

# ESTIMATION NON-PARAMÉTRIQUE DES QUANTILES EXTRÊMES CONDITIONNELS

THÈSE PRÉSENTÉE PAR

Alexandre LEKINA

réalisée sous la direction de

Stéphane GIRARD & Laurent GARDES

Soutenue publiquement le mercredi 13 octobre 2010.

- 1 Introduction
  - En l'absence de covariable
  - En présence de covariable
  
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
  - Modèle et méthode d'estimation
  - Hypothèses et résultats asymptotiques
  - Application à l'estimation de l'indice de queue conditionnel
  - Application à l'estimation des quantiles conditionnels très extrêmes
  
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
  - Expériences numériques
  - Estimation des niveaux de retour de pluies dans les Cévennes
  
- 4 Conclusions et perspectives
  - Conclusions
  - Perspectives

# Plan : 2 - Introduction

- 1 Introduction
  - En l'absence de covariable
  - En présence de covariable
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives

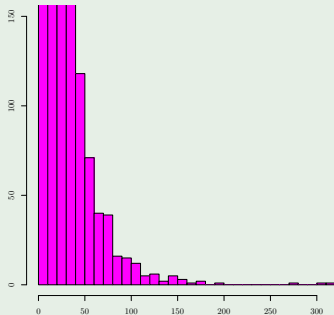


**Paris Match** (Djakarta, mars 2009) : La rupture d'un barrage dans la banlieue de la capitale indonésienne dans la nuit de jeudi à vendredi a entraîné l'inondation d'un quartier résidentiel très peuplé. Plus de 500 maisons dans les zones résidentielles de Cireundeu et de Tangerang, dans le sud de l'agglomération de Djakarta ont été prises sous les eaux. Selon le chef de la cellule de crise du ministère de la Santé, Rustam Pakaya, le bilan est d'au moins 50 morts et plusieurs dizaines de disparus.

## Hypothèse

Les précipitations notées  $Y_1, \dots, Y_n$  sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Trouver la hauteur des digues dont la probabilité d'être dépassée par les inondations est proche de zéro ?



Loi empirique des précipitations journalières (mm) à Montpellier entre 1952 – 2000.

# Problématique : en l'absence de covariable

Partant d'un échantillon d'observations indépendantes  $\{Y_i, i = 1, \dots, n\}$ .

- Estimer les **quantités extrêmes**  $q_{\alpha_n}$  associées à une v.a  $Y \in \mathbb{R}$  définies par

$$\mathbb{P}(Y > q_{\alpha_n}) = \alpha_n,$$

quand  $\alpha_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

- Calculer la **probabilité**  $\alpha_n$  d'observer une quantité extrême  $y_n$  définie par

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(Y > y_n),$$

quand  $y_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

## Vocabulaire

- $Y$  est appelée la **variable d'intérêt**,
- $q_{\alpha_n}$  est le **quantile** d'ordre  $\alpha_n$ ,
- si  $\alpha_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  alors, on parle de **quantile extrême**.

# Résultat principal de la théorie des valeurs extrêmes

## Théorème [Fisher and Tippet, 1928, Gnedenko, 1943]

Sous certaines conditions de régularité sur la fonction de répartition  $F$ , il existe un paramètre réel  $\gamma$  et deux suites  $(a_n)_{n \geq 1} > 0$  et  $(b_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\max(Y_1, \dots, Y_n) - b_n}{a_n} \leq y \right] = \mathcal{J}_\gamma(y),$$

avec

$$\mathcal{J}_\gamma(y) = \begin{cases} \exp \left[ -(1 + \gamma y)^{-1/\gamma} \right] & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp \left[ -\exp(-y) \right] & \text{si } \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{et pour tout } y \text{ tel que } 1 + \gamma y > 0.$$

et  $\mathcal{J}_\gamma$  la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes généralisée.

## Vocabulaire et notation

- $\gamma$  est appelé l'indice de queue ou l'indice des valeurs extrêmes.

### 3 domaines d'attraction

Si  $F$  vérifie le Théorème [Fisher and Tippet, 1928, Gnedenko, 1943], alors on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de  $\mathcal{J}_\gamma$ .

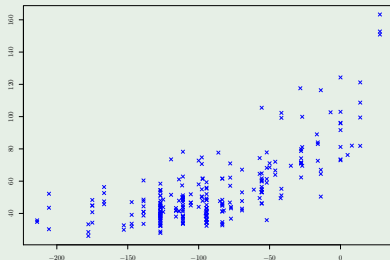
Fréchet ( $\gamma > 0$ )	Weibull ( $\gamma < 0$ )	Gumbel ( $\gamma = 0$ )
Cauchy	Uniforme	Normale
Pareto	Beta	Exponentielle
Student	Weibull	Log-normale
Fréchet		Gamma
Burr		Weibull <sub>m</sub>
		Benktander-type I et II



# Plan : 2 - Introduction

- 1 Introduction
  - En l'absence de covariable
  - En présence de covariable
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives

# Exemple 1 : modélisation de données de fiabilité de réacteurs nucléaires



La ténacité de la cuve (verticalement) et la température (horizontalement).

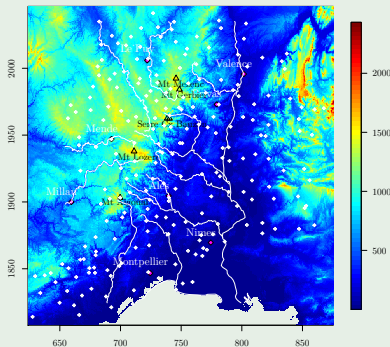
## Objectifs :

- évaluer la probabilité (très faible) d'apparition de micro fissures dans ses cuves,
- évaluer des quantiles de la ténacité en fonction de la température.

- quantité d'intérêt → ténacité,
- covariable (**unidimensionnelle**) → température.

**Source** : données fournies par le Laboratoire de Conduite et Fiabilité des Réacteurs (LCFR) du CEA Cadarache.

## Exemple 2 : Carte des niveaux de retour des pluies dans une région



### Objectifs :

- évaluer la hauteur de pluies horaires ou journalières pouvant être dépassée une fois toutes les  $N$  années ;
- variable d'intérêt → hauteur de pluies,
- covariable (**[bi, tri] dimensionnelle**) → position géographique.

La région des Cévennes-Vivarais et ses alentours.  
 Horizontalement : longitude (km), verticalement : latitude (km), échelle des couleurs : altitude (m), villes (roses), montagnes (triangles), fleuves (lignes grises) et stations d'observations (blancs).

Source : Données fournies par le Laboratoire des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE) de Grenoble.

## Problématique : en présence de covariable

Partant d'un échantillon d'observations indépendantes  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  du couple  $(X, Y)$ .

