



**HAL**  
open science

# Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines

Moustapha Mbaye

► **To cite this version:**

Moustapha Mbaye. Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines. Autre. Université Paris-Est, 2009. Français. NNT : 2009PEST1068 . tel-00529002v2

**HAL Id: tel-00529002**

**<https://theses.hal.science/tel-00529002v2>**

Submitted on 8 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

Année 2009

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

**Discipline : Mécanique**

présentée et soutenue publiquement  
par

**MOUSTAPHA MBAYE**

le 3 novembre 2009

Titre :

**Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues  
aubagées de turbomachines**

**Directeur de thèse**

**Professeur CHRISTIAN SOIZE**

**JURY**

ROGER OHAYON	Professeur	<i>Président</i>
MARC BERTHILLIER	Professeur	<i>Rapporteur</i>
FABRICE THOUVEREZ	Professeur	<i>Rapporteur</i>
JEAN-PIERRE LOMBARD	Snecma R&D	<i>Examineur</i>
JEAN-PHILIPPE OUSTY	Turbomeca R&D	<i>Examineur</i>
ERIC SEINTURIER	Turbomeca R&D	<i>Examineur</i>
CHRISTIAN SOIZE	Professeur	<i>Directeur de thèse</i>



UNIVERSITÉ PARIS-EST

Année 2009

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

**Discipline : Mécanique**

présentée et soutenue publiquement  
par

**MOUSTAPHA MBAYE**

le 3 novembre 2009

Titre :

**Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues  
aubagées de turbomachines**

**Directeur de thèse**

**Professeur CHRISTIAN SOIZE**

**JURY**

ROGER OHAYON	Professeur	<i>Président</i>
MARC BERTHILLIER	Professeur	<i>Rapporteur</i>
FABRICE THOUVEREZ	Professeur	<i>Rapporteur</i>
JEAN-PIERRE LOMBARD	Snecma R&D	<i>Examineur</i>
JEAN-PHILIPPE OUSTY	Turbomeca R&D	<i>Examineur</i>
ERIC SEINTURIER	Turbomeca R&D	<i>Examineur</i>
CHRISTIAN SOIZE	Professeur	<i>Directeur de thèse</i>



# Résumé

**Titre :** Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines.

**Résumé :** Les roues aubagées sont des composants dont le comportement dynamique est très sensible au désaccordage involontaire causé par les tolérances de fabrication qui rendent les aubes légèrement différentes les unes des autres. Cette sensibilité se traduit généralement par une amplification des vibrations. L'objectif de ce travail de recherche est de proposer de nouvelles méthodologies permettant d'optimiser la conception en vibration des roues aubagées vis-à-vis du désaccordage involontaire. L'optimisation est faite pour la réponse forcée et sous une contrainte de marge à la stabilité aéroélastique. Dans ce contexte, le désaccordage intentionnel par modification géométrique des aubes est utilisé. Pour réduire les temps de calcul, une nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique est développée et validée. La modélisation des incertitudes incluant le désaccordage involontaire, est faite avec une approche probabiliste non paramétrique. Une application à l'optimisation de la conception en vibration d'une roue réelle a finalement été effectuée en deux phases : (1) une optimisation de la répartition des différentes aubes désaccordées intentionnellement sur la roue aubagée et (2) une optimisation du niveau de modification géométrique de ces aubes. Les résultats montrent qu'une conception robuste par désaccordage intentionnel de la roue aubagée a été effectuée.

**Mots-Clefs :** désaccordage involontaire, désaccordage intentionnel, réduction de modèle, optimisation, approche probabiliste non-paramétrique, réponse forcée, stabilité aéroélastique.

**Title :** Robust design in vibration and aeroelasticity of turbomachinery bladed disks.

**Abstract :** Bladed disks are components which dynamic behaviour are very sensitive to mistuning induced by the manufacturing process which makes blades differ from one another. This sensitivity increases in general the vibrations. The objective of this research is to propose new methods for optimizing design in vibration of bladed disks with respect to mistuning. Optimization is done for the forced response while keeping a sufficient aeroelastic stability margin. In this context, detuning by modifying geometrically the blades' shapes is used. To reduce numerical computational costs, a new reduction method for geometrically detuned bladed disks is developed and validate. Uncertainties modeling including mistuning is done with a non-parametric probabilistic approach. An application by optimizing the design in vibration of a realistic bladed disk is finally done in two steps : (1) An optimization of the different detuned blades arrangements around the disk and (2) an optimization of the geometric modification level of blades. The results show that a robust design of the bladed disks has been done using geometric detuning.

**Keywords :** mistuning, detuning, model reduction, optimization, nonparametric probabilistic approach, forced response, aeroelastic stability.

**Discipline :** Mécanique

**Laboratoire :** Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, Université Paris-Est, 5 Boulevard Descartes, 77454 Marne-La-Vallée Cedex 04



# Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement de 3 années de travail acharné qui n'aurait pas pu être mené à bien sans la participation et le soutien de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

Tout d'abord, mon directeur de thèse Christian Soize et mon responsable industriel Jean-Philippe Ousty, dont l'abnégation, la pédagogie, le professionnalisme et la disponibilité ont été les meilleurs atouts pour la concrétisation de ce travail de recherche. Leurs qualités humaines et leur sens des responsabilités forcent le respect.

Je souhaite ensuite remercier les membres du jury qui ont accepté de participer à l'examen de ce travail. Merci à M. Roger Ohayon de m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Une pensée particulière à Messieurs Marc Berthillier et Fabrice Thouverez pour avoir examiné avec munitie ce travail et dont les remarques et questions ont été très judicieuses et offrent de réelles perspectives à ce travail. Merci également à M. Jean-Pierre Lombard pour ses remarques et à M. Eric Seinturier pour toutes les discussions techniques que j'ai eues avec lui pendant la thèse.

Merci à mes collègues de Turboméca ayant participé de près ou de loin à ce travail ou ayant tout simplement rendu agréable mon séjour. Une pensée particulière à mon camarade doctorant Mathieu Herran, à notre secrétaire Françoise Séville, aux dames de l'accueil que je voyais quotidiennement, à mes collègues ou ex-collègues de service Laurence Vial, Elisabeth Ostojak-Kuczynski, Hervé Chalons, Lorenzo Pons, Thomas Lederlin, Lucas Benassis, Nicolas Savary, Gilles Leroy, Sylvain Coste, à Christophe Colette de l'Audit et à Marc Dijoud et Olivier Tuot du Bureau d'études. Merci également à Christian Dupont de la Snecma.

Je remercie chaleureusement les membres du laboratoire MSME que j'ai cotoyé pendant cette thèse, avec une mention spéciale à Evangéline Capiez-Lernout qui m'a initié à la dynamique des structures à symétrie cyclique et a permis ma bonne intégration au laboratoire. Merci à notre secrétaire Isabelle Bressan, à Elie Favier, Christophe Desceliers, Camille Perrot, et à mes camarades doctorants ou ex-doctorants Anas, Morad, Jérémy, Eric, Charles, Thiago, Frederic, Sandra, Ziane, Sulpicio, Bao, Huy Toan, pour cette bonne ambiance qui règne au laboratoire et pour les excellents moments de sympathie que j'ai passés avec eux.

Un grand merci à mes amis qui m'ont soutenu de par leur présence et leurs conseils, amis qui étaient bien plus stressés que je ne l'étais moi-même.

Je finis mes remerciements par ma famille proche notamment mon père qui m'a inculqué la passion de l'aéronautique, ma mère, mes frères et soeurs et ma chère et tendre qui m'a supporté, m'a soutenu et encouragé tout au long de cette thèse.





# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contexte de la recherche . . . . .	1
Positionnement de la recherche . . . . .	3
Objectifs de la recherche . . . . .	5
Stratégie de la recherche . . . . .	6
Organisation du mémoire . . . . .	7
<b>1 Positionnement scientifique du désaccordage involontaire et intentionnel en aéro-mécanique des roues aubagées</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Présentation du problème de désaccordage involontaire . . . . .	10
1.2.1 Description du comportement des structures à symétrie cyclique . . . . .	10
1.2.2 Aperçu historique du problème de désaccordage involontaire . . . . .	11
1.2.3 Types d’approches pour la modélisation du désaccordage involontaire . . . . .	12
1.2.4 Paramètres influant le comportement dynamique des roues désaccordées . . . . .	13
1.3 Conséquences du désaccordage involontaire sur l’aéromécanique des roues . . . . .	14
1.3.1 Effets sur la réponse forcée . . . . .	15
1.3.2 Effets sur la stabilité aéroélastique . . . . .	16
1.4 Sensibilité de la réponse forcée vis-à-vis du désaccordage involontaire . . . . .	17
1.4.1 Interprétation du phénomène de sensibilité de la réponse forcée . . . . .	17
1.4.2 Conséquences de la sensibilité de la réponse forcée . . . . .	18
1.5 Désaccordage intentionnel pour améliorer l’aéromécanique des roues . . . . .	19
1.5.1 Utilisation pour la réduction de la réponse forcée . . . . .	19
1.5.2 Utilisation pour l’amélioration de la stabilité aéroélastique . . . . .	20
1.6 Conclusion . . . . .	22
<b>2 Formulation du problème aéromécanique</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	26
2.2 Description des systèmes mécaniques étudiés . . . . .	27
2.2.1 Système mécanique à symétrie cyclique . . . . .	27
2.2.2 Système mécanique avec structure désaccordée intentionnellement . . . . .	27

2.3	Modèle dynamique du système avec structure accordée . . . . .	28
2.3.1	Équation de la dynamique du système accordé . . . . .	28
2.3.2	Structure matricielle dans les repères locaux associés aux secteurs . . .	29
2.3.3	Transformée de Fourier discrète et passage au repère global . . . . .	30
2.3.4	Problème aux valeurs propres de la structure accordée . . . . .	31
2.4	Modèle dynamique du système avec structure désaccordée intentionnellement .	32
2.5	Formulation d'une nouvelle méthode de réduction de modèles . . . . .	34
2.5.1	Base de projection formée des modes élastiques des différents types de secteurs de la roue aubagée . . . . .	34
2.5.2	Réduction du modèle dynamique du système désaccordé . . . . .	38
2.5.3	Cas particulier d'un amortissement structural par taux de dissipation modale . . . . .	40
2.6	Validation de la nouvelle méthode de réduction de modèles sur un cas réel . . .	41
2.7	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Formulation du problème aéromécanique avec incertitudes</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	50
3.2	Choix de l'approche probabiliste pour la modélisation des incertitudes . . . . .	50
3.3	Construction du modèle probabiliste non paramétrique . . . . .	52
3.3.1	Modèle stochastique réduit du système aéromécanique avec incertitudes	52
3.3.2	Construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires . . . . .	53
3.4	Méthodologie de résolution du problème probabiliste aéromécanique . . . . .	58
3.4.1	Méthode de résolution des équations stochastiques . . . . .	58
3.4.2	Analyse de convergence du système stochastique . . . . .	58
3.4.3	Traitements statistiques . . . . .	59
3.5	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Optimisation du désaccordage intentionnel des roues aubagées</b>	<b>61</b>
4.1	Introduction . . . . .	62
4.2	Choix du désaccordage intentionnel . . . . .	62
4.2.1	Désaccordage intentionnel par modification géométrique des aubes . .	62
4.2.2	Influence des modifications géométriques des aubes sur l'aérodynamique	63
4.3	Méthode d'optimisation de la répartition des aubes géométriquement modifiées dans le cadre du désaccordage intentionnel . . . . .	65
4.3.1	Principe de réduction des possibilités de répartition . . . . .	66
4.3.2	Validation de la méthode de réduction des possibilités de répartition . .	67
4.4	Conclusion . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Application à la conception robuste d'un prototype de roue aubagée aéronautique</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	76
5.2	Présentation du modèle du prototype de roue aubagée . . . . .	76
5.3	Problématique de conception robuste du prototype de roue aubagée . . . . .	77

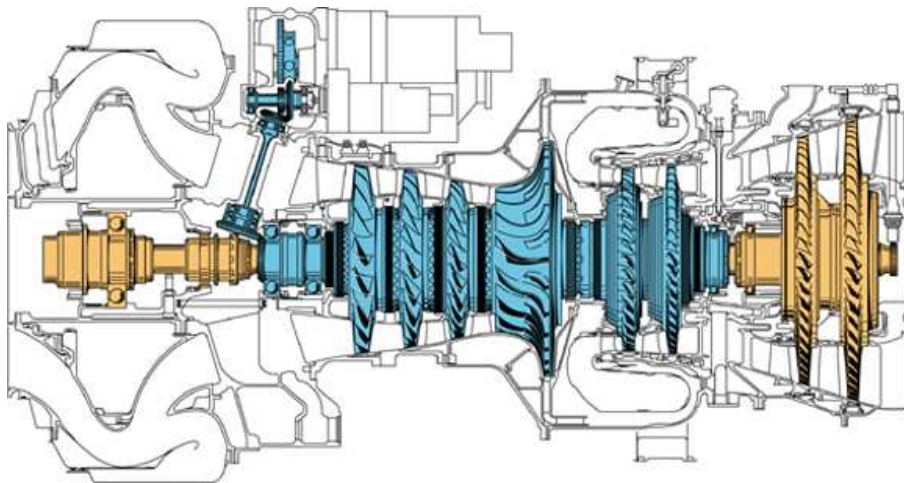
5.4	Comportement dynamique de la roue aubagée nominale désaccordée involontairement . . . . .	78
5.4.1	Étude de la stabilité aéroélastique . . . . .	78
5.4.2	Étude de la réponse forcée . . . . .	81
5.5	Construction de la fonction coût associée à l'optimisation du niveau de désaccordage intentionnel . . . . .	82
5.6	Comportement dynamique de la roue aubagée optimisée par désaccordage intentionnel en présence de désaccordage involontaire . . . . .	86
5.6.1	Configuration optimale de répartition des aubes modifiées géométriquement : roue aubagée optimale . . . . .	86
5.6.2	Étude de la stabilité aéroélastique . . . . .	87
5.6.3	Étude de la réponse forcée . . . . .	88
5.7	Conclusion . . . . .	91
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>93</b>
	Les apports scientifiques . . . . .	93
	Les développements logiciels . . . . .	94
	Les perspectives . . . . .	95
<b>A</b>	<b>Mise en évidence d'un problème d'incompatibilité de maillages sur un modèle de plaque</b>	<b>97</b>
<b>B</b>	<b>Comparaison de la méthode SNM (Subset of Nominal Modes) et de la nouvelle méthode de réduction de modèle sur un cas simple de roue aubagée désaccordée géométriquement</b>	<b>101</b>
B.1	Présentation du modèle simplifié de roue aubagée . . . . .	101
B.2	Comparaison de la méthode de réduction de modèles SNM et de la nouvelle méthode de réduction de modèles . . . . .	103
<b>C</b>	<b>Méthodologie de résolution des équations de la stabilité aéroélastique</b>	<b>109</b>
C.1	Méthode de résolution de l'équation de flottement . . . . .	109
C.2	Méthode simplifiée de résolution de l'équation de flottement . . . . .	111
<b>D</b>	<b>Construction du modèle probabiliste non paramétrique sur un modèle réduit dont les matrices structurales sont complexes</b>	<b>113</b>
D.1	Information disponible pour la construction du modèle probabiliste . . . . .	113
D.2	Normalisation des matrices aléatoires . . . . .	114
D.2.1	Factorisation des matrices complexes hermitiennes moyennes réduites . . . . .	114
D.2.2	Factorisation des matrices complexes symétriques moyennes réduites . . . . .	115
D.3	Expression des matrices aléatoires . . . . .	116
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>



# Introduction

## Contexte de la recherche

Les turbomachines également appelées turbines à gaz sont des systèmes complexes utilisés dans les industries aéronautique, automobile et de production d'énergie et dont le fonctionnement repose sur trois phases : la compression, la combustion et la détente des gaz. Les phases de compression et de détente sont assurées par des rangées de roues aubagées mobiles et de roues aubagées fixes (cf. figure 1).



**FIG. 1:** Vue de l'ensemble des éléments tournants d'une turbomachine. [Source Turbomeca]

La rotation des roues mobiles couplée aux fluctuations de pressions (cf. figure 2) dues à la présence de composants fixes crée des forces instationnaires pouvant exciter les modes de roues aubagées (voir par exemple Berthillier *et al.* [9]).

Compte tenu des vitesses de rotation élevées de ces composants, de forts niveaux de réponse forcée vibratoire peuvent conduire prématurément à des ruptures d'aubes par fatigue vibratoire.

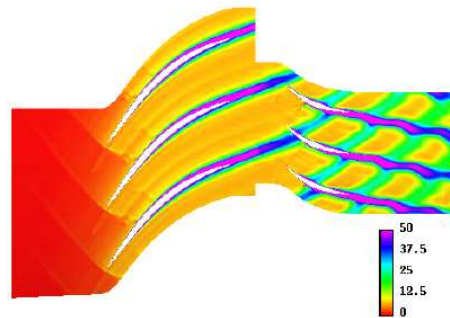


FIG. 2: Sillage d'une roue mobile de compresseur. [Source Turbomeca]



FIG. 3: Exemple de roue aubagée monobloc : compresseur axial. [Source Turbomeca]

Les amplitudes des vibrations sont limitées par la présence de mécanismes dissipateurs d'énergie, qui sont internes au système ou qui peuvent lui être rajouté. Parmi ces mécanismes, on peut citer :

- L'amortissement interne lié aux propriétés du matériau : celui-ci est très faible pour les matériaux métalliques.
- L'amortissement apporté par la liaison en pied d'aube lorsque les aubes sont rapportées sur le moyeu : celui-ci diminue rapidement lorsque la vitesse de rotation croît (il est inexistant pour les systèmes usinés dans la masse tels que les roues aubagées monoblocs (cf. figure 3 et 4)).
- Les mécanismes raidisseurs ou dissipateurs d'énergie tels que les frotteurs sous le pied d'aube (plate-forme) pour les roues aubagées à aubes rapportées, les nageoires pour les aubes élancées.
- L'amortissement apporté par le fluide en écoulement : la présence de l'écoulement du fluide a généralement un effet stabilisant. Toutefois il peut faire apparaître des instabilités telles que le flottement aéroélastique (Platzer et Carta [80]).



**FIG. 4:** Exemples de roue aubagée monobloc : compresseurs centrifuges et bloc brut de matière à usiner. [Source Turbomeca]

Par ailleurs, une des caractéristiques des turbomachines est d’avoir des fréquences de résonance dans le domaine de fonctionnement. Il est à noter qu’une des tendances actuelles chez les motoristes vise à réduire la masse et l’encombrement du moteur tout en conservant, voire en améliorant le niveau de performance, ce qui revient en particulier à réduire le nombre de roues aubagées de la turbomachine, et conduit donc à la conception de roues aubagées continuellement plus chargées mécaniquement et aérodynamiquement. Par ailleurs, l’utilisation importante des roues aubagées monoblocs sur les étages de compression conduit à des composants faiblement amortis. En conséquence, ces évolutions peuvent conduire à une augmentation des niveaux vibratoires et donc à des marges de plus en plus réduites, d’où l’intérêt de développer de nouveaux concepts permettant de réduire ces niveaux.

De plus, les structures à symétrie cyclique s’avèrent extrêmement sensibles à la présence d’éléments perturbateurs de la symétrie (Hodges [42], Pierre et Dowell [78], Bendiksen [5]).

Dans la présente recherche, nous nous intéressons à la dynamique linéarisée des structures tournantes de turbomachines en présence de désaccordage involontaire principalement lié aux tolérances d’usinage rompant ainsi la géométrie cyclique, mais aussi au désaccordage intentionnel obtenu par modification géométrique des aubes. Dans ce contexte, nous étudions le comportement dynamique en réponse forcée et en stabilité aéroélastique et proposons une méthodologie d’analyse à partir de modèles numériques et un outil de conception robuste des roues aubagées désaccordées intentionnellement.

## Positionnement de la recherche

On définit par la notion de robustesse en vibration d’une roue aubagée, la faible sensibilité du comportement dynamique de la roue aubagée vis-à-vis des incertitudes incluant le désac-



cordage involontaire. Les petites différences d'une aube à l'autre, engendrées par le processus de fabrication, entraînent une rupture de symétrie appelée désaccordage involontaire qui est un phénomène courant du fait des tolérances de fabrication, des dispersions sur les propriétés mécaniques des matériaux, de l'usure des aubes en service, etc. Le désaccordage intentionnel consiste à provoquer une rupture de symétrie cyclique en répartissant des aubes différentes sur la circonférence de la roue. La recherche de robustesse de telles roues désaccordées intentionnellement vise à maîtriser les niveaux vibratoires et débouche ainsi sur de la conception robuste.

Lorsque la roue aubagée est à symétrie cyclique, la modélisation d'un seul secteur générateur de la roue suffit pour reconstruire la dynamique de la structure complète par une technique de développement de la solution en série de Fourier. Lorsque cette structure cyclique est soumise à une excitation cyclique, sa réponse forcée se manifeste par une distribution uniforme de l'énergie vibratoire sur toutes les aubes (Thomas [103]). Autrement dit, toutes les aubes de la roue aubagée accordée vibrent avec la même amplitude et ne diffèrent que par un déphasage. Dans le cas d'une structure désaccordée (involontairement et/ou intentionnellement), un seul secteur n'est plus suffisant pour déterminer le comportement dynamique et une modélisation de la roue entière est *a priori* nécessaire ou alors une méthode adaptée de réduction de modèles. De plus, malgré la cyclicité de l'excitation, l'énergie vibratoire n'est plus uniformément distribuée sur les aubes mais se localise sur quelques aubes. Ce confinement d'énergie a pour effet, une augmentation importante des amplitudes maximales de vibration de certaines aubes de la roue par rapport au cas accordé. Il est donc nécessaire de prendre en compte ce désaccordage pour estimer la réponse vibratoire des roues réelles fabriquées avec ou sans désaccordage intentionnel, sachant que le désaccordage involontaire est toujours présent.

De par sa nature aléatoire, le désaccordage involontaire induit par les tolérances de fabrication peut être pris en compte par une modélisation probabiliste. Rappelons qu'il existe deux grands types d'approches probabilistes pour prendre en compte les incertitudes dans les modèles numériques : l'approche probabiliste paramétrique et l'approche probabiliste non paramétrique. L'approche probabiliste paramétrique permet de modéliser les incertitudes sur les paramètres du modèle numérique tels que les paramètres des matériaux, les paramètres décrivant les conditions aux limites et les paramètres liés à la géométrie. Par construction même, cette approche probabiliste paramétrique ne permet pas de prendre en compte les erreurs de modèles qui induisent des incertitudes de modélisation. L'approche probabiliste non paramétrique permet de prendre en compte ces incertitudes de modélisation ainsi que les incertitudes sur les paramètres du modèle. Appliquée aux problèmes de dynamique des roues aubagées, cette approche est très intéressante pour modéliser le désaccordage involontaire, puisque les sources de désaccordage sont nombreuses, et on ne dispose pas de suffisamment de résultats expérimentaux pour prétendre identifier des modèles probabilistes paramétriques de ces sources d'incertitudes.

Dans les travaux antérieurs, l'analyse vibratoire des roues aubagées avec désaccordage involontaire (principalement avec désaccordage fréquentiel des aubes induit par modification des propriétés mécaniques des matériaux) a été très étudiée avec des modèles déterministes, avec des modèles probabilistes paramétriques et plus récemment avec des modèles probabilistes non paramétriques (Capiez-Lernout *et al.* [16, 15, 17], Avalos *et al.* [2]). L'analyse vibratoire de ces

roues avec désaccordage intentionnel (désaccordage fréquentiel) et en présence de désaccordage involontaire a été menée dans le cadre déterministe mais aussi avec une approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les paramètres mécaniques des matériaux pour le désaccordage involontaire (voir par exemple Ewins [29], Wei et Pierre [105], Ottarson et Pierre [76], Castanier et Pierre [20], Basu et Griffin [4], Sinha et Chen [93], Mignolet et Lin [65]). Aucun travail n'a été effectué sur le désaccordage intentionnel induit par la modification géométrique des aubes, en présence des forces aérodynamiques instationnaires de couplage fluide-structure et en présence d'un désaccordage involontaire engendré par les tolérances de fabrication et par les incertitudes sur les propriétés mécaniques des matériaux. La modélisation de ce désaccordage involontaire et de ces incertitudes requiert une approche probabiliste non paramétrique. Concernant la conception robuste, c'est à dire l'optimisation du système couplé avec un modèle numérique probabiliste permettant de prendre en compte les incertitudes, des travaux ont été menés sur l'optimisation de la répartition d'aubes différentes avec des approches probabilistes paramétriques. Aucun travail publié sur une telle conception robuste avec désaccordage par la géométrie des aubes, en présence des forces aérodynamiques de couplage et avec un modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes n'a été mené. Enfin, des méthodes de réduction de modèles très efficaces et variées ont été proposées dans ces domaines (voir par exemple Castanier et Pierre [21], Yang et Griffin [110], Bladh *et al.* [11, 10], Feiner et Griffin [35, 36], Martel *et al.* [60]). Dans le cas d'utilisation de bases modales cycliques pour construire le modèle réduit des roues aubagées désaccordées intentionnellement et pour lesquels les maillages éléments finis des différents types d'aubes ne sont pas compatibles, la problématique consistant à trouver une méthode de réduction modale qui permette de construire de manière efficace un modèle réduit à partir de l'unique information constituée des modes cycliques de chaque type de secteur (aube et une partie du disque) et calculée par un logiciel de calcul de structure en "boîte noire" dans lequel aucun développement intrusif ne peut être effectué est d'actualité.

## Objectifs de la recherche

Les objectifs de la recherche ont été définis dans le cadre d'une problématique formulée par la société Turbomeca du groupe SAFRAN qui a en charge les études, la conception et la production de turbomachines aéronautiques. Comme il a été indiqué précédemment, en présence de l'écoulement aérodynamique, la rotation des roues aubagées de turbomachines induit des vibrations. Les évolutions actuelles des technologies pour ces turbomachines conduisent à alléger les moteurs par optimisation de la conception et/ou par utilisation de nouveaux matériaux, tout en gardant ou en améliorant le niveau de performance de la turbomachine. Cela engendre une modification des niveaux vibratoires, et donc le plus souvent, des marges vibratoires réduites. Dans l'objectif de réduire les niveaux de contraintes sur les roues aubagées, le constructeur est donc intéressé au développement de nouveaux outils de simulation numérique pour optimiser la conception avec désaccordage intentionnel par modification de la géométrie des aubes et en présence de désaccordage involontaire. Les objectifs de la présente recherche sont de développer et d'appliquer des nouvelles formulations et méthodes pour résoudre ce problème, sachant que les méthodes numériques qui en découlent doivent impérativement être compatibles avec

l'environnement logiciel utilisé par le constructeur pour mener à bien les différentes analyses de conception.

Dans ce travail de recherche, nous proposons donc tout d'abord une nouvelle méthode de réduction de modèle adaptée au désaccordage intentionnel géométrique, utilisant des modes cycliques des différents types de secteurs (aube et une partie du disque) et ne nécessitant pas de développement intrusif dans les logiciels de dynamique linéaire des structures. Ensuite, nous proposons une analyse dynamique des roues aubagées avec désaccordage involontaire et désaccordage intentionnel, avec prise en compte du couplage aérodynamique instationnaire et en tenant compte des incertitudes de modélisation et des incertitudes sur les paramètres du modèle, pour l'élasticité et pour l'aérodynamique, avec l'approche probabiliste non paramétrique. La conception robuste dans un tel cadre, conduisant à résoudre un problème d'optimisation, pour le désaccordage intentionnel, en présence de désaccordage involontaire et sous les contraintes de niveau vibratoire et de marge de stabilité au flottement fait l'objet de la fin de ce travail.

## Stratégie de la recherche

La dimension des modèles numériques par éléments finis des roues aubagées tridimensionnelles désaccordées intentionnellement avec prise en compte des incertitudes par des modèles probabilistes conduit à des coûts calculs insurmontables dans l'état actuel pour mener à bien les problèmes d'optimisation liées à la conception robuste en aéromécanique. Ce constat implique donc l'utilisation de modèles numériques réduits, d'une part pour réduire les coûts calculs et d'autre part pour exprimer les forces aérodynamiques instationnaires généralisées. Cela permet ainsi de diminuer les coûts des calculs CFD et d'implémenter les modèles probabilistes non paramétriques des incertitudes sur la partie structurale et sur la partie aérodynamique. Nous allons également proposer une nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique.

Concernant la prise en compte des incertitudes de modélisation correspondant au désaccordage involontaire, nous utiliserons l'approche probabiliste non paramétrique qui s'implémente facilement sur les modèles réduits de structures. Toutefois, la matrice réduite des forces aérodynamiques généralisée étant complexe, son modèle probabiliste doit être spécifiquement construit.

Les deux ingrédients ci-dessus permettent de mener des analyses de réponse forcée et d'instabilité aéroélastique pour des roues aubagées désaccordées intentionnellement en présence de désaccordage involontaire dans un contexte probabiliste et avec des coûts numériques raisonnables.

Concernant la conception robuste, la première étape consiste à formuler le problème d'optimisation du désaccordage intentionnel consistant à trouver la répartition optimale des  $N$  aubes de la roue aubagée (par exemple 23 aubes) constituées de plusieurs types d'aubes (par exemple de deux types d'aubes qui diffèrent par leur géométrie). La seconde étape consiste alors à trouver les paramètres optimaux de modification des aubes pour la répartition optimale trouvée précédemment. Les contraintes de ces problèmes d'optimisation sont définies par des critères de

niveau vibratoire des aubes de la roue désaccordée et des critères portant sur les marges d'instabilité aéroélastique.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, le problème d'optimisation ainsi formulé doit pouvoir être résolu dans l'environnement logiciel du constructeur (avec les logiciels dédiés pour la conception, pour les analyses modales de la structure, pour les calculs aérodynamiques instationnaires, pour les calculs de réponse forcée et de stabilité aéroélastique et enfin pour les optimisations).

## Organisation du mémoire

Ce manuscrit est organisé en chapitres et en annexes. Le chapitre 1 a pour objectif de synthétiser l'ensemble des travaux réalisés jusqu'à aujourd'hui sur le thème du désaccordage involontaire et/ou intentionnel des roues aubagées. Cette synthèse permet tout d'abord de comprendre la physique et les conséquences du désaccordage involontaire. La compréhension de ce phénomène permet ensuite d'introduire la notion du désaccordage intentionnel dont le but est de réduire les effets indésirables du désaccordage involontaire.

Le chapitre 2 présente une formulation du problème aéromécanique. Cette formulation est faite pour les structures accordées et désaccordées. Le développement en série de Fourier permettant de se ramener dans le cas d'une structure à symétrie cyclique à la résolution du problème aux valeurs propres sur un seul secteur y est également rappelé. Une nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modifications géométriques des aubes est proposée et validée.

Dans le chapitre 3, on présente une nouvelle formulation pour la réponse forcée et la stabilité aéroélastique du désaccordage intentionnel en présence de désaccordage involontaire et de forces aérodynamiques instationnaires liées au couplage fluide-structure, dans le cadre d'un modèle numérique incertain. Les nouveaux ingrédients dans cette formulation par rapport aux travaux précédents consistent en l'implémentation de l'approche probabiliste non paramétrique avec la nouvelle base de réduction pour les opérateurs structure et l'opérateur aérodynamique de couplage, conduisant ainsi à l'introduction de nouvelles classes de matrices aléatoires. Dans ce chapitre, les fondements de la théorie probabiliste non paramétrique sont synthétisés et la construction détaillée des équations aléatoires de la structure est présentée en utilisant la nouvelle méthode de réduction. Cette construction est présentée pour l'étude de la réponse forcée avec une formulation conduisant à des matrices réelles pour les opérateurs de la structure et une matrice complexe pour les forces aérodynamiques instationnaires généralisées. La version de cette formulation avec des matrices complexes pour les opérateurs de la structure est présentée dans l'annexe D. Pour l'analyse de la stabilité aéroélastique, nous ne présenterons que la formulation avec des matrices réelles pour les opérateurs de structure. Une description de la méthodologie de résolution des équations aléatoires et des traitements statistiques associés y est également faite.

Le chapitre 4 décrit la méthodologie d'optimisation du désaccordage intentionnel des roues aubagées en présence d'incertitudes dans le modèle numérique et donc en utilisant le modèle numérique réduit stochastique. Cette méthodologie consiste à optimiser la répartition de deux différents types d'aubes sur une roue aubagée à  $N$  aubes. Dans ce contexte, une nouvelle méthode inspirée de travaux de Han et Mignolet ([40]) a été développée pour permettre une optimisation rapide.

Le chapitre 5 est dédié à l'application des méthodes et outils développés pour une configuration réelle de roue aubagée de turbomachine. On présente une optimisation du désaccordage intentionnel dans le cadre de la conception robuste de cette roue aubagée en présence d'incertitudes liées au processus de fabrication. Les différentes méthodes développées et présentées dans les chapitres précédents y sont appliquées. La fonction coût associée consiste à réduire la réponse forcée avec une contrainte sur la stabilité aéroélastique.

Pour compléter les éléments présentés dans ce mémoire, plusieurs éléments sont ajoutés en annexe. L'annexe A présente une mise en évidence du problème d'incompatibilité de domaines géométriquement différents pour la réduction de modèles par projection modale. L'illustration en est faite sur un cas test simple de plaque géométriquement modifiée. L'annexe B présente une comparaison de la nouvelle méthode de réduction de modèles proposée dans ce manuscrit, à une méthode de réduction de modèles adaptée au cas du désaccordage par modification des propriétés des matériaux et appliquée ici au cas du désaccordage intentionnel par modification géométrique. Dans l'annexe C, la méthode de résolution des équations du flottement est rappelée et une méthode simplifiée adaptée au cas des modes fréquemment proches est introduite. L'annexe D présente quant à elle une méthode de construction du modèle probabiliste non paramétrique sur un modèle réduit dont les matrices structurales de masse, rigidité et dissipation sont complexes.

# Chapitre 1

## Positionnement scientifique du désaccordage involontaire et intentionnel en aéromécanique des roues aubagées

*Dans ce premier chapitre, nous allons à travers une étude bibliographique, analyser les différents phénomènes liés à la problématique du désaccordage involontaire et du désaccordage intentionnel.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Présentation du problème de désaccordage involontaire</b>	<b>10</b>
1.2.1	Description du comportement des structures à symétrie cyclique	10
1.2.2	Aperçu historique du problème de désaccordage involontaire	11
1.2.3	Types d'approches pour la modélisation du désaccordage involontaire	12
1.2.4	Paramètres influant le comportement dynamique des roues désaccordées	13
<b>1.3</b>	<b>Conséquences du désaccordage involontaire sur l'aéromécanique des roues</b>	<b>14</b>
1.3.1	Effets sur la réponse forcée	15
1.3.2	Effets sur la stabilité aéroélastique	16
<b>1.4</b>	<b>Sensibilité de la réponse forcée vis-à-vis du désaccordage involontaire</b>	<b>17</b>
1.4.1	Interprétation du phénomène de sensibilité de la réponse forcée	17
1.4.2	Conséquences de la sensibilité de la réponse forcée	18
<b>1.5</b>	<b>Désaccordage intentionnel pour améliorer l'aéromécanique des roues</b>	<b>19</b>
1.5.1	Utilisation pour la réduction de la réponse forcée	19
1.5.2	Utilisation pour l'amélioration de la stabilité aéroélastique	20
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>22</b>

---

## 1.1 Introduction

Les turbines et les compresseurs sont des assemblages de différents étages de roues aubagées constituées d'un disque et d'aubes identiques (géométrie et propriétés mécaniques) réparties de façon équidistante : ces structures sont dites à symétrie cyclique. Cependant, cette notion n'est que théorique car pour les structures réelles, de petites imperfections sont présentes et brisent la symétrie cyclique : on parle alors de désaccordage involontaire. Ce désaccordage se traduit entre autres par une modification des fréquences et des formes modales de la roue aubagée. Ces imperfections sont causées par le processus de fabrication et les dispersions sur les propriétés des matériaux.

Le désaccordage des roues aubagées est un sujet sur lequel beaucoup de chercheurs ont travaillé dans le demi-siècle dernier pour la compréhension des caractéristiques vibratoires des roues aubagées réelles et des phénomènes physiques sous-jacents. Ainsi, l'une des conséquences du désaccordage sur le comportement vibratoire est l'effet indésirable sur la réponse forcée, se traduisant par une amplification du niveau maximum de vibration de certaines aubes (voir par exemple Whitehead [107], El-Bayoumi et Srinivasan [28], Dye et Henri [27], Ewins [29, 30, 31], Sogliero et Srinivasan [96], Griffin et Hoosac [38], Capiez-Lernout *et al.* [16], [17], [15]), Lalanne [54]). Toutefois, les recherches sur le sujet ont montré que le désaccordage peut être bénéfique en présence d'instabilités aéroélastiques (voir par exemple Kaza et Kielb [49, 51], Bendiksen [6], Shapiro [92]). De plus, il existe des désaccordages dits intentionnels, consistant à répartir de manière particulière des aubes de propriétés différentes sur la roue, et permettant de réduire l'amplitude de la réponse vibratoire (Ewins [29, 32], Choi *et al.* [22], Griffin et Hoosac [38], Rzadkowski [82], Castanier et Pierre [19], Lim *et al.* [56], Jones et Cross [48], Petrov *et al.* [77], Ayers *et al.* [3]).

Nous allons dans ce qui suit, retracer les différents phénomènes physiques liés à la problématique du désaccordage, en fournissant à travers une analyse critique, les principaux enseignements sur le plan scientifique et les aspects pratiques que l'industriel peut en tirer en vue d'une conception robuste des structures à symétrie cyclique en général et des roues aubagées en particulier. Ainsi, sans pour autant prétendre à un état de l'art complètement exhaustif, nous présentons dans ce chapitre, une analyse détaillée du contexte des désaccordages involontaire et intentionnel et en donnons un positionnement scientifique. Pour un approfondissement de la bibliographie sur le désaccordage, nous référons le lecteur aux articles (Ewins [33], Slater *et al.* [95], Castanier et Pierre [19]).

## 1.2 Présentation du problème de désaccordage involontaire

### 1.2.1 Description du comportement des structures à symétrie cyclique

Une roue aubagée accordée correspond au cas idéal d'une structure ayant une symétrie cyclique. Dans ce cas de figure, la théorie de la dynamique des structures à symétrie cyclique (voir par



exemple Henry [41], Ohayon et Soize [73]) peut être utilisée afin d'effectuer l'analyse dynamique du système mécanique. Ainsi, la modélisation d'un seul secteur générateur de la structure suffit pour reconstituer la dynamique de la structure complète. De par la symétrie de ce type de systèmes, les modes de vibration sont cycliques. Cette cyclicité est caractérisée par l'apparition lors des réponses vibratoires à une excitation cyclique qui approprie un mode donné, des lignes et cercles nodaux sur la roue. Les lignes et cercles nodaux sont les lieux des points du système qui ne se déplacent pas lors des vibrations, d'où la dénomination de modes à diamètres nodaux et modes à cercles nodaux. Les modes à diamètres nodaux sont généralement des modes doubles car composés de deux modes de même fréquences propres mais déphasés spatialement. Seuls les modes à 0 ou  $N/2$  diamètres (lorsque le nombre  $N$  d'aubes de la roue est pair) sont des modes simples. Les techniques actuelles de calcul assurent d'ailleurs la connaissance très satisfaisante des fréquences de résonance et des modes associés pour les structures à symétrie cyclique (donc considérées sans défauts de fabrication) (voir par exemple Thomas [103], Henry [41], Williams *et al.* [108]). Lorsque ces structures à symétrie cyclique sont soumises à une excitation cyclique, deux conditions sont nécessaires pour provoquer la résonance d'un mode de vibration : une condition de coïncidence de la fréquence du mode avec la fréquence d'excitation, et une condition d'appropriation modale, établie selon la formule :  $h\varpi \pm n = kN$ , où  $N$  représente le nombre d'aubes de la roue,  $n$  représente le nombre de diamètre du mode,  $\varpi$  représente l'ordre d'excitation cyclique,  $h$  et  $k$  étant des entiers relatifs.

Les prévisions de la réponse forcée des structures à symétrie cyclique (parfaitement accordées) soumises à une excitation cyclique montrent que l'énergie vibratoire est uniformément distribuée sur toute la structure. Autrement dit, toutes les aubes de la roue aubagée accordée ont la même amplitude de vibration et ne diffèrent que par un déphasage constant d'une aube à une autre.

## 1.2.2 Aperçu historique du problème de désaccordage involontaire

Les recherches sur le désaccordage menées avant les années 1990 ont principalement consisté à analyser la physique des phénomènes induits par le désaccordage suivant deux grands axes : d'une part, la réponse vibratoire forcée de la structure et d'autre part, l'analyse de la stabilité et de la réponse forcée en présence de couplage aéroélastique.

Le premier axe a été initié par la publication (Tobias [104]) traitant de l'influence des imperfections sur la dynamique des structures tournantes. Plusieurs publications sont alors parues sur ce sujet, parmi lesquelles on peut citer (Whitehead [107], Ewins [29, 30, 31, 32] Ewins et Han [34], Dye et Henry [27], El-Bayoumi et Srinivasan [28], Sogliero et Srinivasan [96], Strange et MacBain [102], Muszynska et Jones [69], Griffin et Hoosac [38], MacBain et Whaley [59], Griffin et Sinha [39], Sinha [89], Afolabi [1], Griffin [37]). En présence de couplage aéroélastique, un effort particulier a été fait pour la compréhension du mécanisme d'instabilité aéroélastique de type flottement et son interaction avec le désaccordage (Crawley et Hall [24], Bendiksen [6], Kaza et Kielb [50, 51], Imregun et Ewins [44], Dugundji et Bundas [26], Basu et Griffin [4], Hoyniak et Fleeter [43], Crawley [23]).



