



**HAL**  
open science

# Etudes combinatoires des nombres de Jacobi-Stirling et d'Entringer

Yoann Gelineau

► **To cite this version:**

Yoann Gelineau. Etudes combinatoires des nombres de Jacobi-Stirling et d'Entringer. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2010. Français. NNT: . tel-00531200v1

**HAL Id: tel-00531200**

**<https://theses.hal.science/tel-00531200v1>**

Submitted on 2 Nov 2010 (v1), last revised 13 Jun 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 156-2010

Année 2010

## **THÈSE**

présentée devant

**l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD-LYON 1**

pour l'obtention

du **DIPLÔME DE DOCTORAT**

(arrêté du 7 août 2006)

présentée et soutenue publiquement le 24 Septembre 2010

par

**Yoann GELINEAU**

---

### **ÉTUDES COMBINATOIRES DES NOMBRES DE JACOBI-STIRLING ET D'ENTRINGER**

---

#### RAPPORTEURS

|                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| Ira. M. GESSEL       | Brandeis University   |
| Gérard H. E. DUCHAMP | Université Paris-Nord |

#### JURY

|                      |                                  |
|----------------------|----------------------------------|
| Sylvie CORTEEL       | Université Paris-Diderot 7       |
| Gérard H. E. DUCHAMP | Université Paris-Nord            |
| Masao ISHIKAWA       | Tottori University               |
| Jean-Louis NICOLAS   | Université Claude Bernard Lyon 1 |
| Jiang ZENG           | Université Claude Bernard Lyon 1 |



---

## Remerciements

---

Cette thèse doit beaucoup aux différentes personnes qui m'ont entouré et accompagné au long de ces trois dernières années. Je tiens à leur exprimer ici mes sincères remerciements.

Ma gratitude va en tout premier lieu vers mon directeur, Jiang Zeng, qui m'a fait découvrir le monde de la recherche au travers de sujets originaux et intéressants. Je dois beaucoup à sa patience, au temps qu'il a pu me consacrer et aux conseils judicieux qu'il a su me procurer. Son encadrement sans faille m'aura permis de m'épanouir pleinement dans mes travaux et je l'en remercie mille fois.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance envers mes rapporteurs, Gérard Duchamp et Ira Gessel. C'est pour moi un réel honneur qu'ils aient accepté cette tâche. La qualité de leur relecture et leurs approches originales vis-à-vis de mes travaux m'ont donné de nouvelles perspectives dans mes recherches pour les années à venir.

Je tiens également à remercier les professeurs et chercheurs influents qui ont accepté également de faire partie de mon jury de thèse : Sylvie Corteel, Masao Ishikawa et Jean-Louis Nicolas.

L'équipe de théorie des nombres et combinatoire de l'Institut Camille Jordan, qui a su m'intégrer au sein de son séminaire hebdomadaire et de son groupe de travail, m'a toujours laissé l'occasion de discuter de mes recherches et je les en remercie : Riccardo Biagioli, Frédéric Jouhet, Elie Mosaki, Thérésia Eisenköbl. Également, mes collègues doctorants et post-doctorants de combinatoire avec qui j'ai eu du plaisir à discuter de nos travaux et de nos expériences mutuelles : Anisse Kasraoui, Hilarion Faliharimalala, Heesung Shin. Ce dernier a également apporté une pierre importante à l'édifice de mes recherches et je l'en remercie grandement.

Les différents chercheurs ou doctorants que j'ai pu rencontrer lors de séminaires en France ou à l'étranger, et avec qui j'ai pu échanger de brillantes discussions, ont

eu leur part dans la réussite de cette thèse. Qu'ils en soient tous remerciés. Merci à Dominique Foata qui m'a écouté attentivement et a su me donner de bonnes références à consulter. Merci également à Valentin Féray avec qui j'ai réalisé un échange de doctorants constructif et intéressant, qui m'a accueilli lors de mon séjour et a su m'indiquer quelques pistes intéressantes pour avancer dans mes travaux.

Mes collègues doctorants ont su aussi installer une bonne humeur dans le laboratoire au long de ces trois années, une atmosphère plaisante qui a su contribuer au bon fonctionnement de ce doctorat. En particulier, Alina Firicel avec qui je prends toujours autant de plaisir à échanger ragots et pauses café-chocolat, Elodie Orquera-Pozzi amie de longue date qui bien que ne comprenant rien à ce que je traficote en combinatoire m'a toujours soutenu, Amélie Rambaud dont la bonne humeur et le sourire redonnent la pêche à tous ceux qui l'entourent. . . Je remercie également tous les autres doctorants que j'ai pu côtoyer, dans notre bureau 219 ou au premier étage, Mickaël, Jean, Valérie, Laurent, . . .

Je tiens à remercier mon frère, ma sœur, mon père, mes grand-parents, ma belle-famille qui m'ont soutenu tout au long de ces trois ans, mais surtout ma chère maman qui a quand même relu le manuscrit en entier plusieurs fois pour chercher les petites fautes par-ci par-là, elle mérite toute ma reconnaissance.

Enfin, un grand merci à Cédric, car c'est lui qui m'a le plus supporté pendant ces trois ans, dans les bons et les mauvais moments. Il a toujours été à mes côtés et je lui dois énormément.

---

## Résumé

---

Cette thèse se divise en 2 grandes parties indépendantes ; la première traitant des nombres de Jacobi-Stirling, la seconde abordant les nombres d'Entringer.

La première partie introduit les nombres de Jacobi-Stirling de seconde et de première espèce comme coefficients algébriques dans des relations polynomiales. Nous donnons des interprétations combinatoires de ces nombres, en termes de partitions d'ensembles et de quasi-permutations pour les nombres de seconde espèce, et en termes de permutations pour les nombres de première espèce. Nous étudions également les fonctions génératrices diagonales de ces familles de nombres, ainsi qu'une de leur généralisation sur le modèle des  $r$ -nombres de Stirling.

La seconde partie introduit les nombres d'Entringer à l'aide de leur interprétation en termes de permutations alternantes. Nous étudions les différentes formules de récurrence vérifiées par ces nombres et généralisons ces résultats à l'aide d'un  $q$ -analogue utilisant la statistique d'inversion. Nous verrons également que ces résultats peuvent être étendus à des permutations de forme donnée quelconque. Enfin, nous définissons la notion de famille d'Entringer, et établissons des bijections entre certaines de ces familles. En particulier, nous établissons une bijection reliant les permutations alternantes de premier terme fixé, aux arbres binaires croissants dont l'extrémité du chemin minimal est fixée.



---

## Abstract

---

This thesis is constructed in two main independent parts; the first one dealing with the numbers of Jacobi-Stirling, the second one tackling the numbers of Entringer.

The first part introduces the numbers of Jacobi-Stirling of the second kind and of the first kind, as algebraic coefficients in some polynomial relations. We give some combinatorial interpretations of these numbers, in terms of set partitions and quasi-permutations for the numbers of the second kind, and in terms of permutations for the numbers of the first kind. We also study the diagonal generating functions of these sequences of numbers, and one of their generalization based on the model of  $r$ -Stirling numbers.

The second part introduces the numbers of Entringer with their interpretation in terms of alternating permutations. We study the different recurrences formulas satisfied by these numbers, and refine these results with a  $q$ -analogue using the inversion statistic. We also note that these results can be extended to permutations with any fixed shape. Finally, we define the notion of Entringer family, and provide bijections between some of these families. In particular, we establish a bijection between the alternating permutations with fixed given value, and the binary increasing trees such that the end-point of the minimal path is fixed.





---

## Introduction

---

Ce mémoire de thèse intitulé *Etudes combinatoires des nombres de Jacobi-Stirling et d'Entringer* rassemble différents travaux réalisés dans le domaine de la combinatoire énumérative et bijective sur deux familles de nombres ayant des propriétés intéressantes de dénombrement.

Ces travaux se situent dans la continuité de l'analyse combinatoire, née selon certains dès le XVII<sup>e</sup> siècle avec les travaux de Pascal qui, confronté à des problèmes de probabilités sur les jeux, donna l'un des premiers les coefficients du développement de  $(x + y)^n$  à l'aide de son triangle qu'il disait "mystique". Bien d'autres grands mathématiciens ont ensuite contribué à cette théorie naissante, dont parmi tant d'autres, Newton, Leibniz, Bernoulli, ... En particulier, Euler, au XVIII<sup>e</sup> siècle, a déterminé de nombreuses suites intéressantes d'entiers naturels, mais il s'intéressait davantage à l'époque à l'aspect calculatoire des nombres qu'il étudiait, plutôt qu'à un éventuel sens combinatoire que pouvaient avoir ces nombres.

Cette science fut ensuite un peu délaissée durant une longue période, mais vécut une véritable renaissance dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, avec l'œuvre de André et Lucas en France, ou bien MacMahon en Angleterre, qui permirent à cette discipline méconnue de s'épanouir peu à peu tout au long du siècle dernier. En particulier, Schützenberger et Foata en ont été les dignes successeurs, et ont permis à la combinatoire française de se développer.

La combinatoire énumérative s'intéresse à donner un sens à des suites d'entiers, ou à des formules reliant de tels nombres. Lorsque certains nombres sont réputés pour dénombrer des classes d'objets différentes, la combinatoire bijective s'intéresse à relier bijectivement ces différents ensembles afin de raffiner les liens étroits entre les divers objets étudiés.

Citons l'exemple connu des nombres de Catalan définis par  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ , déjà introduits par Euler et qui vérifient des relations de récurrence intéressantes, comme la formule  $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$ . Le mathématicien Stanley recense actuellement 188 interprétations combinatoires différentes pour cette suite de nombres, dont entre autres, le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$ , le nombre de parenthésages de  $n+1$  facteurs, le nombre de partitions non croisées de  $\{1, \dots, n\}$ , ... Pourtant, il n'existe pas de bijection simple entre toutes ces interprétations, seules certaines ont pu être explicitées, et la recherche de ces chaînons manquants passionne actuellement plusieurs chercheurs de par le monde.

Nos travaux se situent ainsi dans la continuité de cette science combinatoire. Nous y trouverons les deux thèmes de recherche énoncés précédemment : premièrement, trouver une interprétation à certaines suites de nombres entiers, et comprendre les différentes relations qui lient ces nombres à l'aide de leur interprétation ; deuxièmement, exprimer des bijections explicites entre deux ensembles d'objets dénombrés par les mêmes suites d'entiers, un problème qui se révèle assez difficile en général.

Ce mémoire de thèse se divise en deux parties indépendantes, la première traitant des nombres de Jacobi-Stirling, la seconde traitant des nombres d'Entringer, construites respectivement en trois puis deux chapitres.

## Partie 1 - Nombres de Jacobi-Stirling

### Chapitre 1 - Nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce.

Ces dernières années, différents travaux ont été réalisés en théorie des opérateurs différentiels où apparaissent naturellement des suites d'entiers positifs. En particulier, les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce, définis par la relation de récurrence suivante :

$$JS(n, k; z) = JS(n-1, k-1; z) + k(k+z)JS(n-1, k; z)$$

sont des polynômes de la variable  $z$  à coefficients entiers positifs. Plus remarquable, il se trouve que les coefficients dominants (respectivement les coefficients constants) de ces polynômes se trouvent être les nombres de Stirling de seconde espèce  $S(n, k)$  (resp. les nombres factoriels centraux de seconde espèce  $U(n, k)$ ).

Les nombres de Stirling, appelés ainsi selon Tweedie [Twe22] par Nielsen [Nie06] en l'honneur de James Stirling, qui les avait calculés en 1730 dans [Sti30], ont été largement étudiés (voir [Com74, Jor47, Rio58] pour leurs nombreuses propriétés)

et sont apparus dans de nombreux contextes. Dernièrement, ils sont apparus par exemple en physique combinatoire dans l'écriture normale des puissances d'opérateurs de Boson dans l'algèbre d'Heisenberg (voir [BHPSD07] pour plus de détails). Les nombres factoriels centraux ont fait également l'objet d'une étude analytique [Rio68] et combinatoire [Dum74].

Le premier objet de ce chapitre est de fournir des interprétations combinatoires de chaque coefficient du polynôme  $JS(n, k; z)$ . Un premier modèle est une extension du modèle de Andrews-Littlejohn [AL09] et correspond à une partition de l'ensemble  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  en  $k + 1$  blocs, dont un particulier, avec certaines conditions sur la disposition de chaque  $\pm i$  dans les blocs. Ce modèle permet entre autres de retrouver l'interprétation classique de  $S(n, k)$  qui compte les partitions de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  blocs, et l'interprétation de  $U(n, k)$  qui compte les couples  $(\pi_1, \pi_2)$  de partitions de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  blocs de mêmes minimums.

Un deuxième modèle est ensuite introduit, en généralisation du modèle de Dumont [Dum74] et correspond à des placements de tour sur un quadrillage. Ce modèle permet de retrouver l'interprétation de Dumont de  $U(n, k)$  en terme de couples de quasi-permutations superdiagonales. Nous fournissons alors une bijection explicite entre les deux modèles, introduisant un troisième modèle intermédiaire formé de triplets de partitions de  $[n]$ .

Il est intéressant également de regarder les fonctions génératrices diagonales des nombres de Jacobi-Stirling, autrement dit, les fonctions génératrices des suites  $JS(n+k, n; z)$  lorsque  $k$  est un entier fixé. Ce travail fait suite aux travaux de Gessel-Stanley [GS78] et [Egg10]. Il est remarquable que ces fonctions génératrices soient rationnelles avec un numérateur polynomial qui semble n'avoir que des coefficients entiers positifs dont l'interprétation combinatoire serait loin d'être évidente.

Enfin, nous introduisons les  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling, comme généralisations des  $r$ -nombres de Stirling qui dénombrent les partitions de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  blocs où les entiers  $1, 2, \dots, r$  sont des minimums de blocs (voir [Bro84] pour plus de détails). Les  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling vérifient des formules intéressantes qui constituent la fin de ce chapitre.

## Chapitre 2 - Nombres de Jacobi-Stirling de première espèce.

Les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce pouvant être introduits comme des coefficients de changements de base entre deux bases de polynômes, il est naturel de définir les coefficients du changement de base inverse, notés ici  $js(n, k; z)$ . Ces nombres, à un signe près, vérifient alors la relation de récurrence suivante :

$$js(n, k; z) = js(n-1, k-1; z) - (n-1)(n-1+z)js(n-1, k; z)$$

et sont encore des polynômes de la variable  $z$  à coefficients entiers de mêmes signes. De même, les coefficients dominants de ces polynômes se trouvent être les

nombres de Stirling de première espèce  $s(n, k)$  qui dénombrent les permutations de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  cycles disjoints, et les coefficients constants se trouvent être les nombres factoriels centraux de première espèce  $u(n, k)$ .

Les nombres de Stirling de première espèce étaient déjà connus de Herriot [Gla71]. On trouve dans les archives du British Museum un de ses manuscrits [Her00] datant de l'an 1600 environ, qui traite du développement des polynômes  $\binom{n}{k}$  pour  $k \leq 7$ . De nombreuses propriétés des nombres  $s(n, k)$  sont détaillées dans [Com74, Jor47, Rio58]. Les nombres factoriels centraux de première espèce  $u(n, k)$  apparaissant également dans notre contexte sont bien moins connus et aucune interprétation combinatoire n'en avait été faite jusqu'à présent.

Le but de ce chapitre est de fournir une interprétation combinatoire de chaque coefficient du polynôme  $js(n, k; z)$ , dont en particulier une pour le nombre  $u(n, k)$ . Ce modèle s'exprime en terme de couples de permutations de  $[n] \cup \{0\}$  et de  $[n]$ , de mêmes minimums de cycles, à l'aide de la statistique du nombre d'éléments saillants d'une permutation.

Nous étudions ensuite les liens particuliers qui unissent les nombres de Jacobi-Stirling de première et de seconde espèce. En effet, les premiers sont en quelque sorte un prolongement des seconds, si on les définissait pour les entiers négatifs avec la même formule de récurrence.

La fin de ce chapitre, dans la continuité du précédent, introduit les fonctions génératrices diagonales des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce, autrement dit, les fonctions génératrices des suites  $js(n, n - k; z)$  lorsque  $k$  est un entier fixé. Ces travaux font également suite aux travaux de Gessel-Stanley [GS78] et [Egg10].

Nous étudions enfin les  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de première espèce, généralisations naturelles des  $r$ -nombres de Stirling de première espèce, qui dénombrent les permutations de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  cycles disjoints où les entiers  $1, 2, \dots, r$  sont des minimums de cycles, mais nous verrons que les résultats sont bien moins évidents que pour le cas des nombres de seconde espèce.

### Chapitre 3 - Nombres factoriels centraux.

Ce court chapitre traite de la suite des nombres factoriels centraux, dont deux suites extraites sont des cas particuliers des nombres de Jacobi-Stirling. Les nombres factoriels centraux possèdent des propriétés intéressantes au niveau analytique et il apparaît que deux autres suites extraites sont constituées d'entiers positifs. Nous étudierons dans ce chapitre les interprétations combinatoires de ces deux suites annexes relatives aux nombres factoriels centraux.

La première suite dénombre exactement les partitions d'un ensemble comprenant un nombre impair d'éléments, en un nombre impair de blocs, chacun de cardinal impair.

La deuxième suite dénombre ce que nous appelons les  $(n, k)$ -complexes de Rior-dan, qui sont, partant d'une partition d'un nombre impair d'éléments en un nombre impair de blocs, chacun de cardinal impair, des couples d'involutions sans point fixe sur chaque bloc de cette partition.

Ce chapitre fait appel à la théorie générale de la combinatoire des fonctions génératrices ([FS72, Chp. 3], [Sta99, Chp. 5]).

## Partie 2 - Nombres d'Entringer

### Chapitre 4 - Nombres d'Entringer et $q$ -analogues.

Les nombres d'Euler, qui sont les coefficients de Taylor de la fonction  $\tan + \sec$ , n'admettent pas de formule explicite à l'ordre  $n$ . Cependant, André a montré [And79, And81] que ces nombres représentent le nombre de permutations alternantes de longueur  $n$ . Les nombres d'Entringer  $a_{n,k}$ , appelés ainsi en l'honneur du mathématicien les ayant étudiés [Ent66] dénombrent les permutations alternantes en fonction de leur dernier terme, et fournissent alors un moyen très pratique pour calculer de proche en proche les nombres d'Euler avec de simples additions. En effet, les nombres d'Entringer vérifient des relations triangulaires intéressantes :

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= a_{n,k-1} + a_{n-1,k-1} && \text{lorsque } n \text{ est pair,} \\ a_{n,k} &= a_{n,k+1} + a_{n-1,k} && \text{lorsque } n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Si on dispose les nombres d'Entringer dans une table triangulaire semblable au triangle de Pascal, les nombres d'Euler apparaissent alors directement sur les bords de cette table, que l'on appelle table de Seidel-Kempner [Kem33, Sei77].

La première partie de ce chapitre s'intéresse aux différentes formules de récurrence vérifiées par les nombres d'Entringer. Ces diverses relations, qui avaient été prouvées à l'origine par des preuves analytiques [Ent66], sont démontrées ici à l'aide d'arguments combinatoires.

Nous introduisons ensuite la théorie des  $q$ -analogues des nombres d'Euler, qui a été largement étudiée durant les dernières années [FH08]. Il semble naturel d'étendre les résultats précédents en définissant des  $q$ -analogues des nombres d'Entringer. Les différentes formules énoncées précédemment dans le cas  $q = 1$  peuvent alors se généraliser dans ce cadre, à l'aide de démonstrations combinatoires intéressantes.

Nous verrons enfin qu'il est même possible de généraliser ces résultats à des permutations de forme donnée quelconque, où seules les places des montées et des descentes sont fixées, les permutations alternantes ne devenant alors qu'un cas particulier de cette théorie.

## Chapitre 5 - Bijections entre les familles d'Entringer.

Dans ce chapitre, nous définissons de manière plus générale la notion de famille d'Entringer, qui est simplement une famille d'ensembles  $(\mathcal{E}_{n,k})$  dont le cardinal est le nombre d'Entringer. Dans plusieurs articles de recherche [FS73, Pou82, Pou97], Poupard avait explicité plusieurs familles d'Entringer en termes de permutations alternantes, de permutations directes alternantes, et de manière plus originale, en termes d'arbres croissants, mais sans preuves bijectives.

L'interprétation des nombres d'Euler en termes d'arbres croissants était bien connue [FS73] et une bijection avait même été décrite par Donaghey [Don75] entre les permutations alternantes et les arbres. De nombreuses études ont été réalisées sur les nombres d'Entringer dans les arborescences [Cha00, KPP94] mais aucun lien n'avait pu être établi entre les familles d'Entringer relatives aux permutations et celles relatives aux arbres croissants.

Le but principal de ce chapitre est de décrire des bijections simples entre ces différentes familles d'Entringer. En particulier, le lien entre les permutations alternantes et les arbres croissants est explicité à l'aide d'un nouveau modèle, que nous appelons les suites codantes de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Nous établissons également des bijections simples entre les modèles introduits par Poupard [Pou97] dans les modèles des permutations alternantes, ou des permutations directes alternantes.

Nous interpréterons également le récent modèle des G-mots et R-mots défini par Martin et Wagner dans [MW09] en termes de nombres d'Entringer, créant ainsi une nouvelle famille d'Entringer, bijectivement reliée avec le modèle arborescent des nombres d'Entringer.