- $Y \in \mathbb{R}$  est une variable d'intérêt associée à une covariable  $X$  (aléatoire).
- Estimer des **quantiles extrêmes conditionnels**  $q(\alpha_n|x)$  définis par

$$\mathbb{P}(Y > q(\alpha_n|x)|X = x) = \alpha_n,$$

quand  $\alpha_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

- Évaluer les **petites probabilités conditionnelles** définies par

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(Y > y_n|X = x),$$

quand  $y_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

## Problématique : en présence de covariable

Partant d'un échantillon d'observations indépendantes  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  du couple  $(X, Y)$ .

- $Y \in \mathbb{R}$  est une variable d'intérêt associée à une covariable  $X$  (**aléatoire**).
- Estimer des **quantiles extrêmes conditionnels**  $q(\alpha_n|x)$  définis par

$$\mathbb{P}(Y > q(\alpha_n|x)|X = x) = \alpha_n,$$

quand  $\alpha_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

- Évaluer **les petites probabilités conditionnelles** définies par

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(Y > y_n|X = x),$$

quand  $y_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### Difficultés

- $\mathbb{P}(Y > y_n|X = x)$  : inconnue, difficile à estimer quand  $y_n \rightarrow \infty$ .
- $q(\alpha_n|x)$  est une fonction de  $x$ .

# Plan : 3 - Estimation des courbes de niveaux extrêmes

- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
  - **Modèle et méthode d'estimation**
  - Hypothèses et résultats asymptotiques
  - Application à l'estimation de l'indice de queue conditionnel
  - Application à l'estimation des quantiles conditionnels très extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives

# Modèle d'étude

- Soit  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  un échantillon d'observations indépendantes du couple  $(X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ .
- Estimer  $\forall x \in \mathbb{R}^p$  et  $\forall \alpha_n \rightarrow 0$ , les **courbes de niveaux extrêmes** définies comme les graphes de fonctions  $x \in \mathbb{R}^p \mapsto q(\alpha_n|x) \in \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\bar{F}(q(\alpha_n|x)|x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(Y > q(\alpha_n|x)|X = x) = \alpha_n.$$

- On suppose que la loi conditionnelle de  $Y|X = x$  appartient au **domaine d'attraction de Fréchet**, i.e.

$$\bar{F}(y|x) = y^{-1/\gamma(x)} \ell(y|x),$$

- $\gamma(\cdot)$  une fonction inconnue et positive de la covariable  $x$  appelée l'**indice de queue conditionnel**,
- $\ell(\cdot|x)$  une fonction à **variations lentes** (à  $x$  fixé) à l'infini, i.e.  $\forall \lambda > 0$ ,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ell(\lambda y|x)}{\ell(y|x)} = 1.$$

# Méthode d'estimation et définition des estimateurs

- Estimer le **quantile conditionnel** en inversant un estimateur de  $\bar{F}(\cdot|x)$ , i.e.

$$\hat{q}_n(\alpha_n|x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}_n^{\leftarrow}(\alpha_n|x) = \inf \left\{ t, \hat{F}_n(t|x) \leq \alpha_n \right\}.$$

- Nécessite d'estimer la probabilité  $\bar{F}(y_n|x)$  lorsque  $y_n \rightarrow \infty$  (qd  $n \rightarrow \infty$ ).

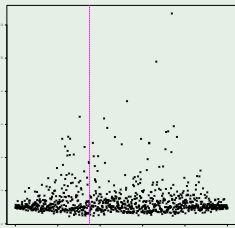


# Méthode d'estimation et définition des estimateurs

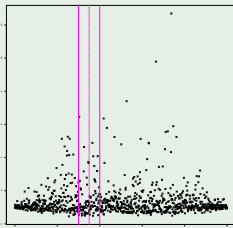
- Estimer le **quantile conditionnel** en inversant un estimateur de  $\bar{F}(\cdot|x)$ , i.e.

$$\hat{q}_n(\alpha_n|x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}_n^{\leftarrow}(\alpha_n|x) = \inf \left\{ t, \hat{F}_n(t|x) \leq \alpha_n \right\}.$$

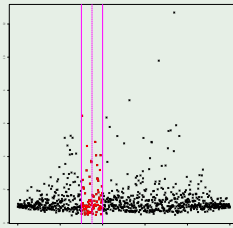
- Nécessite d'estimer la probabilité  $\bar{F}(y_n|x)$  lorsque  $y_n \rightarrow \infty$  (qd  $n \rightarrow \infty$ ).
- Utiliser les v.a  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  dont les points d'observations  $X_i$  sont distants au plus de  $h_n > 0$  du point  $x$ ,



On se place au point  $X = x$



On fixe le paramètre  $h_n > 0$



On retient les  $(X_j, Y_j)$  dans la  $B(x, h_n)$

# Méthode d'estimation et définition des estimateurs

- Estimer le **quantile conditionnel** en inversant un estimateur de  $\bar{F}(\cdot|x)$ , i.e.

$$\hat{q}_n(\alpha_n|x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}_n^{\leftarrow}(\alpha_n|x) = \inf \left\{ t, \hat{F}_n(t|x) \leq \alpha_n \right\}.$$

- Nécessite d'estimer la probabilité  $\bar{F}(y_n|x)$  lorsque  $y_n \rightarrow \infty$  (qd  $n \rightarrow \infty$ ).
- Utiliser les v.a  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  dont les points d'observations  $X_i$  sont distants au plus de  $h_n > 0$  du point  $x$ ,
- Attribuer aux  $Y_i$  sélectionnées, des poids qui tiennent compte de la distance de leur  $X_i$  au point  $x$ ,

# Méthode d'estimation et définition des estimateurs

- Estimer le **quantile conditionnel** en inversant un estimateur de  $\bar{F}(\cdot|x)$ , *i.e.*

$$\hat{q}_n(\alpha_n|x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{F}_n^{\leftarrow}(\alpha_n|x) = \inf \left\{ t, \hat{F}_n(t|x) \leq \alpha_n \right\}.$$

- Nécessite d'estimer la probabilité  $\bar{F}(y_n|x)$  lorsque  $y_n \rightarrow \infty$  (qd  $n \rightarrow \infty$ ).
- Utiliser les v.a  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  dont les points d'observations  $X_i$  sont distants au plus de  $h_n > 0$  du point  $x$ ,
- Attribuer aux  $Y_i$  sélectionnées, des poids qui tiennent compte de la distance de leur  $X_i$  au point  $x$ ,
- Estimer  $\bar{F}(\cdot|x)$  par une moyenne pondérée, *i.e.*

$$\hat{F}_n(y_n|x) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \mathbb{1}_{\{Y_i > y_n\}}}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}, \text{ [Collomb, 1980]}$$

