



HAL
open science

Sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes

Mihai Damian

► **To cite this version:**

Mihai Damian. Sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes. Mathématiques [math]. Université de Strasbourg, 2010. tel-00528690

HAL Id: tel-00528690

<https://theses.hal.science/tel-00528690>

Submitted on 13 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Habilitation à diriger des recherches

Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Mihai Damian

Sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes


Soutenue le 15 novembre 2010
devant la commission d'examen

Michèle Audin, garante
François Lalonde, rapporteur
François Laudenbach, examinateur
Kaoru Ono, rapporteur
Jean-Claude Sikorav, rapporteur
Claude Viterbo, examinateur


www-irma.u-strasbg.fr



Une lagrangienne L dans une variété symplectique (M, ω) est une sous-variété de dimension maximale telle que $\omega|_L = 0$. Nous démontrons plusieurs propriétés des sous-variétés lagrangiennes compactes, en relation avec deux conjectures classiques en topologie symplectique : la conjecture d'Arnold et la conjecture d'Audin. Une version de la première affirme qu'une sous-variété lagrangienne exacte L dans un fibré cotangent T^*K (où K est compacte) est homéomorphe à K . La seconde affirme que le nombre de Maslov d'un tore lagrangien dans \mathbb{R}^{2n} est égal à 2. Nous prouvons la version ci-dessus de la conjecture d'Arnold si K est une sphère de dimension impaire et nous établissons des restrictions topologiques sur L dans le cas où K fibre sur le cercle. Sous l'hypothèse que la sous-variété lagrangienne est monotone nous généralisons la conjecture d'Audin au cas des sous-variétés asphériques et à d'autres cas encore plus généraux. Pour n pair, nous donnons également une caractérisation topologique des lagrangiennes monotones de \mathbb{R}^{2n} à nombre de Maslov maximal. Pour démontrer tous ces résultats nous définissons deux nouvelles versions de l'homologie de Floer lagrangienne : l'homologie de Floer-Novikov et l'homologie de Floer relevée.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



Institut de Recherche
Mathématique Avancée

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28
www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr

ISSN 0755-3390

IRMA 2010/010

<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00528690>

SUR LA TOPOLOGIE DES SOUS-VARIÉTÉS LAGRANGIENNES

Mihai DAMIAN

à la mémoire d'Ana Damian, (1913-2009)

Chapitre 1

Introduction

1 Le contexte

Les sous-variétés lagrangiennes vivent dans des variétés symplectiques. Par définition, une variété symplectique est une variété de dimension paire M^{2n} , munie d'une 2-forme fermée non-dégénérée ω , que l'on appelle forme symplectique. L'exemple le plus simple est \mathbf{R}^{2n} muni de

$$(1) \quad \omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Localement, c'est d'ailleurs le seul : d'après un théorème de Darboux, tout point d'une variété symplectique possède un voisinage difféomorphe à une boule de \mathbf{R}^{2n} munie de la forme ω_0 , par un difféomorphisme qui préserve la forme symplectique. L'étude locale des variétés symplectiques est de ce fait moins intéressante même si, comme on le verra par la suite, des questions ouvertes subsistent aussi dans ce cadre.

La géométrie globale des variétés symplectiques est bien plus compliquée. Un de ses aspects les plus importants est lié à l'étude de la dynamique des flots hamiltoniens : à un hamiltonien $H : M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on associe le champ de vecteurs X_t qui est le dual symplectique de dH_t : si ω est la forme symplectique, ce champ est défini par la formule

$$\omega(\cdot, X_t) = dH_t(\cdot).$$

Un des points de départ du développement de la géométrie symplectique moderne est une conjecture formulée par Arnold dans [2] ; elle affirme que le flot d'un champ hamiltonien générique possède au moins autant d'orbites périodiques de période fixée qu'une fonction de Morse sur la variété a de points critiques.

Une autre approche vers la compréhension de la géométrie globale des variétés symplectiques est l'étude de leurs sous-variétés. On peut naturellement définir des sous-variétés symplectiques dans une variété symplectique en demandant que la restriction de la forme symplectique garde les mêmes propriétés. Une autre catégorie de sous-variétés présente beaucoup plus d'intérêt ; ce sont les sous-variétés lagrangiennes. Par définition, ce sont les sous-variétés isotropes (c'est-à-dire sur lesquelles la forme symplectique s'annule) de dimension maximale $n = \dim(M)/2$. Ces sous-variétés apparaissent naturellement dans l'analyse des orbites périodiques d'un flot hamiltonien ϕ_t : le graphe de ϕ_1

$$\Gamma_{\phi_1} = \{(m, \phi_1(m)), m \in M\}$$

est une sous-variété lagrangienne de $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$ de sorte que les orbites 1-périodiques du flot correspondent aux intersections entre les lagrangiennes Γ_{ϕ_1} et Γ_{Id} . Il y a ainsi une version lagrangienne de la conjecture d'Arnold et toute la théorie développée pour démontrer cette conjecture - basée sur l'homologie de Floer dont on parlera par la suite - admet une description dans le cadre lagrangien.

L'objectif de ce mémoire est de faire une présentation des propriétés topologiques des sous-variétés lagrangiennes dans des variétés symplectiques données qui inclura des résultats que nous avons démontrés en [21], [22], [23]. On considérera les exemples classiques de variétés symplectiques ambiantes : l'espace euclidien \mathbf{R}^{2n} , les fibrés cotangents des variétés compactes, l'espace projectif complexe, etc. Toutes les sous-variétés lagrangiennes seront supposées compactes, sans bord.

2 Exemples, résultats connus et questions

2.1 Sous-variétés lagrangiennes de $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$

Une sous-variété lagrangienne de \mathbf{R}^{2n} peut être poussée dans une boule arbitrairement petite par un flot qui préserve la propriété d'être lagrangienne :

celui du champ radial $X(x) = -x$, raison pour laquelle on les appelle parfois “locales”. Par conséquent, en appliquant le théorème de Darboux, ces sous-variétés peuvent être plongées dans n’importe quelle variété symplectique. Mais nous sommes loin pour le moment d’une classification des variétés L qui admettent un plongement lagrangien dans \mathbf{R}^{2n} . Toutefois la situation est relativement bien comprise en petite dimension.

a. Cas $n = 1$

Dans ce cas toutes les sous-variétés sont lagrangiennes... mais il n’y en a qu’une : le cercle \mathbf{S}^1 .

b. Cas $n = 2$

La seule 2-variété orientable qui se plonge comme une lagrangienne dans \mathbf{R}^4 est le tore \mathbf{T}^2 . Cela vient d’un résultat de M. Audin [5], qui affirme que la caractéristique d’Euler d’une telle variété doit être nulle. Dans le cas non-orientable, ce même théorème impose $\chi(L)$ nulle modulo 4. Réciproquement, une construction de Givental [39] montre que toutes les surfaces non-orientables qui satisfont à cette condition admettent des plongements lagrangiens, à l’exception de la bouteille de Klein. Ce dernier cas a longtemps été ouvert, avant d’être récemment résolu par V. Shevchichin [68] et S. Nemirovski [58], [59] qui ont prouvé que la bouteille de Klein n’admet pas de plongement lagrangien en \mathbf{R}^4 .

c. Cas $n = 3$

Pour trouver des exemples de sous-variétés lagrangiennes de \mathbf{R}^6 on peut appliquer un résultat plus général, dû à M. Audin [5] :

Théorème 1.1 *Si L admet une immersion lagrangienne dans \mathbf{R}^{2n} , alors il existe un plongement lagrangien de $L \times \mathbf{S}^1$ dans \mathbf{R}^{2n+2} .*

Notons que le problème de l’existence des immersions lagrangiennes est beaucoup plus simple que celui des plongements lagrangiens, puisqu’il entre dans le domaine d’application du h -principe de Gromov [41]. Cela fait qu’on a une réponse précise pour cette question d’existence :

Théorème 1.2 *Il existe une immersion lagrangienne $L \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ si et seulement si le fibré $TL \otimes \mathbf{C}$ est trivial.*

En particulier les produits $\mathbf{S}^1 \times \Sigma$, où Σ est une 2-variété compacte, admettent des plongements lagrangiens dans \mathbf{R}^6 . Réciproquement, un résultat récent de K. Fukaya [34] affirme

Théorème 1.3 *Une variété compacte orientable et irréductible L de dimension 3 admet un plongement lagrangien dans \mathbf{R}^6 si et seulement si elle est difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \Sigma_g$, où Σ_g est une surface orientable.*

Dans l’hypothèse de ce théorème “variété irréductible” signifie que L n’est pas somme connexe (non-triviale) de deux variétés compactes. Cette condition est naturelle si on tient compte du résultat suivant de L. Polterovich [67] :

Théorème 1.4 *Si L admet une immersion lagrangienne dans \mathbf{R}^{2n} , alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que :*

- si n est pair la somme connexe de L et k copies de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ se plonge dans \mathbf{R}^{2n} comme sous-variété lagrangienne.
- pour n quelconque la somme connexe de L et k copies de

$$\mathbf{S}^{n-1} \times [0, 1] / (x, 0) \equiv (\tau x, 1)$$

se plonge dans \mathbf{R}^{2n} comme sous-variété lagrangienne, où τ est une involution (symétrie) standard.

On ne sait pas en revanche si des sommes connexes de facteurs différents de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ admettent des plongements dans \mathbf{R}^6 .

d. Cas n quelconque

Les théorèmes 1.1 et 1.4 fournissent des exemples de plongements lagrangiens. Nous avons ainsi le tore \mathbf{T}^n et ses sommes connexes avec des facteurs $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ pour n pair. Aussi, le théorème 1.1 implique que $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ se plonge comme sous-variété lagrangienne de \mathbf{R}^{2n} . D’un autre côté, le résultat de M. Audin, évoqué au point b., impose une restriction topologique sur la variété L . Une autre est donnée par un résultat célèbre de M. Gromov [40] :

Théorème 1.5 *Si $L \hookrightarrow \mathbf{R}^{2n}$ est une sous-variété lagrangienne compacte, alors $\omega_0|_{\pi_2(\mathbf{R}^{2n}, L)} \neq 0$. En particulier L n’est pas simplement connexe.*

Les exemples ci-dessus suggèrent que les sous-variétés lagrangiennes irréductibles de \mathbf{R}^{2n} sont des produits par \mathbf{S}^1 . En réalité il y a aussi des exemples, construits par F. Lalonde dans [47] et L. Polterovich dans [66], qui sont des fibrés (non-triviaux) sur le cercle. En revanche, à ma connaissance, on ne sait pas s'il y en a qui ne sont pas des espaces totaux d'une fibration sur le cercle. Et on ne connaît pas non plus d'autres restrictions topologiques à part celles que l'on vient de mentionner. Cela montre que l'étude des sous-variétés lagrangiennes "locales" est déjà difficile.

Rappelons pour finir cette section l'existence d'une sphère lagrangienne dans \mathbf{R}^6 , muni d'une structure symplectique non-standard. Cet exemple remarquable est dû à Marie-Paule Muller [56].

2.2 Sous-variétés lagrangiennes dans (T^*K, ω_K)

Une généralisation de la formule (1) ci-dessus définit plus généralement une structure symplectique sur le fibré cotangent T^*K d'une variété K quelconque. Ces variétés symplectiques sont dites exactes puisque la forme symplectique associée ω_K l'est ; on a $\omega_K = d\lambda_K$, où λ_K est la forme de Liouville :

$$\lambda_K = \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Dans ces variétés il est naturel de définir une classe spéciale de sous-variétés, que l'on appelle lagrangiennes *exactes* : ce sont les sous-variétés $L \subset T^*K$ avec $\dim(L) = \dim(K)$ telles que la restriction de λ_K à L est une 1-forme exacte. L'exemple le plus simple est la section nulle 0_K ; aussi, les graphes de différentielles de fonctions $f : K \rightarrow \mathbf{R}$

$$L_f = \{(q, d_q f) \mid q \in K\}$$

sont exactes. Encore plus généralement, les déformations de la section nulle par une isotopie hamiltonienne sont également des sous-variétés lagrangiennes exactes. En revanche, les sous-variétés lagrangiennes "locales", celles qui proviennent de \mathbf{R}^{2n} via le théorème de Darboux, n'entrent pas dans cette catégorie (à cause de la restriction imposée par Th. 1.5). En fait la question de l'existence d'exemples de sous-variétés lagrangiennes de T^*K qui ne sont pas des déformations hamiltoniennes de la section nulle, évoquée pour la première fois par V.I. Arnold dans [2], est ouverte :

Question 1.6 *Est-ce que toute sous-variété lagrangienne exacte de T^*K est isotope à la section nulle par une isotopie hamiltonienne ?*

Dans le cas du cotangent de \mathbf{S}^2 , une réponse positive a été donnée par R. Hind [42] ; c'est la seule réponse précise pour le moment. Dans le cas général, des résultats obtenus par différents auteurs (P. Seidel [70], L. Buhovski [16]) vont également dans le sens d'une réponse positive, mais la démonstration semble hors de portée actuellement. Le résultat le plus général en dimension quelconque a été obtenu par K. Fukaya, P. Seidel et I. Smith [36], [37] :

Théorème 1.7 *Soit $L \subset T^*K$ lagrangienne exacte. On suppose que L et K sont spin et que la classe de Maslov de L est nulle. Alors la projection $p : L \rightarrow K$ induit un isomorphisme en homologie.*

Nous définirons dans la section §3 de ce chapitre la classe de Maslov associée à une sous-variété lagrangienne.

Pendant l'écriture de ce texte, M. Abouzaid m'a envoyé une généralisation du résultat précédent [1]. Il démontre que la projection p est une équivalence d'homotopie.

Finissons cette section comme la précédente en signalant l'existence d'une structure symplectique exotique sur $T^*\mathbf{S}^n$ pour laquelle le fibré cotangent n'admet pas de sphère lagrangienne homologue à la section nulle. Ceci est un résultat de M. Maidanskyi et P. Seidel [54].

2.3 Sous-variétés lagrangiennes dans $(\mathbf{CP}^n, \omega_{FS})$

La forme symplectique sur \mathbf{CP}^n est la forme dite de Fubini-Study : c'est l'unique forme dont le tiré-en-arrière (pullback) via la fibration $\mathbf{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{CP}^n$ vaut la restriction à \mathbf{S}^{2n+1} de la forme symplectique standard sur \mathbf{R}^{2n+2} . Comme toute variété symplectique, \mathbf{CP}^n possède les sous-variétés lagrangiennes qui viennent de \mathbf{C}^n . Un exemple qui n'entre pas dans cette catégorie est \mathbf{RP}^n avec l'inclusion canonique. On peut se demander s'il y en a d'autres. La réponse, affirmative, est donnée par un exemple, dû à R. Chiang [18], d'un plongement lagrangien d'un quotient de \mathbf{RP}^3 par le groupe diédral D_3 dans \mathbf{CP}^3 . Si on impose une hypothèse supplémentaire sur le groupe fondamental de la lagrangienne on aboutit à une conjecture, formulée par P. Biran et O. Cornea [13]. Elle affirme :

Conjecture 1.8 *Toute sous-variété lagrangienne de \mathbf{CP}^n et dont le groupe fondamental est de 2-torsion (ou plus généralement telle que $2H_1(L, \mathbf{Z}) = 0$) est difféomorphe à \mathbf{RP}^n .*

Sous ces hypothèses, la sous-variété lagrangienne L a le même anneau de cohomologie sur $\mathbf{Z}/2$ que \mathbf{RP}^n . Cela a été démontré par P. Seidel dans [69], et indépendamment par P. Biran et O. Cornea dans [11] et [13].

On sait aussi que, comme \mathbf{R}^{2n} , l'espace projectif complexe ne possède pas non plus de sous-variété lagrangienne simplement connexe. C'est un résultat obtenu indépendamment de P. Biran [11] et P. Seidel [69].

3 Nombre de Maslov et lagrangiennes monotones

Considérons le cercle unité $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$. Lorsqu'on le parcourt, son plan tangent (qui est une droite) fait deux tours avant de revenir à sa position initiale. Dans le langage des sous-variétés lagrangiennes on dira que le nombre de Maslov du cercle est 2. Pour définir l'analogie pour une sous-variété lagrangienne $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ on associera à un lacet de L le lacet défini par les espaces tangents correspondants qui vit dans la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(n)$ - l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de \mathbf{R}^{2n} . Celle-ci peut être identifiée au quotient $U(n)/O(n)$ et on peut démontrer que le carré du déterminant définit une application de $\Lambda(n)$ dans \mathbf{S}^1 , qui induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Nous venons donc d'associer à la lagrangienne L un morphisme $\pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z}$, autrement dit une classe de cohomologie entière de degré 1. C'est qu'on appelle *la classe de Maslov* de L . Le nombre de Maslov N_L est le générateur positif du sous-groupe de \mathbf{Z} qui est l'image de ce morphisme. Nous avons vu que pour le cercle unité dans \mathbf{R}^2 on a $N_L = 2$. Cela reste évidemment vrai pour le tore standard $\mathbf{T}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$. Une conjecture de M. Audin [5] affirme que tous les tores lagrangiens ont la même propriété :

Conjecture 1.9 *Si $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ est un tore lagrangien, alors $N_L = 2$.*

Cette conjecture a fait l'objet de plusieurs travaux que nous résumons dans ce qui suit. Le premier résultat est dû à C. Viterbo [74] qui démontre

la conjecture dans le cas $n = 2$ et qui donne une limitation (entre 2 et $n + 1$) pour le nombre de Maslov dans le cas général. Des idées de preuves dans le cas général ont été annoncées par Y. Eliashberg et ultérieurement par K. Cieliebak et K. Mohnke, mais il semble que ces preuves n'ont pas encore abouti. Puis, plus récemment, K. Fukaya a publié une preuve dans [34] pour le cas plus général des sous-variétés lagrangiennes sphériques (c'est-à-dire dont les groupes d'homotopie d'ordre supérieur sont nuls) qui sont orientables et spin. Quelques détails techniques manquants ne sont pas encore publiés.

Il existe toutefois des preuves complètes de la conjecture d'Audin dans le cas où la sous-variété lagrangienne est un tore monotone. Ce sont des résultats de P. Biran et O. Cornea [13] et L. Buhovski [17]. Y-G. Oh avait auparavant donné une démonstration pour des tores lagrangiens monotones de dimension inférieure ou égale à 24 [63]. Nous donnons plus bas la définition des lagrangiennes monotones. Sous cette hypothèse, nous allons démontrer plusieurs généralisations de la conjecture d'Audin, en particulier le cas sphérique, y compris si la sous-variété n'est pas orientable (voir les énoncés dans la section suivante).

La question des valeurs possibles du nombre de Maslov pour une lagrangienne quelconque est très intéressante. Par exemple, on ne connaît pas de sous-variété lagrangienne de \mathbf{R}^{2n} à classe de Maslov nulle et on pense qu'il n'en existe pas. Les travaux de K. Fukaya, H. Ohta, Y-G. Oh et K. Ono [35] le prouvent dans le cas où L est spin et $H^2(L, \mathbf{Q}) = 0$. D'autres limitations sont obtenues dans le cas des variétés spin par les mêmes auteurs. Par ailleurs, dans les exemples de L. Polterovich [66] dont il a été question plus haut, les nombres de Maslov prennent toutes les valeurs entières entre 2 et n .

Avant la définition des sous-variétés lagrangiennes monotones rappelons que pour d'autres variétés symplectiques ambiantes on peut également associer un nombre de Maslov à une sous-variété lagrangienne. On a besoin pour cela de trivialisier le fibré tangent le long des lacets, mais en général le résultat dépend de la trivialisisation. On se contente alors de définir un morphisme

$$I_\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbf{Z}$$

dont l'image $N_L \mathbf{Z}$ définit le nombre de Maslov de la lagrangienne. Ce morphisme est à mettre en relation avec

$$I_\omega : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbf{R}$$

défini par l'intégrale de la forme symplectique.

Définition *S'il existe une constante $\tau > 0$ telle que $I_\omega = \tau I_\mu$, la sous-variété lagrangienne est dite monotone.*

A noter que ces sous-variétés ne vivent que dans des sous-variétés symplectiques qui sont elles-mêmes monotones, c'est-à-dire dans lesquelles la première classe de Chern est proportionnelle par un facteur positif à celle de la forme symplectique. Lorsqu'une sous-variété lagrangienne L dans une variété monotone M vérifie $H_1(L, \mathbf{Z}) = 0$, alors elle est automatiquement monotone et son nombre de Maslov vaut le double de N_M , le nombre de Chern de M [61]. Plus généralement, on a [11] :

Proposition 1.10 *Si M est monotone, $L \subset M$ est lagrangienne et $H_1(L, \mathbf{Z})$ est de q -torsion, alors L est monotone et $2N_M$ divise qN_L .*

Pour les sous-variétés monotones on a des contraintes sur le nombre de Maslov. Un théorème de Y-G. Oh [63] affirme que

Théorème 1.11 *Toute sous-variété lagrangienne monotone $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ vérifie*

$$1 \leq N_L \leq n.$$

Les exemples de Polterovich montrent que ces bornes sont optimales pour la borne supérieure. Pour une variété symplectique générale, mais sous l'hypothèse que – comme dans \mathbf{R}^{2n} – la sous-variété L peut être disjointe d'elle-même par une isotopie hamiltonienne, le résultat de Y-G. Oh donne l'encadrement :

$$1 \leq N_L \leq n + 1.$$

Là encore on ne peut pas faire mieux, comme le montre un joli exemple de sous-variété lagrangienne. Il s'agit de la sphère \mathbf{S}^{2n+1} que l'on plonge dans $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^{n+1}$ par la formule

$$z \mapsto ([z], \bar{z}).$$

On peut vérifier que ce plongement est lagrangien, monotone, de nombre de Maslov égal à $2n + 2$ (deux fois le nombre de Chern de la variété ambiante).

4 Enoncé des résultats

Dans cette section je présente une liste de résultats nouveaux concernant les sous-variétés lagrangiennes. Leurs démonstrations seront présentées dans le chapitre 3 de ce texte. On commence par celles de \mathbf{R}^{2n} .

4.1 Sur les sous-variétés lagrangiennes de \mathbf{R}^{2n}

On démontre dans ce cas la conjecture d'Audin pour les lagrangiennes monotones [22] :

Théorème 1.12 *Soit $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ une sous-variété lagrangienne monotone.*

a. *Si L est asphérique (c'est-à-dire si L est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi_1(L), 1)$) alors $N_L = 2$ si L est orientable et $N_L = 1$ si L n'est pas orientable.*

b. *De plus, si L comme ci-dessus est orientable, elle a la propriété suivante : Pour toute structure presque complexe J qui est compatible avec la forme symplectique ω_0 et pour tout $p \in L$ il existe un disque J -holomorphe $w : (D, \partial D) \rightarrow (\mathbf{R}^{2n}, L)$ tel que :*

- *L'indice de Maslov $\mu(w)$ est égal à 2.*
- *$p \in w(\partial D)$.*
- *$w(\partial D)$ est non nul dans $\pi_1(L)$.*

On peut démontrer plusieurs versions plus générales de ce théorème. Nous avons par exemple :

Théorème 1.13 *Les conclusions du théorème 1.12 restent vraies pour des sous-variétés lagrangiennes monotones dans \mathbf{R}^{2n} dans chacun des cas suivants :*

a. *Si L est orientable et son revêtement universel \tilde{L} vérifie*

$$H_{2i+1}(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2) = 0,$$

pour tout entier i .

b. *Si L est orientable, $H_*(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2)$ est de dimension finie sur $\mathbf{Z}/2$ et la caractéristique d'Euler*

$$\chi = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(H_i(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2))$$

est non nulle.