Au cours de cette période, les recherches étaient surtout menées avec des méthodes déterministes utilisant des modèles simples masses-ressorts à faible nombre de degrés de liberté ou des méthodes de réduction de modèle. Malgré la simplicité des modèles utilisés à l'époque, et le peu de ressources informatiques, ces recherches ont permis de mettre en place des bases solides au niveau de la compréhension du phénomène de désaccordage.

Depuis les années 1990, avec le développement des moyens informatiques et des puissances de calcul, on a assisté à la modélisation tridimensionnelle des roues aubagées et de phénomènes non linéaires tels que la friction. Malgré le développement de ces moyens, on a aussi assisté à l'amélioration des méthodes de réduction de modèle et plus récemment, grâce à la simultanéité de l'augmentation des moyens informatiques et à l'existence de méthodes efficaces de réduction de modèle, à l'essor de l'utilisation des probabilités et des statistiques pour les recherches liées au désaccordage.

### 1.2.3 Types d'approches pour la modélisation du désaccordage involontaire

Au niveau des roues aubagées, les tolérances d'usinage et les dispersions sur les matériaux métalliques ou composites rendent les aubes légèrement différentes les unes des autres. Ces différences, bien que légères, induisent des modifications importantes du comportement dynamique de la structure cyclique (accordée) devenue non cyclique (désaccordée).

Sur le plan des modélisations, le processus de fabrication et les dispersions sur les propriétés des matériaux induisent des incertitudes qui doivent être prises en compte dans un cadre probabiliste et qui sont statistiquement indépendantes d'une aube à une autre. Dans le cadre du problème dit direct, qui consiste à étudier le comportement de la réponse forcée des roues aubagées sous l'effet du désaccordage, l'approche probabiliste paramétrique est utilisée. Elle permet de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle. Par exemple, le module d'Young de chaque aube sera modélisé par une variable aléatoire de loi donnée. Les équations avec opérateur aléatoire sont alors résolues soit par la méthode de simulation de Monte-Carlo (Griffin et Hoosac [38], Basu et Griffin [4]), soit par des techniques analytiques de perturbations (voir par exemple Sinha [89], Mignolet et Lin [65], Sinha et Chen [93], Lin et Mignolet [58], Mignolet *et al.* [66]). Lorsque seul le module d'Young de l'aube est pris comme paramètre incertain, cela revient à considérer un désaccordage en fréquence uniquement, les formes modales restant inchangées. C'est la raison pour laquelle, des modèles probabilistes paramétriques plus complets, permettant de prendre aussi bien en compte le désaccordage en fréquence qu'en forme modale ont été introduits. Il s'agit notamment des recherches menées par Mignolet *et al.* [67]. Plus récemment, a été introduite une approche probabiliste non paramétrique qui permet de prendre en compte non seulement les incertitudes sur les paramètres du modèle, mais aussi et surtout les incertitudes de modélisation. Dans une telle approche, ce ne sont plus les paramètres du modèle qui sont modélisés par des variables aléatoires, mais plutôt les opérateurs du modèle qui sont directement modélisés par des opérateurs aléatoires. La construction des lois de probabilité de ces opérateurs aléatoires est faite en utilisant le principe du maximum d'entropie.

Cette approche a été utilisée pour le désaccordage des roues aubagées dans (Capiez-Lernout *et al.* [16], [17], [15]). D'un point de vue pratique, la spécification des tolérances de fabrication des aubes pour assurer un niveau acceptable de la réponse forcée des roues aubagées est très importante. Ce problème est dit inverse, puisqu'il consiste à trouver à partir d'un niveau maximum acceptable de la réponse forcée, le degré de désaccordage caractérisant les tolérances de fabrication, pour lequel l'amplification de la réponse n'excédera jamais (au sens probabiliste) le niveau fixé. Sur ce thème, très peu de recherches ont été effectuées (Sanliturk et Imregun [84], Capiez-Lernout *et al.* [17]). Une formulation originale du problème inverse, basée sur l'utilisation d'une méthode non paramétrique a été effectuée et validée sur une roue aubagée industrielle dans (Capiez-Lernout *et al.* [16], [17], [15]). Le problème inverse y est résolu par des simulations numériques de Monte-Carlo.

#### **1.2.4 Paramètres influant le comportement dynamique des roues désaccordées**

Des analyses de sensibilité sur la réponse libre ou sur la réponse forcée ont permis de conclure que les principaux paramètres pilotant les effets du désaccordage sont la raideur de couplage entre les aubes induite par la raideur du disque, le taux de désaccordage présent au niveau de la structure, et le taux d'amortissement (structural et visqueux). D'autres part, le processus de fabrication et les dispersions sur les propriétés des matériaux sont les principaux facteurs pilotant le taux de désaccordage, en particulier sur les roues aubagées monoblocs.

##### **1.2.4.1 Raideur de couplage**

Les assemblages faiblement couplés (les aubes faiblement couplées par le disque) sont très sensibles à un faible niveau de désaccordage, contrairement aux assemblages fortement couplés (les aubes fortement couplées par le disque) pour lesquels un faible niveau de désaccordage n'a que de faibles effets. Cependant, lorsque le niveau de couplage devient élevé, le système devient sensible aux forts niveaux de désaccordage.

Il est également connu que le phénomène de localisation des réponses qui se traduit par un confinement des vibrations maximales au niveau de quelques aubes a tendance à s'accroître lorsque les niveaux de couplage inter-aubes diminuent (Wei et Pierre [106, 105], Rivas-Guerras et Mignolet [81]). Ainsi, l'effet du désaccordage sur les structures faiblement couplées se traduit souvent par une localisation spatiale des aubes présentant les amplitudes de vibration les plus fortes. Ce phénomène a d'ailleurs été expliqué par un mécanisme d'augmentation de l'énergie selon lequel, l'aube ayant la plus forte amplitude de vibration récupère à travers le couplage une partie de l'énergie fournie aux aubes adjacentes (voir par exemple Whitehead [107], Wei et Pierre [106], Ottarson et Pierre [76]). Par conséquent, l'apparition de fortes amplifications de la réponse forcée est à la fois conditionnée par un niveau de couplage assez faible pour engendrer le phénomène de localisation, et assez fort pour que les aubes de la zone de vibration localisée puissent récupérer de l'énergie vibratoire de leurs voisins.

#### 1.2.4.2 Niveau de désaccordage

Plusieurs publications font état de la sensibilité des roues aubagées vis-à-vis du niveau de désaccordage. Parmi celles-ci, nous pouvons citer les travaux expérimentaux dans (Kruse et Pierre [53], Pierre *et al.* [79]) qui, en utilisant des techniques expérimentales non-intrusives, ont montré la forte sensibilité des roues aubagées monobloc aux faibles niveaux de désaccordage, et ont également confirmé la présence du phénomène de localisation des réponses vibratoires. Pour comprendre les mécanismes physiques cachés derrière cette sensibilité, une étude détaillée du phénomène est mise en place dans (Kenyon et Griffin [52]) et montre que la quasi-totalité des courbes de sensibilité présente un maximum pour les faibles niveaux de désaccordage.

Le niveau de désaccordage et celui du couplage inter-aubes sont les paramètres essentiels caractérisant la sensibilité des roues aubagées. C'est l'effet combiné de ces deux paramètres qui entraîne et pilote le phénomène de localisation. D'ailleurs, il est indiqué dans (Whitehead [106]) que c'est le ratio entre le niveau de désaccordage et celui de couplage qui gouverne le phénomène de localisation des réponses.

#### 1.2.4.3 Taux d'amortissement

Le niveau d'amortissement est une grandeur difficile à estimer au niveau des roues aubagées, car de nombreux mécanismes responsables de la dissipation d'énergie sont incertains et incontrôlables (Griffin [37]). Ainsi, d'une aube à l'autre, dans le cas des structures à aubes rapportées avec amortisseurs, de grandes différences peuvent apparaître au niveau de l'amortissement, et ces différences peuvent avoir des effets conséquents sur le comportement des roues aubagées désaccordées.

Plusieurs publications font état de l'influence de l'amortissement sur le comportement de ces roues. Ainsi, il est montré dans (Griffin et Sinha [39]), en utilisant un dispositif à frotteurs, que la variation d'amortissement peut piloter la réponse forcée dynamique de leur système, même en présence de désaccordage en raideur. Plus récemment, dans (Lin et Mignolet [57]), il est montré que les variations aube-à-aube de l'amortissement (structural et visqueux) peuvent conduire à des dispersions au niveau de la réponse forcée, similaires en amplitude à celles obtenues par désaccordage en raideur.

Notons également que les conditions de fonctionnement (vitesse, température, etc.), ainsi que certaines caractéristiques du comportement dynamique de la structure telles que la densité modale (Wei et Pierre [105]) et les forces de Coriolis (Nikolic [70]) ont également une influence non négligeable sur le comportement des roues aubagées désaccordées involontairement.

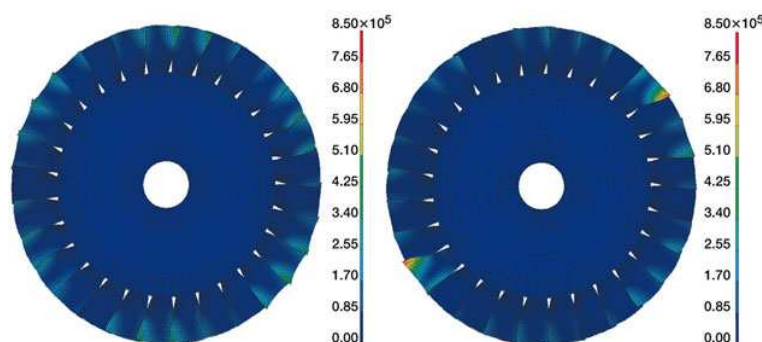
### 1.3 Conséquences du désaccordage involontaire sur l'aéromécanique des roues

Le désaccordage peut avoir des effets significatifs sur le comportement dynamique des roues aubagées, et dans certains cas causer la localisation des réponses sur quelques aubes (White-

head [107], Dye et Henry [27], El-Bayoumi et Srinivasan [28]). Cela donne une explication plausible du phénomène de ruine de seulement certaines aubes de turbomachines par fatigue vibratoire, alors que les autres ne présentent aucun signe d'endommagement. Le désaccordage induit beaucoup de changements sur la dynamique des roues aubagées par rapport à la configuration à symétrie cyclique. Nous allons nous pencher dans ce qui suit sur les phénomènes induits par le désaccordage tels que le dédoublement des fréquences de résonance, la localisation de modes, l'amplification de la réponse maximale et la stabilisation aéroélastique.

### 1.3.1 Effets sur la réponse forcée

De nombreux travaux (voir par exemple Ewins [29], Wei et Pierre [106], Hodges [42], Bendiksen [7], Pierre et Dowell [78]) ont été effectués pour la compréhension de la physique du phénomène de localisation des réponses vibratoires (voir figure 1.1). A cet effet, il est montré dans (Hodges [42], Bendiksen [7], Pierre et Dowell [78]) que ce phénomène apparaît pour les structures désaccordées avec un faible niveau de couplage entre les aubes. La forme des réponses localisées dépend du ratio entre le niveau de désaccordage et le niveau de couplage inter-aubes. Dans le cas d'un couplage fort, même si la cyclicité de la structure est détruite par un faible désaccordage, aucun changement significatif n'apparaît au niveau de la déformée globale de la roue. Par contre, si le couplage est faible, la réponse vibratoire de la roue aubagée change complètement en présence de désaccordage et devient fortement localisée.



**FIG. 1.1:** Visualisation du phénomène de localisation : Roue aubagée de turbomachine accordée (figure gauche) et désaccordée (figure droite). [source Siemens]

Les réponses localisées sont constituées d'une série de modes à diamètres proches fréquentiellement. Ainsi, les roues aubagées à forte densité modale sont plus sensibles au phénomène de localisation de la réponse vibratoire que celles présentant une faible densité modale, car tous les modes accordés situés dans une plage d'excitation donnée sont excités, à des niveaux différents, en présence de désaccordage. En effet, pour une structure à symétrie cyclique, l'excitabilité des modes est régie par deux conditions : une condition fréquentielle (fréquence d'excitation = fréquence du mode), et une condition d'appropriation ( $h_{\Omega} \pm n = kN$ ). Par contre, pour une structure désaccordée, l'excitabilité des modes n'est régie que par la condition fréquentielle. De plus, dans (Ewins [30], Ewins et Han [34]), des études sur les propriétés des structures accordées et

désaccordées ont montré que les modes doubles à diamètres des roues aubagées se scindent en modes de fréquences différentes du fait du désaccordage. Cela a notamment pour conséquence l'apparition de nombreux nouveaux pics dans le spectre fréquentiel de réponse de la structure.

Lorsque la structure désaccordée est excitée, l'énergie de vibration engendrée peut alors être concentrée sur quelques aubes, entraînant l'apparition de niveaux de contraintes bien au dessus de ceux prédits sur la structure accordée correspondante. Dans la littérature, on peut d'ailleurs voir des niveaux d'amplification de la réponse forcée de l'ordre de 2, pour des fluctuations de seulement 1 à 2% des fréquences propres des aubes. Le niveau d'amplification ou facteur d'amplification définit le rapport entre la plus grande amplitude de vibration de la roue aubagée désaccordée et celle de la roue aubagée accordée.

De nombreuses recherches ont été menées pour déterminer le niveau maximal d'amplification possible, quelle que soit la roue aubagée considérée. La première recherche a été publiée par Whitehead ([107]) montrant, sur la base de modèles simplifiés, que ce facteur maximum d'amplification dynamique est majoré par  $\frac{1+\sqrt{N}}{2}$ ,  $N$  étant le nombre d'aubes de la roue. Cependant, des recherches plus récentes basées sur des modèles numériques ont montré que ce facteur pouvait être dépassé (voir par exemple Xiao *et al.* [109]). Ce niveau maximum d'amplification est aussi fortement dépendant de la géométrie de la roue et des conditions d'excitation.

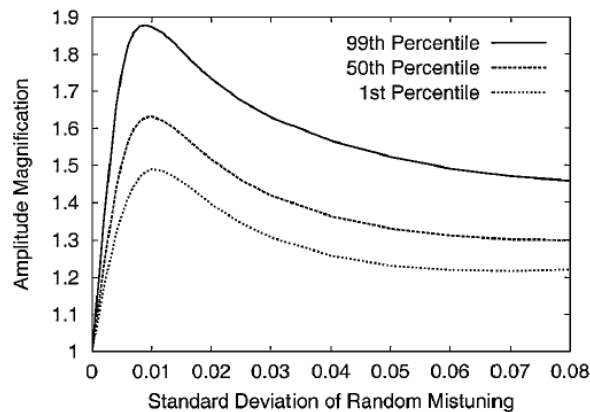
### 1.3.2 Effets sur la stabilité aéroélastique

Le désaccordage revêt une importance particulière en stabilité aéroélastique, car il peut avoir dans certaines conditions, des effets stabilisants sur le phénomène de flottement (Imregun et Ewins [44], Kaza et Kielb [49, 50, 51], Crawley et Hall [24], Shapiro [92], Sladojevic *et al.* [94], Martel *et al.* [60]). Le flottement est une instabilité dynamique résultant du couplage entre un écoulement instationnaire et des modes de vibration de la structure et se traduisant par des oscillations de la structure d'amplitude non décroissante, pouvant conduire à une ruine par fatigue vibratoire. Au niveau de certaines roues aubagées désaccordées involontairement par les tolérances de fabrication et les variabilités des propriétés des matériaux, la stabilité dynamique du système est fortement modifiée. Pour les structures désaccordées faiblement couplées, le mécanisme de stabilisation est sensible aux faibles variations des propriétés structurales des aubes qui peuvent alors avoir des effets de premier ordre sur les frontières de flottement.

Notons toutefois que le désaccordage n'est pas toujours stabilisant pour les roues aubagées. En effet, de très nombreux paramètres tels que le régime de fonctionnement, le nombre de Mach, la position du choc dans un écoulement transonique ou supersonique, le couplage structural, etc. interviennent sur la stabilité aéroélastique. D'ailleurs, dans (Kaza et Kielb [50]), il est montré que la stabilité aéroélastique est souvent très affectée par le désaccordage, et que cet effet peut être bénéfique ou néfaste, suivant les caractéristiques du désaccordage, le couplage structural, et les conditions d'écoulement du fluide.

## 1.4 Sensibilité de la réponse forcée vis-à-vis du désaccordage involontaire

De nombreuses études statistiques dites paramétriques, utilisant l'écart type sur les raideurs ou les fréquences des aubes comme mesure du désaccordage ont montré que l'évolution de l'amplification de la réponse de la roue aubagée en fonction du désaccordage présente un pic à des niveaux de désaccordage relativement faibles (voir par exemple Ewins [29], MacBain et Whaley [59], Wei et Pierre [105], Ottarson et Pierre [76], Castanier et Pierre [20], El-Bayoumi et Srinivasan [28], Basu et Griffin [4], Sinha et Chen [93], Mignolet et Lin [65]). Cela dit, l'amplification de la réponse ne croît avec le niveau de désaccordage que jusqu'à un certain niveau et tend à décroître par la suite. La figure 1.2 illustre ce phénomène.



**FIG. 1.2:** Estimation statistique de l'amplification de la réponse en fonction de l'écart type d'un désaccordage aléatoire pour un rotor de compresseur industriel. Extrait de Castanier et Pierre ([18]).

Ce phénomène a également été montré dans le cadre d'une étude plus complète dite non-paramétrique, qui en plus des dispersions sur les fréquences modales, prend également en compte les dispersions sur les formes modales (Capiez-Lernout *et al.* [16], [17], [15]).

Le comportement de la courbe d'amplification de la réponse reflète un haut niveau de sensibilité de la structure quasi-périodique. Lorsqu'on s'éloigne significativement de la configuration quasi-périodique par élévation du niveau de désaccordage (c'est-à-dire lorsqu'on s'éloigne du niveau maximum d'amplification de la réponse), la structure a tendance à devenir de moins en moins sensible au désaccordage.

### 1.4.1 Interprétation du phénomène de sensibilité de la réponse forcée

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la réponse forcée croît rapidement avec le désaccordage jusqu'à un certain niveau, puis commence à décroître légèrement. Pour expliquer ce phénomène, une approche énergétique est utilisée dans (Ottarson et Pierre [76]). Dans cette



approche, l'énergie fournie par les forces d'excitation et l'énergie fournie via le couplage par le disque et provenant de la vibration des autres aubes sont les deux types d'énergie de vibration que l'on retrouve au niveau des aubes (Lim *et al.* [56]). En absence de couplage inter-aubes, les aubes vibrent indépendamment. L'énergie fournie à une aube isolée se limite alors à la contribution des forces d'excitation et est retenue au niveau de celle-ci. Dans ce cas, une aube découplée des autres ne peut récupérer de l'énergie des aubes adjacentes et donc ne peut pas répondre avec des amplitudes plus élevées. En présence de couplage inter-aubes, un canal énergétique s'ouvre entre les aubes, qui peuvent dès lors échanger de l'énergie. C'est ce qui se passe en réalité, car les aubes sont toujours couplées par le disque qui n'est jamais infiniment rigide. De ce fait, dès qu'une aube de l'assemblage est excitée, les autres participent également au mouvement de vibration.

En considérant la réponse forcée d'une aube donnée comme une superposition d'ondes se déplaçant sur la circonférence du disque à différentes vitesses, il est donné dans (Mignolet et Lin [65]) une interprétation du phénomène de localisation des modes par analogie avec la théorie géométrique de la propagation des ondes.

Il est également montré dans (Lim *et al.* [56]) que lorsque deux aubes adjacentes sont de fréquences différentes, l'énergie échangée par couplage décroît lorsque la différence de fréquence croît.

#### **1.4.2 Conséquences de la sensibilité de la réponse forcée**

L'analyse faite du phénomène de sensibilité de la réponse forcée par rapport au niveau de désaccordage nous amène sur le plan industriel, à tirer deux conclusions :

- Tout d'abord, réduire les tolérances de fabrication pour réduire le désaccordage involontaire pourrait entraîner une hausse des niveaux de réponse des roues aubagées, dans le sens où réduire le niveau de désaccordage involontaire n'est pas forcément synonyme de réduire le niveau de la réponse forcée. En effet, si les tolérances de fabrication engendrent un niveau d'amplification se situant sur la partie descendante de la courbe d'amplification de la réponse, leur réduction pourrait rapprocher le niveau d'amplification de son pic, et donc amplifier les vibrations de la roue aubagée.
- Ensuite, nous avons vu que pour les faibles valeurs de désaccordage, la réponse varie fortement pour de très faibles variations du niveau de désaccordage et que cela confirme la forte sensibilité des structures accordées par rapport au désaccordage involontaire. Il serait donc préférable pour une conception robuste, d'avoir une configuration qui soit la moins sensible possible aux effets néfastes du désaccordage involontaire, et dont le niveau d'amplification de la réponse se situe en aval du pic d'amplification. Ainsi, plutôt que de mettre en place des structures dont toutes les aubes sont identiques, on pourrait envisager des configurations pour lesquelles les aubes seraient différentes à des niveaux fixés par le concepteur qui choisirait alors le type de répartition de ces aubes sur le disque, afin de se

positionner en aval du pic d'amplification de la réponse : on parle alors de désaccordage intentionnel.

De nombreuses recherches ont d'ailleurs été faites sur l'utilisation du désaccordage intentionnel, avec pour objectif de trouver les configurations les plus robustes minimisant la réponse des aubages.

## 1.5 Désaccordage intentionnel pour améliorer l'aéromécanique des roues

Les effets néfastes du désaccordage involontaire inhérent au processus de fabrication ont poussé les chercheurs à imaginer différentes stratégies de réduction de la réponse forcée des aubes et/ou de stabilisation vis-à-vis de phénomènes tels que le flottement. Parmi ces stratégies, l'utilisation du désaccordage intentionnel occupe une place de choix, puisque c'est une technique qui est adaptée à tout type de roue aubagée, contrairement à d'autres techniques telles que l'utilisation des frotteurs pour introduire de l'amortissement, qui elle n'est adaptée qu'aux roues aubagées à aubes rapportées. Ainsi, l'allure des courbes d'amplification de la réponse en fonction du niveau de désaccordage a poussé les chercheurs à s'interroger sur la possibilité d'introduire un désaccordage intentionnel pour réduire les effets du désaccordage involontaire.

### 1.5.1 Utilisation pour la réduction de la réponse forcée

La première étude reconnaissant les effets bénéfiques du désaccordage intentionnel sur la réponse forcée des roues aubagées fut celle publiée par Ewins ([29]). Plusieurs travaux ont ensuite été publiés sur ce thème, aboutissant à des configurations réduisant de façon plus ou moins conséquente les niveaux de réponse (voir par exemple Choi *et al.* [22], Ewins [32], Griffin et Hoosac [38], Rzadkowski [82], Castanier et pierre [18], Jones et Cross [48], Petrov *et al.* [77], Lim *et al.* [56], Ayers *et al.* [3]).

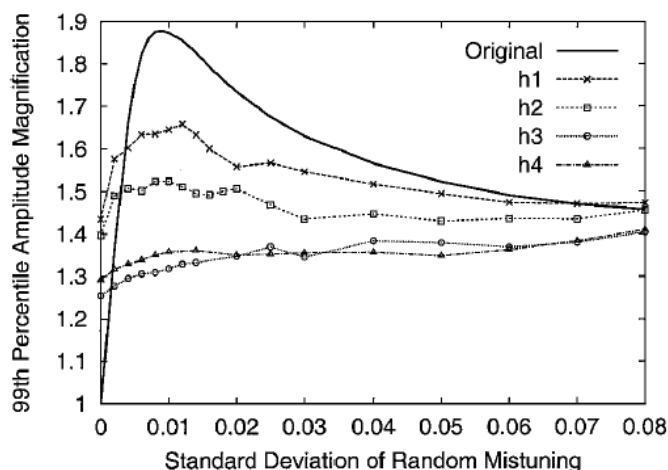
Sur une roue aubagée désaccordée, la répartition des différentes aubes sur le disque est d'une importance capitale sur le comportement dynamique de la structure. En effet, dans (Petrov et Ewins [77]), il est montré sur une roue aubagée désaccordée à 92 aubes, en effectuant simplement des permutations d'aubes, que l'amplification de la réponse forcée peut avoir des valeurs inférieures à 2 pour le meilleur arrangement, et supérieures à 4 pour l'arrangement le plus défavorable. Cela a d'ailleurs été confirmé dans (Ayers *et al.* [3]).

Ce rôle important joué par les positions relatives des différentes aubes a poussé les chercheurs à orienter leurs investigations vers la recherche de configurations de répartition d'aubes différentes réduisant les niveaux de vibration des roues désaccordées intentionnellement. Ainsi en 1984, Griffin et Hoosac ([38]), en alternant des aubes de fortes et de faibles fréquences de résonance ont réussi à réduire légèrement la réponse forcée. Au début des années 1990, Rzadowski, par la recherche de la configuration optimale qui minimise le niveau de contraintes, montra



dans (Rzadkowski [82]) que les configurations avec des motifs répétitifs d'aubes sont les plus favorables à la minimisation de la réponse forcée.

Un exemple d'utilisation du désaccordage intentionnel sur une roue aubagée désaccordée involontairement, afin de réduire l'amplification de la réponse forcée est montré sur la figure 1.3. On y voit notamment des configurations de répartition (h1, h2, h3, h4) réduisant l'influence du désaccordage involontaire sur le niveau de réponse vibratoire.



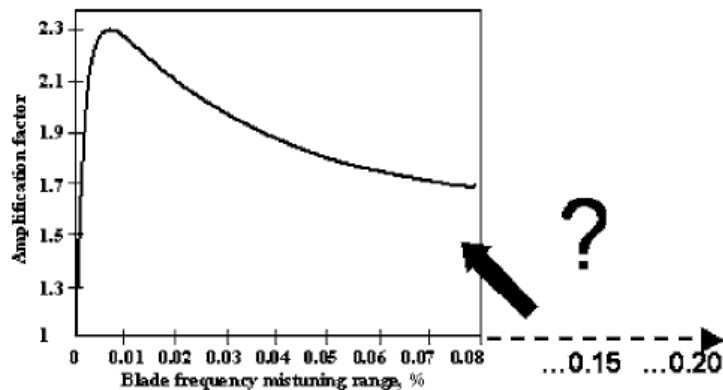
**FIG. 1.3:** Estimations statistiques de l'amplification de la réponse forcée en fonction de l'écart-type du désaccordage aléatoire d'une roue aubagée de compresseur industriel à 29 aubes, avec désaccordage intentionnel. Extrait de Castanier et Pierre ([18]).

Par ailleurs, le concept de fort niveau de désaccordage intentionnel (large detuning) a également été étudié (Nikolic *et al.* [71]). Habituellement, les niveaux de désaccordage intentionnel étudiés sont assez faibles (inférieurs à 10% en fréquence). L'idée de ce concept est d'exploiter à l'extrême la décroissance de la courbe d'évolution de l'amplification de la réponse en fonction du désaccordage, en étudiant l'effet des niveaux de désaccordage intentionnels pouvant aller jusqu'à 20% ou plus (cf. figure 1.4).

### 1.5.2 Utilisation pour l'amélioration de la stabilité aéroélastique

Sur les roues aubagées réelles, les aubes ne sont jamais identiques (du fait du désaccordage involontaire). Cela entraîne des différences au niveau des fréquences de vibration de chacune des aubes. Ces différences peuvent alors avoir des effets bénéfiques sur la stabilité. En effet, pour les problèmes d'interaction fluide léger - structure, les harmoniques des efforts du fluide léger ne sont pas négligeables au voisinage des fréquences de résonance de la structure devant les efforts élastiques ou d'inertie qui dès lors se compensent.

Ainsi, en présence de résonances proches, un fort couplage entre modes voisins apparaît et joue un rôle prépondérant sur la stabilité. En séparant volontairement les fréquences par le



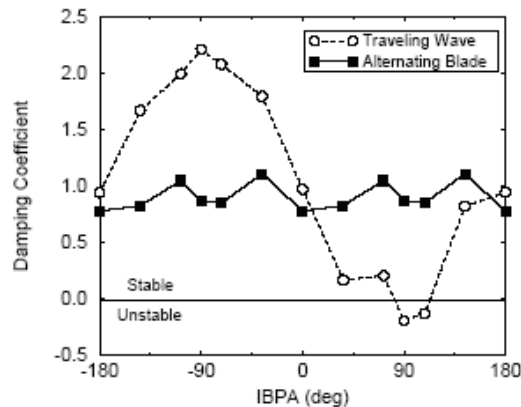
**FIG. 1.4:** Concept de fort niveau de désaccordage intentionnel. Extrait de Nikolic *et al.* ([71]).

désaccordage, le couplage entre modes voisins peut devenir faible et entraîner une augmentation de la marge à la stabilité. Cela a d'ailleurs été constaté par Kaza et Kielb ([49]). En étudiant les effets du désaccordage involontaire sur un mode couplé flexion-torsion et sur un mode de torsion isolé, ils ont constaté une élévation de la vitesse de flottement avec l'augmentation du niveau de désaccordage sur les vibrations auto-excités.

Une autre étude mettant en évidence ce phénomène de stabilisation est celle de Imregun et Ewins ([44]). Celle-ci a été effectuée en régimes subsonique et supersonique, et a permis de voir que les désaccordages involontaire et intentionnel (par alternance d'aubes de fréquences différentes) ont des effets stabilisants sur les modes à faible amortissement aérodynamique, au détriment des modes qui à l'origine étaient fortement amortis. Cela a d'ailleurs été confirmé numériquement et expérimentalement par Nowinski et Panovsky ([72]) sur un mode de torsion d'une turbine BP (basse pression). Leurs travaux ont mis en évidence le fait que le désaccordage intentionnel par alternance d'aubes de fréquences différentes réduit la dépendance des coefficients d'amortissement aérodynamiques vis-à-vis de l'angle de déphasage inter-aubes (IBPA) et influence fortement la stabilité du système. Ce phénomène peut d'ailleurs être observé sur la figure 1.5.

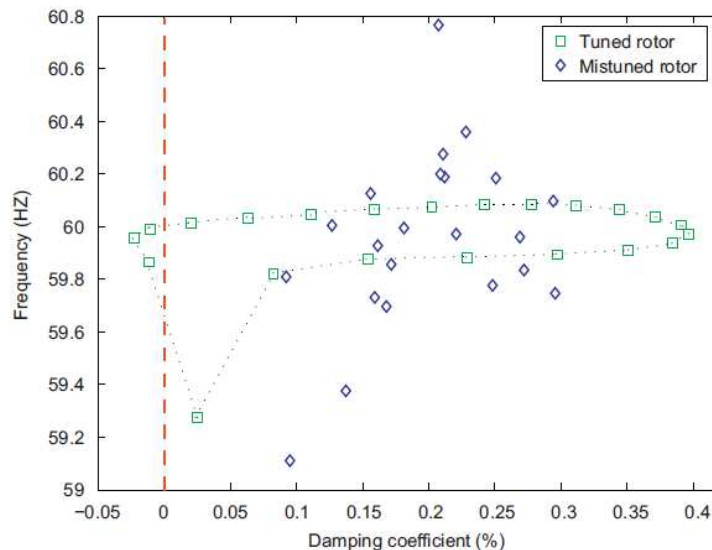
En effet, en étudiant l'influence des aubes les unes sur les autres, Nowinski et Panovsky ont constaté que pour une aube donnée, les deux aubes adjacentes avaient les coefficients d'influence les plus élevés. Ainsi, en alternant des aubes de fréquences différentes, lorsqu'une aube est excitée, les deux aubes adjacentes étant de fréquences différentes, tout se passe comme si elles étaient immobilisées, et cela réduit alors leur contribution à l'instabilité ou à la stabilité. Dans ces conditions, il n'est pas étonnant de voir un aplatissement de la courbe d'évolution de l'amortissement global de la roue autour de sa valeur moyenne, puisqu'aussi bien l'instabilité que la stabilité ont été réduites.

La figure 1.5 montre notamment un aplatissement de la courbe d'évolution du coefficient d'amortissement en fonction du déphasage, traduisant un gain en stabilité des modes critiques,



**FIG. 1.5:** Effets du désaccordage sur l'amortissement aérodynamique du premier mode de torsion d'une turbine BP. Extrait de Nowinski et Panovsky ([72]).

au détriment des modes fortement amortis, tout en gardant un amortissement global élevé du système. L'aplatissement des niveaux d'amortissement a également été montré dans (Seinturier *et al.* [90]) et dans (Salhi *et al.* [83]), comme on peut le voir sur la figure 1.6.



**FIG. 1.6:** Effets du désaccordage sur l'amortissement aérodynamique d'un modèle de roue aubagée. Extrait de Salhi *et al.* ([83])

## 1.6 Conclusion

Les structures à symétrie cyclique sont très sensibles au phénomène de désaccordage involontaire. En présence de désaccordage involontaire, leur comportement se traduit par une séparation des fréquences propres des modes doubles, une excitation de tous les modes situés dans la bande

d'excitation, une localisation spatiale des réponses, une amplification de la réponse dynamique de certaines aubes et une modification des caractéristiques de stabilité.

En présence de désaccordage involontaire, la raideur de couplage inter-aubes et le niveau de désaccordage sont les paramètres les plus influents sur la dynamique du système. D'ailleurs, la réponse forcée de ces structures est très sensible au niveau de désaccordage, surtout dans le domaine des faibles variations de fréquences. Par conséquent, réduire le niveau des tolérances de fabrication n'est pas forcément synonyme de réduction du niveau de sensibilité de ces structures.

Une des solutions pour palier à ce problème de sensibilité et optimiser par la même occasion les niveaux de réponse et la stabilité est de s'éloigner de la configuration de structure quasi-cyclique, par introduction d'un désaccordage intentionnel. Ce nouvel axe de recherche a déjà fourni des résultats assez prometteurs, aussi bien sur la réponse forcée que sur la stabilité aéroélastique des modèles de roue aubagée.

L'étude bibliographique menée montre la complexité de la problématique du désaccordage des roues aubagées et les avancées faites au niveau de la compréhension de la physique du phénomène. Ainsi, le prochain défi sera notamment de donner un sens pratique à cette capitalisation de connaissances, pour aboutir sur des applications industrielles à l'optimisation du comportement dynamique des roues aubagées fabriquées.

## 1. Positionnement scientifique du désaccordage involontaire et intentionnel en aéromécanique des roues aubagées

---

## Chapitre 2

# Formulation du problème aéromécanique

*Dans ce deuxième chapitre, nous effectuons la formulation déterministe du problème aéromécanique couplé. Nous proposons également et validons une nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées réelles désaccordées géométriquement.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Description des systèmes mécaniques étudiés</b>	<b>27</b>
2.2.1	Système mécanique à symétrie cyclique	27
2.2.2	Système mécanique avec structure désaccordée intentionnellement	27
<b>2.3</b>	<b>Modèle dynamique du système avec structure accordée</b>	<b>28</b>
2.3.1	Équation de la dynamique du système accordé	28
2.3.2	Structure matricielle dans les repères locaux associés aux secteurs	29
2.3.3	Transformée de Fourier discrète et passage au repère global	30
2.3.4	Problème aux valeurs propres de la structure accordée	31
<b>2.4</b>	<b>Modèle dynamique du système avec structure désaccordée intentionnellement</b>	<b>32</b>
<b>2.5</b>	<b>Formulation d'une nouvelle méthode de réduction de modèles</b>	<b>34</b>
2.5.1	Base de projection formée des modes élastiques des différents types de secteurs de la roue aubagée	34
2.5.2	Réduction du modèle dynamique du système désaccordé	38
2.5.3	Cas particulier d'un amortissement structural par taux de dissipation modale	40
<b>2.6</b>	<b>Validation de la nouvelle méthode de réduction de modèles sur un cas réel</b>	<b>41</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>47</b>

---

### 2.1 Introduction

Nous nous intéressons à la dynamique d'une structure tournante à symétrie cyclique ou désaccordée, en présence des forces aérodynamiques instationnaires induites par le couplage fluide-structure, le système couplé considéré étant déterministe.

Pour les structures accordées, couplées avec l'aérodynamique instationnaire, la formulation du problème dynamique est faite sur le secteur générateur. La dynamique de la roue complète couplée avec l'écoulement est alors reconstruite par transformation linéaire en utilisant les déphasages entre secteurs.

Dans le cas des structures désaccordées, on ne peut plus parler de secteur générateur pour la structure. La formulation des équations de la dynamique du système couplé passe alors par une formulation des équations de la dynamique du système pour la roue complète.

Le modèle numérique de la structure est construit à l'aide de la méthode des éléments finis. Pour réduire les temps de calcul, plusieurs méthodes de réduction de modèle sont proposées dans la littérature. En général, les modèles réduits sont obtenus par sous-structuration dynamique en décomposant la roue aubagée en disque et aubes, car cela facilite l'implémentation du désaccordage en fréquence des aubes (voir par exemple Benfield et Hruda [8], Bladh *et al.* [12, 13, 11, 14], Castanier *et al.* [21]). Une autre approche (Yang et Griffin [110]) nommée SNM ("Subset of Nominal Modes") utilisant les modes cycliques du secteur constitué de son aube et d'une partie du disque a été proposée pour la réduction des modèles. Il a été démontré dans (Moyroud *et al.* [68]) que cette approche est très efficace pour les configurations désaccordées fréquemment, c'est à dire pour le désaccordage obtenu en modifiant les propriétés mécaniques du matériau (en général le module d'Young du matériau supposé isotrope). Une telle approche nécessite moins de modes dans la base de projection que les méthodes classiques de sous-structuration dynamique, donc consomme moins de temps de calcul. Toutefois, cette approche ne permet pas de résoudre le problème de désaccordage par modification géométrique des aubes (voir annexe B). En effet, dans ce cas de figure, les modes du secteur de la structure accordée sont calculés sur un maillage éléments finis lié à leur propre géométrie, tandis que les modifications de masse et de rigidité découlant de la modification géométrique de certaines aubes sont construites sur un autre maillage éléments finis qui est en général incompatible avec celui de la géométrie nominale. Par conséquent, cette incompatibilité de maillages peut introduire des erreurs très importantes lors de la projection des matrices de masse et de rigidité modifiées sur les modes du secteur de la structure accordée nominale (voir annexe A).

Lorsque les modifications de géométrie sont petites, c'est à dire peuvent être considérées comme de petites perturbations de la géométrie nominale, alors la méthode des perturbations peut être envisagée (voir par exemple Irwanto *et al.* [45], Dailey [25], Ojalvo [75]), tout en notant que ces méthodes nécessitent en plus des données sur les matrices et les modes, des données sur les géométries initiales et sur les géométries modifiées. Cela permet notamment d'approximer les modes de la géométrie modifiée à partir des modes de la géométrie initiale et du changement de forme des aubes dû aux modifications géométriques. Ces méthodes sont donc intrusives

vis-à-vis du logiciel de calcul des modes de la structure et sont limitées à des petites perturbations géométriques. Dans la présente recherche, les modifications géométriques peuvent être importantes et donc la méthode de perturbations ne s'applique pas.

Dans le cadre des objectifs de cette recherche, le code commercial ANSYS est utilisé pour calculer les modes cycliques du secteur de la roue aubagée accordée. Par conséquent, les méthodes usuelles de prise en compte d'incompatibilités des maillages éléments finis ne peuvent pas être utilisées, car elles nécessiteraient des développements informatiques intrusifs dans le logiciel ANSYS, ce qui ne correspond pas au cadre spécifié de cette recherche.

Nous proposons ici une nouvelle méthode générale de réduction de modèle, de la classe de la méthode SNM, qui s'applique entre autre au cas des structures désaccordées géométriquement. Pour ce faire, nous formulons et validons cette nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées géométriquement qui est basée sur l'utilisation des modes cycliques des différents types de secteurs de la structure désaccordée (Mbaye *et al.* [61, 63, 62, 64]). Ces modes sont obtenus par simple analyse modale de chaque type de secteur en configuration de symétrie cyclique. La base de projection est ainsi composée d'une réunion des modes cycliques des différents types de secteurs qui composent la roue. De plus, elle est construite de telle sorte qu'au niveau de la structure complète, les matrices des différents secteurs sont projetées sur leurs propres modes cycliques lors du passage au problème généralisé.

Il est à noter que le désaccordage géométrique étant fait sur les aubes, le disque reste à géométrie cyclique et donc les maillages sur les interfaces des secteurs de disque sont compatibles.

## 2.2 Description des systèmes mécaniques étudiés

### 2.2.1 Système mécanique à symétrie cyclique

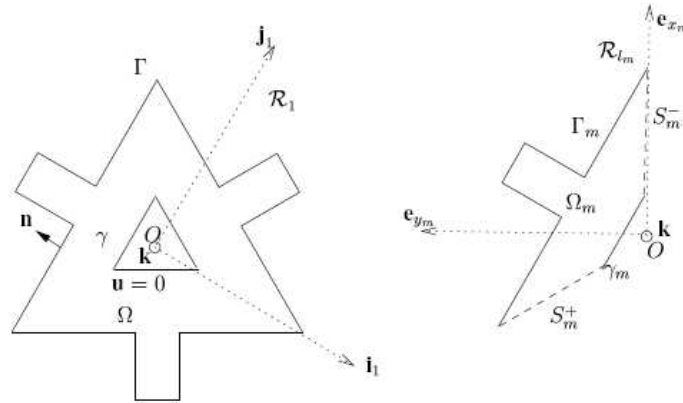
On considère le système mécanique constitué d'une structure tournante couplée à un écoulement fluide. La configuration de référence de la structure dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$  est le domaine  $\Omega$ . L'axe de rotation de la structure tournante est  $(O, \mathbf{k})$ . Le bord du domaine  $\Omega$  est constitué par les frontières  $\gamma$  à l'intérieur et  $\Gamma$  à l'extérieur et possède une symétrie cyclique d'ordre  $N$  et d'axe  $(O, \mathbf{k})$ . La structure est encastrée au niveau de sa frontière intérieure  $\gamma$ . La structure cyclique est obtenue à partir d'un secteur générateur (voir figure 2.1).