Nous définirons enfin un nouveau modèle des U-mots qui fournit également une nouvelle famille d'Entringer, bijectivement reliée avec le modèle des permutations alternantes des nombres d'Entringer.

## Première partie

# Nombres de Jacobi-Stirling





Les nombres de Stirling de première et seconde espèce sont très connus en combinatoire et ont été étudiés de manière assez approfondie par de nombreux auteurs, que ce soit du point de vue combinatoire, du point de vue analytique, ou même asymptotique. Les nombres factoriels centraux, eux, sont moins connus mais ont été étudiés de manière analytique et combinatoire, principalement par Riordan et Dumont.

Les nombres de Jacobi-Stirling sont des polynômes d'une variable  $z$ , émanant d'identités d'opérateurs différentiels, dont respectivement les coefficients dominants et les coefficients constants correspondent aux nombres de Stirling et aux nombres factoriels centraux. Il est assez intéressant que ces suites de nombres classiques interviennent dans un tel contexte, et il est donc naturel de se demander si les autres termes apparaissant dans ces polynômes peuvent également avoir une interprétation.

Le but principal de cette partie est de générer un modèle combinatoire pour chacun des coefficients de ces polynômes, qui pourrait être une généralisation des interprétations connues pour les nombres de Stirling et nombres factoriels centraux. Ceci a permis, entre autres, de connaître plus en détail les nombres factoriels centraux dont les interprétations combinatoires étaient méconnues.



---

# CHAPITRE 1

---



---

## Nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce

---

### 1.1 Définitions

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux paramètres réels, tels que  $\alpha > -1$  et  $\beta > -1$ . Le  $n$ -ième *polynôme de Jacobi*  $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$  est défini comme l'unique solution polynomiale de degré  $n$  satisfaisant l'équation différentielle ordinaire du second ordre de Jacobi :

$$(1 - t^2)y''(t) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t)y'(t) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(t) = 0, \quad (1.1)$$

et les deux conditions initiales suivantes :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{(\beta + 1)_n}{n!},$$

où  $(z)_n = z(z + 1) \dots (z + n - 1)$ .

Introduisons  $\ell_{\alpha,\beta}[y](t)$  l'opérateur différentiel de Jacobi défini par :

$$\ell_{\alpha,\beta}[y](t) = \frac{1}{(1 - t)^\alpha(1 + t)^\beta} \left( -(1 - t)^{\alpha+1}(1 + t)^{\beta+1}y'(t) \right)'. \quad (1.2)$$

Alors, la définition de  $P_n^{(\alpha,\beta)}$  via l'équation (1.1) revient à dire que  $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$  est solution de l'équation :

$$\ell_{\alpha,\beta}[y](t) = n(n + \alpha + \beta + 1)y(t). \quad (1.3)$$

Autrement dit, le  $n$ -ième polynôme de Jacobi est un vecteur propre pour l'opérateur différentiel  $\ell_{\alpha,\beta}$  pour la valeur propre  $n(n + \alpha + \beta + 1)$ .

Dans [EKLWY07, Théorème 4.2], Everitt-Kwon-Littlejohn-Wellman-Yoon ont donné le développement suivant de la  $n$ -ième composée (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ) de l'opérateur de Jacobi  $\ell_{\alpha,\beta}$  :

$$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta \ell_{\alpha,\beta}^n[y](t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{JS}(n, k; \alpha, \beta) \left( (1-t)^{\alpha+k} (1+t)^{\beta+k} y^{(k)}(t) \right)^{(k)}, \quad (1.4)$$

où les coefficients  $\text{JS}(n, k; \alpha, \beta)$  sont appelés les *nombre de Jacobi-Stirling de seconde espèce*. Les auteurs précédents [EKLWY07, (4.4)] ont également fourni une formule sommatoire explicite pour les nombres  $\text{JS}(n, k; \alpha, \beta)$ ,

$$\text{JS}(n, k; \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + i + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2i + 2) [i(i + \alpha + \beta + 1)]^n}{i!(k-i)! \Gamma(\alpha + \beta + 2i + 1) \Gamma(\alpha + \beta + k + i + 2)}. \quad (1.5)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler. On peut remarquer que ces nombres ne dépendent en réalité que d'un seul paramètre  $z = \alpha + \beta + 1$ , ce qui n'était a priori pas évident d'après l'équation (1.4) et alors en notant  $\text{JS}(n, k; z) := \text{JS}(n, k; \alpha, \beta)$ , on a :

$$\text{JS}(n, k; z) = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k} \frac{\Gamma(z + i) \Gamma(z + 2i + 1) [i(i + z)]^n}{i!(k-i)! \Gamma(z + 2i) \Gamma(z + k + i + 1)}. \quad (1.6)$$

Ainsi, on peut définir les *nombre de Jacobi-Stirling de seconde espèce* de manière plus simple comme les coefficients de relations dans l'équation suivante :

$$X^n = \sum_{k=0}^n \text{JS}(n, k; z) (X)_{k,z}, \quad (1.7)$$

où  $(X)_{k,z} = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i(i + z))$  si  $k \geq 1$ , et  $(X)_{0,z} = 1$ . L'équation (1.7) correspond dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  (ensemble des polynômes réels de degré inférieur à  $n$ ) aux coefficients de changement de base entre la base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  et la base  $((X)_{0,z}, (X)_{1,z}, \dots, (X)_{n,z})$ .

*Remarque 1.* Dans [EKLWY07], les auteurs ont réalisé de longs calculs pour déduire la formule explicite (1.5) pour les nombres de Jacobi-Stirling. En fait, on peut déduire une formule explicite pour les nombres de Jacobi-Stirling directement à partir de la formule d'interpolation de Newton :

$$X^n = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{r=0}^j \frac{x_r^n}{\prod_{k \neq i} (x_r - x_k)} \right) \prod_{i=0}^{j-1} (X - x_i). \quad (1.8)$$

En effet, en faisant les substitutions  $X \leftarrow m(z + m)$  et  $x_i \leftarrow i(z + i)$  dans (1.8), on obtient :

$$(m(m + z))^n = \sum_{j=0}^n \text{JS}(n, j; z) (m - j + 1)_j (z + m)_j, \quad (1.9)$$

où

$$\text{JS}(n, j; z) = \sum_{r=0}^j (-1)^r \frac{[r(r + z)]^n}{r!(j - r)!(z + r)_r (z + 2r + 1)_{j-r}}, \quad (1.10)$$

et  $(z)_n = z(z + 1) \dots (z + n - 1)$ . Si on substitue  $X$  par  $m(m + z) + k$ , on obtient [EKLWY07, Théorème 4.1].

Il s'ensuit de (1.7) que les nombres de Jacobi-Stirling  $\text{JS}(n, k; z)$  satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \text{JS}(0, 0; z) = 1, & \text{JS}(n, k; z) = 0, \quad \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \\ \text{JS}(n, k; z) = \text{JS}(n - 1, k - 1; z) + k(k + z) \text{JS}(n - 1, k; z), & n, k \geq 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Cette relation triangulaire fournit un moyen rapide pour déterminer les premières valeurs de  $\text{JS}(n, k; z)$  (voir Table 1.1).

Comme il a été remarqué dans [ELW02, EKLWY07, AL09], la définition précédente rappelle étrangement la définition des *nombres de Stirling de seconde espèce*  $S(n, k)$ , qui sont définis également comme coefficients dans un changement de base (voir [Com74]) par :

$$X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \prod_{i=0}^{k-1} (X - i), \quad (1.12)$$

et satisfont la récurrence suivante :

$$S(1, 1) = 1 \quad S(n, k) = 0, \quad \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \quad (1.13)$$

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k), \quad n, k \geq 1. \quad (1.14)$$

Le point de départ de ce chapitre est l'observation que les *nombres factoriels centraux de seconde espèce*  $T(n, k)$  semblent plus appropriés en vue d'une comparaison. En effet, ces nombres sont définis dans l'ouvrage de Riordan [Rio68, p. 213-217] également comme coefficients de changement de base par :

$$X^n = \sum_{k=0}^n T(n, k) X \prod_{i=1}^{k-1} \left( X + \frac{k}{2} - i \right). \quad (1.15)$$

TABLE 1.1 – Les premières valeurs de  $JS(n, k; z)$ 

| $k \backslash n$ | 0 | 1  | 2        | 3                | 4                         | 5                              | 6                           |
|------------------|---|----|----------|------------------|---------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 0                | 1 | 0  | 0        | 0                | 0                         | 0                              | 0                           |
| 1                | 1 | 1  | $1+z$    | $1+2z+z^2$       | $1+3z+3z^2+z^3$           | $1+4z+6z^2+4z^3+z^4$           | $1+5z+10z^2+10z^3+5z^4+z^5$ |
| 2                | 1 | 5  | $5+3z$   | $21+24z+7z^2$    | $85+141z+79z^2+15z^3$     | $341+738z+604z^2+222z^3+31z^4$ |                             |
| 3                | 1 | 14 | $14+6z$  | $147+120z+25z^2$ | $1408+1662z+664z^2+90z^3$ |                                |                             |
| 4                | 1 | 30 | $30+10z$ | $627+400z+65z^2$ |                           |                                |                             |
| 5                | 1 | 55 | $55+15z$ |                  |                           |                                |                             |
| 6                | 1 |    |          |                  |                           |                                |                             |

Les nombres  $T(n, k)$  ne sont pas tous des entiers, mais si on se restreint à regarder les nombres factoriels centraux d'indices pairs  $U(n, k) := T(2n, 2k)$ , alors :

$$U(0, 0) = 1 \quad U(n, k) = 0, \quad \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \quad (1.16)$$

$$U(n, k) = U(n-1, k-1) + k^2 U(n-1, k), \quad n, k \geq 1. \quad (1.17)$$

La présence du coefficient  $k^2$  dans la relation de récurrence (1.17) est ainsi plus proche du coefficient  $k(k+z)$  des nombres de Jacobi-Stirling, à l'inverse du coefficient  $k$  présent dans la récurrence des nombres de Stirling. Le chapitre 3 fera l'objet d'une étude plus approfondie des nombres factoriels centraux.

Des définitions et équations précédentes, on peut facilement déduire le résultat suivant, qui permet de faire le lien entre les différentes suites de nombres introduites.

**Théorème 2.** *Soient  $n$  et  $k$  deux entiers positifs avec  $n \geq k$ . Les nombres de Jacobi-Stirling  $JS(n, k; z)$  sont des polynômes en  $z$  de degré  $n - k$  à coefficients entiers positifs. De plus, si on note :*

$$JS(n, k; z) = a_{n,k}^{(0)} + a_{n,k}^{(1)}z + \dots + a_{n,k}^{(n-k)}z^{n-k}, \quad (1.18)$$

alors :

$$a_{n,k}^{(n-k)} = S(n, k), \quad (1.19)$$

$$a_{n,k}^{(0)} = U(n, k). \quad (1.20)$$

*Démonstration.* D'après la relation (1.11), et sachant que  $JS(0, 0; z) = 1$ , on déduit facilement par récurrence que les nombres  $JS(n, k; z)$  sont tous des polynômes en  $z$  de degré  $n - k$  et de coefficients positifs. La relation (1.11) peut se traduire alors à l'aide des coefficients de ces polynômes, et devient

$$a_{n,k}^{(i)} = a_{n-1,k-1}^{(i)} + k a_{n-1,k}^{(i-1)} + k^2 a_{n-1,k}^{(i)}. \quad (1.21)$$

On en déduit donc que les coefficients dominants et constants de  $JS(n, k; z)$  vérifient respectivement les relations (1.14) et (1.17).  $\square$

La nature même des coefficients impliqués dans les polynômes ci-dessus, entiers naturels positifs, réclame une interprétation combinatoire. En effet, il est classique (voir [Com74]) que le nombre de Stirling  $S(n, k)$  possède une interprétation en tant que nombre de partitions de l'ensemble  $[n] := \{1, \dots, n\}$  en  $k$  blocs non vides. En 1974, dans son étude des *nombres de Genocchi*, Dumont [Dum74] a découvert la première interprétation combinatoire des nombres factoriels centraux  $U(n, k)$  en termes de couples de quasi-permutations superdiagonales de  $[n]$  (voir pour cela le paragraphe 1.2.3). On peut remarquer également que lorsque  $z = 1$ , les nombres



de Jacobi-Stirling de seconde espèce deviennent les *nombre de Legendre-Stirling de seconde espèce*  $LS(n, k)$ ,

$$LS(n, k) = JS(n, k; 1), \quad (1.22)$$

introduits récemment dans [ELW02] et dont l'interprétation combinatoire a été donnée par Andrews-Littlejohn [AL09] en termes de partitions d'ensembles (voir le paragraphe 1.2.1). Récemment, Andrews et Littlejohn [AL09] ont interprété  $LS(n, k) = JS(n, k; 1)$  en termes de partitions d'ensembles.

Plusieurs questions se dégagent alors naturellement des remarques précédentes :

- Tout d'abord, existe-t-il une généralisation combinatoire possible du modèle d'Andrews et Littlejohn qui donnerait la signification de chaque coefficient  $a_{n,k}^{(i)}$  du nombre de Jacobi-Stirling  $JS(n, k; z)$  et qui également serait un raffinement de l'interprétation originelle de  $S(n, k)$  ?
- Ensuite, existe-t-il une relation entre le modèle de Dumont en termes de quasi-permutations et celui d'Andrews et Littlejohn en termes de partitions ?
- Enfin, étant donné que certaines généralisations des nombres de Stirling (comme les  $r$ -nombres de Stirling par exemple) ont été introduites et étudiées par différents auteurs, pourrait-on faire de même dans le cadre plus général des nombres de Jacobi-Stirling ?

Le but de ce premier chapitre est de répondre à ces questions. Dans la section 1.2, après avoir introduit quelques définitions nécessaires, nous donnerons deux interprétations combinatoires pour le coefficient  $a_{n,k}^{(i)}$  dans  $JS(n, k; z)$  ( $0 \leq i \leq n - k$ ), et construirons explicitement une bijection entre les deux modèles. Dans la section 1.3, nous établirons des résultats complémentaires sur les formules explicites et les fonctions génératrices des nombres de Jacobi-Stirling. Enfin, dans la section 1.4, nous généraliserons les nombres de Stirling avec un paramètre  $r$ , sur un travail analogue aux  $r$ -nombres de Stirling de seconde espèce.

## 1.2 Interprétations combinatoires

### 1.2.1 Le modèle des partitions signées

Pour tout entier positif  $n$ , on définit l'ensemble

$$[\pm n]_0 := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n\}.$$

La définition suivante est équivalente à celle donnée par Andrews et Littlejohn [AL09] dans le but d'interpréter les nombres de Legendre-Stirling, où le nombre 0 a été ajouté, pour éviter d'avoir un bloc vide et pour être plus proche du futur modèle des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce qui sera introduit au chapitre 2.

**Définition 3.** Une  $k$ -partition signée de  $[\pm n]_0$  est une partition de  $[\pm n]_0$  en  $k + 1$  blocs non-vides  $B_0, B_1, \dots, B_k$  avec les règles suivantes :

1.  $0 \in B_0$  et  $\forall i \in [n], \{i, -i\} \not\subset B_0$ ,
2.  $\forall j \in [k]$  et  $\forall i \in [n]$ , on a  $\{i, -i\} \subset B_j \iff i = \min B_j \cap [n]$ .

Par exemple, la partition  $\pi = \{\{2, -5\}_0, \{\pm 1, -2\}, \{\pm 3\}, \{\pm 4, 5\}\}$ , est une 3-partition signée de  $[\pm 5]_0$ , où  $\{2, -5\}_0 := \{0, 2, -5\}$  est le bloc-zéro.

Nous pouvons également lister par exemple les 2-partitions signées de  $[\pm 3]_0$ .

$$\begin{aligned} &\{0\}, \{\pm 1, 3\}\{\pm 2, -3\}, \\ &\{0\}, \{\pm 1, -3\}\{\pm 2, 3\}, \\ &\{0, 3\}, \{\pm 1, -3\}\{\pm 2\}, \\ &\{0, 3\}, \{\pm 1\}\{\pm 2, -3\}, \\ &\{0, -3\}, \{\pm 1, 3\}\{\pm 2\}, \\ &\{0, -3\}, \{\pm 1\}\{\pm 2, 3\}, \\ &\{0, 2\}, \{\pm 1, -2\}\{\pm 3\}, \\ &\{0, -2\}, \{\pm 1, 2\}\{\pm 3\}. \end{aligned}$$

**Théorème 4.** Pour tous entiers positifs  $n$  et  $k$ , l'entier  $a_{n,k}^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq n - k$ ), coefficient du nombre de Jacobi-Stirling de seconde espèce :

$$JS(n, k; z) = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k}^{(i)} z^i,$$

est le nombre de  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  dont le bloc-zéro contient exactement  $i$  valeurs négatives.

Par exemple, d'après la Table 1.1, on a  $JS(3, 2; z) = 5 + 3z$ . En effet, d'après la liste donnée précédemment il y a cinq 2-partitions signées de  $[\pm 3]_0$  n'ayant pas de valeurs négatives dans le bloc zéro, et trois 2-partitions signées de  $[\pm 3]_0$  ayant une valeur négative dans le bloc zéro.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$  l'ensemble des  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  telles que le bloc-zéro contienne  $i$  valeurs négatives et posons  $\tilde{a}_{n,k}^{(i)} = \text{Card}(\mathcal{A}_{n,k}^{(i)})$ .

Par convention  $\tilde{a}_{0,0}^{(0)} = 1$ . On a de manière triviale  $\tilde{a}_{1,1}^{(0)} = 1$  et pour que  $\tilde{a}_{n,k}^{(i)} \neq 0$ , on doit avoir  $n \geq k \geq 1$  et  $0 \leq i \leq n - k$  puisque  $k$  valeurs négatives sont déjà présentes dans les minimums des  $k$  blocs.

On partitionne ensuite l'ensemble  $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$  en quatre groupes.

- (i) Les  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  qui ont  $\{-n, n\}$  pour bloc. Clairement, le nombre de telles partitions est  $\tilde{a}_{n-1,k-1}^{(i)}$ .

- (ii) Les  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  qui ont  $n$  dans le bloc-zéro. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une  $k$ -partition signée de  $[\pm(n-1)]_0$  avec  $i$  valeurs négatives dans le bloc-zéro, puis en insérant  $n$  dans le bloc-zéro et  $-n$  dans un des  $k$  blocs ; ainsi il y a  $k\tilde{a}_{n-1,k}^{(i)}$  possibilités.
- (iii) Les  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  qui ont  $-n$  dans le bloc-zéro. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une  $k$ -partition signée de  $[\pm(n-1)]_0$  avec  $i-1$  valeurs négatives dans le bloc-zéro, puis en insérant  $-n$  dans le bloc-zéro et  $n$  dans un des  $k$  blocs ; ainsi il y a  $k\tilde{a}_{n-1,k}^{(i-1)}$  possibilités.
- (iv) Les  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  où ni  $n$  ni  $-n$  n'apparaît dans le bloc-zéro et où  $\{-n, n\}$  n'est pas un bloc. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une  $k$ -partition signée de  $[\pm(n-1)]_0$  avec  $i$  valeurs négatives dans le bloc-zéro, puis en insérant  $n$  et  $-n$  dans deux blocs différents, autres que le bloc-zéro ; ainsi il y a  $k(k-1)\tilde{a}_{n-1,k}^{(i)}$  possibilités.

En résumé, nous obtenons l'équation suivante :

$$\tilde{a}_{n,k}^{(i)} = \tilde{a}_{n-1,k-1}^{(i)} + k\tilde{a}_{n-1,k}^{(i-1)} + ka_{n-1,k}^{(i)} + k(k-1)\tilde{a}_{n-1,k}^{(i)}, \quad (1.23)$$

qui en simplifiant devient

$$\tilde{a}_{n,k}^{(i)} = \tilde{a}_{n-1,k-1}^{(i)} + k\tilde{a}_{n-1,k}^{(i-1)} + k^2\tilde{a}_{n-1,k}^{(i)}. \quad (1.24)$$

Enfin, avec (1.21), les suites  $a_{n,k}^{(i)}$  et  $\tilde{a}_{n,k}^{(i)}$  satisfont la même récurrence et mêmes conditions initiales, et donc coïncident.  $\square$

Puisque  $LS(n, k) = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k}^{(i)}$ , le Théorème 4 implique immédiatement le résultat suivant d'Andrews et Littlejohn [AL09].

**Corollaire 5.** *L'entier  $LS(n, k)$  est le nombre de  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$ .*

Par les Théorèmes 2 et 4, on déduit que l'entier  $S(n, k)$  est le nombre de  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  telles que le bloc-zéro contienne  $n-k$  valeurs négatives. Par définition, dans ce cas, il n'y a pas d'entrée positive dans le bloc-zéro. En effaçant les entrées signées dans les  $k$  blocs restants, on retrouve alors l'interprétation connue suivante pour le nombre de Stirling de seconde espèce.

**Corollaire 6.** *L'entier  $S(n, k)$  est le nombre partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs.*

Pour une partition  $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  en  $k$  blocs, on note  $\min \pi$  l'ensemble des minimaux de blocs

$$\min \pi = \{\min(B_1), \dots, \min(B_k)\}.$$

L'interprétation suivante de Dumont en termes de partitions pour les nombres factoriels centraux d'indices pairs peut être trouvée dans [FH00, Chap. 3].