Une autre généralisation possible est la suivante :

Théorème 1.14 *Soit $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ une sous-variété lagrangienne monotone. Si pour un entier $k \geq 1$ on a $H_i(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2) = 0$ pour $i > k$ alors*

$$N_L \in [1, k + 1].$$

Ces résultats sont démontrés dans [22]. Il est important de souligner qu'ils sont vrais dans des variétés symplectiques ambiantes plus générales. L'hypothèse essentielle est le fait que L peut être disjointe d'elle-même par une isotopie hamiltonienne (une translation dans le cas de \mathbf{R}^{2n}). Cette propriété est aussi valable dans des produits $\mathbf{R}^2 \times W$ par exemple. Remarquons aussi que la condition $w(\partial D) \neq 0$ dans l'énoncé 1.12 est trivialement remplie dans le cas où la variété ambiante est \mathbf{R}^{2n} à cause de l'holomorphie ; ce n'est plus le cas pour une variété ambiante plus générale. Voici d'autres remarques relatives à ces énoncés.

Remarques

1. Le théorème 1.12 a été annoncé par K. Fukaya ([34], Th. 2.2) pour des sous-variétés lagrangiennes orientables et spin (mais pas forcément monotones). La démonstration proposée n'est pas encore complète. Dans le cas particulier des tores lagrangiens — qui est celui de la conjecture d'Audin — d'autres résultats avaient été obtenus auparavant par C. Viterbo, L. Polterovich, Y-G. Oh, Y. Eliashberg, K. Cieliebak, K. Mohnke, P. Biran, O. Cornea, L. Buhovsky. Nous avons cité ces auteurs dans l'ordre chronologique de leur contribution : C. Viterbo a été le premier à obtenir une limitation sur le nombre de Maslov des tores lagrangiens ; les trois derniers auteurs ont démontré la conjectures pour le cas des tores monotones.
2. Le point a. du théorème 1.13 a également été annoncé par K. Fukaya ([34], Th. 13.1) dans le cas particulier $L = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{2m}$. Notre résultat s'applique à des exemples plus généraux, comme des produits arbitraires dont les facteurs sont des tores (ou d'autres variétés sphériques orientables), des espaces projectifs complexes, des sphères de dimension paire, etc, mais uniquement dans le cas monotone.

Le résultat suivant concerne les sous-variétés lagrangiennes monotones de \mathbf{R}^{2n} dont le nombre de Maslov est maximal. Nous avons vu dans l'énoncé 1.11 que ce nombre est $N_L = n$. Aussi, nous avons remarqué dans la deuxième section de cette introduction que beaucoup d'exemples de sous-variétés lagrangiennes de \mathbf{R}^{2n} étaient des fibrés sur le cercle. L'énoncé va dans cette direction :

Théorème 1.15 *Soit $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ lagrangienne monotone avec $N_L = n$.*

a. On suppose que $n \geq 4$ est pair. Alors $\pi_1(L) = \mathbf{Z}$. Si $n \geq 6$, alors L fibre sur \mathbf{S}^1 et la fibre est homéomorphe à la sphère de dimension $n - 1$.

b. Si $n \geq 3$ est impair, alors $\pi_1(L)$ a un sous-groupe d'indice fini qui est isomorphe à \mathbf{Z} . De plus il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

où K est un sous-groupe fini d'ordre impair.

Comme dans le cas de 1.12 ce résultat est aussi valable pour des variétés symplectiques dans lesquelles tout compact peut être disjoint de lui-même par une isotopie symplectique, à l'exception de la dernière assertion du point b. que je sais seulement démontrer pour des variétés symplectiques exactes. Pour des variétés symplectiques qui ont cette propriété de disjonction, le nombre de Maslov maximal donné par 1.11 est $N_L = n + 1$. Dans ce cas on a la caractérisation suivante :

Théorème 1.16 *Soit M une variété symplectique dans laquelle tout compact peut être disjoint de lui-même par une isotopie hamiltonienne et soit $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne monotone de nombre de Maslov maximal $N_L = n + 1$. Alors n est impair et L est homéomorphe à la sphère.*

Ces deux théorèmes sont également démontrés dans [22].

L'énoncé suivant porte sur les sous-variétés lagrangiennes de \mathbf{R}^{2n} qui ne sont pas compactes, mais standard à l'infini, dans un sens que l'on va préciser. Tout d'abord, rappelons ce que cela veut dire pour les variétés symplectiques : une variété symplectique (M, ω) est standard à l'infini s'il existe des compacts $K \subset M$ et $K' \subset \mathbf{R}^{2n}$ tels que $M \setminus K$ et $\mathbf{R}^{2n} \setminus K'$ sont symplectomorphes.

Un théorème, dû à Y. Eliashberg et D. Mc. Duff [26], [24], affirme que pour $n \geq 2$ et sous l'hypothèse $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ la variété M est en fait difféomorphe à \mathbf{R}^{2n} . Pour $n = 2$ les variétés M et \mathbf{R}^4 sont même symplectomorphes, d'après un théorème de M. Gromov [40].

De manière analogue, on peut appeler “standard à l'infini” une sous-variété lagrangienne de \mathbf{R}^{2n} qui coïncide avec la section nulle $0_{\mathbf{R}^{2n}}$ à l'extérieur d'un compact. La version lagrangienne du problème ci-dessus pose la question si une telle sous-variété, supposée exacte, est difféomorphe à \mathbf{R}^n . Pour $n = 2$, Y. Eliashberg et L. Polterovich ont démontré dans [27] que L est isotope à la section nulle par une isotopie lagrangienne, autrement dit la version lagrangienne du théorème de Gromov. Nous démontrons la partie “difféomorphisme” de cette question pour $n \neq 4$ – l'analogue lagrangien du théorème de D. Mc Duff [24] et Y. Eliashberg [26] :

Théorème 1.17 *Soit $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ une sous-variété lagrangienne exacte qui est standard à l'infini. Alors L est simplement connexe et acyclique. Pour $n \neq 4$ L est difféomorphe à \mathbf{R}^n .*

Un résultat plus faible est prouvé par K. Fukaya, P. Seidel et I. Smith dans [37] (Cor.0.4) : on y démontre sous l'hypothèse supplémentaire L orientable et spin que L est acyclique et que son groupe fondamental n'a pas de représentation complexe de dimension finie non-triviale. Ce résultat implique l'énoncé ci-dessus pour $n = 3$; ce cas peut-être obtenu également par notre méthode. Pour $n = 4$ on obtient seulement que L est homéomorphe à \mathbf{R}^4 . Notre résultat fait l'objet de [23]. Il est aussi un corollaire du résultat récent de M. Abouzaid [1].

4.2 Sur les sous-variétés lagrangiennes monotones de $(\mathbf{CP}^n \times W)$

Voici tout d'abord la conjecture d'Audin pour des sous-variétés lagrangiennes monotones sphériques dans ce contexte :

Théorème 1.18 *Soit W une variété symplectique telle que $M = \mathbf{CP}^n \times W$ est monotone (cela est vrai par exemple lorsque $\pi_2(W) = 0$ ou pour $W = \mathbf{CP}^n$). Soit $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne monotone sphérique. Alors $N_L = 2$ pour L orientable et $N_L \in \{1, 2\}$ pour L non-orientable.*

Pour L spin et $W = \{\text{point}\}$ le résultat a été annoncé par K. Fukaya dans [34] sans l'hypothèse que L est monotone. Le théorème 1.14 est valable pour des variétés symplectiques ambiantes encore plus générales : celles qui sont des hypersurfaces dans des polarisations sous-critiques. Ces variétés ont été étudiées par P. Biran et K. Cieliebak dans [12].

Nos méthodes permettent également d'établir des propriétés topologiques des sous-variétés lagrangiennes de $\mathbf{CP}^n \times W$ qui sont 1-acycliques ou, plus généralement, qui ont le premier groupe de cohomologie de 2-torsion :

Théorème 1.19 *a. Soit W une variété symplectique de dimension $2n + 2$ telle que $\pi_2(W) = 0$. Alors toute sous-variété lagrangienne 1-acyclique de $\mathbf{CP}^n \times W$ est homéomorphe à \mathbf{S}^{2n+1} .*

b. Toute sous-variété lagrangienne 1-acyclique $L \subset \mathbf{CP}^n \times \mathbf{CP}^n$ est simplement connexe. De plus il existe une fibration en cercles $\Sigma \rightarrow L$, où Σ est homéomorphe à \mathbf{S}^{2n+1} .

c. Si $L \subset \mathbf{CP}^n$ est une lagrangienne telle que $2x = 0$ pour tout $x \in H_1(L, \mathbf{Z})$ et si n est impair, alors $\pi_1(L) = \mathbf{Z}/2$ et L est couvert par (une variété homéomorphe à) \mathbf{S}^n . En particulier L a le type d'homotopie de \mathbf{RP}^n .

Le point c. du théorème va dans la direction de la conjecture 1.8. Les points a. et b. sont des généralisations de résultats obtenus par P. Biran dans [11] : le point a. généralise le théorème B de [11] qui dit que la lagrangienne est une sphère d'homologie, tandis que le point b. généralise le théorème C de [11] qui affirme que L a l'homologie de \mathbf{CP}^n .

Les résultats qui viennent d'être énoncés dans cette sous-section proviennent de [22]

4.3 Sur les sous-variétés lagrangiennes exactes de T^*K

Nous avons dit plus haut (c'est la question 1.6) qu'on pense que ces sous-variétés sont des déformations hamiltoniennes de la section nulle, mais on est loin de savoir le démontrer. Les résultats suivants montrent des similitudes topologiques entre une telle sous-variété L et la base du fibré, K . Les conclusions sont moins précises que celles obtenues par Fukaya, Seidel, Smith et Abouzaid (Th. 1.7 dans ce texte et le résultat principal de [1]). Mais le plus souvent nos hypothèses sont plus faibles aussi ; par exemple on obtient

des résultats sans hypothèse d'annulation de la classe de Maslov de la lagrangienne. Les premiers résultats concernent le cas où K fibre sur le cercle [21] :

Théorème 1.20 *Si K fibre sur le cercle et si $L \subset T^*K$ est lagrangienne exacte, alors on a :*

a. *Soit $\langle g_1, g_2, \dots, g_p \mid r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ une présentation arbitraire du groupe fondamental $\pi_1(L)$. Alors $p - q \leq 1$.*

b. *Le groupe fondamental $\pi_1(L)$ n'est pas produit libre de deux groupes non-triviaux.*

Ce résultat a été généralisé par A. Gadbled [38] pour le cas des sous-variétés lagrangiennes monotones. En voici une application :

Proposition 1.21 *Soient P, Q, L des variétés compactes sans bord avec $\pi_1(P)$ fini.*

a. *Supposons que $\chi(L) \neq 0$. Alors il n'y a pas de plongement lagrangien exact*

$$L \times P \hookrightarrow T^*(Q \times \mathbf{S}^1).$$

En particulier si Σ_g est une surface compacte (mais pas nécessairement orientable) de genre $g \geq 2$, il n'y a pas de plongement lagrangien exact

$$\Sigma_g \times P \hookrightarrow T^*(Q \times \mathbf{S}^1).$$

b. *Soit L de dimension $n \geq 4$ une somme connexe $L_1 \# L_2$ de deux variétés compactes. Alors il n'y a pas de plongement lagrangien exact*

$$L \times P \hookrightarrow T^*(Q \times \mathbf{S}^1)$$

sauf si une des L_i est une sphère d'homologie $\mathbf{Z}/2$ simplement connexe.

Si on suppose de plus que L est orientable et spin, alors L est homéomorphe à une des L_i .

c. *Supposons qu'il y a un plongement lagrangien exact*

$$L \times \mathbf{T}^l \hookrightarrow T^*(\mathbf{T}^m \times Q),$$

pour $m > l$, où l'on note par \mathbf{T}^k le tore de dimension k . Alors L satisfait aux propriétés (a) et (b) du théorème 1.20.

Dans l'énoncé précédent $Q \times \mathbf{S}^1$ peut être remplacé par n'importe quelle variété qui fibre sur le cercle.

Enfin, voici un théorème prouvé dans [22] qui donne une réponse plus précise que 1.7 à la question 1.6 dans le cas où K est une sphère de dimension impaire :

Théorème 1.22 *a. Soit $L \subset T^*\mathbf{S}^{2k+1}$ une sous-variété lagrangienne exacte dont la classe de Maslov est nulle. Alors L est homéomorphe à \mathbf{S}^{2k+1} .
b. Soit K^{2k+1} une variété compacte dont le revêtement universel est \mathbf{S}^{2k+1} . Soit $L \subset T^*K$ lagrangienne, exacte, de classe de Maslov nulle. Alors, le revêtement universel \tilde{L} est homéomorphe à \mathbf{S}^{2k+1} (et en particulier $\pi_1(L)$ est fini). Dans le cas particulier où $K = \mathbf{RP}^{2k+1}$ on a $\pi_1(L) = \mathbf{Z}/2$.*

5 Plan de la présentation

Au chapitre 2 nous présentons les ingrédients utilisés pour démontrer nos résultats sur les sous-variétés lagrangiennes. Ce sont deux variantes de la théorie de Floer, l'une s'appliquant aux sous-variétés exactes dans le fibré cotangent, la deuxième aux sous-variétés monotones. Dans la première section de ce chapitre on rappelle les principes généraux de la théorie de Floer. Ensuite, dans celle d'après, on énonce les théorèmes Th.2.7 et Th.2.8 qui sont les outils principaux des preuves de différents résultats présentés dans la section précédente. À la fin de cette section, les lecteurs pressés peuvent se rendre directement au chapitre 3 pour voir comment ces outils nous permettent de fabriquer les preuves de nos résultats sur les sous-variétés lagrangiennes. Les autres trouveront dans les sections suivantes du chapitre 2 des présentations des deux versions de la théorie de Floer qui fournissent respectivement les deux ingrédients Th. 2.7 et Th. 2.8, ainsi que les explications concernant les preuves de ces deux théorèmes. On commence par l'homologie de Floer-Novikov, où l'on inclut une présentation de l'homologie de Novikov qui contient quelques résultats que l'on utilisera dans les preuves du chapitre 3. On finit avec l'homologie de Floer "relevée".

Au chapitre 3 nous démontrons les énoncés de la section §1.4 à l'aide des techniques développées au chapitre 2. Tout d'abord nous présentons celles des différentes généralisations de la conjecture d'Audin, en particulier la preuve

de cette conjecture pour les lagrangiennes monotones asphériques. Puis, dans la section suivante, nous établissons des propriétés topologiques des sous-variétés lagrangiennes à nombre de Maslov maximal (par exemple $N_L = n$ dans le cas de $L \subset \mathbf{R}^{2n}$). Nous finissons avec les résultats sur les sous-variétés lagrangiennes exactes de T^*K .

Chapitre 2

Deux versions de l’homologie de Floer

1 Homologie de Floer “classique”

1.1 Idée générale

Nous avons dit dans l’introduction qu’un des points de départ de la topologie symplectique moderne a été la conjecture d’Arnold sur les orbites 1-périodiques d’un Hamiltonien. La théorie de Floer a été développée à ses débuts dans le but de démontrer cette conjecture. C’est une théorie de Morse sur l’espace des lacets qui est de dimension infinie : pour une fonction (traditionnellement appelée *fonctionnelle*) bien choisie sur cet espace les orbites 1-périodiques sont les points critiques. Le produit de cette théorie est un complexe de type Morse — donc engendré par les points critiques de la fonctionnelle — dont l’homologie, dite de Floer, est isomorphe à l’homologie habituelle de la variété symplectique. La conjecture d’Arnold est alors prouvée par les inégalités de Morse correspondantes. On parle ici de la variante homologique de la conjecture d’Arnold, dans laquelle le minorant du nombre des trajectoires périodiques est la somme des nombres de Betti de la variété. Celui-ci est en général inférieur au nombre minimal de points critiques d’une fonction de Morse.

Nous avons également dit que ces orbites périodiques pouvaient être vues comme des intersections lagrangiennes, ce qui conduit naturellement à une

version lagrangienne de la conjecture d'Arnold qui affirme la persistance des intersections entre une sous-variété lagrangienne et ses images par une isotopie hamiltonienne. Elle n'est pas vraie en général puisque dans \mathbf{R}^{2n} par exemple, on disjoint la sous-variété d'elle-même par des translations. Il faut donc ajouter des hypothèses sur la variété ambiante ainsi que sur la sous-variété. Par exemple dans le cas des sous-variétés lagrangiennes exactes du fibré cotangent T^*K d'une variété compacte la conjecture est vraie. Pour la démontrer on utilise une fois de plus la théorie de Floer, adaptée au contexte lagrangien (avant Floer, la méthode des fonctions génératrices [51] la prouvait pour la section nulle, seulement). Dans ce cadre, la fonctionnelle est définie sur l'espace des chemins qui vont de la sous-variété lagrangienne à une de ses déformations hamiltoniennes, ses points critiques étant les chemins constants, autrement dit les points d'intersection entre ces deux sous-variétés.

Le complexe de Floer est bien défini pour des variétés lagrangiennes monotones ou exactes. Une sous-variété lagrangienne $L \subset (M, \omega = d\lambda)$ est dite *exacte* si (comme dans le fibré cotangent) $\lambda|_L$ est la différentielle d'une fonction. On peut généraliser cette notion dans le cas où la forme symplectique n'est pas exacte : on dit que L est *faiblement exacte* si le morphisme I_ω (défini dans la section 3 du premier chapitre) s'annule. Le complexe de Floer est également bien défini pour ces sous-variétés. Une fois le complexe défini, on prouve que son homologie ne dépend que de la sous-variété lagrangienne L . On la note par $HF(L)$. C'est un outil très efficace pour déduire des propriétés des sous-variétés lagrangiennes. Cela puisque sous certaines hypothèses, pour L (faiblement) exacte ou monotone par exemple, on peut trouver des relations entre l'homologie de Floer lagrangienne $HF(L)$ et l'homologie singulière de la variété L . Par ailleurs, lorsque la sous-variété L peut être disjointe d'elle-même par une isotopie hamiltonienne, le complexe de Floer est nul, ainsi donc que son homologie $HF(L)$. Cela permet souvent d'établir des propriétés topologiques de L selon le schéma suivant :

$$L \cap \phi_1(L) = \emptyset \implies HF(L) = 0 \implies H(L) = \dots \implies \text{propriétés de } L.$$

Nous allons détailler cela dans les sous-sections suivantes.

1.2 Le complexe de Floer Lagrangien

On fabrique le complexe de Floer en suivant les étapes de construction d'un complexe de type Morse. On part donc d'une sous-variété lagrangienne

$L \subset M$ et d’une isotopie (ϕ_t) engendrée par un hamiltonien $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbf{R}$. On note $L_t = \phi_t(L)$ et on suppose (quitte à modifier légèrement L) que L_0 et L_1 sont transverses. Pour bâtir le complexe de Morse on considère d’abord l’espace de définition de la “fonction” de Morse qui est

$$\Omega = \{z \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M) \mid z(0) \in L_0, z(1) \in L_1\}.$$

Nous avons mis des guillemets puisque hormis dans le cas d’une sous-variété lagrangienne exacte il ne s’agira pas d’une fonction mais d’une 1-forme fermée. La théorie de Morse peut se généraliser dans ce cadre : nous expliquerons cela au §3.1.

Sur l’espace Ω on définit une 1-forme α comme suit : sur un champ V de vecteurs tangents le long de $z \in \Omega$, on a

$$\alpha_z(V) = \int_0^1 \omega(z'(t), V(t)) dt.$$

En intégrant α sur un lacet de Ω on trouve que le résultat ne dépend que de la classe d’homotopie de celui-ci, ce qui signifie que α est une 1-forme fermée. Elle n’est en général pas exacte. On verra plus tard les conséquences de ce fait. On peut démontrer que α est exacte lorsque M et L le sont, c’est-à-dire si $\omega = d\lambda$ et $\lambda|_L$ est exacte. Les zéros de α sont évidemment les chemins z constants, autrement dit les points d’intersection entre L_0 et L_1 .

Une fois la fonction (ou 1-forme) de Morse définie, on pose

$$CF(L, \phi_t) = \mathbf{Z}/2 \langle L_0 \cap L_1 \rangle.$$

Il nous reste à définir la différentielle de ce complexe et pour cela nous utilisons, comme dans la théorie de Morse, des trajectoires de gradient. On choisit une structure pseudo-complexe J sur M qui est compatible avec ω , ce qui signifie que $g_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J(\cdot))$ est une métrique riemannienne. On peut utiliser des structures J qui dépendent de t , mais ce n’est pas obligatoire. Cela définit une métrique sur Ω par la formule :

$$g(V, W) = \int_0^1 g_J(V(t), W(t)) dt.$$

Le gradient de α par rapport à cette métrique est $\mathcal{X}(z) = Jz'$. Par conséquent on peut voir les trajectoires de $-\mathcal{X}$ comme des applications $v : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M$ qui vérifient l’équation

$$\frac{\partial v}{\partial s} + J \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Ce sont donc des courbes J -holomorphes. Plus précisément, v est solution de :

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial s} + J(v) \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ v(s, 0) \in L_0 \\ v(s, 1) \in L_1 \end{cases}$$

On appelle ces solutions “bandes holomorphes”. Pour obtenir les propriétés analogues à celles que vérifie le gradient d’une fonction de Morse en dimension finie on considère uniquement celles dont l’énergie

$$E(v) = \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\| ds dt$$

est finie. La norme dans cette formule est celle définie par g_J . On voit facilement que :

$$E(v) = \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|^2 ds dt = \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} v^* \omega_M.$$

Notons par \mathcal{M} l’espace des solutions d’énergie finie :

$$\mathcal{M}(L_0, L_1) = \{v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times [0, 1], M) \mid v \text{ satisfait à } (*); E(v) < +\infty\}$$

Puis, pour $x, y \in L_0 \cap L_1$ définissons :

$$\mathcal{M}(x, y) = \left\{ v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times [0, 1], M) \mid v \text{ satisfait à } (*); \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow -\infty} v(s, \cdot) = x \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} v(s, \cdot) = y \end{array} \right\}.$$

Comme dans [31] (Prop. 1.b), [63] (Prop. 3.2), on a

Théorème 2.1

$$\mathcal{M}(L_0, L_1) = \bigcup_{x, y \in L_0 \cap L_1} \mathcal{M}(x, y).$$

Autrement dit, les trajectoires de gradient d’énergie finie joignent des zéros de notre 1-forme fermée α . On peut donc envisager de définir la différentielle du complexe de Floer en comptant le nombre des trajectoires $n(x, y)$

qui joignent des zéros x et y de la forme α . L'espace des telles trajectoires est $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)/\mathbf{R}$, pour l'action de \mathbf{R} donnée par

$$\sigma \cdot v(s, t) = v(s + \sigma, t).$$

Le nombre $n(x, y) \in \mathbf{Z}/2$ représente le cardinal modulo 2 de la composante 0-dimensionnelle de $\mathcal{L}(x, y)$, que l'on note $\mathcal{L}^0(x, y)$. Ainsi, la différentielle du complexe $CF(L, \phi_t)$ est définie sur ses générateurs $x \in L_0 \cap L_1$ par la formule :

$$\delta(x) = \sum_{y \in L_0 \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}^0(x, y) y = \sum_{y \in L_0 \cap L_1} n(x, y) y.$$

Il faut vérifier que δ est bien définie et qu'elle est bien une différentielle, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\delta^2 = 0$. La stratégie de démonstration est la même qu'en théorie de Morse : La finitude de $n(x, y)$ vient du fait que $\mathcal{L}(x, y)$ est une variété dont la composante 0-dimensionnelle $\mathcal{L}^0(x, y)$ est compacte ; la relation $\delta^2 = 0$ est conséquence du fait que la composante 1-dimensionnelle $\mathcal{L}^1(x, y)$ est l'intérieur d'une variété 1-dimensionnelle à bord $\tilde{\mathcal{L}}^1(x, y)$. Les points du bord de celle-ci sont en bijection avec les couples $(v_1, v_2) \in \mathcal{L}^0(x, z) \times \mathcal{L}^0(z, y)$, de sorte que leur nombre

$$\sum_{z \in L_0 \cap L_1} n(x, z) n(z, y)$$

est pair, ce qui fait que $\delta^2 = 0$. Les points du bord (v_1, v_2) correspondent en fait à des trajectoires brisées, que l'on peut regrouper par deux, comme dans la figure ci-dessous, familière à ceux qui connaissent la théorie de Morse.