Soit  $\Omega_0$  le secteur générateur du domaine  $\Omega$ . Chaque secteur  $\Omega_m$  est déduit du secteur  $\Omega_0$  par  $m$  rotations successives d'angle  $2\pi/N$  et d'axe  $(O, \mathbf{k})$ . Il est à noter que l'axe de rotation de la structure est supposé confondu avec l'axe de la symétrie cyclique de la structure.

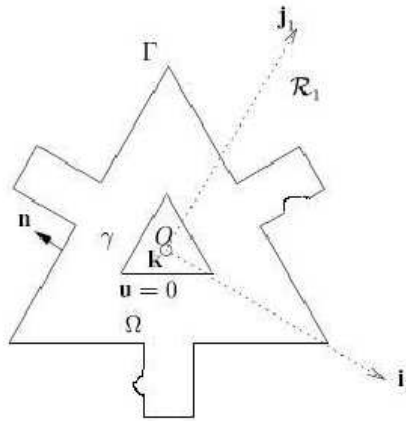
### 2.2.2 Système mécanique avec structure désaccordée intentionnellement

La structure désaccordée intentionnellement est construite de telle sorte que sa partie disque est identique à celle de la structure à symétrie cyclique. Nous ne considérons donc que les cas de désaccordage intentionnel où seules les aubes sont différentes (voir figure 2.2).





**FIG. 2.1:** Structure à symétrie cyclique avec 3 secteurs (figure gauche). Secteur générateur de la structure (figure droite). Extrait de Capiez-Lernout [15].



**FIG. 2.2:** Structure désaccordée géométriquement avec 3 secteurs faisant intervenir 3 types d'aubes (figure gauche).

## 2.3 Modèle dynamique du système avec structure accordée

### 2.3.1 Équation de la dynamique du système accordé

Nous considérons un modèle éléments finis de la structure à symétrie cyclique et sans déplacements de corps rigide, couplée avec l'aérodynamique instationnaire. Dans la bande fréquentielle  $\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}]$ ,  $0 < \omega_{min} < \omega_{max}$ , l'équation de la dynamique du système accordé couplé, formulée dans le domaine fréquentiel, s'écrit

$$(-\omega^2 [\underline{M}_{acc}] + i\omega [\underline{D}_{acc}] + [\underline{K}_{acc}]) \underline{\mathbf{u}}_{acc}(\omega) = \underline{\mathbf{f}}_{ext}(\omega) + \underline{\mathbf{f}}_{aero}(\omega, \underline{\mathbf{u}}_{acc}(\omega)) \quad . \quad (2.1)$$

$i^2 = -1$

$\omega$  : fréquence

$\mathbf{f}_{ext}$  : vecteur des forces d'excitation s'exerçant sur la structure dues aux distorsions de flux de l'écoulement fluide dans les repères locaux liés aux secteurs

$\mathbf{f}_{aero}$  : vecteur des forces aérodynamiques instationnaires de couplage fluide-structure dues aux vibrations des aubes dans les repères locaux liés aux secteurs

$\mathbf{u}_{acc}$  : vecteur complexe des déplacements de la structure complète accordée dans les repères locaux liés aux secteurs

$[M_{acc}]$  : matrice réelle définie positive de masse de la structure complète accordée

$[D_{acc}]$  : matrice réelle définie positive de dissipation de la structure complète accordée

$[K_{acc}]$  : matrice réelle définie positive de rigidité de la structure complète accordée

En introduisant la matrice de rigidité dynamique  $[E_{acc}(\omega)] = -\omega^2[M_{acc}] + i\omega[D_{acc}] + [K_{acc}]$ , l'équation (2.1) devient

$$[E_{acc}(\omega)]\mathbf{u}_{acc}(\omega) = \mathbf{f}_{ext}(\omega) + \mathbf{f}_{aero}(\omega, \mathbf{u}_{acc}(\omega)) \quad . \quad (2.2)$$

### 2.3.2 Structure matricielle dans les repères locaux associés aux secteurs

Pour alléger l'écriture, nous supprimons la dépendance de la fréquence  $\omega$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. A la fréquence  $\omega$ , la matrice de rigidité dynamique  $[E_{acc}]$  est exprimée dans les repères locaux tournants ( $\mathcal{R}_{l_m}$ ) associés aux différents secteurs  $\Omega_m$  de la structure accordée. Ainsi, cette matrice se présente sous la forme

$$[E_{acc}] = \begin{bmatrix} [E_{acc}]^{0,0} & \dots & [E_{acc}]^{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [E_{acc}]^{N-1,0} & \dots & [E_{acc}]^{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad , \quad (2.3)$$

$N$  : nombre d'aubes de la roue

où  $[E_{acc}]_{ij}^{m,m'}$  est l'élément de la matrice  $[E_{acc}]$  situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  du bloc matriciel  $[E]^{m,m'}$ .

Puisque chaque secteur  $\Omega_m$  est adjacent aux secteurs  $\Omega_{m-1}$  et  $\Omega_{m+1}$ , chaque bloc  $[E_{acc}]^{m,m'}$  s'écrit

$$[E_{acc}]^{m,m'} = [E_A]\delta_{m,m'} + [E_B]\delta_{m',[m+1]_N} + [E_B]^T\delta_{m',[m-1]_N} \quad . \quad (2.4)$$

$[m+1]_N$  : reste de la division de  $m+1$  par  $N$

Ainsi, sous forme de blocs matriciels, la matrice de rigidité dynamique s'écrit

$$[E_{acc}] = \begin{bmatrix} [E_A] & [E_B] & [0] & \dots & [0] & [E_B]^T \\ [E_B]^T & [E_A] & [E_B] & [0] & & [0] \\ [0] & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & [0] \\ [0] & & [0] & [E_B]^T & [E_A] & [E_B] \\ [E_B] & [0] & \dots & [0] & [E_B]^T & [E_A] \end{bmatrix} \quad . \quad (2.5)$$

Cette présentation sous forme de matrice circulante par blocs est due au fait que nous considérons par convention que les degrés de liberté relatifs au secteur  $\Omega_m$  sont les degrés de liberté internes et de frontière  $S_m^-$  de ce secteur, à l'exception des degrés de liberté situés sur la frontière  $S_m^+$  (voir figure 2.1). Pour le détail de l'expression des blocs matriciels  $[E_A]$  et  $[E_B]$ , nous renvoyons le lecteur à la référence (Capiez-Lernout [15]).

### 2.3.3 Transformée de Fourier discrète et passage au repère global

On rappelle que l'équation (2.2) représente le problème exprimé dans les repères locaux tournants du modèle éléments finis de la structure accordée. Pour passer du repère global aux repères locaux, on utilise la transformée de Fourier discrète du vecteur des déplacements.

$$\mathbf{u}_{acc}(\omega) = [F] \widehat{\mathbf{u}}_{acc}(\omega) \quad , \quad \widehat{\mathbf{u}}_{acc} = (\widehat{\mathbf{u}}_0, \dots, \widehat{\mathbf{u}}_{N-1}) \quad . \quad (2.6)$$

$\mathbf{u}_{acc}(\omega)$  : vecteur des déplacements de la roue complète accordée dans les repères locaux

$\widehat{\mathbf{u}}_{acc}(\omega)$  : vecteur des déplacements de la roue complète accordée dans le repère global

$[F]$  : matrice de Fourier étendue

La matrice de Fourier étendue est définie par

$$[F] = \begin{bmatrix} \mathbb{f}_{0,0}[I_{\bar{n}}] & \cdots & \mathbb{f}_{0,N-1}[I_{\bar{n}}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{f}_{N-1,0}[I_{\bar{n}}] & \cdots & \mathbb{f}_{N-1,N-1}[I_{\bar{n}}] \end{bmatrix} \quad , \quad (2.7)$$

où

$$\mathbb{f}_{m,m'} = \exp\left(\frac{-2imm'\pi}{N}\right) \quad . \quad (2.8)$$

$[I_{\bar{n}}]$  : matrice identité

$n_{ddl}$  : nombre de degrés de liberté de la roue complète

$\bar{n} = \frac{n_{ddl}}{N}$  : nombre de degrés de liberté du secteur sans les ddl de l'interface de couplege de type  $S_m^+$

Une des propriétés importantes des termes de cette matrice est que

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathbb{f}_{m,n} \bar{\mathbb{f}}_{m,n'} = \delta_{n,n'} \quad . \quad (2.9)$$

De par l'inversibilité de la matrice de Fourier on peut écrire

$$\widehat{\mathbf{u}}_{acc}(\omega) = [F]^{-1} \mathbf{u}_{acc}(\omega) \quad , \quad (2.10)$$

où

$$[F]^{-1} = \frac{1}{N} [F]^* \quad , \quad [F]^* = \{[\bar{F}]\}^T \quad . \quad (2.11)$$

En utilisant les équations (2.2) et (2.10), le problème à résoudre dans le repère global se met sous la forme

$$[\mathbb{F}]^{-1}[\underline{E}_{acc}(\omega)][\mathbb{F}]\widehat{\underline{u}}_{acc}(\omega) = [\mathbb{F}]^{-1}\underline{\mathbf{f}}_{ext}(\omega) + [\mathbb{F}]^{-1}\underline{\mathbf{f}}_{aero}(\omega, [\mathbb{F}]\widehat{\underline{u}}_{acc}(\omega)) \quad . \quad (2.12)$$

Cette équation peut encore s'écrire sous la forme

$$[\widehat{\underline{E}}_{acc}(\omega)]\widehat{\underline{u}}_{acc}(\omega) = \widehat{\underline{\mathbf{f}}}_{ext}(\omega) + \widehat{\underline{\mathbf{f}}}_{aero}(\omega, \widehat{\underline{u}}(\omega)) \quad . \quad (2.13)$$

$[\widehat{\underline{E}}_{acc}(\omega)]$  : matrice de rigidité dynamique de dimension  $(n_{ddl} \times n_{ddl})$  dans le repère global

$\widehat{\underline{\mathbf{f}}}_{ext}(\omega)$  : vecteur des forces d'excitation de dimension  $(n_{ddl} \times 1)$  dans le repère global

$\widehat{\underline{\mathbf{f}}}_{aero}(\omega, \widehat{\underline{u}}(\omega))$  : vecteur des forces de couplage fluide-structure de dimension  $(n_{ddl} \times 1)$  dans le repère global

Ainsi, la matrice de rigidité globale définie par  $[\widehat{\underline{E}}_{acc}(\omega)] = [\mathbb{F}]^{-1}[\underline{E}_{acc}(\omega)][\mathbb{F}]$  dans le repère global se décompose en  $N \times N$  blocs matriciels s'écrivant

$$[\widehat{\underline{E}}_{acc}]^{n,n'} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{N-1} \frac{1}{N} \bar{\mathbb{f}}_{n,m} \mathbb{f}_{n',m'} ([\underline{E}_A] \delta_{m',m} + [\underline{E}_B] \delta_{m',[m+1]_N} + [\underline{E}_B]^T \delta_{m',[m-1]_N}) \quad . \quad (2.14)$$

Chaque bloc matriciel peut alors être écrit en utilisant l'équation (2.9)

$$[\widehat{\underline{E}}_{acc}]^{n,n'} = \delta_{n,n'} ([\underline{E}_A] + [\underline{E}_B] \mathbb{f}_{n,1} + [\underline{E}_B]^T \bar{\mathbb{f}}_{n,1}) \quad . \quad (2.15)$$

On voit alors que la matrice  $[\widehat{\underline{E}}_{acc}(\omega)]$  est diagonale par blocs dans le repère global. Cette propriété de la matrice de rigidité dynamique de la structure cyclique est très importante. En effet, si les forces aérodynamiques instationnaires ont aussi la même propriété de cyclicité, alors les équations de la dynamique se découpent d'un secteur à l'autre, et la résolution sur un secteur permet de reconstruire les déplacements de la roue entière.

### 2.3.4 Problème aux valeurs propres de la structure accordée

Ce problème est considéré sans forces de couplage gyroscopiques et sans couplage avec le fluide et est formulé en exploitant la cyclicité de la structure. Cela permet notamment de déterminer les modes propres de la structure complète en formulant le problème aux valeurs propres sur le secteur générateur du domaine  $\Omega$ .

Le problème aux valeurs propres ( $\mathcal{Q}$ ) associé au système mécanique conservatif s'écrit : trouver  $(\underline{\lambda}, \underline{\hat{\phi}})$  avec  $\underline{\hat{\phi}} \in \mathbb{C}^{n_{ddl}}$  tel que

$$([\widehat{\underline{K}}_{acc}] - \underline{\lambda}[\widehat{\underline{M}}_{acc}])\underline{\hat{\phi}} = 0 \quad . \quad (2.16)$$

## 2. Formulation du problème aéromécanique

---

$\underline{\lambda}$  : valeur propre réelle

$\underline{\phi}$  : vecteur propre complexe

$\mathbb{C}^{n_{ddl}}$  : ensemble des vecteurs complexes de dimension  $n_{ddl}$

Les matrices  $[\widehat{K}_{acc}]$  et  $[\widehat{M}_{acc}]$  étant hermitiennes définies positives, leurs valeurs propres  $\underline{\lambda}$  sont strictement positives. Ces valeurs propres sont alors ordonnées par valeurs croissantes  $0 < \underline{\lambda}_1 \leq \underline{\lambda}_2 \leq \dots$  et les vecteurs propres associés vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$([\widehat{M}_{acc}]\underline{\phi}_\alpha, \underline{\phi}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad ([\widehat{K}_{acc}]\underline{\phi}_\alpha, \underline{\phi}_\beta) = \underline{\lambda}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.17)$$

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{x}$  : produit scalaire hermitien des deux vecteurs

Ce problème spectral ( $\mathcal{Q}$ ) formulé sur la structure complète accordée peut être remplacé par  $N$  sous-problèmes aux valeurs propres découplés notés ( $\mathcal{Q}_m$ ), avec  $m \in \{0, \dots, N-1\}$ , par utilisation de la transformée de Fourier discrète du champ de déplacements, du fait de la cyclicité de la structure.

Chaque sous-problème ( $\mathcal{Q}_m$ ) d'inconnues  $\underline{\lambda}^m$  et  $\underline{\phi}^m$  est alors formulé comme suit : trouver  $(\underline{\lambda}^m, \underline{\phi}^m)$  avec  $\underline{\phi}^m \in \mathbb{C}^{\bar{n}}$  tel que

$$([\widehat{K}^m] - \underline{\lambda}^m [\widehat{M}^m])\underline{\phi}^m = 0 \quad , \quad (2.18)$$

où

$$\underline{\phi}^m = \exp\left(\frac{2im\pi}{N}\right)\underline{\phi}^0 \quad . \quad (2.19)$$

En utilisant les équations (2.18) et (2.19), on montre que  $\widehat{\phi}^{N-m} = \overline{\widehat{\phi}^m}$  et  $\underline{\lambda}^{N-m} = \underline{\lambda}^m$ . On résoudra donc uniquement  $(N/2) + 1$  (si  $N$  est pair) ou  $(N+1)/2$  (si  $N$  est impair) problèmes aux valeurs propres distincts.

Les matrices  $[\widehat{K}^m]$  et  $[\widehat{M}^m]$  étant hermitiennes, définies positives, leurs valeurs propres  $\underline{\lambda}^m$  sont strictement positives. Ces valeurs propres sont alors ordonnées par valeurs croissantes  $0 < \underline{\lambda}_1^m \leq \underline{\lambda}_2^m \leq \dots$  et les vecteurs propres associés, normalisés par rapport à la matrice de masse, sont complexes conjugués et vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$([\widehat{M}^m]\underline{\phi}_\alpha^m, \underline{\phi}_\beta^m) = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad ([\widehat{K}^m]\underline{\phi}_\alpha^m, \underline{\phi}_\beta^m) = \underline{\lambda}_\alpha^m \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.20)$$

### 2.4 Modèle dynamique du système avec structure désaccordée intentionnellement

Nous considérons maintenant le modèle éléments finis de vibrations de la structure désaccordée intentionnellement couplée avec l'aérodynamique instationnaire, le système étant analysé dans

le domaine fréquentiel. Dans la bande fréquentielle  $\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}]$ ,  $0 < \omega_{min} < \omega_{max}$ , l'équation de la dynamique du système désaccordé s'écrit dans les repères locaux liés aux secteurs

$$(-\omega^2[\underline{M}] + i\omega[\underline{D}] + [\underline{K}])\underline{\mathbf{u}}(\omega) = \underline{\mathbf{f}}_{ext}(\omega) + \underline{\mathbf{f}}_{aero}(\omega, \underline{\mathbf{u}}(\omega)) \quad . \quad (2.21)$$

$i^2 = -1$

$\omega$  : fréquence

$\underline{\mathbf{f}}_{ext}$  : vecteur des forces d'excitation s'exerçant sur la structure dues aux distorsions de flux de l'écoulement dans les repères locaux liés aux secteurs

$\underline{\mathbf{f}}_{aero}$  : vecteur des forces aérodynamiques instationnaires de couplage fluide-structure dues aux vibrations des aubes dans les repères locaux liés aux secteurs

$\underline{\mathbf{u}}$  : réunion des déplacements de tous les secteurs à interfaces libres de la structure complète désaccordée dans les repères locaux liés aux secteurs

$[\underline{M}]$  : matrice réelle définie positive de masse de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{D}]$  : matrice réelle définie positive de dissipation de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{K}]$  : matrice réelle définie positive de rigidité de la structure complète désaccordée intentionnellement

Le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}$  désignant la réunion des déplacements de tous les secteurs à interfaces libres de la structure complète désaccordée et non le vecteur des déplacements de la structure complète désaccordée, il contient des degrés de liberté redondants qui correspondent aux degrés de liberté des interfaces entre secteurs consécutifs. A l'équation (2.21), il faut ajouter les relations linéaires de contraintes des déplacements au niveau des interfaces entre secteurs consécutifs. Nous choisissons une formulation consistant à expliciter les relations de contraintes entre le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}_c(\omega)$  des degrés de liberté contraints et le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}_\ell(\omega)$  des degrés de liberté libres sachant que le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}(\omega)$  s'écrit  $\underline{\mathbf{u}}(\omega) = (\underline{\mathbf{u}}_\ell(\omega), \underline{\mathbf{u}}_c(\omega))$ . La relation de contrainte est écrite  $\underline{\mathbf{u}}_c(\omega) = [\underline{B}]\underline{\mathbf{u}}_\ell(\omega)$ , ce qui permet d'obtenir la relation

$$\underline{\mathbf{u}}(\omega) = [\underline{B}]\underline{\mathbf{u}}_\ell(\omega) \quad . \quad (2.22)$$

En introduisant l'opérateur de rigidité dynamique défini par  $[\underline{E}(\omega)] = -\omega^2[\underline{M}] + i\omega[\underline{D}] + [\underline{K}]$ , le système d'équations à résoudre en  $\underline{\mathbf{u}}_\ell(\omega)$  s'écrit alors

$$[\underline{B}]^T [\underline{E}(\omega)] [\underline{B}]\underline{\mathbf{u}}_\ell(\omega) = [\underline{B}]^T (\underline{\mathbf{f}}_{ext}(\omega) + \underline{\mathbf{f}}_{aero}(\omega, [\underline{B}]\underline{\mathbf{u}}_\ell(\omega))) \quad . \quad (2.23)$$

La roue aubagée désaccordée intentionnellement est constituée de  $N$  secteurs. Par conséquent l'opérateur de rigidité dynamique est formé de  $N \times N$  blocs matriciels ayant chacun  $\bar{n} \times \bar{n}$  composants et les vecteurs des déplacements et forces sont formés de  $N$  blocs vectoriels.

$$[\underline{E}] = \begin{pmatrix} [\underline{E}]^0 & \cdots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \cdots & [\underline{E}]^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}^0 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{u}}^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{f}}^0 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{f}}^{N-1} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.24)$$

$\bar{n}$  : nombre de degrés de liberté du secteur avec toutes ses frontières (type  $S_m^+$  et  $S_m^-$ )

$\underline{\mathbf{u}}^m$  : vecteur contenant les déplacements des  $\bar{n}$  degrés de liberté associés au secteur  $m$

Avec cette représentation, comme nous l'avons déjà souligné, les degrés de liberté des interfaces de couplage entre secteurs sont donc dupliqués dans le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}$  et donc  $\bar{n} > \bar{n}$ .

Ainsi, les matrices de masse et de rigidité prennent la forme

$$[\underline{\mathbf{M}}] = \begin{pmatrix} [\underline{\mathbf{M}}]^0 & \cdots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \cdots & [\underline{\mathbf{M}}]^{N-1} \end{pmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{K}}] = \begin{pmatrix} [\underline{\mathbf{K}}]^0 & \cdots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \cdots & [\underline{\mathbf{K}}]^{N-1} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

où

$$[\underline{\mathbf{M}}]^m = \begin{pmatrix} [\underline{\mathbf{M}}_{gg}^m] & [\underline{\mathbf{M}}_{gi}^m] & [0] \\ [\underline{\mathbf{M}}_{gi}^m]^T & [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^m] & [\underline{\mathbf{M}}_{id}^m] \\ [0] & [\underline{\mathbf{M}}_{id}^m]^T & [\underline{\mathbf{M}}_{dd}^m] \end{pmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{K}}]^m = \begin{pmatrix} [\underline{\mathbf{K}}_{gg}^m] & [\underline{\mathbf{K}}_{gi}^m] & [0] \\ [\underline{\mathbf{K}}_{gi}^m]^T & [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^m] & [\underline{\mathbf{K}}_{id}^m] \\ [0] & [\underline{\mathbf{K}}_{id}^m]^T & [\underline{\mathbf{K}}_{dd}^m] \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

$i$  : indice relatif aux degrés de liberté internes au secteur

$g$  : indice relatif aux degrés de liberté de la frontière gauche  $S_m^+$  du secteur  $\Omega_m$

$d$  : indice relatif aux degrés de liberté de la frontière droite  $S_m^-$  du secteur  $\Omega_m$

A ce niveau de l'exposé, les matrices du système sont exprimées dans les repères locaux associés à chaque secteur  $\Omega_m$ ,  $\forall m \in \{0, N-1\}$ .

## 2.5 Formulation d'une nouvelle méthode de réduction de modèles

La réduction de modèle est faite par utilisation d'une base de projection. Cette base de projection peut être formée de modes complexes ou de modes réels suivant la représentation choisie. Nous allons présenter dans ce qui suit la formulation de la méthode de réduction de modèle en utilisant une base de modes réels  $[\hat{\Psi}]$  obtenue à partir des modes complexes de chacun des types de secteurs du modèle.

### 2.5.1 Base de projection formée des modes élastiques des différents types de secteurs de la roue aubagée

Considérons  $t$  différents types d'aubes sur la roue à  $N$  aubes,  $t \leq N$ . Dans la suite, on considère donc  $N$  types d'aube *a priori* différents, sachant que si  $t < N$  il y a au moins une répétition du même type d'aube. Avec une telle convention, chaque secteur  $\Omega_m$  de la roue désaccordée intentionnellement est associé à un type d'aube différent (en rappelant la convention de répétition lorsque  $t < N$ ).

Pour chaque type d'aube associé à  $\Omega_m$  donné, on considère un roue aubagée avec cette aube en géométrie cyclique.

Pour chaque roue cyclique liée au type d'aube associé à  $\Omega_m$ , on calcule les modes en géométrie cyclique. Soient  $\hat{\underline{\Psi}}_1^{\Omega_m}, \dots, \hat{\underline{\Psi}}_{\mathfrak{n}}^{\Omega_m}$  les  $\mathfrak{n}$  modes cycliques, dans le repère globale, de la roue à géométrie cyclique dont le type d'aube est celui du secteur  $\Omega_m$  de la roue désaccordée intentionnellement.

Par la construction de la base de projection, la continuité des déplacements est assurée entre deux secteurs adjacents ayant le même type d'aube, mais n'est pas assurée entre deux secteurs adjacents de types d'aube différents. On rétablira la continuité et la mise en phase des modes entre les secteurs adjacents de types différents dans ce qui suit.

Il est à noter que si toutes les aubes sont du même type, la base de projection intègre la continuité sur les interfaces des secteurs adjacents, ce qui fait que l'équation de contrainte (2.22) est automatiquement satisfaite.

La base de projection se présente dans le repère global sous la forme

$$[\hat{\underline{\Psi}}] = \begin{pmatrix} \hat{\underline{\Psi}}_1^{\Omega_0} & \dots & \hat{\underline{\Psi}}_{\mathfrak{n}}^{\Omega_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\underline{\Psi}}_1^{\Omega_{N-1}} & \dots & \hat{\underline{\Psi}}_{\mathfrak{n}}^{\Omega_{N-1}} \end{pmatrix} . \quad (2.27)$$

$\hat{\underline{\Psi}}_{\alpha}^{\Omega_m}$  : mode propre réel exprimé dans le repère global

$\mathfrak{n}$  : dimension de la base de projection

$\Omega_m$  : domaine représenté par le secteur  $m$  de la roue désaccordée intentionnellement

L'indice  $\alpha$  correspond à un renumérotation du couple d'indices  $(n, v)$  où  $n$  est le nombre de diamètres nodaux du mode et  $v$  le rang du mode pour cette famille de diamètres. Avec cette convention,  $\hat{\underline{\Psi}}_{\alpha}^{\Omega_m}$  est le mode numéro  $\alpha$  associé au secteur  $m$  dans le repère global ayant le type d'aube du domaine  $\Omega_m$  de la roue désaccordée intentionnellement. Ce mode réel est obtenu en utilisant le mode complexe  $\underline{\phi}_{(n,v)}^{0,m} = \tilde{\underline{\phi}}_{(n,v)}^{0,m} + i\tilde{i}\underline{\phi}_{(n,v)}^{0,m}$  exprimé dans le repère local lié au secteur générateur  $\Omega_0$  pour la roue cyclique dont l'aube est celle de  $\Omega_m$ .

$$\hat{\underline{\Psi}}_{(n,v)}^{\Omega_m} = \tilde{\underline{\phi}}_{(n,v)}^{0,m} \cos\left(\frac{2nm\pi}{N}\right) - \tilde{i}\underline{\phi}_{(n,v)}^{0,m} \sin\left(\frac{2nm\pi}{N}\right) . \quad (2.28)$$

### 2.5.1.1 Remise en phase des modes élastiques des différents types de secteurs de la roue aubagée

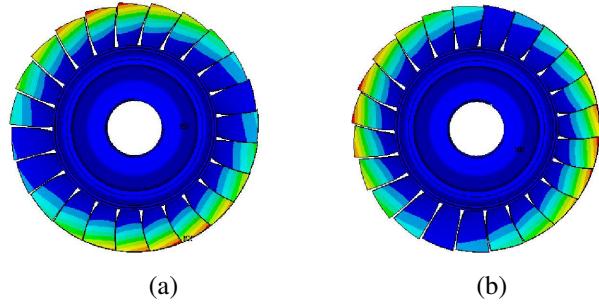
Pour constituer une base de la roue complète désaccordée intentionnellement à partir des modes cycliques des différents secteurs, comme nous l'avons indiqué précédemment, on doit écrire les conditions de continuité et de phase sur les interfaces de secteurs adjacents ayant des aubes de types différents. En effet, comme les modes cycliques de chaque type de secteur sont calculés indépendamment de ceux des autres types de secteurs, des déphasages non cohérents apparaissent entre les modes calculés sur deux types de secteurs différents. Cela se traduit notamment par



## 2. Formulation du problème aéromécanique

---

une rotation des lignes nodales d'un certain angle autour de l'axe de la roue. Un cas de figure est d'ailleurs représenté sur la figure 2.3.



**FIG. 2.3:** Déformées modales obtenues par deux calculs indépendants sur deux types de secteurs différents en symétrie cyclique : premier calcul (a) et second calcul (b).

Pour assurer la bonne cohérence des phases des différents types de secteurs de la roue complète, nous introduisons le paramètre complexe MSF (Modal Scale Factor). Ce paramètre est défini par

$$MSF(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\{\mathbf{x}\}^T \{\bar{\mathbf{y}}\}}{\{\mathbf{x}\}^T \{\bar{\mathbf{x}}\}} \quad , \quad (2.29)$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$  : vecteurs complexes

et son argument ( $\arg MSF(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ) représente le déphasage entre les deux vecteurs complexes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

Dans ces conditions, tout mode  $\underline{\phi}^{ini}$  d'un des calculs indépendants est remis en phase par la formule suivante

$$\underline{\phi} = \frac{MSF(\underline{\phi}^{nom}, \underline{\phi}^{ini})}{|MSF(\underline{\phi}^{nom}, \underline{\phi}^{ini})|} \underline{\phi}^{ini} \quad . \quad (2.30)$$

$\underline{\phi}^{ini}$  : un mode obtenu par un des calculs indépendants

$\underline{\phi}$  : mode correspondant à  $\underline{\phi}^{ini}$  remis en phase par rapport à  $\underline{\phi}^{nom}$

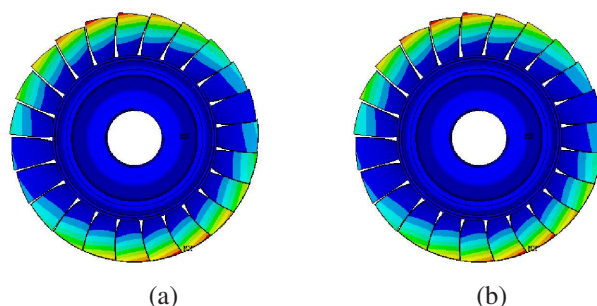
$\underline{\phi}^{nom}$  : mode correspondant à un des calculs indépendants et pris comme référence de phase

$|z|$  : module du nombre complexe  $z$

On peut d'ailleurs vérifier analytiquement que les modes  $\underline{\phi}$  et  $\underline{\phi}^{nom}$  sont en phase :

$$\arg MSF(\underline{\phi}^{nom}, \underline{\phi}) = \frac{\{\underline{\phi}^{nom}\}^T \{\bar{\underline{\phi}}\}}{\{\underline{\phi}^{nom}\}^T \{\bar{\underline{\phi}^{nom}}\}} = \arg |MSF(\underline{\phi}^{nom}, \underline{\phi}^{ini})| = 0 \quad . \quad (2.31)$$

Ainsi, après remise en phase des modes cycliques obtenus par des calculs indépendants, la figure 2.3 conduit à la figure 2.4, sur laquelle les deux modes sont en phase sur la roue complète. Pour une illustration de l'effet de la remise en phase des modes élastiques, nous invitons le lecteur à se référer à l'annexe B qui présente un cas de comparaison sur une roue aubagée académique de la méthode SNM développée dans (Yang et Griffin [110]) et de la nouvelle méthode de réduction de modèles avec et sans remise en phase des modes élastiques des différents types de secteurs.



**FIG. 2.4:** Déformées modales obtenues par deux calculs indépendants sur deux types de secteurs différents en symétrie cyclique après remise phase par usage du MSF : premier calcul (a) et second calcul corrigé (b).

### 2.5.1.2 Continuité des déplacements entre secteurs de la roue aubagée

Pour une bonne résolution de l'équation de la dynamique du système désaccordé intentionnellement par modifications géométriques des aubes, en utilisant la base de projection constituée de modes cycliques des différents types de secteurs, nous devons nous assurer que le vecteur des déplacements est cinématiquement admissible au niveau de la roue complète et par conséquent au niveau des interfaces entre secteurs. Deux conditions sont nécessaires pour que ce vecteur des déplacements soit cinématiquement admissible au niveau des interfaces :

- Une compatibilité des maillages des secteurs adjacents, qui est naturellement assurée, car le disque de la roue aubagée n'est pas géométriquement affecté par les modifications.
- La continuité des déplacements entre secteurs adjacents, qui peut être assurée par imposition de relations de contraintes au niveau des déplacements aux interfaces.

Ces contraintes peuvent être prises en compte dans la résolution des équations de la dynamique en utilisant des multiplicateurs de Lagrange (Voir par exemple Ohayon *et al.* [74]) ou en exprimant directement les relations de contraintes sur les déplacements. C'est cette seconde méthode que nous présentons dans ce manuscrit.

Considérons l'équation (2.21) écrite dans le repère global pour laquelle les contraintes ne sont pas encore spécifiées

$$(-\omega^2[\widehat{M}] + i\omega[\widehat{D}] + [\widehat{K}])\widehat{\mathbf{u}}(\omega) = \widehat{\mathbf{f}}_{ext}(\omega) + \widehat{\mathbf{f}}_{aero}(\omega, \widehat{\mathbf{u}}(\omega)) \quad , \quad (2.32)$$

avec  $\widehat{\mathbf{u}}(\omega) = (\widehat{\mathbf{u}}_\ell(\omega), \widehat{\mathbf{u}}_c(\omega))$  où  $\widehat{\mathbf{u}}_\ell(\omega)$  est le vecteur des degrés de liberté libres dans le repère global et  $\widehat{\mathbf{u}}_c(\omega)$  est le vecteur des degrés de liberté contraints dans le repère global. La relation de contrainte s'écrit donc dans le repère global  $\widehat{\mathbf{u}}_c(\omega) = [\widehat{B}]\widehat{\mathbf{u}}_\ell(\omega)$ , ce qui permet d'obtenir la relation

$$\widehat{\mathbf{u}}(\omega) = [\widehat{B}]\widehat{\mathbf{u}}_\ell(\omega) \quad . \quad (2.33)$$

Pour faire la réduction de modèle sur une base adaptée, en respectant les contraintes, il suffit de projeter  $\widehat{\mathbf{u}}(\omega)$  sur un sous espace qui vérifie les contraintes. Cela signifie qu'il suffit que les vecteurs de base de la projection vérifient ces contraintes.

Les modes contenus dans la base de  $[\widehat{\Psi}]$  ont été remis en phase, mais ne sont pas continus au niveau des degrés de liberté associés aux interfaces entre secteurs, c'est-à-dire ne vérifient pas les contraintes. Nous allons donc construire une nouvelle base de projection  $[\widehat{\Psi}^{proj}]$  à partir des modes de la base  $[\widehat{\Psi}]$  et qui intègre les contraintes de continuité aux interfaces.

Soit  $\widehat{\Psi}_\alpha^{proj}$  une colonne de la nouvelle base  $[\widehat{\Psi}^{proj}]$ . Ce vecteur s'écrit  $\widehat{\Psi}_\alpha^{proj} = ((\widehat{\Psi}_\alpha^{proj})_\ell, (\widehat{\Psi}_\alpha^{proj})_c)$ . La relation de contrainte est écrite  $(\widehat{\Psi}_\alpha^{proj})_c = [\widehat{B}](\widehat{\Psi}_\alpha^{proj})_\ell$ , ce qui permet d'obtenir la relation

$$\widehat{\Psi}_\alpha^{proj} = [\widehat{B}](\widehat{\Psi}_\alpha^{proj})_\ell \quad . \quad (2.34)$$

En générale, les colonnes de la matrice  $[\widehat{\Psi}^{proj}]$  forment une famille de vecteurs algébriquement indépendants. S'il en était pas ainsi, on extrait de  $[\widehat{\Psi}^{proj}]$  la famille maximale indépendante.

## 2.5.2 Réduction du modèle dynamique du système désaccordé

Le vecteur des déplacements peut alors être projeté sur les modes de la base de projection par la relation

$$\widehat{\mathbf{u}}(\omega) = [\widehat{\Psi}^{proj}]\underline{\mathbf{q}}(\omega) \quad . \quad (2.35)$$

$\underline{\mathbf{q}} = (\underline{\mathbf{q}}_1, \dots, \underline{\mathbf{q}}_n)$  : vecteur des coordonnées généralisées

Alors, le problème généralisé découlant de l'équation (2.23) s'écrit

$$[\widehat{E}_{red}(\omega)]\underline{\mathbf{q}}(\omega) = \widehat{\mathbf{g}}_{exc}(\omega) + \widehat{\mathbf{g}}_{aero}(\omega, \underline{\mathbf{q}}(\omega)) \quad . \quad (2.36)$$

*red* : indice désignant la forme réduite des matrices obtenues par projection sur la base modale

$\widehat{\underline{\mathbf{g}}}_{exc}$  : vecteur des forces d'excitation généralisées

$\widehat{\underline{\mathbf{g}}}_{aero}$  : vecteur des forces aérodynamiques généralisées (couplage fluide-structure)

La matrice réduite de rigidité dynamique et les forces généralisées sont définies par

$$[\widehat{\underline{\mathbf{E}}}_{red}(\omega)] = [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]^T [\widehat{\underline{\mathbf{E}}}(\omega)] [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}] \quad , \quad (2.37)$$

$$\widehat{\underline{\mathbf{g}}}_{exc}(\omega) = [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]^T \widehat{\underline{\mathbf{f}}}_{exc}(\omega) \quad , \quad \widehat{\underline{\mathbf{g}}}_{aero}(\omega, \underline{\mathbf{q}}(\omega)) = [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]^T \widehat{\underline{\mathbf{f}}}_{aero}(\omega, [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}] \underline{\mathbf{q}}(\omega)) \quad . \quad (2.38)$$

Avec l'hypothèse de linéarisation de l'aérodynamique instationnaire, nous choisissons la formulation suivante pour les forces aérodynamiques instationnaires de couplage fluide-structure

$$\widehat{\underline{\mathbf{f}}}_{aero}(\omega) = -\frac{1}{2}\rho V^2 [\widehat{\underline{\mathbf{A}}}(\frac{\omega}{V})] \widehat{\underline{\mathbf{u}}}(\omega) \quad , \quad (2.39)$$

où  $[\widehat{\underline{\mathbf{A}}}(\frac{\omega}{V})]$  est la matrice des forces aérodynamiques instationnaires linéarisées,  $\rho$  et  $V$  sont respectivement la masse volumique et la vitesse du fluide (en amont de la roue aubagée, dans le cas d'un compresseur et en aval de la roue aubagée dans le cas d'une turbine).

Les forces aérodynamiques généralisées prennent alors la forme

$$\widehat{\underline{\mathbf{g}}}_{aero}(\omega, \underline{\mathbf{q}}(\omega)) = -[\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}(\omega)] \underline{\mathbf{q}}(\omega) \quad , \quad (2.40)$$

$$[\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}(\omega)] = \frac{1}{2}\rho V^2 [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]^T [\widehat{\underline{\mathbf{A}}}(\frac{\omega}{V})] [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}] = \frac{1}{2}\rho V^2 [\widehat{\underline{\mathbf{A}}}(\frac{\omega}{V})] \quad , \quad (2.41)$$

où  $[\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}(\omega)]$  est la matrice complexe pleine des forces aérodynamiques généralisées, de taille  $m \times m$ ,  $m$  étant le nombre de modes de la base de projection, résultant de l'interaction entre les forces exercées par le fluide sur la structure et les vibrations de celle-ci. La signature de la partie imaginaire de cette matrice renseigne sur le niveau de dissipation ou d'instabilité aéroélastique dû à la présence de l'écoulement fluide. Sa partie réelle est quant à elle sans signature et se présente sous la forme d'un terme supplémentaire à la partie conservative de la structure. Ainsi, lorsque la partie imaginaire de la matrice des forces aérodynamiques généralisées est négative, on est en présence du phénomène d'instabilité aéroélastique appelé flottement.

Cette matrice s'écrit en faisant apparaître sa partie réelle et sa partie imaginaire

$$[\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}(\omega)] = [\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}^R(\omega)] + i\omega [\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}^I(\omega)] \quad , \quad (2.42)$$

$$[\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}^R(\omega)] = \frac{1}{2}\rho V^2 [\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_R(\frac{i\omega}{V})] \quad , \quad (2.43)$$

$$[\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_{red}^I(\omega)] = \frac{1}{2}\rho V^2 [\widehat{\underline{\mathbf{A}}}_I(\frac{i\omega}{V})] \quad . \quad (2.44)$$

Les matrices réduites de masse, de rigidité et de dissipation de la structure s'écrivent

$$[\widehat{\underline{M}}_{red}] = [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]^T [\widehat{\underline{M}}] [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}] \quad , \quad (2.45)$$

$$[\widehat{\underline{K}}_{red}] = [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]^T [\widehat{\underline{K}}] [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}] \quad , \quad (2.46)$$

$$[\widehat{\underline{D}}_{red}] = [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]^T [\widehat{\underline{D}}] [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}] \quad . \quad (2.47)$$

Ainsi, l'équation de la dynamique du système désaccordé, en présence de couplage aéroélastique devient

$$\{-\omega^2 [\widehat{\underline{M}}_{red}] + i\omega([\widehat{\underline{D}}_{red}] + [\widehat{\underline{A}}_{red}^I(\omega)]) + [\widehat{\underline{K}}_{red}] + [\widehat{\underline{A}}_{red}^R(\omega)]\} \underline{\mathbf{q}}(\omega) = \widehat{\underline{\mathbf{g}}}_{exc}(\omega) \quad . \quad (2.48)$$

### 2.5.3 Cas particulier d'un amortissement structural par taux de dissipation modale

L'écriture de la matrice réduite d'amortissement structural dépend du type d'amortissement présent sur la structure. En effet, pour un amortissement hystérétique ou une matrice d'amortissement de la structure, la matrice réduite d'amortissement est pleine, compte tenu du choix de la base de projection  $[\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}]$ . Par contre, si l'on considère un taux d'amortissement modal, une diagonalisation des matrices structurales de masse et de rigidité du système réduit permet d'écrire la matrice réduite d'amortissement sous une forme diagonale.

Pour ce faire, nous allons d'abord résoudre le problème aux valeurs propres homogène et sans dissipation sur le modèle réduit. Ensuite, nous diagonalisons les matrices structurales réduites du système avec les vecteurs propres obtenus.

