



**HAL**  
open science

# Sur un modèle micro pour le calcul des structures en composites stratifiés

Michaël Trovalet

► **To cite this version:**

Michaël Trovalet. Sur un modèle micro pour le calcul des structures en composites stratifiés. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2010. Français. NNT : 2010DENS0008 . tel-00525935

**HAL Id: tel-00525935**

**<https://theses.hal.science/tel-00525935>**

Submitted on 13 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2009/2010



**THESE DE DOCTORAT  
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Michaël Trovalet**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MECANIQUE - GENIE MECANIQUE - GENIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Sur un modèle micro pour le calcul des structures en  
composites stratifiés**

Soutenue à Cachan le 29 mars 2010 devant le jury composé de :

Christophe Brand	Ingénieur, EADS IW	Examineur
Francisco Chinesta	Professeur, EC-Nantes	Président
Jocelyn Gaudin	Ingénieur, Airbus	Examineur
Jean-Claude Grandidier	Professeur, ENSMA Poitiers	Rapporteur
Christian Hochard	Professeur, Université de Provence	Rapporteur
Pierre Ladevèze	Professeur, ENS de Cachan	Directeur de thèse
Gilles Lubineau	Professeur, KAUST	Co-encadrant

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61 avenue du Prsident Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



Ce document de thèse marque l'aboutissement de quatre années épanouissantes (aussi bien scientifiquement que socialement) passées au LMT Cachan (Master 2 compris).

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants, ou devrais-je dire mentors scientifiques. Merci à Pierre, mon directeur de thèse, qui a su me faire confiance dès le début de ces travaux, puis, qui m'a amené à une rigueur et une maturité scientifiques exceptionnelles. Merci à Gilles, mon co-encadrant, pour sa patience et ses explications toujours limpides, ainsi que pour sa disponibilité même à plusieurs milliers de km de distance.

Dans un second temps, je tiens à remercier les membres du jury, monsieur Chinesta pour avoir accepté d'en prendre la présidence ainsi que pour sa bonne humeur, messieurs Grandidier et Hochard, pour avoir accepté la lourde charge de rapporteur, et messieurs Brand et Gaudin pour s'être joint au jury, en tant que représentants pertinents du milieu industriel.

Bien évidemment, le boulot de thésard n'est pas qu'une épopée solitaire. Il est possible au LMT de trouver un soutien permanent que ce soit à travers des discussions scientifiques ou des débats philosophiques, toujours très enrichissants. C'est pourquoi je tiens à remercier toutes les personnes qui rendent la vie dans ce laboratoire très agréable. Des permanents à l'oreille toujours attentive aux personnel administratif nous sauvant de bien des situations, en passant par les personnes du centre de calcul.

Je tiens particulièrement à remercier ceux avec qui j'ai été plus proche, à commencer par mes voisins de bureau et amis Manuela, Lionel et Martin, mais également à l'ensemble des thésards faisant la vie de ce labo.

Enfin, je souhaite remercier ceux qui m'ont supporté en dehors du laboratoire. Mes amis, ma famille, et bien évidemment Aurélie, pour qui la vie commune avec un thésard n'a pas toujours été une sinécure.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Le modèle hybride : état de l'art et améliorations proposées</b>	<b>7</b>
1 Le comportement des composites stratifiés . . . . .	8
1.1 Introduction générale . . . . .	8
1.2 Phénoménologie des dégradations . . . . .	8
1.2.1 Dégradations à l'échelle de la fibre . . . . .	8
1.2.2 Dégradations à l'échelle du pli . . . . .	10
1.3 Le comportement anélastique . . . . .	12
1.3.1 La plasticité . . . . .	12
1.3.2 La viscosité . . . . .	13
2 Etat de l'art des modélisations . . . . .	14
2.1 Modélisation des dégradations diffuses et de la fissuration . . . . .	14
2.1.1 Modélisations micro-mécaniques . . . . .	15
2.1.2 Modélisations mésomécaniques . . . . .	18
2.1.3 Couplage Micro/Meso . . . . .	20
2.2 Modélisation de la rupture sens fibre . . . . .	22
2.3 Modélisation des comportements anélastiques . . . . .	23
3 Les bases du modèle micro hybride . . . . .	26
3.1 Représentation et modélisation des fissures . . . . .	27
3.1.1 Les surfaces minimales de rupture . . . . .	27
3.1.2 Critères de rupture . . . . .	28
3.2 Le matériau fibre-matrice . . . . .	30
4 Le modèle micro hybride amélioré . . . . .	32
4.1 Introduction de la rupture sens fibre . . . . .	33
4.2 Intégration des comportements plastiques et visqueux . . . . .	35
<b>2 Une stratégie numérique dédiée : état de l'art</b>	<b>39</b>
1 Introduction : les particularités liées au modèle . . . . .	40
2 Le choix d'une stratégie numérique adaptée au modèle . . . . .	40
2.1 Etat de l'art des méthodes numériques envisageables . . . . .	40

	2.1.1	Les méthodes de décomposition de domaine . . . . .	41
	2.1.2	Les méthodes d'enrichissement . . . . .	43
3		Une stratégie de décomposition de domaine Multiéchelle . . . . .	45
	3.1	Décomposition de domaine - Problème à résoudre . . . . .	46
	3.2	Comportements d'interface utilisés . . . . .	48
	3.3	Stratégie de résolution itérative . . . . .	49
	3.3.1	Etape locale à l'itération $n+1/2$ . . . . .	50
	3.3.2	Étape linéaire à l'itération $n+1$ . . . . .	51
	3.3.3	Contrôle des itérations . . . . .	52
	3.4	Introduction des aspects multiéchelles . . . . .	52
	3.4.1	Séparation des quantités d'interface . . . . .	53
	3.4.2	Admissibilité des quantités macro . . . . .	54
	3.5	Modification de l'étape linéaire . . . . .	54
	3.5.1	Définition du comportement homogénéisé . . . . .	56
	3.5.2	Bilan sur l'algorithme de résolution . . . . .	57
4		Recherche de fissures . . . . .	58
5		Implémentation et limites de cette stratégie . . . . .	59
<b>3</b>		<b>Améliorations de la stratégie numérique</b>	<b>63</b>
	1	Implémentation des non linéarités . . . . .	64
	1.1	Bref état le l'art . . . . .	64
	1.2	Implémentation du mésomodèle d'endommagement . . . . .	67
	1.2.1	Calcul local de l'endommagement . . . . .	67
	1.2.2	Résolution par gradient conjugué . . . . .	68
	1.2.3	Interpolation de la solution . . . . .	69
	1.3	Implémentation des anélasticités . . . . .	70
	1.4	Prise en compte de la rupture sens fibre . . . . .	76
	1.5	Bilan sur la stratégie numérique . . . . .	76
	2	Accélération de la recherche de fissure . . . . .	77
	2.1	Les limites de l'utilisation des handbooks . . . . .	78
	2.2	La présélection des fissures potentielles . . . . .	79
	3	Parallélisation . . . . .	81
	3.1	Parallélisation des opérations locales . . . . .	81
	3.2	Partitionnement du problème Macro . . . . .	84
	3.2.1	Les premières tentatives . . . . .	84
	3.2.2	La méthode BDD pour résoudre le problème macro . . . . .	85
	3.3	Les performances de la stratégie numérique . . . . .	88
	3.3.1	Le stockage en mémoire vive . . . . .	89
	3.3.2	Le temps de calcul . . . . .	90
	3.4	Plus gros cas traité . . . . .	91

---

<b>4</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>93</b>
1	Introduction . . . . .	94
2	Plaques simples . . . . .	94
2.1	Séquence du type $[0_n/90_m]_s$ . . . . .	94
2.2	Séquence $[\pm 45]_s$ . . . . .	97
3	Plaques trouées . . . . .	101
3.1	Séquence $[90_2/0_2]_s$ . . . . .	103
3.2	Séquence du type $[45_n/0_n/-45_n/90_n]_s$ . . . . .	106
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Prise en compte des conditions limites complexes</b>	<b>113</b>
1	Problématique . . . . .	113
2	Solution proposée . . . . .	114
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>





# Introduction

Afin d'atteindre des performances mécaniques toujours plus grandes, les matériaux innovants ne cessent de se développer. Parmi eux, les matériaux composites connaissent un grand succès dans l'industrie. Depuis une vingtaine d'années et leurs premières applications dans l'industrie aéronautique, les composites stratifiés à fibres longues jouent un rôle à part. Utilisés au départ dans des pièces secondaires et peu sollicitées, ils supplantent désormais les alliages métalliques, même dans les structures vitales d'avions. Le dernier né de Boeing, le "Dreamliner", comporte ainsi en masse, 50 pour-cent de composites, dont une bonne part de stratifiés. L'A350 d'Airbus dépassera quant à lui cette proportion. Dans ce dernier, le fuselage, une partie des ailes et des gouvernes seront constitués de composites stratifiés. Les gains non négligeables en terme de poids qu'engendre le remplacement des alliages métalliques par des composites, rendent ces appareils plus sobres, et donc à la fois plus écologiques et économiques. Mais la palette d'applications des composites stratifiés est très large, de la bio-mécanique au génie civil, en passant par l'industrie automobile. Cependant, malgré cette carrière et de très nombreux travaux de recherche les concernant, les stratifiés restent encore mal modélisés, ce qui nuit à la confiance que l'on peut avoir dans leurs capacités. Ceci a pour effet de freiner leur développement.

Ce type de composite, sur lequel a porté mon travail de thèse, est obtenu par la superposition de différents plis élémentaires unidirectionnels (direction des fibres). La direction de chacun des plis peut être différente de celle des plis voisins, si bien qu'il est possible de composer des stratifications complexes adaptées aux chargements mécaniques que la structure devra subir. De cette manière, il devient possible de réduire de manière importante le poids des structures, tout en ayant un matériau répondant efficacement aux sollicitations mécaniques.

Chaque pli est constitué d'éléments de base très hétérogènes : les fibres (verre ou carbone) très rigides noyées dans une matrice polymérique très souple. La grande quantité de fibres et de plis unidirectionnels fait exploser le nombre d'interfaces (fibre/matrice ou pli/pli), qui sont autant de lieux potentiels d'initiation ou de propagation de ruptures. Il en résulte une complexité extrême des phénomènes de dégradation, qui peuvent apparaître à différentes échelles (de la fibre ou du pli). D'autre part, le comportement fortement non-linéaire de la matrice présentant un caractère anélastique fort, va d'autant plus complexifier le comportement du stratifié, avec des influences réciproques entre dégradations et anélasticité. En conséquence, malgré la bonne connaissance que l'on a de ces méca-

nismes, ils restent difficiles à modéliser, et *a fortiori* à simuler. Dès lors, la phase de conception requiert un nombre important d'essais expérimentaux sur des pièces structurales.

La tendance industrielle actuelle de l'industrie aéronautique est au "Virtual Testing" durant la phase de conception, c'est à dire au remplacement des essais expérimentaux lourds et coûteux, par des simulations numériques plus économiques et flexibles. Pour tendre vers le "Virtual Testing", deux difficultés doivent être surmontées. Tout d'abord la mise au point d'une modélisation fiable, prenant en compte l'ensemble des dégradations et comportements inhérents au matériau considéré pour des chargements quelconques ; en effet, sans une forte confiance dans les modèles, aucune simulation n'a de sens. La deuxième difficulté est la capacité à faire tourner des simulations réalistes de pièces et structures représentatives.

C'est principalement sur le premier point qu'a porté mon travail de thèse, à travers l'amélioration d'un modèle hybride à l'échelle micro, dans le but d'aboutir à un modèle fiable et représentatif. Le second point a également été abordé de manière détournée, à travers la mise en place d'une stratégie numérique permettant la simulation d'éprouvettes réalistes. Toutefois, le modèle micro hybride doit être vu comme une base de données permettant de prévoir la vie d'un stratifié soumis à diverses sollicitations mécaniques.

Un travail considérable a déjà été fait dans le domaine de la caractérisation des phénomènes intervenant au sein des composites stratifiés. Notamment, de très nombreux auteurs se sont penchés sur l'étude expérimentale des dégradations, qui débutent par des ruptures de l'interface fibre/matrice, pour finir par la localisation des dégradations, menant à des fissures macro, signant la rupture du matériau. Entre ces deux phénomènes, une évolution plus ou moins progressive des dégradations entraîne des pertes en termes de caractéristiques mécaniques. D'autre part, de nombreuses observations expérimentales permettent d'avoir une bonne idée du caractère plastique et visqueux des plis. Ces phénomènes étant bien connus, le challenge actuel concerne la modélisation de ceux-ci à travers notamment le choix d'une échelle adaptée. Actuellement, deux grandes catégories de modèles coexistent, d'une part la micromécanique [Dvorak et Laws, 1987] [Nairn, 2000] [Berthelot, 2003] se plaçant à l'échelle de la fibre ou de la fissure, et d'autre part la mésomécanique [Ladevèze, 1986] [Ladevèze et Dantec, 1992] [Lubineau et Ladevèze, 2008], à l'échelle du pli. La micromécanique des stratifiés se place à l'échelle de la dégradation, et, à l'aide d'une analyse de l'état de sollicitation, tente de prévoir l'initiation ou la propagation des dégradations. En se plaçant au plus près des phénomènes considérés, cette vision a l'avantage d'avoir un fort contenu physique qui permet d'avoir une bonne confiance dans les modèles correspondants. En revanche, en se plaçant au niveau de volumes élémentaires, ce point de vue est éloigné des dimensions des structures généralement étudiées. De ce fait, la simulation numérique s'en trouve limitée. A l'inverse, la mésomécanique des stratifiés se place à une échelle supérieure à celle des dégradations, et vise à évaluer les caractéristiques mécaniques résiduelles du matériau dégradé, sans introduire le détail précis de la phénoménologie des dégradations. Par conséquent, il est plus aisé d'effectuer des simulations numériques sur des géométries de taille plus

réaliste, mais avec un contenu physique plus faible. La fiabilité de ce type de modèle est donc limitée, notamment lorsque les dégradations localisent pour mener à la rupture, où la compétition entre les différents mécanismes de dégradation est mal représentée par cette vision homogénéisée.

Le modèle micro hybride proposé au LMT Cachan s'inscrit dans une démarche de réconciliation des visions micro et méso. Il intègre, comme la vision micro, une description discrète de la microfissuration transverse et du délaminage, alors que, comme la vision méso, les décohésions fibre/matrice seront homogénéisées et prises en compte à travers un modèle continu d'endommagement. C'est pourquoi il est considéré comme hybride (discret/continu), ou semi-discret. Son objectif, est de modéliser aux échelles adaptées, l'ensemble des comportements pertinents, permettant de prévoir la vie d'une structure composite, depuis son état initial, jusqu'à sa ruine, en passant par le développement progressif des dégradations. Introduit dans des publications récentes [Ladevèze, 2005] [Ladevèze *et al.*, 2006b], ce modèle restait incomplet. Seule la fissuration (micro fissuration et délaminage) et la décohésion fibre/matrice avaient été introduites, or on l'a vu, de nombreux autres phénomènes interviennent ( plasticité, viscosité, rupture sens fibre). D'autre part, l'implémentation numérique dédiée et développée lors des travaux de thèse de D. Violeau [Violeau, 2006] n'introduisait que les phénomènes discrets de fissuration, ne permettant donc pas de traiter des cas pertinents vis-à-vis du modèle. Enfin, l'implémentation réalisée, bien que déjà très performante, ne permettait pas de traiter des structures de taille réaliste du point de vue géométrique.

Le travail de thèse proposé dans ce mémoire consiste donc à améliorer et valider ce modèle afin de le rendre représentatif des phénomènes physiques observés. Cela passe notamment par l'ajout des comportements anélastiques (plasticité et viscosité). Ces phénomènes, provoqués principalement par la matrice, influent très fortement sur l'initiation des fissures. Un point important est l'influence mutuelle entre l'endommagement et ces phénomènes anélastiques. En effet, l'apparition de décohésions fibre/matrice va provoquer des concentrations de contrainte dans la matrice, accélérant donc d'autant les événements visqueux et plastiques. Peu de travaux prennent en compte le couplage entre endommagement et anélasticité. A la vue des résultats expérimentaux, il est également nécessaire d'introduire les phénomènes de rupture dans le sens des fibres, qui s'avèrent très complexes, mais indispensables pour mener des simulations jusqu'à rupture finale. La physique est différente suivant que la fibre se trouve en traction ou en compression, un critère phénoménologique est introduit afin de reproduire au mieux ce phénomène. En plus de l'amélioration du modèle à travers ces ajouts, une part importante du travail a porté sur l'augmentation des capacités numériques de calcul, à l'aide d'une stratégie dédiée. En effet, pour valider le modèle, seules des simulations poussées, confrontables aux essais expérimentaux peuvent nous permettre de montrer les capacités du modèle à reproduire fidèlement la réalité. Dans ce cadre, l'implémentation du modèle complet dans la stratégie numérique dédiée s'est avérée indispensable. De plus, les capacités de calcul étant limitées vis à vis des problèmes à traiter, un travail important a également porté sur l'optimisation du code afin de traiter les cas les plus réalistes possibles, notamment à

travers la parallélisation complètes du code. Ainsi, les prédictions du modèle deviennent confrontables aux essais expérimentaux, dans les cas basiques (éprouvettes simples, trouées, entaillées) de caractérisation des stratifiés.

Afin de rendre compte de mes travaux de thèse, ce mémoire se propose d'aborder trois parties distinctes.

La première partie est dédiée à la modélisation. Pour cela, après un rappel des principales observations expérimentales, un état de l'art des modélisations est présenté. A partir de là, les bases du modèle seront jetées. D'une part avec l'introduction des surfaces minimales de rupture permettant de prendre en compte la fissuration, et d'autre part avec le matériau fibre-matrice, milieu continu, résultant de l'homogénéisation d'un volume élémentaire composé de fibres et de matrice. Dans un second temps, les améliorations récemment apportées au modèle seront introduites. Elles concernent la prise en compte de la plasticité, de la viscosité, et de la rupture sens fibre à travers le matériau fibre-matrice. Ces phénomènes se révèlent très influents sur le comportement global du stratifié, et notamment sur l'apparition des fissures. Il sera notamment question de l'influence de l'endommagement sur la plasticité et la viscosité à travers l'utilisation des quantités effectives. Cela permet d'utiliser des lois classiques simples, tout en prenant en compte les non-linéarités fortes qui peuvent apparaître.

La deuxième partie propose, dans un premier temps, un état de l'art des méthodes envisageables pour implémenter le modèle micro. Cela regroupe les méthodes de décomposition de domaine et les méthodes d'enrichissement. La stratégie numérique LaTIn retenue et employée dans les travaux précédents [Violeau *et al.*, 2009] est ensuite détaillée. Ses limites sont mises en évidence, menant aux évolutions détaillées dans la partie suivante.

La troisième partie présente la stratégie numérique améliorée proposée afin de mettre en oeuvre le modèle micro complet, avec comme objectif principal la démonstration de ses capacités. Ces travaux permettent la prise en compte des phénomènes continus, tels que l'endommagement diffus, la plasticité, la viscosité, ainsi que de la rupture sens fibre. Une fois ces briques de bases installées, l'optimisation (temps et capacités de calcul) de cette stratégie numérique est présentée. En effet, l'implémentation basique des modèles dans le code aboutit à des opérateurs numériques et temps de calcul exagérément grands, rendant impossible les simulations, même sur des plates-formes numériques performantes. Pour résoudre ce problème, la parallélisation complète du code est proposée, ce qui permet d'aboutir au traitement de cas réalistes, en utilisant les capacités numériques parallèles disponibles au LMT Cachan.

Dans la quatrième et dernière partie, il est question de la confrontation entre expérience et modèle, dans l'optique de valider ce dernier. Pour cela, grâce aux travaux proposés dans la partie précédente, des simulations numériques réalistes ont pu être menées

à bien sur des cas expérimentaux classiques, utilisés pour la caractérisation des stratifiés. Les simulations d'éprouvettes non trouées et trouées, en traction, avec différents empilements seront proposées afin de montrer les capacités du modèle à reproduire les essais expérimentaux, et dans certains cas à en montrer les limites.



# Chapitre 1

## **Le modèle hybride : état de l'art et améliorations proposées**

*Dans ce premier chapitre, on se propose tout d'abord de faire un état de l'art des principales observations expérimentales permettant de caractériser les stratifiés . A partir de ces observations, les fondements du modèle hybride seront jetés. Par la suite, seront introduites les améliorations apportées dans le cadre du travail de thèse permettant de prendre en compte les dégradations diffuses et les comportements anélastiques de ces stratifiés. Cela permettra d'aboutir à un modèle complet, regroupant les modélisations de l'ensemble des phénomènes caractéristiques des essais en statique.*



# 1 Le comportement des composites stratifiés

## 1.1 Introduction générale

De par leur composition, le comportement des composites stratifiés à fibres longues est extrêmement complexe à appréhender. Les deux éléments de base du pli élémentaire, la fibre et la matrice figure 1.1, ont des propriétés très différentes. Alors que le renfort assure

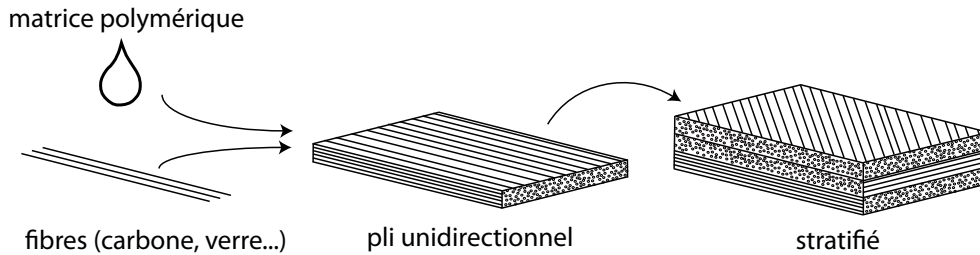


FIG. 1.1: Constitution des stratifiés à fibres longues

la raideur du composite, la matrice polymérique, plus accommodante, permet d'assurer des transferts de charge entre renforts, diminuant ainsi la fragilité globale de l'assemblage composite. De plus, elle présente des déformations plastiques et visqueuses très dépendantes de la température, du niveau d'hygrométrie, du nombre de cycles ... D'autre part, la présence de très nombreuses fibres dans l'épaisseur d'un pli introduit un nombre très important d'interfaces. Chacune d'elle est un lieu privilégié de rupture potentielle. Ajouté à cela, l'empilement successif de différents plis unidirectionnels à différents angles introduisant à nouveau des interfaces, il en résulte un comportement global très complexe, piloté par les dégradations intervenant au niveau de ces interfaces (fibre/matrice ou pli/pli). Ces dégradations sont depuis longtemps étudiées à travers de nombreuses études expérimentales mettant en évidence leurs mécanismes physiques menant, depuis l'état initial, à la rupture de la structure du stratifié. Les paragraphes ci-dessous proposent un état de l'art des connaissances concernant ces phénomènes. Ils sont séparés en fonction de l'échelle à laquelle ils apparaissent.

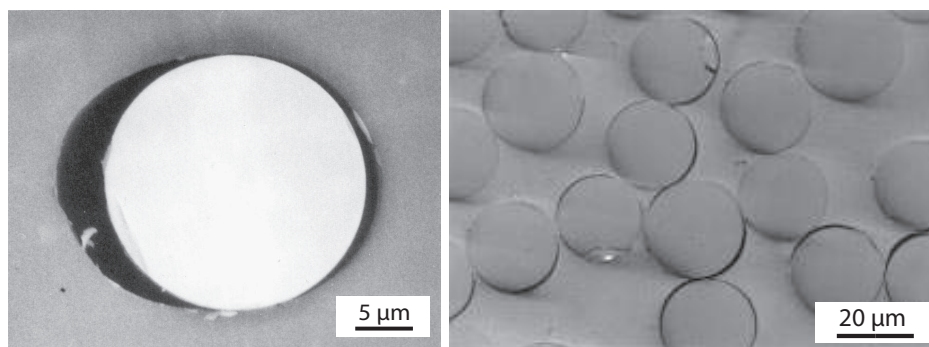
## 1.2 Phénoménologie des dégradations

Les dégradations dont il est question ici correspondent à des ruptures, à une échelle plus ou moins grande. Pour de faibles sollicitations, les premières d'entre elles apparaissent à l'échelle des fibres, et lorsque le chargement s'intensifie, des fissures à l'échelle des plis unidirectionnels vont se former.

### 1.2.1 Dégradations à l'échelle de la fibre

La première phase dans la phénoménologie des dégradations correspond à des décohésions entre les fibres et la matrice figure 1.2. Mises en évidence dans différents

travaux [Harrison et Bader, 1983] [Gamstedt et Sjögren, 1999] [Hoover *et al.*, 1997] [Lagattu et Lafarie-Frenot, 2000] [Sjögren et Berglund, 2000], elles sont réparties de manière plus ou moins homogène dans les plis unidirectionnels. Leur présence résulte des concentrations de contrainte apparaissant dans la matrice, autour des fibres, menant à une perte d'adhérence entre fibre et matrice. Leur nombre augmente avec l'intensité du chargement, et provoque une baisse de la rigidité de la zone concernée. Ce phénomène s'observe particulièrement bien sur les plis sollicités en cisaillement, pour lesquels ces dégradations peuvent devenir très critiques.



(a) Décohésion entre une fibre et la matrice environnante [Gamstedt et Sjögren, 1999].

(b) Répartition de décohésions fibre/matrice [Sjögren et Berglund, 2000]

**FIG. 1.2:** La décohésion fibre matrice

Un deuxième type de dégradation se produit au niveau de l'interface entre plis unidirectionnels. On appelle ce phénomène le délaminage diffus, car comme la décohésion fibre/matrice, ces ruptures se produisent à petite échelle et se répartissent sur les interfaces. Elles provoquent également une baisse de rigidité de l'interface, qui influe sur la rigidité globale du stratifié.

La figure 1.3 montre la réponse d'un stratifié  $[\pm 45]_s$ , avant toute microfissuration transverse. La baisse de rigidité observée lors des charge/décharge, caractérisée par une chute de la pente moyenne est due à la multiplication de ces décohésions fibre/matrice et délaminages diffus. C'est d'ailleurs ce type de constatation macro qui a mené à la recherche d'un mécanisme à petite échelle, préalable aux fissures à l'échelle du pli. Dans ce cas particulier, l'absence de plis à  $0^\circ$  permet un développement important des phénomènes diffus, il devient donc aisé d'observer les conséquences de ces phénomènes d'un point de vue macro.

Ces dégradations diffuses, malgré le fait qu'elles contribuent largement à la modification des caractéristiques mécaniques du stratifié, ne suffisent pas à expliquer les chutes brutales et importantes de rigidité, ainsi que la rupture finale des stratifiés. D'autres phénomènes plus sévères apparaissent à la suite de ces premières dégradations.

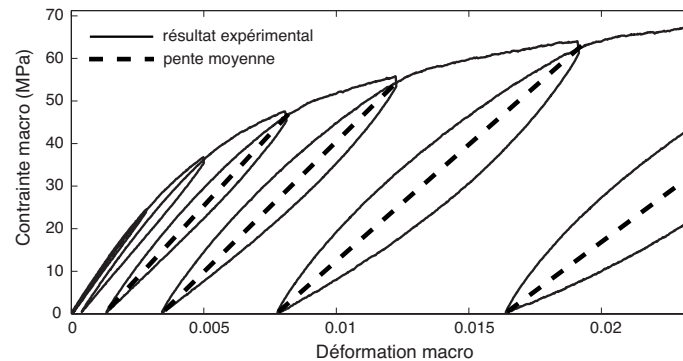
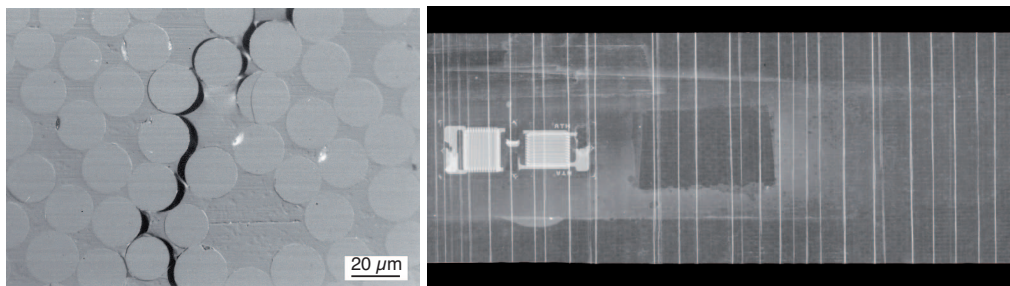


FIG. 1.3: Réponse macro d'un  $[\pm 45]_S$  en traction (charge/décharge) avant microfissuration transverse. Source : Pascal Thévenet, EADS IW.

## 1.2.2 Dégradations à l'échelle du pli

### ■ Microfissuration transverse et délaminage

Lorsque le chargement s'accroît, une localisation des dégradations va se produire. Le premier mécanisme qui intervient est la fissuration transverse. Cela correspond au niveau microscopique, à la rupture de la matrice située entre les fibres, causée par les concentrations de contrainte générées par les irrégularités géométriques. Ainsi, les décohésions fibre/matrice vont se rejoindre, pour former une fissure à l'échelle supérieure, comme il est montré figure 1.4(a), c'est ce que l'on appelle la phase de percolation. Elles vont complètement traverser l'épaisseur du pli de manière instable et se propager sur une longueur plus ou moins grande dans la largeur du stratifié, parallèlement à la direction des fibres. Leur nombre va augmenter avec l'amplification de la sollicitation, jusqu'à un certain niveau dit de saturation. Cette saturation coïncide avec le développement du délaminage qui devient prioritaire d'un point de vue énergétique par rapport à la microfissuration. La figure 1.4(b) montre le réseau de fissures transverses d'un pli à  $90^\circ$  après traction. Dans ce cas, toutes les fissures se sont propagées de manière instable dans la



(a) Jonction entre les différentes zones de décohésion fibre/matrice [Sjögren et Berglund, 2000]

(b) Radiographie d'un stratifié carbone époxy (0/90<sub>4</sub>) après traction. Les raies blanches indiquent la présence des fissures dans le pli à  $90^\circ$  [Lubineau, 2002]

FIG. 1.4: Développement de la microfissuration transverse

largeur du pli. D'autre part, il est à noter que ces fissures vont s'établir suivant un schéma

quasi-périodique pour des densités de fissures élevées. De même que pour les dégradations diffuses, ces fissures transverses vont provoquer une baisse de rigidité des zones concernées et donc du stratifié entier. Cependant, dans le cas du stratifié  $[0/90_4]$ , la rigidité du pli à  $0^\circ$  étant très supérieure à celle du pli à  $90^\circ$ , la chute de rigidité globale du composite sera très faible, à la différence d'un stratifié  $[\pm 45_n]_s$  en traction, qui lui subira une chute très importante de la rigidité globale à cause des fissures transverses. Cette chute intervient très tard, au moment de la percolation, c'est à dire de l'apparition et du développement catastrophique des fissures (intra et inter laminaires).

La figure 1.5(a) montre comment une microfissure transverse va générer du délaminage. Au sommet de la fissure transverse, au niveau de l'interface entre deux plis unidirectionnels, des concentrations de contraintes vont se produire. Cette partie étant plus faible, cela va générer une fissure interlaminaire appelée délaminage local. Cette zone fissurée, dans le cas des stratifiés  $[0_n/90_m]_s$ , va rester cantonnée aux abords de la microfissure qui l'a générée. En relâchant localement les contraintes, ce délaminage va participer à la saturation du taux de microfissuration observable dans ce cas. En revanche, dans d'autres cas, celui des  $[\pm 45_n]_s$  notamment, ce délaminage va se propager de manière catastrophique sur de très grandes surfaces. On parlera alors de macro-délaminage, qui est en partie responsable de la rupture générale du stratifié, voir figure 1.5(b).

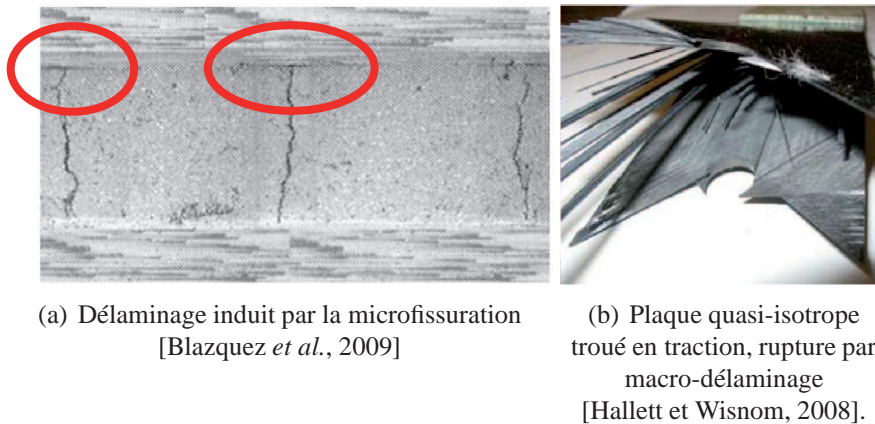


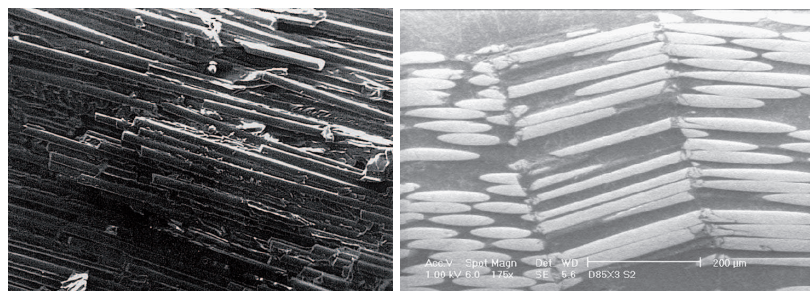
FIG. 1.5: Délaminage

### ■ Rupture sens fibre

Un autre mode de dégradation provoquant la rupture finale du stratifié est la rupture sens fibre. Ceci est particulièrement évident dans le cas des plis sollicités dans le sens des fibres, en traction ou en compression. Les observations expérimentales montrent des fortes différences de contrainte à rupture entre les cas de traction et de compression. La contrainte à rupture en compression peut être deux ou trois fois plus petite qu'en traction.

Dans le cas où les fibres sont chargées en traction, la matrice est très peu sollicitée, l'effort est repris presque intégralement par les fibres, et lorsque le chargement atteint le niveau de résistance de celles-ci, une rupture très nette peut être observée, figure 1.6(a).

En revanche, dans le cas de la compression, le phénomène est bien plus complexe. En effet, de par leur géométrie, les fibres sont sensibles au flambage. Tant que la matrice environnante reste saine, le confinement des fibres permet à ces dernières de supporter la sollicitation. Mais à partir d'un certain seuil, la matrice va commencer à se dégrader et permettre aux fibres de flamber. Ceci va avoir pour conséquence de charger d'autant plus la matrice pour former finalement des kink-bands, figure 1.6(b). Suivant les cas, la fibre peut rompre en flexion, ou bien rester intacte. Cependant, la destruction de la matrice environnante fera perdre à la zone concernée une grande partie de ses propriétés mécaniques. De nombreux travaux ont montré l'influence forte de l'alignement imparfait des fibres [Argon, 1972]. Cette imperfection provient du processus de fabrication du stratifié. D'autre part, la nature de la matrice, dont le comportement est plastique, joue un rôle prépondérant sur le déclenchement des kink-bands. Il est également à noter qu'une sollicitation multiaxiale, couplant compression et cisaillement, va jouer sur l'alignement des fibres et donc avoir une très forte influence sur le développement des instabilités [Yerramalli et Waas, 2003] [Vogler *et al.*, 2000].



(a) Rupture fibre en traction  
[Zhao et Takeda, 2000]

(b) Rupture fibre en compression :  
kink-band [Yerramalli et Waas, 2003]

**FIG. 1.6:** Développement de la microfissuration transverse

La figure 1.7 récapitule de façon schématique l'ensemble des dégradations intervenant au sein des stratifiés.

## 1.3 Le comportement anélastique

### 1.3.1 La plasticité

Comme le montre la figure 1.3, une importante déformation plastique peut apparaître au sein des stratifiés, et notamment en l'absence de pli à  $0^\circ$ . Au sein du stratifié, la matrice présente intrinsèquement un comportement fortement non-linéaire. De nombreux travaux s'intéressent dans ce cadre à la phénoménologie des comportements à l'échelle micro [Totry *et al.*, 2008]. Cependant, on attribuera les déformations permanentes à un effet structurel. En effet, l'évolution de l'endommagement diffus provoque l'apparition



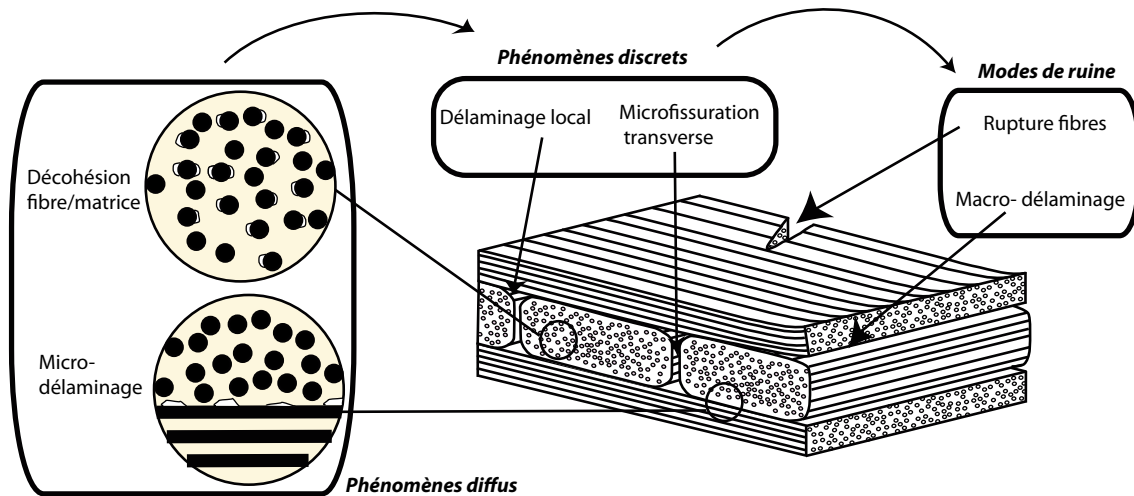


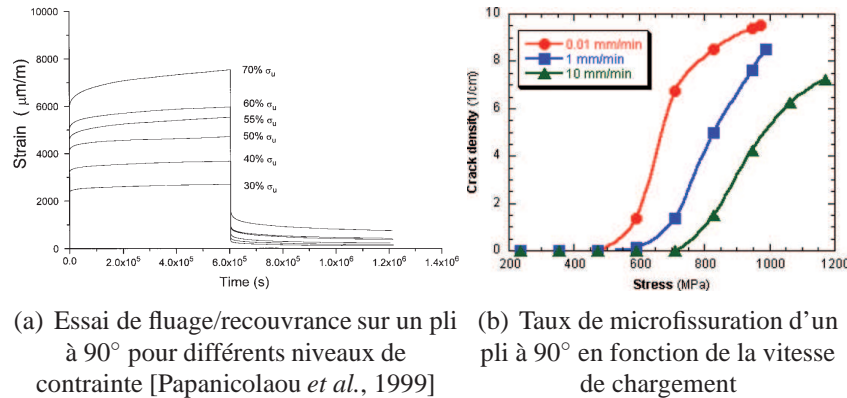
FIG. 1.7: Phénoméologie des dégradations

de surfaces de rupture (à l'échelle de la fibre). Le chargement induit un mouvement relatif entre les surfaces frottantes. L'adhérence provoque alors l'apparition de déformations permanentes à la décharge. Les fissures à l'échelle d'un pli pourront de la même manière mener à des déformations permanentes.

En ce qui concerne les travaux présentés ici, il n'est pas nécessaire d'aller plus loin au niveau micro dans la compréhension de ce phénomène, nous en resterons à des modélisations à échelle méso/macro.

### 1.3.2 La viscosité

De même que la nature de la matrice influence l'apparition de déformations permanentes, son comportement visqueux va provoquer des déformations dépendantes du temps. Lorsque que la température est assez élevée, on peut même aboutir à une rupture par fluage, à chargement constant [Kawai *et al.*, 2006]. Ceci indique que les dégradations deviennent *de facto* dépendantes du temps, et donc par exemple de la vitesse de chargement [Nguyen et Gamby, 2007], figure 1.8(b). Pour des structures aéronautiques dont la durée de vie doit atteindre plusieurs dizaines d'années avec occasionnellement de très fortes températures ambiantes, il est très important de prendre en compte ces effets à long terme, d'autant plus que dans l'optique de réaliser des essais accélérés, la viscosité joue un rôle très important. De nombreux travaux, par exemple [Maire, 1992], [Vinet, 1997] [Goertzen et Kessler, 2006] mettent en évidence ce phénomène au niveau macro, figure 1.8(a). La viscosité des stratifiés a par ailleurs la caractéristique d'être fortement non-linéaire vis à vis de la contrainte. Une forte corrélation lie cette évolution non-linéaire au niveau de dégradation du pli [Schieffer *et al.*, 2002]. En effet, de la même manière que pour la plasticité, les ruptures dues aux dégradations vont provoquer des redistributions de contraintes sollicitant d'autant plus la matrice.



**FIG. 1.8:** Les effets de la viscosité

Il ressort donc des observations expérimentales que le comportement anélastique des stratifiés est en grande partie dû au comportement propre d'un de ses constituants élémentaires : la matrice. Les dégradations décrites dans la partie précédente vont donc avoir une influence sur l'anélasticité, à travers des redistributions de contraintes. Inversement, la viscosité pourra par exemple être à l'origine de dégradations, voire même de la rupture du stratifié. Il est donc indispensable de développer un modèle prenant en compte toutes ces données, et notamment l'influence réciproque entre endommagement et anélasticité. Une prédiction fiable de la vie du stratifié passe indiscutablement par la bonne modélisation du caractère anélastique de ce dernier.

## 2 Etat de l'art des modélisations

Les phénomènes décrits dans les paragraphes précédents ont fait l'objet d'un nombre important d'études théoriques avec pour objectif de corroborer les observations expérimentales. De manière générale, la modélisation des dégradations et des phénomènes anélastiques se fait de manière distincte. Ces derniers auront tendance à être modélisés à l'échelle macro, alors que les dégradations seront prises en compte aux échelles micro ou méso.

### 2.1 Modélisation des dégradations diffuses et de la fissuration

Deux visions sont généralement adoptées pour modéliser les dégradations intervenant au sein des stratifiés. La vision micro va prendre en compte de manière directe la dégradation considérée alors que la vision méso prendra en compte de manière homogénéisée les dégradations par l'intermédiaire de paramètres matériaux évolutifs.

### 2.1.1 Modélisations micro-mécaniques

La caractéristique principale des visions micro-mécaniques est de se placer à l'échelle de la dégradation, en représentant la géométrie de celle-ci. De fait, cette vision possède un contenu physique très fort. La méthode se décompose en deux étapes. Tout d'abord, il convient de définir l'état de sollicitation des différentes zones du domaine considéré. A partir de là, l'introduction de critères d'initiation ou de propagation permet de prédire l'évolution des dégradations. Pour des raisons de simplicité, ce sont généralement les stratifiés de type  $[0_n/90_m]_s$  qui sont pris en compte. En effet, les premières méthodes présentées ici étant analytiques, des stratifications complexes ne permettraient pas une détermination correcte du champ de contrainte. D'autre part, le terme micro-mécanique regroupe en fait des visions se plaçant soit à l'échelle de la fibre, soit à l'échelle du pli, en prenant alors un matériau homogène au voisinage des fissures dans l'épaisseur du pli.

#### ■ A l'échelle du pli

##### Champ de contrainte

Les premières méthodes qui apparaissent sont unidirectionnelles et basées sur les hypothèses de type "shear lag" [Garrett et Bailey, 1977]. Le principe est de calculer la contrainte dans la couche fissurée à l'aide de la contrainte de cisaillement dans l'interface. La contrainte de cisaillement à l'interface est définie à partir de la différence de déplacement entre les plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Un équilibre local permet ensuite de déterminer la contrainte transverse dans le pli fissuré. Ce type d'approche, impliquant de nombreuses hypothèses, ne permet pas une définition précise du champ de contrainte (non nulle sur les lèvres de la fissure), et d'autre part, limite les cas d'étude à des stratifications basiques. Des versions étendues de cette méthode sont proposées dans [Lim et Hong, 1989] et [Takeda et Ogihara, 1994] afin de prendre en compte le délaminage en pointe des fissures transverses.

