HAL open science

Récurrence de Poincaré pour les observations

Jerome Rousseau

▶ To cite this version:

Jerome Rousseau. Récurrence de Poincaré pour les observations. Mathématiques [math]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2010. Français. NNT : . tel-00530589

HAL Id: tel-00530589

https://theses.hal.science/tel-00530589v1

Submitted on 29 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de Mathématiques

présentée à

l'Université de Bretagne Occidentale

(Ecole doctorale SICMA)

par

Jérôme Rousseau

Récurrence de Poincaré pour les observations

Thèse soutenue le 24 septembre 2010 devant le jury composé de :

Président :	François Ledrappier	Directeur de recherches à l'Université Paris VI
Rapporteurs :	Jean-René Chazottes	Chargé de recherches à l'Ecole Polytechnique
	Hans Henrik Rugh	Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise
Examinateurs :	Yves Derriennic	Professeur émérite à l'Université de Brest
	Quansheng Liu	Professeur à l'Université de Bretagne Sud
	Françoise Pène	Maître de conférence à l'Université de Brest Habilitée à diriger des recherches
	Serge Troubetzkoy	Professeur à l'Université de la Méditerranée
Directeur de thèse :	Benoît Saussol	Professeur à l'Université de Brest

Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien sur à Benoît Saussol pour avoir dirigé cette thèse, pour sa disponibilité (sa porte toujours ouverte me permettant de le déranger à tout instant), pour m'avoir fait découvrir et aimer la récurrence de Poincaré, pour toute l'aide et les conseils qu'il a su m'apporter pendant cette thèse. Grâce à lui, ce fut un plaisir de travailler à Brest pendant ces 3 ans avec lui et je lui exprime donc toute ma reconnaissance.

Je remercie Jean-René Chazottes pour avoir accepté d'être rapporteur, pour m'avoir aidé à améliorer cette thèse mais aussi pour m'avoir permis de présenter mes travaux à Eindhoven.

Je remercie Hans Henrik Rugh pour avoir rapporté cette thèse avec attention et pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Yves Derriennic, François Ledrappier, Quansheng Liu, Françoise Pène et Serge Troubetzkoy pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Un remerciement tout particulier à Renaud Leplaideur qui m'a permis de travailler au Brésil (mais aussi de rencontrer Vanessa).

Je voudrais aussi remercier Paulo Varandas avec qui j'ai pu travailler pendant 1 mois à l'UFBA, mais aussi Armando Castro, Diego Catalano et Vilton Pinheiro pour les discussions mathématiques et pour leur accueil chaleureux.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de manière plus ou moins directe à l'avancement de cette thèse, par ordre alphabétique : Miguel Abadi, José Alves, Yves Coudène, Jean-Marc Derrien, João Lopes Dias, Pedro Duarte, Stefano Galatolo, Katrin Gelfert, Stefano Luzzatto, Philippe Marie, Krerley Oliveira, Sandro Vaienti, Yun Zhao.

Je remercie aussi le laboratoire de mathématiques de Brest pour son accueil et en particulier Annick Nicolle pour avoir facilité tous les problèmes administratifs.

Eu quero agredecer a minha linda pata ronquinha pelo apoio, o carinho e todas as flores que ela me ofereceu e tambem a Monsieur Pato pelo apoio aquatico.

Je remercie bien sur ma famille pour m'avoir supporter toutes ces années mais surtout pour avoir relu avec attention ma thèse (même s'ils ont laissé passer de nombreuses erreurs mathématiques), Thomas et Marthoud pour leur boogie-woogie, Camille pour ses conseils avisés, Oli pour toutes les discussions mathématiques mais aussi pour sa connaissance parfaite de la vie carioca, Jérémie pour m'avoir supporté en co-bureau pendant 3 ans et répondu à mes innombrables questions, Nicolas qui avec l'aide de Julien a amené un peu de détente dans ce bureau, Laurent qui a essayé de répondre à mes questions de géométrie mais a surtout su égayer (souvent avec Nicolas) les longues soirées nocturnes de l'hiver breton, Aurélien pour ses brioches,

pour tous les fichiers tex qu'il m'a offert mais aussi pour la très bonne publicité qu'il m'a fait de Brest, tous les autres amis de Brest à qui je pense mais que je ne citerai pas et finalement à Emiliano pour nous avoir accompagné tous les midi.

Sommaire

Introduction **1**

1 Systèmes dynamiques et théorie ergodique **7**
1.1 Théorie ergodique 8
1.2 Décroissance des corrélations super-polynomiale 12
1.3 Récurrence de Poincaré moderne 15

2 Dimensions et Mesures **23**
2.1 Dimensions de Hausdorff, de packing et locales 24
2.1.1 Dimension de Hausdorff 24
2.1.2 Dimension de packing 25
2.1.3 Dimensions locales 25
2.2 Existence de la dimension locale 29
2.3 Mesures faiblement diamétralement régulières 35

3 Récurrence de Poincaré pour les observations **39**
3.1 Borne supérieure du taux de récurrence pour les systèmes dynamiques 40
3.2 Taux de récurrence et dimension dans les systèmes mélangeant rapidement 43
3.3 Sur la nécessité des taux de récurrence non-instantanés 48

4 Récurrence pour les systèmes dynamiques aléatoires **51**
4.1 Introduction 52
4.2 Systèmes dynamiques aléatoires et temps de retour 53
4.3 Récurrence aléatoire à réalisation fixée 56
4.4 Récurrence aléatoire moyennée 59
4.5 Preuves des théorèmes 60
4.6 Applications aux automorphismes aléatoires du tore 64
4.7 Applications aux perturbations aléatoires 66

5 Récurrence de Poincaré pour les observations de flots **69**
5.1 Introduction 70
5.2 Récurrence pour les observations de flots 72
5.3 Récurrence pour les observations via les flots suspendus 75
5.4 Observations du flot géodésique 80
5.5 Observations de flots suspendus 83

5.5.1 Projection sur X 83
5.5.2 Projection sur le temps 84
5.5.3 Projection mixte 85
5.6 Majoration des taux de récurrence 85
5.7 Minoration des taux de récurrence 88

Conclusion **95**

Introduction

L'un des théorèmes fondamentaux à l'origine des systèmes dynamiques et de la théorie ergodique est le Théorème de Récurrence de Poincaré. Ce théorème nous dit que l'orbite de presque tout point reviendra aussi près que l'on veut de son point de départ. De même, pour un système ergodique, l'orbite de presque tout point visitera tous les ensembles de mesure strictement positive. Malheureusement, ce théorème ne nous donne aucune indication sur le temps nécessaire à un point pour revenir dans un voisinage de son état initial (le temps de retour) ou sur le temps nécessaire à un point pour visiter un autre ensemble (le temps d'entrée). Un raffinement de ce théorème fut donné par Kač [62] qui prouva que pour un système dynamique ergodique, dans un ensemble de mesure positive, la moyenne des temps de retour dans cet ensemble est égale à l'inverse de la mesure de l'ensemble. Par la suite, de nombreux travaux (dont nous donnerons un aperçu par la suite) ont étudié les propriétés des temps de retour (e.g. [26, 76, 18, 5, 30, 32, 40, 61, 79]) et des temps d'entrée (e.g. [58, 51, 49, 52, 67]).

Néanmoins, le célèbre paradoxe de Zermelo nous montre que le Théorème de Récurrence de Poincaré peut avoir des implications n'ayant aucun sens physique. En effet, imaginons une boîte fermée, séparée en deux par une cloison et telle que l'un des côtés de la boîte soit rempli de gaz. Lorsque l'on enlève la cloison, le gaz va se répandre dans toute la boîte. D'après le théorème de récurrence de Poincaré, le système doit revenir aussi proche que l'on veut de son état initial, le gaz doit donc revenir d'un côté de la boîte. En faisant l'expérience personne ne verra jamais toutes les molécules revenir d'un côté de la boîte au même moment (le temps nécessaire étant en fait supérieur à la durée de vie de la galaxie). Cependant, si l'on se focalise sur un petit nombre de ces molécules (subissant toujours l'action d'un grand nombre de molécules), on pourra observer le retour de ce petit nombre de molécules d'un côté de la boîte après un temps raisonnable.

De même, lorsqu'on étudie un système dynamique de grande dimension, il est possible que l'on ne connaisse qu'une partie ou que certaines quantités du système. Cela peut être dû à la difficulté d'étudier un système dynamique de grande dimension mais aussi au manque d'intérêt d'une description trop détaillée. Dans cette thèse, nous nous intéresserons donc aux observations de systèmes dynamiques.

Récemment, Ott et York ont proposé un formalisme platonique des systèmes dynamiques [77]. La réalité, le système dynamique (X, T, μ), est seulement connue à travers une mesure ou une observation du système, c'est-à-dire une fonction définie sur X et (typiquement) à valeurs dans un espace de dimension plus petite. Le résultat de Boshernitzan [26] sur la récurrence de Poincaré entre dans ce cadre : soient

(X, T, μ) un système dynamique et une observation f de X dans un espace métrique (Y, d). Alors dès que la mesure de Hausdorff α-dimensionnelle est σ-finie sur Y on a

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/\alpha} d\left(f(x), f(T^n x)\right) < \infty \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x. \tag{0.1}$$

Le but de cette thèse est de prouver un raffinement de (0.1) et une généralisation de [18, 88] pour les taux de récurrence pour les observations et d'ensuite étudier la récurrence dans le cadre des flots.

Quelques résultats sur la récurrence de Poincaré

Comme nous l'avons vu précédemment, le Théorème de Récurrence de Poincaré ne nous donne que des informations de nature qualitative. Deux questions essentielles se posent donc : quel est le temps nécessaire à un point pour revenir dans un voisinage de son état initial et avec quelle fréquence le point va-t-il visiter cet ensemble ?

La réponse à cette deuxième question est donnée par le Théorème Ergodique de Birkhoff [25]. Ainsi, pour un système dynamique ergodique $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$, le temps de séjour moyen de l'orbite d'un point $x \in X$ dans un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est égal à la mesure de A pour μ-presque tout x, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\text{card}\{1 \le k \le n : T^k x \in A\}}{n} = \mu(A).$$

De même, par le Théorème de Birkhoff, en notant $\tau_A^{(n)}(x)$ le n-ième temps de retour de x dans A, on a pour μ-presque tout $x \in A$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_A^{(n)}(x)}{n} = \frac{1}{\mu(A)}. \tag{0.2}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, pour la première question, une réponse partielle fut donnée par Kač qui prouva que la moyenne des temps de retour dans un ensemble est égale à l'inverse de la mesure de l'ensemble.

On peut aussi se demander avec quel taux l'orbite d'un point va revenir dans un voisinage de plus en plus petit de son point de départ. Ainsi Ornstein et Weiss [76] ont prouvé que pour un système dynamique ergodique (X, T, μ) , si ξ est une partition de X alors pour presque tout point le temps nécessaire pour revenir dans l'élément de la partition dynamique ξ_n contenant x est de l'ordre de e^{nh}, où h est l'entropie du système relativement à la partition ξ (on pourra aussi voir [46] pour une restriction aux temps où les itérés de x visitent un ensemble fixé et par exemple [94] pour des retours dans des boules de Bowen).

Au même moment, Boshernitzan [26] prouvait la formule (0.1).

Par la suite, Barreira et Saussol [18] ont prouvé que pour μ-presque tout point $x \in X$, le temps de retour de x dans une boule de centre x et de rayon r, $\tau_{B(x,r)}(x)$, ne croît pas plus vite que $r^{-d_\mu(x)}$ quand r tend vers 0, où $d_\mu(x)$ est la dimension locale

de la mesure μ au point x. Pour les systèmes mélangeant rapidement d'entropie non nulle, Saussol [88] montra qu'en fait μ-presque partout

$$\tau_{B(x,r)}(x) \underset{r\to 0}{\sim} r^{-d_\mu(x)}. \tag{0.3}$$

On notera que cela avait été prouvé dans le cas d'applications de l'intervalle monotones par morceaux [90]. Les mêmes résultats ont été obtenus pour les temps d'entrée par Galatolo [50, 51].

Dans d'autres travaux, la distribution des temps de retour et des temps d'entrée a été étudiée (e.g. les études de Coelho [37] et de Abadi et Galves [2] mais aussi l'un des premiers travaux sur cette question par Collet, Galves et Schmitt [40]). On définit la distribution des temps d'entrée normalisés par

$$F_A^{ent}(t) = \mu\left(\left\{x \in X : \tau_A(x) > \frac{t}{\mu(A)}\right\}\right)$$

et la distribution des temps de retour normalisés par

$$F_A^{ret}(t) = \mu\left(\left\{x \in A : \tau_A(x) > \frac{t}{\mu(A)}\right\}\right).$$

Ces travaux étudient donc la convergence en loi des temps d'entrée et de retour normalisés lorsque $\mu(A) \to 0$ pour des ensembles A appartenant à des classes d'ensembles particulières (par exemple des cylindres d'une partition). Haydn, Lacroix et Vaienti [58] ont montré que la limite (lorsque $\mu(A) \to 0$) de la distribution des temps de retour existe si et seulement si la limite de la distribution des temps d'entrées existe. De plus, les temps de retour sont exponentiellement distribués si et seulement si les temps d'entrées sont exponentiellement distribués. Une telle distribution a été prouvée pour diverses classes de systèmes dynamiques (pour des ensembles A bien choisis) : les difféomorphismes vérifiant l'axiome A [60], des chaines de Markov [81], certaines applications rationnelles [57], les applications uniformément dilatantes de l'intervalle [38]. Pour les systèmes non uniformément hyperboliques, Hirata, Saussol et Vaienti [61] ont montré une distribution exponentielle des temps de retour dans les cylindres sous certaines hypothèses (voir aussi Collet [39] pour des applications de l'intervalle avec points critiques et Bruin et Vaienti [31] pour des applications unimodales). De plus, Bruin, Saussol, Troubetzkoy et Vaienti [30] ont démontré que la distribution des temps de retour d'une application est égale à la distribution des temps de retour de l'application de premier retour. On notera aussi que si l'on ne regarde la convergence que le long de sous-suites, alors on peut obtenir une convergence vers n'importe quelle loi [67]. Freitas, Freitas et Todd [49] ont aussi relié la distribution des temps d'entrée à la théorie des valeurs extrêmes.

Dans [4], Afraimovich a introduit le temps de retour d'un sous-ensemble $A \subset X$, noté $\tau(A)$, qui est défini comme le plus petit temps de retour des points de A, i.e. $\tau(A) = \inf_{x\in A} \tau_A(x)$. Saussol, Troubetzkoy et Vaienti [90] ont démontré que si ξ est une partition finie ou dénombrable telle que l'entropie du système par rapport à ξ soit strictement positive alors $\tau(\xi_n(x))$, le temps de retour de l'élément de la partition dynamique $\xi_n(x)$, croît plus vite que n pour μ-presque tout $x \in X$ (on

pourra aussi voir [5]). Pour certains systèmes dynamiques d'entropie non nulle, ils ont aussi démontré [91] que pour presque tout x, le temps de retour de la boule $B(x,r)$ croît plus vite que $r^{-1/\Lambda}$ et ne croît pas plus vite que $r^{-1/\lambda}$, où $\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda_\mu^u} - \frac{1}{\Lambda_\mu^s}$, i.e. la différence entre l'inverse du plus grand exposant de Lyapunov et l'inverse du plus petit exposant de Lyapunov, et où $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_\mu^u} - \frac{1}{\lambda_\mu^s}$, i.e. la différence entre l'inverse du plus petit exposant de Lyapunov positif et l'inverse du plus grand exposant de Lyapunov négatif. Pour les temps de retour de sous-ensembles, certains systèmes faiblement ψ-mélangeant vérifient un principe des grandes déviations [3, 59].

Au vu de l'équation (0.2), on peut se demander comment fluctue le n-ième temps de retour autour de $\frac{n}{\mu(A)}$, c'est-à-dire essayer de montrer un principe des grandes déviations pour les temps de retour. Pour les difféomorphismes vérifiant l'axiome A et lorsque μ est un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, sous certaines conditions sur l'ensemble A, Chazottes et Leplaideur [32] puis Leplaideur et Saussol [70] ont donc prouvé l'existence d'une fonction Φ_A tel que pour tout $u \geq \frac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left(\left\{ \frac{\tau_A^{(n)}}{n} \geq u \right\} \right) = \Phi_A(u)$$

et pour tout $0 \leq u \leq \frac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left(\left\{ \frac{\tau_A^{(n)}}{n} \leq u \right\} \right) = \Phi_A(u).$$

Pour la récurrence de Poincaré en temps continu, Barreira et Saussol [18] ont montré que pour un flot suspendu au dessus d'un difféomorphisme d'Anosov et tel que la mesure soit un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, le temps de retour de ν-presque tout point y dans $B(y,r)$ se comporte comme $r^{-\dim_H \nu+1}$ (des résultats similaires ont été prouvés pour les temps d'entrée des flots de type Lorenz par Galatolo et Pacifico [52]). Récemment, Pène et Saussol ont étudié le flot billiard [79] dans le plan avec des obstacles périodiques, ils ont montré que, presque partout, le temps de retour pour le flot d'un point (p,v) dans la boule $B((p,v),r)$ est exponentiel en $\frac{1}{r^2}$ et que le temps de retour de la position d'un point dans $B(p,r)$, i.e. le temps de retour de la projection du flot sur le billiard, est exponentiel en $\frac{1}{r}$ presque partout.

Présentation synthétique des travaux réalisés

Dans ce travail, nous utilisons des éléments de théorie ergodique, de probabilités, de géométrie et aussi de théorie géométrique de la mesure. Tout d'abord nous rappelons des notions générales de systèmes dynamiques et de théorie ergodique, et en particulier nous nous attardons sur les théorèmes de récurrence quantitatifs.

Ensuite, dans le Chapitre 2 nous rappelons des notions de théorie de la dimension et dans un résultat original nous étudions l'existence de la dimension locale de la mesure image lorsque la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous prouvons que si $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ est une fonction C^∞ et si

μ est une mesure absolument continue sur $\mathbb{R}^M$, $d_{f_*\mu}(f(x))$ existe et appartient à $\{0, 1, ..., \min\{M, N\}\}$ μ-presque partout. Plus précisément, $d_{f_*\mu}(f(x)) = \operatorname{rang} d_x f$ pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^M$.

Dans le Chapitre 3, en suivant les idées expliquées dans la première partie de l'introduction, pour un système dynamique $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ nous étudions la récurrence de Poincaré pour les observations. L'observation du système dynamique est faite à travers une observation mesurable, c'est-à-dire une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}^N$. Nous nous intéressons au temps nécessaire à l'observation de l'orbite d'un point pour revenir près de l'observation de ce point. C'est la raison pour laquelle nous introduisons le temps de retour pour l'observation

$$\tau_r^f(x) := \inf \left\{ k > 0 : \ d(f(T^k x), f(x)) < r \right\}.$$

Sous des hypothèses d'apériodicité que nous ne mentionnerons pas ici, on relie le comportement asymptotique du temps de retour pour l'observation à la mesure de l'ensemble $f^{-1}B(f(x), r) = \{y \in X : d(f(x), f(y)) < r\}$. On rappelle que la dimension locale de la mesure image est une fonction $d_{f_*\mu}$ telle que $\mu(f^{-1}B(f(x), r)) \underset{r\to 0}{\sim} r^{d_{f_*\mu}(f(x))}$ (lorsque cette fonction n'existe pas on définira les dimensions locales inférieures et supérieures).

Si le système dynamique a une décroissance des corrélations super-polynomiale et si f est Lipschitz, on prouve que pour μ-presque tout $x \in X$

$$\tau_r^f(x) \underset{r\to 0}{\sim} r^{-d_{f_*\mu}(f(x))}.$$

Sans l'hypothèse sur la décroissance des corrélations, nous prouvons que $\tau_r^f(x)$ ne croît pas plus vite que $r^{-d_{f_*\mu}(f(x))}$.

Grâce à ces résultats sur les observations de systèmes dynamiques, nous étudions, dans le Chapitre 4, la récurrence pour les systèmes dynamiques aléatoires. Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X de composante aléatoire $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ tel que la mesure $\mathbb{P} \otimes \mu$ soit invariante pour le produit gauche (skew-product) associé. Pour $x \in X$ et $\omega \in \Omega$, on définit le temps de retour aléatoire

$$\tau_r^\omega(x) := \inf \{k > 0 \ : \ d(T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ \cdots \circ T_\omega x, x) < r\}$$

et le temps de retour aléatoire moyenné

$$\mathbf{T}_r(x) := \int_\Omega \tau_r^\omega(x) d\mathbb{P}(\omega).$$

Comme précédemment, nous relions les comportements de ces temps de retour au comportement de la mesure de la boule de centre x et de rayon r. Plus précisément, la dimension locale, notée $d_\mu(x)$, est telle que pour r assez petit $\mu(B(x, r)) \sim r^{d_\mu(x)}$. Sous des hypothèses d'apériodicité aléatoire et si le système dynamique a une décroissance des corrélations super-polynomiale, nous prouvons que pour $\mathbb{P}\otimes\mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$

$$\tau_r^\omega(x) \underset{r\to 0}{\sim} r^{-d_\mu(x)}$$

et pour μ-presque tout $x \in X$

$$\mathbf{T}_r(x) \underset{r\to 0}{\sim} r^{-d_\mu(x)}.$$

Nous soulignons que sans l'hypothèse de mélange rapide nous prouvons que $\tau_r^\omega(x)$ ne croît pas plus vite que $r^{-d_\mu(x)}$ pour $\mathbb{P}\otimes\mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$ et que $\mathbf{T}_r(x)$ ne croît pas plus vite que $r^{-d_\mu(x)}$ pour μ-presque tout $x \in X$. Nous appliquerons ces résultats aux automorphismes aléatoires du tore et aux petites perturbations aléatoires.

Finalement, dans le Chapitre 5, nous étudions la récurrence de Poincaré pour les observations de flots. Comme précédemment, nous nous intéressons au comportement asymptotique du temps de retour de l'observation d'un flot (où l'observation est faite par une fonction $f : M \to \mathbb{R}^N$), c'est-à-dire pour un flot continu Ψ sur une variété M on étudie le comportement quand $r \to 0$ de

$$\tau_r^f(x) = \inf\{t > \rho_r(f(x)) \,:\, d\left(f(\Psi_t(x)), f(x)\right) < r\}$$

où ρ_r est une "fonction de fuite" qui doit être définie proprement. Si ν est une mesure invariante pour le flot, nous montrons que lorsque $r \to 0$, $\tau_r^f(x)$ ne croît pas plus vite que $r^{-d_\nu^f(x)+\alpha(f(x))}$ où $\alpha(f(x)) := \lim_{r\to 0} \frac{\log \rho_r(f(x))}{\log r}$.

Supposons de plus que Ψ soit un flot métriquement isomorphe à un flot suspendu Φ sur une application T avec toit ϕ tel que le système (X, T, μ) a une décroissance des corrélations super-polynomiale. Notons g l'isomorphisme reliant ces deux flots. Soit $Y := \{(x, s) \in X \times \mathbb{R} : 0 \le s \le \phi(x)\}$ et tel que les points $(x, \phi(x))$ et $(Tx, 0)$ soient identifiés pour tout $x \in X$. Soit $\pi : Y \to X$ la projection de Y dans X, c'est-à-dire $\pi(x, s) = x$.

Alors, sous des hypothèses d'apériodicité, le comportement asymptotique de $\tau_r^f(x)$ est relié à celui de la mesure de l'ensemble $P_r(x) = \pi(f \circ g)^{-1}B(f(x), r)$. S'il existe une fonction $d_\mu^{f,g}(x)$ telle que $\mu(P_r(x)) \underset{r\to 0}{\sim} r^{d_\mu^{f,g}(x)}$, alors nous prouvons que lorsque $r \to 0$, $\tau_r^f(x)$ croît au moins comme $r^{-d_\mu^{f,g}(x)}$ pour μ-presque tout $x \in M$.

Nous soulignons que lorsque $f = id$, on peut prouver qu'il y a une égalité entre $d_\nu^f(x) - \alpha(f(x))$ et $d_\mu^{f,g}(x)$ pour une certaine "fonction de fuite" α. Alors, si toutes les hypothèses précédentes sont vérifiées (ce qui est le cas, par exemple, pour les flots d'Anosov avec ν un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, c'est-à-dire une mesure maximisant la pression) on obtient que

$$\tau_r^{id}(x) \underset{r\to 0}{\sim} r^{-d_\nu(x)+1}.$$

Un autre exemple intéressant est le cas du flot géodésique défini sur T^1M, avec M une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative, et où l'observation f est l'observation de la position sur la variété M, c'est-à-dire f est la projection de T^1M sur M. Si ν est un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, alors pour ν-presque tout $(p, v) \in T^1M$

$$\tau_r^f(p, v) \underset{r\to 0}{\sim} r^{-d_{f_*\nu}(p)+1}.$$

Chapitre 1

Systèmes dynamiques et théorie ergodique

Dans ce chapitre, nous donnerons tout d'abord les définitions essentielles à l'étude des systèmes dynamiques. En particulier, nous parlerons de mélange rapide et de certaines applications vérifiant cette propriété.

Par la suite, nous rappellerons des résultats classiques sur la récurrence qui seront la base de nos travaux sur la récurrence de Poincaré pour les observations.

1.1 Théorie ergodique

Soit X un espace et $\mathcal{A}$ une σ-algèbre de X. Soit une application $T : X \to X$ mesurable, non nécessairement inversible.

Définition 1.1. *Une mesure de probabilité μ sur X est une mesure invariante pour T si*

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \qquad \textit{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Nous pouvons définir maintenant l'objet de notre étude : les systèmes dynamiques.

Définition 1.2. *Un quadruplet $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ est appelé un système dynamique si X est un ensemble, $\mathcal{A}$ une σ-algèbre de X, T une application de X dans X et μ une mesure de probabilité invariante pour T.*

On peut remarquer qu'une mesure de probabilité μ sur X peut être invariante pour plusieurs applications différentes. Par exemple, la mesure de Lebesgue sur S^1 est invariante pour l'application $Tx = 2x$ et pour l'application $Tx = x + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour un même espace X et une même application T, il peut exister plusieurs mesures invariantes, par exemple pour le cercle $X = S^1$, l'application $Tx = 2x$ admet la mesure de Lebesgue comme mesure invariante mais la mesure de Dirac δ_0 est aussi invariante pour T.

Définition 1.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique, la mesure μ est dite ergodique si pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $T^{-1}A = A$ alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

La propriété d'ergodicité d'une mesure peut être vue comme une propriété de non-décomposabilité de cette mesure. En effet, si A est un ensemble invariant (c'est-à-dire tel que $T^{-1}A = A$) et tel que $\mu(A) \in (0, 1)$, alors l'ensemble $B = A^c$ est aussi un ensemble invariant de mesure appartenant à $(0, 1)$. Mais alors, les points de A ne visiteront jamais B (sous l'action de T) et les points de B ne visiteront jamais A, on a donc en fait deux systèmes dynamiques distincts.

La mesure de Lebesgue sur S^1 est ergodique pour $Tx = 2x$ mais aussi pour les rotations irrationnelles $Tx = x + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mais ces deux applications génèrent des dynamiques différentes. En effet, pour une rotation irrationnelle, deux points proches vont rester à la même distance sous l'action de T et ceci pour tous les itérés de T, alors que pour $Tx = 2x$ deux points proches vont s'éloigner à une vitesse exponentielle pour finalement sembler ne jamais avoir été proches dans le passé. Le mélange est une des notions permettant de distinguer ces deux types de comportement :

Définition 1.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique, la mesure μ est dite mélangeante si*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B) \qquad \text{pour tout } A, B \in \mathcal{A}.$$

On peut interpréter le mélange selon deux points de vue. D'un point de vue géométrique, lorsque la mesure est mélangeante, l'ensemble $T^{-n}B$ va se disperser uniformément (par rapport à la mesure μ) sur l'espace X quand n tend vers l'infini. D'un point de vue probabiliste, si la mesure est mélangeante alors, asymptotiquement, les ensembles A et $T^{-n}B$ vont devenir indépendants.

On notera que toute mesure mélangeante est ergodique. Nous pouvons remarquer que la mesure de Lebesgue μ sur S^1 est mélangeante pour $Tx = 2x$ alors qu'elle n'est jamais mélangeante pour $Tx = x + \alpha$ (quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$).

On peut aussi définir le mélange en termes de fonctions et non en termes d'ensembles :

Proposition 1.5. *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique, la mesure μ est mélangeante si et seulement si pour toutes fonctions $\phi, \psi \in L^2(X, \mathbb{R})$ on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X \phi(x)\psi(T^n x)d\mu(x) = \int_X \phi(x)d\mu(x) \int_X \psi(x)d\mu(x).$$

Lorsque la mesure est mélangeante, la vitesse à laquelle la suite précédente va converger vers sa limite dépend du système étudié mais aussi des fonctions ϕ et ψ. Nous rappelons donc la notion de décroissance des corrélations :

Définition 1.6 (Décroissance des corrélations)**.** *Soit B un espace vectoriel normé. Soit $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\Phi(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. On dit que le système dynamique $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ a une décroissance des corrélations de vitesse Φ par rapport aux observables de B si*

$$\left| \int \phi \circ T^n \psi d\mu - \int \phi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq \|\phi\|_B \|\psi\|_B \Phi(n)$$

pour toutes fonctions $\phi : X \to \mathbb{R}$ et $\psi : X \to \mathbb{R}$ appartenant à B et où $\| \ \|_B$ est la norme de B.

Remarque 1.7. Dans de nombreux cas, on a intérêt à travailler avec deux espaces vectoriels normés différents pour les fonctions ψ et ϕ, mais, dans notre travail, la distinction ne sera pas utile.

En particulier, nous allons travailler sur des systèmes dynamiques mélangeant rapidement :

Définition 1.8 (Décroissance des corrélations super-polynomiale)**.** *Un système dynamique $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ à une décroissance des corrélations super-polynomiale pour les observables d'un espace vectoriel normé B si la vitesse de la décroissance des corrélations Φ vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} n^p \Phi(n) = 0 \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la vitesse de la décroissance des corrélations Φ est de la forme $\Phi(n) = e^{-n}$ (donc super-polynomiale), on parle de décroissance des corrélations exponentielle. Il est important de noter que le choix de l'espace B est essentiel, la décroissance pouvant être rapide pour un espace et arbitrairement lente pour un autre espace.

Par la suite lorsque nous parlerons de décroissance des corrélations super-polynomiale, nous la supposerons pour les observables Lipschitz. En effet, on peut obtenir la décroissance des corrélations super-polynomiale pour les observables Lipschitz à partir de celle pour les observables Hölder ou C^k :

Proposition 1.9. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si X est une variété bornée et si la décroissance des corrélations est super polynomiale pour les observables de $C^k(X, \mathbb{R})$ alors la décroissance des corrélations est super-polynomiale pour les observables Lipschitz.*

Proposition 1.10. *Si X est une variété bornée et si la décroissance des corrélations est super polynomiale pour les observables Hölder alors la décroissance des corrélations est super-polynomiale pour les observables Lipschitz.*

Preuve. Cette proposition provient de la Proposition 1.9 et du fait que la norme Hölder est dominée par la norme C^k (lorsque le diamètre de X est fini). □

La Proposition 1.9 est simplement une conséquence du lemme suivant (qui fait partie d'un travail en préparation non présent dans cette thèse [53]) :

Lemme 1.11. *Si l'espace X est une variété bornée et si le système a une décroissance des corrélations par rapport aux observables C^k de vitesse $\Phi(n)$ alors le système a une décroissance des corrélations pour les observables Lipschitz de vitesse $\Phi(n)^{\frac{1}{2k-1}}$.*

Preuve. Soit f et g des observables Lipschitz telles que $\int f d\mu = \int g d\mu = 0$ et X une sous-variété bornée de $\mathbb{R}^d$. Nous allons maintenant effectuer une régularisation par convolution. On considère donc la fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho \geq 0$ à support dans $B(0,1)$ (la boule de centre 0 et de rayon 1) et telle que $\int \rho dx = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons ensuite la fonction $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$. Cette fonction est à support dans $B(0,\varepsilon)$ et vérifie $\int \rho_\varepsilon dx = 1$. Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on remarque que

$$D^\alpha \rho_\varepsilon = \varepsilon^{-d} D^\alpha \left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \varepsilon^{-d}\varepsilon^{-|\alpha|}\left(D^\alpha \rho\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

et ainsi

$$\|D^\alpha \rho_\varepsilon\|_{L^1} = \int |D^\alpha \rho_\varepsilon| dx = \varepsilon^{-|\alpha|} \int |D^\alpha \rho| dx.$$

Considérons f_ε définie par

$$f_\varepsilon(x) = f * \rho_\varepsilon(x) = \int f(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy$$

et $g_\varepsilon = g * \rho_\varepsilon$, où "$*$" est le produit de convolution par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Nous rappelons que, d'après le Théorème de Rademacher (e.g. [47]),

les dérivées d'une fonction Lipschitz sont définies presque partout et sont bornées presque partout par la constante de Lipschitz de la fonction. Ainsi on obtient que

$$D^\alpha f_\varepsilon(x) = \int D_{x_i} f(y)\ D^{\alpha-e_i}\rho_\varepsilon(x-y)dy \leq \|D_{x_i} f\|_{L^\infty}\|D^{\alpha-e_i}\rho_\varepsilon\|_{L^1}$$

où $D_{x_i} f(y)$ est la dérivée de f dans la direction e_i telle que $\alpha_i > 0$ et $\alpha - e_i = (\alpha_1, ., \alpha_i - 1, ., \alpha_d)$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon\|_{C^k} &\leq \|D_{x_i} f\|_{L^\infty} \sup_{|\alpha|\leq k} \|(D^{\alpha-e_i}\rho_\varepsilon)\|_{L^1} \\
&\leq \|D_{x_i} f\|_{L^\infty} \sup_{|\alpha|\leq k} \varepsilon^{-|\alpha-e_i|} \int |D^{\alpha-e_i}(\rho)|dx \\
&\leq \|D_{x_i} f\|_{L^\infty}\varepsilon^{-k+1} \left(\sup_{|\alpha|\leq k} \int |D^{\alpha-e_i}\rho|dx\right) \\
&\leq C\varepsilon^{-k+1}\ \|f\|_{\mathrm{Lip}}
\end{aligned}$$

où C est une constante dépendant de la fonction ρ. De plus, $||f - f_\varepsilon||_\infty \leq \varepsilon\ ||f||_{\mathrm{Lip}}$ et $||g - g_\varepsilon||_\infty \leq \varepsilon\ ||g||_{\mathrm{Lip}}$. Nous noterons $\|.\|_1$ la norme L^1 par rapport à la mesure μ. Maintenant nous pouvons estimer la vitesse de décroissance des corrélations de f et g par leurs fonctions régularisées :

$$\begin{aligned}
&\left|\int f\circ T^n g d\mu\right| \\
\leq\ &\left|\int (f\circ T^n + f_\varepsilon\circ T^n - f_\varepsilon\circ T^n)\ (g + g_\varepsilon - g_\varepsilon)d\mu\right| \\
\leq\ &\int |(f\circ T^n - f_\varepsilon\circ T^n)\ (g - g_\varepsilon)|\, d\mu + \int |(f\circ T^n - f_\varepsilon\circ T^n)\ (g_\varepsilon)|\, d\mu \\
&+ \int |(f_\varepsilon\circ T^n)\ (g - g_\varepsilon)|d\mu + \int |(f_\varepsilon\circ T^n)\ (g_\varepsilon)|d\mu \\
\leq\ &\varepsilon^2\ ||f||_{\mathrm{Lip}}\ ||g||_{\mathrm{Lip}} + \varepsilon\ ||f||_{\mathrm{Lip}}\ ||g||_1 + \varepsilon\ ||f||_1\ ||g||_{\mathrm{Lip}} + \|f_\varepsilon\|_{C^k}\|g_\varepsilon\|_{C^k}\Phi(n) \\
\leq\ &\varepsilon^2\ ||f||_{\mathrm{Lip}}\ ||g||_{\mathrm{Lip}} + \varepsilon\ ||f||_{\mathrm{Lip}}\ ||g||_1 + \varepsilon\ ||f||_1\ ||g||_{\mathrm{Lip}} + C\varepsilon^{-2k+2}\ \|f\|_{\mathrm{Lip}}\|g\|_{\mathrm{Lip}}\ \Phi(n) \\
\leq\ &||f||_{\mathrm{Lip}}\ ||g||_{\mathrm{Lip}}(\varepsilon^2 + 2\varepsilon\ (1 + \mathrm{diam}(X)) + C\varepsilon^{-2k+2}\Phi(n)).
\end{aligned}$$

car $||f||_1 \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}(1 + \mathrm{diam}(X))$. Finalement, si l'on choisit $\varepsilon(n) = (\Phi(n))^{\frac{1}{2k-1}}$ alors $((\Phi(n))^{\frac{1}{2k-1}})^{-2k+2}\Phi(n) = (\Phi(n))^{\frac{1}{2k-1}}$ et ainsi

$$\left|\int f\circ T^n g d\mu\right| \leq ||f||_{\mathrm{Lip}}\ ||g||_{\mathrm{Lip}} \left(C_1(\Phi(n))^{\frac{2}{2k-1}} + C_2(\Phi(n))^{\frac{1}{2k-1}} + C_3(\Phi(n))^{\frac{1}{2k-1}}\right)$$

□

A partir de maintenant, lorsque nous noterons que la décroissance des corrélations est super-polynomiale, cela indiquera qu'elle est super-polynomiale par rapport aux observables Lipschitz.

