



**HAL**  
open science

## Pliage de tiges et rupture de plaques

Elsa Bayart

► **To cite this version:**

Elsa Bayart. Pliage de tiges et rupture de plaques. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT: . tel-00530406

**HAL Id: tel-00530406**

**<https://theses.hal.science/tel-00530406>**

Submitted on 28 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



---

THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité Physique

présentée par

Elsa BAYART

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

PLIAGE DE TIGES ET RUPTURE DE PLAQUES

Soutenance prévue le 18 octobre 2010 devant le jury composé de :

M. Mokhtar Adda-Bedia	Directeur de thèse
M. Arezki Boudaoud	Invité
M. Eric Clément	Examinateur
M. Jean-Christophe Géminard	Rapporteur
M. Hamid Kellay	Rapporteur
M. Ludovic Pauchard	Examinateur
M. Martin van Hecke	Examinateur

---

# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Eric Perez pour m'avoir accueillie au sein du Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure.

Jean-Christophe Géminard et Hamid Kellay ont accepté la charge de rapporteurs, et je les en remercie, ainsi que Eric Clément, Ludovic Pauchard et Martin van Hecke, qui ont bien voulu faire partie du jury.

A mes directeurs de thèse, Mokhtar Adda-Bedia et Arezki Boudaoud. Je les remercie d'avoir accepté de diriger ces recherches pendant plus de trois ans. Ce duo de directeurs, particulièrement bien équilibré, m'a permis d'apprendre à faire de la physique, à réfléchir et à discuter. Je les remercie pour la dynamique qu'ils ont créée autour d'eux, en invitant des chercheurs, en organisant des écoles et des conférences et en proposant des stages.

A José Quintas Da Silva, Olivier Hombert, Carlos Goncalves et Eric Nicolau. Ils sont des acteurs essentiels de mon travail. Je les remercie d'avoir construit le dispositif expérimental. Leurs compétences sont, pour moi, impressionnantes. Je les remercie de la motivation dont ils ont fait preuve lorsqu'il s'agissait d'apporter des améliorations à l'expérience ou de réparer les multiples pièces que j'ai pu casser.

A Nora Sadaoui, Annie Ribaudeau, Marie Gefflot, Zaïre Dissi et Frédéric Ayrault. Merci pour leur jovial et énergique soutien administratif et informatique.

A tous les membres de l'équipe Morphogénèse et Phénomènes Multi-Echelles, Yohai Bar-Sinai, Laurent Boué, Julien Chopin, Francis Corson, Stéphanie Deboeuf, Eytan Katzav, Gilles Pfingstag, Grégoire Seizilles et Dominic Vella. Je les remercie d'avoir su instaurer une ambiance de travail stimulante et particulièrement agréable au sein de l'équipe. Ceux qui ne sont plus dans l'équipe ont continué à me conseiller et à me soutenir. Je leur en suis très reconnaissante.

Aux organisateurs du séminaire thésard, Arnaud Arvengas et Céline Richard et à nos successeurs. Et également à toutes les personnes du Laboratoire qui rendent les journées plus agréables et variées.

A ceux qui ont influencé mon travail. Merci à Yves Couder pour son soutien, ses conseils avisés d'expérimentateur et ses enseignements. C'est sans doute grâce à lui que j'ai choisi de pratiquer la physique expérimentale. Merci à Benoît Roman pour les discussions au sujet de la fracture ainsi que pour son aide matérielle. Merci à Eran Sharon pour les études réalisées en commun, pour ses intéressantes remarques sur mon travail.

A toutes les bandes, les vieux, la fac, le 19, l'AS, la famille et tous ceux qui sont passés par là et qui ont eu leur importance. Je remercie Anna et Olaf, parce qu'ils veulent être

---

nommés et qu'ils sont importants.

# Table des matières

Remerciements . . . . .	iii
Table des matières . . . . .	v
<b>Avant-propos</b>	<b>1</b>
<b>I Compaction</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>7</b>
1.1 Empilements de sphères dures . . . . .	7
1.2 Les plaques minces et les tiges . . . . .	10
1.2.1 Etirement et flexion . . . . .	10
1.2.2 Singularités . . . . .	11
1.3 Confinement mécanique de plaques minces . . . . .	12
1.3.1 Les enjeux . . . . .	12
1.3.2 Différentes approches . . . . .	14
1.3.3 Notre approche . . . . .	17
<b>2 Compaction par croissance d'un gel</b>	<b>19</b>
2.1 Dispositif expérimental . . . . .	19
2.2 Analyse d'images . . . . .	21
2.3 Observation . . . . .	22
2.4 Identification du paramètre de contrôle . . . . .	22
2.5 Résultats . . . . .	23
2.6 Discussion . . . . .	26
2.7 Résumé . . . . .	27
<b>3 Centripétation</b>	<b>29</b>
3.1 Dispositif expérimental . . . . .	29
3.1.1 Matériaux . . . . .	29
3.1.2 La cellule rotative . . . . .	29
3.1.3 La visualisation et le contrôle . . . . .	33
3.1.4 La configuration initiale . . . . .	34
3.1.5 Le protocole expérimental . . . . .	36
3.1.6 Traitement d'image . . . . .	36

3.1.7	Écoulements dans la cellule . . . . .	38
3.2	De la spirale . . . . .	41
3.3	Observation . . . . .	43
3.4	Mesure de la distribution de masse . . . . .	45
3.4.1	Distribution moyenne . . . . .	45
3.4.2	Distribution radiale . . . . .	47
3.5	Etude statistique des géométries . . . . .	49
3.5.1	D'autres systèmes confinés . . . . .	49
3.5.2	Distributions . . . . .	52
3.5.3	Analogie avec la fragmentation . . . . .	59
3.5.4	Corrélation de l'orientation des couches . . . . .	61
3.5.5	Formation d'un anneau confinant virtuel . . . . .	63
3.5.6	Introduction d'une échelle d'énergie . . . . .	66
3.5.7	Ergodicité . . . . .	68
3.5.8	Résumé . . . . .	70
3.6	An/Isotropie des configurations . . . . .	71
3.7	Désordre . . . . .	73
3.7.1	Caractérisation géométrique . . . . .	73
3.7.2	Caractérisation mécanique . . . . .	75
3.7.3	Résumé . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>81</b>
<b>II</b>	<b>Fracture</b>	<b>85</b>
<b>5</b>	<b>Eléments de la théorie de la fracture</b>	<b>87</b>
5.1	Pourquoi étudier la fracture . . . . .	88
5.2	Critères de propagation . . . . .	89
5.2.1	Concentration des contraintes . . . . .	89
5.2.2	Aspects énergétiques . . . . .	90
5.2.3	Facteurs d'intensité . . . . .	92
5.3	Trajectoire d'une fissure . . . . .	93
5.3.1	Stabilité d'une fissure . . . . .	93
5.3.2	Stabilité de la trajectoire . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Propagation d'une fissure dans un film mince</b>	<b>99</b>
6.1	Dispositif expérimental . . . . .	100
6.1.1	La machine à déchirer . . . . .	100
6.1.2	Matériel . . . . .	101
6.2	Stabilité de la trajectoire d'une fissure . . . . .	102
6.3	Géométrie du film en déchirement . . . . .	105
6.3.1	Observations . . . . .	105
6.3.2	Visualisation . . . . .	105

---

6.3.3	Résultats . . . . .	107
6.4	Discussion . . . . .	109
6.4.1	Interprétation de la limite rectiligne . . . . .	109
6.4.2	Mécanismes locaux de rupture . . . . .	111
6.4.3	Mesure de l'intensité de la force . . . . .	111
6.5	Résumé . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Interactions de deux fissures dans un film mince</b>	<b>115</b>
7.1	Déchirement versus pelage . . . . .	116
7.2	Résultats expérimentaux . . . . .	118
7.3	Modèle : déformations induites par un pli . . . . .	120
7.4	Résumé . . . . .	124
<b>8</b>	<b>Conclusions</b>	<b>125</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Déflexion d'une plaque sous un gradient de pression</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Préparation d'une expérience</b>	<b>135</b>
<b>C</b>	<b>Distributions de contraintes engendrées par une force ponctuelle</b>	<b>137</b>
<b>D</b>	<b>Publication</b>	<b>141</b>
	<b>Résumé</b>	<b>151</b>
	<b>Abstract</b>	<b>152</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>



# Avant-propos

Formes. Singularités. Elasticité. Ces trois mots unifient des systèmes qui pourraient sembler ne pas avoir de lien. Du point de vue du physicien, ils permettent de traiter de la même façon un tissu biologique et la croûte terrestre, une feuille de papier et un liquide. Ils ont guidé le travail exposé dans ce manuscrit.

Formes. De nombreux objets ont spontanément des formes complexes. Il peut s'agir d'objets vivants : les organes, les feuilles d'arbres, les rayures d'animaux. Dans d'autres systèmes, des motifs ou des formes apparaissent sous l'action de contraintes de l'environnement : des instabilités hydrodynamiques développant des formes organisées dans le liquide, le motif de fissure autour d'un éclat sur une vitre, les bords d'un sac plastique déchiré. Les physiciens mettent en évidence, au cas par cas, les processus responsables de ces formes.

Singularités. Une singularité en mécanique est un point ou une zone de focalisation de l'énergie introduite à grande échelle. Elle permet de la dissiper et de relâcher les contraintes dans le reste du système. Une pointe de fissure est une singularité : les déformations appliquées au solide sont transmises à la pointe ; l'énergie est utilisée pour créer de nouvelles surfaces. Un pli dans une feuille focalise l'énergie des déformations, le reste de la surface restant plan. En turbulence, l'énergie est transmise vers les petites échelles de longueur, vers les vortex qui la dissipent par viscosité.

Elasticité. L'élasticité traite de la déformation des solides. L'idée que les contraintes mécaniques sont responsables de l'apparition de formes et de motifs est ancienne. C'est particulièrement vrai concernant certains stades du développement biologique ; par exemple, la forme d'une feuille d'arbre résulte de son pliage dans le bourgeon. C'est également vrai concernant les réseaux de fracture ; les contraintes appliquées au solide sélectionnent la trajectoire des fissures. Nous allons nous intéresser uniquement à des objets minces, des plaques ou des tiges. Ces objets ont comme intérêt de pouvoir adapter leur forme à l'environnement extérieur et c'est ce qui retient notre attention.

Ce travail traite de deux problèmes qui regroupent les ingrédients précédents. Le premier concerne le confinement d'objets élastiques, des tiges en particulier mais dans l'optique de généraliser aux plaques minces. Une tige ou une plaque, lorsqu'elles sont confinées, se courbent pour s'adapter à l'environnement trop petit. Nous explorons les formes d'auto-adaptation de ces structures à l'aide de différents dispositifs expérimentaux. Le deuxième objet que nous étudions est la déchirure d'une plaque mince. Nous nous demandons comment la plaque s'accommode de la présence de la singularité, quelles trajectoires sont sélectionnées, quels motifs sont formés par les trajectoires de deux fissures interagissantes.

Le choix de présenter ces deux problèmes indépendants a été motivé par le déroulement chronologique de cette thèse. Le travail sur la propagation d'une fissure a démarré lors de mon stage de Master 2. La construction du dispositif expérimental de l'expérience principale de compaction ayant pris plus de temps que prévu, la première année de ma thèse a été consacrée à prolonger l'étude sur les fissures et à exploiter les résultats d'une autre expérience portant sur la compaction que nous présentons dans ce mémoire.

Ce mémoire est naturellement divisé en deux parties indépendantes. La première est consacrée à la compaction de structures élastiques. Dans le chapitre 1, nous introduisons les problèmes de compaction dans divers systèmes et donnons les ingrédients élémentaires permettant de comprendre la physique des plaques minces. Dans le chapitre 2, nous présentons une étude expérimentale du confinement d'un anneau de gel en croissance. Nous nous intéressons à l'émergence de la complexité géométrique des motifs de confinement. Nous montrons que les premières étapes du confinement sont décisives pour l'évolution postérieure du motif. Dans le chapitre 3, nous présentons l'expérience qui a occupée la majeure partie des ces trois années de doctorat. L'expérience a été réalisée dans le but d'étudier le comportement d'une tige élastique confinée dans un plan, à des taux de confinement élevés. La très grande diversité des géométries explorées nécessite d'en faire une étude statistique. Nous mettons en évidence des grandeurs permettant de décrire l'ensemble des configurations accessibles. Puis nous définissons et quantifions le désordre d'une géométrie confinée.

Dans une seconde partie, nous nous concentrons sur une autre singularité mécanique : la fracture. Nous abordons les problèmes de propagation et d'interaction de fissures dans des plaques minces dans une configuration de mode III. Dans le chapitre 5, nous introduisons des éléments théoriques de la propagation de fissures. Dans le chapitre 6, nous présentons l'expérience de propagation d'une fissure dans un film mince. Nous montrons comment le film adapte sa géométrie pour permettre la focalisation de l'énergie depuis les grandes échelles jusqu'à la pointe de la fissure. Dans le chapitre 7, nous nous intéressons à l'interaction de deux fissures propagées simultanément. Nous caractérisons et expliquons la forme de leurs trajectoires.

En conclusion, nous envisageons les prolongements possibles de nos expériences et mettons en évidence les problématiques soulevées par nos études.

Première partie

Compaction



---

## Sardines à l'huile

---

Sardines à l'huile fine sans têtes et sans arêtes.  
(Réclames des sardiniers, passim.)

---

*Dans leur cercueil de fer-blanc  
plein d'huile au puant relent  
marinément décapités  
ces petits corps argentés  
pareils aux guillotins  
là-bas au champ des navets !  
Elles ont vu les mers, les  
côtes grises de Thulé,  
sous les brumes argentées  
la Mer du Nord enchantée...  
Maintenant dans le fer-blanc  
et l'huile au puant relent  
de toxiques restaurants  
les servent à leurs clients !  
Mais loin derrière la nue  
leur pauvre âme ingénue  
dit sa muette chanson  
au Paradis-des-poissons,  
une mer fraîche et lunaire  
pâle comme un poitrinaire,  
la Mer de Sérénité  
aux longs reflets argentés  
où durant l'éternité,  
sans plus craindre jamais les  
comorans et les filets,  
après leur mort nageront  
tous les bons petits poissons !...*

*Sans voix, sans mains, sans genoux (\*)  
sardines, priez pour nous !...*



---

(\*) Tout ce qu'il faut pour prier.  
(Note de l'Auteur.)

---

# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons le domaine de la compaction d'objets élastiques. Comment un système s'adapte-t-il à un environnement trop petit pour le contenir en l'état ? Prenons l'exemple du papier froissé. Lorsqu'une feuille est confinée, un réseau de plis prend forme à sa surface ; il ne semble pas présenter d'ordre quelconque. Avant d'aborder le sujet du confinement de structures élastiques, nous nous intéressons à un système plus classiquement étudié : l'empilement de sphères dures. Nous définirons ensuite ce que nous entendons par objet élastique et plus précisément plaque mince, qui sera le système considéré lors de nos études. Enfin nous passerons en revue différentes approches utilisées jusqu'à aujourd'hui pour décrire la compaction de tiges et de plaques minces.

### 1.1 Empilements de sphères dures

La question de l'optimisation d'un empilement de sphères dures, dont le but est d'atteindre la plus grande densité de sphères possible, a toujours amusé les mathématiciens et les physiciens. On se référera à [Torquato and Stillinger, 2010] pour une revue récente. Nous devons différencier les empilements ordonnés et désordonnés. L'empilement ordonné le plus lâche est obtenu en empilant les sphères en réseau cubique, la densité volumique de sphères est alors de 55%. L'empilement le plus compact est soit un réseau hexagonal soit un réseau cubique à faces centrées. La densité obtenue est maximale et vaut 74 %. Pour les empilements désordonnés, la densité minimale est également de 55% ; elle peut être obtenue en versant lentement les grains dans un récipient ou en appliquant un procédé de fluidisation de l'empilement. Comme les grains ne ressentent pas l'agitation thermique, un tel système est bloqué dans la configuration sélectionnée en l'absence de forçage extérieur. Cependant, il est possible de dépiéger les grains en introduisant des vibrations - en tapant ou en secouant l'empilement par exemple - ce qui permet d'en augmenter la densité [Nowak et al., 1997]. En faisant varier l'amplitude des vibrations, après un état transitoire, la densité de l'empilement évolue de façon réversible entre deux limites, la *random loose packing* ou RLP et la *random close packing* ou RCP (Fig. 1.1) [Torquato et al., 2000]. La limite RCP correspond à l'état désordonné le plus compact ; sa densité est de 64% pour des sphères monodisperses, elle peut être plus élevée pour des grains anisotropes. La limite

RLP correspond à l'état accessible le plus lâche en conservant une cohésion de l'empilement : à cette amplitude de forçage, l'empilement est proche d'une suspension. Entre ces deux limites a lieu une transition semblable d'un certain point de vue à une transition vitreuse que nous allons présenter brièvement.

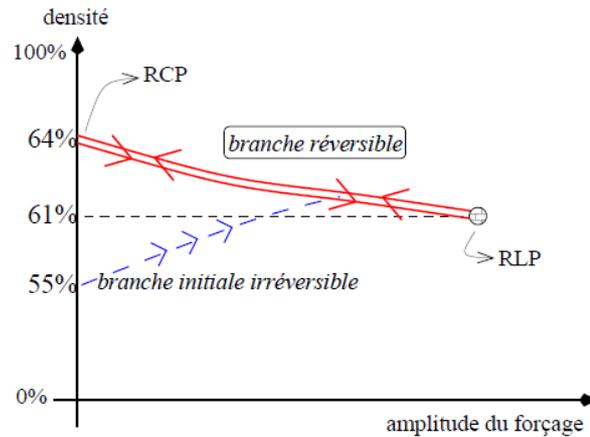


FIG. 1.1 – Schéma de la courbe de la densité d'un empilement granulaire en fonction de l'amplitude du forçage externe, obtenue par [Nowak et al., 1997]. En forçant un empilement initialement le plus lâche possible, et après une évolution transitoire le long d'une branche irréversible (bleue), la densité devient une grandeur réversible, évoluant entre les deux limites correspondant aux configurations de *random loose packing*, RLP et *random close packing*, RCP.

Pour les liquides moléculaires, il existe une transition dite vitreuse qui dénote le passage d'une phase de liquide visqueux à une phase de solide amorphe ou verre. En-dessous de la température de transition, dans la phase vitreuse, le matériau a une structure microscopique désordonnée comme un liquide cependant il a les propriétés mécaniques d'un solide. En refroidissant suffisamment rapidement le liquide (trempe ou *quenching*), le désordre des molécules en phase liquide est gelé ; le verre est alors hors d'équilibre mais l'agitation thermique n'est pas assez forte pour dépiéger les molécules et sortir de la configuration bloquée. On parle également de transition de *jamming* ou de blocage [Liu and Nagel, 1998]. Par extension, on parle de transition vitreuse pour tout type de système passant d'une phase ergodique à une phase de désordre gelé. En considérant cette large définition, un matériau granulaire peut être décrit comme un système vitreux [Cates et al., 1998]. Les grains ne ressentent pas l'agitation thermique ; un empilement de grains est gelé dans une configuration donnée si aucune énergie n'est injectée. En introduisant un forçage externe, l'évolution des propriétés physiques de l'empilement présente des similarités avec l'évolution d'un verre classique. En effet, un verre relaxe lentement vers l'équilibre, qu'il n'atteint pas, ce qui se traduit par une évolution de ses propriétés physiques. Ces phénomènes sont regroupés sous le terme d'*aging* ou vieillissement. Les empilements de sphères dures sont couramment utilisés pour modéliser les verres en raison de la simplicité du système : le seul paramètre qui contrôle l'état du système est la fraction volumique de sphères. Un enjeu actuel est de développer des outils permettant de décrire toutes les transitions de

jamming, quel que soit le système, c'est-à-dire un ensemble de particules sans interactions (grains, mousses,...) ou avec interactions (colloïdes, liquides,...). A cette fin, Liu et Nagel ont proposé un diagramme de phase du jamming, prenant en compte la densité du système, la température et la contrainte appliquée (Fig. 1.2). Par la suite, nous verrons que la compaction d'une structure élastique pourrait également être décrite dans le cadre du jamming.

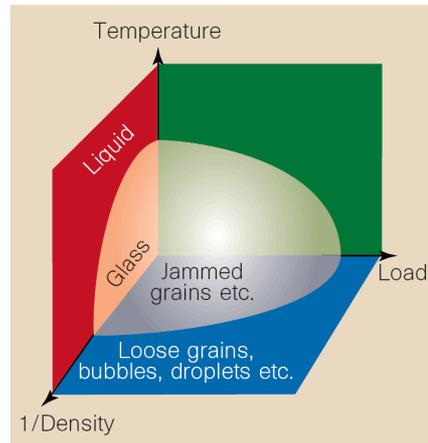


FIG. 1.2 – Diagramme de phase décrivant la transition de jamming. Figure extraite de [Liu and Nagel, 1998].

D'autres empilements que ceux de sphères sont étudiés : grains anisotropes [Schreck et al., 2010], tiges rigides [Blair et al., 2003, Trepanier and Franklin, 2010], mousses. Evouons le très vieux problème de l'alignement des sardines (Fig. 1.3). La compaction de chaînes formées de sphères dures reliées par des tiges rigides permet de modéliser le confinement de polymères [Liu and Chakraborty, 2008, Safford et al., 2009, Zou et al., 2009, Karayiannis and Laso, 2008]. Cet objet peut être considéré comme une tige élastique ayant une rigidité effective ; une chaîne confinée est à la fois un milieu granulaire et un objet élastique [Geminard and Vanel, 2008].



FIG. 1.3 – Faut-il privilégier un arrangement ordonné ou désordonné des sardines pour optimiser le rangement ? Images extraites de [Inconnu, web] et [Zegzouti, web].

Avant d'aborder la compaction de structures élastiques, nous présentons les plaques minces et les tiges qui sont les objets que nous utilisons dans toutes nos expériences, de

compaction comme de fracture. Les notions introduites dans la section suivante seront également utilisées dans la seconde partie de ce manuscrit qui concerne la fracture.

## 1.2 Les plaques minces et les tiges

Une plaque mince est un solide dont l'une des dimensions est très petite devant les deux autres dimensions. Elle est plane au repos (sinon on parle de coque). Une tige est un objet quasi unidimensionnel, dont l'épaisseur est petite devant la longueur. Les matériaux que nous considérons ont un comportement élastique linéaire, c'est-à-dire que les déformations sont proportionnelles aux contraintes appliquées. Cependant des contraintes imposées par la géométrie peuvent se manifester par un comportement non-linéaire. Pour une revue, on pourra consulter [Witten, 2007].

### 1.2.1 Etirement et flexion

Nous différencions deux types de déformations élastiques d'un solide : l'étirement et la flexion. L'étirement consiste à contraindre le solide dans le plan de sa surface (Fig. 1.4a) en en modifiant les longueurs. La flexion consiste à imposer un déplacement transverse au plan de la surface du solide (Fig. 1.4b). Dans ce cas, les longueurs ne sont pas affectées. L'énergie associée aux contraintes d'étirement est donnée par :

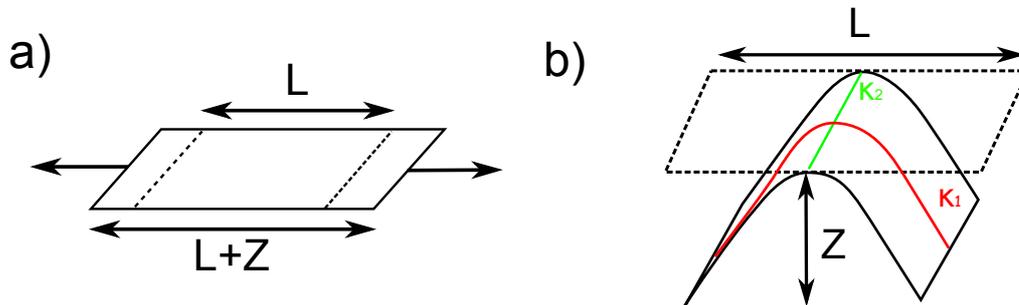


FIG. 1.4 – Schéma des deux types de déformations élastiques d'une plaque mince de dimension principale  $L$  au repos : (a) étirement et (b) flexion d'amplitude  $Z$ . En (b), les directions principales de courbure  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont représentées.

$$\epsilon_s = Eh s^2 S \quad (1.1)$$

où  $s = Z/L$  est l'allongement relatif de la plaque,  $S$  la section sur laquelle est appliquée la contrainte,  $h$  l'épaisseur de la plaque et  $E$  son module de Young. L'énergie associée à la déformation de flexion est :

$$\epsilon_b = Eh^3 c^2 S \quad (1.2)$$

où  $c = Z/L^2$  est la courbure imposée à la plaque. Dans la limite des plaques minces et des tiges,  $h \ll L$  ce qui implique :

$$\frac{\epsilon_b}{\epsilon_s} = \left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (1.3)$$

L'étirement est bien plus coûteux que la flexion ; si l'on applique des contraintes à une plaque, le système préfère fléchir si cela est possible. La surface est alors développable ce qui signifie que les longueurs de référence ne sont pas modifiées. La courbure de Gauss d'une surface est un invariant défini comme le produit des deux courbures principales,  $G = \kappa_1 \kappa_2$  (Fig. 1.4). Lorsque la surface est développable, sa courbure de Gauss est nulle. Pour certaines géométries, la courbure de Gauss ne peut pas être gardée nulle. Par exemple, il est impossible de recouvrir une sphère avec un plan sans introduire de contraintes d'étirement. Alors, si la géométrie imposée ne permet pas de rester en flexion pure, des contraintes d'étirement apparaissent mais sont focalisées dans de petites régions singulières. Partout ailleurs, la surface reste développable mais sa courbure devient grande au voisinage des singularités. Nous précisons maintenant la nature de ces singularités.

### 1.2.2 Singularités

Lorsque la plaque ne peut plus être maintenue en flexion pure, les contraintes d'étirement sont concentrées le long de plis. Un pli est une singularité linéique qui raccorde deux parties planes de la surface (Fig. 1.5a). Dans le cas d'une plaque d'épaisseur non-nulle, l'énergie d'étirement est focalisée autour du pli. Des singularités ponctuelles apparaissent également, appelées d-cones pour cônes développables (Fig. 1.5b). Dans ce cas, l'énergie d'étirement est focalisée au sommet d'un cône et partout ailleurs la surface est développable. Cette singularité a été largement étudiée [Pomeau, 1995, Ben Amar and Pomeau, 1997, Cerda et al., 1999, Chaïeb and Melo, 1997] ; nous ne rentrons pas plus dans les détails à ce sujet. Un matériau froissé est constitué d'un grand nombre de ces deux singularités qui peuvent alors interagir entre elles. Nous allons maintenant présenter quelques études qui s'intéressent spécifiquement au confinement d'objets élastiques, sans aucune exhaustivité tant la quantité de travaux est grande.

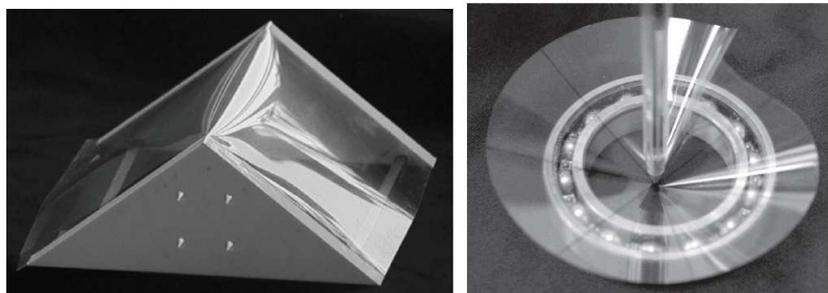


FIG. 1.5 – A gauche, un pli raccordant deux surfaces planes. A droite, une feuille enfoncée dans un trou, formant un d-cone ou cône développable. Figure extraite de [Boudaoud, 2006].

## 1.3 Confinement mécanique de plaques minces

### 1.3.1 Les enjeux

#### Sciences des matériaux

L'intérêt industriel des plaques minces est remarquable ; elles interviennent à toutes les échelles, dans des domaines multiples. Dans cette partie, nous donnons quelques exemples d'applications du confinement de plaques minces.

Certaines techniques actuellement en développement sont un enjeu important des avancées technologiques futures comme par exemple l'électronique sur support déformable [Rogers et al., 2010]. Cela permet de réduire l'espace occupé par les circuits électroniques et de ne plus avoir de contraintes de forme. A plus long terme, il serait envisageable de monter les composants sur des tissus biologiques assimilés par l'organisme en vue d'applications médicales. Il est évidemment essentiel de prévoir le comportement de tels supports sous toutes sortes de contraintes et de conditions aux limites.

Un enjeu plus classique mais incontournable est l'amélioration de la résistance des carrosseries de véhicules. Courber une plaque mince en augmente sa rigidité [Ashwell, 1952] ; ce processus est utilisé pour renforcer les ailes de voitures. La forme et la rigidité d'une aile d'avion peut également être optimisée pour augmenter les performances de vol. Les phénomènes de confinement jouent un rôle dans la résistance des véhicules aux accidents. En froissant le capot d'une voiture lors d'un choc, de l'énergie est dissipée et les passagers sont mieux protégés que si le matériau était parfaitement rigide et transmettait toute l'énergie du choc.

Une question pratique est de déterminer comment plier un matériau de manière adaptée à l'utilisation. Par exemple, pour un pliage réversible, le système des ailes d'insectes comme celles des criquets est justifié [Wootton, 1981]. Le pliage se fait en accordéon suivant une « armature » solide, ainsi l'aile n'est pas endommagée. Au contraire, dans certains cas, le pliage désordonné serait plus adapté. Si le rangement a été correctement réalisé, il permet de déployer un tissu immédiatement au sortir du récipient (voile solaire, spi de voilier). Pour utiliser cette méthode, le matériau ne doit pas être sujet aux déformations plastiques lors du froissage. En fait nous profitons quotidiennement des développements en matière de pliage/dépliage avec les bouteilles compactables ou les nouvelles tentes dont le savant pliage du tissu et des arceaux permet de monter la tente instantanément.

#### Sciences des polymères

Une grande partie de la littérature abordant les problèmes de confinement s'intéresse au repliement de chaînes de polymères et de protéines. Dans ce cas, le repliement n'est pas nécessairement dû à une diminution de l'espace disponible ; l'interaction entre les différentes molécules composant le polymère et les molécules du solvant peuvent générer un repliement. Ces études ont été initiées par P.G. de Gennes [de Gennes and Prost, 1974] qui a établi une loi reliant la longueur d'une chaîne de polymères à la taille caractéristique de la pelote qu'elle forme lorsqu'elle est repliée. Des études plus récentes portent sur la dynamique

du repliement et du déploiement sous certaines conditions de variation de température ou de nature du solvant. Une différence majeure entre ces objets et de simples structures élastiques est qu'elles sont soumises à l'agitation thermique.

### Sciences du vivant

Ces dernières années, les scientifiques ont pris conscience que les systèmes biologiques étaient soumis en permanence à des contraintes mécaniques et qu'elles peuvent jouer un rôle dans la croissance et le développement des matériaux vivants. Il y a déjà longtemps que l'idée a émergé avec l'ouvrage de D'Arcy Thompson [D'Arcy-Thompson, 1917] sans être intensivement explorée. C'est actuellement le sujet d'étude d'un grand nombre de physiciens et de biologistes. La problématique du confinement apparaît dans divers processus.

Dans les capsides de virus se trouve un filament d'ADN, fortement compacté. Arsuaga et al. notent que le brin ne doit pas être emmêlé pour que le virus fonctionne correctement [Arsuaga et al., 2002]. Il a été observé que le filament est enroulé de manière parfaitement ordonnée dans la capside. Pourtant, dans les noyaux cellulaires, les brins sont emmêlés et forment des noeuds complexes (plusieurs croisements). Les noeuds permettent d'augmenter l'efficacité de réactions chimiques. Le confinement a tendance à augmenter la probabilité de création de noeuds.

Les contraintes mécaniques jouent un rôle déterminant dans l'embryogénèse. Farge et al. ont montré que l'expression des gènes est activée par des contraintes exercées par l'environnement extérieur [Farge, 2003]. Il y a une cascade d'activation dans le temps, chaque action induisant de nouvelles contraintes. Une image marquante de l'influence des contraintes mécanique est que le fœtus est orienté dans l'utérus maternel car les contraintes ventrales et dorsales sont différentes.

En biologie végétale, les feuilles en développement sont confinées dans le bourgeon et soumises à de fortes contraintes mécaniques ainsi qu'à des frustrations géométriques. La feuille se déforme pour adapter sa forme au bourgeon (Fig. 1.6). La forme finale de la feuille résulterait principalement d'un processus d'auto-organisation, la génétique ne jouant pas, à ce stade, le rôle principal [Couturier et al., 2009, Kobayashi et al., 1998].



FIG. 1.6 – Feuille d'érable argentée repliée puis la même dépliée. La feuille garde dans sa forme la mémoire du pliage dans le bourgeon. Figure extraite de [Couturier, 2009].

D'autres objets biologiques mettent à profit les déformations élastiques pour assurer leur fonctionnement. Par exemple, un grain de pollen quittant l'organe mâle d'une fleur

se dessèche ce qui induit un repliement de la sphère [Katifori et al., 2010] : la zone de la surface permettant les échanges avec l'extérieur est repliée dans la sphère (Fig. 1.7). Ceci lui permet de survivre durant son vol jusqu'à une autre fleur. Une fois un organe femelle atteint, il se gonfle alors d'eau et se déplie. Ce processus de repliement se nomme l'harmoméga-thie.

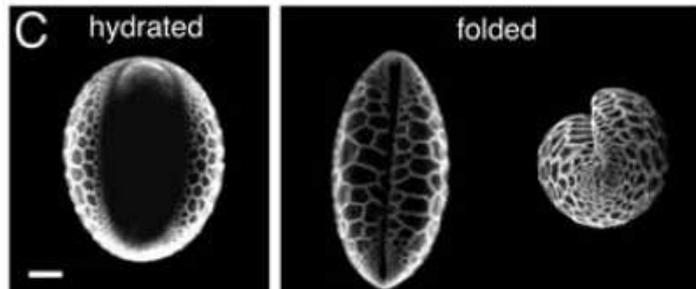


FIG. 1.7 – Grain de pollen hydraté (gauche) et déshydraté (droite). Figure extraite de [Katifori et al., 2010].

Revenons à l'étude d'objets physiques. Nous présentons quelques expériences réalisées dans le but de comprendre les processus de confinement et détaillons les approches choisies.

### 1.3.2 Différentes approches

Penchons nous sur le cas général des structures élastiques froissées, telle une boulette de papier. De nombreuses questions se posent au sujet de sa formation. Comment une surface adapte-t-elle sa géométrie lorsque la taille de son environnement diminue ? A travers cette question se pose le problème de ce qui détermine la distribution spatiale des singularités dans la boulette. On peut l'imaginer totalement aléatoire puisqu'il est infiniment peu probable de reproduire deux fois de suite la même boulette ; mais elle pourrait être sélectionnée par minimisation de l'énergie globale du système. Une deuxième question est de comprendre pourquoi et comment apparaissent des structures à petite échelle. Ceci laisse poindre l'espoir de placer l'étude des structures élastiques confinées dans le cadre général de l'étude de la focalisation de l'énergie. Ce problème est abordé en turbulence, domaine dans lequel les vortex jouent le rôle des singularités. Une autre problématique est suscitée par l'étude des empilements granulaires. Comme l'empilement granulaire, une surface élastique confinée ne ressent pas l'agitation thermique ; une fois la configuration sélectionnée, elle ne peut pas en sortir sans forçage externe. Pourtant elle tendrait à atteindre un état d'énergie fondamentale en minimisant sa courbure. A cause du fait que le matériau ne peut pas s'interpénétrer et de l'absence de fluctuations, la surface n'a pas la possibilité de relaxer vers l'équilibre global. Edwards propose pour les grains une thermodynamique basée sur une mesure du volume exclu [Edwards and Oakeshott, 1989]. De même, nous nous demandons s'il est possible d'établir une thermodynamique des structures élastiques compactées.

Nous répertorions de manière non exhaustive différentes approches suivies jusqu'à aujourd'hui pour étudier les boulettes de papier froissé et objets assimilés.

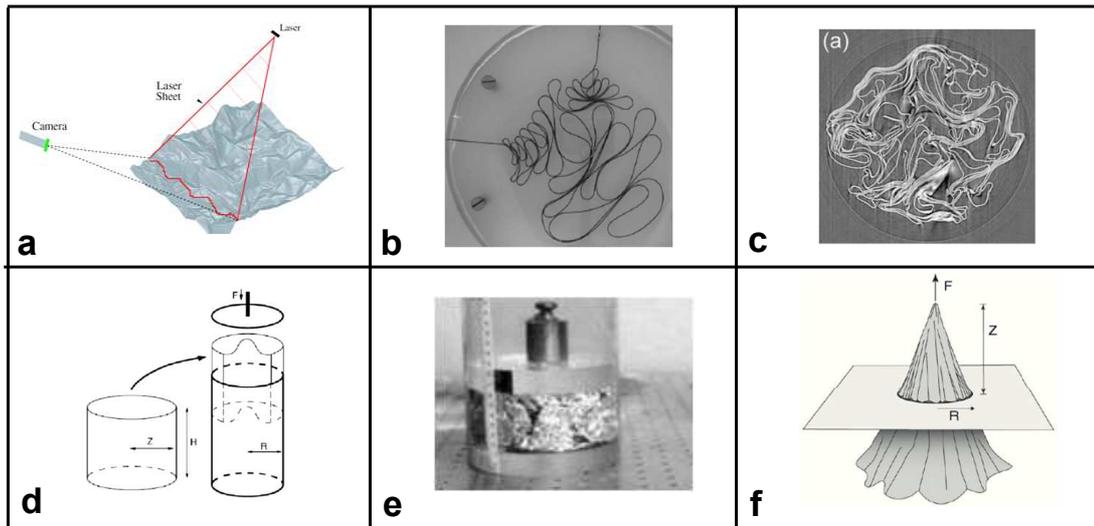


FIG. 1.8 – Quelques expériences d’objets en confinement : (a) réseau de plis sur une surface dépliée [Blair and Kudrolli, 2005], (b) motifs fractals par cascades de tailles [Donato et al., 2003], (c) empilements de couches dans un objet tridimensionnel [Lin et al., 2009], (d) premières bifurcations lors du confinement d’un cylindre [Boue et al., 2006], (e) vieillissement des structures compactées [Matan et al., 2002], (f) thermalisation de sous-systèmes en contact [Deboeuf et al., 2009].

## Réseau

Un type d’approche consiste à étudier la géométrie de la surface dépliée après avoir été froissée et à caractériser le réseau de plis [Blair and Kudrolli, 2005, Andresen et al., 2007] (Fig. 1.8a). Blair et Kudrolli montrent que le réseau n’est pas entièrement connecté et que sa géométrie est dictée par celles des d-cones. Une idée émergente est que le réseau est formé par la brisure de larges plis ; le processus de compaction devrait pouvoir être comparé à celui de fragmentation.

L’intérêt d’une telle approche est le petit nombre de grandeurs considérées (géométrie du réseau, courbure des plis). Cependant, en dépliant la surface, de l’information est perdue notamment concernant les corrélations des grandeurs géométriques de facettes en contact.

## Motifs

De nombreuses études se sont intéressées au caractère fractal des surfaces froissées. Certaines mesurent la rugosité de la surface dépliée [Tzschichholz et al., 1995, Plouraboue and Roux, 1996]. D’autres considèrent les motifs en confinement [Gomes, 1987, Gomes et al., 1989, Gomes et al., 1991, Donato et al., 2002, Donato et al., 2003, Balankin et al., 2007b, Balankin et al., 2007a, Balankin et al., 2008, Balankin et al., 2010], en s’inspirant des résultats obtenus sur les polymères (Fig. 1.8b). Selon eux la géométrie fractale résulte des cascades de tailles des structures qui apparaissent successivement lors du confinement. Le point critiquable de ces dernières études est l’étroitesse des gammes de tailles explorées, qui restent toujours de l’ordre du centimètre.

Récemment, Lin et al. [Lin et al., 2009] ont exploré la géométrie tridimensionnelle en confinement d'une feuille d'aluminium froissée en utilisant des rayons X (Fig. 1.8c). Ils ont caractérisé les corrélations intercouches. Cambou et Menon ont utilisé la même technique expérimentale [Cambou and Menon, 2009]. Nous nous référerons à leurs résultats non encore publiés.

### Non-linéaire

En suivant les toutes premières évolutions d'un objet élastique confiné, il est possible d'établir un diagramme des bifurcations et d'observer la stabilité des géométries confinées. C'est ce qu'on fait Boué et al. [Boue et al., 2006] lors d'une expérience réelle, appuyée par une expérience numérique, du confinement quasi-bidimensionnel d'un cylindre (Fig. 1.8d).

### Vieillessement

Matan et al. [Matan et al., 2002] explorent la force nécessaire pour créer les structures géométriques d'une feuille d'aluminium compactée, sans avoir accès à la géométrie (Fig. 1.8e). Un poids est placé sur un cylindre d'aluminium froissé et la hauteur instantanée du cylindre est mesurée. Ils observent un phénomène de vieillissement des structures au travers d'une décroissance logarithmique de la taille de la feuille froissée. Une question qui reste ouverte après leur étude est de savoir si cela est dû au vieillissement des plis déjà existants, par exemple par fluage de matière dans les zones déformées plastiquement, ou s'il est dû à un réarrangement configurationnel des structures. Dans ce second cas, cela inspirerait d'utiliser les outils développés pour étudier les systèmes vitreux qui, sous contrainte, présentent des réarrangements lents des configurations.

### Définition d'une thermodynamique

Si elle en avait la possibilité, la surface confinée atteindrait la configuration de plus basse énergie, celle pour laquelle la courbure est minimisée. Cependant, à cause de la non-interpénétrabilité du matériel et la friction entre les couches, le système est piégé dans une configuration d'énergie plus élevée. Sous cette interprétation du processus de confinement, l'objet compacté est analogue à un système dont le désordre est gelé tel les empilements de sphères dures ou les systèmes vitreux (cf section 1.1). Il devrait alors être possible de définir une entropie configurationnelle puis une température effective liée au système. Balankin et al. l'évoquent dans [Balankin and Huerta, 2008] sans en faire de mesures expérimentales. Deboeuf et al. [Deboeuf et al., 2009], dans une expérience de confinement bidimensionnel d'une tige dans laquelle la géométrie confinée et la force introduite sont connues, montrent que deux sous-systèmes confinés se thermalisent lorsqu'ils sont mis en contact (Fig. 1.8f). Ils mesurent une température effective sans avoir à définir d'entropie. Nous détaillerons ultérieurement cette expérience.

### 1.3.3 Notre approche

Dans les chapitres suivants, nous présentons deux expériences de compaction d'objets unidimensionnels en confinement bidimensionnel. Notre motivation est la compréhension des processus de formation d'une structure froissée du point de vue de la morphogénèse : comment les structures géométriques que sont les facettes ou les plis apparaissent-elles ? s'organisent-elles ? Comment modifient-elles les propriétés mécaniques du matériau ? Nous nous focalisons sur la caractérisation des formes géométriques créées par confinement de l'objet. En tant que physiciens, nous simplifions les systèmes pour n'en garder que les ingrédients essentiels. Nous simplifions donc une surface froissée en un fil plié, c'est-à-dire qu'au lieu d'étudier la formation de plis plastiques sur une surface dans un espace tridimensionnel, nous étudions les plis réversibles d'une ligne dans un plan.

Dans le premier chapitre, nous suivons la dynamique du confinement d'un anneau de gel en croissance. A partir d'une configuration initiale simple et commune à toutes les expériences, l'espace des configurations accessibles s'élargit. Nous nous intéressons à savoir comment émerge la complexité des géométries au cours des premières bifurcations.

Dans le second chapitre nous présentons le travail principal de cette thèse qui est une expérience de confinement d'un fil dans un potentiel radial bidimensionnel. Nous ne considérons plus la dynamique du confinement mais les géométries finales obtenues. Suivant une première approche statistique, nous décrivons la très grande diversité des géométries développées. Quelles grandeurs permettent de caractériser une géométrie et la diversité de toutes celles obtenues dans les mêmes conditions expérimentales ? Le système peut-il atteindre un équilibre ou bien est-il bloqué dans des minima locaux d'énergie ? Dans ce cas, le système est-il ergodique ? Suivant une seconde approche, en supposant que le système tend à atteindre un état fondamental d'énergie qui correspond à l'état cristallin, nous établissons une échelle du désordre de chaque géométrie individuellement. Le désordre est, dans ce système, une marque du niveau d'excitation de la configuration.

Les deux chapitres suivants peuvent être lus indépendamment.



## Chapitre 2

# Compaction par croissance d'un gel

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'une expérience réalisée par S. Deboeuf et H. Aharoni dans le groupe d'E. Sharon au Racah Institute of Physics, Hebrew University of Jerusalem, Israel. Ma contribution a été d'analyser les données expérimentales et d'interpréter les résultats. Cette expérience permet de suivre la dynamique de confinement d'un objet unidimensionnel dans un espace bidimensionnel. Les motifs observés sont proches de ceux observés dans l'expérience de Boué et al. [Boue et al., 2006]. Cependant, nous pouvons atteindre des intensités de confinement plus élevées et donc des motifs de confinement plus développés. De plus, les forces de frottements intercouches, ingrédient essentiel dans la sélection des motifs, sont différentes d'un système à l'autre. Il est toujours intéressant d'obtenir les mêmes résultats dans des systèmes différents.

Nous commençons par présenter le dispositif expérimental conçu par le groupe d'E. Sharon. Puis nous présenterons notre travail : nous établissons un diagramme des bifurcations qui nous permet de mettre en évidence l'apparition de désordre dans le système.

### 2.1 Dispositif expérimental

Un dispositif expérimental a été élaboré pour étudier la dynamique du confinement d'un anneau élastique dans une géométrie à deux dimensions. Le moteur du confinement est la croissance de l'objet, la taille du récipient étant fixée. Les expérimentateurs ont utilisé un gel qui, plongé dans l'eau, voit son volume croître lorsque la température diminue.

Un anneau de gel d'épaisseur millimétrique est placé dans un récipient cylindrique de 16 mm de diamètre (Fig. 2.1). Le système est placé dans un bain d'eau chaude ( $T \sim 60^\circ C$ ) de grande taille devant la taille du système afin qu'il joue le rôle de thermostat. Le bain d'eau refroidit sans contrôle de la température. Lorsque la température diminue, le volume de gel augmente, augmentant ainsi le périmètre de l'anneau. La croissance du gel ralentit au cours du temps puis s'arrête. A l'état final, le thermostat est à la température  $T \sim 25^\circ C$ . Une description du gel utilisé est donnée dans [Tanaka, 1978]. Un appareil photo est placé au-dessus du bain, à la verticale. Des images sont prises à intervalle de temps réguliers afin

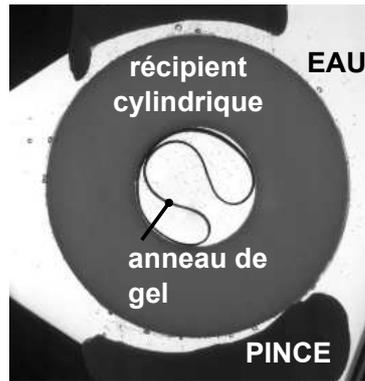


FIG. 2.1 – Un anneau de gel confiné dans un récipient cylindrique est plongé dans un bain d'eau chaude. Une pince permet de maintenir le système en place pour permettre la prise de photographies. Lorsque la température du thermostat diminue, le gel croît.

de pouvoir suivre la dynamique de confinement de l'anneau de gel pendant sa croissance.

Afin d'atteindre des taux de confinement les plus élevés possibles, le périmètre initial de l'anneau doit être le plus grand possible ; toutefois il ne faut interdire aucune configuration de confinement à l'anneau. Comme il a été montré dans [Boue et al., 2006], la première étape du confinement d'un anneau se fait par une invagination qui croît jusqu'à ce que le fil entre en contact avec lui-même (Fig. 2.2). Nous choisissons cette géométrie comme configuration initiale sans restreindre l'espace des configurations possibles.

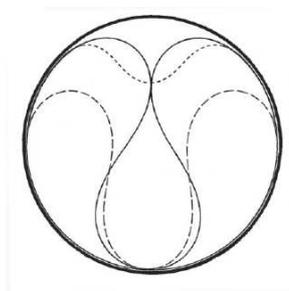


FIG. 2.2 – Lors du confinement d'un anneau, une invagination croît jusqu'à ce que l'anneau entre en contact avec lui-même. Les deux boucles formées grossissent puis se touchent. La configuration initiale choisie est celle représentée en trait tireté (-). Figure extraite de [Boue et al., 2006].

Au cours de la croissance du gel, l'épaisseur de l'anneau augmente également dans la direction perpendiculaire au plan considéré. Dans cette étude, nous nous intéressons à la forme de la ligne neutre du filament de gel, nous n'avons donc pas besoin de tenir compte de l'épaisseur. Cependant, dans certains cas, la croissance induit une torsion de l'anneau. De telles expériences sont rejetées. Finalement, seules neuf expériences sont exploitables. Nous présentons les résultats préliminaires de notre étude. Un plus grand nombre d'expériences devraient être réalisées prochainement.

## 2.2 Analyse d'images

A partir d'une image brute, nous isolons l'image de l'anneau de gel confiné. Cette image est binarisée puis squelettisée (Fig. 2.3). Le processus de squelettisation consiste à rogner une ligne par les bords jusqu'à ce qu'elle atteigne une épaisseur d'un pixel.

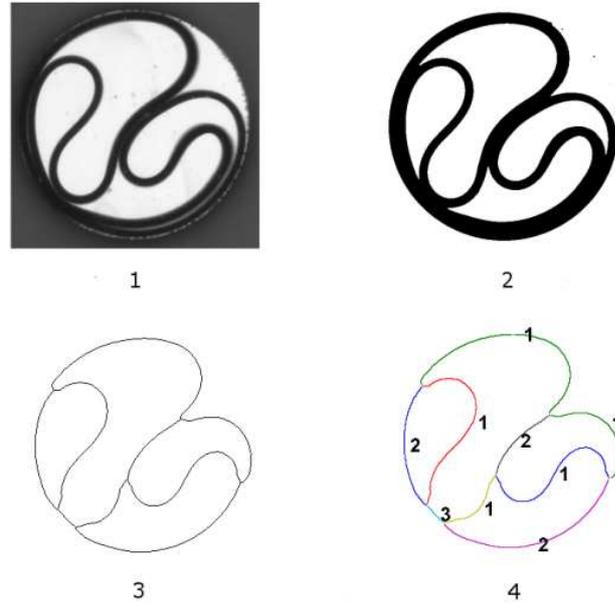


FIG. 2.3 – Etapes de l'analyse d'images : (a) Image brute prise au cours d'une expérience. (b) Image binarisée de l'anneau de gel. (c) Le squelette de l'anneau est déterminé à partir de l'image binaire. (d) Le motif géométrique est divisé en branches. Le processus est détaillé ci-dessous Fig. 2.4).

Nous découpons le motif géométrique en objets définis de la façon suivante (Fig. 2.4) :

- les vertex sont les points d'embranchement (points du squelette ayant trois voisins).
- Une branche est une portion de l'anneau comprise entre deux vertex. Une branche peut contenir plusieurs épaisseurs de l'anneau.
- Une couche est une épaisseur de l'anneau incluse dans une branche.

Connaissant l'épaisseur de l'anneau de gel, nous déterminons le nombre de couches incluses dans une branche en mesurant l'épaisseur de la branche sur l'image binarisée. L'épaisseur de l'anneau de gel augmente au cours du temps ; ne connaissant pas la loi d'évolution de l'épaisseur, nous utilisons une loi phénoménologique linéaire en fonction du temps. C'est imprécis et nous devons corriger manuellement les erreurs pour chaque image. C'est le seul point qui limite l'automatisation totale du processus d'analyse d'images.

Nous définissons le taux de compaction à un instant donné comme

$$p(t) = \frac{L(t)}{\pi D} \quad (2.1)$$

où  $L(t)$  est le périmètre de l'anneau et  $\pi D$  est le périmètre du récipient.

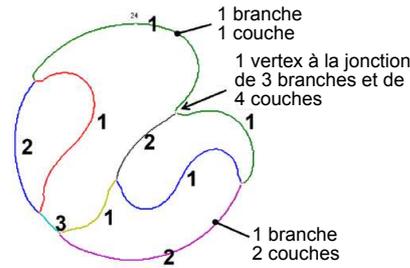


FIG. 2.4 – Le motif est découpé en objets élémentaires : une *branche* est une portion de fil comprise entre deux *vertex*. Une branche contient plusieurs *couches*.

## 2.3 Observation

Lorsque l'on observe la croissance de l'anneau de gel confiné, deux scénarios sont possibles lors de la première bifurcation. Dans le premier, les deux boucles déjà présentes dans la configuration initiale entrent en contact puis l'une glisse au-dessus de l'autre (Fig. 2.5a). Dans le second scénario, les deux boucles entrent en contact, face à face, puis elles se retournent toutes les deux (Fig. 2.5b). Par la suite, d'autres bifurcations se produisent. Une des deux boucles ainsi retournées peut croître plus que l'autre, introduisant une asymétrie dans le système (Fig. 2.5c). La famille A regroupe les configurations qui suivent le premier scénario, la famille B celles du second. Dans la famille B, nous considérons le groupe B1 correspondant aux configurations dont l'état final est symétrique et B2 correspondant aux configurations asymétriques.

Le but de cette étude est de quantifier la différence entre ces deux familles. Nous déterminerons un paramètre de contrôle adapté au système puis nous établirons un diagramme des bifurcations.

