la luminosité de  $125 \text{ fb}^{-1}$ .

Ainsi, nous voyons que la manière dont on modifie l'espace des phases du processus pour tenir compte précisément du domaine d'applicabilité de la représentation en facteur d'impact (valide théoriquement pour des énergies asymptotiques dans le centre de masse des photons virtuels) conduira - même dans le cas d'une condition cinématique de Regge très drastique- à un nombre d'événements suffisant pour que le processus fasse l'objet d'une étude expérimentale approfondie.

Toutes les prévisions ci-dessus ont été obtenues en utilisant l'amplitude de distribution asymptotique des mésons vecteurs. Afin d'étudier la sensibilité de nos résultats par rapport à cette hypothèse, nous utilisons également d'autres DA (3.3.31) calculées dans différents modèles. Le choix de la DA dans la Ref.[82] avec  $a_2 = -0.1$  et  $a_4 = 0$  donne  $4.2 \cdot 10^3$  événements par an, alors que le choix de DA de la Ref.[83] avec  $a_2 = 0.05$  et  $a_4 = 0$  donnera  $4.3 \cdot 10^3$  événements par an.

En résumé de la présente partie nous voyons que nos prévisions sont tout à fait stables en changeant les principaux paramètres caractérisant ainsi les incertitudes théoriques de notre approche.

La question naturelle que nous allons traiter dans la suite, est de savoir comment nos prévisions récapitulées par les eqs.(3.5.58-3.5.62) seront modifiées par la prise en compte des termes d'interaction entre les deux gluons reggézés dans le canal  $t$ , resommés à tous les ordres de perturbation dans l'approximation des logarithmes dominants par l'équation BFKL. A priori l'évolution BFKL augmentera considérablement la valeurs des sections efficaces qui vont alors dépendre de  $s$  selon la loi de puissance caractéristique de la limite de Regge, ce qui signifie que les résultats obtenus dans l'approximation de Born pourront être considérés comme la limite inférieure ou le bruit de fond des sections efficaces de production de paires de mesons  $\rho$  avec l'évolution BFKL complète; notons toutefois que ceci est vrai pour des énergies  $s_{\gamma^*\gamma^*}$  suffisantes, en dessous desquelles l'évolution BFKL produira une section efficace inférieure à celle de l'ordre de Born (cf. l'article [89]).

Nous considérons ci-dessous seulement le cas vers l'avant donné par le point  $t = t_{min}$  qui correspond au maximum de la section efficace différentielle comme nous l'avons vu et nous donnera ainsi le comportement dominant que devra suivre la section efficace totale. Nous nous limitons à l'évolution BFKL dans l'approximation des logarithmes dominants, qui a été étudiée pour une échelle dure fournie par  $t$  au lieu de  $Q^2$  dans [84]. Naturellement une telle évaluation doit être considérée avec prudence puisqu'il est bien connu que LL BFKL surestime l'importance des corrections. Nous verrons au chapitre suivant comment tenir compte des effets de resommation BFKL à l'ordre suivant des

logarithmes dominants (NLL).

$$\frac{d\sigma^{t_{min}}}{dt} (fb/GeV^2)$$

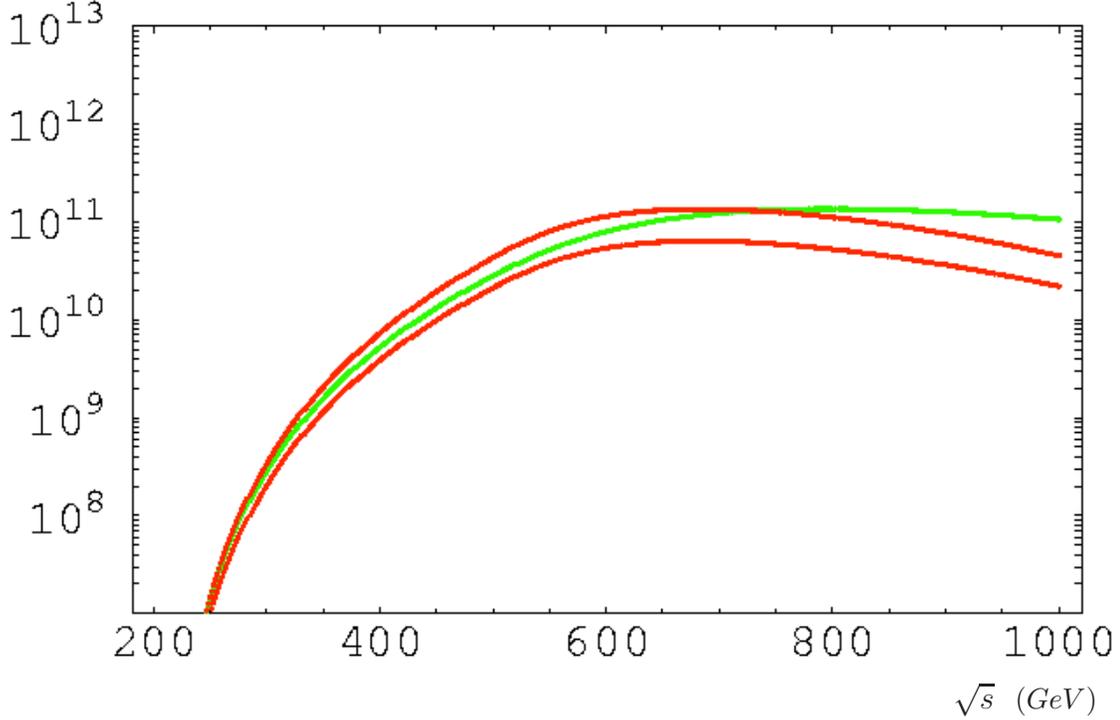


FIG. 3.20 – : Sections efficaces pour le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  avec resommation LL BFKL à  $t = t_{min}$  pour différentes prescriptions de  $\alpha_s$  : la courbe rouge du haut (resp. du bas) correspond à l'expression  $\alpha_s$  à une boucle (resp. trois boucles) et la courbe verte pour une valeur fixée de  $\alpha_s = 0.46$ .

Nous retournons à l'expression (3.5.22) de l'amplitude de diffusion vers l'avant que nous avons précédemment établie dans le formalisme BFKL

$$A(s, t_{min}, Q_1, Q_2) = is \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \frac{9\pi^2 \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2}{(Q_1 Q_2)^2} J(Y, R), \quad (3.5.65)$$

avec

$$J(Y, R) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{\omega(\nu)Y} R^{2i\nu} \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2} - i\nu\right) \Gamma^2\left(\frac{3}{2} + i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} - i\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + i\nu\right)}{\Gamma(2 - i\nu) \Gamma(2 + i\nu)} \quad (3.5.66)$$

et nous évaluons l'intégration sur la variable  $\nu$  dans l'approximation du point-selle situé en  $\nu = 0$ , la dérivée de la fonction caractéristique  $\omega(\nu)$  étant bien nulle en ce point.

Cette approximation est pertinente dans la limite d'une très grande valeur de la rapidité  $Y \gg 1$ , ce qui sera le cas au collisionneur ILC.