Donnons maintenant quelques exemples de systèmes dynamiques ayant une décroissance des corrélations super-polynomiale (en général, la décroissance sera exponentielle).

1.2 Décroissance des corrélations super-polynomiale

Un exemple bien connu et fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques est celui des sous-shifts de type fini :
Fixons un entier $N \geq 2$. L'ensemble $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ est appelé un alphabet et on peut définir l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathcal{S}$, $\Omega = \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ (on notera qu'il est aussi possible de définir des suites indexées par $\mathbb{Z}$) . Le décalage à gauche (plein) ou shift gauche σ est défini sur Ω par :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & \omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longrightarrow & \sigma\omega = (\omega_{i+1})_{i\in\mathbb{N}} \end{array}$$

On rappelle la définition des cylindres :

$$[\omega_0 \ldots \omega_k] := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega : x_n = \omega_n \text{ pour tout } 0 \leq n \leq k\}.$$

Fixons $0 < \beta < 1$. On munit Ω de la distance d suivante, pour $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ et $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$:

$$d(\omega, \omega') = \beta^k \qquad \text{où} \qquad k = \min\{n \in \mathbb{N} : \omega_n \neq \omega'_n\}.$$

On définit maintenant les sous-shifts de type fini :

Définition 1.12 (Sous-shift de type fini)**.** *Soit A une matrice $N \times N$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ (appelée matrice de transition, de Markov, d'admissibilité ou de compatibilité). Le sous-shift de type fini σ_A, défini par la matrice de transition A, est la restriction du shift plein à l'ensemble Ω_A où :*

$$\Omega_A = \{\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} : A_{\omega_n\omega_{n+1}} = 1, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

On se restreindra aux cas où la matrice A est irréductible et apériodique (c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A^k n'a que des coefficients strictement positifs). On peut définir les mesures de Markov sur les espace Ω et Ω_A :

Définition 1.13 (Mesure de Markov)**.** *Soit P une matrice $N \times N$ stochastique ($\forall 1 \leq i \leq N$, on a $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$) munie d'un vecteur de probabilité stationnaire $p \in \mathbb{R}^N$ (pour tout $1 \leq i \leq N$ on a $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ et de plus $pP = p$). La mesure de Markov μ associée à (P, p) est définie sur Ω par :*

$$\mu([\omega_0 \ldots \omega_k]) = p_{\omega_0} P_{\omega_0\omega_1} \ldots P_{\omega_{k-1}\omega_k}$$

et $\mu([\omega_0]) = p_{\omega_0}$. C'est une mesure de probabilité sur Ω invariante pour σ.

On dira que la matrice P est compatible avec le sous-shift de type fini σ_A si $P_{ij} = 0$ équivaut à $A_{ij} = 0$. Dans ce cas μ est une mesure invariante pour σ_A dans Ω_A.

Sous certaines hypothèses sur la matrice P, on obtient un mélange rapide :

Théorème 1.14 (e.g. [13]). *Soit μ une mesure de Markov associée à (P, p) où P est compatible avec le sous-shift de type fini σ_A. Alors le système dynamique $(\Omega_A, \mathcal{A}, \sigma_A, \mu)$ a une décroissance des corrélations exponentielle.*

Intéressons-nous maintenant à des systèmes plus géométriques. Prenons M une variété riemannienne lisse et compacte et $\mathcal{A}$ sa σ-algèbre de Borel.

Définition 1.15. *Une application $f : M \to M$ est dite uniformément dilatante s'il existe une constante $C > 0$ et une constante $\lambda > 0$ telles que pour tout $x \in M$, pour tout $v \in T_xM$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\|D_x f^n(v)\| \geq Ce^{\lambda n}\|v\|.$$

Théorème 1.16 (Sinai [92], Ruelle [85], Bowen [28]). *Soit $f : M \to M$ une application uniformément dilatante C^2. Alors il existe une mesure invariante μ absolument continue telle que le système dynamique $(M, \mathcal{A}, f, \mu)$ a une décroissance des corrélations exponentielle.*

Ainsi, par exemple, la mesure de Lebesgue sur S^1 est mélangeante pour l'application $Tx = 2x$ et la décroissance des corrélations est exponentielle. Pour le cas des systèmes non-uniformément dilatants on pourra voir [72] par exemple.

Ensuite, on peut montrer une décroissance des corrélations super-polynomiale pour certains systèmes (les systèmes hyperboliques) où il y a une dilatation dans une direction (le sous-espace instable) mais aussi une contraction dans une autre direction (le sous-espace stable).

Définition 1.17. *Un difféomorphisme $f : M \to M$ de classe C^1 est dit uniformément hyperbolique sur M (ou est appelé un difféomorphisme d'Anosov) s'il existe une constante $0 < \lambda < 1$, une constante $C > 0$ et une décomposition du fibré tangent :*

$$TM = E^u \oplus E^s \qquad (i.e. \forall x \in M, T_xM = E^u_x + E^s_x)$$

où E_u et E_s sont des sous-fibrés Df-invariants (i.e. $D_xfE^u_x = E^u_{f(x)}$ et $D_xfE^s_x = E^s_{f(x)}$) tels que pour tout $x \in M$ et pour tout $n \in N$

$$\|Df^n|_{E^s_x}\| \leq C\lambda^n \qquad et \qquad \|Df^{-n}|_{E^u_x}\| \geq C\lambda^n.$$

Pour une grande variété de systèmes, si la mesure invariante que l'on considère est un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, alors la décroissance des corrélations est super-polynomiale. Pour introduire cette notion nous devons tout d'abord rappeler la définition de l'entropie d'un système dynamique :

Définition 1.18 (Entropie). *Soit $(M, \mathcal{A}, f, \mu)$ un système dynamique. On définit tout d'abord l'entropie d'une partition finie ξ de M :*

$$H_\mu(\xi) = -\sum_{E \in \xi} \mu(E) \log \mu(E).$$

Si ζ et ξ sont deux partitions alors on note $\zeta \vee \xi = \{C \cap E : C \in \zeta$ et $E \in \xi\}$. L'entropie métrique de f relativement à la partition ξ est définie par :

$$h_\mu(f,\xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\xi \vee f^{-1}\xi \vee \cdots \vee f^{-n+1}\xi).$$

Finalement, l'entropie du système dynamique $(M, \mathcal{A}, f, \mu)$ est définie par

$$h_\mu(f) = \sup h_\mu(f,\xi)$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions finies ξ de M.

On peut maintenant introduire les états d'équilibre :

Définition 1.19 (Etat d'équilibre d'un potentiel ψ)**.** *Soit $f : M \to M$ une application continue. Soit $\psi : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue, appelée potentiel. Une mesure de probabilité μ_ψ invariante par f est appelé un état d'équilibre du potentiel ψ si elle réalise le supremum suivant :*

$$h_{\mu_\psi}(f) + \int \psi d\mu_\psi = \sup \left\{ h_\mu(f) + \int \psi d\mu \mid \mu \text{ mesure de probabilité invariante par } T \right\}.$$

Ainsi, pour les difféomorphisme d'Anosov, on a

Théorème 1.20 (Sinai [92], Ruelle [85], Bowen [28])**.** *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov et μ un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, alors le système dynamique $(M, \mathcal{A}, f, \mu)$ a une décroissance des corrélations exponentielle.*

Il existe une classe plus large de systèmes pour lesquels on peut obtenir une décroissance des corrélations exponentielles :

Définition 1.21. *Un difféormorphisme $f : M \to M$ satisfait l'Axiome A si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble non-errant de f, $\Omega(f)$, est un ensemble hyperbolique.*
2. *L'ensemble des points périodiques de f est dense dans $\Omega(f)$.*

Nous rappelons que l'ensemble non-errant est défini par

$$\Omega(f) := \left\{ x \in M : \text{pour tout voisinage } V \text{ de } x,\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{-n}V \cap V \neq \emptyset \right\}.$$

Un ensemble f-invariant $\Lambda \subset M$ est dit hyperbolique s'il existe une constante $0 < \lambda < 1$, une constante $C > 0$ et une décomposition du fibré tangent restreint à Λ :

$$T_\Lambda M = E^u \oplus E^s \qquad (i.e. \forall x \in \Lambda, T_x M = E^u_x + E^s_x)$$

où E_u et E_s sont des sous-fibrés Df-invariants ($D_x f E^u_x = E^u_{f(x)}$ et $D_x f E^s_x = E^s_{f(x)}$) tels que pour tout $x \in \Lambda$ et pour tout $n \in N$

$$\|Df^n|_{E^s_x}\| \leq C\lambda^n \qquad \text{et} \qquad \|Df^{-n}|_{E^u_x}\| \geq C\lambda^n.$$

Pour de tels systèmes, on peut montrer

Théorème 1.22 (Sinai [92], Ruelle [85], Bowen [28]). *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme satisfaisant l'Axiome A et μ un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, alors le système $(M, \mathcal{A}, f, \mu)$ a une décroissance des corrélations exponentielle.*

Pour finir, nous donnons une liste non-exhaustive d'exemples de systèmes dynamiques où il existe une mesure telle que la décroissance des corrélations soit super-polynomiale (on pourra consulter par exemple le livre de Baladi pour plus de détails [13] ou l'état de l'art de Luzzatto [72]) :

- l'application de Poincaré pour les billiards de Sinai dispersifs [33, 96, 15, 35] ;
- les applications quadratiques [95, 64] ;
- certaines applications de Hénon [22] ;
- les applications hyperboliques par morceaux [34] ;
- certains difféomorphismes partiellement hyperboliques [41, 9] ;
- les applications de Alves-Viana [6, 55] ;
- certaines applications multimodales du cercle [54] ;
- certaines applications méromorphes [43] ;
- certaines applications ayant une structure produit faiblement hyperboliques [56] ;
- certaines applications ayant une infinité de points critiques [8].

Il est important de noter que dans la plupart de ces systèmes, la décroissance des corrélations est exponentielle. On remarquera tout de même que, pour les applications de Alves-Viana, il a été démontré que la décroissance des corrélations est en $O(e^{-c\sqrt{n}})$ (super-polynomiale mais non exponentielle).

Maintenant, nous allons nous focaliser sur une propriété particulière des systèmes dynamiques, la récurrence.

1.3 Récurrence de Poincaré moderne

Henri Poincaré est l'un des fondateurs de la théorie des systèmes dynamiques. En particulier, l'un des théorèmes fondamentaux est le théorème qui porte aujourd'hui son nom : le Théorème de Récurrence de Poincaré. Par ce théorème, démontré dans son célèbre mémoire de 1890 *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* [82], Poincaré prouve que "*si on laisse de côté certaines trajectoires exceptionnelles, dont la réalisation est infiniment peu probable, on peut démontrer que le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale*" (on pourra voir, dans le livre d'Oxtoby [78], une analyse intéressante sur le théorème original et sur comment Poincaré a anticipé la théorie de la mesure et des catégories au sens de Baire). Ce théorème est à la base de nombreux travaux sur la récurrence dont nous essayerons de donner un aperçu dans cette partie.

Théorème 1.23 (Théorème de Récurrence de Poincaré). *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique. Soit A un ensemble de $\mathcal{A}$. Alors μ-presque tout point appartenant à A revient dans A en un temps fini, c'est-à-dire que pour presque tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n x \in A$.*

Preuve. Soit K l'ensemble des points de A qui ne reviennent jamais dans A. Nous allons démontrer que $\mu(K) = 0$.

Nous remarquons tout d'abord que x appartient à K si $x \in A$ et si $T^n x \in A^c$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$K = A \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} T^{-i} A^c \right)$$

et $K \in \mathcal{A}$. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $m > n$ tels que $T^{-n}K \cap T^{-m}K \neq \emptyset$. Comme

$$T^{-n}K \cap T^{-m}K = T^{-n}(K \cap T^{-(m-n)}K) \neq \emptyset,$$

l'ensemble $K \cap T^{-(m-n)}K$ est lui aussi non vide. Ainsi, il existe $z \in K \cap T^{-(m-n)}K$. Comme $z \in K$, on a par definition de K que $z \in A$ et comme $T^{(m-n)}z \in K$, on a aussi que $T^{(m-n)}z \in A$. On vient donc de trouver un élément $z \in K$ qui revient dans A ce qui est impossible par définition de K.

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$ on a $T^{-n}K \cap T^{-m}K = \emptyset$. Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} T^{-n}K \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(T^{-n}K) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(K), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\mu(K) = 0$ et démontre le théorème. □

Ce théorème nous dit que presque tout point de A reviendra au moins une fois dans A après un temps fini (en réalité, il revient une infinité de fois) mais il ne nous donne aucune information sur le temps nécessaire pour revenir dans A. On peut donc s'intéresser au temps de retour dans A :

Définition 1.24. *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique. Soit A un ensemble de $\mathcal{A}$. Soit $x \in A$. On définit le premier temps de retour de x dans A :*

$$\tau_A(x) := \inf\{n > 0 : T^n x \in A\}.$$

Un résultat plus précis que le Théorème de Récurrence de Poincaré est le Théorème de Kač (plus généralement appelé Lemme de Kač) qui prouve que dans le cas où la mesure est ergodique, la moyenne du temps de retour dans A est égale à l'inverse de la mesure de A.

Théorème 1.25 (Théorème de Kač [62])**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique tel que μ soit ergodique. Soit A un ensemble de $\mathcal{A}$ de mesure positive alors*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \tau_A(x) d\mu = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Il existe de nombreuses preuves différentes de ce théorème, nous avons choisi ici une preuve simple, utilisant le théorème de Birkhoff, d'autres preuves sont présentes dans [36] et aussi dans la thèse de Saussol [87].

Preuve. Par le théorème de récurrence de Poincaré, on sait que $\tau_A(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in A$. On peut donc définir la transformation de premier retour $T_A : A \to A$ presque partout sur A par :

$$T_A(x) = T^{\tau_A(x)}(x).$$

Il est important de noter que le système (A, T_A, μ_A) est un système dynamique et que μ_A est une mesure ergodique. Soit $x \in A$ et $L \in \mathbb{N}$, on étudie l'orbite de x par T_A :

$$x, T_A(x), ..., T_A^l(x), ..., T_A^L(x).$$

Posons

$$N = \sum_{l=0}^{L-1} \tau_A(T_A^l(x)). \tag{1.1}$$

On peut remarquer que N est le temps que met l'orbite de x pour revenir exactement L fois dans A. On a donc

$$\sum_{n=1}^{N} 1_A(T^n(x)) = L. \tag{1.2}$$

Maintenant, en appliquant le Théorème de Birkhoff au système dynamique (A, T_A, μ_A), et la mesure μ_A étant ergodique, on a, μ_A-presque partout :

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tau_A(T_A^l(x)) = \int_A \tau_A(x) d\mu_A.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_A \tau_A(x) d\mu_A &= \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tau_A(T_A^l(x)) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{N}{\sum_{n=1}^{N} 1_A(T^n(x))} \qquad \text{d'après (1.2) et (1.1)} \\
&= \frac{1}{\int_X 1_A d\mu} \qquad \text{d'après le Théorème de Birkhoff} \\
&= \frac{1}{\mu(A)}
\end{aligned}$$

et le lemme est démontré. □

Il existe en fait une version du Lemme de Kač valable lorsque la mesure n'est pas ergodique et faisant intervenir les temps d'entrée (on pourra voir par exemple [89] pour la preuve) :

Proposition 1.26. *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique. Soit A un ensemble de $\mathcal{A}$ de mesure positive alors*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(A)}\int_A \tau_A(x)d\mu &= \mu\left(\{x \in X : \inf\{n > 0 : T^n x \in A\} < +\infty\}\right)\\ &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} T^{-j}A\right).\end{aligned}$$

Une question naturelle se pose, en choisissant autour d'un point un voisinage de plus en plus petit quel va être le comportement asymptotique du temps de retour de ce point dans son voisinage. Autrement dit, avec quel taux un point va revenir dans un voisinage de plus en plus petit. Deux résultats sur ce problème furent démontrés à la même époque par Ornstein-Weiss [76] et Boshernitzan [26]. Le résultat d'Ornstein-Weiss relie le temps de retour dans les partitions dynamiques à l'entropie du système dynamique relativement à cette partition :

Théorème 1.27 (Ornstein-Weiss)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique tel que μ soit ergodique. Soit ξ une partition finie de X. Alors pour μ-presque tout $x \in X$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \tau_n(x, \xi) = h_\mu(T, \xi)$$

où $\tau_n(x, \xi) = \inf\{k > 0 : T^k x \in \xi_n(x)\}$ avec la partition raffinée $\xi_n := \xi \vee T^{-1}\xi \vee \cdots \vee T^{-n+1}\xi$ (et on rappelle que si ξ est une partition, on note $\xi(x)$ l'élément de la partition contenant x).

Boshernitzan [26] quant à lui prouva un résultat quantitatif reliant les temps de retour dans des boules de rayon de plus en plus petit à la mesure de Hausdorff du système (pour plus de détails sur la mesure de Hausdorff nous renvoyons au Chapitre 2). Nous noterons que le théorème de Boshernitzan peut être essentiellement reformulé en termes de taux de récurrence des temps de retour dans les boules (voir [18]).

Théorème 1.28 (Boshernitzan)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu, d)$ un système dynamique métrique. On suppose que, pour $\alpha > 0$, la mesure de Hausdorff α-dimensionnelle est σ-finie sur X. Alors pour presque tout $x \in X$, on a*

$$\liminf_{n\to+\infty} \left\{n^\beta d(x, T^n(x))\right\} < +\infty \qquad \text{où } \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Si, de plus, $H^\alpha(X) = 0$, alors pour presque tout $x \in X$,

$$\liminf_{n\to+\infty} \left\{n^\beta d(x, T^n(x))\right\} = 0.$$

En suivant l'idée de Boshernitzan, Barreira et Saussol [18] ont étudié le comportement asymptotique du temps de retour dans une boule dont le rayon tend vers 0 et ont montré qu'il était lié aux dimensions locales de la mesure invariante (des détails sur ces dimensions sont donnés dans le Chapitre 2). Pour cela, nous définissons les taux de récurrence :

Définition 1.29. *Pour $x \in X$ et $r > 0$, on définit le temps de retour de x dans la boule de centre x et de rayon r (notée $B(x,r)$) :*

$$\tau_r(x) := \inf\left\{k > 0 : T^k x \in B(x,r)\right\}.$$

On définit ensuite les taux de récurrence inférieur et supérieur :

$$\underline{R}(x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \qquad \overline{R}(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r}.$$

Lorsque $\underline{R}(x) = \overline{R}(x)$ on notera $R(x)$ la valeur de la limite.

Nous mettons en avant que le résultat suivant est valable pour n'importe quel système dynamique :

Théorème 1.30 (Barreira-Saussol [18])**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique tel que $X \subset \mathbb{R}^N$ pour un certain N. Alors*

$$\underline{R}(x) \leq \underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} =: \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{R}(x) \leq \overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} =: \overline{d}_\mu(x)$$

pour μ-presque tout $x \in X$.

Il est intéressant de noter que cette inégalité peut être stricte, dans le cas où, par exemple, T est l'identité. Un autre exemple plus intéressant où l'inégalité est stricte est celui de certaines rotations irrationnelles du cercle (présenté dans [18] et pour une étude plus complète avec des calculs numériques on pourra voir [36]) :

Exemple 1.31. Considérons la rotation du cercle par un nombre irrationnel α bien approximable par les nombres rationnels. Plus précisément, on choisit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tel que $\delta(\alpha) > 1$ où

$$\delta(\alpha) = \sup\left\{\delta \geq 1 : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\delta}} \text{ pour une infinité de } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right\}.$$

On étudie donc l'application T :

$$\begin{array}{rccc} T: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & x & \longmapsto & x+\alpha. \end{array}$$

On remarque tout d'abord que la mesure de Lebesgue Leb est une mesure de probabilité invariante par T et de plus pour tout $x \in S^1$

$$\underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mathrm{Leb}(B(x,r))}{\log r} = \overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mathrm{Leb}(B(x,r))}{\log r} = 1. \tag{1.3}$$

Soit $\delta > 1$ tel que $\delta < \delta(\alpha)$. Prenons maintenant une suite croissante d'entiers positifs $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|q_n\alpha - p_n| < 1/q_n^\delta$ pour un certain $p_n \in \mathbb{Z}$. On a donc pour tout $x \in S^1$

$$\begin{aligned} \tau_{1/q_n^\delta}(x) &= \inf\{k > 0 : T^k x \in B(x, \frac{1}{q_n^\delta})\} \\ &= \inf\{k > 0 : k\alpha (\bmod 1) < \frac{1}{q_n^\delta}\} \\ &\leq q_n \qquad \text{par définition de } q_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in S^1$

$$\underline{R}(x) = \underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log \tau_{1/q_n^\delta}(x)}{\log q_n^\delta} \leq \frac{1}{\delta} < 1.$$

Dans cet exemple on a donc démontré que pour tout $x \in S^1$

$$\underline{R}(x) < \underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}.$$

En fait, on peut calculer exactement les taux de récurrence et démontrer que pour tout $x \in S^1$:

$$\underline{R}(x) = \frac{1}{\delta(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad \overline{R}(x) = 1.$$

Tout d'abord on peut remarquer que pour $r > 0$, la fonction $\tau_r(x)$ ne dépend pas de x, on notera donc τ_r cette fonction et on notera $\underline{R}$ et $\overline{R}$ la valeur des taux de récurrence. Dans le calcul précédent, en faisant tendre δ vers $\delta(\alpha)$, on obtient que :

$$\underline{R} \leq \frac{1}{\delta(\alpha)}.$$

Montrons maintenant l'inégalité opposée. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \delta(\alpha) + \varepsilon$. Par définition de $\delta(\alpha)$ et comme $\delta > \delta(\alpha)$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > k_0$ on a

$$\|k\alpha\| \geq \frac{1}{k^\delta}$$

où pour $q \in \mathbb{Z}$

$$\|q\alpha\| := \min\left\{|q\alpha - p| \,:\, p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Notons que α étant irrationnel, $\|q\alpha\| \neq 0$ pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$. Choisissons $N > k_0$ assez grand pour avoir $\frac{1}{N^\delta} < \inf_{k=1,..,k_0}\{\|k\alpha\|\}$. Finalement, pour tout $n \geq N$, on a

$$\tau_{\frac{1}{n^\delta}} \geq n,$$

ce qui implique

$$\underline{R} = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log \tau_{\frac{1}{n^\delta}}}{\log n^\delta} \geq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log n^\delta} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta(\alpha)+\varepsilon}$$

et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient que $\underline{R} \geq \frac{1}{\delta(\alpha)}$. Le Théorème 1.30 et l'équation (1.3) nous donnent immédiatement que $\overline{R} \leq 1$, il ne reste donc plus qu'à démontrer que $\overline{R} \geq 1$. Pour cela nous rappelons quelques notions et inégalités sur les fractions continuées [65]. Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre irrationnel, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs telle que α admette un développement en fraction continuée, c'est-à-dire telle que α s'écrit sous la forme

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

De plus il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que p_n et q_n soient premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Ces suites vérifient plusieurs propriétés, nous ne citerons que les trois que nous allons utiliser [65] :

(a) La suite $(q_n)_n$ est strictement croissante.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} < \|q_n\alpha\|.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $1 \leq j \leq q_{n+1}$, $\|j\theta\| \geq \|q_n\alpha\|$.

Nous pouvons maintenant montrer que $\overline{R} \geq 1$. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite (croissante et de limite infinie) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$e^{-k_n} \leq \|q_n\alpha\| \leq e^{-k_n+1}.$$

D'après la propriété (c) précédente, pour tout $1 \leq j \leq q_{n+1}$, $\|j\theta\| \geq \|q_n\theta\|$ et donc $\|j\theta\| \geq e^{-k_n}$. On obtient donc

$$\tau_{e^{-k_n}} \geq q_{n+1}.$$

Comme, d'après la propriété (b) précédente, $\frac{1}{q_{n+1}+q_n} < \|q_n\alpha\| \leq e^{-k_n+1}$ et comme, d'après la propriété (a), $\frac{1}{eq_{n+1}} < \frac{1}{q_{n+1}+q_n}$, on a

$$\tau_{e^{-k_n}} \geq q_{n+1} \geq e^{k_n-2}.$$

Ainsi,

$$\overline{R} \geq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log \tau_{e^{-k_n}}}{\log e^{k_n}} \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{\log e^{k_n-2}}{\log e^{k_n}} = 1.$$

Ainsi, cet exemple nous montre que pour obtenir une égalité entre les taux de récurrence et les dimensions locales des hypothèses supplémentaires sur le système sont nécessaires. Barreira et Saussol ont donc démontré que si X est un ensemble hyperbolique localement maximal d'un diffeomorphisme $C^{1+\varepsilon}$ sur une variété lisse compacte et que si la mesure est un état d'équilibre ergodique d'un potentiel Hölder alors il y a égalité entre les taux de récurrence et les dimensions locales de la mesure invariante. Ce résultat fut amélioré par Saussol [88] qui prouva que si le système mélange rapidement alors l'égalité est vérifiée :

Théorème 1.32 (Saussol [88]). *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique tel que $X \subset \mathbb{R}^N$ pour un certain N. Si l'entropie $h_\mu(T) > 0$, si T est Lipschitz et si la décroissance des corrélations est super-polynomiale, alors*

$$\underline{R}(x) = \underline{\lim_{r\to 0}} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \qquad \text{et} \qquad \overline{R}(x) = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}$$

pour μ-presque tout $x \in X$.

Dans une généralisation de ce théorème (voir Chapitre 3), nous montrerons qu'il n'est pas nécessaire que T soit Lipschitz ni que l'entropie du système soit strictement positive.

Les membres de droite des égalités précédentes sont connus sous le nom de dimensions locales de la mesure μ, nous allons donc maintenant étudier différentes notions de dimensions et donner un théorème d'existence de la dimension locale.

Chapitre 2

Dimensions et Mesures

Dans l'étude des systèmes dynamiques, les dimensions fractales apparaissent dans l'étude de la récurrence de Poincaré. Nous définirons donc différentes dimensions et en particulier nous étudierons l'existence de la dimension locale des mesures images.

Finalement, nous rappellerons la notion de mesure faiblement diamétralement régulière et un résultat sur l'existence de ces mesures.

2.1 Dimensions de Hausdorff, de packing et locales

Dans cette section, nous rappelons les notions de dimensions de Hausdorff, dimensions de "packing" (cette dimension est aussi appelé dimension de Tricot [93] mais nous utiliserons ici l'anglicisme packing), dimensions locales (pointwise dimensions) et leurs liens (voir [48] pour plus de détails).

2.1.1 Dimension de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique. Soit U un sous-ensemble non-vide de X, son diamètre est défini par

$$\text{diam } U := \sup \{d(x, y) \,:\, x, y \in U\}.$$

Etant donné $\delta > 0$, une collection $\{U_i\}_{i\in I}$ est un δ-recouvrement dénombrable d'un ensemble E si I est dénombrable, $E \subset \cup_{i\in I} U_i$ et pour tout $i \in I$, $0 < \text{diam } U_i \leq \delta$.

Soit E un sous-ensemble de X et $s \geq 0$, pour $\delta > 0$, on définit :

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i\in I} (\text{diam } U_i)^s \,:\, \{U_i\}_{i\in I} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement dénombrable de } E \right\}. \tag{2.1}$$

On définit ensuite la *mesure extérieure de Hausdorff s-dimensionnelle de E*

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E). \tag{2.2}$$

Il existe un unique t tel que $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ si $s < t$ et $\mathcal{H}^s(E) = 0$ si $s > t$ appelé la *dimension de Hausdorff de E* i.e.

$$\dim_H E = \inf \{s \,:\, \mathcal{H}^s(E) < \infty\} = \sup \{s \,:\, \mathcal{H}^s(E) > 0\}. \tag{2.3}$$

Si μ est une mesure de probabilité sur X, on définit la *dimension de Hausdorff de μ*

$$\dim_H \mu = \inf \{\dim_H Y \,:\, \mu(Y^c) = 0\}. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1. Nous prévenons le lecteur que même si cette définition de la dimension de Hausdorff d'une mesure diffère de celle donnée par Falconer [48], c'est elle qui est la plus utilisée en théorie ergodique.

2.1.2 Dimension de packing

Etant donné $\varepsilon > 0$, la collection $\{B(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ est appelée un ε-packing de E si I est un ensemble fini ou dénombrable, pour tout $i \in I$ on a $x_i \in E$, $r_i \leq \varepsilon$ et les boules sont disjointes. Pour $s \geq 0$, on définit

$$\mathcal{P}^s_\varepsilon(E) = \sup\left\{\sum_{i\in I}(r_i)^s \,:\, \{B(x_i, r_i)\}_{i\in I} \text{ est un } \varepsilon\text{-packing de } E\right\}$$

et

$$\mathcal{P}^s_0(E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{P}^s_\varepsilon(E).$$

On peut ensuite introduire la *mesure de packing s-dimensionnelle*

$$\mathcal{P}^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}^s_0(E_i) \,:\, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\} \tag{2.5}$$

et la *dimension de packing de* E est définie de la même manière que la dimension de Hausdorff

$$\dim_P E = \inf\{s \,:\, \mathcal{P}^s(E) < \infty\} = \sup\{s \,:\, \mathcal{P}^s(E) > 0\}. \tag{2.6}$$

Pour une mesure de probabilité μ, on a aussi une *dimension de packing de* μ

$$\dim_P \mu = \inf\{\dim_P Y \,:\, \mu(Y^c) = 0\}. \tag{2.7}$$

Nous utiliserons les deux propriétés suivantes des dimensions de Haussdorff et de packing (dans cette proposition, la notation "dim" indique que la propriété est vérifiée pour la dimension de Hausdorff mais aussi pour celle de packing) :

Proposition 2.2. *1. Si $f : E \to \mathbb{R}^m$ est une fonction Lipschitz alors*

$$\dim f(E) \leq \dim E.$$

2. Pour toute collection dénombrable d'ensemble $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$,

$$\dim \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = \sup_{i\in\mathbb{N}} \dim E_i.$$

2.1.3 Dimensions locales

Les dimensions locales inférieure et supérieure d'une mesure de probabilité Borélienne μ sur X au point $x \in X$ sont définies par

$$\underline{d}_\mu(x) = \varliminf_{r\to 0}\frac{\log\mu\left(B\left(x,r\right)\right)}{\log r} \qquad \text{et} \qquad \overline{d}_\mu(x) = \varlimsup_{r\to 0}\frac{\log\mu\left(B\left(x,r\right)\right)}{\log r}.$$

Définition 2.3. *Une mesure de probabilité μ est exacte dimensionnelle s'il existe une constante $d_\mu \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\underline{d}_\mu(\cdot) = \overline{d}_\mu(\cdot) = d_\mu \qquad \mu\text{-presque partout.}$$

Il est bien connu que dans ce cas beaucoup de notion de dimensions coïncident. En particulier, la dimension de Hausdorff $\dim_H \mu$ vérifie

Proposition 2.4. *Si μ est exacte dimensionnelle alors*

$$d_\mu(\cdot) = \dim_H \mu \quad \textit{presque partout.}$$

Cette proposition est une conséquence de la proposition suivante qui montre le lien entre dimensions de Hausdorff, de packing et dimensions locales :

Proposition 2.5. *Supposons que $X \subset \mathbb{R}^N$ pour un certain N, alors*

$$\dim_H \mu = \textit{ess-sup } \underline{d}_\mu \tag{2.8}$$

et

$$\dim_P \mu = \textit{ess-sup } \overline{d}_\mu. \tag{2.9}$$

Nous ne démontrerons que la propriété (2.9) qui est moins présente dans la littérature mais nous donnerons les idées essentielles pour pouvoir démontrer la propriété (2.8). Par la suite, nous ne démontrerons que les propriétés en rapport avec la dimension de packing. Ces démonstrations sont basées sur le lemme suivant que nous démontrerons plus loin.