- $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$  est la fonction indicatrice.
- $K$  est une fonction positive, bornée, intégrable et à support compact  $S \subseteq \mathbb{R}^p$ .
- $h_n$  est une suite non aléatoire telle que  $h_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

# Plan : 3 - Estimation des courbes de niveaux extrêmes

- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
  - Modèle et méthode d'estimation
  - Hypothèses et résultats asymptotiques
  - Application à l'estimation de l'indice de queue conditionnel
  - Application à l'estimation des quantiles conditionnels très extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives

# Hypothèses de régularité

- **Notations** : soit  $g$  la densité de  $X$ , on désigne par  $d(x, x')$  la distance entre deux points  $(x, x') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ .
- **Conditions de Lipschitz** : il existe des constantes  $y_0 > 1$ ,  $c_\gamma > 0$ ,  $c_\ell > 0$  et  $c_g > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\gamma(x)} - \frac{1}{\gamma(x')} \right| &\leq c_\gamma d(x, x'), \\ \sup_{y \geq y_0} \left| \frac{\log \ell(y|x)}{\log y} - \frac{\log \ell(y|x')}{\log y} \right| &\leq c_\ell d(x, x'), \\ |g(x) - g(x')| &\leq c_g d(x, x'). \end{aligned}$$

# Normalité asymptotique de $\bar{F}(y_n|x)$

## Théorème

Si de plus,

- $y_n \rightarrow \infty$  tq  $nh_n^p \bar{F}(y_n|x) \rightarrow \infty$  et  $nh_n^{p+2} \log^2(y_n) \bar{F}(y_n|x) \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow \infty$ ,
- $\{a_j, j = 1, \dots, J\}$  une suite strictement positive et croissante,

alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $g(x) > 0$ ,

$$\left\{ \sqrt{nh_n^p \bar{F}(y_n|x)} \left( \frac{\hat{F}_n(a_j y_n|x)}{\bar{F}(a_j y_n|x)} - 1 \right) \right\}_{\{j=1, \dots, J\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0_{\mathbb{R}^J}, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} C(x) \right),$$

où  $C_{j,j'}(x) = a_{j \wedge j'}^{1/\gamma(x)}$  pour  $(j, j') \in \{1, \dots, J\}^2$ .

# Normalité asymptotique de $\bar{F}(y_n|x)$

## Théorème

Si de plus,

- $y_n \rightarrow \infty$  tq  $nh_n^p \bar{F}(y_n|x) \rightarrow \infty$  et  $nh_n^{p+2} \log^2(y_n) \bar{F}(y_n|x) \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow \infty$ ,
- $\{a_j, j = 1, \dots, J\}$  une suite strictement positive et croissante,

alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $g(x) > 0$ ,

$$\left\{ \sqrt{nh_n^p \bar{F}(y_n|x)} \left( \frac{\hat{F}_n(a_j y_n|x)}{\bar{F}(a_j y_n|x)} - 1 \right) \right\}_{\{j=1, \dots, J\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0_{\mathbb{R}^J}, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} C(x) \right),$$

où  $C_{j,j'}(x) = a_{j \wedge j'}^{1/\gamma(x)}$  pour  $(j, j') \in \{1, \dots, J\}^2$ .

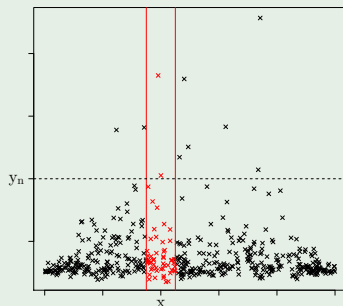
## Remarques sur la variance asymptotique

- Inversement proportionnelle à  $nh_n^p \bar{F}(y_n|x)$ .
- Terme additionnel  $1/\bar{F}(y_n|x) \rightarrow \infty$  par rapport au cas  $y_n = y$  bornée où [Berinet et al., 2001, Théorème 6.3] trouvent  $\frac{\bar{F}(y|x)(1-\bar{F}(y|x))}{nh_n^p} \frac{\|K\|_2^2}{g(x)}$ .

# Interprétation de la condition $nh_n^p \bar{F}(y_n|x) \rightarrow \infty$

- CNS pour qu'il y ait presque sûrement au moins un point dans la région  $B(x, h_n) \times [y_n, +\infty[ \in \mathbb{R}^{p+1}$ .
- Si  $y_n$  est borné, alors on retrouve la condition de normalité asymptotique classique :  $nh_n^p \rightarrow \infty$ .

Illustration géométrique de  $nh_n^p \bar{F}(y_n|x) \rightarrow \infty$ , avec  $p = 1$





# Interprétation de la condition $nh_n^{p+2} \bar{F}_n(y_n|x) \log^2(y_n) \rightarrow 0$

- Condition pour que le carré du biais asymptotique, de l'ordre de

$$(h_n \log y_n)^2,$$

soit négligeable devant la variance asymptotique, de l'ordre de

$$\frac{1}{nh_n^p \bar{F}(y_n|x)}.$$

- Si  $y_n$  est borné, alors on retrouve la condition de normalité asymptotique classique :  $nh_n^{p+2} \rightarrow 0$ .

# Hypothèse sur la fonction à variations lentes

- **Représentation de Karamata** : toute fonction à variations lentes peut s'écrire [Bingham et al., 1987, Théorème 1.3.1]

$$\ell(y|x) = c(y|x) \exp \left( \int_1^y \frac{\varepsilon(u|x)}{u} du \right),$$

avec  $c(y|x) \rightarrow c(x) > 0$  et  $\varepsilon(y|x) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow \infty$

- $\ell(\cdot|x)$  est **normalisée**, i.e.  $c(y|x) = c(x)$ .

# Hypothèse sur la fonction à variations lentes

- **Représentation de Karamata** : toute fonction à variations lentes peut s'écrire [Bingham et al., 1987, Théorème 1.3.1]

$$\ell(y|x) = c(y|x) \exp \left( \int_1^y \frac{\varepsilon(u|x)}{u} du \right),$$

avec  $c(y|x) \rightarrow c(x) > 0$  et  $\varepsilon(y|x) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow \infty$

- $\ell(\cdot|x)$  est **normalisée**, i.e.  $c(y|x) = c(x)$ .

**Conséquence** :  $\forall x \in \mathbb{R}^p$ , la fonction auxiliaire  $\varepsilon(y|x)$  est définie par

$$\varepsilon(y|x) = y \frac{\ell'(y|x)}{\ell(y|x)}.$$

# Normalité asymptotique de $\hat{q}_n(\alpha_n|x)$

## Théorème

Si de plus,

- $\alpha_n \rightarrow 0$  telle que  $nh_n^p \alpha_n \rightarrow \infty$  et  $nh_n^{p+2} \alpha_n \log^2(\alpha_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$
- $\{\tau_j, j = 1, \dots, J\}$  une suite strictement positive et décroissante.