On doit donc montrer d'une part une propriété de transversalité qui garantisse que les espaces de trajectoires sont des variétés et d'autre part une propriété de compacité de ces espaces auxquelles on a ajouté des trajectoires brisées. Enfin, on doit prouver que les trajectoires brisées sont bien des points du bord d'une variété compacte de dimension un. Sans entrer dans les détails des démonstrations – qui sont bien plus techniques que dans le cas de la théorie de Morse – nous apportons quelques précisions dans la sous-section suivante.

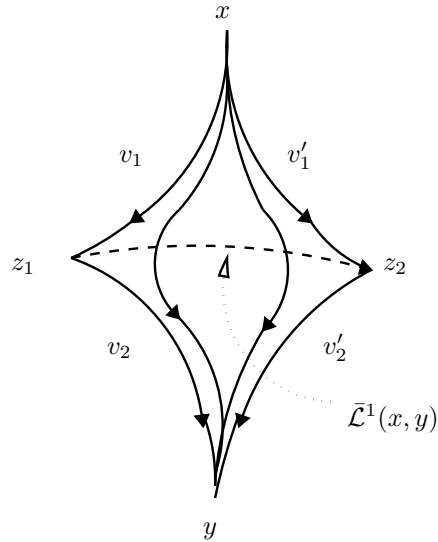


FIGURE 2.1 – Les trajectoires brisées en théorie de Morse

1.3 Transversalité et compacité

Le résultat de transversalité évoqué ci-dessus a été prouvé par A. Floer dans [31] et [30]. Il s'énonce comme suit :

Théorème 2.2 *Pour un choix générique du couple (H, J) les espaces $\mathcal{M}(x, y)$ sont des variétés différentiables. La dimension de $\mathcal{M}(x, y)$ au point v est donnée par l'indice de Maslov-Viterbo $\mu(v)$.*

L'indice dit Maslov-Viterbo a été introduit par C. Viterbo dans [73]. Pour calculer l'indice d'un élément $v \in \mathcal{M}(x, y)$ on considère les chemins $\gamma : [-\infty, +\infty] \rightarrow L_0$ et $\gamma' : [-\infty, +\infty] \rightarrow L_1$ définis par $\gamma(s) = v(s, 0)$ et $\gamma'(s) = v(s, 1)$. On prend le chemin $T_{\gamma(s)}L_0$ et on le complète en un lacet par des plans lagrangiens dans $T_{\gamma'(s)}M$ qui sont transverses à $T_{\gamma'(s)}L_1$ pour tout s , comme dans la figure 2.2 ci-dessous. A l'aide de la trivialisation symplectique le long de v , on obtient un lacet dans la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(n)$ auquel on associe son indice de Maslov, comme au chap. 1, §3. C. Viterbo montre que la valeur de cet indice ne dépend pas du choix du chemin de plans lagrangiens transverses avec lequel nous avons construit notre lacet.

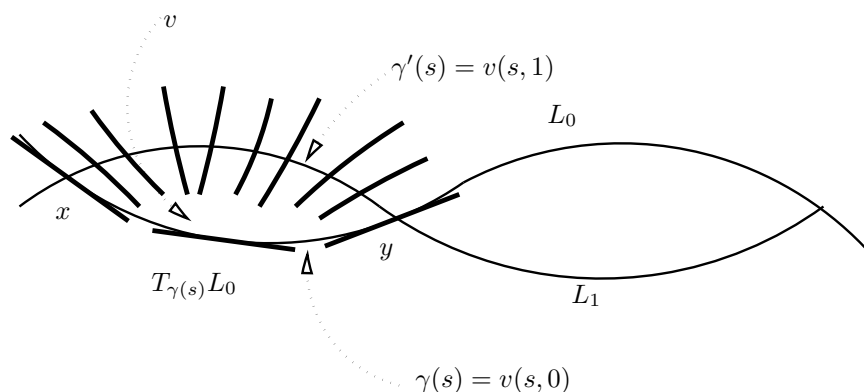


FIGURE 2.2 – L’indice de Maslov-Viterbo

Parlons maintenant de la compacité. Les trajectoires de Floer étant des courbes holomorphes, l’étude de leur compacité découle de la théorie développée par M. Gromov dans [40]. Celle-ci implique des obstructions à la compacité, dues au fait que dans la limite d’une suite de trajectoires de Floer peuvent apparaître des sphères holomorphes ou des disques holomorphes à bord dans une des deux lagrangiennes qui définissent l’espace des trajectoires. Cela fait qu’en général le carré de la différentielle est non nul [35]. Toutefois si la sous-variété lagrangienne est exacte, il est évident, par Stokes, que de tels disques ou sphères n’existent pas. Puis, si elle est monotone, à nombre de Maslov $N_L \geq 3$ ces obstructions n’existent pas non plus lorsqu’on se limite à considérer des espaces de trajectoires $\mathcal{M}(x, y)$ de dimension inférieure à 2. Or c’est uniquement ces derniers que l’on utilise pour définir le complexe de Floer. La raison pour laquelle la condition $N_L \geq 3$ est suffisante est que l’indice de Maslov-Viterbo est conservé lors du passage à la limite et dans le cas où l’objet limite contient des sphères ou des disques holomorphes, cet indice se calcule en rajoutant le nombre de Chern, respectivement le nombre de Maslov de ceux-ci. Sous ces bonnes hypothèses, le théorème de compacité s’énonce comme suit :

Théorème 2.3 *On suppose que $L \subset M$ est exacte, ou monotone avec $N_L \geq 3$. Soit $L_t = \phi_t(L)$ (où (ϕ_t) une isotopie hamiltonienne générique, de sorte que L_0 et L_1 sont transverses). Soit $(v_n) \subset \mathcal{M}(x, y)$ une suite de bandes holomorphes d’indice de Maslov constant $\mu(v_n) = \mu_0 \leq 2$. Alors il existe une collection finie $(z_i)_{i=0, \dots, k}$ de points dans $L_0 \cap L_1$ avec $z_0 = x$ et*

$z_k = y$, ainsi que des bandes holomorphes $v^i \in \mathcal{M}(z_{i-1}, z_i)$ et des suites de nombres réels (σ_n^i) pour $i = 1, \dots, k$ de telle sorte que pour tout $i = 1, \dots, k$ la suite $v_n(s + \sigma_n^i, t)$ converge vers $v^i(s, t)$ dans la topologie \mathcal{C}_0^∞ .

De plus, on a les deux propriétés suivantes :

(i) Si l'énergie $E(v_n)$ est inférieure à A pour tout n , alors :

$$\sum_{i=1}^k E(v^i) \leq A.$$

(ii) Les indices de Maslov-Viterbo satisfont à :

$$\sum_{i=1}^k \mu(v^i) = \mu_0.$$

Ce théorème affirme la convergence d'une suite de trajectoires vers une trajectoire brisée comme dans le cas de la théorie de Morse que l'on a illustré dans la figure 2.1 pour $k = 2$. Il implique la compacité des espaces $\mathcal{L}^0(x, y)$ et $\bar{\mathcal{L}}^1(x, y)$. Il est démontré dans [31] et dans [61]. On en trouve aussi une démonstration dans [21].

Pour démontrer que $\bar{\mathcal{L}}^1(x, y)$ est une variété à bord il reste à étudier sa structure près d'un point du bord, ce qui revient à prouver que toute trajectoire brisée $(v_1, v_2) \in \bar{\mathcal{L}}^1(x, y)$ est le bout d'un intervalle de trajectoires de $\mathcal{L}^1(x, y)$ et ceci constitue l'unique manière de l'approcher. Cette propriété se démontre par le procédé dénommé "recollement", comme dans [61]. C'est un des points cruciaux de la théorie de Floer. Nous ne rentrons pas dans les détails techniques pour ne pas alourdir l'exposé. Une preuve détaillée dans le cas de l'homologie de Floer pour les orbites hamiltoniennes se trouve dans [7].

1.4 Relation avec l'homologie singulière

Nous avons donc défini un complexe $CF(L, \phi_t, J)$ engendré par les points d'intersection $L_0 \cap L_1$. Comme pour la théorie de Morse, on démontre une propriété d'invariance de son homologie par rapport aux choix qui permettent de le définir, en l'occurrence du choix d'un couple générique (H, J) . La méthode de démonstration est également similaire à celle utilisée en théorie de Morse : on connecte deux couples (H_0, J_0) et (H_1, J_1) par une homotopie générique

(H_s, J_s) et, en considérant l'équation de Floer à paramètre correspondante, on définit un morphisme entre les deux complexes dont on démontre qu'il induit un isomorphisme en homologie. Il est plus facile de décrire ce morphisme si on travaille sur l'espace $\Omega(L, L)$ des chemins à extrémités dans L . La forme fermée de degré 1 définie là-dessus par

$$\widehat{\alpha}_z(V) = \int_0^1 \omega(z'(t), V(t)) + dH_t(V(t))$$

a comme zéros les trajectoires du flot hamiltonien ϕ_t qui aboutissent en L pour $t = 1$. Il y a une bijection évidente entre celles-ci et les points d'intersection $L_0 \cap L_1$. Comme précédemment le choix d'une structure complexe adaptée \widehat{J} définit une métrique sur $\Omega(L, L)$ et donc un gradient $\widehat{\mathcal{X}}$ pour la 1-forme $\widehat{\alpha}$. Les trajectoires de $-\widehat{\mathcal{X}}$ sont définies par :

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} + \widehat{J}(\hat{v})(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - X_t(\hat{v})) = 0 \\ \hat{v}(s, 0) \in L \\ \hat{v}(s, 1) \in L \end{array} \right.$$

Ces trajectoires sont donc des “demi-cylindres” qui s'appuient sur L . Pour une structure complexe bien-choisie, on montre (voir [21], Remarques 3.9 et 3.11) qu'elles sont en bijection avec les bandes holomorphes considérées précédemment, de sorte que l'on peut développer une théorie équivalente. Avec ce nouveau point de vue, les trajectoires de Floer qui définissent le morphisme entre les complexes associés à (H_0, J_0) et (H_1, J_1) sont des demi-cylindres qui commencent comme des solutions de l'équation de Floer correspondant à (H_0, J_0) et qui finissent comme des solutions de l'équation de Floer $(**)$ correspondant au couple (H_1, J_1) .

Après il faut démontrer que ce morphisme induit un isomorphisme en homologie. On démontre d'abord que deux tels morphismes sont homotopes. Cela se fait par une méthode semblable qui consiste à connecter les deux homotopies entre elles, ce qui revient à rajouter un autre paramètre à l'équation de Floer ; les solutions de cette nouvelle équation définissent une homotopie entre les deux morphismes. Les détails dans le cas de l'homologie de Floer pour les orbites périodiques d'un hamiltonien se trouvent dans [7].

Enfin, il faut montrer que pour trois couples (H_0, J_0) , (H_1, J_1) , (H_2, J_2) la concaténation d'une homotopie entre les deux premiers avec une homotopie

entre les deux derniers définit la même chose en homologie que la composée des deux morphismes définis par ces homotopies. On peut également consulter les détails dans [7].

Ce qui précède nous permet d'utiliser la notation $HF(L)$ pour l'homologie du complexe de Floer. Selon le schéma décrit dans la section 1.1 nous aurons besoin d'une relation entre celle-ci et l'homologie singulière de L . Compte tenu de la propriété de l'invariance on peut choisir n'importe quelle isotopie hamiltonienne qui rend L_0 et L_1 transverses. On utilisera :

$$L_t = \{(q, td_q f) \mid q \in L\},$$

définie par une (petite) fonction de Morse sur L dans un petit voisinage de la section nulle de T^*L , qu'on plonge dans la variété M grâce au théorème de Weinstein. Les points d'intersection $L_0 \cap L_1$ seront donc en bijection avec les points critiques de f et en particulier on peut leur associer leur indice de Morse respectif. Il reste à étudier les trajectoires de Floer (bandes holomorphes) que les joignent. Cette fois il suffit de regarder la composante de dimension 1 de l'espace de solutions $\mathcal{M}^1(x, y)$, qui correspond à $\mathcal{L}^0(x, y)$.

Fixons un voisinage de Weinstein $U = U(L) \subset M$. Dans le cas des sous-variétés lagrangiennes exactes, si f est suffisamment petite dans la topologie \mathcal{C}^2 les bandes holomorphes $v \in \mathcal{M}^1(x, y)$ ne quittent pas le voisinage U . L'indice de Maslov-Viterbo est dans ce cas égal à $\text{ind}(x) - \text{ind}(y)$. Plus encore, on a l'énoncé suivant [63] :

Proposition 2.4 *Supposons que L est faiblement exacte. Si f est suffisamment \mathcal{C}^2 -petite et J est bien choisie il existe une métrique de Morse-Smale g pour f , telle que l'application*

$$v \mapsto v(s, 0),$$

réalise une bijection entre $\mathcal{M}^1(x, y)$ et les trajectoires de $-\text{grad}_g f$ qui unissent x et y .

En particulier

$$HF(L) \approx H(L).$$

Cela implique la conjecture d'Arnold pour les sous-variétés lagrangiennes exactes : la minoration du nombre d'intersections entre L_0 et L_1 par la somme

de nombres de Betti de $L = L_0$. En particulier, on obtient une preuve du théorème de Gromov, ici le Th. 1.5. Dans l'énoncé précédent “métrique de Morse-Smale pour f ” désigne une métrique sur L telle que les variétés stables et instables du gradient de f par rapport à celle-ci sont transverses.

Dans le cas des sous-variétés monotones les conclusions de la proposition précédente restent vraies pour les bandes holomorphes qui ne quittent pas le voisinage de Weinstein $U(L)$. Mais, en général il y a aussi des bandes qui sortent de U . Pour une telle bande $v \in \mathcal{M}^1(x, y)$, on peut projeter $v(s, 1)$ sur L dans le fibré cotangent T^*L . Le lacet formé par $v(s, 1)$ et sa projection borde un disque dans le “rideau”

$$\{((q, td_q f \mid q \in L, t \in [0, 1])\}.$$

En collant ce disque à la bande v on obtient un disque D à bord dans L . Si f est suffisamment petite, l'aire symplectique de D est positive. Cela vient d'un résultat de “monotonie” qui donne une minoration uniforme de l'aire des bandes holomorphes qui quittent $U(L)$ [63]. En utilisant le fait que L est monotone, on trouve l'indice de Maslov $I_\mu(D) = kN_L$, pour un $k > 0$ entier. Par ailleurs, on peut calculer ce même indice en sommant l'indice de Maslov-Viterbo de v (qui vaut 1) et celui de la partie de D qui vient de la projection de $v(s, 1)$ sur L . On peut montrer que pour cette dernière il vaut $\text{ind}(x) - \text{ind}(y)$. En résumant, on a la proposition suivante [63] :

Proposition 2.5 *Supposons que L est monotone avec $N_L \geq 3$. On choisit $U(L)$ et f comme ci-dessus et on prend la graduation du complexe de Floer $CF(L, f)$ donnée par l'indice de Morse. Si f est suffisamment \mathcal{C}^2 -petite et J est bien choisie il existe une métrique de Morse-Smale g pour f , telle que la différentielle de Floer δ s'écrit comme une somme (finie) :*

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \dots$$

où :

(i) δ_0 coïncide avec la différentielle du complexe de Morse associée au couple (f, g) .

(ii) Pour $\ell > 0$ on a $\delta_\ell : CF_*(L, f) \rightarrow CF_{*-1+\ell N_L}(L, f)$.

En écrivant la relation $\delta^2 = 0$ degré par degré on trouve plusieurs relations entre les δ_k :

$$\delta_0^2 = 0,$$

$$\delta_0\delta_1 + \delta_0\delta_1 = 0$$

$$\delta_0\delta_2 + \delta_1^2 + \delta_2\delta_0 = 0, \dots, \text{etc.}$$

La première de celles-ci vient du fait que δ_0 est la différentielle de Morse. La seconde dit que δ_1 (qui on le rappelle est de degré $-1 + N_L$) descend au niveau de l'homologie $H(L)$. Après, la troisième, implique que $\delta_1^2 = 0$, comme application de $H(L)$ à $H(L)$ (de degré $-1 + 2N_L$). Puis, ainsi de suite on trouve que δ_2 descend au niveau de l'homologie $H(H(L))$, puis qu'elle est une différentielle là-dessus, puis que δ_3 descend au niveau de $H(H(H(L)))$ où elle est une différentielle, etc. La formalisation algébrique de ce fait se traduit par l'existence d'une suite spectrale dont la première page est faite avec l'homologie $H(L)$ et qui converge vers l'homologie de Floer $HF(L)$. Nous donnerons un énoncé plus précis dans la section 4 (Th.2.17). Disons juste que si par le procédé décrit ci-dessus l'homologie reste non nulle après l'entrée en jeu de tous les δ_i alors l'homologie de Floer est également non nulle. Aussi, on a une conséquence immédiate de la proposition précédente :

Corollaire 2.6 *Si $\delta_\ell = 0$ pour tout $\ell > 0$, alors l'homologie de Floer $HF(L)$ est isomorphe à l'homologie singulière $H(L)$.*

Remarquons que le cas $N_L = 2$, qui est celui de la conjecture d'Audin, n'est pas couvert par la proposition 2.5. Le théorème de compacité 2.3 ne s'applique pas dans ce cas à cause de l'apparition possible de disques holomorphes. Toutefois, on peut définir l'homologie de Floer $HF(L)$ (pour L monotone) et elle vérifie l'énoncé 2.5. Ce cas particulier est très important dans la compréhension de l'homologie de Floer relevée dont il sera question dans la section suivante. Nous l'expliquerons en détail au §4.1.

Aussi, il est intéressant de souligner que dans tous les exemples où l'on connaît l'homologie de Floer $HF(L)$, elle est soit nulle, soit isomorphe à l'homologie singulière de L . Suivant une terminologie introduite par P. Biran et O. Cornea on peut appeler la lagrangienne L “étroite” dans le premier cas et “large”, dans le deuxième. La proposition 2.4 montre que que les sous-variétés exactes sont larges. Par ailleurs, lorsqu'on peut disjoindre une sous-variété d'elle-même par une isotopie hamiltonienne — dans \mathbf{R}^{2n} par exemple —, celle-ci est étroite.

1.5 Changement de coefficients

Pour passer des coefficients modulo 2 aux coefficients entiers il faut orienter les espaces de solutions $\mathcal{M}(x, y)$. Cela est possible sous l'hypothèse que L est orientable et spin. On peut définir de plusieurs manières la notion de variété spin. La définition habituelle est l'existence d'un relèvement du fibré des repères orthonormaux à un fibré principal de groupe $Spin(n)$ qui est le revêtement universel du groupe spécial orthogonal $SO(n)$. Cela est équivalent au fait que la classe de Stiefel-Whitney $w_2(L)$ s'annule ($w_1(L)$ étant également nulle puisque L est supposée orientable). Pour $n = \dim(L)$ supérieure ou égale à 3, une définition équivalente est que pour une décomposition cellulaire donnée il existe une trivialisatation de TL sur le 1-squelette qui admet un prolongement au 2-squelette.

Sous cette hypothèse l'espace des disques holomorphes à bord dans L est orientable [35]. Plus généralement, l'espace des bandes holomorphes qui forment $\mathcal{M}(x, y)$ (que l'on peut voir comme des disques holomorphes à bord dans $L_0 \cup L_1$) est également orientable. Cela nous permet de compter les trajectoires isolées avec des signes. De surcroît, les orientations induites sur les espaces $\mathcal{L}(x, y)$ induisent des orientations opposées pour les couples de trajectoires brisées qui forment le bord d'une même composante de dimension 1. Cela implique que $\delta^2 = 0$. Finalement toute la théorie est valable à coefficients entiers, en particulier les liens avec l'homologie singulière à coefficients en \mathbf{Z} de L .

A noter que, toujours d'après [35] tout cela est vrai sous l'hypothèse (plus faible) que $L \subset M$ est relativement spin ; cette hypothèse signifie que L est orientable et telle que $w_2(L)$ est dans l'image de la restriction $H^2(M) \rightarrow H^2(L)$.

2 Les résultats principaux

Dans cette section nous présentons deux théorèmes qui résultent des deux nouvelles versions de l'homologie de Floer annoncées dans le titre du chapitre. Commençons par l'homologie de Floer-Novikov. Celle-ci a comme point de départ l'idée naturelle de généraliser l'homologie de Floer pour le cas où l'isotopie ϕ_t que l'on utilise pour construire le complexe n'est pas hamiltonienne. Le fait de sortir du cadre hamiltonien présente un avantage : nous avons

vu dans la sous-section §1.4 que les sous-variétés lagrangiennes exactes sont “larges” et en particulier non-disjoignables par des isotopies hamiltoniennes. Or le schéma présenté à la fin du §1.1, que l'on veut utiliser pour obtenir des propriétés topologiques des lagrangiennes s'applique aux sous-variétés disjoignables. Il y a des situations où des sous-variétés lagrangiennes exactes sont disjoignables d'elles-mêmes par des isotopies non-hamiltoniennes. C'est le cas par exemple dans le fibré cotangent T^*K d'une variété K qui fibre sur le cercle ; si $f : K \rightarrow \mathbf{S}^1$ est une fibration, l'isotopie

$$(p, q) \mapsto (p + t(f^*d\theta)_q, q)$$

disjoint tout compact de lui-même pour t assez grand.

L'homologie du complexe de type Floer dans le cas non-hamiltonien doit être comparée avec l'homologie de Novikov associée à L et à une 1-classe de cohomologie qui dépend de l'invariant de Calabi de l'isotopie (ϕ_t) . Dans le cas du fibré cotangent T^*K , muni de la forme standard $\omega_K = d\lambda_K$ ce dernier est défini par

$$[\phi_1^*\lambda_K - \lambda_K] \in H^1(T^*K, \mathbf{R}).$$

Nous rappellerons la définition et les propriétés de l'homologie de Novikov $H(L; u)$ dans §3.1. Notons par p la projection $p : L \rightarrow K$, par u l'invariant de Calabi de (ϕ_t) et par Λ_{p^*u} l'anneau de Novikov, complété de $\mathbf{Z}/2[\pi_1(L)]$, associé à p^*u . Voici l'énoncé du théorème.

Théorème 2.7 *Soient $L \subset T^*K$ une sous-variété lagrangienne exacte et (ϕ_t) une isotopie symplectique de sorte que L et $\phi_1(L)$ sont transverses.*

*Il existe un complexe $C_\bullet(L, \phi_t)$ qui est Λ_{p^*u} -libre, engendré par les points d'intersection $L \cap \phi_1(L)$, dont l'homologie est isomorphe à l'homologie de Novikov $H(L; p^*u)$ à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$.*

Ce théorème est prouvé dans [21] sous l'hypothèse supplémentaire $\text{Im}(u) \approx \mathbf{Z}$, mais nous montrons dans [23] que cette hypothèse est superflue. Une généralisation pour les sous-variétés lagrangiennes monotones a été établie par A Gadbled dans [38]. Nous pouvons remplacer les coefficients $\mathbf{Z}/2$ dans la définition de l'homologie de Novikov par des coefficients entiers si la sous-variété L est relativement spin, comme au §1.5.