Lemme 2.6. *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble de Borel et soit μ une mesure finie.*

1. *Si $\underline{d}_\mu(x) \geq s$ pour tout $x \in A$ et si $\mu(A) > 0$ alors $\dim_H A \geq s$.*
2. *Si $\underline{d}_\mu(x) \leq s$ pour tout $x \in A$ alors $\dim_H A \leq s$.*
3. *Si $\overline{d}_\mu(x) \geq s$ pour tout $x \in A$ et si $\mu(A) > 0$ alors $\dim_P A \geq s$.*
4. *Si $\overline{d}_\mu(x) \leq s$ pour tout $x \in A$ alors $\dim_P A \leq s$.*

Preuve de la Proposition 2.5. Montrons tout d'abord que $\dim_P \mu \geq$ ess-sup $\overline{d}_\mu$. Soit $\gamma <$ ess-sup $\overline{d}_\mu$, par définition du supremum essentiel, il existe un ensemble E_γ de mesure strictement positive et tel que $\overline{d}_\mu \geq \gamma$ sur E_γ. Soit E tel que $\mu(E^c) = 0$. D'après le lemme précédent comme $\mu(E \cap E_\gamma) > 0$ on obtient

$$\dim_P E \geq \dim_P(E \cap E_\gamma) \geq \gamma.$$

Ceci étant vrai pour tout ensemble E tel que $\mu(E^c) = 0$, par définition de la dimension de packing d'une mesure on a

$$\dim_P \mu \geq \gamma$$

pour tout $\gamma <$ ess-sup $\overline{d}_\mu$ et donc

$$\dim_P \mu \geq \text{ess-sup } \overline{d}_\mu.$$

Montrons maintenant que $\dim_P \mu \leq$ ess-sup $\overline{d}_\mu$. Par définition du supremum essentiel, il existe un ensemble E tel que $\mu(E^c) = 0$ et tel que pour tout $x \in E$, $\overline{d}_\mu(x) \leq$ ess-sup $\overline{d}_\mu$. Ainsi, la définition de la dimension de packing d'une mesure et le point 4. du lemme précédent nous donne

$$\dim_P \mu \leq \dim_P E \leq \text{ess-sup } \overline{d}_\mu.$$

□

Pour démontrer le Lemme 2.6 nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.7. *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble borélien, soit μ une mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$ et soit $0 < s < +\infty$.*

1. *Si $\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq c$ pour tout $x \in A$ alors $\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{c}$.*
2. *Si $\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \geq c$ pour tout $x \in A$ alors $\mathcal{H}^s(A) \leq \frac{2^s\mu(A)}{c}$.*
3. *Si $\underline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq c$ pour tout $x \in A$ alors $\mathcal{P}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{2c5^s}$.*
4. *Si $\underline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \geq c$ pour tout $x \in A$ alors $\mathcal{P}^s(A) \leq \frac{2\mu(A)}{c}$.*

Preuve. Montrons tout d'abord l'assertion 3. Supposons que $\underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq c$ pour tout $x \in A$. Soit $\tilde{A} \subset A$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \tilde{A}$, il existe $0 < r_x < \frac{\varepsilon}{5}$ tel que $\frac{\mu(B(x,5r_x))}{(5r_x)^s} \leq 2c$. Comme $\tilde{A} \subset \bigcup_{x\in\tilde{A}} B(x, r_x)$, d'après le lemme de recouvrement de Vitali, il existe une sous-famille $\{B(x_i, r_{x_i})\}_{i\in I}$ avec I au plus dénombrable telle que les $\{B(x_i, r_{x_i})\}_{i\in I}$ soient disjointes et telle que $\bigcup_{x\in\tilde{A}} B(x, r_x) \subset \bigcup_{i\in J}\{B(x_i, 5r_{x_i})\}_{i\in I}$. Ainsi, comme

$$\tilde{A} \subset \bigcup_{i\in J}\{B(x_i, 5r_{x_i})\}_{i\in I}$$

on a

$$\begin{aligned}
\mu(\tilde{A}) &\leq \sum_{i\in I} \mu(B(x_i, 5r_{x_i})) \\
&\leq 2c5^s \sum_{i\in I} r_{x_i}^s \\
&\leq 2c5^s \mathcal{P}^s_{\varepsilon/5}(\tilde{A}).
\end{aligned}$$

Finalement, comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que

$$\mathcal{P}^s_0(\tilde{A}) \geq \frac{\mu(\tilde{A})}{2c5^s}. \tag{2.10}$$

Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles telle que $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. On a

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cap A)) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i \cap A) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} 2c5^s \mathcal{P}^s_0(A_i \cap A) \qquad \text{d'après (2.10)} \\
&\leq 2c5^s \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^s_0(A_i) \qquad \text{d'après la définition de } \mathcal{P}^s_0.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute famille $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, on obtient par définition de la mesure de packing

$$\mathcal{P}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{2c5^s}.$$

Montrons maintenant le point 4. Supposons que $\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \geq c$ pour tout $x \in A$. Soit $\delta > 0$. On définit l'ensemble A_δ :

$$A_\delta := \left\{ x \in A : \forall 0 < r < \delta \,,\, \mu(B(x,r)) \geq \frac{c}{2} r^s \right\}.$$

Soit $0 < \varepsilon < \delta$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^s_\varepsilon(A_\delta) &= \sup\left\{ \sum_{i\in I} (r_i)^s : \{B(x_i,r_i)\}_{i\in I} \text{ est un } \varepsilon\text{-packing de } A_\delta \right\} \\
&\leq \sup\left\{ \frac{2}{c} \sum_{i\in I} \mu(B(x_i,r_i) : \{B(x_i,r_i)\}_{i\in I} \text{ est un } \varepsilon\text{-packing de } A_\delta \right\} \\
&\leq \frac{2}{c}\mu(A_\delta).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\mathcal{P}^s_0(A_\delta) \leq \frac{2}{c}\mu(A_\delta)$$

et par définition de la mesure de packing s-dimensionnelle et de A_δ

$$\mathcal{P}^s(A_\delta) \leq \mathcal{P}^s_0(A_\delta) \leq \frac{2}{c}\mu(A_\delta) \leq \frac{2}{c}\mu(A).$$

Comme $\mathcal{P}^s$ est une mesure et par définition de A_δ, on a

$$\mathcal{P}^s(A) \leq \mathcal{P}^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}^s\left(A_{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{2}{c}\mu(A).$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le Lemme 2.6 :

Preuve du Lemme 2.6. Soit A un ensemble de mesure strictement positive. Supposons que pour tout $x \in A$ on a $\overline{d}_\mu(x) \geq s$, i.e. $\overline{\lim}_{r\to 0}\frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \geq s$. Ainsi, pour tout $x \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\log \mu(B(x,r_n))}{\log r_n} \geq s - \varepsilon.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\mu(B(x,r_n))}{r_n^{s-2\varepsilon}} \leq r_n^\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{r^{s-2\varepsilon}} = 0,$$

c'est-à-dire, pour tout $\delta > 0$

$$\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{r^{s-2\varepsilon}} < \delta.$$

D'après le point 3 du Lemme 2.7, pour tout $\varepsilon > 0$ et pout tout $\delta > 0$, $\mathcal{P}^{s-2\varepsilon}(A) \geq \frac{\mu(A)}{2\delta 5^{s-2\varepsilon}} > 0$ car $\mu(A) > 0$. Et donc par définition de la dimension de packing, on a $\dim_P A \geq s$.

Montrons maintenant le point 4. Supposons que pour tout $x \in A$ on a $\overline{d}_\mu(x) \leq s$, i.e. $\overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq s$. Ainsi, pour tout $x \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $0 < r < R$ on a

$$\frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq s + \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{\mu(B(x,r))}{r^{s+2\varepsilon}} \geq r^{-\varepsilon}.$$

Ainsi, pour tout $x \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{s+2\varepsilon}} = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{s+2\varepsilon}} = +\infty,$$

c'est-à-dire, pour tout $C > 0$

$$\underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{s+2\varepsilon}} > C.$$

D'après le point 4 du Lemme 2.7, pour tout $\varepsilon > 0$ et pout tout $C > 0$, $\mathcal{P}^{s+2\varepsilon}(A) \leq \frac{2\mu(A)}{C}$. Et donc par définition de la dimension de packing, on a $\dim_P A \leq s$.

□

2.2 Existence de la dimension locale

Nous donnons maintenant un théorème d'existence de la dimension locale lorsque notre mesure est une mesure image.

Considérons donc une fonction $f : X \to Y$ avec X et Y deux espaces métriques (par la suite nous appelerons f une observation) et une mesure de probabilitité μ sur X. La mesure image $f_*\mu(.) := \mu(f^{-1}(.))$ est une mesure de probabilité sur Y et on définit *les dimensions locales inferieures et supérieures pour l'observation* f par rapport à μ en un point $x \in X$ par

$$\underline{d}^f_\mu(x) = \underline{d}_{f_*\mu}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad \overline{d}^f_\mu(x) = \overline{d}_{f_*\mu}(f(x)).$$

Quand elles sont égales, on notera $d^f_\mu(x)$ cette valeur.

Théorème 2.8. *Soit $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ une fonction C^∞ et soit μ une mesure absolument continue sur $\mathbb{R}^M$. Alors, d^f_μ existe et appartient à $\{0, 1, ..., \min\{M, N\}\}$ μ-presque partout. Plus précisément, $d^f_\mu(x) = \operatorname{rang} d_x f$ pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^M$.*

Ce résultat est non trivial dans le sens où la mesure image $f_*\mu$ peut être compliquée et contre-intuitive. En dimension un, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(\{f' = 0\})$ soit un ensemble non dénombrable de dimension 0 et telle que $f_*(Leb|_{\{f'=0\}})$ soit une mesure non nulle et non atomique :

Exemple 2.9. Considérons l'intervalle $[0,1]$ et construisons tout d'abord un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue positive, ensuite nous construirons une fonction C^∞ dont la dérivée s'annule sur cet ensemble de Cantor. On applique un procédé itératif pour construire cet ensemble de Cantor que l'on notera C. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\lambda_n = \frac{5}{2^n(n+1)^2\pi^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise le même procédé de construction que celui de l'ensemble triadique de Cantor sauf que les intervalles supprimés à l'étape n sont de longueur λ_n. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles fermés de $[0,1]$ et $\mathcal{J}$ l'ensemble des sous-ensembles de $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $F_n : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ suivante :

$$F_n([a,b]) = [a,b] \setminus \left]a + \frac{b-a}{2} - \frac{\lambda_n}{2}, a + \frac{b-a}{2} + \frac{\lambda_n}{2}\right[.$$

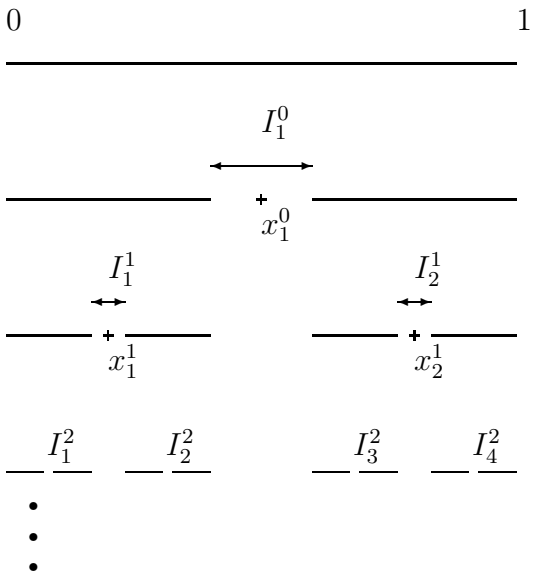
On construit donc par récurrence une suite d'ensemble $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} C_0 & = & F_0([0,1]) \\ C_{n+1} & = & \bigcup\limits_{I\in C_n} F_{n+1}(I) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

où l'union précédente est faite sur tous les intervalles I de C_n. Ainsi, à l'étape n du processus on enlève 2^n intervalles $\{I_k^n\}_{k=1}^{2^n}$ de longueur λ_n et l'on nommera x_k^n le centre de I_k^n. Finalement, notre ensemble de Cantor est construit comme suit :

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Voici une illustration de cette construction :



Construction de C

On peut calculer la mesure de Lebesgue de C :

$$Leb(C) = 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n\lambda_n = 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n \frac{5}{2^n(n+1)^2\pi^2} = \frac{1}{6} > 0.$$

Construisons maintenant notre fonction f. Considérons tout d'abord la fonction $h \in C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ suivante :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \\ \exp\left(\frac{-1}{1-(1-2x)^2}\right) & \text{si } x \in (0,1). \end{cases}$$

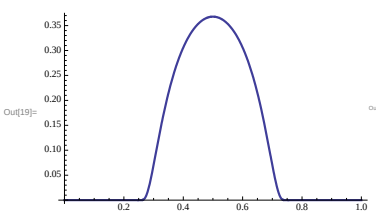
Cette fonction sera la base de la construction de la fonction f. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{n!} 1_{I_k^n}(x) h\left(\frac{1}{\lambda_n}(x - (x_k - \frac{\lambda_n}{2}))\right)$$

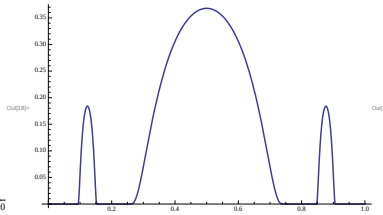
et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction construite par :

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(x).$$

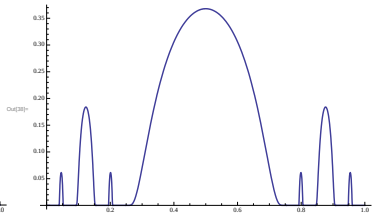
La fonction g est donc une fonction construite par un procédé itératif basé sur la construction de l'ensemble de Cantor précédente : on commence par la fonction nulle sur $[0,1]$, ensuite pour chaque $n \in \mathbb{N}$, dans chaque intervalle I_k^n on placera une fonction h contractée (en hauteur d'un facteur $1/n!$ et en longueur d'un facteur λ_n). Voici les premières étapes de la construction :



Graphe de g_0



Graphe de $g_0 + g_1$



Graphe de $g_0 + g_1 + g_2$

On peut vérifier facilement que la fonction g est une fonction C^∞. Nous pouvons donc maintenant construire notre fonction f :

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \int_0^x g(t)dt. \end{aligned}$$

Nous avons donc construit une fonction $f \in C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ strictement croissante (sa dérivée g est positive et ne s'annule que sur C qui est un ensemble d'intérieur vide). f est donc une bijection de $[0,1]$ dans $[0, f(1)]$. Ainsi, l'ensemble $f(\{f' = 0\})$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor C, c'est donc un ensemble non dénombrable et d'après le Théorème 2.8 il est de dimension 0. De plus, $f_*(Leb|_C)$ est une mesure non nulle (car $f_*(Leb|_C)([0, f(1)]) = Leb(C) > 0$) et non atomique (car f est une bijection et que $Leb|_C$ est une mesure non atomique).

Nous soulignons que le Théorème 2.8 s'applique à toute fonction C^∞ et pas seulement à des fonctions génériques. Cela est essentiel dans les applications où nous sommes intéressés par des observations particulières.

Bates et Moreira [21] ont démontré une généralisation du Théorème de Morse-Sard pour les mesures de Hausdorff. Malheureusement, d'après (2.8), cela n'est pas suffisant pour obtenir une borne supérieure pour la dimension locale supérieure. La généralisation suivante de la décomposition de Morse est un ingrédient clef de leur preuve. Etant donné une fonction différentiable f de $\mathbb{R}^M$ dans $\mathbb{R}^N$, pour $\kappa \in \{0, 1, ..., \min\{M, N\}\}$, on définit $C_\kappa := \{x \in \mathbb{R}^M : \operatorname{rank}(d_x f) = \kappa\}$.

Lemme 2.10 ([21]). *Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ avec $k \geq 2$. Soit $\kappa \leq M$ un entier. Soit $\eta > 0$. Il existe une décomposition $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de C_κ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe deux sous-espaces E_i' et E_i'' qui satisfont $\mathbb{R}^M = E_i' \oplus E_i''$, $\dim E_i' \leq \kappa$ et si $S \subset \mathbb{R}^M$:*

$$\operatorname{diam}(f(S \cap A_i)) \leq (\|f|_{A_i}\|_{C^1} + \eta) \operatorname{diam}(\pi_{E_i'} S) + \eta(\operatorname{diam} S)^k. \tag{2.11}$$

Nous utiliserons cette décomposition pour démontrer un résultat analogue pour la dimension de packing.

Lemme 2.11. *Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ alors la dimension de packing de l'ensemble critique vérifie*

$$\dim_P f(C_\kappa) \leq \kappa.$$

Preuve. Soit $k \geq 2$, f étant de classe C^∞, f est aussi de classe C^k. Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la décomposition de C_κ donnée par le Lemme 2.10 avec $\eta = 1$. Soit $K \subset \mathbb{R}^M$ un ensemble compact. Soit $i \in \mathbb{N}$. Soit d_i une distance sur $\mathbb{R}^M$ telle que pour $x \in \mathbb{R}^M$ et $y \in \mathbb{R}^M$, $d_i(x, y) = d(\pi_{E_i'} x, \pi_{E_i'} y) + d(\pi_{E_i''} x, \pi_{E_i''} y)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\{B(f(x_j), r_j)\}_{j\in J}$ un ε-packing de $f(A_i \cap K)$. Soient $j \in J$ et $l \in J$. En choisissant $S := \{x_j, x_l\}$ dans (2.11) on obtient

$$\begin{aligned} r_j + r_l &\leq d_i(f(x_j), f(x_l)) = \operatorname{diam}(f(S \cap A_i)) \\ &\leq C d(\pi_{E_i'} x_j, \pi_{E_i'} x_l) + \big(d(\pi_{E_i'} x_j, \pi_{E_i'} x_l) + d(\pi_{E_i''} x_j, \pi_{E_i''} x_l)\big)^k \end{aligned}$$

où $C := \|f\|_{C^1} + 1$. Ainsi,
- soit $C d(\pi_{E_i'} x_j, \pi_{E_i'} x_l) \geq \frac{1}{2}(r_j + r_l)$,
- soit $C d(\pi_{E_i'} x_j, \pi_{E_i'} x_l) \leq \frac{1}{2}(r_j + r_l)$ et alors

$$\big(d(\pi_{E_i'} x_j, \pi_{E_i'} x_l) + d(\pi_{E_i''} x_j, \pi_{E_i''} x_l)\big)^k \geq \frac{1}{2}(r_j + r_l).$$

En prenant ε assez petit pour avoir $\frac{\varepsilon}{C} \leq (1 - 2^{-1/k})\varepsilon^{1/k}$ on obtient

$$\frac{1}{2C}(r_j + r_l) \leq \left(1 - 2^{-1/k}\right) \left(\frac{1}{2}(r_j + r_l)\right)^{1/k}$$

et ainsi

$$d(\pi_{E_i''} x_j, \pi_{E_i''} x_l) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k} \left(\frac{1}{2}(r_j + r_l)\right)^{1/k}.$$

Pour $j \in J$, on définit $S_j = B_{E_i'}(\pi_{E_i'} x_j, \frac{1}{4C} r_j) \times B_{E_i''}(\pi_{E_i''} x_j, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} r_j\right)^{1/k}) \subset E_i' \times E_i''$. Si $l \neq j$, comme

– soit $d(\pi_{E_i'} x_j, \pi_{E_i'} x_l) \geq \frac{1}{2C}(r_j + r_l) > \frac{1}{4C} r_j + \frac{1}{4C} r_l$

– soit $d(\pi_{E_i''} x_j, \pi_{E_i''} x_l) \geq \left(\frac{1}{4}(r_j + r_l)\right)^{1/k} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} r_j\right)^{1/k} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} r_l\right)^{1/k}$

on a $S_j \cap S_l = \emptyset$.
Il existe une constante δ_i telle que

$$\operatorname{diam} S_j \leq \delta_i \varepsilon^{1/k}.$$

Les rectangles S_j sont disjoints et ont une intersection avec K non vide, ainsi

$$\sum_{j \in J} \operatorname{Vol}(S_j) \leq \operatorname{Vol}(K + B(0, \delta_i \varepsilon^{1/k})). \tag{2.12}$$

Soit $p = \dim E_i' \leq \kappa$. Il existe une constante γ_i telle que le volume de chaque S_j soit égal à

$$\operatorname{Vol}(S_j) = \gamma_i \left(\frac{1}{4C} r_j\right)^p \times \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} r_j\right)^{1/k}\right]^{M-p}.$$

Ceci implique, en utilisant (2.12), que

$$\sum_{j \in J} (r_j)^{p + (M-p)/k} \leq c(i, k, K) < \infty$$

où $c(i, k, K)$ est une constante finie dépendant de i,k et K.
Maintenant, par définition de la packing mesure s-dimensionnelle (2.5) on obtient :

$$\mathcal{P}^{M/k + p(1-1/k)}(f(A_i \cap K)) \leq c(i, k, K) < \infty.$$

Ainsi

$$\dim_P f(A_i \cap K) \leq \frac{M}{k} + p(1 - \frac{1}{k}) \leq \frac{M}{k} + \kappa.$$

Finalement, en choisissant une suite de compacts K_n telle que $\mathbb{R}^M = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, on a :

$$\begin{aligned}
\dim_P f(C_\kappa) &= \dim_P f(\bigcup_{i,n \in \mathbb{N}} A_i \cap K_n) \\
&= \dim_P \bigcup_{i,n} f(A_i \cap K_n) \\
&= \sup_{i,n} \dim_P f(A_i \cap K_n) \qquad \text{voir Proposition 2.2} \\
&\leq \frac{M}{k} + \kappa.
\end{aligned}$$

Comme k peut être choisi arbitrairement grand, on a

$$\dim_P f(C_\kappa) \leq \kappa. \tag{2.13}$$

□

Nous allons prouver le Théorème 2.8 sur $\mathbb{R}^M$ avec μ une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ, i.e. pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^M$

$$\lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0.$$

Preuve du Théorème 2.8. Soit $\kappa \in \{0, ..., \min\{M, N\}\}$.
1. Si $A \subset C_\kappa$ et $\mu(A) > 0$ alors $\dim_H f_*(\mu|_A) \geq \kappa$:
En effet, soit $B \subset C_\kappa$ avec $\mu(B) > 0$, comme μ est absolument continue, $\lambda(B) > 0$. Il existe un ouvert V tel que $\lambda(B \cap V) > 0$ et $\pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^\kappa$ une application linéaire telle que $d_x\pi \circ f$ soit de rang maximal κ pour tout $x \in V$. $f_\kappa := \pi \circ f$ vérifie donc que $Jf_\kappa \neq 0$ pour tout $x \in V$ (où J est le Jacobien i.e. $Jf_\kappa = \sqrt{\det(d_x f_\kappa)(d_x f_\kappa)^t}$). Comme π est Lipschitz, d'après la Proposition 2.2, on sait que :

$$\dim_H \pi(f(B)) \leq \dim_H f(B). \tag{2.14}$$

D'après la formule de la coaire (e.g. [47], en fait on aurait pu travailler directement avec f en utilisant [75]) :

$$\int_B Jf_\kappa d\lambda = \int_{f_\kappa(B)} \mathcal{H}^{M-\kappa}\left(B \cap f_\kappa^{-1}(\{y\})\right) d\lambda_\kappa(y) \tag{2.15}$$

où λ_κ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^\kappa$. Comme $\lambda(B \cap V) > 0$ et $Jf_\kappa(x) \neq 0$ pour tout $x \in B \cap V$, le membre de gauche de (2.15) n'est pas nul, il en est donc de même pour le membre de droite. Ainsi $\lambda_\kappa(f_\kappa(B)) > 0$ et donc $\dim_H f_\kappa(B) \geq \kappa$ ce qui nous donne d'après (2.14) :

$$\kappa \leq \dim_H f(B). \tag{2.16}$$

Soit $A \subset C_\kappa$ tel que $\mu(A) > 0$. On rappelle que

$$\dim_H f_*(\mu|_A) := \inf\{\dim_H Y \ : \ (f_*(\mu|_A))(Y^c) = 0\}. \tag{2.17}$$

Soit Y tel que $(f_*(\mu|_A))(Y^c) = 0$. Comme $f\left(A \cap f^{-1}(Y)\right) \subset Y$ on a

$$\dim_H Y \geq \dim_H f\left(A \cap f^{-1}(Y)\right).$$

De plus, comme $\mu(f^{-1}(Y) \cap A) = \mu(A) > 0$ et $f^{-1}(Y) \cap A \subset C_\kappa$, on peut choisir $B = f^{-1}(Y) \cap A$ et d'après (2.16) :

$$\dim_H Y \geq \dim_H f\left(A \cap f^{-1}(Y)\right) \geq \kappa$$

et donc

$$\dim_H f_*(\mu|_A) \geq \kappa. \tag{2.18}$$

On pose $\nu := f_*\mu$ et $\nu_\kappa := f_*(\mu|_{C_\kappa})$.
2. Montrons que $d_\nu = \kappa$ ν_κ-presque partout :
• Tout d'abord, comme ν_κ est supportée sur $f(C_\kappa)$, d'après le Lemme 2.11 on a

$$\dim_P \nu_\kappa \leq \dim_P f(C_\kappa) \leq \kappa.$$

Comme la dimension de packing vérifie la relation (2.9) on a

$$\overline{d}_{\nu_\kappa}(x) \leq \kappa \text{ pour } \nu_\kappa\text{-presque tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varepsilon > 0$, $\nu\left(B(x,\varepsilon)\right) \geq \nu_\kappa\left(B(x,\varepsilon)\right)$, on obtient

$$\overline{d}_\nu(x) \leq \overline{d}_{\nu_\kappa}(x)$$

et donc

$$\overline{d}_\nu(x) \leq \kappa \text{ pour } \nu_\kappa\text{-presque tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.19}$$

• Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un sous-ensemble compact. Soit $\rho < \kappa$. Soit $Z := \{\underline{d}_\nu \leq \rho\} \cap K$. Si $\nu_\kappa(Z) > 0$ alors $\mu(C_\kappa \cap f^{-1}(Z)) > 0$, et donc d'après (2.18) on obtient $\dim_H f_*(\mu|_{C_\kappa \cap f^{-1}(Z)}) \geq \kappa$. D'après (2.17) et comme $f_*(\mu|_{C_\kappa \cap f^{-1}(Z)})(Z^c) = 0$, on a $\dim_H Z \geq \kappa$.

Par ailleurs, par définition de $\underline{d}_\nu$, $\forall x \in Z, \exists J_x \subset (0,+\infty)$ avec $0 \in \overline{J_x}$, tel que $\forall r \in J_x$, $\nu\left(B(x,r)\right) \geq r^\rho$. Soit $\delta > 0$. On remarque que $\{B(x,r)\,,\, x \in Z\,,\, r \in J_x \cap [0,\delta]\}$ recouvre Z donc, d'après le Théorème de recouvrement de Besicovitch, il existe un sous recouvrement $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ avec I dénombrable et m_0 une constante dépendant seulement de N tels que $Z \subset \cup_{i\in I} B(x_i,r_i)$ et la multiplicité du recouvrement est bornée par m_0. D'après la définition (2.1)

$$\mathcal{H}^\rho_\delta(Z) \leq \sum_{i\in I} r_i^\rho \leq \sum_{i\in I} \nu\left(B(x_i,r_i)\right) \leq m_0 \nu(K + B(0,\delta)).$$

Ce qui implique que $\dim_H Z \leq \rho$. Mais ceci étant en contradiction avec le fait que $\dim_H Z \geq \kappa$, on a que pour tout $\rho < \kappa$ et pour tout compact K, $\nu_\kappa(\{\underline{d}_\nu \leq \rho\} \cap K) = 0$. Ainsi

$$\underline{d}_\nu(x) \geq \kappa \text{ pour } \nu_\kappa\text{-presque tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.20}$$

<u>3. Conclusion :</u> En utilisant (2.19) et (2.20) on obtient que $d_\nu = \kappa$ ν_κ-presque partout. Et le théorème est démontré en utilisant que $\mathbb{R}^M = C_0 \cup C_1 \cup ... \cup C_{\min\{M,N\}}$. □

2.3 Mesures faiblement diamétralement régulières

Nous expliquons ici la notion de mesure faiblement diamétralement régulière et nous donnons une propriété essentielle que nous utiliserons plusieurs fois tout au long de notre travail en suivant les idées de [18].

Définition 2.12. *Une mesure μ est une mesure diamétralement régulière (ou mesure doublante) s'il existe une constante $\eta > 1$ et une constante $c > 0$ telles que pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$ on a $\mu\left(B\left(x,\eta r\right)\right) \leq c\mu\left(B\left(x,r\right)\right)$.*

Par exemple, les états d'équilibre d'un potentiel Hölder pour les sous-shifts de type fini ou pour les applications dilatantes conformes sont des mesures diamétralement régulières. Pour obtenir une propriété vérifiée par une classe beaucoup plus large de mesures nous devons affaiblir la définition précédente, c'est pourquoi on introduit les mesures faiblement diamétralement régulières.

Définition 2.13. *Une mesure μ est faiblement diamétralement régulière (fdr) sur l'ensemble $Z \subset X$ s'il existe $\eta > 1$ et si pour μ-presque tout $x \in Z$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $r < \delta$ alors*

$$\mu\left(B\left(x, \eta r\right)\right) \leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-\varepsilon}. \tag{2.21}$$

Il existe en fait une définition équivalente plus forte que nous utiliserons par la suite :

Proposition 2.14. *Une mesure μ est faiblement diamétralement régulière sur l'ensemble $Z \subset X$ si et seulement si pour tout $\eta > 1$, pour μ-presque tout $x \in Z$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $r < \delta$ alors $\mu\left(B\left(x, \eta r\right)\right) \leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-\varepsilon}$.*

Preuve. Supposons qu'il existe $\eta > 1$ tel que pour μ-presque tout $x \in Z$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $r < \delta$ alors $\mu\left(B\left(x, \eta r\right)\right) \leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-\varepsilon}$. Montrons que pour tout $\alpha > 1$, pour μ-presque tout $x \in Z$ et tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $r < \delta_1$ alors $\mu\left(B\left(x, \alpha r\right)\right) \leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-\varepsilon_1}$.

Soient $\alpha > 1$ et $\varepsilon_1 > 0$. Si $\alpha \leq \eta$ alors pour μ-presque tout $x \in Z$, comme μ est fdr, on a pour r suffisamment petit

$$\begin{aligned} \mu\left(B(x, \alpha r)\right) &\leq \mu\left(B(x, \eta r)\right) \\ &\leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Maintenant, si $\alpha > \eta$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\eta^n \leq \alpha < \eta^{n+1}$. Soient $x \in Z$ et $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{n+1}$ tels que pour $r < \delta$ l'equation (2.21) soit vérifiée. Alors, si $r < \frac{\delta}{\eta^n}$

$$\begin{aligned} \mu\left(B(x, \alpha r)\right) &\leq \mu\left(B(x, \eta^{n+1} r)\right) \\ &\leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-(n+1)\varepsilon} \\ &\leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Et ainsi la proposition est démontrée. □

Voici maintenant une propriété essentielle des mesures boréliennes (prouvée dans [18]) :

Lemme 2.15. *Toute mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}^N$ est faiblement diamétralement régulière.*

Preuve. Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}^N$. Nous allons démontrer que pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ on a

$$\mu(B(x, 2^{-n})) \leq n^2 \mu(B(x, 2^{-n-1})) \tag{2.22}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Montrons que si cela est vérifié alors μ est faiblement diamétralement régulière avec $\eta = 2$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et $n \in \mathbb{N}$

suffisamment grand pour que (2.22) soit vérifiée et pour que $n^2(n-1)^2 \leq 2^{\varepsilon n}$. Soit $0 < r < 2^{-n-1}$, il existe $m \geq n+1$ tel que $2^{-m-1} \leq r < 2^{-m}$. On a donc

$$\begin{array}{llll} \mu(B(x,2r)) & \leq \mu(B(x,2^{-m+1})) & \text{car} & 2r < 2^{-m+1} \\ & \leq m^2(m-1)^2\mu(B(x,2^{-m-1})) & \text{d'après} & (2.22) \\ & \leq m^2(m-1)^2\mu(B(x,r)) & \text{car} & 2^{-m-1} \leq r \\ & \leq 2^{\varepsilon m}\mu(B(x,r)) & \text{car} & m > n \text{ et } n^2(n-1)^2 \leq 2^{\varepsilon n} \\ & \leq r^{-\varepsilon}\mu(B(x,r)) & \text{car} & r < 2^{-m} \end{array}$$

et ainsi μ est faiblement diamétralement régulière.

Démontrons donc (2.22). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, on définit

$$A(n) := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \mu(B(x,2^{-n}) > n^2\mu(B(x,2^{-n-1})\right\}.$$

Nous rappelons ici la notion d'ensemble maximal r-séparé :

Définition 2.16. *Etant donné $r > 0$, un ensemble dénombrable $E \subset F$ est un ensemble maximal r-separé pour F si*

1. *$B(x,\frac{r}{2}) \cap B(y,\frac{r}{2}) = \emptyset$ pour tous $x, y \in E$ distincts.*
2. *$\mu(F \setminus \bigcup_{x\in E} B(x,r)) = 0$.*

Soit $E \subset A(n)$ un ensemble maximal 2^{-n-1}-séparé pour $A(n)$. On a

$$\mu(A(n)) \leq \sum_{x\in E} \mu(B(x,2^{-n-1})) \leq \sum_{x\in E} \frac{1}{n^2}\mu(B(x,2^{-n})).$$

Comme E est un ensemble 2^{n-1}-séparé, il existe une constante C dépendant uniquement de la dimension N telle que E puisse être décomposé en un nombre fini d'ensembles maximaux 2^{-n+1}-séparés. Plus exactement, la constante C est donnée par

$$C = \max_{r>0} \max_{x\in\mathbb{R}^N} \max_{G(x,r)} \text{Card } G(x,r)$$

où les $G(r,x)$ sont les ensembles maximaux $2r$-séparés de $B(x,4r)$. Cette constante correspond au nombre maximal de boules disjointes de rayon r dont l'intersection avec une même boule de rayon $4r$ est non vide. Il existe donc C ensembles E_i maximaux 2^{-n+1}-séparés tels que $E = \cup_{i=1}^C E_i$. Ainsi

$$\mu(A(n)) \leq \sum_{i=1}^{C} \sum_{x\in E_i} \frac{1}{n^2}\mu(B(x,2^{-n})) \leq \frac{C}{n^2}.$$

On a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A(n)) < +\infty.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, il existe $n_1(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_1(x)$, $x \notin A(n)$, c'est-à-dire, l'equation (2.22) est vérifiée et donc le lemme est démontré. □

Chapitre 3

Récurrence de Poincaré pour les observations

Un système dynamique de grandes dimensions est souvent étudié par les expérimentalistes à travers une certaine "mesure" ou un "relevé" d'un relativement petit nombre de différentes quantités, appelées observations. En suivant cette idée et dans la continuité du travail de Boshernitzan, pour un système préservant la mesure, nous étudions la récurrence de Poincaré pour les observations (on pourra aussi voir le livre de Aaronson [1] pour une version du théorème de récurrence de Poincaré pour les observations). Nous faisons le lien entre les temps de retour pour les observations et les dimensions locales de l'image de la mesure invariante. Nous prouvons que lorsque la décroissance des corrélations est super-polynomiale, les taux de récurrence pour les observations et les dimensions locales de la mesure image sont égaux.

Ce chapitre est basé sur l'article [84], *Poincaré recurrence for observations*, écrit avec Benoît Saussol et à paraître dans les *Transactions* de la Société Américaine de Mathématiques.

3.1 Borne supérieure du taux de récurrence pour les systèmes dynamiques

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique tel que X est un espace métrique et que $\mathcal{A}$ est sa σ-algèbre de Borel et soit Y un espace métrique. Soit $f : X \to Y$ une fonction, appelée observation (nous serons plus spécifiques sur les espaces X et Y par la suite). On introduit le temps de retour pour l'observation et ses taux de récurrence associés.

Définition 3.1. *Soit $f : X \to Y$ une fonction mesurable, on définit pour $x \in X$ le temps de retour pour l'observation f :*

$$\tau_r^f(x) := \inf\left\{k \in \mathbb{N}^* : \ f(T^k x) \in B\left(f(x), r\right)\right\}$$

où $B(f(x), r)$ est la boule centrée en $f(x)$ et de rayon r. On définit ensuite les taux de récurrence pour l'observation inférieur et supérieur :

$$\underline{R}_i^f(x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^f(x)}{-\log r} \qquad \overline{R}_i^f(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^f(x)}{-\log r}.$$

On définit aussi pour $p \in \mathbb{N}$ le temps de retour p-non-instantané pour l'observation :

$$\tau_{r,p}^f(x) := \inf\left\{k > p : \ f(T^k x) \in B\left(f(x), r\right)\right\}.$$

Ensuite, on définit les taux de récurrence inférieur et supérieur non-instantanés pour l'observation :

$$\underline{R}^f(x) := \lim_{p\to\infty} \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_{r,p}^f(x)}{-\log r} \qquad \overline{R}^f(x) := \lim_{p\to\infty} \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_{r,p}^f(x)}{-\log r}.$$

Lorsque $\underline{R}^f(x) = \overline{R}^f(x)$ on notera $R^f(x)$ la valeur de la limite.