C'est Hashin dans [Hashin, 1985] qui le premier introduit une analyse bidimensionnelle du champ de contrainte. L'hypothèse fondamentale est que la contrainte dans la direction transverse est invariante dans l'épaisseur. Les équations d'équilibres permettent de déterminer l'ensemble des contraintes, en fonction de la contrainte dans la direction transverse. La recherche de la solution est ensuite basée sur la minimisation de l'énergie complémentaire. Une version thermo-élastique est proposée dans [Nairn, 1989], permettant alors de prendre en compte les contraintes thermiques, fondamentales dans l'initiation des dégradations. Proposée au départ dans le cas des  $[0_n/90_m]_s$  classiques (un seul pli fissuré), cette méthode a ensuite été adaptée au cas des  $[\pm 45]_s$ , avec fissuration dans tous les plis [Hashin, 1987]. Cette méthode est étendue au cas du délaminage de stratifiés de type  $[\alpha/90]_s$  (avec  $\alpha$  suffisamment petit) dans [Nairn et Hu, 1992]. Bien qu'apportant des améliorations importantes vis à vis des méthodes unidirectionnelles, ce type d'analyse ne permet pas de prendre en compte des stratifications et des géométries plus complexes (trou, entaille). Les volumes choisis comportent forcément une certaine régularité, et la fissure est considérée comme traversante, ce qui n'est pas nécessairement le cas. D'autre part, l'analyse proposée dans [Hashin, 1985] devient incohérente dans certains cas et in-



roduit en particulier des aberrations sur les effets d'épaisseur. Il a depuis été démontré un caractère semi-intrinsèque, indépendant de l'épaisseur à partir d'analyses éléments finis systématiques [Ladevèze et Lubineau, 2001].

Grâce à l'augmentation des capacités numériques, l'analyse 2D ou 3D éléments finis permet maintenant de traiter des problèmes bien plus complexes. Quasiment tous les types de stratifiés peuvent être traités. Utilisés dans un premier temps pour aider ou valider les méthodes analytiques [Nairn, 1995] [Berthelot et Corre, 2000], de nombreux modèles de dégradation s'appuient désormais sur des analyses éléments finis [Jiang *et al.*, 2007], [Camanho *et al.*, 2003].

### Initiation et propagation des fissures

Une fois l'état de contrainte connu, des critères de rupture peuvent être appliqués pour simuler l'évolution des dégradations. Deux grandes familles de critères existent, basés sur la contrainte ou l'énergie.

- Critères en contrainte

Les premiers critères qui apparaissent se basent sur une contrainte critique pour laquelle la rupture se produit. Dans [Garrett et Bailey, 1977], le critère est forcément unidirectionnel, la rupture intervient lorsque la contrainte atteint une certaine limite. Cette démarche montre de mauvaises corrélations entre essais et simulations. D'autres critères plus complexes, faisant intervenir une combinaison des contraintes en 2D, montrent également leurs limites. Le problème vient en fait de leur inaptitude à capter le phénomène d'effet d'épaisseur mis en évidence dans [Crossman et Wang, 1982]. Pour prendre en compte cette dépendance à la structure, il faudrait introduire un critère en contrainte dépendant lui aussi de la structure, et plus seulement de l'état de contrainte. Le critère ne serait donc plus intrinsèque au matériau.

- Critères en énergie

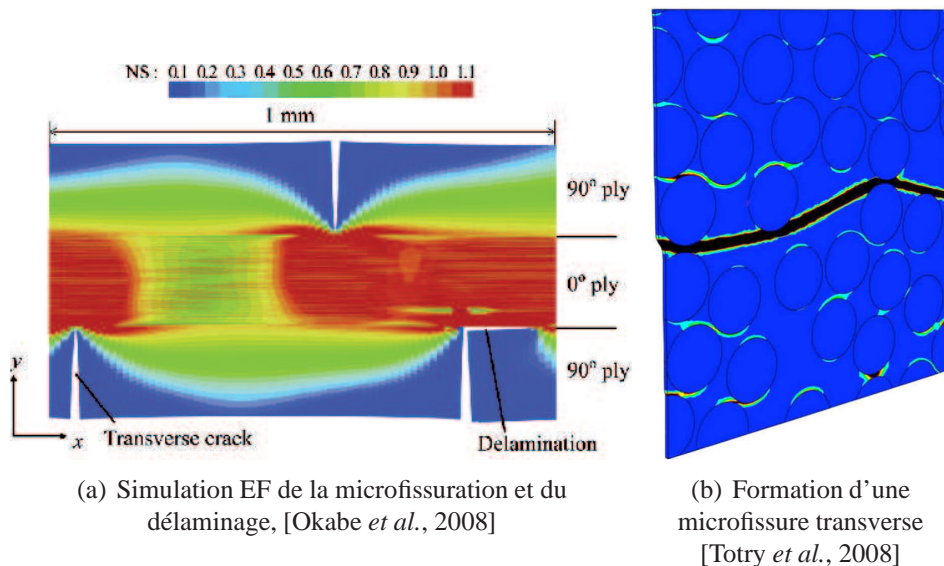
Ces constatations ont mené vers un nouveau type de critère, basé sur l'énergie. Dans [Parvizi *et al.*, 1978], un critère basé sur le taux de restitution d'énergie est introduit. L'énergie libérée par la création d'une fissure devient un paramètre matériau appelé taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  tel que.

$$G_c = -\frac{\partial E_p}{\partial A} \quad (1.1)$$

où  $E_p$  représente l'énergie potentielle, et  $A$  la surface fissurée. Dans l'optique d'une simulation, une comparaison entre le taux de restitution d'énergie due à l'apparition potentielle d'une fissure et le taux critique permet de déterminer si la fissure est créée. Ce type de critère est maintenant très largement répandu dans la littérature, [Hashin, 1996], [Nairn, 1989]... En effet, il permet de prendre en compte le phénomène "d'effet de l'épaisseur" observé dans [Crossman et Wang, 1982], lorsque que celle-ci est assez petite. Cependant, ce type de critère, bien que plus performant qu'un critère en contrainte, ne reproduit pas correctement l'initiation des fissures dans les plis épais. D'autre part, il est à noter que cette vision énergétique est équivalente à la notion de facteur de concentration de contrainte.

### ■ A l'échelle de la fibre

Chronologiquement, les premières dégradations qui apparaissent sont les décohésions fibre/matrice. C'est pourquoi une modélisation à l'échelle de la fibre permet de décrire au mieux les mécanismes de base aboutissant à des dégradations à l'échelle du pli. D'autre part, le comportement à l'échelle de la fibre joue un rôle crucial dans le mécanisme de fatigue, et en particulier sur la différence des comportements en traction et compression, voir [Gamstedt et Sjögren, 1999]. Dans ce cadre, les éléments finis associés à des critères de rupture sont les plus pratiques pour simuler des volumes élémentaires contenant quelques fibres. L'augmentation récente des capacités numériques permet de traiter des configurations complexes, irrégulières, en introduisant un maximum de physique. Dans [González et LLorca, 2007], [Totry *et al.*, 2008] la physique de chaque composant est introduite, avec toutes les non-linéarités associées, ainsi que le comportement d'interface entre fibre et matrice. Le résultat d'une simulation figure 1.9(b) montre qu'il est ainsi possible de simuler la naissance d'une microfissure, dont le point de départ est le développement des décohésions fibre/matrice. Dans [Heuvel *et al.*, 2004], [Blassiau *et al.*, 2009], de nombreuses configurations de rupture de fibre sont testées en fonction de la géométrie et de la nature de la matrice. Les éléments finis en 3D permettent clairement de balayer une vaste panoplie de cas, donnant l'occasion de tester l'influence de telle ou telle caractéristique des constituants. Un exemple de simulation montrant le rôle de la matrice dans le transfert de contrainte est donné figure 1.12(a)



**FIG. 1.9:** Modélisations micromécaniques

### Conclusion

La vision micromécanique des dégradations diffuses et de la fissuration présentée brièvement ici, montre de bonnes capacités à reproduire les observations expérimentales, en se plaçant au plus près des dégradations. Le degré de confiance que l'on peut accorder

dans ces visions est donc fort. Cependant, dans la majorité des cas, cette vision ne permet pas de simuler des éprouvettes de taille importante. Les simulations se limitent à des volumes élémentaires [González et LLorca, 2007], ou bien, lorsque les géométries traitées sont plus complexes, toute la physique n'est pas introduite [Jiang *et al.*, 2007]. D'autre part, une caractéristique importante des modèles micro est, qu'à ce niveau, les variabilités (matériau ou structure) ne peuvent être ignorées, rendant le choix du modèle complexe.

### 2.1.2 Modélisations mésomécaniques

L'échelle méso se place entre les échelles micro et macro. C'est à dire à l'échelle du pli unidirectionnel, mais sans représentation directe des fissures. Ce choix est fait car d'une part, l'évolution des dégradations est très distincte d'un pli à l'autre, si bien qu'il serait impossible de représenter par des modèles intrinsèques le comportement de deux stratifiés aux séquences d'empilement différentes. D'autre part, la représentation de chaque fissure, vu leur nombre, empêcherait de simuler des structures de taille industrielle. La mésomécanique repose sur deux hypothèses fondamentales :

*i* Le comportement d'un stratifié peut être décrit à partir de ses deux constituants élémentaires, qui sont le pli unidirectionnel et l'interface et dont les comportements sont intrinsèques (*i.e.* indépendants de la structure). Chacun d'eux est assimilable à un milieu continu, homogène dans l'épaisseur et affecté de variables d'endommagement. On les appelle méso-constituants.

*ii* Les variables internes seront considérées comme constantes dans l'épaisseur des méso-constituants.

Appliquée à la modélisation des dégradations des stratifiés, l'une des voies adoptée est la mécanique de l'endommagement. Son objectif est de représenter ces dégradations à travers une évolution des paramètres matériaux des zones dégradées, par opposition à la micromécanique qui représente directement la géométrie de la dégradation. L'idée de base décrite dans [Kachanov, 1958] et [Rabotnov, 1968] est d'introduire l'effet des dégradations sur les rigidités du matériau considéré. Appliqué au composite, le concept d'endommagement doit prendre en compte le côté anisotrope des dégradations. C'est dans cette optique qu'est développé au LMT depuis de nombreuses années un "mésomodèle d'endommagement des stratifiés" [Ladevèze, 1986] apte à simuler l'évolution progressive des dégradations sous chargement quelconque, basé sur l'introduction de trois variables scalaires. Dans les travaux menés par l'ONERA, [Maire et Chaboche, 1997], le tenseur de souplesse effectif  $\tilde{S}$  du pli fissuré est de la forme :

$$\tilde{S} = S^0 + d_1 H_1 + d_2 H_2 \quad (1.2)$$

où  $S^0$  est le tenseur de souplesse initial,  $d_1$  et  $d_2$  sont les variables scalaires de dégradation scalaires (respectivement sens fibre et direction transverse) définies à partir de l'état de contrainte et des contraintes à rupture dans les différentes directions.  $d_1 H_1$  et  $d_2 H_2$  sont donc les tenseurs représentant la variation de souplesse causée par les dégradations.

L'idée d'une réduction de rigidité à également été introduite au niveau macro. Dans [Talreja, 1994], un modèle utilisant une variable globale d'endommagement est proposé afin de corriger le tenseur de rigidité initial du stratifié complet, en prenant en compte la densité de fissuration. Cependant, la forte dépendance des dégradations à la séquence d'empilement fait qu'on ne peut dégager de quantités intrinsèques au matériau à partir de loi macros.

■ **Le mésomodèle d'endommagement des stratifiés** : Dans le modèle d'endommagement des stratifiés développé au LMT-Cachan, les variables associées aux plis unidirectionnels doivent permettre de modéliser les décohésions fibre/matrice, les microfissurations transverses ainsi que la rupture sens fibre. On notera (1) la direction de la fibre, (2) la direction transverse dans le plan du pli, et (3) la direction normale au pli, voir figure 1.10. Classiquement on introduit trois variables scalaires d'endommagement,  $d$ ,  $d'$  et  $d_f$  de sorte que l'énergie de déformation  $e_d$  du pli s'écrive :

$$2e_d = \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{E_1(1-d_f)} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2(1-[\sigma_{22}]^+d')} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2(1-[\sigma_{33}]^+d')} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

$$+ \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}(1-d)} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}(1-d)} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}(1-d)} \quad (1.4)$$

où  $[x]^+$  vaut 0 si la composante  $x$  est négative, 1 si  $x$  est positive, ce qui permet de prendre en compte le caractère unilatéral des dégradations transverses. Ainsi,  $d$  représente l'endommagement dans la direction transverse,  $d'$  l'endommagement en cisaillement, et  $d_f$  est associée à la rupture dans la direction des fibres. L'évolution des variables d'endommagement est une fonction des forces thermodynamiques, identifiée expérimentalement. On appelle cette loi intrinsèque : loi d'évolution d'endommagement. Une démarche similaire est adoptée en ce qui concerne l'interface. Plus de détails seront donnés sur ce modèle au paragraphe 3.2.

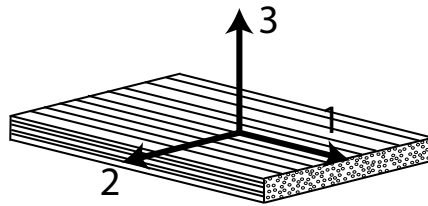


FIG. 1.10: Les axes du pli unidirectionnel

Ce modèle à été adapté aux stratifiés à plis tissés sous chargements statique et en fatigue, [Hochard *et al.*, 2006] [Hochard et Thollon, 2010].

A ce stade, ces visions restent axées sur des descriptions phénoménologiques. Il semble naturel que l'introduction des connaissances micro dans ces modèles pourrait permettre une plus grande robustesse et une meilleure description des essais expérimentaux.

### 2.1.3 Couplage Micro/Meso

Des tentatives ont plus récemment vu le jour afin de coupler micro et méso mécaniques des stratifiés. Dans [Hashin, 1987] et [Nairn, 1989], l'analyse micro de l'état de contrainte associé à la minimisation de l'énergie potentielle aboutit à l'établissement d'une borne inférieure de la rigidité résiduelle du pli fissuré. Dans le même esprit, dans [Aboudi, 1987] puis [Herakovich *et al.*, 1988], une borne supérieure de la rigidité résiduelle est calculée à partir de la minimisation de l'énergie de déformation. Dans ces visions, il n'est cependant pas question de prédire l'évolution des dégradations au niveau méso, ni d'effectuer des simulations de grande ampleur.

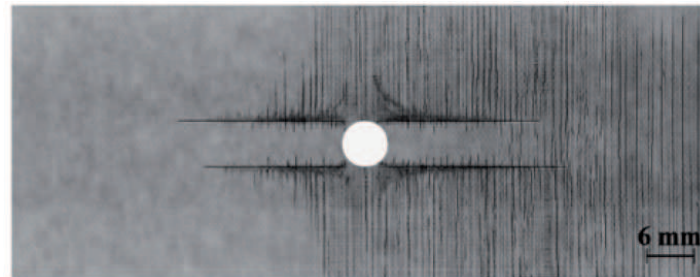
Dans [Renard et Thionnet, 2006], une seule variable scalaire d'endommagement permet de décrire l'évolution des paramètres de rigidité d'un pli, à travers des termes de couplage. Cette variable est basée sur l'homogénéisation d'un volume élémentaire de matériaux endommagé, et permet d'aboutir à des critères de dimensionnement des stratifiés, à vocation plutôt industrielle. De la même façon, dans le modèle proposé par l'ONERA, les dégradations à l'échelle micro sont prises en compte pour améliorer les lois à l'échelle méso [Laurin *et al.*, 2009].

Un pont micro/méso est développé depuis quelques années au sein du LMT Cachan dans le cadre du mésomodèle d'endommagement des stratifiés [Ladevèze et Lubineau, 2001] [Lubineau et Ladevèze, 2008]. Le but est de baser les lois d'évolution des variables d'endommagement prenant en compte les fissures, non plus sur l'identification expérimentale, mais sur des considérations micromécaniques. Les premiers travaux ont porté sur l'endommagement du pli [Ladevèze et Lubineau, 2001] [Ladevèze et Lubineau, 2002], qui ont été étendus au cas du délaminage [Ladevèze *et al.*, 2006a] pour finalement aboutir au "mésomodèle amélioré". A travers l'homogénéisation d'un volume élémentaire de matériau fissuré, et à l'aide de la mécanique de la rupture, il est possible de remonter à l'évolution des propriétés mécaniques résiduelles à l'échelle "méso". L'idée fondamentale est de définir une structure méso équivalente d'un point de vue énergétique à une structure micro donnée, et ce sous deux hypothèses :

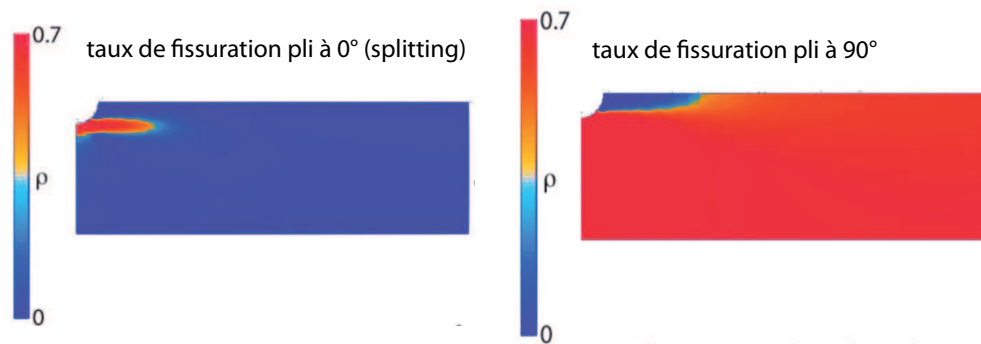
- des cas de chargements particuliers
- des schémas de dégradation donnés

Ce type de vision est très bien adaptée à la simulation numérique. Dans ce cadre, l'approximation méso se valide très bien comme le montre les résultats intrinsèques d'analyses éléments finis. La figure 1.11 montre le type de résultat obtenu par cette vision couplée, dans le cas de l'étude des dégradations d'une plaque  $[0_2/90_2]_s$  carbon/époxy trouée en traction [Daghia *et al.*, 2009]. La comparaison expérience/simulation montre une assez bonne reproduction des essais. Ce mésomodèle amélioré est maintenant exploité commercialement au sein du code éléments finis SAMCEF. Il a également été intégré au sein d'ABAQUS à l'aide de développements utilisateurs [Lubineau et Ladevèze, 2008]. Enfin, un logiciel "maison" dédié à la simulation des dégradations des composites stratifiés à

l'échelle méso a été mis en place, sous le nom de **COFFEE**[Bordeu *et al.*, 2008], et permet des simulations numériques à hautes performances. Ces simulations sont exploitées dans le cadre de la seconde édition du World Wide Failure Exercise.



(a) Résultat expérimental, issu de [O'Higgins *et al.*, 2008]



(b) Simulation d'une plaque trouée, avec le mésomodèle amélioré. Logiciel utilisé : COFFEE

**FIG. 1.11:** Dégradations d'une plaque trouée  $[0_2/90_2]_s$  en traction.

## Conclusion

La vision mésomécanique présentée précédemment possède l'avantage indéniable de permettre des simulations réalistes, à travers son implémentation dans des codes commerciaux. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les expérimentations. Cependant, lorsque le niveau de dégradation devient trop important, il est difficile de représenter la compétition entre les différents mécanismes (diffus, microfissuration, délaminage). L'origine de ces problèmes est l'apparition de dégradations discrètes localisées et couplées bien en dessous de l'échelle d'homogénéisation. De fait, les concentrations de contraintes pilotant de nouvelles dégradations ne sont pas captées. Cette limite peut-être illustrée par la figure 1.11(b), où le splitting apparaît sous la forme d'une zone avec un fort taux de fissuration. Or, dans les résultats expérimentaux figure 1.11(a), ce splitting se limite clairement à une seule fissure dans le pli à  $0^\circ$ , d'où un problème de représentation de la zone dégradée.



## 2.2 Modélisation de la rupture sens fibre

Comme dans le cas des fissures, il existe deux grandes familles de modèles : les modèles de type critère, à l'échelle macro, et les modèles micros, prenant en compte les deux constituants (fibre et matrice). Très souvent, les modèles micros sont utilisés pour définir des critères à échelle supérieure.

- Traction

En ce qui concerne la traction, les travaux à l'échelle micro portent principalement sur la rupture progressive des fibres. Une synthèse est proposée dans [Wisnom et Green, 1995]. Les éléments finis permettent encore un fois de faciliter l'approche de configurations complexes. Dans [Heuvel *et al.*, 2004], [Blassiau *et al.*, 2009], de nombreuses configurations de rupture de fibres sont testées en fonction de la géométrie et de la nature de la matrice. Les éléments finis en 3D permettent clairement de balayer une vaste panoplie de cas, donnant l'occasion de tester l'influence de telle ou telle caractéristique des constituants. Un exemple de simulation montrant le rôle de la matrice dans le transfert de contrainte est donné figure 1.12(a).

A l'échelle supérieure, les critères couramment utilisés restent très simples, et se basent très souvent sur la contrainte à rupture, obtenue pour la traction des plis à 0°. Dans [Puck et Schürmann, 2002], il est montré qu'un simple critère du type

$$\frac{\sigma_{11}}{X_t} \geq 1 \quad \text{en traction et} \quad \frac{|\sigma_{11}|}{X_c} \geq 1 \quad \text{en compression} \quad (1.5)$$

permet de très bien rendre compte des observations expérimentales.  $X_t$  et  $X_c$  désignent les contraintes à rupture en traction et en compression issues d'essais de traction sur des plis unidirectionnels à 0°.

- Compression

La thématique de la modélisation de la rupture en compression sens fibre donne lieu actuellement à un nombre très important de travaux. Les premiers critères de rupture par kink-band à apparaître [Argon, 1972] [Budiansky, 1983] sont basés sur la résistance de la matrice (considérée comme élastique) au cisaillement provoqué par la mise en compression, figure 1.12(b). L'imperfection de l'alignement des fibres  $y$  est prise en compte. Sur la même base, dans [Budiansky et Fleck, 1993], la plasticité de la matrice est introduite dans le calcul de la contrainte à rupture. Dans ce cas, l'équilibre d'un volume élémentaire de fibre et de matrice soumis à une contrainte de compression  $\sigma_0$  donne la relation

$$\sigma_0 = \frac{\tau(\gamma)}{\theta_0 + \gamma} \quad (1.6)$$

où  $\theta_0$  est l'angle initial entre les fibres réelles et la direction 1,  $\gamma$  le même angle dû au chargement, et  $\tau$  le cisaillement dans la matrice, non-linéaire vis-à-vis de  $\gamma$ . Cette relation non-linéaire aboutit à un chargement  $\sigma_0$  limite qui sera la contrainte à rupture du pli.

Ce critère est encore l'un des plus utilisés. Il à été très récemment amélioré avec succès dans [Grandidier et Casari, 2009]. L'ajout d'une dépendance de la déformation critique à la séquence d'empilement a permis de prendre en compte les effets de structure (pli confiné, au bord de l'empilement, orientations des plis voisins... ) constatés expérimentalement. Ce n'est pas le cas dans le modèle original, qui montre des limites notamment dans le cas de la flexion. Cependant, pour les modélisations micro, depuis les années 90, les analyses éléments finis 2D et 3D permettent de simuler l'évolution des kink-bands sur des volumes élémentaires, en examinant l'effet des différents paramètres. Dans [Sutcliffe et Fleck, 1997], des simulations éléments finis 2D permettent de suivre l'initiation et la propagation d'une kink-band. Dans [Vogler *et al.*, 2000], une modélisation 3D introduisant les fibres et une matrice au comportement élasto-plastique permet de simuler des cas de chargement multiaxiaux compression/cisaillement. Les cas multi-axiaux en compression sont peu étudiés, mais restent cependant indispensables dans l'optique de la simulation des stratifiés sous chargements complexes. Les résultats de [Vogler *et al.*, 2000] sont en accord avec les résultats expérimentaux, et avec les prédictions du modèle proposé dans [Budiansky et Fleck, 1993]. Ce dernier modèle est d'ailleurs utilisé avec succès dans le cadre du calcul de la dissipation provoquée par la fragmentation des stratifiés en compression [Guimard *et al.*, 2009].

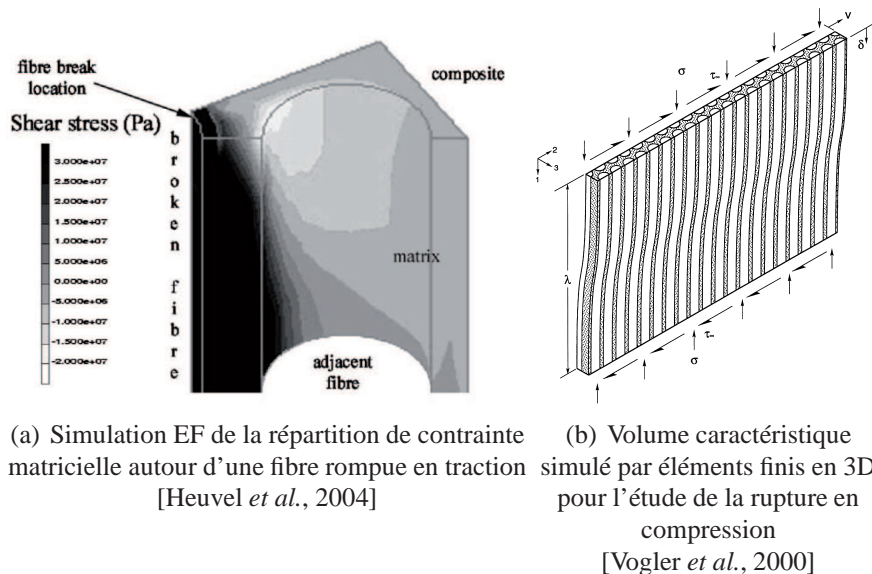


FIG. 1.12: Modélisations micromécaniques de la rupture sens fibre

### 2.3 Modélisation des comportements anélastiques

La modélisation des phénomènes plastiques et visqueux se fait généralement à l'échelle méso/macro.

#### ■ Viscosité



La caractéristique importante de la viscosité des stratifiés est la forte non linéarité de la réponse visqueuse vis-à-vis de la contrainte, lorsque cette dernière est assez élevée. Les modèles proposés dans ce cadre dérivent généralement de modèles linéaires, et notamment sur le principe de superposition de Boltzmann. Ce principe est de considérer que la somme des déformations visqueuses est le résultat d'un nombre infini de chargements en contrainte infinitésimaux, ce qui s'exprime unidirectionnellement par la relation :

$$\varepsilon^v(t) = \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (1.7)$$

où  $D(t)$  est la souplesse en fluage dépendante du temps, identifiée expérimentalement. Les modèles basés sur ce principe de base, linéaires par rapport au niveau de contrainte, ne permettent pas de reproduire les essais expérimentaux lorsque les niveaux de contrainte sont importants. Une première approche pour l'étendre au non-linéaire a été proposée dans [Leaderman, 1943] avec le "Modifed Superposition Principle", ou MSP. Dans ce cas, la fonction  $D(t)$  devient dépendante du niveau de contrainte. Une autre possibilité est le modèle intrinsèquement non-linéaire, nommé BKZ qui propose une expression intégrale de la contrainte à partir d'un essai de relaxation en contrainte. Finalement, dans [Schapery, 1966][Schapery, 1968] une version étendue des modèles précédents permet de prendre en compte les non-linéarités, où la déformation totale s'exprime sous-forme intégrale par :

$$\epsilon(t) = g_0(\sigma)D_0\sigma_0 + g_1(\sigma) \int_0^t \Delta D(\Psi(t) - \Psi(\tau)) \frac{\partial g_2(\sigma)\sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (1.8)$$

avec  $D_0$  la souplesse instantanée,  $\Delta D$  la souplesse dépendante du temps et  $\Psi(t)$  le temps réduit défini par

$$\Psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{a_\sigma} \quad (1.9)$$

et où  $g_0(\sigma)$ ,  $g_1(\sigma)$ ,  $g_2(\sigma)$  et  $a_\sigma$  sont les paramètres fonction de la contrainte permettant d'introduire la non-linéarité vis-à-vis de celle-ci. On se trouve dans le cas linéaire lorsque  $g_0(\sigma) = g_1(\sigma) = g_2(\sigma) = a_\sigma = 1$ . Il a été montré que ce modèle est bien adapté à la prise en compte d'une évolution complexe du chargement. D'autre part, ce modèle s'adapte très bien à la prise en compte des effets de la température. Les résultats obtenus avec ce modèle sont très pertinents vis-à-vis des essais expérimentaux, cependant, la détermination des coefficients dépendants de la contrainte nécessite de fastidieuses procédures d'identification pour chaque variété de composite. La figure 1.13 montre les résultats d'identification obtenus dans [Papanicolaou *et al.*, 1999], à partir d'essais de fluage et de manière analytique sur pli unidirectionnel à 90° de type carbone/époxy.

Le problème de ces coefficients est qu'ils n'incluent pas une compréhension forte des mécanismes de base entraînant la non-linéarité. Dans certains cas, il est évident qu'en l'absence de données aux échelles inférieures, il est judicieux de rajouter des coefficients là où ils permettent de décrire au mieux les observations expérimentales. Or, dans le

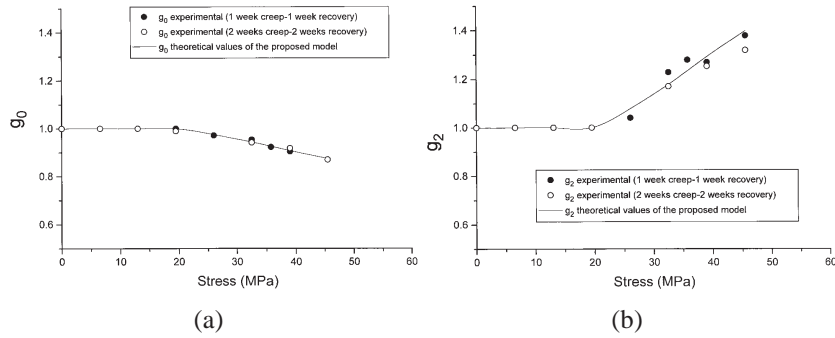


FIG. 1.13: Identification des coefficients de non-linéarité

cas des CMO, il est clair que les non-linéarités observées vis-à-vis de la contrainte proviennent de la création des décohésions fibre/matrice. Malgré cela, ce modèle en version non-linéaire est l'un des plus utilisés dans le cadre des stratifiés, pour sa simplicité et ses très bonnes performances.

On peut également citer le modèle viscoélastique spectral non linéaire introduit initialement pour les stratifiés verre/époxy [Maire, 1992] [Thiébaud, 1994] puis dans le cadre des composites carbone/époxy [Schieffer *et al.*, 2002]. Il permet également de prendre en compte de manière satisfaisante les non-linéarités vis à vis de la contrainte. La déformation viscoélastique  $\epsilon^{ve}$  y est exprimée sous la forme d'une série de mécanismes visqueux élémentaires  $\xi_i$  caractérisés par un temps de relaxation  $\tau_i$  et un poids  $\mu_i$ . La variation de déformation viscoélastique s'écrit alors de la forme

$$\dot{\epsilon}^{ve} = g(\sigma) \sum_1 \dot{\xi}_i \quad \text{avec} \quad \dot{\xi}_i = \frac{1}{\tau_i} (\mu_i g(\sigma) S^R : \sigma - \xi_i) \quad (1.10)$$

avec  $S^R$  la souplesse visqueuse, exprimée à partir de la souplesse élastique.  $g(\sigma)$  est la fonction non-linéarisante, de forme quadratique en contrainte, caractérisée par deux paramètres identifiables expérimentalement, donc phénoménologiques. Toutefois, les réponses en charge/décharge sont mal prises en compte avec ce modèle, la concavité obtenue pour la courbe contrainte/déformation en décharge est inversée par rapport aux constatations expérimentales, ce qui est un facteur très limitant.

Il est à noter qu'il existe également un certain nombre d'autres modèles basés sur des représentations différentielles issues des modèles rhéologiques de base. L'introduction de la non linéarité se fait également par l'intermédiaire de coefficients dépendant de la contrainte. Dans [Gramoll *et al.*, 1989], le modèle de Kelvin-Voigt devient :

$$a_0 \epsilon + a_1 \frac{d\epsilon}{dt} = b_0 \sigma f(\sigma) \quad (1.11)$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont des paramètres du matériau, et  $f$  une fonction dépendante de la contrainte.

## ■ Plasticité

Les modélisations ayant trait à la plasticité se situent généralement à l'échelle macro. En effet, celles développées à l'échelle micro

[Adams et Crane, 1984],[Dvorak et Bahei-El-Din, 1982], bien que plus proches des phénomènes physiques, se heurtent à la difficulté de connaître précisément les caractéristiques mécaniques des constituants élémentaires. D'autre part, dans le cadre du calcul de structures de taille réelle, ce type de modélisation devient vite inapplicable.

Les modèles macro sont plus répandus, et permettent de reproduire fidèlement les courbes obtenues expérimentalement. Dans [Sun et Chen, 1989], un modèle à un paramètre est introduit, en se basant sur un potentiel quadratique de type Hill [Hill, 1950]. Il permet de décrire l'écoulement plastique à travers une relation directe contrainte effective - déformation. Décrit tout d'abord dans le cas 2D, il a été étendu au cas 3D dans [Chen et Sun, 1991] et repris par de nombreux auteurs [M. Xie, 1995],[Yokozeki *et al.*, 2007], et également appliqué à la viscoplasticité. Ce type de modèle, très utilisé, a l'avantage d'être à la fois simple (modèle et implémentation) et de reproduire fidèlement un certain nombre d'observations expérimentales. En revanche, les prédictions ne sont pertinentes que pour des chargements monotones, ce qui est un aspect très limitant. En effet, la plupart des auteurs ne modélisent pas véritablement la plasticité, mais plutôt l'ensemble des non-linéarités, sans distinguer les phénomènes d'endommagement [Yokozeki *et al.*, 2007], si bien qu'une décharge devient difficile à reproduire correctement. Pour palier à ce problème, [Hansen *et al.*, 1991] propose un modèle utilisant une variable interne supplémentaire, appelé variable d'écrouissage. Montrant de meilleurs résultats que les modèles de type Hill, il est repris et amélioré dans [Wang et Hansen, 1993].

### 3 Les bases du modèle micro hybride

Ce paragraphe décrit les fondements du modèle micro hybride introduits dans [Ladevèze, 2005], [Ladevèze *et al.*, 2006b]. La volonté de base qui a motivé l'introduction de ce modèle est de réconcilier micro et mésomécaniques des stratifiés. On l'a vu dans les parties précédentes, la micro mécanique a l'avantage de se placer au plus près des dégradations, et donc de fournir des informations fiables pour lesquelles un grand degré de confiance est permis, même lors de la localisation des dégradations. La mésomécanique a, quant à elle, l'avantage de permettre des simulations poussées, à travers une mise en œuvre numérique relativement aisée, donnant de bons résultats lorsque le niveau de dégradation reste modéré. Le micromodèle hybride proposé se veut une base de données regroupant l'ensemble des mécanismes et modèles associés permettant la prédiction de la vie du stratifié depuis l'état initial jusqu'à la rupture finale. Pour cela, l'évolution plus ou moins progressive des phénomènes de dégradation est décrite en se plaçant pour chaque mécanisme, à l'échelle la plus pertinente. Pour cela, le modèle se base sur une description discrète des fissures à l'échelle du pli, si bien que le stratifié est vu comme un assemblage de plis unidirectionnels, chacun étant constitué de volumes élémentaires de matériau fibre-matrice entourés de surfaces minimales de rupture potentielle, voir figure 1.14.

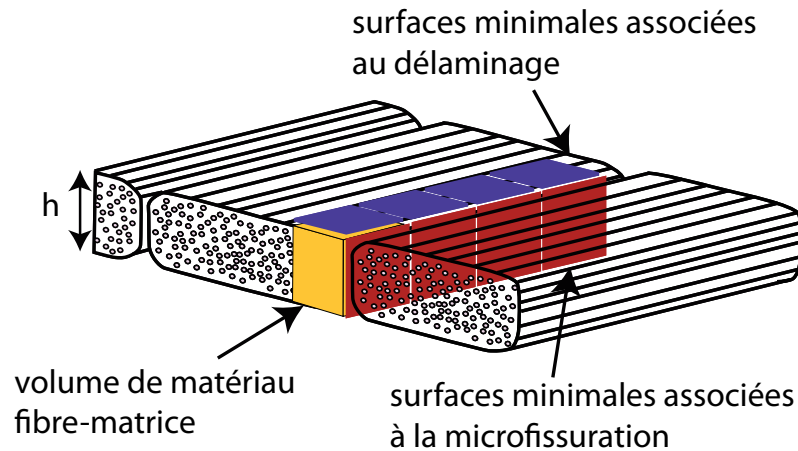


FIG. 1.14: Constituants de base du micromodèle hybride

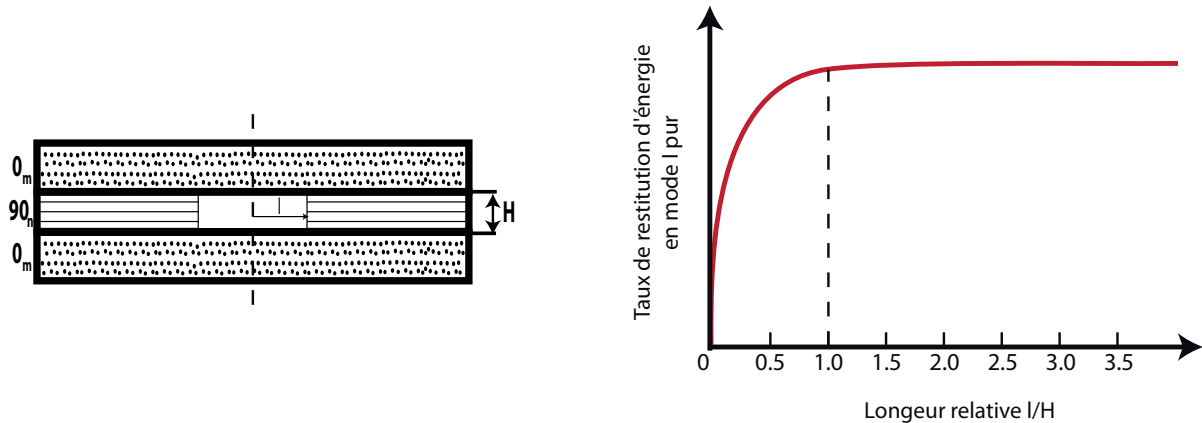
### 3.1 Représentation et modélisation des fissures

Comme on l'a vu précédemment, la microfissuration et le délaminage vont localiser pour mener à la rupture du stratifié. Il est donc nécessaire d'avoir une représentation optimale de ces phénomènes, et de la compétition qui existe entre eux. C'est pourquoi, dans ce cas, le point de vue micro est adopté. Cela implique la représentation exacte des fissures, ce qui permet de prendre en compte les aspects de couplage entre microfissure et délaminage de manière naturelle à travers les concentrations de contrainte et décharges locales. Cette représentation exacte est également rendue possible par le fait que la fissuration d'un pli n'est pas complètement aléatoire, mais dictée par l'orientation des fibres, de sorte qu'il est possible de sélectionner *a priori* les lieux potentiels de rupture. En terme de modèle, le choix s'est porté sur la mécanique de la fissuration discrète [Hashin, 1996]. Dans ce cadre, on suppose que tout état de fissuration peut-être vu comme le résultat de la rupture successive de surfaces élémentaires minimales, figure 1.14.

#### 3.1.1 Les surfaces minimales de rupture

■ **Microfissuration** : Les surfaces minimales de rupture relatives à la microfissuration transverse sont des carrés parallèles aux fibres, de côté  $h$ , où  $h$  représente l'épaisseur du pli unidirectionnel. Le choix de ces dimensions provient de considérations énergétiques. Concernant la hauteur, il est montré dans [Dvorak et Laws, 1987] qu'en partant d'un petit défaut de taille très inférieure à  $h$ , le taux de restitution associé à la propagation de la fissure dans l'épaisseur est supérieur à celui considéré dans la direction des fibres. Dès lors, avant de se propager dans la direction des fibres, une fissure se sera forcément propagée dans l'épaisseur du pli. Le choix de la longueur de la surface minimale provient également de considération énergétiques. La figure 1.15 présente l'évolution du taux de restitution d'énergie associé à la propagation d'une fissure, dans un pli d'épaisseur  $H$ . Le taux de restitution d'énergie devient constant et maximum lorsque la longueur fissurée est supérieure à  $h$ . En dessous, le taux de restitution d'énergie est inférieur, ce qui

indique une instabilité de la fissuration sur au moins une longueur  $h$ . Dans le modèle, une microfissure se propagera donc instantanément dans l'épaisseur du pli, et graduellement, par incrément de longueur  $h$ , dans la direction des fibres.



**FIG. 1.15:** Evolution du taux de restitution d'énergie d'un pli à  $90^\circ$  sollicité en mode  $I$  pur, en fonction de la longueur relative.  $l$  représente la longueur de fissuration, et  $H$  l'épaisseur du pli.

■ **Délamination** : Dans le cas du délamination, le même type de considération énergétique montre que le taux de restitution d'énergie est quasiment indépendant de la taille de la fissure créée et de la séquence d'empilement.

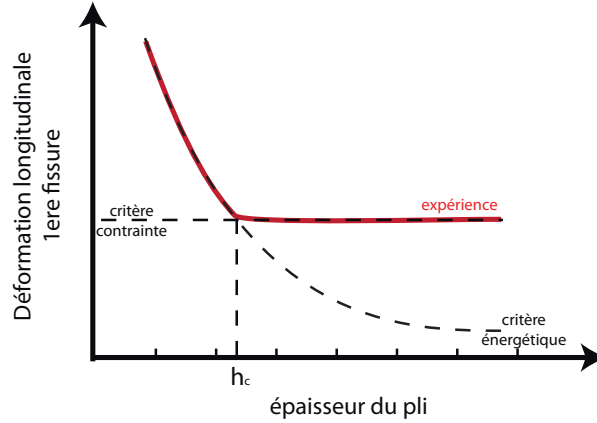
### 3.1.2 Critères de rupture

Les critères de rupture des surfaces minimales sont basés sur le taux de restitution d'énergie.

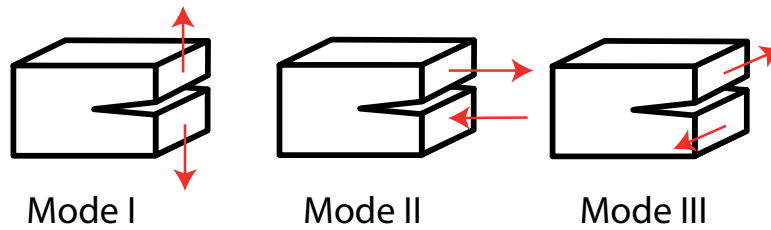
■ **Microfissuration** : Dans le cas des microfissures transverses, la prise en compte de l'effet d'épaisseur nous oblige à différencier les cas d'initiation et de propagation.

L'effet d'épaisseur se constate expérimentalement sur la fissuration du pli à  $90^\circ$  d'une séquence  $[0_m/90_n]_s$ . Lorsque ce pli est épais, les microfissures auront tendance à se propager de manière instable sur toute la largeur du stratifié. Dans le cas des plis fins, les fissures resteront à proximité des bords du stratifié. Ceci est lié au phénomène d'initiation de la fissure. La figure 1.16 montre la déformation correspondant à l'apparition de la première fissure en fonction de l'épaisseur  $h$  du pli à  $90^\circ$ . On note qu'en dessous d'une valeur critique  $h_c$ , cette déformation est fortement dépendante de l'épaisseur. Ce n'est plus le cas au-dessus. Lorsque l'épaisseur est inférieure à  $h_c$ , le critère correspondant est énergétique, et défini à partir du taux de restitution d'énergie. Au delà, on retrouve un

critère en contrainte. C'est pourquoi, pour prendre en compte cet effet d'épaisseur, une distinction initiation/propagation doit être introduite.



**FIG. 1.16:** Illustration de l'effet d'épaisseur dans le cas des  $[0_m/90_n]_s$ . Les courbes représentent l'évolution de la déformation d'apparition de la première fissure dans le pli à  $90^\circ$ , en fonction de l'épaisseur de ce pli. La courbe rouge montre la tendance expérimentale



**FIG. 1.17:** Les différents modes de fissuration

On notera  $\Delta G^i$  le taux de restitution d'énergie discret réel associé à la rupture d'une surface minimale, où  $i$  prend les valeurs  $I, II$  ou  $III$ , correspondant au mode de fissuration considéré, voir figure 1.17. On définit alors  $\Delta G_m^i$  le taux modifié associé à la rupture de la façon suivante :

dans le cas de l'initiation

$$\Delta G_m^i = \begin{cases} \Delta G^i & \text{si } h < h_c \\ \frac{h_c \Delta G^i}{h} & \text{si } h \geq h_c \end{cases} \quad (1.12)$$

L'expression  $\frac{h_c \Delta G^i}{h}$  dans le cas des plis épais revient à introduire un critère basé sur la contrainte.

Dans le cas de la propagation :

$$\Delta G_m^i = \Delta G^i \quad (1.13)$$

Le critère mixte de rupture s'écrit alors

$$\left[ \left( \frac{\Delta G_m^I}{G_c^{I,pli}} \right)^\alpha + \left( \frac{\Delta G_m^{II}}{G_c^{II,pli}} \right)^\alpha + \left( \frac{\Delta G_m^{III}}{G_c^{III,pli}} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1 \quad (1.14)$$

où  $\Delta G_c^{i,pli}$  est le taux de restitution d'énergie critique associé au mode  $i$  de microfissuration, identifié expérimentalement. Ce critère est donc hybride, énergétique pour les plis fins, en contrainte pour les plis épais.