**Corollaire 7.** *L'entier  $U(n, k)$  est le nombre de couples  $(\pi_1, \pi_2)$  de partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs telles que  $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$ .*

*Démonstration.* Comme  $U(n, k) = a_{n,k}^{(0)}$ , d'après le Théorème 4, l'entier  $U(n, k)$  compte le nombre de  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  telles que le bloc-zéro ne contienne pas de valeur positive. Pour une telle  $k$ -partition signée  $\pi$ , on applique l'algorithme suivant :

- (i) on déplace chaque valeur positive  $j$  du bloc-zéro dans le bloc  $B_j$  qui contient  $-j$  pour obtenir une  $k$ -partition signée  $\pi' = \{\{0\}, B_1, \dots, B_k\}$ ,
- (ii) la partition  $\pi_1$  est obtenue en effaçant les valeurs négatives dans chaque bloc  $B_i$  de  $\pi'$ , et  $\pi_2$  est obtenue en effaçant les valeurs positives, puis en prenant les valeurs opposées des valeurs négatives dans chaque bloc de  $\pi'$ .

Par exemple, si  $\pi = \{\{3\}_0, \{\pm 1, -3, 4\}, \{\pm 2, -4\}\}$  est la 2-partition signée de  $[\pm 4]_0$ , le couple correspondant de partitions est  $(\pi_1, \pi_2)$  où  $\pi_1 = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$  et  $\pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ .  $\square$

### 1.2.2 Une autre décomposition de $JS(n, k; z)$

Le résultat suivant montre que les coefficients dans le développement des nombres de Jacobi-Stirling  $JS(n, k; z)$  dans la base  $(1, z + 1, \dots, (z + 1)^{n-k})$  sont également intéressants.

**Théorème 8.** *Posons pour  $n$  et  $k$  entiers,*

$$JS(n, k; z) = d_{n,k}^{(0)} + d_{n,k}^{(1)}(z + 1) + \dots + d_{n,k}^{(n-k)}(z + 1)^{n-k}. \quad (1.25)$$

*Alors, le coefficient  $d_{n,k}^{(i)}$  est un entier positif, qui compte le nombre de  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  telles que le bloc-zéro contienne uniquement le zéro et  $i$  valeurs positives.*

*Démonstration.* On déduit de (1.11) que les coefficients  $d_{n,k}^{(i)}$  vérifient la relation de récurrence suivante :

$$d_{n,k}^{(i)} = d_{n-1,k-1}^{(i)} + kd_{n-1,k}^{(i-1)} + k(k-1)d_{n-1,k}^{(i)}. \quad (1.26)$$

Soit  $\mathcal{D}_{n,k}^{(i)}$  l'ensemble des  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  telles que le bloc-zéro contienne uniquement le zéro et  $i$  valeurs positives et posons  $\tilde{d}_{n,k}^{(i)} = \text{Card}(\mathcal{D}_{n,k}^{(i)})$ .

Par convention  $\tilde{d}_{0,0}^{(0)} = 1$ . Trivialement,  $\tilde{d}_{1,1}^{(0)} = 1$  et pour que  $\tilde{d}_{n,k}^{(i)} \neq 0$ , on doit avoir  $n \geq k \geq 1$  et  $0 \leq i \leq n - k$  puisque  $k$  valeurs positives sont déjà présentes dans les minimums des  $k$  blocs.

On partitionne ensuite l'ensemble  $\mathcal{D}_{n,k}^{(i)}$  en trois groupes.

TABLE 1.2 – Les premières valeurs de  $JS(n, k; z)$  dans la base  $((z + 1)^i)_i$ 

| $k \setminus n$ | 0 | 1         | 2              | 3                            | 4   | 5   | 6           |
|-----------------|---|-----------|----------------|------------------------------|---|---|-------------|
| 0               | 1 | 0         | 0              | 0                            | 0   | 0   | 0           |
| 1               | 1 | $(z + 1)$ | $(z + 1)^2$    | $(z + 1)^3$                  | $(z + 1)^4$                                 | $(z + 1)^5$   | $(z + 1)^6$ |
| 2               | 1 | 1         | $2 + 3(z + 1)$ | $4 + 10(z + 1) + 7(z + 1)^2$ | $8 + 28(z + 1) + 34(z + 1)^2 + 15(z + 1)^3$ | $16 + 72(z + 1) + 124(z + 1)^2 + 98(z + 1)^3 + 31(z + 1)^4$ |             |
| 3               | 1 | 1         | 1              | $8 + 6(z + 1)$               | $52 + 70(z + 1) + 25(z + 1)^2$              | $320 + 604(z + 1) + 394(z + 1)^2 + 90(z + 1)^3$             |             |
| 4               | 1 | 1         | 1              | 1                            | $20 + 10(z + 1)$                            | $292 + 270(z + 1) + 65(z + 1)^2$                            |             |
| 5               | 1 | 1         | 1              | 1                            | 1   | $40 + 15(z + 1)$  |             |
| 6               | 1 | 1         | 1              | 1                            | 1   | 1   |             |

- (i) Les  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  qui ont  $\{-n, n\}$  pour bloc. Clairement, le nombre de telles partitions est  $\tilde{d}_{n-1, k-1}^{(i)}$ .
- (ii) Les  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  qui ont  $n$  dans le bloc-zéro. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une  $k$ -partition signée de  $[\pm(n-1)]_0$  avec  $i-1$  valeurs positives dans le bloc-zéro, puis en insérant  $n$  dans le bloc-zéro et  $-n$  dans un des  $k$  blocs ; ainsi il y a  $k \tilde{d}_{n-1, k}^{(i-1)}$  possibilités.
- (iii) Les  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  où ni  $n$  ni  $-n$  n'apparaît dans le bloc-zéro et où  $\{-n, n\}$  n'est pas un bloc. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une  $k$ -partition signée de  $[\pm(n-1)]_0$  avec  $i$  valeurs positives dans le bloc-zéro, puis en insérant  $n$  et  $-n$  dans deux blocs différents, autres que le bloc-zéro ; ainsi il y a  $k(k-1) \tilde{d}_{n-1, k}^{(i)}$  possibilités.

En résumé, nous obtenons l'équation suivante :

$$\tilde{a}_{n, k}^{(i)} = \tilde{d}_{n-1, k-1}^{(i)} + k \tilde{d}_{n-1, k}^{(i-1)} + k(k-1) \tilde{d}_{n-1, k}^{(i)}. \quad (1.27)$$

On voit donc bien que les suites  $d_{n, k}^{(i)}$  et  $\tilde{d}_{n, k}^{(i)}$  coïncident.  $\square$

**Corollaire 9.** *L'entier  $JS(n, k; -1) = d_{n, k}^{(0)}$  est le nombre de  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  qui ont  $\{0\}$  pour bloc-zéro.*

*Remarque 10.* A priori, il n'était pas évident que le nombre

$$JS(n, k; -1) = \sum_{i=i}^{n-k} (-1)^i a_{n, k}^{(i)}$$

soit positif.

D'après le Théorèmes 2 et la relation (1.25), on peut déduire les relations suivantes.

**Théorème 11.** *Pour  $n, k$  et  $i$  entiers positifs tels que  $0 \leq k \leq n$  et  $0 \leq i \leq n-k$ ,*

$$a_{n, k}^{(i)} = \sum_{j=i}^{n-k} \binom{j}{i} d_{n, k}^{(j)}, \quad (1.28)$$

$$U(n, k) = \sum_{j=0}^{n-k} d_{n, k}^{(j)}, \quad (1.29)$$

$$LS(n, k) = \sum_{j=0}^{n-k} 2^j d_{n, k}^{(j)}. \quad (1.30)$$

*Démonstration.* Nous allons fournir des interprétations combinatoires de ces trois identités.

Pour l'équation (1.28), on partitionne l'ensemble  $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$  en comptant le nombre total  $j$  d'éléments dans le bloc-zéro ( $1 \leq j \leq n - k$ ). Alors pour construire un tel élément, on commence par prendre une  $k$ -partition signée de  $[\pm n]_0$  qui n'a pas de valeurs positives dans le bloc-zéro, donc (quitte à échanger chaque entier par son inverse), il y a  $d_{n,k}^{(j)}$  possibilités. Puis, une fois ce choix réalisé, il reste à choisir les  $j - i$  nombres qui sont positifs parmi les  $j$  possibilités du zéro-bloc.

Pour l'équation (1.29), on partitionne l'ensemble  $\mathcal{A}_{n,k}^{(0)}$  en comptant le nombre total  $j$  d'éléments (nécessairement positifs) dans le bloc-zéro ( $1 \leq j \leq n - k$ ). Cette décomposition fournit directement l'identité (1.29).

Pour l'équation (1.30), on partitionne l'ensemble des  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  suivant le nombre total  $j$  d'éléments dans le bloc-zéro ( $1 \leq j \leq n - k$ ). Pour construire un tel élément, on commence par prendre une  $k$ -partition signée de  $[\pm n]_0$  qui n'a pas de valeurs positives dans le bloc-zéro, donc (quitte à échanger chaque entier par son inverse), il y a  $d_{n,k}^{(j)}$  possibilités. Puis, une fois ce choix réalisé, il reste à choisir une partition des  $j$  entiers du bloc zéro pour déterminer lesquels seront positifs ou négatifs. Le nombre de partition d'un ensemble à  $j$  éléments étant  $2^j$ , on en déduit la formule (1.30).  $\square$

### 1.2.3 Une seconde interprétation

Nous proposons à présent un second modèle combinatoire pour interpréter le coefficient  $a_{n,k}^{(i)}$  du nombre de Jacobi-Stirling  $\text{JS}(n, k; z)$ , inspiré des travaux de Foata-Schützenberger [FS72] et Dumont [Dum74]. Notons  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $[n]$ . Dans ce qui suit, on identifiera toute permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  avec son diagramme  $\mathcal{D}(\sigma) = \{(i, \sigma(i)) : i \in [n]\}$ .

Pour tout ensemble fini  $X$ , on notera  $|X|$  son cardinal. Si  $\alpha = (i, j) \in [n] \times [n]$ , on définit  $\text{pr}_x(\alpha) = i$  et  $\text{pr}_y(\alpha) = j$  les projections en  $x$  et  $y$ . Pour tout sous-ensemble  $Q$  de  $[n] \times [n]$ , on définit les projections en  $x$  et  $y$  par

$$\text{pr}_x(Q) = \{\text{pr}_x(\alpha) : \alpha \in Q\}, \quad \text{pr}_y(Q) = \{\text{pr}_y(\alpha) : \alpha \in Q\};$$

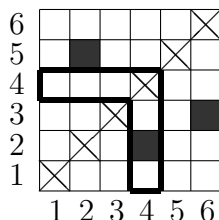
et les parties super-diagonales et sous-diagonales par

$$Q^+ = \{(i, j) \in Q : i \leq j\}, \quad Q^- = \{(i, j) \in Q : i \geq j\}.$$

**Définition 12.** Une  $k$ -quasi-permutation à simples équerres de  $[n]$  est un sous-ensemble  $Q$  de  $[n] \times [n]$  tel que :

- i)  $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n, Q \subset \mathcal{D}(\sigma)$ ,
- ii)  $|Q| = n - k$  et  $\text{pr}_x(Q^-) \cap \text{pr}_y(Q^+) = \emptyset$ .

FIGURE 1.1 – La quasi-permutation à simples équerres de  $[6]$   $Q = \{(2, 5), (4, 2), (6, 3)\}$ , sur laquelle on a tracé l'équerre diagonale  $H_4$



Une  $k$ -quasi-permutation à simples équerres  $Q$  de  $[n]$  peut être illustrée en noircissant les  $n - k$  cases correspondantes de  $Q$  dans un tableau carré de taille  $n \times n$ . Inversement, si on définit les équerres diagonales :

$$H_i := \{(i, j) / i \leq j\} \cup \{(j, i) / i \leq j\}, \quad (1 \leq i \leq n),$$

alors un sous-ensemble noirci d'un tableau carré de taille  $n \times n$  représente une quasi-permutation à simples équerres s'il n'y a pas de case noire sur la diagonale principale et au plus une case noire par ligne, par colonne et par équerre diagonale. Un exemple est donné dans la Figure 1.1.

**Théorème 13.** *Le coefficient  $a_{n,k}^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq n - k$ ) apparaissant dans  $JS(n, k; z)$  est le nombre de couples  $(Q_1, Q_2)$  de  $k$ -quasi-permutations à simples équerres de  $[n]$  satisfaisant les conditions suivantes :*

$$Q_1^- = Q_2^-, \quad |Q_1^-| = |Q_2^-| = i \quad \text{et} \quad pr_y(Q_1) = pr_y(Q_2). \quad (1.31)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}_{n,k}^{(i)}$  l'ensemble des couples  $(Q_1, Q_2)$  de  $k$ -quasi-permutations à simples équerres de  $[n]$  vérifiant (1.31), et notons  $c_{n,k}^{(i)} = |\mathcal{C}_{n,k}^{(i)}|$ .

Par exemple, le couple  $(Q_1, Q_2)$  où

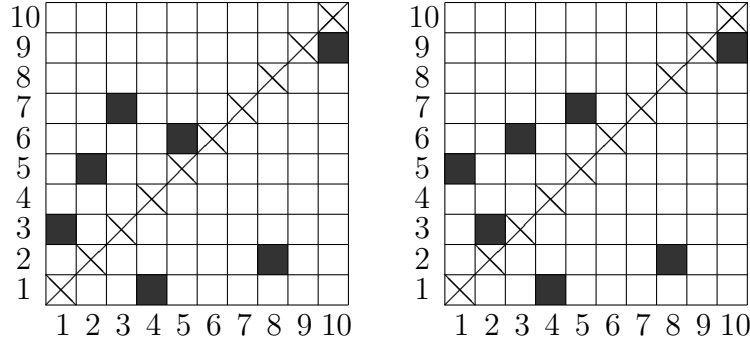
$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 1), (5, 6), (8, 2), (10, 9)\}, \\ Q_2 &= \{(1, 5), (2, 3), (3, 6), (4, 1), (5, 7), (8, 2), (10, 9)\}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

est un élément de  $\mathcal{C}_{10,3}^{(3)}$ . On pourra trouver une représentation graphique de ce couple dans la Figure 1.2.

On partitionne l'ensemble  $\mathcal{C}_{n,k}^{(i)}$  en trois groupes.

- Les couples  $(Q_1, Q_2)$  tels que les  $n$ -ièmes lignes et  $n$ -ièmes colonnes de  $Q_1$  et  $Q_2$  soient vides. Clairement, il y a  $c_{n-1,k-1}^{(i)}$  tels éléments.
- Les couples  $(Q_1, Q_2)$  tels que les  $n$ -ièmes colonnes de  $Q_1$  et  $Q_2$  soient non vides. On construit d'abord un couple  $(Q'_1, Q'_2)$  de  $\mathcal{C}_{n-1,k}^{(i-1)}$  et on choisit alors une case en même position des  $n$ -ième colonnes des deux quasi-permutations ; il y a  $n - 1 - (n - k - 1)$  positions possibles. Ainsi, il y a  $kc_{n-1,k}^{(i-1)}$  tels éléments.



FIGURE 1.2 – Un couple de quasi-permutations à simples équerres de  $\mathcal{C}_{10,3}^{(3)}$ 

- Les couples  $(Q_1, Q_2)$  tels que les  $n$ -ièmes lignes de  $Q_1$  et  $Q_2$  soient non vides. On construit d'abord un couple  $(Q'_1, Q'_2)$  de  $\mathcal{C}_{n-1,k}^{(i)}$  et on ajoute ensuite une case noire en haut de chaque quasi-permutation ; chaque case peut être placée en haut des  $n-1-(n-k-1) = k$  colonnes qui sont vides. Ainsi, il y a  $k^2 c_{n-1,k}^{(i)}$  tels éléments.

En conclusion, on obtient la récurrence :

$$c_{n,k}^{(i)} = c_{n-1,k-1}^{(i)} + k c_{n-1,k}^{(i-1)} + k^2 c_{n-1,k}^{(i)}. \quad (1.33)$$

D'après (1.11), on voit que  $a_{n,k}^{(i)}$  satisfait la même relation de récurrence et les conditions initiales que  $c_{n,k}^{(i)}$ , donc ils coïncident.  $\square$

*Remarque 14.* Dans le premier modèle, nous n'avions pas d'interprétation directe pour le coefficient  $k^2$  dans (1.24) car il résultait de la simplification  $k + k(k-1) = k^2$ . Dans le second modèle contrairement, on peut voir effectivement ce que le coefficient  $k^2$  compte dans (1.33).

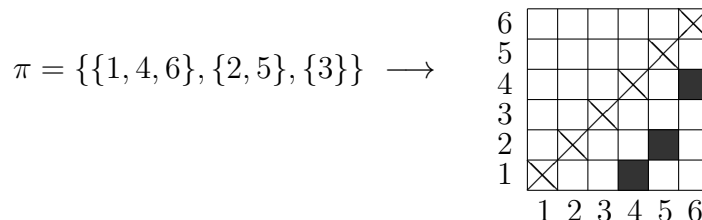
**Définition 15.** Une *quasi-permutation super-diagonale* (resp. *sous-diagonale*) de  $[n]$  est une quasi-permutation à simples équerres  $Q$  de  $[n]$  avec  $Q^- = \emptyset$  (resp.  $Q^+ = \emptyset$ ).

À l'aide des Théorèmes 2 et 13, on retrouve l'interprétation combinatoire de Dumont pour les nombres factoriels centraux de seconde espèce [Dum74], et celle de Riordan pour les nombres de Stirling de seconde espèce (voir [FS72, Prop. 2.7]).

**Corollaire 16.** *L'entier  $U(n, k)$  est le nombre de couples  $(Q_1, Q_2)$  de  $k$ -quasi-permutations super-diagonales de  $[n]$  telles que  $pr_y(Q_1) = pr_y(Q_2)$ .*

**Corollaire 17.** *L'entier  $S(n, k)$  est le nombre de  $k$ -quasi-permutations sous-diagonales (resp. super-diagonales) de  $[n]$ .*

FIGURE 1.3 – La quasi-permutation sous-diagonale qui correspond à une partition par l'application  $\varphi$



*Remarque 18.* Pour retrouver l'interprétation classique de  $S(n, k)$  du Corollaire 6, on peut appliquer une simple bijection, notée  $\varphi$ , de [FS72, Prop. 3]. Partant d'une  $k$ -partition  $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$  pour chaque bloc non-singleton  $B_i = \{p_1, p_2, \dots, p_{n_i}\}$  contenant  $n_i \geq 1$  éléments  $p_1 < p_2 < \dots < p_{n_i}$ , on associe la quasi-permutation sous-diagonale  $Q_i = \{(p_{n_i}, p_{n_i-1}), (p_{n_i-1}, p_{n_i-2}), \dots, (p_2, p_1)\}$  avec  $n_i - 1$  éléments de  $[n] \times [n]$ . Clairement, la réunion de tels  $Q_i$  est une quasi-permutation sous-diagonale de cardinal  $n - k$ . Un exemple pour la transformation  $\varphi$  est donnée dans la Figure 1.3.

Enfin, on peut déduire du Théorème 13 et de l'équation (1.22) une nouvelle interprétation combinatoire pour les nombres de Legendre-Stirling de seconde espèce. La correspondance entre les modèles sera établie dans le prochain paragraphe.

**Corollaire 19.** *L'entier  $LS(n, k)$  est le nombre de couples  $(Q_1, Q_2)$  de  $k$ -quasi-permutations à simples équerres de  $[n]$  telles que  $pr_y(Q_1) = pr_y(Q_2)$ .*

*Remarque 20.* Nous n'avons pas trouvé d'interprétation ni pour les nombres  $d_{n,k}^{(i)}$  de (1.25), ni pour les formules présentes dans le Théorème 11, en termes de quasi-permutations à simples équerres.

### 1.2.4 Le lien entre les deux modèles

On introduit une troisième interprétation qui permet de rendre plus visible les liens entre les deux modèles précédents. Nous noterons  $\Pi_{n,k}$  l'ensemble des partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs non-vides.

**Définition 21.** Soit  $\mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$  l'ensemble des triplets  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  de  $\Pi_{n,k+i} \times \Pi_{n,k+i} \times \Pi_{n,n-i}$  tels que :

- i)  $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$  et  $\text{Sing}(\pi_1) = \text{Sing}(\pi_2)$ ,
- ii)  $\min(\pi_1) \cup \text{Sing}(\pi_3) = \text{Sing}(\pi_1) \cup \min(\pi_3) = [n]$ ,

où  $\text{Sing}(\pi)$  désigne l'ensemble des singletons d'une partition  $\pi$ .

Nous aurons besoin du résultat suivant.

**Lemme 22.** Pour  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$ , on a :

- i)  $|\min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)| = k$ ,
- ii)  $|\text{Sing}(\pi_1) \setminus \min(\pi_3)| = i$ ,
- iii)  $|\text{Sing}(\pi_3) \setminus \min(\pi_1)| = n - k - i$ .

*Démonstration.* Par définition, on a  $|\min(\pi_1)| = k+i$  et  $|\min(\pi_3)| = n-i$ . Puisque  $\min(\pi_1) \cup \min(\pi_3) = [n]$ , par la formule du Crible, on déduit que :

$$|\min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)| = |\min(\pi_1)| + |\min(\pi_3)| - |\min(\pi_1) \cup \min(\pi_3)| = k,$$

et

$$|\text{Sing}(\pi_1) \setminus \min(\pi_3)| = |\text{Sing}(\pi_1)| - |\text{Sing}(\pi_1) \cap \min(\pi_3)| = n - |\min(\pi_3)| = i.$$

De la même façon, on obtient iii). □

**Théorème 23.** Il existe une bijection explicite entre  $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$  et  $\mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$  une  $k$ -partition signée de  $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$ . On construit le triplet de partitions  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  grâce à l'algorithme suivant.