On notera que dans les définitions des taux de récurrence inférieur et supérieur non-instantanés pour l'observation, nous prenons la limite quand p tend vers l'infini. En effet, nous verrons dans la preuve du Théorème 3.2 (plus précisément à l'équation (3.5)) que cette limite existe (car toute suite croissante majorée converge).

On rappelle la définition des *dimensions locales inférieure et supérieure pour l'observation* f par rapport à la mesure μ en un point $x \in X$

$$\underline{d}^f_\mu(x) = \underline{d}_{f_*\mu}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad \overline{d}^f_\mu(x) = \overline{d}_{f_*\mu}(f(x)).$$

Théorème 3.2. *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique. Considérons une observation mesurable $f : X \to Y = \mathbb{R}^N$. Alors*

$$\underline{R}^f(x) \leq \underline{d}^f_\mu(x) \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^f(x) \leq \overline{d}^f_\mu(x)$$

pour μ-presque tout $x \in X$.

Ce résultat est satisfaisant car il est vérifié pour tous les systèmes dynamiques et toutes les observations. De plus, sous des hypothèses qui apparaissent naturellement, on montrera que l'égalité est vérifiée. Néanmoins, ces inégalités peuvent être strictes, un exemple trivial est celui où T est l'application identité.

Remarque 3.3. En choisissant comme observation f la fonction *identité* nous retrouvons le Théorème 1.30.

Nous donnons maintenant une première application, à savoir la récurrence dans les systèmes dynamiques aléatoires. Une étude plus vaste de ces systèmes est conduite dans le Chapitre 4.

Exemple 3.4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \theta, \mathbb{P})$ un système dynamique et $Y \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble borélien. La famille $(F_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est appelée une transformation aléatoire, où pour tout ω, F_ω est une application de Y dans Y tel que l'application $(w, y) \to F_\omega(y)$ soit $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-mesurable. L'application $T : X = \Omega \times Y \to X$ definie par $T(\omega, y) = (\theta\omega, F_\omega(y))$ est appelée un skew-product. Soit $\mathcal{M}_\mathbb{P}(X, T)$ l'ensemble des mesures de probabilité T-invariante ayant pour marginale $\mathbb{P}$ sur Ω. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_\mathbb{P}(X, T)$, le Théorème 3.2 s'applique avec f la projection sur Y, et nous donne une borne supérieure pour le temps nécessaire à une orbite aléatoire typique $F_{\theta^{k}\omega} \circ ... \circ F_{\theta\omega} \circ F_\omega(y)$ pour revenir proche de son point de départ y.

La stratégie de base de la preuve du Théorème 3.2 provient de [18].

Preuve du Théorème 3.2. Comme toutes les mesures de probabilité sont faiblement diamétralement régulières sur $\mathbb{R}^N$ (voir Lemme 2.15), la mesure $f_*\mu$ est faiblement diamétralement régulière. On peut remarquer que la fonction $\delta(f(\cdot), \varepsilon, \eta)$ dans la définition 2.13 est mesurable pour tout ε et η fixés. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\eta = 4$. On choisit $\delta > 0$ assez petit pour avoir $\mu(G) > \mu(X) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$ où

$$G := \{x \in X : \delta(f(x), \varepsilon, \eta) > \delta\}.$$

Pour tout $r > 0$, $\lambda > 0$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ on définit l'ensemble

$$A_{r,x} := \left\{ y \in X : f(y) \in B(f(x), 4r) \ , \ \tau^f_{4r,p}(y, x) \geq \lambda^{-1} f_*\mu \left(B(f(x), 4r)\right)^{-1} \right\}$$

où $\tau^f_{4r,p}(y,x) := \inf\left\{k > p : d\left(f(T^k y), f(x)\right) < 4r\right\}$ pour $y \in f^{-1}B(f(x),4r)$. Par l'inégalité de Markov on obtient :

$$\mu(A_{r,x}) \leq \lambda f_*\mu\left(B\left(f(x),4r\right)\right) \int_{f^{-1}B(f(x),4r)} \tau^f_{4r,p}(y,x)\, d\mu(y). \tag{3.1}$$

Puisque $\tau^f_{4r,p}(y,x)$ est majoré par le p-ième temps de retour de y dans l'ensemble $f^{-1}B(f(x),4r)$, le lemme de Kač nous donne :

$$\int_{f^{-1}B(f(x),4r)} \tau^f_{4r,p}(y,x)\, d\mu(y) \leq p. \tag{3.2}$$

En utilisant (3.1) et (3.2), on a :

$$\mu(A_{r,x}) \leq p\lambda f_*\mu\left(B\left(f(x),4r\right)\right). \tag{3.3}$$

Si $d(f(x),f(y)) < 2r$ alors

$$\tau^f_{4r,p}(y,x) f_*\mu\left(B\left(f(x),4r\right)\right) \geq \tau^f_{6r,p}(y) f_*\mu\left(B\left(f(y),2r\right)\right). \tag{3.4}$$

Soit $C \subset G$ tel que $(f(x))_{x\in C}$ est un ensemble maximal $2r$-separé pour $f(G)$ (voir Définition 2.16).

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon(r) &:= \mu\left(\left\{y \in G : \tau^f_{6r,p}(y) f_*\mu\left(B\left(f(y),2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{x\in C} \mu\left(\left\{y \in f^{-1}B\left(f(x),2r\right) : \tau^f_{6r,p}(y) f_*\mu\left(B\left(f(y),2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{x\in C} \mu(A_{r,x}) \qquad \text{d'après (3.4)} \\
&\leq p\, r^{2\varepsilon} \sum_{x\in C} f_*\mu\left(B(f(x),4r)\right) \qquad \text{avec } \lambda = r^{2\varepsilon} \text{ dans (3.3)} \\
&\leq p\, r^{\varepsilon} \sum_{x\in C} f_*\mu\left(B(f(x),r)\right) \qquad \text{car } f_*\mu \text{ est fdr et } \eta = 4 \\
&\leq p\, r^{\varepsilon} \qquad \text{d'après la définition de } C.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{n, e^{-n}<\delta} D_\varepsilon(e^{-n}) = \sum_{n > -\log\delta} D_\varepsilon(e^{-n}) \leq p \sum_n e^{-\varepsilon n} < \infty.$$

Ainsi, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour μ-presque tout $x \in G$

$$\tau^f_{6e^{-n},p}(x) f_*\mu\left(B\left(f(x),2e^{-n}\right)\right) \leq e^{2\varepsilon n}$$

pour tout n suffisamment grand. D'où

$$\frac{\log \tau^f_{6e^{-n},p}(x)}{n} \leq 2\varepsilon + \frac{\log f_*\mu(B(f(x),2e^{-n}))}{-n}. \tag{3.5}$$

En remarquant que pour tout $a > 0$ on a :

$$\underline{d}_\mu^f(x) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log f_*\mu\left(B\left(f(x), ae^{-n}\right)\right)}{-n} \quad \text{et} \quad \overline{d}_\mu^f(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log f_*\mu\left(B\left(f(x), ae^{-n}\right)\right)}{-n}$$

$$\underline{R}^f(x) = \lim_{p\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \tau^f_{ae^{-n},p}(x)}{n} \quad \text{et} \quad \overline{R}^f(x) = \lim_{p\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \tau^f_{ae^{-n},p}(x)}{n}$$

et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, le théorème est obtenu en prenant la limite inférieure ou la limite supérieure quand n tend vers l'infini et la limite quand p tend vers l'infini dans (3.5). □

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, pour obtenir des égalités entre taux de récurrence et dimensions locales, des propriétés supplémentaires sur le système sont nécessaires. Nous allons donc étudier la récurrence pour des observations de systèmes mélangeant rapidement.

3.2 Taux de récurrence et dimension dans les systèmes mélangeant rapidement

On introduit maintenant la décroissance des corrélations pour les observations :

Définition 3.5. *Soit $f : X \to Y$ une observation lipschitzienne. $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ a une décroissance des corrélations pour l'observation f super-polynomiale si, pour toutes fonctions lipschitziennes ϕ, ψ de Y dans $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\left| \int_X \phi \circ f(T^n x)\, \psi \circ f(x) d\mu(x) - \int_X \phi \circ f d\mu \int_X \psi \circ f d\mu \right| \leq \|\phi \circ f\| \|\psi \circ f\| \theta_n$$

avec $\lim_{n\to\infty} n^p \theta_n = 0$ pour tout $p > 0$ et où $\|.\|$ est la norme Lipschitz.

On peut en déduire la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soit $f : X \to Y$ une observation Lipschitz. Si $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ a une décroissance des corrélations super-polynomiale alors $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ a une décroissance des corrélations super-polynomiale pour l'observation f.*

Preuve. La preuve est immédiate en remarquant que si f est Lipschitz alors $\psi \circ f$ est Lipschitz pour toute fonction ψ Lipschitz. □

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3.7. *Considérons une observation Lipschitz $f : X \to Y = \mathbb{R}^N$. Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique ayant une décroissance des corrélations pour l'observation f super-polynomiale. Alors on a*

$$\underline{R}^f(x) = \underline{d}_\mu^f(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{R}^f(x) = \overline{d}_\mu^f(x)$$

pour μ-presque tout x tel que $\underline{d}_\mu^f(x) > 0$.

En prenant pour f la fonction identité, on retrouve le Théorème 1.32 sous de plus faibles hypothèses. L'hypothèse principale de notre théorème sur la décroissance des corrélations est satisfaite dans une classe de systèmes ayant un comportement hyperbolique (e.g. [96, 34, 13] et Section 1.2).

Corollaire 3.8. *Considérons une observation lipschitzienne $f : X \to Y = \mathbb{R}^N$. Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique avec une décroissance des corrélations pour l'observation f super-polynomiale. Alors, si $f_*\mu$ est exacte dimensionnelle, on a*

$$\underline{R}^f(x) = \overline{R}^f(x) = \dim_H f_*\mu \qquad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x \in X.$$

Remarque 3.9. On a l'équivalence suivante

$$\begin{array}{c} f_*\mu \text{ est exacte dimensionnelle} \\ \Longleftrightarrow \\ \exists d,\ \underline{d}^f_\mu(x) = \overline{d}^f_\mu(x) = d \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in X. \end{array}$$

Preuve du Corollaire 3.8. Si $\dim_H f_*\mu = 0$, alors la conclusion provient du Théorème 3.2 et de la Proposition 2.4. Dans le cas général, le résultat est juste une combinaison du Théorème 3.7 et de la Proposition 2.4. □

Le Théorème 3.7 ne s'applique pas aux points où $\underline{d}^f_\mu(x) = 0$. Lorsque $\overline{d}^f_\mu(x)$ est aussi égale à 0, ce n'est pas une restriction car le Théoème 3.2 s'applique et nous donne $\overline{R}^f(x) = \underline{R}^f(x) = 0$. Néanmoins, la question reste en suspens quand $\overline{d}^f_\mu(x) \neq \underline{d}^f_\mu(x) = 0$ sur un ensemble de mesure positive. En effet, les hypothèses du Théorème 3.7 ne sont pas assez fortes pour assurer l'existence de la dimension locale pour l'observation presque partout. Le Théorème 2.8 nous garantit cette existence pour une large classe de systèmes et ainsi :

Corollaire 3.10. *Soit $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ une observation lipschitzienne de classe C^∞. Soit $T : X \subset \mathbb{R}^M \to X$ une application préservant une mesure de probabilité absolument continue avec une décroissance des corrélations pour l'observation f super-polynomiale. Alors, R^f existe et appartient à $\{0, 1, ..., \min\{M, N\}\}$ presque partout. Plus précisément, $R^f(x) = \operatorname{rang} d_x f$ pour μ-presque tout $x \in X$.*

Preuve du Corollaire 3.10. On applique le Théorème 3.7 et le Théorème 2.8 quand $d^f_\mu > 0$. Quand $d^f_\mu = 0$, on utilise le Théorème 3.2. □

Remarque 3.11. D'après la Proposition 3.6, les 3 résultats précédents sont valables lorsque le système dynamique $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ a une décroissance des corrélations super-polynomiale.

Malgré certaines similarités avec [88], nous soulignons que la preuve du Théorème 3.7 est relativement différente. En particulier nous ne faisons aucune hypothèse sur l'entropie du système.

Soient $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $\rho > 0$. Soit $X_a := \{x \in X\,,\, \underline{d}^f_\mu(x) > a\}$. Nous posons

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left\{x \in X_a : \forall r \leq \rho,\ f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{r}{2}\right)\right) \leq r^a\right\} \\
G_2 &= \left\{x \in X_a : \forall r \leq \rho,\ f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{r}{2}\right)\right) \geq r^{N+b}\right\} \\
G_3 &= \left\{x \in X_a : \forall r \leq \rho,\ f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{r}{2}\right)\right) \geq f_*\mu\left(B\left(f(x), 4r\right)\right) r^c\right\}.
\end{aligned}$$

On remarque que $G(a,b,c,\rho) := G_1 \cap G_2 \cap G_3$ vérifie

$$\mu(G(a,b,c,\rho)) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} \mu(X_a). \tag{3.6}$$

En effet, par définition de $\underline{d}^f_\mu$, on a $\mu(G_1) \to \mu(X_a)$. De plus, comme $\overline{d}^f_\mu \leq N$ $\mu-$presque partout, $\mu(G_2) \to \mu(X_a)$, et comme $f_*\mu$ est faiblement diamétralement régulière, $\mu(G_3) \to \mu(X_a)$.

Lemme 3.12. *Sous les hypothèses du Théorème 3.7, pour tout $x \in G(a,b,c,\rho)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $r \leq \rho$ on a*

$$\mu\left(f^{-1}B(f(x),r) \cap T^{-n}f^{-1}B(f(x),2r)\right) \leq \frac{L^2}{r^2}\theta_n + r^{-2c} f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{r}{2}\right)\right)^2.$$

Preuve. Soit $\eta_r : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction $\frac{1}{r}$-Lipschitz telle que $1_{[0,r]} \leq \eta_r \leq 1_{[0,2r]}$. Posons $\psi_{x,r}(z) = \eta_r\left(d(f(x),z)\right)$. $\psi_{x,r}$ est clairement $\frac{1}{r}$-Lipschitz. En utilisant l'hypothése sur la décroissance des correlations pour l'observation f de (X,T,μ), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mu\left(f^{-1}B(f(x),r) \cap T^{-n}f^{-1}B(f(x),2r)\right) \leq \int_X \psi_{x,r}(f(y))\psi_{x,2r}(f(T^n y))d\mu(y) \\
&\leq \|\psi_{x,r} \circ f\|\|\psi_{x,2r} \circ f\|\theta_n + \int_X \psi_{x,r}(f(y))d\mu(y) \int_X \psi_{x,2r}(f(y))d\mu(y) \\
&\leq \frac{L^2}{r^2}\theta_n + f_*\mu(B(f(x),2r))f_*\mu(B(f(x),4r)) \\
&\leq \frac{L^2}{r^2}\theta_n + r^{-2c} f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{r}{2}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.13. *Sous les hypothèses du Théorème 3.7,*

$$\underline{R}^f(x) > 0 \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \text{ tel que } \underline{d}^f_\mu(x) > 0.$$

Preuve. Soit $X_+ := \{\underline{d}^f_\mu > 0\}$. Soit $1 > \varepsilon > 0$ et soit $a > 0$ tel que $\mu(X_+) \geq \mu(X_a) > \mu(X_+) - \varepsilon$.

On fixe $b > 0$, $c = \frac{a}{4}$ et pour $\rho > 0$ on considère l'ensemble $G = G(a,b,c,\rho)$ défini au-dessus.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{4/a}} < \rho$. Pour $n \geq n_0$ on définit

$$A_n := \{x \in X : f(T^n x) \in B(f(x), \varepsilon_n)\}.$$

Pour tout $x \in G$ on a

$$f^{-1}B(f(x), \varepsilon_n) \cap A_n \subset f^{-1}B(f(x), \varepsilon_n) \cap T^{-n} f^{-1}B(f(x), 2\varepsilon_n).$$

D'après le Lemme 3.12 et par définition de G on a

$$\begin{aligned} \mu\left(f^{-1}B(f(x), \varepsilon_n) \cap A_n\right) &\leq \frac{L^2}{\varepsilon_n^2}\theta_n + \varepsilon_n^{-2c} f_*\mu(B(f(x), \frac{\varepsilon_n}{2}))^2 \\ &\leq f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon_n}{2}\right)\right)\left[L^2(\varepsilon_n)^{-2-N-b}\theta_n + \varepsilon_n^{a/2}\right]. \end{aligned}$$

Soit $B \subset G$ tel que $(f(x))_{x\in B}$ est un ensemble maximal ε_n-separé pour $f(G)$. Comme la collection $(f^{-1}B(f(x), \varepsilon_n))_{x\in B}$ recouvre G, on a :

$$\begin{aligned} \mu(G \cap A_n) &\leq \sum_{x\in B} \mu\left(f^{-1}B(f(x), \varepsilon_n) \cap A_n\right) \\ &\leq \sum_{x\in B} f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon_n}{2}\right)\right)\left[L^2(\varepsilon_n)^{-2-N-b}\theta_n + \varepsilon_n^{a/2}\right] \\ &\leq L^2(\varepsilon_n)^{-2-N-b}\theta_n + \varepsilon_n^{a/2}. \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \varepsilon_n^{a/2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < \infty$ et puisque la décroissance des corrélations est super-polynomiale, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(G \cap A_n) < +\infty. \tag{3.7}$$

Par le Lemme de Borel-Cantelli et en utilisant (3.6), pour μ-presque tout $x \in X_a$, il existe $n_1(x)$ tel que pour tout $n \geq n_1(x)$, $f(T^n x) \notin B\left(f(x), \frac{1}{n^{4/a}}\right)$. Ainsi, pour μ-presque tout $x \in X_a$, pour $p \geq n_1(x)$ et $n \geq n_1(x)$,

$$\tau^f_{\frac{1}{n^{4/a}},p}(x) > n \tag{3.8}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \underline{R}^f(x) &= \lim_{p\to\infty} \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^f_{r,p}(x)}{-\log r} \\ &= \lim_{p\to\infty} \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \tau^f_{\frac{1}{n^{4/a}},p}(x)}{-\log \frac{1}{n^{4/a}}} \\ &\geq \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log n^{4/a}} = \frac{a}{4} > 0. \end{aligned}$$

Comme on peut choisir ε arbitrairement petit, le lemme est démontré. □

Lemme 3.14. *Soient $a > 0$, $\delta > 0$ et $1 > \varepsilon > 0$. Pour μ-presque tout $x \in X_a$, il existe $r(x) > 0$ tel que pour tout $r \in]0, r(x)[$ et pour tout entier $n \in [r^{-\delta}, f_*\mu\left(B(f(x), r)\right)^{-1+\varepsilon}]$, on a $d\left(f(T^n x), f(x)\right) \geq r$.*

Preuve. Soit $1 > \varepsilon > 0$. On fixe $b > 0$, $c = \frac{a\varepsilon}{4}$ et pour $\rho > 0$ on considère l'ensemble $G = G(a, b, c, \rho)$. Soit $\delta > 0$ et $r \leq \rho$, on définit :

$$A_\varepsilon(r) := \left\{y \in X \,:\, \exists n \in [r^{-\delta}, f_*\mu\left(B(f(y), 3r)\right)^{-1+\varepsilon}] \text{ tel que } d\left(f(T^n y), f(y)\right) < r\right\}.$$

Pour tout $x \in G$ on a :

$$\begin{aligned}
& f^{-1}B(f(x), r) \cap A_\varepsilon(r) \\
= \; & \left\{y \,:\, f(y) \in B(f(x), r), \exists n \in [r^{-\delta}, f_*\mu\left(B(f(y), 3r)\right)^{-1+\varepsilon}], d(f(T^n y), f(y)) < r\right\} \\
\subset \; & \left\{y \,:\, f(y) \in B(f(x), r), \exists n \in [r^{-\delta}, f_*\mu\left(B(f(x), 2r)\right)^{-1+\varepsilon}], d(f(T^n y), f(x)) < 2r\right\} \\
= \; & \bigcup_{r^{-\delta} \leq n \leq f_*\mu(B(f(x), 2r))^{-1+\varepsilon}} f^{-1}B(f(x), r) \cap T^{-n} f^{-1}B(f(x), 2r).
\end{aligned}$$

Soit $k > 1$ tel que $\delta(k-1) - 2 \geq N + 2b$ et $\rho > 0$ tel que $n \geq \rho^{-\delta}$ implique $(k-1)(n+1)^{-k} \geq \theta_n$ (ce qui est possible par définition de θ_n). En posant $I_r = [r^{-\delta}, f_*\mu\left(B(f(x), 2r)\right)^{-1+\varepsilon}] \cap \mathbb{N}$, on a d'après le Lemme 3.12

$$\begin{aligned}
\mu\left(f^{-1}B(f(x), r) \cap A_\varepsilon(r)\right) &\leq \sum_{n \in I_r} \left[\frac{L^2}{r^2}\theta_n + r^{-2c} f_*\mu(B(f(x), \frac{r}{2}))^2\right] \\
&\leq L^2 r^{\delta(k-1)-2} + r^{-2c} f_*\mu(B(f(x), \frac{r}{2}))^{1+\varepsilon} \\
&\leq L^2 r^{N+2b} + r^{\frac{a\varepsilon}{2}} f_*\mu(B(f(x), \frac{r}{2})) \qquad \text{par définition } G \\
&\leq f_*\mu(B(f(x), \frac{r}{2}))\left(L^2 r^b + r^{\frac{a\varepsilon}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Soit $B \subset G$ tel que $(f(x))_{x \in B}$ est un ensemble maximal r-separé pour $f(G)$. Comme la collection $(f^{-1}B\left(f(x), r\right))_{x \in B}$ recouvre G, on a :

$$\begin{aligned}
\mu\left(G \cap A_\varepsilon(r)\right) &\leq \sum_{x \in B} \mu\left(f^{-1}B\left(f(x), r\right) \cap A_\varepsilon(r)\right) \\
&\leq \sum_{x \in B} f_*\mu\left(B\left(f(x), \frac{r}{2}\right)\right)\left(L^2 r^b + r^{\frac{a\varepsilon}{2}}\right) \\
&\leq L^2 r^b + r^{a\varepsilon/2}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\left(G \cap A_\varepsilon(e^{-k})\right) < +\infty$$

et donc par le Lemme de Borel-Cantelli, pour μ-presque tout $y \in G$, il existe $n_1(y)$ tel que pour tout $k \geq n_1(y)$, $y \notin A_\varepsilon(e^{-k})$. Ainsi pour r suffisamment petit, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-k-1} < r \leq e^{-k} \leq e^{-n_1(y)}$. De plus, comme $e^{\delta k} \leq r^{-\delta}$ et comme $3e^{-k} < 3er$, il n'existe aucun entier $n \in [r^{-\delta}, f_*\mu\left(B(f(y), 3er)\right)^{-1+\varepsilon}]$ tel que $d(f(T^n y), f(y)) < r$. Comme $f_*\mu$ est faiblement diamétralement régulière, le facteur $3e$ n'est pas important et le lemme est démontré. □

Preuve du Théorème 3.7. Soit $\zeta > 0$. Comme, d'après le Lemme 3.13, $\underline{R}^f(x) > 0$ pour μ-presque tout $x \in X_+ = \{\underline{d}^f_\mu > 0\}$, il existe $a > 0$ tel que

$$\mu(X_+) \geq \mu(\{\underline{R}^f > a\}) > \mu(X_+) - \zeta.$$

Pour tout $x \in \{\underline{R}^f > a\}$, pour p suffisamment grand et r suffisamment petit, on a

$$\tau^f_{r,p}(x) \geq r^{-a}.$$

Grâce au Lemme 3.14 avec $\delta = a$ et $\varepsilon > 0$, pour μ-presque tout $x \in \{\underline{R}^f > a\}$, si r est suffisamment petit et p suffisamment grand, alors $\tau^f_{r,p}(x) \geq f_*\mu\left(B(f(x), r)\right)^{-1+\varepsilon}$. Ainsi $\underline{R}^f \geq (1-\varepsilon)\underline{d}^f_\mu$ et $\overline{R}^f \geq (1-\varepsilon)\overline{d}^f_\mu$ μ-presque partout sur $\{\underline{R}^f > a\}$. Le théorème est démontré en choisissant $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et ensuite $\zeta > 0$ arbitrairement petit. □

3.3 Sur la nécessité des taux de récurrence non-instantanés

Dans cette partie, nous exposons un exemple simple qui illustre l'utilité des temps de retour non-instantanés.

Soit $\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et σ le shift sur Ω. Fixons un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ 1-approximable (e.g. [44] pour une perspective intéressante) i.e. $\delta(\alpha) = 1$ où

$$\delta(\alpha) = \sup\left\{\delta \geq 1 : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\delta}} \text{ pour une infinité de } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Soit ν une mesure de probabilité invariante ergodique sur Ω. Fixons un ensemble mesurable $A \subset \Omega$ tel que $1 > \nu(A) > 0$ et soit :

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A \\ \alpha & \text{si } \omega \in A. \end{cases} \tag{3.9}$$

Soit $\mathbb{T}^1$ le tore 1-dimensionnel et définissons sur $X := \Omega \times \mathbb{T}^1$ l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} T: & X & \longrightarrow & X \\ & (\omega, y) & \longmapsto & (\sigma\omega, y + \varphi(\omega)). \end{array}$$

Soit Leb la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$. La mesure de probabilité $\mu := \nu \otimes \text{Leb}$ est T-invariante. On étudie ensuite le taux de récurrence du système (X, T, μ) pour l'observation f donnée par la projection sur la seconde variable i.e.

$$\begin{array}{rcl} f: & X & \to \mathbb{T}^1 \\ & (\omega, y) & \to y. \end{array}$$

Tout d'abord, nous avons un premier résultat évident sur la mesure image : comme $f_*\mu = \text{Leb}$ et comme la dimension locale de la mesure de Lebesgue vaut un, la mesure $f_*\mu$ est exacte dimensionnelle et vérifie

$$\forall x \in X,\ d^f_\mu(x) = 1. \tag{3.10}$$

Proposition 3.15. *$R_i^f \neq d_\mu^f$ sur un ensemble de mesure positive. Plus précisément*

$$\forall x = (\omega, y) \in \Omega \backslash A \times \mathbb{T}^1,\ R_i^f(x) = 0.$$

Preuve. Soient $\omega \in \Omega\backslash A$ et $y \in \mathbb{T}^1$, on a

$$\begin{aligned} f\left(T(\omega, y)\right) &= f\left(\sigma\omega, y\right) \qquad \text{car } \omega \notin A \\ &= y \\ &= f\left(\omega, y\right). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $r > 0$, $\tau_r^f(x) = 1$ et donc $R_i^f(x) = 0$. □

Nous avons donc besoin d'introduire les temps de retour non-instantanés pour éviter ce genre de problème.

Proposition 3.16. *$R^f = d_\mu^f$ sur un ensemble de mesure pleine.*

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, soit $q_k(\omega) := \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{1}_A(\sigma^i\omega)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour $x = (\omega, y)$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \tau^f_{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},p}(x) &= \inf\left\{k > p :\ f(T^k x) \in B\left(f(x), \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right\} \\ &= \inf\left\{k > p :\ y + \alpha q_k(\omega) \in B\left(y, \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right\} \\ &= \inf\left\{k > p :\ \|\alpha q_k(\omega)\| \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

où pour $q \in \mathbb{Z}$

$$\|q\alpha\| := \min\left\{|q\alpha - p|\ :\ p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Grâce au choix de α, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on a $\|k\alpha\| \geq \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$. En prenant $n \geq k_0$ on obtient

$$m_{n,\varepsilon} := \inf\left\{q > k_0 :\ \|q\alpha\| \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right\} \geq n. \tag{3.12}$$

Comme ν est ergodique, le Théorème de récurrence de Poincaré nous donne pour ν-presque tout $\omega \in \Omega$

$$q_k(\omega) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{3.13}$$

Ainsi, pour ν-presque tout $\omega \in \Omega$, on peut choisir p suffisamment grand tel que $p \geq k_0$ et $q_p(\omega) \geq k_0$. Si $k \in \mathbb{N}$ vérifie $p \leq k < m_{n,\varepsilon}$, alors $k_0 \leq q_p(\omega) \leq q_k(\omega) \leq k < m_{n,\varepsilon}$ et donc $\|\alpha q_k(\omega)\| > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$. Comme cela est vrai pour tout $k \in [p, ..., m_{n,\varepsilon}]$ on obtient donc $\tau^f_{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},p}(x) \geq m_{n,\varepsilon} \geq n$. Finalement, si $p \geq m_{n,\varepsilon}$, on a forcément

$\tau^f_{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},p}(x) \geq m_{n,\varepsilon} \geq n$. Ainsi, pour μ-presque tout $x = (\omega, y) \in X$, on a

$$\begin{aligned}
\underline{R}^f(x) &= \lim_{p\to\infty} \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \tau^f_{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},p}(x)}{-\log \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log m_{n,\varepsilon}}{-\log \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{1+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Cela étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\underline{R}^f(x) \geq 1.$$

La conclusion provient du Théorème 3.2 et de l'équation (3.10). □

Remarque 3.17. Nous soulignons que cet exemple remplit les conditions du Corollaire 3.8 quand, par exemple, ν est une mesure de Gibbs [45].

Finalement, nous soulignons que dans cet exemple l'application T est un *skew-product* associé à un système dynamique aléatoire. Notre étude sur la récurrence de Poincaré pour les observations nous permet donc de pouvoir étudier la récurrence pour les systèmes dynamiques aléatoires, ce que nous allons traiter dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Récurrence pour les systèmes dynamiques aléatoires

Dans cette partie nous abordons le problème de la récurrence dans les systèmes dynamiques aléatoires. L'étude qui suit résulte d'un travail en collaboration avec Philippe Marie [73], *Recurrence for random dynamical systems*, à paraître dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems.*

Nous allons définir des notions de temps de retour pour les systèmes aléatoires et prouver que sous une hypothèse de mélange le taux aléatoire de récurrence du système est égal à la dimension locale de la mesure stationnaire. Nous donnerons aussi plusieurs exemples, les automorphismes aléatoires du tore et les perturbations aléatoires.

4.1 Introduction

Ces dernières années, de nombreuses études ont été menées sur la récurrence dans les systèmes dynamiques déterministes (e.g. [18, 26, 88]) et sur les systèmes dynamiques aléatoires (e.g. [63, 66, 71, 74]). Nous allons maintenant lier ces deux notions, ce qui, malgré le succès de ces deux théories n'a pas encore été fait. Nous posons en particulier les définitions et les premiers résultats nécessaires pour décrire le comportement récurrent dans le cas aléatoire. Nous allons considérer des systèmes dynamiques aléatoires engendrés par une famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ d'un espace X dans lui même pour lesquels il existe une mesure stationnaire μ. Nous allons introduire de nouvelles quantités qui sont les analogues aléatoires de celles généralement utilisées dans la théorie ergodique déterministe, en particulier des notions de temps de retour et de taux de récurrence.

L'évolution d'un système dynamique aléatoire généré par des transformations aléatoires *i.i.d.* est la suivante : on considère une famille de transformations $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ définies sur une variété riemannienne compacte X et une mesure de probabilité $\mathcal{P}$ sur un espace métrique Λ. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastiques *i.i.d.* de distribution commune $\mathcal{P}$, l'évolution aléatoire d'un état initial $x \in X$ est générée par la réalisation de ce processus $\underline{\lambda} := (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \geq 0$:

$$x_n^{\underline{\lambda}} := T_{\lambda_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{\lambda_0} x.$$

L'ensemble $\{x_n^{\underline{\lambda}}\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ est appelé orbite aléatoire de x associée à la réalisation $\underline{\lambda} \in \Lambda^{\mathbb{N}}$. En fait, nous ne demandons pas que le processus $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ soit indépendant, nous utilisons une hypothèse plus faible que nous expliquerons ensuite et qui nous permet de travailler avec une classe plus large de systèmes dynamiques aléatoires. Nous nous concentrons sur les systèmes pour lesquels il existe une mesure stationnaire. Dans le cas *i.i.d.* une mesure stationnaire est une mesure de probabilité μ sur X telle que :

$$\mu(A) = \int_\Lambda \mu(T_\lambda^{-1} A) d\mathcal{P}(\lambda)$$

pour tout borélien A de X. Comme nous l'avons déjà expliqué, la mesure μ joue le rôle de la mesure invariante, il est alors naturel d'aborder l'étude quantitative de la récurrence aléatoire vis à vis de cette mesure et de voir si les résultats déterministes sont toujours vrais. Il y a deux façons d'étudier le comportement d'un système

dynamique aléatoire, le premier consiste à fixer une réalisation du *bruit* et à décrire le comportement de l'orbite ainsi définie, le second consiste à étudier le système dans son ensemble, en incluant le bruit au même titre que l'état initial x. La première étude est une étude statistique concentrée sur l'espace des phases X, alors que la seconde est une étude statistique globale, à la fois sur l'espace de la composante aléatoire Ω et sur l'espace des états du système X. Dans la littérature, le premier point de vue est appelé *quenched* (ou à réalisation fixée), le second, *annealed* (ou moyenné). Dans l'esprit de la théorie ergodique, le cas *annealed* permet une meilleure compréhension globale du système. Le premier temps de retour *annealed*, que l'on appellera aussi moyenné est défini par :

$$\mathbf{T}_B(x) := \int_\Omega \inf\{n > 0 : T_{\vartheta^{n-1}\omega} \circ \ldots \circ T_\omega x \in B\} d\mathbb{P}(\omega).$$

Cette quantité nous apparaît comme la meilleure à étudier pour obtenir des résultats quantitatifs pertinents sur le comportement récurrent des systèmes dynamiques aléatoires. Nous justifierons le choix de ces définitions en appliquant les résultats déterministes tels que le théorème de Poincaré ou le lemme de Kač, à la représentation du système aléatoire par le *skew-product*. Ceci nous permettra, entre autres choses, de se rendre compte que le premier temps de retour moyenné apparaît de façon naturelle dans cette étude.

Ensuite, en utilisant les résultats du Chapitre 3 nous établirons un lien entre les temps de retour aléatoires et la dimension locale de la mesure stationnaire du système, ce qui constitue une première étape dans l'étude de la récurrence des dynamiques non-déterministes.

Finalement nous donnerons des exemples. Tout d'abord deux exemples de systèmes aléatoires définis par des automorphismes du tore : le premier sera un système non i.i.d où les applications sont choisies aléatoirement suivant un processus de Markov, le second utilisera des automorphismes hyperboliques, choisis de façon indépendante. Nous considérerons ensuite le cas où le système dynamique aléatoire définit une petite perturbation stochastique d'une dynamique initiale dans deux cas traités par Baladi et Young [14] : les applications dilatantes du cercle et les applications dilatantes par morceaux de l'intervalle.