Passons maintenant à l'homologie de Floer dite "relevée". Elle fait intervenir un revêtement arbitraire $\bar{L} \rightarrow L$. L'objectif est d'obtenir des informations sur L en suivant un schéma semblable à celui du §1.1 :

$$L \cap \phi_1(L) = \emptyset \implies HF(\bar{L}) = 0 \implies H(\bar{L}) = \dots \implies \text{propriétés de } L.$$

On supposera donc le plus souvent que L est disjoignable par une isotopie hamiltonienne. Mais nous pouvons énoncer notre théorème dans un contexte général. Partons donc avec $L \subset M$ lagrangienne et un revêtement $p : \bar{L} \rightarrow L$. Soit (ϕ_t) une isotopie hamiltonienne de M telle que L et $\phi_1(L)$ sont transverses. On a alors :

Théorème 2.8 *Supposons que L est exacte, ou monotone avec $N_L \geq 3$. Alors il existe un complexe C_\bullet sur $\mathbf{Z}/2$ engendré par $p^{-1}(L \cap \phi_1(L))$ (donc peut-être de dimension infinie) tel que :*

– Si L est exacte alors

$$H_*(C_\bullet) \approx H_*(\bar{L}, \mathbf{Z}/2).$$

– Si L est monotone avec $N_L \geq 3$ alors on peut définir des applications $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$ dans les conditions (i) et (ii) qui satisfont aux propriétés (iii) et (iv) :

(i) $\delta_1 : H_*(\bar{L}, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_{*-1+N_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2)$ vérifie $\delta_1 \circ \delta_1 = 0$.

(ii) $\delta_\ell : H_*(\bar{L}, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_{*-1+\ell N_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2)$, $\ell \geq 2$ est définie si $\delta_m = 0$ pour $m = 1, \dots, \ell - 1$ et vérifie $\delta_\ell \circ \delta_\ell = 0$.

(iii) Si $H_*(C_\bullet) = 0$ il existe un ℓ tel que δ_ℓ est non nul. Si pour le premier tel ℓ

$$(\ell + 1)N_L > n + 1,$$

alors $(H_*(\bar{L}, \mathbf{Z}), \delta_\ell)$ est acyclique.

(iv) Si $\delta_\ell = 0$ pour tout $\ell \geq 1$ alors

$$H_*(C_\bullet) \approx H_*(\bar{L}, \mathbf{Z}/2).$$

Lorsque L est orientable et relativement spin, on peut remplacer les coefficients $\mathbf{Z}/2$ par des coefficients entiers dans l'énoncé du théorème et obtenir le même résultat dans le cas exact, et des applications δ_i dans le cas monotone définies dans les mêmes conditions et qui vérifient (iii).

Les deux sections suivantes sont consacrées respectivement aux démonstrations des deux théorèmes ci-dessus. Les énoncés de ces théorèmes sont semblables dans le sens où ils affirment l'existence d'un complexe de type Floer dont l'homologie est liée d'une certaine façon à une homologie intrinsèque à la variété L . Pour expliquer leur démonstration nous nous appuyons sur la présentation de l'homologie de Floer habituelle que nous avons faite dans la première section. Il s'agira donc de préciser ce qui change dans ces nouvelles versions et ce qui fonctionne de manière analogue au cas de l'homologie de Floer classique. Les propriétés importantes sont la transversalité, la compacité, le recollement et l'invariance par isotopie hamiltonienne. Comme on l'a expliqué au §1, elles garantissent l'existence d'un complexe de type Floer dont l'homologie est indépendante des choix. Nous allons donc parler de chacune de ces propriétés dans le contexte des deux nouvelles versions de l'homologie de Floer.

Ensuite, il s'agira d'établir la relation souhaitée avec l'homologie (singulière ou Novikov) de L . On utilisera l'exemple particulier d'un graphe de différentielle de fonction de Morse dans un voisinage de Weinstein de la lagrangienne, comme au §1.4. Chacune des deux sections débutera par une sous-section explicative. Pour l'homologie de Floer-Novikov il s'agira d'une présentation de l'homologie de Novikov qui inclut quelques propriétés que l'on utilisera dans les démonstrations du chapitre 3. Dans le cas de l'homologie de Floer relevée on commencera par décrire la construction du complexe de Floer habituel pour une lagrangienne L monotone avec $N_L = 2$. Ce cas est très utile pour comprendre la différence avec le complexe de Floer relevé qui ne peut pas être défini en général lorsque le nombre de Maslov vaut 2.

3 L'homologie de Floer-Novikov

L'homologie de Floer-Novikov, définie en [21], est une version de l'homologie de Floer associée à une sous-variété lagrangienne exacte dans un fibré cotangent. Elle est engendrée par les intersections entre celle-ci et son image par une isotopie symplectique non-hamiltonienne. On démontre qu'elle est isomorphe à l'homologie de Novikov de la variété initiale. Commençons par une présentation de cette dernière :

3.1 L'homologie de Novikov

L'homologie de Novikov est l'analogie de l'homologie de Morse pour une 1-forme fermée non-exacte. Elle dépend de la classe de cohomologie de degré 1, à laquelle appartient cette forme non-exacte. On sait que l'homologie de Morse peut être définie — via son isomorphisme avec l'homologie singulière — à partir d'une décomposition cellulaire de la variété. Nous avons aussi une définition de ce type pour l'homologie de Novikov. La voici.

Définition du complexe de Novikov

Soit $u \in H^1(L, \mathbf{R})$. On note par Λ l'anneau $\mathbf{Z}[\pi_1(L)]$ et par $\widehat{\Lambda}$ le groupe des séries formelles $\mathbf{Z}[[\pi_1(L)]]$. Considérons une décomposition cellulaire de L , que l'on relève au revêtement universel \widetilde{L} . Nous obtenons un complexe libre sur Λ qui est engendré par des relévés fixés de chaque cellule de la décomposition de L . On définit l'anneau complété Λ_u :

$$\Lambda_u = \left\{ \lambda = \sum n_i g_i \in \widehat{\Lambda} \mid g_i \in \pi_1(L), n_i \in \mathbf{Z}, u(g_i) \rightarrow \infty \right\}.$$

La convergence vers $+\infty$ signifie ici que pour tout $A > 0$, $u(g_i) > A$ sauf pour un nombre fini de g_i qui apparaissent avec un coefficient non nul dans l'écriture de λ . Dans le cas où $\pi_1(L) = \mathbf{Z}$ l'anneau Λ_u est isomorphe à l'anneau des séries de Laurent.

Remarque Soit $\lambda \in \Lambda_u$ un élément de la forme $\lambda = 1 + \lambda_0$, tel que $u(g_i) > 0$ pour tous les g_i qui apparaissent dans l'écriture de λ_0 . Alors, λ est inversible en Λ_u , son inverse étant $\sum_{k \geq 0} (-\lambda_0)^k$.

Définition Soit $C_\bullet(L; u)$ le complexe Λ_u -libre $\Lambda_u \otimes_\Lambda C_\bullet(\widetilde{L})$. Par définition, l'homologie de Novikov $H_*(L; u)$ est l'homologie du complexe $C_\bullet(L; u)$.

Etant donné que dans notre contexte symplectique cette homologie de Novikov sera isomorphe à une homologie de type Floer, sa non-annulation impliquerait une persistance des intersections lagrangiennes. Nous sommes donc intéressés par les situations où cette homologie ne s'annule pas. On sait qu'elle s'annule en degré 0 et en degré n ; ceci est une conséquence du théorème 2.10 ci-dessous et d'un résultat bien connu de P. Arnoux et G. Levitt [4] qui affirme qu'une 1-classe de cohomologie non nulle peut se

représenter par une 1-forme sans zéro d'indice 0 et n . La question se pose donc à partir du degré 1. Le cas de $H_1(L; u)$ est très intéressant puisqu'on peut démontrer [71] que ce groupe ne dépend que de $\pi_1(L)$ et de la classe u . On peut ainsi formuler des critères de non-annulation qui font intervenir le groupe fondamental de L . En voici deux :

Proposition 2.9 *Le premier groupe d'homologie de Novikov $H_1(L; u)$ est non nul pour toute classe $u \neq 0$ dans chacune des situations suivantes :*

a. Si $\pi_1(L)$ admet une présentation $\langle g_1, g_2, \dots, g_k \mid r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ telle que

$$p - q \geq 2.$$

b. Si $\pi_1(L)$ est un produit libre de deux groupes non-triviaux.

La démonstration de cette proposition se trouve dans [21]. A noter que le résultat est également vrai pour l'homologie de Novikov à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$ (au lieu de \mathbf{Z}). C'est ce cas particulier qui sera utilisé dans le contexte de l'homologie de Floer lorsqu'on ne suppose pas que la lagrangienne est relativement spin.

Remarquons aussi que lorsque la caractéristique d'Euler de L est non nulle alors l'homologie de Novikov ne peut pas s'annuler non plus. Il est facile de le prouver, puisque la caractéristique d'Euler du complexe $C_\bullet(L, u)$ est $\chi(L)$.

Théorie de Morse-Novikov

L'homologie de Novikov apparaît naturellement lorsqu'on fait la théorie de Morse pour des 1-formes fermées. Si α est une telle forme, représentant une classe $u \in H^1(L, \mathbf{R})$ et dont les zéros sont non-dégénérés, on construit un complexe à l'aide des trajectoires d'un gradient ξ associé à une métrique générique sur L . Pour ce faire, on fixe un relèvement $\tilde{c} \in \tilde{L}$ pour chacun des zéros de α . Le complexe $C_\bullet(\alpha, \xi)$ que l'on veut définir, est libre sur Λ_u et engendré par les zéros de α . Sa différentielle sur un zéro d'indice $k + 1$ de α est donnée par la formule

$$\delta(d) = \sum_{\text{ind}(c)=k} [d, c]c,$$

où $[d, c]$ est la somme - peut-être infinie - $\sum n_i g_i$ dans laquelle n_i compte algébriquement le nombre de trajectoires de ξ qui vont de c à d , et qui sont couvertes par des chemins dans \tilde{L} joignant $g_i \tilde{c}$ et \tilde{d} . Il se trouve que cette somme appartient à l'anneau de Novikov Λ_u .

La propriété fondamentale de la théorie de Morse-Novikov, démontrée par S.P. Novikov dans [60] et dans sa forme la plus générale (énoncée ici) par J.-C. Sikorav [71] est :

Théorème 2.10 *Pour tout couple (α, ξ) l'homologie du complexe $C_\bullet(\alpha, \xi)$ est isomorphe à $H_*(L; u)$.*

3.2 Définition du complexe

La construction s'inspire de celle faite par H. V. Lê et K. Ono dans [53] pour la généralisation de la conjecture d'Arnold (sur les orbites d'un flot symplectique) dans le cas non-hamiltonien. Soit $L \subset T^*K$ une sous-variété lagrangienne exacte et (ϕ_t) une isotopie symplectique sur T^*K . Notons par $u \in H^1(T^*K, \mathbf{R}) \approx H^1(K, \mathbf{R})$ l'invariant de Calabi associé à (ϕ_t) . On peut supposer sans restreindre la généralité que (ϕ_t) est engendrée par le dual symplectique de $\beta + dH_t$, où β est une 1-forme sur K dans la classe u et $H : [0, 1] \times T^*K \rightarrow \mathbf{R}$ est à support compact (voir [21], Lemme 3.3). Aussi, on pourra supposer que la projection $p : L \rightarrow K$ admet un épimorphisme au niveau des groupes fondamentaux; on utilise pour cela le théorème suivant de F. Lalonde et J.-C. Sikorav [48] :

Théorème 2.11 *Si $L \subset T^*K$ est lagrangienne exacte alors l'indice de $p(\pi_1(L))$ dans $\pi_1(K)$ est fini.*

On obtient la propriété voulue en considérant le revêtement fini \bar{K} de K correspondant au groupe $p(\pi_1(L))$ et en relevant le plongement $L \hookrightarrow T^*K$ en un plongement (lagrangien) $L \hookrightarrow T^*\bar{K}$, (voir [21], Rem. 3.4).

Ensuite on considère le revêtement universel \tilde{K} et son fibré cotangent $T^*\tilde{K}$. Le plongement $L \hookrightarrow T^*K$ se relève cette fois-ci en un plongement lagrangien $\tilde{L} \hookrightarrow T^*\tilde{K}$ du revêtement de L associé au sous-groupe $\text{Ker}(p) \subset \pi_1(L)$. Aussi, l'isotopie symplectique (ϕ_t) se relève en une isotopie hamiltonienne $(\tilde{\phi}_t)$ sur $T^*\tilde{K}$.

Notons $L_t = \phi_t(L)$ et $\bar{L}_t = \tilde{\phi}_t(\bar{L})$. Pour définir le complexe on fait de la théorie de Morse sur le même espace Ω qu'au §1 (les chemins z allant de L_0 à L_1) avec la même 1-forme fermée $\alpha_z(V) = \int_0^1 \omega(z'(t), V(t))dt$, dont les zéros sont en bijection avec les points d'intersection $L_0 \cap L_1$. Puis, en choisissant une métrique sur Ω à partir d'une structure presque complexe compatible J , on trouve comme auparavant que les lignes de gradient sont des bandes holomorphes qui s'appuient sur L_0 et sur L_1 . On prouve comme dans le cas de l'homologie de Floer classique que les bandes qui ont une énergie finie joignent des points d'intersection de L_0 et L_1 . On peut donc définir de manière analogue les espaces $\mathcal{M}(x, y)$ et $\mathcal{L}(x, y)$ pour $x, y \in L$. Mais, du fait que l'isotopie (ϕ_t) n'est pas en général hamiltonienne, il peut y avoir un nombre infini de points (trajectoires) isolés dans $\mathcal{L}(x, y)$. Comme dans le cas de la théorie de Morse-Novikov, expliqué précédemment, il va falloir monter sur un revêtement sur lequel la forme est exacte pour pouvoir définir un complexe. Le candidat naturel pour ce revêtement est évidemment $\pi : T^*\tilde{K} \rightarrow T^*K$ dans lequel vivent les \bar{L}_t . On peut montrer qu'effectivement le tiré-en-arrière de α sur l'espace

$$\bar{\Omega} = \{z \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], T^*\tilde{K}) \mid z(0) \in \bar{L}_0, z(1) \in \bar{L}_1\}$$

est une 1-forme exacte dont les points critiques sont par conséquent les fibres $\pi^{-1}(x)$ des points d'intersection $x \in L_0 \cap L_1$ [21]. Le groupe fondamental $\pi_1(K)$ agit naturellement sur l'ensemble de ces points critiques. On définit alors le complexe $C_\bullet(\bar{L}, \phi_t)$ comme étant le Λ_u -module libre engendré par $L_0 \cap L_1$, où l'anneau de Novikov est le complété de $\mathbf{Z}/2[\pi_1(K)]$, défini comme dans la section précédente. Il reste à définir la différentielle de ce complexe. Comme dans la section §3.1, on procède en fixant un relèvement \bar{x} pour chacun des points d'intersection x . On définit alors pour $g \in \pi_1(K)$ l'ensemble $\mathcal{L}_g(x, y)$ des trajectoires (bandes holomorphes) qui joignent x et y dans T^*K et dont les relevés à partir de \bar{x} aboutissent en $g\bar{y}$. On pose alors pour un $x \in L_0 \cap L_1$:

$$\delta(x) = \sum_{y \in L_0 \cap L_1, g \in \pi_1(K)} \#_2 \mathcal{L}_g^0(x, y) g \cdot y.$$

On doit vérifier que δ est bien définie et de carré nul, ce qui revient à montrer les propriétés de compacité, transversalité et recollement décrites en §1.3.

3.3 Transversalité et compacité

La preuve de la transversalité s'applique sans changement à la nouvelle situation. Pour la compacité c'est un peu plus compliqué. Toutefois, le théorème 2.3 reste valable du fait de l'absence de disques holomorphes à bord dans L_t (cela puisque $\omega|_{\pi_2(T^*K, L_t)} = 0$). Si on fixe une primitive \mathcal{A} de α sur $\bar{\Omega}$ on a pour un $v \in \mathcal{M}_g(x, y)$:

$$E(v) = \mathcal{A}(\bar{x}) - \mathcal{A}(\bar{y}) + u(g),$$

ce qui montre — en appliquant la compacité de Gromov de l'espace de solutions d'énergie uniformément bornée (voir [21], Th. 3.14) — que le coefficient de y dans l'expression de δ ci-dessus est en effet dans l'anneau de Novikov Λ_u et donc que δ est bien définie. Pour montrer que $\delta^2 = 0$ on considère pour $g \in \pi_1(K)$ l'espace

$$\bar{\mathcal{L}}_g^1(x, y) = \mathcal{L}_g^1(x, y) \cup \bigcup_{z \in L_0 \cap L_1, g''g' = g} \mathcal{L}_{g'}^0(x, z) \times \mathcal{L}_{g''}^0(z, y),$$

dont il faut démontrer que c'est une 1-variété compacte à bord. La (petite) difficulté supplémentaire par rapport à la compacité du Th. 2.3 vient du fait qu'il faut montrer qu'une suite de trajectoires de $\mathcal{L}_g(x, y)$ peut avoir comme limite une trajectoire brisée, mais dans ce cas les deux éléments g' et g'' associés aux deux parties de la limite vérifient $g''g' = g$. Pour la résoudre on démontre le lemme suivant (c'est le lemme 3.16 dans [21]) :

Lemme 2.12 *Avec les notations du théorème 2.3 soit $\gamma : [-\infty, +\infty] \rightarrow L_0$ le chemin défini par $\gamma_n(s) = v_n(s, 0)$ prolongé par x en $s = -\infty$ et par y en $s = +\infty$. Pour $i = 1, \dots, k$, soient $\gamma^i : [-\infty, +\infty] \rightarrow L_0$ les chemins analogues définis par les bandes holomorphes v^i qui composent la limite de la suite (v_n) . Alors, pour n suffisamment grand, γ_n et la concaténation $\gamma = \gamma^1 * \gamma^2 * \dots * \gamma^k$ sont homotopes dans L_0 .*

On a donc démontré la compacité de $\bar{\mathcal{L}}_g^1(x, y)$. Il reste à utiliser un argument de recollement pour la structure de variété près du bord. Celui-ci est analogue au cas classique.

Se pose maintenant la question de l'invariance de l'homologie du complexe $C_\bullet(L, \phi_t, J)$ ainsi obtenu par rapport aux choix effectués. Rappelons que l'isotopie (ϕ_t) est engendré par $\beta + dH_t$, où β est une 1-forme fermée dans la classe

u (l'invariant de Calabi) et H est à support compact. Nous démontrons dans [21] (Th 3.21) la propriété suivante d'invariance *hamiltonienne* :

Théorème 2.13 *L'homologie du complexe C_\bullet ne dépend pas du choix générique du couple (H_t, J) .*

On obtient donc un complexe, engendré par les points d'intersection $L_0 \cap L_1$, dont l'homologie ne dépend que de L et de l'invariant de Calabi de l'isotopie symplectique. On peut l'appeler par conséquent homologie de Floer-Novikov. Mais ce complexe a le défaut d'être un module sur l'anneau de Novikov Λ_u , le complété de l'anneau du groupe $\pi_1(K)$, alors que le théorème 2.7 demande un complexe sur Λ_{p^*u} , le complété de $\pi_1(L)$. Pour relier l'homologie du complexe à une homologie de Novikov de L telle que définie au §3.1, il faudra en effet utiliser le revêtement universel \tilde{L} et donc utiliser l'anneau de Novikov Λ_{p^*u} . Une alternative serait d'utiliser une version de l'homologie de Novikov construite à l'aide du revêtement $\bar{L} \rightarrow L$ (le tiré-en arrière de $T^*\tilde{K} \rightarrow T^*K$, déjà vu au §3.2), voire utiliser le revêtement d'intégration de u . Mais ces versions de l'homologie de Novikov sont plus faibles dans le sens où l'annulation de ces homologies ne permet pas d'obtenir des contraintes aussi fortes sur la topologie de L .

Par ailleurs il n'y a pas de plongement lagrangien de \tilde{L} dans $T^*\tilde{K}$ donc pas de possibilité de relever les bandes holomorphes et a priori le cadre naturel de la théorie de Floer-Novikov est celui qu'on vient de décrire. Une astuce permet toutefois de contourner cette difficulté. C'est le point de départ de l'homologie de Floer relevée qui sera traitée en détail dans la section suivante, mais donnons-en également un aperçu ici.

Si on ne peut pas relever les bandes holomorphes à \tilde{L} on peut toutefois effectuer cette opération avec les traces $\gamma(s) = v(s, 0)$ qu'elles laissent sur L . Cela permet de définir des espaces $\tilde{\mathcal{L}}_h(x, y)$ pour $x, y \in L_0 \cap L_1$ et $h \in \pi_1(L)$: pour des relèvements $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{L}$ fixés une fois pour toutes ce sont les bandes holomorphes v de $\mathcal{L}(x, y)$ dont les traces γ admettent des relèvements qui vont de \tilde{x} à $h \cdot \tilde{y}$. Le problème de compacité a déjà été réglé puisque l'on a par construction pour tout $g \in \pi_1(K)$

$$\mathcal{L}_g^0(x, y) = \bigcup_{h \in \pi_1(L), p(h)=g} \tilde{\mathcal{L}}_h^0(x, y),$$

où $p : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(K)$ est induite par la projection de L sur K . Le membre de gauche est de cardinal fini, donc les ensembles dans la réunion du membre de droite aussi. Cela permet de définir un Λ_{p^*u} -complexe libre engendré par les points d'intersection $L_0 \cap L_1$ et dont la différentielle sur un $x \in L_0 \cap L_1$ vaut

$$\delta(x) = \sum_{y \in L_0 \cap L_1, h \in \pi_1(L)} \#_2 \tilde{\mathcal{L}}_h^0(x, y) h \cdot y.$$

Nous démontrons dans [21] (section 3.7) que $\delta^2 = 0$ et que la propriété d'invariance hamiltonienne 2.13 est encore satisfaite. On se retrouve ainsi avec un complexe sur le bon anneau de Novikov, dont l'homologie $HF(L; u)$ est à mettre en relation avec l'homologie de Novikov $H(L; p^*u)$ afin de finir la preuve du théorème 2.7.

3.4 Relation avec l'homologie de Novikov de L

Pour montrer que l'homologie de Floer-Novikov $HF(L; u)$ est isomorphe à l'homologie de Novikov $H(L; u)$ on serait tenté de reproduire la preuve du cas hamiltonien, présentée au §1.4 en remplaçant la fonction par une 1-forme fermée ; plus précisément de montrer que pour l'isotopie définie par le graphe d'une 1-forme fermée β dans un voisinage de Weinstein de L et pour une structure complexe bien choisie le complexe de Floer-Novikov coïncide avec le complexe de Novikov associé à β et à une certaine métrique sur L . Mais on voit que cela pose un problème puisque du fait de la petitesse de β , l'invariant de Calabi de cette isotopie particulière ne sera pas u ; au mieux on pourra prendre ϵu pour un $\epsilon > 0$ assez petit. Or, si l'homologie de Novikov $H(L; u)$ est par construction identique à $H(L; \epsilon u)$, la même chose n'est pas évidente pour ce qui concerne l'homologie de Floer-Novikov.