Ainsi, le problème aux valeurs propres homogène et sans dissipation du modèle réduit à résoudre s'écrit : trouver  $(\underline{\lambda}, \underline{\hat{\mathbf{y}}})$  avec  $\underline{\hat{\mathbf{y}}}$  le vecteur réel tel que

$$([\widehat{\underline{K}}_{red}] - \underline{\lambda}[\widehat{\underline{M}}_{red}])\underline{\hat{\mathbf{y}}} = 0 \quad . \quad (2.49)$$

$\underline{\lambda}$  : valeur propre

$\underline{\hat{\mathbf{y}}}$  : vecteur propre

Les matrices  $[\widehat{\underline{K}}_{red}]$  et  $[\widehat{\underline{M}}_{red}]$  étant réelles symétriques, leurs vecteurs propres sont réels. Ainsi, les vecteurs propres trouvés vérifient les relations d'orthogonalité

$$\langle [\widehat{\underline{K}}_{red}]\underline{\hat{\mathbf{y}}}^\alpha, \underline{\hat{\mathbf{y}}}^\beta \rangle = \omega_\alpha^2 \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \langle [\widehat{\underline{M}}_{red}]\underline{\hat{\mathbf{y}}}^\alpha, \underline{\hat{\mathbf{y}}}^\beta \rangle = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.50)$$

On choisit alors par construction une matrice diagonale pour la dissipation réduite

$$\langle [\widehat{\underline{D}}_{red}] \widehat{\underline{y}}^\alpha, \widehat{\underline{y}}^\beta \rangle = 2\xi_\alpha \omega_\alpha \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.51)$$

Les modes propres de la structure désaccordée intentionnellement dans le repère global s'écrivent donc

$$\widehat{\underline{u}}^\alpha = [\widehat{\underline{\Psi}}^{proj}] \widehat{\underline{y}}^\alpha \quad . \quad (2.52)$$

$\mu_\alpha$  : masse généralisée associée au mode  $\alpha$

$\omega_\alpha$  : fréquence propre associée au vecteur  $\alpha$

$\xi_\alpha$  : taux de dissipation associé au mode  $\alpha$

Ainsi, en effectuant le changement de variable  $\underline{\mathbf{q}}(\omega) = [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}] \eta(\omega)$ , le problème généralisé (C.1) devient

$$\{-\omega^2 [\widehat{\underline{M}}_{diag}] + i\omega [\widehat{\underline{D}}_{diag}] + [\widehat{\underline{K}}_{diag}] + [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}]^T [\widehat{\underline{A}}_{red}(\omega)] [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}] \} \eta(\omega) = [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}]^T \widehat{\underline{\mathbf{g}}}_{exc}(\omega) \quad , \quad (2.53)$$

ou les matrices  $[\widehat{\underline{M}}_{diag}]$ ,  $[\widehat{\underline{K}}_{diag}]$  et  $[\widehat{\underline{D}}_{diag}]$  sont diagonales et s'écrivent

$$[\widehat{\underline{M}}_{diag}] = [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}]^T [\widehat{\underline{M}}_{red}] [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}] = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} \quad , \quad (2.54)$$

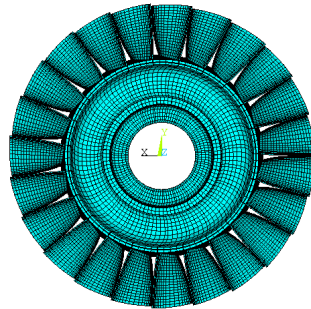
$$[\widehat{\underline{K}}_{diag}] = [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}]^T [\widehat{\underline{K}}_{red}] [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}] = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \mu_n \end{pmatrix} \quad , \quad (2.55)$$

$$[\widehat{\underline{D}}_{diag}] = [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}]^T [\widehat{\underline{D}}_{red}] [\widehat{\underline{\mathbf{y}}}] = \begin{pmatrix} 2\xi_1 \omega_1 \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\xi_n \omega_n \mu_n \end{pmatrix} \quad . \quad (2.56)$$

*diag* : indice désignant la forme diagonale des matrices réduites

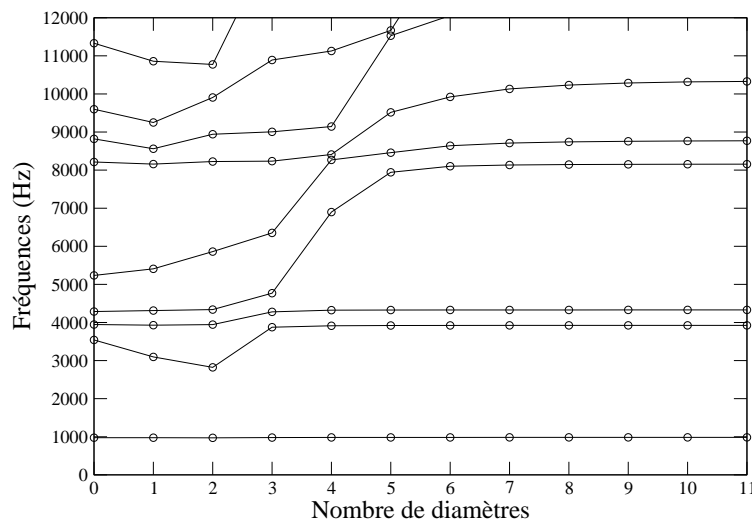
## 2.6 Validation de la nouvelle méthode de réduction de modèles sur un cas réel

Le code commercial ANSYS est utilisé pour l'analyse modale, pour l'extraction des matrices de masse et de rigidité des différents types de secteurs, et pour la détermination des fréquences de résonance et des réponses forcées du modèle complet. Dans le cadre de cette validation, la roue aubagée est considérée sans couplage avec le fluide. Le cas test considéré ici est une roue aubagée à 23 aubes et 128202 degrés de liberté (cf. figure 2.5).



**FIG. 2.5:** Modèle éléments finis de la roue aubagée accordée.

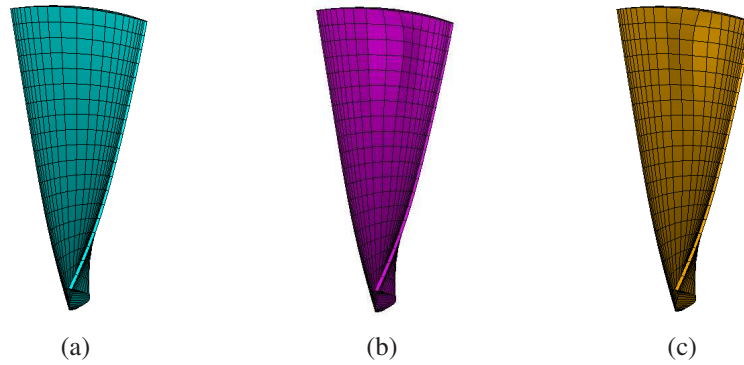
La figure 2.6 représente l'évolution des fréquences de résonance de la roue aubagée accordée en fonction du nombre de diamètres. Pour valider la nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique des aubes, nous allons comparer le modèle réduit au modèle complet sur la base des 76 premières fréquences de résonance de la roue aubagée désaccordée ainsi que des réponses forcées sous deux différents ordres d'excitation. Les 76 premières fréquences de résonance sont celles contenues dans la bande fréquentielle [0,5000]Hz.



**FIG. 2.6:** Évolution des fréquences propres de la roue aubagée accordée en fonction du nombre de diamètre nodaux des modes.

Pour désaccorder intentionnellement la roue aubagée, deux nouvelles aubes sont créées à partir d'une aube nominale par modification géométrique en tête d'aube : une aube bossée et une aube grattée (cf. figure 2.7). Le tableau 2.1 fournit les quatre premières fréquences de résonance des différents types d'aubes avec des conditions aux limites d'encastrement en pied. Ces valeurs

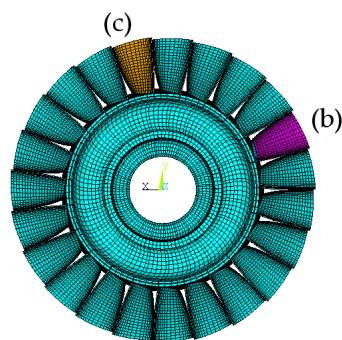
montrent des décalages fréquentiels conséquents pouvant dépasser 10% pour le second mode de torsion.



**FIG. 2.7:** Visualisation des modèles éléments finis des trois types d'aubes : aube nominale (a), aube grattée (b) et aube bossée (c).

	Aube nominale	Aube grattée	Aube bossée
Mode 1F	996.4	1054.3	947.9
Mode 2F	4013.0	3937.5	4077.1
Mode 1T	4382.6	4514.2	4321.9
Mode 2T	8217.0	7616.6	9081.8

**TAB. 2.1:** Fréquences de résonance (Hz) des quatre premiers modes des différents types d'aubes en configuration encastrée.



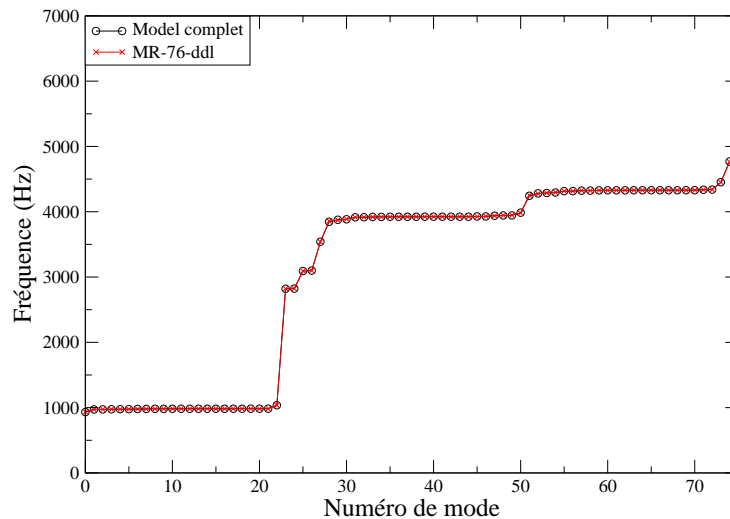
**FIG. 2.8:** Roue aubagée désaccordée intentionnellement avec deux aubes modifiées géométriquement arbitrairement placées.



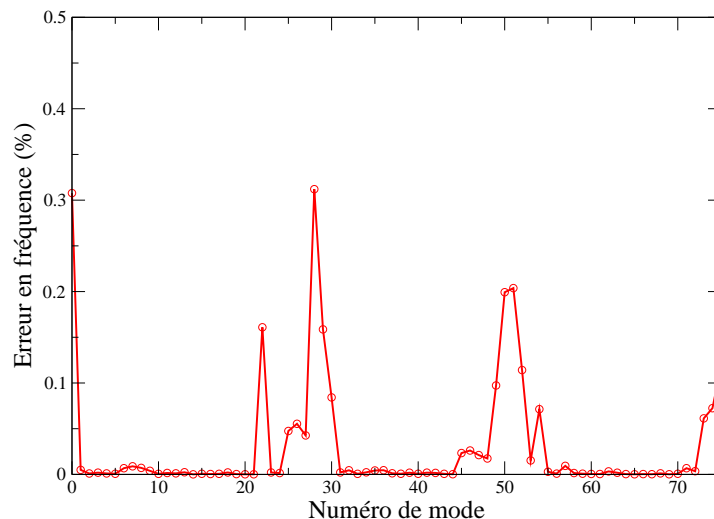
## 2. Formulation du problème aéromécanique

---

Le désaccordage de la roue aubagée est alors effectué en remplaçant arbitrairement deux aubes nominales par les aubes modifiées géométriquement comme on peut le voir sur la figure 2.8. Les figures 2.9 et 2.10 montrent les 76 premières fréquences propres obtenues avec le modèle réduit et les niveaux d'erreur associés. On peut notamment y voir que ces fréquences correspondent bien à celles du modèle complet, avec un modèle réduit de faible dimension (76 ddl).



**FIG. 2.9:** Comparaison des 76 premières fréquences propres du modèles complet avec le modèle réduit de la roue aubagée désaccordée géométriquement.



**FIG. 2.10:** Comparaison des erreurs en fréquence sur les 76 premiers modes du modèles complet avec le modèle réduit de la roue aubagée désaccordée géométriquement.

Le niveau maximum d'erreur constaté est inférieur à 0.35%. Cette erreur, déjà très faible, peut être réduite autant que l'on veut en augmentant la valeur  $n$  de la base de projection. Par conséquent, le modèle réduit est suffisamment fidèle pour capturer les résonances et les modes propres associés de la roue aubagée désaccordée intentionnellement.

Notons toutefois que, pour cette réduction de faible dimension, les niveaux maximum d'erreur en fréquence sont obtenus pour les modes au niveau desquels l'énergie vibratoire est principalement localisée sur le disque (modes de disque). Lorsque l'énergie vibratoire est localisée sur les aubes (modes d'aubes), le niveau d'erreur maximal est inférieur à 0.01%. Les modes de ce cas de figure peuvent d'ailleurs facilement être identifiés sur la figure 2.9 puisqu'ils représentent les plateaux du graphe correspondant aux modes que l'on retrouve aux alentours des fréquences 1000Hz, 4000Hz et 4400Hz.

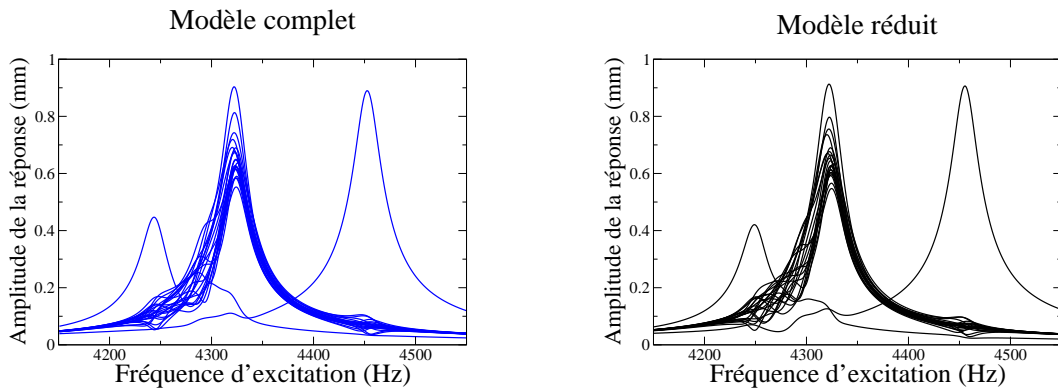
Pour la validation en réponse forcée, les excitations sont cycliques pour les ordres d'excitation 4 et 9. Le modèle réduit a été obtenu en utilisant une base de 96 vecteurs.

Soient  $ddl_{exc}$  les degrés de liberté d'excitation cyclique de la roue. Ces degrés de liberté sont ceux d'un noeud du côté du bord de fuite en tête de chacune des aubes, de manière à exciter tous les modes de la roue aubagée. Le vecteur des forces d'excitation s'écrit

$$\widehat{\mathbf{f}}_{ext} = \mathbb{1}_{\mathbb{B}_f}(\omega)\underline{\mathbf{f}} \quad , \quad \underline{\mathbf{f}} = (\underline{f}^0, \dots, \underline{f}^{N-1}) \quad , \quad (2.57)$$

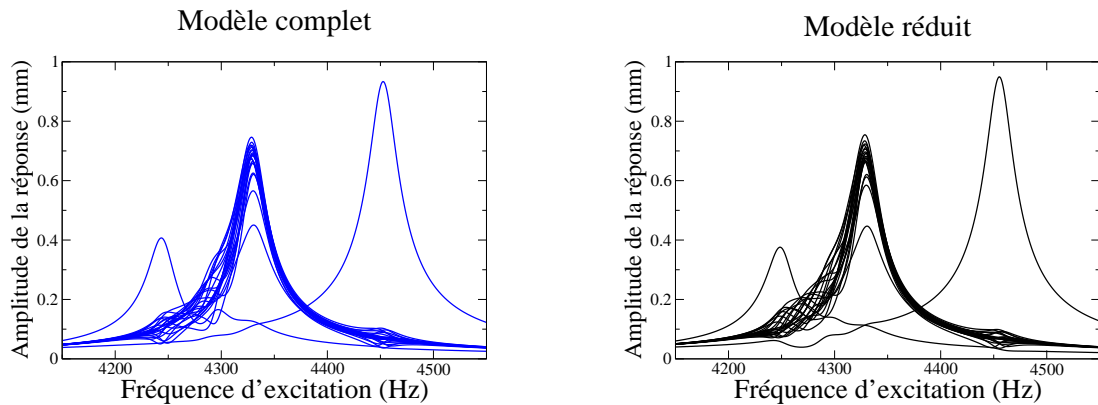
où  $\mathbb{1}_{\mathbb{B}_f}(\omega)$  est la fonction indicatrice de  $\omega$  sur la bande fréquentielle d'analyse  $\mathbb{B}_f = [4150 - 4550]Hz$  qui vaut 1 si  $\omega$  est dans  $\mathbb{B}_f$  et 0 sinon. Le vecteur  $\underline{\mathbf{f}}^m = (\underline{f}_1^m, \dots, \underline{f}_n^m)$  est tel que  $\underline{f}_k^m = 0$  pour tout  $k$  différent de  $ddl_{exc}$ , et  $\underline{f}_{ddl_{exc}}^m = \exp\left(\frac{2imn\pi}{N}\right)$  pour tout  $m$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , avec  $N = 23$  le nombre d'aubes de la roue et  $n = 4$  ou  $n = 9$  l'ordre d'excitation.

Les réponses de toutes les aubes pour ces excitations cycliques d'ordres 4 et 9 et dans la bande fréquentielle d'excitation  $\mathbb{B}_f = [4150 - 4550] Hz$  sont représentées sur les figures 2.11 et 2.12.



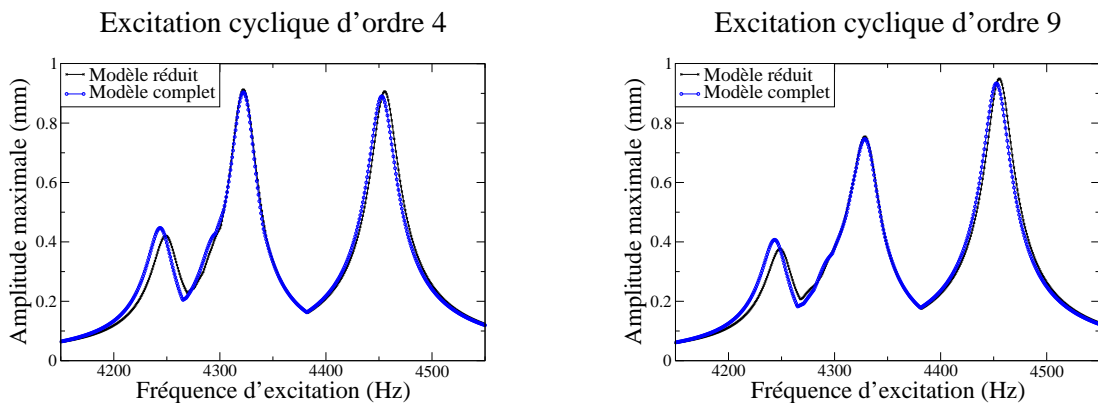
**FIG. 2.11:** Réponses forcées des 23 aubes de la roue aubagée désaccordée intentionnellement pour une excitation cyclique d'ordre 4 dans la bande fréquentielle d'analyse  $\mathbb{B}_f$  : modèle complet (figure gauche) et modèle réduit (figure droite).

## 2. Formulation du problème aéromécanique



**FIG. 2.12:** Réponses forcées des 23 aubes de la roue aubagée désaccordée intentionnellement pour une excitation cyclique d'ordre 9 dans la bande fréquentielle d'analyse  $\mathcal{B}_f$  : modèle complet (figure gauche) et modèle réduit (figure droite).

Sur ces figures, les modèles complet et réduit représentent bien les résonances des 21 aubes nominales et les résonances isolées des deux aubes modifiées. En effet, on distingue clairement sur ces figures, trois zones de résonance dans la plage fréquentielle d'analyse. Étant donné qu'il y a trois différents types d'aubes sur la roue et que les modifications géométriques effectuées sont un grattage et un bossage (qui augmente et diminue respectivement les fréquences propres de l'aube considérée), il est tout à fait normal de voir des résonances groupées des 21 aubes nominales et de part et d'autre, des résonances isolées correspondant à celles des aubes modifiées. On peut également voir l'effet du couplage par le disque qui se traduit par le fait que lorsqu'un type d'aubes est excité, il y a une faible réponse des aubes dont la fréquence de résonance est différente.



**FIG. 2.13:** Comparaison des amplitudes maximales de la réponse forcée du modèle complet et du modèle réduit de la roue aubagée dans la bande fréquentielle d'analyse  $\mathcal{B}_f$ .

La figure 2.13 montre une comparaison des amplitudes maximales de réponse obtenues avec le modèle réduit à celles qui ont été obtenues avec le modèle complet, pour les excitations cycliques d'ordres 4 et 9. On y apprécie notamment la qualité de l'estimation de la réponse forcée par le nouveau modèle réduit.

Ces résultats d'estimation des fréquences de résonance et réponses forcées montrent que le nouveau modèle réduit est suffisamment précis dans la représentation de la dynamique des roues aubagées désaccordées géométriquement.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique ou désaccordées intentionnellement par modification géométrique des aubes. Nous avons ainsi effectué une formulation déterministe du problème, développé et validé une nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique des aubes. Le développement de cette nouvelle méthode a été motivé par la mise en évidence d'un problème d'incompatibilité de domaines géométriques qui apparaît dans la construction de la méthode classique de réduction de modèles consistant à projeter les matrices structurales du système sur la base modale de la structure accordée de référence. Cette nouvelle méthode, en plus d'être précise en présence de désaccordage par modification géométrique, est également adaptée par construction au désaccordage par modification des propriétés des matériaux tels que le module d'Young. Elle permet notamment d'obtenir des modèles réduits très compacts, d'où son grand intérêt en terme de réduction des temps de calcul. La validation proposée montre la capacité de la nouvelle méthode de réduction proposée à prévoir avec un modèle réduit de faible dimension non seulement les fréquences et les modes propres, mais aussi les réponses forcées pour une roue aubagée désaccordée intentionnellement par modification géométrique.



## Chapitre 3

# Formulation du problème aéromécanique avec incertitudes

*Dans ce chapitre, nous présentons une formulation probabiliste non paramétrique qui permet de prendre en compte d'une part les incertitudes induites par le désaccordage involontaire et d'autre part les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle pour les roues aubagées en présence ou non de désaccordage intentionnel.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>50</b>
<b>3.2</b>	<b>Choix de l'approche probabiliste pour la modélisation des incertitudes</b>	<b>50</b>
<b>3.3</b>	<b>Construction du modèle probabiliste non paramétrique</b>	<b>52</b>
3.3.1	Modèle stochastique réduit du système aéromécanique avec incertitudes	52
3.3.2	Construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires	53
<b>3.4</b>	<b>Méthodologie de résolution du problème probabiliste aéromécanique</b>	<b>58</b>
3.4.1	Méthode de résolution des équations stochastiques	58
3.4.2	Analyse de convergence du système stochastique	58
3.4.3	Traitements statistiques	59
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, la terminologie "incertitudes" désignera d'une part les incertitudes induites par le désaccordage involontaire et d'autre part les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle pour les roues aubagées.

Concernant le désaccordage involontaire, les perturbations de structures accordées, provoquées par les tolérances de fabrication, la variabilité des propriétés mécaniques des matériaux, les variabilités induites par des liaisons mécaniques réputées identiques, l'usure en service, etc., ne sont pas quantifiables dans un schéma déterministe, et peuvent mettre en défaut la prévision des modèles numériques ne prenant pas en compte ces désaccordages involontaires. Ainsi, même avec de faibles variabilités, on peut constater des variations d'amplitudes vibratoires importantes, d'une aube à une autre, alors que les amplitudes de la structure à symétrie cyclique sont toutes identiques à un déphasage près.

De plus, le modèle numérique cyclique présente des incertitudes de modélisation et des incertitudes sur les valeurs numériques des paramètres du modèle du système nominal.

En effet, un modèle mécanique numérique n'est qu'un modèle approché du système réel. On parle alors d'incertitudes de modélisation. La modélisation numérique d'un système introduit toujours des hypothèses simplificatrices qui bien qu'acceptables, induisent des différences entre le modèle numérique et le système réel. Ce modèle prédictif moyen est donné par un processus de modélisation résultant d'un compromis entre complexité de modélisation et capacité de prévision.

Par ailleurs, les paramètres du modèle numérique construit doivent être considérés comme des paramètres incertains. On parle alors d'incertitudes sur les paramètres du modèle. Ces paramètres sont les paramètres caractérisant les propriétés des matériaux (module d'Young, coefficient de Poisson, coefficient de dissipation, masse volumique, etc.), les caractéristiques géométriques (longueur, angle, etc.), les conditions de fonctionnement (température, vitesse, etc.) et les conditions aux limites (blocages, appuis, etc.). Leur connaissance et leur modélisation ne sont pas parfaites.

Toutes ces incertitudes sont de nature aléatoire et peuvent être modélisées dans le cadre de la théorie des probabilités. On propose dans ce chapitre une approche probabiliste globale permettant de prendre en compte l'ensemble de ces incertitudes pour les roues aubagées en présence ou non de désaccordage intentionnel.

## 3.2 Choix de l'approche probabiliste pour la modélisation des incertitudes

L'approche usuelle pour la prise en compte des incertitudes sur les paramètres du modèle est l'approche probabiliste paramétrique qui consiste à modéliser les paramètres du modèle par

des variables aléatoires telles des vecteurs aléatoires ou des champs stochastiques. La prise en compte des incertitudes sur les paramètres a été abordée depuis plusieurs décennies dans la littérature. On pourra se référer à (Schueller [88, 85, 86, 87]) pour avoir un aperçu des plus importantes méthodes probabilistes paramétriques.

Cette approche n'est cependant adaptée que pour la prise en compte des incertitudes sur les paramètres du système, et ne permet pas de prendre en compte, ni le désaccordage involontaire dans une approche globale, ni les incertitudes de modélisation du système. En effet, supposons que les paramètres incertains du modèle soient représentés par la grandeur  $\mathbf{r}$  qui est alors modélisée par une variable aléatoire vectorielle  $\mathbf{R}$  de loi de probabilité donnée. Lorsque ce modèle est discrétisé par la méthode des éléments finis, les matrices de masse, de dissipation et de rigidité sont des fonctions déterministes du paramètres  $\mathbf{r}$ . Comme ce paramètre incertain est modélisé par le vecteur aléatoire  $\mathbf{R}$ , ces matrices apparaissent alors comme des fonctions déterministes du vecteur aléatoire  $\mathbf{R}$  qui sont donc des matrices aléatoires notées  $[M(\mathbf{R})]$ ,  $[D(\mathbf{R})]$  et  $[K(\mathbf{R})]$ . Dans ce cas, seules les incertitudes sur les paramètres sont modélisées. Notons que dans le cas du désaccordage involontaire, on trouve le plus souvent dans la littérature, une modélisation au travers du module d'Young  $E$ . Une telle modélisation du désaccordage involontaire a permis de mener des investigations très intéressantes pour comprendre le phénomène du désaccordage, mais conduit à des simplifications difficilement justifiables (sans parler du fait qu'elle ne prend pas en compte les différences géométriques induites par les tolérances d'usinage). En effet, en ne tenant compte que des incertitudes sur le module d'Young des matériaux, tout se passe comme si on perturbait les fréquences propres des aubes en supposant les déformées modales inchangées. Pourtant, les déformées modales influent sur les facteurs d'amplification dynamique (voir par exemple (Soize [100], Capiez-Lernout *et al.* [15, 17]) et sur le couplage aérodynamique.

Une approche récente propose une voie pour prendre en compte globalement et simultanément les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle. Cette approche (Soize [97, 98, 99, 100, 101]) appelée approche probabiliste non paramétrique consiste à modéliser directement les opérateurs du modèle moyen par des opérateurs aléatoires dont les lois de probabilité sont construites dans le cadre de la théorie de l'information ([91]) avec le principe du maximum d'entropie ([46, 47]) sous les contraintes définies par l'information disponible. Ainsi, les matrices de masse, de dissipation, de raideur et de forces aérodynamiques instationnaires exprimées dans les coordonnées généralisées deviennent des matrices aléatoires dont les lois de probabilité sont explicitement construites. De plus, contrairement à l'approche paramétrique qui ne prend en compte que le désaccordage en fréquences, cette approche permet de prendre en compte le désaccordage en fréquences et en déformées modales associées de façon cohérente. D'ailleurs, une étude comparative de ces deux approches est faite dans (Capiez-Lernout [15]) sur un modèle de roue aubagée en présence de désaccordage involontaire, avec les mêmes niveaux de dispersion sur le module d'Young et conclut que l'approche non paramétrique est plus complète.

Dans ce chapitre, nous utilisons donc l'approche probabiliste non paramétrique pour prendre en compte, globalement et simultanément, d'une part les incertitudes induites par le désaccordage



involontaire et d'autre part les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle pour les roues aubagées.

### 3.3 Construction du modèle probabiliste non paramétrique

La construction du modèle probabiliste non paramétrique se fait sur la base du modèle moyen, en remplaçant les matrices réduites moyennes de l'équation de la dynamique par des matrices aléatoires. Cela permet alors d'obtenir, puis de résoudre une équation aléatoire du système dynamique incertain.

**Dans tout ce chapitre, les équations sont écrites dans le repère global et non pas dans les repères locaux liés aux secteurs. Ainsi, toutes les grandeurs devraient être dotées d'un "chapeau" mais dans le but d'alléger l'écriture, ces "chapeaux" seront supprimés.**

#### 3.3.1 Modèle stochastique réduit du système aéromécanique avec incertitudes

On rappelle que l'équation dynamique du système moyen réduit en présence de couplage aéroélastique s'écrit

$$\{-\omega^2[\underline{M}_{red}] + i\omega[\underline{D}_{red}] + [\underline{K}_{red}] + [\underline{A}_{red}(\omega)]\}\underline{\mathbf{q}}(\omega) = \underline{\mathbf{g}}_{exc}(\omega) \quad . \quad (3.1)$$

$i^2 = -1$

$\omega$  : fréquence

$\underline{\mathbf{q}}$  : vecteur des coordonnées généralisées du modèle réduit

$[\underline{M}_{red}]$  : matrice réduite moyenne de masse de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{D}_{red}]$  : matrice réduite moyenne de dissipation de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{K}_{red}]$  : matrice réduite moyenne de rigidité de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{A}_{red}]$  : matrice moyenne des forces aérodynamiques généralisées de couplage fluide-structure

L'approche probabiliste non paramétrique conduit à l'équation probabiliste suivante du système en présence de couplage aéroélastique

$$\{-\omega^2[\underline{\mathbf{M}}_{red}] + i\omega[\underline{\mathbf{D}}_{red}] + [\underline{\mathbf{K}}_{red}] + [\underline{\mathbf{A}}_{red}(\omega)]\}\underline{\mathbf{q}}(\omega) = \underline{\mathbf{g}}_{exc}(\omega) \quad . \quad (3.2)$$

$$\underline{\mathbf{U}}(\omega) = [\underline{\Psi}^{proj}]\underline{\mathbf{q}}(\omega) \quad , \quad (3.3)$$

$\omega$  : fréquence

$\underline{\mathbf{q}}$  : vecteur aléatoire des coordonnées généralisées du modèle réduit

$[\underline{\mathbf{M}}_{red}]$  : matrice réduite aléatoire de masse de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{\mathbf{D}}_{red}]$  : matrice réduite aléatoire de dissipation de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{\mathbf{K}}_{red}]$  : matrice réduite aléatoire de rigidité de la structure complète désaccordée intentionnellement

$[\underline{\mathbf{A}}_{red}(\omega)]$  : matrice aléatoire des forces aérodynamiques généralisées de couplage fluide-structure

$\underline{\mathbf{U}}(\omega)$  : vecteur aléatoire des déplacements dans le repère global

$[\underline{\Psi}^{proj}]$  : matrice des vecteurs de la base de projection définie au chapitre 2

On rappelle que la dimension du système moyen réduit est  $n$ . Ainsi, les matrices réduites moyennes et les matrices aléatoires associées sont de dimension  $(n \times n)$ .

La matrice de rigidité dynamique et la base de projection s'écrivent dans le repère globale

$$[\underline{E}] = \begin{pmatrix} [\underline{E}]^0 & \dots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \dots & [\underline{E}]^{N-1} \end{pmatrix}, \quad [\underline{\Psi}^{proj}] = \begin{pmatrix} (\underline{\Psi}^{proj})_1^{\Omega_0} & \dots & (\underline{\Psi}^{proj})_n^{\Omega_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\underline{\Psi}^{proj})_1^{\Omega_{N-1}} & \dots & (\underline{\Psi}^{proj})_n^{\Omega_{N-1}} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Ainsi, la matrice réduite de rigidité dynamique s'écrit

$$[\underline{E}_{red}(\omega)] = [\underline{\Psi}^{proj}]^T [\underline{E}(\omega)] [\underline{\Psi}^{proj}], \quad (3.5)$$

où les termes de cette matrice sont de la forme

$$[\underline{E}_{red}(\omega)]_{\alpha,\beta} = \sum_{m=0}^{N-1} ((\underline{\Psi}^{proj})_{\alpha}^{\Omega_m})^T [\underline{E}(\omega)]^{mm} (\underline{\Psi}^{proj})_{\beta}^{\Omega_m}. \quad (3.6)$$

Autrement dit

$$[\underline{E}_{red}(\omega)]_{\alpha,\beta} = \sum_{m=0}^{N-1} [\underline{E}_{red}^m(\omega)]_{\alpha,\beta}. \quad (3.7)$$

Ainsi, le modèle probabiliste des matrices aléatoires sera construit pour chaque secteur. Il sera donc construit pour les matrices  $[\underline{E}_{red}^m(\omega)]$ . Cela permettra notamment de modéliser indépendamment les incertitudes d'un secteur à l'autre.

### 3.3.2 Construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires

On considère les matrices aléatoires symétriques définies positives  $[\mathbf{M}_{red}^m]$ ,  $[\mathbf{D}_{red}^m]$ ,  $[\mathbf{K}_{red}^m]$  de masse, de dissipation, de rigidité réduites et la matrice complexe  $[\mathbf{A}_{red}(\omega)]$  des forces aérodynamiques généralisées introduites précédemment. Dans le cas où les matrices structurales du système seraient complexes, du fait d'une réduction de modèle sur une base de vecteurs complexes, l'annexe D indique la méthode de construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires.

#### 3.3.2.1 Information disponible pour la construction du modèle probabiliste

L'information disponible introduite dans l'approche probabiliste non paramétrique pour ces matrices aléatoires correspond d'une part à la donnée des valeurs moyennes, d'autre part aux propriétés algébriques des matrices aléatoires et enfin à des propriétés mathématiques pour que la solution du problème stochastique soit du second ordre.

Concernant les moyennes, nous avons,

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{M}_{red}^m]\} = [\underline{\mathbf{M}}_{red}^m], \quad (3.8)$$

### 3. Formulation du problème aéromécanique avec incertitudes

---

$$\mathcal{E}\{\mathbf{D}_{red}^m\} = [\underline{D}_{red}^m] \quad , \quad (3.9)$$

$$\mathcal{E}\{\mathbf{K}_{red}^m\} = [\underline{K}_{red}^m] \quad , \quad (3.10)$$

$$\mathcal{E}\{\mathbf{A}_{red}(\omega)\} = [\underline{A}_{red}(\omega)] \quad . \quad (3.11)$$

$\mathcal{E}\{\cdot\}$  : espérance mathématique

Concernant les propriétés algébriques, les matrices aléatoires construites sur la base des matrices moyennes réduites doivent être telles que

$$[\underline{M}_{red}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \implies [\mathbf{M}_{red}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (3.12)$$

$$[\underline{D}_{red}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \implies [\mathbf{D}_{red}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (3.13)$$

$$[\underline{K}_{red}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \implies [\mathbf{K}_{red}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (3.14)$$

$$[\underline{A}_{red}(\omega)] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \implies [\mathbf{A}_{red}(\omega)] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{presque sûrement} \quad . \quad (3.15)$$

$\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  : ensemble des matrices réelles symétriques définies positives de dimension  $n \times n$

$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  : ensemble des matrices complexes de dimension  $n \times n$

Enfin concernant la résolution des équations de la dynamique, en notant que la réponse est une application non linéaire de ces matrices du fait de l'inversion de l'opérateur du problème, il est nécessaire de garantir que la solution aléatoire du problème de dynamique stochastique soit du second ordre. Les matrices aléatoires doivent alors vérifier les contraintes suivantes

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{M}_{red}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (3.16)$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{D}_{red}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (3.17)$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{K}_{red}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (3.18)$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{A}_{red}(\omega)]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad . \quad (3.19)$$

$\|[\cdot]\|_F = (\text{tr}([\cdot][\cdot]^*))^{\frac{1}{2}}$  : norme de Froebenius

#### 3.3.2.2 Normalisation des matrices aléatoires

L'étape de normalisation qui consiste à exprimer les matrices aléatoires en fonction des matrices moyennes nécessite de construire une factorisation des matrices moyennes.

Soit  $[\underline{Z}^m]$  la matrice représentant une des trois matrices symétriques définies positives  $[\underline{M}_{red}^m]$ ,  $[\underline{D}_{red}^m]$  ou  $[\underline{K}_{red}^m]$ . Sa factorisation de Choleski s'écrit

$$[\underline{Z}^m] = [\underline{L}_{Z^m}]^T [\underline{L}_{Z^m}] \quad . \quad (3.20)$$

$[\underline{L}_{Z^m}]$  : matrice réelle triangulaire supérieure

La matrice réduite moyenne de couplage aéroélastique est une matrice complexe dont la partie imaginaire fournit la dissipation aérodynamique moyenne (Cette partie imaginaire n'est pas

toujours définie positive dans le cas d'instabilités aéroélastiques). Pour la factorisation de cette matrice complexe dans le cadre de l'approche probabiliste non paramétrique, on suit la méthodologie proposée dans (Soize [100]). Pour chaque  $\omega$  fixé, la matrice moyenne aérodynamique  $[A_{red}(\omega)]$  est factorisée comme suit

$$[A_{red}(\omega)] = [U(\omega)][T(\omega)] \quad , \quad (3.21)$$

où

$$[U(\omega)] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad [T(\omega)] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \quad , \quad (3.22)$$

$$[U(\omega)]^* [U(\omega)] = [I_n] \quad . \quad (3.23)$$

Soit  $[S(\omega)]$  appartenant à  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{C})$  la matrice définie par

$$[S(\omega)] = [A_{red}(\omega)]^* [A_{red}(\omega)] \quad . \quad (3.24)$$

Puisque  $[S(\omega)]$  est dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{C})$ , elle est diagonalisable et admet la décomposition suivante

$$[S(\omega)] = [\Theta(\omega)][\Sigma(\omega)][\Theta(\omega)]^* \quad , \quad (3.25)$$

où  $[\Sigma(\omega)]$  est une matrice diagonale constituée des valeurs propres positives de la matrice  $[S(\omega)]$ . La matrice  $[\Theta]$  est la matrice des vecteurs propres correspondants telle que

$$[\Theta(\omega)][\Theta(\omega)]^* = [\Theta(\omega)]^* [\Theta(\omega)] = [I_n] \quad . \quad (3.26)$$

Nous pouvons alors définir la matrice  $[T(\omega)]$  par

$$[T(\omega)] = [S(\omega)]^{\frac{1}{2}} = [\Theta(\omega)][\Sigma(\omega)]^{\frac{1}{2}} [\Theta(\omega)]^* \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \quad . \quad (3.27)$$

Puisque  $[T(\omega)]$  appartient à  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{C})$ , elle est inversible et en utilisant l'équation (3.21), la matrice  $[U(\omega)]$  est définie par

$$[U(\omega)] = [A_{red}(\omega)][T(\omega)]^{-1} \quad . \quad (3.28)$$

Enfin, puisque la matrice  $[T(\omega)]$  est à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{C})$ , elle admet la factorisation de Choleski

$$[T(\omega)] = [L_T(\omega)]^* [L_T(\omega)] \quad . \quad (3.29)$$

Ainsi, la matrice  $[A_{red}(\omega)]$  se décompose finalement sous la forme

$$[A_{red}(\omega)] = [U(\omega)][L_T(\omega)]^* [L_T(\omega)] \quad . \quad (3.30)$$

### 3. Formulation du problème aéromécanique avec incertitudes

---

Les matrices moyennes réduites étant factorisées, les matrices aléatoires de masse, de dissipation, de rigidité et des forces aérodynamiques généralisées sont alors normalisées de la façon suivante

$$[\mathbf{M}_{red}^m] = [\underline{L}_{M_{red}^m}]^T [\mathbf{G}_M^m] [\underline{L}_{M_{red}^m}] \quad , \quad (3.31)$$

$$[\mathbf{D}_{red}^m] = [\underline{L}_{D_{red}^m}]^T [\mathbf{G}_D^m] [\underline{L}_{D_{red}^m}] \quad , \quad (3.32)$$

$$[\mathbf{K}_{red}^m] = [\underline{L}_{K_{red}^m}]^T [\mathbf{G}_K^m] [\underline{L}_{K_{red}^m}] \quad , \quad (3.33)$$

$$[\mathbf{A}_{red}(\omega)] = [\underline{U}(\omega)] [\underline{L}_T(\omega)]^* [\mathbf{G}_A] [\underline{L}_T(\omega)] \quad . \quad (3.34)$$

où  $[\mathbf{G}_M^m]$ ,  $[\mathbf{G}_D^m]$ ,  $[\mathbf{G}_K^m]$  et  $[\mathbf{G}_A]$  sont des matrices aléatoires germes à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ , indépendantes, dont la valeur moyenne est égale à la matrice identité. La loi de probabilité et le générateur de réalisations indépendantes de ces matrices aléatoires germes ont été construits dans (Soize [97, 98]) et sont rappelés ci-après.