4.2 Systèmes dynamiques aléatoires et temps de retour

Nous allons tout d'abord rappeler certaines généralités sur les systèmes dynamiques aléatoires. Soient Ω un espace métrique muni de sa σ-algèbre de Borel $\mathcal{B}(\Omega)$ et $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité représentant l'espace de l'aléa. Soit ϑ une application préservant la mesure $\mathbb{P}$, représentant l'évolution temporelle de l'aléa. Ω indexe une famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ d'une variété riemannienne compacte X dans elle-même.

Définition 4.1. *Un système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$ sur X de composante aléatoire $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ est généré par les applications T_ω, l'application $(\omega, x) \to T_\omega x$ doit*

être mesurable et vérifier la propriété du cocycle :

$$T_\omega^{n+m} = T_{\vartheta^m\omega}^n \circ T_\omega^m.$$

Chaque réalisation $\omega \in \Omega$ de la composante aléatoire du système définit une loi d'évolution aléatoire, sous l'action de laquelle l'évolution d'un état initial $x \in X$ est donnée par son orbite aléatoire, définie par l'ensemble $\{x_n^\omega\}$, où pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n^\omega := T_{\vartheta^{n-1}\omega} \circ \cdots \circ T_\omega x := T_\omega^n x.$$

Une représentation utile de tels systèmes est celle donnée par l'application suivante :

$$\begin{aligned} S: \quad \Omega \times X &\longrightarrow \Omega \times X \\ (\omega, x) &\longmapsto (\vartheta\omega, T_\omega x). \end{aligned}$$

Définition 4.2. *On appelle S le skew-product associé au système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$.*

Comme $S^n(\omega, x) = (\vartheta^n\omega, T_\omega^n x)$, on peut voir directement que pour un couple $(\omega, x) \in \Omega \times X$ fixé , l'itération du skew-product va générer sur sa seconde coordonnée l'orbite aléatoire de x associée à la réalisation ω. Ceci nous amène naturellement à considérer les mesures invariantes du skew-product pour étudier le comportement du système dynamique aléatoire. Prenons donc une mesure de probabilité ν invariante pour S et définissons la projection canonique sur Ω :

$$\begin{aligned} \pi_\Omega : \Omega \times X &\to \Omega \\ (\omega, x) &\mapsto \omega. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $S_*\nu = \nu$ nous devons avoir $\vartheta_*((\pi_\Omega)_*\nu) = (\pi_\Omega)_*\nu$ et donc la mesure marginale de ν sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ doit être invariante pour la dynamique ϑ. Dans notre situation, l'aléa étant donné a priori [10], il convient de se limiter aux mesures invariantes qui vérifient $(\pi_\Omega)_*\nu = \mathbb{P}$.

Définition 4.3. *Une mesure de probabilité ν est invariante pour le système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$ si :*

(i) $S_*\nu = \nu$

(ii) $(\pi_\Omega)_*\nu = \mathbb{P}$.

A partir de maintenant, nous étudierons les systèmes dynamiques aléatoires dont la mesure invariante du skew-product est une mesure produit $\nu = \mathbb{P} \otimes \mu$. Ce cas est assez général car il inclut le cas où les applications sont choisies indépendamment et avec la même distribution $\mathcal{P}$. On retrouve cette situation en posant $\mathbb{P} = \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$, $\vartheta = \sigma$, le shift gauche défini sur $\Omega = \Lambda^{\mathbb{N}}$ et $T_\omega = T_{\lambda_0}$ pour $\omega = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...)$ dans la définition du skew-product.

Définition 4.4. *Une mesure μ est dite stationnaire pour le système dynamique aléatoire si la mesure $\nu = \mathbb{P} \otimes \mu$ est invariante pour le skew-product.*

Ce vocabulaire vient du fait que les applications aléatoires i.i.d. génèrent un processus de Markov, c'est-à-dire, une orbite aléatoire est un processus de Markov dont la transition de probabilité est donnée par :

$$P(x, B) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \ : \ T_\omega x \in B\}. \tag{4.1}$$

Une vaste littérature est consacrée à cette étude de processus de Markov, voir par exemple [23, 24, 42]. Cette propriété des orbites aléatoires est d'un grand intérêt pour cette étude d'un point de vue probabiliste. On peut remarquer que, sous de faibles hypothèses, pour les systèmes dynamiques aléatoires i.i.d. de telles mesures existent toujours (par exemple si T_ω est continue pour tout $\omega \in \Omega$ [66]).

Proposition 4.5. *Si $\mathcal{T} = (M, \{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \sigma, \mathcal{P})$ est un système dynamique aléatoire i.i.d., alors une mesure de probabilité μ est stationnaire si et seulement si pour tout borélien B elle vérifie (voir [10] par exemple) :*

$$\int_\Lambda (T_\lambda)_* \mu(B) d\mathcal{P}(\lambda) = \mu(B).$$

C'est-à-dire qu'une mesure stationnaire est une mesure qui est invariante en moyenne sur la composante aléatoire.

Ainsi, l'étude du système dynamique déterministe $(\Omega \times X, S, \mathbb{P} \otimes \mu)$ va nous fournir de nombreuses informations sur le comportement des orbites aléatoires.

Introduisons le concept de temps de retour aléatoire. On considère X une variété riemannienne compacte. Puisque $(\Omega \times X, S, \mathbb{P} \otimes \mu)$ est un système dynamique déterministe, nous pouvons définir le premier temps de retour dans un borélien $A \times B \subset \Omega \times X$ pour $(\omega, x) \in A \times B$ par :

$$\tau^S_{A\times B}(\omega, x) = \inf\{k > 0 \ : \ S^k(\omega, x) \in A \times B\}.$$

En choisissant $A = \Omega$ nous remarquons que $S^n(\omega, x) \in \Omega \times B$ si et seulement si $T^n_\omega x \in B$. Ce qui conduit naturellement à la définition suivante :

Définition 4.6. *Pour $\omega \in \Omega$ fixé le premier temps de retour aléatoire (quenched) dans un sous-ensemble mesurable $B \subset X$ de l'orbite aléatoire partant de $x \in B$ associé à la réalisation ω est :*

$$\begin{aligned} \tau^\omega_B(x) &= \tau^S_{\Omega\times B}(\omega, x) \\ &= \inf\{k > 0 \ : \ T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ \cdots \circ T_\omega x \in B\}. \end{aligned}$$

Remarquons que le théorème de récurrence de Poincaré appliqué au *skew-product* assure que cette quantité est finie presque partout.

Supposons que X est muni d'une métrique d. Pour $\omega \in \Omega$, nous nous intéressons au comportement quand $r \to 0$ du temps de retour d'un point $x \in X$ dans la boule ouverte $B(x, r)$ associé à une réalisation ω défini par :

$$\begin{aligned} \tau^\omega_r(x) &:= \inf\{k > 0 : T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ ... \circ T_\omega x \in B(x, r)\} \\ &= \inf\{k > 0 : d(T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ ... \circ T_\omega x, x) < r\}. \end{aligned}$$

Définition 4.7. *Le système aléatoire $\mathcal{T}$ sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ est dit aléatoirement-apériodique si :*

$$\mathbb{P} \otimes \mu \left(\{(\omega, x) \in \Omega \times X : \exists n \in \mathbb{N},\, T_{\vartheta^{n-1}\omega} \circ \ldots \circ T_\omega x = x\} \right) = 0.$$

Pour éviter certains problèmes avec le premier temps de retour pour les systèmes qui ne sont pas aléatoirement-apériodiques, nous avons besoin d'introduire les temps de retour non-instantanés :

Définition 4.8. *Soit $r > 0$.*

- *Pour $x \in X$, $\omega \in \Omega$ et $p \in \mathbb{N}$ nous définissons le p-ième temps de retour non-instantané associé à la réalisation ω par :*

$$\tau^\omega_{r,p}(x) := \inf \{k > p \ : \ d(T_{\vartheta^k\omega} \circ ... \circ T_\omega x, x) < r\},$$

- *les taux de récurrence inférieur et supérieur associés :*

$$\underline{R}^\omega(x) := \lim_{p\to\infty} \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_{r,p}(x)}{-\log r} \qquad et \qquad \overline{R}^\omega(x) := \lim_{p\to\infty} \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_{r,p}(x)}{-\log r}.$$

Exemple 4.9. Dans la Section 3.3 du Chapitre 3 nous avons illustré la nécessité des temps de retour non-instantanés. Cet exemple peut en fait être vu comme un système dynamique aléatoire, nous rappelons ici une version simplifiée de cet exemple du point de vu des systèmes dynamiques aléatoires. Considérons $T_0 = \mathcal{R}_\alpha$ la rotation irrationnelle du cercle d'angle α et T_1 l'application identité définie sur le cercle et construisons le système dynamique aléatoire consistant à choisir à chaque étape T_0 ou T_1 de façon équiprobable, *i.e.* $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ et de façon indépendante. Alors ce système n'est pas aléatoirement apériodique et $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \ : \ \tau^\omega_r(x) = 1\} = P(1) = \frac{1}{2}$ pour tout $r > 0$. Ainsi, à chaque itéré, la moitié des points ne bougent pas (soit un 2^n-ième des points au bout de n étapes). Cependant, presque tous les points finiront par être soumis à la rotation et leur dynamique deviendra intéressante pourvu que l'on attende suffisamment longtemps.

4.3 Récurrence aléatoire à réalisation fixée

Théorème 4.10. *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ. Pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$*

$$\underline{R}^\omega(x) \le \underline{d}_\mu(x) \qquad et \qquad \overline{R}^\omega(x) \le \overline{d}_\mu(x).$$

Preuve. Nous montrons ce théorème en utilisant le Théorème 3.2, appliqué au système $(\Omega \times X, \mathcal{B}(\Omega \times X), S, \mathbb{P} \otimes \mu)$ et à l'observation "projection" f définie par :

$$\begin{aligned} f \ : \Omega \times X &\longrightarrow X \\ (\omega, x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$ nous avons les correspondances suivantes avec le Chapitre 3. Pour le temps de retour :

$$\tau^f_{r,p}(\omega, x) = \tau^\omega_{r,p}(x)$$

pour la mesure image :

$$f_*(\mathbb{P} \otimes \mu) = \mu$$

et pour les dimensions ponctuelles de l'observation :

$$\underline{d}^f_{\mathbb{P}\otimes\mu}(x) = \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{d}^f_{\mathbb{P}\otimes\mu}(x) = \overline{d}_\mu(x).$$

□

Ce théorème reste vrai pour le premier temps de retour :

Corollaire 4.11. *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ. Pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r} \leq \underline{d}_\mu(x) \qquad \textit{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r}(x) \leq \overline{d}_\mu(x).$$

Preuve. Puisque pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$ nous avons $\tau^\omega_r(x) \leq \tau^\omega_{r,p}(x)$ alors,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r} \leq \underline{R}^\omega(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r}(x) \leq \overline{R}^\omega(x).$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 4.10 pour conclure. □

Même si ces inégalités peuvent être strictes, nous nous intéressons aux cas où les égalités sont satisfaites. Pour cela nous allons avoir besoin d'une hypothèse supplémentaire.

Définition 4.12. *Le système aléatoire muni d'une mesure stationnaire μ a une décroissance super-polynomiale des corrélations si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et ψ, φ fonctions Lipschitz de X dans $\mathbb{R}$:*

$$\left| \int_X \int_\Omega \psi(T_{\vartheta^n\omega} \circ \ldots \circ T_\omega x)\varphi(x) d\mathbb{P}(\omega) d\mu(x) - \int_X \psi d\mu \int_X \varphi d\mu \right| \leq \|\psi\| \|\varphi\| \theta_n$$

avec $\lim_{n\to\infty} n^p \theta_n = 0$ pour tout $p > 0$ et où $\|.\|$ est la norme de Lipschitz.

Il est important de noter le lien entre la décroissance des corrélations pour le système dynamique aléatoire et la décroissance des corrélations pour l'observation "projection" du skew-product :

Remarque 4.13. Soit l'observation f définie par :

$$\begin{aligned} f \ : \Omega \times X &\longrightarrow X \\ (\omega, x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le système dynamique aléatoire $\mathcal{T}$ sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ a une décroissance des corrélations super-polynomiale.

(ii) Le système dynamique $(\Omega \times X, \mathcal{B}(\Omega \times X), S, \mathbb{P} \otimes \mu)$ a une décroissance des corrélations pour l'observation f super-polynomiale.

Théorème 4.14. *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ dont la décroissance des corrélations est super-polynomiale alors :*

$$\underline{R}^{\omega}(x) = \underline{d}_{\mu}(x) \qquad et \qquad \overline{R}^{\omega}(x) = \overline{d}_{\mu}(x)$$

pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$ tel que $\underline{d}_{\mu}(x) > 0$.

Preuve. Comme précédemment la preuve est directe en utilisant le Théorème 3.8 appliqué à $(\Omega \times X, \mathcal{B}(\Omega \times X), S, \mathbb{P} \otimes \mu)$ avec l'observation f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \Omega \times X & \longrightarrow & X \\ (\omega, x) & \longmapsto & x \end{array}$$

et en utilisant la Remarque 4.13 sur la décroissance des corrélations. □

La proposition suivante établit que dans le cas d'un système aléatoirement apériodique, il n'est pas nécessaire de considérer les temps de retour non-instantanés.

Proposition 4.15. *Si le système est aléatoirement-apériodique alors pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout (ω, x) et pour tout p, $\tau^{\omega}_{r,p}(x) = \tau^{\omega}_{r}(x)$ pour r assez petit (dépendant de x et de ω).*

Preuve. Puisque le système est aléatoirement apériodique, pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$ et pour tout $k > 0$, $d(T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ \ldots \circ T_{\omega} x, x) > 0$ et ainsi $\tau^{\omega}_{r}(x) \underset{r \to 0}{\to} +\infty$. Donc, pour tout $p > 0$, il existe $r(p, x, \omega)$ tel que quel que soit $r \leq r(p, x, \omega)$, nous avons $\tau^{\omega}_{r}(x) > p$. Ainsi,

$$\forall r \leq r(p, x, \omega), \quad \inf\{k > 0 \ : \ d(T^{k}_{\omega} x, x) < r\} = \inf\{k > p \ : \ d(T^{k}_{\omega} x, x) < r\}.$$

□

En conséquence, nos théorèmes s'appliquent pour le premier temps de retour :

Corollaire 4.16. *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ, aléatoirement-apériodique et dont la décroissance des corrélations est super-polynomiale, alors :*

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log \tau^{\omega}_{r}(x)}{-\log r} = \underline{d}_{\mu}(x) \qquad et \qquad \limsup_{r \to 0} \frac{\log \tau^{\omega}_{r}(x)}{-\log r} = \overline{d}_{\mu}(x)$$

pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$ tel que $\underline{d}_{\mu}(x) > 0$.

4.4 Récurrence aléatoire moyennée

Supposons que le système aléatoire est ergodique, alors nous pouvons appliquer le lemme de Kač au *skew-product* et obtenir :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times B} \tau^S_{\Omega\times B}(\omega,x)\, d\mathbb{P}\otimes\mu(\omega,x) &= \int_{\Omega\times B} \tau^\omega_B(x)\, d\mathbb{P}\otimes\mu(\omega,x)\\ &= \int_B\int_\Omega \tau^\omega_B(x)\, d\mathbb{P}(\omega)d\mu(x)\\ &= 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

ce qui est une raison pour étudier la quantité :

$$\int_\Omega \tau^\omega_B(x)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Celle-ci apparaît donc naturellement et inclut la composante aléatoire du système dans sa totalité, alors que, comme nous l'avons précisé en introduction, le temps de retour *quenched* traite des orbites réalisation par réalisation vis à vis du bruit. Cette quantité est d'autant plus naturelle que les quantités moyennées apparaissent à de nombreuses reprises dans l'étude des systèmes i.i.d (par exemple pour les opérateurs de transfert ou d'évolution et pour les mesures stationnaires).

Définition 4.17. *Soit B un borélien de X. Le premier temps de retour aléatoire (moyenné ou annealed) pour un point $x \in B$ dans le borélien B est :*

$$\mathbf{T}_B(x) = \int_\Omega \tau^\omega_B(x)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Avec cette définition et (4.2), nous obtenons :

Lemme 4.18. *(Lemme de Kač aléatoire) Si le système aléatoire est ergodique pour la mesure stationnaire μ, alors :*

$$\int_B \mathbf{T}_B(x)d\mu(x) = 1.$$

Comme précédemment nous nous intéressons au comportement du temps de retour de x dans $B(x,r)$ lorsque $r \to 0$, ce qui nous amène à poser :

Définition 4.19. *Soient $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Le p-ième temps de retour non-instantané aléatoire est :*

$$\mathbf{T}_{r,p}(x) := \int_\Omega \tau^\omega_{r,p}(x)d\mathbb{P}(\omega).$$

Lorsque $p = 0$, nous notons ce temps de retour $\mathbf{T}_r(x)$. Les taux de récurrence non-instantanés aléatoires sont alors :

$$\underline{\mathbf{R}}(x) := \lim_{p\to\infty}\liminf_{r\to 0}\frac{\log \mathbf{T}_{r,p}(x)}{-\log r} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) := \lim_{p\to\infty}\limsup_{r\to 0}\frac{\log \mathbf{T}_{r,p}(x)}{-\log r}.$$

Nous posons maintenant nos principaux résultats :

Théorème 4.20. *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ. Pour μ-presque tout $x \in X$:*

$$\underline{\mathbf{R}}(x) \leq \underline{d}_\mu(x) \qquad et \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) \leq \overline{d}_\mu(x).$$

Ces inégalités restent vraies pour le premier temps de retour en remarquant comme plus haut que pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{T}_r(x) \leq \mathbf{T}_{r,p}(x)$. En utilisant le Théorème 4.20, on a :

Corollaire 4.21. *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ. Pour μ-presque tout $x \in X$:*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \leq \underline{d}_\mu(x) \qquad et \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \leq \overline{d}_\mu(x).$$

Théorème 4.22. *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \vartheta, \mathbb{P})$ muni d'une mesure stationnaire μ. Si de plus le système aléatoire a une décroissance super-polynomiale des corrélations alors :*

$$\underline{\mathbf{R}}(x) = \underline{d}_\mu(x) \qquad et \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) = \overline{d}_\mu(x)$$

pour μ-presque tout x tel que $\underline{d}_\mu(x) > 0$.

Comme pour le cas *quenched*, le cas non-périodique permet d'obtenir l'égalité pour le premier temps de retour :

Proposition 4.23. *Si le système a une décroissance super-polynomiale des corrélations et est aléatoirement apériodique, alors :*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} = \underline{d}_\mu(x) \qquad et \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} = \overline{d}_\mu(x)$$

pour μ-presque tout x tel que $\underline{d}_\mu(x) > 0$.

On donnera la preuve de cette proposition dans la suite.

4.5 Preuves des théorèmes

Preuve du théorème 4.20. D'après le Lemme 2.15 nous savons que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, toute mesure de probabilité est faiblement diamétralement régulière sur $\mathbb{R}^d$ et donc la mesure μ est fdr sur X. Dans la définition de fdr, soulignons que la fonction $\delta(\cdot, \varepsilon, \eta)$ peut être rendue mesurable pour tous ε et η. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\eta = 4$. On choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $\mu(X_\delta) > \mu(X) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$ où :

$$X_\delta := \{x \in X : \delta(x, \varepsilon, \eta) > \delta\}.$$

Dans le but d'utiliser le lemme de Borel-Cantelli, nous prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.24. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_\varepsilon(e^{-n})) < \infty$ *où pour* $r > 0$ *:*

$$A_\varepsilon(r) := \left\{ y \in X_\delta : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon} \right\}.$$

Preuve du Lemme 4.24. Soient $p \in \mathbb{N}$, $r > 0$ et $C \subset X_\delta$ un ensemble $2r$-séparé maximal pour X_δ.

$$\begin{aligned} \mu(A_\varepsilon(r)) &= \mu\left(\left\{ y \in X_\delta : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon} \right\}\right) \\ &\leq \sum_{x\in C} \mu\left(\left\{ y \in B\left(x, 2r\right) : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon} \right\}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pour $y \in B(x, 4r)$, nous définissons :

$$\tau^\omega_{4r,p}(y, x) := \inf\left\{k > p : d(T_{\vartheta^k\omega} \circ \cdots \circ T_\omega y, x) < 4r\right\}$$

et :

$$\mathbf{T}_{4r,p}(y, x) := \int_\Omega \tau^\omega_{4r,p}(y, x) d\mathbb{P}(\omega).$$

Si $d(x, y) < 2r$, pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons :

$$\tau^\omega_{4r,p}(y, x) \geq \tau^\omega_{6r,p}(y)$$

et alors :

$$\mathbf{T}_{4r,p}(y, x)\mu\left(B\left(x, 4r\right)\right) \geq \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right). \tag{4.4}$$

Donc pour tout $x \in C$

$$\mu\left(\left\{ y \in B\left(x, 2r\right) : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon} \right\}\right) \leq \mu(D_{r,x}) \tag{4.5}$$

où

$$D_{r,x} := \left\{ y \in B\left(x, 4r\right) : \mathbf{T}_{4r,p}(y, x)\mu\left(B\left(x, 4r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon} \right\}.$$

L'inégalité de Markov donne :

$$\mu(D_{r,x}) \leq r^{2\varepsilon}\mu\left(B\left(x, 4r\right)\right) \int_{B(x,4r)} \mathbf{T}_{4r,p}(y, x)\, d\mu(y) \tag{4.6}$$

$$= r^{2\varepsilon}\mu\left(B\left(x, 4r\right)\right) \int_{B(x,4r)\times\Omega} \tau^\omega_{4r,p}(y, x)\, d\mu(y) d\mathbb{P}(\omega). \tag{4.7}$$

Puisque $\tau^\omega_{4r,p}(y, x)$ est borné par le p-ième temps de retour de (y, ω) dans $B(x, 4r)\times\Omega$, nous concluons par le lemme de Kač que :

$$\int_{B(x,4r)\times\Omega} \tau^\omega_{4r,p}(y, x)\, d\mu(y) d\mathbb{P}(\omega) \leq p. \tag{4.8}$$

En utilisant (4.6) et (4.8), nous avons :

$$\mu(D_{r,x}) \leq pr^{2\varepsilon}\mu\left(B\left(x, 4r\right)\right). \tag{4.9}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\mu(A_\varepsilon(r)) &\leq \sum_{x\in C}\mu(D_{r,x}) \qquad \text{par (4.3) et (4.5)}\\
&\leq p\, r^{2\varepsilon}\sum_{x\in C}\mu\left(B(x,4r)\right) \qquad \text{par (4.9)}\\
&\leq p\, r^{\varepsilon}\sum_{x\in C}\mu\left(B(x,r)\right) \qquad \text{puisque } \mu \text{ est fdr,}\\
&\leq p\, r^{\varepsilon} \qquad \text{par définition de } C.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{n,e^{-n}<\delta}\mu(A_\varepsilon(e^{-n})) = \sum_{n>-\log\delta}\mu(A_\varepsilon(e^{-n})) \leq p\sum_n e^{-\varepsilon n} < \infty.$$

□

Alors grâce au lemme de Borel-Cantelli, pourμ-presque tout $x \in X_\delta$

$$\mathbf{T}_{6e^{-n},p}(x)\mu\left(B(x,2e^{-n})\right) \leq e^{2\varepsilon n}$$

pour tout n assez grand. Alors :

$$\frac{\log \mathbf{T}_{6e^{-n},p}(x)}{n} \leq 2\varepsilon + \frac{\log\mu(B(x,2e^{-n}))}{-n}. \tag{4.10}$$

On peut facilement prouver que pour $a > 0$ nous avons :

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{n\to\infty}\frac{\log\mu\left(B\left(x,ae^{-n}\right)\right)}{-n} \quad \text{et} \quad \overline{d}_\mu(x) = \limsup_{n\to\infty}\frac{\log\mu\left(B\left(x,ae^{-n}\right)\right)}{-n}$$

$$\underline{\mathbf{R}}(x) = \lim_{p\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\frac{\log\mathbf{T}_{ae^{-n},p}(x)}{n} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{R}}(x) = \lim_{p\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\mathbf{T}_{ae^{-n},p}(x)}{n}$$

en prenant les limites inférieure et supérieure puis la limite sur p dans (4.10) nous avons ce que nous voulons puisque ε peut être choisi arbitrairement petit. □

Preuve du théorème 4.22. Soit $x \in X$ tel que $\underline{R}^\omega(x) \geq \underline{d}_\mu(x) > 0$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, l'existence d'un tel x est assuré par le Théorème 4.14. Soit $0 < \varepsilon < 1$, d'après la preuve du Théorème 3.8, nous savons que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > N$, $\varliminf_{r\to 0}\mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) = +\infty$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\left\{\omega\in\Omega:\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall p>N,\ \liminf_{r\to 0}\mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) = +\infty\right\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1. \tag{4.11}$$

Notons :

$$\tilde{\Omega}(N) := \left\{\omega\in\Omega\ :\ \forall p>N,\ \liminf_{r\to 0}\mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) = +\infty\right\}.$$

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}(N_1)) > 0$, sinon $\mathbb{P}(\cup_{N\in\mathbb{N}}\tilde{\Omega}(N)) \leq \sum_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\tilde{\Omega}(N)) = 0$ ce qui contredirait le fait que :

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \tilde{\Omega}(N)) \\ &= \mathbb{P}(\Big\{\omega \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^{\omega}_{r,p}(x) = +\infty\Big\}). \end{aligned}$$

Soit $p > N_1$, nous avons alors :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^{\omega}_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) = +\infty. \tag{4.12}$$

De plus le lemme de Fatou nous donne :

$$\begin{aligned} +\infty = \int_{\tilde{\Omega}} \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^{\omega}_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) &\leq \int_{\Omega} \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^{\omega}_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \liminf_{r\to 0} \int_{\Omega} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^{\omega}_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_{r,p}(x). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_{r,p}(x) = \limsup_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_{r,p}(x) = +\infty.$$

Finalement pour $p > N_1$ et $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour $r < R$, $\mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^{\Omega}_{r,p}(x) \geq M$ et donc :

$$(1-\varepsilon)\frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq \frac{M}{\log r} - \frac{\log \tau^{\Omega}_{r,p}(x)}{\log r}$$

ce qui conduit à :

$$\underline{\mathbf{R}}(x) \geq (1-\varepsilon)\underline{d}_{\mu}(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) \geq (1-\varepsilon)\overline{d}_{\mu}(x).$$

et puisque ces inégalités sont vraies pour tout $0 < \varepsilon < 1$:

$$\underline{\mathbf{R}}(x) \geq \underline{d}_{\mu}(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) \geq \overline{d}_{\mu}(x). \tag{4.13}$$

Par le théorème 4.14, l'équation (4.13) est satisfaite pour μ-presque tout x tel que $\underline{d}_{\mu}(x) > 0$ et on conclut grâce au théorème 4.20. □

Preuve de la Proposition 4.23. Soit $x \in X$ tel que

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^{\omega}_{r}(x)}{-\log r} \geq \underline{d}_{\mu}(x) > 0$$

pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$; l'existence d'un tel x est assurée par le Corollaire 4.16. Soit $0 < \varepsilon < 1$, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ nous avons :

$$\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^{\omega}_{r}(x) = +\infty$$

et donc

$$\int_\Omega \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau_r^\omega(x)d\mathbb{P}(\omega) = +\infty. \tag{4.14}$$

Le lemme de Fatou nous donne

$$\begin{aligned} +\infty = \int_\Omega \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau_r^\omega(x)d\mathbb{P}(\omega) &\leq \liminf_{r\to 0} \int_\Omega \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau_r^\omega(x)d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x). \end{aligned}$$

Et nous obtenons

$$\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x) = \limsup_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x) = +\infty.$$

Donc, il existe $R > 0$ tel que pour tout $r < R$ nous avons $\mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x) \geq M$ il suit donc que

$$(1-\varepsilon)\frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq \frac{M}{\log r} - \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r}$$

et

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq (1-\varepsilon)\underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq (1-\varepsilon)\overline{d}_\mu(x).$$

Ces inégalités étant satisfaites pour ε arbitrairement petit, nous avons

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq \overline{d}_\mu(x). \tag{4.15}$$

Donc (4.15) est satisfaite pour μ-presque tout x tel que $\underline{d}_\mu(x) > 0$ d'après le Corollaire 4.16. Le Corollaire 4.21 nous donne le résultat. □

Nous donnons maintenant plusieurs exemples.

4.6 Applications aux automorphismes aléatoires du tore

1. **Applications linéaires aléatoires non-i.i.d :**
   Soit $X = \mathbb{T}^1$ le tore unidimensionnel. On considère deux applications linéaires qui préserve la mesure de Lebesgue *Leb* sur X.

$$\begin{array}{rcl} T_1 : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} T_2 : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & 3x. \end{array}$$

   L'orbite aléatoire est construite en choisissant l'une de ces deux applications suivant un processus de Markov de matrice de transition :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

En fait, ce système dynamique aléatoire peut être représenté par le *skew-product* suivant :

$$\begin{array}{rcl} S : \Omega \times X & \longrightarrow & \Omega \times X \\ (\omega, x) & \longmapsto & (\vartheta(\omega), T_\omega x) \end{array}$$

avec $\Omega = [0,1]$, $T_\omega = T_1$ si $\omega \in [0, 2/5)$, $T_\omega = T_2$ si $\omega \in [2/5, 1]$ où ϑ est l'application linéaire par morceaux suivante :

$$\vartheta(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{si} \quad \omega \in [0, 1/5[\\ 3\omega - 1/5 & \text{si} \quad \omega \in [1/5, 2/5[\\ 2\omega - 4/5 & \text{si} \quad \omega \in [2/5, 3/5[\\ 3\omega/2 - 1/2 & \text{si} \quad \omega \in [3/5, 1]. \end{cases}$$

Puisque ϑ préserve la mesure de Lebesgue $\mathbb{P} = Leb$, le *skew-product* S est $Leb \otimes Leb$-invariant et donc la mesure de Lebesgue Leb est stationnaire pour ce système aléatoire. On peut voir que S a une décroissance exponentielle des corrélations (conjugué à un shift) [13], et donc les théorèmes 4.14 et 4.22 s'appliquent. Il est facile de voir que ce système est aléatoirement-apériodique et donc pour $Leb \otimes Leb$-presque tout $(\omega, x) \in [0,1] \times \mathbb{T}^1$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^\omega(x)}{-\log r} = 1$$

et pour Leb-presque tout $x \in \mathbb{T}^1$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{-\log r} = 1.$$

2. **Automorphismes hyperboliques aléatoires du Tore :**
Soit $X = \mathbb{T}^2$, rappelons qu'un automorphisme hyperbolique du tore est une application $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ agissant par la matrice A, $x \mapsto Ax \pmod 1$, où les entrées de la matrice A sont des entiers. Les valeurs propres de A sont de module différent de 1 et $\det A = \pm 1$. Nous nous restreignons au cas où les entrées sont positives même s'il est toujours possible de considérer des cas plus généraux sous une hypothèse d'invariance d'un cône [12]. Soient $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\vartheta = \sigma$ le shift à gauche sur Ω.
On considère A_0, A_1 deux automorphismes hyperboliques aux entrées positives. A_0 sera choisi avec une probabilité q et A_1 avec une probabilité $1-q$, i.e. $\mathbb{P} = P^{\mathbb{N}}$ avec $P(0) = q$ et $P(1) = 1-q$. Alors il est prouvé dans [12] que la mesure de Lebesgue est stationnaire et que la décroissance des corrélations se fait exponentiellement vite pour des observables Lipschitz (voir [12]) f et g telles que : $\int_{\mathbb{T}^2} f(x)dx = \int_{\mathbb{T}^2} g(x)dx = 0$.

Proposition 4.25. *Le système est aléatoirement-apériodique.*

Preuve. Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice M correspondant à $A_\omega^n = A_{\omega_n} \dots A_{\omega_2} A_{\omega_1}$ (i.e, $A_\omega^n x = Mx \mod 1$) a des entrées positives. Le théorème de

Perron-Frobenius assure que M a une valeur propre simple $\lambda > 0$ qui est la plus grande et puisque $|\det M| = 1$, $\lambda > 1$. Donc, A_ω^n est aussi un automorphisme hyperbolique du tore. Par [83], nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Card}\{x \in \mathbb{T}^2 \,:\, A_\omega^n x = x\} < +\infty$$

et donc :

$$Leb(\{x \in \mathbb{T}^2 \,:\, \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, A_\omega^n x = x\}) = 0.$$

Alors, ce système vérifie :

$$\mathbb{P} \otimes Leb(\{(\omega, x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^2 \,:\, \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, A_\omega^n x = x\}) = 0.$$

□

Donc la Proposition 4.25 et le Corollaire 4.16 donnent pour $\mathbb{P} \otimes Leb$-presque tout $(\omega, x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^2$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^\omega(x)}{-\log r} = 2$$

et la Proposition 4.23 donne pour Leb-presque tout $x \in \mathbb{T}^2$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{-\log r} = 2.$$

4.7 Applications aux perturbations aléatoires

Les perturbations aléatoires sont un cas particulier de systèmes dynamiques aléatoires, dans ce cas toutes les applications sont choisies arbitrairement proches d'une application initiale fixée. Plus précisément, on considère une application mesurable $T : X \to X$ qui joue le rôle de la dynamique initiale, et on ajoute un petit bruit pendant son évolution, modélisé par un système dynamique aléatoire. Pour tout $\varepsilon > 0$ petit, nous considérons l'espace de probabilité $(\Lambda_\varepsilon, \mathcal{B}(\Lambda_\varepsilon), P_\varepsilon)$ (représentant le niveau du bruit) où Λ_ε est un espace métrique et $\mathcal{B}(\Lambda_\varepsilon)$ sa σ-algèbre de Borel. Ensuite, nous considérons la famille d'applications $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon}$ qui seront ε-proches de T dans un sens C^0 (que nous expliquerons par la suite) pour ε assez petit. Dans ce cadre : $\Omega = \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P} = P_\varepsilon^{\mathbb{N}}$, $\vartheta = \sigma$ le shift à gauche sur Ω et $T_\omega = T_{\lambda_1}$ pour tout $\omega = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \Omega$. On utilisera l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : \quad \Lambda_\varepsilon \times X &\longrightarrow X \\ (\lambda, x) &\longmapsto T_\lambda(x) \end{aligned}$$

telle que pour tout $x \in X$, $\Phi_\varepsilon(., x)$ est mesurable et il existe $\lambda^* \in \Lambda_\varepsilon$ tel que $\Phi_\varepsilon(\lambda^*, x) = T(x)$ pour tout $x \in X$. Soit $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon$ la mesure de probabilité définie par

$$(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon(A) := P_\varepsilon\{\lambda \in \Lambda_\varepsilon \,:\, T_\lambda x \in A\}.$$

On peut remarquer que c'est exactement la famille de probabilités de transition définissant le processus de Markov associé dans le cas des applications aléatoires (voir (4.1)). On suppose que $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon$ vérifie les hypothèses suivantes :

(RT1) Pour tout $x \in X$, $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout ε assez petit.

(RT2) Pour tout $x \in X$, $\mathrm{supp}(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon \subset B_\varepsilon(Tx)$ pour tout ε assez petit.

Ces hypothèses nous dispensent d'utiliser la notion de temps de retour non-instantané :

Proposition 4.26. *Sous l'hypothèse (RT1), le système est aléatoirement-apériodique.*

Preuve. Prouvons que pour tout $x \in X$

$$P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\{\omega = (\lambda_1, \lambda_2, ...) \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} \,:\, \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, T_\omega^n x = x\}) = 0$$

où $T_\omega^n = T_{\lambda_n} \circ \cdots \circ T_{\lambda_2} \circ T_{\lambda_1}$.