Un autre problème encore plus sérieux vient du fait que la méthode pour démontrer que les bandes holomorphes ne quittent pas le voisinage de Weinstein (si l'isotopie lagrangienne particulière choisie est assez proche de l'identité) ne s'applique pas ici. Cette démonstration s'appuie sur la compacité de Gromov : si pour $L_1 = \text{graphe}(\epsilon df)$ il y a une bande holomorphe qui sort du voisinage de Weinstein pour ϵ arbitrairement petit, alors à la limite on trouve un disque holomorphe à bord dans L ce qui est interdit par le fait que L est exacte (voir [63] pour plus de détails). La preuve utilise le fait que ces bandes ont une énergie uniformément bornée à cause du fait que la 1-forme

d'action α est exacte et donc l'énergie est majorée par la différence maximale de niveaux entre deux points critiques d'une primitive \mathcal{A} qui coïncident dans ce cas avec les points critiques de f . En revanche, dans notre cas il n'y a pas de borne uniforme sur l'énergie, donc cette méthode ne s'applique pas.

Pour contourner ces difficultés on adapte une méthode utilisée par H. V. Le et K. Ono dans [53] pour montrer une version non-hamiltonienne de la conjecture d'Arnold. On s'inspire d'une idée de F. Latour [49], parfois citée dans la littérature sous le nom de "ruse de Latour" ("Latour's trick"). L'observation de Latour est la suivante : Soit f une fonction de Morse sur une variété L , ξ le gradient de f pour une métrique générique et une 1-classe de cohomologie u . On choisit $\beta \in u$ de sorte qu'elle est nulle dans un voisinage des points critiques de f . Alors, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit on voit facilement que le complexe de Novikov associé au couple $(df + \epsilon\beta, \xi)$ est identique au complexe de Morse associé à (f, ξ) (les deux étant bien-sûr considérés sur l'anneau de Novikov Λ_u).

La transposition de cette idée à notre situation nous amène à comparer le complexes de Floer-Novikov associés à des couples (ϕ_t, J) , (ϕ'_t, J') , où J et J' sont très proches (pas identiques pour cause de généricité) et où l'invariant de Calabi associé à (ϕ'_t) est $(1 + \epsilon)u$, u étant celui de (ϕ_t) . On ne peut pas affirmer que ces deux complexes sont identiques comme dans le cas considéré par F. Latour. On peut démontrer en revanche que leurs homologies sont isomorphes pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (qui dépend de u) ([21], Prop. 4.3.a) :

Proposition 2.14 *Pour $u \in H^1(K, \mathbf{R})$, considérons l'homologie de Floer-Novikov $HF(L; u)$ précédemment définie. Alors il existe $\epsilon > 0$ (qui dépend de u) tel que pour tout $|\sigma| < \epsilon$ on a*

$$HF(L; (1 + \sigma)u) \approx HF(L; u).$$

La preuve se fait en deux temps. La première partie, assez technique, consiste à prouver le résultat pour les homologies de Floer définies sur l'anneau de Novikov Λ_u , celui que l'on construit à partir de l'anneau du groupe $\pi_1(K)$. L'idée est — comme dans la preuve de l'invariance hamiltonienne — de connecter des couples (bien choisis) $(\beta + dH_t, J_t)$ et $(\beta' + dH'_t, J')$ qui définissent respectivement les deux complexes par une homotopie et de définir le morphisme désiré en utilisant une équation de Floer à paramètre. Le point

crucial est une estimation de l'énergie des solutions de cette équation ([21], Prop. 4.6) qui permet la bonne définition de ce morphisme, via la compacité de Gromov. On démontre ensuite que ce morphisme induit un isomorphisme en homologie comme dans la preuve de l'invariance pour l'homologie de Floer classique.

Dans le deuxième temps il faut relever ce morphisme aux complexes construits sur \tilde{L} à coefficients dans Λ_{p^*u} . L'idée est la même : relever les traces $v(s, 0)$ laissées sur L par les solutions de l'équation de Floer à paramètre qui sert à définir le morphisme de complexes (solutions que l'on peut voir comme des demi-cylindres à bord dans L , comme au §1.4).

Cela montre que l'homologie de Floer-Novikov est invariante par la multiplication de l'invariant de Calabi par un nombre positif. Pour la relier à l'homologie de Novikov on part cette fois avec une isotopie hamiltonienne définie par le graphe d'une différentielle de fonction dans un voisinage de Weinstein. Nous avons expliqué au §1.4 que pour un J bien choisi le complexe de Floer associé coïncide avec un complexe de Morse $C_\bullet(f, \xi)$ sur L . On peut relever ce complexe au revêtement universel \tilde{L} ; notons par $\tilde{C}_\bullet(f, \xi)$ le complexe ainsi obtenu qui est $\mathbf{Z}/2[\pi_1(L)]$ -libre, engendré par les points critiques de f . Toujours en suivant l'idée de Latour, la même méthode que dans la preuve de 2.14 donne :

Proposition 2.15 *Avec les notations précédentes, il existe un $\epsilon > 0$, dépendant de u , tel que pour tout $0 < \sigma < \epsilon$ on ait*

$$HF(L; \sigma u) \approx H(\tilde{C}_\bullet(f, \xi)) \otimes_{\mathbf{Z}/2[\pi_1(L)]} \Lambda_{p^*u}.$$

Comme le membre de droite est isomorphe à l'homologie de Novikov $H(L; p^*u)$, cela termine la preuve du théorème 2.7.

Notons pour finir que si L est orientable et relativement spin on peut remplacer les coefficients $\mathbf{Z}/2$ par des coefficients entiers, comme au §1.5.

4 L'homologie de Floer relevée

Nous nous attaquons maintenant à la preuve du théorème 2.8. Ce théorème s'applique aux sous-variétés lagrangiennes L monotones de nombre de Maslov $N_L \geq 3$ ou exactes. Il est important de comprendre pourquoi dans le

cas $N_L = 2$ l'énoncé est faux puisque c'est un raisonnement par réduction à l'absurde qui va nous conduire à la preuve des différentes versions de la conjecture d'Audin (Th. 1.12 et Th. 1.13). Nous commençons par expliquer que l'homologie de Floer habituelle est bien définie pour des lagrangiennes monotones dont le nombre de Maslov est égal à 2.

4.1 Le complexe de Floer pour $N_L = 2$

La différence entre les cas $N_L = 2$ et $N_L \geq 3$ se manifeste au niveau de la propriété de compacité (Section §1.3). Dans le cas d'une lagrangienne monotone L nous avons énoncé le théorème de compacité 2.3 sous l'hypothèse $N_L \geq 3$ et expliqué que cette condition garantissait l'absence des disques holomorphes dans une suite de bandes holomorphes de $\mathcal{M}^2(x, y)$. Cela à cause du fait que la limite d'une telle suite devait avoir un indice de Maslov-Viterbo égal à 2, étant admis que dans le calcul de ce dernier, les éventuels disques holomorphes contribuent avec leur indice de Maslov. Lorsque $N_L = 2$, l'absence de disques holomorphes reste acquise si $x \neq y$, puisque l'action libre de \mathbf{R} sur $\mathcal{M}(x, y)$ fait que les bandes holomorphes dans la limite ont un indice de Maslov-Viterbo au moins égal à 1.

En revanche, lorsque $x = y$, une suite de $\mathcal{M}^2(x, x)$ pourrait converger vers un disque holomorphe d'indice de Maslov égal à 2. Dans ce cas, la figure de base en théorie de Morse fig.2.1 se trouverait changée dans le sens où une trajectoire brisée allant de x à x serait liée par des bandes (colliers) holomorphes à un disque holomorphe passant par x . Cela pourrait avoir comme conséquence le fait que le carré de la différentielle est non nul, autrement dit que le complexe de Floer n'existe pas. Voyons si c'est vraiment le cas.

On peut voir la modification de la figure de Morse décrite ci-dessus sur un exemple concret, qui plus est le plus simple qu'on puisse imaginer, à savoir l'intersection de deux cercles dans \mathbf{R}^2 , illustrée dans la figure 2.3 ci-dessous.

Les bandes holomorphes sont u , v et w et il n'y a pas de chemin de colliers holomorphes passant par x entre les trajectoires brisées $u\#w$ et $v\#w$. Autrement, dit, il n'y a pas de figure analogue à fig.2.1 dans cet exemple. En revanche, on peut connecter chacune des trajectoires brisées ci-dessous à un disque à bord lagrangien, comme le montre la figure suivante :

On voit comment $u\#w$ est lié à l'unique disque holomorphe D de nombre de Maslov 2 qui s'appuie sur L ; de manière analogue $v\#w$ sera connecté au

FIGURE 2.3 – Le cas $N_L = 2$

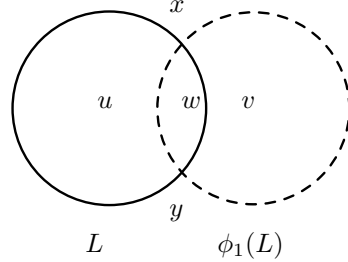
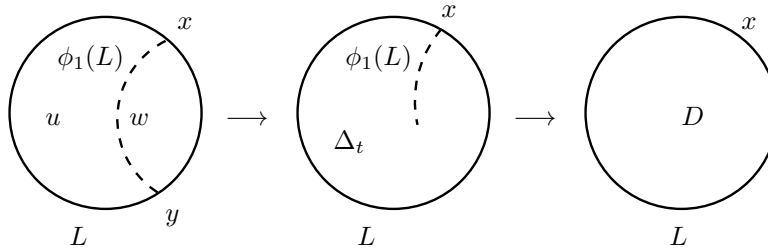


FIGURE 2.4 – Trajectoires brisées et disques holomorphes



disque correspondant à $\phi_1(L)$. C'est donc la figure de Morse modifiée dont on vient de parler.

La différentielle du complexe de Floer s'écrit :

$$\delta(x) = 1_u y + 1_v y, \quad \delta(y) = 1_w x,$$

où la notation 1_u signifie tout simplement que le coefficient 1 correspond à la bande holomorphe u . On voit facilement que $\delta^2 = 0$, malgré le fait que l'on n'a pas de figure de Morse habituelle. Cela vient du fait que il y a un nombre pair de disques holomorphes de nombre de Maslov 2 à bord lagrangien dans la figure 2.3 (en l'occurrence deux) et (par conséquent) un nombre pair d'orbites brisées allant de x à x (deux également).

Cette propriété, la parité du nombre de disques, n'est pas une particularité de notre exemple ; elle est vraie en général. Pour la formaliser, considérons $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne monotone avec $N_L = 2$ ainsi qu'une isotopie générique (ϕ_t) . Notons par \mathcal{J}_{reg} l'ensemble (ouvert et dense) de toutes les structures presque complexes compatibles J pour lesquelles le complexe

de Floer habituel $CF(L, \phi_t, J)$ est défini. Pour $J \in \mathcal{J}_{reg}$ notons

$$\mathcal{M}(M, L, J; 2) = \{w : (D, \partial D) \rightarrow (M, L) \mid \bar{\partial}_J w = 0, \mu(w) = 2\}.$$

Des résultats de transversalité ([25], voir aussi [14], chap.3) montrent que pour J générique $\mathcal{M}(M, L, J; 2)$ est une variété de dimension $n + 2$. Il est important de souligner ici qu'un point crucial dans la preuve de la transversalité est le fait que tous les disques de $\mathcal{M}(M, L, J; 2)$ sont simples. Ceci est une conséquence du fait que L est monotone et d'un résultat de D. Kwon et Y-G. Oh [45], [46] et de L. Lazzarini [52] (voir encore [14]). La monotonie de L implique également le fait que $\mathcal{M}(M, L, J; 2)$ est compacte. En effet, tous les disques de cet espace ont la même aire symplectique, donc la compacité de Gromov [40] s'applique dans ce cas. Aussi, comme L est monotone et ces disques ont un nombre de Maslov minimal, il ne peut pas y avoir de "bubbling", c'est-à-dire d'obstruction à la compacité sous la forme de disques holomorphes supplémentaires dans la limite d'une suite de $\mathcal{M}(M, L, J; 2)$.

Il suit que l'ensemble des disques J -holomorphes non-paramétrés passant par un point donné $p \in L$ s'identifient avec la pré-image $ev^{-1}(p)$ d'une application d'évaluation

$$ev : \mathcal{N} \rightarrow L,$$

où

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}(M, L, J; 2) \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R}),$$

et $PSL(2, \mathbf{R})$ agit sur $\mathcal{M}(M, L, J; 2) \times \mathbf{S}^1$ par

$$h \cdot (w, z) = (w \circ h, h^{-1}(z)).$$

L'évaluation est bien-sûr définie par $ev([w, z]) = w(z)$, pour $[w, z] \in \mathcal{N}$. Ce qui précède montre que \mathcal{N} est une variété compacte de dimension n . En particulier, pour p générique la pré-image $ev^{-1}(p)$ a un nombre fini d'éléments, dont la parité ne dépend pas du choix générique du point p : c'est le degré modulo 2 de l'évaluation. Suivant Y-G. Oh [63], notons par $\Phi_L \in \mathbf{Z}/2$ ce nombre (modulo 2). Dans ce papier, Oh montre le résultat suivant :

Théorème 2.16 *Soit $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne monotone de nombre de Maslov $N_L = 2$. Soit (ϕ_t) une isotopie hamiltonienne générique sur M ; notons $L_t = \phi_t(L)$. Alors on a*

$$\Phi_{L_0} + \Phi_{L_1} = 0.$$

En particulier l'homologie de Floer $HF(L)$ est bien définie. Sa relation avec l'homologie habituelle de L est analogue à celle décrite en §1.4.

La relation de l'énoncé est en effet celle qui garantit un nombre total pair de disques holomorphes de nombre de Maslov 2 à bord lagrangien et donc un nombre pair des trajectoires brisées, comme dans l'exemple illustré dans les figures 2.3 et 2.4.

4.2 Définition du complexe de Floer relevé

Partons d'une sous-variété lagrangienne monotone $L \subset M$ et avec un revêtement fixé $p : \bar{L} \rightarrow L$. Considérons également une isotopie hamiltonienne générique (ϕ_t) et notons $L_t = \phi_t(L)$. Supposons pour le moment que $N_L \geq 2$, de sorte que le complexe de Floer habituel engendré par $L_0 \cap L_1$ est bien défini. Construisons à l'aide de ces données un complexe de type Floer à l'aide du revêtement \bar{L} . En tant que module il est naturel de définir

$$CF(\bar{L}, \phi_t) = \mathbf{Z}/2\langle p^{-1}(L_0 \cap L_1) \rangle,$$

qui est de dimension infinie si le revêtement n'est pas fini. Il reste maintenant à définir la différentielle de ce complexe. On reprend une idée que l'on a déjà utilisée dans la construction du complexe de Floer-Novikov : si on ne peut pas relever une bande holomorphe $u \in \mathcal{M}(x, y)$, qui habite dans la variété ambiante, on peut considérer en revanche les relèvements du chemin $\gamma_u(s) = u(s, 0)$, la trace que laisse la bande holomorphe sur la sous-variété L . Cela est illustré dans la figure 2.5 ci-dessous :

Ainsi, la différentielle $\delta^{\bar{L}} : CF(\bar{L}) \rightarrow CF(\bar{L})$ est définie sur les générateurs $\bar{x} \in p^{-1}(x)$ par la formule

$$\delta^{\bar{L}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{y} \in p^{-1}(L_0 \cap L_1)} n(\bar{x}, \bar{y}) \bar{y},$$

où

$$n(\bar{x}, \bar{y}) = \#_2\{u \in \mathcal{L}^0(x, y) \mid u(s, 0) \text{ se relève en un chemin entre } \bar{x} \text{ et } \bar{y}\}.$$

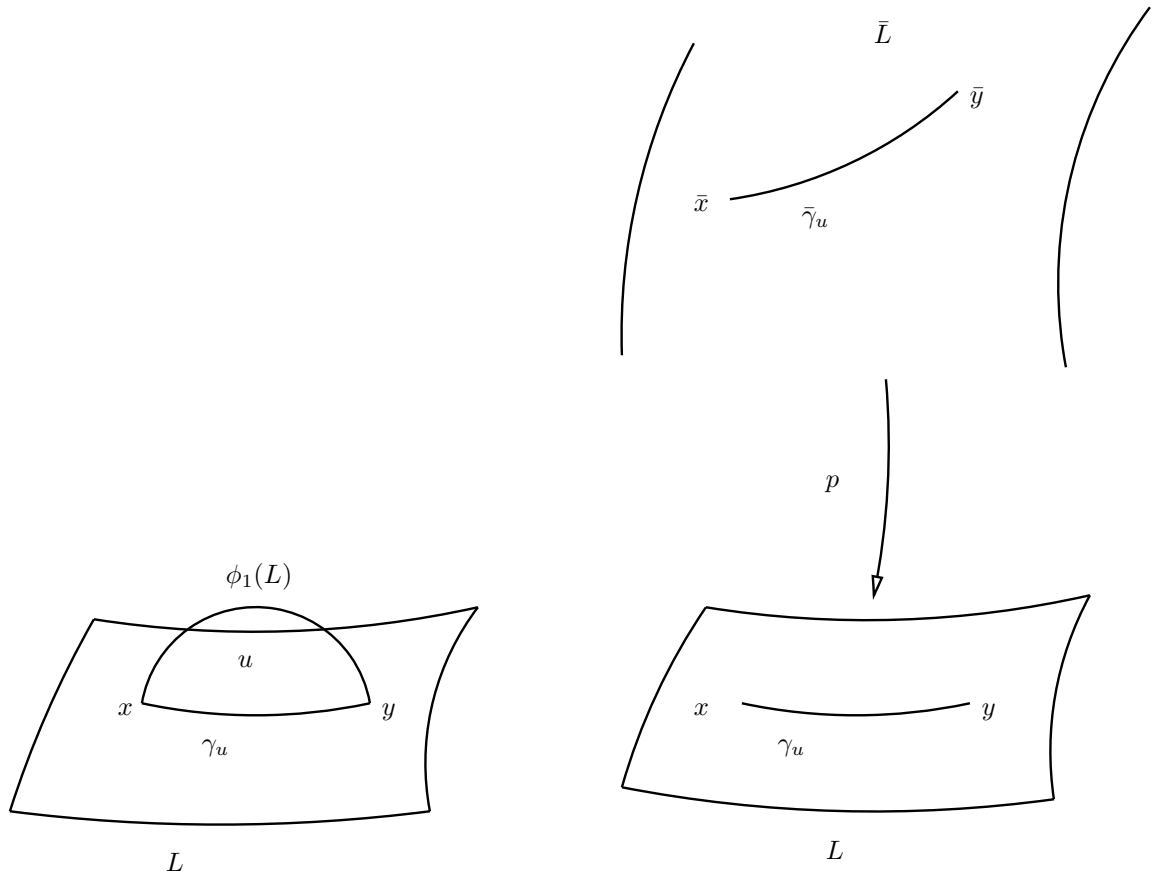


FIGURE 2.5 – Idée de la construction

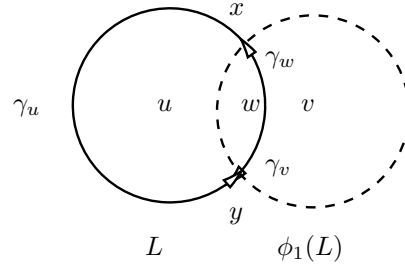
4.3 Est-ce bien un complexe ?

Tout d'abord il est clair que $\delta^{\bar{L}}$ est bien définie dans le sens où la somme du membre de droite est finie : $n(\bar{x}, \bar{y})$ est le cardinal modulo 2 d'un sous-ensemble de $\mathcal{L}^0(x, y)$, qui est fini. Il reste à vérifier que $(\delta^{\bar{L}})^2 = 0$ ce qui se fait en regroupant les orbites brisées relevées par paires - des points du bord d'une variété de dimension 1 comme dans la figure typique de la théorie de Morse (fig. 2.1). On veut s'appuyer sur le fait que $\delta^2 = 0$ pour le complexe de Floer habituel et relever la figure de Morse 2.1 à \bar{L} . Il y a deux points à analyser afin de pouvoir le faire :

1. Cas $N_L = 2$.

Nous avons vu dans la section §4.1 que dans ce cas le complexe de Floer habituel est défini, mais nous n'avons pas en général la figure de type Morse 2.1. Qu'en est-il du complexe de Floer relevé ? Une fois de plus c'est l'exemple des deux cercles dans \mathbf{R}^2 qui nous donne la réponse. Regardons la figure 2.6 ci-dessous où l'on a fait figurer les traces γ que laissent sur L respectivement les bandes holomorphes u, v et w :

FIGURE 2.6 – La différentielle du complexe relevé



La différentielle δ^L pour le revêtement trivial $L \rightarrow L$ a bien évidemment une écriture analogue à celle du complexe de Floer habituel, à savoir :

$$\delta(x) = 1_{\gamma_u}y + 1_{\gamma_v}y, \quad \delta(y) = 1_{\gamma_w}x,$$

de sorte que

$$\delta^2(x) = 1_{\gamma_u \# \gamma_w}x + 1_{\gamma_v \# \gamma_w}x = 0.$$

Mais lorsqu'on écrit la même formule pour le revêtement universel \tilde{L} on obtient $(\delta^{\tilde{L}})^2 \neq 0$, puisque les chemins $\gamma_u \# \gamma_w$ et $\gamma_v \# \gamma_w$ ne sont pas homotopes dans L !

La conclusion est qu'en général on ne peut pas définir le complexe de Floer relevé pour $N_L = 2$. Nous supposons donc $N_L \geq 3$, comme dans l'énoncé de 2.8. Le théorème de compacité 2.3 nous garantit alors la présence de figures de Morse 2.1 qui permettent de regrouper par paires les trajectoires brisées qui interviennent dans la construction du complexe de Floer habituel. Il y a ici un deuxième point à étudier :

2. Homotopie des trajectoires brisées.

Considérons une paire de trajectoires brisées (bandes holomorphes) donnée par une figure de type 2.1 dans le cadre du complexe de Floer habituel. Il faut vérifier que les traces que laissent les trajectoires brisées sur L - des chemins entre $x, y \in L_0 \cap L_1$ se relèvent en des chemins de \bar{L} qui ont les mêmes extrémités \bar{x} et \bar{y} . Cela est une conséquence du lemme 2.12 qui affirme que ces traces de trajectoires brisées sont homotopes dans L .

Nous venons donc d'achever la démonstration de la première partie de la preuve de 2.8, la construction du complexe de Floer relevé pour des sous-variétés lagrangiennes monotones à nombre de Maslov supérieur ou égal à 3, ou exactes. Pour finir cette preuve il faut relier l'homologie de celui-ci avec l'homologie de \bar{L} .

4.4 Relation avec l'homologie singulière de \bar{L}

Tout d'abord on montre l'invariance de l'homologie du complexe $C_\bullet(\bar{L}, \phi_t, J)$ par rapport à un choix générique du couple (ϕ_t, J) . Nous savons le faire pour l'homologie de Floer habituelle, par la méthode décrite au §1.4. Celle-ci, rappelons-le, utilisait une homotopie $(H_{s,t}, J_s)$ entre deux couples (H, J) génériques et l'équation de Floer à paramètre associée analogue à (**) pour définir un morphisme entre les complexes de Floer respectifs — morphisme qui induit un isomorphisme au niveau de l'homologie. Ensuite, on relève cet isomorphisme au niveau des complexes définis à l'aide du revêtement \bar{L} , comme indiqué dans la section §4.2 et illustré dans la figure 2.5. Rappelons aussi que lorsqu'on utilise l'équation de Floer (**), comme dans la section

§1.4, les solutions sont des demi-cylindres à bord dans L ; dans ce cas on relève la partie $v(s, 0)$ du bord d'un tel cylindre v .