- $\pi_1, \pi_2$  : – Soit  $\pi' = \{B'_0, B'_1, \dots, B'_k\}$  la partition obtenue en échangeant tous les  $j$  et  $-j$  de  $\pi$  si  $j \in B_0$  (resp.  $j \in [n]$ ).
- Soit  $\pi'' = \{B''_0, B''_1, \dots, B''_k\}$  la partition obtenue en enlevant toutes les valeurs négatives dans  $\pi'$ .
  - On définit  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) comme la partition obtenue en isolant les  $i$  éléments positifs de  $B''_0$  en  $i$  singletons et en effaçant 0 dans  $\pi''$ .

Les partitions obtenues  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont clairement des éléments de  $\Pi_{n,k+i}$  et satisfont  $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$  et  $\text{Sing}(\pi_1) = \text{Sing}(\pi_2)$ .

- $\pi_3$  : – Pour tout  $p \in [n] \setminus \min \pi$  tel que  $B_0 \cap \{\pm p\} = \emptyset$ , déplacer  $p$  dans le bloc-zéro pour obtenir une partition  $\pi' = \{B'_0, B'_1, \dots, B'_k\}$ . Ainsi, il y a  $n - k - i$  valeurs positives dans le nouveau bloc  $B'_0$ .
- Soit  $\pi'' = \{B''_0, B''_1, \dots, B''_k\}$  la partition obtenue en enlevant toutes les valeurs négatives dans  $\pi'$ .
  - On définit  $\pi_3$  comme la partition obtenue en isolant les  $n - k - i$  éléments positifs de  $B''_0$  en  $n - k - i$  singletons et en effaçant 0 dans  $\pi''$ .

La partition obtenue  $\pi_3$  est un élément de  $\Pi_{n,n-i}$ .

Pour tout  $p \in [n] \setminus \min(\pi_1)$ , si  $p \notin B_0$  alors  $B_0 \cap \{\pm p\} \neq \emptyset$ , par définition  $p$  sera déplacé dans le bloc-zéro, dans l'autre cas  $p$  était déjà dans le bloc-zéro. Ainsi, les éléments qui ne sont pas dans  $\min(\pi_1)$  deviennent des singletons dans  $\pi_3$ . Ainsi  $\min(\pi_1) \cup \text{Sing}(\pi_3) = [n]$ . De même, on a  $\text{Sing}(\pi_1) \cup \min(\pi_3) = [n]$ .

Par exemple, prenons la 3-partition signée de  $[\pm 10]_0$  :

$$\pi = \{\{-4, 6, 7, -8, -10\}_0, \{\pm 1, 3, 4, -5, -7\}, \{\pm 2, -3, 5, -6, 8\}, \{\pm 9, 10\}\}. \quad (1.34)$$

Le triplet correspondant est  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \Pi_{10,6} \times \Pi_{10,6} \times \Pi_{10,7}$  où :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{\{1, 3, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{4\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}\}, \\ \pi_2 &= \{\{1, 5, 7\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}\}, \\ \pi_3 &= \{\{1, 4\}, \{2, 8\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{9, 10\}\}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Réciproquement, soit  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  un élément de  $\mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$ , on construit

$$\pi = \{B_0, B_1, \dots, B_k\},$$

une  $k$ -partition signée de  $[\pm n]_0$  par la procédure suivante.

- Utiliser les  $k$  éléments de  $\min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)$ , disons  $p_1, \dots, p_k$ , et 0 pour créer  $k + 1$  blocs :

$$B_0 = \{\dots\}_0, B_1 = \{\pm p_1, \dots\}, \dots, B_k = \{\pm p_k \dots\}, \quad (1.36)$$

où “...” signifie que les blocs ne sont pas encore complétés. Par exemple, pour le triplet  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  de (1.35), on crée quatre blocs :  $\{0, \dots\}$ ,  $\{\pm 1, \dots\}$ ,  $\{\pm 2, \dots\}$  et  $\{\pm 9, \dots\}$ .

- Pour tout élément  $x_j$  de  $[n] \setminus \min(\pi_3)$  ( $1 \leq j \leq i$ ), supposons que  $x_j$  apparaisse dans un bloc (non-singleton)  $C_j$  de  $\pi_3$ . alors, on place  $-x_j$  dans le bloc-zéro  $B_0$  et  $x_j$  dans le bloc de (1.36) qui contient  $\min(C_j)$ . Remarquons que nous devons montrer que  $\min(C_j) \in \min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)$  pour garantir l’existence d’un tel bloc dans (1.36). En effet, si  $\min(C_j) \notin \min(\pi_1)$ , alors, par la Définition 21, on aurait  $\min(C_j) \in \text{Sing}(\pi_3)$ . Dans l’exemple précédent, on place le nombre 4 dans le bloc qui contient 1.
- Pour tout élément  $y_j$  de  $[n] \setminus \min(\pi_2)$  ( $1 \leq j \leq n - k - i$ ), supposons que  $y_j$  apparaisse dans un bloc (non-singleton)  $D_j$  (resp.  $E_j$ ) de  $\pi_2$  (resp.  $\pi_1$ ). Alors, on place  $-p_j$  dans le bloc de (1.36) qui contient  $\min(D_j)$  et on place  $p_j$  dans le bloc de (1.36) qui contient  $\min(E_j)$  sauf si ce bloc contient déjà  $-p_j$ , dans le bloc zéro  $B_0$  sinon. Dans l’exemple précédent, on place le nombre  $-3$  dans le bloc qui contient 2, 5 dans le bloc qui contient 2, et 6 dans le bloc-zéro car le bloc qui contient 2 contient déjà  $-6$ .  $\square$

Puisque l’application  $\varphi$  décrite dans la Remarque 18 envoie toute partition sur une quasi-permutation sous-diagonale, pour chaque triplet de partitions  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  de  $\mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$ , on peut associer un triplet  $(P_1, P_2, P_3) = (\varphi(\pi_1), \varphi(\pi_2), \varphi(\pi_3))$  de quasi-permutations sous-diagonales. Si  $\overline{P}_i$  désigne la quasi-permutation super-diagonale

obtenue à partir de  $P_i$  en échangeant les coordonnées  $x$  et  $y$ , alors  $(Q_1, Q_2) = (\overline{P_1} \cup P_3, \overline{P_2} \cup P_3)$  est un couple de quasi-permutations à simples équerres satisfaisant les conditions du Théorème 13. Ainsi, on obtient une bijection entre les  $k$ -partitions signées et les couples de quasi-permutations à simples équerres.

Par exemple, pour la 3-partition signée de  $[\pm 10]_0$   $\pi$  dans (1.34), le couple de quasi-permutations à simples équerres  $(Q_1, Q_2)$  est donné par (1.32) (cf. Figure 1.2).

### 1.3 Fonctions génératrices diagonales

Signalons pour commencer certains résultats sur les fonctions génératrices verticales des nombres de Jacobi-Stirling.

Il est connu que la fonction génératrice verticale des nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) t^n = \frac{t^k}{(1-t)(1-2t) \dots (1-kt)}. \quad (1.37)$$

Pour les nombres de Jacobi-Stirling, on déduit facilement à partir de la récurrence (1.11) la relation suivante :

$$\sum_{n \geq k} \text{JS}(n, k; z) t^n = \frac{t}{1 - k(k+z)} \sum_{n \geq k-1} \text{JS}(n, k-1; z) t^n. \quad (1.38)$$

Par conséquent, la fonction génératrice verticale des nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce est alors donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \text{JS}(n, k; z) t^n = \frac{t^k}{(1 - (z+1)t)(1 - 2(z+2)t) \dots (1 - k(z+k)t)}. \quad (1.39)$$

On peut remarquer que, en spécialisant pour le cas  $z = 0$ , on retrouve la fonction génératrice verticale des nombres factoriels centraux de seconde espèce d'indices pairs :

$$\sum_{n \geq k} U(n, k) t^n = \frac{t^k}{(1-t)(1-4t)(1-9t) \dots (1-k^2t)}. \quad (1.40)$$

À présent, nous allons étudier les fonctions génératrices des diagonales de la Table 1.1. En effet, une étude analogue a été réalisée par Gessel et Stanley [GS78] pour les nombres de Stirling, et plus récemment Egge [Egg10] a fait un travail analogue pour les nombres de Legendre-Stirling, il apparaît donc comme naturel de voir si une extension est possible pour les nombres de Jacobi-Stirling.

Posons  $f_k(n; z)$  (qu'on notera plus simplement  $f_k(n)$ , la dépendance en  $z$  étant implicite) le nombre de *Jacobi-Stirling diagonal* défini par :

$$f_k(n) = \text{JS}(n + k, n; z).$$

Gessel et Stanley [GS78] ont démontré que le nombre de Stirling  $S(n + k, k)$  (qui correspond au coefficient dominant de  $\text{JS}(n + k, n; z)$ ) est un polynôme de la variable  $n$  de degré  $2k$  et de coefficient dominant  $(2^k k!)^{-1}$ . Egge [Egg10] a prouvé sur un raisonnement analogue que  $\text{LS}(n + k, k)$  (qui correspond à la somme des coefficients de  $\text{JS}(n + k, n; z)$ ) est un polynôme de la variable  $n$  de degré  $3k$  et de coefficient dominant  $(3^k k!)^{-1}$ . On peut donc se demander de façon naturelle s'il existe une généralisation pour tous les coefficients du polynôme  $\text{JS}(n + k, n; z)$ .

**Théorème 24.** *Pour tout entier  $k$ , le nombre de Jacobi-Stirling diagonal  $f_k(n)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $k$ , et si on note :*

$$f_k(n) = p_{k,0}(n) + p_{k,1}(n)z + \cdots + p_{k,k}(n)z^k,$$

chaque coefficient  $p_{k,i}(n)$  est un polynôme en  $n$  de degré  $3k - i$  et de coefficient dominant  $(\alpha_{k,i})^{-1}$  où pour tout  $0 \leq i \leq k$ ,

$$\alpha_{k,i} = \begin{cases} 3^k k! & \text{si } i = 0, \\ 3^{k-i} 2^{2i-1} (k-i)! & \text{si } 0 < i \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \\ 3^{k-i} 2^{2k-1} i! & \text{si } \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \leq i < k, \\ 2^k k! & \text{si } i = k. \end{cases} \quad (1.41)$$

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $k$ . On sait que  $p_{0,0}(n) = 1$  puisque  $f_0(n) = \text{JS}(n, n; z) = 1$ , donc la propriété est vérifiée au rang 0. Supposons qu'on ait montré que pour tout  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $p_{k-1,i}(n)$  est un polynôme en  $n$  de degré  $3(k-1) - i$ . La formule de récurrence (1.11) nous donne l'identité suivante :

$$f_k(n) - f_k(n-1) = n(n+z)f_{k-1}(n), \quad (1.42)$$

ce qui se traduit en

$$p_{k,i}(n) - p_{k,i}(n-1) = n^2 p_{k-1,i}(n) + n p_{k-1,i-1}(n). \quad (1.43)$$

Rappelons qu'une fonction  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  est un polynôme de degré  $d$  et de coefficient  $\alpha$  si et seulement si  $g(n+1) - g(n)$  est un polynôme en  $n$  de degré  $d-1$  et de coefficient dominant  $\alpha d$ .

Ici, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on voit que  $p_{k,i}(n) - p_{k,i}(n-1)$  est un polynôme en  $n$  de degré  $\max(3(k-1) - i + 2, 3(k-1) - (i-1) + 1) = 3k - i - 1$ . Autrement dit,  $p_{k,i}(n)$  est bien un polynôme en  $n$  de degré  $3k - i$ .

Pour tous entiers  $i$  et  $k$  tels que  $0 \leq i \leq k$ , notons  $\beta_{k,i}$  le coefficient dominant du polynôme  $p_{k,i}(n)$ . Le coefficient dominant du membre de droite de (1.43) est  $\beta_{k-1,i} + \beta_{k-1,i-1}$ . Ainsi, la suite  $\beta_{k,i}$  doit vérifier la récurrence suivante :

$$\beta_{k,i} = \frac{1}{3k-i} (\beta_{k-1,i} + \beta_{k-1,i-1}), \quad (1.44)$$

c'est-à-dire que  $\beta_{k,i} = \frac{1}{\alpha_{k,i}}$  où  $(\alpha_{k,i})$  est la suite définie par les relations (2.16).  $\square$

Les premières valeurs des nombres  $\alpha_{k,i}$  sont données dans la Table 1.4. En particulier, on voit que les termes de la diagonale correspondent bien à l'inverse du coefficient dominant de  $S(n+k, n)$  déterminé par Gessel et Stanley. De même, on retrouve sur la première colonne l'inverse du coefficient dominant de  $LS(n+k, n)$  déterminé par Egge.

**Théorème 25.** *On a pour tous  $k \geq 1$  et tout  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,*

$$p_{k,i}(0) = p_{k,i}(-1) = p_{k,i}(-2) = \dots = p_{k,i}(-k) = 0.$$

*Démonstration.* On va raisonner par récurrence sur  $k$ .

On a  $f_1(n) = JS(n+1, n; z) = p_{1,0}(n) + p_{1,1}(n)z$ .

Puisque  $p_{1,1}(n) = S(n+1, n)$ , cela correspond au nombre de partitions de  $[n+1]$  en  $n$  blocs, autrement dit, on a  $n-1$  singletons et un bloc contenant 2 éléments : il y a donc exactement  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  possibilités. On a donc  $p_{1,1}(n) = n(n+1)/2$  et en particulier  $p_{1,1}(0) = p_{1,1}(-1) = 0$ .

Puisque  $p_{1,0}(n) = U(n+1, n)$ , cela correspond au nombre de couples de partitions  $(\pi_1, \pi_2)$  de  $[n+1]$  en  $n$  blocs, dont les minimums de blocs coïncident. Si  $j$  désigne l'élément de  $[n+1]$  qui ne sera pas un minimum dans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , (pour  $j \in \{2, \dots, n+1\}$ ), il y a  $j-1$  blocs possibles pour placer  $j$  dans  $\pi_1$  et de même  $j-1$  blocs possibles

pour placer  $j$  dans  $\pi_2$ . On a donc  $p_{1,0}(n) = \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . En

particulier,  $p_{1,0}(0) = p_{1,0}(-1) = 0$ .

A présent supposons le résultat prouvé pour un certain  $k \geq 1$ . On a toujours  $p_{k,i}(0) = 0$  puisque  $JS(k, 0; z) = 0$  dès que  $k \geq 1$ . Ensuite, l'hypothèse de récurrence nous donne que le membre de droite de la relation :

$$p_{k,i}(n) - p_{k,i}(n-1) = n^2 p_{k-1,i}(n) + n p_{k-1,i-1}(n), \quad (1.45)$$

est nul pour  $n \in \{-k+1, -k+2, \dots, 0\}$ , et le résultat est alors démontré.  $\square$

TABLE 1.3 – Les premières valeurs de  $\alpha_{k,i}$ 

| $k \setminus i$ | 0                  | 1                    | 2                                  | 3                                  | 4                                  | 5                                  | 6                    | 7                  |
|-----------------|--------------------|----------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|----------------------|--------------------|
| 0               | 1                  |                      |                                    |                                    |                                    |                                    |                      |                    |
| 1               | 3.1!               | 2.1!                 |                                    |                                    |                                    |                                    |                      |                    |
| 2               | 3 <sup>2</sup> .2! | 3.2.1!               | 2 <sup>2</sup> .1!                 |                                    |                                    |                                    |                      |                    |
| 3               | 3 <sup>3</sup> .3! | 3 <sup>2</sup> .2.2! | 3.2 <sup>2</sup> .2!               | 2 <sup>3</sup> .3!                 |                                    |                                    |                      |                    |
| 4               | 3 <sup>4</sup> .4! | 3 <sup>3</sup> .2.3! | 3 <sup>2</sup> .2 <sup>3</sup> .2! | 3.2 <sup>3</sup> .3!               | 2 <sup>4</sup> .4!                 |                                    |                      |                    |
| 5               | 3 <sup>5</sup> .5! | 3 <sup>4</sup> .2.4! | 3 <sup>3</sup> .2 <sup>3</sup> .3! | 3 <sup>2</sup> .2 <sup>4</sup> .3! | 3.2 <sup>4</sup> .4!               | 2 <sup>5</sup> .5!                 |                      |                    |
| 6               | 3 <sup>6</sup> .6! | 3 <sup>5</sup> .2.5! | 3 <sup>4</sup> .2 <sup>3</sup> .4! | 3 <sup>3</sup> .2 <sup>5</sup> .3! | 3 <sup>2</sup> .2 <sup>5</sup> .4! | 3.2 <sup>5</sup> .5!               | 2 <sup>6</sup> .6!   |                    |
| 7               | 3 <sup>7</sup> .7! | 3 <sup>6</sup> .2.6! | 3 <sup>5</sup> .2 <sup>3</sup> .5! | 3 <sup>4</sup> .2 <sup>5</sup> .4! | 3 <sup>3</sup> .2 <sup>6</sup> .4! | 3 <sup>2</sup> .2 <sup>6</sup> .5! | 3.2 <sup>6</sup> .6! | 2 <sup>7</sup> .7! |



**Théorème 26.** *Pour tout entier  $k$  et tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq k$ , si on note  $F_{k,i}(t)$  la fonction génératrice diagonale définie par :*

$$F_{k,i}(t) = \sum_{n \geq 0} p_{n,k}^{(i)} t^n,$$

alors il existe un polynôme  $A_{k,i}$  en  $t$  de degré  $2k - i$ , avec  $A_{k,i}(0) = 0$ , tel que

$$F_{k,i}(t) = \frac{A_{k,i}(t)}{(1-t)^{3k-i+1}}. \quad (1.46)$$

*Démonstration.* C'est une conséquence conjointe des théorèmes 24 et 25. En effet, rappelons (voir [Sta78, 4.6]) que la fonction génératrice d'un polynôme  $P(n)$  de degré  $d$  est de la forme

$$\sum_{n \geq 0} P(n)t^n = \frac{A(t)}{(1-t)^{d+1}},$$

où  $A(t)$  est un polynôme de degré au plus  $d$ .

De plus, le fait que  $P$  admette des racines entières donne des informations sur les coefficients du polynôme  $A$ . En notant

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d,$$

on sait que si  $P(0) = P(1) = \dots = P(\ell) = 0$ , alors

$$a_0 = a_1 = \dots = a_\ell = 0.$$

Également, si  $P(-1) = P(-2) = \dots = P(-m)$ , alors

$$a_d = a_{d-1} = \dots = a_{d-m+1} = 0.$$

En appliquant ces propriétés à notre cas particulier, on obtient le résultat voulu.  $\square$

En traduisant la relation (1.43), on en déduit le résultat suivant.

**Théorème 27.** *La suite des fonctions génératrices diagonales  $F_{k,i}(t)$  vérifie la relation suivante :*

$$F_{k,i}(t) = \frac{1}{1-t} \left( t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_{k-1,i}(t) + t \frac{\partial}{\partial t} F_{k-1,i}(t) + t \frac{\partial}{\partial t} F_{k-1,i-1}(t) \right). \quad (1.47)$$

En remplaçant les fonctions génératrices par leur forme explicite (1.46), on peut noter

$$A_{k,i}(t) = \sum_{j=1}^{2k-i} A_{k,i,j} t^j,$$

avec comme convention  $A_{0,0}(t) = 1$  et  $A_{k,i,j} = 0$  si  $k \geq 1$ ,  $0 \leq i \leq k$  et  $j \notin \{1, \dots, 2k - i\}$ . On déduit le résultat suivant.

**Théorème 28.** *La suite  $(A_{k,i,j})$  vérifie la relation suivante :*

$$\begin{aligned} A_{k,i,j} = & j^2 A_{k-1,i,j} - 2(j-1)(3k-i+j-3)A_{k-1,i,j-1} - (3k-i-2)A_{k-1,j-1} \\ & + (j-2)(6k-2i-j-6)A_{k-1,i,j-2} + (3k-i-2)(3k-i)A_{k-1,i,j-2} \\ & + jA_{k-1,i-1,j} - (3k-i+2j-3)A_{k-1,i-1,j-1} \\ & + (3k-i+j-3)A_{k-1,i-1,j-2}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

La relation précédente permet de calculer les polynômes  $A_{k,i}(t)$  pour les premières valeurs de  $k$  et  $i$  (voir Table 1.4). On remarque alors que les polynômes  $A_{k,i}(t)$  sont tous à coefficients entiers positifs, ce qui est loin d'être évident d'après la formule de récurrence (2.19).

**Conjecture 29.** *Pour tout  $k \geq 0$  et  $0 \leq i \leq k$ , les coefficients du polynôme  $A_{k,i}$  sont tous des entiers positifs.*

## 1.4 Les $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce

Nous terminons ce chapitre par une analogie avec la théorie des  $r$ -nombres de Stirling, que nous étendons ici aux nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce.