Soient $x \in X$ et $A \subset X$ avec $Leb(A) = 0$. Puisque $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon$ est absolument continue, nous avons $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon(A) = P_\varepsilon(\{\lambda_1 \in \Lambda_\varepsilon \,:\, T_{\lambda_1} x \in A\}) = 0$. De plus :

$$(\Phi_x^\varepsilon)^2{}_* P_\varepsilon^2(A) := P_\varepsilon^2(\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_\varepsilon^2 \,:\, T_{\lambda_2} T_{\lambda_1} x \in A\}) = 0.$$

Car :

$$(\Phi_x^\varepsilon)^2{}_* P_\varepsilon^2(A) = \int_{\Lambda_\varepsilon} (\Phi_{T_{\lambda_1} x}^\varepsilon)_* P_\varepsilon(A) dP_\varepsilon(\lambda_1)$$

et $T_{\lambda_1} x \in X$ pour tout $\lambda_1 \in \Lambda_\varepsilon$, (RT1) donne $(\Phi_{T_{\lambda_1} x}^\varepsilon)_* P_\varepsilon(A) = 0$ pour tout $\lambda_1 \in \Lambda_\varepsilon$. En utilisant cette idée et une simple récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\Phi_x^\varepsilon)^n{}_* P_\varepsilon^n(A) := P_\varepsilon^n(\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_\varepsilon^n \,:\, T_{\lambda_n} \ldots T_{\lambda_1} x \in A\}) = 0. \tag{4.16}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\{\omega \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} : \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, T_\omega^n x = x\}) &= P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\omega \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} \,:\, T_\omega^n x = x\}) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\{\omega \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} \,:\, T_\omega^n x = x\}) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P_\varepsilon^n(\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_\varepsilon^n \,:\, T_{\lambda_n} \ldots T_{\lambda_1} x = x\}) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{P_\varepsilon^n(\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_\varepsilon^n : T_{\lambda_n} \ldots T_{\lambda_1} x \in \{x\}\})}_{=0 \text{ par } (4.16)} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

□

1. **Petites perturbations aléatoires d'une application du cercle :**
   Soient $X = \mathcal{S}^1$ et T une transformation $\mathcal{C}^r$ $(2 \leq r < \infty)$ dilatante de $\mathcal{S}^1$. Nous perturbons cette application par un bruit additif, c'est-à-dire : $T_\lambda x = Tx + \lambda$ où λ est une variable aléatoire distribuée suivant une densité supportée sur $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Alors il est bien connu (on pourra voir l'article de Baladi-Young par exemple [14]) que le système dynamique aléatoire ainsi défini admet une mesure stationnaire absolument continue μ dont la densité est $\mathcal{C}^{r-1}$ et dont les

corrélations décroissent exponentiellement vite pour les observables $\mathcal{C}^{r-1}$. Remarquons qu'il est possible de passer des observables $\mathcal{C}^{r-1}$ aux observables Lipschitz par de simples arguments d'approximation comme nous l'avons prouvé dans le Chapitre 1. Alors d'après le Théorème 4.14 et la Proposition 4.26, pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\mathbb{N}} \times \mathcal{S}^1$ nous avons :

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^{\omega}(x)}{-\log r} = 1$$

et d'après le Théorème 4.22, pour μ-presque tout $x \in \mathcal{S}^1$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{-\log r} = 1.$$

2. **Petites perturbations aléatoires des applications dilatantes par morceaux de l'intervalle :**

Soient $X = [0, 1]$ et T une application $\mathcal{C}^2$ dilatante par morceaux sans *periodic turning point* (voir [14]) [1], alors pour la même perturbation par un bruit additif que dans l'exemple précédent Baladi et Young [14] ont prouvé l'existence (et la stabilité) d'une mesure stationnaire absolument continue μ et la décroissance exponentielle des corrélations pour des observables à variations bornées, et donc pour les Lipschitz. On obtient alors que pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^{\omega}(x)}{-\log r} = 1$$

et que pour μ-presque tout $x \in [0, 1]$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{-\log r} = 1.$$

[1] Remarquons que ces résultats sont aussi valables pour des dynamiques dont la dérivée est uniformément plus grande que 2, ce qui permet d'éviter cette hypothèse sur les turning points [63].

Chapitre 5

Récurrence de Poincaré pour les observations de flots

Après avoir étudié la récurrence de Poincaré pour les systèmes dynamiques à temps discrets, une question naturelle se pose : ces résultats peuvent-ils s'étendre au cas continu ? Pouvons-nous relier les temps de retour pour les flots avec les dimensions de la mesure invariante ? Dans un cadre plus général, est-il possible d'étudier la récurrence pour une observation d'un flot ? Nous allons donc étudier, dans cette partie, la récurrence pour les flots et les observations de flots, en particulier nous donnerons des résultats pour le flot géodésique.

5.1 Introduction

Soit M une variété riemannienne compacte munie de sa distance induite d. Soit Ψ un flot sur M. Soit ν une mesure de probabilité sur M invariante pour le flot Ψ. Comme dans les chapitres précédents, nous nous intéressons à la récurrence, nous introduisons donc la notion de temps de retour et de taux de récurrence pour les flots :

Définition 5.1. *On définit pour $x \in M$ le temps de retour du flot Ψ :*

$$\tau_r^{\Psi}(x) := \inf\{t > \eta_r(x) \,:\, \Psi_t(x) \in B(x,r)\}$$

où $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r et $\eta_r(x)$ est le premier temps de sortie de la boule $B(x,r)$, c'est-à-dire $\eta_r(x) = \inf\{t > 0, \Psi_t x \notin B(x,r)\}$. On définit aussi les taux de récurrence inférieur et supérieur :

$$\underline{R}^{\Psi}(x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^{\Psi}(x)}{-\log r} \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi}(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^{\Psi}(x)}{-\log r}.$$

On va donc montrer que ces taux de récurrence sont liés aux dimensions locales de la mesure invariante. Nous démontrerons tout d'abord un théorème valable pour tous les flots :

Théorème 5.2. *Soit Ψ un flot différentiable sur M.Si ν est Ψ-invariante alors pour ν-presque tout $x \in M$ non fixe*

$$\underline{R}^{\Psi}(x) \leq \underline{d}_{\nu}(x) - 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi}(x) \leq \overline{d}_{\nu}(x) - 1.$$

Pour obtenir une égalité entre les taux de récurrence et les dimensions nous avons besoin de plus d'hypothèses sur le système :

Théorème 5.3. *Soit Ψ un flot d'Anosov sur M. Si ν est un état d'équilibre d'un potentiel Hölder alors*

$$\underline{R}^{\Psi}(x) = \underline{d}_{\nu}(x) - 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi}(x) = \overline{d}_{\nu}(x) - 1$$

pour ν-presque tout $x \in M$.

L'existence de la dimension locale de la mesure invariante pour les flots hyperboliques est encore une question ouverte. En effet, alors que pour les difféomorphismes hyperboliques l'existence de la dimension locale a été prouvée [69, 16] et qu'il existe une formule explicite pour la calculer [19], pour les flots hyperboliques l'existence n'a été prouvée que dans le cas conforme [80, 20].

Le théorème précédent s'applique par exemple au flot géodésique sur une variété lisse à courbure strictement négative. Le flot géodésique étant défini sur le fibré unitaire tangent T^1M, on peut aussi s'intéresser à une observation particulière de ce flot : la position sur la variété M. Soit Π la projection canonique

$$\begin{aligned} \Pi \ : T^1M &\longrightarrow M \\ (p,v) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

On étudiera les temps de retour pour la projection canonique dans la variété M :

$$\tau_r^{\Psi,\Pi}(p,v) := \inf\{t > r \ : \ \Pi(\Psi_t(p,v)) \in B(p,r)\}.$$

Le flot Ψ étant le flot géodésique sur T^1M, le premier temps de sortie de la projection du flot sur la variété de la boule $B(p,r)$ est égal à r pour r assez petit. Nous définissons maintenant les taux de récurrence pour la projection canonique :

$$\underline{R}^{\Psi,\Pi}(p,v) := \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^{\Psi,\Pi}(p,v)}{-\log r} \qquad \text{et} \qquad \overline{R}^{\Psi,\Pi}(p,v) := \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^{\Psi,\Pi}(p,v)}{-\log r}.$$

Théorème 5.4. *Soit Ψ le flot géodésique défini sur T^1M et ν une mesure invariante pour Ψ. Alors pour ν-presque tout $(p,v) \in T^1M$*

$$\underline{R}^{\Psi,\Pi}(p,v) \leq \underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi,\Pi}(p,v) \leq \overline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1.$$

De plus, si M a une courbure strictement négative et si ν est un état d'équilibre pour un potentiel Hölder alors

$$\underline{R}^{\Psi,\Pi}(p,v) = \underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi,\Pi} = \overline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1$$

pour ν-presque tout $(p,v) \in T^1M$ non multiple tel que $\underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) > 1$.

Le flot géodésique préservant la mesure de Lebesgue sur T^1M, nous pouvons appliquer le Théorème 5.3 et le Théorème 5.4 pour obtenir le résultat remarquable suivant :

Corollaire 5.5. *Soit M une variété de dimension n à courbure strictement négative. Soit Ψ le flot géodésique défini sur T^1M. Alors pour presque tout $(p,v) \in T^1M$*

$$R^{\Psi}(p,v) = 2n - 2$$

et

$$R^{\Psi,\Pi}(p,v) = n - 1.$$

5.2 Récurrence pour les observations de flots

Nous rappelons ici certaines généralités de théorie des systèmes dynamiques pour les flots. Soit M une variété riemannienne munie de sa distance induite d. Un flot Ψ sur M est une fonction définie de $\mathbb{R} \times M$ dans M :

$$\begin{array}{rcl} \Psi \ : \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ (t, x) & \longmapsto & \Psi_t(x) \end{array}$$

telle que pour tout $x \in M$, $\Psi_0(x) = x$ et $\forall x \in M$, $\forall (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\Psi_{t+s}(x) = \Psi_t(\Psi_s(x))$.

Soit $\mathcal{B}(M)$ la σ-algèbre de Borel de M et soit ν une mesure de probabilité sur M.

Définition 5.6. *On dit que la mesure ν est invariante pour le flot Ψ si*

$$\nu(\Psi_t^{-1}(A)) = \nu(A) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{B}(M).$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme dans le Chapitre 3, nous sommes intéressés par les observations de systèmes dynamiques, on considère donc une observation $f : M \to \mathbb{R}^N$. Nous allons étudier la récurrence pour l'observation du flot Ψ. Pour cela, nous avons tout d'abord besoin d'introduire la notion de fonction de fuite :

Définition 5.7. *Une fonction ρ est appelée fonction de fuite si pour tout $1 > \xi_1 > 0$, pour tout $\xi_2 > 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour $f_\star\nu$-presque tout $z_1 \in \mathbb{R}^N$, il existe $\zeta > 0$ tel que si $r < \zeta$, alors pour $f_\star\nu$-presque tout $z_2 \in B(z_1, \min\{(1-\xi_1)r, (\xi_2 - 1)r\})$ on a $r^\varepsilon \rho_{\xi_1 r}(z_2) \leq \rho_r(z_1) \leq \rho_{\xi_2 r}(z_2) r^{-\varepsilon}$.*

Nous donnons maintenant quelques exemples de fonctions de fuite :

1. Pour $\alpha \in [0,1]$,
$$\rho_r(z) = r^\alpha |\log r|.$$
2. Si ν est une mesure sur M,
$$\rho_r(z) = \frac{1}{f_\star\nu(B(z,r))} \int_{f^{-1}B(z,r)} \inf\left\{t > 0, \Psi_t y \notin f^{-1}B(z,r)\right\} d\nu(y).$$
3. Si ν est une mesure sur M,
$$\rho_r(z) = \frac{|\log r|}{f_\star\nu(B(z,r))} \int_{f^{-1}B(z,r)} \inf\left\{t > 0, \Psi_t y \notin f^{-1}B(z,r)\right\} d\nu(y).$$
4. Si ν est une mesure sur M,
$$\rho_r(f(x)) := \operatorname*{ess\text{-}sup}_{y \in f^{-1}B(f(x),r)} \left\{\inf\left\{t > 0 : \Psi_t y \notin f^{-1}B(f(x),r)\right\}\right\}.$$

Nous introduisons donc la notion de temps de retour et de taux de récurrence pour l'observation du flot :

Définition 5.8. *Soit $f : M \to \mathbb{R}^N$ une fonction mesurable et ρ une fonction de fuite, on définit pour $x \in M$ le temps de retour pour l'observation du flot Ψ par rapport à ρ*

$$\tau_{r,\rho}^{\Psi,f}(x) := \inf\{t > \rho_r(f(x)) \,:\, f(\Psi_t(x)) \in B(f(x), r)\}$$

où $B(f(x), r)$ dénote la boule de centre $f(x)$ et de rayon r. On définit aussi les taux de récurrence inférieur et supérieur pour l'observation du flot Ψ par rapport à ρ

$$\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_{r,\rho}^{\Psi,f}(x)}{-\log r} \qquad \text{et} \qquad \overline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_{r,\rho}^{\Psi,f}(x)}{-\log r}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On peut aussi introduire le temps de retour p-non-instantané pour l'observation du flot Ψ

$$\tau_{r,p}^{\Psi,f,\star}(x) = \inf\{t > p \,:\, f(\Psi_t(x)) \in B(f(x), r)\}$$

et les taux de récurrence non-instantanés inférieur et supérieur pour l'observation du flot Ψ

$$\underline{R}_\star^{\Psi,f}(x) = \lim_{p\to+\infty} \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_{r,p}^{\Psi,f,\star}(x)}{-\log r} \qquad \text{et} \qquad \overline{R}_\star^{\Psi,f}(x) = \lim_{p\to+\infty} \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_{r,p}^{\Psi,f,\star}(x)}{-\log r}.$$

Il est important de souligner que ces taux de récurrence peuvent être identiques :

Proposition 5.9. *Soit ρ une fonction de fuite. Si pour $x \in M$, $\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) > 0$ alors pour toute autre fonction de fuite ρ' telle que $\rho'_r(f(x)) \geq \rho_r(f(x))$ pour tout r suffisamment petit et telle que $\underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \rho'_r(f(x))}{\log r} \geq 0$ alors on a*

$$\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) = \underline{R}_{\rho'}^{\Psi,f}(x) = \underline{R}_\star^{\Psi,f}(x)$$

et

$$\overline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) = \overline{R}_{\rho'}^{\Psi,f}(x) = \overline{R}_\star^{\Psi,f}(x).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que si pour $x \in M$, $\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) > 0$ alors il existe $a > 0$ tel que pour tout $r > 0$ suffisamment petit on a

$$\tau_{r,\rho}^{\Psi,f}(x) \geq r^{-a}.$$

□

Nous avons vu précédemment que pour les systèmes dynamiques discrets, les taux de récurrence sont liés aux dimensions locales de la mesure invariante et que les taux de récurrence pour l'observation sont liés aux dimensions locales de la mesure image. Dans le cas des flots, les taux de récurrence pour l'observation du flot sont liés aux dimensions locales de la mesure image mais cette fois-ci de manière intrinsèque car ils dépendent aussi de la fonction de fuite. L'idée est donc de trouver la meilleure fonction de fuite, c'est-à-dire une fonction de fuite ayant un comportement asymptotique le plus lent possible mais tout de même assez rapide pour que presque partout le temps de sortie de l'observation du flot de $B(f(x), r)$ soit inférieur à la fonction de fuite à partir d'un certain rayon. Ainsi, le premier théorème sur la récurrence pour les observations de flots est le suivant (il sera démontré dans la Section 5.6) :

Théorème 5.10. *Soit Ψ un flot sur M. Soit f une observation mesurable de M dans $\mathbb{R}^N$ et soit ρ une fonction de fuite. Si Ψ est ν-invariante alors pour ν-presque tout $x \in M$*

$$\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) \leq \liminf_{r\to 0}\left(\frac{\log f_\star\nu\left(B\left(f(x),r\right)\right)}{\log r} - \frac{\log \rho_r(f(x))}{\log r}\right)$$

et

$$\overline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) \leq \limsup_{r\to 0}\left(\frac{\log f_\star\nu\left(B\left(f(x),r\right)\right)}{\log r} - \frac{\log \rho_r(f(x))}{\log r}\right).$$

Nous soulignons que nous ne pouvons pas obtenir ce résultat en utilisant l'application de temps 1, i.e. $Tx = \Psi_1(x)$, qui nous donne un résultat non-optimal. En effet, en utilisant les résultats du Chapitre 3 avec l'application de temps 1, on obtient que pour ν-presque tout $x \in M$

$$\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) \leq \underline{d}_{f_\star\nu}(f(x)) \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) \leq \overline{d}_{f_\star\nu}(f(x)).$$

Ce résultat est optimal quand

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log \rho_r(f(x))}{\log r} = 0$$

mais ce cas est dégénéré comme nous pourrons le voir dans la Section 5.5 où nous donnerons des exemples.

Il est intéressant de noter que, lorsque l'observation est l'application identité, on obtient le résultat suivant énoncé dans l'introduction (Théorème 5.2), pour les points qui ne sont pas des points fixes (il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi_t x \neq x$) :

Corollaire 5.11. *Soit Ψ un flot différentiable sur M. Si ν est Ψ-invariante alors pour ν-presque tout $x \in M$ non fixe*

$$\underline{R}^{\Psi}(x) \leq \underline{d}_\nu(x) - 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi}(x) \leq \overline{d}_\nu(x) - 1.$$

Preuve. En utilisant le Théorème 5.10 avec f l'observation identité :

$$\begin{array}{rcl} f : M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

et en prenant comme fonction de fuite la fonction ρ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \rho_r : M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \rho_r(x) = r|\log r| \end{array}$$

on obtient que

$$\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) \leq \underline{d}_\nu(x) - 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) \leq \overline{d}_\nu(x) - 1.$$

Il nous reste donc à montrer que $\underline{R}^{\Psi}(x) \leq \underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x)$ et que $\overline{R}^{\Psi}(x) \leq \overline{R}_\rho^{\Psi,f}(x)$. Pour cela, il suffit de montrer que pour presque tout $x \in M$, pour r assez petit on a

$\tau_r^\Psi(x) \leq \tau_{r,\rho}^\Psi(x)$. D'après le Théorème des boîtes de flots [11], le flot étant différentiable, autour d'un point non fixe il existe un voisinage U, une constante γ et un temps T tel que pour tout $z \in U$ et pour tout $0 < t < T$, $d(z, \Psi_t z) \geq \gamma z$. Ainsi, pour tout $x \in M$ non fixe, il existe $r_1(x) > 0$ tel que pour tout $0 < r < r_1$, $\inf\{t > 0, \Psi_t x \notin B(x,r)\} \leq r|\log r|$ et ainsi $\tau_r^\Psi(x) \leq \tau_{r,\rho}^\Psi(x)$. □

Comme dans les chapitres précédents, pour obtenir une minoration des taux de récurrence, nous avons besoin d'hypothèses plus fines sur le système. Pour les flots une hypothèse sur la vitesse de mélange ne serait pas optimale, en effet il est possible de construire des flots satisfaisant l'Axiome A ayant une décroissance des corrélations arbitrairement lente (e.g. [86]). Ainsi, nous allons utiliser les flots suspendus et l'hypothèse sur la vitesse de mélange portera sur le mélange de la dynamique sur la base.

5.3 Récurrence pour les observations via les flots suspendus

A partir de maintenant nous supposerons que la variété M est compacte.

Pour obtenir une estimation inférieure des taux de récurrence, nous allons travailler avec les flots suspendus dont nous rappelons quelques notions essentielles.

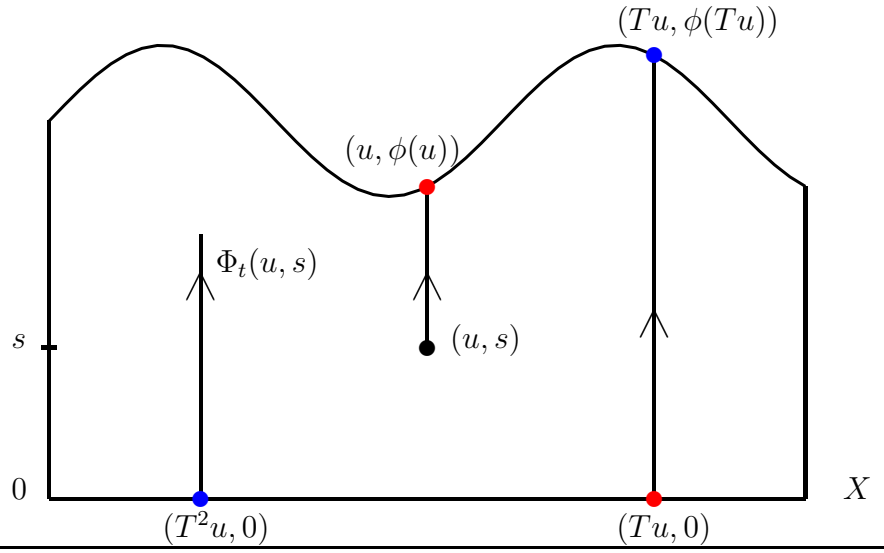
Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique muni d'une distance d. Soit $\phi : X \to (0, +\infty)$ une fonction mesurable et intégrable. Considérons l'espace

$$Y := \{(u,s) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq s \leq \phi(u)\}$$

où les points $(u, \phi(u))$ et $(Tu, 0)$ sont identifiés pour tout $u \in X$. Cet espace est appelé l'espace sous la fonction ϕ. Le *flot suspendu* ou le *flot spécial* sur $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ avec toit ϕ est le flot Φ qui agit sur Y par la transformation suivante

$$\Phi_t(u,s) = (u, s+t) \qquad \forall (u,s,t) \in X \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Voici une illustration du flot suspendu :



La distance sur Y est la distance de Bowen-Walters (voir [29] par exemple). On rappelle que la mesure ν_μ, définie par $\mu \otimes Leb$ sur Y et normalisée, est invariante par le flot Φ. En général, les flots et les flots suspendus sont reliés :

Théorème 5.12 ([7]). *Tout flot Ψ sans point fixe est métriquement isomorphe à un flot spécial Φ.*

Plus précisément, pour un flot Ψ sur M avec une mesure invariante ν, il existe un flot suspendu Φ sur T avec toit ϕ et mesure invariante ν_μ tel que : il existe un sous-ensemble M' de M tel que $\nu(M') = 1$, un ensemble Y' de Y tel que $\nu_\mu(Y') = 1$ et une fonction $g : Y \to M$ bijective de Y' dans M', telle que pour tout $t \geq 0$:

$$\Psi_t \circ g = g \circ \Phi_t \qquad \text{et} \qquad \Psi_t \circ g^{-1} = g^{-1} \circ \Phi_t$$

et telle que pour tout sous-ensemble mesurable $A \subset M$ et tout sous-ensemble mesurable $B \subset Y$:

$$\nu(A) = \nu_\mu(g^{-1}A) \qquad \text{et} \qquad \nu_\mu(B) = \nu(g(B)).$$

Nous soulignons que pour les flots hyperboliques, on peut choisir la distance sur X telle que la fonction g soit Lipschitz.

Dans notre étude de la récurrence pour les flots suspendus, il apparait que les taux de récurrence sont minorés par de nouvelles quantités, nous devons donc introduire la notion de dimension locale de projection du flot suspendu associé pour l'observation f :

Définition 5.13. *Soit Ψ un flot défini sur M et métriquement isomorphe à un flot suspendu Φ sur $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ avec toit ϕ. Soit Y l'espace sous la fonction ϕ et soit $g : Y \to M$ l'isomorphisme reliant Ψ et Φ. On définit les dimensions locales inférieure et supérieure de projection du flot suspendu associé pour l'observation f en un point $x \in M$:*

$$\underline{d}_\mu^{f,g}(x) = \underline{\lim}_{r \to 0} \frac{\log \mu\left(\pi(f \circ g)^{-1} B(f(x), r)\right)}{\log r}$$

et

$$\overline{d}_\mu^{f,g}(x) = \overline{\lim}_{r \to 0} \frac{\log \mu\left(\pi(f \circ g)^{-1} B(f(x), r)\right)}{\log r}$$

où $\pi : Y \to X$ est la projection sur X, i.e. $\forall (u,t) \in Y$, $\pi(u,t) = u$.

Même si ces dimensions ne sont pas identiques aux dimensions locales de la mesure image, dans certains cas nous pouvons les relier (voir Section 5.4 sur le flot géodésique par exemple). De plus, ces dimensions apparaissent naturellement dans notre étude. En effet, lorsque f est l'application identité, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas d'observation, pour un flot suspendu le temps de retour d'un point $(x, s) \in A \times B \subset Y$ est minoré par le temps de retour de x dans A sous l'action de T et est majoré par le même temps de retour plus une constante (dépendant uniquement de la fonction de toit ϕ). Dans l'article [18], cette idée avait été utilisée pour prouver

que le comportement asymptotique du temps de retour pour un flot suspendu d'un point (x, s) dans $B((x, s), r)$ est égale au comportement asymptotique du temps de retour de x dans $B(x, r)$, sous l'action de T, qui est lui-même relié au comportement asymptotique de la mesure de $B(x, r)$. Lorsque l'on fait une observation, modélisée par la fonction f, le temps de retour de $f(x, s)$ dans un ensemble C correspond au temps de retour de (x, s) dans $f^{-1}C$ sous l'action du flot suspendu. Il est donc naturel d'essayer de relier le temps de retour de (x, s) dans $f^{-1}C$ à la mesure de la projection sur X de l'ensemble $f^{-1}C$. Pour plus de détails, on pourra regarder les démonstrations des lemmes 5.30 et 5.31.

Notre second résultat principal pour les temps de retour d'observation de flot est le suivant :

Théorème 5.14. *Soit Ψ un flot de M dans M, ν-invariant et métriquement isomorphe à un flot suspendu Φ sur T tel que T a une décroissance des corrélations super-polynomiale. Supposons que l'isomorphisme g reliant ces deux flots soit Lipschitz. Soit f une observation Lipschitz de M dans $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$\underline{R}_\star^{\Psi,f}(x) \geq \underline{d}_\mu^{f,g}(x) \qquad et \qquad \overline{R}_\star^{\Psi,f}(x) \geq \overline{d}_\mu^{f,g}(x)$$

pour ν-presque tout $x \in M$ tel que $\underline{d}_\mu^{f,g}(x) > 0$.

Remarque 5.15. Il est important de noter que les hypothèses sur le flot Ψ sont vérifiées lorsque par exemple le flot Ψ est Anosov et lorsque la mesure μ est un état d'équilibre d'un potentiel Hölder.

Nous rappelons la définition d'un flot d'Anosov :

Définition 5.16. *Un flot differentiable $\Psi_t : M \to M$ est appelé un flot d'Anosov (ou un flot uniformément hyperbolique) s'il existe une constante $0 < \lambda < 1$, une constante $C > 0$ et une décomposition du fibré tangent :*

$$TM = E^u \oplus E^0 \oplus E^s \qquad (i.e. \forall x \in M, T_xM = E_x^s + E_x^0 + E_x^u)$$

où E_x^0 est généré par le vecteur $\frac{d}{dt}(\Psi_t x)|_{t=0}$, E_u et E_s sont des sous-fibrés $D\psi_t$-invariants pour tout $t \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire $D_x\Psi_t E_x^u = E_{\Psi_t x}^u$ et $D_x\Psi_t E_x^s = E_{\Psi_t x}^s$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) tels que pour tout $x \in M$ et pour tout $t > 0$

$$\|d_x\Psi_t v\| \leq C\lambda^t \|v\| \text{ pour tout } v \in E_x^s$$

et

$$\|d_x\Psi_{-t} v\| \leq C\lambda^t \|v\| \text{ pour tout } v \in E_x^u.$$

Lorsque l'observation est l'application identité, on obtient une égalité entre les taux de récurrence et les dimensions (et pour les flots d'Anosov on va retrouver le Théorème 5.3) :

Corollaire 5.17. *Soit Ψ un flot différentiable de M, ν-invariant et métriquement isomorphe à un flot suspendu Φ sur T tel que T a un décroissance des corrélations super-polynomiale. Supposons que l'isomorphisme g reliant ces deux flots soit Lipschitz. Alors*

$$\underline{R}^\Psi(x) = \underline{d}_\nu(x) - 1 \qquad et \qquad \overline{R}^\Psi(x) = \overline{d}_\nu(x) - 1$$

pour ν-presque tout $x \in M$ qui n'est pas périodique et tel que $\underline{d}_\nu(x) > 1$.

Pour les flots C^1 d'entropie strictement positive (pour les flots, l'entropie correspondra à l'entropie de l'application de temps 1, i.e. $h_\nu(\Psi) = h_\nu(\Psi_1)$), la dimension inférieure de la mesure vérifie une condition supplémentaire :

Lemme 5.18. *Soit Ψ un flot C^1 sur M et soit ν une mesure invariante telle que $h_\nu(\Psi) > 0$. Alors pour ν-presque tout $x \in M$*

$$\underline{d}_\nu(x) > 1.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in M$, considérons une sous-variété N_x de dimension $\dim M - 1$ et transverse au flot Ψ. Considérons maintenant la famille de boules $\{D_\delta(x)\}_{\varepsilon/2 \leq \delta \leq \varepsilon}$ de N_x, de centre x et de diamètre δ. En utilisant la construction du Lemme 5 de [18], on peut montrer qu'il existe $\delta_0 \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$ tel que $D_{\delta_0}(x)$ vérifie pour tout $r > 0$ suffisamment petit :

$$\mu\left(\{y \in N_x : d(y, \partial D_{\delta_0}(x)) < r\}\right) \leq cr \tag{5.1}$$

où c est une constante ne dépendant que de ε et de x et où μ est la mesure induite par ν sur $D_\varepsilon(x)$. Notons $D(x)$ l'ensemble $D_{\delta_0}(x)$. Considérons maintenant les cylindres $C(x) = \bigcup_{0 \leq t < \varepsilon} \Psi_t D(x)$. Les cylindres $C(x)$ recouvrant M, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i \in I} C_i$. Soit $Z = \bigcup_{i \in I} D_i$ où D_i est le disque associé au cylindre C_i pour $i \in I$.

On peut définir la fonction de transfert $\varsigma : Z \to \mathbb{R}^+$ par

$$\varsigma(x) = \min\{t > 0 : \Psi_t x \in Z\},$$

et l'application de transfert $T : Z \to Z$ par

$$Tx = \Psi_{\varsigma(x)} x.$$

Nous remarquons que si $D_i \cap T^{-1} D_j \neq \emptyset$ alors $T|_{D_i \cap T^{-1} D_j}$ est L-Lipschitz (Ψ_t étant C^1 sur M). μ étant la mesure invariante par T induite par la mesure ν, comme $h_\nu(\Psi) > 0$ on a aussi que $h_\mu(T) > 0$.

Soit ξ une partition de Z plus fine que $\{D_i \cap T^{-1} D_j\}_{i,j \in I}$, de diamètre arbitrairement petit et vérifiant pour tout $0 < r < \operatorname{diam} \xi$

$$\mu(x \in Z : d(x, \partial\xi) < r) \leq c_1 r \tag{5.2}$$

où c_1 est une constante positive dépendant uniquement du diamètre de ξ (la construction de cette partition provient de [18] et de (5.1)). Considérons l'ensemble $A_n = \{x \in Z : d(T^n x, \partial\xi) < e^{-n}\}$, on a donc d'après (5.2) que pour tout n suffisamment grand $\mu(A_n) \leq c_1 e^{-n}$. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a que pour μ-presque tout x qui appartient à Z, il existe $c(x) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(T^n x, \partial\xi) > c(x) e^{-n}$. Cela nous donne, que pour μ-presque tout $x \in Z$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$B_Z(x, c(x) L^{-n} e^{-n}) \subset \xi_n(x).$$

Finalement, on peut observer que pour tout $x \in Z$, t et r suffisamment petit, en posant $y = \Psi_t x$ on a

$$B_M(y,r) \subset \bigcup_{|s|<r} \Psi_{t+s}(B_Z(x, L_1 r))$$

où $L_1 = \sup_{0\leq s<r}\{\text{constante de Lipschitz de } \Psi_{-s}\}$. Ainsi, pour μ-presque tout x, pour tout t suffisamment petit et $y = \Psi_t x$, en posant $r_n = c(x)L_1^{-1}L^{-n}e^{-n}$ pour tout n suffisamment grand on a

$$\begin{aligned} \nu(B_M(y,r_n)) &\leq 2r_n\mu(B_Z(x, c(x)L^{-n}e^{-n})) \\ &\leq 2r_n\mu(\xi_n(x)). \end{aligned}$$

Si le diamètre de ξ est assez petit alors $h_\mu(T,\xi) > \frac{h_\mu(T)}{2} > 0$ et pour n suffisamment grand $\mu(\xi_n) \leq e^{-nh_\mu(T)/2}$ et ainsi

$$\underline{d}_\nu(y) \geq 1 + \frac{h_\mu(T)}{2(1+\log L)} > 1.$$

Finalement, en prenant ε arbitrairement petit, on obtient que pour ν-presque tout $y \in M$

$$\underline{d}_\nu(y) > 1.$$

□

Remarque 5.19. En utilisant des inégalités plus fines que dans la preuve précédente, on obtiendrait vraisemblablement que pour ν-presque tout $x \in M$

$$\underline{d}_\nu(x) \geq 1 + h_\nu(\Psi)\left(\frac{1}{\Lambda_u(x)} - \frac{1}{\Lambda_s(x)}\right)$$

où $\Lambda_u(x)$ est le plus grand exposant de Lyapunov du flot et $\Lambda_s(x)$ le plus petit exposant de Lyapunov.

Nous avons maintenant tous les éléments pour démontrer le Théorème 5.3 :

Preuve du Théorème 5.3. Ce théorème est une conséquence du Corollaire 5.17 et du Lemme 5.18. En effet, un flot d'Anosov est métriquement isomorphe à un flot hyperbolique symbolique (la base du flot est un système dynamique symbolique hyperbolique) [27]. Comme ν est un état d'équilibre pour un potentiel Hölder, μ est aussi un état d'équilibre pour le système dynamique $(X, \mathcal{A}, T)$, la décroissance des corrélations est donc super-polynomiale et de plus, l'entropie est strictement positive. On remarque aussi que la distance sur X peut être choisie telle que l'isomorphisme reliant les deux flots soit Lipschitz.

Finalement, pour un flot d'Anosov, le nombre d'orbites périodiques est dénombrable et ainsi la mesure étant un état d'équilibre l'ensemble des points périodiques est de mesure nulle. □

Nous soulignons que ce résultat est une généralisation du théorème de [18] sur les flots suspendus. En fait, le Théorème 5.14 provient du théorème suivant sur les flots suspendus :

Théorème 5.20. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique avec une décroissance des corrélations super-polynomiale et Φ le flot suspendu sur T avec fonction de toit ϕ. Soit $\tilde{f} = f \circ g$ une fonction Lipschitz. Alors, on a*

$$\underline{R}_\star^{\Psi,\tilde{f}}(y) \geq \underline{d}_\mu^{f,g}(g(y)) \qquad et \qquad \overline{R}_\star^{\Psi,\tilde{f}}(y) \geq \overline{d}_\mu^{f,g}(g(y))$$

pour $\mu \otimes Leb$-presque tout $y \in Y$ tel que $\underline{d}_\mu^{f,g}(g(y)) > 0$.