## 2.4 Identification du paramètre de contrôle

Considérons l'évolution du taux de compaction au cours du temps (Fig. 2.6). Le taux de compaction final ainsi que le temps pour l'atteindre sont variables d'une expérience à l'autre. Le temps n'est pas un bon paramètre de contrôle : à un instant donné, les configurations sont dans des états de compaction divers et il n'est pas possible de les comparer.

Nous considérons l'évolution du nombre de branches au cours du temps (Fig. 2.7). Le nombre de branches, couches et vertex sont liés par une « loi des noeuds » : à un vertex, le nombre de couches entrantes est égal au nombre de couches sortantes. Il est donc équivalent de considérer l'une de ces trois grandeurs.

Le nombre de branches évolue par palier au cours du temps. Cela est dû à la façon de définir les branches ; leur nombre ne change que si un nouveau point de contact de l'anneau avec lui-même est créé. Le long d'un palier du nombre de branches, le gel croît sans changer de configuration. Pour nous affranchir du temps qui, nous l'avons montré, n'est pas un paramètre satisfaisant, nous considérons le nombre de bifurcations. Une bifurcation

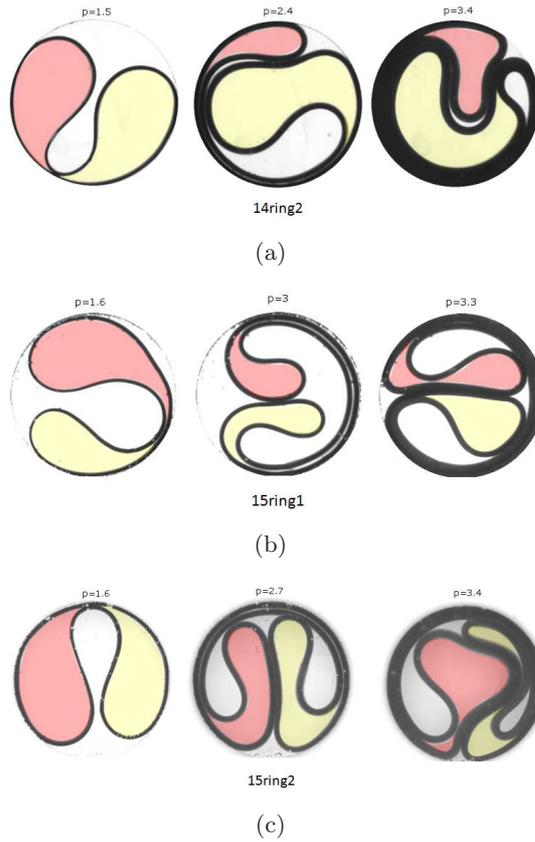


FIG. 2.5 – Evolution du motif de l’anneau de gel lors de la croissance. La première image de chacune des séquences de trois images est la configuration initiale dans laquelle l’anneau est préparé. (a) Famille A : une boucle glisse au-dessus de l’autre. (b)-(c) Famille B1 et B2 : les deux boucles se bloquent face à face puis se retournent. Le motif peut devenir asymétrique (famille B2).

se produit lorsqu’un nouveau point de contact de l’anneau avec lui-même est créé (Fig. 2.8). Pour déterminer les différentes bifurcations d’une expérience, nous traçons le nombre de branches en fonction du temps ; chaque nouveau palier, représenté par une ligne rouge Fig. 2.7, correspond à une nouvelle bifurcation. Nous choisissons de faire cette mesure sur le graphe du nombre de branches en fonction du temps car il est moins bruité que celui du nombre de couches (plus nombreuses que les branches) et plus précis que le nombre de vertex (moins nombreux que les branches).

## 2.5 Résultats

D’abord, nous considérons le taux de compaction  $p$  à chaque nouvelle bifurcation pour toutes les expériences (Fig. 2.9). Pour les configurations de la famille A (rouge), les bifurcations se produisent à des taux de compaction plus faibles que celles de la famille B (bleu et vert). Nous traçons ensuite le nombre de couches en fonction du numéro de la bifurcation (Fig. 2.10). Ce graphe est équivalent à celui du nombre de couches en fonction du temps (Fig. 2.7) mais le paramètre de contrôle a été modifié. Les différentes courbes de ce graphe

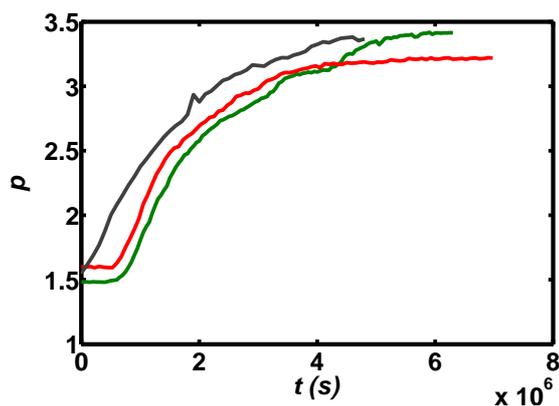


FIG. 2.6 – Evolution du taux de compaction  $p = L(t)/2\pi$  en fonction du temps pour trois expériences distinctes.

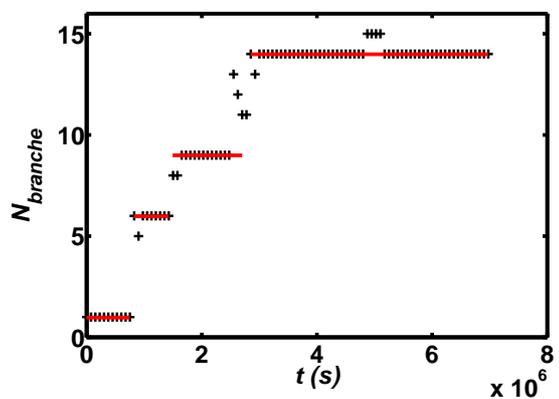


FIG. 2.7 – Evolution du nombre de branches en fonction du temps pour une expérience type.

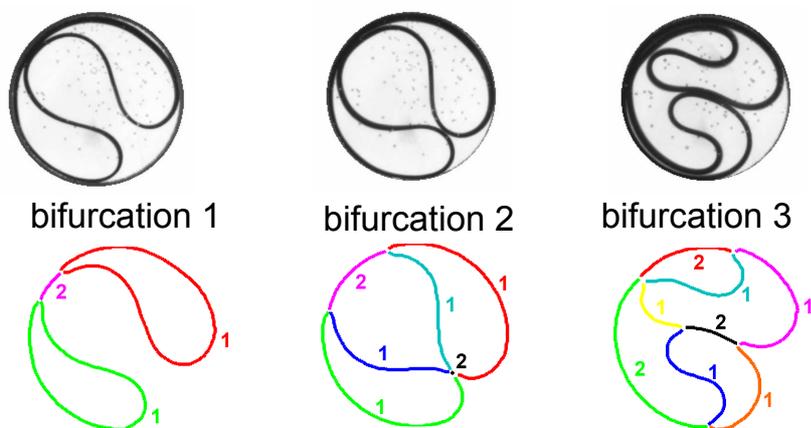


FIG. 2.8 – Une bifurcation se produit lorsqu'un nouveau point de contact de l'anneau avec lui-même est créé. Entre deux bifurcations, les nombres de branches, de couches et de vertex sont constants.

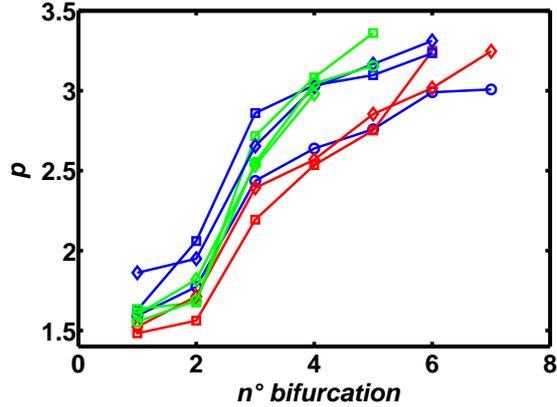


FIG. 2.9 – A chaque nouvelle bifurcation, le taux de compaction  $p$  de l'anneau est mesuré pour les expériences des familles A (rouge), B1 (bleu) et B2 (vert). Chaque courbe correspond à une expérience.

forment un faisceau qui s'élargit à partir d'un point. La première bifurcation est commune à toutes les configurations, les deux boucles initialement présentes entrent en contact. Ensuite, à chaque nouvelle bifurcation, l'espace des configurations possibles s'agrandit. Nous

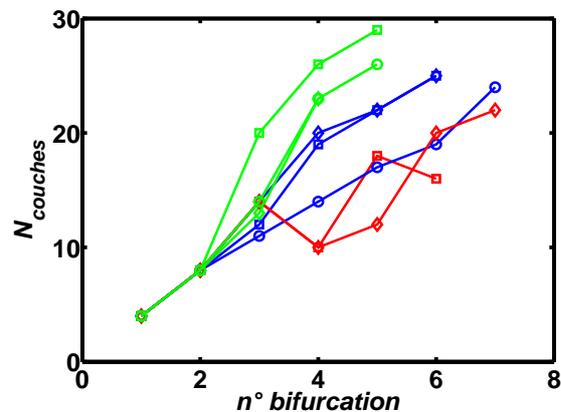


FIG. 2.10 – Nombre de couches en fonction du nombre de bifurcations pour chaque expérience de la famille A (rouge), B1 (bleu) et B2 (vert). La première bifurcation correspond à la configuration initiale dans laquelle est préparée l'anneau.

observons également que les courbes sont regroupées par famille. Les expériences de la famille A (rouge) ont globalement un nombre de couches plus faible que celles de la famille B. Au sein de la famille B, les configurations de B1 (bleu) ont un plus faible nombre de couches que celles de B2 (vert). Les mêmes observations peuvent être faites sur les mesures du nombre de branches et du nombre de vertex (Fig. 2.11). Le nombre de ces objets étant plus petit, la résolution des mesures est moins bonne et donc le regroupement par famille moins net.

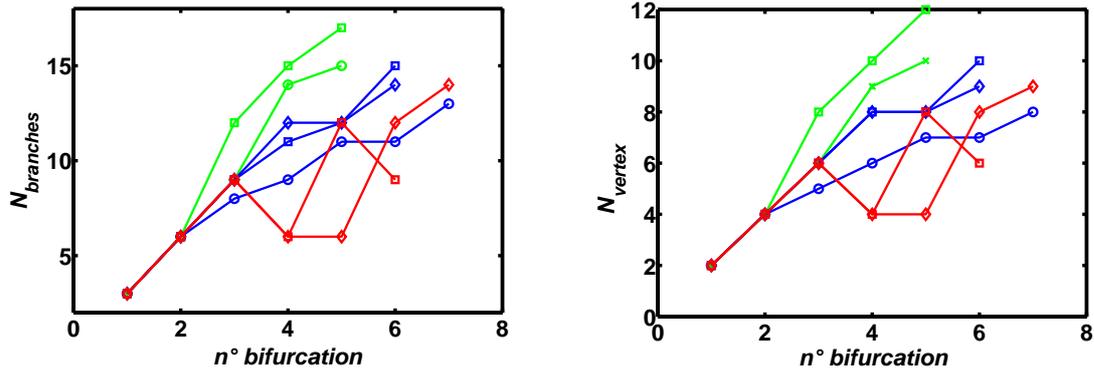


FIG. 2.11 – Nombre de branches (a) et de vertex (b) en fonction du nombre de bifurcations pour chaque expérience de la famille A (rouge), B1 (bleu) et B2 (vert).

## 2.6 Discussion

Résumons les résultats obtenus. Le premier scénario (famille A) correspond au glissement d'une boucle sur une autre. Le nombre de branches reste faible par rapport aux autres géométries et les bifurcations se produisent à des taux de compaction faibles. Le deuxième scénario (famille B) correspond au blocage des deux boucles face-à-face. Les bifurcations se produisent pour des taux de compaction élevés donc avec un retard par rapport aux configurations de la famille A. Le nombre de branches de ces géométries est plus élevé que pour la première famille.

Dans la famille A, l'évolution de la géométrie est continue, les bifurcations ont lieu à des taux de compaction faibles. L'anneau se dirige vers une configuration spiralée, de basse énergie. Dans la famille B, le système se bloque dans la configuration des deux boucles face-à-face. Pendant la durée du blocage, la croissance du gel continue et l'énergie élastique s'accumule; la pression exercée sur le fil devient assez forte pour retourner les deux boucles, débloquent ainsi l'évolution de la configuration. Mais lorsque le système est débloqué, le taux de compaction est déjà élevé; les configurations atteintes ont alors un plus grand nombre de branches, elles sont désordonnées. En effet, la configuration la plus ordonnée est la spirale qui ne contient qu'une branche. Nous qualifions de désordonnée une configuration qui contient un grand nombre de boucles et de vides ce qui se traduit dans notre système par un grand nombre de branches. Nous pouvons faire une analogie entre l'anneau confiné et les systèmes présentant du jamming. Pour la famille A, l'anneau lentement confiné peut à chaque instant choisir la configuration de plus basse énergie et évoluer vers l'état « cristallin », la spirale. Au contraire, pour la famille B, l'anneau est bloqué dans une configuration correspondant à un minimum local d'énergie; il n'a pas la possibilité de passer les barrières énergétiques pour atteindre la configuration de plus basse énergie, le désordre est gelé en raison des forts taux de compaction. Par cette expérience, nous montrons qu'une dynamique lente induit des motifs géométriques ordonnés tandis qu'une dynamique bloquée induit des motifs désordonnés.

## 2.7 Résumé

Dans cette étude, nous avons utilisé le nombre de bifurcations comme paramètre de contrôle du gel en croissance. Cela nous a permis de comparer les dynamiques de confinement de l'anneau de gel sans être gênés par la variabilité temporelle des différentes expériences. Nous avons mis en évidence le fait qu'une configuration avec une dynamique de confinement lente atteint des états plus ordonnés qu'une configuration ayant une dynamique bloquée. Les mesures effectuées, uniquement géométriques donc simples à réaliser, permettent de classer les configurations selon leur désordre.

Cette expérience ne permet pas d'atteindre des taux de compaction élevés mais elle permet de suivre avec précision les premières bifurcations géométriques. Dans le chapitre suivant, nous présentons une expérience de compaction d'un fil à des taux de confinement élevés sans pouvoir suivre la dynamique de façon satisfaisante. En s'inspirant de l'expérience du gel en croissance, nous postulons dans l'étude suivante qu'une dynamique lente induit un motif ordonné.



# Chapitre 3

## Centripétation

Jusqu'à aujourd'hui, les expériences réalisées pour étudier des structures élastiques compactées permettaient d'accéder soit à la géométrie de la surface dépliée [Blair and Kudrolli, 2005, Andresen et al., 2007], soit à la géométrie en confinement [Lin et al., 2009], soit à la force nécessaire pour compacter [Matan et al., 2002]. Certaines permettent de contrôler la force nécessaire pour compacter tout en ayant accès à la géométrie confinée [Deboeuf et al., 2009, Donato et al., 2003]. Cependant, dans ces deux expériences, le confinement est irréversible. Nous avons réalisé une expérience permettant de confiner un objet unidimensionnel dans un espace bidimensionnel, de manière réversible et isotrope, sans conditions aux bords. La géométrie et la force de confinement sont accessibles simultanément.

### 3.1 Dispositif expérimental

Nous avons élaboré un dispositif expérimental permettant de confiner un objet à une dimension dans une géométrie à deux dimensions. Il consiste en une cellule de Hele-Shaw circulaire, remplie d'un liquide. Un fil est inséré dans la cellule, sa densité est plus faible que celle du liquide. L'épaisseur du fil est choisie du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la cellule de façon à ce que le fil ne puisse pas se croiser. Lorsque la cellule est mise en rotation, une force centripète est induite sur le fil, plus léger, qui est alors confiné au centre.

#### 3.1.1 Matériaux

La cellule est remplie d'eau saturée en sel à laquelle on ajoute quelques gouttes de tensioactifs (produit vaisselle) pour diminuer les frottements du fil avec le liquide. Nous utilisons un fil de PDMS (élastomère de silicone) blanc de section circulaire, de 2 mm de diamètre et de longueur  $L = 3 \pm 0.01$  m, de fabrication industrielle (Goodfellow). L'épaisseur est contrôlée à  $\pm 10\%$  près. La densité du liquide est de 1.16, celle du fil de 1.

#### 3.1.2 La cellule rotative

Le principe de la cellule rotative est simple (Fig. 3.1a) : deux disques circulaires de 25 cm de rayon sont superposés, l'un au fond en duralumin (*i*) d'épaisseur 10 mm, l'autre

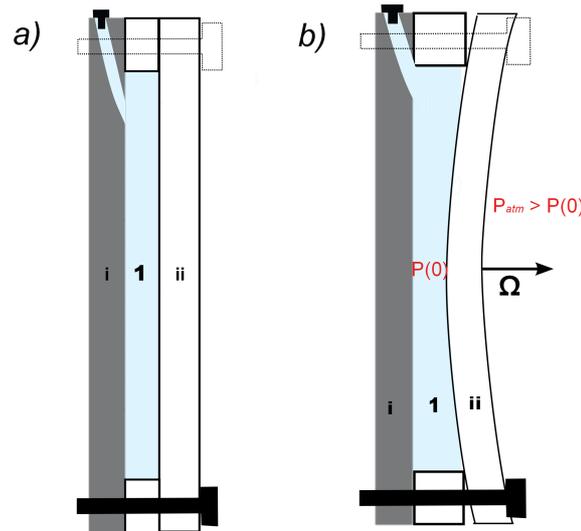


FIG. 3.1 – (a) Principe du dispositif expérimental vu en coupe dans l'épaisseur : deux disques sont superposés (*i* et *ii*). L'espace laissé entre les disques crée une chambre (1) remplie de liquide dans laquelle est inséré un fil. L'espacement entre les disques est choisi de sorte à ce que deux brins de fil ne puissent pas se superposer. (b) Schéma du dispositif en rotation : un gradient de pression est instauré dans le fluide. La pression  $P(0)$  au centre de la chambre 1 est inférieure à la pression atmosphérique à l'extérieur de la cellule ce qui induit une déflexion de la plaque *ii*. L'épaisseur de la chambre 1 n'est plus uniforme. Le dispositif ne peut donc pas être utilisé en l'état.

devant, en polycarbonate (*ii*), un matériau transparent et résistant (il s'agit de Plexiglas renforcé par des fibres de carbone), d'épaisseur  $15\text{ mm}$ . Le fil est inséré dans la chambre 1 formée par les disques *i* et *ii* dont l'espacement est fixé par une couronne en duralumin d'épaisseur  $2.5\text{ mm}$ , de façon à ce que deux brins de fil ne puissent pas se superposer. Mais ce dispositif est trop simple pour être fonctionnel (Fig. 3.1b). En effet, lorsque la cellule est mise en rotation, un gradient de pression s'instaure dans le liquide soumis à la force centrifuge. En utilisant de l'eau saturée en sel, pour une fréquence de rotation de  $20\text{ Hz}$ , le gradient de pression atteint environ  $5\text{ bars}$  entre le centre et les bords de la cellule. La pression dans le liquide au centre de la chambre 1 est inférieure à la pression atmosphérique à l'extérieur de la cellule. La plaque *ii* est alors défléchie ; nous montrons que l'amplitude de déflexion au centre atteint  $1.6\text{ mm}$ . Le calcul est détaillé dans l'annexe A.

Pour éviter la déflexion de la plaque *ii*, nous introduisons une chambre sacrificielle. Le dispositif final est présenté Fig. 3.2. Une seconde chambre (2) est constituée par le disque *ii* et un troisième disque de polycarbonate, d'épaisseur  $15\text{ mm}$  (*iii*). Elle est remplie du même liquide que la chambre 1. La plaque intermédiaire *ii* est percée de deux trous de  $1\text{ mm}$  de diamètre permettant une équilibration des pressions dans les liquides des chambres 1 et 2. En rotation, la plaque *iii* est défléchie. La pression étant égale de part et d'autre de la plaque *ii*, celle-ci reste plate. L'épaisseur de la chambre 2 est choisie suffisamment grande pour que la plaque *iii* n'entre pas en contact avec la *ii* lorsqu'elle est défléchie. La plaque *i* en duralumin est également défléchie mais cet effet est négligeable car la rigidité du

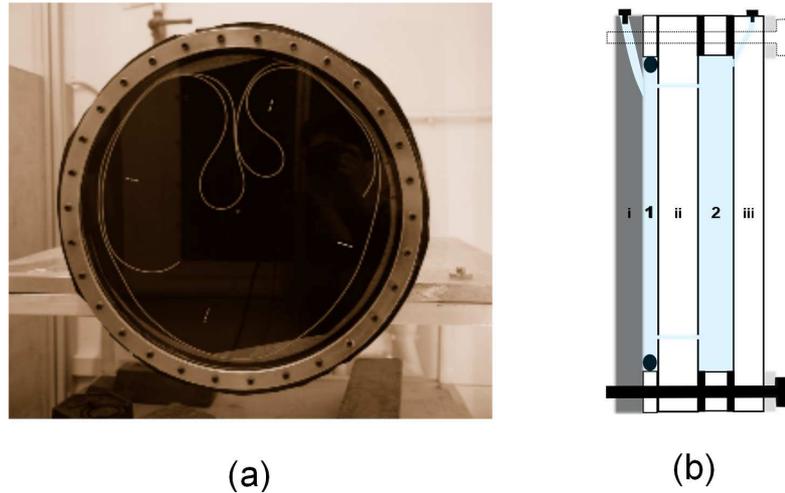


FIG. 3.2 – (a) Photographie du dispositif expérimental final : une tige élastique de densité 1 est confinée dans une cellule de Hele-Shaw en rotation, remplie d'eau saturée en sel de densité 1.16. Sur l'image, le fil, ouvert aux deux extrémités, est préparé dans la configuration initiale. (b) Schéma d'une coupe du disque dans l'épaisseur. Trois disques de 50 cm de diamètre sont superposés : l'un en aluminium (*i*) qui constitue le fond de la cellule, les deux autres en polycarbonate (*ii* et *iii*), un matériau transparent. L'espacement entre les disques *i* et *ii* est de 3 mm et celui entre *ii* et *iii* de 5 mm. Les chambres 1 et 2 sont remplies d'eau saturée en sel par deux trous de remplissage situés dans la tranche des disques *i* et *ii*. Le fil est introduit dans la chambre 1 par le trou de la plaque *i*. Le diamètre du fil, 2 mm, est de l'ordre de l'épaisseur de la chambre 1 afin que le confinement soit bidimensionnel. Deux trous de 1 mm de diamètre ont été percés dans la plaque intermédiaire *ii* afin d'équilibrer la pression dans le liquide des chambres 1 et 2 ; ainsi la plaque *iii* fléchit vers l'intérieur tandis que la plaque *ii* reste plane.

matériau est supérieure à celle du polycarbonate. Les trois disques sont serrés entre eux par 30 vis d'acier réparties sur le périmètre de la cellule.

L'épaisseur de la chambre 2 est fixée par une couronne de PVC de  $5\text{ mm}$  d'épaisseur placée entre les disques *ii* et *iii*. Deux couronnes de caoutchouc insérées au-dessus et au-dessous de la couronne de plexiglas permettent d'assurer l'étanchéité. Ce système de joints plats ne permet pas de contrôler proprement l'épaisseur de la chambre qui varie avec le serrage des vis. Nous ne pouvons donc pas l'utiliser pour assurer l'étanchéité de la chambre 1 qui, elle, doit avoir une épaisseur contrôlée. Pour fixer l'épaisseur de la chambre 1, une couronne de duralumin d'épaisseur  $2.5\text{ mm}$  est intercalée entre les disques *i* et *ii*. Un joint torique de  $5\text{ mm}$  de diamètre est placé dans la chambre, devant la couronne de duralumin. Quand les disques sont serrés entre eux, le joint est écrasé jusqu'à une épaisseur de  $2$  à  $3\text{ mm}$ , ce qui est satisfaisant. Mais la présence du joint crée un effet de pince : la plaque *ii* fléchit et l'épaisseur au centre devient trop grande (Fig. 3.3). Nous compensons l'épaisseur du joint en insérant des couronnes de mylar à la périphérie du disque, du côté extérieur des vis. Nous ajustons le nombre de couronnes d'épaisseur  $125\text{ }\mu\text{m}$  afin que l'épaisseur de la chambre soit uniforme. Nous vérifions que l'épaisseur est uniforme en remplissant partiellement de liquide la chambre 1 ; la largeur de la bande de liquide vue de biais doit être constante le long du diamètre. L'épaisseur finale de la chambre n'est pas connue précisément mais nous vérifions qu'elle est supérieure au diamètre du fil soit  $2\text{ mm}$  et bien inférieure à deux fois ce diamètre. Finalement nous ne contrôlons pas précisément

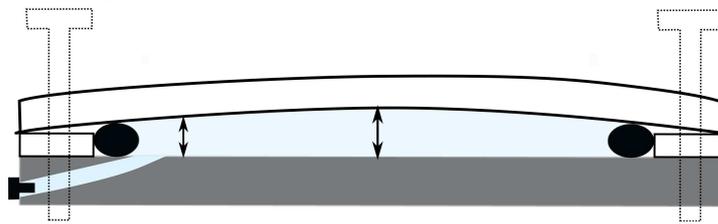


FIG. 3.3 – Schéma illustrant l'effet de pince. Seules les plaques *i* et *ii* ont été représentées ainsi que la chambre 1, définies Fig. 3.2. La présence du joint torique placé à l'intérieur de la chambre 1, dont le diamètre est supérieur à l'épaisseur de la chambre afin d'assurer une bonne étanchéité, induit une déflexion de la plaque *ii*. L'épaisseur dans la chambre 1 n'est pas homogène. Nous insérons des couronnes de mylar à l'extérieur des vis de serrage, entre la plaque *i* et la couronne servant à fixer l'épaisseur de la chambre afin d'annuler cet effet.

l'épaisseur de la chambre 1 mais nous savons qu'en tout point de la cellule le fil est confiné en deux dimensions. Il faudra cependant être prudents par la suite et garder à l'esprit que l'épaisseur est légèrement inhomogène ; il se pourrait que les variations d'épaisseur créent des points d'attraction du fil. Nous supposons pour la suite que cela ne se produit pas. Pour finir, nous ajoutons également une couronne de duralumin de  $5\text{ mm}$  d'épaisseur et de  $3\text{ cm}$  de largeur au-dessus du disque *iii* pour répartir les contraintes dues au serrage des vis et ainsi éviter de casser le disque de polycarbonate qui est assez souple pour se déformer à l'endroit où appuient les têtes de vis.

Le remplissage des deux chambres se fait indépendamment. Deux trous percés en biais

dans la plaque *i* permettent le remplissage de la chambre 1 et l'insertion du fil, deux trous percés dans la plaque *iii* le remplissage de la chambre 2. Ils sont bouchés par des vis enrubannées de téflon afin d'assurer l'étanchéité de la fermeture. Les vis sont biseautées ; lors du serrage, la vis s'installe dans un siège ce qui bouche correctement le trou.

L'étanchéité de la cellule étant assurée, il est nécessaire de faire sortir tout l'air de la cellule ce qui est d'une difficulté notoire. Les trous de remplissage des deux chambres ont été percés le plus haut possible dans la cellule afin que des bulles ne puissent pas être coincées au-dessus. A l'aide d'une seringue, nous aspirons les bulles restantes puis nous remplissons soigneusement le conduit de remplissage. Cependant, de minuscules bulles sont toujours présentes, contre les joints de caoutchouc, autour des impuretés de l'eau. Nous devons finalement nous accommoder de la présence de ces bulles en essayant d'en minimiser la taille au maximum. En rotation, les bulles coalescent en une seule, positionnée au centre de la cellule. La bulle est assez petite pour ne pas gêner le confinement du fil mais est gênante pour l'analyse d'images.

Le fond de la chambre 1, soit la face intérieure du disque *i*, est recouvert d'un film adhésif noir pour augmenter le contraste avec le fil, blanc. Le film adhésif doit être surveillé ; lors de la pose du film, il est impossible de ne pas coincer de l'air, même en prenant les plus grandes précautions (ponçage de la plaque *i* au papier de verre, lissage du film au cours de la pose). A force de faire tourner la cellule pendant nos expériences, l'air parvient à rejoindre le centre. Le film adhésif forme alors une bosse au centre et le fil ne peut plus y passer. La seule solution est d'ouvrir la cellule et de changer le film. Afin d'augmenter la durée de vie d'un film adhésif, nous avons retiré un disque d'adhésif de quelques millimètres de diamètre au centre ainsi l'air qui atteint le centre peut s'échapper.

### 3.1.3 La visualisation et le contrôle

La cellule est positionnée en position verticale. Un palier solidaire du disque permet de fixer le disque sur l'arbre du moteur, à l'horizontale. Afin de diminuer les vibrations transmises par le moteur à la cellule rotative, un double roulement à billes est placé entre le moteur et son arbre. Le moteur est fixé à une table métallique lestée au sol par 100 kg de plomb. Le moteur est isolé de la table par une plaque de caoutchouc. Les pieds de la table sont également isolés du sol avec du caoutchouc. Une chambre a été construite autour du dispositif afin de protéger les personnes en cas de rupture du disque. La lumière ne peut pas entrer dans la chambre, nous y plaçons la caméra. Le moteur est commandé par un variateur de fréquence, élément permettant de modifier la fréquence de rotation de l'arbre du moteur.

Afin d'obtenir des images nettes du fil confiné alors que la cellule est en rotation, nous devons utiliser un éclairage stroboscopique. En effet, les flashes lumineux de très courte durée se produisent à une fréquence choisie ; cela permet de fixer une image de la cellule « immobile » dans l'oeil. La cellule est donc éclairée par trois lampes stroboscopiques (Movistrob 420), deux sont placées à gauche et à droite de la cellule, la troisième éclaire par en-bas (Fig. 3.4). Afin d'augmenter l'homogénéité de l'éclairage, des écrans de papier calque sont placés devant les lampes et la cellule. La caméra CCD (AVT Pike) est placée en

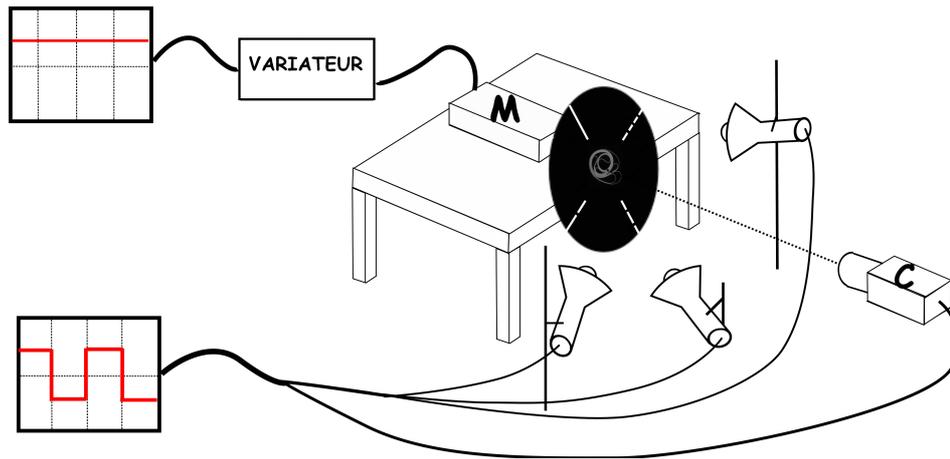


FIG. 3.4 – Schéma de l'installation. Le disque rotatif est placé en position verticale, fixé à l'arbre du moteur (M). Trois lampes stroboscopiques éclairent le disque. La caméra (C) est positionnée face au disque. Le moteur est contrôlé par un variateur de fréquence auquel est envoyé un signal de tension continu dont l'amplitude règle la fréquence de rotation. Le stroboscope et la caméra sont contrôlés indépendamment du moteur ; ils sont déclenchés par un signal de tension crête.

face, le centre de l'image correspond au centre de la cellule rotative. Le temps d'ouverture du diaphragme n'a pas d'importance puisque l'éclairage est stroboscopique : en-dehors des flashes d'une durée de 2 à 7  $\mu s$ , la caméra ne détecte aucune lumière. Le variateur de fréquence, la caméra et les stroboscopes sont contrôlés par ordinateur via un boîtier National Instrument (NI USB-6259). La fréquence de rotation de la cellule est imposée au variateur par un signal de tension continue. Nous avons établi par un étalonnage manuel la relation entre la tension imposée en entrée et la fréquence de sortie. La caméra et les stroboscopes sont déclenchés indépendamment du variateur de fréquence, par un même signal crête de tension, d'amplitude 5 V. La fonction 'Trigger delay' doit être réglée de façon à ce que le diaphragme de la caméra soit ouvert au moment où les flashes du stroboscope se produisent.

Si la fréquence du signal déclenchant la caméra et les stroboscopes est la même que celle de rotation du disque, l'image sera prise toujours pour la même position de la cellule. Sinon pour chaque image la position sera différente. Afin de redresser les images prises dans le second cas, nous traçons à l'extérieur du disque *iii* quatre traits orientés le long de deux diamètres perpendiculaires du disque. Les traits sont découpés en segments, le nombre de segments allant de 1 à 4 afin d'identifier chaque trait. Par analyse d'image, nous pivotons chaque image afin que les traits soient toujours dans la même position.

### 3.1.4 La configuration initiale

Le fil est préparé dans la configuration initiale présentée sur Fig. 3.2a. Il est ouvert aux deux extrémités mais pour simplifier, nous le traitons comme un anneau fermé. Pour permettre au fil d'accéder à toutes les géométries possibles, il aurait fallu le préparer dans

une configuration circulaire (anneau). Cependant cela n'aurait permis d'injecter que  $1,5 m$  de fil. Nous choisissons comme configuration initiale du fil une forme du type du motif noté 7 dans Fig. 3.5, extraite de [Boue et al., 2006]. Dans leur expérience, le motif 7 est instable et évolue vers le 8. Dans notre système, les deux boucles qui se font face sont retournées (Fig. 3.2). En choisissant cette configuration, qui est une forme plus développée que le motif 7, nous interdisons vraisemblablement une évolution vers les configurations du type 8 et 9. En fait, le procédé de confinement est différent de celui utilisé dans [Boue et al., 2006] ou [Deboeuf et al., 2009]. Lorsque la cellule est mise en rotation, le fil se déstabilise sur toute sa longueur faisant apparaître des invaginations en plusieurs endroits. Nous observons qu'il est possible d'obtenir des motifs du type de 8 et 9 du diagramme même avec notre configuration initiale.

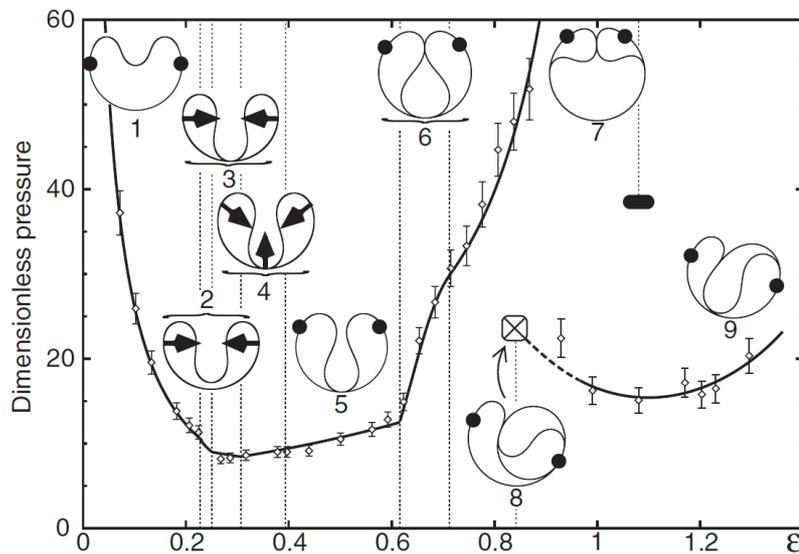


FIG. 3.5 – Figure extraite de [Boue et al., 2006]. Diagramme des configurations accessibles à un anneau confiné, en fonction du taux de compaction  $\epsilon$ . Nous choisissons comme configuration initiale une forme développée du motif 7 afin d'injecter la plus grande longueur de fil.

Nous pouvons modifier la forme du fil dans la cellule en utilisant le procédé suivant : huit billes magnétiques de  $1.6 mm$  de diamètre sont introduites dans la chambre 1. En déplaçant un aimant derrière la plaque  $i$ , à l'extérieur de la cellule, nous déplaçons les billes dans la cellule qui, ensemble, constituent un palet pouvant déplacer le fil. Lorsque la cellule est mise en rotation, les billes, plus denses que le liquide, sont centrifugées contre les parois de la cellule et ne gênent pas la compaction du fil. Ce procédé de déplacement du fil dans la cellule est délicat. La configuration initiale n'est donc pas parfaitement contrôlée. La forme globale est toujours la même (deux boucles retournées) mais la taille des boucles ainsi que leur position dans la cellule varient d'une expérience à l'autre.

### 3.1.5 Le protocole expérimental

Lors d'une expérience, la configuration initiale du fil ainsi que l'accélération de la cellule rotative permettent d'accéder à différentes configurations de confinement ; la fréquence finale de rotation, que nous désignons par fréquence cible, contrôle l'intensité du confinement. Nous avons réalisé deux types d'expériences :

- **Expérience directe** : la cellule est accélérée de  $0\text{ Hz}$  jusqu'à la fréquence cible en  $3\text{ s}$ , qui est le temps propre de la rampe d'accélération du moteur.
- **Expérience palier** : la fréquence cible est atteinte après plusieurs paliers de fréquence croissante. La durée d'un palier est de  $1800\text{ s}$  ; ce choix sera justifié par la suite.

### 3.1.6 Traitement d'image

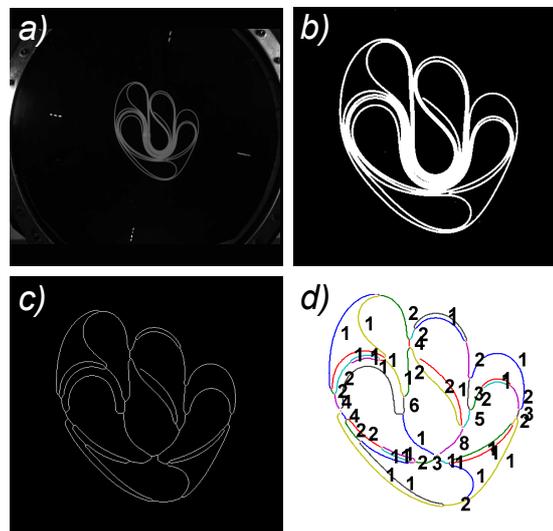


FIG. 3.6 – Le fil confiné est extrait de l'image brute (a) puis binarisée (b). Nous appliquons ensuite un processus de squelettisation (c). Le motif est finalement découpé en objets géométriques (d) : une *branche* est une portion de fil située entre deux *vertex*. Une branche contient plusieurs *couches*. Le nombre de couches par branche est déterminé à partir de l'image binaire (b).

Le traitement d'image est le même que pour l'expérience précédente (section 2.2). L'image brute (Fig. 3.6a) est binarisée (Fig. 3.6b) puis squelettisée (Fig. 3.6c). Nous définissons branches, couches et vertex comme précédemment (Fig. 3.6d). Une branche est une portion de fil comprise entre deux points de contact du fil avec lui-même ; elle peut contenir plusieurs couches. Nous désignons par vertex les points de contact du fil avec lui-même, donc les points d'embranchement de différentes branches. Le nombre de couches par branche est déterminé en mesurant l'épaisseur de la branche sur l'image binaire. Dans cette expérience, cette mesure est exacte puisque l'épaisseur du fil est contrôlée sur toute sa longueur. Nous considérons la branche comme le constituant élémentaire d'une configuration.

Une branche est définie par le système des coordonnées de tous les points la composant. A partir de ces coordonnées, nous mesurons sa longueur et sa courbure en faisant passer en chaque point un polynôme de degré 2 (en ayant pris soin de définir un repère local lié au point considéré). Connaissant les propriétés mécaniques du fil, nous avons accès à l'énergie de courbure.

Le nombre d'objets à traiter est beaucoup plus grand dans cette expérience que dans celle de l'anneau de gel en croissance (chap. 2) : le nombre de branches d'une configuration est de l'ordre de quelques dizaines et le nombre de couches de l'ordre de la centaine. La présence de branches très épaisses, contenant une dizaine de couches, crée des artefacts lors de l'analyse d'image :

- Des branches transitoires plus épaisses que longues sont détectées aux embranchements (Fig. 3.7). Nous faisons le choix de les supprimer d'autant que l'épaisseur est souvent mal mesurée. La longueur étant de quelques pixels, la direction perpendiculaire à cette ligne est mal déterminée et la mesure d'épaisseur se fait de biais.

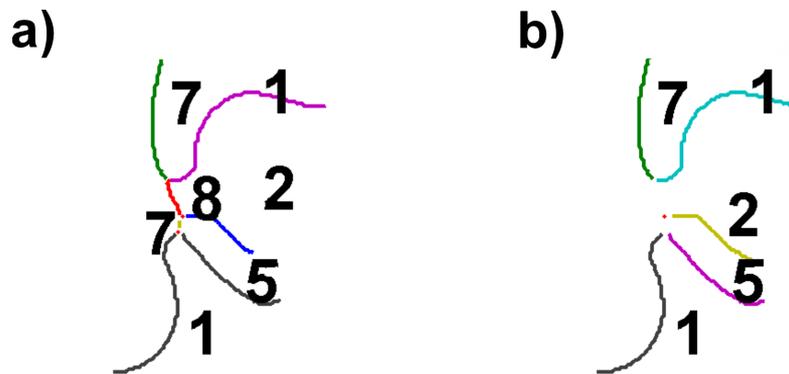


FIG. 3.7 – (a) Les branches transitoires plus épaisses que longues sont supprimées comme ici la branche rouge contenant 8 couches et la jaune contenant 7 couches d'après la mesure, 6 couches en réalité. (b) Les vertex situés aux deux extrémités de la branche sont alors fusionnés en un seul placé à mi-distance des deux initiaux.

- Le processus de squelettisation détecte la ligne médiane de chaque branche. Lorsqu'une branche peu épaisse rejoint une branche épaisse, la branche peu épaisse se termine par une partie virtuelle qui joint son extrémité réelle avec le centre de la branche épaisse comme c'est illustré sur Fig. 3.8 aux deux extrémités de la branche bleue. Avant de mesurer les longueurs, courbures, etc, toutes les branches sont coupées aux deux extrémités d'une longueur  $l = (Ep_{max} - Ep_{br})/2$  où  $Ep_{max}$  est l'épaisseur de la plus grosse branche arrivant au point d'intersection (vertex) et  $Ep_{br}$  est l'épaisseur de la branche à couper.

Le traitement d'image peut se faire quasi entièrement automatiquement ce qui permet de traiter un grand nombre de données. La seule intervention manuelle a lieu après l'étape de binarisation (Fig. 3.6b) si une bulle d'air recouvre une partie du fil. Dans ce cas nous effaçons la tache créée par la bulle sur l'image binaire. Dans la plupart des cas nous redessignons la portion de fil sous la tache (Fig. 3.9). Cela ne pose pas de problème si la portion

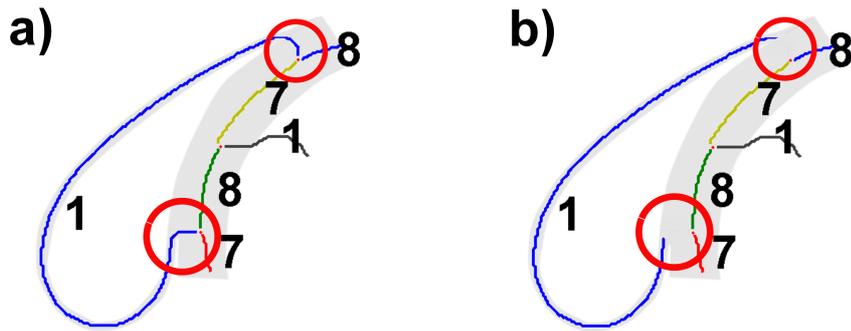


FIG. 3.8 – Le raccordement d'une branche fine à une branche épaisse induit dans la branche fine un segment virtuel reliant l'extrémité réelle de la branche au centre de la branche épaisse. Ces portions sont entourées en rouge sur l'image (a), l'épaisseur réelle des couches étant représentée par la partie grisée. De telles branches sont coupées à leurs extrémités (b).

est rectiligne ou peu affectée par la tache. Si ce n'est pas facile, c'est-à-dire si la bulle se situe à un embranchement ou si nous risquons d'introduire une mauvaise courbure de la branche, nous coupons la branche au niveau de la tache. Une configuration contient une cinquantaine de branches environ, compter deux branches au lieu d'une au centre est une erreur insignifiante.

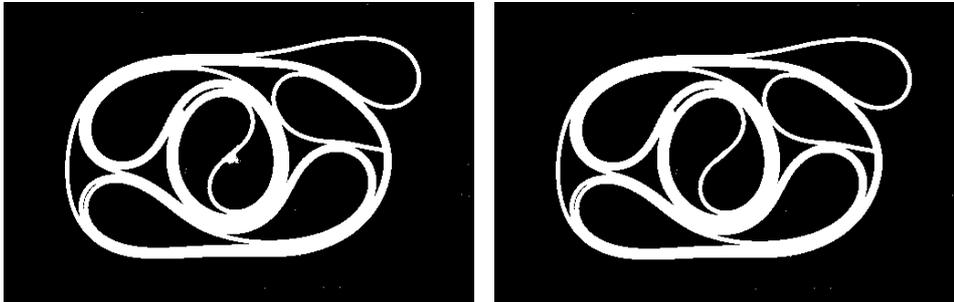


FIG. 3.9 – (a) Une bulle d'air est présente au centre du disque, créant une tache gênante pour l'analyse d'image. (b) Manuellement, nous effaçons la tache. Sur cet exemple, la portion de fil se trouvant sous la bulle a été reconstituée après correction.

Nous considérons maintenant les écoulements de liquide dans la cellule induits soit par la mise en rotation de la cellule, soit par le mouvement du fil à l'intérieur de la chambre 1.

### 3.1.7 Écoulements dans la cellule

#### Mise en rotation du liquide

Lorsque la cellule est mise en rotation, le liquide en contact avec les parois est entraîné puis, par diffusion de la quantité de mouvement, la vitesse dans le liquide s'égalise. À l'équilibre, il est en rotation solide c'est-à-dire que sa vitesse relative dans le référentiel tournant est nulle. Le temps d'équilibration de l'écoulement par le biais de la viscosité est

$\tau_D = h^2\nu$  où  $h$  est l'épaisseur de la cellule et  $\nu$  la viscosité du liquide. Dans la chambre 1 ( $h = 2.5 \text{ mm}$ ,  $\nu \sim 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$ ), il est de l'ordre de  $10 \text{ s}$ .

Lors de la mise en rotation d'un liquide, des écoulements secondaires se superposant à la rotation permettent d'augmenter les échanges de quantité de mouvement dans le liquide ; l'écoulement stationnaire est atteint plus rapidement que par simple diffusion. Ces écoulements sont responsables du rassemblement des feuilles de thé au fond d'une tasse lorsqu'on laisse le liquide se mouvoir après l'avoir mis en rotation dans la tasse. Lorsqu'un cylindre d'axe vertical est mis en rotation, le liquide au contact des parois horizontales est également mis en rotation. Un gradient de pression s'instaure dans ces couches, le liquide a alors une vitesse radiale, il s'éloigne de l'axe central. Ce mouvement implique un défaut de liquide près de l'axe. Le liquide se situant au centre du cylindre, loin des parois, est alors entraîné vers l'axe pour compenser. Finalement, un courant de convection s'installe, le liquide proche des parois s'éloigne de l'axe, le liquide au centre s'en approche. On peut montrer que le temps de mise en place de cet écoulement est :

$$\tau_r \sim \frac{1}{\Omega} \frac{h}{R} \sqrt{\frac{1}{Ek}} \quad (3.1)$$

avec  $Ek = \nu/\Omega L$  le nombre d'Ekman qui compare les effets de viscosité aux effets de la rotation. Pour notre système  $\tau_r \sim 10^{-1} \text{ s}$  soit un temps très court devant le temps d'équilibration par diffusion visqueuse  $\tau_D$ . Cet écoulement qui crée des courants de sens contraires dans le liquide est efficace pour atteindre rapidement l'état stationnaire. On pourra se référer à [Guyon et al., 2001] pour plus de précisions.

Expérimentalement, les écoulements transitoires prenant place dans la cellule lors de sa mise rotation ne sont pas connus. Cependant nous pouvons estimer que le fluide est en rotation solide après quelques secondes. Nous verrons par la suite que ce temps est très faible devant les temps d'équilibration du fil confiné. Les écoulements transitoires peuvent avoir un rôle dans la sélection de la configuration du fil en confinement dans les premiers instants mais ils ne peuvent pas avoir d'effet sur la dynamique du confinement. Nous les considérons comme faisant partie du bruit expérimental.

### Ejection du fluide lors de la compaction

Lorsque le fil se déplace dans la cellule, du liquide doit être éjecté afin de permettre le mouvement. Deux processus sont à prendre en compte. Le premier est l'écoulement de liquide autour du fil qui se produit donc entre le fil et les parois de la cellule (Fig. 3.10a). Le second processus est l'éjection du liquide lorsque deux parties du fil entrent en contact et s'alignent (Fig. 3.10b). Ici encore, on se référera à [Guyon et al., 2001]. Dans les deux cas, nous allons estimer le temps caractéristique de l'écoulement afin de juger de son effet sur la dynamique de repliement du fil.

Dans le premier processus, nous simplifions le problème en considérant que l'écoulement de fluide entre le fil et les parois du disque est un écoulement de Poiseuille c'est-à-dire un écoulement entre deux plaques fixes induit par un gradient de pression. Le profil de vitesse

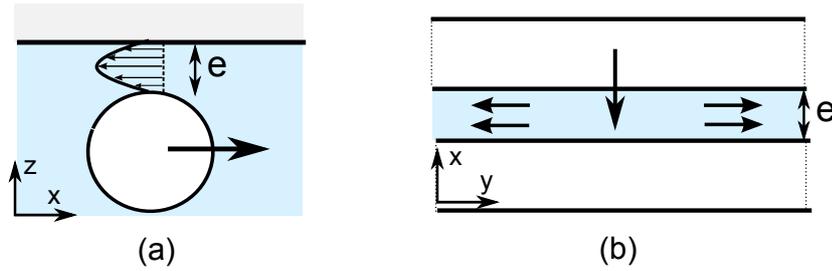


FIG. 3.10 – (a) Écoulement entre le fil et la paroi lorsque le liquide est chassé par le déplacement du fil. (b) Ejection du liquide lors de la superposition de deux couches de fil.

est établi en résolvant l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{f} + \Delta \mathbf{v} \quad (3.2)$$

Nous considérons un écoulement stationnaire, invariant selon  $x$ . Dans ce cas,  $\mathbf{v} = v_x(z) \mathbf{u}_x$  et Eq. 3.2 devient :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.3)$$

avec  $p(x) = p_0 + 1/2 \omega^2 x^2$ . En appliquant les conditions aux limites  $v_x(0) = v_x(e) = 0$ , nous obtenons :

$$v_x = \frac{\omega^2 x}{2\eta} z(z - e) \quad (3.4)$$

La vitesse maximale est atteinte en  $z = e/2$  et vaut  $V_{max} = \omega^2 e^2 x / \eta$ . Un temps caractéristique de l'écoulement serait le temps nécessaire pour passer d'un côté à l'autre du fil, soit parcourir la distance  $h$ , l'épaisseur du fil :

$$t_c = \frac{8\eta h}{\omega^2 a^2 x} \quad (3.5)$$

En choisissant  $e \sim h \sim 10^{-3} m$ ,  $\omega \sim 10^2 s^{-1}$ ,  $\eta \sim 10^{-3} USI$ ,  $x \sim 10^{-2} m$  (la taille typique des motifs observés), le temps caractéristique  $t_c$  est de l'ordre de  $10^{-1} s$ . Nous verrons que ce temps est très faible devant le temps de mise à l'équilibre du motif confiné.