Nous utilisons la fonction auxiliaire  $g_1(\gamma = \frac{1}{2} + i\nu)$  qui contient les fonctions  $\Gamma$  apparaissant dans l'intégrand de  $J(Y, R)$  et définie en (3.5.26) afin d'écrire l'intégrale  $J(Y, R)$  sous la forme

$$J(Y, R) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{\omega(\nu)Y + 2i\nu \ln R} g_1\left(\frac{1}{2} + i\nu\right). \quad (3.5.67)$$

En développant jusqu'au deuxième ordre en  $\nu$  au point selle l'argument de l'exponentielle, nous obtenons

$$\begin{aligned} \omega(\nu)Y + 2i\nu \ln R &\sim \omega(0)Y + 2i \ln R \nu + \frac{\omega''(0)Y}{2} \nu^2 \\ &= \frac{\omega''(0)Y}{2} \left( \nu + \frac{2i \ln R}{\omega''(0)Y} \right)^2 + \frac{2 \ln^2 R}{\omega''(0)Y} + \omega(0)Y, \end{aligned} \quad (3.5.68)$$

avec

$$\omega''(0) = \left. \frac{d^2 \omega(\frac{1}{2} + i\nu)}{d\nu^2} \right|_{\nu=0} = -28 \bar{\alpha}_s \zeta(3), \quad (3.5.69)$$

$$\omega(0) = 4 \ln 2 \bar{\alpha}_s \quad (3.5.70)$$

et

$$g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^3}{4}. \quad (3.5.71)$$

Nous obtenons alors une simple gaussienne à intégrer après un changement de variable d'intégration élémentaire

$$\begin{aligned} J(Y, R) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{\frac{\omega''(0)Y}{2} \nu^2 + \frac{2 \ln^2 R}{\omega''(0)Y} + \omega(0)Y} g_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\sim \frac{\pi^3 \sqrt{\pi}}{4} \frac{e^{4 \ln 2 \bar{\alpha}_s Y}}{\sqrt{14 \bar{\alpha}_s \zeta(3) Y}} \exp\left(-\frac{\ln^2 R}{14 \bar{\alpha}_s \zeta(3) Y}\right), \quad Y \gg 1, \end{aligned} \quad (3.5.72)$$

ce qui nous permet d'obtenir finalement pour expression de l'amplitude de diffusion vers l'avant avec resommation BFKL dans l'approximation LL évaluée au point selle :

$$A(s, t = t_{min}, Q_1, Q_2) = i s \pi^5 \sqrt{\pi} \frac{9(N_c^2 - 1) \alpha_s^2 \alpha_{em} f_\rho^2}{4N_c^2 Q_1^2 Q_2^2} \frac{e^{4 \ln 2 \bar{\alpha}_s Y}}{\sqrt{14 \bar{\alpha}_s \zeta(3) Y}} \exp\left(-\frac{\ln^2 R}{14 \bar{\alpha}_s \zeta(3) Y}\right) \quad (3.5.73)$$

avec le choix de la rapidité  $Y = \ln(\frac{c' s y_1 y_2}{Q_1 Q_2})$ ,  $\bar{\alpha}_s = \frac{N_c}{\pi} \alpha_s(\sqrt{Q_1 Q_2})$  et le rapport des virtualités  $R = \frac{Q_1}{Q_2}$ .

Le terme  $e^{4 \ln 2 \bar{\alpha}_s Y}$ , avec  $\omega(\nu = 0) = 4 \ln 2 \bar{\alpha}_s$  peut être écrit sous la forme générique  $(\frac{s_{\gamma^* \gamma^*}}{-t})^{\omega(0)}$  qui est bien caractéristique de la propagation d'une particule (appelée le Poméron dans notre cas, véhiculant les nombres quantiques du vide dans la voie  $t$ ) acquérant une trajectoire de Regge. Nous pouvons alors identifier simplement la valeur de l'intercept du Poméron BFKL à l'ordre des logarithmes dominants (LL) par le point de branchement  $\omega(\nu = 0)$  de la coupure de l'amplitude, comme nous l'avons observé précédemment :

$$\begin{aligned} \epsilon_P(t_{min}) &= \omega(\nu = 0) \\ &= 4 \ln 2 \bar{\alpha}_s. \end{aligned} \tag{3.5.74}$$

Le terme  $\exp\left(-\frac{\ln^2 R}{14 \bar{\alpha}_s \zeta(3) Y}\right)$ , appelé terme de diffusion de l'échelle transverse typique, contient la dépendance dans l'échelle typique transverse caractérisée par les virtualités  $Q_i$  des photons. En effet, il décrit la diffusion de l'échelle transverse typique du processus entre ses deux valeurs extrémales données par les deux virtualités  $Q_1$  et  $Q_2$ . Notons que ce terme disparaît bien entendu lorsque les deux photons possèdent des virtualités identiques.

Dans la Fig.3.20 nous montrons la section efficace à  $t_{min}$  en fonction de  $\sqrt{s}$ , pour différents choix de  $\alpha_s$  : nous avons considéré  $\alpha_s$  à une et trois boucles (courbes rouges) comme dans la discussion précédente pour l'échange de deux gluons reggézés et nous avons également utilisé une valeur fixe de  $\alpha_s$  (courbe verte) à trois boucles qui correspond à une virtualité typique  $Q = Q_1 = Q_2 = 1.1$  GeV (cette valeur de  $Q$  permet de se rapprocher au mieux des deux courbes précédentes). Afin de rendre plus pertinentes les comparaisons avec l'étude précédente effectuée à l'ordre de Born de BFKL, nous utiliserons le même espace des phases de la réaction (coupures cinématiques, contraintes expérimentales discutées dans la section (3.5.1)).

Les courbes de la Fig.3.20 sont obtenues en supposant que le paramètre  $c'$  qui apparaît dans notre définition de la rapidité  $Y = \ln(\frac{c' s y_1 y_2}{Q_1 Q_2})$ , arbitraire à l'ordre des logarithmes dominants (cf. chapitre 2) et d'ordre 1, est choisi égal à 1. Le facteur  $\exp(4 \ln 2 \bar{\alpha}_s Y)$  qui correspond à l'exposant de l'intercept du Poméron au LL explique la nette augmentation de la sensibilité au choix de  $\alpha_s$  comparé à celle du cas de l'ordre de Born, puisque  $4 \ln 2 Y$  prendra de grandes valeurs pour les rapidités  $Y$  atteignables à ILC. Pour les mêmes raisons que celles avancées précédemment, la fonction  $f(Q_i)$  n'apparaît pas pour  $\sqrt{s}$  inférieur à 500 GeV ; la section efficace différentielle croît bien exponentiellement dans ce domaine ; toutefois, pour des valeurs plus faible de  $\sqrt{s}$ , c'est à dire quand l'énergie dans le centre de masse des leptons se rapproche de 200 GeV,

nous avons vu que l'espace des phases devenait de plus en plus étroit dans la variable  $y_i$  jusqu'à s'annuler complètement pour  $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ , ce qui explique la forme des courbes de la Fig.3.20 dans cette région. L'effet de  $f(Q)$  n'apparaît qu'à partir de 500 GeV et donne un point d'inflexion des courbes et un maximum au delà de 500 GeV du fait de la compétition avec le facteur en exponentielle de la rapidité; les courbes diminuent alors jusqu'à 1TeV.

Nous illustrons les effets du changement des valeurs du paramètre  $c'$  dans la Fig.3.21.