■ **Délaminage** : Dans le cas du délaminage, aucune distinction particulière n'est faite, le critère s'écrit directement :

$$\left[ \left( \frac{\Delta G^I}{G_c^{I,int}} \right)^\alpha + \left( \frac{\Delta G^{II}}{G_c^{II,int}} \right)^\alpha + \left( \frac{\Delta G^{III}}{G_c^{III,int}} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1 \quad (1.15)$$

où  $\Delta G^i$  est le taux de restitution d'énergie discret associé à la rupture de l'interface minimale considérée en mode  $i$ .  $\Delta G_c^{i,int}$  est le taux de restitution d'énergie critique associé au mode  $i$  de délaminage.

● **Remarques** : une variabilité est introduite sur les taux de restitution d'énergie critique, afin de prendre en compte la variabilité du matériau réel (répartition inégale des fibres, inclusions ...). Dans [Ladevèze *et al.*, 2006b], il a été montré que l'évolution de la fissuration dépend très peu de la loi de probabilité adoptée pour représenter cette variabilité. Lorsque des fissures se créent, ce sont les effets structuraux de répartition des sollicitations dans le stratifié qui très rapidement vont piloter l'évolution des dégradations. La variabilité sur les taux de restitution d'énergie critique utilise une densité de probabilité uniforme sur un intervalle donné.

### 3.2 Le matériau fibre-matrice

Le deuxième constituant élémentaire du modèle micro est le volume de matériau entouré par les interfaces définies précédemment, que l'on appelle le "matériau fibre-matrice". Il est issu de l'homogénéisation d'un volume élémentaire de matériaux constitué de fibres et de matrice. Il entre alors dans le cadre de la mécanique classique des milieux continus et va permettre de prendre en compte tous les comportements autres que la microfissuration et le délaminage, et notamment les dégradations diffuses.

■ **Décohésions fibre-matrice** : Les décohésions fibre/matrice se produisent à l'échelle de la fibre et sont réparties dans toute l'épaisseur du pli unidirectionnel. Dans l'optique d'une implémentation numérique permettant la simulation de géométries réelles, il n'est pas envisageable de représenter chacune d'elles de manière discrète. C'est pourquoi le mésomodèle d'endommagement des stratifiés a été choisi pour les prendre en compte.



En effet, ce mésomodèle montre certaines limites lorsque le niveau de dégradation est grand. Mais dans le cadre du micromodèle hybride, les fortes dégradations sont prises en compte dans la partie discrète du modèle. En revanche, lorsque le niveau de dégradation reste assez faible (ce qui correspond au développement des dégradation diffuses) le mésomodèle est très fiable, et très adapté à la simulation numérique.

L'endommagement provoqué par l'apparition de décohésions fibre/matrice est introduit à l'aide de deux variables scalaires notées  $\tilde{d}$  pour le cisaillement, et  $\tilde{d}'$  dans la direction transverse. On notera (1) la direction des fibres, (2) la direction perpendiculaire aux fibres dans le plan du pli et (3) la direction hors plan, voir figure 1.10. L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$2e_d = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2(1-[\sigma_{22}]_+ \tilde{d}')} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2(1-[\sigma_{33}]_+ \tilde{d}')} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$+ \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}(1-\tilde{d})} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}(1-\tilde{d})} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}(1-\tilde{d})}$$

où  $[\sigma_i]_+ = 0$  si  $\sigma_i$  est négative, 1 dans le cas opposé. Ceci qui permet la prise en compte du caractère unilatéral des dégradations dans la direction transverse.

Les lois d'évolution des variables d'endommagement diffus suivent les lois classiques basées sur les forces d'endommagement  $Y_d$  définies par :

$$Y_{\tilde{d}} = -\frac{\partial \langle\langle e_d \rangle\rangle_{\Omega}}{\partial \tilde{d}} \quad \text{et} \quad Y_{\tilde{d}'} = -\frac{\partial \langle\langle e_d \rangle\rangle_{\Omega}}{\partial \tilde{d}'} \quad (1.17)$$

si bien que

$$Y_{\tilde{d}} = \frac{1}{2(1-\tilde{d})^2} \langle\langle \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}} \rangle\rangle_{\Omega} \quad (1.18)$$

et

$$Y_{\tilde{d}'} = \frac{1}{2(1-\tilde{d}')^2} \langle\langle \frac{[\sigma_{22}]_+^2}{E_2} + \frac{[\sigma_{33}]_+^2}{E_3} \rangle\rangle_{\Omega} \quad (1.19)$$

où  $\langle\langle X \rangle\rangle_{\Omega}$  représente la valeur moyenne de  $X$  sur un volume élémentaire  $\Omega$  de matériau. On défini alors une force d'endommagement mixte définie par

$$\tilde{Y} = \sup_{\tau \leq t} (Y_{\tilde{d}} + b_2 Y_{\tilde{d}'}) \quad (1.20)$$

avec  $b_2$  un coefficient de couplage entre forces d'endommagement en cisaillement et transverse. Le pilotage des variables d'endommagement se fait donc à l'aide de la loi d'évolution suivante (voir figure 1.18) :

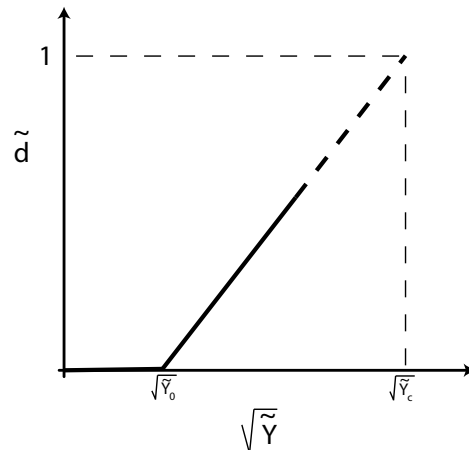
$$\tilde{d} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\tilde{Y}} - \sqrt{\tilde{Y}_0}}{\sqrt{\tilde{Y}_c}} & \text{si } \tilde{d} < 1 \text{ et } \tilde{d}' < 1 \\ 1 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (1.21)$$



et

$$\tilde{d}' = \begin{cases} b_3 \tilde{d} & \text{si } \tilde{d} < 1 \text{ et } \tilde{d}' < 1 \\ 1 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (1.22)$$

où  $\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_c$  et  $b_3$  sont des paramètres matériau identifiés expérimentalement.



**FIG. 1.18:** Loi d'évolution caractéristique de l'endommagement en fonction de la force thermodynamique (la zone en pointillés de la courbe indique que l'endommagement devrait rester à des niveaux faibles).

• **Remarques :** L'endommagement atteint lors des dégradations diffuses restant assez faible, il n'y a pas besoin de technique numérique particulière inhérente au problème de localisation numérique. Les dégradations correspondant à de grandes valeurs de  $\tilde{d}$  ou  $\tilde{d}'$  sont la microfissuration et le délaminage qui sont pris en compte de manière directe dans le modèle proposé.

## 4 Le modèle micro hybride amélioré

Les améliorations apportées au cours des travaux de thèse sont présentées dans ce paragraphe. Le modèle tel qu'il est proposé dans le paragraphe 3, prend en compte les phénomènes progressifs de dégradation, à savoir les fissures à l'échelle du pli et les décohésions fibre/matrice. Cependant, comme on l'a vu précédemment, un certain nombre d'autres phénomènes se produisent dans les stratifiés. En terme de dégradation, la rupture sens fibre doit être prise en compte pour avoir un modèle complet, permettant des simulations jusqu'à rupture. D'autre part, les phénomènes anélastiques et dépendants du temps peuvent occasionner des modifications profondes des dégradations, c'est pourquoi il faut compléter le modèle afin de le rendre pertinent vis à vis des observations expérimentales.

## 4.1 Introduction de la rupture sens fibre

Le dernier phénomène de dégradation non intégré dans le modèle est la rupture sens fibre. Le choix adopté dans le modèle micro est de le prendre en compte de manière volumique, au sein du matériau fibre-matrice. Les observations expérimentales montrent que la largeur de la kink-band est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du pli. En tension, les fibres rompent par paquets, de manière instable. Ce type de dégradation est donc adapté à une modélisation volumique, sur le volume élémentaire de matériau fibre-matrice. La prise en compte de la rupture sens fibre va donc se faire à travers une nouvelle variable d'endommagement  $d_f$  de sorte qu'en prenant en compte toutes les variables d'endommagement, l'énergie de déformation du matériau fibre-matrice s'écrit

$$2e_d = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1(1-d_f)} & -\frac{\nu_{12}}{E_1(1-d_f)} & -\frac{\nu_{12}}{E_1(1-d_f)} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1(1-d_f)} & \frac{1}{E_2(1-[\sigma_{22}]_+ d_f')} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1(1-d_f)} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2(1-[\sigma_{33}]_+ d_f')} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$+ \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}(1-\tilde{d})} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}(1-\tilde{d})} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}(1-\tilde{d})}$$

$d_f$  prendra les valeurs discrètes 0 dans le cas sain, et 1 en cas de rupture des fibres.

Compte tenu des observations expérimentales, rappelées au paragraphe 1.2.2, le critère associé à la rupture sens fibre doit prendre en compte la différenciation traction/compression,

■ **Rupture en traction** : La traction se caractérisant par une indépendance forte vis à vis des autres sollicitations, il n'est pas nécessaire de coupler les différentes sollicitations. On définit l'énergie volumique  $Y_f^T$  associée à la traction des fibres par :

$$Y_f^T = \frac{\partial e_d}{\partial d_f} = \frac{\langle\langle [\sigma_{11}]_+^2 \rangle\rangle_\Omega}{2E_1(1-d_f)^2} \quad (1.24)$$

Le critère devient alors :

$$\frac{Y_f^T}{Y_{f,c}^T} \geq 1 \quad (1.25)$$

avec  $Y_{f,c}^T$  l'énergie critique en traction pure identifiée expérimentalement sur un pli à 0°.

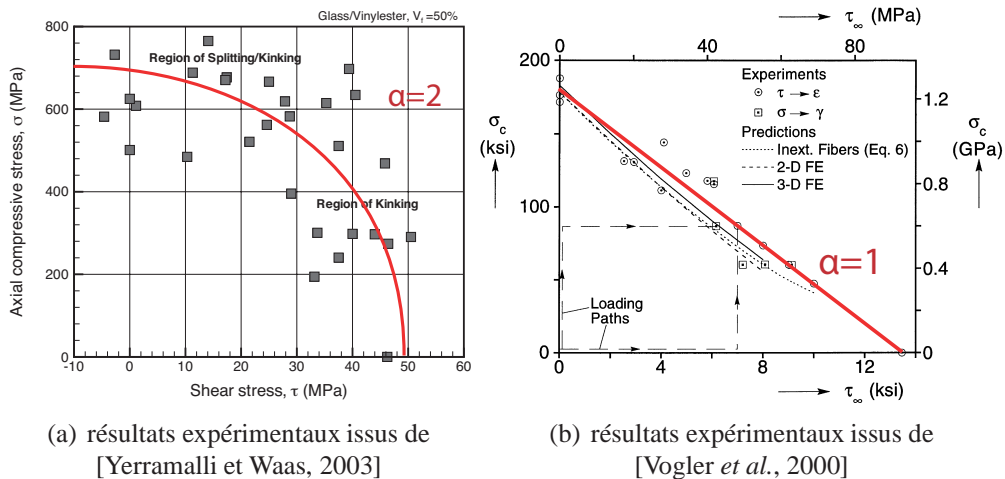
■ **Rupture en Compression** : L'instabilité arrivant en compression se caractérise par une forte dépendance vis à vis de la sollicitation en cisaillement, voir figure 1.19(b). On introduit pour cela l'énergie volumique  $Y_f^C$  associée à la compression des fibres :

$$Y_f^C = \frac{\partial e_d}{\partial d_f} = \frac{\langle\langle [\sigma_{11}]_-^2 \rangle\rangle_\Omega}{2E_1(1-d_f)^2} \quad (1.26)$$

et l'énergie volumique  $Y_{\bar{d}}$  associée au cisaillement, défini à l'équation 1.18 dans le cadre de l'endommagement diffus. Le critère mixte s'exprime alors par :

$$\left\{ \frac{Y_f^C}{Y_{f,c}^C} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} + \left\{ \frac{Y_{\bar{d}}}{Y_{12,c}} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1 \quad (1.27)$$

avec  $Y_{f,c}^C$  l'énergie critique en compression pure et  $Y_{12,c}$  l'énergie critique en cisaillement pure, identifiée expérimentalement. En pratique, le paramètre matériau  $\alpha$  prendra les valeurs 1 ou 2. Si  $\alpha$  vaut 2, le critère, traduit en contraintes, correspond à une enveloppe parabolique passant par les contraintes à rupture dans les sollicitations pures, voir figure 1.19(a). Si  $\alpha$  prend la valeur 1, alors le critère est défini par une droite reliant ces deux contraintes maximales, voir figure 1.19(b).



**FIG. 1.19:** Modèle et résultats expérimentaux dans le cas du couplage compression/cisaillement.

■ **Remarque :** Le modèle adopté est fortement phénoménologique. Vis à vis des modèles issus d'études à l'échelle de la fibre, le choix est ici clairement de simplifier au maximum le nombre de paramètres. Les modèles proposés dans la littérature et rappelés au paragraphe 2.2 montrent que les études à l'échelle de la fibre sont en accord avec les modèles plus phénoménologiques comme celui proposé ici. D'autre part, de la même manière ce qui est fait dans le cas des taux de restitution d'énergie critique, une variabilité est introduite sur les valeurs critiques  $Y_{f,c}^C$  et  $Y_{f,c}^T$  afin de prendre en compte la variabilité réelle du matériau. Une loi de probabilité uniforme sur un intervalle donné centré sur la valeur identifiée expérimentalement est utilisée.

## 4.2 Intégration des comportements plastiques et visqueux

Les observations expérimentales montrent l'importance de prendre en compte le caractère non linéaire de celle-ci. On partitionne la déformation totale  $\epsilon$  en une partie élastique  $\epsilon^e$ , une partie plastique  $\epsilon^p$  et une partie visqueuse  $\epsilon^v$ , de sorte que :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^v \quad (1.28)$$

### ■ Le modèle de viscosité

Pour intégrer la viscosité au micromodèle hybride, le choix s'est porté sur une vision intégrale inspirée du modèle de Schapery, équation 1.7. Les modèles basés sur cette vision ont montré de très bonnes capacités à reproduire les essais, pour des histoires de sollicitations complexes. D'autre part, la possibilité de faire des équivalences temps/température et temps/contrainte est primordiale dans l'optique de réaliser des simulations d'essais accélérés. Enfin, l'intégration numérique de ce modèle ne pose pas de problème particulier, à condition de prendre une fonction de fluage adaptée.

Le problème principal posé par la version non-linéaire du modèle de Schapery équation (1.8) est la grande quantité de paramètres à identifier expérimentalement. En partant des observations dans [Schieffer, 2003], on s'aperçoit que la principale source de non linéarité vis-à-vis de la contrainte est la présence de dégradations diffuses dans l'épaisseur du pli. Ces dégradations provoquent une redistribution des contraintes au sein du pli, de sorte que la matrice devient localement plus sollicitée, et donc développe d'autant plus de viscosité. C'est pourquoi, une version modifiée du modèle de Schapery est proposée. Elle se base sur l'utilisation des quantités effectives, prenant en compte le niveau d'endommagement. On définit la contrainte effective et la déformation visqueuse effective par :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \frac{[\sigma_{22}]_+}{1-\tilde{d}'} + [\sigma_{22}]_- \\ \frac{[\sigma_{33}]_+}{1-\tilde{d}'} + [\sigma_{33}]_- \\ \sqrt{2} \frac{\sigma_{12}}{1-\tilde{d}} \\ \sqrt{2} \frac{\sigma_{13}}{1-\tilde{d}} \\ \sqrt{2} \frac{\sigma_{23}}{1-\tilde{d}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\epsilon}^v = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^v \\ \epsilon_{22}^v (1-\tilde{d}') \frac{[\sigma_{22}]_+}{\sigma_{22}} + \epsilon_{22}^v \frac{[\sigma_{22}]_-}{\sigma_{22}} \\ \epsilon_{33}^v (1-\tilde{d}') \frac{[\sigma_{33}]_+}{\sigma_{33}} + \epsilon_{33}^v \frac{[\sigma_{33}]_-}{\sigma_{33}} \\ \sqrt{2} \epsilon_{12}^v (1-\tilde{d}) \\ \sqrt{2} \epsilon_{13}^v (1-\tilde{d}) \\ \sqrt{2} \epsilon_{23}^v (1-\tilde{d}) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

de sorte qu'il y ait égalité des dissipations :

$$Tr[\sigma \epsilon^v] = Tr[\tilde{\sigma} \tilde{\epsilon}^v] \quad (1.30)$$

Le modèle de viscosité proposé est alors identique au modèle de Schapery linéaire, mais avec utilisation des quantités effectives, de sorte qu'unidirectionnellement, la déformation visqueuse effective s'écrit :

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^v(t) = \int_0^t \Delta D_{ij}(\Psi(t) - \Psi(\tau)) \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau} d\tau \quad (1.31)$$

avec  $\Delta D$  la souplesse dépendante du temps et  $\Psi(t)$  le temps réduit défini par

$$\Psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{a_\sigma a_T} \quad (1.32)$$

avec  $a_\sigma$  et  $a_T$  les fonctions de la contrainte et de la température permettant les équivalences temps/contrainte et temps/température.

Le paramètre matériau à identifier concernant la viscosité est la souplesse dépendante du temps, ou fonction de fluage notée  $\Delta D$ . Cette fonction peut être directement mesurée à partir d'essais de fluage ou de relaxation, et intégrée telle qu'elle dans le modèle. Cependant, afin de garder des temps de calcul raisonnables, une autre démarche doit être adoptée. En effet, la déformation visqueuse est calculée à partir d'une intégrale portant sur l'ensemble de l'histoire du chargement. Un choix judicieux de la fonction  $\Delta D$  doit permettre de ne pas recalculer l'intégrale à chaque pas de temps, mais juste de rajouter le complément dû au nouveau pas de temps. C'est ce que permet l'expression de  $\Delta D$  sous la forme d'une série de Prony :

$$\Delta D_{ij}(t) = \sum_{i=1}^n A_n (1 - e^{-\lambda_n t}) \quad (1.33)$$

avec  $A_n$  les coefficients à identifier expérimentalement à partir d'un jeu de  $\lambda_n$  choisi initialement.

En pratique, on considérera la fibre comme élastique fragile, de sorte que la déformation visqueuse s'écrit

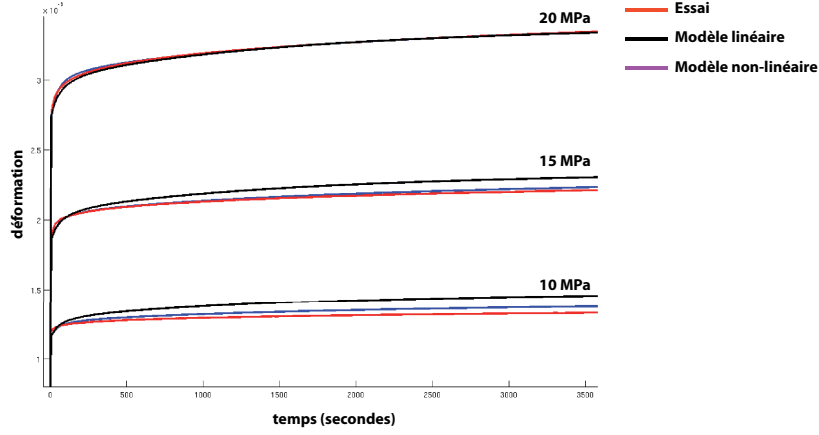
$$\tilde{\epsilon}^v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\epsilon}_{22}^v(t) \\ \tilde{\epsilon}_{33}^v(t) \\ \sqrt{2}\tilde{\epsilon}_{12}^v(t) \\ \sqrt{2}\tilde{\epsilon}_{13}^v(t) \\ \sqrt{2}\tilde{\epsilon}_{23}^v(t) \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

avec chaque terme  $\tilde{\epsilon}_{ij}^v$  défini par l'équation la loi du type 1.31, en prenant  $D_{22}(t) = D_{33}(t)$  et  $D_{12}(t) = D_{13}(t)$ .

La figure 1.20 montre une comparaison dans le cas de fluages à différents niveaux de contrainte, entre des résultats expérimentaux et le modèle proposé, comparé également au même modèle de Schapery linéaire (i.e. sans les quantités effectives). La souplesse dépendante du temps  $\Delta D$  est identifiée sur la réponse en fluage à 20 MPa. Les comportements endommageant et plastique ont été identifiés par ailleurs, à l'aide d'essais effectués sur le même matériau. Cette figure montre l'intérêt d'utiliser le modèle non-linéaire proposé, l'effet de l'endommagement est clairement illustré.

### ■ Le modèle de plasticité

Concernant la plasticité, le modèle exploite également les quantités effectives afin de prendre en compte l'amplification des déformations permanentes dues à la présence des



**FIG. 1.20:** Réponse temporelle lors d'essais de fluage à différents niveaux de contrainte, sur un stratifié  $[\pm 45]_{4s}$ , à  $120^\circ\text{C}$ . Source expérimentale : Alain Vinet, EADS IW.

décohésions entre fibre et matrice. On définit pour cela la déformation plastique effective :

$$\tilde{\epsilon}^p = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22}^p (1 - \tilde{d}') \frac{[\sigma_{22}]_+}{\sigma_{22}} + \epsilon_{22}^p \frac{[\sigma_{22}]_-}{\sigma_{22}} \\ \epsilon_{33}^p (1 - \tilde{d}') \frac{[\sigma_{33}]_+}{\sigma_{33}} + \epsilon_{33}^p \frac{[\sigma_{33}]_-}{\sigma_{33}} \\ \sqrt{2} \epsilon_{12}^p (1 - \tilde{d}) \\ \sqrt{2} \epsilon_{13}^p (1 - \tilde{d}) \\ \sqrt{2} \epsilon_{23}^p (1 - \tilde{d}) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

de manière à respecter une nouvelle fois l'égalité des dissipations :

$$\text{Tr}[\sigma \epsilon^p] = \text{Tr}[\tilde{\sigma} \tilde{\epsilon}^p] \quad (1.36)$$

De même que pour la viscosité, on suppose qu'il n'y a pas de déformation plastique dans la direction des fibres. On utilise une fonction de charge isotrope transverse définie à partir des contraintes effectives :

$$f(\tilde{\sigma}, p) = \sqrt{\tilde{\sigma}_{12}^2 + \tilde{\sigma}_{13}^2 + \tilde{\sigma}_{23}^2 + a(\tilde{\sigma}_{22}^2 + \tilde{\sigma}_{33}^2)} - R(p) - R_0 \quad (1.37)$$

avec  $R_0$  la limite d'élasticité.  $R(p)$  est la fonction d'écroutissage liée à la variable d'écroutissage  $p$  choisie sous la forme exponentielle :

$$R(p) = \alpha p^\beta \quad (1.38)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les paramètres d'écroutissage identifiés expérimentalement.

On définit donc les domaines de comportement à l'aide de la fonction de charge :

$$\begin{cases} f(\tilde{\sigma}, p) < 0 & \text{domaine élastique} \\ f(\tilde{\sigma}, p) = 0 \text{ et } \dot{f}(\tilde{\sigma}, p) < 0 & \text{décharge élastique} \\ f(\tilde{\sigma}, p) = 0 \text{ et } \dot{f}(\tilde{\sigma}, p) = 0 & \text{écoulement plastique} \end{cases} \quad (1.39)$$

A l'aide de l'hypothèse de normalité, on peut écrire :

$$d\tilde{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{et} \quad dp = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R} \quad (1.40)$$

avec  $\lambda$  le multiplicateur plastique. L'évolution du multiplicateur plastique peut être déterminée de manière explicite en imposant  $\dot{f}(\tilde{\sigma}, p) = 0$  lorsque  $f(\tilde{\sigma}, p) = 0$ .

●**Remarque** : Le modèle présenté ici est un modèle à écrouissage isotrope. Le choix du type d'écrouissage n'est pas clairement fixé. Actuellement, les essais expérimentaux dont nous disposons sont mieux reproduits par ce type de modèle. La partie des anélasticités due à l'adhérence des fissures sera ici naturellement prise en compte au niveau des surfaces minimales de rupture, c'est ce phénomène qui aurait pu faire pencher vers un écrouissage cinématique. Cependant, un effort doit encore être réalisé sur les essais pour pouvoir définitivement trancher cette question vis-à-vis du modèle micro hybride.

### ■ Conclusion

Le modèle micro amélioré proposé dans ce chapitre doit permettre la prise en compte de la majorité des phénomènes de dégradation intervenant au sein des composites stratifiés. Ce modèle peut se voir comme une base de données permettant de simuler l'évolution d'une famille de stratifiés, sollicités par des chargements complexes. Tel qu'il est présenté, ce modèle reste inapplicable aux codes de calculs commerciaux. Pourtant, il convient de le valider en effectuant des comparaisons poussées entre les résultats qu'il donne et la réalité. C'est pourquoi, une grande partie de mes travaux de thèse, présentée dans les prochains chapitres, a consisté à développer un logiciel capable de prendre en compte le modèle développé précédemment. L'objectif final est de réaliser des simulations confrontables aux essais expérimentaux.

## Chapitre 2

# Une stratégie numérique dédiée : état de l'art

*Ce second chapitre propose le détail de la stratégie numérique employée dans les travaux précédant cette thèse. Cela comprend une description de la stratégie LaTIn, ainsi que les compléments apportés pour aboutir à la première version d'un code de calcul dédié à la simulation des dégradations des stratifiés à l'échelle micro. Les limites de cette stratégie seront mises en évidence pour mener dans le chapitre suivant aux améliorations apportées durant mes travaux de thèse. Avant cela, un bref rappel des méthodes numériques permettant la description de l'évolution progressive de la fissuration est proposé.*



## 1 Introduction : les particularités liées au modèle

Le modèle micro hybride proposé dans la partie précédente doit permettre une prédiction pertinente des phénomènes rencontrés dans les stratifiés, avec évolution progressive des dégradations. On souhaite pouvoir illustrer les capacités du modèle à reproduire la réalité dans le cas de tests expérimentaux basiques (éprouvettes simples, trouées, entaillées..), voir par exemple la figure 1.11(a)

On l'a vu, la base du modèle consiste à introduire des interfaces minimales de rupture capables de représenter la microfissuration transverse et le délaminage. Afin de minimiser les modifications de maillage, le choix numérique fait dans ce cadre est de définir *a priori* toutes les interfaces potentielles. Ce choix est guidé par le fait que contrairement aux matériaux traditionnels (métaux, polymères), la direction des fissures est connue d'avance, car dictée par la direction des fibres. Définir d'avance les fissures potentielles implique l'introduction de centaines de milliers de surfaces minimales de rupture potentielle, pouvant rompre si le critère énergétique est atteint. Si l'on considère l'éprouvette d'un stratifié  $[0_2/90_2]_s$ , la largeur du pli à  $90^\circ$  étant de l'ordre de grandeur de 20 mm, sa longueur de 80 mm pour une épaisseur de pli d'environ 0,3 mm, il faudrait, rien que pour ce pli, introduire environ 18 000 interfaces. Ce chiffre est à multiplier par le nombre de plis unidirectionnels. C'est pourquoi une stratégie numérique dédiée basée sur une méthode de décomposition de domaine avec homogénéisation en espace a été introduite dans les travaux précédents [Violeau *et al.*, 2009]. Son but est de permettre des simulations de grande ampleur, c'est à dire la simulation de cas tests réels.

Cette partie commence par un rapide état de l'art des méthodes numériques envisageables pour implémenter le modèle, après quoi le détail de la méthode choisie est présenté.

## 2 Le choix d'une stratégie numérique adaptée au modèle

Cette première partie commence par un état de l'art des méthodes numériques envisageables pour traiter un problème basé sur le modèle micro hybride. Deux grandes familles de méthodes semblent pouvoir correspondre à la problématique posée par le modèle, les méthodes de décomposition de domaine, et les méthodes d'enrichissement. L'idée principale est de permettre l'introduction de fissures dans des zones prédéfinies. Une discussion sur les moyens d'introduire les non-linéarités se fera dans le chapitre suivant. Dans le paragraphe suivant, la méthode choisie sera détaillée.

### 2.1 Etat de l'art des méthodes numériques envisageables

Les méthodes numériques présentées ci-dessous permettent d'introduire de manière directe ou indirecte les discontinuités dues à la présence de fissures.

### 2.1.1 Les méthodes de décomposition de domaine

L'idée de base des méthodes de décomposition de domaine est de découper le domaine de référence en différentes entités appelées sous-domaines, liés entre eux par des interfaces. La stratégie consiste ensuite à résoudre des problèmes locaux par sous-domaine, et à recoller les domaines entre eux au niveau des interfaces afin de trouver une solution satisfaisant toutes les équations du problème de référence. Il est donc ici plus particulièrement question des méthodes sans recouvrement.

Considérons le problème d'élasticité linéaire de référence figure 2.1. Le domaine global  $\Omega$  est sous-structuré en deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , dont l'interface est noté  $\Gamma$ . Chaque

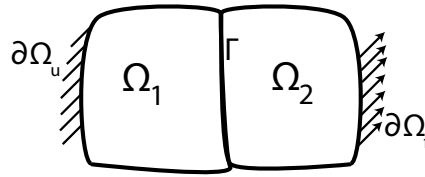


FIG. 2.1: Problème sous-structuré simple

domaine étant discrétisé par éléments finis (on considèrera des maillages compatibles), on obtient l'équation matricielle suivante sur le  $j^{\text{ème}}$  sous-domaine :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^j & K_{i\Gamma}^j \\ K_{\Gamma i}^j & K_{\Gamma\Gamma}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^j \\ u_{\Gamma}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^j \\ f_{\Gamma}^j + \lambda_{\Gamma}^j \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où  $\lambda_{\Gamma}^j$  désigne les efforts nodaux exercés sur les sous-domaines à travers l'interface. Les conditions aux interfaces s'écrivent

$$u_{\Gamma}^1 = u_{\Gamma}^2 \quad (2.2)$$

et

$$\lambda_{\Gamma}^1 = -\lambda_{\Gamma}^2 \quad (2.3)$$

Les méthodes peuvent ensuite être classées en trois sous-familles, suivant la manière dont le recollement se fait au niveau des interfaces.

#### ■ Méthodes primales

Dans ce type d'approche, la continuité des déplacements aux interfaces étant imposée par l'équation 2.2, la stratégie consiste alors à déterminer de manière itérative le champ d'effort aux interfaces. Le problème se condense sur les interfaces à l'aide du complément de Schur primal  $S_p$  tel que

$$S_p^j = K_{\Gamma\Gamma}^j - K_{\Gamma i}^j \{K_{ii}^j\}^{-1} K_{i\Gamma}^j \quad (2.4)$$

Le second membre peut se condenser de la même manière, donnant un vecteur  $F_c^i$  de sorte que le problème condensé, pour le sous-domaine  $\Omega_j$  s'écrive

$$S_p^j u_{\Gamma}^j = F_c^i + \lambda_{\Gamma}^j \quad (2.5)$$

au final, à l'aide de la condition 2.3, le problème global peut s'écrire

$$[S_p^1 + S_p^2]u_\Gamma = F_c^1 + F_c^2 \quad (2.6)$$

La différence entre les techniques primales réside ensuite dans le traitement du système linéaire obtenu (équation (2.6)). Si ce dernier reste de taille raisonnable, une résolution directe est envisageable. Dans le cas contraire, des techniques itératives appelées solveurs de Krylov sont couramment employées, comme par exemple la méthode du gradient conjugué. L'un des intérêts de ces méthodes est qu'elles permettent de faire des résolutions parallèles, ce qui autorise le traitement des gros problèmes, en répartissant les difficultés liées au stockage sur différents processeurs. L'utilisation de préconditionneurs est systématique. Dans la méthode "Balancing Domain Decomposition", ou BDD [Mandel, 1993], une phase de pré-équilibrage des résidus est introduite pour palier au problème des conditions limites sans déplacement des sous-domaines. On obtient ainsi un problème grossier permettant d'assurer l'extensibilité de la méthode. Cette stratégie a été adoptée plus tard pour le traitement d'une partie de la méthode LaTin, et sera donc présentée plus en détail au paragraphe 3.2.2

### ■ Méthodes duales

Par opposition aux méthodes primales, les méthodes duales consistent à imposer l'équilibre des efforts d'interface (équation (2.3)), et donc à déterminer les déplacements associés.

Dans la méthode FETI pour "Finite Element Tearing and Interconnecting" [Farhat et Roux, 1991], les problèmes locaux (équation (2.1)) sont donc injectés dans l'équation d'admissibilité cinématique 2.3. La solution des équilibres locaux n'est cependant pas accessible car associée à un problème de Neumann. Cependant, l'introduction d'une pseudo-inverse  $S_p^{j+}$  de  $S_p^j$  permet d'écrire sur chaque sous-domaine le déplacement au mouvement de corps rigide près :

$$u_\Gamma^j = S_p^{j+} [F_i^j + \lambda_\Gamma^j] + \alpha^j R^j \quad (2.7)$$

avec  $R^j$  la matrice des modes rigides d'interface du sous-domaine  $j$ , et  $\alpha^j$  le vecteur inconnu d'amplitude de ces modes rigides. La continuité des déplacements donne alors

$$S_p^{1+} [F_i^1 + \lambda_\Gamma^1] + \alpha^1 R^1 = S_p^{2+} [F_2^j - \lambda_\Gamma^1] + \alpha^2 R^2 \quad (2.8)$$

si le chargement n'excite pas les mouvements de corps rigide, c'est à dire si ce dernier est équilibré, ce qui s'écrit pour chaque sous-domaine  $\Omega_j$

$$R^j [F_i^1 + \lambda_\Gamma^1] = 0 \quad (2.9)$$

Au final, le problème à résoudre se met sous la forme

$$\begin{bmatrix} S_p^{1+} + S_p^{2+} & R^1 & -R^2 \\ R^{1T} & 0 & 0 \\ -R^{2T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\Gamma \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p^{1+} F_p^1 - S_p^{2+} F_p^2 \\ R^1 F_p^1 \\ R^2 F_p^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

De la même manière que dans le cas des méthodes primales, le système obtenu est souvent grand, et donc résolu à l'aide d'une méthode de type gradient conjugué préconditionné projeté, adapté encore une fois au calcul parallèle. La projection permet d'assurer l'extensibilité de la stratégie.

### ■ Méthodes mixtes

Les méthodes mixtes proposent de rechercher une combinaison des déplacements et des efforts d'interface. Différents types de méthodes mixtes existent, on notera la méthode du Lagrangien augmenté proposée dans [Fortin et Glowinski, 1983] [Glowinski et Tallec, 1990], la méthode FETI-2LM proposée dans [Farhat *et al.*, 2000] ou enfin la méthode LaTin, qui a été adoptée dans le cadre de l'implémentation du micro-modèle hybride, et décrite plus précisément au paragraphe 3.

#### 2.1.2 Les méthodes d'enrichissement

Contrairement aux méthodes de décomposition de domaine, les méthodes d'enrichissement permettent localement de venir améliorer la pertinence d'un calcul éléments finis en venant rajouter des informations supplémentaires, souvent issues d'analyses aux échelles inférieures. Dans le cas particulier de la fissuration, les méthodes basées sur la partition de l'unité et la méthode Arlequin semblent les plus adaptées à l'introduction de fissures.

### ■ Méthodes basées sur la partition de l'unité

La méthode de la partition de l'unité [Melenk et Babuska, 1996] permet d'enrichir localement, dans une zone d'intérêt, les fonctions de forme éléments finis à l'aide de fonctions supplémentaires notées  $\psi_j(x)$  adaptées aux particularités du problème traité. Le déplacement solution  $u_h$  est alors interpolé de la manière suivante :

$$u_h(x) = \sum_i u_i \phi_i(x) + \sum_i \sum_j a_j \psi_j(x) \phi_i(x) \quad (2.11)$$

où les fonctions  $\phi_i$  représentent les fonctions de forme éléments finis classiques, et  $a_j$  les degrés de liberté supplémentaires associés à l'introduction des nouvelles fonctions  $\psi_j$ . La méthode G-FEM [Strouboulis *et al.*, 2000], [K. Copps and I. Babuska, 2001] met l'accent sur la qualité de l'espace engendré par les fonctions d'enrichissement dans le but d'aboutir à une convergence optimale. L'utilisation de fonctions appelées *handbooks* permet d'adapter les fonctions d'enrichissement au mieux. Ces *handbooks* sont les solutions de problèmes traités à part, de manière analytique ou numérique mais qui correspondent à la forme de la solution attendue dans la zone d'intérêt, ce qui implique une très grande précision. Dans cette zone, l'introduction des fonctions d'enrichissement permet donc de mieux capter la solution. C'est par exemple le cas en pointe de fissure, ou l'introduction de fonctions basées sur les solutions asymptotiques permet de mieux appréhender la forme de la solution. Dans [Babuska et Andersson, 2005], on trouvera une application de la GFEM à la multifissuration. La X-FEM quant à elle a pour objectif

de faciliter la gestion des maillages. Dans le cas d'une fissure par exemple, l'introduction de fonctions discontinues, telles que la fonction de Heavyside permet de capter la discontinuité réelle due à une fissure au sein d'un élément. Ainsi, il est possible de s'affranchir des procédures de remaillage lors de la propagation des fissures. La figure 2.2 montre un exemple de résultat d'application de la XFEM à la méthode LaTIn.

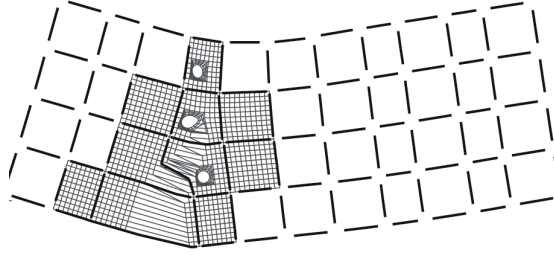


FIG. 2.2: Exemple d'application de la XFEM à la méthode LaTIn, [Guidault *et al.*, 2008]

### ■ Méthode Arlequin

Introduite dans [Dhia, 1998] et [Dhia et Rateau, 2001], l'idée de la méthode Arlequin est de superposer deux analyses dans une zone donnée. Les natures des deux analyses peuvent être très différentes. On peut imaginer par exemple une vision macroscopique grossière couplée localement à une vision micro plus fine. Une zone volumique de raccord faible entre les deux analyses permet à l'aide d'une pondération, de passer progressivement de l'une à l'autre des visions. Dans le cas de la fissuration, si le critère est atteint localement, il est possible à partir d'un milieu non fissuré  $\Omega_M$ , de venir ajouter un *patch* de fissuration  $\Omega_m$ , qui vient localement remplacer le problème de départ non fissuré (voir figure 2.3). La zone de recouvrement  $\Omega_{Mm}$  permet de passer progressivement du domaine macro  $\Omega_M$  au domaine micro  $\Omega_m$  soit  $\alpha(\underline{x})$  un champ scalaire de pondération, valant 1 sur  $\Omega_M \setminus \{\Omega_m, \Omega_{Mm}\}$ , 0 sur  $\Omega_m$ , et évoluant de 1 à 0 sur  $\Omega_{Mm}$ . Le problème peut alors s'écrire ;

$$a_\alpha(\underline{u}, \underline{u}^*) + b(\lambda^m, \underline{u}^*) = l_\alpha(\underline{u}^*)$$

où

$$a_\alpha(\underline{u}, \underline{u}^*) = \int_{\Omega} \alpha(\underline{x}) Tr[\epsilon(\underline{u}_M) \mathbf{K} \epsilon(\underline{u}_M^*)] + (1 - \alpha(\underline{x})) Tr[\epsilon(\underline{u}_m) \mathbf{K} \epsilon(\underline{u}_m^*)] d\Omega$$

$$b(\lambda^m, \underline{u}) = (\lambda^m, \underline{u}_M - \underline{u}_m)$$

$$l_\alpha(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \alpha(\underline{x}) \underline{f}_d \cdot \underline{u}_M^* + (1 - \alpha(\underline{x})) \underline{f}_d \cdot \underline{u}_m^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \underline{E}_d \cdot \underline{u}_M^* dS$$

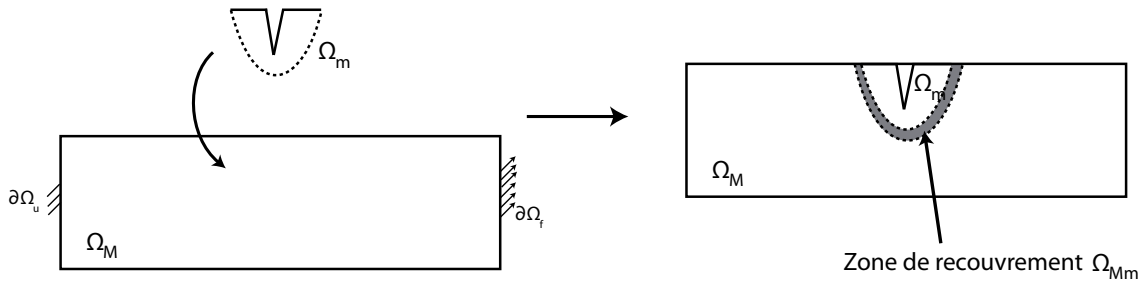


FIG. 2.3: Substitution locale du milieu  $\Omega_M$  par le milieu fissuré  $\Omega_m$  par la méthode Arlequin

en supposant que les efforts imposés  $\underline{F}_d$  ne s'appliquent que sur  $\Omega_M \setminus \{\Omega_m, \Omega_{Mm}\}$ , sur une zone  $\partial\Omega_f$ . La solution peut s'écrire alors :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \alpha(\underline{x})\underline{u}_M + (1 - \alpha(\underline{x}))\underline{u}_m \quad (2.12)$$

Cette stratégie permet de traiter de manière efficace l'apparition de fissures.

#### ■ Bilan

Dans le cas qui nous intéresse, la méthode Arlequin trouve ses limites dans le sens où dans les composites, le taux de fissuration peut-être très élevé. De ce fait, si on l'utilisait, il faudrait que les zones  $\Omega_m$  recouvrent presque l'ensemble de  $\Omega_M$ , auquel cas l'intérêt de la méthode est moins évident. Elle est particulièrement intéressante dans les cas où le *patch* à rajouter reste assez localisé. La méthode XFEM serait une candidate plus pertinente, permettant une gestion assez simple du maillage mais imposerait des refactorisations lourdes à chaque évolution de fissure. De plus, dans le cas qui nous intéresse, les fissures sont connues *a priori*, et le maillage doit être assez fin pour déterminer de manière correcte les taux de restitution d'énergie. De ce fait, il est simple d'introduire un maillage compatible aux fissures potentielles, c'est pourquoi l'idée est d'utiliser la méthode de décomposition de domaine. La XFEM imposerait des refactorisations lourdes à chaque évolution de fissure.

### 3 Une stratégie de décomposition de domaine Multi-échelle

La méthode finalement retenue pour implémenter le modèle micro hybride est la méthode de décomposition de domaine LaTin, avec homogénéisation en espace [Ladevèze, 1999], [Ladevèze et Dureisseix, 1999], [Ladeveze *et al.*, 2002], [Ladeveze et Nouy, 2003]. Ce paragraphe détaille les grandes lignes de cette méthode, d'abord dans sa version monoéchelle, puis en y ajoutant le côté

multiéchelle. Vis-à-vis du modèle micro hybride, l'idée de base est de représenter chaque interface potentielle de rupture, délimitant un volume de matériau fibre-matrice. De cette manière, un pli unidirectionnel doit être modélisé de manière à permettre la propagation des fissures. Le choix effectué consiste à se donner *a priori* les fissures potentielles, si bien qu'un pli à  $90^\circ$  peut se voir comme un ensemble de volumes maillés, séparés par des interfaces potentielles de rupture, voir figure 2.5.

Dans ce cas, les surfaces parallèles à la direction des fibres seront testées à la rupture. Les autres garderont un comportement parfait.

### 3.1 Décomposition de domaine - Problème à résoudre

La stratégie doit donc permettre de résoudre un problème de référence, pour lequel un milieu continu est soumis à un chargement statique sur une de ses frontières, notée  $\partial\Omega_F$ , et des déplacements imposés sur une autre partie, notée  $\partial\Omega_U$ . On lui impose également un chargement volumique  $f_d$  et une variation de température  $\Delta T$ , voir figure 2.4.

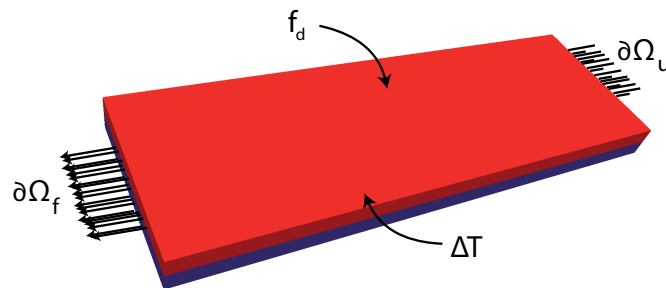


FIG. 2.4: Problème de référence à résoudre, dans le cas d'un stratifié à deux plis unidirectionnels

Le comportement de la structure peut être non linéaire, toutefois la méthode sera présentée dans le cadre d'un comportement élastique linéaire. Les non linéarités du problème (plasticité, viscosité, endommagement) seront prises en compte de manière externe, à l'aide d'un algorithme itératif, voir chapitre suivant.