Dans le second processus, l'éjection du liquide entre deux portions de fil en train de se superposer, le liquide en mouvement est un film de faible épaisseur ce qui nous permet de nous placer dans le cadre des hypothèses de lubrification. Sous ces hypothèses, la vitesse du liquide est donnée par :

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y(e(x) - y) - U \frac{e(x) - y}{e(x)} \quad (3.6)$$

La distance entre les deux fils  $e(t)$  est régie par la loi de Reynolds :

$$\frac{\partial e(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{12\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( e(x, t)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left( e(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial e(x, t)}{\partial x} \right) \quad (3.7)$$

Cette loi est établie à partir de la loi de Stokes, en écrivant la conservation du débit  $Q = \int_0^{e(x, t)} v dy$ . En considérant que  $e(x, t)$  ne dépend pas de  $x$  et que les deux fils s'alignent sur une distance  $L$ , on peut montrer que l'équation d'évolution de  $e(t)$  est :

$$e(t) = \left[ \frac{3\pi\eta L^4}{4|F_{ext}|} \right]^{1/2} \frac{1}{(t + t_0)^{1/2}} \quad (3.8)$$

$F_{ext}$  est la force centripète appliquée au fil qui permet de s'approcher de l'autre fil,  $F_{ext} = p(r) \pi h L = \pi h L (p_0 + 1/2 \rho \omega^2 r^2)$ ,  $h$  étant l'épaisseur du fil. Soit  $e_0$  la distance entre les deux fils au temps  $t = 0$ , un temps caractéristique  $t_0$  est défini :

$$t_0 = \frac{3\pi\eta L^4}{4|F_{ext}|e_0^2} \quad (3.9)$$

En utilisant des ordres de grandeur raisonnables pour les valeurs des paramètres telles que  $L \sim r \sim 10^{-2} m$ ,  $e_0 \sim h \sim 10^{-3} m$ ,  $\omega \sim 10^2 s^{-1}$ ,  $\eta \sim 10^{-3} USI$ , le temps caractéristique de l'éjection de fluide est de l'ordre de  $10^{-3} s$ . En utilisant des valeurs extrêmes des paramètres, telles que  $L \sim 5 \cdot 10^{-2} m$  et  $e_0 = 5 \cdot 10^{-4} m$ , nous obtenons un temps caractéristique de l'ordre de  $1 s$ . Ces temps sont courts devant le temps de mise en rotation de la cellule et, nous le verrons plus tard, devant les temps de mise à l'équilibre du système confiné. Même dans le cas le plus extrême, c'est-à-dire en considérant le rapprochement de deux branches longues et peu espacées, le temps reste de l'ordre de la seconde. Le processus d'éjection de fluide lors de l'empilement de deux portions de fil n'est donc pas un facteur limitant du dispositif expérimental, nous pouvons négliger son influence sur l'évolution du système confiné. De plus le processus d'éjection de fluide lors de l'empilement de deux brins de fil n'est sans doute pas si simple : du fluide peut être éjecté dans l'espace existant entre le fil et la paroi supérieure, c'est-à-dire le disque. Les temps d'éjection du fluide en seraient encore diminués.

Les écoulements dans la cellule ont des temps caractéristiques très petits devant le temps d'accélération de la cellule ( $3 s$ ) puisque même les temps largement surestimés le sont ( $1 s$ ). Ils ne sont donc pas des facteurs limitant le confinement ; leur action sur la dynamique du fil peut être négligée.

Avant de présenter notre étude expérimentale, nous définissons la configuration correspondant à l'état de plus basse énergie.

## 3.2 De la spirale

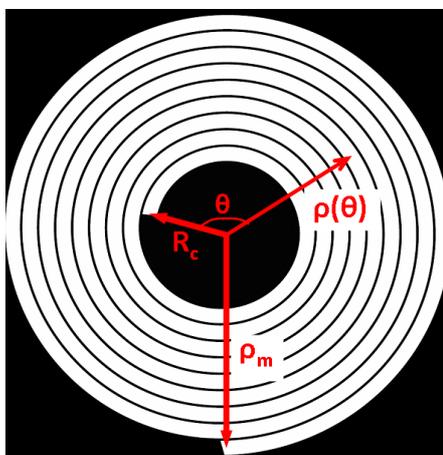


FIG. 3.11 – Schéma d'une spirale de rayon maximal  $\rho_m$  et de rayon intérieur  $R_c$ .

La spirale correspond à l'état cristallin d'un fil ouvert aux deux extrémités confiné en géométrie circulaire. En effet, la courbure est minimisée ainsi que le rayon puisque le volume exclu est minimisé par la superposition de toutes les branches. Donc l'énergie de courbure ainsi que l'énergie de confinement, fournie par rotation de la cellule, sont minimisées. On cherche à établir l'expression du rayon maximal  $\rho_m$  d'une spirale dont le confinement est induit par une rotation de pulsation  $\omega = 2\pi f$ . La longueur de fil  $L$  étant fixée, seule la surface vide au centre varie quand  $\omega$  varie. On note  $R_c$  le rayon du disque vide à l'intérieur de la spirale,  $h$  le diamètre du fil,  $B = \frac{Eh^4}{4(1-\nu^2)}$  le module de flexion,  $\Delta\mu$  la différence de masse volumique entre le liquide et le fil et  $s = \pi(h/2)^2$  la section du fil. Le rayon de la spirale paramétré par l'angle  $\theta$  est donné par :

$$\rho(\theta) = \frac{h}{2\pi}\theta + R_c \quad (3.10)$$

L'angle maximal, c'est-à-dire l'angle dont il faut tourner pour parcourir la totalité du fil, est fixé par la longueur totale de fil :

$$L = \int_0^{\theta_{max}} \rho d\theta \quad (3.11)$$

L'énergie de confinement, introduite au travers de la force centripète, et l'énergie élastique stockée par la spirale sont en compétition. Ces deux énergies s'écrivent :

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \Delta\mu s \int_0^{\theta_{max}} \rho^3 d\theta \quad (3.12)$$

$$E_{el} = \frac{1}{2}B \int_0^{\theta_{max}} \frac{1}{\rho^2} \rho d\theta = \frac{1}{2}B \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\rho} \quad (3.13)$$

Pour résoudre ces quatre équations, nous commençons par établir l'expression de l'angle maximal  $\theta_m$  ce qui nous permet d'obtenir une expression du rayon maximal  $\rho_m$ . Par 3.10 et 3.11, on obtient  $\theta_m$  :

$$\theta_m = \frac{2\pi R_c}{h}(-1 + \delta) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{1 + \frac{hL}{\pi R_c^2}} \quad (3.14)$$

Le rayon maximal est alors :

$$\rho_m = R_c \delta \quad (3.15)$$

On résout 3.12 et 3.13 :

$$E_{rot} = -\omega^2 \Delta\mu s \frac{\pi}{4h} R_c^4 (\delta^4 - 1) \quad (3.16)$$

$$E_{el} = \frac{B\pi}{h} \ln(\delta) \quad (3.17)$$

Le rayon  $R_c$  est ajusté pour minimiser l'énergie :

$$\frac{d(E_{rot} + E_{el})}{dR_c} = 0 \quad (3.18)$$

On dérive  $E_{el}$  et  $E_{rot}$  par rapport à  $R_c$ .

$$\frac{dE_{rot}}{dR_c} = \omega^2 \Delta\mu s \frac{\pi}{h} R_c^3 (\delta^4 - 1 - \frac{hL\delta^2}{\pi R_c^2}) \quad (3.19)$$

$$\frac{dE_{el}}{dR_c} = -\frac{B L}{\delta^2 R_c^3} \quad (3.20)$$

En minimisant l'énergie totale, on obtient :

$$R_c^4 + \frac{hL}{\pi} R_c^2 - \frac{B}{\omega^2 \Delta\mu s} = 0 \quad (3.21)$$

On ne garde que la solution positive :

$$R_c^2 = -\frac{hL}{2\pi} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{hL}{\pi}\right)^2 + \frac{4B}{\omega^2 \Delta\mu s}} \quad (3.22)$$

A partir de cette expression, nous traçons le rayon de la zone centrale  $R_c$  et le rayon maximal de la spirale  $\rho_m$  en fonction de la fréquence de rotation  $f$  (Fig. 3.12). Pour cela, nous utilisons les paramètres suivants, correspondant aux valeurs expérimentales,  $h = 2 \text{ mm}$ ,  $L = 3 \text{ m}$ ,  $B = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ USI}$  et  $\Delta\mu = 160 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le rayon maximal  $\rho_m$  ne peut évidemment pas excéder le rayon de la cellule qui est de  $250 \text{ mm}$ . Le rayon de giration,

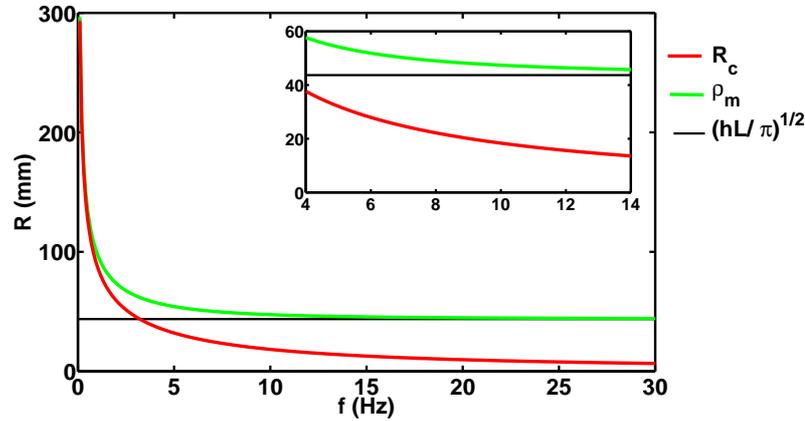


FIG. 3.12 – Graphe du rayon intérieur  $R_c$  et du rayon maximal  $\rho_m$  en fonction de la fréquence de rotation. En inset, zoom sur la gamme des fréquences accessibles expérimentalement.

$R_g^2 = 1/L \int_0^L \rho^2(s) ds$ , de la spirale s'exprime comme :

$$R_g = \frac{R_c^2}{\sqrt{hL/\pi}} \sqrt{1 - \delta^4} \quad (3.23)$$

Par la suite, nous utiliserons le nombre de couches contenu dans l'unique branche de la spirale :

$$N_{b/c,spirale} = \frac{\rho_m - R_c}{h} = \frac{R_c}{h} (\delta - 1) \quad (3.24)$$

Sa dépendance en fréquence est tracée en Fig. 3.13.

### 3.3 Observation

Nous avons réalisé quatre-vingts expériences différentes, directes ou par paliers, pour différentes fréquences cibles (4, 6, 8, 10, 12 et 14 Hz) et jamais nous n'avons obtenu la même

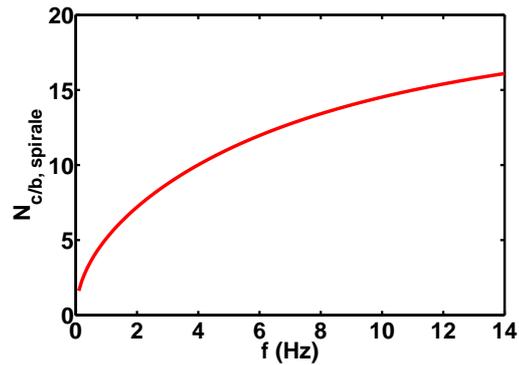


FIG. 3.13 – Graphe du nombre de couches par branche de la spirale en fonction de la fréquence de rotation, la longueur totale de fil étant fixée.

configuration finale, bien que la configuration initiale soit contrôlée. La probabilité pour que la même configuration soit réalisée deux fois semble donc être faible. Le système est non-déterministe ; ce sont les fluctuations de la configuration initiale ainsi que les bruits divers ressentis au cours des premiers instants (vibrations, fluctuations d'épaisseur de la cellule, écoulements) qui sélectionnent la configuration. Dans les mêmes conditions expérimentales, les configurations obtenues sont, à l'oeil, très différentes les unes des autres. Fig. 3.14, nous présentons six réalisations de la même expérience directe avec  $12\text{ Hz}$  comme fréquence cible. Certaines configurations présentent des motifs géométriques simples, proche de la géométrie spirale, d'autres sont plus désordonnées, elles ont un grand nombre de boucles, de ramifications.

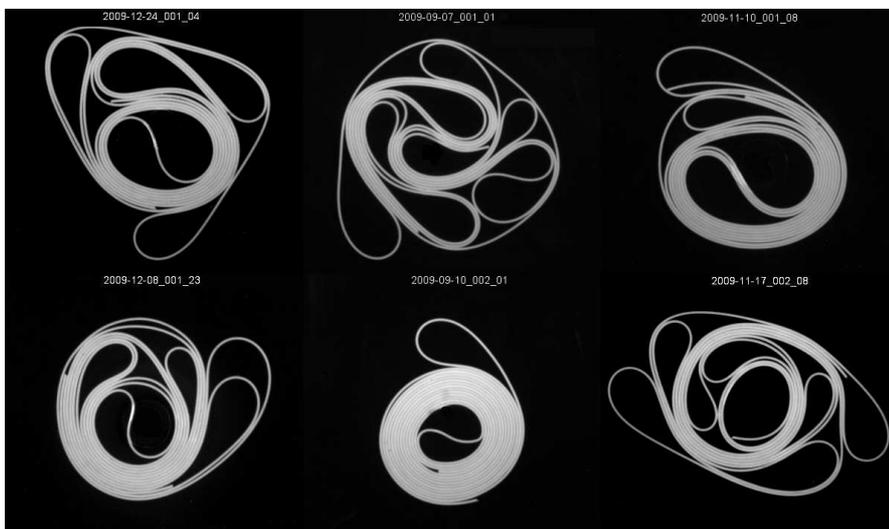


FIG. 3.14 – Six réalisations d'une expérience directe pour une fréquence de rotation de  $12\text{ Hz}$ . L'échelle est identique pour toutes les images.

Dans la suite, nous nous attachons à deux problèmes principaux. Même s'il y a une grande diversité de configurations possibles, les lois physiques qui régissent la formation des objets confinés restent les mêmes. L'unité de la physique sous-jacente doit être lisible

au travers de certaines grandeurs. Dans une première partie de cette étude, nous nous efforçons de mettre en évidence ces quantités qui lient entre elles les géométries obtenues. Notre seconde problématique est de caractériser la large diversité des géométries. Pour cela, nous nous focalisons sur la mesure du désordre pour chaque géométrie. Il devient alors possible de les classer les unes par rapport aux autres.

Nous commençons par présenter un outil de mesure essentiel, le rayon de giration. Nous essaierons ensuite d'apporter des réponses à la première question posée : quelles grandeurs traduisent la physique sous-jacente au confinement d'un objet élastique ? Pour cela nous présenterons des résultats expérimentaux que nous comparerons à ceux obtenus lors de deux études précédentes, rapidement décrites. Puis nous discuterons nos résultats et apporterons quelques réponses. Nous nous attaquerons alors à la deuxième question : comment caractériser la diversité des géométries accessibles et comment quantifier le désordre ? Nous présentons deux types de mesure : la première consiste à mesurer l'anisotropie d'une géométrie puis nous finirons en proposant une méthode de mesure du désordre de la géométrie d'un objet confiné.

## 3.4 Mesure de la distribution de masse

### 3.4.1 Distribution moyenne

Pour une configuration donnée, la distribution de masse moyenne est définie par le rayon de giration :

$$R_g^2 = \frac{1}{L} \int_0^L r^2(s) ds \quad (3.25)$$

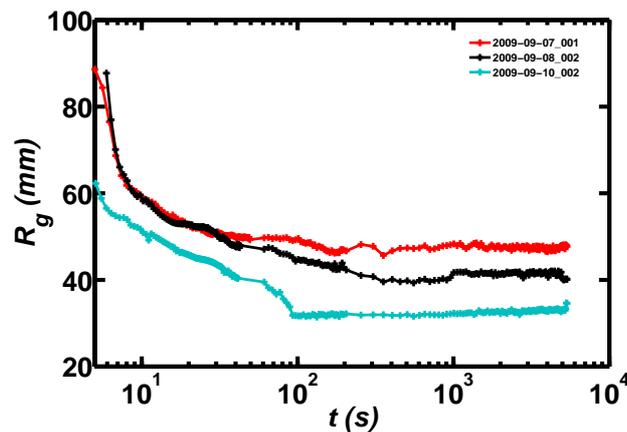


FIG. 3.15 – Evolution du rayon de giration au cours du temps pour trois réalisations d'une expérience directe à une fréquence de rotation  $14 \text{ Hz}$ . Le rayon décroît pour atteindre une valeur d'équilibre. Le temps caractéristique de mise à l'équilibre est de l'ordre de  $10^3 \text{ s}$ . Pour une même intensité de confinement, la valeur du rayon à l'équilibre n'est pas unique.

Considérons une expérience directe dans laquelle la fréquence de rotation augmente en  $3 \text{ s}$  de 0 jusqu'à la fréquence cible  $14 \text{ Hz}$ . Nous traçons l'évolution temporelle du rayon de giration (Fig. 3.15). Le rayon décroît depuis la valeur initiale correspondant au rayon de la

configuration initiale pour atteindre une valeur d'équilibre. Le temps d'équilibration est de l'ordre de  $10^3$  s, infiniment plus grand que le temps nécessaire pour atteindre la fréquence cible. Dans a section ??, nous avons jugé que les mouvements de fluide dans la cellule ont des temps caractéristiques très courts devant ce temps d'équilibration. Nous pensons que le facteur limitant la vitesse du confinement est le frottement du fil contre les parois des disques ainsi que les frottements entre les différentes couches de fil. Malheureusement, cet effet est difficilement quantifiable expérimentalement.

Nous évoquions précédemment la sélection d'une configuration par le bruit expérimental. En effet, le rayon initial d'une configuration est d'environ  $200$  mm. Nous voyons sur Fig. 3.15 qu'après  $5$  s qui est le temps à l'origine des abscisses, le rayon est de l'ordre de  $80$  mm ; après  $10$  s, le rayon est d'environ  $60$  mm soit  $10\%$  plus grand que le rayon final. En d'autres termes, la sélection de la configuration finale se fait en un temps très court comparé au temps d'équilibration ; nous pouvons alors considérer que cette sélection est instantanée.

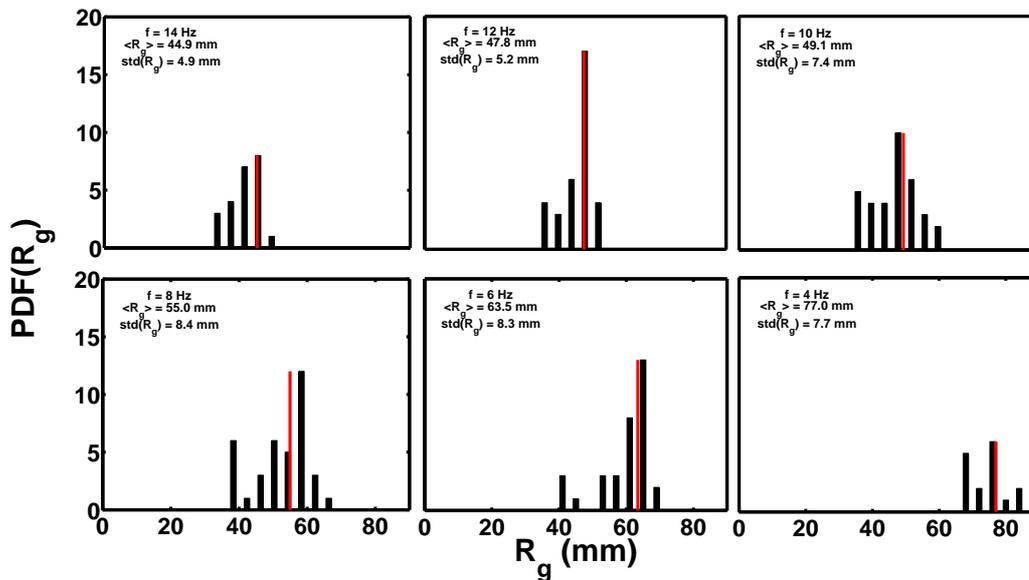


FIG. 3.16 – Distributions des rayons de giration de configurations obtenues lors d'expériences directes. Chaque graphe regroupe les configurations obtenues pour une même intensité de confinement c'est-à-dire pour une même fréquence.

Pour une fréquence donnée, le rayon de giration à l'équilibre n'est pas unique. La largeur de la distribution des rayons reflète la diversité des géométries obtenues dans les mêmes conditions expérimentales (Fig. 3.14). La distribution des rayons de giration pour une fréquence donnée est approximativement gaussienne (Fig. 3.16), centrée autour d'une valeur moyenne qui décroît lorsque la fréquence augmente (Fig. 3.17). Nous devons ici adopter une approche statistique pour décrire un système non-déterministe. Dans la suite, toutes les mesures seront effectuées une fois le régime stationnaire atteint.

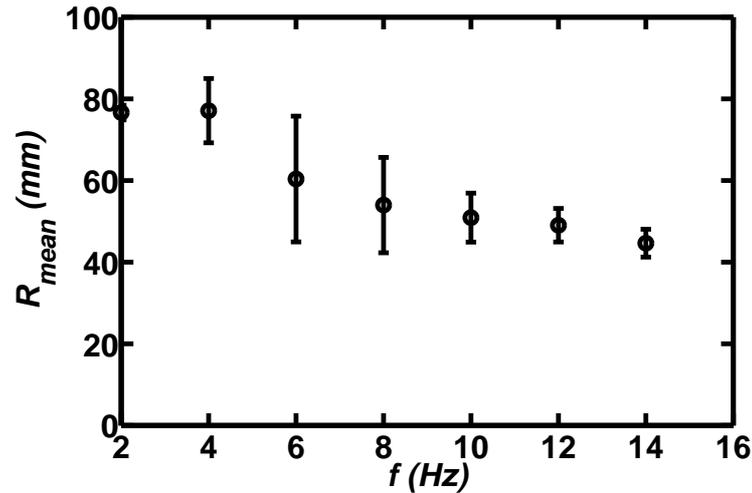


FIG. 3.17 – Graphe du rayon de giration moyen en fonction de l'intensité du confinement (fréquence de rotation). Les barres verticales représentent la largeur des distributions présentées dans Fig. 3.16

### 3.4.2 Distribution radiale

Nous mesurons la distribution radiale de densité surfacique occupée par le fil ; sur une image binarisée, nous mesurons  $\rho(r)$ , le rapport de la surface de fil et de la surface de la couronne de rayon  $r$  et de largeur  $4\text{ mm}$ . Sur Fig. 3.18, la courbe noire correspond à la distribution moyenne de toutes les configurations ayant un rayon de giration compris entre  $53$  et  $63\text{ mm}$ . Les limites de la région grisée sont l'enveloppe de la superposition de toutes les courbes moyennées dans la courbe noire. Pour les tracer, nous avons considéré pour chaque valeur de  $r$  les valeurs maximale et minimale de toutes les distributions confondues. Les valeurs des rayons de giration considérés sont représentées par le rectangle rouge.

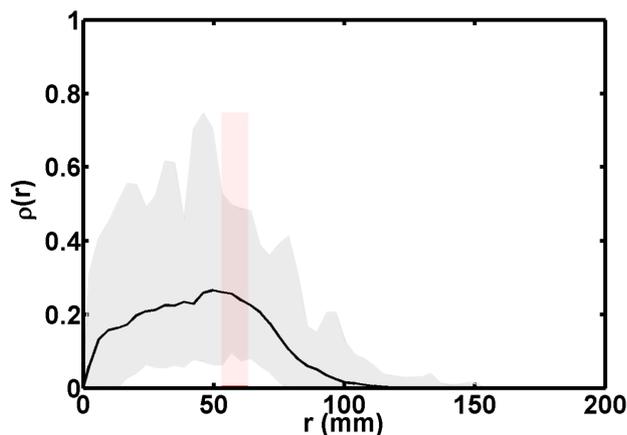


FIG. 3.18 – Graphe de la densité de surface occupée par le fil  $\rho(r)$  en fonction du rayon  $r$ . La courbe noire est la moyenne des densités de toutes les configurations ayant un rayon de giration compris entre  $53\text{ mm}$  et  $63\text{ mm}$ . Les limites de la région grisée sont les valeurs maximales et minimales mesurées pour chaque  $r$ .

La distribution atteint un maximum en  $r = 53 \text{ mm}$ . A partir de ce rayon, la densité décroît pour s'annuler autour de  $r = 110 \text{ mm}$  soit deux fois le rayon de giration. La plus grande partie de la masse se situe vers le centre, à l'intérieur du motif. La largeur de l'enveloppe grisée montre que pour un rayon donné, la distribution de masse varie fortement d'une configuration à l'autre.

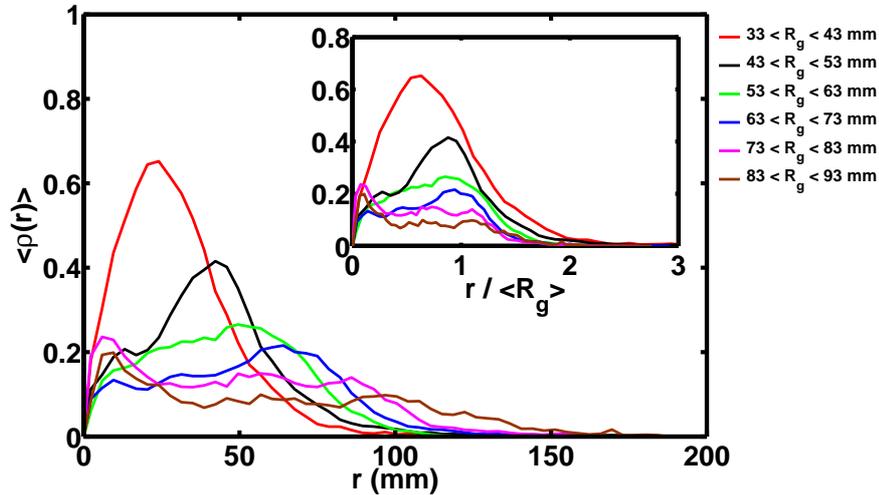


FIG. 3.19 – Graphe des distributions moyennes de densités surfaciques pour toutes les configurations obtenues, rassemblées par rayon de giration. En inset, la même courbe est représentée en fonction du rayon normalisé par le rayon de giration moyen correspondant à chaque courbe.

Nous traçons les distributions moyennes de densités pour six gammes de rayons de giration (Fig. 3.19). La largeur de la distribution diminue lorsque la taille du système diminue. L'inset montre les mêmes distributions en fonction du rayon normalisé par le rayon de giration moyen correspondant à chaque courbe. Dans cette représentation, la largeur des distributions est la même quelque soit le confinement. La distribution est piquée autour d'une valeur proche de 1. Nous généralisons la remarque précédente : quelle que soit la taille du système, la majeure partie de la masse se situe au centre du motif, autour d'un rayon  $r = R_g$ . Le rayon de giration est donc une mesure appropriée de la distribution de densité.

Nous comparons nos résultats à ceux obtenus par Cambou et Menon dans l'expérience suivante [Cambou and Menon, 2009]. Une boulette d'aluminium froissé est créée à la main avec un rayon final contrôlé. En utilisant une technique de tomographie par rayons X, la géométrie tridimensionnelle de la boulette est connue. La distribution radiale de la fraction volumique est mesurée (Fig. 3.20). La distribution de masse, moyennée sur un grand nombre de boulettes, est une fonction croissante du rayon. Cela signifie que le maximum de densité se situe à la périphérie de la boulette : elle est constituée d'une coquille sphérique rigide. Lorsque ce résultat est apparu, une question était de savoir si la présence d'un amas de matière en périphérie avait une origine physique ou si cela résultait du processus de fabrication de la boulette qui consiste à apporter la matière depuis l'extérieur. Par nos

résultats, différents de ceux de la boulette, nous montrons que cela est dû au mode de confinement. Dans l'expérience de centripétation, la masse est présente dans le volume tandis qu'elle est en périphérie dans l'expérience de la boulette, formant une coquille rigide. Les modes de confinement sont différents. Le fil soumis à une force centripète est confiné depuis l'intérieur, il est attiré en tout point vers le centre donc toutes les parties du fil sont confinées en même temps. La boulette est confinée depuis l'extérieur, le matériel qui n'est pas en contact avec le récipient (les mains) est poussé par du matériel venant de l'extérieur. Nous en concluons que la façon de confiner le matériau influence la distribution de masse finale.

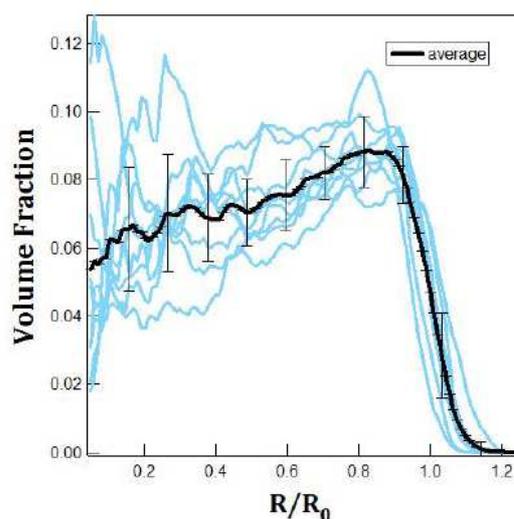


FIG. 3.20 – Expérience de Cambou et Menon : graphe de la fraction volumique en fonction du rayon. La courbe noire est la moyenne des neuf courbes bleues correspondant chacune à une réalisation. Données non publiées. Le maximum de densité se situe à l'extérieur de la boulette ce qui signifie que la boulette est entourée d'une coquille rigide.

Dans notre expérience, la distribution de masse radiale est centrée autour de la valeur moyenne définie comme le rayon de giration. Mais pour une intensité de confinement donnée, la distribution des rayons de giration est large. Cette mesure n'est donc pas satisfaisante pour caractériser la diversité des configurations accessibles. Une étude statistique des grandeurs géométriques est nécessaire.

## 3.5 Etude statistique des géométries

### 3.5.1 D'autres systèmes confinés

Dans cette section, nous présentons deux études qui ont précédé l'expérience de centripétation, menées au laboratoire. Une expérience de compaction conique, réalisée par S.Deboeuf est décrite dans [Deboeuf et al., 2009] ; une numérique de compaction d'une tige dans un plan a été réalisée par L.Boué lors de sa thèse [Boue, 2008].

Le taux de compaction peut être défini de plusieurs manières. Pour pouvoir comparer expériences et simulations numériques, nous choisissons une définition indépendante de

l'épaisseur de l'objet telle que  $p = \frac{L/2\pi - R_g}{R_g}$ . Dans notre expérience, le taux de compaction a des valeurs comprises entre 4 et 7.

### Compaction conique

Une feuille circulaire est tirée en son centre à travers un anneau rigide, rappelant le geste que l'on faisait - à l'époque où les ronds de serviette étaient encore d'usage - pour ranger sa serviette en tissu dans un rond de serviette (Fig. 3.21a). Dans le plan de l'anneau, une tige de longueur  $2\pi Z$  est confinée, où  $Z$  est la longueur verticale de tirage. Pour être digitalisée, la feuille doit être coupée au fil chaud dans le plan de l'anneau. Les feuilles utilisées étant en Mylar, les couches superposées de film sont collées les unes aux autres lors du passage du fil chaud, permettant ainsi d'obtenir un objet mobile mais qui conserve la configuration confinée. Cet objet est scanné, les motifs obtenus sont du type de celui présenté Figure 3.21b.

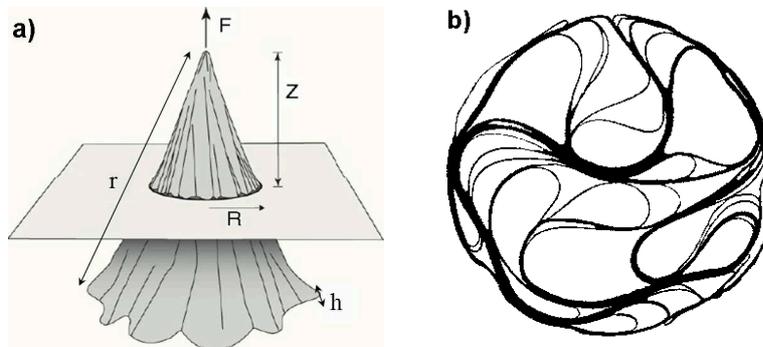


FIG. 3.21 – Schéma de l'expérience décrite dans [Deboeuf et al., 2009]. Un disque de mylar est tiré en son centre à travers un trou (a). Dans le plan du trou, des motifs de confinement d'une tige dans un plan sont observés (b).

Listons les points qui sont modifiés ou améliorés dans notre expérience. Dans l'expérience de compaction conique :

- le potentiel de confinement est un puits à bords infinis. Dans notre système, le potentiel est radial et donc à bords plus doux.
- le processus de confinement est irréversible pour deux raisons. Le film est coupé afin d'analyser les géométries ce qui empêche d'explorer différents taux de compaction pour une même configuration. De plus, des points déformés plastiquement apparaissent dans la feuille lors de la compaction ce qui rend impossible un retour en arrière. Dans notre expérience, la plasticité n'intervient pas et l'intensité de confinement peut être indifféremment augmentée ou diminuée en faisant varier la fréquence de rotation du disque.
- une hypothèse sur la forme tridimensionnelle doit être faite pour connaître l'énergie totale injectée dans le système, à l'énergie de frottement près qui demeure inconnue. Il est supposé que toute déformation apparaît au sommet du cône et qu'elle est présente sur toute sa longueur. Expérimentalement, on observe que ce n'est pas le

cas; entre autres les points de plasticité engendrent localement des déformations élastiques [Mellado et al., 2009]. Dans notre système, les forces de frottement ne sont pas connues mais dans le régime stationnaire, nous avons accès aux coordonnées spatiales du fil et à sa courbure donc à l'énergie totale du système.

- les taux de compaction atteints sont plus élevés que dans notre expérience ( $6 < p < 17$ ).

L'analyse d'images est la même que dans les deux expériences précédentes (sections 2.2 et 3.1.6) bien qu'elle soit plus difficile dans cette expérience de compaction conique. La détermination du nombre de couche est moins précise car l'épaisseur d'une branche dépend de la façon dont le fil chaud l'a coupée. Un étalonnage manuel est nécessaire pour rendre le comptage de couches exact.

Dans cette étude, les auteurs ont mesuré les distributions statistiques de grandeurs géométriques telles que les longueurs de branches, les courbures, les surfaces de vides et de grandeurs mécaniques telles que l'énergie de courbure. Il a été montré que les branches de la tige confinée présentent deux types de comportement, selon qu'elles sont en contact avec l'anneau rigide ou non. Les branches en contact avec l'anneau sont les branches de la *périphérie*, les autres sont les branches du *volume*. Les résultats de cette expérience sont présentés section 3.5.2.

### Simulation numérique

Dans l'optique de reproduire les résultats de l'expérience précédente, des simulations numériques ont été réalisées. Un fil élastique est confiné à deux dimensions dans un potentiel radial. La configuration initiale est choisie aléatoirement (Fig. 3.22a). A un instant  $t = 0$ , le potentiel est imposé. La configuration d'équilibre de la tige est établie par minimisation de l'énergie qui est la somme de l'énergie de confinement proportionnel à  $r^2(s)$  et de l'énergie de courbure qui s'oppose au confinement. L'auto-évitement du fil est modélisé par un terme d'interaction coeur dur : l'énergie totale diverge lorsqu'il y a un croisement de la tige avec elle-même.

Les conditions de cette simulation numérique sont les mêmes que celle de notre expérience de centripétation : potentiel radial, pas de conditions aux limites, confinement d'un objet unidimensionnel dans un plan. Cependant les configurations obtenues sont très différentes (Fig. 3.22b). Contrairement aux configurations expérimentales, il n'y a pas de symétrie circulaire apparente. Une première raison est que les taux de compaction atteints par la simulation numérique sont de l'ordre de 1.7 donc nettement inférieurs à ceux atteints expérimentalement. Une deuxième raison est que dans la simulation numérique, un point de contact entre deux portions de fil a une rigidité infinie donc il peut exister des boucles dont l'axe est radial; nous définissons l'axe d'une boucle comme la droite reliant les deux extrémités de la boucle, le point où les deux brins de fil entrent en contact et le point de plus forte courbure. Expérimentalement, une telle configuration est instable et la boucle se plie au niveau du point de contact pour s'écraser sur les branches inférieures. Les résultats de cette simulation numérique sont présentés section 3.5.2.

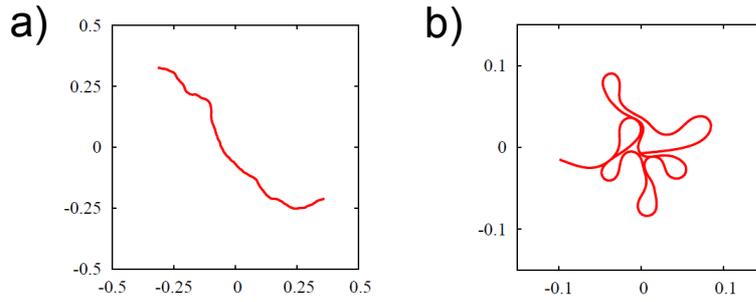


FIG. 3.22 – Expérience numérique décrite dans [Boue, 2008]. Une tige de configuration initiale aléatoire (a) est confinée en deux dimensions dans un potentiel radial (b).

### 3.5.2 Distributions

Dans cette section, nous nous intéressons aux densités de probabilités de grandeurs géométriques (courbure et longueur des branches) et de grandeurs énergétiques. La distribution de probabilité normalisée  $\rho(x)$  d'une grandeur  $X$  est définie comme :

$$\rho(x) = \frac{n(x)}{N dx} \quad (3.26)$$

où  $n(x)$  est le nombre de valeurs de  $X$  telles que  $x - \frac{dx}{2} \leq X \leq x + \frac{dx}{2}$  et où  $N = \sum_x n(x)$  est le nombre total de valeurs de  $X$ . La largeur  $dx$  des boîtes de mesure croît logarithmiquement ; pour chaque point,  $dx$  est représenté par un segment horizontal. Nous traçons une barre d'erreur en ordonnée qui indique la confiance que l'on peut accorder à un point ; sa largeur est définie par  $dy = y/\sqrt{n(y)}$ .

Rappelons que pour une fréquence de rotation donnée, la distribution des rayons de giration des différentes configurations obtenues est très approximativement une gaussienne (Fig. 3.16). Nous estimons qu'il est équivalent de considérer la fréquence imposée ou le rayon de giration moyen d'une configuration à cette fréquence. Nous utilisons deux méthodes pour représenter les densités de probabilité. La première consiste à considérer ensemble toutes les configurations obtenues à une même fréquence. La deuxième méthode consiste à considérer celles ayant des rayons de giration proches : on crée des boîtes incluant tous les rayons sur une plage de 10 mm. On vérifie que chaque boîte contient un nombre suffisant de configurations pour qu'elle soit statistiquement représentative. La description en regroupant les configurations par fréquence nous semble adaptée pour les grandeurs énergétiques puisque la fréquence indique la quantité d'énergie introduite dans le système. En revanche, le regroupement par rayon est adapté aux grandeurs géométriques.

Cette section est organisée sous la forme d'un catalogue de mesures. Lorsque les mêmes mesures ont aussi été réalisées pour les deux autres systèmes (compaction conique et simulation numérique), nous comparons les résultats. Un certain nombre de graphes sont redondants mais nous avons souhaité représenter nos données sous différentes formes afin d'alimenter la discussion.

## Courbures

Nous traçons la densité de probabilité de la courbure moyenne d'une branche. Nous définissons la courbure moyenne d'une branche comme la moyenne de la valeur absolue des courbures de chaque point de la branche. Les densités de probabilité sont représentées

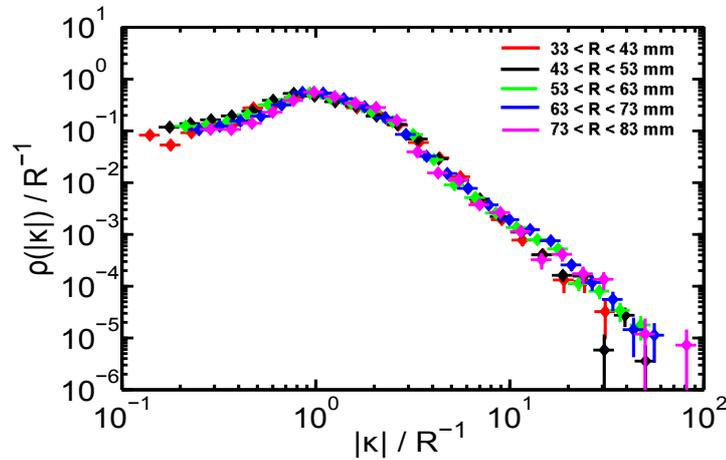


FIG. 3.23 – Densité de probabilité de la courbure moyenne des branches des configurations regroupées par rayon de giration. La courbure est normalisée par la courbure d'un anneau de rayon  $R$  le rayon de giration moyen des configurations considérées.

Fig. 3.23, en regroupement par rayon. La courbure est normalisée par la courbure correspondant au rayon de giration moyen de la boîte de mesure, différent pour chaque courbe. Quelle que soit l'intensité de confinement et donc la taille de l'objet confiné, la distribution de courbure des branches a la même forme. Elle est piquée autour de 1 donc la courbure la plus probable est la courbure  $1/R_g$  où  $R_g$  est le rayon de giration moyen des configurations et présente une queue exponentielle.

Nous comparons cette distribution à celles de l'expérience de compaction conique et des simulations numériques, présentées sur Fig. 3.24. Pour l'expérience, les distributions de courbure des branches du sous-système *volume* (graphe principal) et du sous-système *périphérie* (inset) sont tracées indépendamment. La distribution de courbure des branches de périphérie est piquée autour de la courbure de l'anneau confinant, ce qui n'est pas le cas pour les branches du volume. La distribution obtenue dans notre expérience est semblable à celle des branches en contact avec l'anneau confinant puisqu'elle est également piquée autour d'une courbure caractéristique. Les résultats de la simulation numérique sont assez semblables aux nôtres. Sans être vraiment piquée, la distribution atteint un maximum. La distribution du numérique est bien décrite par une loi Gamma sans paramètre ajustable. La loi Gamma correspondant aux moyenne et écart-type de notre distribution n'est pas une description adaptée à nos données; nous n'avons pas jugé utile de la tracer sur le graphe. Aussi bien dans notre expérience que dans la simulation numérique, les densités de probabilité des grandes valeurs de courbure sont décrites par une loi exponentielle décroissante. Notons que la gamme de courbures atteintes par la simulation numérique est restreinte, seulement une décade, tandis que nous en explorons trois. La comparaison n'est

donc pas nécessairement judicieuse.

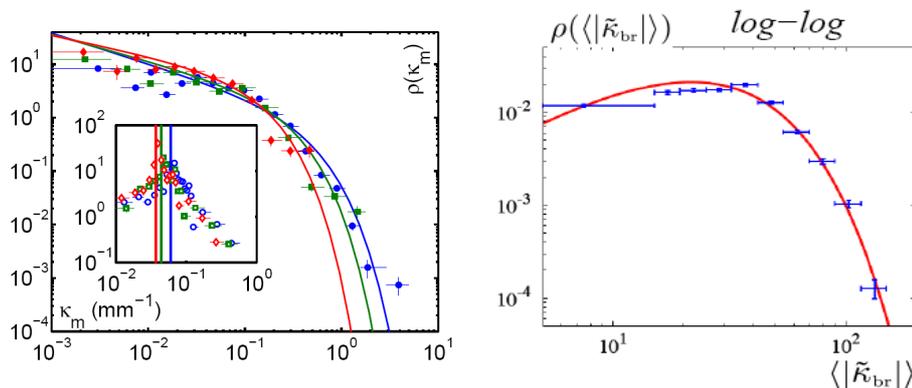


FIG. 3.24 – (a) Compaction conique : densité de probabilité de courbure des branches du volume qui ne sont pas en contact avec les parois du trou (graphe principal) et de la périphérie, en contact avec les parois (inset). (b) Expérience numérique : Densité de probabilité de courbure des branches.

### Longueurs des branches

Nous traçons la densité de probabilité de longueur d'une branche en les regroupant par rayon (Fig. 3.25). Les longueurs sont normalisées par la moyenne des longueurs de toutes les branches considérées. Les distributions sont bien décrites par une loi Gamma définie comme :

$$f_{\Gamma}^{\alpha, x}(x) = \frac{(x/\chi)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha) x} \exp(-x/\chi) \quad (3.27)$$

avec :

$$\alpha = \frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad \text{et} \quad \chi = \frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{\langle x \rangle} \quad (3.28)$$

pour une distribution normalisée, c'est-à-dire  $\langle x \rangle = 1$ ,  $\chi = 1/\alpha$ . Cette fonction est constituée d'une loi de puissance pour les petites valeurs de  $x$  et d'une loi exponentielle décroissante pour les grandes valeurs. Les lois Gammas correspondant aux distributions sont tracées en trait plein, sans paramètre ajustable ; le paramètre  $\alpha$  est fixé par la variance de la distribution. Les distributions atteignent un maximum pour une longueur que nous appelons la longueur la plus probable,  $l_{pp}$ . Notez que le dernier point de la distribution tient compte de toutes les couches ayant une longueur supérieure à la longueur de l'avant-dernier point c'est pourquoi il a une valeur plus grande que celle prévue par la décroissance exponentielle.

Sur Fig. 3.26c sont représentées les mêmes mesures que sur Fig. 3.25 mais toutes les courbes sont superposées. La largeur des distributions diminue lorsque le confinement augmente, cela se voit dans l'ordre des queues exponentielles. Nous comparons les distributions de longueurs pour les trois systèmes. Dans le cas de la compaction conique (Fig. 3.26a), la distribution est entièrement décrite par une exponentielle décroissante, le maximum de probabilité semble correspondre à la plus petite longueur accessible. Dans le cas des simulations (Fig. 3.26b), la distribution est bien décrite par une loi Gamma sans paramètre

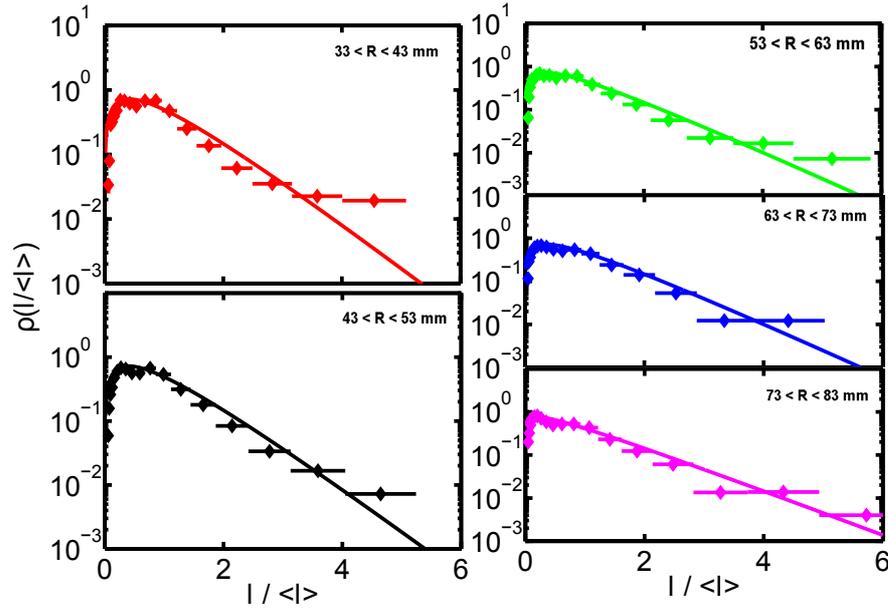


FIG. 3.25 – Densités de probabilité des longueurs de branches. Chaque graphe inclut toutes les configurations de même rayon de giration, dans une gamme de  $10\text{ mm}$ . Les longueurs sont normalisées par la longueur moyenne de branches de toutes les configurations considérées dans un même graphe. Les lois Gammas correspondant à chaque distribution, sans paramètre ajustable, sont tracées en trait plein.

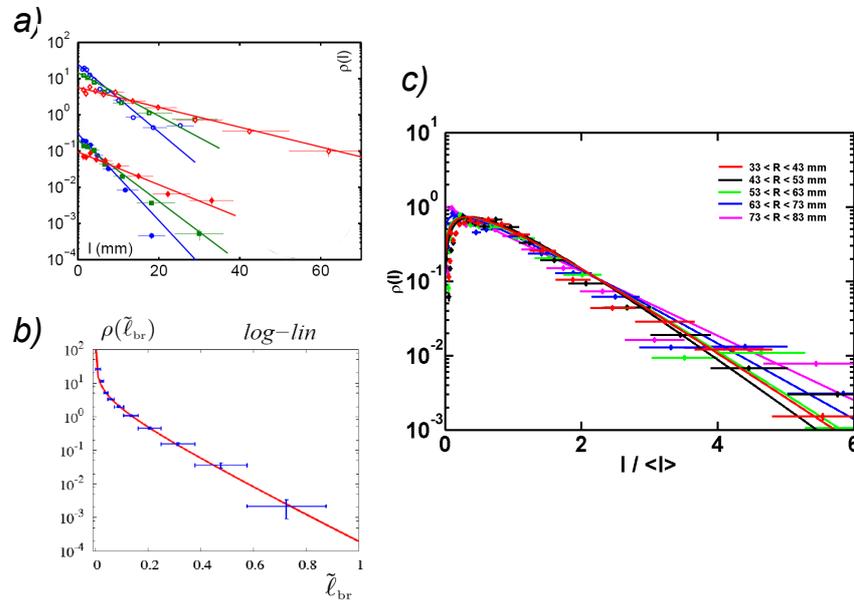


FIG. 3.26 – (a) Compaction conique : densités de probabilité de longueurs de branches pour les branches du volume (marqueurs pleins) et de périphérie (marqueurs vides). Pour une meilleure lisibilité, les densités de probabilité de la périphérie ont été multipliées par  $10^2$ . (b) Expérience numérique : densités de probabilité de longueur de branches, normalisées par la longueur totale du fil. (c) Mêmes mesures que Fig. 3.25 en représentation lin-log.

ajustable comme dans notre expérience. Cependant, la probabilité des petites longueurs diverge. En fait les gammes de longueurs explorées par la simulation numérique sont de deux ordres supérieures à celle de notre expérience car les taux de compaction de la simulation sont plus faibles que ceux de l'expérience. Il n'est alors pas judicieux de comparer les formes des distributions de probabilités. Cependant nous pensons que la divergence des faibles longueurs n'est pas raisonnable : une branche ne peut pas être plus courte qu'une certaine longueur puisqu'elle est définie comme une portion de fil entre deux points d'embranchement. En-dessous d'une certaine longueur, nous ne pouvons plus distinguer les deux vertex mais un unique rassemblant les deux. Donc la probabilité des petites longueurs doit chuter. Concernant les probabilités des grandes longueurs de branche, une loi de probabilité exponentielle semble être générale, décrivant bien les distributions obtenues par les trois études.

### Energies

Deux énergies sont en compétition dans le système : l'énergie de confinement et l'énergie élastique. L'énergie de confinement est fournie au fil par rotation du disque. L'énergie de confinement d'une branche d'épaisseur une couche et de longueur  $l$  est la somme des énergies de chaque élément de longueur  $ds$  :

$$E_{conf} = \frac{1}{2} \Delta\mu \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \omega^2 \int_0^l r^2(s) ds \quad (3.29)$$

où  $r(s)$  est la position radiale de l'élément  $ds$  et  $l$  la longueur de la couche. L'énergie de confinement d'une branche, contenant  $N$  couches est simplement la somme de celle de chaque couche,  $E_{conf,br} = N E_{conf}$ .

L'énergie élastique d'une branche d'épaisseur une couche est donnée par :

$$E_{courb} = \frac{1}{2} B \int_0^l \kappa^2(s) ds \quad (3.30)$$

où  $\kappa(s)$  est la courbure de l'élément  $ds$  et  $B = Eh^3/12(1-\nu)^2$  la rigidité de flexion du fil. L'énergie élastique d'une branche peut être définie de plusieurs façons. Comme pour l'énergie de confinement, elle peut être la somme de l'énergie de chaque couche la composant ; dans ce cas, elle s'exprime comme  $E_{courb,br} = N E_{courb}$ . Utiliser cette expression implique qu'à courbure égale, plier indépendamment ou en les superposant plusieurs épaisseurs de fil est équivalent. Une seconde définition consiste à considérer une branche comme une plaque mince de largeur  $Nh$  où  $h$  est l'épaisseur d'une couche. La rigidité de flexion  $B$  est modifiée en  $N^3B$  par rapport au module d'une seule couche. Nous utiliserons la première définition qui donne des résultats plus satisfaisants. Elle nous semble plus adaptée car les couches alignées restent indépendantes les unes des autres. Il n'y a pas de contraintes normales qui les collent entre elles le long de la branche. Par la suite nous désignerons indifféremment cette énergie par le terme d'énergie élastique ou d'énergie de courbure.