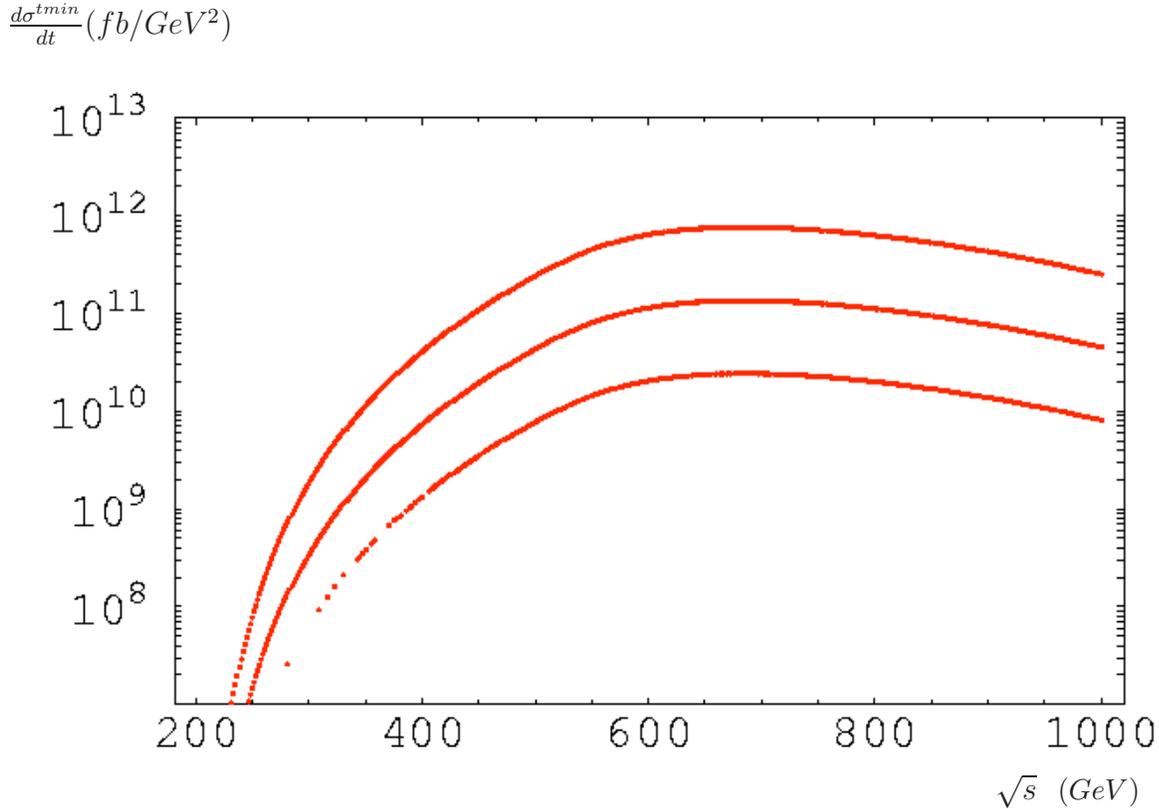


FIG. 3.21 – Sections efficaces pour le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  avec resommation LL BFKL à  $t = t_{min}$  pour différentes valeurs du paramètre  $c'$  : par ordre décroissant les courbes correspondent à  $c' = 2$ ,  $c' = 1$  et  $c' = 0.5$ .  $c$  est fixé à 1.

Comme prévu, l'ordre de grandeur de cet effet sur la section efficace différentielle est assez important puisque la rapidité est très élevée et mène ainsi à une grande valeur du facteur  $\exp(4 \ln 2 \bar{\alpha}_s Y)$ , ce qui rend très sensible la définition précise de la rapidité.

La discussion ci-dessus à propos de l'évolution BFKL a été limitée au cas sans transfert d'impulsion  $t = t_{min}$ . Dans le cas général, où l'on peut intégrer la section efficace différentielle sur  $t$  afin de prédire le nombre d'événements mesurables à ILC (comme

nous l'avons fait pour l'ordre de Born), la région de l'espace des phases correspondant aux petites valeurs de  $t$  domine les sections efficaces différentielles, comme c'était le cas à l'ordre de Born. De même, la hiérarchie obtenue entre les sections efficaces différentielles à l'ordre de Born pour différentes polarisations des photons sera toujours valide en incluant l'évolution BFKL à n'importe quel ordre de resommation (Born, LL, NLL, etc....). En effet, l'argument utilisé dans la section 3.4.2 à l'ordre de Born et sur lequel cette hiérarchie est basée, repose seulement sur la conservation d'hélicité dans le canal  $s$ , ce qui est indépendant d'un ordre donné de la procédure de resommation. Techniquement, ceci signifie que la représentation en facteur d'impact rendue possible grâce à la factorisation en  $\underline{k}$  est valide au delà de l'approximation de Born ou des logarithmes dominants.

En comparant les sections efficaces obtenues à l'ordre de Born (Fig.3.18 et Fig.3.19) aux sections efficaces avec évolution BFKL à l'ordre des logarithmes dominants (Fig.3.20 et Fig.3.21), nous constatons qu'elles diffèrent de plusieurs ordres de grandeur. Ceci est principalement dû au facteur typique en  $\exp(4 \ln 2 \bar{\alpha}_s Y)$  de la resommation LO BFKL qui ne permet pas d'effectuer des prédictions fiables à l'ILC, car elle prédit des effets largement surestimés. La limite de l'utilisation de la procédure de resommation BFKL à l'ordre des logarithmes dominants réside principalement dans l'expression de l'intercept du Poméron qui en découle :  $\omega(0) = 4 \ln 2 \bar{\alpha}_s$  est simplement proportionnel à la constante de couplage fort  $\alpha_s$ , l'intercept prendra donc des valeurs numériques importantes pour des coupures dures de l'ordre du GeV apportée par  $Q_i$  dont les valeurs minimales donneront les contributions dominantes à la section efficace totale qui décroît en loi de puissance de  $Q_i$  comme nous pouvons le voir par exemple à  $t = t_{min}$  dans l'eq.(3.5.73). Notons également que l'évolution BFKL à l'ordre des logarithmes dominants n'a pas permis de décrire de manière satisfaisante les données expérimentales de la mesure de  $F_2$  à HERA ou de la section efficace totale  $\gamma^*\gamma^*$  à LEP, du fait notamment de cette trop grande valeur de l'intercept du Poméron.

Nous pouvons toutefois utiliser qualitativement le résultat obtenu avec la resommation BFKL à l'ordre des logarithmes dominants : le nombre d'événements mesurables sera supérieur à celui prévu à l'ordre de Born qui fournit donc une borne inférieure de la mesurabilité de notre processus. Nous pourrions utiliser la chute brutale de la section efficace à l'ordre de Born pour des énergies supérieures à 500 GeV comme un test effectif de la resommation BFKL, qui, si elle a lieu, provoquera une augmentation de la section efficace qui compensera au moins partiellement cette chute (dans une hypothèse pessimiste, au moins pour des énergies supérieures à 500 GeV mais pas trop éloignées).

### 3.5.4 Perspectives : la resommation BFKL à l'ordre suivant

La resommation des termes en  $\alpha_s(\alpha_s \ln(\frac{s}{s_0}))^n$  effectuée par le noyau de l'équation BFKL calculée dans l'approximation de l'ordre suivant des logarithmes dominants (Next-

to-Leading-Logarithms) est connue actuellement [86] dans le cas général d'un moment transféré quelconque. Les facteurs d'impact à cet ordre perturbatif NLL sont connus dans le cas  $t = 0$  pour  $\gamma^* \rightarrow \gamma^*$  [87], production de jet vers l'avant [88] et pour la transition  $\gamma^* \rightarrow \rho$  dans le cas  $t = 0$  [72]. Ces études mènent à des corrections très larges des prédictions faites l'ordre LL : le noyau NLL prédit une valeur de l'intercept du Poméron inférieure à 1 pour  $\bar{\alpha}_s$  supérieure à 0.15, ce qui est même inférieur à la valeur utilisée ( $\alpha_{\mathbb{P}} = 1.08$ ) pour le Poméron mou des théories de Regge. De plus, le noyau NLL présente deux points selles conjugués l'un de l'autre, pouvant mener à des solutions oscillantes. Il existe différentes manières d'améliorer la convergence de la série perturbative à l'ordre NLL. Nous allons considérer dans la suite l'approche du noyau NLL resumé par le groupe de renormalisation [90], mais dans une version simplifiée proposée par le groupe de Durham [91] qui consiste à appliquer cette méthode au noyau BFKL LL, avec une constante de couplage  $\bar{\alpha}_s$  fixée. Cette méthode est utilisée dans [67] et nous l'utilisons ici en la détaillant brièvement. Le résultat de cette approche consiste à modifier simplement la fonction caractéristique  $\chi_0(\gamma)$  ( $\gamma = 1/2 + i\nu$ ) du noyau LL définie en (3.5.13) par

$$\chi(\gamma, \omega) = \chi_0(\gamma) + \bar{\alpha}_s \chi_1(\gamma, \omega) \quad (3.5.75)$$

où  $\chi_1(\gamma, \omega)$  tient compte des corrections colinéaires et anti-colinéaires dues à DGLAP en incluant notamment les transformées de Mellin des fonctions de splitting. Le pôle dans le plan  $\omega$  complexe est alors déterminé par

$$\omega = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma, \omega). \quad (3.5.76)$$

Nous effectuons l'intégration sur  $\gamma$  dans l'approximation du point selle, comme nous l'avons fait sur  $\nu$  dans le cas LL. Nous devons donc déterminer la position  $\omega_s \equiv \omega_{NLL}(\gamma_s)$  du point selle donnée par le couple  $(\gamma_s, \omega_s)$ . Celle-ci s'écrit

$$\left. \frac{d\omega_{NLL}(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_s} = 0 \quad (3.5.77)$$

avec

$$\frac{d\omega_{NLL}(\gamma)}{d\gamma} = \bar{\alpha}_s \left( \frac{\partial \chi(\gamma, \omega)}{\partial \gamma} + \frac{\partial \chi(\gamma, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega_{NLL}(\gamma)}{d\gamma} \right) \quad (3.5.78)$$

qui se réduit à la relation

$$\left. \frac{\partial \chi(\gamma, \omega_s)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_s} = 0. \quad (3.5.79)$$