A partir de maintenant et sans perte de généralité, nous supposerons que $\int_X \phi d\mu = 1$ et ainsi la mesure invariante du flot suspendu sera $\nu_\mu = \mu \otimes Leb$.

5.4 Observations du flot géodésique

Soit (M, h) une variété riemannienne compacte C^∞, i.e. M est une variété compacte C^∞ et h est une métrique Riemannienne C^∞ sur M. La métrique h induit une distance d sur M. Nous supposerons que l'espace métrique (M, d) est complet. M est donc géodésiquement complet d'après le Théorème de Hopf-Rinow. Soit T^1M le fibré unitaire tangent de (M, h), i.e. un point $(p, v) \in T^1M$ si $p \in M$ et si v est un vecteur unitaire tangent à M en p. Etant donné $(p, v) \in T^1M$, $\gamma_{(p,v)} : \mathbb{R} \to M$ dénote la géodésique de conditions initiales $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ et $\dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = v$. On peut donc maintenant définir le flot géodésique $\Psi_t : T^1M \to T^1M$ qui est donné par $\Psi_t(p, v) = (\gamma_{(p,v)}(t), \dot{\gamma}_{(p,v)}(t))$. Soit Π la projection canonique

$$\begin{aligned} \Pi \ : T^1M &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

On rappelle que pour tout $(p, v) \in T^1M$ si $t > 0$ est suffisamment petit

$$d(\Pi(p, v), \Pi(\Psi_t(p, v))) = t. \tag{5.3}$$

Soit ν une mesure de probabilité invariante pour le flot géodésique.

Théorème 5.21. *Soit Ψ le flot géodésique défini sur T^1M. Alors pour ν-presque tout $(p, v) \in T^1M$*

$$\underline{R}^\Psi(p, v) \leq \underline{d}_\nu(p, v) - 1 \qquad et \qquad \overline{R}^\Psi(p, v) \leq \overline{d}_\nu(p, v) - 1.$$

De plus, si M a une courbure strictement négative et si ν est un état d'équilibre pour un potentiel Hölder alors

$$\underline{R}^\Psi(p, v) = \underline{d}_\nu(p, v) - 1 \qquad et \qquad \overline{R}^\Psi = \overline{d}_\nu(p, v) - 1$$

pour ν-presque tout $(p, v) \in T^1M$.

Preuve. La première partie du théorème se prouve de manière identique au Corollaire 5.11 en utilisant (5.3).

Pour la deuxième partie du théorème, comme M a une courbure négative, Ψ est un flot d'Anosov et est métriquement isomorphe à un flot suspendu symbolique (la base du flot est un système dynamique symbolique) [27]. De plus, la distance sur X peut être choisie telle que l'isomorphisme reliant les deux flots soit Lipschitz. Comme ν est un état d'équilibre pour un potentiel Hölder, μ est aussi un état d'équilibre pour le système dynamique $(X, \mathcal{A}, T)$ et la décroissance des corrélations est superpolynomiale. On peut donc appliquer le Corollaire 5.17 et le Lemme 5.18 (l'entropie du flot étant strictement positive). □

On peut maintenant s'intéresser au temps de retour de la position sur la variété M, c'est-à-dire aux temps de retour de la projection du flot sur la variété :

Théorème 5.22. *Pour ν-presque tout $(p, v) \in T^1M$*

$$\underline{R}^{\Psi,\Pi}(p, v) \leq \underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi,\Pi}(p, v) \leq \overline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1.$$

Remarque 5.23. Le résultat de ce théorème est encore vérifié lorsque la variété M n'est pas compacte et que ν est une mesure de probabilité.

Preuve du Théorème 5.22. Le résultat provient du Théorème 5.10 en utilisant la fonction de fuite $\rho_r(p) = r$. En fait, il est important de noter que d'après (5.3) on a pour r assez petit

$$\inf\{t > 0 : \Pi(\Psi_t(p, v)) \notin B(p, r)\} = r.$$

□

Définition 5.24. *On dira qu'un point $(p, v) \in T^1M$ est multiple s'il existe $t > 0$ tel que $\Pi(\Psi_t(p, v)) = p$.*

Théorème 5.25. *Si M a une courbure négative et si ν est un état d'équilibre pour un potentiel Hölder alors*

$$\underline{R}^{\Psi,\Pi}(p, v) = \underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^{\Psi,\Pi}(p, v) = \overline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1$$

pour ν-presque tout $(p, v) \in T^1M$ non multiple tel que $\underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) > 1$.

Remarque 5.26. Pour chaque point $p \in M$ il existe un nombre dénombrable de $v \in T^1_pM$ tel (p, v) soit multiple. On peut donc se demander si lorsque la mesure ν est un état d'équilibre d'un potentiel Hölder, l'ensemble des points multiples est un ensemble de mesure nulle.

En utilisant un résultat de Ledrappier-Lindenstrauss [68] on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.27. *Si M est une surface riemannienne compacte à courbure strictement négative, si ν est un état d'équilibre d'un potentiel Hölder tel que $\dim_H \nu > 2$ alors*

$$R^{\Psi,\Pi}(p, v) = 1$$

pour ν-presque tout $(p, v) \in T^1M$ non multiple.

Preuve. Pour cela, il suffit d'utiliser le Théorème 5.25 et le Théorème 1.1. de [68]. □

Preuve du Théorème 5.25. Nous avons déjà remarqué dans la preuve du Théorème 5.21 que comme M a une courbure strictement négative, Ψ est métriquement isomorphe à un flot suspendu symbolique et que la distance sur X peut être choisie telle que l'isomorphisme (que nous noterons g) reliant les deux flots soit Lipschitz. De plus, ν étant un état d'équilibre pour un potentiel Hölder, μ est aussi un état d'équilibre pour le système dynamique $(X, \mathcal{A}, T)$ et la décroissance des corrélations est super-polynomiale. La suite de la preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant (que nous démontrerons par la suite) :

Lemme 5.28. *Pour tout* $(p, v) \in T^1M$

$$\underline{d}_\mu^{\Pi,g}(p,v) = \underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1$$

et

$$\overline{d}_\mu^{\Pi,g}(p,v) = \overline{d}_{\Pi_*\nu}(p) - 1.$$

Comme M est une variété compacte et comme le flot est le flot géodésique sur T^1M, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $t \leq \beta$ et pour tout $(x, u) \in T^1M$, $d(\Pi(x, u), \Pi(\Psi_t(x, u))) = t$. Alors, pour tout r assez petit, $\tau_r^{\Psi,\Pi}(p, v) \geq \beta$ et donc pour ν-presque tout $(p, v) \in T^1M$ qui n'est pas multiple, $\tau_r^{\Psi,\Pi}(p, v) \to +\infty$ quand $r \to 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout point (p, v) non multiple il existe $r(k, p, v) > 0$ tel que pour tout $0 < r < r(k, p, v)$, $\tau_r^{\Psi,\Pi}(p, v) > k$ ce qui implique que $\tau_r^{\Psi,\Pi}(p, v) = \tau_{r,k}^{\Psi,\Pi,\star}(p, v)$. On obtient donc

$$\underline{R}^{\Psi,\Pi}(p,v) = \underline{R}_\star^{\Psi,\Pi}(p,v) \qquad \text{et} \qquad \overline{R}^{\Psi,\Pi}(p,v) = \overline{R}_\star^{\Psi,\Pi}(p,v). \tag{5.4}$$

Ainsi, le Théorème est prouvé par (5.4), le Théorème 5.10, le Théorème 5.20 et le Lemme 5.28. □

Nous prouvons maintenant le lemme essentiel utilisé dans la preuve précédente.

Preuve du Lemme 5.28. Soit $(p, v) \in T^1M$. Soit $r > 0$.

$$\begin{aligned} \nu\left(\Pi^{-1}B(p,r)\right) &= \mu \otimes Leb(g^{-1}\left(\Pi^{-1}B(p,r)\right)) \\ &= \int_X \int_0^{\phi(x)} \mathbf{1}_{\Pi^{-1}B(p,r)}(g(x,t))dt\, d\mu(x) \end{aligned}$$

Comme Ψ est le flot géodésique sur T^1M et comme M est compacte, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $t \leq \beta$ et pour tout $(p, u) \in T^1M$, $d(\Pi(p, u), \Pi(\Psi_t(p, u))) = t$. Soit $x \in X$ tel qu'il existe $t \in (0, \phi(x))$ vérifiant $g(x, t) \in \Pi^{-1}B(p, r)$ alors si $r < \frac{\beta}{2}$,pour tout $s \in [2r, \beta]$ on a $g(x, t + s) \notin \Pi^{-1}B(p, r)$. En effet,

$$g(x, t+s) = g(\Phi_s(x,t)) = \Psi_s(g(x,t))$$

et donc

$$\begin{aligned} d(p, \Pi(g(x,t+s))) &\geq d(\Pi(g(x,t)), \Pi(g(x,t+s))) - d(p, \Pi(g(x,t))) \\ &\geq d(\Pi(g(x,t)), \Pi(\Psi_s g(x,t))) - r \\ &\geq s - r \geq 2r - r = r. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nu\left(\Pi^{-1}B(p,r)\right) \leq \frac{\sup_x \phi(x)}{\beta} 2r\mu\left(\pi(\Pi\circ g)^{-1}B(p,r)\right). \tag{5.5}$$

De plus, on peut remarquer que

$$\begin{aligned}\nu\left(\Pi^{-1}B(p,2r)\right) &= \int_X \int_0^{\phi(x)} \mathbf{1}_{\Pi^{-1}B(p,2r)}(g(x,t))dt\, d\mu(x) \\ &\geq \int_{\pi(\Pi\circ g)^{-1}B(p,r)} \int_0^{\phi(x)} \mathbf{1}_{\Pi^{-1}B(p,2r)}(g(x,t))dt\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Soit $x \in \pi(\Pi\circ g)^{-1}B(p,r)$, il existe donc $t \in (0,\phi(x))$ tel que $(x,t) \in (\Pi\circ g)^{-1}B(p,r)$. Ainsi, si r est suffisamment petit

$$\begin{aligned}d(\Pi(g(x,t+r)),p) &\leq d(\Pi(g(x,t+r)),\Pi(g(x,t))) + d(\Pi(g(x,t)),p) \\ &\leq d(\Pi(\Psi_r(g(x,t))),\Pi(g(x,t))) + r \\ &\leq r + r = 2r\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\nu\left(\Pi^{-1}B(p,2r)\right) \geq r\mu(\pi(\Pi\circ g)^{-1}B(p,r)). \tag{5.6}$$

En utilisant (5.5) et (5.6), on obtient

$$\underline{d}_{\Pi_*\nu}(p) = \underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\log\nu\left(\Pi^{-1}B(p,r)\right)}{\log r} = \underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\log\mu\left(\pi(\Pi\circ g)^{-1}B(p,r)\right)}{\log r} + 1 = \underline{d}_\mu^{\Pi,g}(p,v) + 1$$

et

$$\overline{d}_{\Pi_*\nu}(p) = \overline{\lim}_{r\to 0}\frac{\log\nu\left(\Pi^{-1}B(p,r)\right)}{\log r} = \overline{\lim}_{r\to 0}\frac{\log\mu\left(\pi(\Pi\circ g)^{-1}B(p,r)\right)}{\log r} + 1 = \overline{d}_\mu^{\Pi,g}(p,v) + 1.$$

□

5.5 Observations de flots suspendus

Nous donnons maintenant quelques exemples d'observations d'un flot suspendu où nous pouvons calculer les différentes dimensions et appliquer nos théorèmes. Dans ces exemples, nous verrons l'importance du choix de la fonction de fuite.

Soit $(X,\mathcal{A},T,\mu)$ un système dynamique muni d'une distance d et ayant une décroissance des corrélations super-polynomiale. On considère le flot suspendu Φ sur T avec fonction de toit 1.

5.5.1 Projection sur X

Choisissons tout d'abord l'observation f comme la projection sur X :

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \longrightarrow & X \\ & (x,s) & \longmapsto & x. \end{array}$$

Ainsi, pour tout $(x,s) \in Y$ on a

$$\underline{d}_{f_\star(\mu\otimes Leb)}(f(x,s)) = \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{d}_{f_\star(\mu\otimes Leb)}(f(x,s)) = \overline{d}_\mu(x)$$

et

$$\underline{d}_\mu^{f,id}(x,s) = \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{d}_\mu^{f,id}(x,s) = \underline{d}_\mu(x).$$

En choisissant la fonction de fuite $\rho_r = |\log r|$, et en comparant $\tau_{r,\rho}^{\Phi,f}$ et $\tau_{r,p}^{\Phi,f,\star}$, le Théorème 5.10 et le Théorème 5.14 nous donnent que pour $\mu \otimes Leb$-presque tout $(x,s) \in Y$

$$\underline{R}_\rho^{\Phi,f}(x,s) = \underline{R}_\star^{\Phi,f}(x,s) = \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{R}_\rho^{\Phi,f}(x,s) = \overline{R}_\star^{\Phi,f}(x,s) = \overline{d}_\mu(x)$$

pour $\mu \otimes Leb$-presque tout $(x,s) \in Y$ tel que $\underline{d}_\mu(x) > 0$.

Nous soulignons qu'avec cette observation on ne s'intéresse en fait qu'au temps de retour d'un point $x \in X$ sous l'action de T et on peut remarquer que l'on obtient le Théorème 1.32 pour les systèmes dynamiques discrets.

Il est important de noter que, dans ce cas, pour obtenir un résultat non trivial (si ce n'est optimal) la fonction de fuite doit être choisie avec précaution. En effet, si la fonction de fuite est $\rho_r(x) = r$ pour tout x par exemple, on obtient immédiatement que $\tau_{r,\rho}^{\Phi,f}(x,s) = r$ pour tout $(x,s) \in Y$ et pour r suffisamment petit. Cela vient du fait que $f^{-1}B(f(x,s),r) = B(x,r) \times [0,1]$ et donc le premier temps de sortie de cette ensemble par $\Phi_t(x,s)$ ne dépend pas de r mais uniquement de (x,s). Dans ce cas, on ne peut donc pas obtenir d'égalité entre les taux de récurrence et les dimensions.

5.5.2 Projection sur le temps

Prenons maintenant pour l'observation f la projection sur le temps :

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \longrightarrow & X \\ & (x,s) & \longmapsto & s. \end{array}$$

Alors, pour tout $(x,s) \in Y$ on a

$$\underline{d}_{f_\star(\mu\otimes Leb)}(f(x,s)) = 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{d}_{f_\star(\mu\otimes Leb)}(f(x,s)) = 1$$

En choisissant la fonction de fuite $\rho_r(s) = 2r$ (qui correspond par exemple au supremum essentiel des temps de sortie de $f^{-1}B(f(x,s),r)$) on obtient que pour $\mu \otimes Leb$-presque tout $(x,s) \in Y$

$$\underline{R}_\rho^{\Phi,f}(x,s) = \underline{R}_\star^{\Phi,f}(x,s) = \overline{R}_\rho^{\Phi,f}(x,s) = \overline{R}_\star^{\Phi,f}(x,s) = 0.$$

On peut tout de même remarquer que dans ce cas aussi on peut calculer les dimensions de projection pour l'observation f :

$$\underline{d}_\mu^{f,id}(x,s) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{d}_\mu^{f,id}(x,s) = 0.$$

Cet exemple et l'exemple précédent nous montre que pour chaque flot et chaque observation, nous devons choisir une fonction de fuite dépendant de ces paramètres.

On peut donc se demander s'il existe une unique fonction de fuite nous donnant un résultat optimal pour tous les flots. On pourra remarquer que pour les deux exemples précédents, en prenant la fonction de fuite

$$\rho_r(f(y)) = \frac{|\log r|}{f_*(\mu \otimes Leb)(B(f(y))} \int_Y \inf\{t > 0 : f(\Phi_t(y)) \notin B(f(y), r)\} d\mu \otimes Leb(y), \tag{5.7}$$

on obtient des résultats optimaux.

5.5.3 Projection mixte

Supposons maintenant que l'espace X est un espace produit, c'est-à-dire qu'il existe deux espaces X_1 et X_2 tels que $X = X_1 \times X_2$. Soit f l'observation suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \longrightarrow & X_1 \times [0,1) \\ & (x_1, x_2, s) & \longmapsto & (x_1, s). \end{array}$$

Ainsi, pour tout $(x_1, x_2, s) \in Y$ on a

$$\underline{d}_\mu^{f,id}(x_1, x_2, s) = \underline{\lim}_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x_1, r) \times X_2)}{\log r}$$

et

$$\overline{d}_\mu^{f,id}(x_1, x_2, s) = \overline{\lim}_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x_1, r) \times X_2)}{\log r}$$

De plus, on peut montrer facilement que

$$\underline{d}_{f_\star \mu \otimes Leb}(f(x_1, x_2, s)) = \underline{d}_\mu^{f,id}(x_1, x_2, s) + 1$$

et

$$\overline{d}_{f_\star \mu \otimes Leb}(f(x_1, x_2, s)) = \overline{d}_\mu^{f,id}(x_1, x_2, s) + 1.$$

Ainsi, en prenant pour fonction de fuite $\rho_r(x_1, s) = r|\log r|$ (qui est en fait la fonction de fuite définie par (5.7)) et en prenant en compte la Proposition 5.9, on peut montrer, en utilisant le Théorème 5.10 et le Théorème 5.14, que pour $\mu \otimes Leb$-presque tout $(x_1, x_2, s) \in Y$ tel que $\underline{R}_\rho^{\Phi,f}(x_1, x_2, s) > 0$ on a

$$\underline{R}_\rho^{\Phi,f}(x_1, x_2, s) = \underline{R}_\star^{\Phi,f}(x_1, x_2, s) = \underline{d}_\mu^{f,id}(x_1, x_2, s)$$

et

$$\overline{R}_\rho^{\Phi,f}(x_1, x_2, s) = \overline{R}_\star^{\Phi,f}(x_1, x_2, s) = \overline{d}_\mu^{f,id}(x_1, x_2, s)$$

dès que $\underline{d}_\mu^{f,id}(x_1, x_2, s) > 0$.

5.6 Majoration des taux de récurrence

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 5.10 :

Preuve. D'après le Lemme 2.15 toute mesure de probabilité est faiblement diamétralement régulière sur $\mathbb{R}^d$ (pour $d \in \mathbb{N}^*$ quelconque) et ainsi la mesure $f_*\nu$ est faiblement diamétralement régulière sur $\mathbb{R}^N$. On peut remarquer que dans la définition de mesure faiblement diamétralement régulière et dans la Définition 5.7, les fonctions $\delta(f(\cdot), \varepsilon, \eta)$ et $\zeta(f(.), \varepsilon, \xi_1, \xi_2)$ sont mesurables pour tout ε, η, ξ_1 et ξ_2. Fixons $\varepsilon > 0$, $\eta = 4$, $\xi_1 = \frac{3}{4}$ et $\xi_2 = \frac{5}{4}$. On choisit $\delta > 0$ assez petit pour avoir :

$$\nu(M_\delta) > \nu(M) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

où $M_\delta := \{x \in M : \delta(f(x), \varepsilon, \eta) > \delta \text{ et } \zeta(f(x), \varepsilon, \xi_1, \xi_2) > \delta\}$. Pour $\delta > r > 0$ on définit

$$A_\varepsilon(r) := \left\{ y \in M_\delta : \tau^{\Psi,f}_{3r,\alpha}(y)\nu\left(B(f(y), r)\right) \frac{1}{\rho_{5r}(f(y))} \geq r^{-4\varepsilon} \right\}.$$

Soit $C \subset M_\delta$ tel que $(f(x))_{x\in C}$ est un ensemble maximal r-separé pour $f(M_\delta)$. On a

$$\nu(A_\varepsilon(r)) \leq \sum_{x\in C} \nu \left\{ y \in f^{-1}B(f(x), r) : \tau^{\Psi,f}_{3r,\alpha}(y)\nu\left(f^{-1}B(f(y), r)\right) \frac{1}{\rho_{5r}(f(y))} \geq r^{-4\varepsilon} \right\}.$$

Pour $y \in f^{-1}B(f(x), 2r)$ on définit

$$\tau^{\Psi,f}_{2r,\alpha}(y, x) = \inf\left\{ t > \rho_{4r}(f(x))r^{-\varepsilon} \ : \ f(\Psi_t y) \in B(f(x), 2r) \right\}.$$

Si $y \in f^{-1}B(f(x), r)$, comme $\rho_{4r}(f(x))r^{-\varepsilon} \geq \rho_{3r}(f(y))$ et comme $B(f(x), 2r) \subset B(f(y), 3r)$, on a

$$\tau^{\Psi,f}_{2r,\alpha}(y, x) \geq \tau^{\Psi,f}_{3r,\alpha}(y).$$

De plus

$$\nu\left(f^{-1}B(f(y), r)\right) \leq \nu\left(f^{-1}B(f(x), 2r)\right)$$

et

$$\rho_{4r}(f(x))r^{\varepsilon} \leq \rho_{5r}(f(y))$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} &\nu(A_\varepsilon(r)) \\ \leq \ & \sum_{x\in C} \nu \left\{ y \in f^{-1}B(f(x), r) : \tau^{\Psi,f}_{2r,\alpha}(y, x)\nu\left(f^{-1}B(f(x), 2r)\right) \frac{1}{\rho_{4r}(f(x))r^{\varepsilon}} \geq r^{-4\varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite, d'après l'inégalité de Markov

$$\nu(A_\varepsilon(r)) \leq \sum_{x\in C} \frac{r^{3\varepsilon}}{\rho_{4r}(f(x))} \nu\left(f^{-1}B(f(x), 2r)\right) \int_{f^{-1}B(f(x),2r)} \tau^{\Psi,f}_{2r,\alpha}(y, x) d\nu(y). \tag{5.8}$$

On dénote D_r l'ensemble $f^{-1}B(f(x), 2r)$. On définit l'application T_r de M dans M par

$$\begin{aligned} T_r \ : M &\longrightarrow M \\ y &\longmapsto \Psi_r(y) \end{aligned}$$

et le temps de retour non-instantané pour $y \in D_r$

$$\tau_{D_r}^{T_r}(y) := \inf\{n > \frac{\rho_{4r}(f(x))r^{-\varepsilon}}{r} \ : \ T_r^n y \in D_r\}.$$

Comme ce temps de retour est inférieur au $\frac{\rho_{4r}(f(x))r^{-\varepsilon}}{r}$-ième temps de retour de y dans D_r, le Lemme de Kač nous donne

$$\int_{D_r} \tau_{D_r}^{T_r}(y) d\nu(y) \leq \frac{\rho_{4r}(f(x))r^{-\varepsilon}}{r}.$$

De plus, pour $y \in D_r$ on observe que

$$\tau_{2r,\alpha}^{\Psi,f}(y,x) \leq r\tau_{D_r}^{T_r}(y)$$

et donc on obtient

$$\int_{f^{-1}B(f(x),2r)} \tau_{2r,\alpha}^{\Psi,f}(y,x) d\nu(y) \leq \rho_{4r}(f(x))r^{-\varepsilon}. \tag{5.9}$$

En utilisant (5.8) et (5.9), on a

$$\nu(A_\varepsilon(r)) \leq \sum_{x\in C} r^{2\varepsilon} \nu\left(f^{-1}B(f(x),2r)\right).$$

Comme la mesure $f_*\nu$ est faiblement diamétralement régulière et par définition de C on obtient

$$\begin{aligned} \nu(A_\varepsilon(r)) &\leq \sum_{x\in C} r^{2\varepsilon} r^{-\varepsilon} \nu\left(f^{-1}B\left(f(x),\frac{r}{2}\right)\right) \\ &\leq r^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Finalement, comme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_\varepsilon(e^{-n})) < +\infty$$

d'après le Lemme de Borel-Cantelli, pour ν-presque tout $x \in M_\delta$, il existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N(x)$

$$\tau_{3e^{-n},\alpha}^{\Psi,f}(x)\nu\left(f^{-1}B(f(x),e^{-n})\right) \leq e^{4\varepsilon n}\rho_{5e^{-n}}(f(x))$$

et ainsi

$$\frac{\log \tau_{3e^{-n},\alpha}^{\Psi,f}(x)}{n} \leq \frac{\log \nu\left(f^{-1}B(f(x),e^{-n})\right)}{-n} - \frac{\log \rho_{5e^{-n}}(f(x))}{-n} + 4\varepsilon. \tag{5.10}$$

Comme on peut prouver facilement que pour $a > 0$

$$\underline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \tau_{ae^{-n},\rho}^{\Psi,f}(x)}{n} \quad , \quad \overline{R}_\rho^{\Psi,f}(x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \tau_{ae^{-n},\rho}^{\Psi,f}(x)}{n},$$

$$\underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \nu\left(f^{-1}B(f(x),r)\right)}{\log r} - \frac{\log \rho_r(f(x))}{\log r} = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log \nu\left(f^{-1}B(f(x),e^{-n})\right)}{-n} - \frac{\log \rho_{5e^{-n}}(f(x))}{-n},$$

$$\overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \nu\left(f^{-1}B(f(x),r)\right)}{\log r} - \frac{\log \rho_r(f(x))}{\log r} = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log \nu\left(f^{-1}B(f(x),e^{-n})\right)}{-n} - \frac{\log \rho_{5e^{-n}}(f(x))}{-n},$$

et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, le théorème est prouvé en prenant la limite inférieure et la limite supérieure quand $n \to +\infty$ dans (5.10). □

5.7 Minoration des taux de récurrence

Dans cette section, nous allons prouver le Théorème 5.14, en prouvant dans un premier temps le Théorème 5.20.

La fonction $\tilde{f}$ étant Lipschitz, nous noterons $\tilde{L}$ sa constante de Lipschitz. Soient $a > 0$, $b > 0$, $\beta > 0$ et $\rho > 0$. Soit $Y_a := \{y \in Y\,,\, \underline{d}_\mu^{f,g}(g(y)) > a\}$. On pose

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{y \in Y_a : \forall r \leq \rho,\, \mu\left(\pi \tilde{f}^{-1} B\left(\tilde{f}(y), r\right)\right) \leq r^a\right\} \\ G_2 &= \left\{y = (x,s) \in Y_a : \forall r \leq \rho,\, \mu\left(B\left(x, \frac{r}{2}\right)\right) \geq r^{N+b}\right\} \\ G_3 &= \left\{y = (x,s) \in Y_a : \forall r \leq \rho,\, \mu\left(B\left(x, \frac{r}{2}\right)\right) \geq \mu\left(B\left(x, 2r\right)\right) r^\beta\right\}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que $G(a,b,\beta,\rho) := G_1 \cap G_2 \cap G_3$ vérifie

$$\mu \otimes Leb(G(a,b,\beta,\rho)) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} \mu \otimes Leb(Y_a). \tag{5.11}$$

En effet, par définition de $\underline{d}_\mu^{f,g}$, on a $\mu \otimes Leb(G_1) \to \mu \otimes Leb(Y_a)$. De plus, comme $\overline{d}_\mu \leq N$ μ-presque partout, $\mu \otimes Leb(G_2) \to \mu \otimes Leb(Y_a)$, et comme la mesure μ est faiblement diamétralement régulière, $\mu \otimes Leb(G_3) \to \mu \otimes Leb(Y_a)$.

Soit $\alpha > 0$, on définit

$$Y(\alpha, a) = \{y = (x,s) \in Y_a \,:\, \alpha < s < \phi(x) - \alpha\}.$$

On considère maintenant l'ensemble $G = G(a,b,\beta,\rho) \cap Y(\alpha,a)$. En suivant les idées de Pène et Saussol [79] pour les temps de retour dans les billiards, on utilisera un recouvrement spécial de Y. Comme X est compact, il existe, pour $r >$ suffisamment petit, un sous-ensemble fini $E = (m_i)_{i \in I} \subset X$ et une suite finie $(s_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \subset \mathbb{R}$ tels que $\{P_{ij}(r) := \{\Phi_s(B(m_i, r) \times \{s_{ij}\}), 0 \leq s \leq r\}\}_{(i,j) \in I \times J}$ vérifie

1. $(m_i, s_{ij}) \in G$ pour tout $(i,j) \in I \times J$;
2. $G \subset \bigcup_{(i,j) \in I \times J} P_{ij}(r)$;
3. $B(m_{i_1}, \frac{r}{2}) \cap B(m_{i_2}, \frac{r}{2}) = \emptyset$ pour tout $i_1 \neq i_2$;
4. $s_{ij} \in (0, \phi(m_i))$ pour tout i, j ;
5. $Y(\alpha, a) \subset \bigcup_{i,j} P_{ij}(r) \subset Y(\frac{\alpha}{2}, a)$;
6. $P_{ij}(\frac{r}{2}) \cap P_{kl}(\frac{r}{2}) = \emptyset$ pour tout $(i,j) \neq (k,l)$.

Soit $r \leq \rho$, on définit :

$$A_r^{\tilde{f}}(y) = \left\{x \in X \,:\, \exists t \in [0, \phi(x)[\,,\, \Phi_t(x,0) \in \tilde{f}^{-1} B(\tilde{f}(y), r)\right\}.$$

Lemme 5.29. *Sous les hypothèses du Théorème 5.20, pour tout $(x,s) \in Y$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $K > 0$ et pour tout $r > 0$ on a*

$$\mu\left(B(x,r) \cap T^{-n} A_{Kr}^{\tilde{f}}(x,s)\right) \leq \frac{\tilde{L}c}{K} \frac{1}{r^2} \theta_n + \mu\left(B(x,2r)\right) \mu\left(A_{2Kr}^{\tilde{f}}(x,s)\right)$$

où c est une constante strictement positive dépendant uniquement des différentes métriques.

Preuve. Soient $(x,s) \in Y$ et $r > 0$. Soient $h_{x,r}$ et $h'_{(x,s),r}$ définies comme suit

$$\begin{array}{rccl} h_{x,r}: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & h(u) = \max\left\{0, 1 - \frac{1}{r} d(u, B(x,r))\right\} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} h'_{(x,s),r}: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & \sup\limits_{t \in [0,\phi(u)[} \max\left\{0, 1 - \frac{1}{Kr} d(B(\tilde{f}(x,s), Kr), \tilde{f}(u,t))\right\}. \end{array}$$

$h_{x,r}$ est $\frac{1}{r}$-Lipschitz et $h'_{(x,s),r}$ est $\frac{\tilde{L}c}{Kr}$-Lipschitz avec c la constante donnée par la Proposition 17 de [17]. De plus, on a $1_{B(x,r)} \leq h_{x,r} \leq 1_{B(x,2r)}$ et $1_{A^{\tilde{f}}_{Kr}(x,s)} \leq h'_{(x,s),r} \leq 1_{A^{\tilde{f}}_{2Kr}(x,s)}$. Comme la décroissance des corrélations de (X,T,μ) est super-polynomiale, on obtient

$$\begin{aligned} \mu\left(B(x,r) \cap T^{-n} A^{\tilde{f}}_{Kr}(x,s)\right) &\leq \int_X h_{x,r}(u) h'_{(x,s),r}(T^n u) d\mu(u) \\ &\leq \|h_{x,r}\| \|h'_{(x,s),r}\| \theta_n + \int_X h_{x,r} d\mu \int_X h'_{(x,s),r} d\mu \\ &\leq \frac{\tilde{L}c}{K} \frac{1}{r^2} \theta_n + \mu\left(B(x,2r)\right) \mu\left(A^{\tilde{f}}_{2Kr}(x,s)\right). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.30. *Sous les hypothèses du Théorème 5.20,*

$$\underline{R}^{\Phi,\tilde{f}}_{\star}(y) > 0 \text{ pour } \mu \otimes Leb\text{-presque tout } y \text{ tel que } \underline{d}^{f,g}_{\mu}(g(y)) > 0.$$

Preuve. Soit $Y_+ := \{\underline{d}^{f,g}_{\mu}(g(y)) > 0\}$. Soit $1 > \varepsilon > 0$ et soit $a > 0$ tels que $\mu \otimes Leb(Y_+) \geq \mu \otimes Leb(Y_a) > \mu \otimes Leb(Y_+) - \varepsilon$. Soit $\alpha > 0$. On fixe $b > 0$, $\beta = \frac{a}{2}$ et pour $\rho > 0$ on considère l'ensemble $G = G(a,b,\beta,\rho) \cap Y(\alpha,a)$ defini précédemment. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{4/a}} < \rho$ et on définit

$$H_n := \{y = (x,s) \in Y(\alpha,a) \,:\, T^n x \in A^{\tilde{f}}_{r_n}(y)\}.$$

Considérons l'ensemble $\{P_{ij}(r_n)\}_{(i,j) \in I \times J}$ défini précédemment. Alors,

$$\begin{aligned} \mu \otimes Leb(G \cap H_n) &\leq \sum_{(i,j) \in I \times J} \mu \otimes Leb\left((x,s) \in P_{ij}(r_n) : T^n x \in A^{\tilde{f}}_{r_n}(x,s)\right) \\ &\leq \sum_{(i,j) \in I \times J} \mu \otimes Leb\left((x,s) \in P_{ij}(r_n) : T^n x \in A^{\tilde{f}}_{(1+2\tilde{L}c)r_n}(m_i, s_{ij})\right). \end{aligned}$$

La définition de $P_{ij}(r_n)$ nous donne pour tout $(i,j) \in I \times J$

$$\begin{aligned} & \mu \otimes Leb\left((x,s) \in P_{ij}(r_n) : T^n x \in A^{\tilde{f}}_{(1+2\tilde{L}c)r_n}(m_i, s_{ij})\right) \\ = \; & \mu \otimes Leb\left((x,s) \in B(m_i, r_n) \times [s_{ij}, s_{ij} + r_n] : T^n x \in A^{\tilde{f}}_{(1+2\tilde{L}c)r_n}(m_i, s_{ij})\right) \\ = \; & r_n \mu\left(x \in B(m_i, r_n) : T^n x \in A^{\tilde{f}}_{(1+2\tilde{L}c)r_n}(m_i, s_{ij})\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ainsi, d'après le Lemme 5.29 et (5.12), on obtient

$$\begin{aligned}&\mu\otimes Leb(G\cap H_n)\\ \leq\ &\sum_{(i,j)\in I\times J} r_n\left[\frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c+1}\frac{1}{r_n^2}\theta_n+\mu\left(B(m_i,2r_n)\right)\mu\left(A^{\tilde{f}}_{2(1+2\tilde{L}c)r_n}(m_i,s_{ij})\right)\right].\end{aligned}$$

Par définition de G on a

$$\begin{aligned}&\mu\otimes Leb(G\cap H_n)\\ \leq\ &\sum_{(i,j)\in I\times J}\left[\frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c+1}r_n^{-N-b-1}\theta_n+r_n^{1-\beta}(2(1+2\tilde{L}c)r_n)^a\right]\mu\left(B(m_i,\frac{r_n}{2})\right)\end{aligned}$$

et par définition de P_{ij}

$$\mu\otimes Leb(G\cap H_n)\leq\|\phi\|\left[\frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c+1}r_n^{-N-b-2}\theta_n+r_n^{-\beta}(2(1+2\tilde{L}c)r_n)^a\right].$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}r_n^{a-\beta}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}<+\infty$ et comme la décroissance des corrélations est super-polynomiale, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mu\otimes Leb(G\cap H_n)<+\infty.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli et en utilisant (5.11), on a que pour $\mu\otimes Leb$-presque tout $y=(x,s)\in Y(\alpha,a)$, il existe $n_1(y)$ tel que pour tout $n\geq n_1(y)$, $T^nx\notin A^{\tilde{f}}_{\frac{1}{n^{4/a}}}$, i.e. pour tout $n\geq n_1(y)$ et pour tout $t\in[0,\phi(T^nx)[$, $\tilde{f}(T^nx,t)\notin B(\tilde{f}(x,s),\frac{1}{n^{4/a}})$. Ainsi, pour $\mu\otimes Leb$-presque tout $y\in Y(\alpha,a)$, pour tout $p\geq n_1(y)$ et pour tout $n\geq n_1(y)$

$$\tau^{\Phi,\tilde{f},\star}_{\frac{1}{n^{4/a}},p}(x,s)>n \tag{5.13}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\underline{R}^{\Phi,\tilde{f}}_{\star}(y)&=\lim_{p\to+\infty}\liminf_{r\to0}\frac{\log\tau^{\Phi,\tilde{f},\star}_{r,p}(y)}{-\log r}\\&=\lim_{p\to+\infty}\liminf_{n\to+\infty}\frac{\log\tau^{\Phi,\tilde{f},\star}_{\frac{1}{n^{4/a}},p}(y)}{-\log\frac{1}{n^{4/a}}}\\&\geq\lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{\log n^{4/a}}=\frac{a}{4}>0.\end{aligned}$$

Comme on peut choisir α et ε arbitrairement petits, le lemme est démontré. □

Lemme 5.31. *Soient $a>0$, $\delta>0$ et $1>\varepsilon>0$. Pour $\mu\otimes Leb$-presque tout $y\in Y_a:=\{\underline{d}^{f,g}_\mu(g(y))>a\}$, il existe $r(y)>0$ tel que pour tout $r\in]0,r(y)[$ et pour tout $t\in\left[r^{-\delta},\mu\left(\pi\tilde{f}^{-1}B(\tilde{f}(y),(2\tilde{L}c+1)er)\right)^{-1+\varepsilon}\right]$, on a $d(\tilde{f}(\Phi_t y),\tilde{f}(y))\geq r$.*

Preuve. Soit $\alpha > 0$. Soit $1 > \varepsilon > 0$. On fixe $b > 0$, $\beta = \frac{a\varepsilon}{2}$ et pour $\rho > 0$ on considère l'ensemble $G = G(a, b, \beta, \rho) \cap Y(\alpha, a)$. Soient $\delta > 0$ et $r \leq \rho$, on définit :

$$C_\varepsilon(r) := \Big\{ w \in Y \quad : \quad \exists t \in \left[r^{-\delta}, \mu \left(\pi \tilde{f}^{-1} B(\tilde{f}(w), (6\tilde{L}c + 2)r) \right)^{-1+\varepsilon} \right] \\ \text{tel que } d(\tilde{f}(\Phi_t w), \tilde{f}(w)) < r \Big\}.$$

Pour $x \in G$ et $s > 0$, on pose $B_{r,s}(x) := B(x, r) \times [s, s + r]$ et en posant $I_r = \left[\lfloor r^{-\delta} \rfloor, \mu \left(\pi \tilde{f}^{-1} B(\tilde{f}(x, s), (4\tilde{L}c + 2)r) \right)^{-1+\varepsilon} \right] \cap \mathbb{N}$ on peut montrer que l'on a :

$$B_{r,s}(x) \cap C_\varepsilon(r) \subset \bigcup_{I_r} B(x, r) \cap T^{-n} A^{\tilde{f}}_{(2\tilde{L}c+1)r}(x, s) \times [s, s + r]. \tag{5.14}$$

En effet, choisissons un élément w de $B_{r,s}(x) \cap C_\varepsilon(r)$. Par définition cela veut dire que $w \in B_{r,s}(x)$ et qu'il existe $t \in [r^{-\delta}, \mu(\{\pi \tilde{f}^{-1} B(\tilde{f}(w), (6\tilde{L}c + 2)r)\})^{-1+\varepsilon}]$ tel que $d(\tilde{f}(\Phi_t w), \tilde{f}(w)) < r$.