Connaissant la courbure des branches en tout point et la rigidité de flexion du matériau, nous mesurons l'énergie de courbure des branches. Connaissant les coordonnées radiales  $r(s)$  des branches, nous avons une mesure de l'énergie de confinement. Nous traçons les

distributions de l'énergie élastique des branches, sans le terme de confinement (Fig. 3.27a-b) et les distributions de l'énergie mécanique totale  $E_{tot} = E_{conf} + E_{courb}$  (Fig. 3.27c-d). Chaque courbe contient les mesures d'énergie de toutes les configurations obtenues pour une même fréquence de rotation. Une première propriété remarquable est que, quelle que soit l'intensité du confinement, les distributions d'énergies sont les mêmes ; leur forme ne dépend pas de la quantité d'énergie injectée dans le système. Une seconde propriété est que les distributions sont bien décrites par deux lois de puissance. La transition se produit pour une énergie de l'ordre de  $10^{-4} J.m$  pour l'énergie de courbure comme pour l'énergie totale (Figs. 3.27a-c). Les petites énergies sont distribuées selon une loi de puissance d'exposant 0.2 pour l'énergie de courbure et de 0.3 pour l'énergie totale, sur quatre décades. Les hautes énergies sont également distribuées selon une loi de puissance d'exposant 2.2 pour l'énergie de courbure et de 3 pour l'énergie totale, sur deux décades. Nous tenterons de donner une

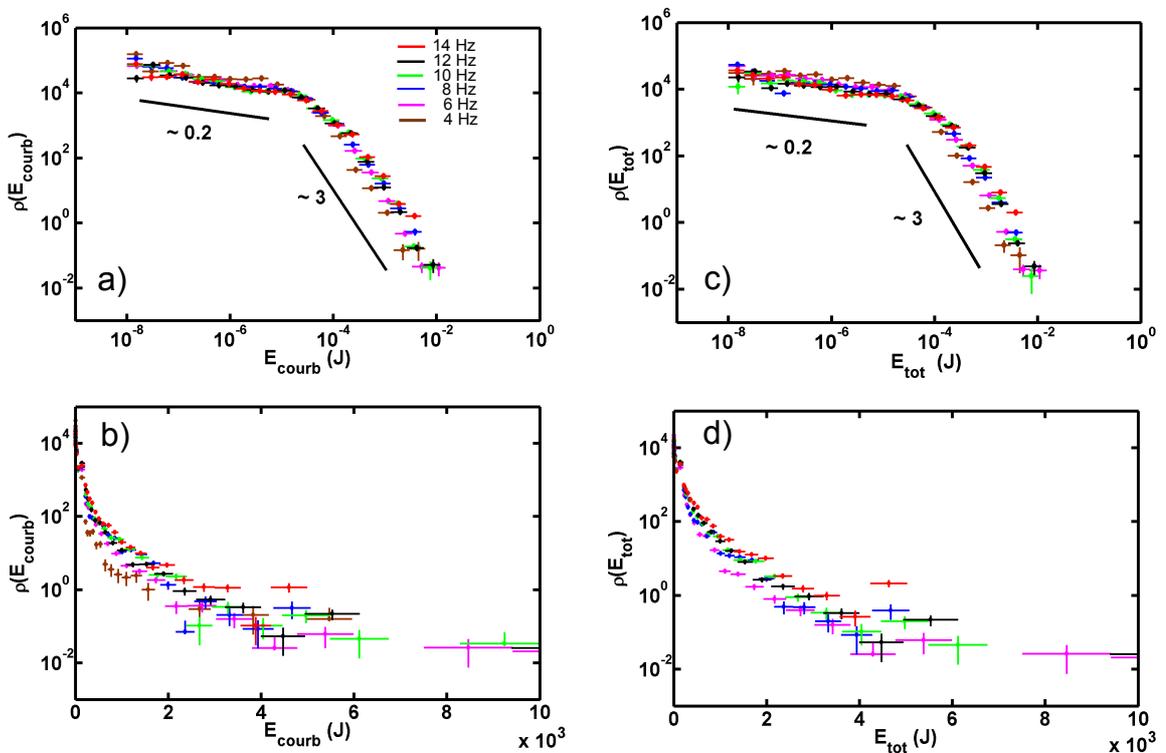


FIG. 3.27 – (a)-(b) : Densité de probabilité de l'énergie de courbure des branches en représentation log-log et lin-log. Toutes les configurations obtenues pour une même intensité de confinement, c'est-à-dire une même fréquence de rotation, ont été réunies dans une même courbe. Les valeurs des énergies ne sont pas normalisées. (c)-(d) Densité de probabilité de l'énergie totale d'une couche en log-log et lin-log.

interprétation de l'énergie de transition dans la section 3.5.6.

Nous comparons nos résultats à ceux obtenus dans les études précédentes. Dans l'expérience de compaction conique comme dans les simulations numériques, les distributions sont bien décrites par une loi Gamma, sans paramètre ajustable (Fig. 3.28). Suivant cette loi, les petites énergies sont distribuées selon une loi de puissance tandis que les hautes énergies le sont selon une loi exponentielle. Nous pensons que la différence entre nos distri-

butions et les leurs provient du fait que nous explorons une plus grande gamme d'énergie. Dans les deux autres études, les queues exponentielles sont développées sur moins d'une décade. Sur une gamme de valeurs aussi étroite, il n'est pas possible de différencier une loi exponentielle d'une loi de puissance.

Un fait intéressant dans l'expérience de compaction conique (Fig. 3.28a) est que les branches des deux sous-systèmes ont la même distribution d'énergie bien que les distributions de leurs grandeurs géométriques soient différentes (Fig. 3.24 et 3.26). Deboeuf et al. interprètent ce résultat comme la marque d'une thermalisation du système [Deboeuf et al., 2009].

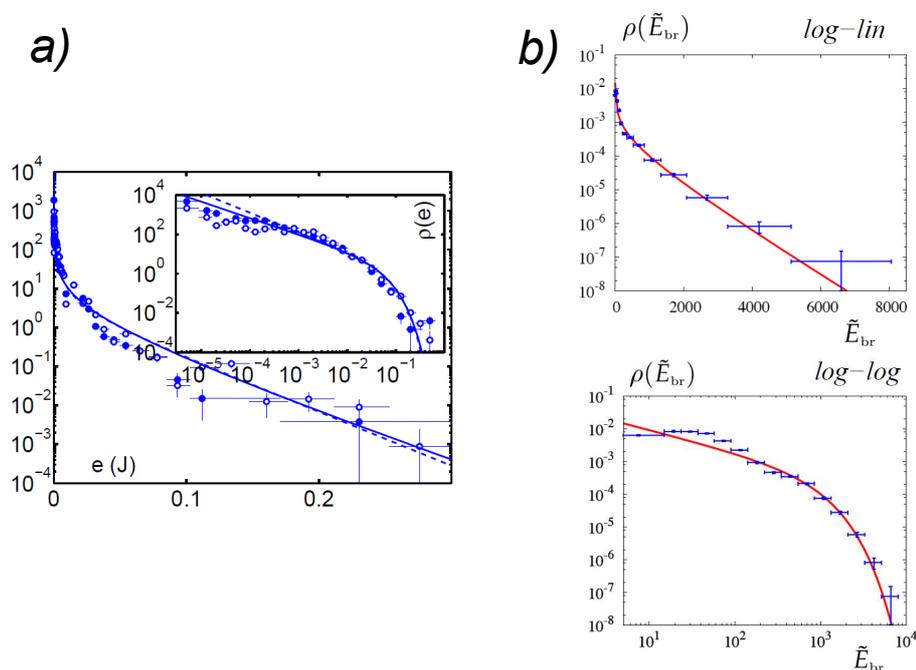


FIG. 3.28 – (a) Compaction conique : Densité de probabilité de l'énergie de courbure d'une branche pour les branches de volume (marqueurs pleins) et de la périphérie (marqueurs vides) en représentation lin-log et log-log (inset). (b) Expérience numérique : densité de probabilité de l'énergie totale des branches.

Nous allons maintenant discuter ces résultats sous plusieurs angles. Dans une première partie, nous établissons une analogie entre le système confiné et les objets fragmentés ; nous montrons que les densités de probabilité des longueurs sont les mêmes dans les deux cas. Dans une deuxième partie, nous proposons une autre interprétation de la forme des distributions des longueurs. Nous montrons cette fois qu'elles peuvent être le résultat d'un phénomène de *stacking* ou de superposition des couches. Cette interprétation est appuyée par les mesures de distributions de courbure ; nous verrons que des parois virtuelles sont introduites dans le système. Et enfin, nous discuterons de la possibilité de définir un système statistique ergodique.

### 3.5.3 Analogie avec la fragmentation

Nous allons montrer que les distributions des longueurs de branches sont semblables aux distributions de tailles obtenues par fragmentation d'un objet. Nous introduisons d'abord des éléments nécessaires de la fragmentation. Pour avoir plus de précisions à ce sujet, nous vous renvoyons à [Herrmann and Roux, 1990]. Nous montrerons ensuite en quoi nos résultats satisfont les hypothèses de fragmentation.

Nous nous intéressons à la fragmentation hiérarchique qui consiste en une cascade de rupture en deux morceaux. Pour établir le comportement des distributions de taille, il faut considérer l'évolution de la concentration de fragments de taille (ou de masse)  $x$  à un instant  $t$ , notée  $c(x, t)$  :

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = -a(x) c(x, t) + \int_0^\infty c(y, t) a(y) f(x|y) dy \quad (3.31)$$

Le premier terme du second membre traduit la perte de fragments de taille  $x$  par brisure,  $a(x)$  étant le taux de probabilité qu'un amas de taille  $x$  rompe. Le second terme traduit le gain de fragments de taille  $x$  par brisure d'amas de plus grande taille. La fonction  $f(x|y)$  est la probabilité d'obtenir  $x$  en cassant  $y$ . Cette équation d'évolution décrit des systèmes divers, de la fragmentation d'un solide inhomogène comme une roche à la rupture de chaînes de polymères dégradées chimiquement. Deux hypothèses sont nécessaires pour résoudre cette équation : seule importe la taille relative des fragments mère-fille  $x/y$  et le taux de probabilité de rupture dépend de la taille du fragment comme  $a(x) = x^\lambda$ . Le paramètre  $\lambda$  dépend du système considéré. Parce que la fragmentation est hiérarchique, un fragment est rompu en deux fragments de taille aléatoire (mais dont la somme des masses est la masse avant rupture). Il est alors possible de montrer que les distributions de taille sont de la forme présentée sur Fig. 3.29. Par la résolution de l'Eq. 3.31, deux

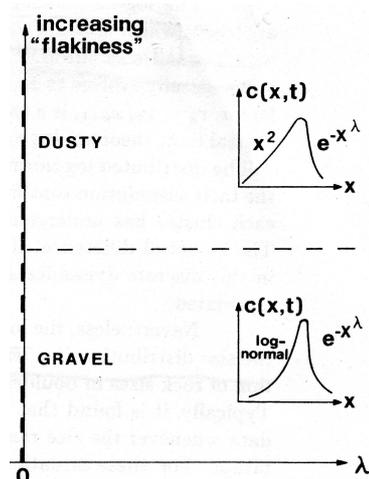


FIG. 3.29 – Distribution de probabilité de taille de fragments obtenus par un processus de fragmentation hiérarchique. Le paramètre  $\lambda$  est une caractéristique du système expérimental. Figure extraite de [Herrmann and Roux, 1990].

comportements des distributions de taille sont mis en évidence. Dans la limite des grandes

tailles, la distribution est décrite par une exponentielle décroissante dont la vitesse de décroissance dépend de  $\lambda$  comme  $\exp(x^\lambda)$ . Dans la limite des petites tailles, la distribution peut être une loi log-normale ou une loi de puissance en  $x^2$ , selon la valeur de  $\lambda$ . Dans notre système expérimental, la densité de probabilité des grandes tailles est effectivement une exponentielle décroissante. Concernant les petites tailles, la description en loi lognormale nous semble plus adaptée que celle en  $x^2$ . Nous examinons la possibilité d'ajustement d'une loi log-normale dans la limite des faibles longueurs pour les différentes intensités de confinement. Elle est définie comme :

$$f^{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x_M) - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.32)$$

où  $\mu = \langle \ln(x) \rangle$  et  $\sigma = \text{var}(\ln(x))$ . Dans Fig. 3.30 sont présentées les mêmes courbes que dans Fig. 3.25, zoomées sur la gamme des faibles longueurs. La courbe en trait plein est la loi Gamma définie à partir de la distribution totale, sans paramètre ajustable. La courbe en pointillé est la loi log-normale. Pour établir les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  de cette loi, nous relevons les coordonnées  $(x_M, y_M)$  du maximum de la distribution pour chaque intensité de confinement. En annulant la dérivée de  $f^{\mu,\sigma}(x)$ , nous établissons le système d'équations suivant :

$$\log(x_M) = \mu - \sigma^2 \quad (3.33)$$

$$y_M = \frac{1}{x_M \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x_M) - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.34)$$

Nous en déduisons pour chaque distribution un couple de valeurs  $(\mu, \sigma)$ , donné dans Tab. 3.1.

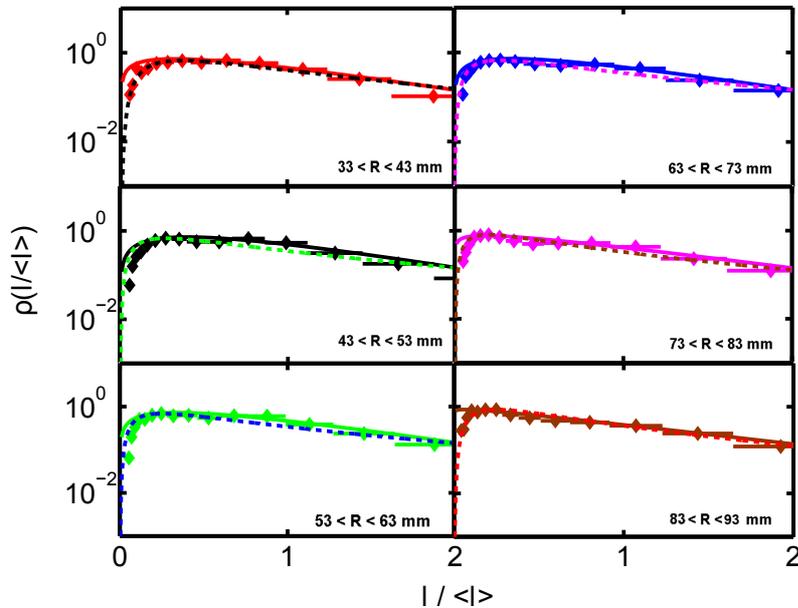


FIG. 3.30 – Zoom de Fig. 3.25. En trait plein est représentée la loi Gamma, sans paramètre ajustable. En pointillé est représentée la loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  donnés Tab. 3.1.

$f(Hz)$	$\mu$	$\sigma$
14	-0.02	1.15
12	-0.1	1.10
10	-0.07	1.20
8	-0.13	1.12
6	-0.17	1.20
4	-0.26	1.06

TAB. 3.1 – Valeurs de  $\mu = \langle \ln(\frac{l}{\lambda}) \rangle$  et de  $\sigma = \text{var}(\ln(\frac{l}{\lambda}))$  utilisées pour ajuster les lois lognormales aux densités de probabilité des petites longueurs sur Fig. 3.30.

La loi lognormale est une meilleure description que la loi Gamma pour les petites longueurs ( $\frac{l}{\lambda} < 0.1$ ). Les distributions de longueurs des objets confinés peuvent donc être prédites par l'équation d'évolution des tailles par fragmentation (Eq. 3.31). Nous en donnons l'interprétation suivante : lorsqu'une branche en touche une autre, un vertex est créé et l'ancienne branche forme deux nouvelles branches. Plus une branche est longue, plus elle a une forte probabilité d'être coupée et au-dessous d'une certaine longueur, la probabilité d'être coupée chute ce qui implique une faible population de branches courtes. Il n'est donc pas étonnant d'obtenir la même forme de distribution. Rappelons que cette équation est écrite sous l'hypothèse de la fragmentation hiérarchique : un fragment est brisé en deux fragments de taille aléatoire. Dans le système du fil confiné, cette hypothèse se traduirait par le fait que les vertex - les points de contact qui coupent une branche en deux branches lors de leur création - n'auraient pas de position privilégiée le long de la branche initiale. Ils seraient distribués aléatoirement dans l'espace. Cependant, restons prudents avec cette interprétation. Nous allons voir dans la section suivante qu'un autre scénario est possible, incompatible avec celui de la fragmentation hiérarchique.

### 3.5.4 Corrélation de l'orientation des couches

Nous proposons une deuxième interprétation des formes des distributions de longueurs de branches en nous appuyant sur une étude réalisée par Sultan et Boudaoud [Sultan and Boudaoud, 2006]. Il s'agit d'une expérience numérique au cours de laquelle une ligne brisée est confinée en deux dimensions en tenant compte de la non-interpénétrabilité de la ligne. Le processus de confinement consiste à minimiser l'énergie du système en faisant varier l'angle que forment deux lignes autour de vertex qui jouent le rôle de plis. La faible dimensionnalité de l'objet permet de réaliser une étude statistique. Les distributions des longueurs de segments - portion de ligne entre deux vertex - sont mesurées. Les auteurs montrent que les distributions de probabilité de longueur des segments sont bien décrites par une loi Gamma pour des confinements importants de la ligne (Fig. 3.31). Ce résultat est surprenant. On aurait pu s'attendre à obtenir une loi reflétant un processus de brisure aléatoire ; une ligne segmentée aléatoirement présente une distribution de tailles suivant une loi exponentielle décroissante. L'explication suivante est avancée : sous un confinement

fort, différents segments de la ligne sont en contact ce qui induit une corrélation de leurs longueurs. La longueur de chaque segment considérée séparément est une variable aléatoire dont la distribution suit une loi exponentielle. La distribution globale de longueurs devient la distribution de la moyenne de  $N_L$  variables aléatoires de distribution exponentielle où  $N_L$  est le nombre de couches dans le système confiné. Une telle distribution est une loi Gamma avec un paramètre  $\alpha = N_L$ .

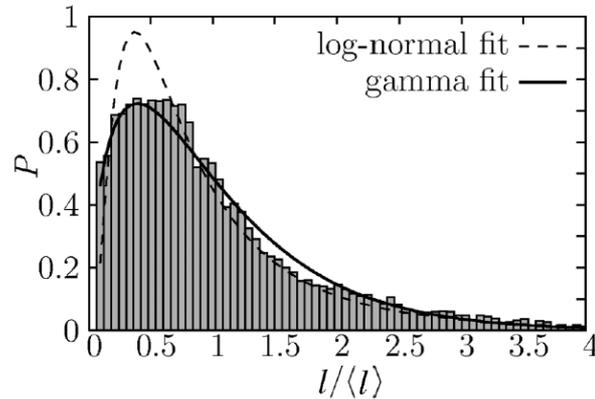


FIG. 3.31 – Densité de probabilité des longueurs de segments d’une ligne brisée confinée en deux dimensions. La courbe en trait plein est une distribution Gamma, celle en pointillé une loi lognormale. Figure extraite de [Sultan and Boudaoud, 2006].

Dans notre système, les distributions de longueurs des couches peuvent être décrites par des distributions Gammas (Fig. 3.25). Comme dans l’expérience numérique, les longueurs des différentes couches sont moyennées lorsqu’elles s’alignent entre elles. En effet, des portions de fil entrant en contact forment une nouvelle branche ; les couches la constituant ont toutes la même longueur. La distribution Gamma résulterait donc de la moyenne des distributions de probabilité de longueur de chaque couche. Nous vérifions que le paramètre  $\alpha$  des distributions Gammas est relié au nombre moyen de couches par branche  $\langle N_{c/b} \rangle$  qui correspond au nombre d’exponentielles moyennées pour obtenir la distribution finale. Nous obtenons  $\langle N_{c/b} \rangle$  en fonction de l’intensité de confinement en moyennant les nombres de couches par branche de toutes les branches des configurations obtenues à une même intensité de confinement. Par ailleurs, rappelons que le paramètre des distributions Gammas tracées en Fig. 3.25 est  $\alpha = 1/\sigma^2$  où  $\sigma$  est la variance de la distribution de  $l/\langle l \rangle$ . D’après Fig. 3.32, le paramètre  $\alpha$  des distributions Gammas est une fonction linéaire du nombre moyen de couches par branche, d’équation

$$\alpha = a \langle N_{c/b} \rangle \quad (3.35)$$

avec  $a = 0.6 \pm 0.06$ . Dans l’étude de Sultan et Boudaoud, la relation entre  $\alpha$  et le nombre de couches moyen est une relation affine et non pas linéaire comme ici. Ils expliquent cela comme provenant du fait que deux segments superposés n’ont pas nécessairement la même longueur ce qui diminue la corrélation. Dans notre système, par définition des branches et couches, les couches superposées ont la même longueur. La relation de corrélation entre  $\alpha$  et  $\langle N_{c/b} \rangle$  n’a donc pas de terme correctif. Cette corrélation valide l’hypothèse de

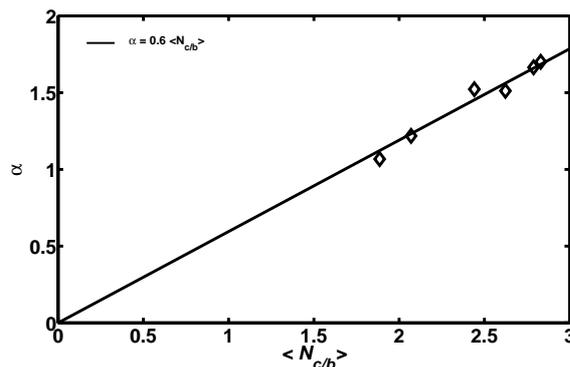


FIG. 3.32 – Paramètre  $\alpha = 1/\text{var}(l/\langle l \rangle)$  de la loi Gamma, décrivant les distributions de longueur de branches (Fig. 3.25), en fonction du nombre moyen de couches par branche de toutes les configurations obtenues à la même fréquence de rotation. Chaque point de ce graphe correspond à une distribution de longueur.

moyennage des longueurs par superposition des couches. Dans la littérature, ce phénomène est désigné par le terme de *stacking*. Dans de nombreux systèmes, il a été observé que les segments ou les facettes, selon la dimensionnalité de l'objet, ont tendance à s'aligner entre eux lorsque le confinement augmente [Lin et al., 2009, Aristoff and Radin, 2009]. Nous reviendrons sur cette notion dans la section suivante.

Pour résumer, la description des distributions en loi Gamma est le signe de l'existence d'un processus de mélange : lorsque les couches s'alignent entre elles, leurs longueurs se moyennent. La longueur d'une couche « diffuse » auprès de ses voisines. Par ailleurs, nous avons montré que le confinement du fil pouvait être vu comme un processus de fragmentation aléatoire (section 3.5.3). Dans ce cas, les longueurs des couches ne sont pas corrélées les unes aux autres. Ces deux interprétations sont incompatibles. Dans l'état actuel de cette étude, nous ne pouvons pas décider quel scénario est le plus raisonnable. Cependant, les phénomènes de *stacking* peuvent être mis en évidence par d'autres mesures que nous présentons dans la section suivante. Si un ordre apparaît dans le système, au travers de la superposition des couches, nécessairement, les couches imposent leur état à leur voisinage. Dans ce cas, le scénario de mélange, c'est-à-dire la description des distributions en loi Gamma, serait plus adaptée que le scénario de fragmentation exprimant l'existence de processus aléatoires.

### 3.5.5 Formation d'un anneau confinant virtuel

Nous avons fait le constat, en nous appuyant sur l'étude de Deboeuf et al, que les distributions de courbure des branches sont les mêmes que celles que nous obtiendrions si les branches étaient en contact avec un anneau rigide dont le rayon serait le rayon de giration de la configuration (section 3.5.2). En éliminant les conditions aux bords, nous pensions nous affranchir du sous-système *périphérie*, défini dans [Deboeuf et al., 2009], pour ne travailler qu'avec le sous-système *volume* ; nous avons finalement fait le contraire. Dans la suite nous tâchons de comprendre ce qui joue le rôle de l'anneau confinant.

Considérons les distributions de longueur de branches (Fig. 3.25) : lorsque le confinement augmente, nous nous attendons à ce que toutes les échelles de longueurs du système diminuent. Effectivement, le rayon de giration diminue avec la fréquence (Fig. 3.17) ainsi que la longueur moyenne des branches (Fig. 3.33a). Nous traçons la longueur la plus probable  $l_{pp}$ , définie comme la longueur correspondant au maximum de la distribution des longueurs sur Fig. 3.25, en fonction du rayon de giration (Fig. 3.33b). Étonnamment, elle augmente lorsque l'intensité du confinement augmente (ou lorsque le rayon de giration diminue).

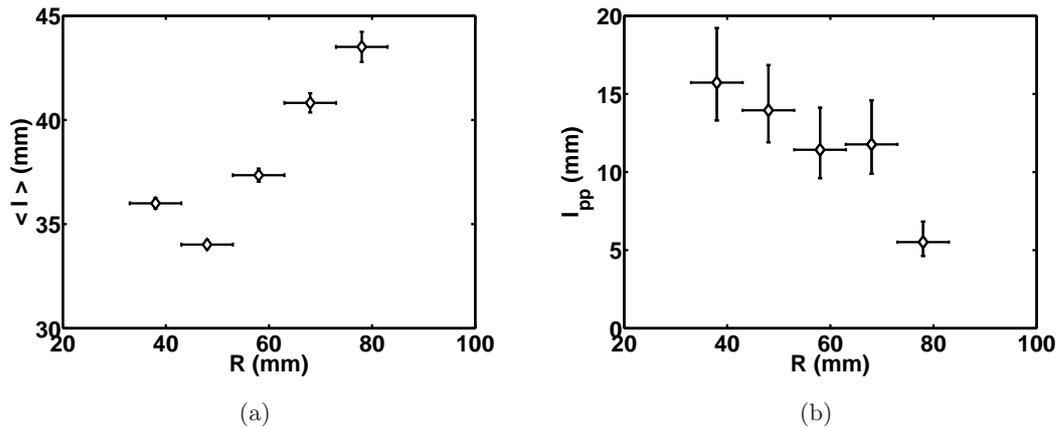


FIG. 3.33 – (a) Longueur moyenne des branches en fonction du rayon de giration moyen des configurations ayant un même rayon dans une gamme de  $10\text{ mm}$ . (b) Longueur la plus probable  $l_{pp}$  en fonction du rayon de giration moyen des configurations. La longueur la plus probable correspond à la longueur pour laquelle la distribution des longueurs de branches atteint un maximum (Fig. 3.25).

Ce phénomène est compréhensible si l'on considère également l'évolution du nombre moyen de couches par branche avec l'intensité de confinement (Fig. 3.34). Il est une fonction croissante de la fréquence ce qui signifie que les branches s'épaississent avec le confinement. Cette mesure montre encore une fois que du stacking se développe lorsque le confinement augmente.

Nous pensons que l'augmentation de la longueur la plus probable est une conséquence du phénomène de stacking. Lorsque l'objet est confiné, les différentes couches de fil ont tendance à s'aligner et à coalescer dans la même branche. C'est bien visible lorsque l'on observe les différentes étapes d'une expérience palier (Fig. 3.35). Une branche plus épaisse que les autres apparaît dès la formation du motif puis, au fur et à mesure que l'intensité de confinement augmente, elle s'épaissit. Cette branche est plus rigide que les autres donc toute portion de fil qui entre en contact avec elle y est intégrée. Finalement, sa courbure est imposée aux autres branches de la configuration. Ainsi la branche épaisse joue le rôle d'anneau confinant.

Une échelle de longueur est introduite dans le système confiné au travers d'une branche épaisse et rigide. Comme elle contient une grande partie des couches de fil, son rayon est le rayon de giration de la configuration et elle impose sa courbure à toutes les autres

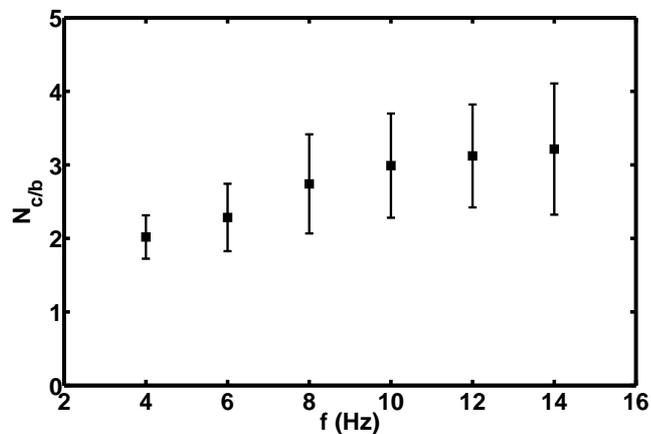


FIG. 3.34 – Nombre moyen de couches par branches en fonction de la fréquence, c'est-à-dire de l'intensité du confinement. Un point représente la moyenne de ce nombre pour toutes les configurations obtenues à une fréquence donnée.

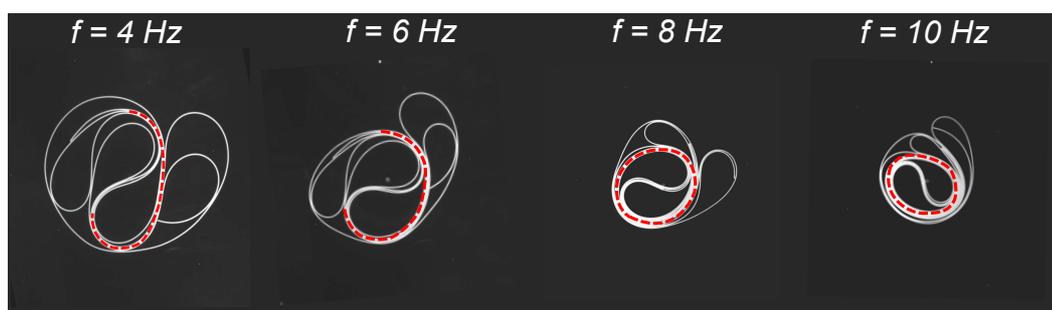


FIG. 3.35 – Evolution d'une configuration lorsque l'intensité du confinement augmente. Une branche épaisse se forme et s'épaissit de plus en plus.

branches. Nous allons voir dans la section suivante qu'elle joue également un rôle dans les distributions de probabilité des énergies.

### 3.5.6 Introduction d'une échelle d'énergie

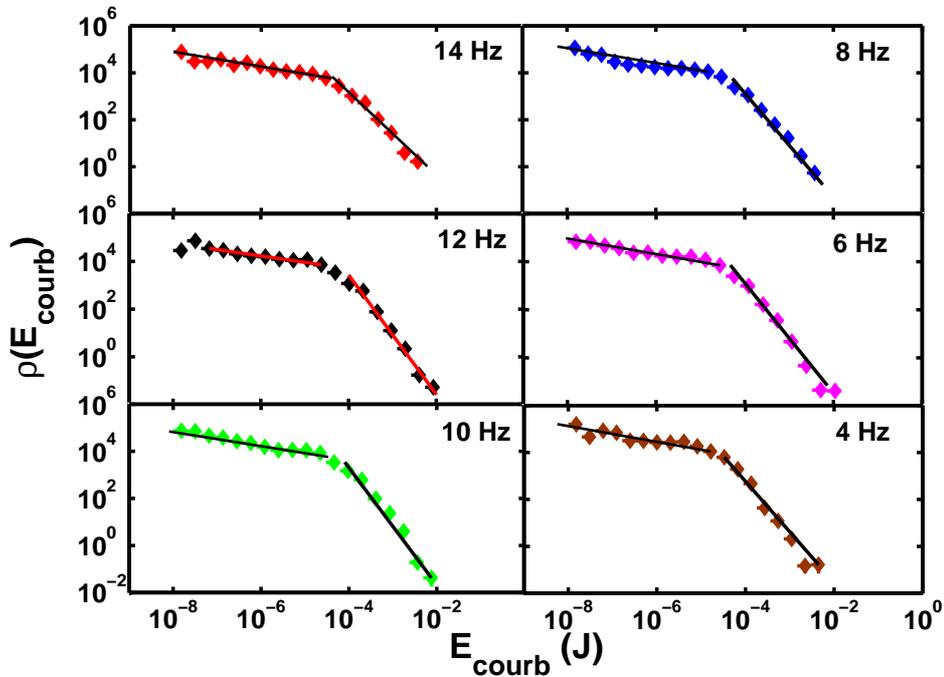


FIG. 3.36 – Les courbes de Fig. 3.27a sont tracées indépendamment. Les lois de puissances d'exposant 0.2 et 3 sont représentées en trait plein. Sur ces graphes, on relève l'énergie pour laquelle se produit la transition entre les deux lois de puissance.

Les distributions d'énergies, de courbure et totale, sont décrites par deux lois de puissance, l'une d'exposant de l'ordre de 0.2 – 0.3 pour les petites énergies, l'autre d'exposant de l'ordre de 2 – 3 pour les hautes énergies, quelle que soit l'intensité du confinement (Fig. 3.27). La transition se produit pour une énergie de l'ordre de  $10^{-4} J$ . Cette description en loi de puissance est satisfaisante quel que soit le confinement. Nous relevons la valeur de l'énergie de transition  $E_{courb}^t$  à laquelle se produit la transition des distributions d'énergie de courbure pour chaque intensité de confinement (Fig. 3.36). Nous faisons de même pour l'énergie totale,  $E_{tot}^t$ . Les énergies de transition en fonction de la fréquence sont présentées sur Fig. 3.37. L'énergie de courbure de transition augmente avec le confinement tandis que l'énergie totale de transition reste approximativement constante. Afin de comprendre l'origine de la transition, nous comparons ces énergies à celles correspondantes à l'anneau virtuel mis en évidence précédemment, de rayon  $R_g$  et de longueur  $2\pi R_g$ , soit :

$$E_{courb}(R_g) = B \frac{2\pi R_g}{R_g^2} \quad (3.36)$$

$$E_{tot}(R_g) = B \frac{2\pi R_g}{R_g^2} + \frac{1}{2} \Delta\mu \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 2\pi R_g \omega^2 R_g^2 \quad (3.37)$$

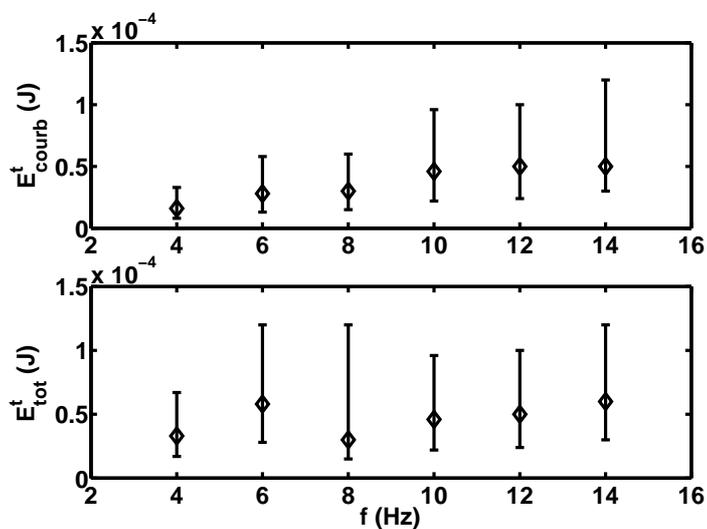


FIG. 3.37 – Graphe de l'énergie de courbure (haut) et totale (bas) pour lesquelles la transition dans le comportement des distributions d'énergie se produit en fonction de l'intensité de confinement.

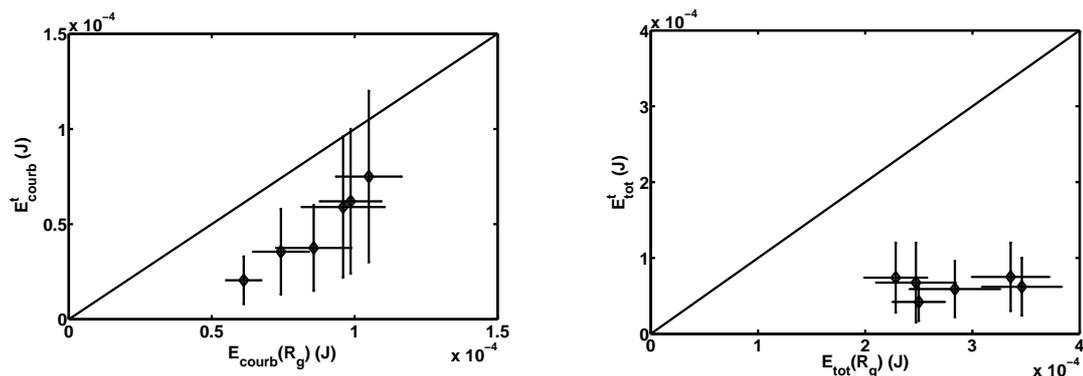


FIG. 3.38 – Graphe de l'énergie de transition de courbure (gauche) et totale (droite) en fonction de ces mêmes énergies pour un anneau de rayon  $R_g$  le rayon de giration moyen des configurations.

Nous traçons les énergies de transition mesurées en fonction des énergies de l'anneau (Fig. 3.38). Concernant la distribution des énergies de courbure, la description de l'énergie de transition comme étant celle d'un anneau de rayon  $R_g$  est satisfaisante. Concernant la distribution des énergies totales, la description est moins adaptée mais l'ordre de grandeur est correct ; cependant la tendance à l'augmentation de l'énergie avec le confinement ne soit pas visible. Remarquons que la mesure des énergies de transition est peu précise car la gamme des énergies mesurées est large (six décades). L'ordre de grandeur des énergies de transition ainsi que la tendance d'augmentation avec le confinement sont cohérents avec la description de l'anneau.

L'anneau confinant virtuel impose sa géométrie à la configuration mais impose également la répartition de l'énergie dans le système. Nous ne sommes pas en mesure de proposer une interprétation satisfaisante de la forme des distributions de probabilité des énergies mais nous insistons sur l'importance de l'influence de l'anneau sur les propriétés géométriques et énergétiques des configurations.

### 3.5.7 Ergodicité

Les distributions de probabilité de grandeurs géométriques (longueurs et courbures) dépendent de la taille de la configuration définie par le rayon de giration : courbure piquée autour du rayon de giration et largeur des distributions de longueurs dépendant du confinement. Malgré cela, les distributions de probabilité des énergies sont les mêmes pour toutes les configurations, quel que soit le confinement. D'ailleurs, l'énergie totale de transition relevée sur les distributions ne varie que très peu (Fig. 3.37 bas). Donc quelle que soit l'énergie totale d'une configuration, la répartition des énergies reste la même. Nous pourrions alors voir toutes les configurations du fil confiné comme des états excités d'un état fondamental commun qui serait l'état de plus basse énergie. En géométrie circulaire, la spirale est l'état fondamental, le « cristal » du fil confiné. Dans ce cadre, nous pourrions tenter de mesurer l'entropie du système. L'entropie est le nombre de configurations accessibles dans un petit intervalle d'énergie fixé. En suivant la description microcanonique, il faudrait compter le nombre de configurations possibles pour une certaine quantité d'énergie injectée. Il nous faudrait prendre en compte uniquement les configurations obtenues à la même fréquence cible et ayant le même rayon de giration. Ceci est un premier obstacle à la mesure d'une entropie : étant donné que nous ne contrôlons pas le rayon de giration des configurations, un très grand nombre d'expériences devraient être réalisées pour espérer obtenir un échantillon de configurations représentatif. Et en supposant que cela soit possible, il nous faudrait un critère qui nous permette de savoir si l'espace des configurations accessibles a été entièrement visité. C'est ce deuxième point que nous discutons maintenant.

Nous considérons l'énergie totale d'une configuration qui est la somme de l'énergie de chaque couche, ainsi que l'énergie de courbure totale qui est la somme des énergies de courbure de chaque couche. Nous comparons l'énergie de courbure totale à l'énergie totale pour chaque expérience réalisée (Fig. 3.39). Les points forment un faisceau dont la pointe est à l'origine des axes. Cela indique qu'en injectant de l'énergie, nous élargissons le paysage

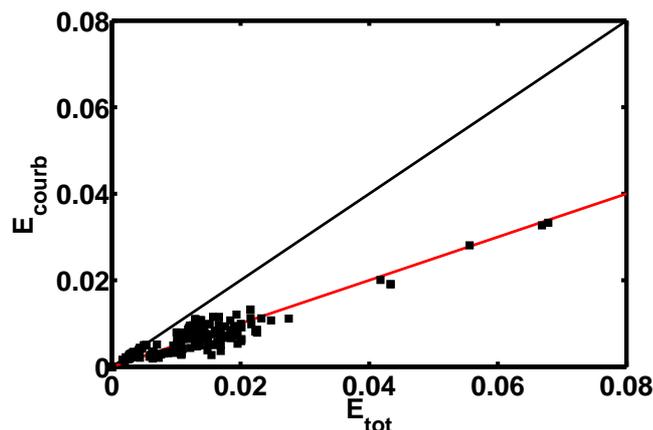


FIG. 3.39 – Graphe de l'énergie de courbure totale en fonction de l'énergie totale d'une configuration du fil confiné. Chaque point correspond à la réalisation d'une expérience. La droite  $E_{courb} = E_{tot}$  est représentée en noire, la droite  $E_{courb}^f = \frac{1}{2}E_{tot}^f$  est représentée en rouge (cf Eq. 3.41).

énergétique en rendant accessibles des configurations de haute énergie. Notons que la limite basse du rapport de ces deux énergies est prédictible en écrivant que l'énergie totale de l'état fondamental  $f(r)$  est minimale :

$$f(r) = E_{courb}(r) + E_{conf}(r) \quad (3.38)$$

$$f'(r) = 0 \quad (3.39)$$

Or,  $E_{courb} \propto r^{-2}$  et  $E_{conf} \propto r^2$ . Ainsi, on obtient :

$$E_{courb}^f \sim E_{conf}^f \quad (3.40)$$

et comme  $E_{tot} = E_{courb} + E_{conf}$ , on obtient la relation :

$$E_{courb}^f \sim \frac{1}{2}E_{tot}^f \quad (3.41)$$

La droite  $y = 1/2 x$  est représentée en rouge sur Fig. 3.39 ; nous voyons que l'estimation de l'ordre de grandeur est bonne. Cependant, le nuage de points est quasiment centré autour de cette droite ; ce ne devrait pas être possible et nous n'avons pas d'explication à donner.

Sans démontrer formellement que le système est ergodique, nous allons montrer que les grandeurs géométriques mesurées précédemment ne sont pas corrélées. Nous traçons pour chaque branche obtenue au cours de nos expériences sa courbure en fonction de sa longueur (Fig. 3.40). Il découle de la définition d'une branche de courbure  $\kappa$  que sa longueur ne peut être supérieure au périmètre d'un cercle de rayon  $1/\kappa$ . Sous la courbe d'équation  $\kappa = 2\pi/l$ , les points sont distribués de façon à peu près homogène. Nous en concluons que longueur et courbure ne sont pas corrélées : les valeurs d'une des deux grandeurs ne sont pas forcées lorsque celles de l'autre grandeur sont fixées.

Le problème de la définition d'un système statistique n'est pas résolu. Il faudrait trouver des variables d'état appropriées au système, telles que le volume ou le volume exclu ou une

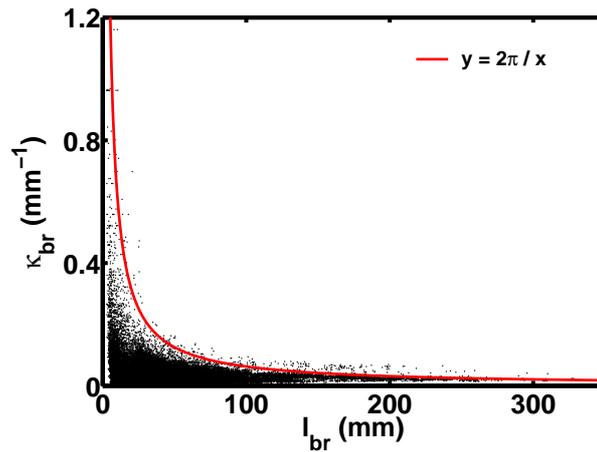


FIG. 3.40 – Courbure d’une branche  $\kappa_{br}$  en fonction de sa longueur  $l_{br}$ . Les branches de toutes les configurations obtenues sont confondues. La courbe rouge représente la limite haute de la courbure d’une branche soit  $2\pi/l_{br}$ .

température liée aux distributions d’énergies ce qui ne semble pas impossible car il existe une échelle d’énergie dans le système (cf section 3.5.6). Cela mériterait d’être étudié plus précisément.

### 3.5.8 Résumé

Nous avons mesuré des distributions de courbure, de longueur et d’énergie pour différents taux de confinement. D’abord nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus dans les deux études précédentes. Les résultats de la simulation numérique ne sont pas comparables aux nôtres car elle n’explore pas les mêmes gammes de valeurs que notre expérience (les taux de compaction sont plus faibles). La comparaison avec l’expérience de compaction conique nous montre que notre système se comporte comme s’il était en contact avec un anneau rigide. En effet, une branche plus épaisse que les autres a tendance à se développer lorsque le confinement augmente ; elle impose la géométrie de la configuration.

Nous avons discuté de savoir si la distribution des longueurs des branches résultait d’un processus aléatoire de fragmentation des branches ou d’un processus de mélange des longueurs des différentes branches présentes par superposition (stacking). Le scénario du stacking est plus vraisemblable et compatible avec la formation d’un anneau virtuel.

Un résultat important mais que nous ne savons pas interpréter est que quelle que soit l’intensité du confinement, les distributions d’énergies sont les mêmes. Elles présentent une transition qui semble gouvernée par l’anneau virtuel. L’unité des distributions d’énergies laisse penser que les configurations d’un système confiné sont les états excités d’un état fondamental. Nous avons discuté la possibilité de définir une physique statistique de ces systèmes.

Par la suite, nous nous focalisons sur la question du désordre d’une configuration à travers des mesures d’isotropie et de caractérisation des propriétés mécaniques.

### 3.6 An/Isotropie des configurations

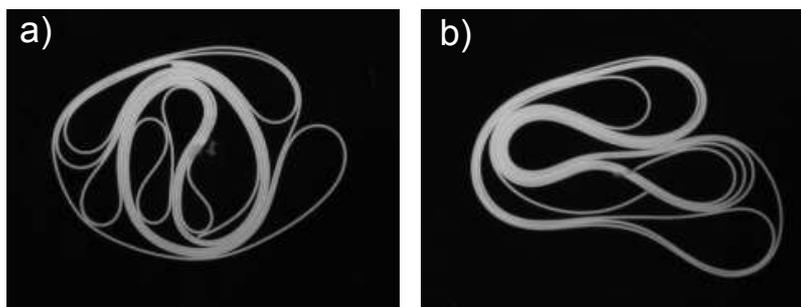


FIG. 3.41 – Comparaison de deux configurations, l'une de forme globalement isotrope (a), l'autre fortement anisotrope (b).

Certaines configurations présentent une géométrie circulaire tandis que d'autres ont clairement un axe de symétrie préférentiel (Fig. 3.41). Nous mesurons l'anisotropie d'une géométrie en considérant la matrice  $\mathbf{A}$  définie comme :

$$\mathbf{A} = \left\langle \begin{pmatrix} t_x^2 & t_x t_y \\ t_x t_y & t_y^2 \end{pmatrix} \right\rangle_{(s)}$$

avec  $\mathbf{t}(s) = (t_x(s), t_y(s))$  est la tangente à la courbe au point d'abscisse curviligne  $s$ . Les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  indiquent les deux directions principales de la géométrie et les valeurs propres donnent une mesure de l'anisotropie. Nous notons  $\mathbf{D}$  la matrice diagonalisée :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$$

Un cercle aura comme valeurs propres  $e_1 = e_2 = 1/2$  tandis qu'un rectangle de largeur  $l$  et de longueur  $L$  aura comme valeurs propres  $e_1 = l/(l+L)$  et  $e_2 = L/(l+L)$ . Nous ne nous intéressons qu'aux valeurs propres et non aux directions principales. Pour chaque configuration, il est équivalent de considérer la valeur de  $e_1$  ou de  $e_2$  ; leur somme est égale à 1 et plus leurs valeurs sont proches de 0.5, plus la configuration est isotrope. Nous traçons la valeur propre  $e_1$  en fonction du temps (Fig. 3.42). Même après le temps d'équilibration de la configuration qui est de l'ordre de 1800 s, les mesures de  $e_1$  sont bruitées, les fluctuations sont de l'ordre de 15% de la valeur moyenne. Malgré cela, nous observons que les valeurs moyennes de  $e_1$  pour les deux configurations présentées en Fig. 3.42 sont assez proches,  $\langle e_1 \rangle = 0.4 \pm 0.05$  pour la configuration spiralée,  $\langle e_1 \rangle = 0.3 \pm 0.05$  pour la configuration anisotrope. Nous traçons la moyenne de la valeur propre  $e_1$  pour toutes les configurations obtenues, par les expériences directes et par paliers, en fonction de l'intensité du confinement, soit la fréquence de rotation du disque (Fig. 3.43). La valeur moyenne ne varie pas avec l'intensité du confinement et elle est de l'ordre de 0.4. En d'autres termes, toutes les configurations sont globalement isotropes. En effet, cette mesure de l'anisotropie prend en compte tous les points du fil. Même si l'enveloppe du motif est anisotrope, en moyenne, à l'intérieur du motif, toutes les directions sont équivalentes. Cambou et Menon obtiennent le même résultat dans l'expérience de la boulette d'aluminium froissé, en utilisant une

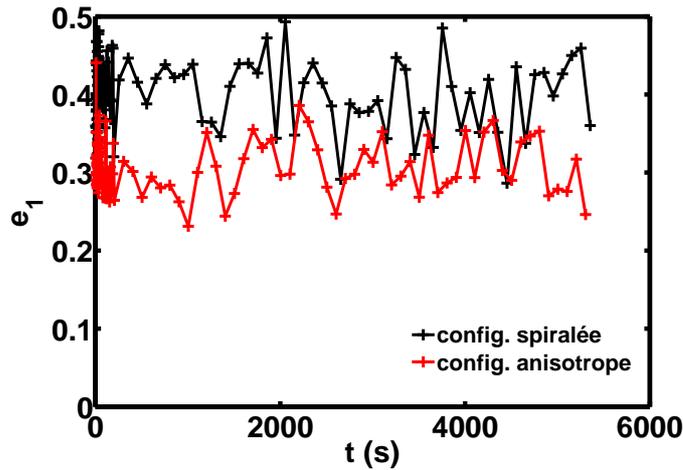


FIG. 3.42 – Valeur propre  $e_1$  en fonction du temps, en rouge pour la configuration spiralée, en noire pour la configuration fortement anisotrope de Fig. 3.41.

méthode différente de mesure de l'anisotropie. Les résultats n'ayant pas été publiés, nous ne pouvons pas développer plus amplement la comparaison.

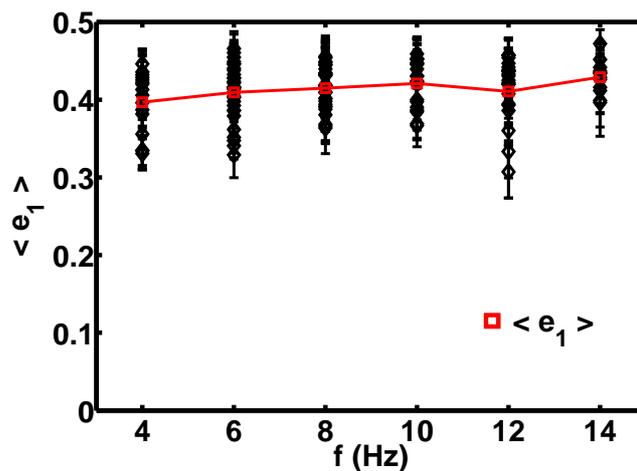


FIG. 3.43 – Valeur propre  $e_1$  de la matrice  $\mathbf{A}$  en fonction de la fréquence pour toutes les configurations obtenues par les expériences directes et les expériences par paliers. En rouge sont représentées les valeurs moyennes pour chaque fréquence.

Pour traduire l'anisotropie de certaines configurations, il faudrait soit considérer la forme de l'enveloppe externe de la configuration soit mesurer localement l'anisotropie. En effet, une portion angulaire du motif d'une configuration isotrope est fortement anisotrope puisque les couches sont superposées. Au contraire, une portion angulaire du motif d'une configuration anisotrope ne présente pas de direction préférentielle des couches, nous devrions donc mesurer, en utilisant la matrice  $\mathbf{A}$  une forte isotropie. Ce travail reste à faire. Dans ce cas, nous ne mesurerions pas une anisotropie de forme mais plutôt une anisotropie liée au désordre de la configuration. C'est justement ce qui va retenir notre attention dans la section suivante. Nous caractérisons le désordre d'une configuration donnée et non plus

d'un ensemble statistique de configurations.

## 3.7 Désordre

Il est clair, en observant des configurations obtenues dans les mêmes conditions expérimentales, que certaines sont plus désordonnées que d'autres. Une illustration en est donnée dans Fig. 3.14. Le terme *désordre* est ici utilisé dans le sens courant mais nous allons lui donner une signification physique. Dans la suite, nous proposons des grandeurs comme candidates à la mesure du désordre. Une première mesure consiste en une caractérisation géométrique de la différence entre une configuration donnée et la configuration spiralée qui est celle la plus ordonnée. Une deuxième mesure consiste en une caractérisation dynamique qui nécessite de perturber mécaniquement le fil confiné ; nous verrons que la réponse à la perturbation permet de sonder la géométrie du système.

### 3.7.1 Caractérisation géométrique

Comparons deux configurations, l'une spiralée et l'autre désordonnée (Fig. 3.44). Nous observons qu'en moyenne, les branches de la configuration spiralée sont plus épaisses c'est-à-dire qu'elles contiennent un plus grand nombre de couches que les branches de la configuration désordonnée. En effet, ce qui nous fait dire que la configuration est désordonnée est qu'elle a un plus grand nombre de vides et de boucles ; donc elle a un plus faible nombre de couches par branche, comme nous l'avions remarqué précédemment (section 3.5.5). Le

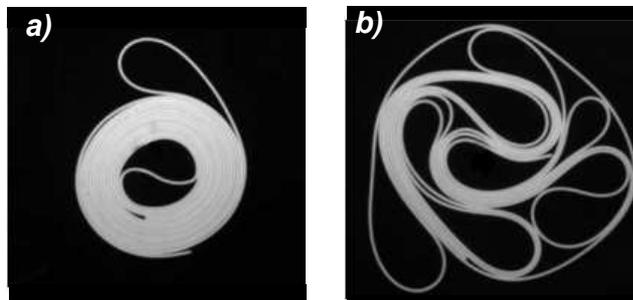


FIG. 3.44 – Deux configurations obtenues à la même intensité de confinement, l'une ordonnée (a), l'autre désordonnée (b). Les échelles sont les mêmes.

nombre moyen de couches par branche permet donc de mesurer le désordre. Plus ce nombre est grand, plus la configuration est ordonnée. Nous avons déjà observé que le nombre de couches par branche est une fonction croissante de l'intensité du confinement (Fig. 3.45). Cela signifie que les configurations s'ordonnent sous l'effet du confinement. Ce résultat n'est autre que celui établi section 3.5.2 : un phénomène de *stacking* apparaît, les couches s'alignent entre elles. Plus l'intensité du confinement est élevée, plus le nombre de couches étant dans le même état est grand.