Nous devons donc trouver les solutions (l'intercept  $\omega_s$  du Pomeron NLL et la dimension anormale  $\gamma_s$ ) d'un système de deux équations différentielles (données par la condition provenant de l'approximation du point selle et la position de la singularité de l'amplitude en  $\omega$ ) :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \chi(\gamma, \omega_s)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_s} = 0, \\ \omega_s = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma_s, \omega_s). \end{cases} \quad (3.5.80)$$

Nous obtenons simplement l'expression de la dérivée seconde de  $\omega_{NLL}(\gamma)$  (de signe opposé à l'expression (3.5.69) en fonction de  $\nu$ )

$$\omega_s'' = \left. \frac{d^2 \omega_{NLL}(\gamma)}{d\gamma^2} \right|_{\gamma=\gamma_s} = \frac{\bar{\alpha}_s \left. \frac{\partial^2 \chi(\gamma, \omega_s)}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma=\gamma_s}}{1 - \bar{\alpha}_s \left. \frac{\partial \chi(\gamma_s, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_s}}. \quad (3.5.81)$$

Le résidu obtenu en intégrant sur  $\omega$  contient un facteur  $\frac{1}{1-\dot{\omega}_s}$  supplémentaire qui était absent à l'ordre LL (car il n'y avait pas de dépendance en  $\omega$  dans la fonction caractéristique  $\chi_0$ ) :

$$\text{Res}_{\omega=\omega_s} \frac{e^{\omega Y}}{\omega - \bar{\alpha}_s \chi(\gamma_s, \omega)} = \frac{e^{\omega_s Y}}{1 - \dot{\omega}_s} \quad (3.5.82)$$

où nous avons défini

$$\dot{\omega}_s \equiv \bar{\alpha}_s \left. \frac{\partial \chi(\gamma_s, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_s}. \quad (3.5.83)$$

Nous obtenons alors pour expression de l'amplitude à l'ordre NLL resommé

$$A^{NLL}(s, t = t_{min}, Q_1, Q_2) = i s \pi^5 \sqrt{2\pi} \frac{9(N_c^2 - 1) \alpha_s^2 \alpha_{em} f_{\rho}^2}{4N_c^2} \frac{e^{\omega_s Y}}{Q_1^2 Q_2^2} \frac{\exp\left(-\frac{2 \ln^2 R}{\omega_s'' Y}\right)}{\sqrt{\omega_s'' Y}} \frac{1}{1 - \dot{\omega}_s}. \quad (3.5.84)$$

La croissance de l'amplitude avec la rapidité  $Y$  est ainsi fortement réduite dans l'approche NLL resommée, ce qui s'explique principalement par la valeur de l'intercept du Poméron, bien inférieure dans cette approche qu'à l'ordre LL : par exemple avec  $\bar{\alpha}_s = 0.2$  et 3 saveurs de quarks,  $\alpha_{\mathbb{P}}^{LL} = 1 + \omega(0) = 1.55$  alors que  $\alpha_{\mathbb{P}}^{NLL} = 1 + \omega_s = 1.20$ . Les autres facteurs apparaissant dans l'expression de  $A^{NLL}$  (3.5.84) n'ont pas d'incidence dominante sur l'écart numérique entre  $A^{NLL}$  et  $A^{LL}$  (3.5.73).

Nous comparons dans la Fig.(3.22) l'amplitude obtenue au niveau  $\gamma^* \gamma^*$  (courbe rouge) à celle qui découle de l'amplitude calculée dans [89] (courbe noire) à partir du noyau BFKL NLL complet, convolué avec les facteurs d'impact eux aussi calculés à l'ordre suivant des logarithmes dominants NLL, pour une valeur des virtualités des photons identiques  $Q = 2GeV$ . L'accord entre les deux méthodes est tout à fait satisfaisant compte tenu de la simplicité de l'approche partant du noyau LL resommé, que nous avons utilisée ici, en comparaison de la complexité des calculs nécessaires pour évaluer à l'ordre NLL le noyau BFKL ainsi que les facteurs d'impact. Nous pouvons de plus constater en

comparant ces deux amplitudes avec une virtualité  $Q$  plus élevée, que celles-ci se rapprochent : en effet la resommation colinéaire sur laquelle est fondée l'approche du noyau BFKL resommé par le groupe de renormalisation est supposée être d'autant plus valide que l'échelle perturbative est grande. Partant de notre résultat, nous intégrons l'ampli-

$$\frac{d\sigma^{t_{min}}}{dt} (pb/GeV^2)$$

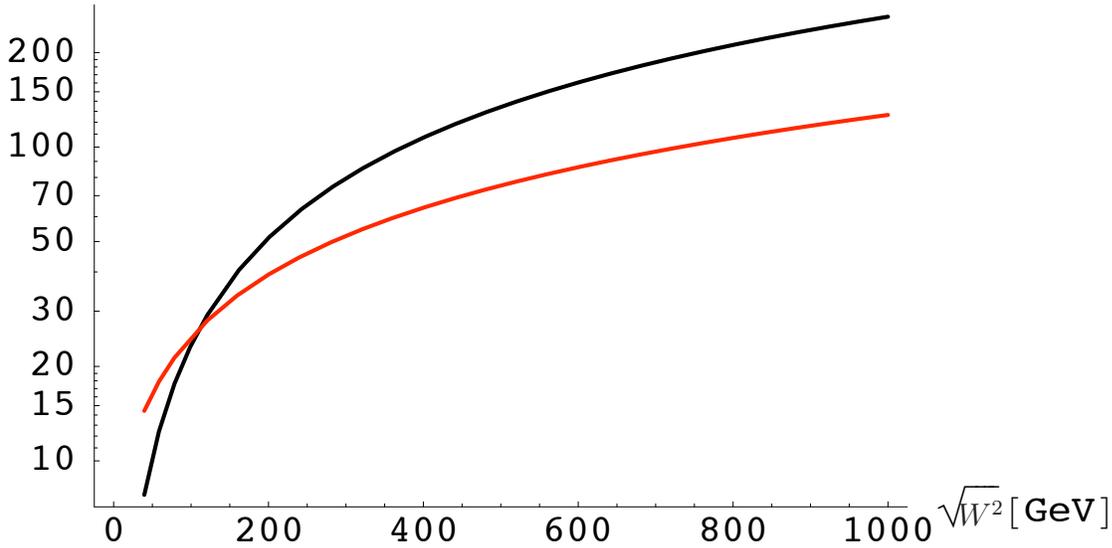


FIG. 3.22 – Sections efficaces différentielles pour le processus  $\gamma_L^* \gamma_L^* \rightarrow \rho_L^0 \rho_L^0$  à  $t = t_{min}$ ,  $Q = 2$  GeV, avec resommation NLL BFKL complète (courbe noire) et resommation simulée par le groupe de renormalisation (courbe rouge).

tude obtenue au niveau de la collision entre photons virtuels ainsi que sur l'espace des phases accessibles à ILC (précédemment utilisé à l'ordre de Born puis à l'ordre des logarithmes dominants). Nous obtenons la courbe rouge présentée en fonction de l'énergie du collisionneur dans la Fig.(3.22) et la comparons à celle obtenue précédemment à l'ordre de Born (en vert). Nous pouvons noter la diminution drastique de la section efficace différentielle prédite avec le noyau BFKL resommé à celle que nous avons obtenue précédemment en considérant le noyau BFKL à l'ordre dominant (LL), ce qui conduira notamment à une bien meilleure stabilité de nos prédictions lorsque nous faisons varier les valeurs des paramètres  $c$ ,  $c'$  ainsi que l'hypothèse de la dépendance d'échelle de  $\alpha_s$ . Détaillons ce point : bien que notre approche ne soit valide que pour une valeur fixée

de  $\alpha_s$ , nous pouvons résoudre le système des deux équations différentielles pour une valeur quelconque de  $\alpha_s$  (pris comme un paramètre) et en déduire les solutions  $\omega_s$  et  $\gamma_s$  dans chaque cas. Nous avons ainsi reconstruit une dépendance d'échelle en réalisant un fit polynomial d'un grand nombre de couples de solutions obtenues sur l'intervalle de valeurs de  $Q_i$  compris entre 1 et 4 GeV qui nous intéresse et nous injectons ces valeurs de  $\omega_s$  et  $\gamma_s$ , polynômes de  $Q_1$  et  $Q_2$  dans l'expression de l'amplitude. Nous obtenons ainsi une estimation assez fiable des effets de resommation BFKL à l'ordre NLL dans le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$ . Nous obtenons alors une section efficace différentielle vers l'avant plus importante (d'un facteur 4.5) qu'à l'ordre de Born et pouvons ainsi conclure à la mesurabilité expérimentale du processus auprès du collisionneur linéaire ILC. Nous avons présenté ces résultats dans l'article [93].