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $g(x) > 0$ ,

$$\left\{ \sqrt{nh_n^p \alpha_n} \left( \frac{\hat{q}_n(\tau_j \alpha_n | x)}{q(\tau_j \alpha_n | x)} - 1 \right) \right\}_{j=1, \dots, J} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( \mathbf{0}_{\mathbb{R}^J}, \gamma^2(x) \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} \Sigma \right),$$

où  $\Sigma_{j,j'} = 1/\tau_{j \wedge j'}$  pour  $(j, j') \in \{1, \dots, J\}^2$ .

# Normalité asymptotique de $\hat{q}_n(\alpha_n|x)$

## Théorème

Si de plus,

- $\alpha_n \rightarrow 0$  telle que  $nh_n^p \alpha_n \rightarrow \infty$  et  $nh_n^{p+2} \alpha_n \log^2(\alpha_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$
- $\{\tau_j, j = 1, \dots, J\}$  une suite strictement positive et décroissante.

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $g(x) > 0$ ,

$$\left\{ \sqrt{nh_n^p \alpha_n} \left( \frac{\hat{q}_n(\tau_j \alpha_n | x)}{q(\tau_j \alpha_n | x)} - 1 \right) \right\}_{j=1, \dots, J} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0_{\mathbb{R}^J}, \gamma^2(x) \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} \Sigma \right),$$

où  $\Sigma_{j,j'} = 1/\tau_{j \wedge j'}$  pour  $(j, j') \in \{1, \dots, J\}^2$ .

## Remarques sur la variance asymptotique

- Inversement proportionnelle à  $nh_n^p \alpha_n$  et proportionnelle à  $\gamma^2(x)$ .
- Terme additionnel  $1/\alpha_n \rightarrow \infty$  par rapport au cas  $\alpha_n = \alpha \in ]0, 1[$  fixé où [Berlinet et al., 2001, Théorème 6.4] trouvent  $\frac{\alpha(1-\alpha)}{nh_n^p} \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} \frac{1}{F^2(q(\alpha|x)|x)}$ .

# Normalité asymptotique de $\hat{q}_n(\alpha_n|x)$

## Théorème

Si de plus,

- $\alpha_n \rightarrow 0$  telle que  $nh_n^p \alpha_n \rightarrow \infty$  et  $nh_n^{p+2} \alpha_n \log^2(\alpha_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$
- $\{\tau_j, j = 1, \dots, J\}$  une suite strictement positive et décroissante.

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $g(x) > 0$ ,

$$\left\{ \sqrt{nh_n^p \alpha_n} \left( \frac{\hat{q}_n(\tau_j \alpha_n | x)}{q(\tau_j \alpha_n | x)} - 1 \right) \right\}_{j=1, \dots, J} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0_{\mathbb{R}^J}, \gamma^2(x) \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} \Sigma \right),$$

où  $\Sigma_{j,j'} = 1/\tau_{j \wedge j'}$  pour  $(j, j') \in \{1, \dots, J\}^2$ .

## Remarques sur l'ordre des quantiles extrêmes

- $nh_n^p \alpha_n \rightarrow \infty$  et  $nh_n^{p+2} \alpha_n \log^2(\alpha_n) \rightarrow 0$  impliquent  $\alpha_n > \frac{\log^p(n)}{n}$ .
- On ne peut pas estimer des **quantiles très extrêmes**.

# Plan : 3 - Estimation des courbes de niveaux extrêmes

- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
  - Modèle et méthode d'estimation
  - Hypothèses et résultats asymptotiques
  - Application à l'estimation de l'indice de queue conditionnel
  - Application à l'estimation des quantiles conditionnels très extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives

# Application à l'estimation de l'indice de queue conditionnel

Soit  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  une suite positive telle que  $\beta_n \rightarrow 0$ .

- **Estimateur à noyau de type Pickands** : adaptation de l'estimateur de [Pickands, 1975] au cas conditionnel.

$$\hat{\gamma}_n^P(x) = \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{\hat{q}_n(\beta_n|x) - \hat{q}_n(2\beta_n|x)}{\hat{q}_n(2\beta_n|x) - \hat{q}_n(4\beta_n|x)} \right).$$



# Application à l'estimation de l'indice de queue conditionnel

Soit  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  une suite positive telle que  $\beta_n \rightarrow 0$ .

- 1 **Estimateur à noyau de type Pickands** : adaptation de l'estimateur de [Pickands, 1975] au cas conditionnel.

$$\hat{\gamma}_n^P(x) = \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{\hat{q}_n(\beta_n|x) - \hat{q}_n(2\beta_n|x)}{\hat{q}_n(2\beta_n|x) - \hat{q}_n(4\beta_n|x)} \right).$$

- 2 **Estimateur à noyau de type Hill** : adaptation de l'estimateur de [Hill, 1975] au cas conditionnel.

$$\hat{\gamma}_n^H(x) = \frac{\sum_{j=1}^J [\log \hat{q}_n(\tau_j \beta_n|x) - \log \hat{q}_n(\tau_1 \beta_n|x)]}{\sum_{j=1}^J \log(\tau_1/\tau_j)},$$

avec  $J > 1$  et  $(\tau_j)_{j \geq 1}$  est une suite de poids strictement positive et décroissante.

# Hypothèses sur la fonction à variations lentes

**Rappel** : représentation de Karamata quand  $\ell(\cdot|x)$  est normalisée

$$\ell(y|x) = c(x) \exp \left( \int_1^y \frac{\varepsilon(u|x)}{u} du \right).$$

- **Condition du second ordre** : on suppose que  $|\varepsilon(\cdot|x)|$  est décroissante à l'infini.
- La fonction  $\varepsilon(y|x)$  représente le **terme de biais**. Il contrôle la vitesse de convergence des estimateurs en théorie des valeurs extrêmes.