Nous associons une mesure du rayon de giration à la mesure du nombre moyen de couches par branche. Nous effectuons cette mesure pour les configurations obtenues par les expériences directes ainsi que les expériences paliers. Le rayon de giration est mesuré après

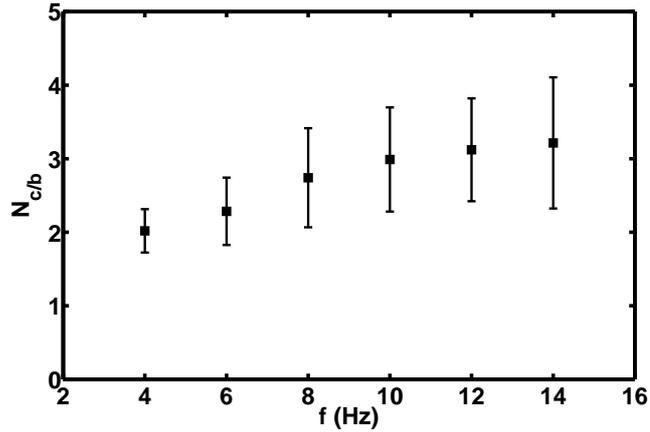


FIG. 3.45 – Nombre moyen de couches par branche en fonction de la fréquence. Reproduction de Fig. 3.34.

1800 s afin de s'assurer que le régime stationnaire est atteint. Afin d'obtenir des mesures indépendantes de l'intensité du confinement, nous normalisons le rayon de giration et le nombre moyen de couches par branche par les valeurs correspondant à une spirale obtenue pour la même intensité de confinement, calculées en section 3.2 (Eqs. 3.23 et 3.24). Nous

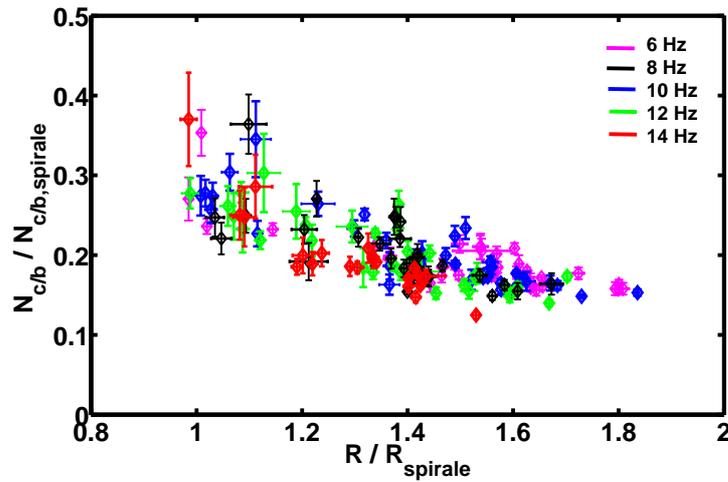


FIG. 3.46 – Nombre moyen de couches par branche en fonction du rayon de giration pour chaque réalisation d'une expérience. Le nombre de couches par branche et le rayon de giration sont normalisés par les valeurs correspondant au cas idéal de la spirale, obtenue à la même intensité de confinement que la configuration considérée.

traçons le nombre moyen de couches par branche normalisé en fonction du rayon de giration normalisé pour chaque configuration (Fig. 3.46). Le nuage de points est large mais une tendance se dégage ; nous observons que le nombre moyen de couches par branche décroît lorsque le rayon de giration augmente. Donc les géométries ordonnées, avec  $N_{c/b}$  grand, ont un petit rayon tandis que les géométries désordonnées, avec  $N_{c/b}$  faible, ont un grand rayon. C'est en effet ce qu'on observe sur Fig. 3.44 ; l'échelle est la même pour les deux

images et la configuration désordonnée a un plus grand rayon que l'ordonnée.

Finalement, le nombre de couches par branche d'une configuration permet de mesurer le désordre d'une configuration : plus ce nombre est petit, plus la configuration est différente d'une spirale. Le rayon de giration fournit la même mesure. Cependant, ces deux mesures ne sont pas complètement satisfaisantes. La courbe de Fig. 3.46 s'aplatit pour les grandes valeurs de  $R/R_{spirale}$ . Il est donc possible, à partir de cette mesure, de différencier une configuration fortement désordonnée d'une configuration fortement ordonnée mais il n'est pas possible de différencier deux configurations désordonnées. Cette méthode permet donc de classer les configurations selon leur désordre sans le quantifier à proprement parler. Nous présentons une seconde méthode, basée sur des mesures mécaniques, qui permet une mesure plus satisfaisante du désordre.

### 3.7.2 Caractérisation mécanique

Nous réalisons l'expérience suivante : la fréquence de rotation de la cellule est successivement augmentée puis diminuée par paliers. Le temps passé à un palier est de 1800 s pour s'assurer que le régime stationnaire est atteint. A chaque palier nous mesurons le rayon de giration du fil compacté et nous reportons sa valeur sur un graphe en fonction de la fréquence imposée. Pour diminuer les incertitudes de mesures, le rayon est mesuré sur les 10 dernières images prises toutes les 10 s durant les 100 dernières secondes passées à un palier. Un exemple est présenté en Fig. 3.47 ; ce graphe correspond à la réalisation complète d'une expérience dans laquelle la cellule rotative est lancée à 4 Hz puis la fréquence est augmentée jusqu'à 12 Hz par sauts de fréquence de 2 Hz puis elle est diminuée jusqu'à 6 Hz pour être augmentée à nouveau. Les flèches placées sur la courbe indiquent le chemin suivi durant les trois premières étapes. Nous avons choisi cet exemple pour présenter une figure lisible mais dans la plupart des expériences, un plus grand nombre d'aller-retours en fréquence est réalisé.

Nous observons qu'après quelques paliers de vitesse, le rayon de giration devient approximativement une fonction linéaire de la fréquence. En d'autres termes, la variation du rayon de giration due à une perturbation en fréquence est réversible. Le nombre de paliers nécessaires pour atteindre la branche réversible n'est pas constant. Cependant il n'est pas nécessaire que la fréquence commence à décroître pour que le rayon évolue réversiblement comme c'est le cas sur le graphe de Fig. 3.47 : dès le premier passage à 8 Hz, le rayon est linéaire en fréquence. Par ailleurs, nous remarquons que lorsque le rayon évolue sur cette branche, la géométrie du fil plié ne change pas d'un palier à l'autre c'est-à-dire que les grandeurs topologiques sont conservées. Les images de Fig. 3.48 montrent l'évolution d'une configuration lorsque la fréquence diminue. La géométrie est dilatée mais le nombre de boucles est constant. D'ailleurs, la position relative des boucles les unes par rapport aux autres n'est que peu modifiée. Cette invariance de forme n'est pas traduite par une invariance du nombre de branches ou de couches ; lorsque le fil est dilaté, des couches se décollent les unes des autres, créant ainsi de nouvelles branches. Il nous est donc impossible de fournir une mesure quantitative de cette invariance mais nous pensons que l'observation est suffisamment convaincante pour que l'on considère que la configuration reste la même.

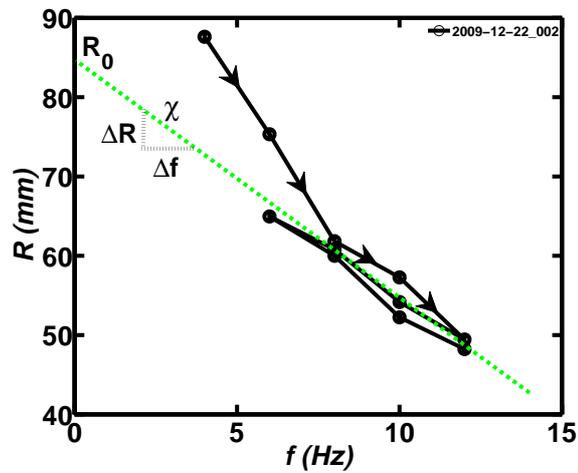


FIG. 3.47 – Graphe de l'évolution du rayon de giration lors d'une expérience palier. Dans cet exemple, la cellule est mise en rotation à  $4 \text{ Hz}$ . Le rayon de giration est mesuré une fois l'équilibre atteint puis la fréquence est augmentée à  $6 \text{ Hz}$ , l'équilibre est atteint, etc. Lorsque la fréquence de  $12 \text{ Hz}$  est atteinte, on diminue la fréquence par paliers jusqu'à  $6 \text{ Hz}$  pour l'augmenter à nouveau. Après quelques étapes de compaction (trois dans cet exemple), le rayon devient une fonction linéaire de la fréquence. L'équation de cette droite est donnée par  $R = \chi f + R_0$ .

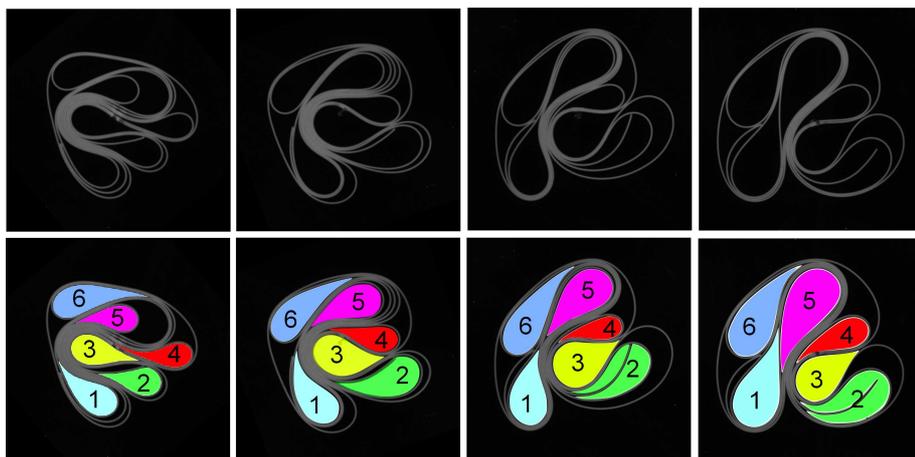


FIG. 3.48 – Evolution de la configuration lors d'une expérience palier. Lorsque l'intensité de confinement varie, les grandeurs topologiques et géométriques de la configuration sont conservées. La seconde ligne d'images permet de voir que la position relative des boucles les unes par rapport aux autres varie peu. Le fil est comprimé, comme un solide souple, sous la perturbation en fréquence mais il n'est pas soumis à des réorganisations géométriques.

Le fil est comprimé et décomprimé en restant piégé dans la configuration initialement sélectionnée. L'objet semble respirer sans que la perturbation n'induisse de changements dans sa géométrie. Le fil plié peut alors être traité comme un solide souple dont la taille dépend de la contrainte appliquée. La variation du rayon lors d'une perturbation de la fréquence, donc la pente de la branche réversible de  $R(f)$ , définit la susceptibilité du système, notée  $\chi = \partial R / \partial f$ . On la désignera comme étant la « compressibilité » de la configuration bien que le terme ne soit pas exact : le volume du solide correspond ici à son rayon et la pression correspond à la fréquence. A chaque expérience correspond une fonction linéaire  $R(f) = \chi f + R_0$  unique. Une configuration est caractérisée par deux grandeurs : sa « compressibilité »  $\chi$  et un rayon caractéristique  $R_0$ , indépendant de l'intensité du confinement, que l'on choisit comme étant l'ordonnée à l'origine de la droite  $R(f)$ .

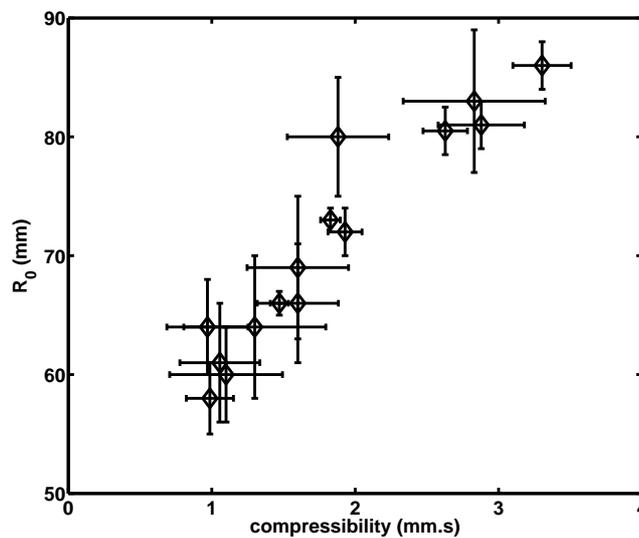


FIG. 3.49 – Graphe du rayon caractéristique  $R_0$  en fonction de la compressibilité  $\chi$ . Chaque point correspond à une réalisation d'une expérience palier ; ils collapsent sur la courbe maîtresse quelque soit l'intensité de confinement.

En perturbant en fréquence une configuration donnée, on mesure le couple  $(\chi, R_0)$  que l'on place sur le graphe de Fig. 3.49. Notez que chaque point de ce graphe correspond à une expérience réalisée suivant le protocole présenté précédemment ; il est donc indépendant de la fréquence de rotation de la cellule. Cette mesure montre que le rayon caractéristique est une fonction linéaire croissante de la compressibilité. Or nous avons montré dans la section 3.7.1 qu'ordre et taille sont liés ; une configuration ordonnée a un petit rayon, une configuration désordonnée a un grand rayon. Le graphe de Fig. 3.49 apporte une information supplémentaire : une configuration ordonnée a un petit rayon et une faible compressibilité tandis qu'une configuration désordonnée a un grand rayon et une forte compressibilité. C'est ici notre résultat principal. Ce phénomène est finalement intuitif. Plus la configuration est ordonnée, plus le nombre de couches superposées est grand. Les forces de frottements inter-couches sont grandes et le système répondra avec une faible amplitude de mouvement à une perturbation mécanique. Une géométrie désordonnée présente, elle,

un grand nombre de boucles ayant une forte courbure, elle se déplie facilement dès que le confinement est relâché.

Nous souhaitons faire remarquer que la courbe de l'évolution du rayon de giration en fonction de la fréquence (Fig. 3.47) est analogue aux courbes de densité d'un empilement granulaire soumis à des tapes d'amplitude variable, obtenues par Nowak et al. [Nowak et al., 1997] (Fig. 3.50). L'amplitude des tapes est successivement augmentée puis diminuée ; la densité commence par augmenter puis elle évolue sur une branche réversible. Les auteurs notent que la pente de la partie réversible de la courbe dépend de la taille des grains : plus les grains sont gros, plus la pente est grande donc plus l'empilement est « compressible ». L'explication proposée est que les configurations de l'empilement sont plus instables lorsque les grains sont gros car il y a plus de vides ; elles ont donc plus de facilité à se réorganiser sous l'influence des perturbations. Nous interprétons nos résultats de la même façon : les nombreuses boucles des configurations désordonnées ont plus de facilité à se déplier que les couches de fil superposées. Cette analogie entre deux expériences absolument différentes nous permet d'évoquer une nouvelle fois la présence de jamming dans les systèmes confinés. Une différence majeure des processus de décompaction est cependant à noter : sous une perturbation, l'empilement granulaire se réorganise et atteint de nouvelles configurations d'équilibre tandis que le système confiné reste bloqué dans la même configuration.

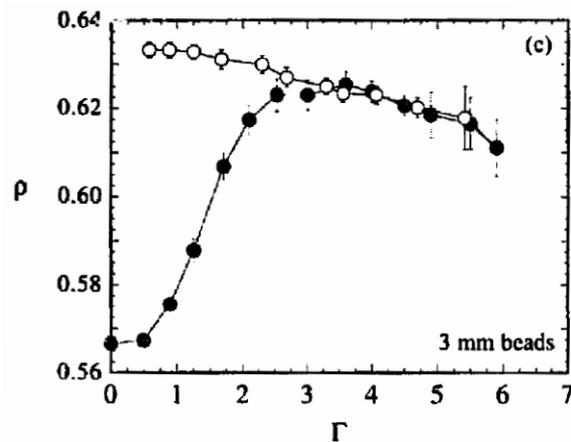


FIG. 3.50 – Densité volumique d'un empilement de billes perturbées par des séries de tapes d'amplitude  $\Gamma$  croissante puis décroissante. Figure extraite de [Nowak et al., 1997].

Pour caractériser le désordre d'une configuration, une première méthode consiste à mesurer sa taille, ici son rayon. Plus il est grand, plus le désordre est grand. Cependant, cela impose de connaître le potentiel de confinement car le rayon de giration dépend de l'intensité du confinement. La deuxième méthode est indépendante de l'intensité du confinement. Elle consiste à appuyer sur l'objet confiné pour tester sa souplesse. Dans notre système, la variation de l'intensité du potentiel de confinement nous permet de réaliser ce sondage mais il est bien sûr possible d'imaginer d'autres moyens de sondages pour des systèmes différents. Cependant, il est important que la totalité du matériau ressente la perturbation. Par exemple, appuyer localement à la surface de l'objet ne permettrait pas d'intégrer l'information sur toute la configuration et la mesure de compressibilité serait biaisée. L'in-

térêt de cette méthode est qu'il est possible de mesurer le désordre de la géométrie d'un objet confiné sans connaître le potentiel de confinement et sans avoir accès à la géométrie locale ; seule une mesure du rayon suffit. Cette méthode est ici testée pour un objet à deux dimensions mais nous pensons qu'elle est généralisable à un objet tridimensionnel.

### 3.7.3 Résumé

Nous proposons une méthode permettant de quantifier le désordre d'une configuration. Le terme désordre désigne la différence entre une configuration quelconque et la configuration accessible la plus ordonnée, la spirale. Nous avons d'abord montré que la taille de l'objet dans une configuration désordonnée est supérieure à celle d'un objet dans une configuration ordonnée. Ensuite, nous avons montré que les propriétés mécaniques du solide effectif que forme le système confiné, à travers sa compressibilité, traduisent le désordre géométrique présent à l'intérieur de l'objet. Nous pensons que ce résultat est généralisable à trois dimensions. L'intérêt pratique d'un tel résultat est évident : il suffit de tester la résistance à des contraintes d'un objet confiné pour sonder sa structure interne.

Un résultat important est que plus le système est confiné, plus les configurations sont ordonnées. Ceci est en accord avec les mesures statistiques effectuées précédemment.



# Chapitre 4

## Conclusions

COMPLIQUER : *v.tr. XIV<sup>e</sup> s. Emprunté du latin complicare, « lier ensemble, envelopper, plier en roulant ».*

Dictionnaire de l'Académie Française

Dans cette première partie nous avons rapporté les résultats de deux expériences, l'une permettant d'observer les premiers stades du confinement d'un anneau unidimensionnel dans un plan, l'autre permettant d'accéder aux géométries confinées d'un fil dans un plan, à des taux de confinement élevés.

Dans l'expérience du confinement d'un anneau de gel en croissance, l'état initial est parfaitement contrôlé et l'évolution de la configuration de l'anneau peut se faire sans aucune perte d'ergodicité : l'intérêt majeur de ce dispositif est qu'il est possible de visiter la totalité de l'espace des phases. De plus, la dynamique de repliement est suffisamment lente et les intensités de confinement finales suffisamment faibles pour que l'on puisse suivre exactement l'évolution de la géométrie de l'anneau. Au cours de cette étude, nous avons montré que le nombre de configurations accessibles augmente rapidement avec le confinement et que la complexité ou le désordre émerge dès les toutes premières bifurcations. Nous avons mis en évidence deux types d'évolution, l'une correspondant à une dynamique lente de confinement qui permet à l'anneau d'approcher l'état d'énergie fondamentale, l'autre correspondant à un *quenching* (ou trempe) du système, gelant le désordre déjà développé au moment du blocage, ce qui force le système à atteindre des configurations de haute énergie. Les conclusions principales de cette étude sont que l'espace des phases s'élargit au fur et à mesure que l'énergie est injectée dans le système et que les configurations se complexifient au cours du confinement.

L'originalité de la seconde expérience, la compaction d'un fil dans un plan par centripétation, est d'abord de pouvoir confiner une tige élastique de manière réversible, sans imposer de conditions aux bords rigides, ensuite de pouvoir contrôler la force nécessaire pour créer les structures confinées tout en visualisant la géométrie en confinement. Un dernier point intéressant, que nous pourrions exploiter plus particulièrement par la suite, est de pouvoir suivre la dynamique de repliement. De nombreuses pistes d'études sont possibles grâce à ce dispositif, nous y reviendrons dans la conclusion de cette thèse. Nous

avons choisi de nous intéresser aux propriétés statistiques et mécaniques des configurations confinées à l'équilibre. Nous avons montré que le confinement a tendance à ordonner les configurations par un processus de *stacking*. Dans la littérature, des études sur d'autres systèmes compactés mettent également en évidence la présence de cet ordre dû au *stacking*. Notre apport a été de montrer l'émergence de cet ordre par augmentation du confinement. Nous avons également mis en évidence l'existence d'un anneau virtuel confinant qui impose le comportement du système aussi bien du point de vue géométrique qu'énergétique. Dans une deuxième partie de l'étude, nous avons pu définir précisément le désordre d'une géométrie confinée et nous l'avons relié à la taille et aux propriétés mécaniques de l'objet confiné.

De la première expérience, nous apprenons que la complexité émerge lorsque le confinement augmente, de la deuxième, nous apprenons que le confinement ordonne les configurations. Nous résumons ces deux assertions de la façon suivante : en augmentant le confinement, l'énergie de l'état fondamental est augmentée et les configurations sélectionnées en sont des états excités. L'espace des configurations accessibles s'élargit (augmentation de la complexité) mais plus le confinement est fort, plus les configurations sélectionnées au sein de l'espace des phases sont proches de l'état fondamental (augmentation de l'ordre). Nous tentons une schématisation de cette interprétation en Fig. 4.1. Finalement, la première expérience nous donne une information sur l'évolution de l'espace des phases, la seconde sur le parcours des configurations dans cet espace.

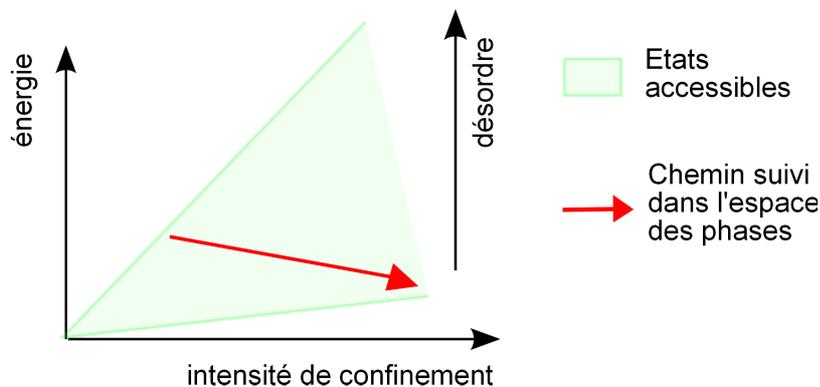
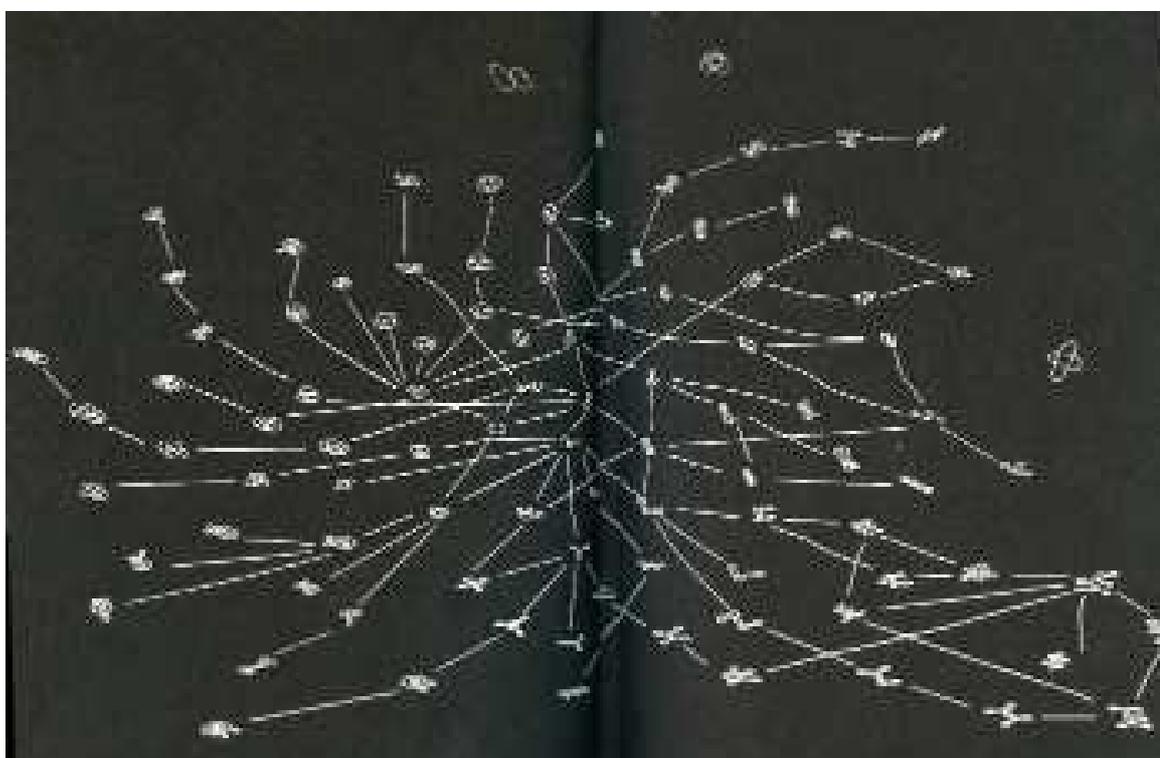


FIG. 4.1 – Schéma de l'espace des phases s'élargissant avec un confinement croissant. Les configurations sélectionnées dans cette espace s'ordonnent avec le confinement.

Je souhaite clôturer cette partie en montrant que les objets que nous avons étudiés sont esthétiques et pas seulement au travers des yeux d'un physicien. L'artiste circassien Johann le Guillerm s'intéresse comme nous aux formes sous diverses transformations. Nous ne montrons ici que son chantier des élastiques qui n'est autre qu'un diagramme des bifurcations possibles d'un anneau élastique, sous deux transformations : boucle intérieure ou boucle extérieure.





Deuxième partie

Fracture



## Chapitre 5

# Éléments de la théorie de la fracture

La fracture est le fait de créer des surfaces dans un corps initialement cohérent. A l'échelle microscopique, la physique de la rupture est identique d'un système à l'autre. Il s'agit de briser des liaisons moléculaires afin de créer de nouvelles interfaces. Mais dès l'échelle mésoscopique le mot *fracture* s'avère décrire différents phénomènes. Le matériau est fragile ou ductile ce qui donne une indication sur la taille de la zone endommagée par la fracturation. A l'échelle macroscopique, on observe une multitude de comportements possibles : la fracture peut être dynamique ou statique (ces termes seront définis par la suite), de fatigue, de fluage. L'objet peut avoir une taille moléculaire jusqu'à une taille comparable à celle de la Terre. Finalement, étudier la fracture est d'une grande complexité : les mêmes phénomènes physiques donnent lieu à des manifestations très diverses. Nous devons comprendre ce qui les différencie pour pouvoir les prédire. Les problèmes à étudier peuvent être groupés de la façon suivante : la nucléation, la propagation, le chemin suivi et les interactions entre fissures.

Pratiquement, nous n'avons que peu affaire au problème de nucléation ; tous les matériaux contiennent des microfissures qui se propagent si le matériau est chargé ; très peu de fissures « fraîches » sont créées. Nous n'aborderons pas ce point dans ce manuscrit. Etablir des critères quantitatifs de la propagation est un enjeu essentiel pour la science des matériaux. Il est absolument nécessaire de savoir quelle charge un objet peut supporter sans qu'une microfissure existante ne se propage. Quand la fissure se propage, ce sont le type de chargement, les conditions aux limites, la nature du matériau qui décident de la trajectoire.

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions qui seront utilisées dans la suite. Ce sera assez sommaire ; nous renvoyons à la lecture d'ouvrages spécialisés pour connaître le détail des développements analytiques et pour avoir des précisions supplémentaires [Broberg, 1999, Lawn, 1993, Leblond, 2003]. Nous commencerons par décrire les critères de propagation qui ont été établis au cours du XX<sup>e</sup> siècle. Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons à la trajectoire d'une fissure dans un matériau fragile ainsi qu'à sa stabilité.

## 5.1 Pourquoi étudier la fracture

Le problème de la résistance des matériaux a commencé à être étudié systématiquement au cours de la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle même si des travaux plus anciens liés à la fracture sont connus (Galilée en 1638). Des accidents comme celui du Schenectady (Fig. 5.1), un paquebot fait d'acier, pose la question de la fragilité des métaux sous certaines conditions : une fracture fragile s'est propagée dans le bâtiment dès sa mise à l'eau en 1943, le coupant en deux sans raison évidente. Peu brillamment, la science militaire a permis de grands progrès dans ce domaine car les torpilles et autres objets du genre avaient pour but de détruire les bâtiments visés en les fracturant. Au cours du XX<sup>e</sup> siècle, de nouvelles



FIG. 5.1 – Le Schenectady, un paquebot militaire américain d'acier qui s'est spontanément coupé en deux lors de sa mise à l'eau.

méthodes ont permis de détecter les fissures au sein d'un matériau. On découvre alors qu'aucun solide n'est exempt de fissure. Par la suite, la question a été de savoir quelle charge pouvait supporter un objet sans que ses fissures internes ne se propagent.

La vie moderne apporte son lot de problèmes liés à la fracture dans les films minces. Les supermarchés sont emplis de produits emballés dans des films protecteurs assez résistants pour supporter le transport et suffisamment hermétiques pour conserver la fraîcheur, obligeant les employés de l'industrie agroalimentaire à inventer une multitude de procédés regroupés sous le nom d'ouvertures faciles. Cela fonctionne plus ou moins bien (Fig. 5.2). Le capuchon du pot de yaourt est collé sur la périphérie du pot : qui réussit à tous les coups à le décoller sans le déchirer ? L'enveloppe plastique d'un CD peut rapidement devenir une source de stress pour qui n'arrive pas à prendre en main la languette de l'ouverture facile.

En géophysique, la mécanique de la rupture permet d'expliquer un certain nombre de mécanismes liés aux séismes [Aki and Richards, 1980]. Dans ce domaine, le problème est inverse : connaissant les déformations du terrain en surface, est-il possible de déterminer la géométrie et l'activité de la fracture présente en profondeur ?



FIG. 5.2 – Les enjeux du packaging vus par Gosciny et Gotlib. Vignettes extraites de [Gosciny and Gotlib, 1972].

## 5.2 Critères de propagation

### 5.2.1 Concentration des contraintes

Considérons un solide contenant une seule fissure. L'observation montre que le solide casse à cet endroit et non en n'importe quel autre point. Cela signifie que des contraintes appliquées uniformément à un solide se concentrent autour de la fissure. Inglis l'a montré en 1913 en établissant l'expression du champ de contraintes en présence d'un trou de forme elliptique [Inglis, 1913]. Nous ne détaillons pas le calcul mais nous en présentons les grandes lignes.

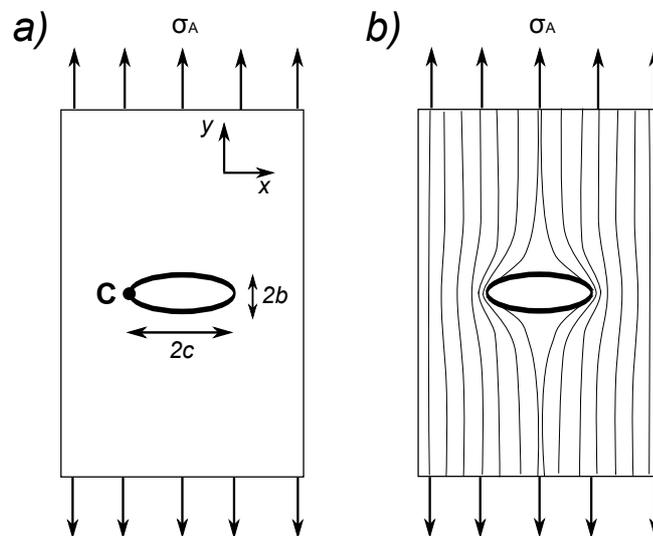


FIG. 5.3 – a) Un trou elliptique de demi axes  $c$  et  $b$  est initié dans un solide de dimensions infinies auquel la contrainte uniaxiale  $\sigma_A$  est appliquée. (b) Schéma des lignes de déformations induites par des contraintes extérieures  $\sigma_A$  dans un solide contenant un trou elliptique. La distance entre deux lignes schématise l'intensité des contraintes : plus la distance est petite, plus les contraintes sont grandes.

Soit un solide de taille infinie dans lequel est introduit un trou elliptique de demi grand axe  $c$  et de demi petit axe  $b$  (Fig. 5.3a). La contrainte  $\sigma_A$  est appliquée aux bords dans la

direction normale au grand axe de la fissure. L'équation paramétrique de l'ellipse est :

$$x(t) = c \cos(t)$$

$$y(t) = b \sin(t)$$

Inglis montre que la contrainte au point C s'exprime comme :

$$\sigma_C = \sigma_A \left( 1 + \frac{2c}{b} \right) \quad (5.1)$$

Sachant qu'au point C le rayon de courbure  $\rho$  atteint un minimum, il est donné par :

$$\rho = \frac{b^2}{c}, \quad (5.2)$$

$\sigma_C$  peut être exprimée en fonction de  $\rho$  :

$$\sigma_C = \sigma_A \left( 1 + 2 \left( \frac{c}{\rho} \right)^{1/2} \right). \quad (5.3)$$

Dans le cas où  $b \ll c$ , c'est-à-dire  $\rho \ll 1$  le rapport des contraintes devient :

$$\frac{\sigma_C}{\sigma_A} = 2 \left( \frac{c}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Plus l'ellipse est pointue, plus la contrainte à son extrémité est forte (Fig. 5.3b). Le calcul d'Inglis permet de montrer que dans un matériau chargé, les contraintes sont localement démultipliées dans une zone proche d'une hétérogénéité, par exemple une microfissure ou un défaut du cristal. Le matériau casse à l'endroit où les contraintes sont les plus fortes donc à l'endroit de l'hétérogénéité. En résumé, il est nécessaire de considérer indépendamment deux phénomènes, le chargement du solide à grande échelle et la rupture locale autour de la pointe de la fissure car les ordres de grandeurs des contraintes appliquées sont incomparables. A grande échelle, les contraintes sont faibles et ne font que déformer le solide tandis qu'autour de la pointe de la fissure, l'énergie apportée est suffisante pour casser des liaisons moléculaires ; dans cette zone, le matériau est irréversiblement endommagé. Elle est désignée par le terme *process zone* ou zone active. Les déformations dans la zone active sont trop importantes pour être décrites par la théorie de l'élasticité linéaire (LEFM). Hopkinson propose en 1913 de prendre en compte les non-linéarités à la pointe de la fissure [Hopkinson, 1913]. La théorie de Griffith en 1920 permet d'écarter cette difficulté. Il considère la propagation d'une fissure d'un point de vue énergétique, regroupant les phénomènes qui se produisent à la pointe de la fissure dans un terme d'énergie de surface.

### 5.2.2 Aspects énergétiques

En 1920, Griffith établit un critère de propagation d'une fissure isolée en utilisant une approche thermodynamique [Griffith, 1920]. Il considère le solide contenant une fissure en propagation statique comme un système soumis à une transformation thermodynamique réversible. Lorsque le solide est chargé, la fissure se propage de façon à minimiser l'énergie libre du système. L'énergie totale  $U$  du système contient un terme d'énergie mécanique et

un terme d'énergie de surface. L'énergie mécanique  $U_M$  est la somme de l'énergie potentielle élastique stockée par le solide et l'énergie introduite par le chargement extérieur, qui est en fait l'inverse du travail fourni pour déplacer les points d'application de la force. Le terme d'énergie de surface permet de regrouper les phénomènes complexes qui se produisent dans la zone active. On considère qu'une certaine énergie  $U_S$  est nécessaire pour casser les liaisons moléculaires et créer de nouvelles surfaces. L'énergie totale du système est  $U = U_M + U_S$ . L'équilibre thermodynamique est atteint lorsque l'énergie totale est minimisée. On comprend que lorsque la fissure avance, des contraintes élastiques sont relâchées et donc  $dU_M/dl < 0$  où  $l$  est la longueur de la fissure. L'énergie mécanique stockée favorise donc l'extension de la fissure. En revanche, la surface de la fissure augmente lors de la propagation donc la variation d'énergie de surface est positive  $dU_S/dl > 0$ ; l'énergie de surface s'oppose à la propagation. Le critère d'équilibre d'une fissure s'écrit :

$$\frac{dU}{dl} = 0, \quad (5.5)$$

Plus quantitativement, nous introduisons  $\gamma$  l'énergie nécessaire pour créer une unité de surface. Lorsque la fissure se propage d'une longueur  $dl$ , l'énergie de surface augmente d'une quantité  $dU_S = 2\gamma dl$ , le facteur 2 traduisant le fait que deux surfaces sont créées. Nous définissons également  $G$ , le taux de restitution d'énergie mécanique, défini comme :

$$G = -\frac{dU_M}{dl}. \quad (5.6)$$

L'équilibre thermodynamique est atteint lorsque :

$$G = 2\gamma. \quad (5.7)$$

Cette relation traduit le fait que lorsque la fissure se propage, la variation d'énergie mécanique est transformée en énergie de surface.  $G$  peut être interprétée comme une force par unité de longueur. Nous pouvons formuler cette équation comme un critère de propagation : pour que la fissure se propage, la force exercée sur les bords de la fissure doit être supérieure ou égale à  $G$ .

Cette théorie est trop simple pour décrire complètement la propagation d'une fissure. Elle considère que la propagation est réversible alors que la fracture est un processus intrinsèquement irréversible. Des améliorations ont été apportées à posteriori par Bui et al [Bui et al., 1980] en émettant de nouvelles hypothèses. Ils introduisent un terme  $G_c$  d'énergie dissipée par unité de longueur d'avancée de la fissure. La condition de propagation devient :

$$G = G_c \quad (5.8)$$

où  $G$  est encore le taux de restitution d'énergie mécanique. La dissipation d'énergie est localisée dans la zone active dans laquelle les déformations sont plastiques. Comme cette zone est de petite taille et éloignée des bords, on peut penser que sa forme ne dépend pas du chargement appliqué. Si c'est le cas, l'énergie dissipée par unité de longueur,  $G_c$ , serait une grandeur indépendante du chargement. On pourrait l'imaginer être une caractéristique du matériau ou dépendre de grandeurs telles que la vitesse de propagation de la fissure.

Une description complète du processus nécessite de prendre en compte les phénomènes à une échelle moléculaire. Griffith estime que les contraintes à la pointe de la fissure doivent être de l'ordre des contraintes de cohésion du solide, c'est-à-dire la contrainte seuil au-delà de laquelle les liaisons chimiques dans le matériau sont rompues. Il réalise des expériences sur des verres et montre que le matériau casse pour des valeurs de contraintes de deux ordres de grandeurs plus petits que ceux attendus théoriquement. Il en conclut que les matériaux contiennent une multitude de défauts (microfissures, vides) autour desquels apparaît une fissure macroscopique et qui diminuent très fortement la résistance d'un matériau. Finalement, la question de la nucléation d'une fissure ne peut être résolue que de manière probabiliste puisque la distribution statistique des défauts dans le solide y joue un grand rôle.

La théorie de Griffith établit un critère de propagation mais ne prédit pas la trajectoire d'une fissure. Plus tard, Irwin développe une théorie qui découle naturellement de la formulation thermodynamique de Griffith pour prédire les trajectoires selon le chargement appliqué. Nous considérons dans la suite une fissure isolée dans un solide parfait, c'est-à-dire sans microfissures.

### 5.2.3 Facteurs d'intensité

Avant de continuer, distinguons trois modes de déformations, schématisés sur Fig. 5.4. Le mode I ou mode d'ouverture correspond à une propagation dans la direction perpendiculaire aux forces exercées. Le mode II est aussi appelé mode de cisaillement dans le plan. Le mode III est un mode de cisaillement hors du plan dans lequel la fissure est propagée dans la direction transverse au plan des forces appliquées.

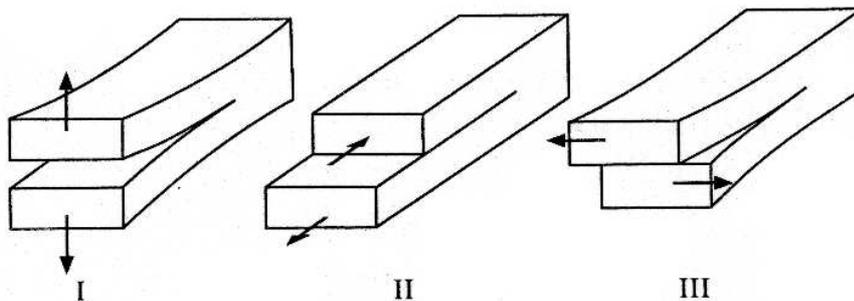


FIG. 5.4 – Les trois modes de fracture. I : mode d'ouverture, II : mode de cisaillement dans le plan, III : mode de cisaillement hors du plan. Figure extraite de [Lawn, 1993].

En 1958, Irwin établit l'expression analytique du champ de contraintes autour d'une fissure en résolvant les équations de l'élasticité linéaire [Irwin, 1958]. Chaque mode de propagation peut être décrit indépendamment des autres. Pour une fissure en forme de fente, l'expression des contraintes dans le plan décrit par le système de coordonnées  $(r, \phi)$  s'exprime sous une forme simple :

$$\sigma_{ij}(r, \phi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\phi) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\phi) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\phi) + O(r^0), \quad (5.9)$$

où  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont les facteurs d'intensités de contraintes des trois modes de propagation et les  $f_{ij}$  des fonctions de la position angulaire  $\phi$ . Comme il était prévu par la théorie d'Inglis, les contraintes sont concentrées à la pointe de la fissure et divergent en  $r = 0$ .

Une expression du taux de restitution d'énergie  $G$  en fonction des facteurs d'intensité  $K$  peut être obtenue en calculant l'énergie élastique relâchée lors de la propagation de la fissure en utilisant l'expression du champ de contrainte donné Eq. 5.9. On obtient alors :

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2 (1 + \nu)}{E} . \quad (5.10)$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

Un critère de propagation serait de formuler un seuil de contrainte au-delà de laquelle la fissure se propagerait. Mais les contraintes à la pointe divergent, il n'est donc pas possible de décider d'un seuil. Irwin propose de considérer un seuil sur le facteur d'intensité des contraintes qui mesure l'intensité des contraintes autour de la singularité, malgré la divergence. Finalement, la résistance à la fracture d'un matériau est mesurée par la ténacité  $K_{Ic}$  qui est le facteur d'intensité des contraintes minimales à appliquer en mode I pour initier la propagation d'une fissure. Une fissure rectiligne de longueur  $w$  est initiée dans un solide de dimensions infinies. Le solide est soumis à des contraintes d'étirement, perpendiculairement à la fissure (mode I). La fissure se propage au-delà d'une contrainte seuil  $\sigma_A$ . La ténacité est donnée par :

$$K_{Ic} = \sigma_A \sqrt{\frac{\pi}{2} w} \quad (5.11)$$

Notez que deux pointes de fissures doivent se propager. Dans le cas d'un solide de dimensions finies, un facteur géométrique intervient mais la dépendance en  $w$  n'est pas modifiée.

Les quantités  $G$  et  $K$  permettent de caractériser la force motrice de la propagation de la fissure. Cependant, d'autres critères sont nécessaires pour prédire la trajectoire d'une fissure.

## 5.3 Trajectoire d'une fissure

### 5.3.1 Stabilité d'une fissure

Dans l'étude qui suit, nous ne considérons que des fissures en propagation quasistatique. Nous précisons ici le terme *statique*. D'après la théorie de Griffith (section 5.2.2), la longueur d'une fissure est sélectionnée de manière à assurer l'équilibre entre l'énergie potentielle du solide, incluant l'énergie élastique de déformation et l'énergie apportée par le chargement extérieur et l'énergie de surface du matériel. Pour un chargement fixé, nous déterminons la longueur d'équilibre de la fissure  $l_c$ . Considérons un solide de forme rectangulaire dans lequel est initiée une fissure (Fig. 5.5). Les bras du solide sont déplacés dans la direction normale à l'axe de la fissure. Le chargement extérieur peut être soit un déplacement constant d'une quantité  $\delta$  de chaque bras, soit une force constante  $P$ . L'épaisseur dans la direction perpendiculaire au plan de la page est unitaire. Selon la théorie des

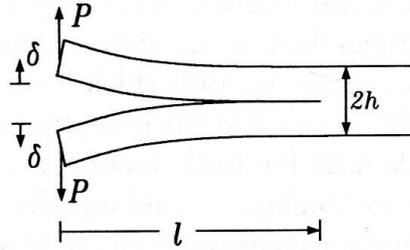


FIG. 5.5 – Une fissure de longueur  $l$  est propagée dans un solide par un déplacement  $\delta$  de chaque bras, d'épaisseur  $h$ , induit par une force  $P$ . Figure extraite de [Freund, 1990], chap.1, p.5.

poutres de Bernoulli-Euler, la force  $P$  nécessaire pour fléchir de  $\delta$  une poutre de longueur  $l$  encastrée à une de ses extrémités est :

$$P = \frac{Eh^3}{4l^3} \delta \quad (5.12)$$

où les notations utilisées sont celles présentées Fig. 5.5. L'énergie élastique stockée dans le solide est alors :

$$P\delta = \frac{Eh^3}{4l^3} \delta^2 = \frac{4l^3}{Eh^3} P^2 \quad (5.13)$$

A déplacement fixé  $\delta^*$ , l'énergie mécanique est  $U_M = Eh^3\delta^{*2}/4l^3$ . L'énergie de surface est  $U_S = 2\gamma l$  où  $\gamma$  est l'énergie par unité de longueur. En minimisant l'énergie totale  $U_t = U_M + U_S$  par rapport à la longueur de la fissure  $l$ , on obtient une longueur d'équilibre :

$$l_c = \left( \frac{3Eh^3\delta^{*2}}{8\gamma} \right)^{1/4} \quad (5.14)$$

Nous pouvons vérifier que la longueur  $l_c$  correspond à un équilibre stable car :

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2}(U_M + U_S) = \frac{3Eh^3\delta^{*2}}{l^5} > 0 \quad (5.15)$$

Le profil des énergies est tracé en fonction de la longueur  $l$  de la fissure sur Fig. 5.6a. Les courbes sont extraites de [Freund, 1990] dans lequel  $\Omega = U_M$  et  $\Omega_S = U_S$ . L'énergie totale, en pointillé, présente bien un minimum pour  $l = l_c$ . Cela signifie qu'en imposant un déplacement  $\delta^*$  des points de chargement, la fissure se propage jusqu'à atteindre la longueur d'équilibre puis elle s'arrête. En augmentant  $\delta^*$  d'une quantité infinitésimale, la fissure se propagera sur une longueur infinitésimale. Cela correspond à une propagation statique de la fissure.

Le même raisonnement peut être fait lorsque le chargement est à force constante. Dans ce cas, la longueur d'équilibre correspond à un maximum d'énergie et donc à un équilibre instable (Fig. 5.6b). Une fois la longueur  $l_c$  atteinte, la fissure continuera à se propager de façon à diminuer l'énergie du système et il ne sera plus possible d'atteindre une configuration d'équilibre. Cette propagation est dite dynamique. Nous n'aborderons pas ce type de propagation dans cette thèse.

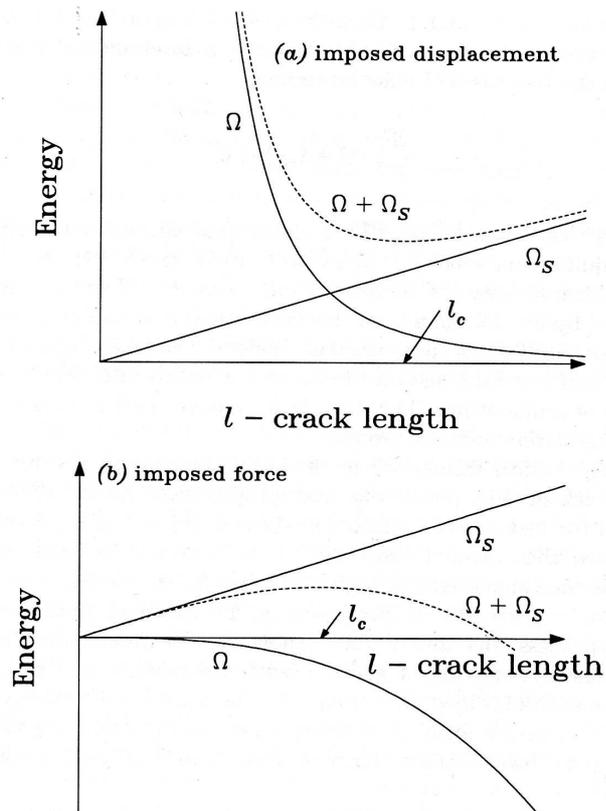


FIG. 5.6 – Variation de l'énergie avec la longueur de fissure  $l$  pour (a) un déplacement imposé des points de chargement, (b) une force imposée. Sur cette figure,  $\Omega$  est l'énergie mécanique  $U_M$ ,  $\Omega_S$  est l'énergie de surface  $U_S$ . La variation de l'énergie totale est représentée par la courbe tiretée. Figure extraite de [Freund, 1990], chap.1, p.7.

### 5.3.2 Stabilité de la trajectoire

Avant d'établir un critère permettant de prédire la trajectoire sélectionnée lors de la propagation d'une fissure dans un plan, les observations suivantes ont été faites :

- La trajectoire d'une fissure centrée dans un plan et soumise à des contraintes d'ouverture (mode I) est rectiligne (Fig. 5.7).
- La trajectoire d'une fissure soumise à un cisaillement (mode II) est déviée afin que la fissure se propage perpendiculairement aux contraintes imposées soit en mode I (Fig. 5.8).
- La trajectoire d'une fissure initialement perpendiculaire aux forces appliquées mais décentrée par rapport à l'axe de symétrie de l'échantillon est déviée et rejoint l'axe central.

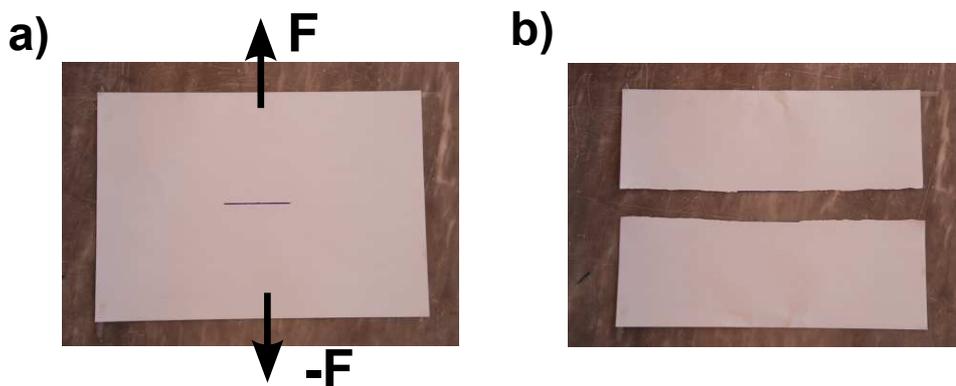


FIG. 5.7 – (a) Des contraintes sont appliquées perpendiculairement à une fissure initiée dans une feuille de papier (mode I). (b) La trajectoire de la fissure est rectiligne.

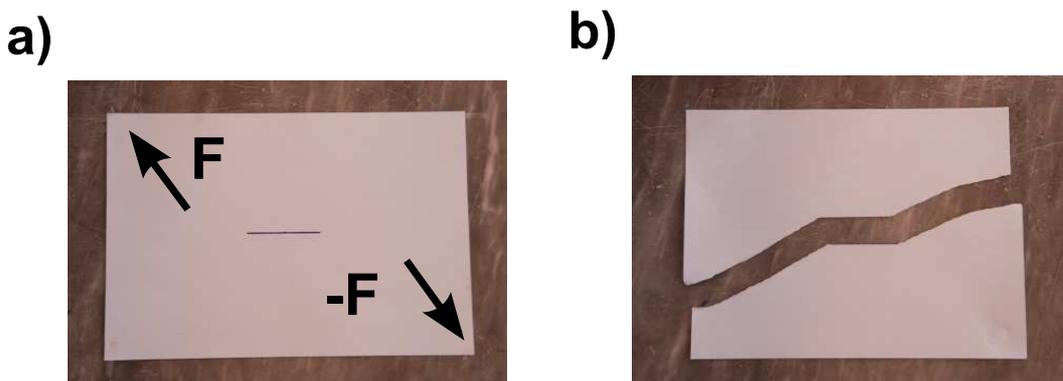


FIG. 5.8 – (a) Des contraintes de cisaillement et d'ouverture sont appliquées à une fissure initiée dans une feuille de papier (mode I+II). (b) La trajectoire de la fissure dévie de la direction initiale afin de se propager perpendiculairement aux contraintes imposées soit en mode I.

La seconde observation suggère que la trajectoire de la fissure est choisie de façon à annuler les contraintes de cisaillement au voisinage de la pointe de la fissure : une fissure propagée en mode mixte I+II est déviée de façon à éliminer la composante de mode II. La troisième

observation résulte également de l'annulation des contraintes cisailantes : la dissymétrie de la configuration introduit un mode II à la pointe de la fissure qui sont annulées lors de la propagation. Gold'stein et Sagalnik le formulent à travers le principe de symétrie locale (PLS pour *Principle of Local Symmetry*) [Gol'dstein and Sagalnik, 1974, Leblond, 1989] :

$$K_{II} = 0 \quad (5.16)$$

Une seconde approche (*maximum energy release rate criterion*) considère qu'une fissure se propage dans la direction selon laquelle l'énergie élastique relâchée est maximale [Erdogan and Sih, 1963]. Les prédictions émanant de ces deux principes sont quasiment équivalentes.