$$\frac{d\sigma^{t_{min}}}{dt} (fb/GeV^2)$$

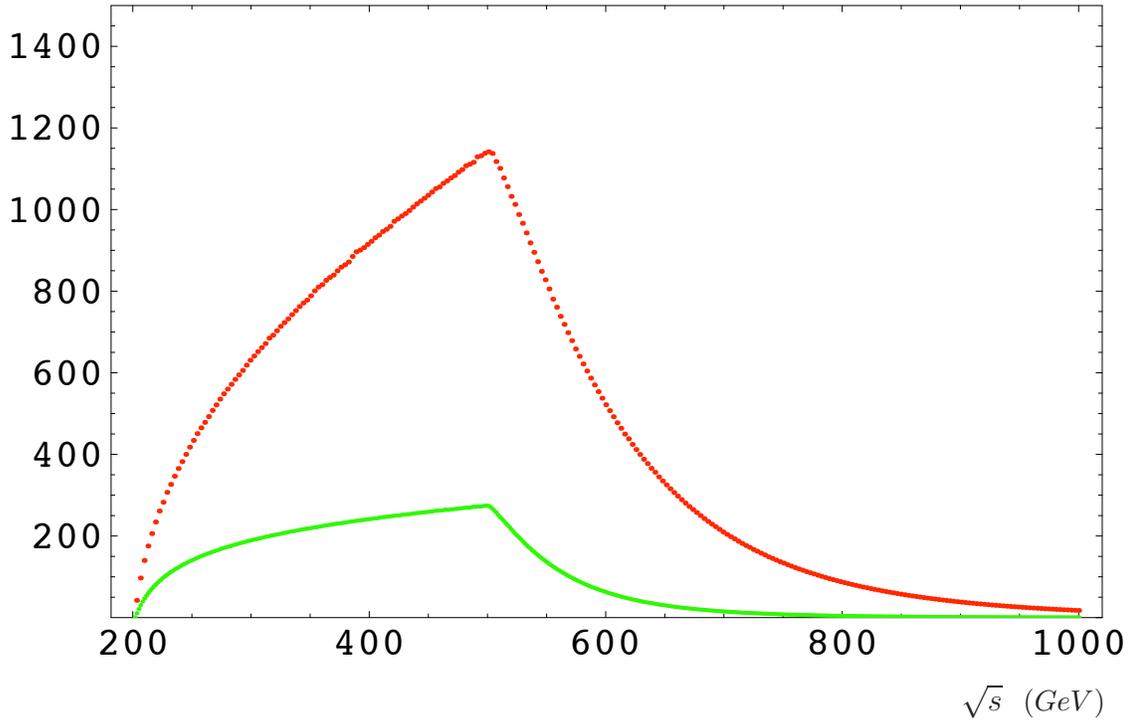


FIG. 3.23 – Sections efficaces pour le processus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \rho_L^0 \rho_L^0$  à  $t = t_{min}$  avec resommation NLL BFKL simulée par le groupe de renormalisation (en rouge) et à l'ordre de Born (en vert).



# Conclusions

Nous avons calculé dans le chapitre 1 l'amplitude de diffusion du processus  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0$  à l'ordre de Born dans le cadre théorique de la factorisation colinéaire. Celle-ci s'écrit dans une forme factorisée entre un terme dur -calculé en théorie de perturbation- convolué avec les amplitudes de distribution qui décrivent l'hadronisation en mésons  $\rho_L^0$  dans l'état final. A ce stade nous n'avons imposé aucune condition additionnelle sur les ordres de grandeur respectifs des deux virtualités  $Q_i$  des photons, qui constituent les échelles perturbatives du processus. Notons que nous avons restreint notre étude au cas particulier d'un moment transféré nul et qu'il serait intéressant de l'étendre au cas général d'un transfert d'impulsion  $t$  quelconque : l'utilisation des deux virtualités  $Q_i$  comme échelles dures de notre approche qui contrôlent la validité de la factorisation colinéaire nous permet donc d'envisager que celle-ci restera valide dans le cas d'un transfert d'impulsion quelconque. Nous nous sommes ensuite tournés vers l'étude de deux régions cinématiques particulières :

- la région (1) où l'énergie de la collision  $W^2$  est très inférieure à la plus grande des virtualités des deux photons, à savoir  $Q_1^2 \gg W^2$  (ou  $Q_2^2 \gg W^2$ ), avec  $Q_1$  et  $Q_2$  n'étant pas paramétriquement proches
- la région (2) où les virtualités des photons sont fortement ordonnées, ce qui signifie  $Q_1^2 \gg Q_2^2$  (ou  $Q_2^2 \gg Q_1^2$ ).

Nous avons montré que dans la région (1) l'amplitude correspondant aux photons transverses se factorise dans un sous-processus dur et une amplitude de distribution généralisée, à des corrections de l'ordre  $W^2/Q_1^2$  (resp.  $W^2/Q_2^2$ ) près. Dans la région (2) l'amplitude correspondant aux photons longitudinaux se factorise en un sous-processus dur et une amplitude de distribution de transition, à des corrections de l'ordre de  $Q_2^2/Q_1^2$ . Dans ces deux régimes cinématiques où émergent deux formes factorisées différentes de l'amplitude, nous pouvons obtenir une expression de ces objets hadroniques qui caractérisent le sous-processus mou (usuellement de nature non-perturbative) -l'amplitude de distribution généralisée qui décrit l'état final  $\rho\rho$  et l'amplitude de distribution de transition  $\gamma^* \rightarrow \rho$  -, qui fait apparaître un terme calculé en théorie de perturbation convolué (sur la variable cinématique correspondant à la fraction d'impulsion longitudinale des quarks entrant dans les mésons) avec les amplitudes de distribution qui décrivent l'hadronisation en mésons  $\rho$  et qui encodent ainsi toute l'information réellement non perturbative de notre processus. Notons que ces deux domaines cinématiques ont une intersection

---

non nulle. Nous avons limité notre analyse au cas des mésons  $\rho^0$  longitudinalement polarisés. De cette façon nous avons évité les problèmes potentiellement liés à la rupture de la factorisation colinéaire de QCD pour des GDA ou TDA faisant apparaître des DA de mésons transverses dans les limites de leurs domaine de définition, cf. Ref.[41]. Il serait intéressant de savoir, si une telle formule de factorisation impliquant une GDA ou une TDA peut également être obtenue dans ce cas. Notons enfin que nous pourrions étendre notre étude au cas des mésons chargés, à condition de définir correctement [42] la ligne de Wilson abélienne entrant dans la définition de la TDA  $\gamma^* \rightarrow \rho^\pm$ .

Dans le chapitre 2, après une brève introduction au Poméron des théories de Regge, nous avons détaillé de manière auto-cohérente l’obtention de l’équation BFKL dans la jauge de Feynman ainsi que sa solution en absence de transfert d’impulsion. Nous présentons également la  $k_\perp$ -factorisation de l’amplitude de diffusion d’un processus étudié dans la limite de Regge de QCD dans un cas général. Nous utilisons dans le chapitre 3 ce formalisme valide à haute énergie pour l’appliquer à l’étude phénoménologique du processus  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \rho_L^0\rho_L^0$  : nous convoluons dans l’espace des impulsions transverses la solution de l’équation BFKL obtenue dans ce chapitre, avec les facteurs d’impact du processus considéré.