La géométrie est donc composée d'un ensemble de sous-structures, voir figure 2.5. On les notera  $\Omega_E$  noté  $\mathbf{E}$  reliées entre elles par des interfaces  $\Gamma_{EE'}$ , voir figure 2.6. Chaque sous-structure représente un volume élémentaire de matériau fibre-matrice, chaque interface une surface minimale de rupture. Le premier point clé de la méthode est de considérer les interfaces comme des entités mécaniques à part entière, qui possèdent leur propre jeu de variables et un comportement. On peut considérer un grand nombre de comportements mais dans ce travail, on s'intéressera uniquement à des comportements d'interface de type parfait, ou contact avec frottement lorsque la fissure se propage. De manière plus



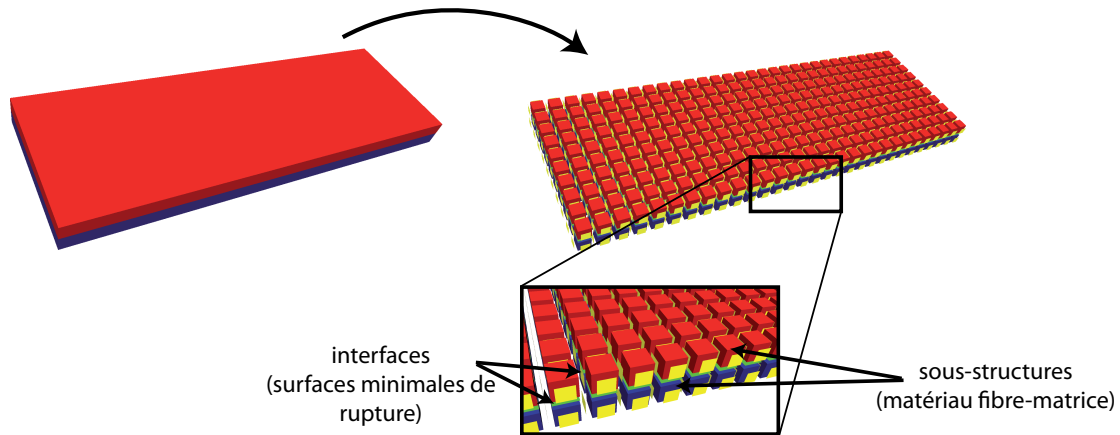


FIG. 2.5: Problème de référence sous-structuré

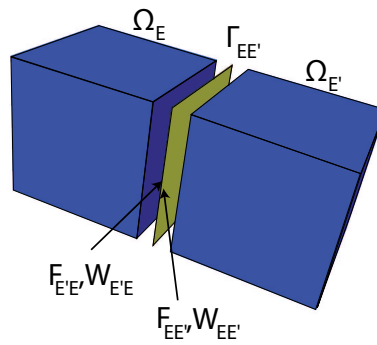


FIG. 2.6: Détail des entités

générale, les conditions limites sont également prises en compte par l'intermédiaire d'un comportement d'interface de type effort imposé, déplacement imposé, symétrie...

Les variables associées aux interfaces sont des champs d'efforts  $\underline{F}_{EE'}$  et  $\underline{F}_{E'E}$  et les variables cinématiques duales de déplacement  $\underline{W}_{EE'}$  et  $\underline{W}_{E'E}$ , voir figure 2.6).

Une sous-structure  $\Omega_E$  entourée de  $n$  sous-structures  $\Omega_{E'_1}, \dots, \Omega_{E'_n}$  est soumise à des conditions mixtes (force/déplacement) que l'on supposera compatibles afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème. On note  $\underline{\sigma}_E$  et  $\underline{u}_E$  les contraintes et déplacements de la sous-structure  $\Omega_E$  appartenant respectivement aux espaces  $\mathcal{S}_E$  et  $\mathcal{U}_E$ . On note  $\underline{F}_E$  (répartition d'effort sur tout les bords de  $\Omega_E$  décrivant  $\underline{F}_{EE'_1}, \dots, \underline{F}_{EE'_n}$ ) et  $\underline{W}_E$  (répartition des déplacements sur tous les bords de  $\Omega_E$  décrivant  $\underline{W}_{EE'_1}, \dots, \underline{W}_{EE'_n}$ ) appartenant respectivement aux espaces  $\mathcal{F}_E$  et  $\mathcal{W}_E$ . Ces espaces doivent être compatibles avec la forme bilinéaire du travail :

$$(\underline{F}, \underline{W}) \mapsto \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} ds \quad (2.13)$$



cette forme bilinéaire doit également être non dégénérée, de sorte que :

$$\left\{ \underline{F} \in \mathcal{F}_E \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} ds, \quad \forall \underline{W} \in \mathcal{W}_E \right\} = \{0\} \quad (2.14)$$

$$\left\{ \underline{W} \in \mathcal{W}_E \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} ds, \quad \forall \underline{F} \in \mathcal{F}_E \right\} = \{0\} \quad (2.15)$$

Le problème sous-structuré à résoudre s'exprime de la façon suivante :

Trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E = (\underline{u}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathcal{S}_E = \{\mathcal{U}_E, \mathcal{W}_E, \mathcal{S}_E, \mathcal{F}_E\}$  qui vérifient les équations :

- Admissibilité cinématique des sous-structures :

$$\forall t \in [0, T], \forall M \in \partial\Omega_E, \quad \underline{u}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E \quad (2.16)$$

- Admissibilité statique des sous-structures :

$$\forall t \in [0, T], \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_E^*, \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\underline{\sigma}_E \epsilon(\underline{u}^*)) d\Omega - \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{u}^* dS = 0 \quad (2.17)$$

où  $\mathcal{U}_E^*$  est l'espace homogène associé à l'espace  $\mathcal{U}_E$ .

- Relation de comportement des sous-structures :

$$\forall t \in [0, T], \quad \underline{\sigma}_E = \mathbf{K}(\epsilon(\underline{u}_E)) \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{K}$  est l'opérateur de Hooke.

- Équation d'équilibre des interfaces :

$$\forall t \in [0, T], \forall M \in \Gamma_{EE'}, \quad \underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0 \quad (2.19)$$

- Relation de comportement des interfaces :

$$\forall t \in [0, T], \forall M \in \Gamma_{EE'}, \quad \mathcal{R}(\underline{W}_{EE'}, \underline{F}_{EE'}, \underline{W}_{E'E}, \underline{F}_{E'E}) = 0 \quad (2.20)$$

où  $\mathcal{R}$  est un opérateur linéaire caractérisant le comportement de l'interface.

## 3.2 Comportements d'interface utilisés

Concernant les conditions limite, dans le cas d'interfaces extérieures, des interfaces de type déplacement imposé, effort imposé ou symétrie ont été introduites.

### ■ Déplacement imposé

$$\underline{W}_{EE'} = \underline{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_U \quad (2.21)$$

### ■ Effort imposé

$$\underline{F}_{EE'} = \underline{F}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_F \quad (2.22)$$

### ■ Symétrie

Soit  $\underline{n}_E$  la normale extérieure à la sous-structure  $E$  et à l'interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $\Pi_{EE'}$  est l'opérateur de projection permettant d'extraire la partie tangentielle des quantités d'interface, le comportement s'écrit :

$$\underline{W}_{EE'} \cdot \underline{n}_E = 0 \quad (2.23)$$

$$\Pi_{EE'}(\underline{F}_{EE'}) = 0 \quad (2.24)$$

Deux types de comportements d'interface intérieure vont correspondre au modèle micro : les interfaces parfaites et les interfaces de contact frottant correspondant à la cassure d'une surface minimale de rupture.

### ■ Interface parfaite

Les interfaces parfaites transmettent les efforts et vitesses entre les sous-structures.

$$\text{Equilibre} \quad \underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0 \quad (2.25)$$

$$\text{Comportement} \quad \underline{W}_{EE'} - \underline{W}_{E'E} = 0 \quad (2.26)$$

### ■ Interface de type contact avec frottement

Les interfaces de contact avec frottement ont un comportement différent selon la normale  $\underline{n}_E$  et la tangente à l'interface. On note  $f$  le coefficient de frottement.  $\Pi_{EE'}$  est l'opérateur de projection orthogonal à  $\underline{n}_E$ .

$$\text{Equilibre :} \quad \underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0$$

Contact :

$$\text{si } \underline{n}_E \cdot (\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}) > 0, \quad \text{alors } \underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'} = \underline{n}_E \cdot \underline{F}_{E'E} = 0 \quad \text{ouverture,}$$

$$\text{si } \underline{n}_E \cdot (\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}) = 0, \quad \text{alors } \underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'} + \underline{n}_E \cdot \underline{F}_{E'E} = 0 \quad \text{contact}$$

Frottement :

$$\text{si } \|\Pi_{EE'} \underline{F}_{EE'}\| < f |\underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'}|, \quad \text{alors } \Pi_{EE'}(\underline{W}_{EE'} - \underline{W}_{E'E}) = 0 \quad \text{adhérence,}$$

$$\text{si } \|\Pi_{EE'} \underline{F}_{EE'}\| = f |\underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'}|,$$

$$\text{alors } \exists \lambda > 0 \quad | \quad \Pi_{EE'}(\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}) = -\lambda \underline{F}_{EE'} \quad \text{glissement}$$

L'introduction d'interfaces avec un comportement complexe ne pose aucun problème, étant donné le caractère local de leur comportement. On peut noter que des interfaces de type contact avec jeu, interfaces cohésives ont déjà été mises en place.

## 3.3 Stratégie de résolution itérative

Le deuxième point clé de la méthode est d'utiliser une stratégie de résolution itérative non incrémentale, la LaTIn, dont l'origine date des années 80 et qui est détaillée dans [Ladevèze, 1999]. Cette méthode permet originellement de construire des approximations

successives de la solution sur tout le domaine espace-temps. On se limitera dans le cadre de cette étude à l'espace, et au cas linéaire.

■ La première étape est la séparation des difficultés. Pour cela, les équations sont séparées en deux groupes distincts. Le premier groupe noté  $\mathbf{A}_d$  est constitué des équations linéaires et éventuellement globales. Le second groupe, noté  $\Gamma$ , est constitué des équations locales et éventuellement non linéaires.

$$\mathbf{A}_d \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{admissibilité statique des sous-structures 2.17} \\ \text{admissibilité cinématique des sous-structures 2.16} \\ \text{comportement linéaire des sous-structures 2.18} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

$$\Gamma \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{comportement des interfaces 2.20} \end{array} \right. \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

• **Remarque** : Normalement, le comportement des sous-structures est intégré dans le groupe  $\Gamma$ , c'est à dire le groupe des équations locales qui peuvent être non-linéaires. A première vue, il aurait été intéressant de prendre en compte les comportements non-linéaires (endommagement, viscosité, plasticité) dans cette stratégie. Dans les faits, la convergence de la stratégie n'est pas assurée lorsque les non-linéarités sont trop fortes. C'est pourquoi le choix est fait ici de considérer les sous-structures comme linéaires élastiques. Le traitement des non linéarités est proposé au chapitre suivant.

■ Le second point consiste à appliquer une stratégie itérative de résolution à deux étapes par itération. Chaque étape vise à trouver la solution d'un des deux groupes d'équations  $\mathbf{A}_d$  et  $\Gamma$ . Des directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$  permettent de lier les solutions entre les deux groupes. Cette méthode est illustrée par la figure 2.7. L'étape visant à trouver une solution au groupe d'équations  $\mathbf{A}_d$  sera appelée étape linéaire, et l'étape visant à trouver une solution au groupe  $\Gamma$  sera appelée étape locale.

Les directions de recherche couplent les efforts et les déplacements entre deux sous-structures et le choix de celles-ci est primordial pour assurer une convergence efficace de la méthode. Le choix optimal de ces directions de recherche ainsi que leur mise en œuvre pratique ont été rappelés dans [Violeau, 2003].

Dans la suite, on supposera connue la solution  $s_n$  de la  $n^{\text{ème}}$  itération LaTin.

### 3.3.1 Etape locale à l'itération n+1/2

L'étape locale consiste à trouver une solution  $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$  à partir de la connaissance de  $s_n \in \mathbf{A}_d$  en utilisant une direction de recherche dite direction de montée  $\mathbf{E}^+$ . Ainsi sur chaque interface  $\Gamma_{EE'}$ ,  $\hat{s}_{n+1/2}$  le recollement se fait de manière mixte, de sorte que :

$$\forall M \in \Gamma_{EE'}, \quad \widehat{\underline{F}}_{EE'} - k^+ \widehat{\underline{W}}_{EE'} = \underline{F}_{EE'} - k^+ \underline{W}_{EE'} \quad (2.30)$$

$$\forall M \in \Gamma_{E'E}, \quad \widehat{\underline{F}}_{E'E} - k^+ \widehat{\underline{W}}_{E'E} = \underline{F}_{E'E} - k^+ \underline{W}_{E'E} \quad (2.31)$$

où  $k^+$  est un opérateur défini positif, et où  $\widehat{\underline{W}}_{EE'}$ ,  $\widehat{\underline{W}}_{E'E}$ ,  $\underline{F}_{EE'}$  et  $\underline{F}_{E'E}$  sont connus de l'étape précédente. Les équations précédentes donnent à cette méthode son caractère

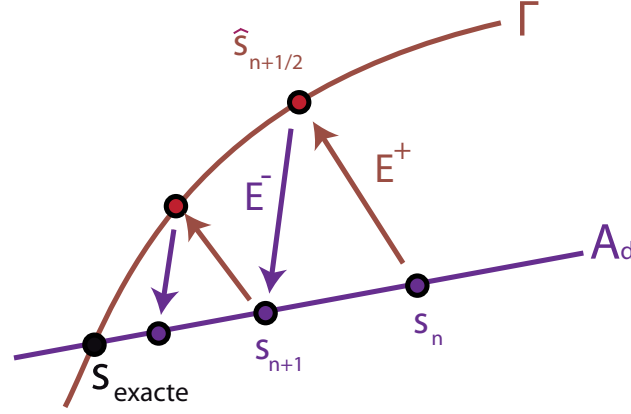


FIG. 2.7: Schéma itératif de la méthode LaTIn

mixte. L'utilisation des relations de comportement et d'équilibre de l'interface permettent de trouver la solution par la résolution d'un système à quatre équations et quatre inconnues. Cette étape a la particularité d'être très facilement parallélisable, car chaque calcul est local par interface.

### 3.3.2 Étape linéaire à l'itération n+1

L'étape linéaire consiste à trouver  $s_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  connaissant  $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$  en utilisant une direction de descente  $\mathbf{E}^-$ . Ainsi sur chaque interface,  $s_{n+1}$  doit vérifier :

$$\forall M \in \Gamma_{EE'}, \quad \underline{F}_{EE'} - k^- \underline{W}_{EE'} = \widehat{F}_{EE'} - k^- \widehat{W}_{EE'} \quad (2.32)$$

$$\forall M \in \Gamma_{E'E}, \quad \underline{F}_{E'E} - k^- \underline{W}_{E'E} = \widehat{F}_{E'E} - k^- \widehat{W}_{E'E} \quad (2.33)$$

où  $k^-$  est un opérateur défini positif choisi tel que  $k^- = k^+$ .

Ces directions de recherche sont injectées dans les équations du groupe  $\mathbf{A}_d$  (2.17) et (2.18) pour obtenir le problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \text{ tel que : } \quad & \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_E^*, \\ & \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\epsilon(\underline{u}_E) \mathbf{K} \epsilon(\underline{u}^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_E \cdot \underline{u}^* dS = \\ & \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{F}_E + k^- \widehat{W}_E) \cdot \underline{u}^* dS \end{aligned}$$

Ce problème résolu à l'aide des éléments finis permet de déterminer une  $\underline{u}_E$  dans la sous-structure. Ceci permet de remonter aux déplacements d'interface  $\underline{W}_E$ , qui grâce aux directions de recherche permettent de déterminer les efforts d'interface  $\underline{F}_E$ . L'étape suivante consiste alors à refaire une étape locale, jusqu'à la convergence voulue.

### 3.3.3 Contrôle des itérations

L'indicateur d'erreur construit dans la méthode LaTIn est basé sur la vérification des directions de recherche, choisi en pratique tel que  $k^- = k^+ = k$ , sur le principe qu'à convergence, la solution vérifie les équations du groupe  $\mathbf{A}_d$  et du groupe  $\Gamma$ . L'erreur sur les directions de recherche est calculée de la manière suivante :

$$\eta^2 = \frac{\sum_{E \in \mathbf{E}} [\|\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k}]}{\sum_{E \in \mathbf{E}} [\|\underline{W}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\widehat{\underline{W}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\underline{F}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k} + \|\widehat{\underline{F}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k}]} \quad (2.34)$$

où

$$\|\underline{W}\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} = \int_{\partial\Omega_E} \underline{W} \cdot k \underline{W} dS \quad \text{et} \quad \|\underline{F}\|_{\partial\Omega_E}^{F,k} = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F} \cdot k^{-1} \underline{F} dS \quad (2.35)$$

Pour assurer la convergence de la stratégie pour un grand nombre de comportements, l'étape linéaire est modifiée en incluant une phase de relaxation. Ainsi, en notant  $\tilde{s}_{n+1}$  la solution issue de l'étape linéaire directe, on définit la nouvelle solution relaxée  $s_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ , par la relation :

$$s_{n+1} = \mu \tilde{s}_{n+1} + (1 - \mu) s_n \quad (2.36)$$

où le paramètre  $\mu$  est choisi en pratique à 0,8.

• **Remarque** : Le critère d'erreur décrit précédemment est global, et devient moins performant lorsque localement, de fortes discontinuités apparaissent. On pourra se référer aux travaux de [Kerfriden, 2008] qui proposent un nouvel estimateur plus pertinent lorsque l'erreur est localement très forte. Cependant, le critère défini dans ce paragraphe a permis de mener à des résultats très satisfaisants, en prenant un critère de l'ordre de  $1e^{-5}$ .

## 3.4 Introduction des aspects multiéchelles

La méthode LaTIn mono-échelle présentée précédemment n'est pas numériquement extensible. Cela se traduit par le fait que l'information est transmise de proche en proche à chaque itération, de sorte que le nombre d'itération sera directement lié au nombre de sous-structures. Or, le nombre de sous-structures dont il est question dans le cadre du micromodèle hybride est de l'ordre de grandeur de plusieurs dizaines, voire centaines de milliers. L'introduction d'une échelle macro va permettre de transmettre dès la première itération, une certaine quantité d'informations sur tout le domaine. Cela donnera à

cette méthode un caractère multi-échelle. Ces informations seront transmises directement à travers les interfaces.

Pour cela, les quantités d'interface sont séparées en une partie micro (fine) et une partie macro (grossière). Le choix est d'imposer la continuité des efforts macro, ce qui aboutit à la définition d'un nouveau problème dit macro [Dureisseix et Ladevèze, 1998].

### 3.4.1 Séparation des quantités d'interface

La séparation des échelles se fait sur les quantités d'interface, de sorte que

$$\underline{F}_E = \underline{F}_E^m + \underline{F}_E^M \quad \text{et} \quad \underline{W}_E = \underline{W}_E^m + \underline{W}_E^M \quad (2.37)$$

où la quantité  $X^M$  est la partie macro de  $X$ , et  $X^m$  sa quantité micro. Les déplacements  $\underline{W}_E^M$  et efforts  $\underline{F}_E^M$  macro résultent de la projection de  $\underline{W}_E$  et  $\underline{F}_E$  sur des espaces de dimension finie notés respectivement  $\mathcal{W}_{EE'}^M$  et  $\mathcal{F}_{EE'}^M$ . Ces espaces doivent être choisis de sorte qu'ils soient compatibles avec la forme bilinéaire 2.13 et

$$\forall F^* \in \mathcal{F}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{W}_E^M \cdot F^* dS = 0 \quad (2.38)$$

$$\forall W^* \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E^M \cdot W^* dS = 0 \quad (2.39)$$

Une fois les espaces macro choisis, on définit les quantités macro  $\underline{W}_E^M \in \mathcal{W}_{EE'}^M$  et  $\underline{F}_E^M \in \mathcal{F}_{EE'}^M$  par :

$$\forall F^* \in \mathcal{F}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{W}_E^M - \underline{W}_E) \cdot F^* dS = 0 \quad (2.40)$$

$$\forall W^* \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{F}_E^M - \underline{F}_E) \cdot W^* dS = 0 \quad (2.41)$$

ce qui permet de déduire les quantités micros par :

$$\underline{F}_E^m = \underline{F}_E - \underline{F}_E^M \quad \text{et} \quad \underline{W}_E^m = \underline{W}_E - \underline{W}_E^M \quad (2.42)$$

Ceci conduit à la relation de découplage des travaux micro et macro qui s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E d\Gamma = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E^M \cdot \underline{W}_E^M d\Gamma + \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E^m \cdot \underline{W}_E^m d\Gamma \quad (2.43)$$

• **Remarque** : Même si *a priori*, aucune contrainte n'existe sur le choix des espaces macro, le choix a été fait de les prendre tels qu'ils garantissent l'extensibilité numérique de la stratégie. Le choix de cette base est discuté dans les travaux [Violeau, 2006], la figure 2.8 montre les fonctions de base permettant de définir la base macro. On y retrouve les mouvements de corps rigide (translation et rotation), ainsi que des extensions simples.

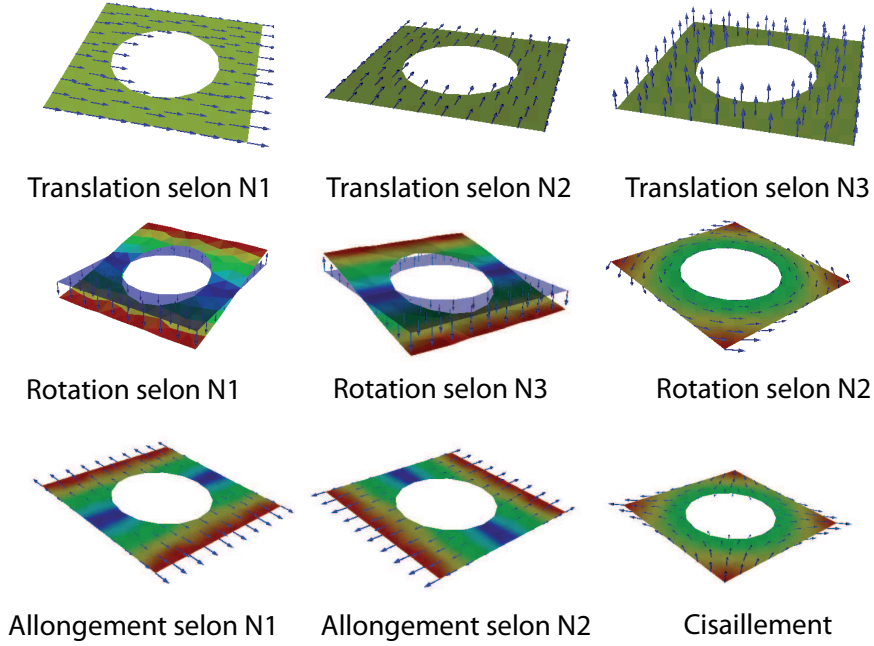


FIG. 2.8: Fonctions de base macro pour une interface plane. (N1,N2,N3) désigne la base principale d'inertie de l'interface.

### 3.4.2 Admissibilité des quantités macro

Les nouvelles inconnues (parties micro et macro) conduisent naturellement à l'ajout d'équations supplémentaires. Le choix fait dans ce cadre est d'imposer la continuité des efforts macroscopiques à toutes les étapes de la résolution. Cela est valable quelque soit le type d'interface considéré. Une égalité des déplacements macro n'aurait par exemple pas été judicieuse dans le cas où une fissure apparaît au niveau d'une interface. On recherchera donc les efforts macro dans l'espace noté  $\mathcal{F}_{\text{ad}}^M$  et défini par :

$$\mathcal{F}_{\text{ad}}^M = \{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \quad \underline{F}_{EE'}^M + \underline{F}_{E'E}^M = 0 \} \quad (2.44)$$

où  $\mathbf{V}_E$  est l'ensemble des sous-structures voisines de la sous-structure  $E$ .

### 3.5 Modification de l'étape linéaire

La séparation micro-macro est réalisée uniquement au niveau de l'étape linéaire. L'admissibilité de  $\underline{F}^M$  définie équation 2.44 va coupler les équations 2.32 et 2.33. La direction de descente  $\mathbf{E}^-$  doit donc être formulée de manière globale. La direction de descente

s'exprime alors sous la forme :

$$\forall \underline{F}_E^* \in \mathcal{F}^m \cup \mathcal{F}_{ad}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \{k^{-1} (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E)\} \cdot \underline{F}_E^* dS = 0$$

Dans, [Ladeveze et Nouy, 2003], il est proposé d'introduire un multiplicateur de lagrange pour prendre en compte l'admissibilité des efforts macro. On le notera  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$ , de sorte que  $\widetilde{\underline{W}}_E^M \in \mathcal{W}_{ad,0}^M$ , l'espace des déplacements macro continus aux interfaces est nul sur  $\partial\Omega_U$ . On peut donc réécrire la direction de recherche sous forme globale et l'admissibilité des efforts macro sous la forme

$$\forall \underline{F}_E^* \in \mathcal{F}, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \{k^{-1} (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E)\} \cdot \underline{F}_E^* dS = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{F}_E^* dS \quad (2.45)$$

$$\forall \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E dS = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d dS \quad (2.46)$$

On en déduit les problèmes à résoudre lors de l'étape linéaire :

- **Problème micro** pour toute sous-structure  $E \in \mathbf{E}$  :

*Trouver  $(\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E$  qui vérifient :*

$$\forall t \in [0, T], \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_E^*, \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\mathbf{K}\epsilon(\underline{u}_E)\epsilon(\underline{u}^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_E \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}_E + k^- \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{u}^* dS + \int_{\partial\Omega_E} k^- \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{u}^* dS \quad (2.47)$$

- **Problème macro** sur l'ensemble des interfaces :

*Trouver  $\underline{F}_E \in \mathcal{F}$  qui vérifie :*

$$\forall \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E dS = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d dS \quad (2.48)$$

Le problème microscopique (2.47) est un problème linéaire admettant une solution unique. D'après le principe de superposition, la solution de ce problème peut être décomposée en deux parties :



- $(\underline{u}_{E1}, \underline{W}_{E1})$  solution du problème micro (dénommé **problème micro 1**) dont le second membre est entièrement connu au début de l'étape linéaire :

Trouver  $(\underline{u}_{E1}, \underline{W}_{E1}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E$  qui vérifient :

$$\forall t \in [0, T], \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_E^*, \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\epsilon(\underline{u}_{E1}) \mathbf{K} \epsilon(\underline{u}^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_{E1} \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{F}_E + k^- \widehat{W}_E) \cdot \underline{u}^* dS \quad (2.49)$$

- $(\underline{u}_{E2}, \underline{W}_{E2})$  solution du problème micro (dénommé **problème micro 2**) dont le second membre contient pour le moment l'inconnue  $\widetilde{W}_E^M$ .

Trouver  $(\underline{u}_{E2}, \underline{W}_{E2}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E$  qui vérifient :

$$\forall t \in [0, T], \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_E^*, \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\epsilon(\underline{u}_{E2}) \mathbf{K} \epsilon(\underline{u}^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_{E2} \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\partial\Omega_E} k^- \widetilde{W}_E^M \cdot \underline{u}^* dS \quad (2.50)$$

• **Remarque** : Les problèmes micro 1 et micro 2 sont locaux par sous-structure. Ils sont donc bien adaptés à une résolution en parallèle.

Au final, la solution  $\underline{u}_E$  de l'étape linéaire est la somme des solution des problèmes micros 1 et 2 :

$$\boxed{\underline{u}_E = \underline{u}_{E1} + \underline{u}_{E2}} \quad (2.51)$$

### 3.5.1 Définition du comportement homogénéisé

En déterminant le déplacement sur les interfaces puis en utilisant la direction de recherche sur les efforts, on en déduit que la solution sur les interfaces entourant une sous-structure est telle que :

$$\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_E^M) + \underline{F}_{E,d}^M \quad (2.52)$$

$$\underline{W}_E^M = \mathbf{L}_E^W(\widetilde{W}_E^M) + \underline{W}_{E,d}^M \quad (2.53)$$

où  $\underline{F}_{E,d}^M$  et  $\underline{W}_{E,d}^M$  ne dépendent que des données sur les sous-structures (efforts volumiques  $\underline{f}_d$ ) et des quantités  $\widehat{s}_E$  aux interfaces. Ces quantités sont déterminées en résolvant le problème micro 1.

$\mathbf{L}_E^F$  (resp.  $\mathbf{L}_E^W$ ) est un opérateur linéaire de  $\mathcal{W}_E^M$  dans  $\mathcal{F}_E^M$  (resp. de  $\mathcal{W}_E^M$  dans  $\mathcal{W}_E^M$ ), symétrique et positif. Ces opérateurs peuvent être considérés comme des opérateurs

homogénéisés sur la sous-structure  $\Omega_E$  et sont déterminés préalablement aux itérations LaTin.

Pour construire ces opérateurs, on impose successivement pour chaque sous-structure  $\Omega_E$  des valeurs nulles aux multiplicateurs macro pour toutes les interfaces sauf pour une composante macro d'une interface donnée. On résout ensuite le problème micro 2 soumis à la distribution de multiplicateurs  $\tilde{W}_E^M$  pour déterminer les vitesses  $\underline{W}_E^M$ . On en déduit les efforts macro  $\underline{F}_E^M$  correspondants. On obtient donc pour chaque résolution, une colonne de l'opérateur homogénéisé. Si  $n_M$  est la dimension de l'espace  $\mathcal{W}_{EE'}^M$  pour une interface  $\Gamma_{EE'}$  et que  $\Omega_E$  est entourée de  $n_i$  interfaces, alors  $n_M \times n_i$  calculs micro seront nécessaires pour construire complètement ces opérateurs.

La relation 2.52 est introduite dans le problème macroscopique (2.48). Ce problème est ensuite résolu de manière directe et permet d'extraire les multiplicateurs sur chaque interface. L'écriture sous forme faible de l'admissibilité statique (2.46) et la relation de comportement homogénéisé aboutissent au problème macro en multiplicateur suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Trouver } \underline{\tilde{W}}^M = \{ \tilde{W}_E^M \}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\
 \forall \tilde{W}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \tilde{W}_E^{M*} \cdot \left( \mathbf{L}_E^F(\tilde{W}_E^M) + \underline{F}_E^M \right) dS = \\
 \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \tilde{W}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d dS \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

Ce problème admet une unique solution si  $mes(\partial\Omega_U) \neq 0$ . Une fois cette solution déterminée, il est donc possible de calculer le second membre du problème micro 2 (2.50), et donc de trouver la solution de ce problème.

• **Remarque** : Contrairement aux problèmes micro, le problème macro est global. En l'état, il n'est donc pas adapté au calcul parallèle. Cependant, la taille des opérateurs engendrés étant grande, une stratégie a été mise en place afin de la paralléliser, c'est l'objet du paragraphe 3.2 du Chapitre 3.

### 3.5.2 Bilan sur l'algorithme de résolution

La stratégie numérique adoptée peut donc être formalisée sous la forme de l'algorithme 1 qui reprend les principaux points menant à la résolution d'un problème en élasticité linéaire par la LaTin.

• **Remarque** : Cette stratégie, définie dans le cadre de l'élasticité linéaire, permet la parallélisation rapide de la plupart des étapes, exceptée l'étape macro. Dans le cas mono-échelle (*i.e.* sans problème macro), cette stratégie est complètement parallélisable.

---

**Algorithme 1** Stratégie de calcul multiéchelle (le signe ★ indique les étapes locales par sous-domaine ou interface)

---

**Initialisation :** Assignment de  $\hat{F}$  et  $\hat{W}$  pour les interfaces extérieures,  $n = 0$

**Itérations :**

**boucle** tant que  $\eta > \eta_c$  **faire**

1. Étape locale : Calcul de  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ 
    - Résolution de problèmes locaux sur les interfaces  $\Gamma_{EE'}$  (★)
  2. Étape linéaire : Calcul de  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ 
    - Résolution du problème micro 1 :  $(\mathbb{K} + \mathbf{k})[U_1] = [\hat{F} + k\hat{W}]$  (★)(eq :2.49)
    - Construction du problème macro :  $\hat{F}_{E,d}^M$  par sous-structure + assemblage second membre macro  $[\tilde{F}_d]$  (★)
    - Résolution du problème macro  $\mathbb{L}[\tilde{W}] = [\tilde{F}_d]$  (eq :2.54)
    - Résolution du problème micro 2 :  $(\mathbb{K} + \mathbf{k})[U_2] = [k\tilde{W}]$  (★)(eq :2.50)
    - Reconstruction des solutions :  $[U_n] = [U_1] + [U_2]$  (★)
- Relaxation (★)(eq :2.36)
3. Calcul d'erreur  $\eta$

**fin boucle**

---

## 4 Recherche de fissures

La technique stratégie décrite précédemment permet de représenter, dans le cadre d'un pli au comportement élastique linéaire, n'importe qu'elle état de fissuration, comprenant des microfissurations transverses et du délaminage. L'évolution des fissures est basée sur le critère mixte en énergie défini au paragraphe 3.1. Sur chaque interface, ce critère nécessite le calcul du taux de restitution d'énergie associé à chaque mode de fissuration. Une méthode analytique présentée dans [Violeau, 2006] permet de calculer explicitement ces taux de restitution à partir d'un état de contrainte donné. Cependant, les formules analytiques ne restent valables que dans le cas de schémas de fissuration régulier, permettant une détermination analytique des états de contrainte avant et après fissuration. Le but du modèle hybride est d'effectuer des calculs jusqu'à rupture, c'est à dire jusqu'au moment où les dégradations localisent. Dans ce cas, la complexité des réseaux de fissures remet en cause les résultats analytiques. C'est pourquoi, le choix effectué est de calculer le taux de restitution d'énergie pour chaque interface potentielle de rupture en simulant l'état fissuré.

### ■ Le calcul localisé

Soit une surface minimale de rupture d'aire  $\Delta S$  pour laquelle on souhaite calculer le taux de restitution d'énergie. Le calcul sans fissure a donné un effort  $\sigma_{S,n}^0$  sur l'interface. On définit alors un problème résiduel suivant :

*La structure est soumise à un champ de température nul, des efforts nuls sur  $\partial\Omega_F$ ,*

des déplacements nuls sur  $\partial\Omega_U$ . Sur la surface  $\Delta S$ , on impose un effort  $\underline{F}_S^r = -\underline{\sigma}_S^0 n$ .

La résolution de ce problème donne sur le volume total une contrainte notée  $\underline{\sigma}^r$ . Le taux de restitution d'énergie  $\Delta G$  associé à la rupture de la surface considérée peut-être approché par :

$$\Delta G = \frac{1}{\Delta S} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr[\underline{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \underline{\sigma}^r] d\Omega + \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma \right) \quad (2.55)$$

où  $S_c$  représente les surfaces déjà rompues, qui présentent du contact avec frottement. En projetant  $\underline{F}_S^r$  sur les différents axes liés à l'interface, il est alors possible de déterminer le taux de restitution d'énergie pour chaque mode de fissuration.

• **Remarque** : Le calcul précédent est défini sur l'ensemble du domaine  $\Omega$ . Cependant, l'effort imposé  $\underline{F}_S^r$  est auto équilibré, si bien qu'en vertu du principe de Saint Venant, sur le problème résiduel, l'influence de ce chargement restera localisé. Donc le calcul localisé peut se réduire à une petite zone centrée sur l'interface. Le rayon de cette zone d'influence a été fixé  $(2R)^3$ , où  $R$  représente le rayon moyen de l'interface considérée.

#### ■ La propagation des fissures

Une fois les taux de restitution calculés, le critère  $\Phi_i$  est calculé pour chaque surface minimale de rupture  $S_i$

$$\Phi_i = \left[ \left( \frac{\Delta G^I}{G_c^I} \right)^\alpha + \left( \frac{\Delta G^{II}}{G_c^{II}} \right)^\alpha + \left( \frac{\Delta G^{III}}{G_c^{III}} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.56)$$

si pour une surface, le critère est atteint, soit  $\Phi_i \geq 1$ , alors le comportement de la surface passe de parfait à contact frottant. Si plusieurs surfaces atteignent le critère en même temps, seule celle pour laquelle  $\Phi_i$  est le plus grand va être cassée. Les autres resteront parfaites. Un calcul global est alors à nouveau effectué, avec une fissure supplémentaire, et les calculs localisés sont effectués à nouveau. Cette stratégie est formalisée par l'algorithme 2.

• **Remarque** : Le recherche de fissure est effectuée en parallèle. Un cluster contenant plusieurs dizaines de processeurs étant disponible au laboratoire, il est facile d'envoyer les calculs localisés définis précédemment sur différents processeurs, afin de gagner du temps. De fait, si l'on dispose de  $n_p$  processeurs, la phase recherche de fissure voit son temps divisé d'autant.

## 5 Implémentation et limites de cette stratégie

L'implémentation numérique de cette méthode a été effectuée au cours des travaux de D. Violeau [Violeau *et al.*, 2009]. Le code a été implémenté sur la plate-forme numérique

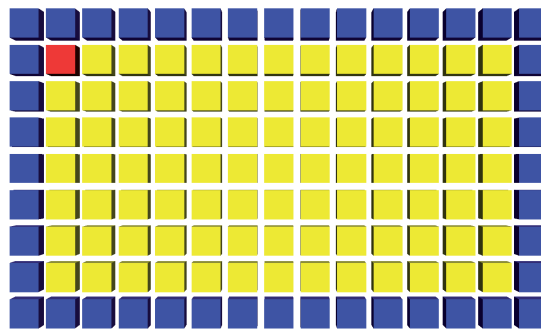
**Algorithme 2** Boucle globale de recherche de fissure**Initialisation :** Calcul élastique LaTIn**Itérations :****boucle** tant que  $\eta_f = 1$  **faire**

1. Calcul du critère de rupture sur chaque interface potentielle
  - Calcul localisé sur chaque sous-structure
  - Calcul des critères, 1.14 où 1.15 suivant le cas
2. Si critère atteint :
  - Sélection de l'interface la plus chargée
  - Remplacement de son comportement par du contact unilatéral frottant
  - $\eta_f = 1$
  - Calcul élastique LaTIn
3. Sinon :
  - $\eta_f = 0$

**fin boucle**

du LMT-Cachan, initiée par H. Leclerc. Cette plateforme permet d'avoir une librairie très complète d'outils numériques indispensables pour effectuer des calculs éléments finis hautes performances. Cet outil a permis d'étendre le code initialement développé au cas du couplage fluide/structure [Vergnault, 2009], aux analyses d'amortissement dans des liaisons boulonnées [Neron *et al.*, 2008], à la dynamique transitoire [Odievre, 2009], à la mésomodélisation des stratifiés présentant de grands délaminages [Kerfriden, 2008].

Concernant la modélisation des stratifiés à l'échelle micro, chaque pli unidirectionnel est donc vu comme un ensemble des sous-structures séparées par des interfaces. La figure 2.9 montre l'exemple de sous-structuration basique d'un pli à  $90^\circ$ . Cette image



**FIG. 2.9:** Sous-structuration basique d'un pli à  $90^\circ$ . Tous les opérateurs de rigidité liés aux sous-structures jaunes sont des pointeurs vers les opérateurs de la sous-structure rouge.

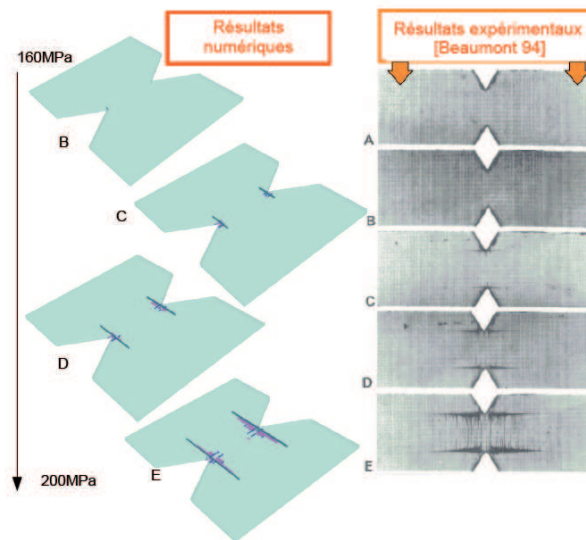
montre que les sous-structures ont des formes très précises, répétées un grand nombre

de fois. Les opérateurs éléments finis des ces sous-structures sont donc identiques. Dans le cas de cette figure, toutes les sous-structures jaunes ont exactement le mêmes type de conditions limites, la même forme et le même maillage que la sous-structure rouge. Il paraît donc redondant de recalculer et stocker les opérateurs correspondants pour chacune d'elles. Dans ce cadre, la notion de sous-structure de référence a été introduite dans [Violeau *et al.*, 2009] 1. En bref, les opérateurs sont calculés normalement si la sous-structure a une forme nouvelle. En revanche, si la forme de la sous-structure  $B$  est identique à une précédente sous-structure  $A$ , alors l'opérateur associé à  $B$  n'est pas calculé, mais pointe directement vers l'opérateur associé à  $A$ . Si l'on reprend la figure 2.9, alors toutes les cellule jaunes auront comme opérateur de rigidité, l'opérateur de la cellule rouge. Cela permet des gains de stockage très importants. Par exemple, un pli unidirectionnel à  $90^\circ$  simple ne contiendra que 8 sous-structures de références, alors qu'il peut contenir plusieurs centaines de milliers de sous-structures au total.

### Conclusion

Les résultats obtenus ont été assez encourageants, notamment du point de vue de l'évolution des fissures. La figure 2.10 montre la simulation d'une plaque bi-entaillée en traction. Cependant, le nombre de sous-structures nécessaires pour effectuer des calculs de taille réelle n'a pas pu être introduit. Les problèmes traités restaient limités à quelques millions de degrés de liberté, et à une évolution faible de la fissuration. La raison de base étant la taille du problème macro, qui demande de grandes capacités en mémoire vive. D'autre part, le temps de calcul posait problème, si bien que les simulations ne pouvaient être menée à bien dans des temps raisonnables. Une autre limitation, plus fondamentale, est que les sous-domaines étaient considérés dans cette stratégie comme élastiques linéaires. Or on l'a vu plus tôt, les stratifiés présentent une grande variété de comportements anélastiques. En cela, les capacités de calcul se trouvent également limitées par leur pertinence.

Le travail proposé dans la suite de ce mémoire vise donc à régler ces problèmes, à travers l'amélioration de la stratégie numérique.



**FIG. 2.10:** Premiers résultats obtenus avec le code de simulation du modèle micro hybride [Violeau, 2006]

## Chapitre 3

# Améliorations de la stratégie numérique

*La stratégie numérique présentée dans la partie précédente a été complétée et améliorée afin de pouvoir traiter des cas plus réalistes. Une première phase décrit l'implémentation des nouveaux comportements introduits dans le modèle micro hybride, à savoir l'endommagement diffus, la plasticité, la viscosité et la rupture sans fibre. Une deuxième phase détaille la manière dont l'optimisation de la stratégie a été réalisée, notamment grâce à la parallélisation complète du code, et à l'accélération de la recherche de fissure. Ces améliorations vont permettre de mener une étape de validation, présentée dans la dernière partie de ce document.*



# 1 Implémentation des non linéarités

La stratégie de calcul doit donc maintenant être adaptée au traitement des comportements endommageable, plastique et visqueux. Pour cela, dans tous les cas, un algorithme itératif est adopté. Le premier paragraphe propose un état de l'art des techniques permettant d'intégrer les non-linéarités dans un calcul de structures.

## 1.1 Bref état le l'art

Il existe une grande variété de stratégies permettant de prendre en compte les non-linéarités dans les stratégies de calcul à hautes performances. On distinguera ici trois approches. Les deux premières faisant partie des plus utilisées, alors que la troisième est une version étendue de l'approche LaTin proposée dans le chapitre précédent.

### ■ La méthode du point fixe

Cette méthode est la plus simple des méthodes permettant de résoudre des problèmes non-linéaires suffisamment réguliers. L'idée de base est de résoudre l'équation  $x = g(x)$  à partir de la suite récurrente suivante :

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad (3.1)$$

Appliquée au cas d'un problème de mécanique, dont l'équation non linéaire à résoudre est de la forme  $\mathbf{K}_{ef}\underline{u} = \underline{F}_{ef}$ , cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\underline{u}_{k+1} = \{\mathbf{K}_{ef}(\underline{u}_k)\}^{-1} \underline{F}_{ef} \quad (3.2)$$

Cette méthode demande donc uniquement le calcul de la factorisation de la matrice éléments finis actualisée. Sa convergence n'est pas optimale, mais reste tout de même raisonnable dans des cas de faible non-linéarité.

### ■ Les méthode de Newton

La méthode de Newton (et ses dérivés), est une technique itérative de résolution des problèmes non-linéaires basée en partie sur la méthode de point fixe décrite précédemment. Le problème posé est le suivant :

*trouver  $x$  vérifiant*

$$f(x) = 0 \quad (3.3)$$

où  $f$  est une fonction non-linéaire de  $x$ . L'idée de base de l'algorithme est de linéariser la fonction  $f$ , en cherchant successivement les zéros associés aux linéarisations. Pour cela, la fonction  $f$  doit être dérivable sur le domaine considéré. En un point particulier  $x_0$ , on approche donc la fonction  $f$  par

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.4)$$

Chaque étape consistera donc à trouver  $x$  tel que  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ . En conséquence, on peut construire la suite récurrente, portant sur  $x$  :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3.5)$$

Cette équation est alors résolue grâce à une méthode de point fixe. Cette stratégie donne de très bons résultats de convergence dans le cadre de fonctions  $f$  assez régulières. Elle est représentée graphiquement par la figure 3.1.