# Normalité asymptotique des estimateurs de l'indice de queue conditionnel

## Corollaire

Si de plus  $\beta_n \rightarrow 0$  tq  $nh_n^p \beta_n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^{p+2} \beta_n \log^2(\beta_n) \rightarrow 0$  et  $nh_n^p \beta_n \varepsilon^2(q(2\beta_n|x)|x) \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow \infty$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tq  $g(x) > 0$ ,

$$\sqrt{nh_n^p \beta_n} \left( \hat{\gamma}_n^P(x) - \gamma(x) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\gamma^2(x)(2^{2\gamma(x)+1} + 1)}{4(\log 2)^2(2^{\gamma(x)} - 1)^2} \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} \right).$$

## Normalité asymptotique des estimateurs de l'indice de queue conditionnel

## Corollaire

Si de plus  $\beta_n \rightarrow 0$  tq  $nh_n^p \beta_n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^{p+2} \beta_n \log^2(\beta_n) \rightarrow 0$  et  $nh_n^p \beta_n \varepsilon^2(q(2\beta_n|x)|x) \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow \infty$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tq  $g(x) > 0$ ,

$$\sqrt{nh_n^p \beta_n} \left( \hat{\gamma}_n^P(x) - \gamma(x) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\gamma^2(x)(2^{2\gamma(x)+1} + 1)}{4(\log 2)^2(2^{\gamma(x)} - 1)^2} \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} \right).$$

## Corollaire

Si de plus  $\beta_n \rightarrow 0$  tq  $nh_n^p \beta_n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^{p+2} \beta_n \log^2(\beta_n) \rightarrow 0$  et  $nh_n^p \beta_n \varepsilon^2(q(\tau_1 \beta_n|x)|x) \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow \infty$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tq  $g(x) > 0$ ,

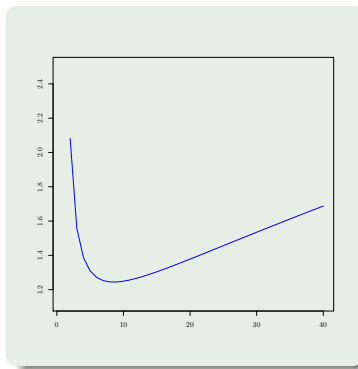
$$\sqrt{nh_n^p \beta_n} \left( \hat{\gamma}_n^H(x) - \gamma(x) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \gamma^2(x) \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} V_J \right),$$

où

$$V_J = \left( \sum_{j=1}^J \frac{2(J-j)+1}{\tau_j} - J^2 \right) / \left( \sum_{j=1}^J \log(\tau_1/\tau_j) \right)^2.$$

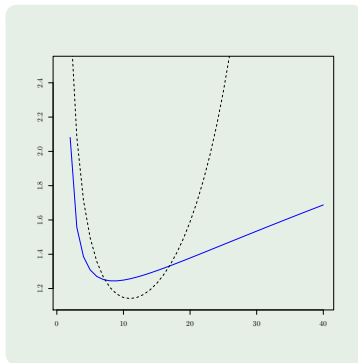
## Deux exemples de suites de poids

- La suite de poids harmonique : si  $\tau_j^{\text{Ha}} = 1/j$  alors  $V_J^{\text{Ha}} = J(J-1)(2J-1)/(6 \log^2(J!))$  est minimum pour  $J_{\text{opt}}^{\text{Ha}} = 9$  et  $V_9^{\text{Ha}} \simeq 1.245$ .



## Deux exemples de suites de poids

- La suite de poids harmonique : si  $\tau_j^{\text{Ha}} = 1/j$  alors  $V_j$  est minimum pour  $J_{\text{opt}}^{\text{Ha}} = 9$  et  $V_9^{\text{Ha}} \simeq 1.245$ .
- La suite géométrique de la balle rebondissante :  $\tau_j^{\text{BR}} = b^{2j}$  où  $0 < b < 1$ . Si  $b = 8/9$  alors  $V_j$  est minimum pour  $J_{\text{opt}}^{\text{BR}} = 11$  et  $V_{J_{\text{opt}}}^{\text{BR}} \simeq 1.141$ .



# Plan : 3 - Estimation des courbes de niveaux extrêmes

- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
  - Modèle et méthode d'estimation
  - Hypothèses et résultats asymptotiques
  - Application à l'estimation de l'indice de queue conditionnel
  - Application à l'estimation des quantiles conditionnels très extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives

# Application à l'estimation des quantiles conditionnels très extrêmes

Estimateur à noyau de type Weissman : adaptation de l'estimateur de [Weissman, 1978] au cas conditionnel.

$$\hat{q}_n^W(\alpha_n|x) = \hat{q}_n(\beta_n|x)(\alpha_n/\beta_n)^{-\hat{\gamma}_n(x)},$$

avec

- $\hat{q}_n(\beta_n|x)$  l'estimateur à noyau précédent,
- $\hat{\gamma}_n(x)$  est un estimateur de l'indice de queue conditionnel,
- $(\alpha_n/\beta_n)^{-\hat{\gamma}_n(x)}$  permet d'extrapoler.



# Normalité asymptotique de l'estimateur à noyau de Weissman

## Théorème

Si de plus

- $\beta_n \rightarrow 0$  tq  $nh_n^p \beta_n \rightarrow \infty$  et  $nh_n^{p+2} \beta_n \log^2(\beta_n) \rightarrow 0$ .
- $\alpha_n / \beta_n \rightarrow 0$ .
- $\sqrt{nh_n^p \beta_n} (\hat{\gamma}_n(x) - \gamma(x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v^2(x))$  avec  $v(x) > 0$ .

Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $g(x) > 0$ ,

$$\frac{\sqrt{nh_n^p \beta_n}}{\log(\beta_n / \alpha_n)} \left( \frac{\hat{q}_n^W(\alpha_n | x)}{q(\alpha_n | x)} - 1 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v^2(x)).$$

## Au delà du Théorème

La loi limite de  $\hat{q}_n^W(\cdot | x)$  peut dépendre du comportement de  $\hat{q}_n(\cdot | x)$ .

# Plan : 4 - Expériences numériques et illustration sur des données réelles

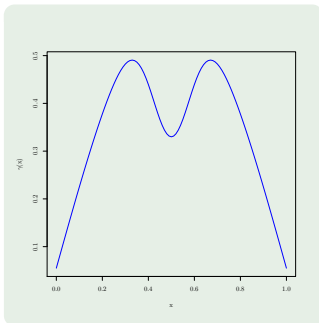
- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
  - Expériences numériques
  - Estimation des niveaux de retour de pluies dans les Cévennes
- 4 Conclusions et perspectives

# Expériences numériques

- On génère  $m = 100$  répliques d'un échantillon  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  de taille  $n = 1000$  suivant le modèle  $X \sim U[0, 1]$  et  $Y|X = x$  est distribué selon une loi de **Fréchet**, *i.e.*

$$\bar{F}(y|x) = 1 - \exp\left(-y^{-1/\gamma(x)}\right),$$

$$\text{avec } \gamma(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{10} + \sin(\pi x) \right) \left( \frac{11}{10} - \frac{1}{2} \exp\left(-64(x - 1/2)^2\right) \right).$$