Le  $r$ -nombre de Stirling de seconde espèce, que nous noterons ici  $S_r(n, k)$ , est défini comme le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs non-vides, de telle sorte que les entiers  $1, 2, \dots, r$ , soient tous distribués dans des blocs distincts (autrement dit, on impose que les nombres  $1, 2, \dots, r$  soient des minimums de blocs). Les nombres de Stirling classiques peuvent alors être retrouvés par  $S(n, k) = S_0(n, k)$ , et dans le cas où  $n \geq 1$  par  $S(n, k) = S_1(n, k)$ .

Suivant la première interprétation combinatoire des nombres de Jacobi-Stirling, on définit le  $r$ -nombre de Jacobi-Stirling de seconde espèce de la manière suivante :

$$\text{JS}(n, k, r; z) = a_{n,k,r}^{(0)} + a_{n,k,r}^{(1)}z + \dots + a_{n,k,r}^{(n-k)}z^{n-k},$$

où  $a_{n,k,r}^{(i)}$  désigne le nombre de  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  telles que les entiers  $1, 2, \dots, r$  soient des minimums de blocs.

**Théorème 30.** *Pour tous entiers  $n, k, i$  tels que  $0 \leq i \leq n - k$ , les  $r$ -coefficients de Jacobi-Stirling  $a_{n,k,r}^{(i)}$  vérifient les relations de récurrence suivantes :*

$$a_{n,k,r}^{(i)} = 0 \quad \text{si } r > n, \quad (1.49)$$

$$a_{n,k,n}^{(i)} = \delta_{n,k} \quad \text{si } r = n, \quad (1.50)$$

$$a_{n,k,n}^{(i)} = a_{n-1,k-1,r}^{(i)} + ka_{n-1,k,r}^{(i-1)} + k^2 a_{n-1,k,r}^{(i)} \quad \text{si } r < n. \quad (1.51)$$

TABLE 1.4 – Les premières valeurs de  $F_{k,i}(t)$ 

| $k \setminus i$ | 0  | 1   | 2                                       | 3                             |
|-----------------|--|---|---|-------------------------------|
| 0               | $\frac{1}{1-t}$  |   |   |                               |
| 1               | $\frac{t+t^2}{(1-t)^4}$                                  | $\frac{t}{(1-t)^3}$                             |   |                               |
| 2               | $\frac{t+14t^2+21t^3+4t^4}{(1-t)^7}$                     | $\frac{2t+12t^2+6t^3}{(1-t)^6}$                 | $\frac{t+2t^2}{(1-t)^5}$                |                               |
| 3               | $\frac{t+75t^2+603t^3+1065t^4+460t^5+36t^6}{(1-t)^{10}}$ | $\frac{3t+144t^2+501t^3+436t^4+66t^5}{(1-t)^9}$ | $\frac{3t+55t^2+116t^3+36t^4}{(1-t)^8}$ | $\frac{t+8t^2+6t^3}{(1-t)^7}$ |

*Démonstration.* Pour  $r \geq n$ , les résultats sont immédiats.

Pour  $r < n$ , on note  $\mathcal{A}_{n,k,r}^{(i)}$  l'ensemble des  $k$ -partitions signées de  $[\pm n]_0$  telles que les entiers  $1, 2, \dots, r$  soient des minimums de blocs. On procède comme dans la preuve du Théorème 4 en partitionnant l'ensemble  $\mathcal{A}_{n,k,r}^{(i)}$  en fonction d'où sont placés  $n$  et  $-n$  dans la partition. Puisque  $r < n$ , la place de  $n$  et  $-n$  n'influera pas sur le fait que les  $r$  premiers entiers soient des minimums ou non dans la partition. On obtient donc la même récurrence que (1.21) avec les  $r$  en plus.  $\square$

De manière immédiate avec la définition, on a :

$$a_{n,n,r}^{(i)} = 1 \quad \text{si } n \geq r,$$

$$a_{n,k,r}^{(i)} = 0 \quad \text{si } k \geq n.$$

On a également la relation suivante.

**Théorème 31.** *On a pour  $n \geq r$ ,*

$$a_{n,r,r}^{(i)} = \binom{n-r}{i} r^{2n-2r-i}.$$

*Démonstration.* Si on veut compter les partitions de  $[\pm n]_0$  en  $r$  blocs sachant déjà que les nombres  $1, 2, \dots, r$  sont les minimums des blocs, il suffit de décider où placer les nombres  $\pm(r+1), \pm(r+2), \dots, \pm n$ .

Si de plus, on impose qu'il y ait  $i$  valeurs négatives dans le bloc zéro, il faut donc :

- choisir les  $i$  valeurs négatives qu'on met dans le bloc zéro parmi les  $n-r$  possibilités,
- choisir la place des  $i$  valeurs positives opposées de celles placées dans le bloc zéro : chacune a  $r$  possibilités,
- les  $n-r-i$  valeurs négatives restantes à placer ont  $r$  possibilités,
- les  $n-r-i$  valeurs positives restantes à placer ont  $r+1-1$  possibilités ( $r+1$  blocs dont le bloc-zéro, et dans un bloc différent de celui contenant leur opposé).

On a donc bien

$$a_{n,r,r}^{(i)} = \binom{n-r}{i} r^i r^{n-r-i} (r+1-1)^{n-r-i} = \binom{n-r}{i} r^{2n-2r-i}. \quad \square$$

*Remarque 32.* En particulier dans le cas où  $i = n-r$ , on retrouve le fait que

$$S_r(n, r) = r^{n-r}.$$

**Théorème 33.** *On a pour tous entiers positifs  $n$  et  $k$*

$$a_{n+k,n,r}^{(i)} = \sum j_1^{\alpha_1} j_2^{\alpha_2} \cdots j_k^{\alpha_k},$$

où la somme porte sur tous les  $2k$ -uplets  $(j_1, \dots, j_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  tels que  $r \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq n$  et  $1 \leq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \leq 2$  avec  $\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell = 2k - i$ .

*Démonstration.* On veut compter le nombre de partitions de l'ensemble  $[\pm(n+k)]_0$  en  $n$  blocs non vides, où les  $n$  éléments minimaux sont fixés. Notons  $x_1 < \cdots < x_k$  les  $k$  éléments positifs qui ne sont pas minimaux. Notons  $j_1, \dots, j_k$  respectivement le nombre de minimums plus petits respectivement que  $x_1, \dots, x_k$ . On a alors  $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq n$ .

On choisit parmi ces  $k$  éléments, un sous-ensemble de  $i$  entiers  $x_{m_1}, \dots, x_{m_i}$  (où  $(m_i)$  est une suite croissante), qui seront ceux dont la valeur négative sera dans le bloc zéro. Il y a alors  $j_{m_1} \cdots j_{m_i}$  possibilités pour placer les valeurs positives correspondantes à ces  $i$  nombres.

Parmi les  $k - i$  éléments restants, il y a  $\frac{j_1 \cdots j_k}{j_{m_1} \cdots j_{m_i}}$  possibilités pour placer les valeurs négatives et autant de possibilités pour placer les valeurs positives (cela doit être dans un bloc différent de la valeur négative, mais on rajoute la possibilité du bloc-zéro).

Au final, on obtient donc

$$\frac{(j_1 \cdots j_k)^2}{j_{m_1} \cdots j_{m_i}}$$

possibilités. En sommant sur le choix de l'ensemble  $x_1 < \cdots < x_k$ , puis le choix du sous-ensemble  $x_{m_1} < \cdots < x_{m_i}$ , on obtient le résultat annoncé.  $\square$

*Remarque 34.* En particulier, en prenant  $i = k$ , on retrouve le fait que

$$S_r(n+k, n) = \sum_{r \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} i_1 i_2 \cdots i_k.$$

---

## CHAPITRE 2

---

### Nombres de Jacobi-Stirling de première espèce

---

#### 2.1 Définitions

Comme nous l'avons souligné au chapitre précédent, les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce  $\text{JS}(n, k; z)$  sont des coefficients de changement de base dans  $\mathbb{R}_n[X]$  entre la base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  et la base  $((X)_{0,z}, (X)_{1,z}, \dots, (X)_{n,z})$ , où  $(X)_{k,z} = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i(i+z))$  si  $k \geq 1$ , et  $(X)_{0,z} = 1$  :

$$X^n = \sum_{k=0}^n \text{JS}(n, k; z) (X)_{k,z}. \quad (2.1)$$

Il est alors naturel de se demander ce qu'il advient des coefficients relatifs au changement de base inverse, allant de la base  $((X)_{0,z}, (X)_{1,z}, \dots, (X)_{n,z})$  à la base canonique. Ces coefficients sont alors appelés les *nombres de Jacobi-Stirling de première espèce*, notés  $\text{js}(n, k; z)$  et vérifiant la relation :

$$\prod_{i=0}^{n-1} (X - i(z+i)) = \sum_{k=0}^n \text{js}(n, k; z) X^k. \quad (2.2)$$

Il s'ensuit de (2.2) que les nombres de Jacobi-Stirling  $\text{js}(n, k; z)$  satisfont les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \text{js}(0, 0; z) = 1, & \text{js}(n, k; z) = 0, & \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \\ \text{js}(n, k; z) = \text{js}(n-1, k-1; z) - (n-1)(n-1+z)\text{js}(n-1, k; z), & n, k \geq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les premières valeurs de  $\text{js}(n, k; z)$  peuvent ainsi être calculées facilement de proche en proche, et sont données dans la Table 2.1.

Les définitions précédentes rappellent naturellement la définition des classiques *nombre de Stirling de première espèce*  $s(n, k)$ , qui sont définis (voir [Com74]) comme les coefficients du changement de base inverse de celui définissant les nombres de Stirling de seconde espèce :

$$X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \prod_{i=0}^{k-1} (X - i), \quad \prod_{i=0}^{n-1} (X - i) = \sum_{k=0}^n s(n, k) X^k.$$

Les nombres de Stirling de première espèce satisfont à la récurrence suivante :

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) - (n - 1)s(n - 1, k), \quad n, k \geq 1. \quad (2.4)$$

Le point de départ de ce chapitre est l'observation que les *nombre factoriels centraux de première espèce*  $t(n, k)$  semblent, encore une fois, plus appropriés en vue d'une comparaison. En effet, ces nombres sont définis dans l'ouvrage de Rioridan [Rio68, p. 213-217] par analogie avec les deux suites introduites précédemment, comme les coefficients du changement de base inverse de celui définissant les nombres factoriels centraux de première espèce :

$$X^n = \sum_{k=0}^n T(n, k) X \prod_{i=1}^{k-1} \left( X + \frac{k}{2} - i \right), \quad (2.5)$$

et

$$X \prod_{i=1}^{n-1} \left( X + \frac{n}{2} - i \right) = \sum_{k=0}^n t(n, k) X^k. \quad (2.6)$$

Comme dans le cas des nombres factoriels centraux de seconde espèce, les nombres  $t(n, k)$  ne sont pas tous des entiers naturels. Cependant, si on note les nombres factoriels centraux d'indices pairs par  $u(n, k) = t(2n, 2k)$ , alors :

$$u(n, k) = u(n - 1, k - 1) - (n - 1)^2 u(n - 1, k). \quad (2.7)$$

La présence du coefficient  $(n - 1)^2$  dans la relation de récurrence (2.7) est ainsi plus proche du coefficient  $(n - 1)(n - 1 + z)$  des nombres de Jacobi-Stirling, à l'inverse du coefficient  $(n - 1)$  présent dans la récurrence des nombres de Stirling de première espèce. Le chapitre 3 fera l'objet d'une étude plus approfondie des nombres factoriels centraux.

Des définitions et équations précédentes, on peut facilement déduire le résultat suivant, qui permet de faire le lien entre les différentes suites de nombres introduites.

TABLE 2.1 – Les premières valeurs de  $js(n, k; z)$ 

| $k \setminus n$ | 0 | 1         | 2                  | 3                               | 4                                       | 5 |
|-----------------|---|-----------|--------------------|---------------------------------|---|---|
| 0               | 1 | 0         | 0                  | 0                               | 0                                       | 0 |
| 1               | 1 | $-z - 1$  | $2z^2 + 6z + 4$    | $-6z^3 - 36z^2 - 66z - 36$      | $24z^4 + 240z^3 + 840z^2 + 1200z + 576$ |   |
| 2               | 1 | $-3z - 5$ | $11z^2 + 48z + 49$ | $-50z^3 - 404z^2 - 1030z - 820$ |   |   |
| 3               | 1 | 1         | $-6z - 14$         | $35z^2 + 200z + 273$            |   |   |
| 4               | 1 | 1         | $-10z - 30$        |                                 |   |   |
| 5               | 1 | 1         |                    |                                 |   |   |



**Théorème 35.** Soient  $n, k$  deux entiers positifs avec  $n \geq k$ . Les nombres de Jacobi-Stirling  $(-1)^{n-k} \text{js}(n, k; z)$  sont des polynômes en  $z$  de degré  $n - k$  à coefficients entiers positifs. De plus, si on note :

$$(-1)^{n-k} \text{js}(n, k; z) = b_{n,k}^{(0)} + b_{n,k}^{(1)} z + \cdots + b_{n,k}^{(n-k)} z^{n-k}, \quad (2.8)$$

alors

$$b_{n,k}^{(n-k)} = |s(n, k)|, \quad (2.9)$$

$$b_{n,k}^{(0)} = |u(n, k)|. \quad (2.10)$$

*Démonstration.* D'après la relation (2.3), et sachant que  $\text{js}(0, 0; z) = 1$ , on déduit facilement par récurrence que les nombres  $\text{js}(n, k; z)$  sont tous des polynômes en  $z$  de degré  $n - k$  et de coefficients positifs. La relation (2.3) peut se traduire alors à l'aide des coefficients de ces polynômes, et devient :

$$b_{n,k}^{(i)} = b_{n-1,k-1}^{(i)} + (n-1)b_{n-1,k}^{(i-1)} + (n-1)^2 b_{n-1,k}^{(i)}. \quad (2.11)$$

On en déduit donc bien que les coefficients dominants et constants de  $\text{js}(n, k; z)$  vérifient respectivement les relations correspondantes pour  $|s(n, k)|$  et  $|u(n, k)|$  :

$$|s(n, k)| = |s(n-1, k-1)| + (n-1)|s(n-1, k)|, \quad (2.12)$$

$$|u(n, k)| = |u(n-1, k-1)| + (n-1)^2 |u(n-1, k)|, \quad (2.13)$$

qu'on peut déduire depuis (2.4) et (2.7).  $\square$

Les nombres de Stirling de première espèce possèdent une interprétation combinatoire, puisque  $|s(n, k)|$  dénombre les permutations de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  cycles disjoints. Les nombres factoriels centraux de première espèce  $|u(n, k)|$ , n'avaient cependant pas été étudiés jusqu'à présent du point de vue combinatoire. Il est donc naturel également de se demander s'il existe un raffinement du modèle combinatoire des nombres de Stirling de première espèce pour interpréter chaque coefficient  $b_{n,k}^{(i)}$  du nombre de Jacobi-Stirling  $\text{js}(n, k; z)$ .

Remarquons également que le nombre  $\text{js}(n, k; 1)$ , qui est la somme sur  $i$  des coefficients  $b_{n,k}^{(i)}$ , correspond au nombre de Legendre-Stirling de première espèce  $\text{ls}(n, k)$ . Ces nombres ont été signalés dans [AL09] mais aucune interprétation combinatoire n'avait alors été énoncée.

Le but de ce chapitre est de fournir une interprétation combinatoire des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce. Dans la section 2.2, après quelques définitions nécessaires, nous donnerons une interprétation combinatoire de  $b_{n,k}^{(i)}$ . Dans la section 2.3, nous étudierons en analogie avec le chapitre 1, les fonctions génératrices diagonales des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce. Enfin, dans la section 2.4, nous définirons les  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de première espèce comme nous l'avons fait pour ceux de seconde espèce et donnerons les analogues des résultats fournis dans le chapitre 1.

## 2.2 Interprétation combinatoire

Pour une permutation  $\sigma$  de  $[n]_0 := [n] \cup \{0\}$  (resp.  $[n]$ ) et pour  $j \in [n]_0$  (resp.  $[n]$ ), on notera dans ce paragraphe  $\text{Orb}_\sigma(j) = \{\sigma^\ell(j) : \ell \geq 1\}$  l'orbite de  $j$  et  $\min(\sigma)$  l'ensemble des minimums de cycles, i.e.,

$$\min(\sigma) = \{j \in [n] : j = \min(\text{Orb}_\sigma(j) \cap [n])\}.$$

**Définition 36.** Étant donné un mot  $w = w(1) \dots w(\ell)$  sur l'alphabet fini  $[n]$ , une lettre  $w(j)$  est un *élément saillant* de  $w$  si  $w(k) > w(j)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, j-1\}$ . On définit  $\text{rec}(w)$  comme le nombre d'éléments saillants de  $w$  et  $\text{rec}_0(w) = \text{rec}(w) - 1$ .

Par exemple, si  $w = \mathbf{574862319}$ , alors les éléments saillants sont 5, 4, 2, 1. Ainsi  $\text{rec}(w) = 4$ .

**Théorème 37.** Pour tous entiers positifs  $n$  et  $k$ , l'entier  $b_{n,k}^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq n-k$ ), coefficient du nombre de Jacobi-Stirling de première espèce

$$js(n, k; z) = \sum_{i=0}^{n-k} b_{n,k}^{(i)} z^i,$$

est le nombre de couples  $(\sigma, \tau)$  tels que  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) est une permutation de  $[n]_0$  (resp.  $[n]$ ) en  $k$  cycles, satisfaisant les conditions :

- i)  $1 \in \text{Orb}_\sigma(0)$ ,
- ii)  $\min \sigma = \min \tau$ ,
- iii)  $\text{rec}_0(w) = i$ , où  $w = \sigma(0) \dots \sigma^\ell(0)$  avec  $\sigma^{\ell+1}(0) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}_{n,k}^{(i)}$  l'ensemble des couples  $(\sigma, \tau)$  satisfaisant les conditions du Théorème 37 et notons  $e_{n,k}^{(i)} = \text{Card}(\mathcal{E}_{n,k}^{(i)})$ . On partitionne  $\mathcal{E}_{n,k}^{(i)}$  en trois groupes.

- (i) Les couples  $(\sigma, \tau)$  tels que  $\sigma^{-1}(n) = n$ . Alors  $n$  forme un cycle dans les partitions  $\sigma$  et  $\tau$ ; il y a alors clairement  $e_{n-1,k-1}^{(i)}$  possibilités.
- (ii) Les couples  $(\sigma, \tau)$  tels que  $\sigma^{-1}(n) = 0$ . On peut construire de tels couples en choisissant d'abord un couple  $(\sigma', \tau')$  dans  $\mathcal{E}_{n-1,k}^{(i-1)}$  et en insérant ensuite  $n$  in  $\sigma'$  comme image de 0 (resp. dans  $\tau'$ ). Clairement, il y a  $(n-1)e_{n-1,k}^{(i-1)}$  possibilités.
- (iii) Les couples  $(\sigma, \tau)$  tels que  $\sigma^{-1}(n) \notin \{0, n\}$ . On peut construire de tels couples en choisissant d'abord un couple  $(\sigma', \tau')$  dans  $\mathcal{E}_{n-1,k}^{(i)}$  et en insérant ensuite  $n$  dans  $\sigma'$  (resp. dans  $\tau'$ ). Clairement, il y a  $(n-1)^2 e_{n-1,k}^{(i)}$  possibilités.

En résumé, on obtient l'équation suivante :

$$e_{n,k}^{(i)} = e_{n-1,k-1}^{(i)} + (n-1)e_{n-1,k}^{(i-1)} + (n-1)^2 e_{n-1,k}^{(i)}, \quad (2.14)$$

et la suite  $(e_{n,k}^{(i)})$  coïncide ainsi avec la suite  $(b_{n,k}^{(i)})$  d'après la relation (2.11).  $\square$

On montre à présent comment déduire des Théorèmes 35 et 37 les interprétations combinatoires des nombres  $|ls(n, k)|$ ,  $|s(n, k)|$  et  $|u(n, k)|$ .

**Corollaire 38.** *L'entier  $|ls(n, k)|$  est le nombre de couples  $(\sigma, \tau)$  tels que  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) est une permutation de  $[n]_0$  (resp.  $[n]$ ) en  $k$  cycles, satisfaisant  $1 \in \text{Orb}_\sigma(0)$  et  $\min \sigma = \min \tau$ .*

*Remarque 39.* Remarquons que Egge [Egg10] a également montré ce résultat parallèlement à notre article [GZ10], avec une interprétation équivalente.

**Corollaire 40.** *L'entier  $|s(n, k)|$  est le nombre de permutations de  $[n]$  en  $k$  cycles.*

*Démonstration.* Par le Théorème 37, l'entier  $|s(n, k)|$  est le nombre de couples  $(\sigma, \tau)$  de  $\mathcal{E}_{n,k}^{(n-k)}$ . Puisque  $\sigma$  et  $\tau$  ont toutes deux  $k$  cycles et même minimums de cycles, la permutation  $\sigma$  est entièrement déterminée par  $\tau$  car  $\text{Orb}_\sigma(1)$  est le seul cycle non-singleton, de cardinal  $n - k + 2$ ; de plus, les  $n - k$  éléments de ce cycle (différents de 0 et 1) sont exactement les éléments de  $[n] \setminus \min \tau$  rangés dans l'ordre décroissant dans le mot  $w = \sigma(0)\sigma^2(0) \dots 1$  avec  $\sigma(1) = 0$ .  $\square$

Le résultat ci-dessous est l'interprétation analogue au Corollaire 7 pour les nombres factoriels centraux de première espèce. Cette analogie est comparable à celle des nombres de Stirling de première espèce  $|s(n, k)|$  versus les nombres de Stirling de seconde espèce  $|S(n, k)|$ .