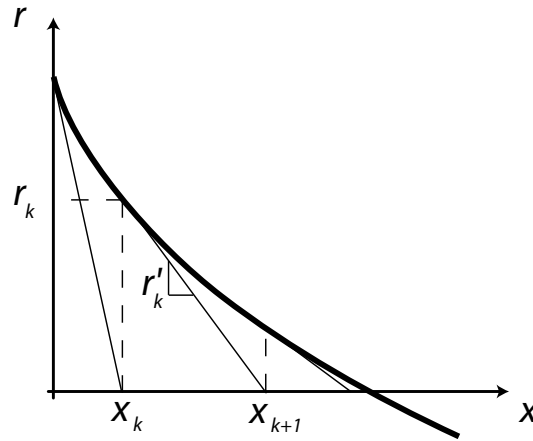


FIG. 3.1: Illustration de la méthode de Newton

Appliqué au cas des calculs éléments finis de structures non-linéaires, le problème à résoudre est du type

trouver  $\underline{u}$  vérifiant

$$\underline{r}(\underline{u}) = \mathbf{K}_{ef}\underline{u} - \underline{F}_{ef} = 0 \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{K}_{ef}$  est la matrice de rigidité éléments finis non-linéaire vis-à-vis de  $\underline{u}$ ,  $\underline{F}_{ef}$  le vecteur des efforts imposés, on notera  $r$  le résidu à annuler. Afin d'appliquer l'algorithme de Newton, on détermine à chaque itération la matrice tangente  $\mathbf{K}_t^k$  par

$$\mathbf{K}_t^k = \underline{r}'(\underline{u}_k) = \underline{r}'_k \frac{\partial (\mathbf{K}_{ef}\underline{u}_k)}{\partial \underline{u}_k} \quad (3.7)$$

de sorte que la relation de récurrence puisse s'écrire

$$\mathbf{K}_t^k (\underline{u}_{k+1} - \underline{u}_k) = \underline{F}_{ef} - \mathbf{K}_{ef}\underline{u}_k = -\underline{r}_k \quad (3.8)$$

Cette méthode nécessite donc à chaque itération la construction de l'opérateur  $\mathbf{K}_t^k$  ainsi que sa factorisation pour résoudre le problème 3.8. Cette étape peut être difficile à implémenter et longue à l'exécution.

Dans certains cas, il est possible de ne pas redéfinir la matrice tangente, mais de garder la même d'une itération sur l'autre. On appelle cette méthode "Newton modifié". Le coût

des itérations est donc diminué, mais le taux de convergence est quant à lui détérioré. Une autre méthode dérivée de la méthode de Newton est la méthode "quasi-Newton", qui consiste à approcher l'opérateur tangent de manière successive en venant corriger l'opérateur tangent de l'itération précédente. Différentes techniques existent à ce stade là, et permettent alors de ne pas refactoriser la matrice tangente en instaurant des règles algébriques menant à la résolution approchée de l'équation 3.8. A proximité de la solution, les performances sont légèrement moins bonnes que la méthode de Newton, mais meilleures que le "Newton-modifié". Une dernière possibilité est la méthode de Newton sécant. C'est celle qui sera utilisée pour l'implémentation de l'endommagement.

Ces méthodes de "Newton" associées aux méthodes de décomposition de domaine utilisant un solveur de Krylov, sont appelées NKS (Newton-Krylov-Schur). Elles permettent de traiter de manière efficace les cas de non-linéarités globales. Si une non-linéarité locale forte se produit, ce type de solveur va demander un grand nombre d'itérations pour une erreur très localisée. C'est pourquoi des méthodes de localisation non-linéaires permettent de traiter localement les non-linéarités fortes, sans avoir à faire de boucles globales superflues. Voir les travaux de [O'Higgins *et al.*, 2007] dans le cas du flambage, où ceux de [Pebrel *et al.*, 2008] dans le cas de l'endommagement.

### ■ La méthode LaTIn en non-linéaire

La stratégie LaTIn détaillée dans la partie précédente est écrite dans le cas de certains modèles de matériaux non-linéaires. Le principe est de séparer de manière différente les difficultés. De la séparation initialement proposée 2.27, le comportement des sous-structures va naturellement passer du côté des équations non linéaires, de sorte que l'on ait la répartition suivante :

$$\mathbf{A}_d \begin{cases} \text{admissibilité statique des sous-structures 2.17} \\ \text{admissibilité cinématique des sous-structures 2.16} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\Gamma \begin{cases} \text{comportement des interfaces 2.20} \\ \text{comportement non-linéaire des sous-structures} \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans ce cas, l'étape locale comprend en plus du comportement des interfaces, une boucle locale de correction non-linéaire. Un certain nombre de travaux ont permis d'appliquer la méthode LaTIn avec décomposition de domaine à des comportements non linéaires [Ladevèze, 1999]. plus récemment, dans [Gupta *et al.*, 2005], on trouve une application de la méthode à l'endommagement en dynamique dans le cadre des composites 3D C/C. Dans [Ladevèze *et al.*, 2009], le cas de la plasticité avec homogénéisation en temps est abordé.

### ■ Bilan

Des méthodes performantes de résolution des problèmes non-linéaires existent et sont applicables au cas de la stratégie linéaire déjà adoptée pour la simulation du modèle micro hybride. Le choix fait dans la suite de mes travaux est de se baser sur une méthode de point fixe, semblable ici à une méthode de Newton sécant. Les deux raisons fondamentales sont sa facilité d'implémentation et le fait que les non-linéarités dues à l'endommagement, la plasticité et la viscosité devraient rester assez faibles. La méthode devrait alors offrir une

bonne convergence, dans tous les cas, meilleure que la méthode de Newton modifiée. En effet, les fortes non-linéarités qui interviennent au sein des composites sont principalement causées par les fissures, qui sont prises en compte par la partie discrète du modèle (et donc de l'implémentation). De ce fait, les stratégies utilisées ne nécessitent ni le calcul d'opérateurs tangents, ni le calcul de résidus. Dans ce cadre, la stratégie LaTIn sera donc utilisée localement, comme un solveur éléments finis contenant des sous-structures élastiques linéaires, en contact frottant. La stratégie itérative sera greffée à ce solveur afin de prendre en compte les aspects non linéaires. La prise en compte de ces phénomènes se fera de manière successive, à chaque pas de temps. Un premier calcul global permettra de prendre en compte la plasticité, en bloquant tous les autres mécanismes. Ensuite, la viscosité sera actualisée en effectuant de nouveau un calcul sur toute le domaine, mais en bloquant tous les autres phénomènes. Il en sera de même pour la recherche des fissures, pour le calcul de l'endommagement ainsi que la détection des ruptures sens fibres. Pour chaque étape, on assurera la convergence. L'algorithme global est formalisé par l'algorithme 9.

## 1.2 Implémentation du mésomodèle d'endommagement

Le mésomodèle d'endommagement, détaillé dans le paragraphe 3.2 doit permettre de prendre en compte les décohésions fibre/matrice à travers le matériau fibre-matrice. Afin de limiter le nombre de calculs et le stockage en mémoire, l'endommagement diffus sera considéré comme constant dans chaque sous-domaine. Cette hypothèse est justifiée car d'une part, la taille des sous-structures est très petite, de l'ordre de  $0.1 \text{ mm}$ . Cette taille est de l'ordre de grandeur de la taille d'un élément utilisé dans les maillages appliqués au mésomodèle classique. D'autre part, les dégradations prises en compte ici resteront à des niveaux assez faibles, si bien que les variations d'endommagement diffus seront assez douces sur la géométrie. Lorsque les dégradations deviennent importantes, ce n'est plus la partie continue du modèle qui est mise en jeu, mais sa partie discrète à travers la rupture des surfaces minimales de rupture.

### 1.2.1 Calcul local de l'endommagement

Après chaque calcul élastique global, des calculs locaux par sous-structure sont effectués afin de déterminer l'évolution des endommagements. A cette étape, on se place à déplacement imposé. Un algorithme de point fixe est utilisé pour calculer l'endommagement. Un critère d'arrêt  $\eta_c$  portant sur la stagnation de l'endommagement est utilisé pour stopper les itérations. Cette méthode est formalisée par l'algorithme 3.

Cette opération réalisée pour chaque sous-structure représente la partie locale de l'algorithme itératif global. La problématique est maintenant de déterminer comment modifier les opérateurs éléments finis afin de prendre en compte cet endommagement dans les étapes linéaires 1 et 2 faisant intervenir l'opérateur éléments finis  $\mathbf{K}_{ef}$  dépendant de l'endommagement. Pour les deux étapes linéaires, le problème à résoudre est du type :

**Algorithme 3** Boucle locale d'endommagement dans une sous-structure  $\Omega_E$ 

**Initialisation :** Calcul de la déformation imposée  $\epsilon_i = \frac{1}{2}(\text{grad}(U_i) + \text{grad}^t(U_i)), k = 0$

**Itérations :**

**boucle** tant que  $\eta > \eta_c$

• itération  $k=k+1$

**faire**

1. Calcul de la force d'endommagement mixte  $\tilde{Y}$  :
  - Calcul des composantes de la contrainte  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma = \mathbf{K}(\tilde{d}_{k-1}, \tilde{d}'_{k-1})\epsilon$
  - Calcul des composantes de la contrainte moyenne  $\sigma_{ij}^{\Omega_E} = \langle\langle \sigma_{ij} \rangle\rangle_{\Omega_E}$
  - Calcul des forces d'endommagement  $Y_{\tilde{d}}$  et  $Y_{\tilde{d}'}$
  - Calcul de la force d'endommagement mixte  $\tilde{Y} = Y_{\tilde{d}} + b_2 Y_{\tilde{d}'}$
2. Calcul des variables d'endommagement :
  - Utilisation de la loi d'évolution :  $\tilde{d}_k = f(\tilde{Y})$
  - Couplage des endommagements :  $\tilde{d}'_k = b_3 \tilde{d}_k$
3. Calcul d'erreur  $\eta = \frac{|\tilde{d}_k - \tilde{d}_{k+1}|}{d_{k-1}}$

**fin boucle**

*Trouver le vecteur  $U_{ef}$  tel que*

$$\mathbf{K}_{ef}(\tilde{d}, \tilde{d}')U_{ef} = F_{ef} \quad (3.11)$$

où  $F_{ef}$  est le second membre éléments finis, connu et indépendant de l'endommagement. La méthode de résolution directe consisterait à calculer l'opérateur  $\mathbf{K}_{ef}$ , qui sera ensuite factorisé (ou inversé) pour trouver la solution  $U_{ef}$ . Cela est impossible, car comme il est rappelé au chapitre précédent, les sous-structures pointent vers des opérateurs éléments finis communs à un ensemble de sous-structures. Or l'endommagement peut être différent d'une sous-structure à l'autre. De plus, la factorisation de l'opérateur associé est assez longue, si bien que répétée pour des centaines de milliers de sous-structures, cette opération ferait exploser le temps de calcul. Deux idées sont proposées pour actualiser l'opérateur : l'utilisation d'un algorithme de type gradient conjugué ne nécessitant pas le calcul d'un opérateur factorisé à chaque itération, ou bien une stratégie approchée baptisée "interpolation de la solution".

### 1.2.2 Résolution par gradient conjugué

La stratégie du gradient conjugué permet de calculer la solution à un problème du type équation 3.11 sans déterminer d'inverse ou de factorisation de la matrice éléments finis  $\mathbf{K}_{ef}$ . Cependant, pour avoir une convergence convenable il convient de préconditionner correctement cet algorithme. Sachant que dans le cas de l'endommagement diffus dont il est question ici, les niveaux d'endommagement atteints resteront assez faibles, la

factorisation de la matrice initiale  $\mathbf{K}_{ef}^0 = \mathbf{K}_{ef}(\tilde{d} = 0, \tilde{d}' = 0)$  peut faire office de préconditionneur. En effet, cette matrice correspond au cas sain, linéaire élastique, et est donc déjà incluse dans l'implémentation. Il ne reste donc plus qu'à construire la matrice éléments finis  $\mathbf{K}_{ef}(\tilde{d}, \tilde{d}')$ , sans la factoriser, et à appliquer l'algorithme du gradient conjugué, formalisé par l'algorithme 4. Cet algorithme permet donc de résoudre les étapes linéaires 1 et 2.

---

**Algorithme 4** Boucle de résolution des étapes linéaires par Gradient Conjugué, à endommagement fixé

---

**Initialisation**,  $k = 0$  :

- solution  $U_0$
- résidu  $r_0 = F_{ef} - \mathbf{K}_{ef}(\tilde{d}, \tilde{d}')U_0$
- direction  $d_0 = \{\mathbf{K}_{ef}^0\}^{-1}r_0$

**Itérations** :

**boucle** tant que  $\eta > \eta_c$

- itération  $k=k+1$

**faire**

- actualisation de l'amplitude  $\alpha_{k-1} = \frac{r_{k-1}^t \{\mathbf{K}_{ef}^0\}^{-1} r_{k-1}}{d_{k-1}^t \mathbf{K}_{ef}(\tilde{d}, \tilde{d}') d_{k-1}}$
- actualisation de la solution  $U_k = U_{k-1} + \alpha_{k-1} d_{k-1}$
- actualisation du résidu  $r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} d_{k-1}$
- actualisation de la constante de Gram-Schmidt  $\beta_k = \frac{r_k^t \{\mathbf{K}_{ef}^0\}^{-1} r_k}{r_{k-1}^t \{\mathbf{K}_{ef}^0\}^{-1} r_{k-1}}$
- actualisation de la direction  $d_k = \{\mathbf{K}_{ef}^0\}^{-1} r_k + \beta_k d_{k-1}$
- calcul erreur  $\eta = f(r_k)$

**fin boucle**

---

La figure 3.4 montre la différence de temps CPU pour une itération LaTIn entre la version avec gradient conjugué et la version directe (qui ne prend pas en compte l'endommagement). Dans ce cas, environ trois à quatre itérations du gradient conjugué sont nécessaires. On remarque que le temps de calcul explose, ce qui remet en cause l'utilisation de cette méthode dans ce cas. En effet, bien que quasi-exacte (en choisissant un critère d'arrêt suffisamment pertinent), la méthode du gradient conjugué demande à chaque itération LaTIn la construction de l'opérateur actualisé  $\mathbf{K}_{ef}(\tilde{d}, \tilde{d}')$ , et un certain nombre d'itérations pour converger. Répétée pour un nombre important de sous-structures (plusieurs centaines de milliers), cette stratégie s'avère donc très chronophage. Un des objectifs étant de limiter au maximum le temps de calcul, une méthode approchée mais beaucoup plus rapide est proposée dans le paragraphe suivant.

### 1.2.3 Interpolation de la solution

Pour simplifier, plaçons nous dans le cas où il n'existe qu'une seule variable d'endommagement  $\tilde{d}$  de sorte que la matrice éléments finis  $\mathbf{K}_{ef}(\tilde{d})$  ne dépende que de cette va-

riable. Dans la phase de construction des opérateurs, la factorisation numérique de  $\mathbf{K}_{ef}(\tilde{d})$  est effectuée pour un nombre fini  $n_f$  de valeurs de  $\tilde{d}$ . Par exemple pour des endommagements de 0, 0.25 et 0.5. On obtient ainsi un nombre fini de factorisations (ou inversions), dont la  $i^{eme}$  est notée  $\mathbf{K}_i^{-1}$ . Le second membre  $F_{ef}$  étant connu, on peut définir  $n_f$  solutions  $U_{ef}^i, i \in [1; n_f]$  associées à chaque valeur d'endommagement  $\tilde{d}_i$  telles que

$$\mathbf{K}_{ef}(\tilde{d}_i)U_{ef}^i = F_{ef} \quad (3.12)$$

On approche alors la solution  $U_{ef}^a$  au problème 3.11 pour un endommagement donné  $\tilde{d}_a$  à l'aide d'une interpolation se basant sur les solutions discrètes  $U_{ef}^i$  de sorte que

$$U_{ef}^a = f(\tilde{d}_a, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_{n_f}, U_{ef}^1, U_{ef}^2, \dots, U_{ef}^{n_f}) \quad (3.13)$$

Le choix de  $f$  s'est porté sur une simple interpolation linéaire, si bien que, si  $\tilde{d}_k \leq \tilde{d}_a \leq \tilde{d}_{k+1}$ , on peut exprimer la solution approchée par :

$$U_{ef}^a = U_{ef}^{k+1} - \frac{(\tilde{d}_{k+1} - \tilde{d}_a)}{(\tilde{d}_{k+1} - \tilde{d}_k)} (U_{ef}^{k+1} - U_{ef}^k); \quad (3.14)$$

ce qui peut se représenter graphiquement par la figure 3.2. La figure 3.3 montre la réponse contrainte/déformation d'un pli à  $90^\circ$ , en fonction du nombre  $n_f$ , en imposant à chaque pas de temps, un nombre d'itérations LaTIn égal au nombre constaté dans le cas parfait (gradient conjugué fortement convergé). Naturellement, plus  $n_f$  augmente plus l'interpolation sera précise donc proche de la solution de référence. On remarque que dès que  $n_f$  est supérieur à 2, il devient difficile de distinguer la solution approchée de la solution de référence. D'autre part, la figure 3.4 montre clairement un gain de temps important par rapport à la méthode utilisant le gradient conjugué. La figure montre uniquement la durée d'une itération LaTIn, mais d'une méthode à l'autre, le nombre d'itérations LaTIn étant constant, le temps global varie dans les mêmes proportions. C'est donc vers la technique d'interpolation que nous nous sommes tournés. En pratique, dans les exemples numériques proposés par la suite,  $n_f$  sera pris égal à 3. On extrapolera cette méthode aux cas où  $\mathbf{K}_{ef}$  dépend de plusieurs variables d'endommagement.

### ■ Bilan

D'un point de vue global, l'endommagement a donc été implémenté à l'aide d'un algorithme de type Newton-Raphson sécant, semblable à une méthode de point fixe. Cet algorithme itératif est formalisé par l'algorithme 5, et schématisé figure 3.5. Le critère d'arrêt des itérations est un critère de stagnation portant sur l'endommagement, prenant en compte la plus grande variation d'endommagement existant sur les sous-domaines.

## 1.3 Implémentation des anélasticités

La viscosité et la plasticité ont été implémentées sur la base d'un algorithme de point fixe. Si l'on repart de la formulation variationnelle (sans prendre en compte le côté ther-

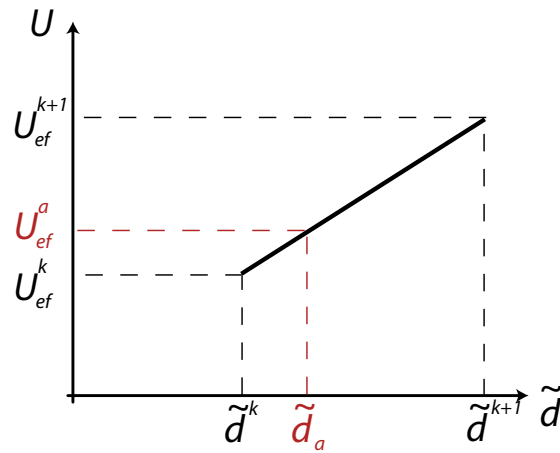


FIG. 3.2: Schématisation de la technique d'interpolation.

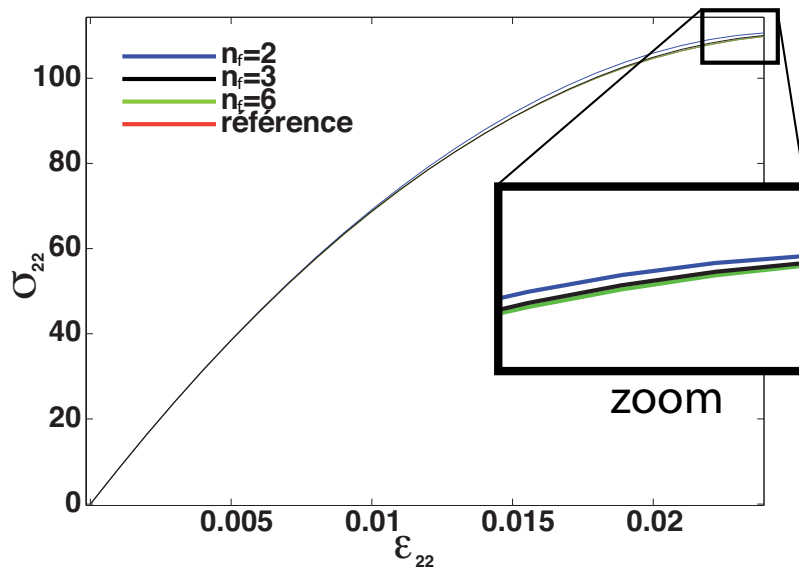


FIG. 3.3: Réponse transverse d'un pli unidirectionnel 90°, pour différents cas d'interpolation, en fixant le nombre d'itération LaTIn. La courbe rouge (référence) est cachée sous la courbe verte.

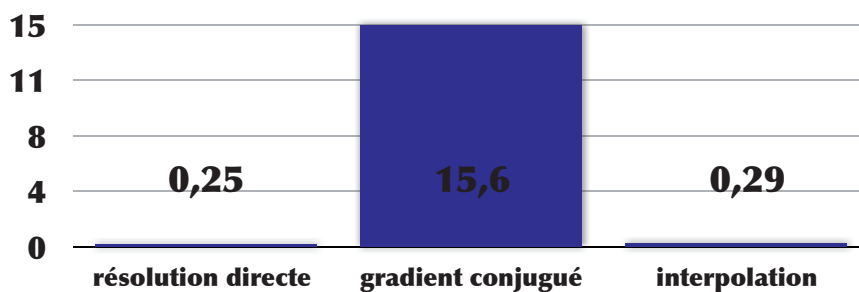


FIG. 3.4: Temps CPU d'une itération LaTIn suivant la méthode, pour un endommagement d'environ 0.2.



**Algorithme 5** Boucle globale pour calcul endommagement**Prétraitement (avant le premier pas de temps) :**

- Calcul des  $\mathbf{K}_i^{-1}$ ,  $i \in [1; n_f]$ , pour  $n_f$  valeurs de  $\tilde{d}$
- $\tilde{d}^0 = 0, \tilde{d}'^0 = 0$

**boucle** pas de temps T **faire****Initialisation :** Calcul élastique LaTIn, à  $\tilde{d}_0 = \tilde{d}^{T-1}, \tilde{d}'_0 = \tilde{d}'^{T-1}, k = 0$ **Itérations :****boucle** tant que  $\eta > \eta_c$ 

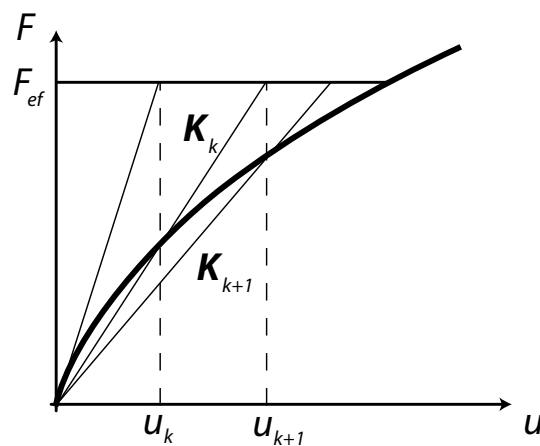
- itération  $k=k+1$

**faire**

1. Actualisation des variables d'endommagement  $\tilde{d}_k, \tilde{d}'_k$ 
  - boucle locale sur chaque sous-structure, algorithme 3
2. Calcul élastique LaTIn :
  - Interpolation de la solution (équation 3.14) pour les étapes linéaires 1 et 2
3. Calcul d'erreur  $\eta = \max_{\text{sous-domaines}} \left\{ \frac{|\tilde{d}_k - \tilde{d}_{k+1}|}{d_{k+1}} \right\}$

**fin boucle**

- $\tilde{d}^T = \tilde{d}_k, \tilde{d}'^T = \tilde{d}'_k$

**fin boucle****FIG. 3.5:** Illustration de la méthode de Newton sécant de calcul de l'endommagement

mique), on peut écrire :

$$\int_{\Omega} Tr[\mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^v)\boldsymbol{\varepsilon}^*] d\Omega = \int_{\partial\Omega} f_d \boldsymbol{\varepsilon}^* dS \quad (3.15)$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$\int_{\Omega} Tr[\mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}^*] d\Omega = \int_{\partial\Omega} f_d \boldsymbol{\varepsilon}^* dS + \int_{\Omega} Tr[\mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^v)\boldsymbol{\varepsilon}^*] d\Omega \quad (3.16)$$

De fait, du point de vue éléments finis, la présence des déformations plastiques et visqueuses peut se voir comme une précharge  $F_{ef}^p$  appliquée au problème linéaire élastique correspondant, ce qui peut s'écrire

$$\mathbf{K}_{ef} U_{ef} = F_{ef} + F_{ef}^p(U_{ef}) \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{K}_{ef}$  est fixe. De cette manière, à chaque itération de la méthode du point fixe, seul le second membre doit être actualisé, menant à la relation de récurrence suivante :

$$U_{ef}^{k+1} = \{\mathbf{K}_{ef}\}^{-1} \left( F_{ef} + F_{ef}^p(U^k) \right) \quad (3.18)$$

De la même manière que pour l'endommagement pris constant par sous-structure, les déformations plastiques et visqueuses seront considérées comme constantes par volume élémentaire de matériau fibre-matrice. Contrairement à la viscosité qui est explicitement calculée en fonction de l'histoire de la contrainte, la plasticité nécessite une boucle itérative locale.

■ **Etape locale de viscosité** : La viscosité se calcule simplement sur la base de la formule 3.16, en prenant les moyennes des contraintes, de sorte que sur un sous-domaine  $\Omega_E$ , la déformation visqueuse transverse s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{22}^v(t) = \int_0^t \Delta D_{22}(\Psi(t) - \Psi(\tau)) \frac{\partial \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\Omega_E}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.19)$$

■ **Etape locale de plasticité** : La correction plastique se fait en procédant à un retour sur le convexe d'élasticité à déplacement imposé i.e :

trouver  $\Delta f$  tel que

$$f + \Delta f = 0 \quad (3.20)$$

Cela se produit lorsqu'après un calcul élastique *via* une prédiction élastique LaTIn, le convexe d'élasticité  $f$  dépasse 0. Cela oblige à effectuer le calcul du multiplicateur plastique, en partant de la position élastique/viscoélastique virtuelle calculée précédemment. On considère alors que seules les déformations élastiques et plastiques vont être corrigées afin de revenir au bord du domaine élastique.

L'expression de  $\Delta f$  est la suivante :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \partial R$$

à partir de l'expression 1.37, on tire :

$$\frac{\partial f}{\partial R} \partial R = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial p} \partial p = -R'(p) \partial p$$

d'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{\sigma}^t H^t}{\sqrt{\tilde{\sigma}^t H^t \tilde{\sigma}}} \quad (3.21)$$

d'où l'expression de  $\Delta f$  :

$$\Delta f = \frac{\tilde{\sigma}^t H^t}{\sqrt{\tilde{\sigma}^t H^t \tilde{\sigma}}} - R'(p) \partial p \quad (3.22)$$

La correction plastique se faisant à déplacement imposé, la déformation totale  $\epsilon$  est également imposée, de sorte que

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_p + \Delta \epsilon_e = 0$$

sans prendre en compte la partie visqueuse. En exprimant la contrainte effective à partir de la déformation élastique  $\Delta \tilde{\sigma} = OK \Delta \epsilon_e$  on obtient alors

$$\partial \tilde{\sigma} = -OK \Delta \epsilon_p = -OK \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}$$

et donc, en réutilisant l'expression 3.21, et en l'intégrant dans 3.22, on obtient

$$\Delta f = \Delta \lambda \left( -OK \frac{\tilde{\sigma}^t H^t}{\sqrt{\tilde{\sigma}^t H^t \tilde{\sigma}}} - R'(p) \right)$$

Finalement, l'équation de départ 3.20 peut s'écrire

$$f - \Delta \lambda \left( OK \frac{\tilde{\sigma}^t H^t}{\sqrt{\tilde{\sigma}^t H^t \tilde{\sigma}}} + R'(p) \right) = 0 \quad (3.23)$$

ce qui nous donne l'expression du multiplicateur plastique

$$\Delta \lambda = \frac{f(\tilde{\sigma}, p)}{\left( OK \frac{\tilde{\sigma}^t H^t}{\sqrt{\tilde{\sigma}^t H^t \tilde{\sigma}}} + R'(p) \right)} \quad (3.24)$$

Cette relation permet de déterminer l'évolution de la variable plastique  $p$ , de  $R(p)$  et de la déformation plastique  $\epsilon_p$ . En restant à déplacement imposé, on peut alors calculer de nouveau le convexe d'élasticité et effectuer la même étape si ce dernier est supérieur à 0. La boucle locale est illustrée par l'algorithme 6

■ **Bilan** Les deux étapes locales de viscosité et plasticité s'intègrent dans une boucle globale, basée sur un algorithme de point fixe, indépendant de l'endommagement. Cette étape se formalise à l'aide de l'algorithme 7. Le critère d'arrêt est un critère en stagnation des déformations visqueuses et plastiques.

**Algorithme 6** Boucle locale de plasticité**Initialisation :** Calcul du convexe d'élasticité  $f(\tilde{\sigma}_0, R(p_0))$ ,  $k = 0$ **Itérations :****boucle** tant que  $f(\tilde{\sigma}_k, R(p_k)) > \eta_c$ • itération  $k=k+1$ **faire**

1. Calcul du multiplicateur plastique  $\lambda$   
• utilisation de l'équation 3.24
2. Calcul de la déformation plastique  $\epsilon_p$
3. Calcul du convexe d'élasticité  $f(\tilde{\sigma}_k, R(p_k))$

**fin boucle****Algorithme 7** Boucle globale viscoélastique plastique**Initialisation :** Prédiction élastique LaTIn, à  $\epsilon_p = \epsilon_p^0$ ,  $\epsilon_v = \epsilon_v^0$ ,  $k = 0$ **Itérations :****boucle** tant que  $\eta > \eta_c$ • itération  $k=k+1$ **faire**

1. Etape locale de viscoélasticité donnant  $\epsilon_v^k$
2. Etape locale de plasticité donnant  $\epsilon_p^k$   
• retour sur le convexe d'élasticité, algorithme 6
3. Calcul élastique LaTIn :  
• actualisation du seconde membre  
• stratégie itérative LaTIn
4. Critère de stagnation  $\eta = \max_{\text{sous-domaines}} \left\{ \frac{|\epsilon_p^k - \epsilon_p^{k+1}|}{\epsilon_p^{k+1}}, \frac{|\epsilon_v^k - \epsilon_v^{k+1}|}{\epsilon_v^{k+1}} \right\}$

**fin boucle**

## 1.4 Prise en compte de la rupture sens fibre

La prise en compte numérique de la rupture dans le sens des fibres se fait dans l'étape locale d'endommagement car ce calcul du critère nécessite les forces d'endommagement, déjà introduites en partie dans cette étape. L'évolution de la rupture sens fibre est à l'image de la propagation des fissures. A chaque pas de temps, un calcul du critère de rupture sens fibre est effectué sur chaque sous-structure. Si le critère est atteint sur une des sous-structures, alors cette dernière est dégradée, c'est à dire que  $d_f$  passe à 1, de même que les variables d'endommagement  $\tilde{d}$  et  $\tilde{d}'$ . Si plusieurs atteignent le critère au même moment, seule la sous-structure dépassant le plus la valeur du critère est dégradée, les autres restant saines. Un nouveau calcul global élastique est alors effectué, en conservant le même chargement extérieur, après quoi la rupture est de nouveau recherchée. Cette stratégie est formalisée dans l'algorithme 8.

---

### Algorithme 8 Boucle globale de calcul de la rupture sens fibre

---

**Initialisation :** Calcul élastique LaTIn,  $k = 0$ ,  $\eta_r = 1$

**Itérations :**

**boucle** tant que  $\eta_r = 1$

• itération  $k=k+1$

**faire**

1. Calcul du critère d'endommagement sur chaque sous-structure
  - calcul des forces d'endommagement,  $Y_{f,c}^T$  en traction,  $Y_{f,c}^C$  et  $Y_{12,c}$  en compression
  - calcul du critère énergétique, relation 1.25 en traction, 1.27 en compression
2. Si critère atteint :
  - Sélection de la sous-structure la plus chargée
  - Dégradation de la sous-structure,  $d_f = \tilde{d} = \tilde{d}' = 1$
  - $\eta_r = 1$
  - Calcul élastique LaTIn
3. Sinon :
  - $\eta_r = 0$

**fin boucle**

---

## 1.5 Bilan sur la stratégie numérique

Les stratégies numériques proposées précédemment ont été implémentées, et associées au sein d'une stratégie globale permettant le calcul des stratifiés, prenant en compte, la viscoélasticité, la plasticité, l'endommagement diffus, la fissuration (microfissuration transverse et délaminage) et la rupture dans le sens des fibres. L'algorithme 9 détaille cette stratégie, en s'appuyant sur toutes les étapes présentées précédemment.

---

**Algorithme 9** Stratégie de calcul visco-élasto-plastique endommageable avec fissuration et rupture sens-fibre.

---

**Initialisation :** Recherche des interfaces potentiellement dégradables,  $k = 0$

**Itérations :**

**boucle** pas de temps  $k + 1$  **faire**

1. Boucle viscoélastique-plastique, à endommagement et fissuration fixés
  - algorithme 7
2. Recherche de fissures à endommagement, à plasticité et viscosité fixées :
  - algorithme 2
3. Boucle endommageante, à plasticité, viscosité et fissuration fixées
  - algorithme endommagement diffus 5
  - algorithme rupture sens-fibre 8

**fin boucle**

---

La stratégie proposée permet d'effectuer un certain nombre de calculs pertinents vis-à-vis du modèle, mais avec les limites numériques évoquées à la fin du chapitre précédent. En effet, l'implémentation du modèle complet n'a rien changé, voire aggravé les problèmes de stockage en mémoire vive et de temps de calcul. La figure 3.6(a) montre la répartition du temps de calcul par étape dans le cas du calcul d'une plaque  $[45_2 / -45_2]_s$  de petite dimension ( $6mm \times 3mm \times 1.2mm$ ) en prenant en compte l'endommagement diffus, et la recherche de fissure. Il est clairement mis en évidence que la recherche de fissure est la phase la plus chronophage de la stratégie, d'autant plus que dans le cas présenté, seul le temps de recherche d'une fissure associé à la propagation d'une seule surface minimale de rupture est pris en compte. Si au cours du pas de temps, plusieurs dizaines voire centaines de surfaces viennent à rompre (ce qui est le cas en réalité), alors il faut multiplier ce temps d'autant. D'autre part, le temps présenté, prend en compte la parallélisation de la recherche de fissure (introduite dans les travaux précédents [Violeau *et al.*, 2009]) sur 10 processeurs.

La figure 3.6(b) montre quant à elle, dans le même cas, la répartition des allocations en mémoire vive. On peut remarquer que le stockage des opérateurs liés au problème macro, ainsi que le stockage des solutions (déplacement, effort) en chaque noeud des sous-structures ou des interfaces, occupent la majeure partie des besoins en mémoire vive. Ces deux constatations, l'une en temps et l'autre en stockage ont conduit à l'optimisation de la stratégie numérique proposée précédemment.

## 2 Accélération de la recherche de fissure

On l'a vu précédemment, la phase de recherche de fissure est la plus longue. Plus la géométrie simulée contiendra de surfaces potentielles de rupture, plus cette phase sera longue. Afin de palier à ce problème, il a été proposé précédemment de faire appel au

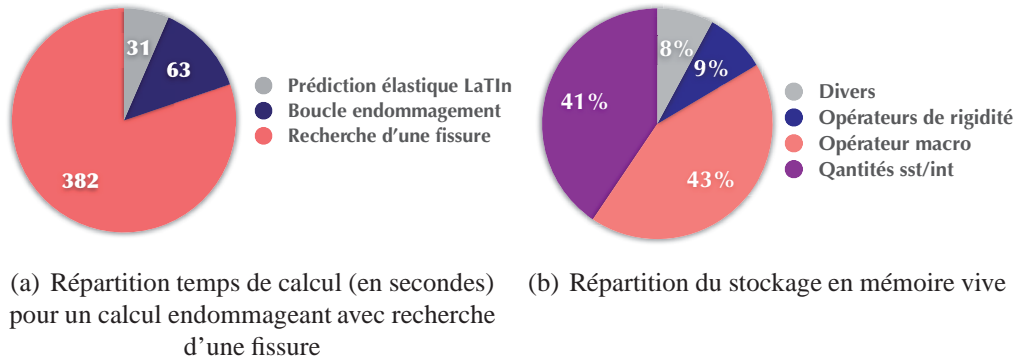


FIG. 3.6: Les limites de la stratégie

concept de "handbooks". Après un rappel de cette technique et des limites qu'elle impose, on se propose de définir un critère de pré-sélection des fissures.

## 2.1 Les limites de l'utilisation des handbooks

Le principe des "handbooks" est de réutiliser des résultats déjà obtenus. Une analyse des zones dégradées montre que des configurations identiques peuvent apparaître dans différentes zones de la géométrie, et à différents moments du chargement. L'idée est donc de réutiliser les résultats déjà obtenus pour l'analyse de la fissuration d'une situation qui était similaire. Lorsqu'une interface potentielle de rupture est testée, une analyse de la configuration est effectuée (présence de fissures voisines, conditions limites ...). Si la configuration est nouvelle, alors le calcul localisé des taux de restitution d'énergie est effectué classiquement, et la configuration est sauvegardée comme une "configuration de référence". Si en revanche la configuration a déjà été enregistrée, alors aucun calcul localisé n'est effectué, mais les taux de restitution  $\Delta G^i$  pour chaque mode  $i$  de rupture sont déduits des taux de restitution  $\Delta G_r^i$  de la configuration de référence par

$$\Delta G^i = \Delta G_r^i \frac{(\underline{\sigma}_n \cdot \underline{x}_i)^2}{(\underline{\sigma}_r \cdot \underline{x}_i)^2} \quad (3.25)$$

où  $(\underline{\sigma}_n \cdot \underline{x}_i)$  est l'effort normal moyenné sur la surface et projeté selon la direction associée au mode  $i$ , et  $(\underline{\sigma}_r \cdot \underline{x}_i)$  la même quantité pour la configuration de référence. Si la quantité  $\frac{(\underline{\sigma}_n \cdot \underline{x}_i)^2}{(\underline{\sigma}_r \cdot \underline{x}_i)^2}$  est trop éloignée de 1, alors la configuration est considérée comme nouvelle.

Le problème de cette stratégie est qu'elle ne permet pas d'obtenir des résultats suffisamment optimaux. D'une part, les temps de calcul ne sont pas réduits de manière très importante. En effet, lorsqu'un grand nombre d'interfaces est introduit, deux configurations identiques seront rarement rencontrées. Il existera toujours des interfaces fissurées légèrement différemment. D'autre part, des tests de comparaison effectués entre cette vision "handbooks" et le calcul complet de chaque configuration sans sauvegarde a montré des différences notables sur le réseau de fissuration et le niveau d'apparition des fissures. C'est pourquoi une autre méthode est proposée dans le paragraphe suivant.

## 2.2 La présélection des fissures potentielles

La stratégie consiste à présélectionner de manière pertinente un certain nombre de surfaces minimales de rupture avant d'effectuer les calculs locaux. L'idée fondamentale est de considérer qu'il ne sert à rien de tester des surfaces trop peu chargées. Pour cela, un critère en contrainte est proposé. À l'aide de ce critère, une sélection des interfaces les plus chargées sera effectuée, après quoi, seules les surfaces sélectionnées seront testées à la fissuration *via* les calculs locaux. Le critère proposé doit prendre en compte deux caractéristiques très importantes :

- l'effet d'épaisseur
- la variabilité des taux de restitution d'énergie critiques.

Pour cela, un critère énergétique exprimé en contrainte, et prenant en compte les taux de restitution d'énergie modifiés, si bien que pour l'interface  $j$ , le critère de sélection s'écrit

$$\Psi_j = \frac{\langle\langle \sigma_1 \rangle\rangle_j^2}{E_2 G_{j,c}^{I,m}} + \frac{\langle\langle \sigma_2 \rangle\rangle_j^2}{G_{12} G_{j,c}^{II,m}} + \frac{\langle\langle \sigma_3 \rangle\rangle_j^2}{G_{23} G_{j,c}^{III,m}} \quad (3.26)$$

où  $\langle\langle X \rangle\rangle_j$  correspond à la moyenne de la quantité  $X$  sur l'interface et  $\sigma_i$  à la contrainte interfaciale projetée sur la direction associée au mode de fissuration  $i$ . Les quantités  $G_c^{i,m}$  correspondent au taux de restitution d'énergie critique modifiés définis de la manière suivante :

### □ Dans le cas de la microfissuration transverse

- initiation :

$$G_{j,c}^{i,m} = \max \left\{ \frac{h}{h_c} G_{j,c}^{i,pli}, G_{j,c}^{i,pli} \right\} \quad (3.27)$$

- propagation :

$$G_{j,c}^{i,m} = G_{j,c}^{i,pli} \quad (3.28)$$

### □ Dans le cas du délaminage

$$G_{j,c}^{i,m} = G_{j,c}^{i,int} \quad (3.29)$$

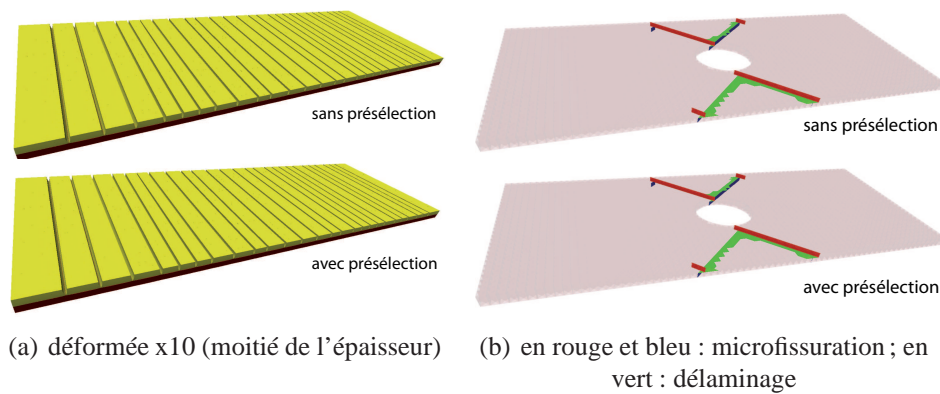
où  $G_{j,c}^{i,pli}$  (respectivement  $G_{j,c}^{i,int}$ ) est le taux de restitution d'énergie critique associé à la microfissuration transverse (respectivement au délaminage) de l'interface  $j$ .

Ainsi, le critère proposé permet de prendre en compte à la fois la variabilité introduite sur les taux de restitution d'énergie critique et l'effet d'épaisseur à l'initiation. Les  $n_p$  interfaces de microfissuration transverse et les  $n_p$  interfaces de délaminage les plus chargées sont donc sélectionnées à partir des valeurs de  $\Psi_j$ . Ensuite, les calculs locaux sont réalisés classiquement pour déterminer les taux de restitution d'énergie associés à chacune de ces interfaces, à partir desquels la sélection de l'interface à fissurer (si elle existe) est faite.

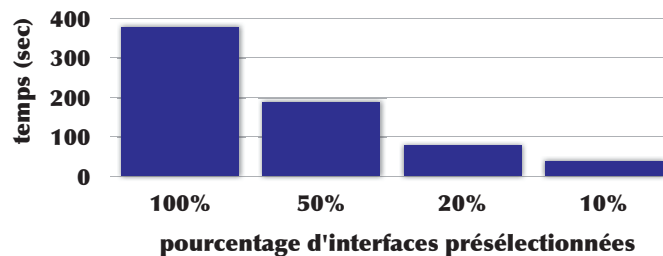
■ **Validation** : Les résultats obtenus avec ce critère de présélection sont identiques à ceux obtenus sans présélection. La figure 3.7(a) montre le réseau de fissures obtenu



avec et sans présélection dans le cas d'une plaque  $[0_2/90_2]_s$  en traction. La figure 3.7(b) montre la même comparaison dans le cas d'une plaque  $[45_2/-45_2]_s$  trouée en traction. Dans ces cas, environ 5% des interfaces minimales de rupture sont sélectionnées. Que se soit pour la microfissuration où le délaminage, la présélection aboutit à des résultats très satisfaisants. Les réseaux de fissures obtenus avec et sans présélection sont parfaitement identiques, la succession de ruptures des surfaces minimales est rigoureusement la même. La figure 3.8 permet de mesurer le gain de temps important généré par cette technique. Le speedup est quasiment parfait, c'est à dire que si par exemple seules 20% des interfaces les plus chargées sont présélectionnées, alors le temps de calcul est divisé par 5. La valeur de  $n_p$  retenue pour les calculs présentés dans les paragraphes suivants est de l'ordre de grandeur de quelques dizaines. Pour les cas de taille importante, cela correspondra environ au nombre de processeurs utilisés dans la stratégie parallélisée (voir paragraphe suivant). En pratique, cela correspondra à sélectionner les 3% ou 4% d'interfaces les plus chargées.