#### 3.3.2.3 Synthèse du modèle probabiliste des matrices aléatoires germes

Soit  $[\mathbf{G}]$  la matrice aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  représentant l'une des matrices aléatoires  $[\mathbf{G}_M^m]$ ,  $[\mathbf{G}_D^m]$ ,  $[\mathbf{G}_K^m]$  et  $[\mathbf{G}_A]$ .

La loi de probabilité de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  est définie par une densité de probabilité  $p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$  de  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^+$  par rapport à la mesure  $\tilde{d}\mathbf{G}$  telle que

$$\tilde{d}\mathbf{G} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d[\mathbf{G}]_{ij} \quad . \quad (3.35)$$

Cette densité de probabilité s'écrit

$$p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}]) \times C_{\mathbf{G}} \times (\det([\mathbf{G}]))^{(n+1)\frac{1-\delta^2}{2\delta^2}} \times e^{-\frac{n+1}{2\delta^2} \text{tr}([\mathbf{G}])} \quad . \quad (3.36)$$

det : déterminant

tr : trace

La fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}])$  est égale à 1 si  $[\mathbf{G}]$  est dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  et est égale à 0 sinon. La constante  $C_{\mathbf{G}}$  est une constante positive de normalisation dont l'expression est

$$C_{\mathbf{G}} = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left(\frac{n+1}{2\delta^2}\right)^{(n+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)} \quad , \quad (3.37)$$

où  $\Gamma(z)$  est la fonction Gamma définie pour tout  $z > 0$  par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad . \quad (3.38)$$

Le niveau de fluctuations statistiques de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  est contrôlé par le paramètre de dispersion  $\delta$  défini par

$$\delta = \left\{ \frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}] - [\underline{\mathbf{G}}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}]\|_F^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.39)$$

qui doit être choisi de telle sorte que

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{n+1}{n+5}}, \quad (3.40)$$

tout en étant indépendant de la dimension  $n$ .

Les paramètres de dispersion des matrices aléatoires  $[\mathbf{G}_M]$ ,  $[\mathbf{G}_D]$ ,  $[\mathbf{G}_K]$  et  $[\mathbf{G}_A]$  seront donc notés  $\delta_M$ ,  $\delta_D$ ,  $\delta_K$  et  $\delta_A$ .

### 3.3.2.4 Représentation algébrique de la matrice aléatoire germe $[G]$

La représentation algébrique suivante de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  permet de construire des réalisations indépendantes qui sont utiles dans le cadre de la procédure de simulation numérique de Monte Carlo. Dans cette représentation, la matrice  $[\mathbf{G}]$  s'écrit

$$[\mathbf{G}] = [L_G]^T [L_G], \quad (3.41)$$

où  $[L_G]$  est la matrice aléatoire à valeurs dans l'espace des matrices réelles triangulaires supérieures de dimension  $(n \times n)$ , correspondant à la factorisation de Choleski.

Les variables aléatoires  $\{[L_G]_{jj'}, j \leq j'\}$  sont indépendantes dans leur ensemble.

Ces variables sont telles que

- Pour  $j < j'$ , la variable aléatoire  $[L_G]_{jj'}$  à valeur réelle s'écrit

$$[L_G]_{jj'} = \delta(n+1)^{-1/2} U_{jj'} \quad , \quad (3.42)$$

où  $U_{jj'}$  est une variable Gaussienne à valeur réelle centrée et de variance unité.

- Pour  $j = j'$ , la variable aléatoire  $[L_G]_{jj}$  à valeur réelle positive s'écrit

$$[L_G]_{jj} = \delta(n+1)^{-1/2} \sqrt{2V_j} \quad , \quad (3.43)$$

où  $V_j$  est une variable aléatoire Gamma à valeur positive dont la fonction de densité de probabilité  $p_{V_j}(v)$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $dv$  sur  $\mathbb{R}$  s'écrit

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} v^{(\alpha_j)-1} e^{-v} \quad , \quad \alpha_j = \frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2} \quad . \quad (3.44)$$

## 3.4 Méthodologie de résolution du problème probabiliste aéromécanique

### 3.4.1 Méthode de résolution des équations stochastiques

Soient  $B$  et  $X$  les variables aléatoires représentant le facteur d'amplification dynamique et l'amortissement aéroélastique de la réponse forcée. Ces deux grandeurs aléatoires s'expriment à l'aide des équations (3.1) et (3.3). La méthode de résolution de ces équations stochastiques est la méthode de simulation de Monte Carlo.

Soient  $\theta_1, \dots, \theta_{n_s}$  des points de l'ensemble des événements élémentaires de l'espace probabilisé, correspondant à  $n_s$  réalisations indépendantes. Les réalisations de  $B$  et de  $X$  sont notées  $B(\theta_k)$  et  $X(\theta_k)$  et sont calculées à l'aide de la solution des équations (3.1) et (3.3) pour la réalisation  $\theta_k$ , dans lesquelles les matrices aléatoires sont données par les équations (3.31) à (3.34) et dans lesquelles les réalisations indépendantes  $[\mathbf{G}_{M^m}(\theta_k)]$ ,  $[\mathbf{G}_{D^m}(\theta_k)]$ ,  $[\mathbf{G}_{K^m}(\theta_k)]$  et  $[\mathbf{G}_A(\theta_k)]$  sont construites en utilisant la représentation algébrique décrite au paragraphe 3.3.2.4.

### 3.4.2 Analyse de convergence du système stochastique

L'étude de convergence du modèle stochastique pour la réponse forcée et la stabilité aéroélastique est menée au sens de la convergence en moyenne d'ordre deux vis-à-vis de l'ordre  $n$  de la réduction du modèle et du nombre  $n_s$  de réalisations pour le solveur stochastique de Monte Carlo. Cette convergence implique la convergence en probabilité et la convergence en loi.

Soit  $H(n)$  représentant  $B$  ou  $X$  pour un ordre  $n$  de réduction du modèle. La convergence en moyenne d'ordre deux conduit à introduire la norme  $\| \| H(n) \| \|$  dont le carré s'écrit

$$\| \| H(n) \| \|^2 = \mathcal{E}\{H(n)^2\} \quad . \quad (3.45)$$

Compte tenu de l'estimateur usuel de l'espérance mathématique en fonction du nombre  $n_s$  de réalisations, la convergence en moyenne d'ordre deux vis-à-vis de  $n$  et de  $n_s$  sera analysée en étudiant la fonction  $(n_s, n) \mapsto \text{Conv2}(n_s, n)$  définie par

$$\text{Conv2}(n_s, n) = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} H(n; \theta_k)^2 \quad . \quad (3.46)$$

L'étude de la fonction  $(n_s, n) \mapsto \text{Conv2}(n_s, n)$  permet de déterminer la valeur optimale du paramètre  $n$  contrôlant la dimension du modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée et le nombre  $n_s$  de simulations nécessaires pour observer la convergence en moyenne d'ordre deux.

### 3.4.3 Traitements statistiques

#### 3.4.3.1 Estimation de la probabilité

Pour un seuil  $h$  fixé de l'observation  $H$ , la fonction de répartition  $F_H(h) = \mathcal{P}(H \leq h)$  est estimée par l'estimateur sans biais

$$\mathcal{F}_H(h) = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} H_0(h - H(\theta_k)) \quad , \quad (3.47)$$

où  $H_0$  est la fonction de Heavyside définie par  $H_0(x) = 1$  si  $x > 0$  et  $H_0(x) = 0$  sinon.

#### 3.4.3.2 Estimation des régions de confiance

Pour  $0 < \Upsilon < 1$ , la fonction quantile  $\mathcal{Q}_H(\Upsilon)$  de la variable aléatoire  $H$  est définie par

$$\mathcal{Q}_H(\Upsilon) = \inf\{h : F_H(h) \geq \Upsilon\} \quad . \quad (3.48)$$

Soit  $\tilde{H}(\theta_1) < \dots < \tilde{H}(\theta_{n_s})$  la statistique ordonnée associée aux réalisations  $H(\theta_1), \dots, H(\theta_{n_s})$ . Un estimateur sans biais de la fonction de répartition  $F_H(h)$  est défini par l'équation (3.47).

Soit  $\Upsilon$  un niveau de probabilité fixé dans  $[0, 1]$  et soient  $H_{\Upsilon+}$  et  $H_{\Upsilon-}$  les estimateurs du  $\frac{1+\Upsilon}{2}$  quantile et du  $\frac{1-\Upsilon}{2}$  quantile relatifs à la variable aléatoire  $H$  et délimitant la région de confiance associée à ce niveau de probabilité s'écrivent alors en utilisant les relations (3.47) et (3.48)

$$H_{\Upsilon+} = \tilde{H}(\theta_a), \quad a = \text{ENTIER} \left( n_s \left( \frac{1+\Upsilon}{2} \right) \right) \quad , \quad (3.49)$$

$$H_{\Upsilon-} = \tilde{H}(\theta_b), \quad b = \text{ENTIER} \left( n_s \left( \frac{1-\Upsilon}{2} \right) \right) \quad . \quad (3.50)$$

$\text{ENTIER}(n)$  : partie entière du nombre  $n$

L'intervalle  $[H_{\Upsilon+}, H_{\Upsilon-}]$  représente la région de confiance pour le niveau de probabilité  $\Upsilon$  de la variable aléatoire  $H$ .

## 3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une formulation probabiliste des incertitudes pour les roues aubagées en présence ou non de désaccordage intentionnel. L'approche probabiliste non paramétrique est utilisée pour modéliser globalement ces incertitudes sachant que l'approche paramétrique usuelle n'est pas adaptée puisqu'elle ne permet de prendre en compte que les incertitudes sur les paramètres du modèle mais ne permet pas de prendre en compte les incertitudes de modélisation et les incertitudes induites par le désaccordage involontaire dû aux tolérances de fabrication. De plus, l'introduction d'un modèle réduit adapté permet d'utiliser un solveur stochastique de Monte Carlo qui est non intrusif et qui permet de contrôler les convergences en cours de calcul.





## Chapitre 4

# Optimisation du désaccordage intentionnel des roues aubagées

*Dans ce chapitre, nous développons la méthodologie d'optimisation par désaccordage intentionnel du comportement mécanique des roues aubagées en présence de désaccordage involontaire et avec une prise en compte du couplage aérodynamique instationnaire.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>62</b>
<b>4.2</b>	<b>Choix du désaccordage intentionnel</b>	<b>62</b>
4.2.1	Désaccordage intentionnel par modification géométrique des aubes	62
4.2.2	Influence des modifications géométriques des aubes sur l'aérodynamique	63
<b>4.3</b>	<b>Méthode d'optimisation de la répartition des aubes géométriquement modifiées dans le cadre du désaccordage intentionnel</b>	<b>65</b>
4.3.1	Principe de réduction des possibilités de répartition	66
4.3.2	Validation de la méthode de réduction des possibilités de répartition	67
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>

---

### 4.1 Introduction

Dans le cadre de la conception robuste des roues aubagées désaccordées involontairement par entre autres les tolérances de fabrication et les variabilités des propriétés des matériaux, le désaccordage intentionnel est utilisé.

Dans ce contexte, nous commençons par choisir un type de désaccordage intentionnel, puis nous formulons le problème d'optimisation consistant à trouver la répartition optimale de  $N$  aubes (par exemple 23 aubes) constituées de plusieurs types d'aubes (par exemple de deux types d'aubes qui diffèrent par leur géométrie) et le degré de modification de chaque type d'aubes. Les contraintes de ce problème d'optimisation sont définies par des critères de niveau vibratoire des aubes de la roue désaccordée et de marges d'instabilité aéroélastique.

### 4.2 Choix du désaccordage intentionnel

L'idée du désaccordage intentionnel d'une roue aubagée est d'appliquer à celle-ci des modifications géométriques ou des modifications des propriétés des matériaux générant des écarts sur les fréquences des aubes des différents secteurs tout en limitant l'impact sur les caractéristiques aérodynamiques. Il existe plusieurs types de solutions techniques permettant d'introduire un désaccordage qui génère des écarts significatifs en fréquence sur les structures monoblocs ou à aubes rapportées. Parmi celles-ci, nous pouvons citer :

- les modifications des matériaux des aubes : utilisation de matériaux dont les propriétés mécaniques telles que le module d'Young ou la masse volumique sont différentes de celles des aubes nominales. Ces modifications ne concernent que les roues à aubes rapportées,
- les modifications de l'interface entre les aubes et le disque : raidissement de la zone d'attache, ajout ponctuel de masse en pied d'aube, etc. Ces modifications ne concernent que les roues à aubes rapportées,
- les modifications géométriques des aubes : amincissement ou épaissement des aubes, décalage de l'axe d'empilage des coupes coniques des aubes, modifications locales d'épaisseur (grattage et/ou bossage), etc. Ces modifications permettant de décaler les fréquences propres sont applicables aussi bien aux roues aubagées à aubes rapportées qu'aux roues aubagées monoblocs.

#### 4.2.1 Désaccordage intentionnel par modification géométrique des aubes

Dans la mesure où le désaccordage par modification de la forme des aubes s'applique à tout type de roue aubagée, le choix technique de désaccordage intentionnel retenu dans ce travail porte sur ce type de modification. Plus précisément, nous utilisons une modification locale d'épaisseur sur deux zones en tête et en pied d'aube (voir figure 4.1). Chaque zone est une portion

d'ellipsoïde correspondant à une diminution locale d'épaisseur (grattage) ou à une augmentation locale d'épaisseur (bossage). L'intersection de cette portion d'ellipsoïde (demi-ellipsoïde) avec la frontière de l'aube est une ellipse dont les paramètres définissent la modification géométrique. Ces paramètres sont la position du centre de l'ellipse (2 ou 3 paramètres suivant les cas), ses dimensions (2 paramètres) et l'épaisseur de modification au centre (1 paramètre). Pour les deux zones d'une aube, il y a donc au total 10 ou 12 paramètres qui définissent la géométrie de l'aube modifiée géométriquement. On note  $\mathbf{r}$  le vecteur de ces 10 ou 12 paramètres, le vecteur  $\mathbf{r}$  appartenant à un espace admissible  $\mathcal{C}_{ad}$ .

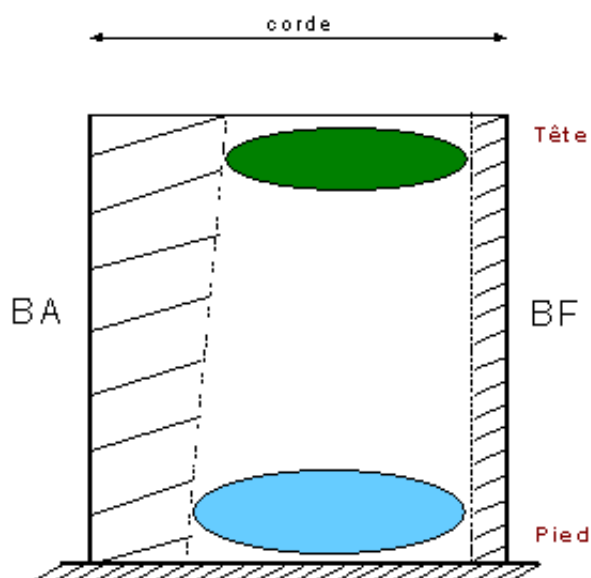
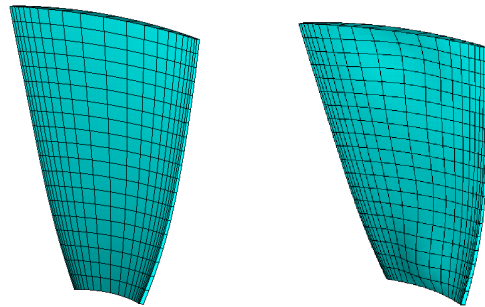


FIG. 4.1: Localisation spatiale des ellipses de grattage/bossage sur l'aube.

Lorsqu'on effectue un grattage en tête d'aube et un bossage en pied d'aube, les premières fréquences propres de l'aube modifiée augmentent. De même, lorsqu'on gratte l'aube en pied et qu'on crée un bossage en tête, les premières fréquences propres diminuent.

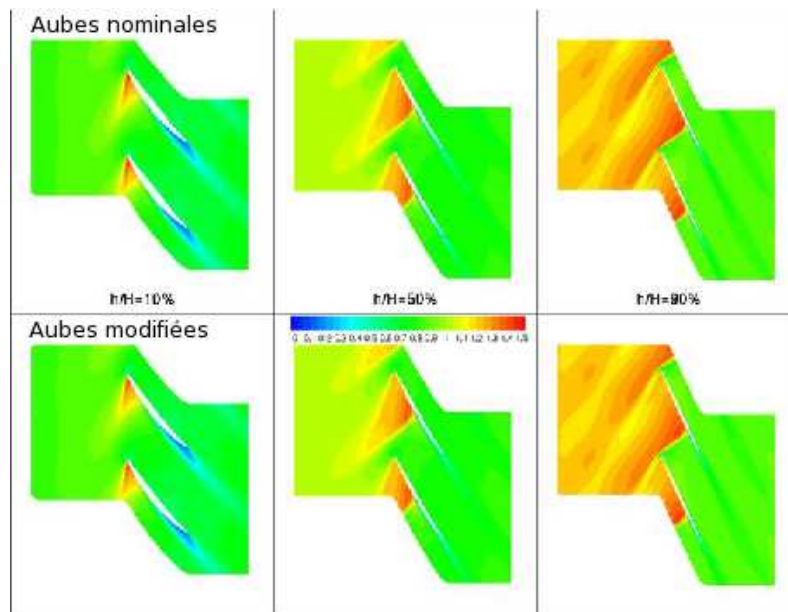
#### 4.2.2 Influence des modifications géométriques des aubes sur l'aérodynamique

Pour étudier l'influence des modifications locales d'épaisseur sur l'aérodynamique, deux modèles d'aubes ont été créés : une aube nominale et une aube modifiée par grattage en tête et bossage en pied d'aube de 20% de l'épaisseur localement sur les zones elliptiques. A titre d'illustration, une aube nominale et une aube grattée en tête et bossée en pied de 80% sont représentées sur la figure 4.2



**FIG. 4.2:** Aube nominale (à gauche) et aube modifiée (à droite).

La représentation du champ de Mach sur la figure 4.3 pour l'aube nominale et pour l'aube modifiée géométriquement par grattage en tête et bossage en pied de 20% de l'épaisseur, en configuration accordée (symétrie cyclique), donne une idée de l'influence de la modification géométrique sur l'aérodynamique stationnaire. On peut notamment y voir que le champ de Mach est très peu différent entre les deux configurations.



**FIG. 4.3:** Comparaison du champ de Mach pour les aubes nominale et modifiée en symétrie cyclique (calcul Turbomeca).

Il est donc légitime de considérer que la modification locale d'épaisseur, telle que définie au paragraphe 4.2.1, dans la limite de 20% ne perturbe que très peu l'aérodynamique stationnaire, propriété qui est supposée pouvoir être étendue à l'aérodynamique instationnaire.

### 4.3 Méthode d'optimisation de la répartition des aubes géométriquement modifiées dans le cadre du désaccordage intentionnel

Les différentes géométries d'aubes obtenues par modification locale d'épaisseur doivent être réparties sur la roue. Différents types de motifs de répartition ont été testés par les chercheurs dans le passé. On peut notamment citer le désaccordage par alternance de deux aubes de fréquences différentes (Griffin et Hoosac [38]), le désaccordage périodique (Imregun et Ewins [44], Rzakowski [82]), et le désaccordage harmonique (Castanier *et al.* [21], Castanier et Pierre [18], Kenyon et Griffin [52]). Le but de tous ces motifs de désaccordage est d'avoir une répartition des différents types d'aubes sur la roue optimisant son comportement aéromécanique. De manière générale, la pratique conseillée dans la littérature de répartition de différentes aubes sur une roue dans le cadre du désaccordage intentionnel est une répartition suivant des motifs répétitifs. Cela permet notamment de réduire de façon conséquente le nombre de répartitions à tester, car le nombre de répartitions possibles d'aubes différents sur une roue est généralement très grand (cf. tableau 4.1). Ce nombre de répartitions différentes peut d'ailleurs être approximé par  $2^N/N$  lorsque  $N$  est grand comme on peut l'observer sur ce tableau.

Nombre "N" d'aubes de la roue	Nombre de répartitions différentes	Arrondi de $2^N/N$
2	3	2
3	4	3
4	6	4
5	8	6
6	14	11
7	20	18
8	36	32
9	60	56
10	108	102
11	188	186
12	352	341
13	632	630
14	1182	1170
15	2192	2185
20	52488	52429
25	13422184	1342177

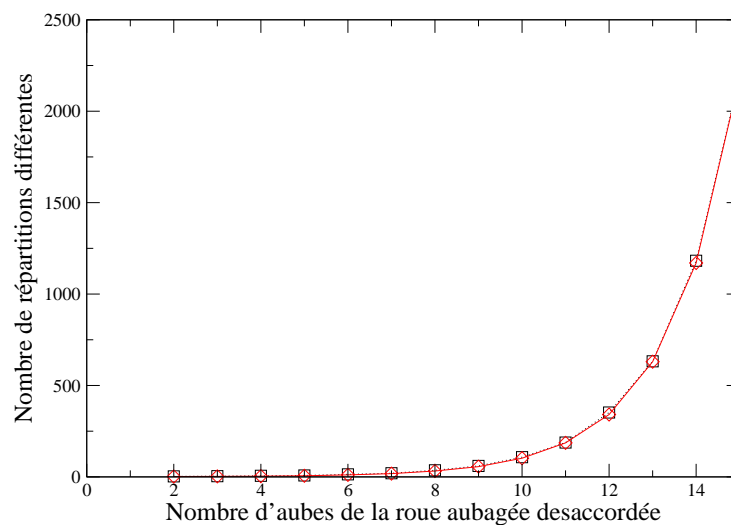
**TAB. 4.1:** Nombre de configurations de répartition de 2 types d'aubes différents sur une roue aubagée désaccordée à  $N$  aubes.

Récemment, une nouvelle méthode permettant d'utiliser la physique du comportement dynamique des roues aubagées pour réduire les possibilités de répartition favorable a été introduite

par (Han et Mignolet [40]) pour le cas de répartitions de deux types d'aubes sur une roue aubagée à  $N$  aubes. Nous allons utiliser cette méthode pour réduire le nombre de configurations de répartition à tester.

### 4.3.1 Principe de réduction des possibilités de répartition

Le principe de cette méthode est basé sur l'observation du comportement dynamique des roues aubagées. En effet, il a été constaté qu'en présence de couplage fort, les réponses vibratoires entre les aubes tendent à être globales au niveau de la roue, alors qu'en présence de couplage faible, ces interactions tendent à se localiser sur quelques aubes voisines. Ainsi, dans le cas d'une roue aubagée dont les aubes sont faiblement couplées par le disque, la disposition de plusieurs aubes consécutives du même type aura sur l'aube centrale du groupement un effet similaire à une disposition en configuration quasi-cyclique. Cela se traduit notamment par une forte sensibilité de la roue désaccordée intentionnellement aux faibles niveaux de désaccordage involontaire. Ainsi, pour améliorer le comportement dynamique de la roue, il faudrait avoir une répartition des différents types d'aubes présentant beaucoup d'alternances afin de limiter les échanges d'énergie vibratoire entre les aubes et donc d'atténuer le phénomène de localisation des réponses vibratoires. Dans le cas d'une roue aubagée dont les aubes sont fortement couplées par le disque, le raisonnement inverse est de mise.



**FIG. 4.4:** Evolution du nombre de configurations différentes de répartition de 2 types d'aubes sur une roue aubagées à  $N$  aubes en fonction du nombre  $N$  d'aubes de la roue aubagée.

Supposons que l'on ait deux types d'aubes (A et B) à utiliser pour réaliser une roue aubagée à  $N$  aubes. L'évolution du nombre de configurations différentes de répartitions de ces deux types d'aubes sur la roue en fonction du nombre d'aubes de la roue a l'allure d'une courbe exponentielle (cf. figure 4.4).

En suivant la logique précédente du comportement dynamique d'une roue aubagée en fonction de son niveau de couplage inter-aubes, la réduction du nombre de répartitions consiste à considérer que pour les deux types d'aubes A et B, si la répartition optimale présente peu d'alternances d'aubes différentes, elle pourra être reconstruite par une répartition de motifs de la forme AA ou BB. Si par contre la répartition optimale présente beaucoup d'alternances d'aubes différentes, elle pourra être reconstruite par une répartition de motifs de la forme AB ou BA. Dans les deux cas de figure, l'idée est de considérer des répartitions de deux groupements de deux aubes. Par conséquent, le nombre de possibilités de répartition est réduit. A titre d'illustration, pour une roue aubagée ayant 20 aubes, il existe 52488 répartitions différentes de deux types d'aubes, alors qu'en utilisant la méthode de réduction des possibilités de répartitions, tout se passe comme si on se ramenait à une roue aubagée à 10 aubes et seuls 2 fois 108 répartitions différentes seraient à tester. Cela représente un rapport de réduction de 243, et donc un gain en temps de calcul considérable. Dans la suite, nous retenons donc cette méthode de réduction des possibilités de répartition.

### 4.3.2 Validation de la méthode de réduction des possibilités de répartition

Nous présentons dans cette partie un test de validation de cette méthode sur une roue aubagée industrielle. L'idée ici est de comparer la meilleure configuration de répartition de deux types d'aubes en testant toutes les possibilités et en utilisant la méthode de réduction du nombre de configurations de répartition, dans le cadre du désaccordage intentionnel en vue de la réduction de la réponse forcée en présence de désaccordage involontaire. Dans ce chapitre, on limite l'étude paramétrique du désaccordage involontaire aux seules incertitudes induites sur la matrice de raideur et donc au seul paramètre de dispersion  $\delta_K$ . Les incertitudes sur les autres grandeurs seront prises en compte dans le chapitre 5.

#### 4.3.2.1 Présentation du cas test de validation

La roue aubagée considérée (voir figure 4.5), dont le spectre est donné sur la figure (4.6) est une roue à 12 aubes pour avoir un nombre acceptable de configurations à tester.

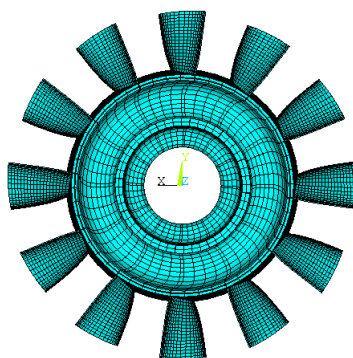
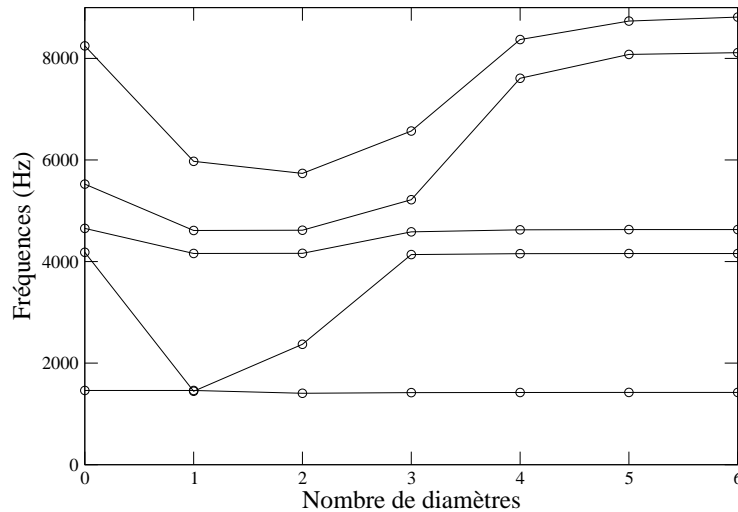


FIG. 4.5: Roue aubagée à 12 aubes.



Ainsi, le nombre de répartitions différentes de deux types d'aubes est de 352 lorsqu'on considère une répartition d'une aube de type A et d'une aube de type B. Par contre, lorsqu'on considère une répartition des groupements d'aubes AA et BB ou AB et BA, le nombre de répartitions différentes est de 2 fois  $14 = 28$ .



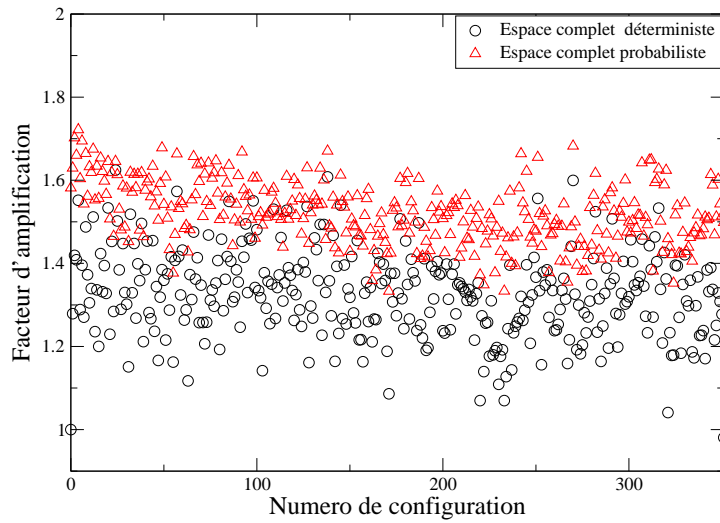
**FIG. 4.6:** Spectre de la roue accordée : représentation des fréquences propres en fonction du nombre de diamètres des modes.

Pour l'étude de la réponse forcée, une excitation cyclique d'ordre 4 est appliquée sur la bande fréquentielle d'analyse  $\mathbb{B}_f = [4400, 4750]$  Hz. La même excitation est appliquée en configuration accordée ou désaccordée. Pour avoir une grandeur indépendante du niveau d'excitation, on introduit le facteur d'amplification dynamique qui est une grandeur adimensionnelle qui représente le rapport entre l'amplitude maximale de la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée et l'amplitude maximale de la réponse forcée de la roue aubagée accordée.

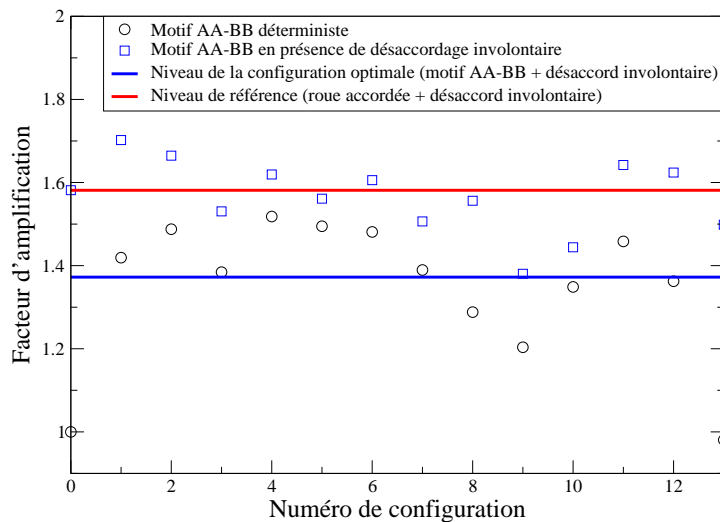
L'amortissement structural est introduit par l'intermédiaire d'un taux fixé ici à 0.3%. Pour le modèle réduit, la base de projection utilisée est constituée des modes dont les fréquences sont contenues dans la bande  $[0, 8200]$  Hz pour le secteur nominal de la roue aubagée.

#### 4.3.2.2 Application de la méthode de réduction des possibilités de répartition

Cette application est faite en réponse forcée. Dans un premier temps, on considère la roue sans désaccordage intentionnel mais avec désaccordage involontaire. Le niveau de désaccordage involontaire est défini par le paramètre de dispersion  $\delta_K$  des aubes. On a alors calculé la réponse forcée pour différentes valeurs du paramètre de dispersion et on a obtenu la valeur  $\delta_K^* = 0.07$  de  $\delta_K$  pour laquelle le facteur aléatoire d'amplification dynamique est maximal avec une confiance de 99%. Dans un deuxième temps, on calcule les différentes configurations des roues désaccordées intentionnellement en présence du désaccordage involontaire correspondant à la valeur  $\delta_K^*$  du paramètre de dispersion.



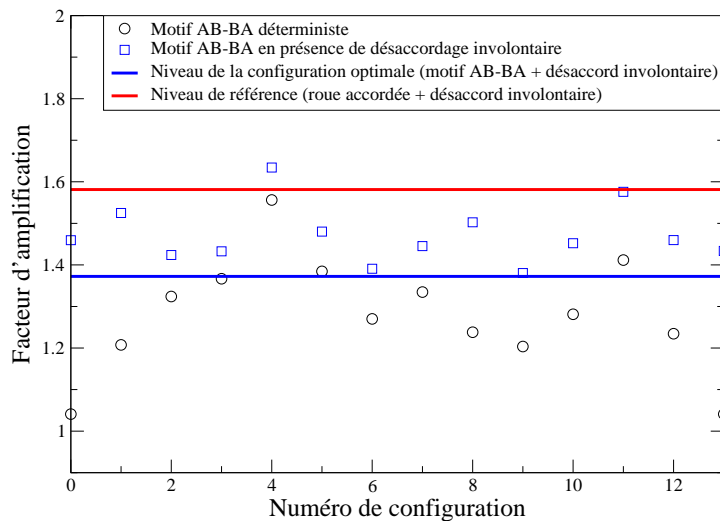
**FIG. 4.7:** Niveaux du facteur d'amplification dynamique des différentes configurations de la roue désaccordée intentionnellement en présence de désaccordage involontaire (espace complet probabiliste) ou sans désaccordage involontaire (espace complet déterministe) pour toutes les possibilités (pas de réduction du nombre de configurations) de répartition (352 configurations).



**FIG. 4.8:** Niveaux du facteur aléatoire d'amplification dynamique des différentes configurations du sous-ensemble des 14 configurations réduites AA-BB.

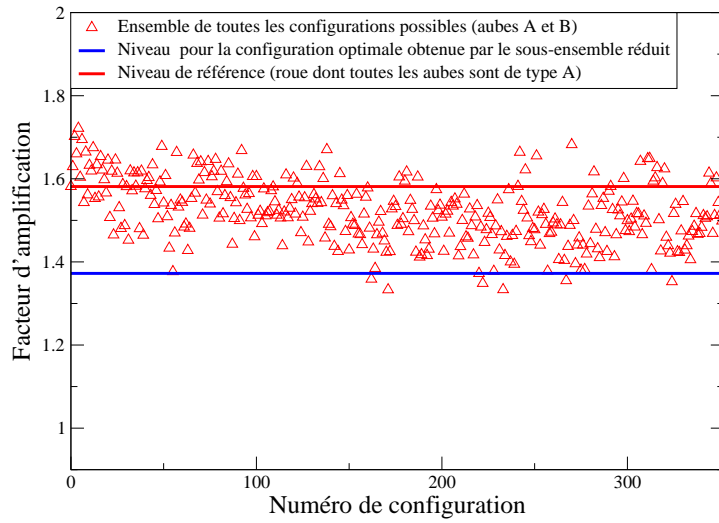
La figure 4.7 montre les niveaux du facteur aléatoire d'amplification dynamique de la réponse forcée obtenus pour les 352 répartitions différentes possibles des deux types d'aubes A et B (espace complet) dans un cadre déterministe (absence de désaccordage involontaire) et probabiliste

(présence de désaccordage involontaire). On y voit notamment que le facteur d'amplification de la réponse forcée de la roue aubagée est toujours plus élevé en présence de désaccordage involontaire quelque soit le désaccordage intentionnel.



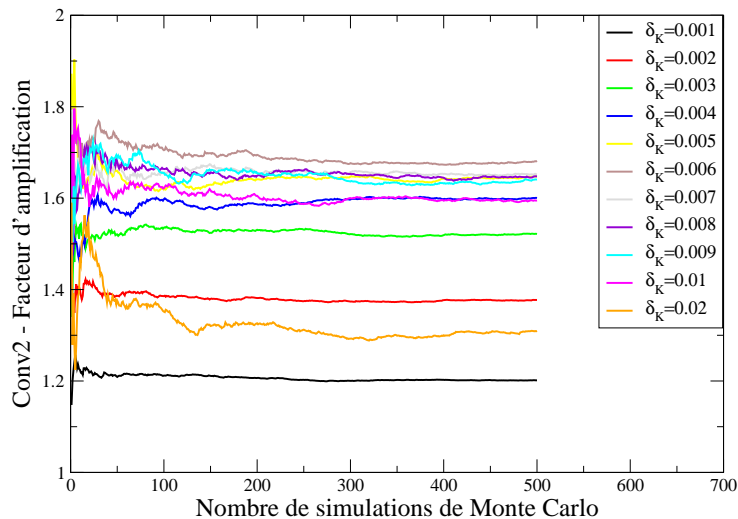
**FIG. 4.9:** Niveaux du facteur aléatoire d'amplification dynamique des différentes configurations du sous-ensemble des 14 configurations réduites AB-BA.

Les figures 4.8 et 4.9 montrent les niveaux du facteur aléatoire d'amplification dynamique de la réponse forcée obtenus avec les motifs AA-BB et AB-BA (pour le sous ensemble de configurations réduites) dans un cadre déterministe (sans désaccordage involontaire) et probabiliste (avec désaccordage involontaires). Il en ressort que les configurations avec les motifs de répartition AB-BA ont globalement des niveaux d'amplification dynamique légèrement inférieurs à ceux obtenus pour les configurations avec les motifs AA-BB. La configuration optimale trouvée dans les deux cas de figure est la même. Il s'agit de la configuration de répartition suivante : AABBAABBAABB. Les figures 4.8, 4.9, et 4.10 montrent qu'il existe des configurations de désaccordage intentionnel qui sont plus sévères qu'une roue sans désaccordage intentionnel, à cause de la présence du désaccordage involontaire. Fort heureusement, il existe des configurations de désaccordage intentionnel qui sont moins sévères qu'une roue sans désaccordage intentionnel, en présence de désaccordage involontaire. Toutefois, la configuration optimale du désaccordage intentionnel en présence de désaccordage involontaire donne un facteur aléatoire d'amplification dynamique qui reste supérieur à celui de la roue désaccordée intentionnellement sans désaccordage involontaire. On voit donc ici le rôle essentiel du désaccordage involontaire dans le cadre de l'optimisation des configurations en désaccordage intentionnel. Les différents résultats obtenus valident d'ores et déjà la méthode de réduction du nombre de configurations de désaccordage intentionnel. Nous compléterons cette validation dans la suite.

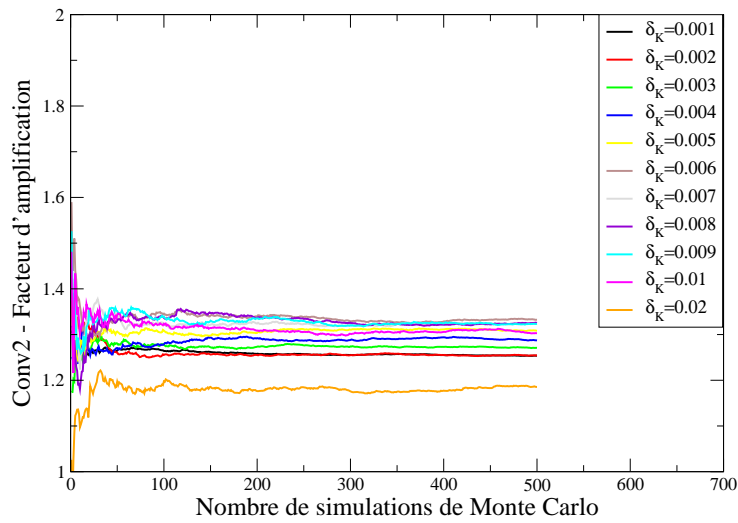


**FIG. 4.10:** Niveaux du facteur aléatoire d'amplification dynamique des différentes configurations de l'ensemble des 352 configurations, comparés au niveau de la configuration optimale obtenue par le sous-ensemble réduit de configurations et la roue nominale de référence.

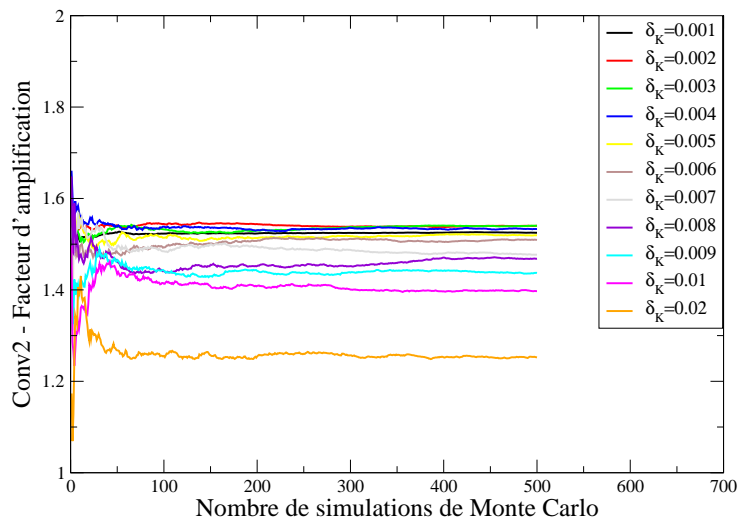
Nous allons maintenant exposer les résultats de l'évolution du facteur d'amplification dynamique en fonction du niveau de dispersion pour la roue nominale de référence et pour les configurations optimales obtenues. Au préalable, il est nécessaire de montrer que le nombre de simulations de Monté Carlo retenu est suffisant pour que le facteur d'amplification converge.



**FIG. 4.11:** Convergence en moyenne d'ordre 2 du facteur aléatoire d'amplification dynamique pour la roue nominale de référence pour différentes valeurs  $\delta_K$  de dispersion.