Comme dans la section précédente on montre que pour L exacte, ou si L est monotone de nombre de Maslov $N_L \geq 3$, le morphisme ainsi défini commute avec les différentielles. Puis en relevant à chaque fois les constructions de la théorie de Floer habituelle on montre qu'il induit un isomorphisme en homologie. On peut donc parler de l'homologie de Floer relevée $HF(\bar{L})$.

Pour montrer que la relation entre celle-ci et l'homologie habituelle est conforme à l'énoncé 2.8, on utilise l'isotopie hamiltonienne définie par le graphe d'une petite fonction $f : L \rightarrow \mathbf{R}$, comme dans la section §1.4. Lorsque L est exacte nous sommes dans les hypothèses de 2.4. Le complexe de Floer relevé coïncide dans ce cas avec le complexe engendré par $p^{-1}(\text{Crit}(f))$ (où $p : \bar{L} \rightarrow L$ est la projection), et dont la différentielle s'obtient en relevant au \bar{L} les trajectoires de $-\text{grad}_g f$ (où g est une métrique générique). Ce complexe calcule l'homologie de \bar{L} . Pour s'en rendre compte, il faut se rappeler que les variétés stables associées au gradient de f définissent une structure de CW -complexe dont le complexe associé est le même que le complexe de Morse [50]. En relevant les trajectoires de gradient à \bar{L} , on relève du même coup la structure de CW -complexe sur \bar{L} , ce qui fait que le complexe associé calcule l'homologie singulière de \bar{L} . On obtient donc finalement pour L exacte

$$HF(\bar{L}) \approx H(\bar{L}, \mathbf{Z}/2).$$

Parlons maintenant du cas où L est monotone. En choisissant (f, J) comme dans l'énoncé de 2.5 on trouve une conclusion analogue, à savoir

$$\delta^{\bar{L}} = \delta_0^{\bar{L}} + \delta_1^{\bar{L}} + \delta_2^{\bar{L}} + \dots,$$

où $\delta_0^{\bar{L}}$ est la relevée de la différentielle de Morse (qui calcule l'homologie de \bar{L}) et pour $\ell > 0$

$$\delta_\ell^{\bar{L}} : CF_*(\bar{L}, f) \rightarrow CF_{*-1+\ell N_L}(\bar{L}, f).$$

En particulier $\delta_\ell^{\bar{L}} = 0$ si $\ell > \left\lceil \frac{\dim(L)+1}{N_L} \right\rceil$. Nous avons dit au §1.4 que ces données mènent vers une suite spectrale qui part de l'homologie habituelle (en l'occurrence celle de \bar{L}) et converge vers l'homologie de Floer (relevée). Détaillons la construction de cette suite, due à Y-G. Oh [63] et P. Biran [11].

Elle est associée à une filtration croissante d'un complexe \tilde{C}_\bullet qui se définit comme suit. Notons par A le sous-anneau $\mathbf{Z}/2[T^{N_L}, T^{-N_L}]$ des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$ et par $A^{kN_L} \subset A$ le sous-groupe $\mathbf{Z}/2 \cdot T^{kN_L}$ pour tout k entier. Définissons le complexe

$$\tilde{C}_\ell = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} CF_{\ell - kN_L}(\bar{L}, f) \otimes A^{kN_L},$$

muni de la différentielle

$$\tilde{d} = \delta_0^{\bar{L}} \otimes \text{Id} + \delta_1^{\bar{L}} \otimes T^{-N_L}(\cdot) + \delta_2^{\bar{L}} \otimes T^{-2N_L}(\cdot) + \dots$$

On vérifie facilement que $\tilde{d}^2 = 0$, en utilisant les relations entre les δ_ℓ (voir §1.4). Sur ce complexe on définit une filtration $\mathcal{F}_p(\tilde{C}_\bullet)$ par :

$$\mathcal{F}_p(\tilde{C}_\ell) = \bigoplus_{k \leq p} C_{\ell - kN_L} \otimes A^{kN_L}.$$

On montre facilement que la différentielle \tilde{d} préserve cette filtration et que l'homologie de \tilde{C}_\bullet est canoniquement isomorphe à l'homologie de Floer $HF(\bar{L})$. On considère la suite spectrale $E_{p,q}^r$ associée à cette filtration (voir [55] pour plus de détails). Compte tenu de ce qui précède, elle a les propriétés suivantes :

Théorème 2.17 *La suite spectrale $\{E_{p,q}^r, d_r\}$ associée à la filtration \mathcal{F} converge vers l'homologie de Floer relevée $HF(\bar{L})$ et satisfait aux propriétés suivantes (tous les produits tensoriels sont sur $\mathbf{Z}/2$) :*

- $E_{p,q}^0 = C_{p+q-pN_L} \otimes A^{pN_L}$, $d_0 = \delta_0^{\bar{L}} \otimes \text{Id}$.
- $E_{p,q}^1 = H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2) \otimes A^{pN_L}$, $d_1 = \delta_1^{\bar{L}} \otimes T^{-N_L}(\cdot)$, où

$$\delta_1^{\bar{L}} : H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_{p+q-1-(p-1)N_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2)$$

est induite par la composante $\delta_1^{\bar{L}}$ de la différentielle de Floer au niveau de l'homologie.

- Pour tout $r \geq 1$ $E_{p,q}^r$ est de la forme $E_{p,q}^r = V_{p,q}^r \otimes A^{pN_L}$ avec $d_r = \delta_r \otimes T^{-rN_L}$, où $V_{p,q}^r$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{Z}/2$ et

$$\delta_r : V_{p,q}^r \rightarrow V_{p-r,q+r-1}^r$$

sont des morphismes définis pour tous p, q qui satisfont à $\delta_r \circ \delta_r = 0$. De plus, :

$$V_{p,q}^{r+1} = \frac{\text{Ker}(\delta_r : V_{p,q}^r \rightarrow V_{p-r,q+r-1}^r)}{\text{Im}(\delta_r : V_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow V_{p,q}^r)},$$

et pour $r = 0, 1$ nous avons

$$V_{p,q}^0 = C_{p+q-pN_L}^{\bar{L}}, \quad V_{p,q}^1 = H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2), \quad \delta_1 = \delta_1^{\bar{L}}.$$

– La suite spectrale dégénère à la page $\left\lceil \frac{\dim(L)+1}{N_L} \right\rceil + 1$ et pour tout $p \in \mathbf{Z}$,

$$\bigoplus_{q \in \mathbf{Z}} E_{p,q}^\infty \approx HF(\bar{L}).$$

La preuve du théorème 2.17 est analogue à celle de Th.5.2.A dans [11]. Elle est purement algébrique, s'appliquant donc de la même manière au complexe de Floer habituel et au complexe de Floer relevé. Notons qu'elle implique immédiatement le théorème 2.8 pour L monotone (et coefficients dans $\mathbf{Z}/2$). En effet, si $\delta_1 = 0$, alors d'après le théorème précédent

$$V_{p,q}^2 = V_{p,q}^1 = H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2)$$

et

$$\delta_2 : H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_{(p-2)+(q+1)-(p-2)N_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2),$$

ce qui s'écrit

$$\delta_2 : H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_{p+q-pN_L+(-1+2N_L)}(\bar{L}, \mathbf{Z}/2).$$

La propriété (iii) du théorème 2.8 vient juste du fait que si la limite de la suite spectrale est nulle et si les différentielles sont nulles sauf pour une certaine page ℓ , alors les complexes définis à cette page sont acycliques. Cela finit la preuve du théorème 2.8 pour les énoncés à coefficients en $\mathbf{Z}/2$. Le passage aux coefficients entiers suit de §1.5 : si nous avons pu orienter les bandes holomorphes, les trajectoires relevées héritent bien évidemment de cette orientation. La condition (iv) disparaît puisque nous ne pouvons plus reconstruire la limite de la suite spectrale à partir de E^∞ car les suites exactes ne scindent pas.

L'explication des preuves de nos théorèmes principaux 2.7 et 2.8 maintenant terminée, nous pouvons passer dans le chapitre suivant aux démonstrations des applications de ces énoncés, les résultats que nous avons annoncés au §4 du chapitre 1.

Chapitre 3

Propriétés des sous-variétés lagrangiennes

1 Lagrangiennes asphériques. La conjecture d'Audin

Nous regroupons dans cette section les preuves des théorèmes qui sont des généralisations de la conjecture d'Audin. Il s'agit de 1.12, 1.13, 1.14 et 1.18. L'idée des preuves est que, sous les hypothèses des énoncés, la suite spectrale définie par le théorème 2.17 dégénère à la première page, ce qui signifie, avec les notations du théorème 2.8 que les applications δ_ℓ s'annulent pour $\ell > 1$ et donc (d'après le point (iii) de ce théorème) que l'homologie de Floer relevée $HF(\bar{L})$ est isomorphe à l'homologie singulière de \bar{L} . Mais, lorsque L est disjoignable d'elle-même par une isotopie hamiltonienne, l'homologie $HF(\bar{L})$ est nulle ce qui est contradictoire... et implique le fait que le complexe de Floer relevé n'est pas bien défini, autrement dit que $N_L < 3$.

Démonstration de 1.12.a

Si $N_L \geq 3$ l'homologie de Floer relevée est bien définie pour le revêtement universel \tilde{L} . Comme L est asphérique, on a $H_i(\tilde{L}) = 0$ si $i > 0$, donc les applications $\delta_\ell : H_i(\tilde{L}) \rightarrow H_{i-1+\ell N_L}(\tilde{L})$ données par le théorème 2.8 sont toutes nulles et par conséquent

$$HF(\tilde{L}) \approx H(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2).$$

Comme la première est nulle ceci est contradictoire, donc $N_L \leq 2$. Pour distinguer les cas L orientable et L non-orientable on s'appuie sur le résultat bien connu suivant [3] (voir aussi [34], Lemme 2.5) :

Proposition 3.1 *Si $L \subset M$ est orientable alors N_L est pair. La réciproque est vraie si $\pi_1(M)$ est trivial.*

La preuve est terminée.

Démonstration de 1.12.b

Pour une structure presque complexe générique J considérons l'ensemble $\mathcal{M}(M, L, J; 2)$ défini dans la section §4.1 du chapitre précédent. Pour tout $g \in \pi_1(L)$ on définit le sous-ensemble

$$\mathcal{M}_g(M, L, J, 2) = \{w \in \mathcal{M}(M, L, J, 2) \mid [\partial w] = g\}.$$

Comme dans le chapitre 2, on pose

$$\mathcal{N}_g = \mathcal{M}_g \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R}),$$

variété compacte de dimension n et on définit l'évaluation

$$ev_g : \mathcal{N}_g \rightarrow L \quad [w, z] \mapsto w(z).$$

Le degré modulo 2 de ev_g est la parité du nombre de disques holomorphes de nombre de Maslov 2, de bord dans la classe g , passant par un point générique $p \in L$; suivant la section §4.1 du chapitre précédent on le note $\Phi_{g,L} \in \{0, 1\}$. On a de manière évidente :

$$(1) \quad \Phi_L = \sum_{g \in \pi_1(L)} \Phi_{g,L}.$$

On utilisera la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Soit $L \subset M$ une lagrangienne monotone avec $N_L = 2$. On suppose que $\Phi_{g,L} = 0$ pour tout $g \in \pi_1(L)$, $g \neq 1$. Alors le complexe de Floer relevé est bien défini (pour un couple (H, J) générique) et il vérifie toutes les propriétés du théorème 2.8.*

Démonstration

Nous avons vu dans la section §4.3 du chapitre précédent à travers l'exemple des deux cercles illustré par la figure 2.5 que lorsque $N_L = 2$ le complexe relevé n'est pas bien défini en général. Le problème vient du fait que des chemins de trajectoires de $\mathcal{L}^1(x, x)$ peuvent joindre une trajectoire brisée à un disque holomorphe comme dans la figure 2.4. Les trajectoires w d'un tel chemin ont la propriété que les lacets $w(s, 0) \subset L$ sont homotopes entre eux et avec les lacets définis par les extrémités du chemin : la trajectoire brisée d'un côté et le disque holomorphe de l'autre. C'est une conséquence du lemme 2.12. Ainsi, lorsqu'à une extrémité de ce chemin on trouve un disque holomorphe à bord dans $L_1 = \phi_1(L)$ le lacet défini par celui-ci se réduit au point x et par conséquent les lacets $w(s, 0)$ sont contractiles dans L . Cela montre que le nombre modulo 2 des trajectoires brisées dans le bord de $\mathcal{L}^1(x, x)$ qui définissent un lacet sur L dans la classe $g \in \pi_1(L)$ est $\Phi_{g,L}$ pour $g \neq 1$ et $\Phi_{1,L} + \Phi_{L_1}$ pour $g = 1$. Rappelons que leur nombre total modulo 2 est $\Phi_L + \Phi_{L_1}$, le nombre total de disques holomorphes de nombre de Maslov 2 passant par x ; ce nombre vaut 0 d'après 2.16.

L'hypothèse de notre proposition implique donc qu'il y a un nombre pair de trajectoires brisées pour tout $g \in \pi_1(L)$. C'est évident pour $g \neq 1$ puis pour $g = 1$ cela découle de 2.16 et de la relation (1) ci-dessus. Autrement dit, le complexe est bien défini dans ce cas. La vérification de ses propriétés se fait comme dans la preuve du théorème 2.8.

Cela démontre la proposition 3.2. La preuve de 1.12.b suit immédiatement puisque s'il n'y a pas de disque J -holomorphe de nombre de Maslov égal à 2 passant par un point de L , alors l'hypothèse de 3.2 est satisfaite, donc le complexe de Floer est défini, ce qui nous mène à la même contradiction que dans la preuve de 1.12.a.

Tout cela est bien entendu valable pour une structure J générique uniquement. Mais si la structure est quelconque, on peut l'approcher par une suite de structures génériques $(J_m)_{m \geq 1}$ pour lesquelles il existe donc des disques w_m passant par un point $x \in L$ donné. Il reste alors à appliquer le théorème de compacité de Gromov pour obtenir à la limite un disque J -holomorphe (on utilise ici que le nombre de Maslov de ces disques est minimal, donc il n'y a pas de "bubbling"). De plus, le bord de w n'est pas contractile dans L , en application de la proposition 2.12.

Démonstration de 1.13.a

Supposons que $N_L \geq 3$. Le complexe de Floer relevé $CF(\tilde{L})$ est donc bien défini. Comme L est orientable, N_L est pair, ce qui implique que les applications δ_i définies par le théorème 2.8 ont un degré impair, et donc elles sont nulles, puisque l'homologie de \tilde{L} est nulle en degré impair. On obtient donc la même contradiction que dans la preuve de 1.12.a. La preuve de l'existence des disques holomorphes de nombre de Maslov égal à 2 est analogue à celle de 1.12.b.

Démonstration de 1.13.b

Supposons que le complexe de Floer relevé $CF(\tilde{L})$ est défini. On fixe $p \in \mathbf{Z}$ et on pose

$$\chi_r = \sum_{q \in \mathbf{Z}} (-1)^q \dim(V_{p,q}^r),$$

les espaces vectoriels $V_{p,q}^r$ étant définis par le théorème 2.17. On démontre dans [22] que χ_r est indépendant de r . Puis, en appliquant 2.17 on a d'une part

$$\chi_1 = \chi(H_*(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2)) \neq 0,$$

et d'autre part $\chi_r = 0$ pour r suffisamment grand du fait que la suite spectrale dégénère. Cette contradiction implique que le complexe de Floer n'est pas bien défini, ce qui signifie d'après qui précède que $N_L = 2$ et il y a des disques holomorphes de nombre de Maslov 2 par tout point de L .

Démonstration de 1.14

Si $N_L \geq k + 2 \geq 3$ alors l'homologie de Floer relevée $HF(\tilde{L})$ est bien définie. Puis, comme les degrés des applications δ_i sont plus grands que $-1 + N_L \geq k + 1$, toutes ces applications s'annulent et donc $HF(\tilde{L})$ est isomorphe à l'homologie singulière de \tilde{L} , qui n'est pas nulle, d'où la contradiction avec le fait que L est disjoignable d'elle-même par une isotopie hamiltonienne. Il suit que $N_L \leq k + 1$, le résultat qu'on voulait démontrer.

Démonstration de 1.18

Nous utilisons le résultat suivant de P. Biran ([11], Prop. 4.1.A) :

Proposition 3.3 *Soit W variété symplectique telle que $M = \mathbf{CP}^n \times W$ est monotone. Si $L \subset M$ est lagrangienne monotone alors il existe un fibré en cercles $\Gamma_L \rightarrow L$ tel que l'espace total Γ_L admet un plongement lagrangien monotone dans $W \times \mathbf{C}^{n+1}$ et de plus $N_{\Gamma_L} = N_L$.*

Pour finir la preuve, remarquons que si L est asphérique, alors Γ_L a la même propriété. On peut alors appliquer le théorème 1.12.a pour conclure.

2 Lagrangiennes à nombre de Maslov maximal

Nous montrons dans ce qui suit des propriétés topologiques des sous-variétés lagrangiennes monotones qui se disjointent d'elles-mêmes par des isotopies hamiltoniennes et qui ont un nombre de Maslov maximal. Rappelons que si la dimension de M est $2n$ ce maximum est $N_L = n + 1$ en général et $N_L = n$ si M est \mathbf{R}^{2n} , ou plus généralement une variété symplectique exacte. Nous esquissons dans ce qui suit les preuves de 1.15, 1.16 et 1.19.

Démonstration de 1.16

Comme $N_L = n + 1 \geq 3$ le complexe de Floer relevé est bien défini. Appliquons les autres conclusions du théorème 2.8. Considérons un revêtement arbitraire \bar{L} . Pour des raisons de degré on a $\delta_i^{\bar{L}} = 0$ pour $i > 1$ et (par le point (iii) du théorème) le complexe $(H_*(\bar{L}, \mathbf{Z}/2), \delta_1^{\bar{L}})$ est acyclique. Comme $\delta_1^{\bar{L}}$ est de degré n cela équivaut au fait que \bar{L} est une $\mathbf{Z}/2$ -sphère d'homologie. En particulier L est orientable et spin et de ce fait N_L est pair donc n est impair. Alors, toujours en appliquant 2.8 on trouve que \bar{L} est une sphère d'homologie entière. Mais alors cela signifie que tout sous-groupe $G \leq \pi_1(L)$ est parfait, c'est-à-dire son sous-groupe des commutateurs est nul. Cela parce que l'homologie de degré 1 du revêtement associé à G est nulle. Mais cela est impossible si G n'est pas trivial, puisqu'on peut choisir G cyclique.

En conclusion L est une sphère d'homologie simplement connexe, et en application de la preuve de la conjecture de Poincaré, elle est homéomorphe à \mathbf{S}^n .

Démonstration de 1.15

Soit $\bar{L} \rightarrow L$ un revêtement quelconque. Comme $n \geq 3$ on peut appliquer le théorème 2.8 pour obtenir le fait que $(H_*(\bar{L}, \mathbf{Z}/2), \delta_1^{\bar{L}})$ est acyclique. Comme $\delta_1^{\bar{L}}$ augmente le degré de $n - 1$, on en déduit que l'homologie de \bar{L} est

$$(2) \quad H_i(\bar{L}, \mathbf{Z}/2) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, 1, n - 1, n \\ \mathbf{Z}/2 & \text{si } i \in \{0, n - 1\} \\ 0 & \text{si } i \in \{1, n\} \text{ et } \bar{L} \rightarrow L \text{ infini} \\ \mathbf{Z}/2 & \text{si } i \in \{1, n\} \text{ et } \bar{L} \rightarrow L \text{ fini} \end{cases}$$

En choisissant $\bar{L} = \tilde{L}$, il suit que $\pi_1(L)$ est infini.

Supposons maintenant que n est pair. La relation (2) implique alors que $H^2(L, \mathbf{Z}/2) = 0$, donc L est une variété spin et d'après 2.8 la relation (2) est valable à coefficients entiers. Pour $\bar{L} = L$ cela donne $H_1(L, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, donc $H^1(L, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Considérons alors le morphisme $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z}$ défini par le générateur de ce groupe de cohomologie et la suite exacte

$$1 \rightarrow K \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 1.$$

Si \bar{L} est le revêtement associé à n'importe quel sous-groupe de K , la relation (2) implique que \bar{L} est une sphère d'homologie entière. En particulier tout sous-groupe de K est parfait, d'où $K = 1$ et $\pi_1(L) = \mathbf{Z}$.

Pour démontrer la deuxième partie de l'énoncé dans le cas où n est pair, on rappelle un critère algébrique pour l'existence d'une fibration sur le cercle en dimension supérieure à 6. Il a été établi par F. Latour [49] et A. Pajitnov [64] :

Théorème 3.4 *Pour $n = \dim(L) \geq 6$ et $\pi_1(L) = \mathbf{Z}$ il existe une fibration $f : L \rightarrow \mathbf{S}^1$ si et seulement si l'homologie de Novikov $H(L; u)$ est nulle pour $u = [f^*(d\theta)]$.*

Puis on applique de nouveau le théorème 2.8 après la remarque suivante : nous avons établi ce résultat pour des coefficients $\mathbf{Z}/2$ (ou \mathbf{Z} lorsque L est spin). Mais lorsqu'on regarde la preuve il est évident qu'elle reste vraie pour l'homologie à coefficients dans n'importe quel module sur $\mathbf{Z}/2$ (resp. \mathbf{Z}).

Par ailleurs, lorsque $\bar{L} = \tilde{L}$ on peut considérer le complexe de Floer relevé comme libre de rang fini sur l'anneau du groupe $\pi_1(L)$. Et une fois de plus on peut utiliser des coefficients dans un module arbitraire sur $\mathbf{Z}[\pi_1(L)]$. En particulier, pour l'anneau de Novikov Λ_u on obtient une homologie de Floer relevée qui est liée à l'homologie de Novikov de L par les mêmes relations que dans l'énoncé de 2.8. Par exemple, la relation analogue à (2) pour la classe u définie dans 1.20 affirme que $H_i(L; u) = 0$ pour $i \neq 0, 1, n-1, n$, puis que $H_0(L; u) \approx H_{n-1}(L; u)$ et $H_1(L; u) \approx H_n(L; u)$. Or nous avons expliqué dans la section §3.1 du chapitre 2 que si $u \neq 0$, on a $H_0(L; u) = H_n(L; u) = 0$. Cela montre que l'homologie $H(L; u)$ est nulle et donc que L fibre sur \mathbf{S}^1 , en application de 3.4.

Maintenant, si F est la fibre de cette fibration, c'est une variété compacte simplement connexe de dimension $n-1$ qui a le type d'homotopie de \tilde{L} . La relation (2) montre que L est une sphère d'homologie entière, donc F est homéomorphe à \mathbf{S}^{n-1} , d'après la preuve de la conjecture de Poincaré.

La démonstration de 1.15.b utilise les mêmes idées. Le résultat obtenu est plus faible, puisque L pourrait être non-orientable ce qui ne nous permet pas d'utiliser les coefficients entiers. Les détails se trouvent en [22].