**FIG. 3.7:** Comparaison du réseau de fissures, avec et sans présélection des interfaces minimales de ruptures. cas d'un  $[0_2/90_2]_s$  à gauche, et d'une plaque  $[45_2/-45_2]_s$  trouée à droite



**FIG. 3.8:** Evolution du temps de recherche d'une fissure en fonction du pourcentage d'interfaces présélectionnées.

## 3 Parallélisation

L'autre limitation importante posée par la stratégie proposée est le besoin important en mémoire vive pour le stockage des opérateurs. Ce problème revient en définitive à un problème de temps. En effet, si la mémoire vive de l'ordinateur est dépassée, l'ordinateur va "swapper", c'est à dire stocker les différents éléments nécessaires au fonctionnement du programme non plus dans la mémoire vive, facilement accessible, mais dans le disque dur. Cela a pour conséquence d'allonger les temps de transfert de données, et donc de ralentir l'exécution du programme dans des proportions très importantes. Il est donc indispensable de ne pas "swapper". Pour cela, comme on l'a vu figure 3.6(b), il faut jouer sur le stockage des quantités par sous-structure et interface, ainsi que sur la taille des opérateurs nécessaires au problème macro, afin de diminuer au maximum les besoins d'allocation.

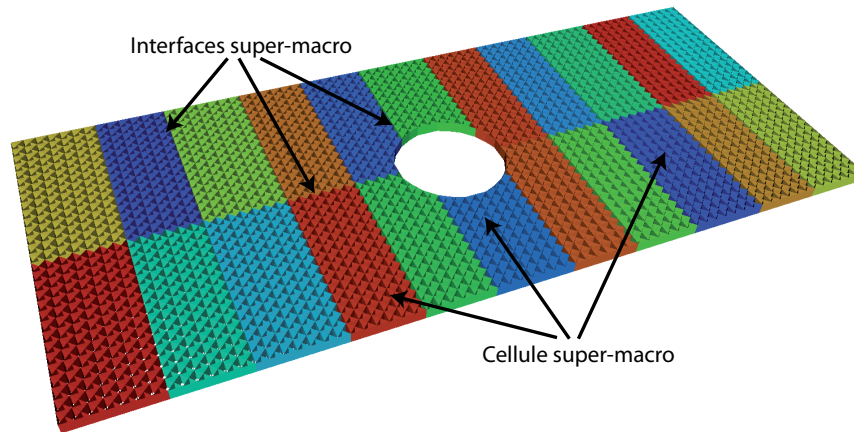
### 3.1 Parallélisation des opérations locales

Jusqu'à présent, seule la recherche de fissure était parallélisée. De sorte, lorsque  $N_p$  processeurs sont utilisés, la stratégie LaTIn est lancée simultanément  $N_p$  fois, ce qui veut dire que le même calcul est reproduit  $N_p$  fois à l'identique. Lorsque la phase de recherche de fissure arrive, les calculs locaux sont en revanche répartis sur les différents processeurs. Il est donc évident qu'un temps considérable est perdu lors des étapes de la stratégie LaTIn. La première étape de la parallélisation est la plus naturelle, c'est à dire la parallélisation de toute les étapes de la stratégie numérique qui sont locales. Toutes ces étapes peuvent être réalisées sur des processeurs distincts sans aucun problème fondamental.

#### ■ Mise en donnée

La première phase est d'attribuer à chaque processeur un certain nombre de sous-structures et d'interfaces. Pour cela, différentes techniques sont possibles. Dans ses travaux, A. Caignot [Neron *et al.*, 2008] utilise les bibliothèques METIS, qui permettent très facilement de répartir les différentes entités sur différents processeurs. Cette technique est particulièrement intéressante dans le cas de géométries complexes. Ici, tous les cas traités seront des cas de plaques, simples ou trouées. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser de technique sophistiquée de partitionnement. Ce dernier sera réalisé de manière simple sous la forme d'un quadrillage de la géométrie, comme on peut le voir figure 3.9. Chaque regroupement de sous-structures et interfaces sera appelé cellule super-macro, dont les bords sont des interfaces super-macro.

Ainsi, chaque interface ou sous-structure est affectée à un processeur particulier, qui se chargera d'effectuer toute les opérations locales de cette entité. De ce fait, le temps de calcul va être très fortement réduit. Si  $N_p$  processeurs sont utilisés, le temps de calcul devrait aussi approximativement être divisé par  $N_p$ . Des temps supplémentaires sont à prévoir pour les transferts de données. Les étapes de la stratégie parallélisables de cette manière sont :



**FIG. 3.9:** Un exemple de répartition des interfaces sur les différents processeurs

- Etapes linéaires 1 et 2 de la stratégie LaTin
- Etape locale de la stratégie LaTin
- Calcul d'erreur de la stratégie LaTin
- Etape locale d'endommagement
- Etape locale de corrections anélastiques (plasticité et viscosité)

L'étape de recherche de fissures  $a$ , quant à elle, déjà été parallélisée dans des travaux précédents.

Un deuxième point fondamental est la partition du stockage des quantités solutions. Ces quantités sont les déplacements aux noeuds pour les sous-structures, les déplacements et les efforts des interfaces. En effet, si les étapes locales sont faites en parallèle, ces quantités n'ont pas besoin d'être stockées sur tous les processeurs. En conséquence, l'ensemble des quantités associées à une interface ou une sous-structure sera uniquement associé au processeur correspondant. De la même manière que pour le temps de calcul, si  $N_p$  processeurs sont utilisés, le stockage des quantités solutions devrait lui aussi être divisé par  $N_p$ .

● **Remarque** : Il n'est pas question ici de paralléliser le stockage des opérateurs éléments finis par sous-structure. En effet, comme cela a été indiqué précédemment, chaque sous-structure pointe vers un opérateur de référence. En première approche, on peut supposer que dans chaque regroupement de sous-structures par processeur, tous les opérateurs de référence seront nécessaires. De plus, le nombre d'opérateurs de référence étant très réduit, il est tout à fait raisonnable de tous les stocker sur chaque processeur.

### ■ Transfert de données

Cette répartition des calculs et quantités solutions est couplée à un protocole de transfert de données appelé *MPI* pour " *Message Passing Interface* ". En effet, une fois les étapes locales effectuées, un certain nombre de données doivent être échangées entre les différents processeurs. Pour cela, le protocole *MPI* qui se présente sous la forme de

librairies C++ dispose d'un certain nombre d'outils destinés justement à transférer des informations (scalaires, vecteurs...) entre les processeurs. Par exemple, lors du calcul d'erreur de la stratégie LaTIn, la contribution de chaque sous-structure à l'erreur peut-être déterminée indépendamment d'une sous-structure à l'autre, mais l'erreur globale doit bien être calculée, ce qui oblige au moins un processeur à collecter les données de tous les autres. Un autre exemple est l'étape linéaire 1 où 2 (voir équations 2.49 et 2.50). Pour chaque sous-structure, le second membre prend en compte les quantités de toutes les interfaces adjacentes. De fait, si la sous-structure et l'une de ses interfaces appartiennent à deux processeurs différents, il faudra forcément transférer les quantités nécessaires d'un processeur à l'autre.

• **Remarque sur la recherche de fissure** : Répartir les quantités solutions sur les différents processeurs va avoir un effet sur la stratégie de la recherche de fissures. Jusqu'à présent (avec uniquement l'étape de recherche de fissures parallélisée), tous les processeurs effectuaient tous les calculs, si bien que les quantités nécessaires aux calculs locaux étaient disponibles pour chacun d'eux. La conséquence de la parallélisation proposée est que chaque processeur n'a plus forcément directement accès aux quantités dont il a besoin pour effectuer les calculs locaux. Une phase de vérification et de transfert de quantités (si besoin) est donc indispensable préalablement aux calculs locaux. Durant cette phase, une stratégie visant à équilibrer à la fois la quantité de données transférées et le nombre de calculs locaux à effectuer a été instaurée.

### ■ Bilan

La figure 3.10 montre l'évolution de la mémoire allouée pour stocker les quantités solutions en fonction du nombre de processeurs. Le gain est très proche du gain idéal (évolution en  $\frac{1}{N_p}$ ). Ce résultat est parfaitement naturel, vu que le stockage en parallèle de ces quantités ne demande l'introduction d'aucun opérateur supplémentaire. Les temps de

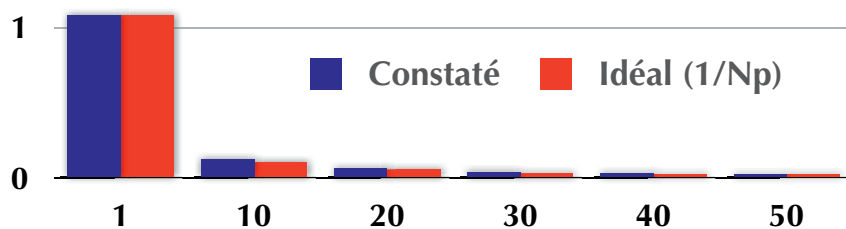


FIG. 3.10: Evolution de la mémoire allouée (en Go) pour le stockage des quantités solutions par sous-structure et interface.

transfert restent quant à eux très raisonnables, comme le montre la figure 3.11 qui donne l'évolution de la durée de l'étape linéaire, sans prendre en compte le problème macro, en fonction du nombre de processeurs. On remarque que le temps de calcul (temps de transfert inclus) est très proche du temps idéal, ce qui indique une influence très faible des temps de transfert. Ce constat est également fait pour toutes les étapes locales (par sous-structure ou interface) parallélisées

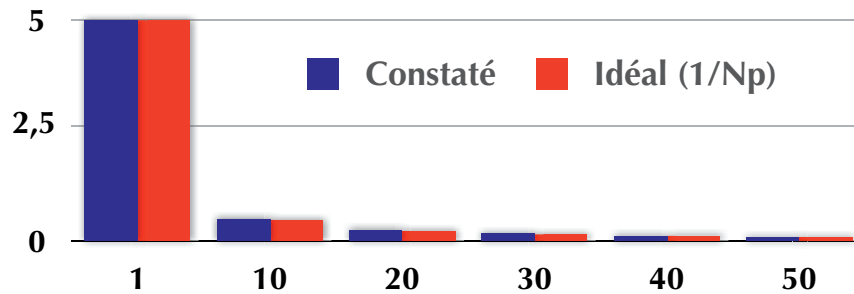


FIG. 3.11: Durée de l'étape linéaire LaTIn (hors macro) en fonction du nombre de processeurs (en secondes)

## 3.2 Partitionnement du problème Macro

Les techniques précédentes ont permis de réduire grandement le temps de calcul (pré-sélection des fissures, parallélisation des étapes locales) et de diminuer les besoins de stockage en mémoire vive (partitionnement des quantités solution). Cependant, on l'a vu, les besoins en mémoire sont aussi en grande partie dus à l'opérateur macro qui est global, et dont la taille dépend directement du nombre d'interfaces minimales de rupture introduites (voir équation (2.54)). Ce problème était jusqu'à maintenant résolu de manière directe, à l'aide d'une factorisation de l'opérateur global associé. Un premier paragraphe rappelle les propositions faites dans les travaux précédents pour gérer ce problème, après quoi, les caractéristiques de la méthode de décomposition de domaine choisie et implémentée seront détaillées.

### 3.2.1 Les premières tentatives

Le problème de la taille de l'opérateur macro a déjà été relevé dans les travaux de D. Violeau [Violeau, 2006], dans le cas particulier des stratifiés. En revanche, les travaux de A. Caignot [Neron *et al.*, 2008], qui utilise la même stratégie LaTIn appliquée aux cas d'assemblages boulonnés avec frottement, indiquent dans ce cas précis que le problème macro reste de taille raisonnable, car un nombre réduit d'interfaces entre sous-structures (qui n'ont aucun lien avec le modèle, contrairement à ce qui nous intéresse) peut être introduit.

#### ■ Echelle super-Macro

La solution proposée dans la thèse précédente consiste à introduire une troisième échelle (la deuxième étant l'échelle macro du problème macro). Pour cela, une approximation du problème macro est faite, en faisant intervenir des inconnues super-macro (déplacements ou efforts). La question est ensuite de savoir comment relier les quantités macro aux quantités super-macro. L'idée est de reprendre le même raisonnement que pour

la construction du problème macro. Pour cela, on définit une cellule super-macro comme le regroupement d'un ensemble des cellules macro (interfaces entre sous-structures). Les bords des ces cellules super-macro constituent des interfaces super-macro. Les déplacements super-macro sont pris semblables aux déplacements macro, donc du type translation et rotation dans les différentes directions. On construit donc, avant tout calcul macro, un opérateur super-macro, de la même manière que ce qui est fait pour le problème macro. Il permet de relier les quantités macro aux quantités super-macro. Le problème de cette méthode est que, pour donner des résultats satisfaisants, le gradient de contrainte doit rester assez faible à l'intérieur d'une cellule super-macro. Or, les dégradations étant évolutives, il serait nécessaire de faire évoluer les cellules super-macro avec la propagation de fissures, ce qui impliquerait à chaque fois de recalculer l'opérateur super-macro.

### ■ Résolution itérative du problème macro

Une autre possibilité pour limiter la taille du problème macro serait d'utiliser une méthode itérative. Un gradient conjugué pourrait par exemple permettre de résoudre ce problème sans factoriser l'opérateur macro. Mais la performance de cette méthode est conditionnée par le choix d'un préconditionneur performant, pas forcément évident à déterminer. Dans [Ladeveze et Nouy, 2003], le problème macro est résolu en appliquant une méthode de décomposition de domaine multiéchelle de type LaTIn, qui ferait naturellement intervenir une troisième échelle super-macro (l'échelle macro du macro). On aurait alors un algorithme LaTIn global, dans lequel serait imbriqué le même algorithme, mais pour la réalisation de l'étape macro. Le problème lié à cette technique serait la difficulté de trouver les directions de recherche d'un problème moins "physique" que le problème de référence.

L'idée proposée ici et inspirée de [Kerfriden *et al.*, 2009], est d'utiliser une méthode de décomposition de domaine primale de type BDD [Mandel, 1993] pour résoudre le problème macro. Le choix de cette stratégie est piloté par sa simplicité de mise en oeuvre, et la possibilité de réaliser facilement la parallélisation de cette méthode, objectif premier de cette l'étude.

### 3.2.2 La méthode BDD pour résoudre le problème macro

Les cinq points présentés ici détaillent l'approche BDD [Mandel, 1993] utilisée en parallèle pour résoudre le problème macro.

### ■ Regroupements en cellules super-macro

L'idée de base de la méthode BDD appliquée à la résolution du problème macro est de regrouper les cellules macro en cellules super-macro. Pour cela, on gardera la même répartition d'interfaces par processeur que ce qui a été fait dans le cas de la parallélisation des étapes locales, figure 3.9. Les interfaces entre ces cellules seront toujours appelées interfaces super-macro.

Le problème macro va donc dans un premier temps être défini par cellule super macro (et non plus sur l'ensemble du domaine) de sorte que le problème macro pour la cellule



super-macro  $E'$  portant sur les inconnus macro  $\underline{\tilde{W}}^{E'}$  peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} M_{ii}^{E'} & M_{ib}^{E'} \\ M_{bi}^{E'} & M_{bb}^{E'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{W}}_i^{E'} \\ \underline{\tilde{W}}_b^{E'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{E'} \\ f_b^{E'} + \lambda_b^{E'} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

où l'indice  $i$  (respectivement  $b$ ) indique les degrés de liberté internes (respectivement d'interfaces super-macro) de la cellule super-macro.  $\lambda_b^{E'}$  est le résidu d'équilibre macroscopique entre sous-structures. L'assemblage de la relation 3.30 sur l'ensemble des cellules super-macro aboutit au problème macro initial non sous-structuré.

### ■ Condensation primale

Sur chaque cellule super-macro, on peut alors définir le complément de Schur primal par

$$S_p^{E'} = M_{bb}^{E'} - M_{bi}^{E'} M_{ii}^{E'}^{-1} M_{ib}^{E'} \quad (3.31)$$

de sorte que

$$S_p^{E'} \underline{\tilde{W}}_b^{E'} = F_p^{E'} + \lambda_b^{E'} \quad (3.32)$$

où  $F_p^{E'}$  est le second membre condensé sur les interfaces sur la super sous-structure, défini par

$$F_p^{E'} = f_b^{E'} - M_{bi}^{E'} \{M_{ii}^{E'}\}^{-1} f_i^{E'} \quad (3.33)$$

La continuité des multiplicateur macro  $\underline{\tilde{W}}_b^{E'}$  aux interfaces super-macro, et l'équilibre des résidus d'équilibre aux interfaces permet d'écrire le problème macro condensé sur les interfaces :

$$S_p \underline{\tilde{W}}_b = F_p \quad (3.34)$$

avec  $S_p$  et  $F_p$  le complément de Schur et le second membre condensé assemblés sur les interfaces super-macro, et  $\underline{\tilde{W}}_b$  le vecteur inconnu constitué de l'ensemble des degrés de liberté de bord.

### ■ Résolution itérative par gradient conjugué préconditionné et projeté

La particularité de la méthode BDD est de résoudre le problème condensé 3.34 à l'aide d'un gradient conjugué préconditionné projeté. Vis-à-vis d'un gradient conjugué pur, le préconditionnement et la projection vont permettre de converger plus rapidement vers la solution, en assurant notamment l'extensibilité de la méthode.

Le préconditionneur  $S_p^{N-1}$  de l'approche BDD est dit de "Neumann-Neumann", c'est à dire que l'opération  $S_p^{N-1} r$  (avec  $r$  le résidu du gradient conjugué) correspond pour chaque cellule super-macro à la résolution d'un problème de Neumann sur chaque cellule super-macro. Le préconditionneur est défini comme étant l'assemblage des pseudo-inverses des cellules super macro :

$$S_p^{N-1} = \sum \mathbf{A}^{E'} K_p^{E'+} \mathbf{A}^{E't} \quad (3.35)$$

où  $K_p^{E'+}$  désigne la pseudo-inverse de de  $S_p^{E'}$ , et  $\mathbf{A}^{E'}$  l'opérateur d'assemblage global, associé à la cellule  $E'$ .

Le préconditionneur étant associé à la résolution d'un problème de Neumann, il convient d'équilibrer les résidus par cellule pour rendre possible la résolution. La relation d'équilibre des résidus s'écrit, sur chaque cellule  $E'$

$$\mathbf{R}^{E't} \mathbf{A}^{E't} r = 0 \quad (3.36)$$

où  $\mathbf{R}^{E'}$  est une base du noyau du complément de Schur primal de la super-sous-structure  $E'$ . Cette relation peut s'écrire de manière assemblée :

$$\mathbf{R}r = 0 \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{R}$  correspond à l'assemblage des  $\mathbf{R}^{E'}$ . Pour traiter cette contrainte, on recherche la solution sous la forme

$$\tilde{\mathbf{W}}_b = \tilde{\mathbf{W}}_{b0} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{W}}_b^* \quad (3.38)$$

où  $\tilde{\mathbf{W}}_{b0}$  est le multiplicateur initial et  $\mathbf{P}$  l'opérateur de projection. On les définit par

$$\tilde{\mathbf{W}}_{b0} = \mathbf{R}(\mathbf{R}^t \mathbf{S}_p \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t F_p \quad (3.39)$$

et

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{R}(\mathbf{R}^t \mathbf{S}_p \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{S}_p \quad (3.40)$$

$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{W}}_b^*$  est le multiplicateur complémentaire, recherché de manière itérative à l'aide du gradient conjugué. D'autre par, l'opérateur  $(\mathbf{R}^t \mathbf{S}_p \mathbf{R})$  correspond en fait à un problème grossier du problème condensé initial. Il est donc global, mais porte uniquement sur les mouvement de corps rigides de chaque cellule, autrement dit, sa taille restera très raisonnable. Dans la philosophie, cela rejoint donc l'idée de troisième échelle des méthodes proposées dans les travaux précédents, voir paragraphe 3.2.1. Au final, la stratégie itérative peut se formaliser sous la forme de l'algorithme 10. Le critère d'arrêt  $\eta_{gc}$  porte sur la norme du résidu.

### ■ Décondensation

Une fois le gradient conjugué convergé, la dernière étape est de déduire la solution globale  $\tilde{\mathbf{W}}^{E'}$  à partir de  $\tilde{\mathbf{W}}_b^{E'}$ . Pour cela, il suffit de déterminer  $\tilde{\mathbf{W}}_i^{E'}$  à partir de la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{W}}_i^{E'} = M_{ii}^{E'-1} \left( f_i^{E'} - M_{ib}^{E'} \tilde{\mathbf{W}}_b^{E'} \right) \quad (3.41)$$

et de concaténer  $\tilde{\mathbf{W}}_i^{E'}$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_b^{E'}$  pour déterminer  $\tilde{\mathbf{W}}^{E'}$ .

### ■ Résolution en parallèle

Ramenons nous maintenant à l'objectif initial, la parallélisation. Chaque groupe de cellules appelé cellule super-macro est affecté à un processeur, et donc à un processus. Malgré le fait que les opérateurs soient présentés dans leur forme globale, l'approche qui



---

**Algorithme 10** Résolution du problème macro condensé (gradient conjugué préconditionné projeté)

---

**Initialisation :**

- $\tilde{W}_{b0} = \mathbf{R}(\mathbf{R}^t \mathbf{S}_p \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t F_p$
- $r_0 = F_p - \mathbf{S}_p \tilde{W}_{b0}$
- $d_0 = \mathbf{P} \mathbf{S}_p^{N-1} r_0$

**Itérations :**

**boucle** tant que  $\eta > \eta_{gc}$ ,  $k=k+1$

**faire**

- $\alpha_k = \frac{r_{k-1}^t \mathbf{P} \mathbf{S}_p^{N-1} r_{k-1}}{d_{k-1}^t \mathbf{S}_p^{-1} d_{k-1}}$
- $\tilde{W}_{b(k)} = \tilde{W}_{b(k-1)} + \alpha_k d_{k-1}$
- $r_k = r_{k-1} - \alpha_k \mathbf{S}_p d_{k-1}$
- $\beta_k = \frac{r_k^t \mathbf{P} \mathbf{S}_p^{N-1} r_k}{r_{k-1}^t \mathbf{P} \mathbf{S}_p^{N-1} r_{k-1}}$
- $d_k = \mathbf{P} \mathbf{S}_p^{N-1} r_k + \beta_k d_{k-1}$
- $\eta = \frac{|F_p - \mathbf{S}_p \tilde{W}_{b(k)}|}{|F_p|}$

**fin boucle**

---

vient d'être décrite peut être parallélisée très aisément. Aucun opérateur global, excepté  $(\mathbf{R}^t \mathbf{S}_p \mathbf{R})$ , ne doit être construit explicitement pour mener à bien la stratégie, autrement dit, tous les opérateurs sont définis localement, mais l'opération d'assemblage proprement dite n'est jamais réalisée. Toutes les opérations à réaliser dans la stratégie itérative sont du type multiplication matrice-vecteur où ces deux éléments sont globaux. Soit  $S$  un opérateur global (par exemple  $\mathbf{S}_p$  où  $\mathbf{R}$ ), résultat de l'assemblage des  $S^E$  locaux. Soit un vecteur  $r$  (par exemple  $r_k$ ), résultat de l'assemblage des  $r^{E'}$  locaux. La multiplication  $S \cdot r$  peut être réalisée à partir de calculs locaux, comme le montre l'algorithme 11. Les étapes marquée d'un  $\Leftrightarrow$  sont les étapes nécessitant des transferts de données entre les différents processus attachés à des interfaces voisines. On voit que les seules quantités à transférer sont des "bouts" de vecteurs, cette étape ne sera donc pas trop pénalisante.

### 3.3 Les performances de la stratégie numérique

Ce paragraphe présente les améliorations numériques obtenues grâce à la parallélisation complète de la stratégie numérique, en terme de stockage en mémoire vive, et en terme de temps de calcul. Les exemples suivant sont issus de la simulation d'un stratifié  $[45_2 / -45_2]_s$  en traction, de dimensions  $21mm \times 6mm \times 0.6mm$ . La simulation porte ainsi sur 12 millions de degrés de liberté. Les conclusions sont semblables pour tous les cas de stratification.

---

**Algorithme 11** Résolution en parallèle de la multiplication matrice-vecteur  $Sr = S_r$ .

---

**Etat initial :**

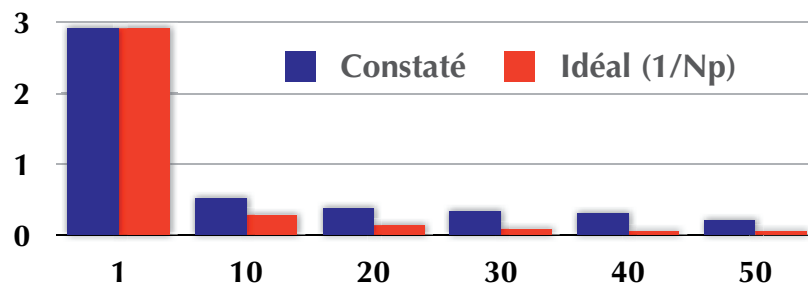
- les matrices élémentaires par cellule super-macro  $S^{E'}$  sont connues
- les contributions locales  $r^{E'}$  sont connues

**Méthode :**

1. Assemblage local de  $r \Leftrightarrow$ 
    - sur chaque cellule  $E'$ , additionner  $r^{E'}$  avec les contributions des cellules voisines. Résultat :  $r_a^{E'}$
  2. Multiplication matrice-vecteur locale
    - sur chaque cellule  $E'$ , réaliser l'opération  $S^{E'} r_a^{E'} = S_r^E$
  3. Assemblage local de  $S_r \Leftrightarrow$ 
    - sur chaque cellule  $E'$ , additionner  $S_r^E$  avec les contributions des cellules voisines. Résultat :  $S_{r,a}^{E'}$
  4. Assemblage global de  $S_r$  (jamais réalisé en pratique)
    - concaténation des  $S_{r,a}^{E'}$
- 

### 3.3.1 Le stockage en mémoire vive

La figure 3.12 montre l'évolution de l'allocation en mémoire vive en fonction du nombre de processeurs utilisés dans la stratégie parallélisée. Comparée au gain idéal, on voit que la parallélisation n'est pas optimale, et ne tend pas vers zéro. Comme cela a



**FIG. 3.12:** Evolution de la mémoire allouée (en Go) en fonction du nombre de processeurs utilisés.

été évoqué plus tôt, les opérateurs de rigidité, ou plus précisément leur factorisation, ne peuvent pas être alloués en parallèle. Ils sont obligatoirement tous stockés pour chaque processus. De plus, un certain nombre de données liées à la géométrie globale du problème traité restent irréductibles. On peut observer cette répartition en mémoire figure 3.13 pour les cas de 1 et 20 processeurs. Les quantités stockées en parallèle fondent avec le nombre de processeurs, mais une partie de l'allocation mémoire reste quelque soit le nombre de processeurs. Cette valeur correspond à la valeur asymptotique de la figure 3.12.

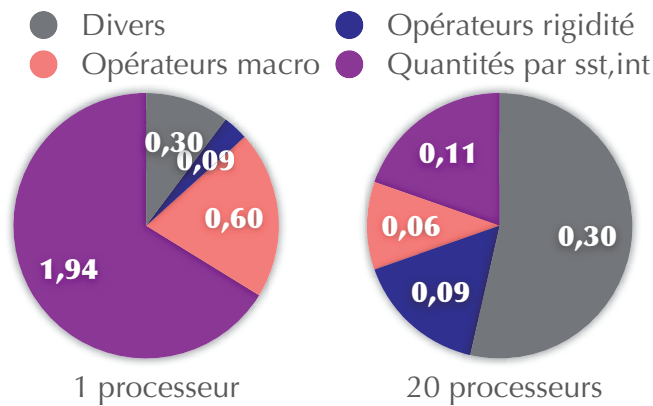


FIG. 3.13: Répartition de l'allocation mémoire pour 1 et 20 processeurs (en Go).

### 3.3.2 Le temps de calcul

Les résultats en terme de temps de calcul ne sont pas non plus idéaux, mais restent très intéressants. La figure 3.14 présente l'évolution du temps de calcul pour effectuer une convergence LaTIn, en fonction du nombre de processeurs. Les résultats sont assez semblables à ceux obtenus dans le cas de l'allocation en mémoire. Le temps de calcul ne tend pas vers zéro, mais stagne à partir de 40 processeurs. L'explication de trouve dans

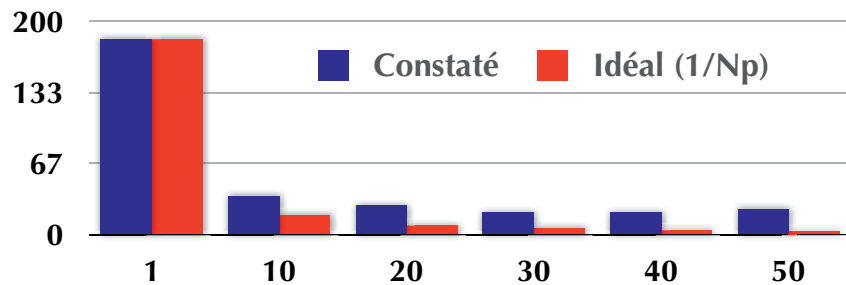


FIG. 3.14: Durée d'une convergence LaTIn en fonction du nombre de processeurs.

le temps de calcul de l'étape macro, qui n'est plus décroissant en fonction du nombre de processeurs. La figure 3.15 montre l'évolution de ce temps en fonction du nombre de processeurs, qui reste quasiment constant. Ce résultat est intéressant, car il permet de juger de l'extensibilité de la résolution du problème macro. En effet, le nombre de processeurs étant directement lié au nombre de cellules super-macro, ce résultat nous permet de dire que le temps de calcul, donc le nombre d'itérations du gradient conjugué est indépendant du nombre de cellules super-macro. Il y a donc extensibilité concernant le problème macro. Le saut de temps de calcul constaté pour 20 processeurs est dû à la

manière dont les cellules super-macro sont réparties sur le domaine, répartition plus ou moins régulière en fonction du nombre de processeurs. Un algorithme de répartition plus précis, permettant d'équilibrer le nombre d'interfaces par cellule, permettrait de régler ce problème.

■ **Remarque** Un gain de calcul est également réalisé sur la construction des opé-

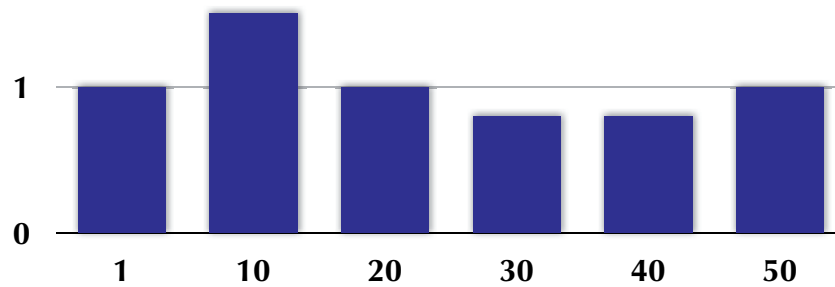


FIG. 3.15: Durée de l'étape macro en fonction du nombre de processeurs

rateurs, en phase de prétraitement. Le fait de construire en parallèle l'opérateur macro permet de gagner du temps. Cependant, ce gain reste limité par le fait que des opérateurs supplémentaires doivent être définis dans le cadre du gradient conjugué préconditionné projeté.

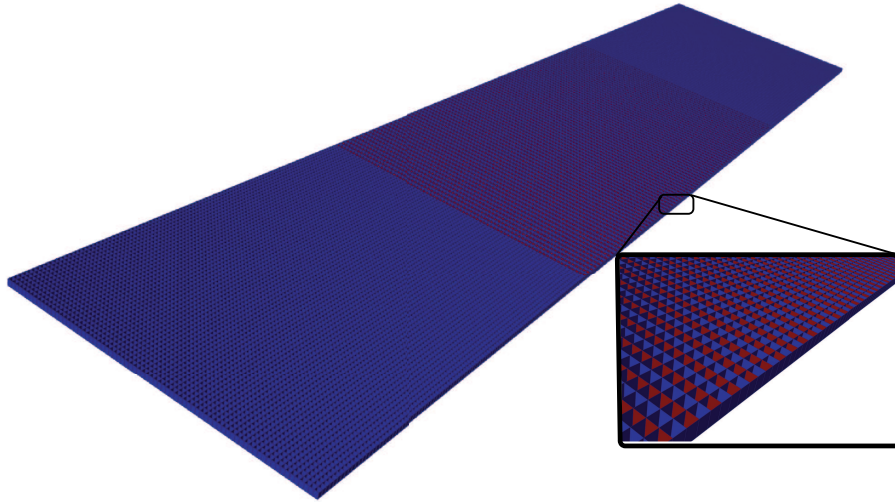
### 3.4 Plus gros cas traité

L'idée ici n'est pas de réaliser le calcul complet d'un stratifié, mais juste de donner une idée des capacités numériques en couplant à la fois les améliorations apportées à travers la parallélisation de la stratégie et les ressources numériques disponibles au LMT-Cachan. On se base pour cela sur la simulation d'une plaque  $[0_2/90_2]_s$  en flexion (seulement deux plis simulés), sans prendre en compte les non linéarités. L'utilisation du code parallélisé sur 35 processeurs, à raison de 2Go de mémoire vive requis par processus, a permis de traiter une itération LaTIn d'un problème dont voici les caractéristiques :

- Dimensions de la plaque :  $90mm \times 17mm \times 0.6mm$
- Nombre de volumes élémentaires de matériau fibre-matrice : 100 000
- Nombre d'interfaces : 190 000
- Nombre de degrés de liberté : 250 millions

La figure 3.16 donne une idée de la géométrie ainsi simulée. Cette figure représente uniquement les interfaces délimitant les sous-structures. Chacune d'elle est maillée et constituée de 2500 degrés de liberté. Une heure est nécessaire pour effectuer 10 itérations LaTIn.

■ **Conclusion**



**FIG. 3.16:** Les interfaces du pli à  $90^\circ$ . On peut y voir en rouge les interfaces testées à la rupture.

Les capacités numériques de la stratégie de calcul ont été largement améliorées grâce aux travaux réalisés. Les deux grandes avancées sont d'une part la diminution du temps de calcul à travers notamment l'optimisation de la recherche de fissure, qui gagne quasiment un facteur 100 grâce à la méthode de présélection des interfaces minimales de rupture. D'autre part, le travail de parallélisation de la stratégie permet dorénavant de traiter des cas impossibles à simuler auparavant, grâce à la réduction très importante des besoins de mémoire. Ces avancées, couplées à l'implémentation de tous les comportements décrits par le modèle micro hybride permettent maintenant la simulation d'éprouvettes de taille réelle. Cela fait l'objet de la dernière partie, destinée à valider le modèle micro proposé dans la première partie, en effectuant des simulations confrontables à des résultats expérimentaux.

# Chapitre 4

## Illustrations numériques

*Cette quatrième et dernière partie présente les résultats obtenus grâce à la stratégie numérique décrite dans la partie précédente. Couplée au cluster numérique disponible au LMT-Cachan, elle permet d'effectuer différentes simulations jusqu'à rupture sur des cas tests représentatifs des essais de caractérisation des stratifiés. Des comparaisons entre simulations et expériences permettent d'apprécier les capacités du modèle à reproduire les essais expérimentaux. Ce chapitre se veut une validation numérique du modèle micro hybride.*

# 1 Introduction

Afin de montrer les capacités du modèle à reproduire la réalité, un certain nombre de simulations ont été effectuées. Ces simulations sont toutes basées sur des expérimentations illustrées dans la littérature. La plupart des simulations se font avec les dimensions réelles. La première partie de la validation concerne des plaques simples, sans trou, avec différentes stratifications. Cela nous permettra de juger le modèle sur des réseaux de dégradations assez réguliers, qui sont généralement bien reproduits par les modèles à échelle supérieure. Dans une deuxième partie, des plaques trouées sont simulées. Dans ces cas, les sollicitations sont plus localisées, donc permettent de mieux rendre compte des capacités du modèle micro par rapport aux modèles à échelles supérieures.

## 2 Plaques simples

### 2.1 Séquence du type $[0_n/90_m]_s$

Dans ce paragraphe, les résultats portent surtout sur la fissuration. En effet, dans ce type de stratifié, les plis à  $90^\circ$  ne développent pas de fortes non-linéarités. La microfissuration apparaît assez rapidement, et va se développer jusqu'à saturation et intervention du délaminage (dans certains cas), peu avant la rupture des fibres. Dans les travaux de D. Violeau, il était déjà montré que l'effet d'épaisseur à l'initiation des fissures était bien reproduit par les simulations numériques. Ici, nous allons plus loin en montrant un premier exemple de simulation complète, jusqu'à rupture. Dans un deuxième temps, une série de tests permettra de juger de l'effet de l'épaisseur sur l'évolution de la fissuration jusqu'à rupture, résultats qui seront comparés aux résultats expérimentaux.

#### ■ Un premier exemple jusqu'à rupture

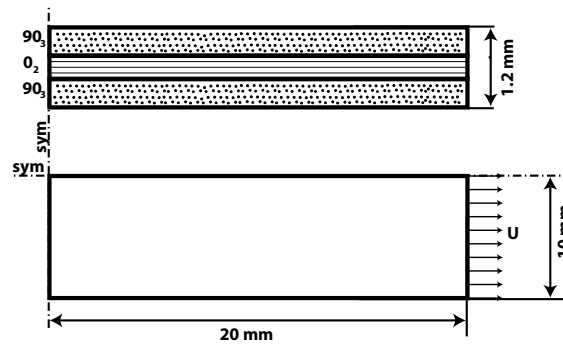
##### • Données

Un premier exemple est présenté ici montrant les possibilités du modèle, et de la stratégie numérique à mener un calcul jusqu'à rupture, d'un stratifié  $[90_3/0]_s$ . Cette séquence est intéressante car elle permet de suivre l'évolution de la microfissuration transverse, suivie d'un délaminage assez prononcé, avant la ruine finale causée par la rupture des fibres du pli à  $0^\circ$ . Les propriétés matériau sont détaillées 4.1 et correspondent aux résultats d'identifications faites sur des éprouvettes d'IM7/977-2. La simulation prend en compte la plasticité et l'endommagement diffus. La taille de l'éprouvette complète est de  $40\text{mm} \times 30\text{mm} \times 1.2\text{mm}$ . Grâce aux symétries, seul un quart sera simulé par le logiciel. Le chargement imposé est un déplacement en bout d'éprouvette, comme le montre la figure 4.1.

Ce calcul nécessite 2,4 millions de degrés de liberté, la figure 4.2 montre les sous-structures et interfaces introduites pour traiter ce problème. Il y a au total 10300 interfaces, délimitant 3000 sous-structures. Le temps de calcul pour mener la simulation jusqu'à la

Paramètres élastiques pli			
$E_1 = 159GPa$	$E_2 = 8,5GPa$	$G_{12} = 5GPa$	$G_{23} = 3GPa$
$\nu_{12} = 0.29$	$\nu_{23} = 0.4$		
Paramètres endommagement pli			
$Y_0 = 0.005MPa$	$Y_c = 7MPa$	$b_2 = 0.7$	$b_3 = 1.0$
Paramètres fissuration pli/interface		Paramètres rupture sens fibre	
$G_I = 150J/m^2$	$G_{II} = 220J/m^2$	$Y_{f,c}^T = 15MPa$	$Y_{f,c}^C = 3MPa$
Paramètres plasticité			
$R_0 = 20MPa$	$R(p) = 2500p^{0.6}$		

TAB. 4.1: Propriétés matériau

FIG. 4.1: Schéma de l'éprouvette  $[90_3/0]_s$  simulée (un quart)



rupture est de l'ordre de 24 heures. Ce calcul a été effectué sur 40 processeurs en parallèle.

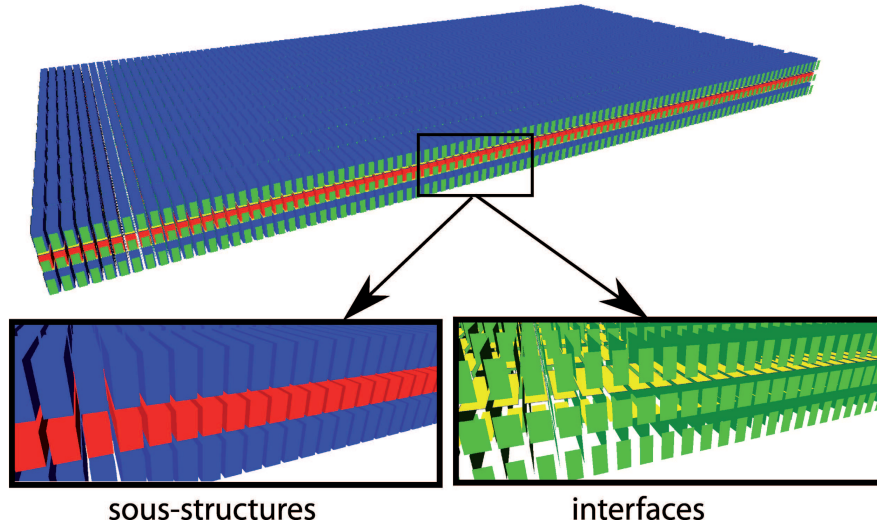


FIG. 4.2: Les sous-structures (bleu : plis à  $90^\circ$ , rouge : plis à  $0^\circ$ ) et interfaces (vert : microfissuration transverse, jaune : délaminage).

#### • Résultats

La figure 4.3 montre l'évolution de la microfissuration transverse pour différents niveaux de chargement. La première fissure intervient pour une déformation de l'ordre de 0,4%. Nous sommes dans le cas des plis épais, ce qui provoque une fissuration instable dans la largeur de l'éprouvette, bien reproduite ici. L'endommagement diffus moyen dans le pli à  $90^\circ$  n'évolue quasiment pas au cours de la densification de la microfissuration. Le réseau de fissures obtenu peut-être considéré comme quasi-périodique.

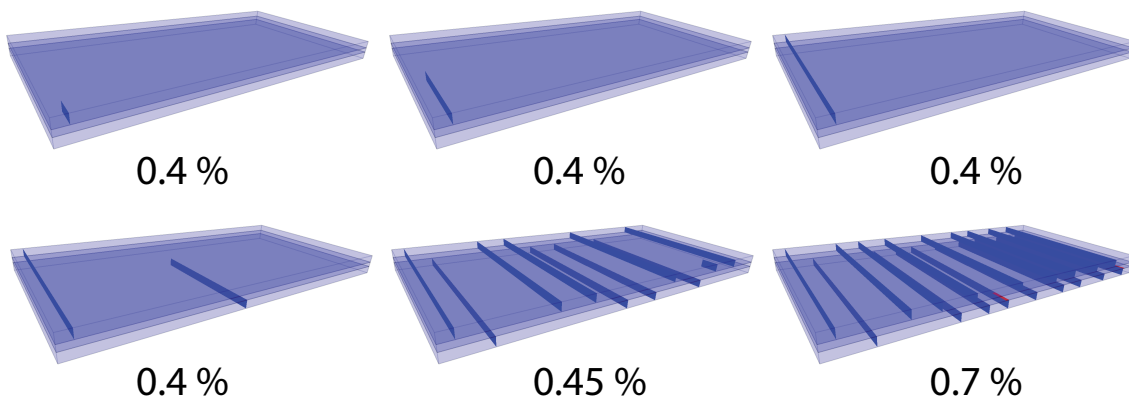


FIG. 4.3: Initiation et propagation des microfissures transverse, pour différentes valeurs de déformation

A partir d'une déformation de 0,7%, du délaminage apparaît pour une densité de fissuration de l'ordre de 0.55, provoquant la saturation de cette microfissuration, comme le

montre la figure 4.4, indiquant l'évolution des différentes dégradations à partir de l'initiation du délaminage. La microfissuration n'évolue plus, au profit du délaminage. Lorsque le chargement s'amplifie, les zones de délaminage vont s'étendre et traverser la largeur des plis.