Concernant la trajectoire d'une fissure propagée en mode de cisaillement hors du plan ou mode III, il n'existe pas de critère bien établi. Il semble admis qu'ici encore, la trajectoire choisie est celle qui permet une propagation en mode I pur. Cependant, différents comportements de la trajectoire sont observés. Le front d'une fissure initiée dans un solide et propagée en mode mixte I+III tourne pour annuler les contraintes cisailantes à sa pointe. Dans certains cas, la rotation est abrupte [Sommer, 1969, Hourlier and Pineau, 1979], dans d'autres elle est graduelle [Palaniswamy and Knauss, 1975]. Des critères ont été proposés, le premier par Schollman [Schollmann et al., 2002], une extension du PLS en trois dimensions, le second par Lazarus [Lazarus et al., 2001] mais ils ne permettent pas de décrire la diversité des comportements d'une fissure.

Nous allons maintenant présenter les études expérimentales de propagation de fissures dans des films minces. La spécificité des films minces est qu'ils se courbent plus facilement qu'ils ne s'étirent contrairement aux solides épais. Leur comportement face au processus de fracturation en est modifié.



## Chapitre 6

# Propagation d'une fissure dans un film mince

La propagation d'une fissure dans un plan a été largement étudiée et les critères de propagation sont bien établis (section 5.2). En revanche, il n'existe pas encore de critère pour prévoir la propagation et la sélection du chemin d'une fissure en mode de cisaillement hors du plan. Il est intéressant de noter que Barenblatt, qui a proposé la description en facteurs d'intensité, s'est d'abord penché sur la propagation en mode III [Barenblatt and Cherepanov, 1961]. Sur la base d'arguments de symétrie, proches de ceux utilisés pour établir le PLS, il a proposé un critère ; mais les prédictions ne concordaient pas avec les observations. Comme nous l'avons évoqué section 5.3.2, il est admis que la trajectoire est sélectionnée de façon à annuler les contraintes de cisaillement à la pointe de la fissure aussi bien en mode II qu'en mode III. Jusqu'à maintenant ce critère a été invoqué pour expliquer le comportement d'une fissure propagée en mode III au démarrage de la propagation [Sommer, 1969, Hourlier and Pineau, 1979, Palaniswamy and Knauss, 1975] et non pour prédire sa trajectoire macroscopique.

De nombreux travaux ont été réalisés sur la propagation d'une fissure induite par des déformations hors du plan dans des matériaux ductiles [Hinkley and Hoogstraten, 1987, Muscat-Fenech et al., 1992]. Un plus petit nombre de travaux s'intéressent à cette propagation dans des matériaux fragiles [Lazarus et al., 2008]. Le champ de contraintes à la pointe de la fissure est complexe ce qui rend difficile une détermination propre de l'orientation de la fissure par rapport aux directions des contraintes présentes. Expérimentalement, choisir un système propre pour lequel les contraintes introduites sont connues est difficile. Par exemple, dans les matériaux épais, des effets de cisaillement de surface sont observés lorsque l'on introduit des déformations en mode III.

Notre dispositif expérimental s'inspire de la configuration du *trousers test* - la traduction littérale étant le test du pantalon, nous nous en tiendrons au terme anglais. Ce test a été développé par Rivlin et Thomas [Rivlin and Thomas, 1953]. Depuis le travail réalisé par Mai et Cotterell [Mai and Cotterell, 1984], il est utilisé pour mesurer le travail spécifique de rupture en déchirement d'un matériau ductile sous forme de feuilles [Wong et al., 2003]. L'originalité de notre étude est d'utiliser le *trousers test* pour un matériau fragile

sous forme de feuille (ou film mince). La totalité de l'énergie introduite à grande échelle par des déformations élastiques est utilisée pour créer de nouvelles surfaces à la pointe de la fissure contrairement aux matériaux ductiles pour lesquels une partie de l'énergie est perdue sous forme de déformations plastiques. Comme l'épaisseur du film est faible, les effets de cisaillement de surface disparaissent. Puisque toute l'énergie est utile, ce système permet de comprendre comment l'énergie est focalisée depuis les grandes échelles jusqu'à la fissure.

Dans cette étude, nous commençons par déterminer la trajectoire d'une fissure propagée à grande échelle en cisaillement hors du plan puis nous examinons le problème de la transmission des contraintes vers la fissure. Afin d'aider à la visualisation tridimensionnelle, nous vous proposons de garder pendant la lecture une feuille que vous aurez commencé à déchirer sans séparer complètement les deux parties.

## 6.1 Dispositif expérimental

### 6.1.1 La machine à déchirer

Nous avons élaboré un dispositif permettant de reproduire le geste que l'on fait lorsque l'on déchire une feuille en deux (Fig. 6.1). Il consiste en quatre cylindres de Plexiglas, de 8 mm de diamètre et de 20 cm de long, montés entre deux plaques métalliques. Deux cylindres remplacent les doigts dans les processus de déchirement, deux autres, placés en contre-bas et de part et d'autre des premiers, tirent le film et récoltent les parties déchirées. Ceux du haut sont libres de tourner sur eux-mêmes tandis que ceux du bas sont entraînés par un moteur à vitesse constante et de manière contra-rotative. Les vitesses accessibles sont comprises entre 0.05 et 1.5  $mm.s^{-1}$ . Pour étudier la propagation d'une seule fissure, nous initions aux ciseaux une fissure centrée dans un film mince depuis un des bords libres. Le film est inséré entre les deux cylindres supérieurs et chaque partie du film est rabattue puis fixée sur toute sa largeur sur le cylindre inférieur. Une fois les cylindres inférieurs mis en rotation, la fissure se propage; les languettes déchirées qui reposent sur les cylindres supérieurs sont à l'horizontale tandis que la partie non déchirée de la feuille pend à la verticale sous la machine. Les cylindres inférieurs collectent la partie déchirée du film; leur vitesse fixe la vitesse de propagation de la fissure. Nous faisons varier la longueur de la fissure en changeant l'espacement des deux cylindres supérieurs qui peuvent glisser horizontalement dans des fentes percées dans les plaques métalliques. Pour étudier la propagation simultanée de deux fissures, nous utilisons le même dispositif mais deux fissures sont initiées dans le film, symétriquement par rapport à l'axe central. Les deux parties extérieures du film sont rabattues sur le même cylindre inférieur tandis que la partie centrale est rabattue du côté opposé. Les réglages de la machine et l'installation du film doivent être faits très proprement. Nous avons élaboré un protocole qui permet de positionner correctement le film et de s'assurer que le déplacement est imposé parallèlement à la fissure initiale. Le protocole est détaillé en Annexe B.

Lors de l'étude présentée section 6.3, nous utilisons des images du film en déchirement prises avec un appareil photo numérique Nikon D200 associé à un objectif AF-S Nikkor 17-

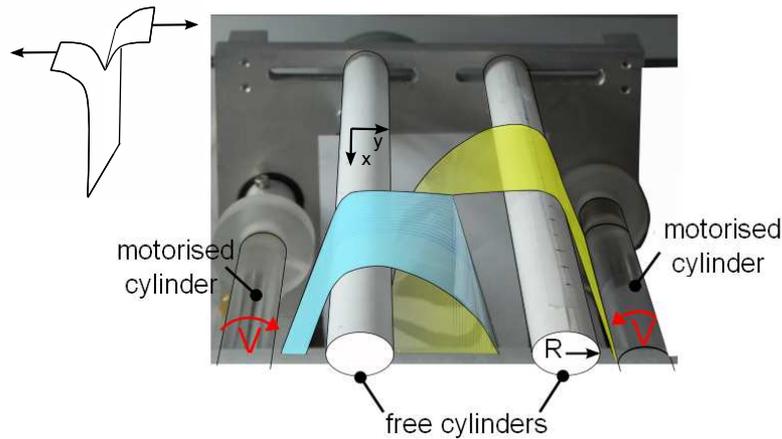


FIG. 6.1 – Le dispositif est conçu pour propager une fissure en mode de cisaillement hors du plan (mode III) à vitesse constante dans une plaque mince. Une fissure centrée est initiée dans un film de largeur  $2L$  qui est inséré entre deux cylindres à rotation libre. Pour faciliter la compréhension, une face du film a été colorée en jaune tandis que son verso a été coloré en bleu. Chaque languette est rabattue puis fixée sur toute sa largeur à l'un des cylindres rotatifs placés en contre-bas qui sont entraînés par un moteur à vitesse constante. La pointe de la fissure est située entre les deux cylindres supérieurs, environ à hauteur de leur sommet. La distance entre les deux cylindres supérieurs est de  $2d$ .

55 mm. Il est positionné de façon à obtenir l'image de Fig. 6.1. Le centre de l'image est la pointe de la fissure, la vue est prise de dessus avec un angle de  $16^\circ$  entre l'axe de l'objectif et l'horizontale. L'éclairage est assuré par une lampe froide. Notez qu'une correction doit être faite sur les mesures de longueur dans la direction parallèle aux cylindres pour tenir compte de l'angle d'inclinaison de l'objectif. Pour s'affranchir des problèmes de distorsion liés à l'utilisation d'une lentille optique, nous choisissons un grand angle de prise de vue ; la zone de l'image qui nous intéresse est ainsi loin des bords. Nous établissons la correspondance pixel-millimètre en prenant avant chaque expérience la photographie d'une feuille de papier millimétré placé à l'horizontale, sur la machine.

### 6.1.2 Matériel

Le film utilisé est constitué de polypropylène, fabriqué de façon à ce qu'il ait les mêmes propriétés mécaniques dans deux directions perpendiculaires le rendant ainsi quasi isotrope : il est aminci en étant tiré dans deux directions perpendiculaires et non dans une seule comme dans la plupart des procédés de fabrication. Les épaisseurs utilisées sont de 12, 30, 50 et  $90 \mu\text{m}$ . Notons que plus le film est fin, plus le réglage de l'expérience est difficile. C'est pourquoi nous ne testons pas les quatre épaisseurs dans toutes les expériences. A température ambiante et dans la gamme de vitesse explorée, ce matériel est fragile. La largeur des films varie de 2 à 16 cm et la longueur est de l'ordre d'un demi mètre. Le dispositif nous permet de varier la longueur de fissure de 1.8 à 5 cm. La longueur de la fissure est la distance entre la pointe de la fissure et le point d'application des forces,

c'est-à-dire les cylindres supérieurs ; elle est donc la moitié de la distance entre les deux cylindres supérieurs. Le module de Young est de  $E = 2.2 \pm 0.2 \text{ GPa}$  et la ténacité est de  $K_c = 2.6 \pm 0.3 \text{ MPa.m}^{1/2}$  ; ils ont été mesurés comme expliqué ci-dessous.

Pour mesurer le module de Young nous imposons une déformation d'étirement dans la direction  $y$  à un film rectangulaire de longueur  $L = 30 \text{ cm}$ , de largeur  $l = 22 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $e = 30 \mu\text{m}$ , et nous mesurons la force au cours du déplacement d'une extrémité, la seconde restant fixe (Fig. 6.2). En utilisant la loi de Hooke,  $\sigma = E\epsilon$ , où  $\sigma = F/el$  est la contrainte mesurée et  $\epsilon = \Delta l/L$  la déformation imposée, nous obtenons une mesure directe du module de Young  $E$ . Un film est placé à la verticale et maintenu à ses deux extrémités à l'aide de pinces sur toute sa largeur. La pince du bas est immobile tandis que celle du haut est reliée à un bras mécanique dont le déplacement est contrôlé avec une précision de l'ordre du micromètre. La force exercée par le bras est mesurée en continu par un dynamomètre placé entre la pince et le bras. Nous obtenons une courbe de force en fonction du déplacement (Fig. 6.3). Pour de faibles déplacements,  $\delta < 4.5 \text{ mm}$  pour ce graphe, la force est une fonction linéaire du déplacement, d'équation prédite par la loi de Hooke :

$$F = \frac{E e l}{L} \Delta l$$

Au-delà d'un certain déplacement, la courbe n'est plus linéaire. Lorsqu'on impose une trop grande déformation, des instabilités se développent, comme l'apparition de rides verticales dans le film. En mesurant la pente de la partie linéaire de la courbe, nous obtenons une valeur du module de Young  $E$ . Nous répétons plusieurs fois l'expérience pour des films de largeur et d'épaisseur variées.

Le même dispositif permet de mesurer la ténacité du matériel. D'après [Mai and Atkins, 1980], la ténacité correspond au travail fourni pour propager la fissure uniquement ; le travail utile pour déformer plastiquement le matériel ne doit pas être pris en compte. Comme les films utilisés sont fragiles, nous n'observons pas de déformations permanentes après étirement. La ténacité est donc directement reliée à la force exercée pour propager la fissure. Dans la limite d'un plan infini, elle s'exprime comme  $K_c = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2} w}$  (section 5.2.3) où  $\sigma$  est la contrainte seuil au-delà de laquelle la fissure se propage. Nous utilisons des films de largeur  $l = 8 \text{ cm}$ , de longueur  $L = 22 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $30$  et  $50 \mu\text{m}$ . Nous initions une fissure de longueur  $w$  dans la direction  $x$  (Fig. 6.2). Sous l'hypothèse d'un plan infini, la force seuil doit suivre la loi :

$$F_s = e l K_c \sqrt{\frac{2}{\pi w}}$$

Par cette méthode, nous trouvons que  $K_c = 2.6 \pm 0.3 \text{ MPa.m}^{1/2}$ .

## 6.2 Stabilité de la trajectoire d'une fissure

Dans une première expérience, nous déterminons la trajectoire d'une fissure lorsqu'elle est propagée en mode III et étudions sa stabilité sous l'effet de perturbations. Nous préparons l'échantillon suivant : une fissure centrée est initiée dans un film de largeur  $8 \text{ cm}$ , de longueur  $50 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $30 \mu\text{m}$ . Nous y préparons trois incisions inclinées de  $45^\circ$  par

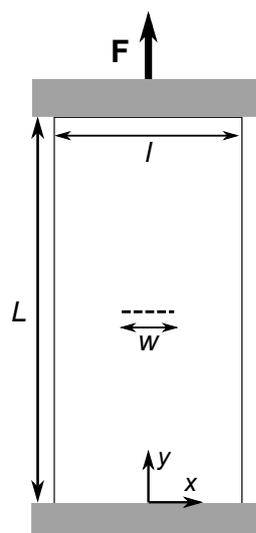


FIG. 6.2 – Schéma du dispositif permettant de mesurer le module de Young et la ténacité du matériau. Pour le module de Young, un film rectangulaire maintenu à ses deux extrémités par des pincées, représentées par des rectangles gris, est étiré par un bras mécanique qui impose un déplacement constant dans la direction  $y$ ; un dynamomètre permet de mesurer la force exercée par le bras sur le film. Pour mesurer la ténacité, une fissure de longueur  $w$  est initiée dans le film puis il est étiré de la même façon que précédemment. La fissure se propage lorsque la contrainte seuil, reliée à la ténacité, est atteinte.

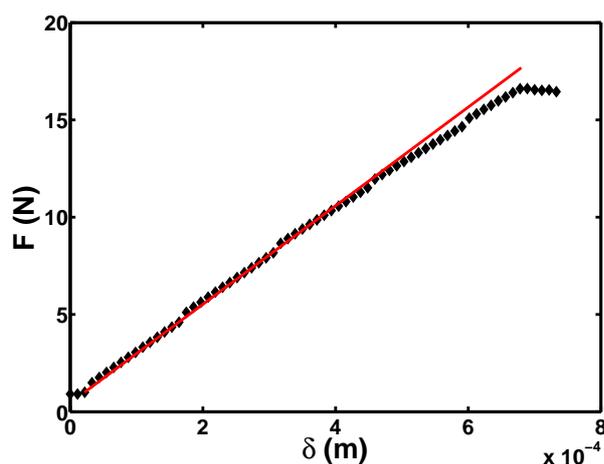


FIG. 6.3 – Mesure de la force exercée en fonction du déplacement  $\delta$  lors de l'étirement d'un film de longueur  $L = 22 \text{ cm}$ , de largeur  $l = 7.5 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $30 \mu\text{m}$ . Dans le régime linéaire, la pente de la courbe permet de mesurer  $E$  le module de Young du matériel. Au-delà d'un certain étirement, des non-linéarités apparaissent.

rapport à l'axe central qui est l'axe selon lequel la fissure est initiée (Fig. 6.4a). Lorsque la fissure atteint une incision, sa trajectoire est déviée puis décentrée. Après la propaga-

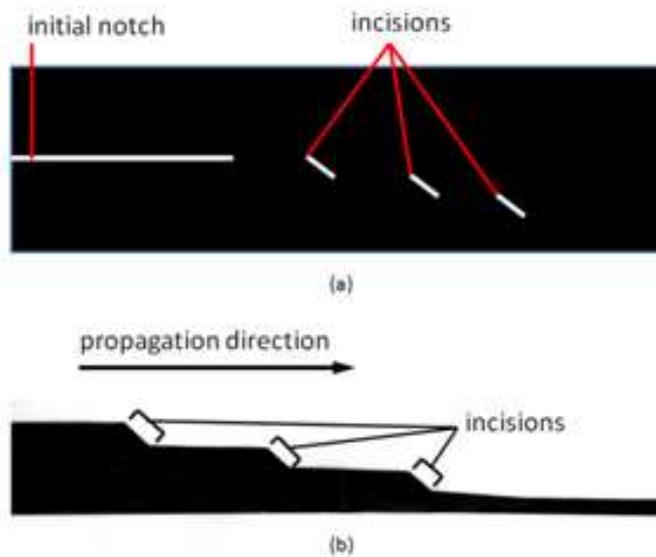


FIG. 6.4 – Stabilité de la trajectoire d'une fissure. (a) Schéma de l'échantillon avant déchirement : des incisions sont introduites dans le film pour perturber la trajectoire de la fissure lorsqu'elle les rencontrera. (b) Scan du film après déchirement. Le bord de l'échantillon correspond à la trajectoire de la fissure qui est stable sous toutes les perturbations.

tion, le bord de l'échantillon déchiré indique la forme de la trajectoire suivie par la fissure (Fig. 6.4b). Nous observons en premier lieu que la trajectoire de la fissure centrée, propagée en mode III, est rectiligne. La première incision a deux effets, elle décale la trajectoire puisqu'elle est inclinée et elle la décentre. Aucune de ces deux perturbations n'a d'effet sur la trajectoire qui reste rectiligne et parallèle à celle non perturbée. Après avoir rencontré la troisième incision, la fissure se propage à  $5\text{ mm}$  du bord libre et pourtant la trajectoire reste droite. Nous concluons de cette expérience que la trajectoire d'une fissure propagée en mode III est stable sous toute perturbation : déviation, décentrage, présence d'un bord libre.

Avant de réaliser cet échantillon incisé, nous avons simplement étudié la trajectoire d'une fissure initialement centrée, sans perturbations. Cela nous a permis de réaliser combien le réglage fin de la machine et l'installation du film sur la machine sont importants. La moindre asymétrie présente dans le système perturbe continûment la trajectoire de la fissure qui est alors déviée de l'axe central. En améliorant le protocole de préparation de l'expérience, les déviations sont amoindries. Par cette expérience de perturbations, nous montrons qu'une perturbation ponctuelle n'a pas d'effet sur la trajectoire. Toutes les déviations observées au cours des expériences suivantes sont donc seulement dues aux imperfections de réglages qui peuvent introduire du mode II.

Nous avons évoqué en introduction (section 5.3) les études qui ont été faites sur la stabilité de la trajectoire d'une fissure propagée dans le plan. Il a été montré qu'en mode de cisaillement, la trajectoire est instable ainsi qu'en mode d'ouverture dans une configuration

asymétrique. Nous montrons ici qu'une propagation induite par des déformations hors du plan stabilise la trajectoire qui n'est en aucun cas déviée. Afin d'expliquer cette différence majeure, nous nous intéressons aux processus locaux de propagation. Nous montrons dans la suite que le champ de déformation du film en déchirement s'adapte aux contraintes imposées localement par la propagation ; connaître ce champ permet de comprendre les phénomènes qui ont lieu dans la zone active de la fissure.

## 6.3 Géométrie du film en déchirement

### 6.3.1 Observations

Après nous être intéressés à la trajectoire globale de la fissure, c'est-à-dire au produit final de l'expérience, nous déterminons la forme tridimensionnelle du film pendant la propagation. En observant le film (Fig. 6.5), nous distinguons trois régions. La première (région 1) est la partie de la languette horizontale loin de la pointe de la fissure. Elle est seulement courbée sous l'action de la gravité et sa géométrie ne semble pas être influencée par la fissure. La région 2 est la partie du film non déchirée qui pend à la verticale sous la machine. Cette région est approximativement plane ; son axe horizontal est incliné par rapport à l'axe défini par les cylindres. La région 3 est la partie de la languette horizontale proche de la pointe de la fissure. Elle est quasi triangulaire avec un des sommets à la pointe de la fissure. Cette région est plane, cela traduit le fait qu'elle est soumise à des contraintes d'étirement. Pour une plaque mince, il est plus coûteux en énergie d'étirer le matériel que de le courber (section 1.2). C'est donc dans cette région qu'est concentrée la plus grande partie de l'énergie élastique nécessaire à la propagation. Pour cette raison, elle retiendra particulièrement notre attention.

Nous expliquons l'inclinaison du bas du film de la façon suivante : la partie déchirée du film est constituée de deux régions, l'une seulement étirée le long de la fissure (région 3), l'autre seulement courbée à l'autre extrémité (région 1). La partie verticale du film (région 2) est libre d'adapter sa forme donc elle s'incline pour supprimer l'excès de courbure dans la région transitoire entre languettes horizontales et film vertical tout en restant presque plane. Nous allons déterminer la géométrie de la région 3 puis la relier à la géométrie locale de la fissure.

### 6.3.2 Visualisation

La courbure dans la direction de l'axe des cylindres est très faible, nous la négligeons devant la courbure dans la direction perpendiculaire. Sous cette hypothèse, il est possible de déterminer la forme tridimensionnelle du film en n'utilisant qu'une seule prise de vue. Pour cela, avant d'installer le film sur la machine, nous traçons des lignes parallèles aux bords de la fissure, espacées de  $2\text{ mm}$ . Des images sont prises à intervalles de temps réguliers durant le déchirement du film. Sur l'image binarisée du film (Fig. 6.6a) nous mesurons la courbure le long de chaque ligne en ajustant un polynôme du second degré en tous les points. Une ligne est rectiligne seulement dans la région plane. Nous mesurons les coordonnées des

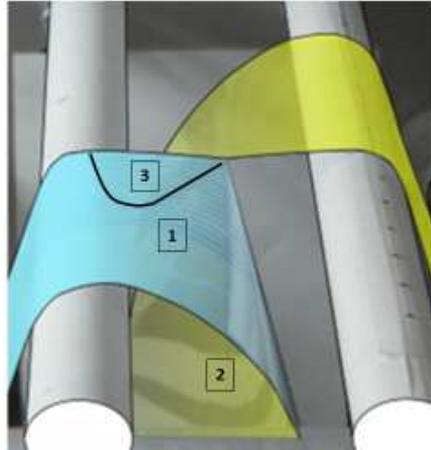


FIG. 6.5 – Zoom de Fig. 6.1. La région 1, loin de la pointe de la fissure, est seulement courbée sous l'action de la gravité. La région 2 est la partie du film qui pend à la verticale sous la machine et est inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe des cylindres. La région 3 est une région plate dont la forme est similaire à un triangle dont un des sommets se trouve à la pointe de la fissure.

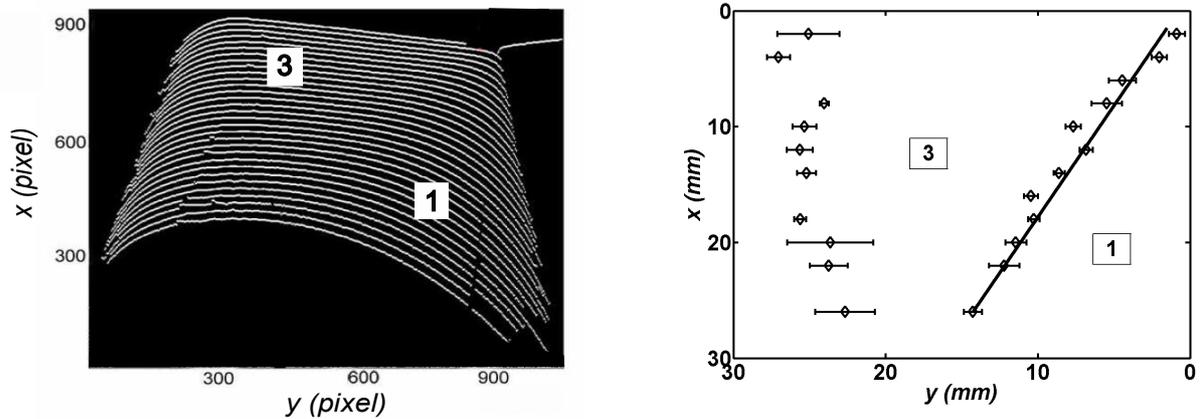


FIG. 6.6 – (a) Image binarisée de la languette avant d'un film en déchirement. La languette a une largeur  $L = 8\text{ cm}$  et la longueur de la fissure est  $d = 2,6\text{ cm}$ . Des lignes parallèles à la fissure, espacées de  $2\text{ mm}$ , sont tracées sur le film afin de déterminer les coordonnées des limites de la région plate (région 3). (b) Coordonnées des limites de la zone plate. L'origine des axes est placée à la pointe de la fissure. La perspective induite par l'inclinaison de l'objectif de l'appareil photo d'un angle de  $16^\circ$  a été corrigée sur les coordonnées en  $x$ .

frontières de la région 3 en relevant pour chaque ligne les coordonnées du premier point de courbure non-nulle. Nous montrons par cette méthode que la limite entre région plane (3) et région courbée (1) du côté de la pointe de la fissure est une ligne droite (Fig. 6.6b).

### 6.3.3 Résultats

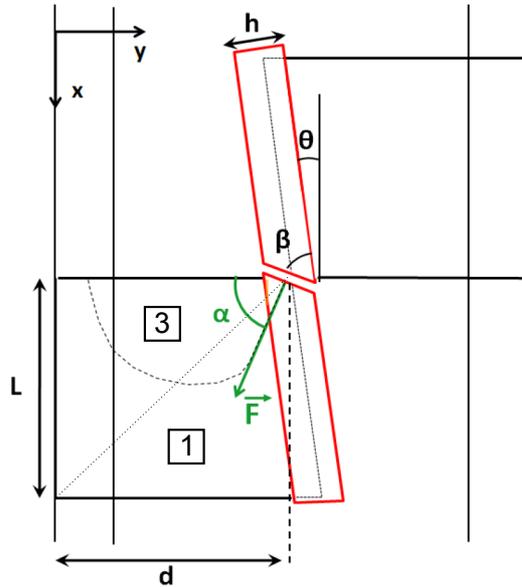


FIG. 6.7 – Schéma d'une vue de dessus du dispositif. Le rectangle rouge représente une coupe de la partie verticale du film (l'épaisseur a été augmentée). L'angle à la pointe de la fissure de la région 3 est  $\alpha$ , l'angle de biseau de l'épaisseur du film déchiré est  $\beta$  et  $\theta$  est l'angle d'inclinaison de la région 2 par rapport à l'axe des cylindres.

Afin de caractériser la géométrie de la région 3, nous mesurons l'angle  $\alpha$  formé par le bord de la fissure et la limite entre zone plane et zone courbée, en faisant varier les paramètres expérimentaux,  $L$  la largeur de la languette,  $d$  la longueur de la fissure et  $h$  l'épaisseur du film (Fig. 6.7). L'angle  $\alpha$  est donné par la pente de la droite qui décrit la limite région plane/région courbée (Fig. 6.6b). Il est indépendant des paramètres expérimentaux et vaut  $58^\circ \pm 4^\circ$  (Fig. 6.8a). Nous montrons également qu'il n'est pas corrélé à l'angle géométrique  $\tan^{-1}(L/d)$ , qui est l'angle formé par la pointe de la fissure et les extrémités de la languette en contact avec le cylindre (Fig. 6.8), et donc que la géométrie de la région étirée n'est pas modifiée par le dispositif expérimental : l'angle  $\alpha$  caractérise bien la concentration des contraintes au voisinage de la pointe.

Nous mesurons l'angle d'inclinaison  $\theta$  du bas du film (région 2) à partir d'images prises de dessus. L'angle  $\theta$  est également indépendant des paramètres expérimentaux et vaut  $18^\circ \pm 3^\circ$  (Fig. 6.8b).

Comme cela est schématisé sur Fig. 6.7, en plus des angles  $\alpha$  et  $\theta$ , il existe un troisième angle qui caractérise le processus de fracturation dans l'épaisseur du film. En effet, une observation post-mortem du film déchiré montre que le bord de la fissure est biseauté dans

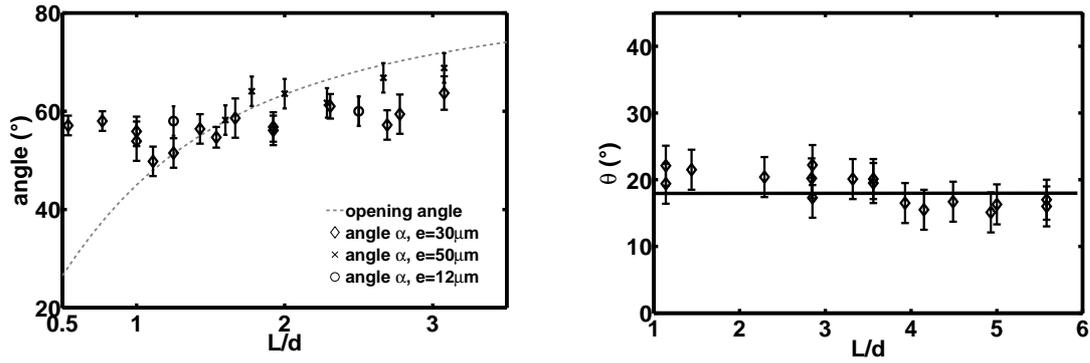


FIG. 6.8 – (a) Mesure de l'angle  $\alpha$  en fonction de  $L/d$  pour trois épaisseurs de film différentes. La courbe pleine représente l'angle géométrique  $\tan^{-1}(L/d)$  formé par la pointe de la fissure et les extrémités de la languette en contact avec le cylindre. (b) Mesure de l'angle  $\theta$  d'inclinaison de la partie libre du film (région 2) en fonction de  $L/d$ .

l'épaisseur, ce qui n'apparaît pas lorsque le film est déchiré en mode d'ouverture. Nous montrons une vue au microscope du bord de la fissure sur Fig. 6.9a. La zone claire, en haut de l'image, est la partie du film transparent ; la bande foncée est le bord de la fissure qui est une surface rugueuse. Elle est plus large que le bord d'une fissure propagée en mode I ce qui prouve que la surface rugueuse est inclinée et non verticale comme en mode I. L'angle moyen d'inclinaison  $\beta$  de la surface est déduit de la largeur de la bande rugueuse. Comme  $\alpha$  et  $\theta$ ,  $\beta$  est indépendant des paramètres expérimentaux et vaut  $45^\circ \pm 3^\circ$  (Fig. 6.9b).

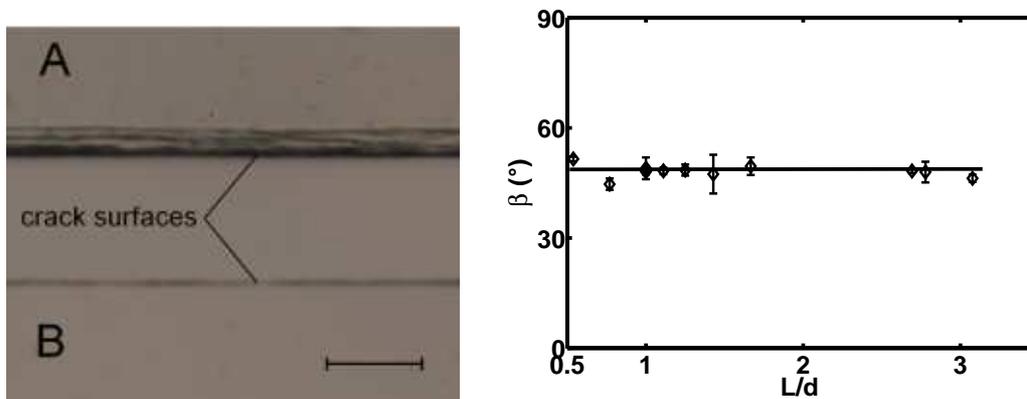


FIG. 6.9 – (a) Vue agrandie au microscope de la fissure. **A** : une fissure propagée en mode de cisaillement hors du plan (mode III) par notre dispositif. La surface créée par la fissure est plus sombre car elle est plus rugueuse. La largeur de la bande sombre montre que la surface est inclinée, un biseau a été créé dans l'épaisseur du film. **B** : une fissure propagée en mode d'ouverture (mode I). La surface de la fissure est plus fine ce qui indique qu'elle est perpendiculaire à la surface du film. (b) Mesure de l'angle de biseau  $\beta$  en fonction de  $L/d$  pour des films d'épaisseur  $30\mu\text{m}$ .

## 6.4 Discussion

### 6.4.1 Interprétation de la limite rectiligne

Nous avons observé que, dans le film en déchirement, le film semble être tendu dans la région plane (région 3) ce qui implique la localisation des déformations d'étirement dans cette région ; partout ailleurs le matériel est principalement soumis à des déformations de courbure. La limite entre région de courbure nulle et région courbée est la ligne sur laquelle la variation spatiale de courbure est la plus forte. Intuitivement, on dirait que la contrainte est maximale là où la variation de courbure est maximale. La démonstration ne semble pas avoir été faite dans la littérature. Pour s'en convaincre, considérons un film rectangulaire soumis à deux forces ponctuelles appliquées au milieu de sa largeur suivant l'axe horizontal (Fig. 6.10a). La ligne de tension maximale relie les points d'application des deux forces. Le film est soumis à la gravité donc il retombe de part et d'autre de la ligne de tension et la variation de courbure maximale est effectivement localisée sur cette ligne. Si l'on augmente l'intensité de la force, un pli se forme le long de cette ligne. Cela a d'ailleurs été observé par Cerda et al [Cerda and Mahadevan, 2003] avec une plus grande extension spatiale (Fig. 6.10b). Nous supposons dans la suite qu'une ligne le long de laquelle la variation de

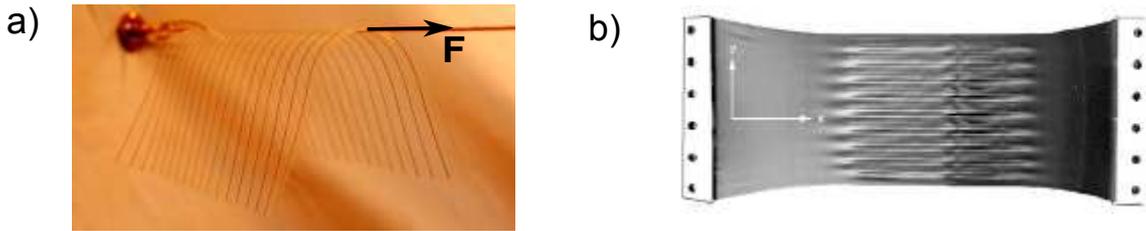


FIG. 6.10 – Illustrations de la relation entre contraintes et courbure : (a) Des contraintes d'étirement sont introduites dans un film mince le long d'une ligne. La variation de courbure est maximale le long de cette ligne. (b) Dans un film de caoutchouc en étirement, des ondulations apparaissent parallèles aux lignes de plus fortes tensions. Nous estimons que lorsqu'une force est appliquée en un point (et non le long de la largeur du film comme sur l'image) une forte variation de courbure apparaît de long de l'unique ligne de tension maximale. Figure extraite de [Cerda and Mahadevan, 2003]

courbure est maximale est la ligne sur laquelle les contraintes sont maximales. Nous allons maintenant montrer qu'une force ponctuelle appliquée à un matériau peut engendrer une ligne de contraintes maximales.

Une force appliquée en un point du bord libre d'une plaque semi-infinie, dans le plan de la plaque, engendre des contraintes radiales dans le matériau qui s'exprime en coordonnées polaires  $(r, \phi)$  comme :

$$\sigma_{rr} = \frac{2F \cos \phi}{\pi r}, \quad \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi\phi} = 0 \quad (6.1)$$

où  $F$  est l'intensité de la force qui est appliquée au point  $r = 0$  ; l'origine des  $\phi$  est choisie le long de la force  $\mathbf{F}$ . La contrainte est maximale le long d'une ligne rectiligne dans la direction de la force et nulle dans la direction perpendiculaire. La démonstration est faite

dans [L.D.Landau and E.M.Lifshitz, 1953] (chap. 13, pb. 2), nous la détaillons en Annexe. Le champ de déplacement est :

$$u_r = \frac{2F}{\pi E} \cos \phi \ln \frac{r}{a} + \frac{(1-\nu)F}{\pi E} \phi \sin \phi \quad (6.2)$$

$$u_\phi = -\frac{2\nu F}{\pi E} \sin \phi - \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{r}{a} \sin \phi - \frac{(1-\nu)F}{\pi E} (\sin \phi - \phi \cos \phi) \quad (6.3)$$

où  $E$  est le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $a$  un rayon de coupure au-delà duquel le matériau n'est pas déformé. Les directions de déplacement des éléments de surface de la plaque sont schématisées Fig. 6.11.

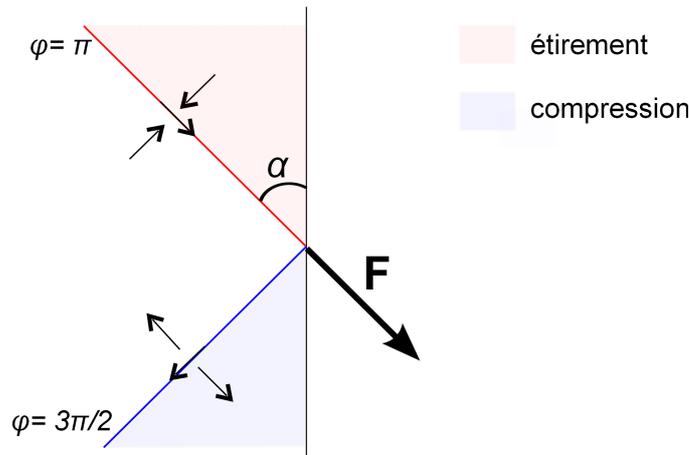


FIG. 6.11 – Schéma des déformations induites dans une plaque semi-infinie par une force ponctuelle  $F$ . La ligne de contraintes maximales est représentée en rouge, la ligne de contrainte nulle en bleu. Les flèches représentent les directions de déformations de la plaque.

Il n'est pas possible d'appliquer simplement le calcul précédent des champs de contraintes et de déformations car notre système est soumis à la gravité qui induit des déplacements transverses. Pour résumer, la limite entre zone courbée et zone plate est la ligne de contraintes maximales. Or une force ponctuelle engendre une ligne de contraintes maximales rectiligne, dans sa direction, ainsi qu'une région étirée. Nous interprétons la géométrie du film en déchirement comme résultant de la présence d'une force de traction appliquée à la pointe de la fissure et orientée d'un angle  $\pi/2 + \alpha$  par rapport au bord de la fissure. La force appliquée à la pointe de la fissure est une modélisation du champ de contrainte à grande échelle : les contraintes au voisinage de la pointe divergent et le champ des contraintes est complexe, nous ne pouvons en aucun cas les décrire par une simple force ponctuelle. Les contraintes introduites à grande échelle par l'opérateur sont transmises à la fissure par l'intermédiaire d'une force de direction bien définie. Il est important de noter que les contraintes sont introduites dans l'espace tridimensionnel tandis que la force transmise est dans le plan des languettes fissurées.

Connaissant la géométrie du film et des bords de la fissure et le processus de focalisation de l'énergie à la pointe de la fissure, nous sommes en mesure de comprendre les mécanismes locaux de la rupture du matériau.

### 6.4.2 Mécanismes locaux de rupture

Section 6.3.3, nous avons montré que l'angle  $\alpha$  caractérisant la région plane ne dépend pas des paramètres de contrôle de l'expérience. D'après notre analyse, la région plane résulte de l'existence d'une force qui permet de transmettre les contraintes introduites à grande échelle jusqu'à la pointe de la fissure. Un premier résultat est que la direction de la force ne dépend pas des paramètres expérimentaux mais est fixée par la configuration de cisaillement hors du plan. Des mesures d'angles présentées section 6.3.3 émerge une relation géométrique forte. Les angles  $\alpha = 58^\circ \pm 4^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ \pm 3^\circ$  et  $\theta = 18^\circ \pm 3^\circ$  satisfont :

$$\alpha \simeq \beta + \theta \quad (6.4)$$

Cela implique que la direction de la ligne de tension maximale est normale aux surfaces créées par la fissure. Le schéma Figure 6.8 permet de s'en convaincre. Ceci est notre résultat principal : les contraintes introduites sont transmises par l'intermédiaire d'une force de direction perpendiculaire aux surfaces créées. Cela signifie que, même si les déformations à grande échelle sont tridimensionnelles, une plaque mince adapte sa géométrie afin que le matériel rompe localement en mode d'ouverture. Il n'est pas évident de savoir ce qui fixe les valeurs des trois angles. La direction de la force peut être imposée par la configuration ce qui fixerait l'inclinaison des nouvelles surfaces ; ou l'angle d'inclinaison des surfaces de  $45^\circ$  peut être fixé pour des raisons inconnues (par exemple énergétiques) et la géométrie globale du film s'adapterait à cette contrainte locale. La question reste ouverte.

La présence d'une force à grande échelle dont la direction ne dépend pas des paramètres expérimentaux permet de comprendre pourquoi la trajectoire de la fissure est stable, ce que nous avons montré dans la section 6.2. Il est raisonnable de penser qu'une déviation de la trajectoire ne modifie pas la direction de la force qui est dans le plan des languettes horizontales. Comme le matériau rompt perpendiculairement à la force, la trajectoire ne peut pas être déviée.

Ce résultat pourrait être une généralisation du PLS pour une fissure se propageant dans une plaque mince, à grande échelle sous un mode de cisaillement hors du plan.

### 6.4.3 Mesure de l'intensité de la force

Afin de valider notre interprétation, nous avons élaboré une méthode permettant de mesurer l'intensité de la force qui induit le champ de déformation observé. Dans cette expérience, nous augmentons la masse du film en déchirement en fixant au bas du film un poids réparti sur toute sa largeur. Nous utilisons des masses de 1.45 à 7 g. La masse du film étant de 0.8 g, elle peut être raisonnablement négligée et le film peut être considéré comme ayant une masse constante durant la propagation de la fissure. Nous ne pouvons pas explorer une plus grande gamme de masse car lorsqu'elle devient trop grande, un phénomène de type stick-slip apparaît : la propagation de la fissure devient intermittente. Nous utilisons un film d'épaisseur  $30 \mu\text{m}$ .

Nous vérifions dans un premier temps que la géométrie du film n'est pas affectée par l'augmentation de la masse : les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta$  ne sont pas modifiés. Mais la pointe de la

fissure est abaissée par rapport au plan horizontal déterminé par le sommet des cylindres supérieurs. Nous mesurons la hauteur de la pointe de la fissure  $z$  pour différentes masses ajoutées  $m$ , elle augmente linéairement avec la masse (Fig. 6.12). Comme l'angle de biseau

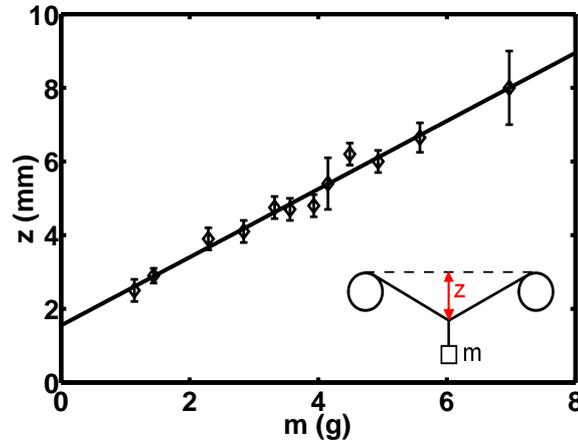


FIG. 6.12 – Hauteur de la pointe de la fissure  $z$  en fonction de la masse  $m$  ajoutée au film pour un film d'épaisseur  $h = 30 \mu m$ ,  $d = 2.6 cm$  et  $L = 4 cm$ .

$\beta$  n'est pas modifié, la quantité de surface créée n'est pas modifiée et donc l'énergie utilisée pour propager la fissure reste la même quelle que soit la masse du film. L'intensité de la force - qui véhicule la quantité d'énergie nécessaire - est indépendante des paramètres expérimentaux. Lorsque la masse du film augmente, la composante verticale de la force est augmentée. L'équilibre des forces verticales est simplement donné par :

$$2F_0 \cos(\alpha) \sin(\delta) = mg \quad (6.5)$$

où  $F_0$  est l'intensité de la force,  $\delta$  est l'angle d'inclinaison du plan des languettes et est donné par  $\tan \delta = z/d$ . Pour  $z/d \ll 1$ , on obtient :

$$z = \frac{gd}{2F_0 \cos \alpha}. \quad (6.6)$$

Ce développement de l'équation 6.5 est raisonnable car dans nos expériences, la gamme de paramètre est  $0.1 \leq z/d \leq 0.3$ . L'équation 6.6 décrit un comportement de  $z$  conforme à ce que nous observons Fig. 6.12. Une évaluation de l'intensité de la force  $F_0$  est donnée par la pente de la courbe expérimentale  $z(m)$ . Nous obtenons  $F_0 = 0.25 \pm 0.05 N$ .

L'intensité de la force doit être suffisante pour rompre le matériel. En connaissant la ténacité du matériel  $K_c$ , nous savons quelle est la contrainte, et donc la force, minimale nécessaire; elle est donnée par  $F_c = K_c S \left(\frac{2}{\pi w}\right)^{1/2}$  où  $w$  est la longueur de la fissure et  $S$  la surface sur laquelle est appliquée la force. Dans la configuration de notre expérience, le matériel est rompu lorsqu'il est encore dans le plan vertical. La longueur de fissure  $w$  à considérer est donc la longueur de la fissure qui est encore dans ce plan. Nous estimons qu'elle est de l'ordre de l'épaisseur du film. La surface  $S$  est égale à  $wh$  où  $h$  est l'épaisseur du film. Finalement, l'intensité de force minimale est  $F_c = K_c h \left(\frac{2w}{\pi}\right)^{1/2}$ . Pour un film de  $30 \mu m$ ,  $F_c \approx 0.3 N$  ce qui coïncide, en tenant compte des incertitudes, avec la valeur mesurée expérimentalement de  $0.25 N$ .

Cet accord des valeurs théorique et expérimentale est un argument fort qui valide la modélisation des distributions de contraintes par une force orientée d'un angle  $\alpha = 58^\circ$ . Si la force appliquée à la pointe de la fissure était orientée le long de la fissure, donc avec un angle  $\alpha = 0$ , l'intensité de la force mesurée sur la courbe  $z(m)$  serait  $F_0 = 0.13 N$  ce qui n'apporterait pas une énergie suffisante pour permettre à la fissure de se propager.

Pour finir, nous faisons remarquer que cette méthode expérimentale permet de mesurer la ténacité du matériau si l'on connaît l'angle  $\alpha$  de la direction de la force. La détermination de la fonction  $z(m)$  fournit une mesure directe de  $F_0$ , l'intensité de la force et donc de  $K_c$ , la ténacité.

## 6.5 Résumé

Au cours de cette étude de la propagation d'une fissure dans une plaque mince en mode de cisaillement hors du plan, nous avons montré que la trajectoire de la fissure est rectiligne et stable sous l'effet de perturbations ponctuelles (déviation, décentrage, présence d'un bord libre). En déterminant la géométrie du film en déchirement, nous avons montré que la fissure est localement propagée en mode d'ouverture dans le plan, sous l'effet d'une force induite à grande échelle par les déformations tridimensionnelles du film. Ce dernier résultat permettrait de généraliser le PLS qui n'est établi, pour l'heure, que pour la propagation d'une fissure dans le plan. Ce résultat permet également d'expliquer la stabilité de la trajectoire sous ce mode de propagation. De plus, nous avons élaboré une méthode permettant d'estimer l'intensité de la force appliquée à la pointe de la fissure et de mesurer la ténacité d'un matériau sous forme de films minces.



## Chapitre 7

# Interactions de deux fissures dans un film mince

Nous abordons dans cette étude le problème de l'interaction entre deux fissures. Lorsqu'un réseau de fissures se constitue dans un matériau, des motifs réguliers apparaissent comme dans la boue ou la peinture sèches [Pauchard, 2006]. S'il n'y avait aucune interaction entre les fissures, les motifs observés auraient des formes quelconques ; l'organisation des fissures les unes par rapport aux autres montre que leurs trajectoires dépendent de la position des fissures voisines. C'est également vrai lorsqu'il n'y a que deux fissures : lorsque l'on souhaite retirer le papier peint d'un mur, les deux bords du pan déchiré se rejoignent et forment une pointe, rendant ainsi ce travail laborieux (Fig. 7.1a). Ces mêmes motifs en pointe apparaissent dans d'autres matériaux comme dans le corps d'un avion (Fig. 7.1b). Atkins s'interroge sur la possibilité d'observer des fissures en interactions répulsives et attractives dans des plaques minces [Atkins, 1995] : dans le cas du papier peint, les fissures s'attirent, si l'on pousse le matériau à l'aide d'une pointe jusqu'à le déchirer, elles se repoussent, comme ce qu'on observe en bas de page des journaux. La propagation de deux fissures dans un film mince adhérent au support a été étudié par Hamm et al. [Hamm et al., 2008].

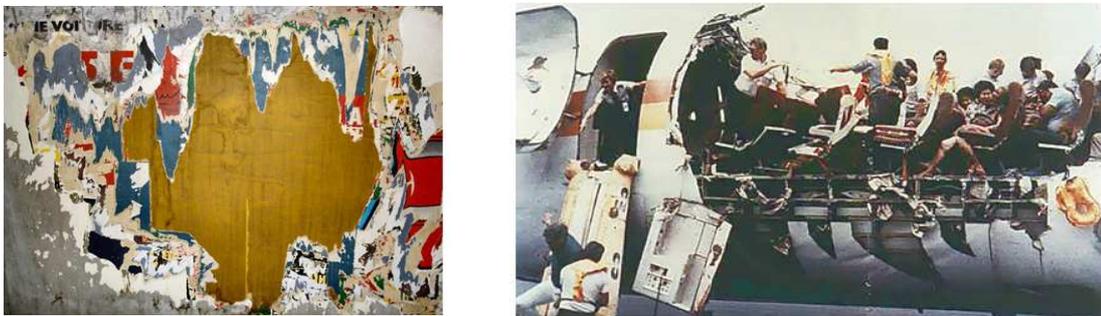


FIG. 7.1 – (a) Formation de pointes lors de l'arrachement de papier adhérent au substrat. (b) Apparition du même motif en pointe lors de la fracturation de la carcasse d'un avion.

Les exemples donnés pourraient paraître anecdotiques mais le problème est essentiel en

science des matériaux. Un solide comporte toujours des quantités de microfissures et nous ne pouvons prédire le comportement sous contraintes du matériau en appliquant les règles établies pour la propagation d'une fissure isolée.

La pointe d'une fissure est un objet qui a une extension spatiale non-nulle et finie ; elle est constituée de la singularité ponctuelle qu'est la pointe de la fissure et du champ de déformation induit par cette singularité. Lorsque les zones d'influence de deux pointes de fissures se recouvrent, chaque fissure ressent la présence de l'autre et leurs comportements peuvent en être modifiés. Nous précisons par la suite à quoi correspond ce que nous avons appelé la zone d'influence.

Pour preuve que les déformations élastiques interviennent, il existe de fortes ressemblances entre un réseau de veines de feuilles végétales et un réseau de fissures [Bohn et al., 2005]. Les mêmes types de motifs apparaissent dans des mousses solides en compression dans lesquelles les singularités sont des plis creux [Reis et al., 2009]. La nervation des feuilles résulterait de la croissance d'un matériau élastique dans un champ de contraintes. Un pli est une ligne de focalisation de l'énergie qui induit des déformations dans son voisinage. Le point commun à ces trois systèmes est que les singularités sont dans un champ de contraintes et de déformations, qu'il soit induit par leur présence ou non. Le motif géométrique résultant de l'interaction des singularités semble donc être contrôlé par les déformations élastiques et non pas déterminé par la nature des singularités mécaniques, différentes dans chacun des trois systèmes.

Nous nous intéressons dans cette étude à la propagation simultanée de deux fissures dans un film mince dans deux configurations : le déchirement et le pelage. Le pelage a déjà été étudié par Hamm et al. [Hamm et al., 2008] ; dans notre étude nous proposons une seconde interprétation possible des résultats expérimentaux. Nous commencerons par présenter les deux expériences et leurs résultats. Puis nous montrerons qu'il est possible de prédire la trajectoire des fissures en utilisant des arguments d'échelles. Ici encore, il sera utile de réaliser les expériences tout en lisant ce chapitre.

## 7.1 Déchirement versus pelage

Nous nous sommes intéressés lors de cette étude à deux configurations de propagation de deux fissures dans lesquelles les trajectoires s'attirent l'une l'autre. Les résultats des deux expériences sont présentés en parallèle.