**FIG. 4.12:** Convergence en moyenne d'ordre 2 du facteur aléatoire d'amplification dynamique de la roue avec désaccordage intentionnel optimal sur l'ensemble de toutes les configurations de répartition d'aubes A et B et pour différentes valeurs  $\delta_K$  de dispersion.

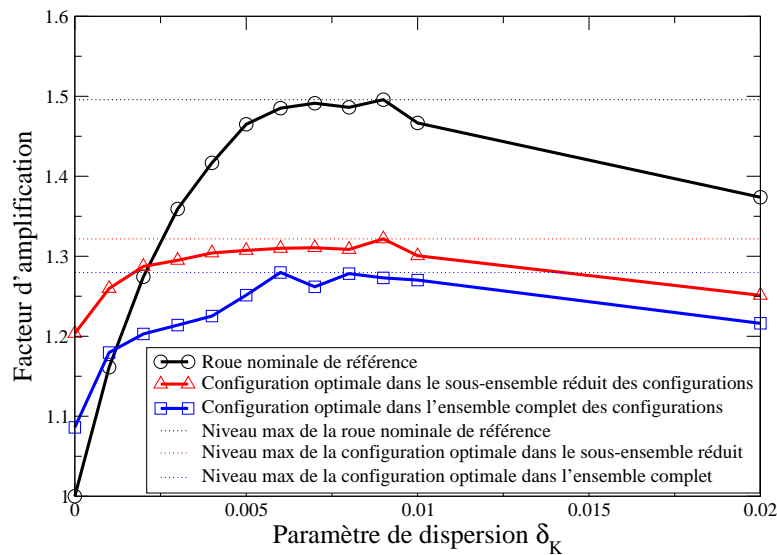


**FIG. 4.13:** Convergence en moyenne d'ordre 2 du facteur aléatoire d'amplification dynamique de la roue avec désaccordage intentionnel optimal sur le sous-ensemble réduit des configurations d'aubes AB et BA et pour différentes valeurs  $\delta_K$  de dispersion.

Les courbes de convergence du facteur aléatoire d'amplification dynamique sont données, en présence de désaccordage involontaire contrôlé par le paramètre de dispersion  $\delta_K$ , sur la figure 4.11 pour la roue nominale de référence, sur la figure 4.12 pour la roue avec désaccordage

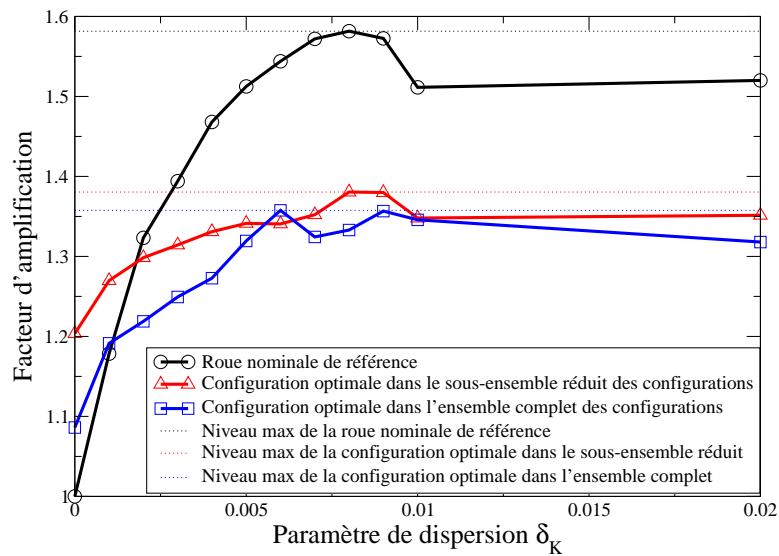
intentionnel optimal sur l'ensemble de toutes les configurations de répartition d'aubes A et B, et sur la figure 4.13 pour la roue avec désaccordage intentionnel optimal sur le sous-ensemble réduit des configurations d'aubes AB et BA. Ces courbes montrent que 500 réalisations pour le solveur stochastique de Monte Carlo donnent une bonne convergence pour tous les cas de calcul considérés. Ce nombre de simulations de Monté Carlo est donc retenu pour l'étude de l'évolution du facteur aléatoire d'amplification dynamique en fonction du niveau de dispersion.

Les figures 4.14 et 4.15 montrent une comparaison des évolutions du facteur aléatoire d'amplification dynamique en fonction du niveau de désaccordage involontaire défini par le paramètre  $\delta_K$  (1) pour la roue aubagée dont toutes les aubes sont de types A, (2) pour la configuration optimale de répartition des aubes A et B calculée sur l'ensemble de toutes les configurations et (3) pour la configuration optimale de répartition des groupements d'aubes AB et BA calculée sur le sous-ensemble réduit des configurations. Les graphes montrent le coefficient d'amplification pour une confiance de 95% pour la figure 4.14 et pour une confiance de 99 % pour la figure 4.15.



**FIG. 4.14:** Comparaison de la sensibilité à la dispersion incluant le désaccordage involontaire de la roue nominale de référence (cercles), de l'optimum de le sous-espace réduit (triangles) et de l'optimum de l'espace complet (carrés) proba 95%.

Sur ces graphes, on voit que le niveau maximum d'amplification dynamique observé pour la roue aubagée avec désaccordage intentionnel optimal trouvé sur le sous-ensemble réduit des configurations de répartition (1.32 pour une confiance de 95% et 1.38 pour une confiance de 99%) est très proche de celui de la roue aubagée avec désaccordage intentionnel optimal trouvé sur l'ensemble de toutes les configurations de répartition (1.28 pour une confiance de 95% et 1.36 pour une confiance de 99%).



**FIG. 4.15:** Comparaison de la sensibilité à la dispersion incluant le désaccordage involontaire de la roue nominale de référence (cercles), de l'optimum de le sous-espace réduit (triangles) et de l'optimum de l'espace complet (carrés) proba 99%.

Ces résultats confirment le fait que l'utilisation de la méthode de réduction du nombre de configurations à analyser donne une approximation tout à fait acceptable et permet en très peu de configurations testées de trouver une configuration robuste dont le comportement dynamique est très favorable.

## 4.4 Conclusion

Nous avons effectué dans ce chapitre des investigations sur une manière d'optimiser le désaccordage intentionnel des roues aubagées. Elle consiste à construire différents types d'aubes et à les répartir sur la roue. Les types d'aubes sont obtenues par des modifications locales d'épaisseur.

Ensuite, nous avons analysé deux possibilités de répartition des types d'aubes :

- réaliser une optimisation sur toutes les possibilités de répartition ;
- réaliser une optimisation sur un sous-ensemble réduit de configurations de répartitions judicieusement choisies.

Face à la lourdeur de l'optimisation de toutes les répartitions possibles pour les roues à grand nombre d'aubes, nous avons choisi une optimisation de la répartition de deux types d'aubes sur la roue aubagée, dans un sous-ensemble réduit de répartition qui, de par sa construction, permet d'obtenir des configurations optimales pour lesquelles le comportement dynamique de la roue aubagée est très proche du comportement de la roue optimale réelle, ce qui valide la méthode de réduction des configurations.

## Chapitre 5

# Application à la conception robuste d'un prototype de roue aubagée aéronautique

*Dans ce chapitre, nous présentons la méthode d'optimisation pour la conception robuste des roues aubagées avec prise en compte du couplage aérodynamique en utilisant les méthodes développées dans les chapitres précédents concernant la modélisation probabiliste des incertitudes incluant le désaccordage involontaire et la méthode de réduction de configurations pour la conception des roues avec désaccordage intentionnel. Une application à la conception robuste des roues aubagées est alors faite sur un prototype de roue aubagée de Turbomeca.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>76</b>
<b>5.2</b>	<b>Présentation du modèle du prototype de roue aubagée</b>	<b>76</b>
<b>5.3</b>	<b>Problématique de conception robuste du prototype de roue aubagée</b>	<b>77</b>
<b>5.4</b>	<b>Comportement dynamique de la roue aubagée nominale désaccordée involontairement</b>	<b>78</b>
5.4.1	Etude de la stabilité aéroélastique	78
5.4.2	Etude de la réponse forcée	81
<b>5.5</b>	<b>Construction de la fonction coût associée à l'optimisation du niveau de désaccordage intentionnel</b>	<b>82</b>
<b>5.6</b>	<b>Comportement dynamique de la roue aubagée optimisée par désaccordage intentionnel en présence de désaccordage involontaire</b>	<b>86</b>
5.6.1	Configuration optimale de répartition des aubes modifiées géométriquement : roue aubagée optimale	86
5.6.2	Étude de la stabilité aéroélastique	87
5.6.3	Etude de la réponse forcée	88
<b>5.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>91</b>

---



## 5.1 Introduction

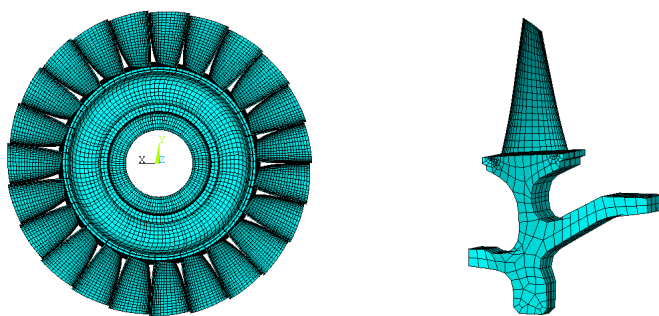
Dans une première partie de ce chapitre, on présente un prototype de roue aubagée de Turbomeca pour lequel nous allons mener l'analyse de conception robuste avec du désaccordage intentionnel.

Dans une seconde partie, nous présentons la méthode d'optimisation pour la conception robuste en désaccordage intentionnel de la roue aubagée avec prise en compte du couplage aérodynamique. La conception est dite robuste car la conception optimale est construite avec un modèle numérique qui tient compte des incertitudes sur les paramètres, des incertitudes de modélisation et des incertitudes induites par le désaccordage involontaire. Dans ces conditions, le problème d'optimisation est construit sur la base d'un modèle numérique stochastique. Enfin dans la troisième partie, nous présentons les résultats de l'optimisation avec désaccordage intentionnel en conception robuste.

Sur cette application industrielle pour laquelle on suppose qu'une résonance critique est constatée dans le domaine de fonctionnement du moteur sur lequel cette roue est montée, nous étudions le comportement dynamique de cette roue aubagée sous l'effet du désaccordage involontaire et en présence de couplage avec l'aérodynamique instationnaire. Ensuite, nous effectuons une optimisation du désaccordage intentionnel par modification de la géométrie de certaines aubes afin d'avoir une nouvelle roue aubagée qui est robuste vis-à-vis des tolérances de fabrication ou autres sources de désaccordage involontaire, et dont le comportement dynamique est amélioré.

## 5.2 Présentation du modèle du prototype de roue aubagée

La roue aubagée dont on veut faire une conception robuste (voir figure 5.1) est un prototype de roue aubagée monobloc à 23 aubes d'un étage de compresseur axial de moteur aéronautique.



**FIG. 5.1:** Modèle éléments finis de la roue aubagée industrielle ayant 128202 degrés de liberté. Roue complète (figure gauche) et un secteur de la roue (figure droite).

La vitesse de rotation de la roue aubagée est constante et non nulle. La modification des fréquences propres de la roue due au raidissement centrifuge et à l'allongement des aubes lorsque

la structure est en rotation est prise en compte dans l'ensemble des calculs. Sur le modèle de la roue aubagée, un encastrement est appliqué comme condition aux limites sur le bord interne de la roue afin d'éliminer les modes de corps rigide. Il est à noter que ces conditions aux limites ne sont pas représentatives des conditions réelles de montage de la roue aubagée sur le moteur. L'amortissement est modélisé par un modèle d'amortissement structural de facteur de perte (taux d'amortissement) 0.003. L'évolution des fréquences propres du modèle de la roue aubagée accordée en fonction du nombre de diamètres des modes propres est présentée sur la figure 5.2.

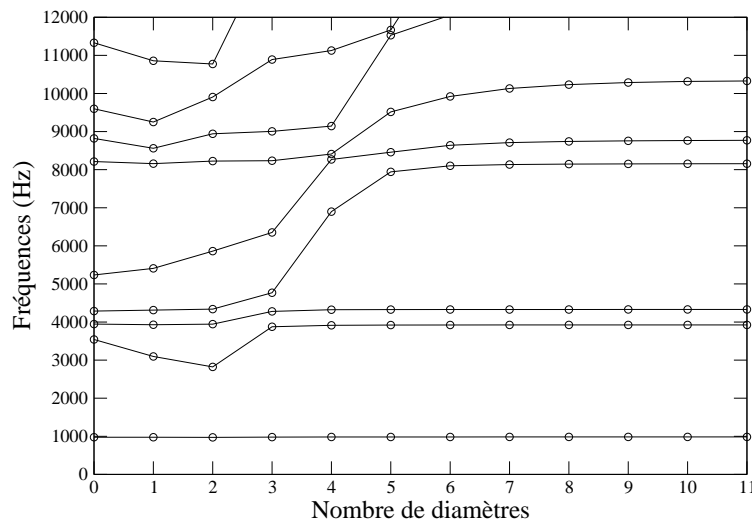


FIG. 5.2: Spectre de la roue accordée : représentation des fréquences propres en fonction du nombre de diamètres des modes.

### 5.3 Problématique de conception robuste du prototype de roue aubagée

On s'intéresse ici à la réponse forcée d'une roue aubagée nominale pour une excitation cyclique d'ordre 9 dans la plage fréquentielle  $\mathbb{B} = [4400, 4750]$  Hz. On veut optimiser la conception de cette roue aubagée de manière à réduire les amplitudes de vibration des aubes pour cette excitation et pour cette bande de fréquence. Pour cela, une nouvelle roue aubagée va être conçue en désaccordage intentionnel dans le cadre de la conception robuste par modification géométrique de la roue nominale.

Du fait du désaccordage involontaire engendré entre autres par les tolérances de fabrication de la roue réelle, qui amplifient les niveaux vibratoires des aubes, il est nécessaire d'étudier le comportement dynamique de la roue aubagée nominale vis-à-vis du niveau de désaccordage involontaire, et de réduire au maximum la sensibilité du comportement dynamique de la roue aubagée désaccordée intentionnellement vis-à-vis du niveau de désaccordage involontaire.

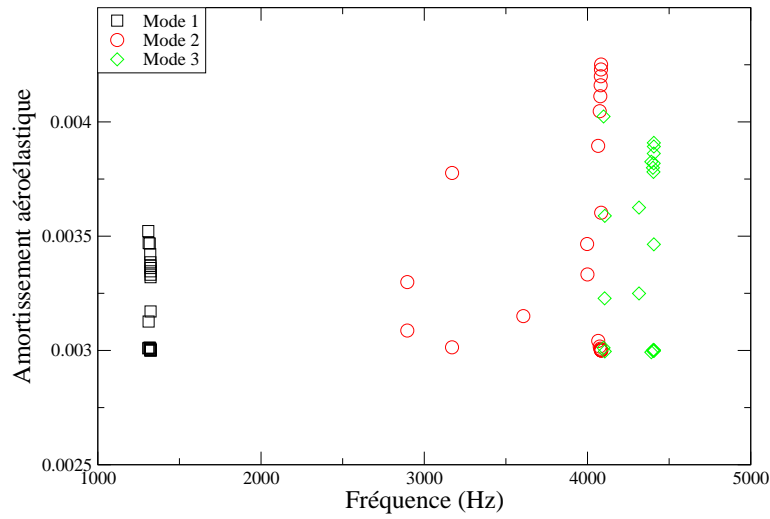
On commencera par une étude de la stabilité aéroélastique de la roue nominale pour laquelle nous montrerons qu'il n'y a pas d'instabilité dans toute la bande de fréquence. Toutefois, il est important que le bon comportement en stabilité aéroélastique de la roue nominale soit conservé au niveau de la roue aubagée désaccordée intentionnellement dont les réponses forcées ont été optimisées. Ainsi, l'optimisation de la réponse forcée est faite avec une contrainte sur la stabilité aéroélastique. Cette contrainte se traduit dans cette application par le fait que le mode le moins stable de la roue aubagée optimisée doit avoir un niveau d'amortissement aéroélastique supérieur ou égal à 80% du niveau d'amortissement aéroélastique du mode le moins stable de la roue nominale.

### 5.4 Comportement dynamique de la roue aubagée nominale désaccordée involontairement

Dans cette partie, l'étude des effets du désaccordage involontaire sur le comportement dynamique de la roue aubagée nominale est menée. Pour l'étude paramétrique du désaccordage involontaire, les incertitudes induites sur la matrice de rigidité et les incertitudes induites sur la matrice des forces aérodynamiques généralisées sont prises en compte. Ainsi, les paramètres de dispersion correspondants seront  $\delta_K$  pour la matrice de rigidité et  $\delta_A$  pour la matrice des forces aérodynamiques généralisées. Le choix de ces deux paramètres est motivé par le fait qu'il est montré dans (Capiez-Lernout *et al.* [17]), par résolution du problème inverse de spécification des tolérances de fabrication, que le niveau de dispersion de la matrice de masse est 1000 fois inférieur à celui de la matrice de rigidité sur les structures réelles. Il est également montré dans (Capiez-Lernout [15]) que la présence d'incertitudes sur la dissipation modifie peu les probabilités d'occurrence du facteur aléatoire d'amplification dynamique. Ainsi, pour l'application considérée dans ce chapitre, les paramètres de dispersion  $\delta_M$  pour la matrice de masse et  $\delta_D$  pour la matrice de dissipation sont négligés.

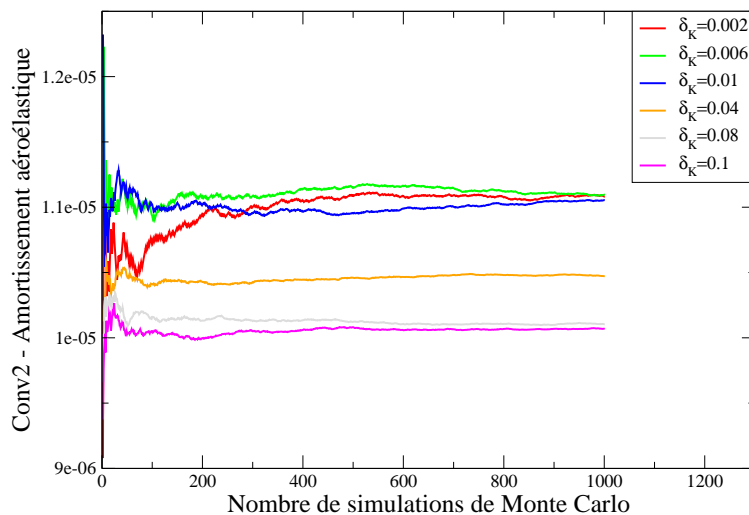
#### 5.4.1 Etude de la stabilité aéroélastique

L'étude de la stabilité aéroélastique est effectuée sur les trois premières familles de modes : le mode 1 (premier mode de flexion) à tous les diamètres, le mode 2 (premier mode de torsion) à tous les diamètres et le mode 3 (deuxième mode de flexion) à tous les diamètres. La méthode de résolution des équations de flottement est la méthode simplifiée donnée dans l'annexe C. La figure 5.3 montre les niveaux de stabilité obtenus pour ces trois familles de modes en terme d'amortissement aéroélastique défini comme la somme de l'amortissement aérodynamique et de l'amortissement structural. Comme l'amortissement structural est de 0.003% et que l'amortissement aéroélastique est supérieur ou égal à 0.003% sur la figure, on peut en déduire que l'amortissement aérodynamique est toujours positif pour les trois premières familles de modes de cette roue. Ces trois familles de modes sont donc stables. Parmi ces trois familles de modes, celle qui a globalement (en moyenne) le plus faible niveau de stabilité est celle du mode 1. L'étude probabiliste de la stabilité aéroélastique portera dans le cadre de la conception robuste sur cette famille de modes.

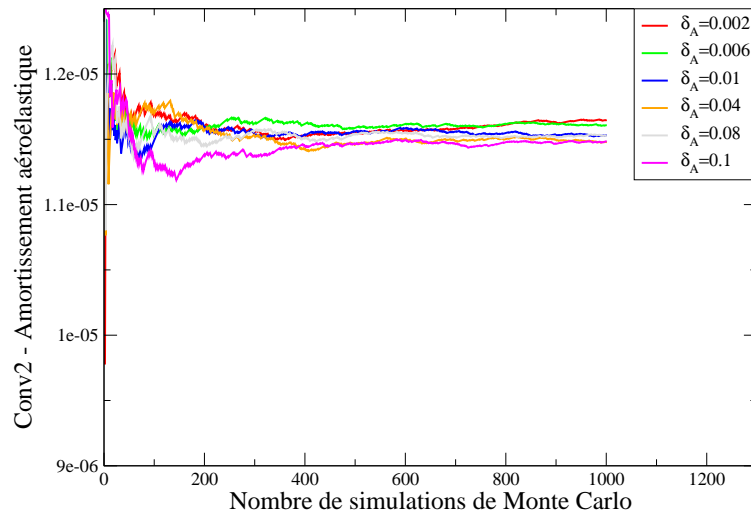


**FIG. 5.3:** Niveaux de stabilité des familles de modes 1, 2 et 3 pour la roue aubagée nominale en l'absence de désaccordage involontaire, exprimés en terme d'amortissement aéroélastique défini comme la somme de l'amortissement aérodynamique et de l'amortissement structural.

Pour l'analyse des effets du désaccordage involontaire pris en compte à travers les paramètres de dispersion  $\delta_K$  et  $\delta_A$ , les courbes de convergence vis-à-vis du nombre de réalisation du solveur stochastique de Monte Carlo sont au préalable montrées à la figure 5.4 pour  $\delta_K$  et à la figure 5.5 pour  $\delta_A$ . Ces courbes montrent que l'on obtient une bonne convergence pour 1000 réalisations pour tous les cas de calcul considérés.

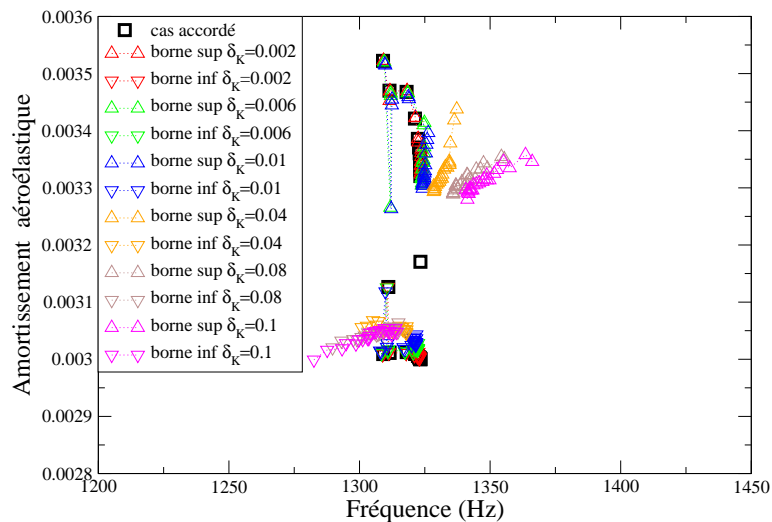


**FIG. 5.4:** Convergence en moyenne d'ordre 2 de l'amortissement aéroélastique aléatoire pour la famille du mode 1 de la roue aubagée nominale pour différents niveaux  $\delta_K$  de dispersion.

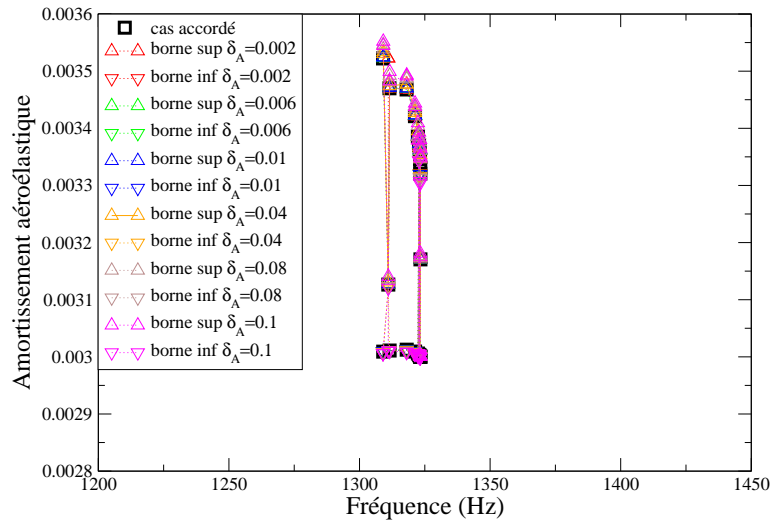


**FIG. 5.5:** Convergence en moyenne d'ordre 2 de l'amortissement aéroélastique aléatoire pour la famille du mode 1 de la roue aubagée nominale pour différents niveaux  $\delta_A$  des incertitudes sur les forces aérodynamiques instationnaires généralisées.

Les niveaux d'amortissement aéroélastique sont donnés sur les figures 5.6 et 5.7 en présence de désaccordage involontaire et en présence d'incertitudes sur les forces aérodynamiques instationnaires généralisées.



**FIG. 5.6:** Bornes supérieures et inférieures du domaine de confiance à 95% de l'amortissement aéroélastique aléatoire pour la famille du mode 1 de la roue aubagée nominale pour différents niveaux  $\delta_K$  de dispersion.



**FIG. 5.7:** Bornes supérieures et inférieures du domaine de confiance à 95% de l'amortissement aéroélastique aléatoire pour la famille du mode 1 de la roue aubagée nominale pour différents niveaux  $\delta_A$  des incertitudes sur les forces aérodynamiques instationnaires généralisées.

Ainsi, les bornes inférieures et supérieures des domaines de confiance à 95% pour l'amortissement aéroélastique aléatoire de la famille du mode 1 sont données en présence de désaccordage involontaire contrôlé par le paramètre de dispersion  $\delta_K$  sur la figure 5.6 et en présence d'incertitudes sur les forces aérodynamiques instationnaires généralisées contrôlées par le paramètre de dispersion  $\delta_A$  sur la figure 5.7.

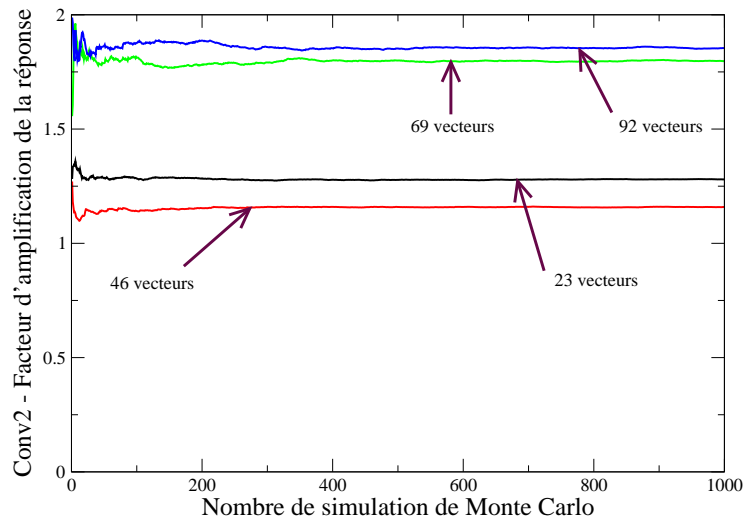
Pour le désaccordage involontaire contrôlé par le paramètre de dispersion  $\delta_K$ , on constate que la boucle de stabilité a tendance à s'allonger dans le sens des fréquences et à s'aplatir dans le sens de l'amortissement aéroélastique lorsque  $\delta_K$  augmente. Cela est cohérent avec le constat relevé dans le chapitre 1 selon lequel le désaccordage involontaire a souvent tendance à aplatir la boucle de stabilité de telle sorte que les modes les moins stables au départ gagnent en stabilité, au détriment des modes fortement stables au départ.

Concernant le niveau des incertitudes sur les forces aérodynamiques instationnaires généralisées contrôlé par le paramètre de dispersion  $\delta_A$ , on ne constate que très peu de modifications de la forme de la boucle de stabilité dans la plage considérée. Le faible effet des incertitudes sur les forces aérodynamiques instationnaires généralisées nous conduit pour le problème de conception robuste à négliger ces effets et à ne prendre en compte que le désaccordage involontaire contrôlé par le paramètre  $\delta_K$ .

## 5.4.2 Etude de la réponse forcée

Pour les calculs de la réponse forcée, nous avons fait au préalable une analyse de convergence en moyenne d'ordre 2 vis-à-vis de la dimension  $n$  de la base de projection et du nombre  $n_s$  de réalisations. Les résultats de cette analyse de convergence sont présentés sur la figure 5.8. Ces

résultats montrent que 500 réalisations pour le solveur stochastique de Monte Carlo donnent une bonne convergence pour tous les cas de calcul considérés et qu'avec une base de réduction de 92 vecteurs la convergence est acceptable. Les calculs de la réponse forcée sont donc faits pour  $n_s = 500$  et pour  $n = 92$ . La figure 5.9 confirme le fait que le nombre  $n_s = 500$  réalisations est suffisant pour une bonne convergence du calcul.

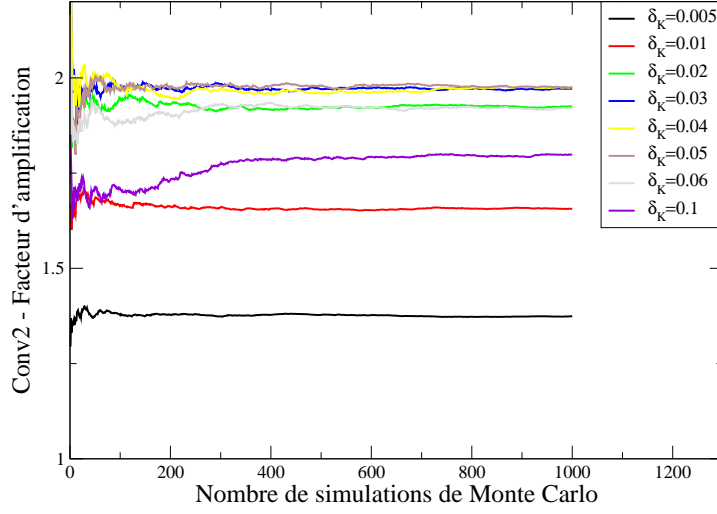


**FIG. 5.8:** Analyse de convergence en moyenne d'ordre 2 du modèle probabiliste non paramétrique vis-à-vis de la dimension de la base modale de projection (nombre de vecteurs) et du nombre de simulations de Monte Carlo pour la roue aubagée nominale.

Concernant les calculs de réponse forcée proprement dits, la figure 5.10 montre l'évolution du facteur aléatoire d'amplification dynamique de la roue accordée en fonction de  $\delta_K$ . Ces courbes montrent un phénomène bien connu des spécialistes du désaccordage (comme nous l'avons montré dans le premier chapitre de ce manuscrit) : le facteur d'amplification dynamique maximum de la réponse forcée croît rapidement pour les faibles niveaux de désaccordage, atteint un pic, puis décroît lentement lorsque le niveau de désaccordage augmente.

### 5.5 Construction de la fonction coût associée à l'optimisation du niveau de désaccordage intentionnel

Pour améliorer le comportement dynamique d'une roue aubagée, l'idéal serait de minimiser le facteur d'amplification dynamique et de maximiser la marge à la stabilité aéroélastique. Cependant, les expériences antérieures de conception des roues aubagées montrent que ces deux objectifs sont souvent antagonistes. Cette optimisation idéale est donc remplacée par une optimisation du facteur d'amplification dynamique sous une contrainte portant sur la marge de la



**FIG. 5.9:** Convergence en moyenne d'ordre 2 du facteur aléatoire d'amplification dynamique de la roue aubagée nominale pour différents niveaux  $\delta_K$  de dispersion.

stabilité aéroélastique. La contrainte sera intégrée sous forme de pénalité dans la fonction coût de telle sorte que lorsque la contrainte est vérifiée, la fonction coût puisse améliorer la stabilité aéroélastique. L'optimisation de la stabilité aéroélastique sous une contrainte portant sur le facteur d'amplification dynamique n'est pas considérée.

Pour la réponse forcée de la roue aubagée, l'optimisation consiste à réduire le facteur d'amplification dynamique en tête des aubes dans un domaine fréquentiel pour lequel un ou plusieurs modes ont été identifiés comme étant critiques sur un diagramme de Campbell.

La stabilité aéroélastique est spécifiée en terme de critère sur l'amortissement aéroélastique. Ce critère consiste à fixer un seuil noté  $\xi_{seuil}$  à ne pas dépasser.

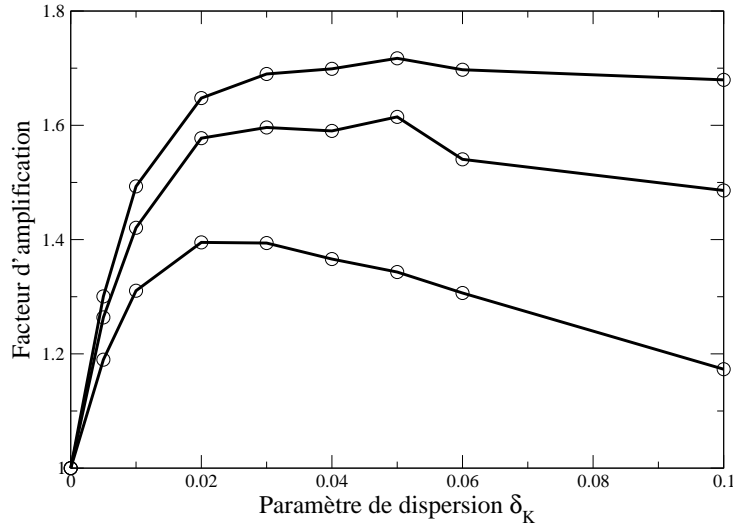
La répartition des valeurs propres des équations de flottement, permet de détecter la présence de modes instables ou stables (voir figure 5.11). Pour le contrôle de la stabilité du système, on définit pour chacune des valeurs complexes la grandeur  $\tilde{\xi}_\alpha$

$$\tilde{\xi}_\alpha = -\frac{\Re(\lambda_\alpha)}{\Im(\lambda_\alpha)} \quad , \quad \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad , \quad (5.1)$$

dont le signe contrôle la stabilité du système, et dont la valeur définit le niveau de stabilité, de chaque valeur propre. Ainsi, le niveau de stabilité aéroélastique sur l'ensemble de toutes les valeurs propres est défini par la grandeur  $\xi_{ae}$  qui représente la marge à la stabilité aéroélastique :

$$\xi_{ae} = \min_\alpha(\tilde{\xi}_\alpha) \quad . \quad (5.2)$$





**FIG. 5.10:** Facteur aléatoire d'amplification dynamique maximale de la roue aubagée nominale. les courbes basse, moyenne et haute correspondent respectivement aux niveaux de confiance 50%, 95% et 99%.

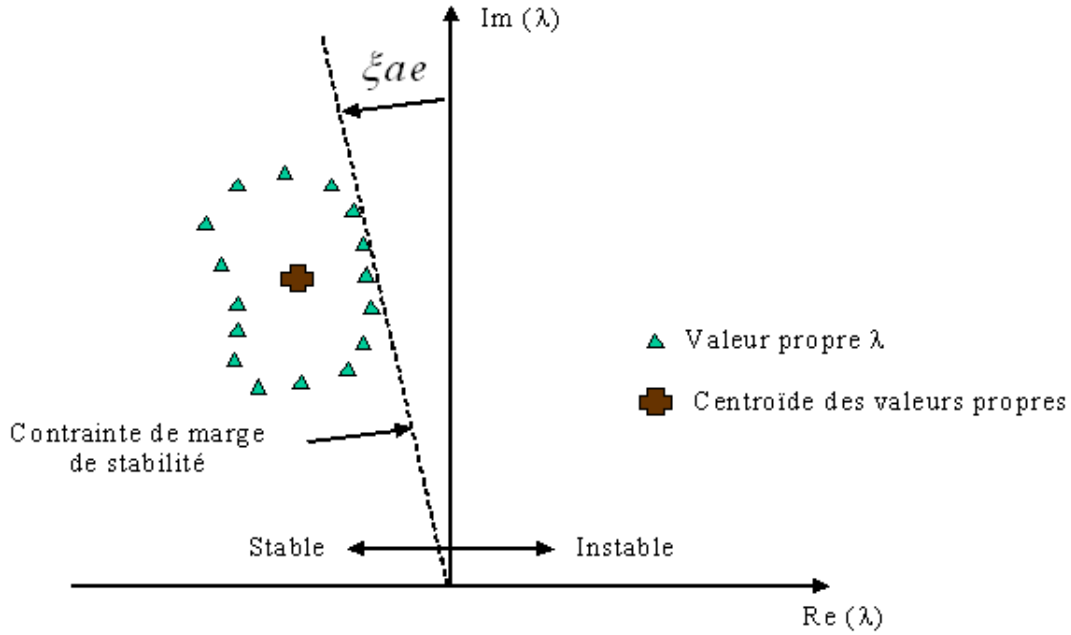
Soient  $B$  le facteur aléatoire d'amplification dynamique et  $X_{ae}$  l'amortissement aéroélastique aléatoire. Les différentes étapes de la construction de la fonction coût pour l'optimisation de la conception en présence de désaccordage involontaire sont les suivantes :

- Modification géométrique d'une aube nominale afin de disposer de deux types d'aubes.
- Optimisation de la répartition de ces deux types d'aubes au niveau de la roue en utilisant la méthode de réduction des possibilités de répartition présentée au chapitre 4.
- Minimisation de la fonction coût consistant à minimiser la réponse forcée (minimisation du facteur aléatoire d'amplification dynamique) de la roue aubagée avec comme contrainte sur la stabilité, un niveau d'amortissement aéroélastique seuil ( $\xi_{seuil}$ ). On prend dans ce manuscrit le seuil  $\xi_{seuil} = 80\% \xi_{seuil}$  de la structure accordée couplée avec l'aérodynamique instationnaire et en absence de désaccordage involontaire.

Soit  $\mathbf{r} \in \mathcal{C}_{ad}$  le vecteur des paramètres de conception à optimiser et soit  $\delta = (\delta_M, \delta_D, \delta_K, \delta_A)$  le vecteur des paramètres de dispersion contrôlant les incertitudes incluant le désaccordage involontaire. La fonction coût s'écrit :

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \max_{\delta} \{B^+(\mathbf{r}, \delta)\} - \text{Signe}\{\min_{\delta} \{X_{ae}^-(\mathbf{r}, \delta)\} - \xi_{seuil}\} \quad , \quad (5.3)$$

où la borne supérieure de la région de confiance associée au facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B^+(\mathbf{r}, \delta)$  est défini par



**FIG. 5.11:** Schéma du principe de répartition des valeurs propres obtenus par la résolution de l'équation de flottement

$$B^+(\mathbf{r}, \delta) : \mathcal{P}\{B(\mathbf{r}, \delta) \leq B^+(\mathbf{r}, \delta)\} \geq P_c \quad , \quad (5.4)$$

où la borne inférieure de la région de confiance associée à l'amortissement aéroélastique  $X_{ae}^-(\mathbf{r}, \delta)$  est défini par

$$X_{ae}^-(\mathbf{r}, \delta) : \mathcal{P}\{X_{ae}(\mathbf{r}, \delta) \geq X_{ae}^-(\mathbf{r}, \delta)\} \geq P_c \quad , \quad (5.5)$$

et où  $\mathcal{P}$  désigne la probabilité,  $P_c$  désigne un niveau de probabilité fixé pour la détermination de la région de confiance.

Le problème d'optimisation robuste consiste alors à minimiser la fonction coût dans l'espace admissible  $\mathcal{C}_{ad}$  des paramètres  $\mathbf{r}$  de conception, c'est-à-dire que la solution optimale  $\mathbf{r}^{opt}$  est donné par

$$\mathbf{r}^{opt} = \arg \min_{\mathbf{r} \in \mathcal{C}_{ad}} \{\mathcal{F}(\mathbf{r})\} \quad . \quad (5.6)$$

Cette fonction coût est plutôt adaptée à la résolution de problèmes stables au départ, mais avec des réponses forcées allant au delà des limites acceptables.

## 5.6 Comportement dynamique de la roue aubagée optimisée par désaccordage intentionnel en présence de désaccordage involontaire

Pour la résolution du problème d'optimisation lié à la conception robuste de la roue aubagée considérée pour l'application, seul le paramètre  $\delta_K$  est pris en compte pour la modélisation des incertitudes incluant le désaccordage involontaire. Le problème d'optimisation est résolu à l'aide d'un algorithme génétique. Nous avons développé la chaîne logiciel de cette conception robuste dans l'environnement informatique de l'industriel en couplant les logiciels dédiés pour la conception, pour les analyses modales de la structure, pour les calculs aérodynamiques instationnaires, pour les calculs de réponse forcée et de stabilité aéroélastique. De plus, nous avons implémenté toutes les méthodes et formulations présentées dans les chapitres précédents dans le logiciel de calcul de réponse forcée et de stabilité aéroélastique. Tous les résultats que nous présentons ci-après ont été obtenus à l'aide de cette chaîne développée.

### 5.6.1 Configuration optimale de répartition des aubes modifiées géométriquement : roue aubagée optimale

Le désaccordage intentionnel est fait par modification géométrique de certaines aubes de telle sorte qu'il y ait 2 types différents d'aubes sur la roue aubagée. Les modifications géométriques correspondent à un grattage en tête et un bossage en pied. Soit A l'aube nominale et B l'aube grattée en tête et bossée en pied. La configuration optimale de répartition des deux types d'aubes pour la roue à 23 aubes en utilisant la méthode de réduction des possibilités de répartition est la suivante : 4A4B2A2B2A2B2A5B et est illustrée à la figure 5.12.