# Expériences numériques

- On génère  $m = 100$  réplifications d'un échantillon  $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$  de taille  $n = 1000$  suivant le modèle  $X \sim U[0, 1]$  et  $Y|X = x$  est distribué selon une loi de **Fréchet**, *i.e.*

$$\bar{F}(y|x) = 1 - \exp\left(-y^{-1/\gamma(x)}\right),$$

$$\text{avec } \gamma(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{10} + \sin(\pi x) \right) \left( \frac{11}{10} - \frac{1}{2} \exp\left(-64(x - 1/2)^2\right) \right).$$

- But** : estimer le quantile extrême conditionnel  $q(\alpha_n|x) = (-\log(1 - \alpha_n))^{-\gamma(x)}$  d'ordre  $\alpha_n \in \{5 \log(n)/n, 1/2n\}$ .
- On utilise un **noyau bi-quadratique**

$$K(x) = \frac{15}{16} (1 - x^2)^2 \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}.$$

# Expériences numériques : l'estimateur $\hat{q}_n(\alpha_n|x)$

## Choix du paramètre de lissage

- Validation croisée :

$$\hat{h}_{cv} = \arg \min_{h_n \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \mathbb{1}_{\{Y_i \geq Y_j\}} - \hat{F}_{n,-i}(Y_j|X_i) \right\}^2, \text{ [Yao, 1999]}$$

- $\hat{F}_{n,-i}$  est l'estimateur à noyau calculé sur l'échantillon  $\{(X_\ell, Y_\ell), 1 \leq \ell \leq n, \ell \neq i\}$ .

Expériences numériques : l'estimateur  $\hat{q}_n(\alpha_n|x)$ 

Choix du paramètre de lissage

- Validation croisée :

$$\hat{h}_{cv} = \arg \min_{h_n \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \mathbb{1}_{\{Y_i \geq Y_j\}} - \hat{F}_{n,-i}(Y_j|X_i) \right\}^2, \text{ [Yao, 1999]}$$

- $\hat{F}_{n,-i}$  est l'estimateur à noyau calculé sur l'échantillon  $\{(X_\ell, Y_\ell), 1 \leq \ell \leq n, \ell \neq i\}$ .

- Stratégie Oracle :

$$\hat{h}_{oracle} = \arg \min_{h_n \in \mathcal{H}} \mathbb{D}(\hat{q}_n(\alpha_n|\cdot), q(\alpha_n|\cdot)),$$

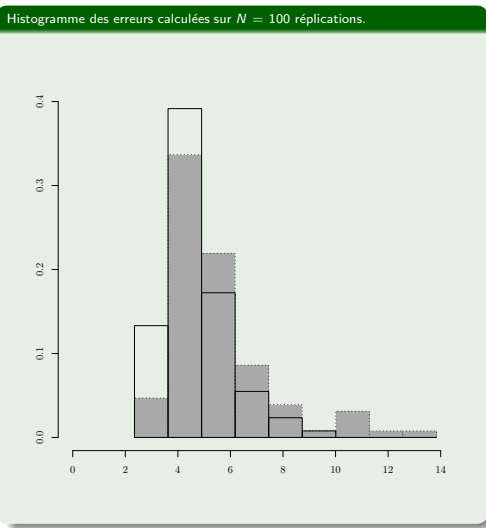
avec

$$\mathbb{D}(u, v) = \left\{ \sum_{\ell=1}^L (u(t_\ell) - v(t_\ell))^2 \right\}^{1/2}.$$

- $t_1, \dots, t_L$  sont des points d'une grille régulière sur  $[0, 1]$ .

# Expériences numériques : l'estimateur $\hat{q}_n(\alpha_n|x)$ .

Oracle : transparent – Validation croisée : gris



# Expériences numériques : l'estimateur $\hat{q}_n^W(\alpha_n|x)$

Choix des paramètres  $h_n$  et  $\beta_n$

Dans la suite de ces expériences,

$$\hat{q}_n^W(\alpha_n|x) = \hat{q}_n(\beta_n|x) (\alpha_n/\beta_n)^{-\hat{\gamma}_n^H(x)}.$$

- Approche préconisée :

- (1) Choisir  $h_n$  par le critère de validation croisée précédent,
- (2) Estimer  $\beta_n$  en mesurant la similarité entre deux estimateurs de quantiles, *i.e.*

$$\hat{\beta}_{1,2} = \arg \min_{\beta_n \in ]0,1]} \mathbb{D} \left( \hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot), \hat{q}_{n,2}^W(\alpha_n|\cdot) \right),$$

- $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  construit avec  $\tau_j^{\text{Ha}} = 1/j$  où  $J_{\text{opt}}^{\text{Ha}} = 9$ .
- $\hat{q}_{n,2}^W(\alpha_n|\cdot)$  construit avec  $\tau_j^{\text{BR}} = (8/9)^{2j}$  où  $J_{\text{opt}}^{\text{BR}} = 11$ .



# Expériences numériques : l'estimateur $\hat{q}_n^W(\alpha_n|x)$

Choix des paramètres  $h_n$  et  $\beta_n$

Dans la suite de ces expériences,

$$\hat{q}_n^W(\alpha_n|x) = \hat{q}_n(\beta_n|x) (\alpha_n/\beta_n)^{-\hat{\gamma}_n^H(x)}.$$

- Approche préconisée :

- (1) Choisir  $h_n$  par le critère de validation croisée précédent,
- (2) Estimer  $\beta_n$  en mesurant la similarité entre deux estimateurs de quantiles, *i.e.*

$$\hat{\beta}_{1,2} = \arg \min_{\beta_n \in ]0,1]} \mathbb{D} \left( \hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot), \hat{q}_{n,2}^W(\alpha_n|\cdot) \right),$$

- $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  construit avec  $\tau_j^{\text{Ha}} = 1/j$  où  $J_{\text{opt}}^{\text{Ha}} = 9$ .
- $\hat{q}_{n,2}^W(\alpha_n|\cdot)$  construit avec  $\tau_j^{\text{BR}} = (8/9)^{2j}$  où  $J_{\text{opt}}^{\text{BR}} = 11$ .