La première expérience, dite de déchirement, consiste à propager deux fissures simultanément dans un film mince dans la même configuration que l'expérience présentée dans le chapitre précédent. Nous utilisons le même dispositif que celui décrit section 6.1. Nous initiaisons deux fissures parallèles, symétriques par rapport à l'axe central du film. Les paramètres de contrôle de cette expérience sont la distance initiale entre les deux fissures  $l$  et la largeur du film  $L$ . Nous vérifions que la longueur de la fissure  $d$  n'influence pas les résultats. Le film est inséré entre les deux cylindres supérieurs, les deux languettes extérieures sont rabattues sur le même cylindre tandis que la languette centrale est rabattue de l'autre côté (Fig. 7.2a). Nous utilisons deux épaisseurs de film,  $50 \mu m$  et  $90 \mu m$ .

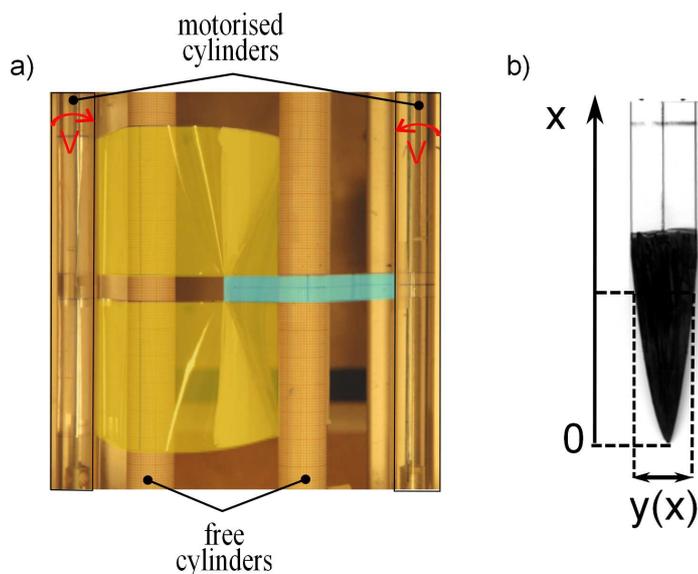


FIG. 7.2 – Expérience de déchirement : (a) Le dispositif expérimental permettant de propager deux fissures dans un film mince. Les fissures sont initiées parallèlement, le film est inséré entre les deux cylindres supérieurs. Les deux languettes extérieures sont rabattues sur le même cylindre, la languette centrale est rabattue du côté opposé. Elles sont ensuite fixées aux cylindres du bas, entraînés par un moteur à vitesse constante. (b) Languette résultante de l'expérience de déchirement. Les trajectoires s'attirent ; le point de rencontre est choisi comme origine de l'axe  $x$ . La largeur  $y$  est mesurée le long de l'axe  $x$ .

La seconde expérience, dite de pelage, est inspirée du dispositif de Hamm et al [Hamm et al., 2008]. Elle consiste à propager deux fissures dans un film mince dont les bords sont fixés à un support rigide (Fig. 7.3a). Nous initions deux fissures parallèles dans le film déjà fixé à son support à l'aide d'un cutter. La languette est tirée dans la direction parallèle aux fissures initiales, formant un angle de  $180^\circ$  avec la surface du film. Elle est fixée à un barreau métallique qui est ensuite tiré à la main à vitesse approximativement constante. Des guides sont tracés sur le film afin de conserver une direction de tirage constante. Le paramètre de contrôle est la distance initiale entre les deux fissures  $l$ . Nous utilisons trois épaisseurs de film, 30, 50 et  $90 \mu\text{m}$ . Nous observons que tant que les dimensions du film sont grandes devant  $l$ , elles n'influencent pas les résultats.

Pour le déchirement comme pour le pelage, les deux trajectoires s'attirent dès que la propagation est déclenchée. Lorsqu'elles se rejoignent, la languette se détache du film principal ; il en résulte un objet de forme similaire à celle d'une flèche. Ceci est vrai quelle que soit la distance initiale entre les fissures dans le cas du pelage. Dans le cas du déchirement, lorsque  $l$  devient trop grand, les trajectoires des fissures peuvent diverger. Il ne semble pas exister de distance de transition en-dessous de laquelle les trajectoires s'attireraient et au-delà se repousseraient : le résultat est très variable d'une expérience à l'autre. Nous pensons que lorsque la distance entre les deux fissures augmente, l'intensité de leur interaction diminue rendant le bruit expérimental non négligeable. Les trajectoires deviennent alors sensibles aux asymétries introduites lors de la préparation d'une expérience. Les ré-

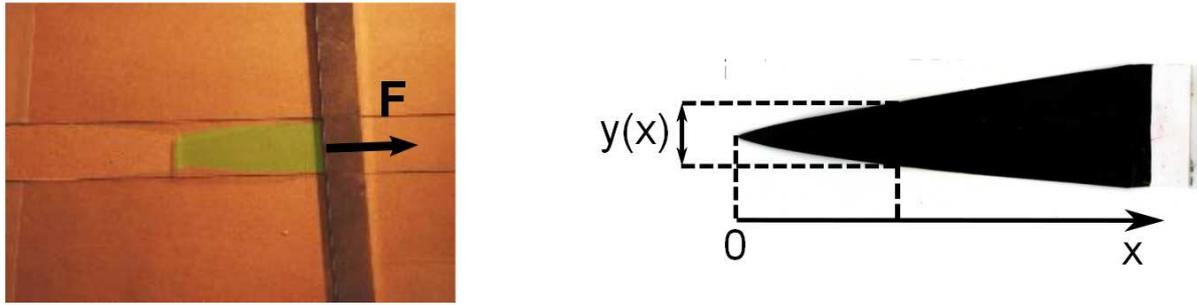


FIG. 7.3 – Expérience de pelage : (a) Dispositif expérimental permettant de propager deux fissures dans un film mince maintenu à plat sur son support. Le film est fixé au support par ses bords, deux fissures sont initiées parallèlement, espacées d'une distance  $l$ . La barre métallique permet de tirer la languette à la main en formant un angle de  $180^\circ$  avec le reste du film. (b) Languette résultante de l'expérience de pelage. Le point de rencontre des fissures est choisi comme origine de l'axe  $x$ . La largeur  $y$  est mesurée le long de l'axe  $x$ .

sultats présentés dans la suite sont valables pour des distances initiales  $l < 0.1 L$  où  $L$  est la largeur de l'échantillon.

Nous scannons les languettes obtenues et nous mesurons la largeur  $y$  en fonction de la distance à la pointe  $x$  (Fig. 7.2b et 7.3b).

## 7.2 Résultats expérimentaux

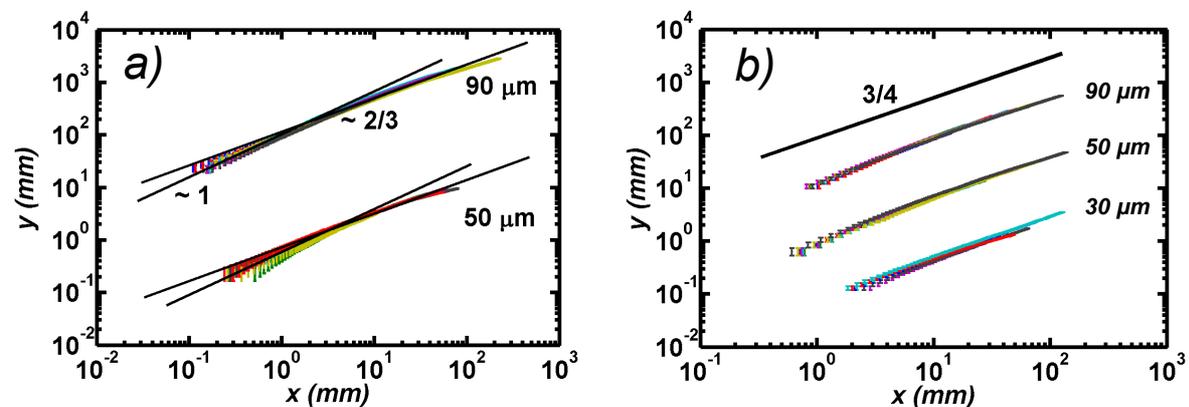


FIG. 7.4 – Graphe de la largeur de languette  $y$  le long de l'axe  $x$  (a) pour l'expérience de déchirement, (b) pour l'expérience de pelage. La distance initiale entre fissure  $l$  a été variée ainsi que l'épaisseur des films, indiquée à côté des courbes. Pour plus de lisibilité, l'ordonnée des graphes correspondant aux films d'épaisseur  $30 \mu m$  est divisée par 10, et multipliée par 10 pour ceux d'épaisseur  $90 \mu m$ .

Que ce soit dans l'expérience de déchirement ou dans celle de pelage, pour une épaisseur de film donnée, les profils de languettes sont superposables pour différentes valeurs de la distance initiale entre fissures  $l$  et sont bien décrits par une loi de puissance (Fig. 7.4). Les préfacteurs augmentent avec l'épaisseur tandis que l'exposant est constant pour une

épaisseur ( $\mu m$ )	déchirement		pelage	
	exposant	préfacteur	exposant	préfacteur
30	-	-	$0.76 \pm 0.05$	$0.82 \pm 0.06$
50	$0.64 \pm 0.06$	$0.77 \pm 0.2$	$0.77 \pm 0.04$	$1.20 \pm 0.2$
90	$0.64 \pm 0.06$	$1.20 \pm 0.2$	$0.77 \pm 0.05$	$1.53 \pm 0.2$

TAB. 7.1 – Exposants et préfacteurs des graphes de Fig. 7.4. Dans le cas du déchirement, nous ne considérons pas les points à petite distance de la pointe.

configuration donnée (déchirement ou pelage). Les valeurs des exposants et préfacteurs pour chaque expérience et pour les différentes épaisseurs de films sont données dans Tab. 7.1.

### Déchirement

Dans le cas du déchirement, nous observons une transition dans la loi de puissance lorsque la largeur de la languette devient petite (Fig. 7.4a) c'est-à-dire proche de la pointe. L'exposant pour  $x < 5 mm$  est de l'ordre de 1 tandis qu'il est de l'ordre de 0.6 au-delà. Le changement dans le comportement des deux fissures lorsqu'elles s'approchent de leur point de rencontre s'explique à l'aide des observations suivantes :

1. Au cours de la propagation, la position de la pointe de la fissure n'est pas stationnaire ; lorsque la largeur de la languette diminue, la fissure se rapproche du cylindre sur lequel la languette centrale est rabattue. Cela induit une asymétrie dans le système qui a tendance à augmenter la courbure de la partie centrale du film.
2. Après détachement de la languette, le matériel n'est globalement pas déformé ce qui confirme le fait que le processus de fracturation est fragile. Seule une région proche de la pointe reste courbée.
3. Une analyse post-mortem de la surface de la fissure au travers de l'épaisseur du film montre que l'angle de biseau, décrit section 6.3, est constant le long de l'axe  $x$  et égal à  $45^\circ$ , en accord avec les résultats de la propagation d'une seule fissure (Fig. 7.5). Mais une transition apparaît à une distance de  $3.5 mm$  de la pointe : l'angle de biseau diminue brusquement jusqu'à atteindre la valeur de  $34^\circ$  à la pointe de la languette. Quand la largeur de la languette est de l'ordre de l'épaisseur du film, la propagation des fissures devient un problème intrinsèquement tridimensionnel.

Ces observations indiquent qu'il y a deux processus de fracturation. Quand la distance entre les deux fissures est grande, l'intensité du chargement imposé pour déchirer le film est faible et dans ce cas, le matériau a un comportement fragile. Dans ce régime, la forme de la languette est décrite par une loi de puissance d'exposant  $0.64 \pm 0.06$ . Une transition apparaît quand la distance entre les fissures devient de l'ordre de l'épaisseur du film. Pour cette gamme de distance, le processus de fracturation n'est plus fragile : la courbure de la languette excède la limite des déformations élastiques du matériel. Dans ce régime plastique, la pointe a une forme triangulaire, elle est bien décrite par une loi de puissance

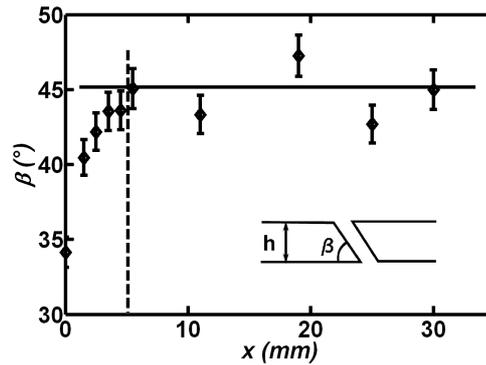


FIG. 7.5 – Mesure de l'angle du biseau formé par la fissure dans l'épaisseur du film en fonction de la distance à la pointe de la languette  $x$  pour un film d'épaisseur  $50 \mu\text{m}$  et une distance initiale entre languette de  $2 \text{ cm}$ .

d'exposant proche de 1. Dans la suite, nous ne nous intéresserons pas à ce second régime qui pose le problème complexe de la propagation d'une fissure en trois dimensions.

Durant le premier régime de propagation, quand la distance entre les fissures est grande, l'angle de biseau des surfaces des deux fissures est le même que dans le cas de la propagation d'une seule fissure. Cela suggère qu'au voisinage de la pointe de la fissure la géométrie, contrainte par la nécessité de rompre le matériau en mode I, n'est pas modifiée.

### Pelage

Dans le cas de l'expérience de pelage, la forme de la languette est plus simple ; elle est entièrement décrite par une loi de puissance d'exposant  $0.77 \pm 0.2$  quelles que soient l'épaisseur et la distance initiale entre les fissures (Fig. 7.4b). Comme dans le cas du déchirement, la pointe reste courbée après détachement de la languette mais sur une très faible longueur. Il ne semble pas que cela influence suffisamment la trajectoire des fissures pour que nous le détectons sur le profil  $y(x)$ .

### Résumé

La largeur de la languette est décrite par une loi de puissance, les trajectoires des fissures sont donc seulement contrôlées par la distance instantanée entre elles. Ceci est appuyé par l'excellente reproductibilité des expériences. Comme les trajectoires ne dépendent pas de l'histoire, le bruit expérimental n'est pas cumulé au cours de l'expérience ; à chaque instant l'information sur la direction à prendre est renouvelée.

Dans la suite, nous proposons un modèle simple permettant de prédire les trajectoires des fissures.

## 7.3 Modèle : déformations induites par un pli

Dans les deux configurations, la languette centrale forme un pli limité à ses deux extrémités par les pointes de fissure. Or un pli courbe, c'est-à-dire qui n'est pas localisé sur

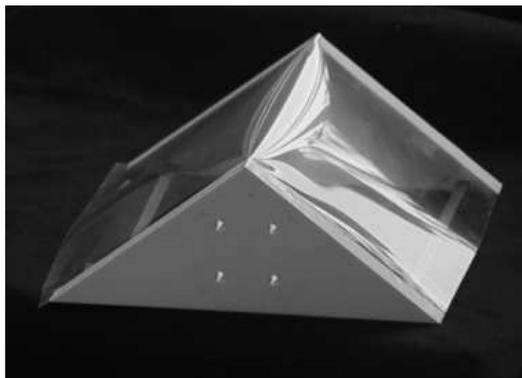


FIG. 7.6 – Un pli courbe induit des déformations transverses à l’axe du pli. La déformation décroît sur une longueur finie afin de s’annuler loin du pli. Figure extraite de [Boudaoud, 2001].

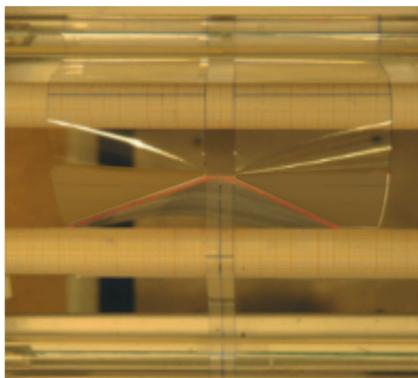


FIG. 7.7 – Une nappe laser est projetée sur le film au cours du déchirement afin de visualiser les déformations du film dans une région du film non-déchiré, proche du pli central.

une ligne d’épaisseur nulle - c’est le cas des plis sans déformation plastique - induit une déformation perpendiculairement à l’axe du pli [Boudaoud, 2001] (Fig. 7.6). La déformation décroît sur une échelle de longueur finie de façon à ce que le film ne soit pas déformé loin du pli [Lobkovsky and Witten, 1997]. Dans l’expérience de déchirement, la déformation transverse est visible lorsque l’on projette une nappe laser sous le pli (Fig. 7.7) : la courbure change de sens sous le pli et atteint un maximum. Il existe donc une zone de la partie non-déchirée du film qui est déformée élastiquement. Sa taille est à déterminer mais l’échelle de longueur raisonnable à considérer étant la largeur du pli, la surface déformée sera plus petite que la surface totale du film.

Nous en arrivons au résultat principal de cette étude. Nous utilisons le même raisonnement que dans l’étude de la propagation d’une seule fissure (section 6.4.1). La limite entre régions déformée et non-déformée est la ligne sur laquelle la variation de courbure est la plus forte dans la partie non-déchirée du film. Il s’agit donc de la ligne sur laquelle les contraintes sont maximales. Or la trajectoire sélectionnée par les fissures est celle qui permet de relâcher le maximum d’énergie élastique. Les trajectoires des deux fissures suivront donc les lignes de plus forte contrainte. Il en résulte que la forme de la région déformée

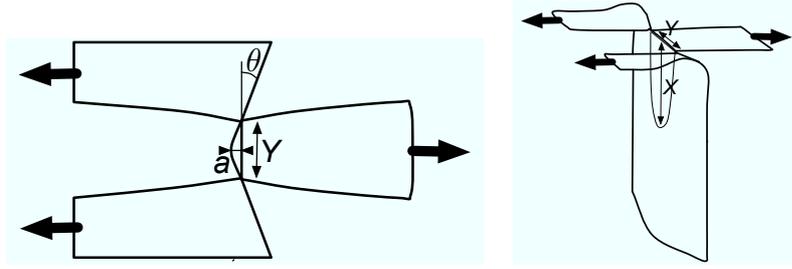


FIG. 7.8 – Schémas du film en déchirement. Le pli courbe central de largeur  $Y$  induit une déformation transverse d'amplitude  $a$  qui étire le film sur une longueur  $X$ .

par le pli et la forme de la languette doivent être identiques. C'est ce que nous vérifions maintenant. Nous commençons par déterminer analytiquement les déformations élastiques induites par le pli dans la partie non-déchirée du film.

Dans les deux configurations, déchirement et pelage, le pli central de longueur  $Y$  impose un déplacement normal d'amplitude  $a$  qui décroît sur une longueur  $X$  (Figs. 7.8 et 7.9). Comme nous l'avons évoqué, le déplacement normal est dû à la présence du pli courbe (Fig. 7.6). La longueur de pénétration des déformations  $X$  est estimée en équilibrant l'énergie d'étirement et l'énergie de courbure. La déformation du matériau est donnée par :

$$s = \frac{\sqrt{X^2 + a^2}}{X} \quad (7.1)$$

En considérant  $a \ll X$ , nous obtenons  $s \sim (a/X)^2$ . L'énergie d'étirement est donnée par :

$$\epsilon_s \sim E h s^2 S \quad (7.2)$$

où  $E$  est le module de Young,  $h$  l'épaisseur du film et  $S \sim XY$  la surface sur laquelle s'applique la déformation. L'énergie de courbure est de l'ordre de :

$$\epsilon_b \sim E h^3 c^2 S \quad (7.3)$$

La plus forte courbure est dans la direction de la plus petite dimension. Elle est donnée par  $c \sim a/Y^2$  dans la limite de  $a \ll Y$ . En remplaçant  $s$  et  $c$  dans Eqs. 7.2 et 7.3 et en écrivant l'équilibre énergétique  $\epsilon_s \sim \epsilon_b$ , on obtient la relation :

$$Y \sim X \left( \frac{h}{a} \right)^{1/2} \quad (7.4)$$

Ce résultat montre bien que la longueur de pénétration augmente avec la largeur du pli. Expérimentalement, il est difficile de mesurer  $a$ . Nous devons donc le relier aux autres quantités mesurables,  $X$  et  $Y$ .

Dans le cas du déchirement, le déplacement normal  $a$  correspond à une pente  $\tan \theta$  sur une distance  $Y/2$  donc pour un faible déplacement  $a \sim Y\theta$  (Fig. 7.8). Nous introduisons  $a$  dans Eq. 7.4 et nous obtenons :

$$Y \sim \left( \frac{h}{\theta} \right)^{1/3} X^{2/3} \quad (7.5)$$

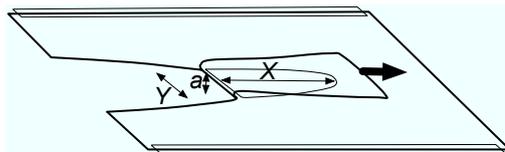


FIG. 7.9 – Schéma de l'expérience de pelage. Comme dans le cas du déchirement, le pli courbe de largeur  $Y$  induit une déformation transverse d'amplitude  $a$  qui étire le film sur une longueur  $X$ .

La configuration de pelage est équivalente à celle considérée dans [Lobkovsky and Witten, 1997], le déplacement normal est donné par la largeur de la couche limite  $a \sim h^{1/3} X^{2/3}$  (Fig. 7.9). En introduisant  $a$  dans Eq. 7.4, nous obtenons :

$$Y \sim h^{1/4} X^{3/4} \quad (7.6)$$

Pour tester la validité de notre modèle concernant la dépendance en épaisseur, nous traçons, Fig. 7.10, les grandeurs adimensionnées  $Y/h$  en fonction de  $X/h$  prédites dans le cas du déchirement par  $Y/h \sim \theta^{-1/3} (X/h)^{2/3}$  et dans le cas du pelage par  $Y/h \sim (X/h)^{1/4}$ . Le modèle est en bon accord avec les données expérimentales (Fig. 7.10). Les données pour différentes épaisseurs de films sont rassemblées sur la même courbe ce qui prouve que la dépendance en épaisseur prévue par notre modèle est correcte. Pour le déchirement le décalage observé Fig. 7.10a peut être dû à la valeur de l'angle  $\theta$  à laquelle nous n'avons pas accès expérimentalement ; ou bien  $h$  n'est pas l'unique longueur caractéristique du problème ; nous aurions pu imaginer en construire une à partir d'un argument énergétique du type de celle utilisée par Hamm et al. [Hamm et al., 2008],  $E/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est l'énergie de surface par unité de longueur du matériau.

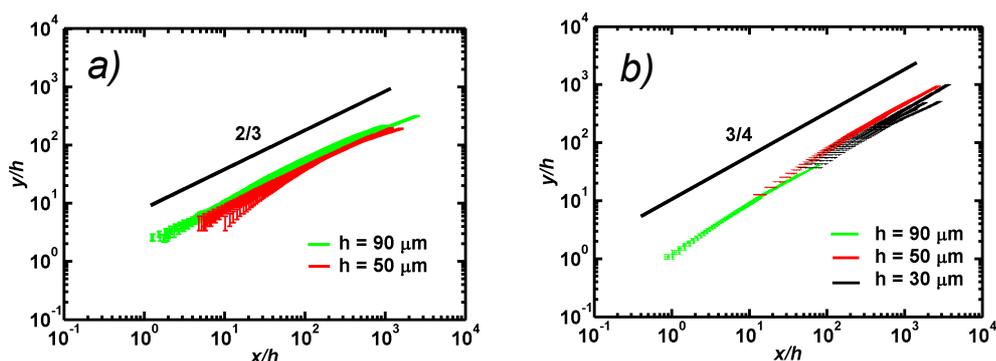


FIG. 7.10 – Mêmes graphes que Fig. 7.4 en considérant les grandeurs adimensionnées par l'épaisseur  $h$  du film pour (a) le déchirement, (b) le pelage. Pour chaque courbe, la distance initiale entre les fissures a été variée.

Ce calcul nous a permis de confirmer notre hypothèse : les fissures suivent les lignes de contraintes maximales au cours de leur propagation afin de relâcher un maximum de contraintes élastiques. La forme des languettes détachées du film est la même que la forme de la région du film déformée élastiquement par la présence du pli de la partie centrale.

Autrement dit, les trajectoires des fissures sont préimprimées dans le film par les déformations.

## 7.4 Résumé

Lors de cette étude, nous avons montré que les trajectoires de deux fissures propagées simultanément dans un film mince sont modifiées par rapport au cas où une seule fissure se propage, dans les configurations décrites. La trajectoire est contrôlée par la distance entre les pointes de fissures. Par des arguments de lois d'échelle, nous avons montré que les deux trajectoires sont pré-imprimées dès le début de la propagation dans la partie non-déchirée du film : le pli formé par la languette centrale induit des déformations élastiques dans le film. Les fissures avancent de façon à relâcher un maximum de contraintes, elles suivent les lignes de tension créées par le pli.

## Chapitre 8

# Conclusions

Le film mince a un comportement particulier face à la propagation d'une fissure car il peut adapter sa géométrie afin d'éliminer un maximum de contraintes. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés au couplage entre propagation d'une fissure et déformations du film. Le résultat principal de cette étude est que la propagation d'une fissure dans un film mince, soumis à un mode de cisaillement hors du plan à grande échelle (mode III), se produit de telle sorte que la pointe de la fissure est ouverte localement sous l'action d'un mode d'ouverture (mode I). Autrement dit, le processus de rupture est toujours régi par le Principe de Symétrie Locale (PLS), quel que soit le mode de chargement à grande échelle et quelles que soient les dimensions du matériau. Dans notre configuration expérimentale, la rupture en mode I est rendue possible par la présence d'une force qui transmet les déformations introduites à grande échelle, à la pointe de la fissure, point singulier où l'énergie est focalisée. Sa direction est indépendante des paramètres expérimentaux. Ceci permet de comprendre notre second résultat : une fissure propagée dans une telle configuration a toujours une trajectoire rectiligne qui est stable sous n'importe quelle perturbation. En effet, la contrainte géométrique imposée par une rupture en mode I ne permet pas à la trajectoire d'être déviée.

Dans une seconde expérience, deux fissures se propagent simultanément dans le film mince. Nous avons considéré deux configurations différentes, l'une de déchirement, l'autre de pelage. Dans les deux cas, les trajectoires des deux fissures s'attirent ; il en résulte une languette dont le profil est décrit par une loi de puissance. Nous avons montré que l'interaction des deux fissures se fait au travers du pli central formé par la languette. Le pli est courbe et induit des déformations dans le film. La forme de la languette est la même que la forme de la zone déformée par le pli qui diffère selon la configuration considérée.



# Conclusion

## Résumé

### Compaction

Nos études nous permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Lorsque le confinement augmente, l'espace des phases s'élargit ce qui implique une complexification des géométries développées.
- Au sein de cet espace, les géométries s'ordonnent avec un confinement croissant. L'ordre apparaît au travers d'un processus de superposition des couches de fil (*stacking*). Ainsi, une branche épaisse est formée ; elle impose la géométrie de la configuration.
- Quelle que soit l'intensité du confinement, nous observons toujours la même répartition de l'énergie. L'énergie associée à la branche épaisse semble jouer un rôle déterminant dans le comportement des distributions de probabilité de l'énergie.

### Fracture

La géométrie d'un film dans lequel se propage une fissure en mode de cisaillement hors du plan est induit par la présence d'une force à grande échelle, appliquée à la pointe de la fissure, de direction perpendiculaire aux surfaces créées. Bien que le matériau est déformé à grande échelle en mode de cisaillement hors du plan (mode III), la géométrie du système au voisinage de la pointe de la fissure s'adapte de façon à ce que le matériau rompe localement en mode d'ouverture (mode I). Cette géométrie locale stabilise la trajectoire qui est rectiligne et stable sous toute perturbation.

Lorsque deux fissures interagissent, leurs trajectoires sont modifiées par rapport au cas où une seule fissure se propage : elles s'attirent l'une l'autre. L'interaction se produit par l'intermédiaire du pli formé par la languette centrale qui induit des déformations élastiques dans la partie non-déchirée du film.

## Prolongements et perspectives

### Au sujet de la compaction

Bien que nous n'y soyons pas parvenus, ce travail m'a convaincu qu'il devrait être possible de définir une thermodynamique des systèmes compactés. Les faits expérimentaux

le montrent : quelle que soit l'intensité du confinement, quelle que soit l'énergie totale du système, la répartition de l'énergie est la même pour toutes les configurations. Avec plus de données et connaissant l'énergie des états, nous pourrions définir un système canonique, une fonction de partition, une entropie. Nous avons également mis en évidence la présence d'une échelle caractéristique d'énergie imposant la forme des distributions. Nous n'avons pas pu décider si elle était invariante avec l'intensité du confinement ou si les incertitudes de mesures masquaient la variation. Dans le cas où elle est invariante, nous pourrions l'interpréter comme une thermalisation du système. Les systèmes compactés pourraient alors être inclus dans l'ensemble des systèmes athermiques. Boué et Katzav proposent une théorie statistique pour étudier les propriétés élastiques d'une tige confinée en deux dimensions [Boue and Katzav, 2007]. Les outils utilisés pourraient être développés pour prédire nos résultats expérimentaux.

L'expérience de l'anneau de gel en croissance a mis en évidence la présence de *jamming* dans le système ou du moins de désordre gelé. Les configurations de hautes énergies sont empêchées de relaxer vers la configuration d'équilibre global. Nous souhaiterions réaliser des expériences au cours desquelles une perturbation extérieure de suffisamment grande amplitude permettrait de débloquer la configuration afin qu'elle relaxe vers un nouvel état d'équilibre. Nous pensons qu'il est possible d'ordonner la géométrie par ce procédé. Cela pourrait être réalisé avec le dispositif de centripétation. C'est cette expérience que nous avons tenté de réaliser et qui s'est transformée en perturbation mécanique d'une configuration (section 3.7). L'amplitude de la perturbation par variation de la fréquence de rotation du disque est trop faible pour sortir du puits d'énergie. Il faudra imaginer un autre moyen de perturber, une série de tapes sur la cellule par exemple.

Une idée d'expérience nous a été proposée par C. Radin à la suite de ses expériences numériques [Aristoff and Radin, 2009]. Durant nos travaux nous avons mesuré l'ordre global d'une configuration. Il s'agirait maintenant de mesurer la taille de régions ordonnées au sein d'une même configuration et d'étudier l'influence de la longueur totale de fil injecté sur ces tailles.

D'autres expériences sur des objets confinés à trois dimensions devraient être réalisées. Entre autre, il semblerait intéressant de tester la méthode de caractérisation du désordre par mesure des propriétés mécaniques sur ces objets : les applications pratiques seraient nombreuses. Concernant la tridimensionnalité, une expérience est en cours de montage au laboratoire. Elle consiste à injecter un fil par un orifice dans un récipient 3D. L'ordre du confinement est accessible en visualisant le mouvement du fil au niveau de l'orifice d'entrée. Nous pensons pouvoir observer des transitions entre compaction ordonnée et compaction désordonnée de façon dynamique.

Enfin, nous avons consacré un temps si important à construire la cellule rotative qu'il faut maintenant lui trouver des occupations pour les quelques années à venir ! Nous pensons l'utiliser pour compacter d'autres objets comme des grains, des tiges flexibles courtes, des chaînes, ...

## Au sujet de la fracture

Une de nos mesures montre que la fissure coupe le matériau en biseau dans l'épaisseur et que l'angle formé est de  $45^\circ$ , indépendamment des paramètres expérimentaux. Une question non résolue est de savoir si la direction des surfaces fixe la direction de la force ou le contraire. Dans la littérature, le mode III dans des matériaux épais est associé à la formation de motifs de *factory roof* ou toit d'usine [Lazarus et al., 2008, Pokluda et al., 2010]. Nous pensons que le biseau dans l'épaisseur peut être une extension de ce motif dans la limite des faibles épaisseurs. Il serait intéressant de réaliser des expériences de la propagation d'une fissure dans des matériaux plus épais avec le même dispositif expérimental. Nous pourrions alors voir si des motifs plus développés de *factory roof* apparaissent dans l'épaisseur. De manière générale, nous voudrions tester un plus grand nombre de matériaux, aussi bien dans l'expérience de la propagation d'une fissure que dans l'expérience des fissures interagissantes. Une question en suspens est de savoir si les angles mesurés sont des caractéristiques du matériau ou de la configuration. La difficulté est de trouver les matériaux adaptés : comportement fragile et structure isotrope.

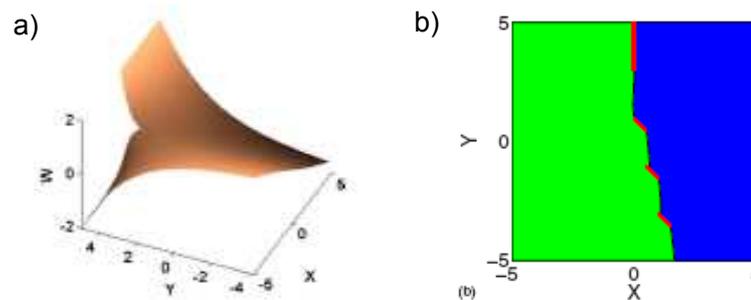


FIG. 8.1 – Simulation numérique de la propagation d'une fissure en mode III : (a) Déformations de la plaque, (b) réalisation de l'expérience des incisions (Chap. 6, Section 6.2). Les incisions sont représentées en rouge, la trajectoire est la limite entre les zones verte et bleue. Le résultat est qualitativement à nos observations, les différences provenant sans doute de l'épaisseur de la plaque considérée numériquement, 50 fois plus épaisse que les films utilisés expérimentalement. Figures extraites de [Cohen and Procaccia, 2010].

Une étude numérique en éléments finis a été réalisée par Y. Cohen et I. Procaccia [Cohen and Procaccia, 2010]. Ils simulent la propagation d'une puis de deux fissures dans une plaque mince dans une configuration de cisaillement hors du plan (Fig. 8.1a). Les épaisseurs de plaques considérées sont encore trop importantes, 50 fois plus épaisses que nos films, pour comparer résultats numériques et expérimentaux. Il est tout de même intéressant de voir que leurs prédictions tendent à coïncider avec nos observations. Ils montrent qu'une fissure centrée a une trajectoire rectiligne tandis qu'une fissure décentrée est déviée vers le bord libre le plus proche. Plus la plaque est fine, plus la déviation est faible. Ils ont réalisé numériquement l'expérience des incisions, au cours de laquelle une trajectoire initialement centrée est déviée. Les résultats sont qualitativement identiques aux nôtres (Fig. 8.1b). D'après nos expériences, pour des films très minces, la déviation devient quasiment nulle. Lorsque deux fissures interagissent, le modèle montre qu'elles s'attirent mais la forme de

la languette résultante est décrite selon eux par une loi exponentielle, ce qui n'est pas le cas dans notre expérience.

Cette étude de déchirement de films minces fait partie de ces expériences dans lesquelles on teste des situations mécaniques de plus en plus extrêmes. Sen et al. ont atteints de plus grandes extrémités encore en étudiant le pelage de feuilles de graphènes, cristal parfaitement bidimensionnel (Fig. 8.2) [Sen et al., 2010]. Ce qui prouve que la science de la fracture a de l'avenir.

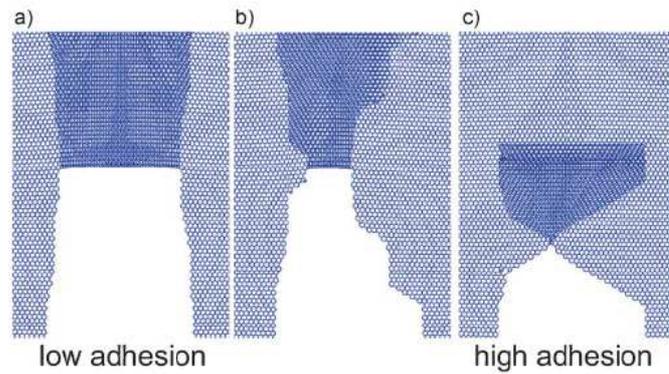


FIG. 8.2 – Pelage de feuilles de graphène adhérant au substrat. Figure extraite de [Sen et al., 2010].

## Annexe A

# Déflexion d'une plaque sous un gradient de pression

Dans cette annexe, nous justifions la nécessité de créer une chambre tampon (chambre 2) dans la cellule rotative utilisée dans l'expérience de confinement d'une tige par centripétation. Lorsque la cellule est en rotation, un gradient de pression s'installe dans le liquide, depuis le centre vers les bords. La dépression au centre crée une aspiration des plaques  $i$  et  $ii$  qui fléchissent. Un calcul simple permet de connaître l'amplitude de la déflexion de plaques sous une dépression induite par rotation. Nous rappelons que le dispositif a été conçu pour pouvoir atteindre la fréquence de rotation de  $20\text{ Hz}$ ; les applications numériques seront faites pour ce cas.

L'expression du champ de pression dans le liquide peut être établie en utilisant l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{f} + \Delta \mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

Dans notre système, la force extérieure appliquée à une unité de masse de liquide est  $\mathbf{f} = r\omega^2 \mathbf{u}_r$ . Nous faisons l'hypothèse que le liquide est en rotation solide, c'est-à-dire que sa vitesse dans le référentiel du disque tournant est nulle en tout point. Nous discuterons de la validité de cette hypothèse dans la section 3.1.7. Sous ces deux hypothèses, l'équation A.1 devient :

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \omega^2 r \mathbf{u}_r \quad (\text{A.2})$$

Par intégration, on obtient une expression du champ de pression :

$$P(r) = P_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \quad (\text{A.3})$$

$P_0$  est la pression au centre de la cellule. En s'éloignant du centre, la pression augmente. Pour la rotation d'une cellule de  $25\text{ cm}$  de rayon remplie d'eau salée de masse volumique  $\rho = 1160\text{ kg.m}^{-3}$ , à une fréquence de  $20\text{ Hz}$ , la différence de pression entre le centre et les bords serait de  $5.7\text{ bars}$ .

Nous écrivons ensuite l'équation d'équilibre d'une plaque, donnée par les équations de von Kàrman [L.D.Landau and E.M.Lifshitz, 1953, Love, 1927] :

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 z(r) - P(r) = 0 \quad (\text{A.4})$$

plaque	matière	$E$ (GPa)	$\nu$	$h$ (mm)
$i$	duralumin	75	0.4	12
$ii$	polycarbonate	2	0.3	15

TAB. A.1 – Propriétés mécaniques des plaques  $i$  et  $ii$ .

où  $E$  est le module d'Young de la plaque,  $h$  son épaisseur,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $P(r)$  la pression donnée par l'Eq. A.3. En utilisant l'expression du champ de pression A.3 dans A.4, on obtient une expression de  $z(r)$ . La solution étant continue en  $r = 0$ , les coefficients devant les termes en  $\log(r)$  doivent être nuls :

$$z(r) = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \left( \frac{\rho\omega^2}{1152}r^6 + \frac{P_0}{64}r^4 + \frac{c_2}{4}r^2 + c_4 \right) \quad (\text{A.5})$$

où  $c_2$  et  $c_4$  sont des constantes d'intégration. Afin de déterminer les constantes d'intégration, nous considérons les conditions aux limites. La plaque est encadrée en  $r = R$  et le profil de la plaque est une fonction continue en tout point, y compris en  $r = R$  :

$$z(R) = 0 \quad \text{et} \quad z'(R) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Finalement on obtient :

$$z(r) = \pm \frac{(1-\nu^2)}{96 E h^3} (r^2 - R^2)^2 (18P_0 + \rho\omega^2 (r^2 + 2R^2)) \quad (\text{A.7})$$

avec comme valeurs de  $E$ ,  $\nu$  et  $h$  celles correspondant à la plaque considérée ( $i$  ou  $ii$ ). Le signe de  $z(r)$  dépend du sens de la force induite par la pression  $P(r)$  sur la plaque. Pour déterminer la pression  $P_0$  en  $r = 0$ , nous utilisons la conservation du volume de liquide compris entre les deux plaques  $i$  et  $ii$ , de profil  $z_i(r)$  et  $z_{ii}(r)$ , donnés par l'équation A.7 en utilisant les valeurs respectives des paramètres.

$$V = \int_0^R 2\pi r z_{ii}(r) dr - \int_0^R 2\pi r z_i(r) dr = 0 \quad (\text{A.8})$$

Sous cette condition, la pression au centre s'exprime :

$$P_0 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{8\pi} \quad (\text{A.9})$$

Nous traçons les profils des plaques  $i$  et  $ii$  en utilisant les valeurs des paramètres données Tab. A.1 (Fig. A.1). D'après Fig. A.1, pour une fréquence de rotation de  $20 \text{ Hz}$ , la plaque  $i$ , en duralumin serait défléchie de  $0.1 \text{ mm}$  et la plaque  $ii$ , en polycarbonate, de  $1.6 \text{ mm}$  environ. L'espacement initial entre les deux plaques étant de l'ordre de  $2.5 \text{ mm}$ , en rotation il serait de  $0.6 \text{ mm}$  au centre, soit plus petit que l'épaisseur du fil.

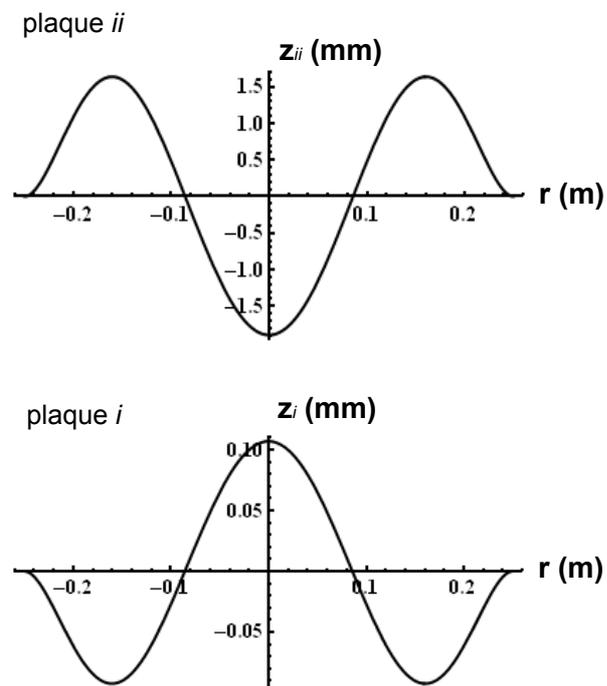


FIG. A.1 – Profil des plaques  $i$  et  $ii$  dans le cas où la chambre 2 n'existe pas. La dépression créée au centre par rotation de la cellule induit une déflexion des plaques de  $1.6\text{ mm}$  au centre pour la plaque  $ii$  en polycarbonate et de  $0.1\text{ mm}$  pour la plaque  $i$  en duralumin.



## Annexe B

# Préparation d'une expérience

Cette annexe est écrite à l'attention des futurs expérimentateurs qui souhaiteraient utiliser la machine à déchirer. L'installation du film sur la machine lors de la préparation d'une expérience nécessite une grande précision. Nous avons évoqué le fait qu'une légère asymétrie dans le système a des conséquences fortes sur la trajectoire de la fissure (section 6.2).

### Parallélisme de la machine

Avant tout, les deux plaques métalliques de la machine qui supportent les cylindres doivent être parallèles. Elles sont maintenues entre elles par les quatre cylindres décrits plus haut mais également par trois tiges métalliques filetées. Le réglage du parallélisme se fait en vissant plus ou moins ces tiges dans les plaques, modifiant ainsi l'espacement entre les deux plaques. La machine est ensuite positionnée sur des barres qui forment un plan à l'horizontalité contrôlée. Ces réglages faits, la machine ne doit plus être déplacée car elle est assez souple ; il est facile de la dérégler.

### Préparation du film

Il s'agit ensuite de positionner le film à déchirer de façon à ce que le déplacement imposé au film soit parallèle aux bords de la fissure initiale. L'important est que les languettes soient parfaitement parallèles entre elles. Si les deux bords de la fissure, situés de part et d'autre du point de déchirement, ne forment pas une ligne droite, des contraintes d'ouverture sont induites et la fissure est propagée en mode mixte I+III comme dans le *trouser test*. Nous détaillons la procédure que nous avons établie pour l'expérience de propagation d'une fissure ; elle est très peu différente lorsqu'il y en a deux.

Deux traits perpendiculaires aux bords de la fissure sont tracés sur le film, l'un à 0.5 cm du bord supérieur, l'autre à 11 cm. La fissure est initiée aux ciseaux. Les cylindres supérieurs sont enrobés de papier millimétré. Ils ont à leurs deux extrémités des tiges métalliques engagées dans une fente horizontale percée dans la plaque métallique, ce qui permet de les déplacer horizontalement. De petites tiges, positionnées du côté extérieur de la fente, bloquent le mouvement du cylindre vers l'extérieur des plaques (mais pas vers l'intérieur). Nous choisissons leur position en les faisant glisser dans une pièce métallique

puis nous les immobilisons avec une vis de serrage. Pour commencer, nous plaçons les cylindres côte à côte ; leur mouvement horizontal est bloqué par la tige et l'extrémité de la fente. On peut les empêcher de tourner sur eux-mêmes en attachant à l'aide de ruban adhésif la tige métallique du cylindre à la tige métallique de réglage. Une ligne horizontale, dans l'axe du cylindre, est choisie comme repère sur le papier millimétré. Nous faisons tourner chaque cylindre afin que cette ligne soit placée à leur sommet. Pour ce faire, nous utilisons un réglet posé sur les deux cylindres, perpendiculairement à leur axe ; la ligne doit être en contact avec le réglet.

Le film est inséré entre les deux cylindres. Le trait horizontal placé à  $11\text{ cm}$  du bord doit être superposé à la ligne repère. Le bord intérieur de chaque languette, c'est-à-dire du côté de la fissure, est placé au centre (en longueur) du cylindre, marqué de façon permanente. Les points de chacun des cylindres se font parfaitement face. Les languettes sont temporairement fixées à leur cylindre dans cette position en plaçant de la bande adhésive aux deux extrémités de la largeur. C'est ici la manipulation la plus délicate ; si elle est réussie, la suite se déroulera sans problème.

Nous fixons maintenant les languettes sur les cylindres inférieurs. Une ligne horizontale aura été préalablement tracée sur chacun de ces cylindres ainsi qu'un point aligné avec le centre du cylindre supérieur ; le bord de la fissure doit être positionné à cet endroit. La ligne tracée sur les cylindres du bas doit se trouver à la bonne position pour que, une fois la languette tendue, la ligne tracée sur le film à  $0.5\text{ cm}$  du bord y soit superposée. Cette position est repérée une fois pour toute. La languette est alors passée derrière le cylindre puis enroulée. Nous la fixons au cylindre à l'aide de ruban adhésif sur toute sa largeur en superposant les lignes. La languette doit être tendue de façon homogène mais sans exagérer, elle ne doit pas être étirée. Après s'être fait la main sur quelques expériences, il est possible de juger si le film est bien installé en tapotant légèrement la languette.

Il ne reste plus qu'à régler l'espacement entre les cylindres supérieurs. Le ruban adhésif qui maintient les languettes sur les cylindres supérieurs est retiré ainsi que celui bloquant le mouvement de rotation des cylindres. L'espacement des deux cylindres est réglé en fixant la position des tiges métalliques de réglage mentionnées précédemment. On mesure la longueur de tige dépassant de la fixation. Ici encore, le parallélisme des cylindres est essentiel. Il faut être prudent au cours de cette manipulation pour ne pas déchirer le film. Et enfin, nous nous assurons que les cylindres ne glisseront pas dans les fentes vers l'intérieur au cours de l'expérience en plaçant des pinces sur les plaques métalliques.

## Annexe C

# Distributions de contraintes engendrées par une force ponctuelle

Ce problème est résolu dans [L.D.Landau and E.M.Lifshitz, 1953], dans le problème 2 du chapitre 13. Considérons un plan semi-infini, une force  $\mathbf{F}$  est appliquée en un point du bord libre, dans le plan de la plaque, formant un angle  $\alpha$  avec la direction normale au bord. Nous allons établir l'expression des contraintes engendrées par  $\mathbf{F}$  dans la plaque. La force étant appliquée dans le plan de la plaque, elle n'induit que des contraintes de compression (ou d'étirement) mais pas de flexion (Fig. C.1).

Plaçons nous dans un système de coordonnées polaires  $(r, \phi)$ . L'origine de l'angle  $\phi$  est choisi dans la direction de la force, en dehors de la plaque. Les bords de la plaque sont situés en  $\phi = -(\frac{\pi}{2} + \alpha)$  et  $\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Les bords libres ne sont soumis à aucune contrainte en dehors du point d'application de la force ce qui implique que  $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{r\phi} = 0$ . Si  $\chi$  est la fonction des contraintes, les contraintes en coordonnées polaires s'écrivent :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \phi^2}, \quad \sigma_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\phi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \quad (\text{C.1})$$

En  $\phi = \pm \frac{\pi}{2} - \alpha$ , la fonction des contraintes doit satisfaire :

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{cste} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = \text{cste} \quad (\text{C.2})$$

Ces conditions imposent  $\chi = rf(\phi)$ . L'équilibre élastique d'une plaque impose :

$$\Delta^2 \chi = 0 \quad (\text{C.3})$$

qui devient en coordonnées polaires :

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]^2 \chi = 0 \quad (\text{C.4})$$

La fonction  $f(\phi)$  doit vérifier :

$$\frac{1}{r^3} \left( f^{(4)} + 2f^{(2)} + f \right) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Les solutions de  $f$  sont  $\cos \phi$ ,  $\sin \phi$ ,  $\phi \sin(\phi)$  et  $\phi \cos(\phi)$ . En introduisant les deux premières solutions dans l'Eq. C.1, les contraintes sont nulles partout ; nous les écartons donc. Pour choisir entre les deux fonctions restantes, nous considérons le fait que la somme des contraintes présentes dans la plaque doivent compenser la force appliquée  $\mathbf{F}$ . Pour cela, on projette les forces correspondant aux contraintes selon les directions parallèle et perpendiculaire à  $\mathbf{F}$  sur un demi-disque dont on fera ensuite tendre le rayon vers 0 :

$$\int_{-\pi/2-\alpha}^{\pi/2-\alpha} \sigma_{rr} r \cos \phi d\phi = -F \quad \text{et} \quad \int_{-\pi/2-\alpha}^{\pi/2-\alpha} \sigma_{rr} r \sin \phi d\phi = 0$$

Afin que ces deux conditions soient satisfaites, nous devons choisir  $f(\phi) = \phi \sin \phi$ . Nous obtenons :

$$\chi = -\frac{F}{\pi} r \phi \sin \phi \quad (\text{C.6})$$

et

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \phi}{r}, \quad \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi\phi} = 0 \quad (\text{C.7})$$

Les contraintes sont donc exclusivement radiales et atteignent un maximum dans la direction de la force pour  $\phi = \pi$ . A partir de l'expression des contraintes, nous pouvons établir l'expression du tenseur des déformations :

$$u_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}, \quad u_{\phi\phi} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{rr} \quad \text{et} \quad u_{r\phi} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Sachant que

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad 2u_{r\phi} = \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \quad (\text{C.9})$$

on obtient :

$$u_r = \frac{2F}{\pi E} \cos \phi \ln \frac{r}{a} + \frac{(1-\nu)F}{\pi E} \phi \sin \phi \quad (\text{C.10})$$

$$u_\phi = -\frac{2\nu F}{\pi E} \sin \phi - \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{r}{a} \sin \phi - \frac{(1-\nu)F}{\pi E} (\sin \phi - \phi \cos \phi) \quad (\text{C.11})$$

où  $a$  est un rayon de coupure au-delà duquel le matériau n'est pas déformé. En effet, si on considère un solide aux dimensions infinies, loin du point d'application de la force, il ne doit pas y avoir de déplacement de matière. Notez que le champ de déplacement diverge en  $r = 0$  ; il décrit en fait le comportement du matériau au voisinage et loin du point d'application de la force. En  $r = 0$ , il peut y avoir des déformations plastiques induisant ainsi une non-divergence des contraintes.

Les contraintes sont seulement radiales ; la direction de déplacement du matériel ne dépend que de l'angle  $\phi$ . Les directions de déplacement sont schématisées Fig. C.1.

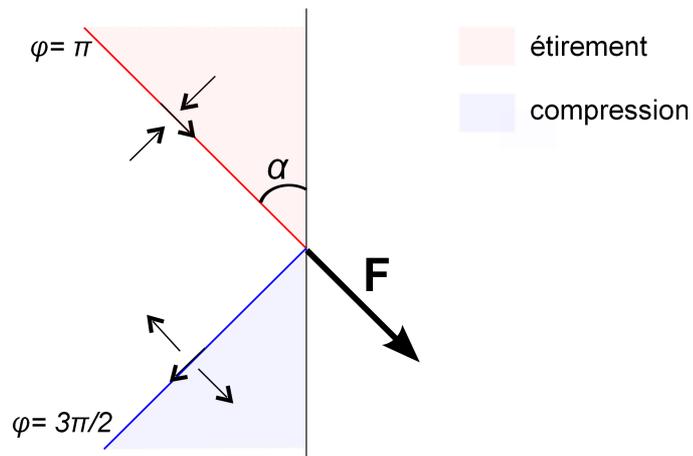


FIG. C.1 – Reproduction de Fig. 6.11 : schéma des déformations induites dans une plaque semi-infinie par une force ponctuelle  $\mathbf{F}$ . La ligne de contraintes maximales est représentée en rouge, la ligne de contrainte nulle en bleu. Les flèches représentent les directions de déformations de la plaque.



## Annexe D

# Publication

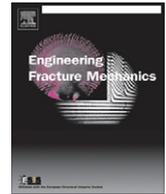
BAYART, E., BOUDAUD, A. and ADDA-BEDIA, M.  
On the tearing of thin sheets  
*Engineering Fracture Mechanics*, 2010, **77**, 1849-1856.