Dans le chapitre 3, nous avons calculé la section efficace du processus de production diffractive de mésons vecteurs  $\rho_L^0$  à l’ordre de Born (limite de rapidité nulle de l’équation BFKL, ou encore sans interaction entre les gluons constituant les barreaux verticaux de l’échelle) dans les conditions expérimentales prévues pour le projet de collisionneur linéaire international ILC : nous avons utilisé des coupures dans l’espace des phases de la diffusion correspondant aux conditions expérimentales proposées par le projet LDC qui rend accessible la région très colinéaire au faisceau par l’intermédiaire du calorimètre électromagnétique BeamCal. En supposant une luminosité nominale intégrée de  $125 \text{ fb}^{-1}$ , nous prédisons la possibilité d’observer 4000 événements par an, valeur suffisante pour envisager une analyse expérimentale du processus étudié. Nous avons ainsi pu quantifier précisément le “bruit de fond” de la resommation BFKL, que représente l’ordre de Born de ce processus diffractif. Nous avons aussi montré que les processus concurrents qui ne pourraient pas être différenciés par le détecteur BeamCal peuvent être négligés aux énergies atteignables à ILC. Nous avons tenté de caractériser de manière systématique les incertitudes de notre approche, qui proviennent des approximations théoriques utilisées : nous avons ainsi fixé la valeur du paramètre qui contrôle le régime cinématique de Regge sur l’hypothèse de suppression de la contribution de l’échange de quarks étudiée au chapitre 1, ainsi que la sensibilité de nos prédictions sur le choix de la dépendance dans l’échelle de  $\alpha_s$ .

Enfin, nous avons pris en compte les effets de resommation BFKL complète dans l’approximation du point selle valide à haute énergie (grande rapidité) et obtenu une augmentation très importante de la section efficace différentielle du processus à l’ordre des

---

logarithmes dominants sans transfert d'impulsion, comparée à la valeur obtenue à l'ordre de Born, conduisant aussi à des incertitudes très importantes.

L'inclusion de la resommation BFKL à l'ordre suivant des logarithmes dominants en conservant les facteurs d'impact calculés précédemment (à l'ordre des logarithmes dominants) convolués avec la solution du noyau BFKL resommé par l'approche colinéaire, nous permet d'obtenir une section efficace différentielle bien plus raisonnable, supérieure d'un facteur 4.5 à la valeur trouvée dans l'approximation de Born. Les incertitudes sont donc stabilisées par rapport à celles obtenues à l'ordre des logarithmes dominants. Nous pouvons donc conclure à la mesurabilité expérimentale du processus de production diffractive de mésons vecteurs  $\rho_L^0$  dans les collisions  $\gamma^*\gamma^*$  au collisionneur ILC : l'ordre de Born correspond au bruit de fond de la resommation BFKL et donne une borne inférieure du nombre d'événements mesurables. Ce nombre sera augmenté par la resommation BFKL dont les effets pourront raisonnablement s'observer à des énergies dépassant 500 GeV.

Afin d'approfondir notre travail, nous projetons d'utiliser le résultat de la section efficace différentielle obtenue précédemment dans l'approche BFKL resommée à l'ordre suivant des logarithmes dominants, couplé à une manière effective d'obtenir la dépendance dans le moment transféré  $t$ , ce qui nous permettra -après intégration en  $t$ - d'en déduire une estimation du nombre d'événements produits. Ceci apportera un test stable et définitivement mesurable de la resommation BFKL et constituera la première prédiction de la section efficace d'un processus exclusif à l'ordre suivant des logarithmes dominants dans la limite de Regge. Il faudrait également envisager une étude expérimentale de la détection des états finals plus détaillée, incluant notamment des simulations Monte-Carlo ainsi qu'une prise en compte plus précise de la répartition des événements dans les différents détecteurs, pouvant par ailleurs donner lieu à considérer certaines régions de l'espace de phases accessibles négligées jusqu'ici.

Il serait intéressant de modifier l'approche théorique utilisée ici dans le cadre de la factorisation colinéaire, permettant la description des mésons par leur amplitudes de distribution, à partir d'une description plus effective présentant une dépendance en moment transverse.

Notons également que le passage à des énergies du collisionneur dépassant 500 GeV jusqu'au TeV pourrait occasionner une transition du régime linéaire (décrit par l'équation BFKL) au régime saturé. Une description reposant sur une équation d'évolution de type BK modifiée afin de tenir compte de la symétrie de notre processus, permettrait alors de sonder proprement ces effets de saturation.

Enfin nous pourrions considérer le processus de production diffractive de pions neutre dans les collisions  $\gamma^*\gamma^*$  au collisionneur ILC afin de tester l'échange dans le canal  $t$  de l'Odderon, partenaire du Poméron de conjugaison de charge opposée et décrit à l'ordre de Born par l'échange de trois gluons.

---

Notons pour conclure que ce sujet de recherche présente l'intérêt (et la difficulté) de confronter des méthodes d'analyse issues de deux domaines de QCD souvent dissociés, notamment du fait de leurs succès inégaux dans la description de données expérimentales : d'un côté la factorisation colinéaire qui est bien comprise théoriquement (théorème de factorisation reposant sur un développement en produit d'opérateurs, nombreuses sections efficaces connues à l'ordre next-to-leading, certaines à l'ordre next-to-next-to-leading et des calculs à l'ordre (next-to)<sup>3</sup>-leading ont débuté) ce qui permet d'atteindre un grand niveau de précision (de l'ordre du pour-mille) ; de l'autre côté, le régime de grande énergie de QCD (limite de Regge ou de petit  $x$ ), décrit dans le secteur perturbatif par l'équation BFKL, ne possède pas à l'heure actuelle de prédictions phénoménologiques aussi convaincantes (par exemple, elle décrit au niveau qualitatif la croissance pour des petits  $x$ , de la fonction de structure  $F_2$  observée à HERA) et souffre en outre de corrections perturbatives à l'ordre next-to-leading très importantes. Des tentatives prometteuses ont néanmoins été proposées afin de stabiliser ces corrections (tirant profit de la limite colinéaire comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 3). Il a donc été nécessaire de maîtriser des techniques utilisées dans chacun des deux domaines afin de les appliquer à l'étude de notre processus, me donnant l'occasion d'accéder à un point de vue assez large sur les perspectives tant formelles que phénoménologiques présentées par la chromodynamique quantique. J'ai ainsi pu pendant ma thèse travailler sur des problèmes connexes et non présentés dans cette thèse.

Dans le cadre de la factorisation colinéaire des processus exclusifs, j'ai commencé une étude phénoménologique à plus basse énergie (c'est-à-dire non concernée par la limite de Regge de QCD) du processus exclusif de production d'un pion, d'un méson rho transversalement polarisé et d'un nucléon (neutron) dans la diffusion d'un photon virtuel sur un proton,  $\gamma^* p \rightarrow \pi^+ \rho_T n$ . Ce processus permet de révéler le contenu en spin transverse du nucléon, décrit par la GPD (de chiralité impaire) de transversité du nucléon, et pourra faire l'objet d'une étude expérimentale au Jefferson Lab.

Enfin, ce sujet de recherche m'a également donné l'occasion d'aborder des composantes plus formelles de la chromodynamique quantique comme l'invariance conforme et l'intégrabilité. Nous avons en effet vu émerger deux propriétés caractéristiques (et essentielles) au cours de cette thèse : l'invariance conforme colinéaire  $SL(2, R)$  qui se manifeste à l'ordre dominant (héritée de la symétrie vérifiée au niveau classique) sur la ligne du cône de lumière et l'invariance conforme  $SL(2, C)$  dans le plan transverse à la direction d'incidence, dans le cadre de la  $k_\perp$ -factorisation de l'amplitude à haute énergie (dont l'origine n'est pas vraiment établie). J'ai plus particulièrement étudié l'invariance conforme colinéaire en travaillant sur l'équation d'évolution à une boucle du produit d'opérateurs de Wilson définis sur le cône de lumière (plus précisément les opérateurs gluoniques d'hélicité maximale, de twist 2 puis de twist 3). Le calcul des dimensions anormales de ces opérateurs revient à trouver les valeurs propres d'un opérateur intégral qui présente une invariance sous l'action du sous-groupe conforme colinéaire  $SL(2, R)$ , le problème étant finalement équivalent à la diagonalisation de l'hamiltonien d'une chaîne

---

de spins (non-compact) d'Heisenberg (pour laquelle le nombre de sites est égal au twist de l'opérateur considéré)[94]. Notons simplement que l'intégrabilité se retrouve également dans le contexte de la limite de Regge associée à la symétrie  $SL(2, C)$ [95].