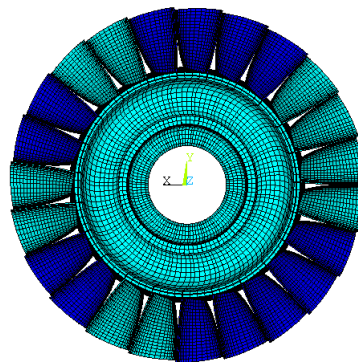
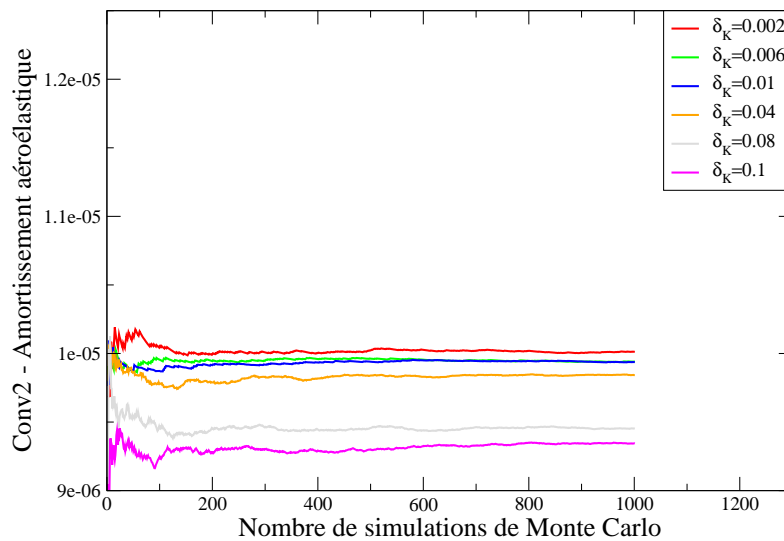


FIG. 5.12: Roue aubagée optimale en désaccordage intentionnel en présence d'incertitudes incluant le désaccordage involontaire.

## 5.6.2 Étude de la stabilité aéroélastique

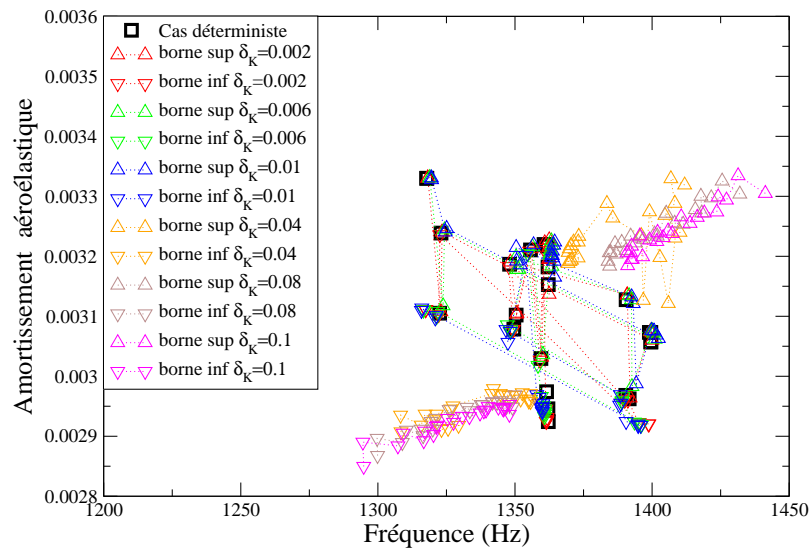
Avant de présenter les résultats sur la stabilité aéroélastique, on présente les courbes de convergence du plus faible amortissement aéroélastique aléatoire de la famille du mode 1 qui sont données sur la figure 5.13 pour la roue aubagée optimale trouvée, en présence des incertitudes de rigidité incluant le désaccordage involontaire et contrôlé par le paramètre de dispersion  $\delta_K$ . Ces courbes montrent une bonne convergence des calculs pour le nombre de réalisations effectuées.



**FIG. 5.13:** Convergence en moyenne d'ordre 2 de l'amortissement aéroélastique aléatoire pour la famille du mode 1 de la roue optimale désaccordée intentionnellement pour différents niveaux  $\delta_K$  de dispersion.

Concernant le niveau de stabilité exprimé en terme d'amortissement aéroélastique (amortissement aérodynamique + amortissement structure), les bornes inférieures et supérieures des domaines de confiance à 95% pour cet amortissement aéroélastique aléatoire de la famille du mode 1 sont données en fonction du paramètre de dispersion  $\delta_K$  sur la figure 5.14 pour la roue aubagée optimale trouvée.

Comparés aux niveaux d'amortissement de la roue aubagée de référence en présence de désaccordage involontaire (voir figure 5.6), les nouveaux niveaux d'amortissement sont légèrement plus faible. Ce niveau minimum d'amortissement respecte néanmoins la contrainte de stabilité de la fonction coût ( $\xi_{seuil} = 0.24\%$ ).



**FIG. 5.14:** Bornes supérieures et inférieures du domaine de confiance à 95% de l'amortissement aéroélastique aléatoire pour la famille du mode 1 de la roue optimale désaccordée intentionnellement pour différents niveaux  $\delta_K$  de dispersion.

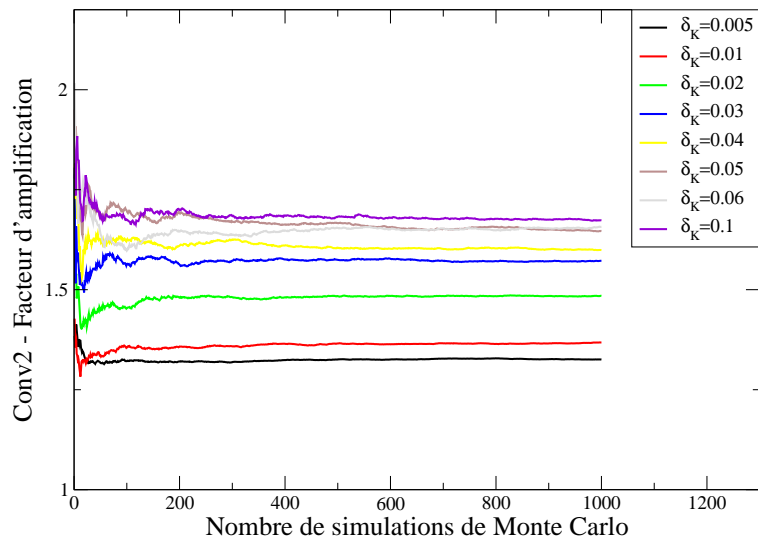
### 5.6.3 Etude de la réponse forcée

Nous allons maintenant exposer les résultats de l'évolution du facteur d'amplification dynamique de la roue aubagée avec désaccordage intentionnel optimal en fonction du niveau de dispersion incluant le désaccordage involontaire. Au préalable, nous montrons sur la figure 5.15 que le nombre de réalisations retenu (500) pour le solveur stochastique de Monte Carlo est suffisant pour une bonne convergence du facteur aléatoire d'amplification dynamique.

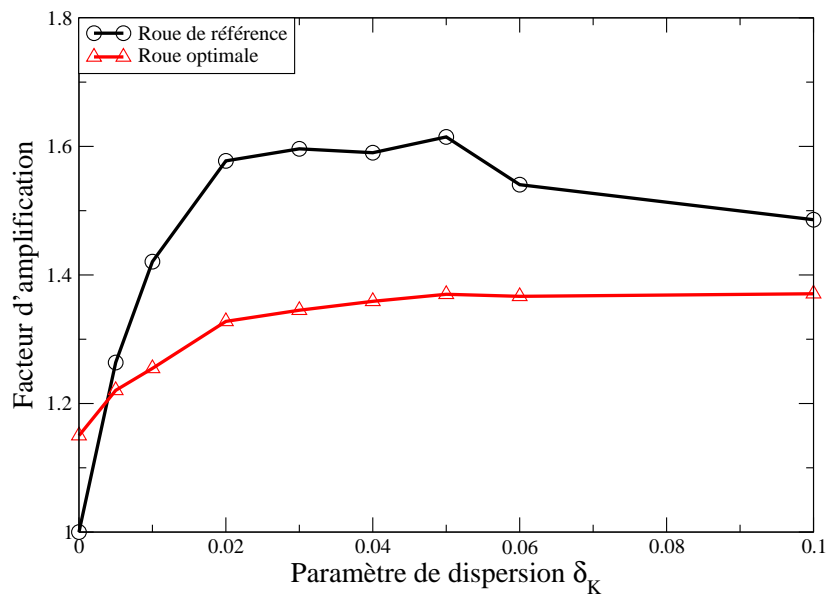
Les figures 5.16 et 5.17 montrent une comparaison des évolutions du facteur aléatoire d'amplification dynamique en fonction du niveau de désaccordage involontaire défini par le paramètre  $\delta_K$  :

1. Pour la roue aubagée nominale de référence.
2. Pour la configuration optimale de roue aubagée désaccordée intentionnellement par modification géométrique des aubes.

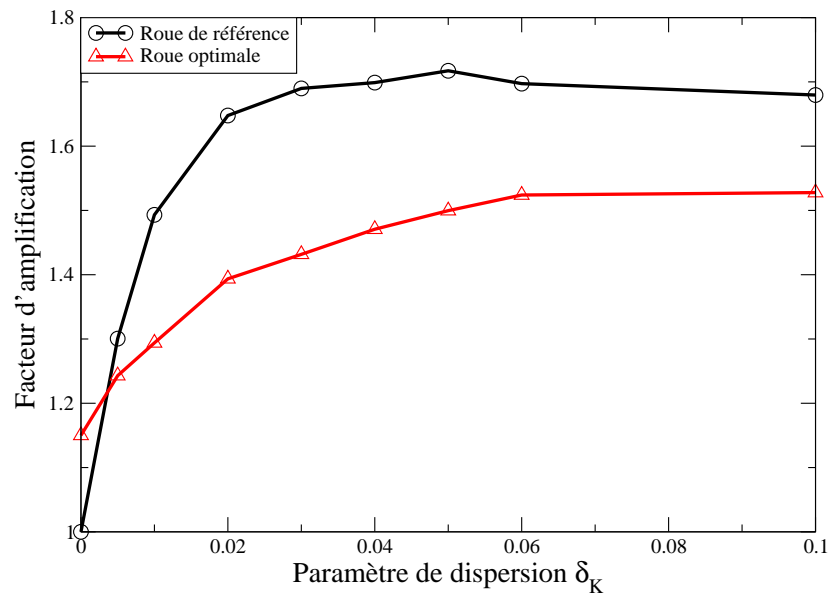
Les graphes montrent la borne supérieure du facteur aléatoire d'amplification pour une confiance 95% sur la figure 5.16 et pour une confiance de 99 % sur la figure 5.17.



**FIG. 5.15:** Convergence en moyenne d'ordre 2 du facteur aléatoire d'amplification dynamique de la roue optimale désaccordée intentionnellement pour différents niveaux  $\delta_K$  de dispersion.



**FIG. 5.16:** Comparaison de la sensibilité à la dispersion incluant le désaccordage involontaire de la roue nominale de référence (cercles) et de la roue optimale désaccordée intentionnellement (triangles) pour une confiance de 95%.



**FIG. 5.17:** Comparaison de la sensibilité à la dispersion incluant le désaccordage involontaire de la roue nominale de référence (cercles) et de la roue optimale désaccordée intentionnellement (triangles) pour une confiance de 99%.

Ces résultats montrent que :

- En présence de désaccordage involontaire, le niveau maximum d'amplification dynamique de la roue optimale désaccordée intentionnellement est très inférieur à celui de la roue accordée nominale.
- Le pic d'amplification dynamique a disparu pour la roue optimale désaccordée intentionnellement. En effet, la courbe d'évolution du facteur aléatoire d'amplification dynamique est continûment croissante dans la plage de variation du paramètre de dispersion  $\delta_K$  considérée. Une des conséquences de ce comportement est que pour cette roue aubagée, réduire les niveaux de désaccordage involontaire (les tolérances de fabrication par exemple) est synonyme d'amélioration du comportement dynamique de la roue, contrairement à la roue nominale pour laquelle ce n'est pas forcément le cas (cf. chapitre 1).
- Le facteur aléatoire d'amplification dynamique ne varie que très peu pour la roue optimale désaccordée intentionnellement lorsque le niveau de désaccordage involontaire augmente. Cela met en évidence une faible sensibilité de cette roue aubagée vis-à-vis du désaccordage involontaire, contrairement à la roue aubagée nominale. D'ailleurs, si on définit la sensibilité comme étant la mesure  $B_{max}^+ - B_{min}^+$  sur les courbes d'évolution du facteur aléatoire d'amplification dynamique par rapport à  $\delta_K$ , on constate que la roue

optimale désaccordée intentionnellement est deux fois moins sensible au désaccordage involontaire que la roue nominale accordée pour une confiance de 99%. Cette sensibilité est encore plus faible pour une confiance de 95%.

## 5.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, une analyse de la conception robuste en désaccordage intentionnel d'une roue aubagée industrielle en présence de désaccordage involontaire et avec une prise en compte du couplage aérodynamique.

Sur cette application industrielle, nous avons pu mettre en évidence le fait que la réponse forcée et la stabilité aéroélastique des roues aubagées accordées sont très sensibles au désaccordage involontaire.

L'optimisation de la conception a été faite en minimisant la réponse forcée avec une contrainte sur la marge à la stabilité aéroélastique. La roue aubagée optimale désaccordée intentionnellement obtenue présente de meilleures caractéristiques en terme de niveau maximal d'amplification dynamique de la réponse forcée, de sensibilité vis-à-vis du désaccordage involontaire et a un niveau de stabilité aéroélastique acceptable respectant la contrainte de marge à la stabilité aéroélastique fixée.





# Conclusions et perspectives

## Les apports scientifiques

Nous avons étudié les différents phénomènes liés à la problématique du désaccordage des roues aubagées. Nous avons tout d'abord commencé par analyser à travers une étude bibliographique détaillée la physique du problème de désaccordage et avons vu que si le désaccordage involontaire peut détériorer le comportement dynamique des roues aubagées, le désaccordage intentionnel peut en limiter les effets.

Nous avons développé et validé une nouvelle méthode de réduction de modèles de roue aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique des aubes. Cette nouvelle méthode répond à la difficulté de construction de modèles réduits et suffisamment compacts de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique. La nouvelle méthode est également adaptée au désaccordage par modification des propriétés des matériaux tels que le module d'Young. Elle permet notamment d'obtenir des modèles réduits très compacts, d'où son grand intérêt en terme de réduction des temps de calcul.

Concernant la modélisation des incertitudes incluant le désaccordage involontaire, nous avons utilisé une approche probabiliste non paramétrique. Les nouveaux éléments dans cette formulation par rapport aux travaux précédents consistent en l'implémentation de l'approche probabiliste non paramétrique sur le modèle réduit obtenu avec la nouvelle méthode de réduction de modèles pour les opérateurs de la structure et pour l'opérateur aérodynamique de couplage, conduisant ainsi à l'introduction de nouvelles classes de matrices aléatoires : des matrices aléatoires complexes. Cette approche permet de prendre en compte de manière globale les incertitudes sur les paramètres du modèle et sur la modélisation.

Concernant l'optimisation du désaccordage intentionnel, il est nécessaire d'optimiser le niveau de modification des aubes et la répartition des différents types d'aubes sur la roue aubagée.

- Pour l'optimisation de la répartition des différents types d'aubes, nous avons utilisé et validé une méthode permettant de réduire le nombre de configurations à tester puis avons effectué une optimisation de la répartition dans le sous-ensemble réduit de configurations obtenu, en présence d'incertitudes incluant le désaccordage involontaire. Cela a permis d'avoir une optimisation rapide et efficace de la répartition des différents types d'aubes.

- Pour l'optimisation du niveau de modification géométrique des aubes, nous avons construit une fonction coût dont l'objectif est de trouver les meilleurs paramètres géométriques de conception minimisant la réponse forcée de la roue aubagée avec une contrainte sur la stabilité aéroélastique et en présence d'incertitudes incluant le désaccordage involontaire.

Sur une application à la conception robuste d'un prototype de roue aubagée de Turbomeca par désaccordage intentionnel, les résultats du problème d'optimisation montrent que le désaccordage intentionnel par modification géométrique des aubes permet de réduire les niveaux de vibration des roues aubagées et leurs sensibilité vis-à-vis des incertitudes incluant le désaccordage involontaire, tout en ayant des modifications limitées de la marge à la stabilité.

A l'aide des outils et des méthodes développés, nous avons pu comprendre le rôle des incertitudes et donc du désaccordage involontaire sur le comportement dynamique des roues aubagées accordées et sur celui des roues aubagées désaccordées intentionnellement. Nous avons notamment pu voir l'importance de la prise en compte de ces incertitudes sur les structures accordées ou désaccordées intentionnellement. Quelques uns des enseignements que l'on peut en tirer sont :

- la réponse forcée d'une roue aubagée accordée ou désaccordée intentionnellement est toujours supérieure en présence de désaccordage involontaire qu'en l'absence de désaccordage involontaire,
- certains désaccordages intentionnels peuvent conduire (même en l'absence de désaccordage involontaire) à des niveaux de réponse supérieurs à ceux de la roue aubagée en présence de désaccordage involontaire.

## Les développements logiciels

Nous avons développé dans le logiciel de calcul de réponse forcée et de stabilité aéroélastique de Turbomeca la nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique dont le principe consiste à utiliser les modes cycliques des différents types de secteurs de la roue aubagée.

Nous avons également développé dans le logiciel de calcul de réponse forcée et de stabilité aéroélastique la méthode probabiliste non paramétrique pour les modèles structuraux couplés avec l'aérodynamique instationnaire pour la prise en compte des incertitudes incluant le désaccordage involontaire.

Une module de réduction des configurations de répartition et d'optimisation de la répartition des aubes désaccordées intentionnellement en présence de dispersions incluant le désaccordage involontaire a aussi été développé.

Finalement, une chaîne d'optimisation de la réponse forcée des roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification locale des épaisseurs des aubes avec une contrainte sur la marge à la stabilité aéroélastique a été développée.

## Les perspectives

Concernant la nouvelle méthode de réduction de modèles, il serait intéressant de l'appliquer sur des configurations de roues aubagées à plusieurs étages, lorsque les modes cycliques de l'étage complet peuvent être calculés. En effet, pour certains types de moteurs, le couplage entre les différents étages du compresseur ou de la turbine peut être important. Ainsi, en n'étudiant que des roues aubagées isolées, on néglige le couplage inter-étages. Il serait donc intéressant dans ces cas de figures, pour des roues désaccordées intentionnellement par modification géométrique, d'appliquer la nouvelle méthode de réduction de modèles en utilisant des modes cycliques de l'étage qui peuvent être calculés par la méthode développée dans ([55]). Cela permettrait notamment d'avoir une réduction conséquente des temps de calculs, puisque le nombre de degrés de liberté de l'étage est très important.

Il serait également intéressant d'effectuer sur une roue aubagée instable, une optimisation de la stabilité avec une contrainte sur la réponse forcée. Cela devrait permettre de rétablir la stabilité tout en s'assurant que les niveaux de la réponse forcée sont acceptables.

Pour améliorer la chaîne d'optimisation mise en place, une contrainte supplémentaire relative au niveau d'excentricité du centre de gravité de la roue aubagée dû à la répartition d'aubes de masses différentes pourrait être rajoutée. En effet, par le désaccordage intentionnel, on crée involontairement un balourd dont il faudrait sur le plan industriel étudier l'importance. Ainsi, si ce paramètre s'avère être important, la meilleure configuration de désaccordage intentionnel devrait aussi être celle qui entraîne des niveaux de balourd acceptables.



## Annexe A

# Mise en évidence d'un problème d'incompatibilité de maillages sur un modèle de plaque

Dans cette annexe, on met en évidence de manière simple l'incompatibilité de maillages qui apparaît lorsqu'on projette des matrices de masse ou de rigidité (calculées sur un maillage éléments finis d'une structure nominale) sur des modes calculés sur un maillage éléments finis d'une structure géométriquement modifiée. Pour cela, nous avons réalisé deux modèles de plaque à 70 éléments, avec un élément dans l'épaisseur, 7 dans la largeur et 10 dans la longueur (cf. figure A.1) : un modèle nominal et un modèle modifié en tête de plaque obtenu par le déplacement dans l'épaisseur de 4 noeuds du modèle nominal. Les conditions aux limites appliquées sont un encastrement du pied de chaque plaque.

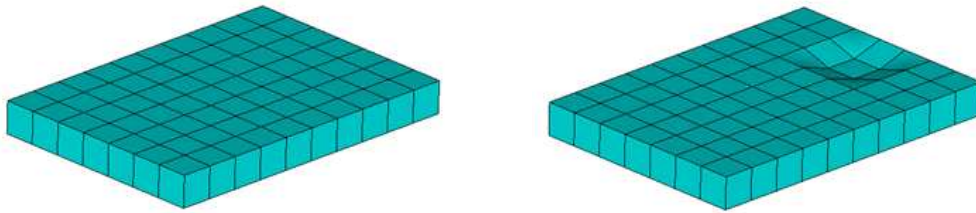
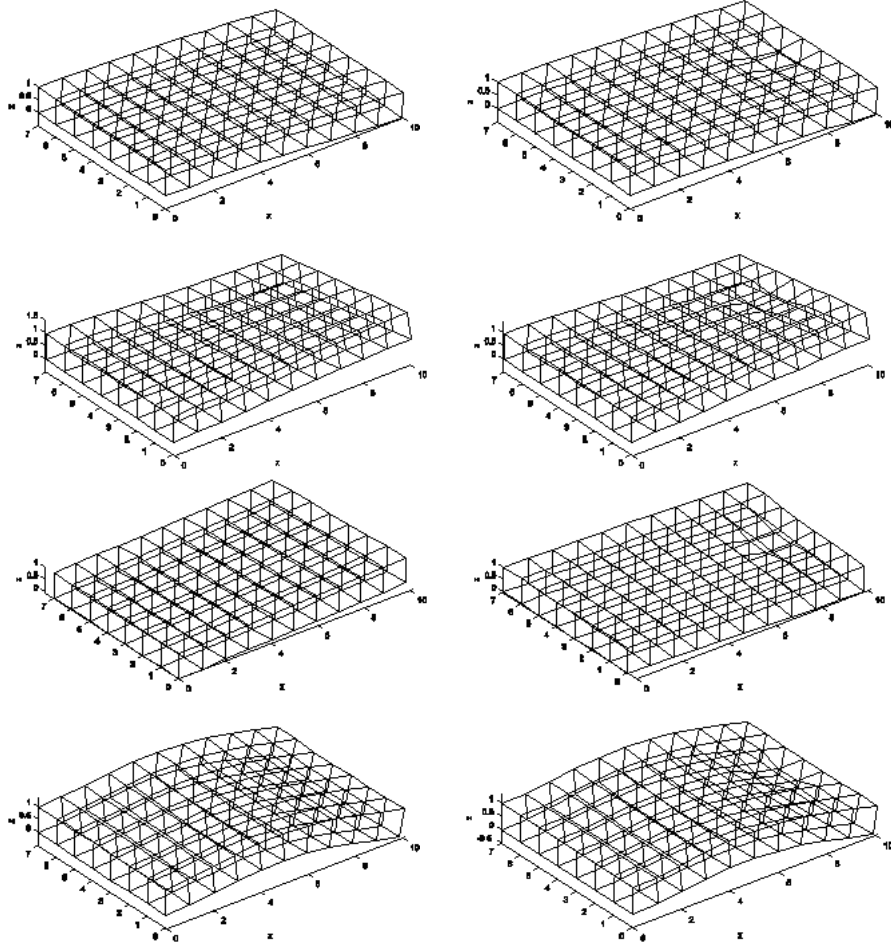


FIG. A.1: Plaque nominale (à gauche) et plaque modifiée géométriquement (à droite).

Soient  $[M^{nom}]$ ,  $[K^{nom}]$  et  $[\phi^{nom}]$ , respectivement les matrices réelles symétriques définies positives de masse, de rigidité et les modes réels du modèle éléments finis de la plaque nominale. Soient  $[M^{modif}]$ ,  $[K^{modif}]$  et  $[\phi^{modif}]$ , respectivement les matrices réelles symétriques définies positives de masse, de rigidité et les modes réels du modèle éléments finis de la plaque géométriquement modifiée. Les quatre premières déformées modales obtenues pour les deux modèles de plaques sont présentés sur la figure A.2.



**FIG. A.2:** Représentation des 4 premières formes modales de la plaque nominale (figures à gauche) et de la plaque modifiée (figures à droite). De haut en bas : mode 1, mode 2, mode 3, mode 4.

Nous calculons les fréquences propres de la plaque modifiée géométriquement de deux manières :

- directement en résolvant le problème aux valeurs propres défini par : trouver  $(\lambda_d^{modif}, \phi_d^{modif})$  tel que

$$([K^{modif}] - \lambda_d^{modif} [M^{modif}]) \phi_d^{modif} = 0 \quad . \quad (A.1)$$

- en réduisant les matrices de masse et de rigidité de la plaque géométriquement modifiée sur une base de modes de la plaque nominale et en résolvant le problème aux valeurs propres défini par : trouver  $(\lambda_r^{modif}, \phi_r^{modif})$  tel que

$$([\phi^{nom}]^T [K^{modif}] [\phi^{nom}] - \lambda_r^{modif} [\phi^{nom}]^T [M^{modif}] [\phi^{nom}]) \phi_r^{modif} = 0 \quad . \quad (A.2)$$

---

Le tableau (A.1) présente les résultats obtenus pour ces deux types de résolutions et le niveau d'erreur dans l'estimation des fréquences propres par utilisation du modèle réduit construit comme indiqué ci-dessus.

Modes	Calcul direct Fréquence (Hz)	Modèle réduit Fréquence (Hz)	Modèle réduit Erreur en fréquence (%)
Mode 1	10,79	13,70	27,01
Mode 2	27,56	37,47	35,92
Mode 3	46,44	46,45	0,006
Mode 4	63,89	70,17	9,82

**TAB. A.1:** Fréquences propres et écarts en fréquence entre le modèle réduit et le calcul direct

Des niveaux d'erreur élevés sont alors constatés. Pourtant, ces résultats ont été obtenus pour le modèle réduit, avec une base de projection contenant 50 modes. En effectuant un étude de convergence des fréquences obtenues en fonction de la dimension de la base modale, nous constatons également que la vitesse de convergence est très faible.



## A. Mise en évidence d'un problème d'incompatibilité de maillages sur un modèle de plaque

---

## Annexe B

# Comparaison de la méthode SNM (Subset of Nominal Modes) et de la nouvelle méthode de réduction de modèle sur un cas simple de roue aubagée désaccordée géométriquement

Dans cette annexe, nous comparons la méthode de réduction de modèles nommée SNM développée dans (Yang et Griffin [110]) à la nouvelle méthode de réduction de modèles de roues aubagées désaccordées intentionnellement par modification géométrique. On rappelle que la méthode SNM est très efficace pour des modèles de roues aubagées désaccordées par modification des propriétés des matériaux. Nous montrons ici qu'elle est mise en défaut par le désaccordage géométrique. Pour la comparaison, un modèle simplifié de roue aubagée à 24 aubes a été construit.

### B.1 Présentation du modèle simplifié de roue aubagée

Le modèle choisi représente une roue aubagée monobloc ayant 24 aubes (cf. figure B.1). Le disque est une couronne de rayon interne  $0.05\text{ m}$ , de rayon externe  $0.25\text{ m}$  et d'épaisseur  $0.012\text{ m}$ . Son matériau est supposé homogène et isotrope, de densité volumique de masse  $7860\text{ kg/m}^3$ , de coefficient de Poisson  $0.25$  et de module d'Young élastique  $2.0 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$ . Chaque aube est constituée du même matériau que le disque et est de longueur  $0.045\text{ m}$ , de largeur  $0.013\text{ m}$  et d'épaisseur  $0.004\text{ m}$ .

La figure B.2 représente l'évolution des fréquences propres du système accordé en fonction du nombre de diamètre des modes. Dans le cadre de la validation de la méthode proposée, les 100 premières fréquences propres de la roue aubagée désaccordée sont calculées.

## B. Comparaison de la méthode SNM (Subset of Nominal Modes) et de la nouvelle méthode de réduction de modèle sur un cas simple de roue aubagée désaccordée géométriquement

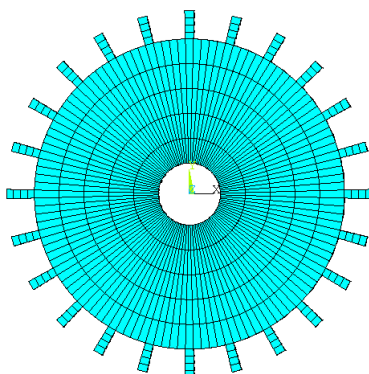


FIG. B.1: Modèle éléments finis de la roue aubagée complète.

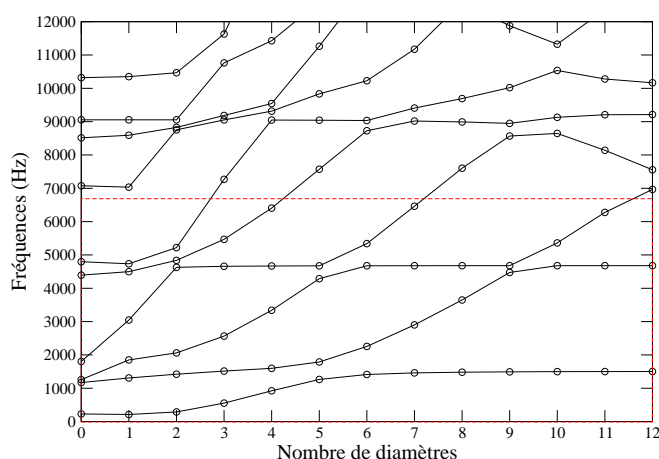


FIG. B.2: Spectre fréquentiel de la roue aubagée accordée.

Afin d'avoir un cas test simple, la roue aubagée est dans un premier temps désaccordée par une modification géométrique de deux aubes arbitrairement choisies leur matériau restant inchangé (cf. figures B.3 et B.4). Le modèle est considéré sans amortissement. L'objectif de l'analyse est d'obtenir et comparer les fréquences de résonance du modèle réduit à celles du modèle éléments finis complet de la roue aubagée. Pour le modèle réduit, les matrices et les modes cycliques sont calculés pour chacun des trois types de secteur à l'aide du code éléments finis ANSYS. Pour le modèle complet, les modes sont également calculés à l'aide de la même version du code ANSYS. Le modèle éléments finis complet de la figure B.1 est formé de 1896 éléments briques à 8 noeuds, totalisant ainsi 39366 degrés de liberté. Les modifications géométriques d'aubes sont faites en diminuant ou en augmentant localement l'épaisseur de l'aube selon la figure B.3.

## B.2 Comparaison de la méthode de réduction de modèles SNM et de la nouvelle méthode de réduction de modèles

Pour désaccorder intentionnellement la roue aubagée, deux nouvelles aubes sont créées à partir d'une aube nominale par modification géométrique en tête d'aube : une aube dite bossée (c) et une aube dite creusée (b) comme on peut le voir sur la figure B.3.

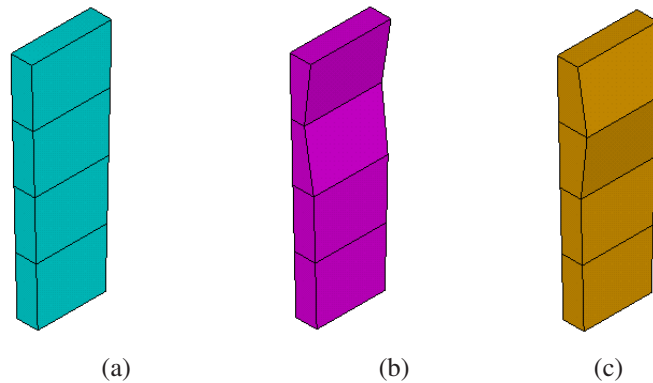


FIG. B.3: Modèle éléments finis des aubes : aube nominale (a), aube avec creux (b) et aube avec bosse (c).

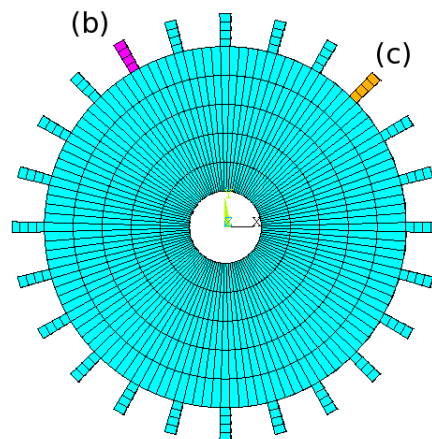


FIG. B.4: Modèle éléments finis de la roue aubagée complète dont deux des aubes ont été géométriquement modifiées.

Afin de quantifier le niveau de désaccordage introduit dans le système par les différentes modifications géométriques, nous avons calculé les trois premières fréquences propres de vibration des

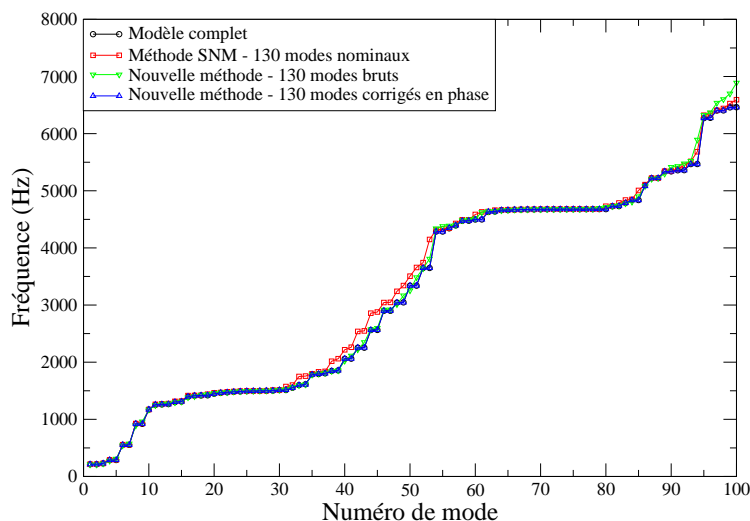
B. Comparaison de la méthode SNM (Subset of Nominal Modes) et de la nouvelle méthode de réduction de modèle sur un cas simple de roue aubagée désaccordée géométriquement

différents types d'aubes de la roue aubagée en configuration pale encastrée sur le tableau B.1. On peut ainsi y voir un écart fréquentiel par rapport à l'aube nominale, pouvant aller jusqu'à 8,9%.

**TAB. B.1:** Fréquences propres et écarts en fréquence des deux aubes modifiées encastrées par rapport à l'aube nominale

Numéro de mode	Premier mode	Second mode	Troisième mode
Fréquence aube nominale (Hz)	1572.6	4971.2	9196.3
Fréquence aube avec creux (Hz)	1695.5	5415.4	8984.5
Ecart en fréquence aube avec creux (%)	7.8	8.9	-2.3
Fréquence aube avec bosse (Hz)	1464.5	4610.5	8781
Ecart en fréquence aube avec bosse (%)	-6.9	-7.3	-4.5

Les figures B.5 et B.6 montrent les niveaux des 100 premières fréquence propres et les erreurs en fréquence associées pour le modèle réduit de la roue aubagée désaccordée pour trois différentes méthodes de réduction de modèles : la méthode SNM, la nouvelle méthode de réduction de modèles avec les modes issus de calculs indépendants sans remise en phase et la nouvelle méthode de réduction de modèles avec remise en phase des modes.

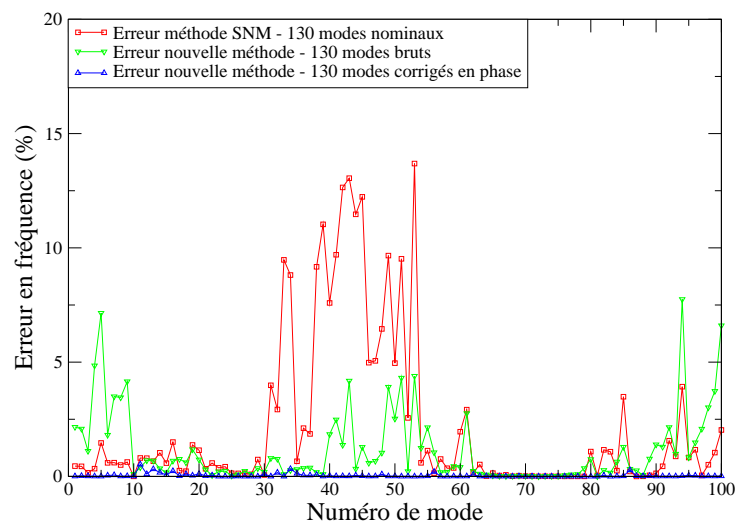


**FIG. B.5:** Comparaison des 100 premières fréquences propres du modèle complet et de différents modèles réduits. Roue à deux aubes modifiées géométriquement.

Lors de ces calculs, un modèle réduit à 130 degrés de liberté a été construit en utilisant les modes cycliques contenus dans la plage fréquentielle [0 ; 9000] Hz.

Comme on peut le voir sur les figures B.5 et B.6 :

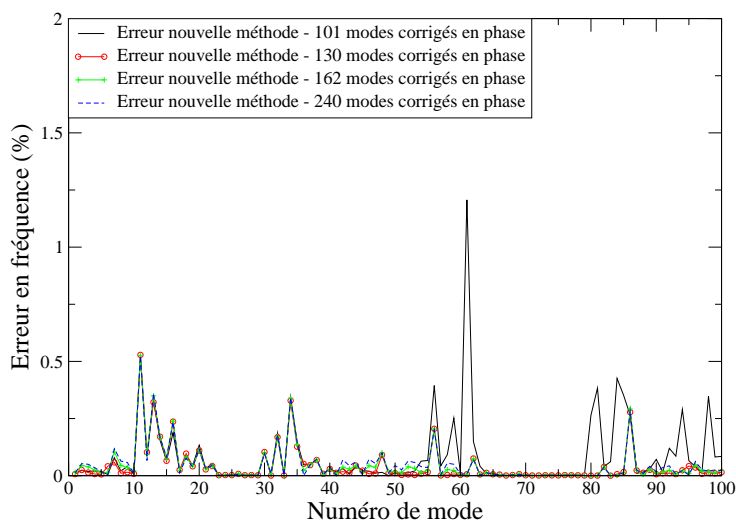
- Le modèle réduit obtenu par la méthode SNM est le moins précis des trois. Cela est notamment dû au problème d'incompatibilité de domaines géométriques noté dans le chapitre 2 et mis en évidence dans l'annexe A.
- En projetant les matrices de chacun des secteurs sur leurs propres modes élastiques donnés de façon brute par le logiciel éléments finis ANSYS, le problème d'incompatibilité de domaines disparaît, mais un nouveau problème apparaît : celui de la correspondance des phases des modes élastiques.
- Le modèle réduit pour lequel les modes élastiques des différents types de secteurs sont remis en phase donne des niveaux d'erreurs d'estimation des fréquences propres inférieures à 0.6%.



**FIG. B.6:** Comparaison des erreurs en fréquence sur les 100 premières fréquences propres du modèle complet et de différents modèles réduits. Roue à deux aubes désaccordées.

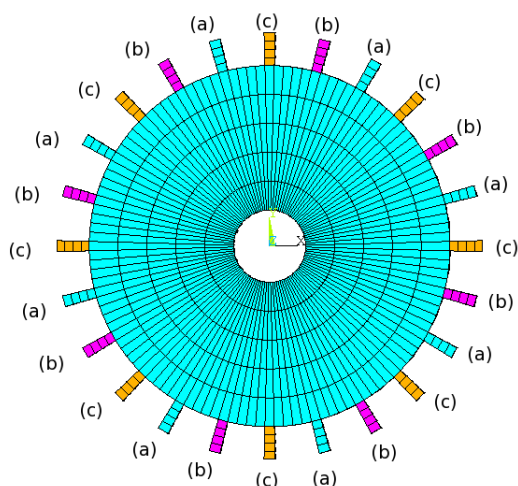
La figure B.7 montre l'analyse de convergence du nouveau modèle réduit effectuée en fonction de la dimension de la base modale en vue de la meilleure estimation des 100 premières fréquences du modèle à deux aubes désaccordées. On y voit notamment que pour 130 modes sélectionnés il y a convergence des fréquences obtenues. Cela montre la compacité des modèles réduits que l'on peut obtenir avec cette méthode, d'autant plus que pour 101 modes, les 100 premières fréquences sont déjà estimées de manière assez précise, avec un niveau d'erreur maximal inférieur à 1.3%.

## B. Comparaison de la méthode SNM (Subset of Nominal Modes) et de la nouvelle méthode de réduction de modèle sur un cas simple de roue aubagée désaccordée géométriquement



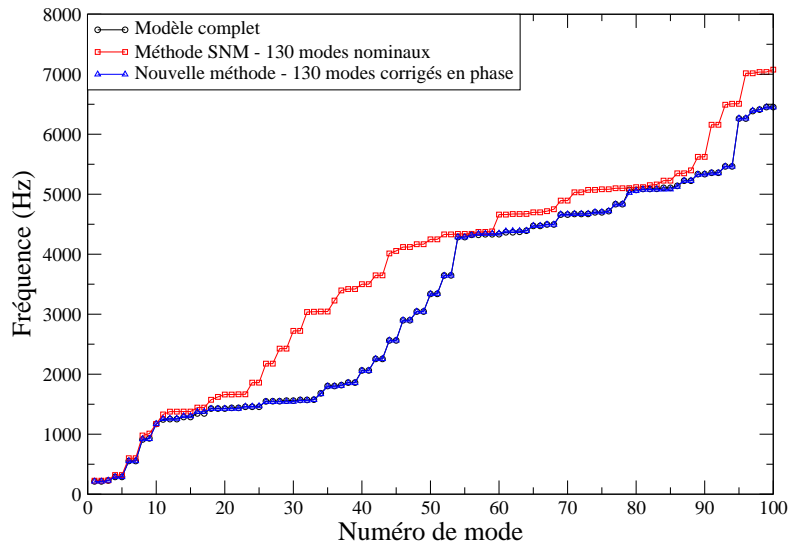
**FIG. B.7:** Comparaison des erreurs en fréquence sur les 100 premières fréquences propres du modèle complet et de différentes dimensions du nouveau modèle réduit. Roue à deux aubes désaccordées.