**Corollaire 41.** *L'entier  $|u(n, k)|$  est le nombre de couples  $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2$  en  $k$  cycles, tels que  $\min(\sigma) = \min(\tau)$ .*

En effet, l'entier  $|u(n, k)|$  est le nombre de couples  $(\sigma, \tau)$  de  $\mathcal{E}_{n,k}^{(0)}$ . Le Théorème 37 implique que  $\sigma^{-1}(1) = 0$ . Le résultat suit alors en effaçant le zéro dans  $\sigma$ .

*Remarque 42.* En faisant la substitution  $i \rightarrow n + 1 - i$ , on peut déduire que le nombre  $|u(n, k)|$  est également le nombre de couples  $(\sigma, \tau)$  de  $\mathcal{S}_n^2$  en  $k$  cycles, tels que  $\max(\sigma) = \max(\tau)$ , où  $\max(\sigma)$  désigne l'ensemble des maximums de cycles de  $\sigma$ , i.e.,

$$\max(\sigma) = \{j \in [n] : j = \max(\text{Orb}_\sigma(j))\}.$$

## 2.3 Fonctions génératrices diagonales

Avant d'étudier les fonctions génératrices diagonales des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce, nous allons étudier les liens plus profonds qui relient les nombres  $JS(n, k; z)$  et  $js(n, k; z)$ .

Les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce  $JS(n, k; z)$  étaient a priori uniquement définis pour  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , et entièrement déterminés par les conditions initiales et la formule de récurrence (1.11). On peut en réalité définir de manière plus générale  $JS(n, k; z)$  pour  $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$  en posant :

$$\begin{aligned} JS(n, 0; z) &= \delta_{n,0}, \\ JS(0, k; z) &= \delta_{k,0}, \\ \forall (n, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad JS(n, k; z) &= JS(n-1, k-1; z) + k(k+z)JS(n-1, k; z). \end{aligned}$$

De même, on peut définir les nombres de Jacobi-Stirling de première espèce  $js(n, k; z)$  pour  $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$  en posant :

$$\begin{aligned} js(n, 0; z) &= \delta_{n,0}, \\ js(0, k; z) &= \delta_{k,0}, \\ \forall (n, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad js(n, k; z) &= js(n-1, k-1; z) - (n-1)(n-1+z)js(n-1, k; z). \end{aligned}$$

Cela permet en quelque sorte de "prolonger" les Tables 1.1 et 2.1 aux valeurs négatives avec la même formule de récurrence (voir Table 2.2 pour la table étendue des nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce).

**Théorème 43.** *Les nombres de Jacobi-Stirling de première espèce sont un prolongement des nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce aux entiers négatifs, dans le sens où :*

$$\forall (n, k) \in \mathbb{Z}, \quad js(n, k; z) = JS(-k, -n; -z). \quad (2.15)$$

*Démonstration.* Puisque les nombres de Jacobi-Stirling de première espèce sont déterminés de manière unique par les conditions initiales et la formule de récurrence (2.3), il suffit de montrer que les nombres définis par  $J(n, k) := JS(-k, -n; z)$  vérifient les mêmes relations pour avoir l'égalité voulue.

Or, pour tout  $(k, n) \in \mathbb{Z}$ , on sait que :

$$\begin{aligned} J(n, k) &= JS(-k, -n; z) \\ &= JS(-k-1, -n-1) + (-n)(-n+z)JS(-k-1, -n; z) \\ &= J(n+1, k+1) + n(n-z)J(n, k+1). \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout  $(k, n) \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$J(n+1, k+1) = J(n, k) - n(n-z)J(n, k+1),$$

et on obtient le résultat demandé.  $\square$



*Remarque 44.* Le théorème précédent peut être aussi vu réciproquement. Les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce sont également un prolongement des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce aux entiers négatifs, dans le sens où :

$$\forall(n, k) \in \mathbb{Z}, \quad \text{JS}(n, k; z) = \text{js}(-k, -n; -z).$$

Une table analogue à la Table 2.2 pourrait être écrite pour les nombres  $\text{js}(n, k; z)$ .

**Théorème 45.** *Pour  $n \geq 1$  et pour tous entiers  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,*

$$\sum_{k=1}^n \text{js}(i, k; z) \text{JS}(k, j; z) = \sum_{k=1}^n \text{JS}(i, k; z) \text{js}(k, j; z) = \delta_{i,j}.$$

*Démonstration.* Remarquons déjà que lorsque  $i < n$ , alors  $\text{js}(i, n; z) = 0$ . Le résultat se déduit alors trivialement par récurrence sur  $n$ .

Lorsque  $i = n$ , on raisonne également par récurrence sur  $n$ , la propriété étant triviale pour  $n = 1$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \text{js}(n, k; z) \text{JS}(k, j; z) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ n-1}}^n \left( \text{js}(n-1, k-1; z) - (n-1)(n-1+z) \text{js}(n-1, k; z) \right) \text{JS}(k, j; z) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{js}(n-1, k-1; z) \text{JS}(k, j; z) \\ &\quad - (n-1)(n-1+z) \sum_{k=1}^{n-1} \text{js}(n-1, k; z) \text{JS}(k, j; z) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \text{js}(n-1, k-1; z) \left( \text{JS}(k-1, j-1; z) + j(j+z) \text{JS}(k-1, j; z) \right) \\ &\quad - (n-1)(n-1+z) \delta_{j, n-1} \\ &= \delta_{n,j} + \delta_{n,j-1} j(j+z) - (n-1)(n-1+z) \delta_{j, n-1} \\ &= \delta_{n,j}. \end{aligned}$$

La preuve de la seconde somme peut se faire de manière tout à fait similaire.  $\square$

Nous allons dans ce paragraphe étudier l'analogie de la section 1.3 pour les nombres de Jacobi-Stirling de première espèce. Nous allons ainsi étudier les fonctions génératrices des diagonales de la Table 2.1.

Posons  $g_k(n; z)$  le nombre de Jacobi-Stirling diagonal de première espèce défini par :

$$g_k(n; z) = \text{js}(n, n-k; z).$$

Gessel et Stanley [GS78] ont démontré que le nombre de Stirling  $s(n, n - k)$  (qui correspond au coefficient dominant de  $js(n, n - k; z)$ ) est un polynôme de la variable  $n$  de degré  $2k$  et de coefficient dominant  $(2^k k!)^{-1}$ . Egge [Egg10] a prouvé sur un raisonnement analogue que  $ls(n, n - k)$  (qui correspond à la somme des coefficients de  $js(n, n - k; z)$ ) est un polynôme de la variable  $n$  de degré  $3k$  et de coefficient dominant  $(3^k k!)^{-1}$ . On peut donc se demander de façon naturelle s'il existe une généralisation pour tous les coefficients du polynôme  $js(n, n - k; z)$ .

Rappelons que  $f_k(n; z)$  désigne le nombre de Jacobi-Stirling diagonal de seconde espèce défini par  $f_k(n; z) = JS(n + k, n; z)$ .

**Théorème 46.** *Pour tous entiers  $n$  et  $k$ ,*

$$g_k(n; z) = f_k(-n; -z).$$

*Démonstration.* Cela vient directement de l'égalité (2.15) et de la définition du nombre de Jacobi-Stirling diagonal  $f_k(n; z)$ .  $\square$

**Théorème 47.** *Pour tout entier  $k$ , le nombre de Jacobi-Stirling diagonal  $g_k(n; z)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $k$ , et si on note :*

$$g_k(n; z) = q_{k,0}(n) + q_{k,1}(n)z + \cdots + q_{k,k}(n)z^k,$$

*chaque coefficient  $q_{k,i}(n)$  est un polynôme en  $n$  de degré  $3k - i$  et de coefficient dominant de valeur absolue égale à  $(\alpha_{k,i})^{-1}$  où pour tout  $0 \leq i \leq k$ ,*

$$\alpha_{k,i} = \begin{cases} 3^k k! & \text{si } i = 0, \\ 3^{k-i} 2^{2i-1} (k-i)! & \text{si } 0 < i \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \\ 3^{k-i} 2^{2k-1} i! & \text{si } \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \leq i < k, \\ 2^k k! & \text{si } i = k. \end{cases} \quad (2.16)$$

*Démonstration.* En effet, cela est une conséquence directe des Théorème 24 et 46. De plus, on a pour tous entiers  $i$  et  $k$  tels que  $0 \leq i \leq k$ ,

$$|q_{k,i}(n)| = |p_{k,i}(-n)|. \quad \square$$

**Théorème 48.** *On a pour tous  $k \geq 1$  et tout  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,*

$$q_{k,i}(0) = q_{k,i}(1) = q_{k,i}(2) = \dots = q_{k,i}(k) = 0.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des théorèmes et 25 et 46.  $\square$

**Théorème 49.** *Pour tout entier  $k$  et tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq k$ , si on note  $G_{k,i}(t)$  la fonction génératrice diagonale définie par :*

$$G_{k,i}(t) = \sum_{n \geq 0} q_{n,k}^{(i)} t^n,$$

alors il existe un polynôme  $B_{k,i}$  en  $t$  de degré  $2k - i$ , avec  $B_{k,i}(0) = 0$ , tel que :

$$G_{k,i}(t) = \frac{t^k B_{k,i}(t)}{(1-t)^{3k-i+1}}. \quad (2.17)$$

*Démonstration.* C'est une conséquence conjointe des deux théorèmes précédents, en utilisant le résultat de [Sta78, 4.6] (voir la preuve de l'équation (1.46)).  $\square$

**Théorème 50.** *La suite des fonctions génératrices diagonales  $G_{k,i}(t)$  vérifie la relation suivante :*

$$G_{k,i}(t) = \frac{-t}{1-t} \left( t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{k-1,i}(t) + t \frac{\partial}{\partial t} G_{k-1,i}(t) + t \frac{\partial}{\partial t} G_{k-1,i-1}(t) \right). \quad (2.18)$$

*Démonstration.* Cela vient de la relation :

$$g_k(n; z) - g_k(n-1; z) = -(n-1)(n-1+z)g_{k-1}(n-1; z),$$

qui entraîne que :

$$q_{k,i}(n) - q_{k,i}(n-1) = -(n-1)^2 q_{k-1,i}(n-1) - (n-1)q_{k-1,i-1}(n-1).$$

En passant aux fonctions génératrices, on obtient alors l'équation (2.18).  $\square$

En remplaçant les fonctions génératrices par leur forme explicite (1.46), on peut noter :

$$B_{k,i}(t) = \sum_{j=1}^{2k-i} B_{k,i,j} t^j,$$

avec comme convention  $B_{0,0}(t) = 1$  et  $B_{k,i,j} = 0$  si  $k \geq 1$ ,  $0 \leq i \leq k$  et  $j \notin \{1, \dots, 2k-i\}$ . On déduit le résultat suivant :

**Théorème 51.** *La suite  $(B_{k,i,j})$  vérifie la relation suivante :*

$$\begin{aligned} B_{k,i,j} &= -(j+k-1)^2 B_{k-1,i,j} + 2(j+k-2)^2 B_{k-1,i,j-1} \\ &\quad + (3k-i-2)(-3j-3k+7) B_{k-1,i,j-1} - (j+k-3)^2 B_{k-1,i,j-2} \\ &\quad + (3k-i-2)(j-2k+i-3) B_{k-1,i,j-2} \\ &\quad - (j+k-1) B_{k-1,i-1,j} + (j+4k-i-3) B_{k-1,i-1,j-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$



TABLE 2.3 – Les premières valeurs de  $F_{k,i}(t)$ 

| $k \setminus i$ | 0  | 1   | 2  | 3                                   |
|-----------------|--|---|--|-------------------------------------|
| 0               | $\frac{1}{1-t}$  |   |  |                                     |
| 1               | $\frac{-t(t+t^2)}{(1-t)^4}$                                    | $\frac{-t^2}{(1-t)^3}$                                |  |                                     |
| 2               | $\frac{t^2(4t+21t+14t^2+t^3)}{(1-t)^7}$                        | $\frac{t^2(6t+12t^2+t^3)}{(1-t)^6}$                   | $\frac{t^2(2t+t^2)}{(1-t)^5}$                |                                     |
| 3               | $\frac{-t^3(36t+460t^2+1065t^3+603t^4+75t^5+t^6)}{(1-t)^{10}}$ | $\frac{-t^3(66t+436t^2+501t^3+114t^4+3t^5)}{(1-t)^9}$ | $\frac{-t^3(36t+67t^2+55t^3+3t^4)}{(1-t)^8}$ | $\frac{-t^3(6t+8t^2+t^3)}{(1-t)^7}$ |

La relation précédente permet de calculer les polynômes  $B_{k,i}(t)$  pour les premières valeurs de  $k$  et  $i$  (voir Table 2.3). On remarque alors que les polynômes  $B_{k,i}(t)$  sont tous à coefficients entiers, tous de signe positif lorsque  $k$  est pair, et tous de signe négatif lorsque  $k$  est impair, ce qui est loin d'être évident d'après la formule de récurrence (2.19).

**Conjecture 52.** *Pour tout  $k \geq 0$  et  $0 \leq i \leq k$ , les coefficients du polynôme  $B_{k,i}$  sont tous des entiers relatifs de même signe.*

## 2.4 Les $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de première espèce

Pour cloturer ce chapitre, nous allons introduire les  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de première espèce, de la même manière que nous l'avons fait pour ceux de seconde espèce.

Le  $r$ -nombre de Stirling de première espèce, que nous noterons ici  $s_r(n, k)$ , est défini comme le nombre de permutations de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  cycles disjoints, de telle sorte que les entiers  $1, 2, \dots, r$  soient tous distribués dans des cycles distincts (autrement dit, on impose que les nombres  $1, 2, \dots, r$  soient des minimums de cycle). Les nombres de Stirling classiques peuvent alors être retrouvés par  $s(n, k) = s_0(n, k)$  et dans le cas où  $n \geq 1$  par  $s(n, k) = s_1(n, k)$ .

Suivant l'interprétation combinatoire des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce déterminée au paragraphe 2.2, on définit le  $r$ -nombre de Jacobi-Stirling de première espèce :

$$js(n, k, r; z) = b_{n,k,r}^{(0)} + b_{n,k,r}^{(1)}z + \dots + b_{n,k,r}^{(n-k)}z^{n-k},$$

où  $b_{n,k,r}^{(i)}$  désigne le nombre de couples  $(\sigma, \tau)$  tels que  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) est une permutation de  $[n]_0$  (resp.  $[n]$ ) en  $k$  cycles, satisfaisant les conditions :

- i)  $1 \in \text{Orb}_\sigma(0)$ ,
- ii)  $\min \sigma = \min \tau$ ,
- iii)  $\text{rec}_0(w) = i$ , où  $w = \sigma(0) \dots \sigma^\ell(0)$  avec  $\sigma^{\ell+1}(0) = 0$ ,
- iv)  $\{1, 2, \dots, r\} \subset \min \sigma$ .

**Théorème 53.** *Pour tous entiers  $n, k, i$  tels que  $0 \leq i \leq n - k$ , les  $r$ -coefficients de Jacobi-Stirling  $b_{n,k,r}^{(i)}$  vérifient les relations de récurrence suivantes :*

$$b_{n,k,r}^{(i)} = 0 \quad \text{si } r > n, \quad (2.20)$$

$$b_{n,k,n}^{(i)} = \delta_{n,k} \quad \text{si } r = n, \quad (2.21)$$

$$b_{n,k,n}^{(i)} = b_{n-1,k-1,r}^{(i)} + (n-1)b_{n-1,k,r}^{(i-1)} + (n-1)^2b_{n-1,k,r}^{(i)} \quad \text{si } r < n. \quad (2.22)$$

*Démonstration.* Pour  $r \geq n$ , les résultats sont immédiats.

Pour  $r < n$ , on note  $\mathcal{E}_{n,k,r}^{(i)}$  l'ensemble des couples de partitions vérifiant les conditions i)-iv) précédentes. On procède comme dans la preuve du Théorème 37 en partitionnant l'ensemble  $\mathcal{E}_{n,k,r}^{(i)}$  en fonction de la pré-image de  $n$  par la permutation  $\sigma$ . Puisque  $r < n$ , la pré-image de  $n$  n'influera pas sur le fait que les  $r$  premiers entiers soient des minimums ou non dans les cycles. On obtient donc la même récurrence que (2.11) avec les  $r$  en plus.  $\square$

De manière immédiate avec la définition, on a :

$$b_{n,n,r}^{(i)} = 1 \quad \text{si } n \geq r,$$

$$b_{n,k,r}^{(i)} = 0 \quad \text{si } k \geq n.$$

Cependant, il est beaucoup plus difficile d'énoncer des analogues des théorèmes 31 et 33 dans le cadre des  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de première espèce.

En effet, d'après la théorie des  $r$ -nombres de Stirling, on sait que

$$b_{n,r,r}^{n-r} = (n-1)(n-2) \cdots (r+1)r,$$

et

$$b_{n,n-k,r}^k = \sum_{r \leq i_1 < \cdots < i_k < n} i_1 i_2 \cdots i_k,$$

mais il est difficile de généraliser ce résultat pour tous les  $r$ -coefficients.

On peut cependant avoir le cas particulier des  $r$ -nombres factoriels centraux.

**Théorème 54.** *On a pour  $n \geq r$ ,*

$$b_{n,r,r}^0 = (n-1)^2(n-2)^2 \cdots (r+1)^2 r^2,$$

$$b_{n,n-k,r}^0 = \sum_{r \leq j_1 < \cdots < j_k < n} j_1^2 j_2^2 \cdots j_k^2.$$

*Démonstration.* Le nombre  $b_{n,k,r}^{(i)}$  correspond exactement aux couples  $(\sigma, \tau)$  de permutations de  $[n]$  en  $k$  cycles, de mêmes minimums de cycles, sachant que  $1, 2, \dots, r$  sont parmi ces minimums de cycles.

On déduit donc très facilement les formules à partir de celles relatives aux  $r$ -nombres de Stirling de première espèce.

Si on a  $r$  cycles dont on connaît les minimums (ce sont les  $r$  premiers entiers), il suffit de placer les  $n-r$  éléments restants dans les cycles de chacune des permutations. Le dernier élément  $n$  avait  $n-1$  possibilités pour sa pré-image dans  $\sigma$  et  $n-1$  possibilités pour sa pré-image dans  $\tau$ . Itérant ce raisonnement, on en déduit la première formule.

On veut ensuite compter le nombre de couples de permutations de  $[n]$  ayant  $n - k$  cycles de mêmes minimums, sachant que parmi ces minimums il y a  $1, 2, \dots, r$ . Il existe une bijection naturelle entre ces couples permutations et les couples de permutations de  $[n]$  ayant  $n - k$  éléments saillants dont les entiers  $1, 2, \dots, r$ .

En effet, partant d'une permutation en  $n - k$  cycles, on peut écrire chaque cycle en débutant par son minimum, et ordonner les cycles de manière à ce que les minimums de cycle apparaissent dans l'ordre décroissant. En effaçant les parenthèses des cycles, on obtient une nouvelle permutation qui a  $n - k$  éléments saillants. De plus, si les entiers  $1, \dots, r$  sont dans des cycles distincts de la permutation, alors ce sont des minimums de cycles, qui deviennent avec le processus des éléments saillants.

Enumérons donc le nombre de couples de permutations  $(\sigma, \tau)$  de  $[n]$  ayant  $n - k$  éléments saillants, dont  $1, 2, \dots, r$ . Notons  $r < j_1 < \dots < j_k \leq n$  les  $k$  entiers qui ne sont pas éléments saillants.

On part de la suite décroissante des éléments saillants. Pour obtenir nos permutations, il suffit de placer dans chacune les entiers  $j_1, \dots, j_k$ . On peut insérer  $j_1$  après un des  $j_1 - 1$  éléments saillants plus petits que  $j_1$  dans  $\sigma$  comme dans  $\tau$ . Ensuite, on peut insérer  $j_2$  après un des  $j_2 - 2$  éléments saillants plus petits que  $j_2$  ou bien après  $j_1$ . On itère ainsi ce raisonnement.

Le nombre total de couples de telles permutations est donc  $(j_1 - 1)^2(j_2 - 1)^2 \dots (j_k - 1)^2$ . On obtient alors le résultat attendu.  $\square$

Cependant, il existe des liens entre les  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de première et de seconde espèce, analogues des relations existant pour les nombres de Jacobi-Stirling.