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier S.Wallon et G.Korchemsky, les directeurs de cette thèse, pour le soutien et la liberté qu'ils m'ont accordés durant ces trois années. Un grand merci également à L.Szymanowski et B.Pire qui ont directement collaboré à ce travail. Je suis très reconnaissant à M.Klasen et M.Diehl de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse. Mes remerciements vont également à Y.Dokshitzer, A.Djouadi et F.Zomer pour avoir participé au jury de soutenance. Je mentionnerai finalement le plaisir que j'ai eu à travailler pendant ma thèse au sein du Laboratoire de Physique Théorique de l'Université d'Orsay, et remercie chaleureusement tous ses membres. Je remercie enfin ma famille et mes amis qui m'ont accompagné durant cette thèse.



# Bibliographie

- [1] J. D. Bjorken et E. A. Paschos, Phys. Rev. **185**, (1969) 1975 ; R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415.
- [2] H. Fritzsche, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47** (1973) 365 ; S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 494.
- [3] T. Muta, “Foundations of quantum chromodynamics. Second edition,” World Sci. Lect. Notes Phys. **57** (1998) 1.
- [4] D. J. Gross et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343, Phys. Rev. D **8** (1973) 3633 ; H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [5] V. N. Gribov et L. N. Lipatov, Yad. Fiz. **15**, 781 (1972) [Sov. J. Nucl. Phys. **15**, 438 (1972)] ; G. Altarelli et G. Parisi, Nucl. Phys. B **126**, 298 (1977) ; Y. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **73** (1977) 1216].
- [6] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov et V.S. Fadin, Phys. Lett. **B60** (1975) 50-52 ; Sov. Phys. JETP **44** (1976) 443-451 ; Sov. Phys. JETP **45** (1977) 199-204 ; Ya.Ya. Balitskii et L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 822-829.
- [7] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179**, (1969) 1547.
- [8] C. G. . Callan et D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. **22** (1969) 156.
- [9] S. Moch, J. A. M. Vermaseren and A. Vogt, Nucl. Phys. B **688**, 101 (2004) ; Nucl. Phys. B **691**, 129 (2004).
- [10] J. C. Collins et D. E. Soper, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **37** (1987) 383.
- [11] K. G. Wilson, Phys. Rev. **179** (1969) 1499 ; W. Zimmermann, Annals Phys. **77** (1973) 570.
- [12] A. Morel, Interactions fortes, cours de physique théorique, Université Paris 6, 7, 11, (1971).
- [13] J. C. Collins, D. E. Soper and G. Sterman, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5** (1988) 1 [arXiv :hep-ph/0409313].
- [14] J. C. Collins and D. E. Soper, Nucl. Phys. B **194** (1982) 445.
- [15] R. K. Ellis, W. Furmanski and R. Petronzio, Nucl. Phys. B **212** (1983) 29 ; Nucl. Phys. B **207** (1982) 1.
- [16] B. Pire, L. Szymanowski et S. Wallon, Eur. Phys. J. C **44** (2005) 545.

- 
- [17] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 392 ;  
A. Bassetto, G. Nardelli and R. Soldati, “Yang-Mills theories in algebraic noncovariant gauges : Canonical quantization and renormalization,” *Singapore, Singapore : World Scientific (1991)*.
- [18] J. C. Collins, D. E. Soper and G. Sterman, Nucl. Phys. B **261**, 104 (1985) ; Nucl. Phys. B **308**, 833 (1988).
- [19] G. Sterman, “Partons, factorization and resummation”, TASI 95, 327-408. arXiv :hep-ph/9606312.
- [20] D. Müller, D. Robaschik, B. Geyer, F. M. Dittes, J. Hořejši, Fortsch. Phys. **42** (1994) 101 ;  
J. Blümlein, B. Geyer et D. Robaschik, Phys. Lett. **B406**, 161 (1997).
- [21] J. C. Collins, L. Frankfurt and M. Strikman, Phys. Rev. D **56** (1997) 2982.
- [22] X. Ji, Phys. Rev. Lett. **78**, 610 (1997) ; Phys. Rev. **D55**, 7114 (1997).
- [23] A. V. Radyushkin, Phys. Rev. D **56** (1997) 5524.
- [24] M. Diehl, Phys. Rept. **388**, 41 (2003).
- [25] A. V. Belitsky et A. V. Radyushkin, Phys. Rept. **418** (2005) 1.
- [26] S. J. Brodsky and G. P. Lepage, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5** (1989) 93 ;
- [27] A.V. Efremov et A.V. Radyushkin, Phys. Lett. **B94** 245 (1980) ; *Teor. Mat. Phys.* 42 (1980) 97.
- [28] S. J. Brodsky, Y. Frishman, G. P. Lepage and C. T. Sachrajda, Phys. Lett. B **91** (1980) 239 ;  
S. J. Brodsky, Y. Frishman and G. P. Lepage, Phys. Lett. B **167** (1986) 347.
- [29] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Rev. D **22** (1980) 2157 ;  
Phys. Lett. **B87**, 359 (1979).
- [30] Y. M. Makeenko, Sov. J. Nucl. Phys. **33**, 440 (1981).
- [31] T. Ohrndorf, Nucl. Phys. **B198**, 26 (1982).
- [32] V. M. Braun, G. P. Korchemsky et D. Mueller, Prog. Part. Nucl. Phys. **51** (2003) 311.
- [33] S. J. Brodsky et G. P. Lepage, Phys. Rev. D **24** (1981) 1808.
- [34] G.P. Lepage et S.J. Brodsky, Phys. Lett. **B87**, 359 (1979) ; A.V. Efremov et A.V. Radyushkin, Phys. Lett. **B94**, 245 (1980).
- [35] M. Diehl, T. Feldmann, P. Kroll et C. Vogt, Phys. Rev. D **61** (2000) 074029.
- [36] B. Pire, M. Segond, L. Szymanowski et S. Wallon, PoS **DIFF2006** (2006) 034.
- [37] M. Diehl, T. Gousset, B. Pire et O. Teryaev, Phys. Rev. Lett. **81**, 1782 (1998) ;  
M. Diehl, T. Gousset et B. Pire, Phys. Rev. D **62**, 073014 (2000) ;  
I. V. Anikin, B. Pire et O. V. Teryaev, Phys. Rev. D **69**, 014018 (2004).

- 
- [38] N. Kivel, L. Mankiewicz, and M. V. Polyakov, Phys. Lett. **B467**, 263 (1999);  
M. V. Polyakov, Nucl. Phys. **B555**, 231 (1999).
- [39] B. Pire, M. Segond, L. Szymanowski et S. Wallon, Phys. Lett. B **639** (2006)  
642-651.
- [40] B. Pire et L. Szymanowski, Phys. Rev. D **71** (2005) 111501; Phys. Lett. B **622**  
(2005) 83; J. P. Lansberg, B. Pire et L. Szymanowski, Phys. Rev. D **73** (2006)  
074014.
- [41] L. Mankiewicz et G. Piller, Phys. Rev. D **61** (2000) 074013; I. V. Anikin et O. V. Te-  
ryaev, Phys. Lett. B **554** (2003) 51.
- [42] S. Mandelstam, Annals Phys. **19**, 1 (1962).
- [43] L. V. Gribov, E. M. Levin and M. G. Ryskin, Phys. Rept. **100** (1983) 1;  
A. H. Mueller and J. w. Qiu, Nucl. Phys. B **268** (1986) 427.
- [44] I. Balitsky, Nucl. Phys. B **463** (1996) 99;  
Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. D **61** (2000) 074018.
- [45] L. D. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49** (1994) 2233; Phys. Rev. D  
**49** (1994) 3352; Phys. Rev. D **50** (1994) 2225.
- [46] L. N. Lipatov, "POMERON IN QUANTUM CHROMODYNAMICS," Adv. Ser.  
Direct. High Energy Phys. **5** (1989) 411;  
"Small-x physics in perturbative QCD," Phys. Rept. **286** (1997) 131.
- [47] J. R. Forshaw and D. A. Ross, "Quantum chromodynamics and the pomeron,"  
Cambridge Lect. Notes Phys. **9** (1997) 1.
- [48] V. Del Duca, "An introduction to the perturbative QCD pomeron and to jet physics  
at large rapidities" arXiv :hep-ph/9503226.
- [49] R. Kirschner, "Small x physics," Acta Phys. Polon. B **26** (1995) 1961.
- [50] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650;  
T. D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. **133** (1964) B1549.
- [51] S. Catani, M. Ciafaloni and F. Hautmann, Nucl. Phys. B **366** (1991) 135;  
J. C. Collins and R. K. Ellis, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **18C** (1991) 80.
- [52] L.N. Lipatov, Sov. Phys. JETP **63**, 904.
- [53] C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **21**, 33 (2001); S. Chekanov *et al.*  
[ZEUS Collaboration], Eur. Phys. J. C **21**, 443 (2001).
- [54] G. Ingelman, P. Schlein, Phys. Lett. B **152**, 256 (1985).
- [55] J. R. Forshaw et M. G. Ryskin, Z. Phys. C **68**, 137 (1995); J. Bartels, J. R. Forshaw,  
H. Lotter et M. Wusthoff, Phys. Lett. B **375**, 301 (1996); R. Enberg, J. R. Forshaw,  
L. Motyka et G. Poludniowski, JHEP **0309**, 008 (2003); JHEP **0312**, 002 (2003).
- [56] B. Abbott *et al.* [D0 Collaboration], Phys. Lett. B **440**, 189 (1998); F. Abe *et al.*  
[CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **80**, 1156 (1998).