Afin de vérifier que les bons résultats du modèle réduit obtenu avec la nouvelle méthode de réduction de modèle (intégrant la remise en phase des modes des différents types de secteurs) ne sont pas simplement liés à la configuration de désaccordage choisie, une nouvelle configuration de répartition des trois différents types d'aubes en les alternant sur la circonférence du disque comme décrit sur la figure B.8 a été mise en place.

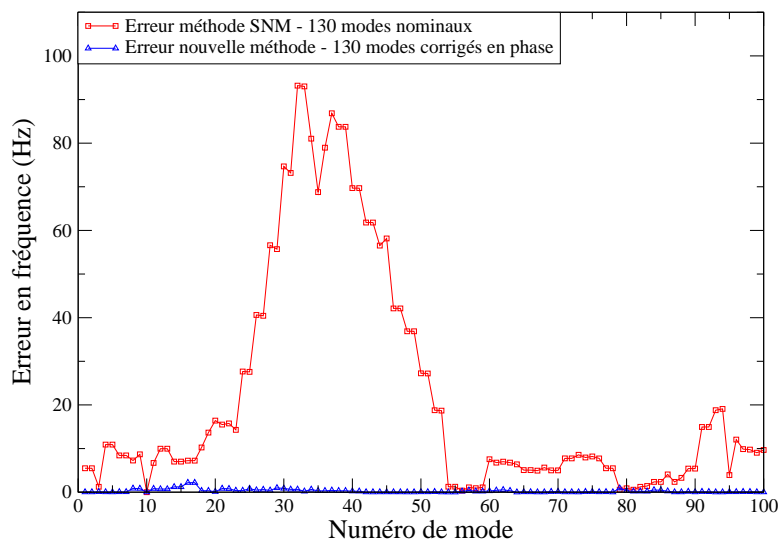


**FIG. B.8:** Roue aubagée désaccordée intentionnellement par alternance de trois différents types d'aubes.

Dans cette configuration, les figures B.9 et B.10 montrent les niveaux des 100 premières valeurs en fréquence et erreurs en fréquence de la roue aubagée désaccordée pour le modèle construit avec la méthode SNM et pour le modèle construit avec la nouvelle méthode de réduction.



**FIG. B.9:** Comparaison des 100 premières fréquences propres du modèle complet et de deux modèles réduits, pour la roue aubagée désaccordée intentionnellement par alternance de trois différents types d'aubes.



**FIG. B.10:** Comparaison des erreurs en fréquence sur les 100 premières fréquences propres des deux modèles réduits. Roue désaccordée avec répartition par alternance de motifs.



## B. Comparaison de la méthode SNM (Subset of Nominal Modes) et de la nouvelle méthode de réduction de modèle sur un cas simple de roue aubagée désaccordée géométriquement

---

On y voit notamment que la nouvelle méthode de réduction garde son bas niveau d'erreur d'estimation des fréquences propres de la roue aubagée désaccordée géométriquement, pendant que la méthode SNM voit son niveau d'erreur d'estimation des fréquences de la roue aubagée désaccordée géométriquement exploser (presque 100% d'erreur). Cette explosion de l'erreur s'explique par le fait que dans la première configuration de répartition, seules deux aubes étaient incompatibles avec les aubes nominales, alors que dans la nouvelle configuration, 16 aubes sont incompatibles.

## Annexe C

# Méthodologie de résolution des équations de la stabilité aéroélastique

Dans cette annexe, nous présentons la méthode de résolution des équations du flottement dans le cas général et une méthode simplifiée de résolution de ces équations dans le cas particulier où on se place dans une bande fréquentielle étroite d'étude.

Dans cette annexe, les équations sont écrites dans le repère global et non pas dans les repères locaux liés aux secteurs. Ainsi, toutes les grandeurs devraient être dotées d'un "chapeau" mais dans le but d'alléger l'écriture, ces "chapeaux" seront supprimés.

Dans le cadre de l'étude de la stabilité du système sur la base du modèle réduit, l'équation homogène à résoudre s'écrit

$$\{-\omega^2[\underline{M}_{red}] + i\omega([\underline{D}_{red}] + [\underline{A}_{red}^I(\omega)]) + [\underline{K}_{red}] + [\underline{A}_{red}^R(\omega)]\}\underline{\mathbf{q}}(\omega) = 0 \quad , \quad (\text{C.1})$$

où

$$[\underline{A}_{red}^R(\omega)] = \frac{1}{2}\rho V^2[\underline{A}_R(\frac{i\omega}{V})] \quad , \quad (\text{C.2})$$

$$[\underline{A}_{red}^I(\omega)] = \frac{1}{2}\rho V^2[\underline{A}_I(\frac{i\omega}{V})] \quad . \quad (\text{C.3})$$

### C.1 Méthode de résolution de l'équation de flottement

Pour résoudre cette équation, réécrivons tout d'abord l'équation (C.1) en explicitant les opérateurs réduits de masse, de dissipation, de rigidité, de la structure et les forces aérodynamiques instationnaires généralisées de couplage fluide-structure et en utilisant les équations (C.2) - (C.3). Celle-ci se présente alors sous la forme

$$\{-\omega^2[\underline{\tilde{M}}_{red}] + i\omega[\underline{\tilde{D}}_{red}(\frac{i\omega}{V}, V)] + [\underline{\tilde{K}}_{red}(\frac{i\omega}{V}, V)]\}\underline{\mathbf{q}}(\omega) = 0 \quad , \quad (\text{C.4})$$

où

$$[\underline{\tilde{M}}_{red}] = [\underline{M}_{red}] \quad , \quad (\text{C.5})$$

$$[\tilde{\underline{D}}_{red}(\frac{i\omega}{V}, V)] = \left( [\underline{D}_{red}] + \frac{1}{2}\rho V^2 [\underline{\mathcal{A}}_I(\frac{i\omega}{V})] \right) , \quad (C.6)$$

$$[\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{i\omega}{V}, V)] = \left( [\underline{K}_{red}] + \frac{1}{2}\rho V^2 [\underline{\mathcal{A}}_R(\frac{i\omega}{V})] \right) . \quad (C.7)$$

Effectuons maintenant les changements de variables suivants :  $r = i\omega$  et  $\underline{s} = r\mathbf{q}$ . La nouvelle variable  $r$  parcourt alors une partie de l'axe des imaginaires et l'équation (C.4) devient successivement

$$\{r^2 [\tilde{\underline{M}}_{red}] + r [\tilde{\underline{D}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] + [\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)]\} \mathbf{q}(\frac{r}{i}) = 0 , \quad (C.8)$$

$$r \begin{bmatrix} [\tilde{\underline{M}}_{red}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{\underline{D}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] & [\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] \\ -[I] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = 0 . \quad (C.9)$$

Nous supposons maintenant qu'il n'y a pas de divergence statique, ce qui revient à se placer dans le cas de figure où la matrice  $[\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)]$  est toujours inversible.

Alors, la matrice  $\begin{bmatrix} [\tilde{\underline{D}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] & [\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] \\ -[I] & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  est inversible et nous pouvons écrire

$$\begin{bmatrix} [\tilde{\underline{D}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] & [\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] \\ -[I] & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -[I] \\ [\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)]^{-1} & [\tilde{\underline{G}}(\frac{r}{V}, V)] \end{bmatrix} , \quad (C.10)$$

où

$$[\tilde{\underline{G}}(\frac{r}{V}, V)] = -[\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)]^{-1} [\tilde{\underline{D}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] . \quad (C.11)$$

Ainsi, en multipliant l'équation (C.9) par  $\frac{1}{r} \begin{bmatrix} [\tilde{\underline{D}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] & [\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)] \\ -[I] & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1}$ , celle-ci devient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & [I] \\ [\tilde{\underline{B}}(\frac{r}{V}, V)] & [\tilde{\underline{G}}(\frac{r}{V}, V)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \mathbf{0} , \quad (C.12)$$

où

$$[\tilde{\underline{B}}(\frac{r}{V}, V)] = -[\tilde{\underline{K}}_{red}(\frac{r}{V}, V)]^{-1} [\tilde{\underline{M}}_{red}] . \quad (C.13)$$

L'équation (C.12) est une équation en  $r$  qui peut se réécrire en fonction de  $\lambda = \frac{1}{r}$  comme

$$[\tilde{\underline{H}}(\frac{1}{\lambda V}, V)] \underline{x} = \lambda \underline{x} , \quad (C.14)$$

où

$$\lambda = \frac{1}{r} , \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{q} \end{bmatrix} , \quad [\tilde{\underline{H}}(\frac{1}{\lambda V}, V)] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & [I] \\ [\tilde{\underline{B}}(\frac{1}{\lambda V}, V)] & [\tilde{\underline{G}}(\frac{1}{\lambda V}, V)] \end{bmatrix} . \quad (C.15)$$

Prolongeons maintenant la fonction  $r \rightarrow \tilde{H}(\frac{r}{V}, V)$  ayant précédemment pour support une partie de l'axe imaginaire ( $r = i\omega$ ) sur tout le plan complexe ( $r \in \mathbb{C}$ ). L'équation de flottement consiste alors à trouver les solutions complexes en  $\lambda$  de

$$\det \left( \left[ \tilde{H} \left( \frac{1}{\lambda V}, V \right) \right] - \lambda [I] \right) = 0 \quad . \quad (\text{C.16})$$

La résolution fournit  $2n$  racines complexes qui sont conjuguées 2 à 2 ( $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ ) telles que  $\lambda_{n+k} = \bar{\lambda}_k, \quad \forall k \in [1, n]$ .

A chaque racine complexe  $\lambda_k, \quad \forall k \in [1, n]$ , est associé un vecteur  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)}$  appelé pseudo vecteur propre à droite tel que

$$\left[ \tilde{H} \left( \frac{1}{\lambda_k V}, V \right) \right] \underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \lambda_k \underline{\mathbf{x}}^{(k)} \quad . \quad (\text{C.17})$$

Ainsi, les racines complexes  $\lambda_k$  sont construites par itération en partant de la valeur de la racine correspondant au système sans forces aérodynamiques généralisées

$$\left[ \tilde{H} \left( \frac{1}{\lambda_k^{(l-1)} V}, V \right) \right] \underline{\mathbf{x}}^{(l),(k)} = \lambda_k^{(l)} \underline{\mathbf{x}}^{(l),(k)} \quad , \quad (\text{C.18})$$

où

$$\lambda_k^{(0)} = \lambda_k^{(structure)} \quad \text{sans forces aérodynamiques généralisées} \quad . \quad (\text{C.19})$$

C'est la connaissance des  $n$  premières fonctions à valeurs complexes  $V \mapsto r_k(V) = \frac{1}{\lambda_k(V)}$  qui définit le domaine de flottement. En effet, la partie réelle de la fonction  $r_k(V)$  donne l'évolution des fréquences en fonction de la vitesse, et la partie imaginaire caractérise l'évolution des amortissements. Ainsi, il y aura flottement si  $\Im m(r_k(V)) < 0$ .

## C.2 Méthode simplifiée de résolution de l'équation de flottement

On considère une base modale de projection composée de modes à fréquences très proches les unes des autres, de sorte que la bande fréquentielle de cette base de projection soit très étroite. Dans ce cas de figure, nous supposons que la matrice des forces aérodynamiques généralisées peut être calculée à une fréquence donnée fixée  $\omega = \omega^*$  caractérisant cette bande.

Ainsi, l'équation (C.1) devient

$$\{-\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{red}] + i\omega([\underline{\mathbf{D}}_{red}] + [\underline{\mathbf{A}}_{red}^I(\omega^*)]) + [\underline{\mathbf{K}}_{red}] + [\underline{\mathbf{A}}_{red}^R(\omega^*)]\} \underline{\mathbf{q}}(\omega) = 0 \quad , \quad (\text{C.20})$$

où

$$[\underline{A}_{red}^R(\omega^*)] = \frac{1}{2}\rho V^2[\underline{A}_R(\frac{i\omega^*}{V})] \quad , \quad (C.21)$$

$$[\underline{A}_{red}^I(\omega^*)] = \frac{1}{2}\rho V^2[\underline{A}_I(\frac{i\omega^*}{V})] \quad . \quad (C.22)$$

En déroulant les différentes étapes de la méthode de résolution de l'équation de flottement du paragraphe précédent, le problème se reformule comme le problème aux valeurs propres suivant

$$[\tilde{\underline{H}}(\frac{i\omega^*}{V}, V)]\underline{\mathbf{x}} = \lambda \underline{\mathbf{x}} \quad , \quad (C.23)$$

où

$$\lambda = \frac{1}{r} \quad , \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{s}} \\ \underline{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad , \quad [\tilde{\underline{H}}(\frac{i\omega^*}{V}, V)] = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ [\tilde{\underline{B}}(\frac{i\omega^*}{V}, V)] & [\tilde{\underline{G}}(\frac{i\omega^*}{V}, V)] \end{bmatrix} \quad . \quad (C.24)$$

La résolution fournit  $2n$  racines complexes qui sont conjuguées 2 à 2 ( $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ ) telles que  $\lambda_{n+k} = \bar{\lambda}_k, \quad \forall k \in [1, n]$ .

A chaque valeur propre complexe  $\lambda_k$ , est associé un vecteur propre  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)}$  tel que

$$[\tilde{\underline{H}}(\frac{i\omega^*}{V}, V)]\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \lambda_k \underline{\mathbf{x}}^{(k)} \quad . \quad (C.25)$$

## Annexe D

# Construction du modèle probabiliste non paramétrique sur un modèle réduit dont les matrices structurales sont complexes

Dans cette annexe, nous présentons la méthode de construction du modèle probabiliste non paramétrique sur un modèle moyen réduit par une base de modes complexes. La réduction par une base de modes complexes entraîne l'apparition au niveau de l'équation de la dynamique de matrices hermitiennes et éventuellement de matrices symétriques.

Aussi, dans cette annexe, les équations sont écrites dans le repère global et non pas dans les repères locaux liés aux secteurs. Ainsi, toutes les grandeurs devraient être dotées d'un "chapeau" mais dans le but d'alléger l'écriture, ces "chapeaux" seront supprimés.

On considère les matrices aléatoires respectivement symétriques et hermitiennes  $[\mathbf{M}_{redS}^m]$ ,  $[\mathbf{D}_{redS}^m]$ ,  $[\mathbf{K}_{redS}^m]$  et  $[\mathbf{M}_{redH}^m]$ ,  $[\mathbf{D}_{redH}^m]$ ,  $[\mathbf{K}_{redH}^m]$  de masse, de dissipation et de rigidité réduites, et où  $m$  est relatif au secteur.

### D.1 Information disponible pour la construction du modèle probabiliste

L'information disponible introduite dans l'approche probabiliste non paramétrique pour ces matrices aléatoires correspond d'une part à la donnée des valeurs moyennes, d'autre part aux propriétés algébriques des matrices aléatoires et enfin à des propriétés mathématiques pour que la solution du problème stochastique soit du second ordre. Concernant les moyennes, nous avons,

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{M}_{redS}^m]\} = [\underline{\mathbf{M}}_{redS}^m] \quad , \quad \mathcal{E}\{[\mathbf{M}_{redH}^m]\} = [\underline{\mathbf{M}}_{redH}^m] \quad , \quad (\text{D.1})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{D}_{redS}^m]\} = [\underline{\mathbf{D}}_{redS}^m] \quad , \quad \mathcal{E}\{[\mathbf{D}_{redH}^m]\} = [\underline{\mathbf{D}}_{redH}^m] \quad , \quad (\text{D.2})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{K}_{redS}^m]\} = [\underline{\mathbf{K}}_{redS}^m] \quad , \quad \mathcal{E}\{[\mathbf{K}_{redH}^m]\} = [\underline{\mathbf{K}}_{redH}^m] \quad , \quad (\text{D.3})$$

où  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  désigne l'espérance mathématique.

Concernant les propriétés algébriques, les matrices aléatoires construites sur la base des matrices moyennes réduites doivent être telles que,

$$[\underline{\mathbf{M}}_{redS}^m] \in \mathbb{M}_n^S(\mathbb{C}) \implies [\mathbf{M}_{redS}^m] \in \mathbb{M}_n^S(\mathbb{C}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (\text{D.4})$$

$$[\underline{\mathbf{M}}_{redH}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \implies [\mathbf{M}_{redH}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (\text{D.5})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_{redS}^m] \in \mathbb{M}_n^S(\mathbb{C}) \implies [\mathbf{D}_{redS}^m] \in \mathbb{M}_n^S(\mathbb{C}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (\text{D.6})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_{redH}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \implies [\mathbf{D}_{redH}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (\text{D.7})$$

$$[\underline{\mathbf{K}}_{redS}^m] \in \mathbb{M}_n^S(\mathbb{C}) \implies [\mathbf{K}_{redS}^m] \in \mathbb{M}_n^S(\mathbb{C}) \quad \text{presque sûrement} \quad , \quad (\text{D.8})$$

$$[\underline{\mathbf{K}}_{redH}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \implies [\mathbf{K}_{redH}^m] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{C}) \quad \text{presque sûrement} \quad . \quad (\text{D.9})$$

Enfin concernant la résolution des équations de la dynamique, en notant que la réponse est une application non linéaire de ces matrices du fait de l'inversion de l'opérateur du problème, il est nécessaire de garantir que la solution aléatoire du problème de dynamique stochastique soit du second ordre. Les matrices aléatoires doivent alors vérifier les contraintes suivantes

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{M}_{redS}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad \mathcal{E}\{\|[\mathbf{M}_{redH}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (\text{D.10})$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{D}_{redS}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad \mathcal{E}\{\|[\mathbf{D}_{redH}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (\text{D.11})$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{K}_{redS}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad \mathcal{E}\{\|[\mathbf{K}_{redH}^m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (\text{D.12})$$

où  $\|[\cdot]\|_F = (tr([\cdot][\cdot]^*))^{\frac{1}{2}}$ .

## D.2 Normalisation des matrices aléatoires

L'étape de normalisation nécessite de construire une factorisation des matrices moyennes. Les matrices hermitiennes de masse, de rigidité et de dissipation n'étant pas forcément définies positives, une factorisation de Choleski ne peut en être faite. Nous choisissons alors de construire une factorisation sur la base des parties réelle et imaginaire des matrices symétriques ou hermitiennes.

### D.2.1 Factorisation des matrices complexes hermitiennes moyennes réduites

Désignons par  $[\underline{\mathbf{Z}}_H]$  la matrice complexe hermitienne moyenne réduite de masse, de dissipation ou de rigidité, et désignons par  $[\underline{\mathbf{Z}}_{HR}]$  et  $[\underline{\mathbf{Z}}_{HI}]$  les parties réelle et imaginaire de cette matrice.

La matrice  $[Z_{HR}]$  est réelle symétrique tandis que la matrice  $[Z_{HI}]$  est réelle antisymétrique. Il existe alors une base  $[\Theta]$  de vecteurs propres qui diagonalise à la fois  $[Z_{HR}]$  et  $[Z_{HI}]$  telle que

$$[Z_{HR}][\Theta] = [Z_{HI}][\Theta][\Sigma] \quad , \quad (\text{D.13})$$

où  $[\Theta]$  est une matrice complexe inversible de vecteurs propres et  $[\Sigma]$  est une matrice diagonale complexe de valeurs propres.

Alors, la matrice  $[Z_H]$  est diagonalisable par la base  $[\Theta]$  et on peut écrire

$$[\Theta]^* [Z_H] [\Theta] = [\Theta]^* [Z_{HR}] [\Theta] + i [\Theta]^* [Z_{HI}] [\Theta] = [\Sigma_H] \quad , \quad (\text{D.14})$$

où  $[\Sigma_H]$  est une matrice diagonale complexe.

Ainsi, il en résulte que

$$[Z_H] = ([\Theta]^{-1})^* [\Sigma_H] ([\Theta]^{-1}) = ([\Theta]^{-1})^* [\Sigma_H]^{\frac{1}{2}} [\Sigma_H]^{\frac{1}{2}} ([\Theta]^{-1}) \quad . \quad (\text{D.15})$$

## D.2.2 Factorisation des matrices complexes symétriques moyennes réduites

Désignons par  $[Z_S]$  la matrice complexe symétrique moyenne réduite de masse, de dissipation ou de rigidité. Cette matrice est sans signature. Désignons également par  $[Z_{SR}]$  et  $[Z_{SI}]$  les parties réelle et imaginaire de cette matrice. Les matrices  $[Z_{SR}]$  et  $[Z_{SI}]$  sont réelles symétriques. Il existe alors une base  $[\Theta]$  de vecteurs propres qui diagonalise à la fois  $[Z_{SR}]$  et  $[Z_{SI}]$  telle que

$$[Z_{SR}][\Theta] = [Z_{SI}][\Theta][\Sigma] \quad , \quad (\text{D.16})$$

où  $[\Theta]$  est une matrice complexe inversible de vecteurs propres et  $[\Sigma]$  est une matrice diagonale complexe de valeurs propres.

Alors, la matrice  $[Z_S]$  est diagonalisable par la base  $[\Theta]$  et on peut écrire

$$[\Theta]^T [Z_S] [\Theta] = [\Theta]^T [Z_{SR}] [\Theta] + i [\Theta]^T [Z_{SI}] [\Theta] = [\Sigma_S] \quad , \quad (\text{D.17})$$

où  $[\Sigma_S]$  est une matrice diagonale complexe.

Ainsi, il en résulte que

$$[Z_S] = ([\Theta]^{-1})^T [\Sigma_S] ([\Theta]^{-1}) = ([\Sigma_S]^{\frac{1}{2}} ([\Theta]^{-1}))^T ([\Sigma_S]^{\frac{1}{2}} ([\Theta]^{-1})) \quad . \quad (\text{D.18})$$



### D.3 Expression des matrices aléatoires

Les matrices moyennes réduites étant factorisées, les matrices aléatoires de masse, de dissipation et de rigidité sont alors normalisées de la façon suivante

$$[\mathbf{M}_{redS}^m] = ([\underline{\Sigma}_S]^{\frac{1}{2}}([\Theta]^{-1}))^T [\mathbf{G}_{M^m}] ([\underline{\Sigma}_S]^{\frac{1}{2}}([\Theta]^{-1})) \quad , \quad (\text{D.19})$$

$$[\mathbf{M}_{redH}^m] = ([\Theta]^{-1})^* [\underline{\Sigma}_H]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{G}_{M^m}] [\underline{\Sigma}_H]^{\frac{1}{2}} ([\Theta]^{-1}) \quad , \quad (\text{D.20})$$

$$[\mathbf{D}_{redS}^m] = ([\underline{\Sigma}_S]^{\frac{1}{2}}([\Theta]^{-1}))^T [\mathbf{G}_{D^m}] ([\underline{\Sigma}_S]^{\frac{1}{2}}([\Theta]^{-1})) \quad , \quad (\text{D.21})$$

$$[\mathbf{D}_{redH}^m] = ([\Theta]^{-1})^* [\underline{\Sigma}_H]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{G}_{D^m}] [\underline{\Sigma}_H]^{\frac{1}{2}} ([\Theta]^{-1}) \quad , \quad (\text{D.22})$$

$$[\mathbf{K}_{redS}^m] = ([\underline{\Sigma}_S]^{\frac{1}{2}}([\Theta]^{-1}))^T [\mathbf{G}_{K^m}] ([\underline{\Sigma}_S]^{\frac{1}{2}}([\Theta]^{-1})) \quad , \quad (\text{D.23})$$

$$[\mathbf{K}_{redH}^m] = ([\Theta]^{-1})^* [\underline{\Sigma}_H]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{G}_{K^m}] [\underline{\Sigma}_H]^{\frac{1}{2}} ([\Theta]^{-1}) \quad , \quad (\text{D.24})$$

où  $[\mathbf{G}_{M^m}]$ ,  $[\mathbf{G}_{D^m}]$  et  $[\mathbf{G}_{K^m}]$  sont des matrices aléatoires germes à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ , indépendantes, dont la valeur moyenne est égale à la matrice identité. La loi de probabilité et le générateur de réalisations indépendantes de ces matrices aléatoires germes ont été construits dans (Soize [97, 98]), comme indiqué au chapitre 3 du manuscrit.

# Bibliographie

- [1] D.H. Afolabi. A note on the rogue failure of turbine blades. *Journal of Sound and Vibration*, 122(3) :535–545, 1987.
- [2] J. Avalos, M.P. Mignolet, and C. Soize. Response of bladed disks with mistuned blade-disk interfaces. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, ASME Paper GT-59580*, Orlando, USA, 2009.
- [3] J.P. Ayers, D.M. Feiner, and J.H. Griffin. Reducing mistuning effects by optimally switching blades. In *10th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference*, New Orleans, USA, 2005.
- [4] P. Basu and J.H. Griffin. The effect of limiting aerodynamic and structural coupling in models of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 108(2) :132–139, 1986.
- [5] O.O. Bendiksen. Localization phenomena in structural dynamics. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11(10) :1621–1660, 2000.
- [6] O.O. Bendiksen. Aeroelastic stabilization by disorder and imperfections. In *XVIth IU-TAM Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Paper No. 583P*, Lyngby, Denmark, 1984.
- [7] O.O. Bendiksen. Mode localization phenomena in large space structures. *AIAA Journal*, 25(9) :1241–1248, 1987.
- [8] W.A. Benfield and R.F. Hrudá. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9(7) :1255–1261, 1971.
- [9] M. Berthillier, M. Dhainaut, F. Burgaud, and V. Garnier. A numerical method for the prediction of bladed disk forced response. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119 :404–410, 1997.
- [10] J.R. Bladh. *Efficient Responses of the Vibratory Response of Mistuned Bladed Disks by Reduced Order Modeling*. Mechanical engineering, University of Michigan, 2001.
- [11] R. Bladh, M.P. Castanier, and C. Pierre. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks assemblies with shrouds. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 121(3) :515–522, July 1999.

- [12] R. Bladh, M.P. Castanier, and C. Pierre. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks-part 1 : Theoretical models. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(1) :89–99, 2001.
- [13] R. Bladh, M.P. Castanier, and C. Pierre. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks-part 2 : Application. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(1) :100–108, 2001.
- [14] R. Bladh, C. Pierre, M.P. Castanier, and M.J. Kruse. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modeling. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(2) :311–324, 2002.
- [15] E. Capiez-Lernout. *Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique en présence d'incertitudes aléatoires. Application au désaccordage des roues aubagées*. PhD thesis, Université de Marne-la-Vallée, 2004.
- [16] E. Capiez-Lernout and Soize C. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed-disks. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126(3) :610–618, 2004.
- [17] E. Capiez-Lernout, C. Soize, J.-P. Lombard, C. Dupont, and E. Seinturier. Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(2) :621–628, 2005.
- [18] M.P. Castanier and C. Pierre. Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. *AIAA Journal*, 40(10) :2077–2086, 2002.
- [19] M.P. Castanier and C. Pierre. Modelling and analysis of mistuned bladed disk vibration : Status and emerging directions. *AIAA Journal of Propulsion and Power*, 22(2) :384–396, 2006.
- [20] M.P. Castanier and C. Pierre. Investigation of the combined effects of intentional and random mistuning on the forced response of bladed disks. In *Proceedings 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cleveland OH, July, 13-15 1998*, 1998.
- [21] M.P. Castanier, G. Ottarson, and C. Pierre. Reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 119(3) :439–447, 1997.
- [22] B-K. Choi, J. Lentz, A.J. Rivas-Guerra, and M.P. Mignolet. Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning : formulation and assessment. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125 :131–140, 2003.
- [23] E.F. Crawley. Aeroelastic formulation for tuned and mistuned rotors. *AGARDograph No. 298, 2* :19 (1–24), 1988.

- 
- [24] E.F. Crawley and K.C. Hall. Optimization and mechanism of mistuning in cascades. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 107 :418–426, 1983.
- [25] R. L. Dailey. Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues. *AIAA Journal*, 27 : 486–491, 1989.
- [26] J. Dugundji and D.J. Bundas. Flutter and forced response of mistuned rotors using standing wave analysis. *AIAA Journal*, 22(11) :1652–1661, 1984.
- [27] R.C.F. Dye and T.A. Henry. Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. *ASME Journal of Engineering for Power*, 91(3) : 182–187, 1969.
- [28] L.E. El-Bayoumi and A.V. Srinivasan. Influence of mistuning on rotor-blade vibration. *AIAA Journal*, 13(4) :460–464, 1975.
- [29] D.J. Ewins. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 9(1) :65–69, 1969.
- [30] D.J. Ewins. Vibration characteristics of bladed disk assemblies. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 15(3) :165–186, 1973.
- [31] D.J. Ewins. Vibration modes of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Engineering for Power*, pages 349–355, 1976.
- [32] D.J. Ewins. Further studies of bladed disc vibration : Effects of packeting. In *IMEchE Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Cambridge*, pages 97–102, 1980.
- [33] D.J. Ewins. The effects of blade mistuning on vibration response - a survey. In *IFTOMM 4th International Conference on Rotordynamics, Prague, Czechoslovakia*, 1991.
- [34] D.J. Ewins and Z.S. Han. Resonant vibration levels of a mistuned bladed disc. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(2) :211–217, 1983.
- [35] D. Feiner and J. Griffin. A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *Journal of Turbomachinery*, 124 :597–605, 2002.
- [36] D. Feiner and J. Griffin. Mistuning identification of bladed disks using fundamental mistuning model. part 1 : Theory, part 2 : Application. *Journal of Turbomachinery*, 126 : 150–165, 2002.
- [37] J.H. Griffin. On predicting the resonant response of bladed disk assemblies. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 110 :45–50, 1988.
- [38] J.H. Griffin and T.M. Hoosac. Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(2) :204–210, 1984.
-

- [39] J.H. Griffin and A. Sinha. The interaction between mistuning and friction in the forced response of bladed disk assemblies. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 107 :205–211, 1985.
- [40] Y. Han and M.P. Mignolet. Optimization of intentional mistuning patterns for the mitigation of the effects of random mistuning. In *ASME Paper GT-2008-51439, Proceedings of ASME Turbo Expo Land Sea and Air, Berlin, Germany*, June 2008.
- [41] R. Henry. Calcul des fréquences et modes propres des structures répétitives ciculaires. *Journal de Mécanique Appliquée*, 4(1) :61–82, 1980.
- [42] C.H. Hodges. Confinement of vibration by structural irregularity. *Journal of Sound and Vibration*, 82 :411–424, 1982.
- [43] D. Hoyniak and S. Fleeter. Aerodynamic and structural detuning of supersonic turbomachine rotors. *Journal of Propulsion and Power*, 2(2) :161–167, 1986.
- [44] M. Imregun and D. J. Ewins. Aeroelastic vibration analysis of tuned and mistuned bladed systems. In *Proceedings of the Second Symposium on Unsteady Aerodynamics of Turbomachines and Propellers, Cambridge, UK*, 1984.
- [45] B. Irwanto, H.-J. Hardtke, and D. Pawandenat. An efficient technique for the computation of eigenvalue and eigenvector derivatives of cyclic structures. *Computers and Structures*, 81 :2395–2400, 2003.
- [46] E.T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4) : 620–630, 1957.
- [47] E.T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 108(2) : 171–190, 1957.
- [48] W. J. Jones and C. J. Cross. Reducing mistuned bladed disk forced response below tuned resonant amplitudes. In *Seventh National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference, Palm Beach, FL*, 2002.
- [49] K.R.V. Kaza and R.E. Kielb. Flutter and response of a mistuned cascade in incompressible flow. *AIAA*, 20 :1120–1127, 1982.
- [50] K.R.V. Kaza and R.E. Kielb. Effects of structural coupling on mistuned cascade flutter and response. *JEGTP*, 106 :17–24, 1984.
- [51] K.R.V. Kaza and R.E. Kielb. Vibration and flutter of mistuned bladed disk assemblies. *JEGTP*, 1(5) :336–344, 1985.
- [52] J. A. Kenyon and J. H. Griffin. Forced response of turbine engine bladed disks and sensitivity to harmonic mistuning. In *Proceedings of the ASME TURBO EXPO 2001, 2001-GT-0274*, 2001.

- 
- [53] M.J. Kruse and C. Pierre. An experimental investigation of vibration localization in bladed disks - part i : Free response - part ii : Forced response. In *Proceedings of the 42nd ASME Gas Turbine and Aeroengine Cong., Orlando, Florida, USA*, 1997.
- [54] B. Lallane. Perturbations methods in structural dynamics and applications to cyclic symmetric domains. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(3) :654–662, 2005.
- [55] D. Laxalde, F. Thouverez, and J.-P. Lombard. Dynamical analysis of multi-stage cyclic structures. *Mechanics Research Communications*, 34(4) :379–384, 2007.
- [56] S.-H. Lim, M. Castanier, and C. Pierre. Vibration modeling of bladed disks subject to geometric mistuning and design changes. In *Proceedings of the 45-th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference, paper 2004-1686, Palm Springs, California, USA*, 2004.
- [57] C.-C. Lin and M.P. Mignolet. Effects of damping and damping mistuning on the forced vibration response of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2) :525–543, 1996.
- [58] C.-C. Lin and M.P. Mignolet. An adaptative perturbation scheme for the analysis of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119(1) :153–160, 1997.
- [59] J.C. MacBain and P.W. Whaley. Maximum resonant response of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 106(2) :218–223, 1984.
- [60] C. Martel, R. Corral, and J.M. Llorens. Stability increase of aerodynamically unstable rotors using intentional mistuning. volume 130, 2008.
- [61] M. Mbaye, C. Soize, J.-P. Ousty, and E. Capiiez-Lernout. A reduced-order model of mistuned cyclic dynamical systems with finite geometric perturbations using a basis of cyclic modes. 2009.
- [62] M. Mbaye, C. Soize, J.-P. Ousty, and E. Capiiez-Lernout. Robust analysis of design in vibration of turbomachines. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, ASME Paper GT-59651, Orlando, USA*, 2009.
- [63] M. Mbaye, C. Soize, and J.-P. Ousty. A reduced-order model of detuned cyclic dynamical systems with blades geometric modifications using bases of cyclic modes. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, In revision 2009.
- [64] M. Mbaye, C. Soize, J.-P. Ousty, and E. Capiiez-Lernout. Robust analysis of design in vibration of bladed disks. *ASME Journal of Turbomachinery*, Submitted 2009.
-

- [65] M.P. Mignolet and C-C. Lin. The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Turbomachinery*, 115(3) :771–780, 1993.
- [66] M.P. Mignolet, C-C. Lin, and B.H. LaBorde. A novel limit distribution for the analysis of randomly mistuned bladed disks. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(2) :388–394, 2001.
- [67] M.P. Mignolet, A.J. Rivas-Guerra, and J.P. Delor. Identification of mistuning characteristics of bladed disks from free response data -part 1. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(2) :395–403, 2001.
- [68] F. Moyroud, T. Fransson, and G. Jacquet-Richardet. Identification of mistuning characteristics of bladed disks from free response data -part 1. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(4) :942–952, 2002.
- [69] A. Muszynska and D.I.G. Jones. On tuned bladed disk dynamics : Some aspects of friction related mistuning. *Journal of Sound and Vibration*, 86(1) :107–128, 1983.
- [70] M. Nikolic. *New insights into the blade mistuning problem*. PhD thesis, Imperial College London / University of London, 2006.
- [71] M. Nikolic, E.P. Petrov, and D.J. Ewins. Robust strategies for forced response reduction of bladed disks based on large mistuning concept. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 130, 2008.
- [72] M. Nowinski and J. Panovsky. Flutter mechanisms in low pressure turbine blades. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, ASME Paper 98-GT-573, USA*, 1998.
- [73] R. Ohayon and C. Soize. *Structural acoustics and vibration*. Academic press, 1998.
- [74] R. Ohayon, R. Sampaio, and C. Soize. Dynamic substructuring of damped structures using the singular value decomposition. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 64(2) : 292–298, 1997.
- [75] I.U. Ojalvo. Efficient computation of modal sensitivities for systems with repeated frequencies. *AIAA Journal*, 26 :1386–1390, 1988.
- [76] G.S. Ottarson and C. Pierre. On the effects of interblade coupling on the statistics of maximum forced response amplitudes in mistuned bladed disks. In *Proceedings 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Material Conference, New Orleans, Louisiana, April 1995*, pages 3070–3078. AIAA, 1995.
- [77] E.P. Petrov, K.Y. Sanliturk, and D.J. Ewins. A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(3) :586–597, 2002.



- 
- [78] C. Pierre and E.H. Dowell. Localization of vibrations by structural irregularity. *Journal of Sound and Vibration*, 114(3) :549–564, 1987.
- [79] Ceccio S.L. Pierre, C. and J. Judge. Experimental investigation of mistuned bladed disk vibration. In *Proceedings of the 5th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference, Chandler, Arizona, USA*, 2000.
- [80] M.X. Platzer and F.O. Carta. Agard manual on aeroelasticity in axial-flow turbomachines. *AGARDograph No. 298*, 2, 1988.
- [81] A.J. Rivas-Guerras and M.P. Mignolet. Maximum amplification of blade response due to mistuning : localization and mode shapes aspects of the worsts disks. In *Proceedings of ASME Turbo Expo Land Sea and Air, Amsterdam, The Netherlands*, june 2002.
- [82] R. Rzadkowski. The general model of free vibrations of mistuned bladed discs, part i : Theory, part ii : Numerical results. *Journal of Sound and Vibration*, 173(3) :377–393, 1993.
- [83] B. Salhi, J. Lardiès, M. Berthillier, V. Voinis, and C. Bodel. Modal parameter identification of mistuned bladed disks using tip timing data. *Journal of Sound and Vibration*, 314 :885–906, 2008.
- [84] K.Y. Sanliturk and M. Imregun. Vibration analysis of mistuned bladed disk assemblies : inverse approach. *AIAA Journal*, 32(4) :857–865, 1994.
- [85] G.I. Schueller. Computational stochastic mechanics - recent advances. *Computers and Structures*, 79(22-25) :2225–2234, 2001.
- [86] G.I. Schueller. Computational methods in stochastic mechanics and reliability analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16) :1251–1795, 2005.
- [87] G.I. Schueller. On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis. *Computers and Structures*, 854(5) :235–243, 2007.
- [88] G.I. Schueller. A state-of-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4) :197–321, 1997.
- [89] G.I. Schueller. Calculating the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly. *AIAA Journal*, 24(11) :1797–1801, 1986.
- [90] E. Seinturier, C. Dupont, M. Berthillier, and M. Dumas. A new aeroelastic model for mistuned bladed disks. In *AIAA paper 2002-1533 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2002.
- [91] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, 27 :379–423 and 623–659, 1948.
-



- [92] B. Shapiro. *Passive control of flutter and forced response in bladed disks via mistuning*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1999.
- [93] A. Sinha and S. Chen. A higher order to compute the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 2(130) :207–221, 1989.
- [94] I. Sladojevic, E.P. Petrov, A.I. Sayma, M. Imregun, and J.S. Green. Investigation of the influence of aerodynamic coupling on response levels of mistuned bladed discs with weak structural coupling. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, ASME Paper 2005-GT-69050*, 2005.
- [95] J.C. Slater, G.R. Minkiewicz, and A.J. Blair. Forced response of bladed disk assemblies. a survey. *The Shock and Vibration Digest*, 31(1), 1999.
- [96] G. Sogliero and A.V. Srinivasan. Fatigue life estimates of mistuned blades via a stochastic approach. *AIAA Journal*, 18(3) :318–323, 1989.
- [97] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) :277–294, 2000.
- [98] C. Soize. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109(5) :1979–1996, 2001.
- [99] C. Soize. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 263 :893–916, 2003.
- [100] C. Soize. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (12-16) :1333–1366, 2005.
- [101] C. Soize, E. Capiez-Lernout, J.-F. Durand, C. Fernandez, and L. Gagliardini. Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (1) :150–163, 2008.
- [102] W.A. Strange and J.C. MacBain. An investigation of dual mode phenomena in a mistuned bladed disk. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 105 : 402–407, 1983.
- [103] D. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1) :81–102, 1979.
- [104] S.A. Tobias and R.N. Arnold. The influence of dynamical imperfections on the vibration of rotating disks. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, IMechE*, volume 171, pages 669–690, 1957.
- [105] S.-T. Wei and C. Pierre. Statistical analysis of the forced response of mistuned cyclic assemblies. *AIAA Journal*, 28(5), 1990.

- [106] S.T. Wei and C. Pierre. Localization phenomena in mistuned assemblies for cyclic symmetry - part 1 : free vibrations - part 2 : forced vibrations. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110(4) :429–449, 1988.
- [107] D.S. Whitehead. Effects of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 8(1) :15–21, 1966.
- [108] F. Williams, D. Kennedy, G. Wu, and J. Zhou. Exact computation of natural frequencies of repetitive structures. *Structural Engineering and Mechanics*, 4(5) :553–568, 1996.
- [109] B. Xiao, A.J. Rivas-Guerra, and M.P. Mignolet. Maximum amplification of blade response due to mistuning in multi-degree-of-freedom blade models. In *ASME Paper GT-2004-54030, Proceedings of ASME Turbo Expo Land Sea and Air, Vienna, Austria*, June 2004.
- [110] M-T. Yang and J.H. Griffin. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(3) :893–900, 2001.