Mais en remarquant que $B(\tilde{f}(x, s), (4\tilde{L}c + 2)r) \subset B(\tilde{f}(w), (6\tilde{L}c + 2)r)$, le temps t précédent est inférieur à $\mu(\{\pi \tilde{f}^{-1} B(\tilde{f}(x, s), (4\tilde{L}c + 2)r)\})^{-1+\varepsilon}$.

Maintenant, pour se ramener au fait que nous travaillons avec un flot suspendu sur une application T, on notera $w = (v, u)$ et l'on peut subdiviser notre intervalle dans lequel le t existe en des intervalles de temps de longueur 1 et ayant pour borne des entiers.

Ainsi, si $(v, u) \in B_{r,s}(x)$ alors il existe un entier $n \in I_r$ et il existe un temps $t \in [0, \phi(T^n v)[$ tel que l'on a $d(\tilde{f}(T^n v, t)), \tilde{f}(v, u)) < r$.

En remarquant que $\tilde{f}$ est Lipschitz et que $(v, u) \in B_{r,s}(x)$, on peut voir que pour le n et le t précédent on a aussi que $d(\tilde{f}(T^n v, t)), \tilde{f}(x, s)) < (2\tilde{L}c + 1)r$ mais cela implique que $v \in T^{-n} A^{\tilde{f}}_{(2\tilde{L}c+1)r}(x, s)$ et ainsi on obtient l'équation (5.14).

Soit $k > 1$ tel que $\delta(k - 1) - 1 \geq N + 2b$ et soit $\rho > 0$ tel que $n \geq \rho^{-\delta}$ implique $(k - 1)(n + 1)^{-k} \geq \theta_n$ (ce qui est possible par définition de θ_n). On a d'après le Lemme 5.29

$$\begin{aligned} & \mu \otimes Leb\,(B_{r,s}(x) \cap C_\varepsilon(r)) \\ \leq\ & r \sum_{n \in I_r} \left[\frac{\tilde{L}c}{(2\tilde{L}c + 1)r^2} \theta_n + \mu\,(B(x, 2r))\, \mu \left(A^{\tilde{f}}_{2(2\tilde{L}c+1)r}(x, s) \right) \right] \\ \leq\ & \frac{\tilde{L}c}{(2\tilde{L}c + 1)} r^{\delta(k-1)-1} + r\mu(B(x), 2r))\mu \left(A^{\tilde{f}}_{2(2\tilde{L}c+1)r}(x, s) \right)^{\varepsilon} \end{aligned}$$

et par définition de G

$$\begin{aligned} \mu \otimes Leb\,(B_{r,s}(x) \cap C_\varepsilon(r)) \ &\leq\ \frac{\tilde{L}c}{(2\tilde{L}c + 1)} r^{N+2b} + (4\tilde{L}c + 2)^{a\varepsilon} r^{1+\frac{a\varepsilon}{2}} \mu(B(x, \frac{r}{2})) \\ &\leq\ \mu(B(x, \frac{r}{2})) \left(\frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c + 1} r^b + (4\tilde{L}c + 2)^{a\varepsilon} r^{1+\frac{a\varepsilon}{2}} \right). \end{aligned}$$

Considérons l'ensemble $\{P_{ij}(r)\}_{(i,j)\in I\times J}$ défini précédemment. On a

$$\begin{aligned}
\mu\otimes Leb(G\cap C_\varepsilon(r)) &\leq \sum_{(i,j)\in I\times J}\mu\otimes Leb(C_\varepsilon(r)\cap P_{ij}(r))\\
&\leq \sum_{(i,j)\in I\times J}\mu(B(m_i,\frac{r}{2}))\left(\frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c+1}r^b+(4\tilde{L}c+2)^{a\varepsilon}r^{1+\frac{a\varepsilon}{2}}\right)\\
&\leq \sum_{j\in J}\left(\frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c+1}r^b+(4\tilde{L}c+2)^{a\varepsilon}r^{1+\frac{a\varepsilon}{2}}\right)\\
&\leq \frac{\|\phi\|}{r}\left(\frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c+1}r^b+(4\tilde{L}c+2)^{a\varepsilon}r^{1+\frac{a\varepsilon}{2}}\right)\\
&\leq \frac{\tilde{L}c}{2\tilde{L}c+1}r^{b-1}+(4\tilde{L}c+2)^{a\varepsilon}r^{\frac{a\varepsilon}{2}}.
\end{aligned}$$

Ensuite, en choisissant $b=1$, on obtient

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu\otimes Leb(G\cap C_\varepsilon(e^{-k}))<+\infty.$$

et ainsi, par le Lemme de Borel-Cantelli, pour $\mu\otimes Leb$-presque tout $y\in G$, il existe $n_1(y)$ tel que pour tout $k\geq n_1(y)$, $y\notin C_\varepsilon(e^{-k})$. D'où, pour r suffisamment petit, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $e^{-k-1}<r\leq e^{-k}\leq e^{-n_1(y)}$. De plus, comme $e^{\delta k}\leq r^{-\delta}$ et $(2\tilde{L}c+1)e^{-k}<(2\tilde{L}c+1)er$, il n'existe aucun entier $t\in[r^{-\delta},\mu\left(\pi\tilde{f}^{-1}B(\tilde{f}(y),(2\tilde{L}c+1)er)\right)^{-1+\varepsilon}]$ tel que $d(\tilde{f}(\Phi_t y),\tilde{f}(y))\geq r$. Le lemme est prouvé en choisissant α arbitrairement petit. □

Preuve du Théorème 5.20. Soit $\zeta>0$. Comme $\underline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y)>0$ pour $\mu\otimes Leb$-presque tout $y\in Y_+=\{\underline{d}_\mu^{f,g}(g(y))>0\}$ d'après le Lemme 5.30, il existe $a>0$ tel que $\mu\otimes Leb(Y_+)\geq\mu\otimes Leb(\{\underline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y)>a\})>\mu\otimes Leb(Y_+)-\zeta$. Pour tout $y\in\{\underline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y)>a\}$, pour p suffisamment grand et r suffisamment petit, on a

$$\tau_{r,p}^{\Phi,\tilde{f},\star}(y)\geq r^{-a}.$$

Grâce au Lemme 5.31 en prenant $\delta=a$ et $\varepsilon>0$, pour $\mu\otimes Leb$-presque tout $y\in\{\underline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y)>a\}$, si r est suffisamment petit et p suffisamment grand, alors $\tau_{r,p}^{\Phi,\tilde{f},\star}(y)\geq\mu\left(\pi\tilde{f}^{-1}B(\tilde{f}(y),(2\tilde{L}c+1)er)\right)^{-1+\varepsilon}$. Ainsi, $\underline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y)\geq(1-\varepsilon)\underline{d}_\mu^{f,g}(g(y))$ et $\overline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y)\geq(1-\varepsilon)\overline{d}_\mu^{f,g}(g(y))$ $\mu\otimes Leb$-presque partout sur $\{\underline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y)>a\}$. Le théorème est démontré en choisissant $\varepsilon>0$ arbitrairement petit et ensuite $\zeta>0$ arbitrairement petit. □

Preuve du Théorème 5.14. Il existe $Y_g\subset Y$ tel que $\mu\otimes Leb(Y_g)=\nu(g(Y_g))=1$ et tel que g est bijective sur Y_g. Ainsi pour ν-presque tout $x\in M$, il existe $y\in Y_g$ tel que $x=g(y)$ et en remarquant que

$$\underline{R}_\star^{\Psi,f}(x)=\underline{R}_\star^{\Psi,\tilde{f}}(y)$$

et que

$$\overline{R}_\star^{\Psi,f}(x) = \overline{R}_\star^{\Phi,\tilde{f}}(y),$$

le théorème est démontré d'après le Théorème 5.20.

□

Preuve Du Corollaire 5.17. Soit $x \in M$ un point non fixe. Nous avons déjà vu dans la preuve du Corollaire 5.11, que d'après le théorème des boîtes de flots, il existe un voisinage U de x, $\beta > 0$, $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ tels que pour tout $0 < t \leq \beta$ et pour tout $z \in U$, $\gamma_2 t \geq d(z, \Psi_t(z)) \geq \gamma_1 t$. Soit $\frac{\beta}{2} > r > 0$ et tel que $B(x,r) \subset U$.

$$\begin{aligned} \nu\left(B(x,r)\right) &= \mu \otimes Leb(g^{-1}B(x,r)) \\ &= \int_X \int_0^{\phi(u)} \mathbf{1}_{B(x,r)}(g(u,t))dt\, d\mu(u) \end{aligned}$$

Soit $u \in X$ tel qu'il existe $t \in (0, \phi(u))$ vérifiant $g(u,t) \in B(x,r)$ alors comme $r < \frac{\beta}{2}$, pour tout $s \in [\frac{2r}{\gamma_1}, \beta]$ on a $g(u, t+s) \notin B(x,r)$. En effet,

$$g(u,t+s) = g(\Phi_s(u,t)) = \Psi_s(g(u,t))$$

et donc

$$\begin{aligned} d(x, g(u,t+s)) &\geq d(g(u,t), g(u,t+s)) - d(x, g(u,t)) \\ &\geq d(g(u,t), \Psi_s g(u,t)) - r \\ &\geq \gamma_1 s - r \geq 2r - r = r. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nu\left(B(x,r)\right) \leq 2r \frac{\sup_u \phi(u)}{\gamma_1} \mu\left(\pi g^{-1} B(x,r)\right). \tag{5.15}$$

De plus, on observe que

$$\begin{aligned} \nu\left(B(x,2r)\right) &= \int_X \int_0^{\phi(u)} \mathbf{1}_{B(x,2r)}(g(u,t))dt\, d\mu(u) \\ &\geq \int_{\pi g^{-1}B(x,r)} \int_0^{\phi(u)} \mathbf{1}_{B(x,2r)}(g(u,t))dt\, d\mu(u). \end{aligned}$$

Soit $u \in \pi g^{-1}B(x,r)$, il existe donc $t \in (0, \phi(u))$ tel que $(u,t) \in g^{-1}B(x,r)$. Alors, si r est assez petit

$$\begin{aligned} d(g(u, t + \frac{r}{\gamma_2}), x) &\leq d(g(u, t + \frac{r}{\gamma_2}), g(u,t)) + d(g(u,t), x) \\ &\leq d(\Psi_{\frac{r}{\gamma_2}}(g(u,t)), g(u,t)) + r \\ &\leq r + r = 2r \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\nu\left(B(x,2r)\right) \geq \frac{r}{\gamma_2} \mu(\pi g^{-1} B(x,r)). \tag{5.16}$$

En utilisant (5.15) et (5.16), on obtient

$$\underline{d}_\nu(x) = \underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \nu\left(B(x,r)\right)}{\log r} = \underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mu\left(\pi g^{-1} B(x,r)\right)}{\log r} + 1 = \underline{d}_\mu^{id,g}(x) + 1 \tag{5.17}$$

et

$$\overline{d}_\nu(x) = \overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \nu\left(B(x,r)\right)}{\log r} = \overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\log \mu\left(\pi g^{-1} B(x,r)\right)}{\log r} + 1 = \overline{d}_\mu^{id,g}(x) + 1. \tag{5.18}$$

Comme pour tout $t \leq \beta$ et pour tout $y \in M$, $d(y, \Psi_t(y)) \geq \gamma t$. Alors, pour tout r assez petit, $\tau_r^\Psi(x) \geq \gamma\beta$ et donc pour ν-presque tout $x \in M$ qui n'est pas périodique, $\tau_r^\Psi(x) \to +\infty$ quand $r \to 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout point x non périodique il existe $r(p,x) > 0$ tel que pour tout $0 < r < r(p,x)$, $\tau_r^\Psi(x) > p$ ce qui implique que $\tau_r^\Psi(x) = \tau_{r,p}^{\Psi,id,\star}(x)$. On obtient donc

$$\underline{R}^\Psi(x) = \underline{R}_\star^{\Psi,id}(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{R}^\Psi(x) = \overline{R}_\star^{\Psi,id}(x). \tag{5.19}$$

Finalement, le corollaire est prouvé par (5.17), (5.18), (5.19), Corollaire 5.11 et Théorème 5.14.

□

Conclusion

Lors de ce travail sur la récurrence pour les observations de systèmes dynamiques, nous avons relié le comportement asymptotique du temps de retour pour une observation à la dimension de la mesure image. En particulier, pour des systèmes mélangeant rapidement, nous avons démontré une égalité entre les taux de récurrence non-instantanés pour l'observation et les dimensions locales de la mesure image. Par la suite, ces résultats nous ont permis d'étudier la récurrence pour les systèmes dynamiques aléatoires et de démontrer une égalité entre les taux de récurrence (*quenched* et *annealed*) et les dimensions locales de la mesure stationnaire lorsque le système mélange super-polynomialement. Dans le cas des flots, nous avons obtenu, pour les taux de récurrence, une borne supérieure dépendant de la mesure image et de la fonction de fuite initialement considérée. Lorsque le flot est métriquement isomorphe à un flot suspendu dont la dynamique sur la base mélange rapidement, nous avons démontré l'existence d'une borne inférieure pour les taux de récurrence. Il est apparu de nombreuses questions tout au long de cette étude.

Tout d'abord, l'hypothèse principale pour obtenir une égalité entre les taux de récurrence et les dimensions locales de la mesure image est une décroissance des corrélations super-polynomiale. Néanmoins, pour certains systèmes non-mélangeant, on peut obtenir une égalité (par exemple pour une rotation irrationnelle du cercle avec un irrationnel 1-approximable (voir Exemple 1.31)). On peut donc s'interroger sur l'existence d'une méthode permettant de calculer les taux de récurrence sans utiliser la décroissance des corrélations super-polynomiale.

Pour les systèmes dynamiques aléatoires, nous avons supposé l'existence d'une mesure stationnaire. Il est donc naturel de se demander si, lorsque la mesure stationnaire n'existe pas, on peut toujours obtenir une égalité entre les taux de récurrence moyennés et les dimensions de la préimage de la mesure invariante pour le skew-product. Au moins, cela est-t-il vérifié lorsque les "sample" mesures sont toutes absolument continues par rapport à une même mesure.

Les travaux sur la dimension de la mesure image sont d'un grand intérêt, par exemple, lorsque la fonction est une projection (pour le flot géodésique on pourra voir [68]). Malheureusement, la plupart des résultats portent sur la dimension de Hausdorff et non sur les dimensions locales (qui nous permettent de calculer les taux de récurrence). De plus, en connaissant les dimensions locales de la mesure image on peut retrouver la dimension de Hausdorff de la mesure image. C'est pourquoi une étude en profondeur des dimensions locales est nécessaire.

Nos résultats sont vérifiés pour les points tels que $\underline{d}_\mu^f(x) > 0$. Comprendre la dynamique et étudier la récurrence pour les systèmes tels que la dimension locale

inférieure est zéro et tels que la dimension locale supérieure est strictement positive parait donc essentiel.

De plus, dans le Théorème 2.8 nous avons démontré l'existence de la dimension locale de la mesure image lorsque la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Il serait intéressant d'étendre ce théorème à d'autres mesures, par exemple des états d'équilibre d'un potentiel Hölder, au moins pour les cas où l'observation f est une projection.

Pour la récurrence pour l'observation de flots, on peut se demander s'il existe une fonction de fuite telle que l'on puisse obtenir une égalité entre les taux de récurrence pour l'observation par rapport à cette fonction de fuite et les dimensions locales de projection du flot suspendu associé pour l'observation.

Finalement, dans la continuité de ce travail, il faudrait développer les résultats présents dans cette thèse pour les systèmes tels que la mesure invariante est seulement σ-finie.

Bibliographie

[1] J. Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory.*, Mathematical Surveys and Monographs. 50. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xii, 284 p. $ 79.00 , 1997.

[2] M. Abadi and A. Galves, *Inequalities for the occurrence times of rare events in mixing processes. The state of the art*, Markov Process. Related Fields, 7 (2001), pp. 97–112. Inhomogeneous random systems (Cergy-Pontoise, 2000).

[3] M. Abadi and S. Vaienti, *Large deviations for short recurrence*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 21 (2008), pp. 729–747.

[4] V. Afraimovich, *Pesin's dimension for Poincaré recurrences*, Chaos, 7 (1997), pp. 12–20.

[5] V. Afraimovich, J.-R. Chazottes, and B. Saussol, *Pointwise dimensions for Poincaré recurrences associated with maps and special flows*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 9 (2003), pp. 263–280.

[6] J. F. Alves, S. Luzzatto, and V. Pinheiro, *Markov structures and decay of correlations for non-uniformly expanding dynamical systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 22 (2005), pp. 817–839.

[7] W. Ambrose and S. Kakutani, *Structure and continuity of measurable flows*, Duke Math. J., 9 (1942), pp. 25–42.

[8] V. Araújo and M. J. Pacifico, *Physical measures for infinite-modal maps*, Fund. Math., 203 (2009), pp. 211–262.

[9] A. Armando de Castro Júnior, *Fast mixing for attractors with a mostly contracting central direction*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 24 (2004), pp. 17–44.

[10] L. Arnold, *Random dynamical systems*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[11] V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscow, 1974. Champs de vecteurs, groupes à un paramètre, difféomorphismes, flots, systèmes linéaires, stabilités des positions d'équilibre, théorie des oscillations, équations différentielles sur les variétés, Traduit du russe par Djilali Embarek.

[12] A. Ayyer and M. Stenlund, *Exponential decay of correlations for randomly chosen hyperbolic toral automorphisms*, Chaos, 17 (2007), pp. 043116, 7.

[13] V. Baladi, *Positive transfer operators and decay of correlations*, vol. 16 of Advanced Series in Nonlinear Dynamics, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.

[14] V. Baladi and L.-S. Young, *On the spectra of randomly perturbed expanding maps*, Comm. Math. Phys., 156 (1993), pp. 355–385.

[15] P. Bálint and I. P. Tóth, *Exponential decay of correlations in multi-dimensional dispersing billiards*, Ann. Henri Poincaré, 9 (2008), pp. 1309–1369.

[16] L. Barreira, Y. Pesin, and J. Schmeling, *Dimension and product structure of hyperbolic measures*, Ann. of Math. (2), 149 (1999), pp. 755–783.

[17] L. Barreira and B. Saussol, *Multifractal analysis of hyperbolic flows*, Comm. Math. Phys., 214 (2000), pp. 339–371.

[18] ——, *Hausdorff dimension of measures via Poincaré recurrence*, Comm. Math. Phys., 219 (2001), pp. 443–463.

[19] L. Barreira and C. Wolf, *Pointwise dimension and ergodic decompositions*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 26 (2006), pp. 653–671.

[20] ——, *Dimension and ergodic decompositions for hyperbolic flows*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 17 (2007), pp. 201–212.

[21] S. M. Bates and C. G. Moreira, *De nouvelles perspectives sur le théorème de Morse-Sard*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 332 (2001), pp. 13–17.

[22] M. Benedicks and L.-S. Young, *Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps*, Astérisque, (2000), pp. xi, 13–56. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).

[23] R. Bhattacharya and M. Majumdar, *Random dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. Theory and applications.

[24] R. N. Bhattacharya and O. Lee, *Asymptotics of a class of Markov processes which are not in general irreducible*, Ann. Probab., 16 (1988), pp. 1333–1347.

[25] G. D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem.*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 17 (1931), pp. 656–660.

[26] M. D. Boshernitzan, *Quantitative recurrence results*, Invent. Math., 113 (1993), pp. 617–631.

[27] R. Bowen, *Symbolic dynamics for hyperbolic flows*, Amer. J. Math., 95 (1973), pp. 429–460.

[28] ——, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, vol. 470 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, revised ed., 2008. With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes.

[29] R. Bowen and P. Walters, *Expansive one-parameter flows*, J. Differential Equations, 12 (1972), pp. 180–193.

[30] H. Bruin, B. Saussol, S. Troubetzkoy, and S. Vaienti, *Return time statistics via inducing*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 23 (2003), pp. 991–1013.

[31] H. Bruin and S. Vaienti, *Return time statistics for unimodal maps*, Fund. Math., 176 (2003), pp. 77–94.

[32] J.-R. Chazottes and R. Leplaideur, *Fluctuations of the Nth return time for Axiom A diffeomorphisms*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 13 (2005), pp. 399–411.

[33] N. Chernov, *Decay of correlations and dispersing billiards*, J. Statist. Phys., 94 (1999), pp. 513–556.

[34] ——, *Statistical properties of piecewise smooth hyperbolic systems in high dimensions*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 5 (1999), pp. 425–448.

[35] N. Chernov and H.-K. Zhang, *A family of chaotic billiards with variable mixing rates*, Stoch. Dyn., 5 (2005), pp. 535–553.

[36] G. H. Choe, *Computational ergodic theory*, vol. v. 13, Springer, Berlin, 2005.

[37] Z. Coelho, *Asymptotic laws for symbolic dynamical systems*, in Topics in symbolic dynamics and applications (Temuco, 1997), vol. 279 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp. 123–165.

[38] P. Collet, *Some ergodic properties of maps of the interval*, in Dynamical systems (Temuco, 1991/1992), vol. 52 of Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1996, pp. 55–91.

[39] P. Collet, *Statistics of closest return for some non-uniformly hyperbolic systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 21 (2001), pp. 401–420.

[40] P. Collet, A. Galves, and B. Schmitt, *Unpredictability of the occurrence time of a long laminar period in a model of temporal intermittency*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 57 (1992), pp. 319–331.

[41] A. A. de Castro Júnior, *Backward inducing and exponential decay of correlations for partially hyperbolic attractors*, Israel J. Math., 130 (2002), pp. 29–75.

[42] P. Diaconis and D. Freedman, *Iterated random functions*, SIAM Rev., 41 (1999), pp. 45–76 (electronic).

[43] T.-C. Dinh and N. Sibony, *Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps*, Comm. Pure Appl. Math., 59 (2006), pp. 754–768.

[44] M. M. Dodson and S. Kristensen, *Hausdorff dimension and Diophantine approximation*, in Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot. Part 1, vol. 72 of Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 305–347.

[45] D. Dolgopyat, *On mixing properties of compact group extensions of hyperbolic systems*, Israel J. Math., 130 (2002), pp. 157–205.

[46] T. Downarowicz and B. Weiss, *Entropy theorems along times when x visits a set*, Illinois J. Math., 48 (2004), pp. 59–69.

[47] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[48] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.

[49] A. Freitas, J. Freitas, and M. Todd, *Hitting time statistics and extreme value theory*, arXiv :0804.2887v2.

[50] S. Galatolo, *Hitting time and dimension in axiom A systems, generic interval exchanges and an application to Birkoff sums*, J. Stat. Phys., 123 (2006), pp. 111–124.

[51] ——, *Dimension and hitting time in rapidly mixing systems*, Math. Res. Lett., 14 (2007), pp. 797–805.

[52] S. Galatolo and M. J. Pacifico, *Lorenz like flows : exponential decay of correlations for the poincaré map, logarithm law, quantitative recurrence*, arXiv :0901.0574v3.

[53] S. Galatolo, J. Rousseau, and B. Saussol, *Skew products, quantitative recurrence, shrinking targets and decay of correlations*, En préparation.

[54] F. H. Ghane and B. Honary, *Exponential decay of correlations for certain multimodal circle maps*, J. Dyn. Syst. Geom. Theor., 1 (2002), pp. 108–112.

[55] S. Gouëzel, *Decay of correlations for nonuniformly expanding systems*, Bull. Soc. Math. Fr., 134 (2006), pp. 1–31.

[56] J. Hatomoto, *Mixing properties for invertible maps with weak hyperbolic product structure*, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 29 (2008), pp. 257–310.

[57] N. Haydn, *Statistical properties of equilibrium states for rational maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 20 (2000), pp. 1371–1390.

[58] N. Haydn, Y. Lacroix, and S. Vaienti, *Hitting and return times in ergodic dynamical systems*, Ann. Probab., 33 (2005), pp. 2043–2050.

[59] N. Haydn and S. Vaienti, *The Rényi entropy function and the large deviation of short return times*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 30 (2010), pp. 159–179.

[60] M. Hirata, *Poisson law for Axiom A diffeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 13 (1993), pp. 533–556.

[61] M. Hirata, B. Saussol, and S. Vaienti, *Statistics of return times : a general framework and new applications*, Comm. Math. Phys., 206 (1999), pp. 33–55.

[62] M. Kač, *On the notion of recurrence in discrete stochastic processes*, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), pp. 1002–1010.

[63] G. Keller and C. Liverani, *Stability of the spectrum for transfer operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 28 (1999), pp. 141–152.

[64] G. Keller and T. Nowicki, *Spectral theory, zeta functions and the distribution of periodic points for Collet-Eckmann maps*, Comm. Math. Phys., 149 (1992), pp. 31–69.

[65] A. Y. Khinchin, *Continued fractions*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, russian ed., 1997. With a preface by B. V. Gnedenko, Reprint of the 1964 translation.

[66] Y. Kifer, *Ergodic theory of random transformations*, vol. 10 of Progress in Probability and Statistics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1986.

[67] Y. Lacroix, *Possible limit laws for entrance times of an ergodic aperiodic dynamical system*, Israel J. Math., 132 (2002), pp. 253–263.

[68] F. Ledrappier and E. Lindenstrauss, *On the projections of measures invariant under the geodesic flow*, Int. Math. Res. Not., (2003), pp. 511–526.

[69] F. Ledrappier and L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension*, Ann. of Math. (2), 122 (1985), pp. 540–574.

[70] R. Leplaideur and B. Saussol, *Large deviations for return times in non-rectangle sets for Axiom A diffeomorphisms*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 22 (2008), pp. 327–344.

[71] P.-D. Liu, *Dynamics of random transformations : smooth ergodic theory*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 21 (2001), pp. 1279–1319.

[72] S. Luzzatto, *Stochastic-like behaviour in nonuniformly expanding maps*, in Handbook of dynamical systems. Vol. 1B, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, pp. 265–326.

[73] P. Marie and J. Rousseau, *Recurrence for random dynamical systems*, To appear in Discrete Contin. Dyn. Syst.

[74] T. Ohno, *Asymptotic behaviors of dynamical systems with random parameters*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 19 (1983), pp. 83–98.

[75] M. Ohtsuka, *Area formula*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 6 (1978), pp. 599–636.

[76] D. S. Ornstein and B. Weiss, *Entropy and data compression schemes*, IEEE Trans. Inform. Theory, 39 (1993), pp. 78–83.

[77] W. Ott and J. A. Yorke, *Learning about reality from observation*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2 (2003), pp. 297–322 (electronic).

[78] J. C. Oxtoby, *Measure and category*, vol. 2 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1980. A survey of the analogies between topological and measure spaces.

[79] F. Pène and B. Saussol, *Back to balls in billiards*, Comm. Math. Phys., 293 (2010), pp. 837–866.

[80] Y. B. Pesin and V. Sadovskaya, *Multifractal analysis of conformal Axiom A flows*, Comm. Math. Phys., 216 (2001), pp. 277–312.

[81] B. Pitskel, *Poisson limit law for Markov chains*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 11 (1991), pp. 501–513.

[82] H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica, 13 (1890), pp. 1–270.

[83] M. Pollicott and M. Yuri, *Dynamical systems and ergodic theory*, vol. 40 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[84] J. Rousseau and B. Saussol, *Poincaré recurrence for observations*, Trans. Amer. Math. Soc., 362 (2010), pp. 5845–5859.

[85] D. Ruelle, *A measure associated with axiom-A attractors*, Amer. J. Math., 98 (1976), pp. 619–654.

[86] ——, *Flots qui ne mélangent pas exponentiellement*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 296 (1983), pp. 191–193.

[87] B. Saussol, *Etude statistiques de systèmes dynamiques dilatants*, Thèse de doctorat, Université de Toulon et du Var, (1998).

[88] B. Saussol, *Recurrence rate in rapidly mixing dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 15 (2006), pp. 259–267.

[89] B. Saussol, *An introduction to quantitative Poincaré recurrence in dynamical systems*, Rev. Math. Phys., 21 (2009), pp. 949–979.

[90] B. Saussol, S. Troubetzkoy, and S. Vaienti, *Recurrence, dimensions, and Lyapunov exponents*, J. Statist. Phys., 106 (2002), pp. 623–634.

[91] ——, *Recurrence and Lyapunov exponents*, Mosc. Math. J., 3 (2003), pp. 189–203, 260.

[92] J. G. Sinaĭ, *Gibbs measures in ergodic theory*, Uspehi Mat. Nauk, 27 (1972), pp. 21–64.

[93] C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1999. With a preface by Michel Mendès France.

[94] P. Varandas, *Entropy and Poincaré recurrence from a geometrical viewpoint*, Nonlinearity, 22 (2009), pp. 2365–2375.

[95] L.-S. Young, *Decay of correlations for certain quadratic maps*, Comm. Math. Phys., 146 (1992), pp. 123–138.

[96] L.-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. of Math. (2), 147 (1998), pp. 585–650.

Récurrence de Poincaré pour les observations

Résumé : Un système dynamique de grandes dimensions est souvent étudié par les expérimentalistes à travers une certaine "mesure" ou un "relevé" d'un relativement petit nombre de différentes quantités, appelées observations. En suivant cette idée et dans la continuité du travail de Boshernitzan, pour les systèmes dynamiques, les systèmes dynamiques aléatoires et les flots, nous étudions la récurrence de Poincaré pour les observations. Lors de ce travail, nous avons relié le comportement asymptotique du temps de retour pour une observation aux dimensions locales de l'image de la mesure invariante.

En particulier, dans le Chapitre 3, pour des systèmes mélangeant rapidement, nous avons démontré une égalité entre les taux de récurrence non-instantanés pour l'observation et les dimensions locales de la mesure image.

Par la suite, ces résultats nous ont permis d'étudier, dans le Chapitre 4, la récurrence pour les systèmes dynamiques aléatoires et de démontrer une égalité entre les taux de récurrence (*quenched* et *annealed*) et les dimensions locales de la mesure stationnaire lorsque le système mélange super-polynomialement.

Finalement, dans le Chapitre 5, nous étudions le cas des flots. Nous avons obtenu, pour les taux de récurrence, une borne supérieure dépendant de la mesure image et de la fonction de fuite initialement considérée. Lorsque le flot est métriquement isomorphe à un flot suspendu dont la dynamique sur la base mélange rapidement, nous avons démontré l'existence d'une borne inférieure pour les taux de récurrence.

Mots clés : Récurrence de Poincaré, théorie de la dimension, décroissance des corrélations, systèmes dynamiques aléatoires, flots, flot géodésique.

Poincaré recurrence for observations

Abstract : A high dimensional dynamical system is often studied by experimentalists through the measurement of a relatively low number of different quantities, called an observation. Following this idea and in the continuity of Boshernitzan's work, for dynamical system, random dynamical systems and flows, we study Poincaré recurrence for the observation. The link between the asymptotic behaviour of return time for the observation and the pointwise dimensions of the image of the invariant measure is considered.

In Chapter 3, we prove that when the decay of correlations is super polynomial, the non-instantaneous recurrence rates for the observations and the pointwise dimensions relative to the push-forward measure are equal.

Then, these results allow us to study, in Chapter 4, Poincaré recurrence for random dynamical systems and to prove that, for rapidly mixing system, the recurrence rates (quenched and annealed) are equal to the local dimensions of the stationary measure.

Finally, in Chapter 5, we focus on flows. We obtain, for the recurrence rates, an upper bound depending on the push-forward measure but also on the escape function. When the flow is metrically isomorphic to a suspension flow for which the dynamic on the base is rapidly mixing, we prove the existence of a lower bound for the recurrence rate.

Key words : Poincaré recurrence, dimension theory, decay of correlations, random dynamical systems, flows, geodesic flow.