**Théorème 55.** *Les  $r$ -nombres de Jacobi-Stirling vérifient*

$$\sum_{k=0}^n js_r(n, k; z) JS_r(k, m; z) = \sum_{k=0}^n JS_r(n, k; z) js_r(k, m; z) \begin{cases} \delta_{m,n} & \text{si } n \geq r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* La preuve se conduit de la même manière que celle du Théorème 45.  $\square$



---

## CHAPITRE 3

---

### Nombres factoriels centraux

---

#### 3.1 Suites extraites d'ordre pair et impair

Nous avons introduit dans les chapitres précédents les *nombres factoriels centraux de seconde espèce* (resp. de première espèce)  $T(n, k)$  (resp.  $t(n, k)$ ) comme les coefficients de changements de base dans les relations suivantes (voir aussi [Rio68, p. 213-217]) :

$$X^n = \sum_{k=0}^n T(n, k) X \prod_{i=1}^{k-1} \left( X + \frac{k}{2} - i \right), \quad (3.1)$$

et

$$X \prod_{i=1}^{n-1} \left( X + \frac{n}{2} - i \right) = \sum_{k=0}^n t(n, k) X^k. \quad (3.2)$$

Les relations précédentes peuvent se traduire par le fait que les nombres factoriels centraux vérifient les relations triangulaires suivantes :

$$T(n, k) = T(n-2, k-2) + \frac{1}{4} k^2 T(n-2, k), \quad (3.3)$$

et

$$t(n, k) = t(n-2, k-2) - \frac{1}{4} (n-2)^2 t(n-2, k). \quad (3.4)$$



Grâce à ces relations triangulaires, on peut facilement calculer les premières valeurs des suites  $T(n, k)$  et  $t(n, k)$  (voir Table 3.1). De plus, on a directement les relations :

$$\sum_{k=0}^n T(n, k)t(k, m) = \sum_{k=0}^n t(n, k)T(k, m) = \delta_{n, m},$$

du fait que les suites soient l'inverse l'une de l'autre.

Les fonctions génératrices (doubles) des nombres factoriels centraux sont connues (voir [Rio68]) et valent :

$$\sum_{n, k \geq 0} T(n, k)x^k \frac{y^n}{n!} = \exp\left(2x \operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)\right), \quad (3.5)$$

et

$$\sum_{n, k \geq 0} t(n, k)x^k \frac{y^n}{n!} = \exp\left(2x \operatorname{Argsh}\left(\frac{y}{2}\right)\right). \quad (3.6)$$

Nous avons déjà signalé aux chapitres précédents que les nombres  $T(n, k)$  et  $t(n, k)$  ne sont pas tous des entiers. Cependant, si on se restreint à regarder les nombres factoriels centraux d'indices pairs  $U(n, k) := T(2n, 2k)$  et  $u(n, k) := t(2n, 2k)$ , alors nous avons bien des suites d'entiers (cela on peut se voir directement sur les tables). Ces deux suites vérifient alors les récurrences suivantes :

$$U(0, 0) = 1 \quad U(n, k) = 0, \quad \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \quad (3.7)$$

$$U(n, k) = U(n-1, k-1) + k^2 U(n-1, k), \quad n, k \geq 1, \quad (3.8)$$

et

$$u(0, 0) = 1 \quad u(n, k) = 0, \quad \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \quad (3.9)$$

$$u(n, k) = u(n-1, k-1) - (n-1)^2 u(n-1, k), \quad n, k \geq 1. \quad (3.10)$$

Les premières valeurs des suites extraites  $U(n, k)$  et  $u(n, k)$  sont données dans la Table 3.2.

Définissons pour tous entiers  $n, k \geq 0$ , les nombres  $V(n, k)$  et  $v(n, k)$  par :

$$V(n, k) = 4^{n-k} T(2n+1, 2k+1), \quad v(n, k) = 4^{n-k} t(2n+1, 2k+1).$$

On peut remarquer que ces nombres sont également des entiers puisqu'ils vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$V(n, k) = V(n-1, k-1) + (2k+1)^2 V(n-1, k), \quad (3.11)$$

$$v(n, k) = v(n-1, k-1) - (2n-1)^2 v(n-1, k). \quad (3.12)$$

Les premières valeurs des suites extraites  $V(n, k)$  et  $v(n, k)$  sont données dans la Table 3.2.



TABLE 3.2 – Suites extraites des nombres factoriels centraux  $T(n, k)$  et  $t(n, k)$ Les premiers valeurs de  $U(n, k) = T(2n, 2k)$ 

| $k \backslash n$ | 1 | 2 | 3 | 4  | 5   | 6    |
|------------------|---|---|---|----|-----|------|
| 1                | 1 | 1 | 1 | 1  | 1   | 1    |
| 2                |   | 1 | 5 | 21 | 85  | 341  |
| 3                |   |   | 1 | 14 | 147 | 1408 |
| 4                |   |   |   | 1  | 30  | 627  |
| 5                |   |   |   |    | 1   | 55   |
| 6                |   |   |   |    |     | 1    |

Les premiers valeurs de  $|u(n, k)| = |t(2n, 2k)|$ 

| $k \backslash n$ | 1 | 2 | 3 | 4  | 5   | 6     |
|------------------|---|---|---|----|-----|-------|
| 1                | 1 | 1 | 4 | 36 | 576 | 14400 |
| 2                |   | 1 | 5 | 49 | 820 | 46076 |
| 3                |   |   | 1 | 14 | 273 | 7645  |
| 4                |   |   |   | 1  | 30  | 1023  |
| 5                |   |   |   |    | 1   | 55    |
| 6                |   |   |   |    |     | 1     |

Les premières valeurs de  $V(n, k) = 4^{n-k}T(2n+1, 2k+1)$ 

| $k \backslash n$ | 0 | 1 | 2  | 3  | 4   | 5     |
|------------------|---|---|----|----|-----|-------|
| 0                | 1 | 1 | 1  | 1  | 1   | 1     |
| 1                |   | 1 | 10 | 91 | 820 | 7381  |
| 2                |   |   | 1  | 35 | 966 | 24970 |
| 3                |   |   |    | 1  | 84  | 5082  |
| 4                |   |   |    |    | 1   | 165   |
| 5                |   |   |    |    |     | 1     |

Les premières valeurs de  $|v(n, k)| = 4^{n-k}|t(2n+1, 2k+1)|$ 

| $k \backslash n$ | 0 | 1 | 2  | 3   | 4     | 5       |
|------------------|---|---|----|-----|-------|---------|
| 0                | 1 | 1 | 9  | 225 | 11025 | 893025  |
| 1                |   | 1 | 10 | 259 | 12916 | 1057221 |
| 2                |   |   | 1  | 35  | 1974  | 172810  |
| 3                |   |   |    | 1   | 84    | 8778    |
| 4                |   |   |    |     | 1     | 165     |
| 5                |   |   |    |     |       | 1       |

## 3.2 Interprétations combinatoires

Une question naturelle après avoir introduit ces suites de nombres entiers est de donner une interprétation combinatoire pour les suites extraites des nombres factoriels centraux. Nous avons déjà vu aux chapitres précédents que :

- $U(n, k)$  dénombre le nombre de couples  $(\pi_1, \pi_2)$  de partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs non-vides, de mêmes minimums de blocs,
- $|u(n, k)|$  dénombre le nombre de couples  $(\sigma, \tau)$  de permutations de  $[n]$  en  $k$  cycles disjoints, de mêmes minimums de cycles.

Nous allons déterminer à présent des interprétations combinatoires des suites  $V(n, k)$  et  $v(n, k)$  en utilisant la théorie des fonctions génératrices.

**Théorème 56.** *L'entier  $V(n, k)$  est le nombre de partitions de  $[2n + 1]$  en  $2k + 1$  blocs, où tous les blocs sont de cardinal impair.*

*Démonstration.* De (3.5), on déduit que :

$$\sum_{n, k \geq 0} V(n, k) t^k \frac{x^n}{n!} = \text{sh}(t \text{sh}(x)).$$

La théorie combinatoire classique des fonctions génératrices (voir [FS72, Chp. 3] et [Sta99, Chp. 5]) nous donne alors directement le résultat puisque

$$\sum_{n, k \geq 0} S(n, k) t^k \frac{x^n}{n!} = \exp(t(\exp(x) - 1)),$$

où  $S(n, k)$  désigne le nombre de Stirling de seconde espèce qui dénombre les partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs. □

Pour interpréter l'entier  $|v(n, k)|$ , nous avons besoin d'introduire la définition suivante.

**Définition 57.** Un  $(n, k)$ -complexe de Riordan est un  $(2k + 1)$ -uplet :

$$((B_1, \sigma_1, \tau_1), \dots, (B_{2k+1}, \sigma_{2k+1}, \tau_{2k+1})),$$

tel que

- i)  $\{B_1, \dots, B_{2k+1}\}$  est une partition de  $[2n + 1]$  en blocs  $B_i$  de cardinaux impairs ;
- ii)  $\sigma_i$  et  $\tau_i$  ( $1 \leq i \leq 2k + 1$ ) sont des involutions sans point fixe sur  $B_i \setminus \max(B_i)$ .

**Théorème 58.** *L'entier  $|v(n, k)|$  est le nombre de  $(n, k)$ -complexes de Riordan.*

*Démonstration.* De (3.6), on déduit que :

$$\sum_{n,k \geq 0} |v(n, k)| t^k \frac{x^n}{n!} = \text{sh}(t \arcsin(x)),$$

et

$$\arcsin(x) = \sum_{n \geq 0} ((2n-1)!!)^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

où  $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$ . Puisque  $(2n-1)!!$  est le nombre d'involutions sans point fixe sur  $[2n]$  (voir [Com74]), l'entier  $((2n-1)!!)^2$  est le nombre de couples d'involutions sans point fixe sur  $[2n+1] \setminus \{2n+1\}$ .

On définit les nombres  $J(n, m)$  par :

$$\exp \left( t \sum_{n \geq 1} ((2n-1)!!)^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n,m \geq 0} J(2n+1, m) \frac{t^m}{m!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Alors, d'après la théorie des fonctions génératrices exponentielles (voir [FS72, Chp. 3] et [Sta99, Chp. 5]), le coefficient  $J(2n+1, m)$  est le nombre de  $m$ -uplets

$$(B_1, \sigma_1, \tau_1), \dots, (B_m, \sigma_m, \tau_m),$$

où  $\{B_1, \dots, B_m\}$  est une partition de  $[2n+1]$  avec  $|B_i|$  impair ( $1 \leq i \leq m$ ), et où  $\sigma_i$  et  $\tau_i$  sont des involutions sans point fixe sur  $B_i \setminus \max(B_i)$ . Puisque  $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ , on a  $|v(n, m)| = J(2n+1, 2k+1)$  si  $m = 2k+1$ , et  $|v(n, m)| = 0$  si  $m$  est pair.  $\square$

*Exemple 59.* Il y a dix  $(2, 1)$ -complexes de Riordan. Puisque les nombres  $n$  et  $k$  sont petits, les involutions impliquées sont des transpositions identiques.

$$\begin{aligned} & \{1\}, \{(2, 3), 4\}, \{5\}, \quad \{1\}, \{2\}, \{(3, 4), 5\}, \\ & \{(1, 2), 3\}, \{4\}, \{5\}, \quad \{(1, 2), 5\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{(1, 3), 4\}, \{2\}, \{5\}, \quad \{(1, 3), 5\}, \{2\}, \{4\}, \\ & \{(1, 2), 4\}, \{3\}, \{5\}, \quad \{(1, 4), 5\}, \{2\}, \{3\}, \\ & \{1\}, \{(2, 3), 5\}, \{4\}, \quad \{1\}, \{(2, 4), 5\}, \{3\}, \end{aligned}$$

où  $\{1\}, \{(2, 3), 4\}, \{5\}$  signifie que  $\pi = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}$ , et  $\sigma = \tau = 13245$ .

*Remarque 60.* On peut facilement voir que

$$\sum_{k=0}^n |v(n, k)| t^{2k+1} = t(t^2+1)(t^2+3^2) \cdots (t^2+(2n-1)^2). \quad (3.13)$$

Il est intéressant de remarquer qu'une preuve du résultat précédent n'est pas évidente à partir de (3.13). De même, des preuves des Théorèmes 56 et 58 en utilisant les formules de récurrence (3.11) ou (3.12) ne sont pas évidentes.

Deuxième partie  
Nombres d'Entringer



Les nombres d'Entringer ont été introduits initialement afin de donner un moyen facile de calculer les nombres tangents et sécants, difficilement calculables à l'ordre  $n$  à partir de leur définition originelle. Ils sont introduits à l'aide d'une interprétation combinatoire en termes de permutations alternantes et de leur dernière valeur. Il est assez naturel de savoir s'il existe une extension de ces nombres qui permettrait de calculer les nombres  $q$ -tangents et  $q$ -sécants, introduits par Jackson et qui ont fait l'objet de nombreuses études récemment dans la théorie des  $q$ -séries. Les différentes relations liant les nombres d'Entringer trouvent naturellement une généralisation dans ce modèle.

Les nombres d'Entringer ont aussi d'autres interprétations dans différents modèles, dont principalement les arbres croissants. Poupard a en effet déterminé plusieurs interprétations différentes, mais aucun lien bijectif n'avait été fait jusqu'à présent entre ces différents modèles. La construction de bijections explicites entre ces différentes interprétations constitue ainsi le coeur de cette deuxième partie. En particulier, nous pouvons enfin créer le lien entre les modèles arborescents des nombres d'Entringer et les modèles faisant intervenir les permutations alternantes.



---

## CHAPITRE 4

---

### Nombres d'Entringer et $q$ -analogues

---

#### 4.1 Nombres d'Entringer

Les *nombres d'Euler*  $E_n$  sont définis par leur fonction génératrice suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} &= \tan(x) + \sec(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} + 5\frac{x^4}{4!} + 16\frac{x^5}{5!} + 61\frac{x^6}{6!} + 272\frac{x^7}{7!} + 1385\frac{x^8}{8!} + \dots \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{A}_n^+$  l'ensemble des *permutations alternantes montantes de*  $[n]$ , c'est-à-dire, les permutations  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(n)$  de  $[n]$  satisfaisant :

$$\sigma(1) < \sigma(2), \sigma(2) > \sigma(3), \sigma(3) < \sigma(4), \text{etc.} \dots \text{alternativement.}$$

Par exemple, les permutations alternantes montantes de  $[4]$  sont :

$$1324, \quad 1423, \quad 2314, \quad 2413, \quad 3412.$$

André [And79] a démontré en 1879 que le nombre  $E_n$  correspond au cardinal de l'ensemble  $\mathcal{A}_n^+$ . Récemment, Stanley [Sta09] a rédigé une étude plutôt détaillée sur les permutations alternantes et les nombres d'Euler.

Les *nombres d'Entringer* ont été introduits pour dénombrer les permutations alternantes en fonction de leur dernier terme. Plus précisément, si  $\mathcal{A}_{n,k}^+$  désigne l'ensemble des permutations  $\sigma \in \mathcal{A}_n^+$  telles que  $\sigma(n) = k$ ,  $a_{n,k}$  est défini comme



le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{A}_{n,k}^+$ . On a de manière évidente  $a_{1,1} = 1$  et on pose par convention  $a_{n,k} = 0$  si  $k \notin [n]$ .

C'est Entringer [Ent66] qui a remarqué quelques formules intéressantes pour la suite  $a_{n,k}$ . Ces formules triangulaires, de type formule de Pascal, sont à l'origine de la table de Seidel-Kempner (voir ci-après).

Nous allons commencer par rappeler les formules principales qui concernent les nombres  $a_{n,k}$ .

Du fait que  $\mathcal{A}_n^+$  correspond à l'union disjointe des  $\mathcal{A}_{n,k}^+$  pour  $k \in [n]$ , on a directement :

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_{n,k}. \quad (4.1)$$

De plus, on sait qu'une permutation de  $\mathcal{A}_n^+$  commence toujours par une montée. On peut alors déduire que lorsque  $n$  est impair, on ne pourra pas finir par une montée, le cas  $k = n$  est alors exclu. De même, lorsque  $n$  est pair, on ne pourra pas finir par une descente, le cas  $k = 1$  est alors exclu. Autrement dit, on a les relations suivantes :

$$a_{2m+1,2m+1} = 0, (m \geq 1), \quad (4.2)$$

$$a_{2m,1} = 0, (m \geq 1). \quad (4.3)$$

**Théorème 61.** *Pour tous entiers  $n$  et  $k$ , les nombres d'Entringer vérifient :*

$$i) \text{ si } n \text{ est pair, et } 1 \leq k \leq n, a_{n+1,k} = \sum_{i=k}^n a_{n,i},$$

$$ii) \text{ si } n \text{ est impair, et } 2 \leq k \leq n+1, a_{n+1,k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{n,i}.$$

*Démonstration.* Supposons  $n$  pair (resp.  $n$  impair); alors, chaque  $\sigma \in \mathcal{A}_{n+1}^+$  se termine par une descente (resp. par une montée). Pour  $1 \leq k \leq n$  (resp. pour  $2 \leq k \leq n+1$ ), on construit une transformation  $\varphi_k : \mathcal{A}_{n+1,k}^+ \rightarrow \bigcup_{i=k}^n \mathcal{A}_{n,i}^+$  (resp. une

transformation  $\psi_k : \mathcal{A}_{n+1,k}^+ \rightarrow \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{A}_{n,i}^+$ ), qui envoie toute permutation  $\sigma \in \mathcal{A}_{n+1,k}^+$  sur la permutation  $\sigma' \in \mathcal{A}_n$ , définie par  $\sigma'(i) = \sigma(i) - \chi(\sigma(i) > k)$  pour tout  $i \in [n]$ , où la fonction booléenne  $\chi$  est définie pour toute assertion  $A$  par  $\chi(A) = 1$  si  $A$  est vraie et  $\chi(A) = 0$  si  $A$  est fausse. Puisque  $\varphi_k$  et  $\psi_k$  sont clairement bijectives, les formules suivent.  $\square$

**Théorème 62.** *Si  $n$  est pair,*

$$a_{n,1} = 0, \quad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}, (j \in [n-1]). \quad (4.4)$$

Si  $n$  est impair,

$$a_{n,n} = 0, \quad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}, \quad (j \in [n-1]). \quad (4.5)$$

*Démonstration.* On peut directement déduire ceci du Théorème 61, itérant  $a_{n,j+1} - a_{n,j}$  pour  $j \in [n-1]$ . On peut aussi énoncer une interprétation combinatoire pour cette décomposition.

Supposons  $n$  pair. On partitionne  $\mathcal{A}_{n,j+1}^+ = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , où  $A = \{\sigma \in \mathcal{A}_{n,j+1}^+, \sigma(n-1) < j\}$  et  $B = \{\sigma \in \mathcal{A}_{n,j+1}^+, \sigma(n-1) = j\}$ . Si  $\sigma \in A$ , on construit  $\sigma' = t_{j,j+1} \circ \sigma$ , où  $t_{j,j+1}$  désigne la transposition qui échange  $j$  et  $j+1$ . Si  $\sigma \in B$ , on construit  $\sigma' = \varphi_{j+1}(\sigma)$ . Alors, on peut facilement voir grâce à la transformation  $\sigma \mapsto \sigma'$  que  $|A| = a_{n,j}$  et  $|B| = a_{n-1,j}$ .

Supposons  $n$  impair. On partitionne  $\mathcal{A}_{n,j}^+ = C \cup D$ ,  $C \cap D = \emptyset$ , où  $C = \{\sigma \in \mathcal{A}_{n,j}^+, \sigma(n-1) > j+1\}$  et  $D = \{\sigma \in \mathcal{A}_{n,j}^+, \sigma(n-1) = j+1\}$ . Si  $\sigma \in C$ , on construit  $\sigma' = t_{j,j+1} \circ \sigma$ . Si  $\sigma \in D$ , on construit  $\sigma' = \psi_j(\sigma)$ . Alors, on peut facilement voir grâce à la transformation  $\sigma \mapsto \sigma'$  que  $|C| = a_{n,j+1}$  et  $|D| = a_{n-1,j}$ .  $\square$

Comme cas particuliers, on peut voir les relations suivantes :

$$a_{2n,2n-1} = a_{2n,2n}, \quad (n \geq 2), \quad a_{2n+1,1} = a_{2n+1,2}, \quad (n \geq 1), \quad (4.6)$$

qui ont des interprétations combinatoires faciles : il suffit d'échanger les places de  $2n-1$  et  $2n$  (resp. de 1 et 2) dans la permutation pour obtenir les formules.

En itérant les formules (4.4) et (4.5), on obtient directement le résultat suivant.

**Théorème 63.** Si  $n$  est pair, le nombre d'Euler  $E_n$  (nombre sécant) vaut :

$$E_n = a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,n} = a_{n+1,1}.$$

Si  $n$  est impair, le nombre d'Euler  $E_n$  (nombre tangent) vaut :

$$E_n = a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,n} = a_{n+1,n+1}.$$

## 4.2 Table de Seidel-Kempner

D'après les relations de récurrence vues précédemment, on peut écrire les nombres  $a_{n,k}$  dans la dite *table de Seidel-Kempner* (voir Table 4.1). Voici la construction de cette table.

Par convenance, on place  $a_{1,1} = 1$  sur une première ligne ; puis, si on veut créer la  $n$ -ième ligne avec  $n$  pair, on met un zéro en position Sud-Ouest de la dernière ligne écrite, et ensuite, on applique la règle suivante :

$$n \text{ pair} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & a_{n-1,k} \\ \hline a_{n,k} & a_{n-1,k} + a_{n,k} \\ \hline \end{array}$$

TABLE 4.1 – La table de Kempner des nombres d'Entringer

|  |   |   |    |     |     |     |     |     |     |
|--|---|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|  |   |   |    | 1   |     |     |     |     |     |
|  | → |   | 0  | 1   |     |     |     |     |     |
|  |   |   | 1  | 1   | 0   |     | ←   |     |     |
|  | → | 0 | 1  | 2   | 2   |     |     |     |     |
|  |   |   | 5  | 5   | 4   | 2   | 0   | ←   |     |
|  | → | 0 | 5  | 10  | 14  | 16  | 16  |     |     |
|  |   |   | 61 | 61  | 56  | 46  | 32  | 16  | ←   |
|  | → | 0 | 61 | 122 | 178 | 224 | 256 | 272 | 272 |

Au contraire, si on veut créer la  $n$ -ième ligne avec  $n$  impair, on met un zéro en position Sud-Est de la dernière ligne écrite, et ensuite, on applique la règle suivante :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_{n-1,k} & \\ \hline a_{n-1,k} + a_{n,k+1} & a_{n,k+1} \\ \hline \end{array} \quad \leftarrow \quad n \text{ impair}$$

Les nombres d'Euler  $E_n$ , qui apparaissent sur les bords de la table d'après le Théorème 63, peuvent ainsi être calculés de manière très simple, en faisant uniquement des additions. Les nombres d'Euler vérifient de nombreuses formules de récurrence. Le Théorème 63 permet d'avoir une interprétation combinatoire de ces nombres en termes de permutations alternantes dont le dernier terme est fixé. Il est donc intéressant d'étudier ce que deviennent ces relations dans ce modèle et en déduire une interprétation combinatoire.