- 
- [57] A. H. Mueller et W. K. Tang, Phys. Lett. B **284**, 123 (1992).
- [58] O. Kepka, C. Royon, C. Marquet et R. Peschanski ; A. S. Vera et F. Schwennsen.
- [59] J. Bartels, A. De Roeck et H. Lotter, Phys. Lett. B **389**, 742 (1996) ; S. J. Brodsky, F. Hautmann et D. E. Soper, Phys. Rev. Lett. **78**, 803 (1997) [Erratum-ibid. **79**, 3544 (1997)].
- [60] S. J. Brodsky, V. S. Fadin, V. T. Kim, L. N. Lipatov et G. B. Pivovarov, JETP Lett. **70**, 155 (1999) ; JETP Lett. **76**, 249 (2002) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **76**, 306 (2002)].
- [61] M. Boonekamp, A. De Roeck, C. Royon et S. Wallon, Nucl. Phys. B **555**, 540 (1999).
- [62] J. Bartels, A. De Roeck et H. Lotter, Phys. Lett. B **389**, 742 (1996) ; S. J. Brodsky, F. Hautmann et D. E. Soper, Phys. Rev. Lett. **78**, 803 (1997) [Erratum-ibid. **79**, 3544 (1997)] ; J. Kwiecinski et L. Motyka, Phys. Lett. B **462**, 203 (1999) ; J. Bartels, C. Ewerz et R. Staritzbichler, Phys. Lett. B **492** (2000) 56 ; J. Kwiecinski et L. Motyka, Eur. Phys. J. C **18**, 343 (2000) ; V. P. Goncalves, M. V. T. Machado et W. K. Sauter.
- [63] M. Boonekamp, A. De Roeck, C. Royon et S. Wallon, Nucl. Phys. B **555**, 540 (1999).
- [64] J. Kwiecinski et L. Motyka, Phys. Lett. B **438**, 203 (1998).
- [65] B. Pire, L. Szymanowski et S. Wallon, Eur. Phys. J. C **44**, 545 (2005).
- [66] M. Segond, L. Szymanowski et S. Wallon, Eur. Phys. J. C **52** (2007) 93.
- [67] R. Enberg, B. Pire, L. Szymanowski et S. Wallon, Eur. Phys. J. C **45** (2006) 759, [Erratum-ibid. C **51** (2007) 1015].
- [68] L. Mankiewicz et G. Piller, Phys. Rev. D **61**, 074013 (2000) ; D. Y. Ivanov et R. Kirschner, Phys. Rev. D **58** (1998) 114026 ; D. Y. Ivanov, R. Kirschner, A. Schafer et L. Szymanowski, Phys. Lett. B **478** (2000) 101 [Erratum-ibid. B **498** (2001) 295] ; A. Ivanov et R. Kirschner, Eur. Phys. J. C **29** (2003) 353.
- [69] A. D. Martin, M. G. Ryskin et T. Teubner, Phys. Rev. D **55** (1997) 4329 ; Phys. Rev. D **56** (1997) 3007 ; Phys. Rev. D **62** (2000) 014022.
- [70] V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Meledin et V. G. Serbo, Phys. Rept. **15** (1974) 181.
- [71] I. F. Ginzburg, S. L. Panfil et V. G. Serbo, Nucl. Phys. B **284** (1987) 685.
- [72] D. Y. Ivanov, M. I. Kotsky et A. Papa, Eur. Phys. J. C **38** (2004) 195.
- [73] P. Ball, V. M. Braun, Y. Koike et K. Tanaka, Nucl. Phys. B **529** (1998) 323.
- [74] M. Veterhaeghen, P. A. M. Guichon et M. Guidal, Phys. Rev. D **60** (1999) 094017 ; S. V. Goloskokov et P. Kroll, Eur. Phys. J. C **42** (2005) 281.
- [75] S. Bethke, J. Phys. G **26** (2000) R27.

- 
- [76] ILC, Basic Conceptual Design Report, <http://www.linearcollider.org>.
- [77] A. Djouadi, J. Lykken, K. Monig, Y. Okada, M. J. Oreglia and S. Yamashita, “International Linear Collider Reference Design Report Volume 2 : PHYSICS AT THE ILC,” arXiv :0709.1893 [hep-ph].
- [78] LDC outline document, <http://www.ilcldc.org>.
- [79] M. Davier, M. E. Peskin et A. Snyder, “Two-photon exchange model for production of neutral meson pairs in  $e^+ e^-$  annihilation,” hep-ph/0606155.
- [80] G. T. Bodwin, E. Braaten, J. Lee et C. Yu, Phys. Rev. D **74**, 074014 (2006).
- [81] L. Lewin, *Polylogarithms et Associated Functions*, New York : North-Hollet, 1981.
- [82] B. Clerbaux et M. V. Polyakov, Nucl. Phys. A **679** (2000) 185.
- [83] A. P. Bakulev et S. V. Mikhailov, Phys. Lett. B **436** (1998) 351.
- [84] V. P. Goncalves et W. K. Sauter, Eur. Phys. J. C **44** (2005) 515; Phys. Rev. D **73** (2006) 077502.
- [85] S. Braunewell et C. Ewerz, Phys. Rev. D **70** (2004) 014021.
- [86] G. Camici and M. Ciafaloni, Phys. Lett. B **412**, 396 (1997) [Erratum-ibid. B **417**, 390 (1998)]; Phys. Lett. B **430**, 349 (1998); V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B **429**, 127 (1998).
- [87] J. Bartels, S. Gieseke and C. F. Qiao, Phys. Rev. D **63**, 056014 (2001) [Erratum-ibid. D **65**, 079902 (2002)].
- [88] J. Bartels, D. Colferai and G. P. Vacca, Eur. Phys. J. C **24**, 83 (2002); Eur. Phys. J. C **29**, 235 (2003).
- [89] D. Y. Ivanov et A. Papa, Nucl. Phys. B **732** (2006) 183 et Eur. Phys. J. C **49** (2007) 947.
- [90] G. P. Salam, JHEP **9807** (1998) 019; M. Ciafaloni et D. Colferai, Phys. Lett. B **452** (1999) 372; M. Ciafaloni, D. Colferai et G. P. Salam, Phys. Rev. D **60** (1999) 114036.
- [91] V. A. Khoze, A. D. Martin, M. G. Ryskin et W. J. Stirling, Phys. Rev. D **70** (2004) 074013.
- [92] A.N. Vasil’ev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior theory et Stochastic Dynamics*, Chapman et Hall/CRC.
- [93] M. Segond, L. Szymanowski and S. Wallon, Proceedings de la conférence ILC/LCWS07. arXiv :0709.3252
- [94] A. V. Belitsky, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky and A. N. Manashov, Nucl. Phys. B **708** (2005) 115.
- [95] L. D. Faddeev and G. P. Korchemsky, Phys. Lett. B **342** (1995) 311; A. V. Belitsky, V. M. Braun, A. S. Gorsky and G. P. Korchemsky, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 4715.