Démonstration de 1.19.a

L'annulation du premier groupe d'homologie de L implique que L est monotone avec $N_L = 2(n+1)$. En appliquant la proposition 1.8 on obtient une sous-variété lagrangienne monotone $\Gamma_L \subset \mathbf{C}^{n+1} \times X$ qui a le même nombre de Maslov

$$N_{\Gamma_L} = N_L = 2(n+1) = \dim(L) + 1.$$

De plus $\Gamma_L \rightarrow L$ est une fibration en cercles. La variété Γ_L satisfait aux hypothèses de 1.15.a et donc $\pi_1(\Gamma_L) = \mathbf{Z}$. De plus, en utilisant la relation (2) pour $\tilde{\Gamma}_L$, on trouve que cette variété a la même homologie que la sphère \mathbf{S}^{2n+1} . Par le théorème de Hurewicz, ses premiers $2n+1$ groupes d'homotopie sont donc isomorphes à ceux de \mathbf{S}^{2n+1} . La suite exacte longue de la fibration implique alors

$$\pi_i(L) \approx \pi_i(\mathbf{S}^{2n+1}), \text{ pour } i = 2, \dots, 2n+1,$$

et comme $\pi_1(\Gamma_L) = \mathbf{Z}$, $\pi_1(L)$ est abélien. Mais, comme $H_1(L, \mathbf{Z}) = 0$, L est simplement connexe. Donc c'est une sphère d'homotopie, homéomorphe à

\mathbf{S}^{2n+1} , par (la preuve de) la conjecture de Poincaré.

Démonstration de 1.19.b

Comme ci-dessus, L est monotone avec $N_L = 2(n+1)$. De nouveau on applique la proposition 1.8 pour obtenir une sous-variété lagrangienne monotone dans $\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{CP}^n$ qui est une fibration en cercles sur L et a le même nombre de Maslov. On peut alors appliquer 1.16 et conclure que Γ_L est homéomorphe à \mathbf{S}^{2n+1} , comme annoncé. En particulier L est simplement connexe et la preuve est terminée.

Démonstration de 1.19.c

En appliquant 1.8 on trouve que L est monotone avec $N_L = n+1$. Comme ci-dessus on a une sous-variété $\Gamma_L \subset \mathbf{C}^{n+1}$ qui a le même nombre de Maslov. Cette sous-variété est orientable (par 3.1, puisque N_{Γ_L} est pair) et spin, en appliquant 2.8 (voir la relation (2)). On peut alors appliquer 2.8 à coefficients entiers : comme dans la preuve de 1.19.a cela donne que $\pi_1(\Gamma_L) = \mathbf{Z}$ et le revêtement universel $\tilde{\Gamma}_L$ a les mêmes groupes d'homotopie que \mathbf{S}^n , pour $i = 1, \dots, n$. En utilisant la suite exacte longue de la fibration $\Gamma_L \rightarrow L$ on trouve $\pi_n(L) = \mathbf{Z}$, $\pi_i(L) = 0$, pour $i = 3, \dots, (n-1)$ et on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_2(L) \rightarrow \pi_1(\mathbf{S}^1) = \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(\Gamma_L) = \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow 0.$$

Il suit que $\pi_1(L)$ est abélien cyclique et, comme $H_1(L, \mathbf{Z})$ est de 2-torsion, on déduit que $\pi_1(L) = \mathbf{Z}/2$. La suite exacte implique alors $\pi_2(L) = 0$. Finalement, le revêtement universel \tilde{L} est une sphère d'homotopie, donc homéomorphe à la sphère de dimension n .

3 Lagrangiennes exactes dans le fibré cotangent

Nous regroupons dans cette section les démonstrations des résultats annoncés qui vont dans le sens d'une réponse positive à la question 1.6. Il s'agit de 1.17, 1.20, 1.21 et 1.22.

Démonstration de 1.20

Comme dans la section §3.2 du chapitre 2 on pourra supposer sans restreindre la généralité que la projection $p : K \rightarrow L$ induit un épimorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Soit $f : K \rightarrow \mathbf{S}^1$ une fibration. Notons $\alpha = f^*d\theta$; c'est une 1-forme fermée sans zéros. L'isotopie symplectique (ϕ_t) définie sur T^*K par

$$(p, q) \mapsto (p + t\alpha_q, q)$$

disjoint L d'elle-même pour un $T > 0$ suffisamment grand. Son invariant de Calabi est Tu , où u est la classe de α . Nos sommes alors dans les conditions d'application du théorème 2.7. Le complexe de Floer-Novikov étant nul, on trouve que $H(L; p^*(Tu)) = 0$, ce qui équivaut à $H(L; p^*u) = 0$. On peut alors appliquer le critère 2.9 pour finir la démonstration du théorème.

Démonstration de 1.21.a

Supposons qu'il existe un plongement lagrangien exact

$$L \times P \hookrightarrow T^*(Q \times \mathbf{S}^1)$$

avec $\chi(L) \neq 0$ et $\pi_1(P)$ fini. Comme ci-dessus, par 2.7, on obtient $H_*(L \times P; u) = 0$, où u est la classe de la forme $d\theta$ sur $Q \times \mathbf{S}^1$. Comme $\pi_1(P)$ est fini, on a que $p^*u \in H^1(L, \mathbf{R}) \subset H^1(L \times P, \mathbf{R})$. En appliquant un lemme de type Kunnet ([21], Prop. 2.6), on obtient que $H_*(L, p^*u) = 0$. Mais cela implique $\chi(L) = 0$, puisque par définition le complexe $C_\bullet(L; u)$ qui calcule l'homologie de Novikov a la même caractéristique que L . Cela est contradictoire, et la démonstration est terminée.

Démonstration de 1.21.b

S'il existe un plongement lagrangien exact

$$(L_1 \# L_2) \times P \hookrightarrow T^*(Q \times \mathbf{S}^1),$$

alors, comme ci-dessus, on obtient $H_*(L; p^*u) = 0$. Puis, comme $\pi_1(L) = \pi_1(L_1) * \pi_1(L_2)$ (puisque $n \geq 4$), on applique 2.9 et on trouve qu'une des sous-variétés L_i est simplement connexe. Supposons que ce soit L_1 . Alors on peut décrire le revêtement universel \tilde{L} comme une somme connexe de \tilde{L}_2 avec $|\pi_1(L_2)|$ copies de L_1 . Ensuite, pour un choix judicieux de la structure de CW-complexe de L ([21], Preuve de 1.2), on détermine le complexe $C_\bullet(L; p^*u)$ et on montre que l'annulation de son homologie implique l'annulation de $H_i(L_1, \mathbf{Z}/2)$ pour $i = 1, \dots, (n-1)$, autrement dit le résultat annoncé.

Si L est spin, nous obtenons l'annulation de l'homologie de Novikov à coefficients entiers, comme nous l'avons remarqué après l'énoncé de 2.7. On en déduit donc que L_1 est une sphère d'homologie entière simplement connexe, qui est homéomorphe à \mathbf{S}^n , d'après la conjecture de Poincaré.

Démonstration de 1.21.c

Notons par $H \subset H^1(\mathbf{T}^m \times Q, \mathbf{Z})$ le sous-groupe $H^1(\mathbf{T}^m \times \{\text{point}\}, \mathbf{Z})$. Le groupe H est isomorphe à \mathbf{Z}^m et chaque classe de cohomologie $u \in H \setminus \{0\}$ contient évidemment une forme fermée sans zéros. On déduit de 2.7 que

$$H_*(L \times \mathbf{T}^\ell; p^*u) = 0$$

pour tout $u \in H \setminus \{0\}$.

On rappelle que l'on peut supposer utilisant 2.11 que p est un épimorphisme, donc que p^* est un monomorphisme. Montrons que

$$H^1(L) \cap p^*H \neq \{0\}$$

dans $H^1(L \times \mathbf{T}^\ell)$. Sinon, la composition

$$\mathbf{Z}^m \approx p^*(H) \hookrightarrow H^1(L \times \mathbf{T}^\ell) \xrightarrow{\text{Pr}} H^1(\mathbf{T}^\ell) \approx \mathbf{Z}^\ell$$

est un monomorphisme ce qui est impossible puisque $l < m$. On en déduit qu'il existe une classe non nulle $p^*u = v \in H^1(L) \subset H^1(L \times \mathbf{T}^\ell)$ telle que

$$H_*(L \times \mathbf{T}^\ell; v) = 0.$$

En utilisant la formule de Künneth ([21], Prop. 2.6) on obtient alors $H_*(L; v) = 0$. Ensuite, on applique 2.9 pour obtenir les conclusions désirées sur $\pi_1(L)$.

Démonstration de 1.17

On compactifie L en ajoutant un point à l'infini et on note la nouvelle variété \widehat{L} . En utilisant la (preuve de la) conjecture de Poincaré et le théorème du h -cobordisme il suffit de démontrer :

Proposition 3.5 *Sous les hypothèses de 1.17 la variété \widehat{L} est une sphere d'homologie entière simplement connexe.*

Cela sera une conséquence de 1.21 via la remarque suivante :

Remarque 3.6 *Si L est comme dans l'énoncé de 1.17, alors pour toute variété compacte K il existe un plongement lagrangien exact de $\widehat{L}\#K$ dans T^*K .*

Cette remarque est évidente : on pousse L par le champ de Liouville radial pour la rendre standard en dehors de $D \times \mathbf{R}^n$, où D est un petit disque dans la section nulle $0_{\mathbf{R}^n}$, puis on remplace $D \subset 0_K$ par $L \cap (D \times \mathbf{R}^n)$. La restriction de la forme de Liouville $\sum p_i dq_i$ à L est la différentielle df d'une fonction $f : L \rightarrow \mathbf{R}$ qui est constante en dehors de D . En particulier, l'intégrale de la forme de Liouville de T^*K s'annule sur tout lacet de la sous-variété $\widehat{L}\#K$, cette dernière est donc exacte.

Maintenant on prend $K = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ et on applique 1.21 (pour $P = \{\text{point}\}$). On obtient dans un premier temps que \widehat{L} est une $\mathbf{Z}/2$ -sphère d'homologie simplement connexe. Cela entraîne $H^2(\widehat{L}\#K, \mathbf{Z}/2) = 0$, en particulier cette variété est spin. On peut alors appliquer 1.21 à coefficients dans \mathbf{Z} pour conclure que \widehat{L} est une sphère d'homologie entière simplement connexe.

Démonstration de 1.22.a

Soit $K \subset M$ une sous-variété lagrangienne. Si $L \subset T^*K$ est lagrangienne, alors le théorème de Darboux implique que L admet un plongement lagrangien dans M . De plus, on démontre facilement (voir [22], Prop. 3.5) :

Proposition 3.7 *Soit $K \subset M$ monotone et $L \subset T^*K$ exacte, à nombre de Maslov nul. Alors $L \subset M$ est également monotone. Si de plus le morphisme $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(K)$ induit par la projection est surjectif, on a $N_L = N_K$.*

Soit $L \subset T^*\mathbf{S}^{2k+1}$ Lagrangienne exacte de classe de Maslov nulle. L'application

$$z \mapsto ([z], \bar{z})$$

définit une sous-variété lagrangienne monotone dans $\mathbf{C}\mathbf{P}^k \times \mathbf{C}^{k+1}$. Son nombre de Maslov est $2k + 2$. Donc, en appliquant 3.7, on trouve que L admet un plongement lagrangien dans $\mathbf{C}\mathbf{P}^k \times \mathbf{C}^{k+1}$, dont le nombre de Maslov est $N_L = N_{\mathbf{S}^{2k+1}} = 2k + 2$. Nous sommes dans les hypothèses de 1.16. Ce résultat

implique que L est homéomorphe à \mathbf{S}^{2k+1} , ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de 1.22.b

Soit $L \subset T^*K$ lagrangienne exacte de classe de Maslov nulle. Il existe un revêtement fini, à $|\pi_1(K)|$ feuilletés de \bar{L} de L qui admet un plongement lagrangien exact dans $T^*\tilde{K} = T^*\mathbf{S}^{2k+1}$ (voir [21], Lemme 3.5). De plus, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{L} & \longrightarrow & T^*\mathbf{S}^{2k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & T^*K \end{array}$$

On en déduit que la classe de Maslov de \bar{L} est nulle aussi, puis, avec le point précédent, que \bar{L} est homéomorphe à \mathbf{S}^{2k+1} .

Lorsque $K = \mathbf{RP}^{2k+1}$ on montre que $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(\mathbf{RP}^{2k+1})$ est un épimorphisme. Sinon, on peut relever L pour obtenir un plongement lagrangien exact (de L) dans $T^*\mathbf{S}^{2k+1}$ qui a également le nombre de Maslov nul. En utilisant le point (a), on obtient que L est homéomorphe à la sphère. Mais comme \mathbf{RP}^{2k+1} admet un plongement lagrangien dans \mathbf{CP}^{2k+1} , la variété L a même propriété. Or cela contredit un résultat bien connu de P. Biran et K. Cieliebak ([12], Th. A) qui affirme qu'il n'y a pas de sphère lagrangienne dans \mathbf{CP}^n . Par conséquent $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(\mathbf{RP}^{2k+1})$ est surjectif.

Alors on peut utiliser le lemme 3.5 de [21] comme ci-dessus pour conclure que $\bar{L} = \tilde{L}$ est un revêtement double, homéomorphe à \mathbf{S}^{2k+1} .

Chapitre 4

Perspectives

Nous avons vu dans la deuxième section du premier chapitre que beaucoup de questions sur les sous-variétés lagrangiennes restent ouvertes même dans le cas le plus simple, des sous-variétés de \mathbf{R}^{2n} , que l'on appelle "local". Dans ce chapitre nous passons en revue quelques problèmes qui sont susceptibles de trouver solution à l'aide des techniques qui viennent d'être présentées. Il y aura des résultats démontrés et des idées plus ou moins vagues sur d'autres applications. Une partie de ce travail sera incluse dans [23].

1 La conjecture d'Audin

Nous avons démontré cette conjecture pour les sous-variétés lagrangiennes monotones qui sont asphériques, ou vérifient d'autres propriétés topologiques (Th. 1.12 et Th. 1.13). Il est naturel de se demander si d'autres variétés satisfont à cette conjecture, au moins dans le cas monotone. La réponse est affirmative, puisque L. Buhovsky montre la conjecture dans [17] pour des variétés qui ne sont pas couvertes par nos hypothèses : celles dont l'anneau de cohomologie $H^*(L, \mathbf{Z}/2)$ est engendré par $H^1(L, \mathbf{Z})$. C'est le cas de l'espace projectif réel \mathbf{RP}^n par exemple. Notons que tout plongement lagrangien de celui-ci a un nombre de Maslov au moins égal au nombre de Chern de la variété ambiante (en vertu de 1.10) ce qui a comme conséquence que la lagrangienne respective n'est pas disjoignable par isotopie hamiltonienne lorsque le nombre de Chern est plus grand ou égal à 3.

Se pose alors la question de l'application de l'homologie de Floer relevée pour étudier cette conjecture dans d'autres cas et en particulier ceux considérés par Buhovsky. Voici une idée de démonstration :

Considérons donc $L \subset M$ monotone, disjoignable par isotopie hamiltonienne, de nombre de Maslov $N_L \geq 3$ et fixons un revêtement $\bar{L} \rightarrow L$. Le complexe de Floer relevé $CF(\bar{L})$ est donc bien défini. Par construction, la projection $p : \bar{L} \rightarrow L$ induit une application $p_\#$ entre les complexes $CF(\bar{L})$ et $CF(L)$. La relation

$$p_\# \circ \delta^{\bar{L}} = \delta^L \circ p_\#$$

équivalent au fait que p commute avec chacune des composantes δ_i des deux différentielles. Ainsi on a par exemple un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_i(\bar{L}) & \xrightarrow{\delta_1^{\bar{L}}} & H_{i-1+N_L}(\bar{L}) \\ \downarrow p_i & & \downarrow p_{i-1+N_L} \\ H_i(L) & \xrightarrow{\delta_1^L} & H_{i-1+N_L}(L) \end{array}$$

L'application p_0 dans ce diagramme est toujours un isomorphisme en homologie. D'autre part, lorsque l'anneau de cohomologie de L est engendré par $H^1(L, \mathbf{Z}/2)$, l'application p induit des morphismes nuls

$$p_i : H_i(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_i(L, \mathbf{Z}/2)$$

pour $i > 0$ (puisque c'est le cas de leurs morphismes duaux, en cohomologie, du fait de la propriété de l'anneau mentionnée). Le diagramme ci-dessus pour $i = 0$ implique donc que

$$\delta_1^L : H_0(L, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_{-1+N_L}(L, \mathbf{Z}/2)$$

s'annule et donc $H_0(L, \mathbf{Z}/2)$ survit à la deuxième page de la suite spectrale de 2.17. Si on pouvait dire la même chose de la flèche $\delta_1^{\tilde{L}}$ correspondante, puis refaire le raisonnement pour tout i , on obtiendrait une preuve de la conjecture d'Audin pour les variétés lagrangiennes qui ont la propriété que le morphisme $p_\#$ est nul en homologie sauf en degré zéro, ce qui couvre comme on vient de voir les cas de Buhovsky. Mais a priori il n'y a pas de raison pour que cela soit ainsi, sauf dans des cas particuliers. Par exemple, si \tilde{L} a le type

d'homotopie d'une sphère \mathbf{S}^k , avec $k \in \{\dim(L), \dim(L) - 1, \dim(L) - 2\}$ et $p_k : H_k(\tilde{L}, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_k(L, \mathbf{Z}/2)$ est nul. Dans ce cas on peut itérer l'argument ci-dessus aux pages suivantes de la suite spectrale de 2.17. En effet, si $H_0(\tilde{L})$ peut disparaître dans la suite spectrale à la page ℓ pour laquelle $-1 + \ell N_L = k$, à la page suivante la différentielle de la suite spectrale est nulle, pour des raisons de dimension (puisque $-1 + (\ell + 1)N_L > \dim(L)$, comme $N_L > 2$). Cela implique que la suite spectrale correspondante à L ne converge pas vers zéro, ce qui permet d'obtenir une contradiction comme dans la preuve de 1.12. Ainsi on peut prouver par exemple :

Proposition 4.1 *La conjecture d'Audin est vraie pour $L = \mathbf{RP}^n$, $L = \mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$, $L = \mathbf{RP}^n \times \Sigma$ pour une surface Σ de genre $g \geq 1$.*

Tout cela nous fait croire que la classe des variétés qui satisfont à la conjecture d'Audin est bien plus large. Par ailleurs, une éventuelle propriété topologique commune de ces variétés n'apparaît pas clairement : si nos démonstrations utilisent des propriétés du revêtement universel, on voit aussi que $L = \mathbf{RP}^n \times \mathbf{S}^1$ satisfait à la conjecture d'Audin tandis que son revêtement universel peut avoir un nombre de Maslov plus grand lorsque n est impair (d'après les exemples de Polterovich, évoqués au chapitre 1, section §3).

2 Les disques holomorphes de nombre de Maslov égal à 2

Nous avons vu que ces disques jouent un rôle très important dans la théorie de Floer relevée : Lorsque il n'y en a pas l'homologie de Floer relevée est bien définie. Et lorsqu'elle n'est pas bien définie, comme dans la preuve de la conjecture d'Audin 1.12, cela est dû à la présence de disques holomorphes de Maslov 2 passant par tout point, d'après 1.12.b.

Nous essayons dans ce qui suit de rendre plus précise cette obstruction à la bonne définition du complexe relevé, et d'esquisser quelques idées qui pourraient déboucher sur d'autres propriétés des sous-variétés lagrangiennes. Tout d'abord une question naturelle est :

Question 4.2 *Si L est monotone avec $N_L = 2$ et $\tilde{L} \rightarrow L$ est un revêtement, que vaut $(\delta^{\tilde{L}})^2$?*

Pour donner la réponse il faut regarder de plus près le cas $N_L = 2$ dans les sections §4.1 et §4.3 du chapitre 2, ainsi que la preuve de 1.12.b. Sur un générateur $\bar{x} \in p^{-1}(L_0 \cap L_1)$ on obtient $(\delta^{\tilde{L}})^2$ en comptant les trajectoires brisées qui proviennent de bandes holomorphes qui partent de $x = p(\bar{x})$ et finissent au même point x : toutes les autres sont en effet en nombre pair puisqu'elles proviennent de figures de Morse 2.1 alors que celles-ci sont le bout d'une figure de Morse modifiée dans laquelle l'autre bout est un disque holomorphe de nombre de Maslov 2 qui passe par x et dont le bord est dans $L = L_0$ ou dans L_1 . On peut alors écrire $(\delta^{\tilde{L}})^2$ en fonction de ces disques : Considérons d'abord le cas du revêtement universel \tilde{L} , dans lequel le complexe de Floer relevé - lorsqu'il est défini - peut être vu comme un $\mathbf{Z}[\pi_1(L)]$ -module, engendré par les points de $L_0 \cap L_1$. Il faut bien entendu prendre en compte la classe dans $\pi_1(L)$ du lacet représenté par la trace que laisse sur L les trajectoires brisées allant de x à x . Lorsque le disque holomorphe à l'autre bout s'appuie sur L_1 ce lacet est trivial, comme dans la figure 2.4. Puis, si le disque holomorphe en question s'appuie sur L , le lacet est homotope au bord de ce disque : de même que l'affirmation précédente, cela est une conséquence de 2.12. Dans l'écriture de $(\delta^{\tilde{L}})^2 x$ nous comptons donc x pour les disques à bord dans L_1 et gx pour les disques à bord dans la classe g , dans $L = L_0$. Par ailleurs la proposition 2.16 dit que la parité de ces deux catégories de disques est la même, de sorte qu'on peut sommer uniquement par rapport aux disques à bord dans L , en utilisant des termes de la forme $(1 - g)x$. Avec les notations de la preuve de 1.12.b, cela donne

$$(\delta^{\tilde{L}})^2 x = \sum_{g \in \pi_1(L)} \#_2\{\text{ev}_g^{-1}(x)\}(1 - g)x.$$

Définissons le sous-groupe $\Gamma \leq \pi_1(L)$ par

$$\Gamma = \langle g \in \pi_1(L) \mid \deg_2(\text{ev}_g) = 1 \rangle.$$

Il est clair que l'on peut écrire

$$(\delta^{\tilde{L}})^2 x = \sum_{g \in \Gamma} (1 - g)x.$$

Soit maintenant $H \leq \pi_1(L)$ un sous-groupe distingué et $p : \bar{L} \rightarrow L$ le revêtement correspondant. Le complexe de Floer relevé (si défini) est un $\mathbf{Z}[\pi_1(L)/H]$ -module libre engendré par $L_0 \cap L_1$. Puis, le carré de la différentielle vaudra :

$$(\delta^{\bar{L}})^2 x = \sum_{g \in \Gamma} (1 - \hat{g})x,$$

où \hat{g} représente la classe de g dans $\pi_1(L)/H$. Par conséquent on a

Proposition 4.3 *Soit $L \subset M$ lagrangienne monotone avec $N_L = 2$. Soit $H \subset \pi_1(L)$ un sous-groupe distingué et $\bar{L} \rightarrow L$ le revêtement associé. Si $\Gamma \subset H$ alors le complexe de Floer relevé $CH(\bar{L})$ est bien défini et satisfait aux propriétés de 2.8.*

En particulier, cela est vrai pour le sous-groupe H engendré par tous les bords des disques holomorphes de nombre de Maslov 2 à bord dans L . On pense que, lorsque L est sphérique, et a fortiori lorsqu'il s'agit d'un tore, ce sous-groupe est d'indice fini dans $\pi_1(L)$. Les méthodes que K. Mohnke et K. Cieliebak utilisent afin de prouver la conjecture d'Audin pour les tores permettraient semble-t-il d'obtenir ce résultat. L'énoncé précédent semble être un bon ingrédient pour une preuve mais je ne sais pas encore comment la faire.