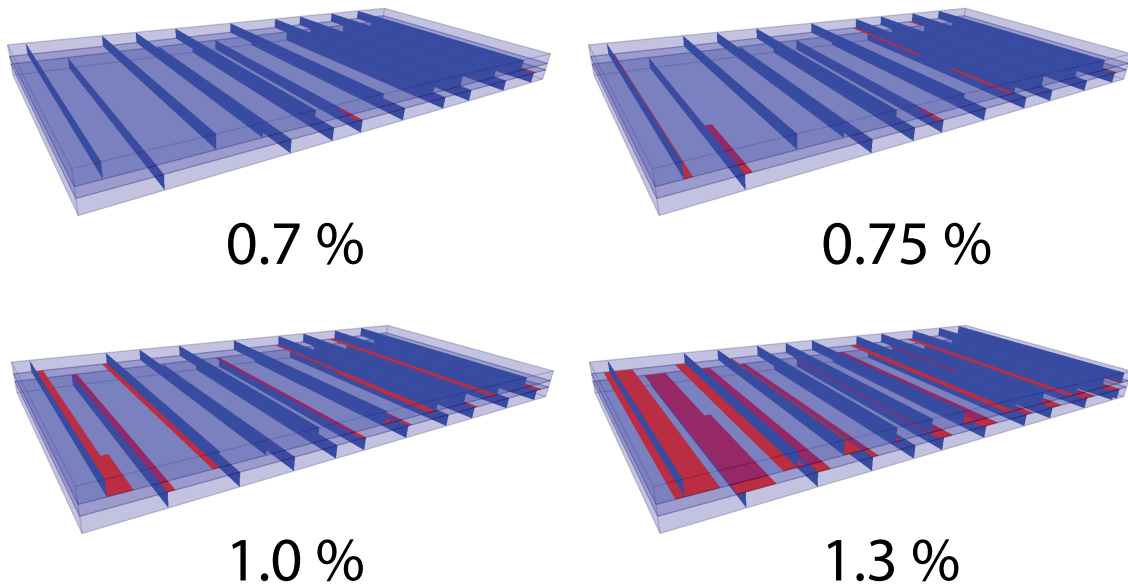


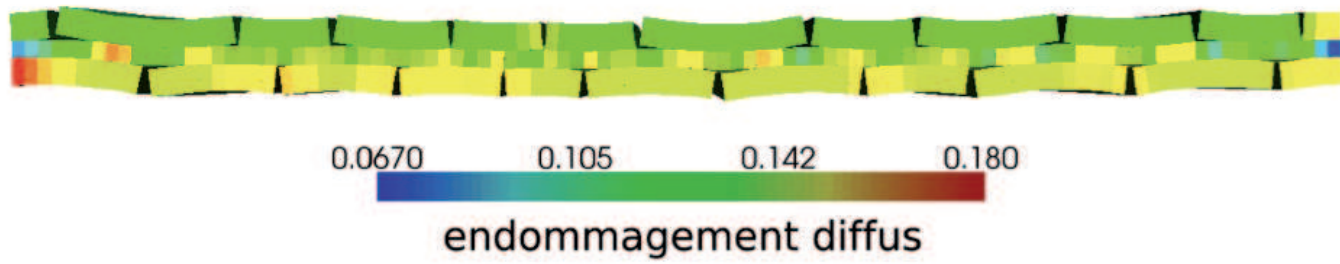
FIG. 4.4: Propagation du délaminage (surfaces rouges).

La figure 4.5 montre quant à elle des prises de vue de la déformée du stratifié, détaillant notamment la microfissuration, le délaminage induit ainsi le niveau d'endommagement lié aux dégradations diffuses de chaque pli, juste avant que la rupture fibre n'intervienne. On peut remarquer que le zoom de la déformée figure 4.5(b) est très similaire au résultat expérimental rappelé figure 4.6, issu d'un essai de traction pour la même stratification. L'endommagement diffus reste modéré, à un niveau d'environ 0.14. Il est à noter la présence d'une légère flexion du stratifié dû à l'asymétrie des dégradations.

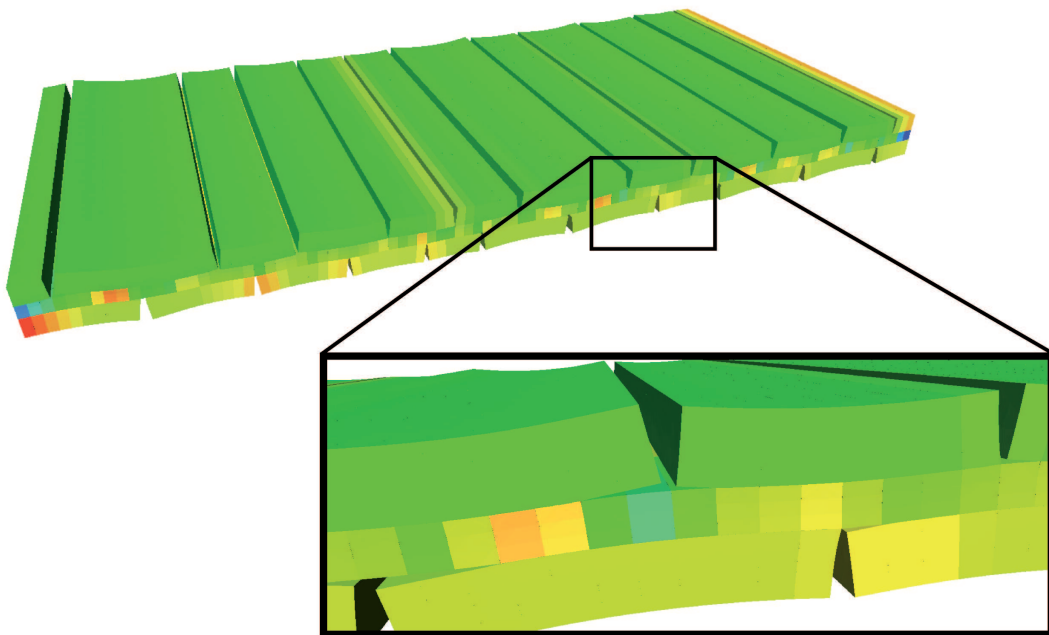
Finalement, la rupture du stratifié intervient pour une déformation d'environ 1.3%. La figure 4.7 montre une vue du bord du stratifié au niveau d'un des plans de symétrie. La rupture fibre intervient près de la face du composite où la condition de symétrie par rapport au plan  $(Oyz)$  est imposée. Cela est dû en partie à la flexion induite par l'asymétrie des réseaux de fissures. La rupture fibre va ensuite se propager sur toute la largeur du pli, signant la destruction de ce dernier.

## 2.2 Séquence $[\pm 45]_s$

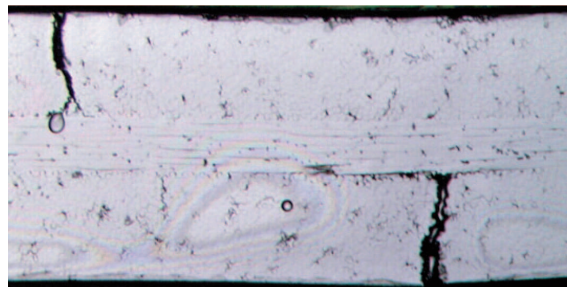
Ce type de stratifié, à l'inverse des  $[0_n/90_m]_s$  va se fissurer très tard, de manière instable. La ruine finale est provoquée par macro-délaminage. Cela permet d'observer largement les non-linéarités que présentent ces stratifiés, et notamment les endommagements diffus, ainsi que la plasticité.



(a) Vue du bord libre.



(b) Perspective et zoom.

**FIG. 4.5:** Déformée de la géométrie ( $\times 5$ ), juste avant la rupture des fibres**FIG. 4.6:** Micrographie expérimentale sur  $[90_3/0]_s$ , [Okabe *et al.*, 2008]

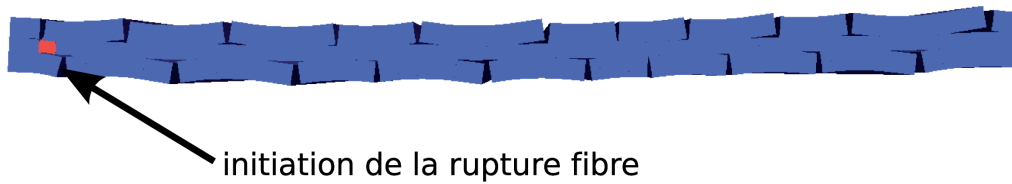


FIG. 4.7: Départ de la rupture sens-fibre signifiant la rupture du stratifié. Vue de profil.

#### • Données

Pour la réponse avant fissuration, on se base sur un stratifié d'empilement  $[\pm 45]_{4s}$  de dimensions  $50\text{mm} \times 20\text{mm} \times 1.2\text{mm}$ . Cette fois-ci, il n'existe qu'une seule symétrie, dans l'épaisseur. L'essai avait été réalisé au LMT-Cachan, avec une sollicitation de type charge/décharge, sur un matériau de type IM7/977. Les caractéristiques mécaniques de plasticité et d'endommagement ont été identifiées sur des essais spécifiques, la viscosité est recalée par rapport à cet essai. Les propriétés matériau sont semblables à celles proposées dans le tableau 4.1

#### • Résultats

La figure 4.8, montre l'évolution de la réponse du stratifié comparée à la réponse expérimentale. On note une très bonne corrélation dans les premiers cycles. Au delà, une lacune évidente du modèle apparaît : l'absence de l'introduction de la rotation des fibres dans le modèle. Prendre en compte ce phénomène aurait entraîné de lourdes modifications dans la stratégie numérique, or, la rotation des fibres ne devient critique que pour un nombre limité de séquences d'empilement. Donc, jusqu'à ce jour, le choix a été fait de ne pas prendre en compte ce phénomène dans la simulation.

Cependant, avant que cela n'arrive, le modèle montre ses capacités à capter l'ensemble des phénomènes pertinents intervenant dans ce type d'empilement. Lorsque le chargement atteint une valeur critique, la microfissuration va s'initier et se développer de manière catastrophique. Naturellement, la mécanique de la fissuration discrète prend le relais de l'évolution continue des dégradations. Tous les phénomènes décrits dans la suite se produisent au cours d'un même pas de temps. La géométrie simulée a été simplifiée. Il s'agit d'une plaque ( $[\pm 45]_s$ ), de dimensions ( $15\text{mm} \times 6\text{mm}$ ). Dans un premier temps, des microfissures vont se propager à partir des bords de l'éprouvette de manière instable dans la largeur du stratifié, voir figure 4.9. Ces microfissures vont induire du délaminage qui va prendre le relais de la microfissuration, se développer et mener à du macro délaminage, provoquant la ruine de l'éprouvette, voir figure 4.10. La déformée à rupture obtenue est montrée figure 4.11. On peut y distinguer clairement le faciès de rupture présentant des "pointes", typiques du développement de macro délaminage en présence de plis à  $\pm 45^\circ$ . Une très bonne reproduction de la localisation de l'endommagement est donc obtenue par

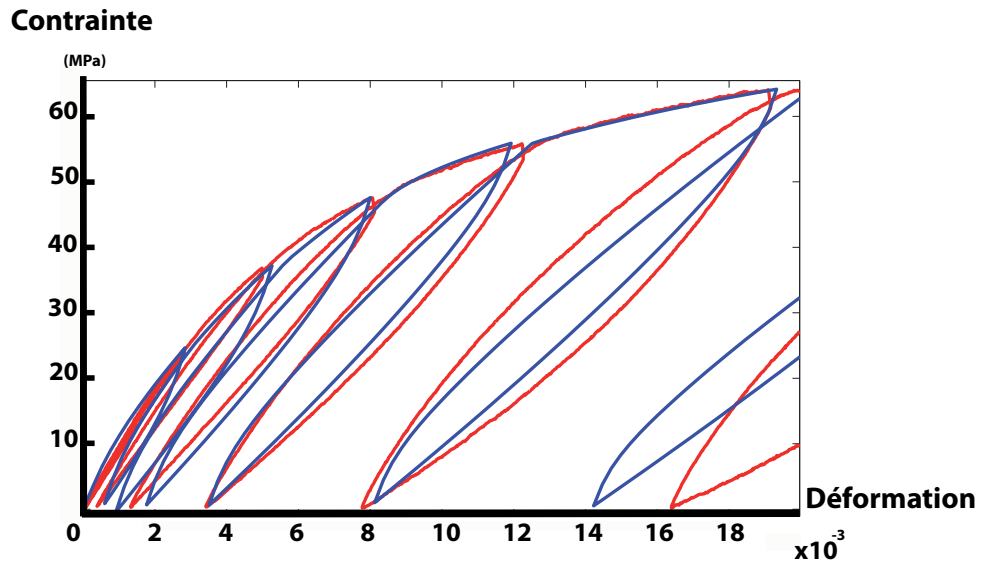


FIG. 4.8: Comparaison des réponses expérimentales et simulées d'un stratifié  $[\pm 45]_{4s}$ . En rouge l'essai (Source : Pascal Thévenet, EADS IW), en bleu la simulation.

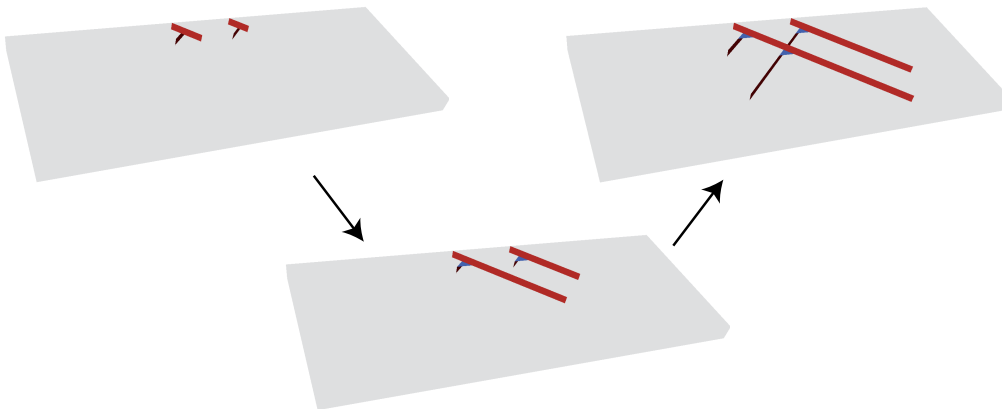


FIG. 4.9: Propagation instable des microfissures dans la largeur des plis.

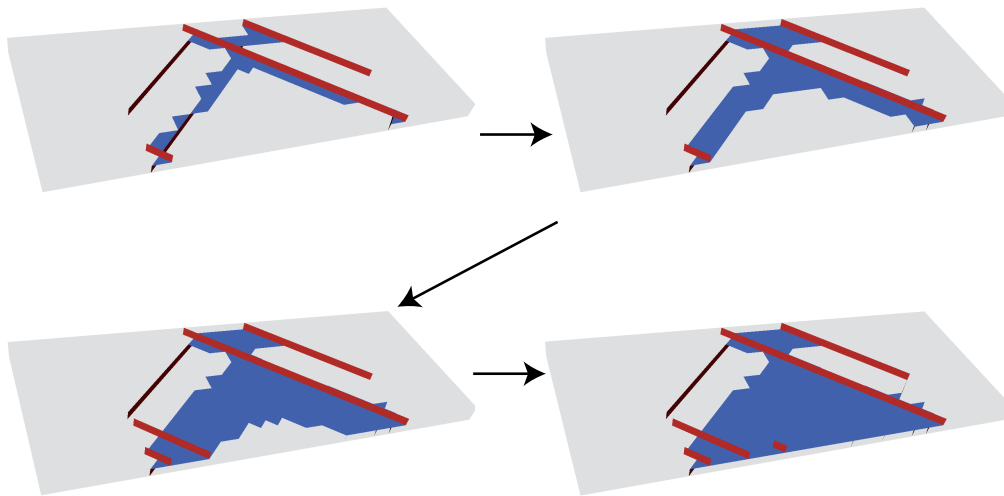


FIG. 4.10: Développement catastrophique du délaminage jusqu'à la ruine (toujours au même pas de temps).

la simulation. On peut en outre, constater sur cette éprouvette, le niveau d'endommagement diffus qui est atteint au moment où la première fissure apparaît. Toutes les fissures sont créées au cours du même pas de temps, il n'y a aucune évolution de cet endommagement diffus au cours de la fissuration.

### 3 Plaques trouées

Les plaques trouées permettent un certain nombre d'observations très pertinentes dans l'optique du virtual testing. Les plaques trouées combinent l'influence de la géométrie avec les propriétés du matériau. Ce type d'essai fait partie intégrante du processus de design des stratifiés. Comme le dit Stephen Hallet, "Open hole tensile test is a challenge for virtual testing of composites", [Hallett et Winsom, 2008], et de nombreux auteurs s'intéressent à la simulation de plaques trouées [Camanho *et al.*, 2007] [Yashiro *et al.*, 2007], [O'Higgins *et al.*, 2008],[Green *et al.*, 2007].

Les résultats des simulations de plaques trouées montrés ici se basent sur des travaux expérimentaux de [O'Higgins *et al.*, 2008], dans lesquels l'évolution des dégradations au sein de plaques trouées de séquences  $[90_m/0_m]_{ns}$  et  $[45/0/-45/90]_{2s}$  a été observée. Les propriétés matériau sont détaillées dans le tableau 4.2

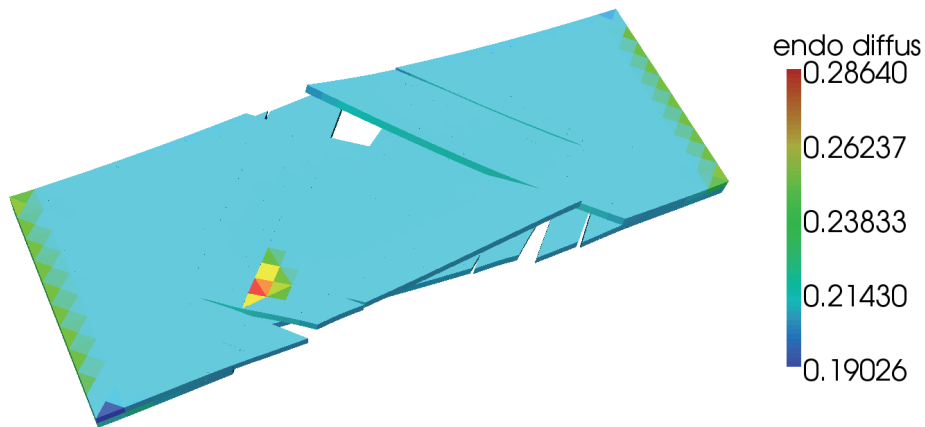


FIG. 4.11: Déformée ( $\times 10$ ) du stratifié au moment de la ruine.

Paramètres élastiques pli			
$E_1 = 139GPa$	$E_2 = 10GPa$	$G_{12} = 5.3GPa$	$G_{23} = 3GPa$
$\nu_{12} = 0.32$	$\nu_{23} = 0.4$		
Paramètres endommagement pli			
$Y_0 = 0.005MPa$	$Y_c = 7MPa$	$b_2 = 0.7$	$b_3 = 1.0$
Paramètres fissuration pli/interface		Paramètres rupture sens fibre	
$G_I = 100J/m^2$	$G_{II} = 250J/m^2$	$Y_{f,c}^T = 12MPa$	$Y_{f,c}^C = 3MPa$
Paramètres plasticité			
$R_0 = 20MPa$	$R(p) = 2500p^{0.6}$		

TAB. 4.2: Propriétés matériau

### 3.1 Séquence $[90_2/0_2]_s$

#### • Données

Tout d'abord considérons le cas de l'empilement simple  $[90_2/0_2]_s$ . La plaque originale est de dimensions  $300\text{mm} \times 36\text{mm}$ . Pour effectuer la simulation, elle est réduite aux dimensions  $36\text{mm} \times 36\text{mm}$  montrées figure 4.12. Un grande partie de la longueur ( $300\text{mm}$ ) de l'éprouvette réelle sert à "amortir" les effets de bord. Ici, en intégrant des conditions aux limites suffisamment pertinentes (décrites en Annexe A), on peut se permettre de réduire fortement la longueur de l'éprouvette simulée.

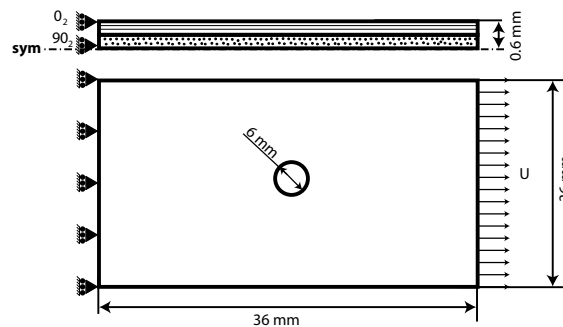


FIG. 4.12: Schéma de l'éprouvette trouée  $[0_2/90_2]_s$  simulée.

La figure 4.13 montre la répartition des interfaces nécessaires à la simulation de cette éprouvette ainsi que la répartition des interfaces sur les 84 processeurs utilisés pour effectuer les calculs.

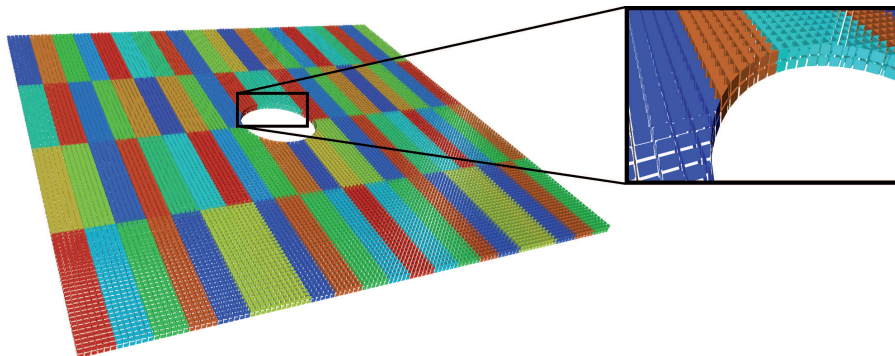


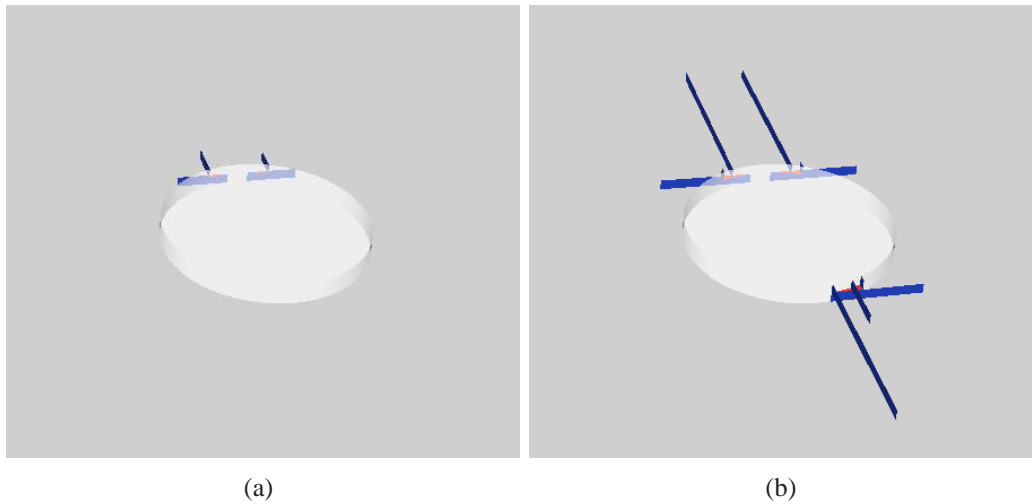
FIG. 4.13: Les interfaces minimales de rupture. Les couleurs indiquent les regroupements d'interfaces (et des sous-structures correspondantes) sur les 84 processeurs.

#### • Résultats

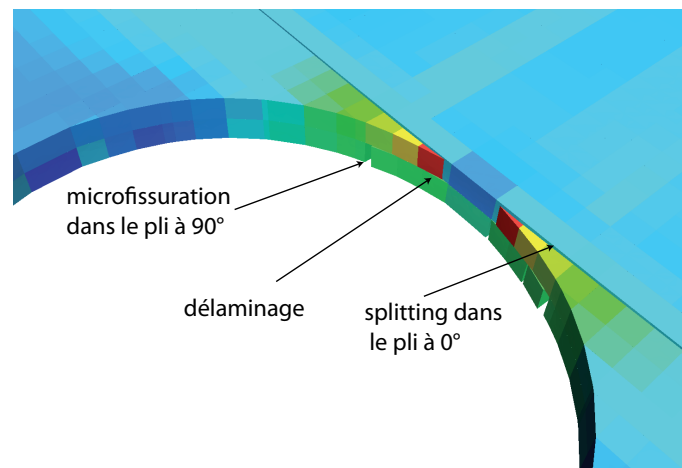
La figure 4.14 montre l'initiation de la fissuration, avec le splitting, obtenu pour une déformation de 0.3%. De cette manière, quatre fissures vont s'initier dans le plis à  $0^\circ$ , en partant du trou. Leur propagation s'accompagne de délaminage et de l'initiation de



la microfissuration dans les plis à  $90^\circ$ , au bord du trou. Lorsque le chargement s'accroît, toutes ces fissures vont progressivement se propager, voir figure 4.14. L'image suivante 4.15 donne une idée de la déformée correspondant à cet état. On peut y observer clairement le splitting, le délaminage ainsi que la microfissuration du pli à  $90^\circ$ . Les mi-



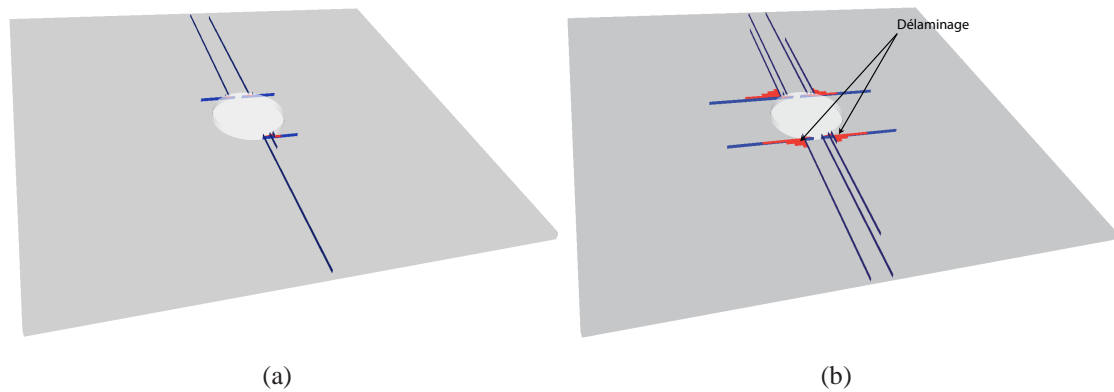
**FIG. 4.14:** Evolution de la fissuration près du trou



**FIG. 4.15:** Déformée ( $\times 5$ ) au niveau de l'apparition des premières fissures.

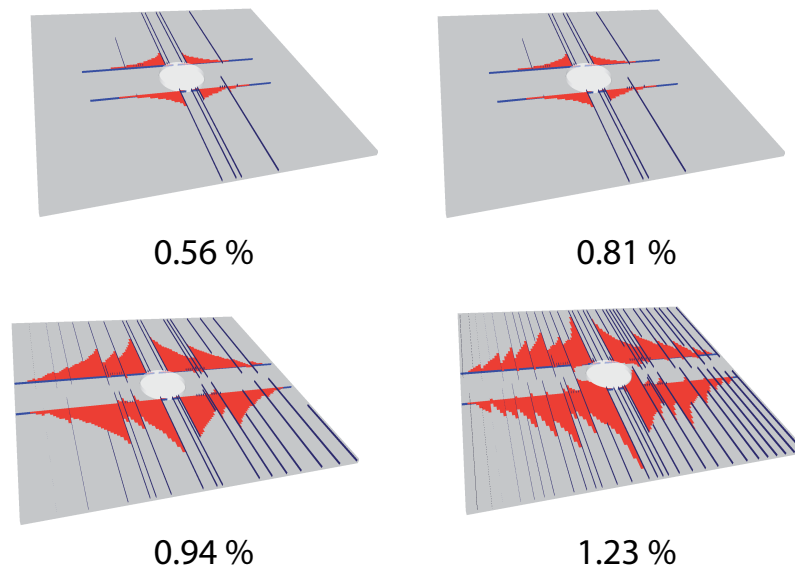
crofissures transverses du pli à  $90^\circ$  vont alors se propager de manière instable jusqu'au bord de l'éprouvette. En parallèle, le splitting s'accroît et un fort délaminage apparaît à l'intersection entre le splitting et la microfissuration du pli à  $90^\circ$ , voir figure 4.16.

Par la suite, la fissuration transverse du pli à  $90^\circ$  va s'initier à partir du splitting, de sorte que la densité de la microfissuration transverse augmente très nettement sur toute la longueur de l'éprouvette. En parallèle, la surface délaminée va elle aussi très fortement



**FIG. 4.16:** Propagation de la microfissuration et du délaminage

augmenter, toujours en partant de l'intersection entre les microfissures des plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , voir figure 4.17.



**FIG. 4.17:** Densification du réseau de fissures jusqu'à la rupture des fibres, en fonction de la déformation

La figure 4.18 montre une comparaison entre le réseau de fissures obtenu par simulation et le réseau observé expérimentalement, juste avant la rupture des fibres. On peut voir une grande similitude entre les deux réseaux.

Du point de vue qualitatif, ces résultats montrent une bonne corrélation entre la simulation et l'expérience. Les phénomènes de fissuration observés expérimentalement (splitting, délaminage, microfissuration) sont reproduits avec une grande fidélité. Les figures suivantes donnent une image de la déformée simulée. La figure 4.19 montre le réseau de fissures juste avant le développement catastrophique de la rupture des fibres. A ce même moment, on peut visualiser l'autre face du stratifié, figure 4.20. Pour ces

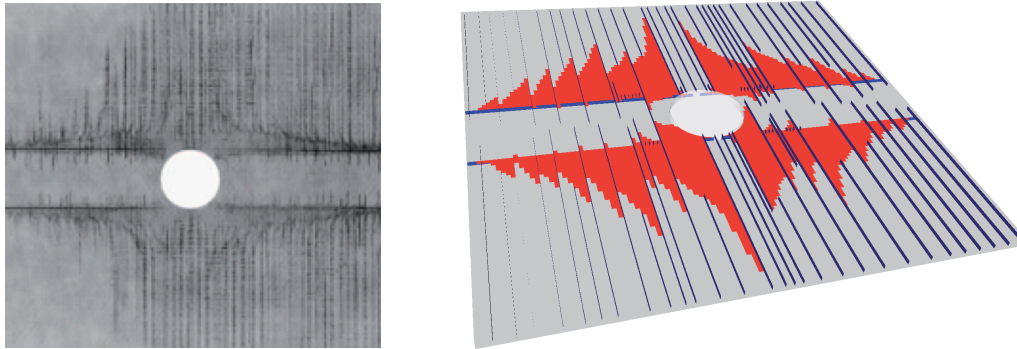


FIG. 4.18: Comparaison entre le résultat expérimental et la simulation, juste avant la rupture des fibres.

deux figures, la couleur indique le niveau d'endommagement diffus. La dernière déformée montre quant à elle l'état du stratifié lorsque la rupture des fibres s'est propagée, figure 4.21. La bande rouge correspond aux sous-structures dont les fibres ont rompu.

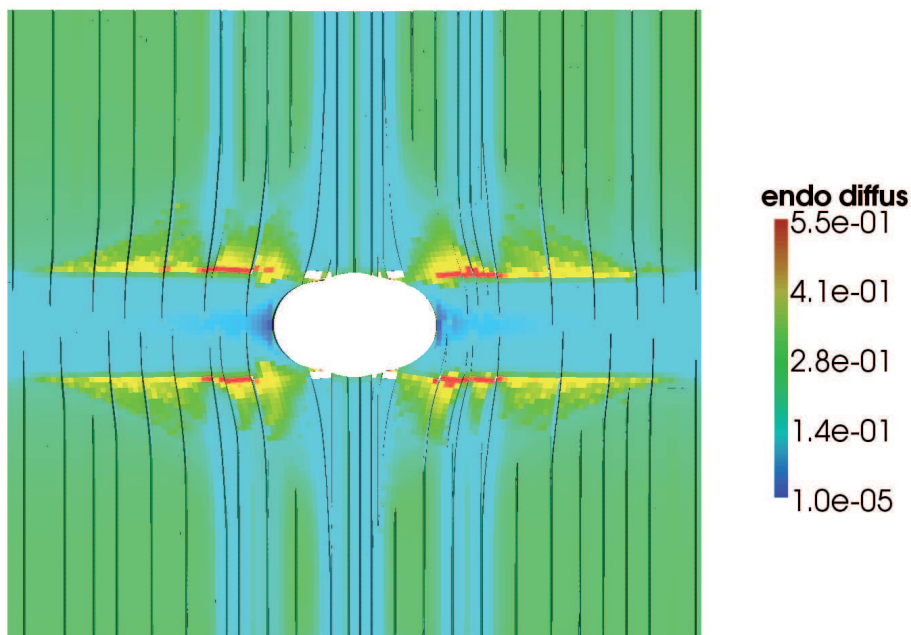
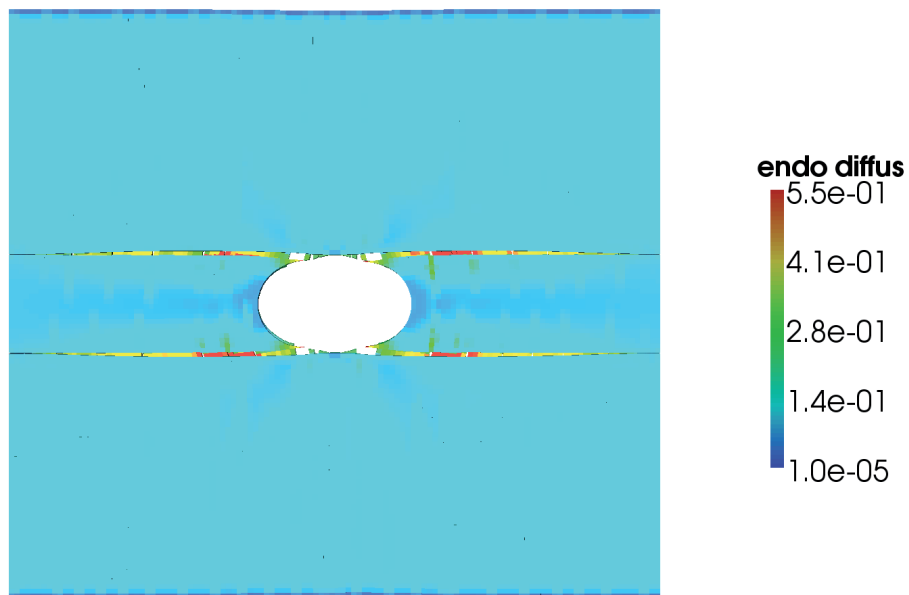


FIG. 4.19: Prise de vue du réseau de fissures dans le pli à  $90^\circ$ , juste avant la rupture des fibres. Déformée  $\times 10$

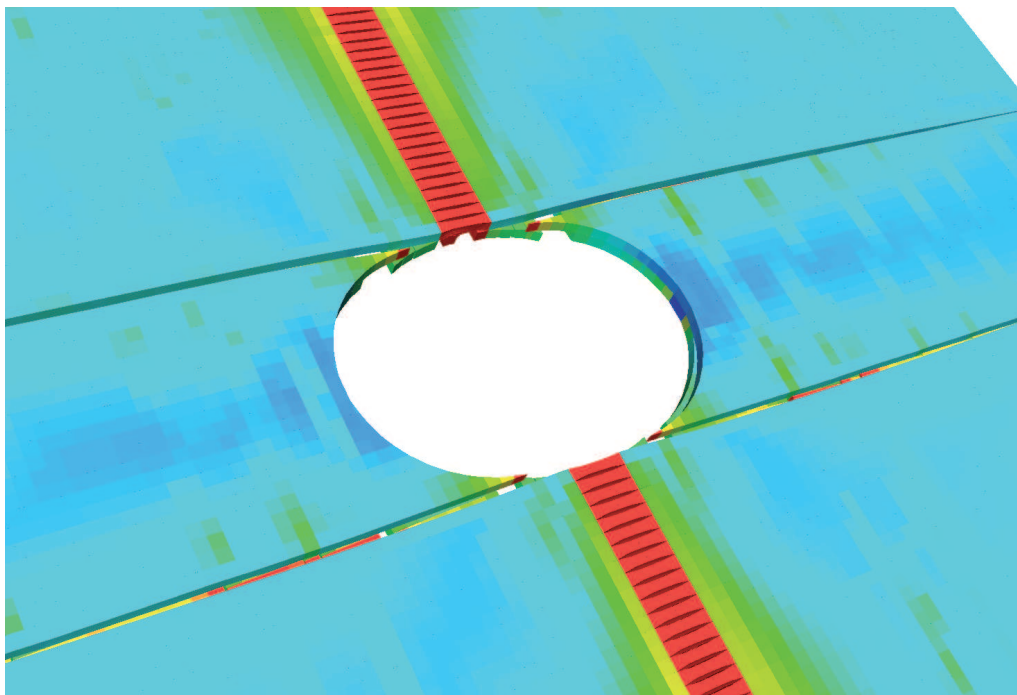
### 3.2 Séquence du type $[45_n/0_n/-45_n/90_n]_s$

#### • Données

Cet empilement plus complexe a également été testé expérimentalement dans [O'Higgins *et al.*, 2008]. Les dimensions de la plaque simulée sont les mêmes que la



**FIG. 4.20:** Prise de vue du splitting dans le pli à  $0^\circ$ , juste avant la rupture des fibres.  
Déformée  $\times 10$



**FIG. 4.21:** Prise de vue du réseau de fissures dans le pli à  $0^\circ$ , avec propagation de la rupture dans le sens des fibres. Déformée  $\times 10$

précédente, voir figure 4.22. En revanche, la séquence simulée ( $[45_2/0_2/-45_2/90_2]_s$ ) n'est pas exactement la même que celle utilisée expérimentalement ( $[45/0/-45/90]_{2s}$ ). Des raisons techniques font que ce cas arrive aux limites des capacités numériques. Afin d'obtenir des résultats dans des temps raisonnables, le choix de simplifier l'empilement a été fait. La simulation a nécessité l'introduction de 11 millions de ddl répartis sur 80

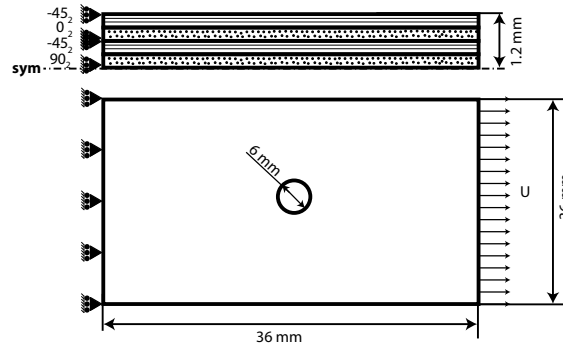


FIG. 4.22: Schéma de l'éprouvette trouée  $[45_2/0_2/-45_2/90_2]_s$  simulée.

processeurs, de la même manière que précédemment, figure 4.13. Le calcul a pris 4 à 5 jours pour être mené à bien.

#### • Résultats

Le début de la fissuration est représenté figure 4.23. La déformation correspondante est de 0.35%. On observe clairement que les dégradations s'initient à partir du trou. Sur le zoom proposé, on peut distinguer la microfissuration du pli à  $90^\circ$  en rouge, la microfissuration des plis à  $\pm 45^\circ$  en vert, et le splitting dans le pli à  $0^\circ$  en bleu. On peut également voir le délaminage en bleu. Lorsque le chargement s'accroît, les fissures vont se développer, comme le montre la figure 4.24. La dernière image (1.3%) correspond à l'état de fissuration au moment de la rupture dans le sens des fibres. Enfin, la figure 4.25 montre la comparaison entre le réseau simulé et le réseau obtenu expérimentalement. On y voit clairement que tous les phénomènes de fissuration sont présents, avec dans les derniers instants, une prédominance du délaminage. Ce résultat montre encore une fois que la simulation permet au modèle de montrer ses capacités à reproduire l'expérience. Cependant, la similitude est moins grande que dans le cas précédent, à cause notamment du fait que la séquence simulée ne soit pas exactement la même que celle utilisée pour expérimentalement.

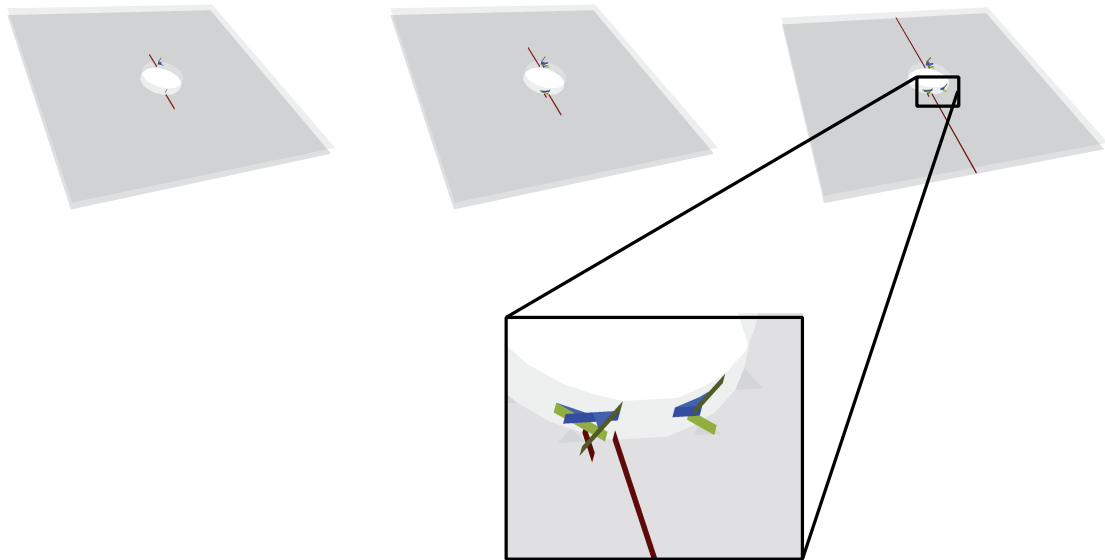


FIG. 4.23: Premières fissures pour une déformation de 0.35%

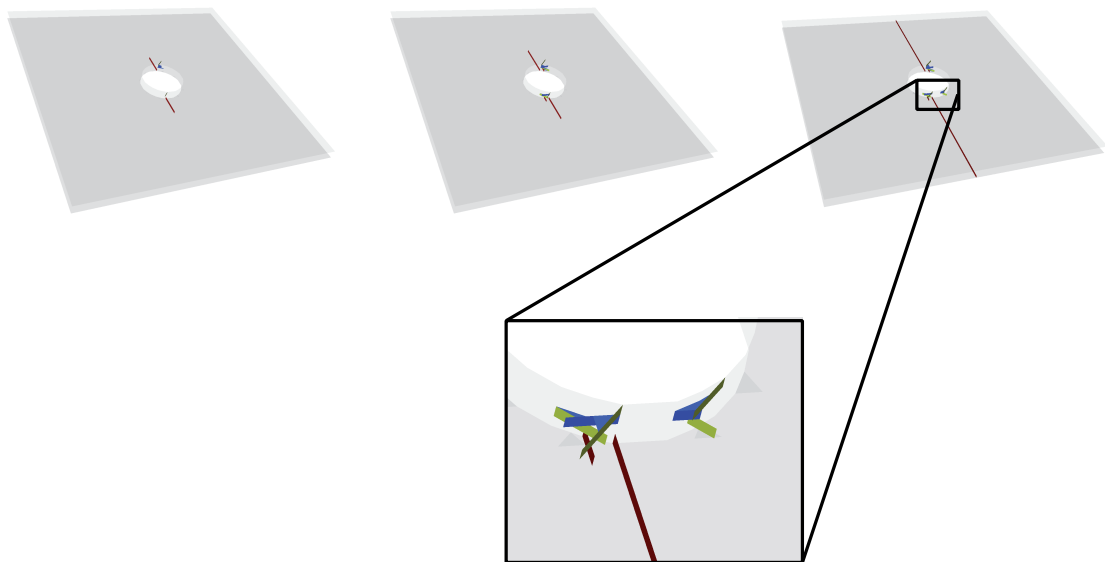
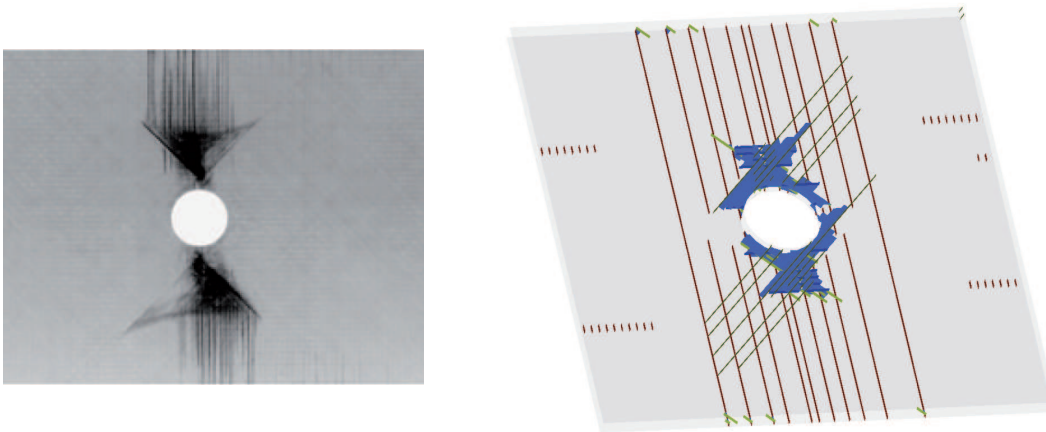


FIG. 4.24: Evolution du réseau de fissures en fonction de la déformation



**FIG. 4.25:** Comparaison entre le réseau de fissures expérimental [O'Higgins *et al.*, 2008] et la simulation

# Conclusion et perspectives

Les travaux de thèse détaillés ici ont permis de poursuivre le développement d'un modèle micro semi-discret de dégradation des composites stratifiés. Deux évolutions fortes ont été apportées. Tout d'abord, l'amélioration du modèle à travers l'introduction de nouveaux comportements, tels que la plasticité, la viscosité et la rupture dans le sens des fibres. D'autre part, afin de valider ce modèle, l'implémentation numérique a également été poursuivie, à travers l'introduction des non-linéarités (endommagement diffus, plasticité, viscosité, rupture sens fibre), suivie d'une optimisation numérique de cette stratégie. Ainsi, des simulations réalistes ont pu être réalisées pour montrer les capacités du modèle.