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

# Engineering Fracture Mechanics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/engfracmech](http://www.elsevier.com/locate/engfracmech)

## On the tearing of thin sheets

E. Bayart\*, A. Boudaoud, M. Adda-Bedia

Laboratoire de Physique Statistique, ENS, Paris VI, Paris VII, CNRS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 17 December 2009

Received in revised form 25 February 2010

Accepted 5 March 2010

Available online 11 March 2010

#### Keywords:

A. Crack path

Thin plate theory

Crack stability

B. Crack mechanics

### ABSTRACT

We perform an experimental study to investigate the propagation of one or two cracks in a thin elastic sheet of a brittle material torn in an out-of-plane shear mode. We observe that a single crack always follows a straight path, whereas two cracks propagating simultaneously follow curved paths and merge, forming a tongue-like shape. The present experimental setup allows the understanding of how the energy introduced at a large scale is focused at the crack tip. We find that the geometry of the sheet is determined by the direction of a large scale force, applied to the crack tip, which is perpendicular to cracked surfaces. While the material is deformed at large scales under mode III loading, the geometry of system in the vicinity of the crack tip adapts such that the material is locally broken under a pure mode I loading.

© 2010 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Crack path prediction is one of the main challenges in the field of fracture mechanics. Indeed, a satisfactory equation of motion of a crack tip requires a fundamental understanding of material separation mechanisms [1–4]. Within the framework of Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM), the propagation of a crack is mainly governed by the singular behavior of the stress field in the vicinity of its tip [1,2]. For a two-dimensional quasi-static crack submitted to in-plane loading (mode I + II), this behavior is given by

$$\sigma_{ij}(r, \phi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^I(\phi) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^{II}(\phi) + O(r^0), \quad (1)$$

where  $\Sigma_{ij}^I(\phi)$  and  $\Sigma_{ij}^{II}(\phi)$  are universal functions describing the angular variation of the stress field, and  $K_I$  and  $K_{II}$  are the stress intensity factors (SIFs). The evolution of the crack tip is governed by the Griffith energy criterion [1,2,5], which states that the intensity of the loading necessary to induce propagation is given by

$$G = \Gamma, \quad (2)$$

where  $G$  is the energy release rate and  $\Gamma$  is the fracture energy of the material, that is the energy needed to create new free surfaces. While the Griffith criterion is very useful in predicting crack initiation, it cannot predict the direction of the crack tip, and therefore it is not sufficient to determine the actual path of the crack. In order to achieve this, several suggestions have been made. Among them, the Principle of Local Symmetry (PLS) states that the crack advances in such a way that in-plane shear stress vanishes in the vicinity of the crack tip, or explicitly

$$K_{II} = 0, \quad (3)$$

\* Corresponding author.

E-mail address: [bayart@lps.ens.fr](mailto:bayart@lps.ens.fr) (E. Bayart).

This rule was proposed for in-plane quasi-static cracks [6,7], and then generalized to rapidly moving cracks [4]. A different approach, known as the maximum energy release rate criterion [8] states that the crack advances in a direction that maximizes its energy release rate. Interestingly, even though this approach is quite different from the PLS, it produces very similar results to those obtained using the PLS to such an extent that they were even conjectured to coincide [9]. However, as shown in [10] for kinked cracks and in [11] for branched cracks, the results are not exactly the same and a clear distinction can be made between the two. In fact, it has been shown that the PLS is the only self-consistent criterion [7,2].

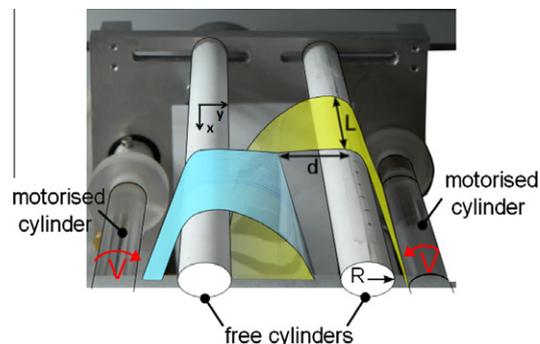
While the stability of crack paths under in-plane deformations has received extensive attention, see e.g. [3,12], there exists few experimental observations and theoretical predictions on the stability of crack propagation under out-of-plane shear deformations (mode III) in brittle materials [13,14]. Note however that from a historical point of view, the first criterion for crack path selection, based on symmetry arguments similar to the PLS, was first formulated for mode III crack propagation [15]. In the case of thin films, such a configuration is illustrated by the tearing of a sheet of paper. In order to characterize crack propagation in torn thin films, we built a controlled setup enabling the study of both the stability of a single crack path and the interaction between two propagating cracks. Moreover, this experimental setup allowed the description of the focusing of the bending elastic energy from large scales to the crack tip, leading to the creation of new surfaces. Note that the interaction between two cracks was investigated in the case of thin films adhering to a hard substrate [17,18]: when a stripe of the film made by initiating two notches is pulled from the substrate, two straight, non parallel cracks propagate and merge forming a triangular shape [18].

Here, we investigate the propagation of one or two cracks in thin sheets, with a large scale mode III loading. In Section 2, we describe the experimental setup. We first focus on single cracks, reporting experimental results in Section 3 and a first interpretation in Section 4. Finally, in Section 5, we consider the paths of two cracks propagating simultaneously.

## 2. Experimental setup

Inspired by the classical trousers test [13], we built an apparatus to control crack propagation at constant velocity in a thin elastic sheet submitted to an out-of-plane shear loading, mimicking the common way one tears a sheet of paper. The experimental setup consists of four parallel Plexiglas cylinders, of radius 8 mm and length 20 cm, set between two parallel metallic plates (Fig. 1). The two upper cylinders are free to rotate, while the two lower cylinders are driven at the same constant velocity by a motor, so that the velocity at the surface of the cylinders is in the range  $0.05\text{--}1.5\text{ mm s}^{-1}$ . In order to study the propagation of a single crack, we initiate a straight centered cut in a long rectangular sample that we insert between the free cylinders. Each stripe of the torn sheet is fixed on each driven cylinder after passing above a free rotating cylinder. The distance between the two upper cylinders imposes the crack free length. The lower cylinders collect the torn parts of the sheet. The crack tip is generally located midway between the upper cylinders (Fig. 1). In order to study the propagation of two cracks, we use the same procedure: we start with two cuts that are symmetric with respect to the central axis of the sheet, determining three parts in the sheet; the two external parts are fixed on one of the driven cylinders while the middle part is fixed on the opposite cylinder.

The experimental setup allows us to control the following parameters: the distance  $2d$  between the two upper cylinders ( $d$  being the length of the free part of the crack), the crack propagation velocity, the sample width  $2L$  and the thickness  $h$  of the sheet. We use films of bidirectional polypropylene of thickness 15, 30, 50 and 90  $\mu\text{m}$  and Young's modulus  $2.2 \pm 0.4\text{ GPa}$ . At ambient temperature and in the range of the imposed tearing velocities, the fracture process is brittle for this material. We varied the width of the film from 2 to 16 cm and the crack free length  $d$  from 1.8 to 5 cm. This experiment requires a careful adjustment of the parallelism of the cylinders' axes in order to keep a symmetric loading.



**Fig. 1.** The tearing machine was designed for an out-of-plane shear loading at a constant velocity. A thin film of width  $2L$ , initially cut at its center, is introduced between the two upper cylinders, which are free to rotate. Here, one side of the cut (in front) is coloured in blue while the other (back) is coloured in yellow. Each stripe of the torn film is fixed, throughout its width, to one of the two lower counter-rotating cylinders, which are driven at the same constant velocity. The crack tip is located between the free cylinders, roughly at the same height as the top of cylinders. The distance between the axes of the two upper cylinders is  $2d$ .

The critical fracture toughness  $K_c$  of polypropylene films was measured for cracks submitted to pure tensile loading. A constant displacement was applied on the edges of a rectangular sample of dimensions  $22 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 30 \text{ }\mu\text{m}$  in which we initiated a centered notch of length  $l$ . We measure the value of the applied force when the crack starts to propagate. Initial values of crack length  $l$  range from 0.4 to 6 cm. Using the approximation of the infinite plane for the stress intensity factor, as given by  $K = \sigma\sqrt{\pi l/2}$ , where  $\sigma$  is the magnitude of the far-field stress, and applying the Irwin criterion we obtained  $K_c = 2.6 \pm 0.3 \text{ MPa m}^{1/2}$  for the fracture toughness.

### 3. Single crack propagation experiments

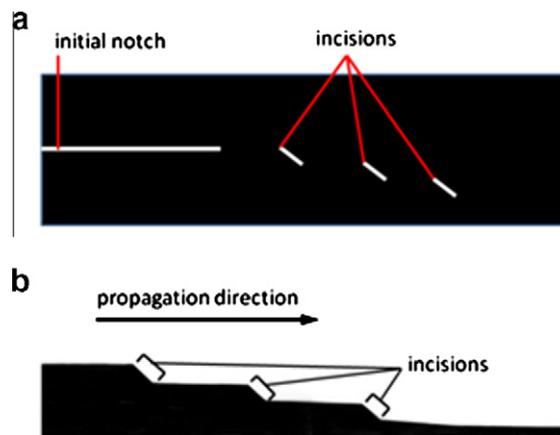
#### 3.1. Stability analysis

In a first experiment, we studied the stability of a single propagating crack. We found that within the present configuration the crack always follows a straight path parallel to the central axis of the sample even when the crack is initiated off the center of the sheet. In order to study the effect on the crack path when external perturbations are applied, we used a film of width 8 cm with an initially centered straight notch, in which we made three incisions of 1.4 cm at an angle of  $45^\circ$  with respect to the direction of the initial notch (Fig. 2). The distance between two successive incisions, which have been made to perturb the crack path, was 5 cm. In this configuration, the crack propagation starts by following a straight path. When the crack tip meets an incision, the configuration becomes asymmetric; nevertheless the crack keeps following an off-centered straight path that is parallel to the central axis of the sample (Fig. 2). Therefore, the crack path remains stable with respect to any perturbations. This makes the behaviour of the crack propagation in the tearing configuration fundamentally different from the case of in-plane propagation under opening mode for which the crack path can be either straight, propagating on the axis of the sample, or unstable [3,12].

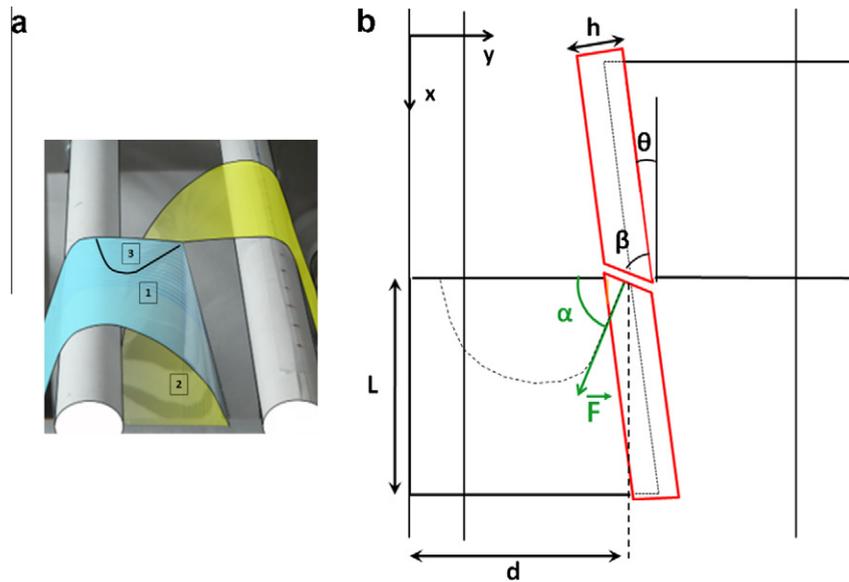
#### 3.2. Geometry of the tearing film

In a second set of experiments, we considered the three-dimensional geometry of the film during the tearing process: three regions can be distinguished (see Figs. 1 and 3). A first region, far from the crack, is bent under the action of gravity and does not seem to be influenced by the presence of the crack (region 1 in Fig. 3). A second region hangs under the apparatus and is tilted by an angle  $\theta$  with respect to the cylinders axes. As shown in Fig. 4a, this angle is constant ( $\approx 18^\circ$ ), independently of  $L/d$ , and thus, of the geometry of the experiment. The third region which is located in the neighborhood of the crack tip (region 3 in Fig. 3) has a shape close to a triangle with a vertex at the crack tip. The contour of this region delimits the area where the film is flat. The flatness of the film in this region can be interpreted as a sign that it is stretched and then contains most of the elastic energy that is used to open the crack. Notice that the geometry of the region 2 is mainly governed by the actual tearing process. The torn part is purely stretched near the crack surfaces (region 3) and it is purely bended far from it (region 1); the vertical part of the sheet being free to adapt its shape, must be tilted by angle  $\theta$  in order to suppress the excess of curvature at the boundaries of the sheet.

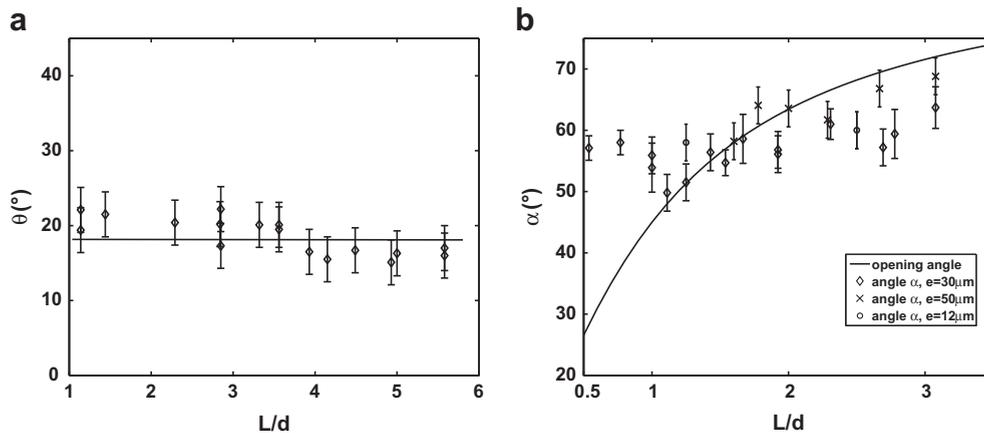
In order to investigate the geometry of the stretched part in Fig. 3, we performed strain measurements of the deformed elastic sheet. Unlike the experimental technique used in [16], we performed direct image analysis of the three-dimensional shape of the film as explained hereafter. First, we note that the curvature in the  $x$ -direction is very small in comparison with



**Fig. 2.** Stability of the crack path. (a) Schematic of the film before tearing: we initiate a centered cut in the film and prepare inclined incisions in order to perturb the crack path. (b) Scan of the film after tearing: the crack path remains straight in the presence of perturbations along its path, even when it is off-centered or close to the boundary of the sample.



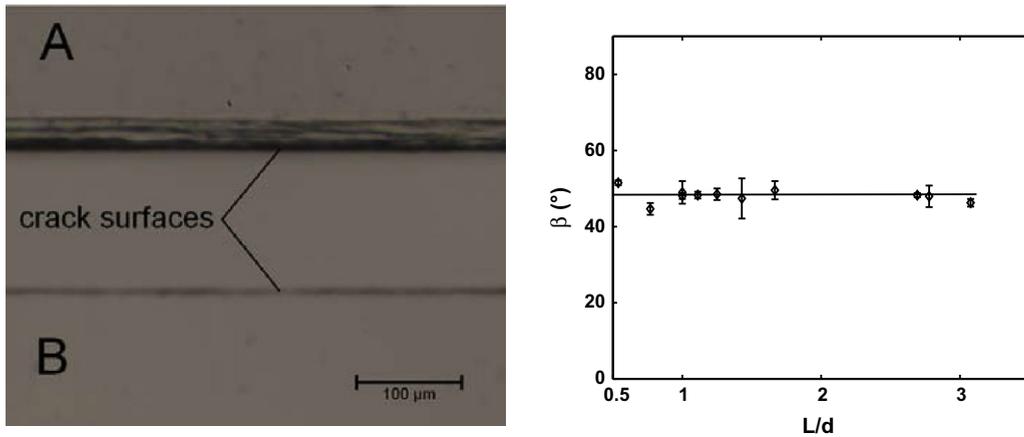
**Fig. 3.** (a) Zoom of Fig. 1. Region 1, which is located far from the crack surface, is bent due to gravity. Region 2 is located hangs vertically under the apparatus and is tilted by an angle  $\theta$  with respect to the cylinders axes. Region 3 is a flat region whose a shape is close to a triangle ending at the crack tip. (b) Schematic of a top view of the experimental setup: the red rectangle shows a horizontal cut across the hanging vertical part of the film, with a magnified thickness. The opening angle of region 3 at the crack tip is  $\alpha$ , the bevel angle across the thickness of the torn film is  $\beta$  while  $\theta$  is the angle between the hanging part and the axes of the cylinders.



**Fig. 4.** (a) The angle  $\theta$  as a function  $L/d$  for a film of thickness  $30\ \mu\text{m}$ . (b) The angle  $\alpha$  of the “triangular” flat region as a function  $L/d$  for three value of the film thickness. The opening angle is given by  $\tan^{-1}(L/d)$  and is defined by the crack line and the line joining the crack tip to the contact point of the film edge with the top cylinder.

the curvature in the  $y$ -direction, so that we can neglect it. In order to visualize the curvature of the film, we draw on it parallel lines in the  $y$ -direction, equidistant by 2 mm: during crack propagation these lines will be straight in the stretched region only. We used degree-2 polynomial fits to measure the curvatures of these lines. We find that the flat region is bounded by the crack line and a straight line emanating from the crack tip, yielding a characteristic angle  $\alpha$  (see Fig. 3). We measured  $\alpha$  for an extensive range of experimental parameters (Fig. 4b) and found an approximately constant value  $\alpha = 58^\circ \pm 4^\circ$  that is insensitive neither to the aspect ratio  $L/d$  nor to the film thickness  $h$ . Moreover, Fig. 4b shows that this angle is not correlated to the geometrical angle  $\tan^{-1}(L/d)$ , thus the geometry of the stretched region is insensitive to the experimental setup and  $\alpha$  characterizes the local concentration of stresses in the vicinity of the crack tip.

As sketched in Fig. 3, in addition to the geometrical angles  $\alpha$  and  $\theta$ , there exists a third angle that characterizes the tearing process across the thickness of the film. Indeed, post-mortem analysis of the crack shows a bevel in the thickness of the sample, which is absent when the sheet is torn under tensile loading (see Fig. 5a). Then this angle is a characteristic of the mode III loading induced by the present tearing process. Using a top view of the crack surface, we can deduce the bevel angle  $\beta$



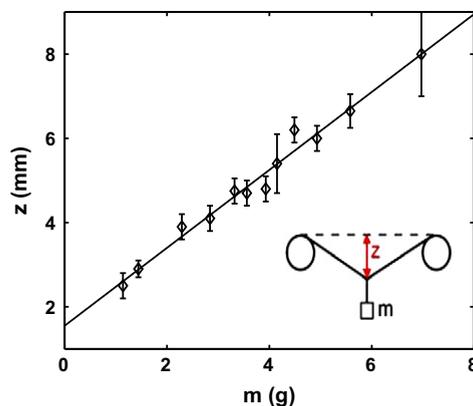
**Fig. 5.** (a) Magnified view with a microscope of the crack surface. A: a crack propagated in out-of-plane shear mode using the present tearing apparatus. The crack surface is darker because it is rough. The width of the dark region shows that the crack surface is tilted, defining a bevel across the thickness of the film. B: a crack propagated under tensile loading. The crack surface looks sharper, showing that it is normal to the surface of the film. (b) Bevel angle  $\beta$  of the crack surface, as a function of the parameter  $L/d$  for films of thickness 30 μm.

from the thickness of the film and the apparent width of the crack surface. Fig. 5b shows that for bidirectional polypropylene  $\beta = 45^\circ \pm 3^\circ$  independently of the experimental parameters  $L/d$  and of the film thickness. Therefore, the latter three angles satisfy the identity  $\alpha \simeq \beta + \theta$ .

#### 4. Interpretation of the experimental results

The curve limiting the flat region marks the transition from a region of zero curvature from a bent region of finite curvature. Therefore, this separation curve induces a line of maximum tension in the sheet which would correspond to a large scale pulling force on the crack tip. The fact that the different angles satisfy the condition  $\alpha = \beta + \theta$ , means that this line of maximum tension is perpendicular to the crack surfaces (Fig. 3). Consequently, even for thin sheets the system adapts itself geometrically so that the crack propagates under the action of a local pure tensile loading (mode I), although a large scale out-of-plane shear mode is imposed. Our result can be seen as a generalization of the Principle of Local Symmetry for a crack propagating in a thin plate torn under mode III loading at large scales.

Notice that the stress field induced by the crack tip is divergent and cannot be simply described by a force. The force we introduced above should be understood as the resultant of the stress field far from the tip. In order to validate our interpretation, we built a method to measure the intensity of this large scale force. We performed experiments where we increased the mass of the film by hanging weights at the free edge of the sample below the crack tip. The masses ranged from 1.45 to 7 g (the film mass is 0.8 g). A first observation is that the angles  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\theta$  are not affected by the mass of the film. However, the crack tip departs from the plane determined by the top of the free cylinders (see Fig. 6). We measured the height of the crack tip  $z$  as a function of the applied mass  $m$  (Fig. 6). As the bevel angle does not vary, the area of the new surfaces is not affected by the weights, so that the energy needed to create new surfaces remains constant. As a consequence, we may



**Fig. 6.** The height of the crack tip  $z$  as a function of the added mass  $m$  at the bottom of the film, for a film of thickness  $h = 30 \mu\text{m}$ ,  $d = 2.6 \text{ cm}$  and  $L = 4 \text{ cm}$ .

assume that the intensity of the force is independent of the experimental geometrical parameters. The balance of vertical forces is simply given by

$$2F_0 \cos \alpha \sin \delta = mg \quad (4)$$

with  $\tan \delta = z/d$ . In the experiments performed we had  $z/d$ . Then

$$z = \frac{gd}{2F_0 \cos \alpha} m \quad (5)$$

Indeed, Fig. 6 shows that  $z$  varies linearly with  $d$  in the experimental range  $0.1 \leq z/d \leq 0.3$ . We could not investigate a wider range of masses because when  $m$  is increased further a stick-slip-like phenomenon occurs, such that crack propagation is no more quasi-static. The force intensity is obtained with a linear fit as  $F_0 = 0.25 \pm 0.05$  N. Then we compare this value with the minimal force necessary to propagate a crack in this material, as given by the critical toughness  $K_c$ . In the experiment, we observed that a force is applied in the horizontal plane far from crack tip. The typical distance  $l$  between the effective application point of this force and the crack tip is of the order of the thickness. The necessary force to propagate the crack is given by  $F_{th} = K_c h \sqrt{\frac{2l}{\pi}}$ . For the  $30 \mu\text{m}$  thickness films, we obtain  $F_{th} = 0.3$  N which coincides, within the experimental uncertainty, with the measured value 0.25 N. Thus the present experimental approach can be viewed as a new tool to measure the fracture toughness of thin sheets submitted to out of plane loading (a modified version of the trouser's test experiments).

## 5. Cracks interaction experiments

The interaction between two cracks was previously investigated in the case of thin films adhering to a hard substrate [17,18]. Following these previous studies, we performed experiments to investigate the simultaneous propagation of two cracks using our experimental setup. We initiate two cracks symmetrically with respect to the central axis of the sample. The main control parameters of this experiment are the initial distance between the two cracks  $l$  and the width of the sample  $L$ . We checked that the crack free length  $d$  does not influence our results. In this new configuration, the two cracks trajectories are curved toward the central axis. Then after the merging of the cracks, the central piece of the sample detaches itself from the rest. The torn part of the sheet has a symmetric tongue-like shape (Fig. 7); When the ratio of the initial width of the central part with the width of the sample is small enough ( $l \leq 0.1 L$ ), experiments are reproducible. If the middle part is larger ( $l \geq 0.1 L$ ), experiments are less reproducible and the shape of the tear is not always symmetric. This could be due to the high sensitivity of the two-cracks propagation experiment to the imperfections in the parallelism of the cylinders' axes.

We digitized the tongue-like shapes and measured their width as function of the distance to their tips. Fig. 8 is the main result of this section. It shows that for a given thickness of the film, profiles can be superimposed for different values of the initial width  $l$  and are well-described by power laws. Moreover, the prefactors of the power laws increase with the thickness, while the exponents appear to remain constant. Fig. 8 also shows that there is transition in the power law behavior when the width of the samples becomes small; i.e. close to the tip of the strip. The exponent at small scales is close to 1 and far from the tip, the value of the exponent is approximately 0.6. The transition occurs when the width of the sample is around 5 mm. The change in the behavior of the two cracks paths when approaching their merging point might be related to the following observations on the resulting tear:

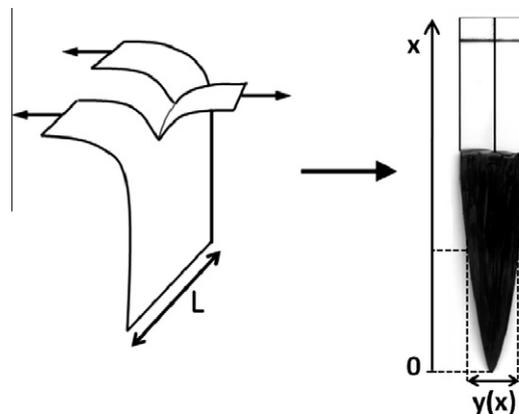
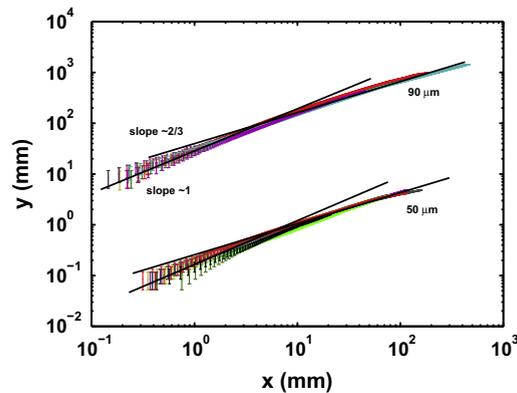


Fig. 7. Schematic of the experiment (left) and a scan of the resulting pattern from the simultaneous propagation of two cracks (right).



**Fig. 8.** Log-Log plots of the width of the strip along the direction of tearing. The merging point of the two cracks defines the origin of  $x$ -axis. The points corresponding to films of thickness  $90\ \mu\text{m}$  are multiplied by  $10^2$  for clarity. Experiments with the same film thickness and different distances  $l$  between the two initial cuts clearly superimpose.

- (1) During the tearing process, the cracks tips positions do not remain stationary and are not always located at the mid-distance  $d$  between the two cylinders because the distance between the cracks tips is decreasing. This leads to an asymmetry in the loading configuration which in turn increases the bending deformation of the central part of the sheet.
- (2) After tearing, far from the tip, the strip recovers its flatness indicating a brittle fracture process, while it is permanently curved in a small region close to the tip which is a signature of plastic deformations.
- (3) Post-mortem analysis of the fracture surface across the film thickness shows that the bevel angle is far from the tip is constant along the strip and equal to  $45^\circ$ , in agreement with a single crack propagation. However, at approximately  $3.5\ \text{mm}$  from the cracks merging position, a transition occurs; the bevel angle suddenly increases until reaching the value of  $63^\circ$  at the tip of the strip. When the width becomes of the order of the thickness, problem becomes intrinsically 3D.

These observations indicate that there are two regimes of fracture process. When the distance between cracks is large, the imposed loading for tearing is low leading to a brittle fracture behavior. In this regime, the strip is described by a power law shape with a well-defined exponent of approximately 0.6. A transition occurs when the distance between the crack tips is of order of few thicknesses of the film. In this region, the fracture process is no more brittle because of the high loading imposed by bending deformations. In this plastic regime, the strip becomes sharper and is well-described by a triangular shape. During the first regime of propagation when the distance between the two cracks tips is large, the bevel angle of both crack surfaces is the same as for a single crack propagation. This suggests that the local geometry at the crack tip, constrained by the necessity to break under mode I loading, is not modified.

## 6. Conclusion

The main result of the present experimental study is that crack propagation in a thin film submitted to out-of-plane tearing mode at large scale occurs such that the crack tip is opened locally under the action of an in-plane tensile loading. In other words, the fracture process is always ruled by the Griffith criterion and the Principle of Local Symmetry, whatever is the loading mode at large scales and the dimensionality of the material. Moreover, we have shown that, within our experimental setup, a single crack always propagate such that its path is always straight and parallel to the lateral boundaries of the sample and that it remains stable in the presence of imposed perturbations on its path. The present work can be put in the framework of the more general problem of stability of crack paths under mixed mode loadings.

Concerning the interaction of two cracks, we have shown that in the tearing mode two cracks propagating simultaneously attract each other and merge to form a tear of reproducible shape. Image analysis show that the obtained pattern is well described by a power law function with an exponent of order 0.6 in the brittle fracture regime. The interpretation of this behavior will be the subject of a future study.

## Acknowledgements

We are grateful to Laurent Quartier for his help in building the experimental apparatus and to Benoit Roman for insightful discussions.

## References

- [1] Freund LB. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1980.
- [2] Leblond JB. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Paris: Hermes Science Publications; 2003.
- [3] Cotterell B, Rice JR. Slightly curved or kinked cracks. *Int J Fracture* 1980;16:155–69.
- [4] Adda-Bedia M, Arias R, Ben Amar M, Lund F. Generalized Griffith criterion for dynamic fracture and the stability of crack motion at high velocities. *Phys Rev E* 1999;60:2366–76.
- [5] Griffith AA. The phenomenon of rupture and flow in solid. *Phil Trans R Soc A (London)* 1920;221:163–98.
- [6] Gol'dstein RV, Salganik RL. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *Int J Fracture* 1974;10:507–23.
- [7] Leblond JB. Crack paths in plane situations-I. General form of the expansion of the stress intensity factors. *Int J Solids Struct* 1989;25:1311–25.
- [8] Erdogan G, Sih GC. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J Basic Engng* 1963;85:519–27.
- [9] Bilby BA, Cardew GE. The crack with a kinked tip. *Int J Fracture* 1975;11:708–12.
- [10] Amestoy M, Leblond JB. Crack paths in plane situations-II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *Int J Solids Struct* 1992;29:465–501.
- [11] Katzav E, Adda-Bedia M, Arias R. Theory of dynamic crack branching in brittle materials. *Int J Fracture* 2007;143:245–71.
- [12] Corson F, Henry H, Katzav E, Adda-Bedia M. Thermal fracture as a framework for quasi-static crack propagation. *Int J Fracture* 2009;58:1–14.
- [13] Mai YM, Cotterell B. The essential work of fracture for tearing of ductile metals. *Int J Fracture* 1984;24:229–36.
- [14] Lazarus V, Buchholz FG, Wiebesiek J. In: *Institute of fundamental technological research*. Polish Academy of Science; 2006.
- [15] Barenblatt GI, Cherepanov G. On brittle cracks under longitudinal shear. *PMM* 1961;25:1110–9.
- [16] Yan JH, Sutton MA, Deng X, Wei Z, Zavattieri P. Mixed-mode crack growth in ductile thin-sheet materials under combined in-plane and out-of-plane loading. *Int J Fracture* 2009;160:169–88.
- [17] Atkins AG. Opposite paths in the tearing of sheet materials. *Endeavour* 1994;18:2–10.
- [18] Hamm E, Reis PM, Leblanc M, Roman B, Cerda E. Tearing as a test for mechanical characterization of thin adhesive films. *Nat Mater* 2008;7:386–90.



# Résumé

Les singularités en mécanique correspondent à la focalisation des déformations sur une zone très petite au lieu qu'elles soient réparties de façon homogène dans le matériau. Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux d'entre-elles : les plis qui apparaissent lorsque l'on confine des tiges et la fracture dans des plaques.

La première partie du mémoire concerne le confinement de tiges dans un espace bidimensionnel. La géométrie de tels systèmes est contrainte par les dimensions du récipient confinant et par l'impossibilité du matériau de s'interpénétrer. Les motifs développés sont complexes et présentent une large gamme d'échelles de longueurs. Dans une première expérience, nous suivons la dynamique de confinement d'un anneau de gel en croissance. Nous montrons que l'espace des phases se complexifie avec une augmentation du confinement. Dans une deuxième expérience, une tige est confinée dans une cellule de Hele-Shaw circulaire au travers d'un potentiel radial, de façon réversible. La grande diversité des géométries explorées nécessite d'en faire une étude statistique. Nous trouvons que les motifs s'ordonnent avec le confinement notamment par un processus de superposition de couches de la tige. Nous définissons la compressibilité de la configuration d'une tige confinée comme étant sa réponse à une perturbation mécanique, et montrons qu'elle permet une mesure du désordre de la géométrie globale.

Nous abordons ensuite les problèmes de propagation et d'interaction de fissures dans des plaques minces. Le dispositif expérimental élaboré reproduit le geste que l'on fait lorsque l'on déchire une feuille de papier. Nous montrons que la propagation d'une fissure dans un film mince, soumise à un mode de cisaillement hors du plan à grande échelle (mode III), se produit de telle sorte que la pointe de la fissure est ouverte localement sous l'action d'un mode d'ouverture (mode I). Dans une seconde expérience, deux fissures se propageant simultanément dans le film mince interagissent et leurs trajectoires s'attirent. Nous montrons que l'interaction des deux fissures se fait au travers du pli formé par la languette centrale qui induit des déformations élastiques dans le reste du film.

# Abstract

The deformation of elastic materials can lead to singularities, which allow to focus energy. In this work, we have been interested in two examples : folds which appear when a rod is confined and cracks in a plate.

The first part of this thesis concerns the folding of an elastic rod in a 2D space. The geometry of the resulting configurations is constrained by self-avoidance as well as by the dimensionnality of both structure and container. In a first experiment, we follow the dynamics of the confinement of a ring of swelling gel. We show that the phase space becomes more and more complex when the confinement is increased. In a second experiment, an elastic rod is reversibly folded at the center of a circular Hele-Shaw cell by a centripetal force. The wide diversity of the configurations calls for a statistical approach. We show that folded patterns become ordered when the strength of confinement is increased, because of the stacking of layers of rod. Finally, we introduce the notion of the compressibility of the folded rod as a response to a mechanical perturbation and show that this quantity is a measure of the disorder.

In a second part, we study cracks propagation in a thin brittle elastic plate submitted to out-of-plane shear mode. The experimental setup mimics the common way in which one tears a sheet of paper. We find that the geometry of the sheet is determined by the direction of a large scale force, applied to the crack tip. This force is perpendicular to cracked surfaces. While the material is deformed at large scales under mode III loading, the geometry of system in the vicinity of the crack tip adapts so that the material is locally broken under a pure mode I loading. In a second experiment, we consider the interaction of two cracks propagating simultaneously. We observe that the cracks paths merge and produce a strip of well-defined shape, which is driven by the elastic deformations of the plate within the central fold.

# Bibliographie

- [Aki and Richards, 1980] Aki, K. and Richards, P. (1980). *Quantitative seismology, theory and methods*. University Science Book.
- [Andresen et al., 2007] Andresen, C. A., Hansen, A., and Schmittbuhl, J. (2007). Ridge network in crumpled paper. *Physical Review E*, 76(2) :026108.
- [Aristoff and Radin, 2009] Aristoff, D. and Radin, C. (2009). Layering in crumpled sheets. *ArXiv e-prints*.
- [Arsuaga et al., 2002] Arsuaga, J., Vazquez, M., Trigueros, S., Sumners, D., and Roca, J. (2002). Knotting probability of dna molecules confined in restricted volumes : Dna knotting in phage capsids. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 99(8) :5373–5377.
- [Ashwell, 1952] Ashwell, D. G. (1952). A characteristic type of instability in the large deflexions of elastic plates .1. curved rectangular plates bent about one axis .2. flat square plates bent about all edges. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-mathematical and Physical Sciences*, 214(1116) :98–&.
- [Atkins, 1995] Atkins, A. G. (1995). Opposite paths in the tearing of sheet materials. *Endeavour*, 19(1) :2–10.
- [Balankin et al., 2007a] Balankin, A. S., de Oca, R. C. M., and Ochoa, D. S. (2007a). Intrinsically anomalous self-similarity of randomly folded matter. *Phys. Rev. E*, 76(3) :032101–.
- [Balankin and Huerta, 2008] Balankin, A. S. and Huerta, O. S. (2008). Entropic rigidity of a crumpling network in a randomly folded thin sheet. *Phys. Rev. E*, 77(5) :051124–.
- [Balankin et al., 2008] Balankin, A. S., Ochoa, D. S., León, E. P., de Oca, R. C. M., Rangel, A. H., and Cruz, M. n. M. (2008). Power law scaling of lateral deformations with universal poisson’s index for randomly folded thin sheets. *Phys. Rev. B*, 77(12) :125421–.
- [Balankin et al., 2010] Balankin, A. S., Ochoa, D. S., Miguel, I. A., Ortiz, J. P., and Cruz, M. n. M. (2010). Fractal topology of hand-crumpled paper. *Phys. Rev. E*, 81(6) :061126–.
- [Balankin et al., 2007b] Balankin, A. S., Silva, I. C., Martínez, O. A., and Huerta, O. S. (2007b). Scaling properties of randomly folded plastic sheets. *Phys. Rev. E*, 75(5) :051117–.
- [Barenblatt and Cherepanov, 1961] Barenblatt, G. and Cherepanov, G. (1961). On brittle cracks under longitudinal shear. *PMM*, 25 :1110–9.

- [Ben Amar and Pomeau, 1997] Ben Amar, M. and Pomeau, Y. (1997). Crumpled paper. *Proceedings of the Royal Society A-mathematical Physical and Engineering Sciences*, 453 :729–755.
- [Blair and Kudrolli, 2005] Blair, D. L. and Kudrolli, A. (2005). Geometry of crumpled paper. *Physical Review Letters*, 94(16) :166107.
- [Blair et al., 2003] Blair, D. L., Neicu, T., and Kudrolli, A. (2003). Vortices in vibrated granular rods. *Physical Review E*, 67(3) :031303.
- [Bohn et al., 2005] Bohn, S., Pauchard, L., and Couder, Y. (2005). Hierarchical crack pattern as formed by successive domain divisions. i. temporal and geometrical hierarchy. *Physical Review E*, 71(4) :046214.
- [Boudaoud, 2001] Boudaoud, A. (2001). *Membranes élastiques et capillaires : instabilités, singularités et auto-adaptation*. PhD thesis, Université Paris VI.
- [Boudaoud, 2006] Boudaoud, A. (2006). *Morphogénèse et auto-organisation : tiges, plaques, films et gouttes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- [Boue, 2008] Boue, L. (2008). *Vers une physique statistique du pliage et du froissage de structures élastiques*. PhD thesis, Université Paris VI.
- [Boue et al., 2006] Boue, L., Adda-Bedia, M., Boudaoud, A., Cassani, D., Couder, Y., Eddi, A., and Trejo, M. (2006). Spiral patterns in the packing of flexible structures. *Physical Review Letters*, 97(16) :166104.
- [Boue and Katzav, 2007] Boue, L. and Katzav, E. (2007). Folding of flexible rods confined in 2d space. *Epl*, 80(5) :54002.
- [Broberg, 1999] Broberg, K. B. (1999). *Cracks and Fracture*. Academic Press.
- [Bui et al., 1980] Bui, H., A., E., and Nguyen, Q. (1980). Propagation de fissure en thermoélasticité dynamique. *Journal de Mécanique*, 19 :697–723.
- [Cambou and Menon, 2009] Cambou, A. D. and Menon, N. (2009). X-ray computerized tomography scan of crumpled aluminum sheet. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(4) :041109.
- [Cates et al., 1998] Cates, M. E., Wittmer, J. P., Bouchaud, J. P., and Claudin, P. (1998). Jamming, force chains, and fragile matter. *Physical Review Letters*, 81(9) :1841–1844.
- [Cerdea et al., 1999] Cerde, E., Chaieb, S., Melo, F., and Mahadevan, L. (1999). Conical dislocations in crumpling. *Nature*, 401(6748) :46–49.
- [Cerdea and Mahadevan, 2003] Cerde, E. and Mahadevan, L. (2003). Geometry and physics of wrinkling. *Physical Review Letters*, 90(7) :074302.
- [Chaïeb and Melo, 1997] Chaïeb, S. and Melo, F. (1997). Experimental study of crease formation in an axially compressed sheet. *Phys. Rev. E*, 56(4) :4736–.
- [Cohen and Procaccia, 2010] Cohen, Y. and Procaccia, I. (2010). Dynamics of cracks in torn thin sheets. *Phys. Rev. E*, 81(6) :066103.
- [Couturier, 2009] Couturier, E. (2009). *Pli et forme de feuilles*. PhD thesis, Université Paris VII.

- [Couturier et al., 2009] Couturier, E., du Pont, S. C., and Douady, S. (2009). A global regulation inducing the shape of growing folded leaves. *Plos One*, 4(11) :e7968.
- [D’Arcy-Thompson, 1917] D’Arcy-Thompson (1917). *On Growth And Form*. Cambridge University Press.
- [de Gennes and Prost, 1974] de Gennes, P. and Prost, J. (1974). *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford University Press.
- [Deboeuf et al., 2009] Deboeuf, S., Adda-Bedia, M., and Boudaoud, A. (2009). Energy distributions and effective temperatures in the packing of elastic sheets. *Epl*, 85(2) :24002.
- [Donato et al., 2002] Donato, C. C., Gomes, M. A. F., and de Souza, R. E. (2002). Crumpled wires in two dimensions. *Physical Review E*, 66(1) :015102.
- [Donato et al., 2003] Donato, C. C., Gomes, M. A. F., and de Souza, R. E. (2003). Scaling properties in the packing of crumpled wires. *Physical Review E*, 67(2) :026110.
- [Edwards and Oakeshott, 1989] Edwards, S. F. and Oakeshott, R. B. S. (1989). Theory of powders. *Physica A*, 157(3) :1080–1090.
- [Erdogan and Sih, 1963] Erdogan, G. and Sih, G. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J Basic Engng*, 85 :519–27.
- [Farge, 2003] Farge, E. (2003). Mechanical induction of twist in the drosophila foregut/stomodaeal primordium. *Current Biology*, 13(16) :1365–1377.
- [Freund, 1990] Freund, L. (1990). *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press.
- [Geminard and Vanel, 2008] Geminard, J. C. and Vanel, L. (2008). The motion of a freely falling chain tip : Force measurements. *American Journal of Physics*, 76(6) :541–545.
- [Gol’dstein and Sagalnik, 1974] Gol’dstein, R. and Sagalnik, R. L. (1974). Brittle-fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture*, 10(4) :507–523.
- [Gomes, 1987] Gomes, M. A. F. (1987). Fractal geometry in crumpled paper balls. *American Journal of Physics*, 55(7) :649–650.
- [Gomes et al., 1989] Gomes, M. A. F., Jyh, T. I., Ren, T. I., Rodrigues, I. M., and Furtado, C. B. S. (1989). Mechanically deformed crumpled surfaces. *J. Phys. D*, 22, :1217–1221.
- [Gomes et al., 1991] Gomes, M. A. F., Lima, F. F., and Oliveira, V. M. (1991). Plastic properties of crumpled wires. *Philosophical Magazine Letters*, 64(6) :361–364.
- [Gosciny and Gotlib, 1972] Gosciny, R. and Gotlib, M. (1972). *les Dingodossiers - Tome 2*. Dargaud.
- [Griffith, 1920] Griffith, A. (1920). The phenomenon of rupture and flow in solid. *Phil Trans R Soc A (London)*, 221 :163–98.
- [Guyon et al., 2001] Guyon, E., Hulin, J., and Petit, L. (2001). *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences.
- [Hamm et al., 2008] Hamm, E., Reis, P., LeBlanc, M., Roman, B., and Cerda, E. (2008). Tearing as a test for mechanical characterization of thin adhesive films. *Nature Materials*, 7(5) :386–390.

- [Herrmann and Roux, 1990] Herrmann, H. J. and Roux, S., editors (1990). *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*. Elsevier Science.
- [Hinkley and Hoogstraten, 1987] Hinkley, J. and Hoogstraten, C. (1987). Tearing of thin polyimide films. *Journal of Materials Science*, 22 :4422–4425.
- [Hopkinson, 1913] Hopkinson, B. (1913). Discussion to paper by c.e. inglis. *Trans. Inst. Nav. Arch.*, 55 :232–234.
- [Hourlier and Pineau, 1979] Hourlier, F. and Pineau, A. (1979). Fatigue cracking under polymodal (mode-i sinusoidal and mode-iii permanent) stress in a 26-ncdv-14 steel for rotors. *Memoires Scientifiques De La Revue De Metallurgie*, 76(3) :175–185.
- [Inconnu, web] Inconnu (web). <http://www.cpsu.org.au/multiattachments/15557.html>. .
- [Inglis, 1913] Inglis, C. (1913). Stress concentrations due to the presence of cracks and sharp corners. *Trans. Inst. Nav. Arch.*, 55(1) :219–239.
- [Irwin, 1958] Irwin, G. (1958). Fracture. *Hand. der Physik, Springer, Berlin*, VI :551–590.
- [Karayiannis and Laso, 2008] Karayiannis, N. C. and Laso, M. (2008). Dense and nearly jammed random packings of freely jointed chains of tangent hard spheres. *Physical Review Letters*, 100(5) :050602.
- [Katifori et al., 2010] Katifori, E., Alben, S., Cerda, E., Nelson, D. R., and Dumais, J. (2010). Foldable structures and the natural design of pollen grains. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 107(17) :7635–7639.
- [Kobayashi et al., 1998] Kobayashi, H., Kresling, B., and Vincent, J. F. V. (1998). The geometry of unfolding tree leaves. *Proceedings of the Royal Society of London Series B-biological Sciences*, 265(1391) :147–154.
- [Lawn, 1993] Lawn, B. (1975,1993). *Fracture of Brittle Solids - Second Edition*. Cambridge University Press.
- [Lazarus et al., 2008] Lazarus, V., Buchholz, F. G., Fulland, M., and Wiebesiek, J. (2008). Comparison of predictions by mode ii or mode iii criteria on crack front twisting in three or four point bending experiments. *International Journal of Fracture*, 153(2) :141–151.
- [Lazarus et al., 2001] Lazarus, V., Leblond, J. B., and Mouchrif, S. E. (2001). Crack front rotation and segmentation in mixed mode i plus iii or i+ii+iii. part ii : Comparison with experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(7) :1421–1443.
- [L.D.Landau and E.M.Lifshitz, 1953] L.D.Landau and E.M.Lifshitz (1953). *Theory of Elasticity*. Mir Editions.
- [Leblond, 1989] Leblond, J. (1989). Crack paths in plane situation-ii. detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 25 :1311–25.
- [Leblond, 2003] Leblond, J. (2003). *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès Science.
- [Lin et al., 2009] Lin, Y. C., Sun, J. M., Hsiao, J. H., Hwu, Y., Wang, C. L., and Hong, T. M. (2009). Spontaneous emergence of ordered phases in crumpled sheets. *Physical Review Letters*, 103(26) :263902.

- [Liu and Nagel, 1998] Liu, A. J. and Nagel, S. R. (1998). Nonlinear dynamics : Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396(6706) :21–22.
- [Liu and Chakraborty, 2008] Liu, Y. and Chakraborty, B. (2008). Shapes of semiflexible polymers in confined spaces. *Physical Biology*, 5(2) :026004.
- [Lobkovsky and Witten, 1997] Lobkovsky, A. E. and Witten, T. A. (1997). Properties of ridges in elastic membranes. *Physical Review E*, 55(2) :1577–1589.
- [Love, 1927] Love, A. (1927). *Treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications.
- [Mai and Atkins, 1980] Mai, Y. W. and Atkins, A. G. (1980). Crack stability in fracture-toughness testing. *Journal of Strain Analysis For Engineering Design*, 15(2) :63–74.
- [Mai and Cotterell, 1984] Mai, Y. W. and Cotterell, B. (1984). The essential work of fracture for tearing of ductile metals. *International Journal of Fracture*, 24(3) :229–236.
- [Matan et al., 2002] Matan, K., Williams, R. B., Witten, T. A., and Nagel, S. R. (2002). Crumpling a thin sheet. *Physical Review Letters*, 88(7) :076101.
- [Mellado et al., 2009] Mellado, P., Cheng, S., and Concha, A. (2009). Mechanical response of a self avoiding membrane : fold collisions and the birth of conical singularities. *ArXiv e-prints*.
- [Muscat-Fenech et al., 1992] Muscat-Fenech, C., Liu, J. H., and Atkins, A. G. (1992). The trousers tearing test with ductile metal sheets. *Journal of Materials Processing Technology*, 32(1-2) :301–315.
- [Nowak et al., 1997] Nowak, E. R., Knight, J. B., Povinelli, M. L., Jaeger, H. M., and Nagel, S. R. (1997). Reversibility and irreversibility in the packing of vibrated granular material. *Powder Technology*, 94(1) :79–83.
- [Palaniswamy and Knauss, 1975] Palaniswamy, K. and Knauss, W. (1975). Crack extension in brittle solids. *Mechanics Today, Pergamon Press*, 4 :87.
- [Pauchard, 2006] Pauchard, L. (2006). Patterns caused by buckle-driven delamination in desiccated colloidal gels. *Europhysics Letters*, 74(1) :188–194.
- [Plouraboue and Roux, 1996] Plouraboue, F. and Roux, S. (1996). Experimental study of the roughness of crumpled surfaces. *Physica A*, 227(3-4) :173–182.
- [Pokluda et al., 2010] Pokluda, J., Slamecka, K., and Sandera, P. (2010). Mechanism of factory-roof formation. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(11) :1763–1771.
- [Pomeau, 1995] Pomeau, Y. (1995). Crumpled paper. *Comptes Rendus De L Academie Des Sciences Serie I-mathematique*, 320(8) :975–979.
- [Reis et al., 2009] Reis, P. M., Corson, F., Boudaoud, A., and Roman, B. (2009). Localization through surface folding in solid foams under compression. *Physical Review Letters*, 103(4) :045501.
- [Rivlin and Thomas, 1953] Rivlin, R. S. and Thomas, A. G. (1953). Rupture of rubber .1. characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science*, 10(3) :291–318.

- [Rogers et al., 2010] Rogers, J. A., Someya, T., and Huang, Y. G. (2010). Materials and mechanics for stretchable electronics. *Science*, 327(5973) :1603–1607.
- [Safford et al., 2009] Safford, K., Kantor, Y., Kardar, M., and Kudrolli, A. (2009). Structure and dynamics of vibrated granular chains : Comparison to equilibrium polymers. *Physical Review E*, 79(6) :061304.
- [Schollmann et al., 2002] Schollmann, M., Richard, H. A., Kullmer, G., and Fulland, M. (2002). A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures. *International Journal of Fracture*, 117(2) :129–141.
- [Schreck et al., 2010] Schreck, C. F., Xu, N., and O’Hern, C. S. (2010). A comparison of jamming behavior in systems composed of dimer- and ellipse-shaped particles. *Soft Matter*, 6(13) :2960–2969.
- [Sen et al., 2010] Sen, D., Novoselov, K. S., Reis, P. M., and Buehler, M. J. (2010). Tearing graphene sheets from adhesive substrates produces tapered nanoribbons. *Small*, 6(10) :1108–1116.
- [Sommer, 1969] Sommer, E. (1969). Formation of fracture ‘lances’ in glass. *Engineering Fracture Mechanics*, 1 :539–546.
- [Sultan and Boudaoud, 2006] Sultan, E. and Boudaoud, A. (2006). Statistics of crumpled paper. *Physical Review Letters*, 96(13) :136103.
- [Tanaka, 1978] Tanaka, T. (1978). Collapse of gels and the critical endpoint. *Phys. Rev. Lett.*, 40(12) :820–823.
- [Torquato and Stillinger, 2010] Torquato, S. and Stillinger, F. H. (2010). Jammed hard-particle packings : From kepler to bernal and beyond. *ArXiv e-prints*.
- [Torquato et al., 2000] Torquato, S., Truskett, T. M., and Debenedetti, P. G. (2000). Is random close packing of spheres well defined? *Physical Review Letters*, 84(10) :2064–2067.
- [Trepanier and Franklin, 2010] Trepanier, M. and Franklin, S. V. (2010). Column collapse of granular rods. *Phys. Rev. E*, 82(1) :011308.
- [Tzschichholz et al., 1995] Tzschichholz, F., A., H., and Roux, S. (1995). Roughness of randomly crumpled elastic sheets. *eprint arXiv :cond-mat/9507056*, arXiv :cond-mat/9507056.
- [Witten, 2007] Witten, T. A. (2007). Stress focusing in elastic sheets. *Reviews of Modern Physics*, 79(2) :643–675.
- [Wong et al., 2003] Wong, J. S. S., Ferrer-Balas, D., Li, R. K. Y., Mai, Y. W., Maspoeh, M. L., and Sue, H. J. (2003). On tearing of ductile polymer films using the essential work of fracture (ewf) method. *Acta Materialia*, 51(16) :4929–4938.
- [Wootton, 1981] Wootton, R. J. (1981). Support and deformability in insect wings. *Journal of Zoology*, 193(APR) :447–468.
- [Zegzouti, web] Zegzouti, A. (web). <http://photos.linternaute.com/photo/1111154/1097367789/795/la-sardine-de-safi/>. .

- [Zou et al., 2009] Zou, L. N., Cheng, X., Rivers, M. L., Jaeger, H. M., and Nagel, S. R. (2009). The packing of granular polymer chains. *Science*, 326(5951) :408–410.