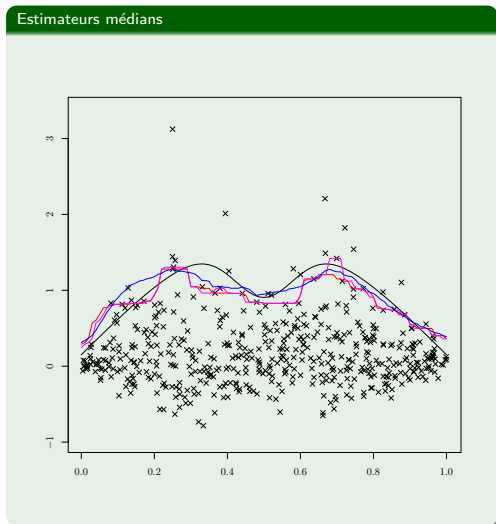
- Stratégie Oracle :

$$\left( \hat{h}_{i,\text{oracle}}, \hat{\beta}_{i,\text{oracle}} \right) = \arg \min_{h_n \in \mathcal{H}, \beta_n \in ]0,1]} \mathbb{D} \left( \hat{q}_{n,i}^W(\alpha_n|\cdot), q(\alpha_n|\cdot) \right),$$

avec  $i = 1, 2$ . Dans la suite  $i = 1$ .

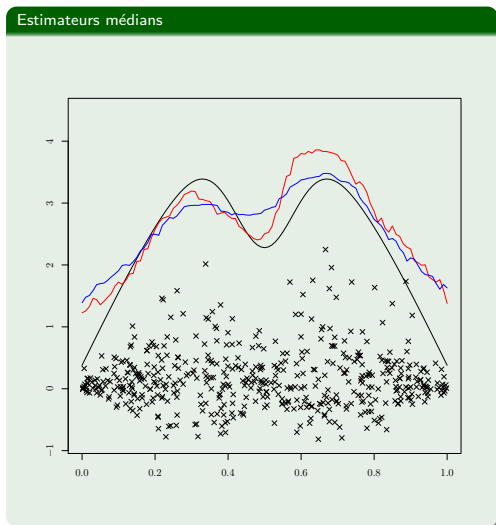
# Expériences numériques : estimation du quantile d'ordre $\alpha_n = 5 \log(n)/n$ .

—  $\hat{q}_n(\alpha_n|\cdot)$  : validation croisée —  $\hat{q}_n(\alpha_n|\cdot)$  : oracle —  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : oracle



# Expériences numériques : estimation du quantile d'ordre $\alpha_n = 1/2n$ .

—  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : validation croisée + similarité —  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : oracle



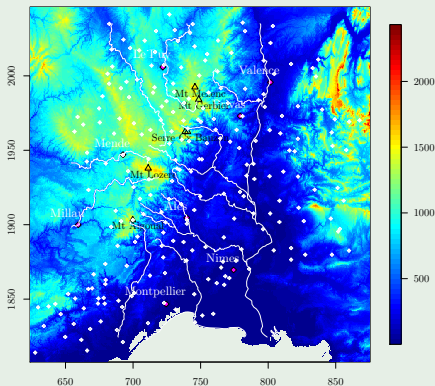
# Plan : 4 - Expériences numériques et illustration sur des données réelles

- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
  - Expériences numériques
  - Estimation des niveaux de retour de pluies dans les Cévennes
- 4 Conclusions et perspectives

# Estimation des niveaux retour de pluies (en mm) dans les Cévennes

Horizontalement : longitude (km), verticalement : latitude (km), échelle des couleurs : altitude (m), losanges roses : villes, triangles : montagnes, lignes grises : cours d'eaux, losanges blancs : 225 stations de Météo France.

## La région des Cévennes-Vivarais et ses alentours

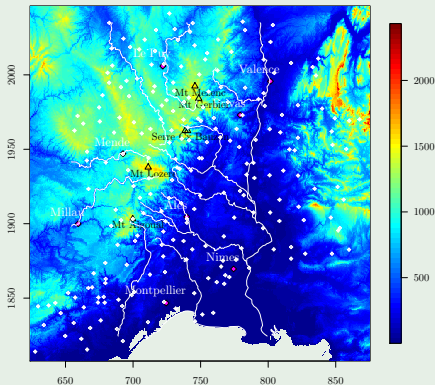


Estimer le **niveau de retour** sur 100 ans, *i.e.* le quantile des précipitations journalières d'ordre  $1/(365 \times 100)$ .

# Estimation des niveaux retour de pluies (en mm) dans les Cévennes

Horizontalement : longitude (km), verticalement : latitude (km), échelle des couleurs : altitude (m), losanges roses : villes, triangles : montagnes, lignes grises : cours d'eaux, losanges blancs : 225 stations de Météo France.

La région des Cévennes-Vivarais et ses alentours



Estimer le **niveau de retour** sur 100 ans, *i.e.* le quantile des précipitations journalières d'ordre  $1/(365 \times 100)$ .

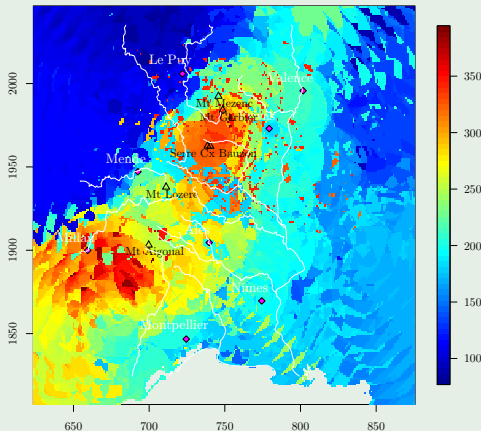
Pourquoi ?

- Construire des digues d'une hauteur appropriée,
- opérations de nettoyage des fleuves.



# Estimation des niveaux retour de pluies (en mm) dans les Cévennes

Niveaux de retour journalier (mm) sur 100 ans en fonction de la longitude et de la latitude



Voir [Molinié et al., 2008] pour une comparaison.



# Plan : 5 - Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives
  - Conclusions
  - Perspectives

# Conclusions

## Trois contributions

Lorsque la loi conditionnelle de  $Y$  en un point  $x$  de la covariable  $X$  appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

(1/3)  $X \in \mathbb{R}^p$  aléatoire, voir la présentation.

**Contribution** : Kernel estimators of extreme level curves. *TEST*. À paraître. En collaboration avec [A. Daouia](#), [L. Gardes](#) et [S. Girard](#).

(2/3)  $X$  déterministe et de dimension non-nécessairement finie.

**Contribution** : Functional nonparametric estimation of conditional extreme quantiles. *Journal of Multivariate Analysis*, 101, 419–433, 2010. En collaboration avec [Laurent Gardes](#) et [Stéphane Girard](#).

Lorsque la loi de  $Y$  appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

(3/3) Un nouvel estimateur des quantiles extrêmes.

**Contribution** : non publiée, voir chapitre 2 de la thèse.

# Plan : 5 - Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Estimation des courbes de niveaux extrêmes
- 3 Expériences numériques et illustration sur des données réelles
- 4 Conclusions et perspectives
  - Conclusions
  - Perspectives

# Perspectives

## À court terme

- 1 Normalité asymptotique de nos estimateurs dans le cas des données  $\alpha$ -mélangeantes.
- 2 Étendre ces résultats aux autres domaines d'attractions.
- 3 Adapter d'autres estimateurs existants de l'indice de queue au cadre conditionnel.
- 4 Proposer de nouveaux estimateurs à noyau (ou double noyau) de l'indice de queue et des quantiles extrêmes conditionnels dans le cadre fonctionnel.