Le modèle micro proposé dans de précédents travaux, a donc été complété avec une partie des comportements pertinents intervenant dans les phénomènes de dégradation des stratifiés jusqu'à rupture. Le constituant élémentaire continu, le matériau fibre-matrice, a maintenant un comportement élastoviscoplastique endommageable. Ceci permet de capter la complexité de la réponse des stratifiés, notamment dans la phase précédant l'apparition de la fissuration. Le rupture sens fibre, également introduite dans ce volume homogénéisé, permet de mener des calculs complets, jusqu'à la ruine complète du stratifié. L'autre constituant élémentaire, la surface minimale de rupture, a quant à elle gardé ses propriétés liées à la mécanique de la fissuration discrète.

Dans l'optique de la validation de ce modèle, la stratégie numérique dédiée et initiée dans les travaux précédents [Violeau, 2006] a été améliorée. D'une part, l'ensemble des comportements non-linéaires du matériau fibre-matrice ont été intégrés dans le calcul des sous-structures, à l'aide de stratégies basées sur l'algorithme de "Newton". Cependant, le nombre de surfaces minimales de rupture à introduire restant extrêmement important, les problèmes à traiter numériquement deviennent rapidement gigantesques. C'est pourquoi, une partie importante de ces travaux a également porté sur l'optimisation de la stratégie numérique. Pour cela, les étapes de la stratégie LaTIn ont été complètement parallélisées, permettant ainsi de résoudre le problème de référence sur de nombreux processeurs en parallèle. D'autre part, la recherche de fissures étant également discriminante du point de vue du temps de calcul, une stratégie de préselection des fissures a été mise en place et validée. Ainsi, un gain de temps de calcul considérable a pu être réalisé, permettant de lancer la simulation d'éprouvettes réalistes, tant du point de vue de la complexité du modèle, que des dimensions des éprouvettes. Ces simulations, limitées à des éprouvettes expérimentales simples, ont montré les capacités du modèle à reproduire les observations



micro, méso et macro.

Au final, ce modèle semi-discret peut donc se voir comme une base de données de référence regroupant les informations importantes concernant les dégradations des composites stratifiés. C'est ce que l'on appelle un "matériau virtuel", qui peut être transposé à l'ensemble des matériaux d'une même famille.

Les travaux proposés dans ce rapport se sont principalement basés sur des observations qualitatives de résultats expérimentaux. Une suite intéressante à ces travaux de thèse serait donc le lancement d'une phase expérimentale rigoureuse permettant la validation finale, et l'identification complète du modèle, pour un matériau donné. En effet, il est difficile de trouver pour un même matériau, un ensemble d'essais permettant d'identifier complètement les paramètres du modèle.

D'autre part, deux perspectives principales apparaissent pour la suite de ces travaux de thèse, en ce qui concerne notamment des avancées vers le "virtual testing". En effet, il est pour le moment impensable d'espérer traiter des cas tests industriels avec ce modèle micro, dans l'état actuel des capacités numériques.

Tout d'abord, du point de vue de la modélisation, la validation d'un tel modèle (à échelle fine) permet un passage rigoureux vers des modèles à échelle supérieure, tel que le mésomodèle d'endommagement développé au LMT-Cachan. A travers le pont Micro-Méso, les informations précises du modèle micro peuvent permettre une amélioration notable de la qualité des modèles méso, voire macro. Ces derniers manquent en effet de pertinence lorsque la localisation des dégradations se produit. Or, sur ce point, la fissuration discrète introduite dans le modèle micro permet d'obtenir de très bons résultats.

Une autre perspective intéressante, cette fois-ci du point de vue numérique, serait le couplage micro-méso au sein d'un même code de calcul. L'idée est de tendre vers la simulation d'éprouvettes de taille industrielle. La base du calcul se ferait à l'aide d'un modèle à échelle méso, pertinent lorsque les dégradations restent assez diffuses. Lorsque des zones très chargées voient leur endommagement augmenter, le modèle micro viendrait se substituer localement au modèle méso. Ceci aurait pour conséquence de cumuler les avantages des deux modèles : efficacité numérique des modèles méso, et pertinence de la modélisation micro dans les zones très dégradées.

# Annexe A

## Prise en compte des conditions limites complexes

Cette annexe traite de la manière dont les conditions limites sont imposées dans le logiciel. En effet, le comportement des stratifiés est très complexe, ce qui rend l'affectation des conditions limites elle aussi complexe. Après avoir présenté la problématique sur un exemple simple, une méthode quasi-systématique est proposée pour prendre en compte les spécificités des stratifiés. Cette méthode a été appliquée au cours des simulations numériques présentées dans ce rapport.

### 1 Problématique

On l'a vu dans le détail de la stratégie numérique, il existe des limitations numériques très fortes en terme de temps de calcul et de capacité de stockage en mémoire vive. De fait, nous souhaitons limiter au strict nécessaire la taille des éprouvettes simulées. Si l'on prend le cas des éprouvettes expérimentales, la géométrie de celles-ci est en générale assez longue, ce qui permet d'absorber une partie des irrégularités provoquées par le montage. Dans le cadre de la simulation numérique, il sera difficile de simuler l'ensemble de l'éprouvette. Cela n'aurait pas de réelle utilité dans l'optique de validation du modèle. En revanche, cela rallongerait largement le temps de calcul. La volonté est donc de ne simuler qu'une "zone d'intérêt", représentative de ce que subit l'éprouvette et des principales dégradations, comme le montre la figure A.1 dans le cas d'une éprouvette trouée. Se limiter à une zone centrale de l'éprouvette force à imposer des conditions limites adaptées, qui ne sont pas triviales.

Prenons le cas simple de deux stratifiés classiques, un  $[0_2/90_2]_s$  et un  $[\pm 45]_s$ , sur lesquels on souhaite imposer un déplacement normal aux deux extrémités de l'éprouvette. Pour simplifier, on ne prendra en compte que l'endommagement diffus. Si l'on impose directement la condition de déplacement normal, les cartes d'endommagement obtenues sont présentées figure A.2. On y voit clairement que dans le cas du  $[\pm 45]_s$ , un effet de bord important apparaît au niveau des conditions limites et provoque une concentration

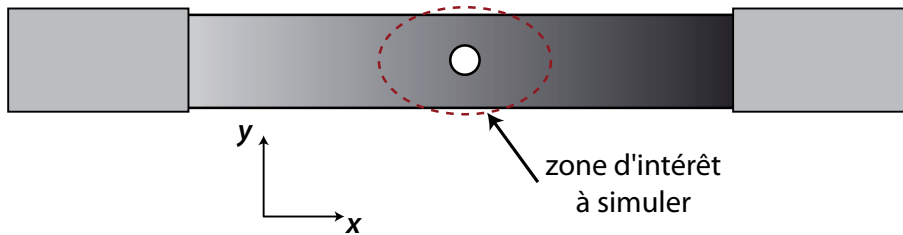


FIG. A.1: Schématisation d'une éprouvette expérimentale, et de la zone d'intérêt.

de l'endommagement. Ce n'est pas le cas pour le  $[0/90]_s$ , pour lequel le déplacement normal dans l'éprouvette est le même dans les deux plis.

Si la charge augmente, les fissures qui apparaîtraient seraient donc induites par les conditions limites inadaptées. Le même type de problème est rencontré lorsqu'un effort normal est imposé sur les extrémités.

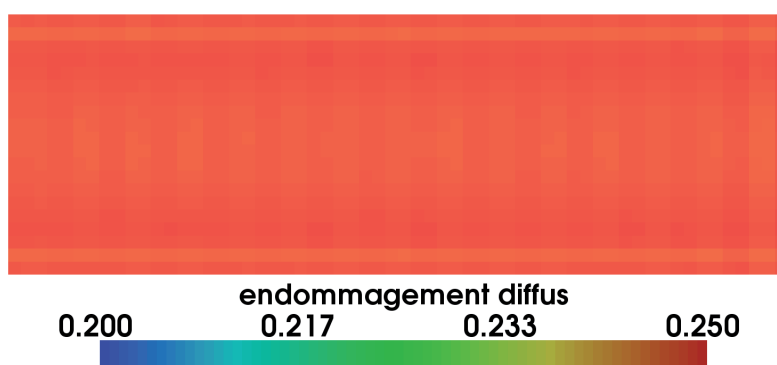
Ce problème se visualise bien si l'on observe la déformée d'une tranche loin des déplacements imposés, figure A.3, on peut clairement y voir un gauchissement de la section dans le cas du  $[\pm 45]_s$ . Ce n'est pas le cas pour le  $[0_2/90_2]_s$ . Cela explique pourquoi si l'on impose une déformation normale uniforme sur une section d'un  $[\pm 45]_s$ , les coins de cette section sont en surcharge, en compression ou en traction. Dans le cas du  $[0_2/90_2]_s$ , un problème interviendra également si l'on impose un effort normal constant sur toute une section. Le pli à  $90^\circ$  va se dégrader très rapidement.

Les raisons de ces problèmes sont :

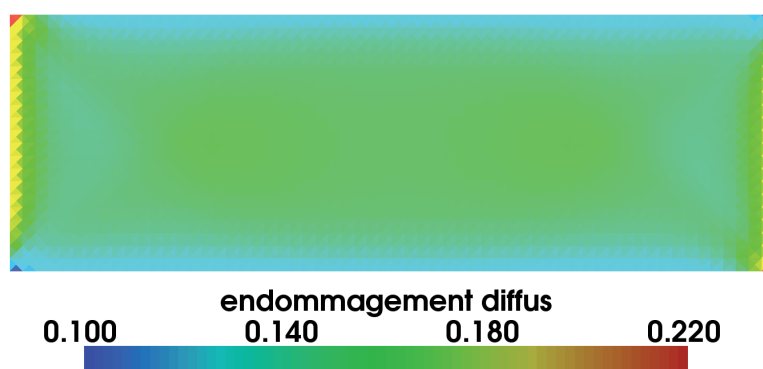
- les comportements très différents des plis unidirectionnels
  - le fait que la section droite ne soit pas alignée avec les axes privilégiés du comportement isotrope transverse
  - les bords libres qui modifient la répartition des contraintes sur les bords de la section
- Le paragraphe suivant propose une technique générale pour gérer ce problème.

## 2 Solution proposée

La première tentative pour résoudre ce problème était de trouver une solution analytique en déplacement ou en contrainte sur les bords de l'éprouvette. Rapidement, il s'est avéré difficile de trouver une solution simple à ce problème. Il s'agirait en fait de résoudre un problème de structure à part entière. Pour des stratifications complexes, il semblait difficile de trouver une solution analytique acceptable. L'idée est alors venue d'utiliser les calculs déjà effectués pour trouver la forme de la solution aux extrémités. Comme on l'a vu à la figure A.3, même si les conditions limites sont mauvaises, au centre de l'éprouvette en revanche, l'état de sollicitation est lui en "régime permanent". Il est donc possible d'exploiter cette solution "parfaite" pour affecter des conditions aux limites en accord avec le comportement des plis et les conditions de bords libres. Pour cela, comme l'illustre la figure A.4, l'idée est d'enregistrer les déplacements obtenus sur



(a) pli à 90 d'un 0/90



(b) 45/-45

**FIG. A.2:** Influence des conditions limites l'endommagement diffus.

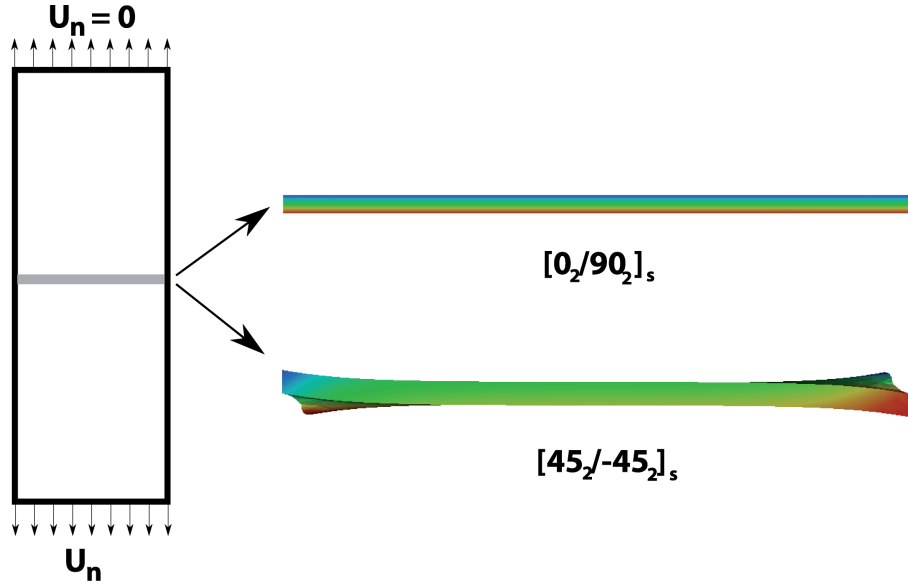


FIG. A.3: Déformation d'une tranche de stratifié (épaisseur  $0.1\text{mm}$ ), loin des conditions limites en déplacement. La couleur indique la valeur du déplacement aux noeuds.

une section de référence ( $x = x_{ref}$ ) de l'éprouvette et de les appliquer, après traitement, comme déplacement imposé.

### ■ Cas élastique

Dans un premier temps, pour simplifier, plaçons nous dans le cas élastique linéaire, sans déformation thermique, en deux dimensions. Considérons le résultat obtenu lors d'un premier calcul "grossier" en imposant des conditions limites classiques (déplacement normal uniforme par exemple). Le déplacement de la section de référence se décompose en un déplacement normal moyen  $\underline{u}_m$  constant sur la section, et un déplacement localisé  $\underline{u}_l(y)$  dépendant de la position sur la section, voir figure A.5. La partie locale des déplacements est constante pour n'importe quelle section, alors que la partie moyenne va évoluer. Elle vaudra 0 pour la section  $x = 0$ , et  $\underline{u}_l$  pour la section  $x = L$ . Donc dans ce cas, on peut imposer des conditions limites parfaites en imposant aux extrémités les déplacements :

$$\text{en } x = 0 \quad \underline{u} = \underline{u}_l \quad (\text{A.1})$$

$$\text{en } x = L \quad \underline{u} = \begin{cases} u_x = \underline{u}_l + \underline{u}_l \cdot \underline{x} \\ u_y(\underline{x}) = \underline{u}_l \cdot \underline{y} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Appliquer cela pour tous les calculs globaux, reviendrait à doubler le temps calcul. Le même principe est donc appliqué, mais en utilisant directement le pas de temps précédent  $T - 1$  pour avoir les conditions limites imposées au pas de temps  $T$ . On notera  $\underline{u}_l^t$  le déplacement moyen souhaité en bout d'éprouvette au pas de temps  $t$ . On notera  $\alpha$  le coefficient d'amplification défini par  $\alpha = \frac{\underline{u}_l^T}{\underline{u}_l^t}$ . Vu que l'on se place dans le cas élastique

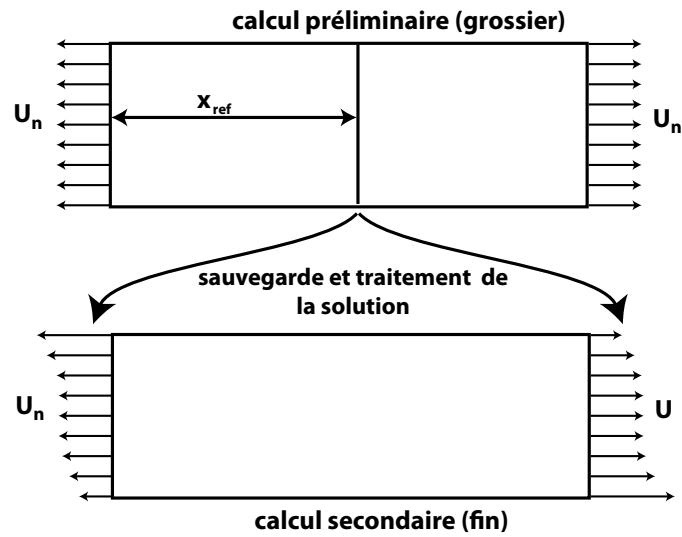


FIG. A.4: Déformation d'une tranche de stratifié (épaisseur  $0.1mm$ ), loin des conditions limites en déplacement. La couleur indique la valeur du déplacement aux noeuds.

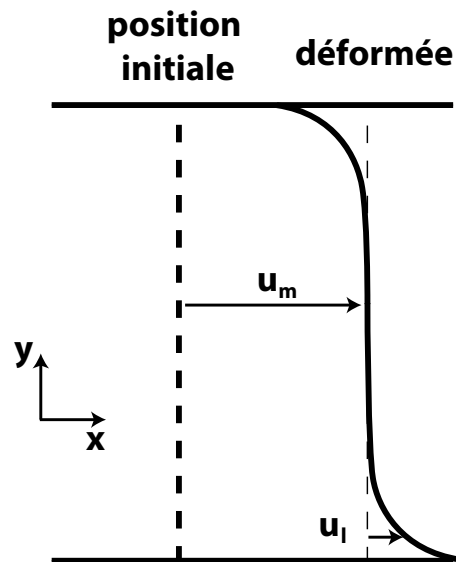


FIG. A.5: Décomposition du déplacement d'une section droite en une partie moyenne  $u_m$  et une partie locale  $u_l$ . Le déplacement suivant l'axe  $y$  n'est pas représenté.

linéaire, on peut alors déduire que le déplacement imposé au pas de temps  $T$ , noté  $\underline{u}^T$  peut s'exprimer à partir des déplacements  $\underline{u}_l^{T-1}(y)$  et  $\underline{u}_m^{T-1}$  enregistrés au pas de temps précédent sur la section de référence d'abscisse  $x_{ref}$ . On impose alors au pas de temps  $T$  :

$$\text{en } x = 0 \quad \underline{u}^T = \alpha \underline{u}_l \quad (\text{A.3})$$

$$\text{en } x = L \quad \underline{u}^T = \begin{bmatrix} u_x^T = \underline{u}_l^T + \alpha \underline{u}_l \cdot^{T-1} \cdot \underline{x} \\ u_y^T(\underline{x}) = \alpha \underline{u}_l^{T-1} \cdot \underline{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Un problème se pose lorsque les déplacements thermiques sont pris en compte. Lors des premiers pas de temps, ces déplacements peuvent être très supérieurs aux déplacements imposés, de sorte que la relation précédente, basée sur une évolution linéaire des déplacements en fonction de la charge, donne des résultats erronés. Une méthode simple basée sur le même principe est proposée afin d'intégrer cette spécificité ainsi que les non-linéarités.

### ■ Cas thermoélastique

On considère maintenant les déformations thermiques provoquées par une différence de température  $\Delta T$ . Si aucun effort ou déplacement n'est imposé, il existe déjà à l'état initial un gauchissement de la section provoqué par les contraintes thermiques. On notera  $\underline{u}_{th}$  le déplacement correspondant sur la section de référence. Ce déplacement existant avant tout chargement autre que thermique, revient à imposer un déplacement initial  $\underline{u}_l^0$  nul, qui sera la position de référence. Lorsque le chargement (autre que thermique) va s'appliquer, au pas de temps  $T - 1$ , on peut fractionner le déplacement de la section de référence en un déplacement thermique  $\underline{u}_{th}$  identique à celui du premier pas de temps, un déplacement local  $\underline{u}_l^{T-1}(y)$  et un déplacement moyen  $\underline{u}_m^{T-1}$ . D'un pas de temps sur l'autre, en considérant que le déplacement total privé du déplacement thermique évolue linéairement, les déplacements imposés en bout de poutre peuvent s'écrire :

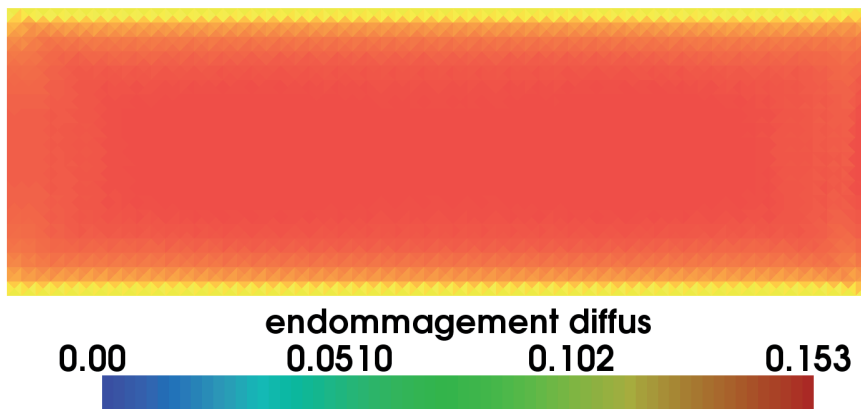
$$\text{en } x = 0 \quad \underline{u}^T = \underline{u}_{th} + \alpha \underline{u}_l \quad (\text{A.5})$$

$$\text{en } x = L \quad \underline{u}^T = \begin{bmatrix} u_x^T = \underline{u}_l^T + (\underline{u}_{th} + \alpha \underline{u}_l \cdot^{T-1}) \cdot \underline{x} \\ u_y^T(\underline{x}) = (\underline{u}_{th} + \alpha \underline{u}_l^{T-1}) \cdot \underline{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Le déplacement local  $\underline{u}_l$  contient à la fois les déplacements élastiques, visqueux et plastiques. De fait, l'hypothèse que  $\underline{u}_l$  évolue linéairement avec le déplacement imposé introduit une erreur. Cependant, les déplacements étant imposés de proche en proche, la méthode proposée revient à effectuer localement une linéarisation du comportement. Si les pas de temps restent suffisamment petits, cette approximation reste raisonnable. Il est cependant possible d'appliquer le même raisonnement en ajoutant à  $\underline{u}_{th}$  les parties plastiques et visqueuses. Cependant leur détermination s'avérerait alors très coûteuse. Par exemple, à chaque fois que la déformation plastique serait amenée à évoluer, il serait nécessaire d'effectuer un calcul global pour définir les déplacements plastiques correspondants. En pratique, cela pourrait être fait, mais entraînerait des coûts de calcul très importants. Cela ne s'est pas révélé nécessaire.

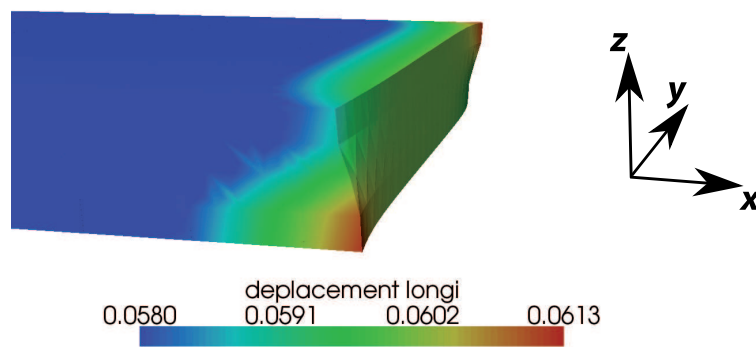
Si de la fissuration apparaît, il est probable que la section de référence soit traversée par une fissure. Dans ce cas, les déplacements de la section de référence au pas de temps précédent la fissuration sont conservés et les déplacements ou efforts imposés à tous les pas suivants sont définis à partir de ces derniers.

Ce principe de régularisation a été implémenté numériquement dans le cas des déplacements normaux imposés, des efforts imposés, en trois dimensions. La figure A.6 montre la carte d'endommagement correspondant au même chargement que celui de la figure A.2(b), dans le cas d'une plaque  $[\pm 45_2]_s$ , en utilisant la méthode proposée, dans le cas thermoélastique ( $\Delta T = -130^\circ C$ ). On constate que l'endommagement est quasiment constant suivant l'axe du stratifié. Ceci indique que les conditions limites imposées sont cohérentes, c'est à dire représentatives des sollicitations réelles de l'éprouvette au bord de la zone d'intérêt (rappel voir figure A.1). La figure A.7 illustre la condition limite en déplacement imposée en bout de domaine. Toutes les simulations proposées dans ce rapport utilisent cette technique de régularisation des déplacements ou efforts imposés.



**FIG. A.6:** Carte d'endommagement d'un  $[\pm 45_2]_s$  avec conditions limites régularisées.





**FIG. A.7:** Condition limite de déplacement imposée en bout de poutre. La couleur indique le déplacement suivant imposé  $\underline{x}$

# Bibliographie

- [Aboudi, 1987] ABOUDI, J. (1987). Stiffness reduction of cracked solids. *Engineering Fracture Mechanics*, 26:637–650.
- [Adams et Crane, 1984] ADAMS, D. et CRANE, D. (1984). Combined loading micro-mechanical analysis of a unidirectional composite. *Composites*, 15(3):181–192.
- [Argon, 1972] ARGON, A. (1972). Fracture of composites. *Herman, H. (Ed.), Treatise on Materials Science and Technology Academic Press, New York*, 1:79–114.
- [Babuska et Andersson, 2005] BABUSKA, I. et ANDERSSON, B. (2005). The splitting method as a tool for multiple damage analysis. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4):114–1145.
- [Berthelot, 2003] BERTHELOT, J. (2003). Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates : Static and fatigue loading. *Applied Mechanics Reviews*, 56(1):11–147.
- [Berthelot et Corre, 2000] BERTHELOT, J. M. et CORRE, J. F. L. (2000). A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 60(40):2659–2669.
- [Blassiau et al., 2009] BLASSIAU, S., THIONNET, A. et BUNSELL, A. (2009). Three-dimensional analysis of load transfer micro-mechanisms in fibre/matrix composites. *Composites Science and Technology*, 69(1):33–39.
- [Blazquez et al., 2009] BLAZQUEZ, A., MANTIC, V., PARIS, F. et MCCARTNEY, N. (2009). Bem analysis of damage progress in 0/90 laminates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(6):762–769.
- [Bordeu et al., 2008] BORDEU, F., BOUCARD, P., LUBINEAU, G. et LECLERC, H. (2008). A high performance strategy for the simulation of composites at mesoscale. *ECT 2008 - 6th International Conference on Engineering Computational Technology*.
- [Budiansky, 1983] BUDIANSKY, B. (1983). Micromechanics. *Computers and Structures*, 16:3–12.
- [Budiansky et Fleck, 1993] BUDIANSKY, B. et FLECK, N. (1993). Compressive failure of fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(1):183–211.
- [Camanho et al., 2007] CAMANHO, P., MAIMÍ, P. et DÁVILA, C. (2007). Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics. *Composites Science and Technology*, 67(13):2715–2727.

- [Camanho *et al.*, 2003] CAMANHO, P. P., DAVILA, C. G. et MOURA, M. F. M. (2003). Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 37(16):1415–1438.
- [Chen et Sun, 1991] CHEN, J. et SUN, C. (1991). A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites. *Composites science and technology*, 40(2):115–129.
- [Crossman et Wang, 1982] CROSSMAN, F. et WANG, A. (1982). The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminate. *ASTM special technical publication*, 775:118–139.
- [Daghia *et al.*, 2009] DAGHIA, F., LADEVÈZE, P., BORDEU, F. et PETIOT, C. (2009). On the validation of a micromechanics-based mesomodel for the simulation until failure of laminated composites. *Comptes Rendus des JNC 16*.
- [Dhia, 1998] DHIA, H. B. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12):899–904.
- [Dhia et Rateau, 2001] DHIA, H. B. et RATEAU, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7):649–654.
- [Dureisseix et Ladevèze, 1998] DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1998). A multi-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis. *ASM, Domain Decomposition Methods 10, Contemporary Mathematics*, 218:246–253.
- [Dvorak et Bahei-El-Din, 1982] DVORAK, G. et BAHEI-EL-DIN, Y. (1982). Plasticity analysis of fibrous composites. *Journal of applied mechanics*, 49(2):327–335.
- [Dvorak et Laws, 1987] DVORAK, G. et LAWS, N. (1987). Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates. 2 first ply failure. *Journal of Composite Materials*, 21(4):309–329.
- [end K. Copps end I. Babuska, 2001] end K. Copps end I. BABUSKA, T. S. (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32-33):4081–4193.
- [Farhat *et al.*, 2000] FARHAT, C., MACEDO, A., LESOINNE, M., ROUX, F. et MAGOULÈS, F. (2000). Two-level domain decomposition methods with lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182(2):213–240.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227.
- [Fortin et Glowinski, 1983] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1983). Augmented lagrangian methods : applications to th numerical solution of boundary value problems. *Stuies in Mathematics and its Applications*, chapter 15.
- [Gamstedt et Sjögren, 1999] GAMSTEDT, E. et SJÖGREN, B. (1999). Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies. *Composites Science and Technology*, 59(2):167–178.

- [Garrett et Bailey, 1977] GARRETT, K. et BAILEY, J. (1977). Multiple transverse fracture in 90 cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester. *Journal of Materials Science*, 12:157–168.
- [Glowinski et Tallec, 1990] GLOWINSKI, R. et TALLEC, P. L. (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwarz alternating method. *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 224–231.
- [Goertzen et Kessler, 2006] GOERTZEN, W. et KESSLER, M. (2006). Creep behavior of carbon fiber/epoxy matrix composites. *Materials Science and Engineering*, 421(1-2):217–225.
- [González et Llorca, 2007] GONZÁLEZ, C. et LLORCA, J. (2007). Mechanical behavior of unidirectional fiber-reinforced polymers under transverse compression : Microscopic mechanisms and modeling. *Composites Science and Technology*, 67(13):2795–2806.
- [Gramoll et al., 1989] GRAMOLL, K. C., DILLARD, D. et BRINSON, H. F. (1989). A stable numerical solution method for inplane loading of nonlinear viscoelastic laminated orthotropic materials. *Composites Structures*, 13(4):251–274.
- [Grandidier et Casari, 2009] GRANDIDIER, J. et CASARI, P. (2009). Critère de rupture en compression dans le sens des fibres du pli unidirectionnel intégrant l'effet de structure. *Comptes Rendus des JNC 16*.
- [Green et al., 2007] GREEN, B., WISNOM, M. et HALLETT, S. (2007). An experimental investigation into the tensile strength scaling of notched composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(3):867–878.
- [Guidault et al., 2008] GUIDAULT, P., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399.
- [Guimard et al., 2009] GUIMARD, J., ALLIX, O., PECHNIK, N. et THEVENET, P. (2009). Energetic analysis of fragmentation mechanisms and dynamic delamination modelling in cfrp composites. *Computers and Structures*, 87:1022–1032.
- [Gupta et al., 2005] GUPTA, J. S., ALLIX, O., BOUCARD, P., FANGET, A. et HEREIL, P. (2005). Fracture prediction of a 3d c/c material under impact. *Composites Science and Technology*, 65(3/4):375–386.
- [Hallett et Winsom, 2008] HALLETT, S. et WINSOM, M. (2008). The open hole tensile test - a challenge for virtual testing. *WCCM8, Venise*.
- [Hallett et Wisnom, 2008] HALLETT, S. et WISNOM, M. (2008). The open hole tensile test - a challenge for virtual testing of composites. *WCCM 8, Venise*.
- [Hansen et al., 1991] HANSEN, A., BLACKKETTER, D. et WALRATH, D. (1991). An invariant-based flow rule for anisotropic plasticity applied to composites materials. *Journal of Applied Mechanics*, 58:881–888.

- [Harrison et Bader, 1983] HARRISON, R. et BADER, M. (1983). Damage development in cfrp laminates under monotonic and cyclic stressing. *Fiber Science and Technology*, 18(3):163–180.
- [Hashin, 1985] HASHIN, Z. (1985). Analysis of cracked laminates : a variational approach. *Mechanics of Materials*, 4(2):121–136.
- [Hashin, 1987] HASHIN, Z. (1987). Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. *Journal of applied mechanics*, 54(4):872–879.
- [Hashin, 1996] HASHIN, Z. (1996). Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(7):1129–1145.
- [Herakovich *et al.*, 1988] HERAKOVICH, C. T., ABOUDI, J., LEE, S. W. et STRAUSS, E. A. (1988). Damage in composite laminates : effects of transverse cracks. *Mechanics of Materials*, 7:91–107.
- [Heuvel *et al.*, 2004] HEUVEL, P. V. D., GOUTIANOS, S., YOUNG, R. et PEIJS, T. (2004). Failure phenomena in fibre-reinforced composites. part 6 : a finite element study of stress concentrations in unidirectional carbon fibre-reinforced epoxy composites. *Composites Science and Technology*, 64(5):645–656.
- [Hill, 1950] HILL, R. (1950). The mathematical theory of plasticity. *Oxford University Press*.
- [Hochard *et al.*, 2006] HOCHARD, C., PAYAN, J. et BORDREUIL, C. (2006). A progressive first ply failure model for woven ply cfrp laminates under static and fatigue loads. *International Journal of Fatigue*, 28:1270–1276.
- [Hochard et Thollon, 2010] HOCHARD, C. et THOLLON, Y. (2010). A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 32:158–165.
- [Hoover *et al.*, 1997] HOOVER, J. W., KUJAWSKI, D. et ELLYIN, F. (1997). Transverse cracking of symmetric and unsymmetric glass-fibre/epoxy-resin laminates. *Composites Science and Technology*, 57(11):1513–1526.
- [Jiang *et al.*, 2007] JIANG, W. G., HALLETT, S. R., GREEN, B. G. et WISNOM, M. R. (2007). A concise interface constitutive law for analysis of delamination and splitting in composite materials and its application to scaled notched tensile specimens. *International journal for numerical methods in engineering*, 69(9):1982–1995.
- [Kachanov, 1958] KACHANOV, L. M. (1958). On creep rupture time. *Otd. Tekhn. Nauk., Mekh. Mashinostr.*, 8:26–31.
- [Kawai *et al.*, 2006] KAWAI, M., MASUKO, Y. et SAGAWA, T. (2006). Off-axis tensile creep rupture of unidirectional cfrp laminates at elevated temperature. *Composites : Part A*, 37(2):257–269.
- [Kerfriden, 2008] KERFRIDEN, P. (2008). Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés. *Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*.

- [Kerfriden *et al.*, 2009] KERFRIDEN, P., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2009). A three-scale domain decomposition method for the 3d analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 44(3):343–362.
- [Ladeveze et Nouy, 2003] LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3061–3087.
- [Ladeveze *et al.*, 2002] LADEVÈZE, P., NOUY, A. et LOISEAU, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43):4869–4891.
- [Ladevèze, 1986] LADEVÈZE, P. (1986). Sur la mécanique de l'endommagement des composites. *Compte-rendu des JNC5, Pluralis Publication*, pages 667–683.
- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). Nonlinear computational structural mechanics -new approaches and non-incremental methods of calculation. *Springer Verlag*.
- [Ladevèze, 2005] LADEVÈZE, P. (2005). Multiscale computational damage modelling of laminated composites. *Multiscale modelling of damage and fracture processes in composite materials, CISM courses, SpringerWien, New York*, Lecture No 474.
- [Ladevèze et Dantec, 1992] LADEVÈZE, P. et DANTEC, E. L. (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3):257–267.
- [Ladevèze et Dureissex, 1999] LADEVÈZE, P. et DUREISSEX, D. (1999). Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 327:1327–1244.
- [Ladevèze et Lubineau, 2001] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2001). On a damage mesomodel for laminates : micro-meso relationships, possibilities and limits. *Composites Science and Technology*, 61(15):2149–2158.
- [Ladevèze et Lubineau, 2002] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2002). An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composites Science and Technology*, 62(4):533–541.
- [Ladevèze *et al.*, 2006a] LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et MARSAL, D. (2006a). Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66(6):698–712.
- [Ladevèze *et al.*, 2006b] LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et VIOLEAU, D. (2006b). A computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137(1-4):139–150.
- [Ladevèze *et al.*, 2009] LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. et NÉRON, D. (2009). The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [Lagattu et Lafarie-Frenot, 2000] LAGATTU, F. et LAFARIE-FRENOT, M. C. (2000). Variation of peek matrix crystallinity in apc-2 composite subjected to large shearing deformations. *Composites Science and Technology*, 60(4):605–612.



- [Laurin *et al.*, 2009] LAURIN, F., CARRÈRE, N. et MAIRE, J.-F. (2009). Multiscale hybrid failure approach for strength analysis of composite structures subjected to complex 3d loadings. *Comptes Rendus des JNC 16*.
- [Leaderman, 1943] LEADERMAN, H. (1943). Elastic and creep properties of filamentous materials. *Textile Foundation*.
- [Lim et Hong, 1989] LIM, S. G. et HONG, C. S. (1989). Prediction of transverse cracking and stiffness reduction in cross-ply laminated composites. *Journal of composite materials*, 23(7):695–713.
- [Lubineau, 2002] LUBINEAU, G. (2002). Sur un mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés : relations micro-meso, possibilités et limites. *Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*.
- [Lubineau et Ladevèze, 2008] LUBINEAU, G. et LADEVÈZE, P. (2008). Construction of a micromechanics-based intralaminar mesomodel, and illustrations in abaqus/standard. *Computational Materials Science*, 43(1):137–145.
- [M. Xie, 1995] M. XIE, D. A. (1995). A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing. *Composites Science and Technology*, 54(1):11–21.
- [Maire, 1992] MAIRE, J. (1992). Etudes théorique et expérimentale du comportement des matériaux composites en contraintes planes. *Thèse de Doctorat de l'université de Franche-Comté*.
- [Maire et Chaboche, 1997] MAIRE, J. F. et CHABOCHE, J. L. (1997). A new formulation of continuum damage mechanics (cdm) for composite materials. *Aerospace Science and Technology*, 1(4):247–257.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:233–241.
- [Melenk et Babuska, 1996] MELENK, J. et BABUSKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314.
- [Nairn, 1995] NAIRN, J. (1995). Some new variational mechanics results on composite microcracking. *ICCM 10*, pages 423–430.
- [Nairn, 2000] NAIRN, J. (2000). Matrix microcracking in composites. *Polymer matrix composites, Volume 2 of comprehensive composite materials, Elsevier Science*, pages 403–432.
- [Nairn, 1989] NAIRN, J. A. (1989). The strain energy release rate of composite microcracking : a variational approach. *Journal of Composite Materials*, 23(11):1106–1129.
- [Nairn et Hu, 1992] NAIRN, J. A. et HU, S. (1992). The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. *International Journal of Fracture*, 57(1):1–24.

- [Neron *et al.*, 2008] NERON, D., LADEVEZE, P., CAIGNOT, A. et DURAND, J. (2008). A multicontact problem : The virtual testing of joints for the prediction of damping. *WCCM 8 - 8th World Congress on Computational Mechanics/ECCOMAS 2008 - 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- [Nguyen et Gamby, 2007] NGUYEN, T. et GAMBY, D. (2007). Effects of nonlinear viscoelastic behaviour and loading rate on transverse cracking in cfrp laminates. *Composites Science and Technology*, 67(3-4):438–452.
- [Odievre, 2009] ODIEVRE, D. (2009). Stratégie de calcul multiéchelle en dynamique transitoire. *Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*.
- [O'Higgins *et al.*, 2007] O'HIGGINS, R., MCCARTHY, M. et MCCARTHY, C. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1436–1446.
- [O'Higgins *et al.*, 2008] O'HIGGINS, R., MCCARTHY, M. et MCCARTHY, C. (2008). Comparison of open hole tension characteristics of high strength glass and carbon fibre-reinforced composite materials. *Composites Science and Technology*, 68(13): 2770–2778.
- [Okabe *et al.*, 2008] OKABE, T., NISHIKAWA, M. et TAKEDA, N. (2008). Numerical modeling of progressive damage in fiber reinforced plastic cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 68(10-11):2282–2289.
- [Papanicolaou *et al.*, 1999] PAPANICOLAOU, G. C., ZAOUTSOS, S. P. et CARDON, A. H. (1999). Prediction of the non-linear viscoelastic response of unidirectional fiber composites. *Composites Science and Technology*, 59(9):1311–1319.
- [Parvizi *et al.*, 1978] PARVIZI, A., GARRETT, K. W. et BAILEY, J. E. (1978). Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science*, 13(1):195–201.
- [Pebrel *et al.*, 2008] PEBREL, J., REY, C. et GOSSELET, P. (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal of Multiscale Computational Engineering*, 6(3):251–262.
- [Puck et Schürmann, 2002] PUCK, A. et SCHÜRMAN, H. (2002). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62(12-13):1633–1662.
- [Rabotnov, 1968] RABOTNOV, Y. N. (1968). Creep rupture. *XII International Congress on Applied Mechanics, Stanford*.
- [Renard et Thionnet, 2006] RENARD, J. et THIONNET, A. (2006). Damage in composites : From physical mechanisms to modelling. *Composites Science and Technology*, 66(5):642–646.
- [Schapery, 1966] SCHAPERY, R. A. (1966). A theory of non-linear thermoviscoelasticity based on irreversible thermodynamics. *Fifth US National Congress in Applied Mechanics, ASME*, page 511.



- [Schapery, 1968] SCHAPERY, R. A. (1968). On a thermodynamics constitutive theory and its application to various nonlinear materials. *UITAM symposium on Thermoelasticity*, Springer, pages 259–284.
- [Schieffer, 2003] SCHIEFFER, A. (2003). Analyse multiéchelle du comportement mécanique des composites à matrice organique et effets du vieillissement thermique. *Thèse de Doctorat ; Université de technologie de Troyes*.
- [Schieffer et al., 2002] SCHIEFFER, A., MAIRE, J. et LÉVÊQUE, D. (2002). A coupled analysis of mechanical behaviour and ageing for polymer-matrix composites. *Composites Science and Technology*, 62:543–549.
- [Sjögren et Berglund, 2000] SJÖGREN, B. A. et BERGLUND, L. A. (2000). The effects of matrix and interfacial term on damage in grp cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 60(1):9–21.
- [Strouboulis et al., 2000] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I. et COPPS, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-3):43–69.
- [Sun et Chen, 1989] SUN, C. et CHEN, J. (1989). A simple flow rule for characterizing nonlinear behavior of fiber composites. *Journal of Composite Materials*, 23(10):1009–1020.
- [Sutcliffe et Fleck, 1997] SUTCLIFFE, M. et FLECK, N. (1997). Microbuckle propagation in fibre composites. *Acta Materialia*, 45(3):921–932.
- [Takeda et Ogiwara, 1994] TAKEDA, N. et OGIHARA, S. (1994). Initiation and growth of delamination from the tips of transverse cracks in cfrp cross-ply laminates. *Composites science and technology*, 52(3):309–318.
- [Talreja, 1994] TALREJA, R. (1994). Damage characterization by internal variables. *Damage Mechanics of Composite materials*, Editor : R. Talreja:53–78.
- [Thiébaud, 1994] THIÉBAUD, F. (1994). Modélisation du comportement global en sollicitations quasi-statiques d'un composite stratifié verre epoxy : aspect théorique et expérimental. *Thèse de Doctorat de l' Université de Franche Comté*.
- [Totry et al., 2008] TOTRY, E., GONZÁLEZ, C. et LLORCA, J. (2008). Prediction of the failure locus of c/peek composites under transverse compression and longitudinal shear through computational micromechanics. *Composites Science and Technology*, 68:3128–3136.
- [Vergnault, 2009] VERGNAULT, E. (2009). Approche locale-globale de la rupture en interaction fluide-structure encadré par olivier allix. *Thèse de doctorat de l' Ecole Normale Supérieure de Cachan*.
- [Vinet, 1997] VINET, A. (1997). Identification d'une loi de comportement viscoélastique-viscoplastique pour des stratifiés aéronautiques . prévision du comportement a long terme à l'aide d'essais accélérés. *Thèse de doctorat de l' université de Poitiers*.

- [Violeau, 2003] VIOLEAU, D. (2003). Sur une amélioration de la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation. *Memoire de DEA TACS, LMT-Cachan*.
- [Violeau, 2006] VIOLEAU, D. (2006). Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle micro des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés. *Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*.
- [Violeau et al., 2009] VIOLEAU, D., LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2009). Micromodel-based simulations for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 69(9):1364–1371.
- [Vogler et al., 2000] VOGLER, T., HSU, S. et KYRIAKIDES, S. (2000). Composite failure under combined compression and shear. *International Journal of Solids and Structures*, 37(12):1765–1791.
- [Wang et Hansen, 1993] WANG, R. S. D. et HANSEN, A. (1993). Plasticity model for transversely isotropic materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(4):748–766.
- [Wisnom et Green, 1995] WISNOM, M. et GREEN, D. (1995). Tensile failure due to interaction between fibre breaks. *Composites*, 26(7):499–508.
- [Yashiro et al., 2007] YASHIRO, S., OKABE, T., TOYAMA, N. et TAKEDA, N. (2007). Monitoring damage in holed cfrp laminates using embedded chirped fbg sensors. *International Journal of Solids and Structures*, 44(2):603–613.
- [Yerramalli et Waas, 2003] YERRAMALLI, C. S. et WAAS, A. M. (2003). A failure criterion for fiber reinforced polymer composites under combined compression -torsion loading. *International Journal of Solids and Structures*, 40:1139–1164.
- [Yokozeiki et al., 2007] YOKOZEKI, T., OGIHARA, S., YOSHIDA, S. et OGASAWARA, T. (2007). Simple constitutive model for nonlinear response of fiber-reinforced composites with loading-directional dependence. *Composites Science and Technology*, 67(1):111–118.
- [Zhao et Takeda, 2000] ZHAO, F. M. et TAKEDA, N. (2000). Effect of interfacial adhesion and statistical fiber strength on tensile strength of unidirectional glass fiber/epoxy composites. part. ii : comparison with prediction. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(11):1215–1224.