Considérons maintenant un cas particulier, où l'on peut dire des choses plus précises : celui où le groupe fondamental $\pi_1(L)$ est \mathbf{Z} . Soit donc $L \subset M$ lagrangienne monotone, telle que que $N_L = 2$ et $\pi_1(L) \approx \pi_2(M, L) = \mathbf{Z}$. Notons par t le générateur de $\pi_1(L)$ choisi tel que le morphisme de Maslov vérifie $I_\mu(t) = 2$. On voit qu'il y a dans ce cas deux possibilités pour le groupe Γ :

- Si $\deg_2(\text{ev}_t) = 0$ alors le complexe de Floer relevé $CF(\bar{L})$ est bien défini quelque soit le revêtement $\bar{L} \rightarrow L$.
- $\deg_2(\text{ev}_t) = 1$ alors le complexe de Floer relevé n'est pas bien défini (pour aucun revêtement non-trivial). Sur un générateur $x \in L_0 \cap L_1$ le carré de la différentielle vaut

$$(\delta^{\bar{L}})^2 = (1 - t)x,$$

autrement dit $(\delta^{\bar{L}})^2 = \text{Id} - t$.

Écrivons cette relation dans le cas particulier que l'on a considéré dans l'énoncé 2.5 pour obtenir la relation entre l'homologie de Floer et l'homologie habituelle. On y obtenait une décomposition

$$\delta^{\bar{L}} = \delta_0 + \delta_1 + \cdots,$$

où δ_0 est la différentielle d'un complexe de Morse et pour $\ell > 0$ δ_ℓ augmente le degré de ce complexe de $-1 + \ell N_L$. Lorsqu'on écrit la relation ci-dessus degré par degré, on trouve en particulier

$$\delta_0 \delta_1 + \delta_1 \delta_0 = \text{Id} - t.$$

Cela implique que l'application définie par t sur le revêtement universel \tilde{L} induit l'identité en homologie. On sait par ailleurs [71] que pour ce groupe fondamental l'homologie de Novikov associé à la classe d'homologie $u \in H^1(L, \mathbf{R})$ définie par $u(t) = 1$ est donnée par

$$H(L; u) = H(\tilde{L}) \otimes_{\mathbf{Z}[t, t^{-1}]} \mathbf{Z}[[t]][t^{-1}].$$

Comme $1 - t$ est inversible dans l'anneau de Novikov (les séries de Laurent dans ce cas) on en déduit que l'homologie de Novikov est nulle. Il s'agit de l'homologie de Novikov à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$, mais on peut obtenir le même résultat pour celle à coefficients entiers si on suppose que L est spin. Si la dimension de L est supérieure à 6, on peut appliquer 3.4 pour obtenir que L fibre sur le cercle.

Pour résumer, lorsque L est monotone, spin, avec $N_L = 2$ et groupe fondamental infini cyclique, alors si L ne fibre pas sur le cercle, le complexe de Floer relevé est bien défini. Voici une application de ces idées.

Proposition 4.4 *Soit N une variété simplement connexe, avec $\chi(N) \neq 0$ et $\Phi : N \rightarrow N$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation et qui n'induit pas l'identité en homologie (avec coefficients $\mathbf{Z}/2$). Alors le "mapping torus"*

$$L = N \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\Phi(x), 1)$$

n'admet pas de plongement lagrangien monotone dans \mathbf{R}^{2n} et plus généralement dans $\mathbf{R}^2 \times W$, si $\pi_2(W) = 0$.

Remarques Rappelons que pour $\Phi = \text{Id}$ le résultat de M. Audin 1.1 affirme qu'un tel plongement existe pourvu que N admette une immersion lagrangienne dans \mathbf{R}^{2n-2} .

Le résultat est à rapprocher de celui de S. Hu, F. Lalonde et R. Leclercq [44] qui affirme qu'un difféomorphisme hamiltonien qui préserve une sous-variété lagrangienne faiblement exacte induit l'identité en l'homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$. Il est probable qu'on puisse prouver le résultat de Lalonde avec ces méthodes.

Démonstration

Supposons que L admet un plongement lagrangien monotone. La variété L est orientable et son groupe fondamental est $\pi_1(L) = \mathbf{Z}$. C'est un fibré sur le cercle dont la fibre est diffeomorphe à N . Son revêtement universel est $\tilde{L} = N \times \mathbf{R}$. Comme la caractéristique d'Euler de N est non nulle et L est disjoignable par isotopie hamiltonienne, le théorème 1.13 implique que le complexe de Floer $CF(\tilde{L})$ n'est pas bien défini. En particulier $N_L = 2$. Au vu de ce qui précède, cela fait que le générateur $t \in \pi_1(L)$ induit l'identité en homologie. Or le difféomorphisme induit par t sur le revêtement universel $N \times \mathbf{R}$ est

$$(x, t) \mapsto (\Phi(x), t + 1).$$

En particulier Φ induit l'identité en homologie, ce qui contredit l'hypothèse. La preuve est donc terminée.

3 Dans le fibré cotangent

Nous avons dit dans l'introduction que l'un des problèmes importants concernant les sous-variétés lagrangiennes du fibré cotangent est la solution à la question 1.6 de V.I Arnold pour les sous-variétés lagrangiennes exactes. Et nous avons précisé aussi qu'avec la technologie actuelle seule la comparaison entre les topologies de la lagrangienne et de la base paraît envisageable. Les résultats homologiques de Fukaya, Seidel, Smith [36], [37] et Nadler [57] puis la généralisation homotopique d'Abouzaid [1] représentent donc des avancées très importantes. Toutefois ces résultats s'appliquent seulement lorsque la classe de Maslov de la lagrangienne est nulle. Notre résultat 2.7 est lui applicable en général, mais pour obtenir des conséquences topologiques il faut

être dans une situation dans laquelle il y a disjonction par isotopie symplectique comme dans le cas où la base fibre sur le cercle. Il est intéressant de considérer le cas où la base K fibre sur le cercle dans beaucoup de directions. Prenons par exemple $K = \mathbf{T}^n$. On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 4.5 *Soit $L \subset T^*\mathbf{T}^n$ une lagrangienne exacte. Notons $p : L \rightarrow \mathbf{T}^n$ la projection sur la base et $p_{\#} : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z}^n$ le morphisme induit entre les groupes fondamentaux. Alors $\text{Ker}(p_{\#})$ est de type fini (c'est-à-dire finiment engendré).*

Démonstration

En appliquant 2.7 on trouve que $H_*(L; p^*u) = 0$ quelque soit la classe $u \in H^1(\mathbf{T}^n)$ non nulle. En particulier cela est vrai pour l'homologie de Novikov de degré 1. Comme remarqué dans la section §3.1 du chapitre 2, celle-ci ne dépend que de $\pi_1(L)$ et de la classe de cohomologie $v = p^*u$ respective ; on utilisera la notation $H_1(\pi_1(L); v)$ dans ce qui suit. Pour un groupe de type fini G on peut considérer l'ensemble des morphismes $v : G \rightarrow \mathbf{R}$ pour lesquels $H_1(G; v) = 0$. Comme l'homologie de Novikov est invariante par la multiplication de la classe de cohomologie par un réel positif, on peut voir cet ensemble $\Sigma^1(G)$ comme un sous-ensemble de la sphère

$$S(G) = (\text{Hom}(G, \mathbf{R}) \setminus \{0\})\mathbf{R}_+^*.$$

C'est un ouvert (on le prouve en [19]). Il faut préciser ici que, l'homologie de Novikov dont 2.7 affirme l'annulation est celle à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$; toutefois pour ce qui concerne H_1 on peut prouver que l'homologie de Novikov à coefficients entiers s'annule aussi. C'est une conséquence immédiate d'une caractérisation algébrique de $H_1(\pi_1(L); v) = 0$, obtenue par F. Latour dans [49]

En fait cet ensemble coïncide avec ce qu'on appelle l'invariant de Bieri-Neumann-Strebel, défini par les auteurs sus-cités et par B. Renz dans [9] et [10]. Le fait que l'invariant de Bieri-Neumann-Strebel peut être défini en termes d'homologie de Novikov se déduit de [9]. Le résultat remarquable que Bieri, Neumann et Strebel prouvent dans [9] est que cet invariant donne des informations sur le type de finitude des sous-groupes $N \subset G$ pour lesquels G/N est abélien libre. Plus précisément on a :

Théorème 4.6 *Soit G un groupe de type fini et N un sous-groupe de G tel que G/N est abélien libre. Notons*

$$S(G, N) = \{u \in S(G) \mid u|_N = 0\}.$$

Alors N est de type fini si et seulement si $S(G, N) \subset \Sigma^1(G)$.

Notre proposition est une conséquence directe de ce théorème. Si $v : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{R}$ s'annule sur $\text{Ker}(p_\#)$, alors il factorise par $\pi_1(M)$, autrement dit il est de la forme $v = p^*u$. Or, $H_1(L; p^*u) = 0$, donc $v \in \Sigma^1(\pi_1(L))$ et la preuve est terminée.

De tout ceci, on peut déduire une réponse beaucoup plus précise à la question d'Arnold 1.6, lorsque $n = 3$, toujours dans le cas du tore :

Théorème 4.7 *Soit $L \subset T^*\mathbf{T}^3$ une lagrangienne exacte. Alors L est difféomorphe à \mathbf{T}^3 .*

Démonstration

On peut supposer tout d'abord en vertu de 2.11 que la projection $p : L \rightarrow \mathbf{T}^3$ induit une surjection $p_\# : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z}^3$. Ensuite, on utilise un théorème bien connu de Stallings qui — dans une version améliorée par R. Bieri, W Neumann et R. Strebel — affirme :

Théorème 4.8 *Soit L une variété de dimension 3 compacte et $v \in H^1(L; \mathbf{R})$. Alors il existe une fibration $f : L \rightarrow \mathbf{S}^1$ dans la direction v (c'est-à-dire telle que $[f^*(d\theta)] = v$) si et seulement si $v \in \Sigma^1(\pi_1(L), v)$.*

Nous avons vu plus haut que sous les hypothèses de 4.7 l'ensemble $\Sigma^1(\pi_1(L))$ contient $p^*(H^1(\mathbf{T}^3, \mathbf{R}))$; donc L fibre sur le cercle dans toute classe $v = p^*u$ (rappelons que p^* est injective). Notons $u_i : \mathbf{Z}^3 \rightarrow \mathbf{Z}$ les projections canoniques pour $i = 1, 2, 3$ et $v_i = p^*u_i$. Choisissons une fibration sur le cercle dans la direction v_1 et notons par F sa fibre. Montrons que F est un tore de dimension 2.

On a $\pi_1(F) = \text{Ker}(v_1)$. Considérons la classe de cohomologie de degré 1 $v'_2 = v_2|_{\pi_1(F)}$. On voit facilement que $\text{Ker}(v'_2) \supset \text{Ker}(p_\#)$ dans $\pi_1(L)$. Il suit que

$$S(\pi_1(L), \text{Ker}(v'_2)) \subset S(\pi_1(L), \text{Ker}(p_\#)) \subset \Sigma^1(\pi_1(L))$$

d'où, en appliquant le critère 4.6 on obtient que $\text{Ker}(v'_2)$ est de type fini. Cela implique que l'homologie de Novikov $H_1(F; v'_2)$ est nulle (encore une application de 4.6, mais cette fois-ci pour le groupe $\pi_1(F)$). Comme l'homologie de Novikov dans les degrés extrémaux est toujours nulle, on obtient que $H_*(F; v'_2) = 0$. En particulier $\chi(F) = 0$, donc F est soit un tore, soit une bouteille de Klein. Mais l'application $(v_2, v_3)|_{\pi_1(F)}$ définit un épimorphisme de $\pi_1(F)$ sur \mathbf{Z}^2 , ce qui exclut le cas de la bouteille de Klein. Donc F est un tore et L est un "mapping torus" obtenu à partir d'un difféomorphisme $\Phi : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$.

Il est facile de calculer l'homologie de L en fonction du morphisme induit par Φ au niveau homologique (par Mayer-Vietoris, par exemple). On obtient

$$H_1(L, \mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}^2 / \text{Im}(\Phi_* - \text{Id})).$$

Or, $\pi_1(L)$ et a fortiori $H_1(L, \mathbf{Z})$ se surjecte sur \mathbf{Z}^3 ce qui entraîne $\Phi_* = \text{Id}$, la même assertion étant bien entendu vraie au niveau du groupe fondamental. On peut alors appliquer un théorème de D. Epstein [28] qui affirme que le difféomorphisme Φ est isotope à l'identité. On conclut que L est difféomorphe à \mathbf{T}^3 , ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie de l'auteur

- M. Damian, *On the higher homotopy groups of a finite CW-complex*, Topology and its Appl. **149** (2005), 273-284.
- M. Damian, *On the homotopy type of finite CW-complexes with polycyclic fundamental group*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009) Vol. 4, 1791-1809.
- M. Damian, *Constraints on exact Lagrangians in cotangent bundles of manifolds fibered over the circle*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), 705-746.
- M. Damian, *Floer homology on the universal cover, a proof of Audin's conjecture and other constraints on Lagrangian submanifolds*, à paraître dans Comment. Math. Helv.
- M. Audin, M. Damian, *Théorie de Morse. Homologie de Floer*, Editions EDP Sciences, Collection Savoirs Actuels, 2010.
- M. Damian, *Floer-Novikov homology and applications to Lagrangian submanifolds*, soumis.

Bibliographie

- [1] M. Abouzaid, *On the homotopy type of nearby Lagrangians*, arXiv :1005.0358v1 [math.SG], 2010.
- [2] V.I. Arnol'd, *First steps in symplectic topology*, Russ. Math. Surv. **6** (1986), 3-18.
- [3] V.I. Arnol'd, *On a characteristic class entering the quantization conditions*, Funct. Anal. Appl. **1** (1967), 1-14.
- [4] P. Arnoux, G. Levitt, *Sur l'unique ergodicité de 1-formes fermées singulières*, Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 141-156.
- [5] M. Audin, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 593-623.
- [6] M. Audin, F. Lalonde, L. Polterovich, *Symplectic rigidity : Lagrangian submanifolds*, Holomorphic Curves in Symplectic Geometry (M. Audin and J. Lafontaine, eds.), Progress in Mathematics **117**, Birkhauser Verlag, 1994.
- [7] M. Audin, M. Damian, *Théorie de Morse. Homologie de Floer*, Editions EDP Sciences, Collection Savoirs Actuels, 2010.
- [8] J.-F. Barraud, O. Cornea, *Quantization of the Serre spectral sequence*, J. Symplectic Geom. **5** (2007), no. 3, 249-280.
- [9] R. Bieri, W. Neumann, R. Strebel, *A geometric invariant for discrete groups*, Invent. Math. **90** (1987), 451-477.
- [10] R. Bieri, B. Renz, *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups*, Comment. Math. Helv. **63** (1998), 464-497.
- [11] Paul Biran, *Lagrangian non-intersections*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 279-326.

- [12] P. Biran, K. Cieliebak, *Symplectic topology on subcritical manifolds*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 712-753.
- [13] P. Biran, O. Cornea, *Lagrangian Quantum Homology*, arXiv :0708.4221 [math.SG], 2007, to appear in the Proceedings of the Conference New Perspectives and Challenges in Symplectic Field Theory, Stanford, June 2007 , CRM-AMS.
- [14] P. Biran, O. Cornea, *Quantum Structures for Lagrangian submanifolds*, arXiv :0808.3989v1 [math.SG], 2008.
- [15] P. Biran, O. Cornea, *Rigidity and uniruling for Lagrangian submanifolds*, arXiv :0808.2440 [math.SG], 2008, to appear in Geometry and Topology.
- [16] L. Buhovsky, *Homology of Lagrangian submanifolds in cotangent bundles*, Israel J. Math. **143** (2004), 181-187.
- [17] L. Buhovsky, *The Maslov class of Lagrangian Tori and Quantum Products in Floer cohomology*, J of Topology and Anal. **2** (2010), 55-75.
- [18] R. Chiang, *New Lagrangian submanifolds of \mathbf{CP}^n* , Int. Math. Res. Not. **45** (2004) 2437-2441.
- [19] M. Damian, *Formes fermées non singulières et propriétés de finitude des groupes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **33** (2000) no.3, 301-320.
- [20] M. Damian, *On the homotopy type of finite CW-complexes with polycyclic fundamental group*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009) Vol. 4, 1791-1809.
- [21] M. Damian, *Constraints on exact Lagrangians in cotangent bundles of manifolds fibered over the circle*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), 705-746.
- [22] M. Damian, *Floer homology on the universal cover, a proof of Audin's conjecture and other constraints on Lagrangian submanifolds*, à paraître dans Comment. Math. Helv.
- [23] M. Damian, *Floer-Novikov homology and applications to Lagrangian submanifolds*, soumis.
- [24] D. McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Invent. Math. **103** (1991), no.3, 651-671.
- [25] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology* vol. 52 of Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2004.

- [26] Y. Eliashberg, *On symplectic manifolds with some contact properties*, J. Differential Geom. **33** (1991), no.1, 233-238.
- [27] Y. Eliashberg, L. Polterovich, *Local Lagrangian 2-knots are trivial*, Ann. of Maths **144** (1996), 61-76.
- [28] D. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83-107.
- [29] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom. **28** (1988), no. 3, 513-547
- [30] A. Floer, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math. **41**, (1988), no. 6, 775–813.
- [31] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), no. 4, 575–611.
- [32] A. Floer, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 207-221.
- [33] A. Floer, H. Hofer, D. Salamon, *Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action*, Duke Math. J. **80** (1995), 251-292.
- [34] K. Fukaya, *Floer homology of Lagrangian submanifolds*, Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology (P. Biran, O. Cornea, eds.), Nato Science Series, vol. 217, 2004, 231-276.
- [35] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory - anomaly and obstruction*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 2009.
- [36] K. Fukaya, P. Seidel, I. Smith, *Exact Lagrangian submanifolds in simply connected cotangent bundles*, Invent. Math. **172** (2008), no. 1, 1-27.
- [37] K. Fukaya, P. Seidel, I. Smith, *The symplectic geometry of cotangent bundles from a categorical viewpoint*, Homological Mirror Symmetry : New Developments and Perspectives, Springer Lect. Notes in Physics vol. 757, 2008, p. 126.
- [38] A. Găvruta, *Obstructions to the existence of monotone Lagrangian embeddings into cotangent bundles of manifolds fibered over the circle*, Ann. Inst. Fourier **59** (2009), no.3, 1135-1175.
- [39] A. Givental, *Plongements lagrangiens de surfaces et parapluies ouverts de Whitney*, Funk. Anal. evo Priloj. **20** (1986), no. 3, 35-41.
- [40] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307-347.

- [41] M. Gromov, *Partial differential relations* Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete Vol. 9, Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [42] R. Hind, *Lagrangian spheres in $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$* Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 2, 303-318.
- [43] Holomorphic curves in symplectic geometry, (M. Audin, J. Lafontaine, eds.) 1-14, Progr. Math., 117, Birkhauser, Basel, 1994.
- [44] S. Hu, F. Lalonde, R. Leclercq *Homological Lagrangian monodromy*, arXiv :0912.1325v3 [math.SG], 2009.
- [45] D. Kwon, Y-G. Oh, *Structure of the image of (pseudo)-holomorphic discs with totally real boundary condition*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), no. 1, 31-82.
- [46] D. Kwon, Y-G. Oh, *Structure of the image of analytic discs attached to totally real submanifolds*, The Third Pacific Rim Geometry Conference (Seoul, 1996), 139-166. Monogr. Geom. Topology, 25, Int. Press, Cambridge, MA, 1998.
- [47] F. Lalonde, *Suppression lagrangienne des points doubles et rigidité symplectique*, J. Differential Geom. **36** (1992), 747-764.
- [48] F. Lalonde, J-C Sikorav, *Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 18-33.
- [49] F. Latour, *Existence de 1-formes fermées non-singulières dans une classe de cohomologie de de Rham*, Publ. Math. IHES **80** (1994), 135-194.
- [50] F. Laudenbach, Astérisque **205** (1992), appendice au livre *An extension of a theorem by Cheeger and Muller* par J-M Bismut et W. Zhang.
- [51] F. Laudenbach, J-C. Sikorav, *Persistence de l'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans le fibré cotangent*, Invent. Math. **82** (1985), 349-357.
- [52] L. Lazzarini, *Decomposition of a J-holomorphic curve*, preprint, <http://www.math.jussieu.fr/~lazzarin/articles.html>
- [53] H.V. Lê, K. Ono, *Symplectic fixed points, the Calabi invariant and Novikov homology*, Topology **34** (1995), no. 1, 155-176.
- [54] M. Maydanskiy, P. Seidel, *Lefschetz fibrations and exotic symplectic structures on cotangent bundles of spheres*, J. of Topology **3** (2010), 157-180.

- [55] J. McLeary, *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge University Press, 2001.
- [56] Marie-Paule Muller, *Une structure symplectique sur \mathbf{R}^6 avec une sphère lagrangienne plongée et un champ de Liouville complet*, *Comment. Math. Helv.* **65** (1990) no. 1, 623-663.
- [57] D. Nadler, *Microlocal branes are constructible sheaves*, arXiv :math/0612399v1 [math.SG], 2006.
- [58] S. Nemirovsky, *Homology class of a Lagrangian Klein bottle*, *Izv. Math.* **73 :4** (2009), 689-698.
- [59] S. Nemirovsky, *Lagrangian Klein bottles in \mathbf{R}^{2n}* , *Geom. Funkt. Anal.* **19** (2009), 902-909.
- [60] S.P. Novikov, *Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory*, *Soviet. Math. Dokl.* vol **24**, nr. 2/1981, 222-226.
- [61] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudoholomorphic disks. I*, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **46** (1993), 949–993.
- [62] Y.-G. Oh, *Addendum to : “Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks. I.” [Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), no. 7, 949–993]*, *Comm. Pure Appl. Math.* bf 48 (1995), no. 11, 1299-1302.
- [63] Y.-G. Oh, *Floer cohomology, spectral sequences, and the Maslov class of Lagrangian embeddings*, *Internat. Math. Res. Notices* **7** (1996), 305-346.
- [64] A. Pajitnov, *Surgery on the Novikov complex*, *K-theory* **10** (1996), 323-412.
- [65] L. Polterovich, *The Maslov class of Lagrange surfaces and Gromov's pseudo-holomorphic curves*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **325** (1991), 241-248.
- [66] L. Polterovich, *Monotone Lagrangian submanifolds of linear spaces and the Maslov class in cotangent bundles*, *Math. Z.* **207** (1991), 217-222.
- [67] L. Polterovich, *The surgery of Lagrangian submanifolds*, *Geometric and Funtional Analysis, Vol.1*, **2** (1991), 198-210.
- [68] V. Shevchishin, *Lagrangian embeddings of the Klein bottle and combinatorial properties of mapping class groups*, *Izv. Math.* **73 :4** (2009), 797-859.

- [69] P. Seidel, *Graded Lagrangian submanifolds*, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), no. 1, 103-149.
- [70] P. Seidel, *Exact Lagrangian submanifolds in $T^*\mathbf{S}^n$ and the graded Kronecker quiver*. Different faces of geometry, 349–364, Int. Math. Ser. (N. Y.), 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004.
- [71] J.-C. Sikorav, *Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degré un*, Thèse Orsay 1987.
- [72] J.R. Stallings, *On fibering certain 3-manifolds*, Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, 95-100.
- [73] C. Viterbo, *Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens*. Bull. Soc. Math. France **115** (1987), no. 3, 361–390.
- [74] C. Viterbo, *A new obstruction to embedding Lagrangian tori*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 301-320.