# Perspectives

## À court terme

- 1 Normalité asymptotique de nos estimateurs dans le cas des données  $\alpha$ -mélangeantes.
- 2 Étendre ces résultats aux autres domaines d'attractions.
- 3 Adapter d'autres estimateurs existants de l'indice de queue au cadre conditionnel.
- 4 Proposer de nouveaux estimateurs à noyau (ou double noyau) de l'indice de queue et des quantiles extrêmes conditionnels dans le cadre fonctionnel.

## À moyen terme

- 1 Affiner les critères de sélection des paramètres  $\beta_n$  et  $h_n$ .

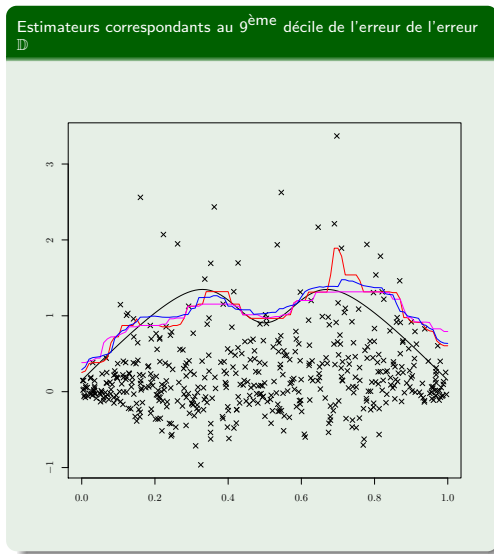
## À long terme

- 1 Convergence en processus des estimateurs de l'indice de queue et des quantiles extrêmes conditionnels.

## Annexe

Expériences numériques : estimation du quantile d'ordre  $\alpha_n = 5 \log(n)/n$ .

—  $\hat{q}_n(\alpha_n|\cdot)$  : validation croisée —  $\hat{q}_n(\alpha_n|\cdot)$  : oracle —  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : oracle

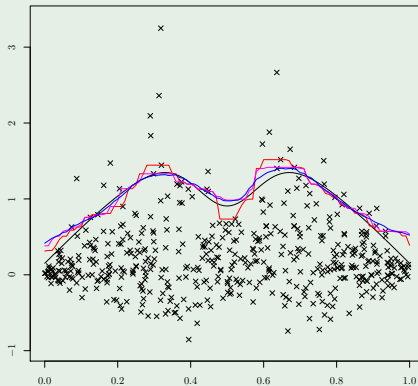


## Annexe

Expériences numériques : estimation du quantile d'ordre  $\alpha_n = 5 \log(n)/n$ .

—  $\hat{q}_n(\alpha_n|\cdot)$  : validation croisée —  $\hat{q}_n(\alpha_n|\cdot)$  : oracle —  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : oracle

Estimateurs correspondants au 1<sup>er</sup> décile de l'erreur  $\mathbb{D}$ .

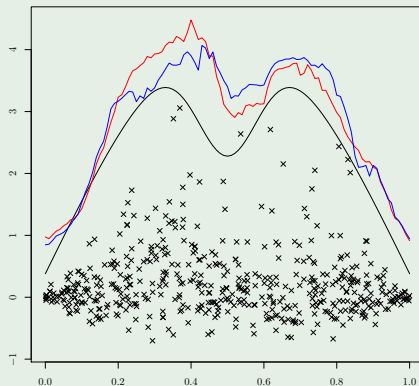


## Annexe

Expériences numériques : estimation du quantile d'ordre  $\alpha_n = 1/2n$ .

—  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : validation croisée + similarité —  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : oracle

Estimateurs correspondants au 9<sup>ème</sup> décile de l'erreur de l'erreur  $\mathbb{D}$ .

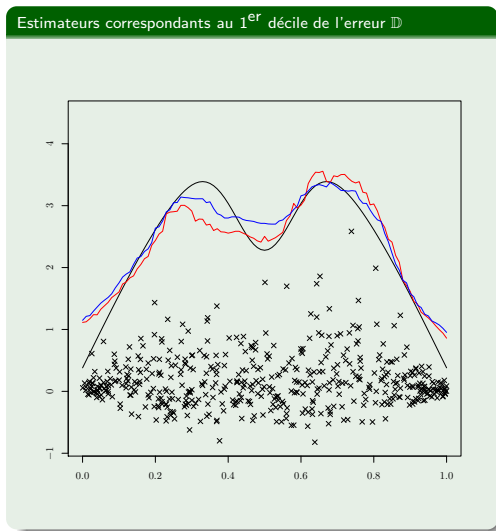









## Annexe

Expériences numériques : estimation du quantile d'ordre  $\alpha_n = 1/2n$ .

—  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : validation croisée + similarité —  $\hat{q}_{n,1}^W(\alpha_n|\cdot)$  : oracle



## Bibliographie I

-  Berlinet, A., Gannoun, A., and Matzner-Lober, E. (2001).  
Asymptotic normality of convergent estimates of conditional quantiles.  
*Statistics*, 18 :1400–1415.
-  Bingham, N. H., Goldie, C. M., and Teugels, J. L. (1987).  
*Regular Variation*, volume 27.  
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press.
-  Collomb, G. (1980).  
Estimation non paramétrique de probabilités conditionnelles.  
*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 291 :427–430.
-  Fisher, R. and Tippett, L. (1928).  
Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample.  
*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24 :180–190.
-  Gnedenko, B. (1943).  
Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire.  
*Annals of Mathematics*, 44(3) :423–453.

## Bibliographie II



Hill, B. (1975).

A simple general approach to inference about the tail of a distribution.  
*Annals of Statistics*, 3(5) :1163–1174.



Molinié, G., Yates, E., Ceresetti, D., Anquetin, S., Boudevillain, B.,  
Creutin, J., and Bois, P. (2008).

Rainfall regimes in a mountainous mediterranean region : Statistical  
analysis at short time steps.

Article soumis.



Pickands, J. (1975).

Statistical inference using extreme order statistics.  
*Annals of Statistics*, 3(1) :119–131.



Weissman, I. (1978).

Estimation of parameters and large quantiles based on the  $k$ -largest  
observations.

*Journal of the American Statistical Association*, 73(364) :812–815.

## Bibliographie III



Yao, Q. (1999).

Conditional predictive regions for stochastic processes.  
Technical report, University of Kent at Canterbury.