**Théorème 64.** *Pour  $n \geq 1$ , on a les relations suivantes :*

$$a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}, \quad (4.7)$$

$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}. \quad (4.8)$$

*Démonstration.* Si  $\sigma \in \mathcal{A}_{2n+2,2n+2}^+$ , on a  $2n+1 = \sigma(2n-2k)$  pour un certain  $k$  entre 0 et  $n-1$ . On partitionne  $[2n] = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , avec  $A = \{j \in [2n+2] : \sigma^{-1}(j) \leq 2n-2k\}$  et  $B = [2n+2] \setminus A$  : il y a  $\binom{2n}{2k+1}$  possibilités pour réaliser ce partage. Une fois ce partage fait, les  $2n-2k$  éléments de  $A$  doivent former une permutation alternante finissant par le plus grand élément, il y a donc  $a_{2n-2k,2n-2k}$  possibilités. Les  $2k+2$  éléments de  $B$  doivent former une permutation alternante finissant par le plus grand élément, il y a donc  $a_{2k+2,2k+2}$  possibilités.

Si  $\sigma \in \mathcal{A}_{2n+1,1}^+$ , on a  $2n+1 = \sigma(2n-2k)$  pour un certain  $k$  entre 0 et  $n-1$ . On partitionne  $[2n+1] = C \cup D$ ,  $C \cap D = \emptyset$ , avec  $C = \{j \in [2n+1] : \sigma^{-1}(j) \leq 2n-2k\}$  et  $D = [2n+1] \setminus C$  : il y a  $\binom{2n-1}{2k}$  possibilités pour réaliser ce partage. Une fois ce partage fait, les  $2n-2k$  éléments de  $A$  doivent former une permutation alternante finissant par le plus grand élément, il y a donc  $a_{2n-2k,2n-2k}$  possibilités. Les  $2k+1$  éléments de  $B$  doivent former une permutation alternante finissant par 1, il y a donc  $a_{2k+1,1}$  possibilités.  $\square$

On peut aussi exprimer chaque nombre d'Entringer présent dans la table de Kempner uniquement à l'aide des nombres tangents et sécants qui sont sur les bords de la table.

**Théorème 65.** *Pour  $n \geq 1$ , on a les relations suivantes :*

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad (2 \leq k \leq 2n), \quad (4.9)$$

$$a_{2n,k} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}, \quad (2 \leq k \leq 2n-1). \quad (4.10)$$

*Démonstration.* Ce résultat était démontré dans [Ent66] de manière analytique. Cependant, il est facile d'en extraire une interprétation combinatoire. En effet, on a les relations suivantes :

$$a_{2n+1,k} = a_{2n+1,k-1} - \sum_{i=1}^{k-2} a_{2n-1,i}, \quad (4.11)$$

$$a_{2n,k} = a_{2n,k+1} - \sum_{i=k}^{2n-2} a_{2n-2,i}. \quad (4.12)$$

Par exemple pour (4.11), on partitionne  $\mathcal{A}_{2n+1,k-1}^+$  en deux ensembles  $A$  et  $B$  tels que  $A = \{\sigma \in \mathcal{A}_{2n+1,k-1}^+, \sigma(2n) \neq k\}$  et  $B = \mathcal{A}_{2n+1,k-1}^+ \setminus A$ . Alors, on a  $|A| = a_{2n+1,k}$ , en échangeant les places de  $k$  et  $k-1$  dans la permutation. De plus,

si  $\sigma(2n)$  et  $\sigma(2n+1)$  sont fixées par tout élément  $\sigma$  de  $B$ ,  $\sigma$  peut être représentée par une permutation alternante d'ordre  $2n-1$ , finissant par un certain  $i$  avec  $i \leq k-2$ . La formule suit alors, et on peut faire le même type de raisonnement pour prouver (4.12).

En itérant ces formules, on trouve les formules du Théorème 65.  $\square$

En particulier, le Théorème 65 permet de retrouver les formules (4.6).

### 4.3 Une $q$ -version de la table de Kempner

Pour toute permutation  $\sigma$  d'ordre  $n$ , on note  $\text{inv}(\sigma)$  le nombre de ses *inversions*, i.e.

$$\text{inv}(\sigma) = \sum_{1 < i < j < n} \chi(\sigma(i) > \sigma(j)).$$

Introduisons les  $q$ -notations très utiles, pour tout entiers  $n$  et  $k$  :

$$\begin{aligned} [n]_q &:= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \\ [n]_q! &:= [n]_q [n-1]_q \cdots [2]_q [1]_q, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &:= \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}. \end{aligned}$$

Rappelons (voir [FH00]) que le  $q$ -coefficient binomial  $\begin{bmatrix} N+M \\ N \end{bmatrix}_q$  est le polynôme générateur, pour la statistique d'inversion, des permutations  $\sigma$  de  $[N+M]$  telles que  $\sigma(1) \dots \sigma(N)$  et  $\sigma(N+1) \dots \sigma(N+M)$  soient deux mots croissants.

Les deux fonctions classiques  $q$ -cosinus et  $q$ -sinus de Jackson [Jac04] sont définies par :

$$\sin_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \quad \cos_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!}.$$

Les fonction  $q$ -tangente et  $q$ -sécante de Jackson sont alors définies par :

$$\tan_q(z) = \frac{\sin_q(z)}{\cos_q(z)}, \quad \sec_q(z) = \frac{1}{\cos_q(z)}.$$

Le résultat suivant est connu [FH08] :

**Théorème 66.**

$$\tan_q(x) = \sum_{n \geq 0} E_{2n+1}(q) \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \quad (4.13)$$

$$\sec_q(x) = \sum_{n \geq 0} E_{2n}(q) \frac{x^{2n}}{[2n]_q!}, \quad (4.14)$$

où pour  $n \geq 1$ ,  $E_n(q)$  désigne le  $q$ -analogue du nombre d'Euler pour la statistique d'inversion, c'est-à-dire :

$$E_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n^+} q^{\text{inv}(\sigma)}.$$

Le calcul des coefficients  $E_n(q)$  est assez compliqué à partir de la définition des fonctions  $q$ -tangente et  $q$ -sécantes. C'est pourquoi il est naturel de raffiner les  $q$ -nombres d'Euler à l'aide des  $q$ -nombres d'Entringer, définis par :

$$a_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{n,k}^+} q^{\text{inv}(\sigma)}.$$

On obtient un  $q$ -analogue du Théorème 62.

**Théorème 67.** *Si  $n$  est pair,*

$$a_{n,1}(q) = 0, \quad a_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q} a_{n,j}(q) + q^{n-j-1} a_{n-1,j}(q), \quad (j \in [n-1]). \quad (4.15)$$

*Si  $n$  est impair,*

$$a_{n,n}(q) = 0, \quad a_{n,j}(q) = q a_{n,j+1}(q) + q^{n-j} a_{n-1,j}(q), \quad (j \in [n-1]). \quad (4.16)$$

*Démonstration.* Supposons  $n$  pair. Avec les mêmes notations que dans le Théorème 62, on partitionne  $\mathcal{A}_{n,j+1}^+ = A \cup B$ . Pour chaque  $\sigma \in A$ , on a  $\text{inv}(\sigma') = \text{inv}(\sigma) + 1$  puisqu'on ajoute une inversion entre  $j$  et  $j+1$ . Si  $\sigma \in B$ , on a  $\text{inv}(\sigma') = \text{inv}(\sigma) - (n-j-1)$  puisqu'on enlève le dernier élément  $j+1$  qui formait une inversion dans  $\sigma$  avec tous les éléments plus grands, soit  $n-j-1$  éléments.

Dans un second temps, supposons  $n$  impair. Avec les mêmes notations que dans le Théorème 62, on partitionne  $\mathcal{A}_{n,j}^+ = C \cup D$ . Pour chaque  $\sigma \in C$ , on a  $\text{inv}(\sigma') = \text{inv}(\sigma) - 1$  puisqu'on enlève l'inversion entre  $j$  et  $j+1$ . Si  $\sigma \in D$ , on a  $\text{inv}(\sigma') = \text{inv}(\sigma) - (n-j)$  puisqu'on enlève le dernier élément  $j$  qui formait une inversion dans  $\sigma$  avec tous les éléments plus grands, soit  $n-j$  éléments.  $\square$

Comme cas particuliers, on peut remarquer les relations suivantes :

$$q_{2n,2n-1}(q) = q a_{2n,2n}(q), \quad (n \geq 1), \quad a_{2n+1,1}(q) = q a_{2n+1,2}(q), \quad (n \geq 0).$$



D'après les relations de récurrence précédentes, on peut écrire la table des nombres  $a_{n,k}(q)$ , appelée la *table de  $q$ -Seidel-Kempner* (voir Table 4.2).

Les nombres  $q$ -tangents apparaissent bien sur le bord droit de cette table. Cependant, sur le bord gauche, il semblerait que ce soit les nombres  $q$ -sécants à un facteur multiplicatif  $q^{2n}$  près. Cependant ce facteur est compréhensible à l'aide du résultat suivant.

**Théorème 68.**

$$\sum_{n \geq 0} a_{2n+2,2n+2}(q) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \tan_q(x), \quad (4.17)$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_{2n+1,1}(q)}{q^{2n}} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sec_q(x). \quad (4.18)$$

*Démonstration.* Si  $\sigma \in \mathcal{A}_{2n+2}^+$  avec  $\sigma(2n+2) = 2n+2$ , il suffit de regarder la restriction de  $\sigma$  sur  $[2n+1]$  et séparer selon les valeurs de  $\sigma(2n+1)$ . Alors, on a :

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1,k}(q) = E_{2n+1}(q).$$

Si  $\sigma \in \mathcal{A}_{2n+1}^+$  avec  $\sigma(2n+1) = 1$ , on regarde  $\sigma' \in \mathcal{A}_{2n}^+$ , définie par  $\sigma'(i) = \sigma(i) - 1$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ). De manière évidente,  $\text{inv}(\sigma') = \text{inv}(\sigma) - 2n$  puisqu'on enlève la dernière valeur, égale à 1. Alors, en séparant selon les valeurs de  $\sigma'(2n)$ , on obtient :

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=1}^{2n} q^{2n} a_{2n,k}(q) = q^{2n} E_{2n}(q). \quad \square$$

Il y a également un analogue au Théorème 64.

**Théorème 69.**

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \begin{matrix} 2n \\ 2k+1 \end{matrix} \right]_q q^{2k+1} a_{2k+2,2k+2}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q), \quad (4.19)$$

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \begin{matrix} 2n-1 \\ 2k \end{matrix} \right]_q q^{2n} a_{2k+1,1}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q). \quad (4.20)$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  un élément de  $\mathcal{A}_{2n+2,2n+2}^+$ . Supposons que  $2n+1$  apparaisse en position  $2n-2k$  (i.e.  $\sigma(2n-2k) = 2n+1$ ). Une telle permutation est caractérisée par les deux permutations alternantes

$$\sigma' = \sigma(1) \dots \sigma(2n-2k-1)$$



et

$$\sigma'' = \sigma(2n - 2k + 1 \dots \sigma(2n + 2)).$$

Les inversions de  $\sigma$  peuvent être séparées en quatre groupes.

- Les inversions de couples de lettres, telles qu'une soit dans  $\sigma'$  et l'autre soit dans  $\sigma''$ . Leur polynôme générateur est donc  $\left[ \begin{matrix} 2n \\ 2n - 2k - 1 \end{matrix} \right]_q = \left[ \begin{matrix} 2n \\ 2k + 1 \end{matrix} \right]_q$ .
- Les  $2k + 1$  inversions formées par  $2n + 1$  et les éléments de  $\sigma''$  sauf  $2n + 2$ .
- Les inversions qui sont intérieures à  $\sigma'$  de polynôme générateur  $a_{2n-2k, 2n-2k}(q)$ .
- Les inversions qui sont intérieures à  $\sigma''$  de polynôme générateur  $a_{2k+2, 2k+2}(q)$ .

Soit  $\sigma$  un élément de  $\mathcal{A}_{2n+1,1}$ . Supposons que  $2n + 1$  apparaisse en position  $2n - 2k$  (i.e.  $\sigma(2n - 2k) = 2n + 1$ ). Une telle permutation est caractérisée par les deux permutations alternantes  $\sigma' = \sigma(1) \dots \sigma(2n - 2k - 1)$  et  $\sigma'' = \sigma(2n - 2k + 1) \dots \sigma(2n)$ . Les inversions de  $\sigma$  peuvent être séparées en cinq groupes :

- Les inversions de couples de lettres, telles qu'une soit dans  $\sigma'$  et l'autre soit dans  $\sigma''$ . Leur polynôme générateur est donc  $\left[ \begin{matrix} 2n - 1 \\ 2n - 2k - 1 \end{matrix} \right]_q = \left[ \begin{matrix} 2n - 1 \\ 2k \end{matrix} \right]_q$ .
- Les  $2k$  inversions formées par  $2n + 1$  et les éléments de  $\sigma''$ .
- Les  $2n - 2k$  inversions formées par 1 et les éléments de  $\sigma'$  et  $2n + 1$ .
- Les inversions intérieures à  $\sigma'$ , leur polynôme générateur est  $a_{2n-2k, 2n-2k}(q)$ .
- Les inversions intérieures à  $\sigma''$  et 1, leur polynôme générateur est  $a_{2k+1,1}(q)$ .  $\square$

Il existe un  $q$ -analogue du Théorème 67.

**Théorème 70.** *Pour  $n \geq 1$ , on a les relations suivantes :*

$$a_{2n+1,k}(q) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} q^{1-k+(n-i)(4n-2k+4)} \left[ \begin{matrix} k-1 \\ 2n-2i \end{matrix} \right]_q a_{2i+1,1}(q), \quad (2 \leq k \leq 2n), \quad (4.21)$$

$$a_{2n,k}(q) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} q^{n+i-k+2(n-i)^2} \left[ \begin{matrix} 2n-k \\ 2n-2i \end{matrix} \right]_q a_{2i,2i}(q), \quad (2 \leq k \leq 2n-1). \quad (4.22)$$

*Démonstration.* Il est facile de vérifier les relations suivantes :

$$a_{2n+1,k}(q) = \frac{1}{q} a_{2n+1,k-1}(q) - q^{4n-2k+2} \sum_{i=1}^{k-2} a_{2n-1,i}(q), \quad (4.23)$$

$$a_{2n,k}(q) = q a_{2n,k+1}(q) - q^{4n-2k-1} \sum_{i=k}^{2n-2} a_{2n-2,i}(q). \quad (4.24)$$

Gardons les notations du Théorème 4. Si on échange les places de  $k$  et  $k - 1$  dans une permutation de  $A$ , on enlève une inversion. Si on enlève les deux derniers éléments d'une permutation de  $B$ , on enlève  $(2n + 1) - k$  (resp.  $(2n + 1) - k + 1$ ) inversions entre  $k$  (resp.  $k - 1$ ) et les valeurs plus grandes, on enlève donc  $4n - 2k + 3$  inversions. Ainsi, on obtient  $a_{2n+1,k-1}(q) = qa_{2n+1,k}(q) + q^{4n-2k+1} \sum_{i=1}^{k-2} a_{2n+1,i}(q)$ , et la formule (4.23) suit alors. On peut raisonner de la même manière pour le cas pair.

En itérant ces formules, on trouve les formules du Théorème 70.  $\square$

## 4.4 Permutations de forme donnée

Dans cette section, on appelle *forme* d'une permutation  $\sigma$  de  $[n]$ , la suite  $w_\sigma$  dans  $\{-, +\}^{n-1}$  correspondant aux signes des différences  $\sigma(i + 1) - \sigma(i)$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ . Par exemple, une permutation  $\sigma$  de  $[n]$  est un élément de  $\mathcal{A}_n^+$  si et seulement si sa forme est  $w_\sigma = + - + - + - + - \dots$  alternativement, tandis que la permutation  $\sigma = 264153$  a pour forme le mot  $w_\sigma = + - - + -$ .

Viennot [Vie79] a énoncé un moyen de calculer de manière itérative le nombre de permutations à forme donnée. En fait, on peut réaliser une table de Kempner pour les ensembles de permutations qui ont pour forme un mot donné  $w \in \{-, +\}^{n-1}$ . Il suffit de créer la  $n$ -ième ligne suivant le modèle "pair" lorsque  $w_{n-1} = +$ , et de créer la  $n$ -ième ligne suivant le modèle "impair" lorsque  $w_{n-1} = -$ . Par exemple, la table de Kempner pour les permutations de forme donnée  $w = - - + - ++$  est présente dans la Table 4.3. Facilement, on pourrait réaliser des  $q$ -analogues de ces tables, utilisant (4.15) lorsque  $w_{n-1} = +$ , et utilisant (4.16) lorsque  $w_{n-1} = -$ .

**Théorème 71.** *Soit  $w$  un mot  $\{-, +\}^{n-1}$  et notons pour  $1 \leq j \leq n$ ,  $\mathcal{A}_{w,j}$  l'ensemble des permutations de  $[j]$  de forme  $w_1 \dots w_{j-1}$ . Notons pour tout  $1 \leq j \leq n - 1$ ,  $b_{j,k}(q)$  le polynôme générateur des permutations  $\sigma$  de  $\mathcal{A}_{w,j}$  telles que  $\sigma(j) = k$  pour la statistique d'inversion, c'est-à-dire,*

$$b_{j,k}(q) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_{w,j} \\ \sigma(j)=k}} q^{inv(\sigma)}.$$

Alors, pour tout  $1 \leq j \leq n$  les nombres  $b_{j,k}(q)$  vérifient les relations suivantes :

$$b_{j,1}(q) = 0, \quad b_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q} b_{n,j}(q) + q^{n-j-1} b_{n-1,j}(q), \quad \text{si } w_j = +,$$

$$b_{j,j}(q) = 0, \quad b_{n,j}(q) = q b_{n,j+1}(q) + q^{n-j} b_{n-1,j}(q), \quad \text{si } w_j = -.$$

En particulier, le résultat reste vrai pour  $q = 1$ . Par exemple, la table 4.3 exprime le nombre de permutations de forme  $w = --+-++$  en fonction de leur dernier terme.

TABLE 4.3 – La table de Seidel-Kempner pour les permutations de forme  $w = --+-++$

|  |   |   |  |   |   |   |   |    |    |    |
|--|---|---|--|---|---|---|---|----|----|----|
|  |   |   |  | 1 |   |   |   |    |    |    |
|  |   |   |  | 1 | 0 |   |   | ←  |    |    |
|  |   |   |  | 1 | 0 | 0 |   |    | ←  |    |
|  |   | → |  | 0 | 1 | 1 | 1 |    |    |    |
|  |   |   |  | 3 | 3 | 2 | 1 | 0  | ←  |    |
|  | → |   |  | 0 | 3 | 6 | 8 | 9  | 9  |    |
|  | → |   |  | 0 | 0 | 3 | 9 | 17 | 26 | 35 |

---

## CHAPITRE 5

---

### Bijections entre les familles d'Entringer

---

#### 5.1 Définitions

Notons  $\mathcal{A}_n^-$  l'ensemble des *permutations alternantes descendantes de  $[n]$* , autrement dit, les permutations  $\pi = \pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)$  de  $[n]$  satisfaisant :

$$\pi(1) > \pi(2) < \pi(3) > \pi(4) < \dots, \text{ alternativement.}$$

Par exemple, les permutations alternantes (descendantes) de  $[4]$  sont :

$$2143, \quad 3241, \quad 3142, \quad 4231, \quad 4132.$$

Il y a une bijection naturelle entre  $\mathcal{A}_n^-$  et l'ensemble  $\mathcal{A}_n^+$  des permutations alternantes montantes définies au chapitre précédent, puisqu'il suffit d'associer à une permutation  $\pi \in \mathcal{A}_n^-$  la permutation  $\pi'$  définie par  $\pi'(i) = n + 1 - i$  qui est alors un élément de  $\mathcal{A}_n^+$ . Ceci nous indique que  $\text{Card}(\mathcal{A}_n^-) = E_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

Pour ne plus à avoir à séparer les cas impairs et pair, nous changeons dans ce chapitre les notations des nombres d'Entringer. Nous noterons à présent pour tout  $n \geq 1$  et tout  $k \in [n]$ ,

$$E_{n,k} = \begin{cases} a_{n,k} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ a_{n,n+1-k} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

ainsi que le cas particulier  $E_{0,0} = a_{0,0} = 1$ .

Auparavant, le terme  $k$  représentait le dernier terme de notre permutation alternante montante, l'interprétation change quelque peu avec ces notations puisqu'elle est la suivante.

**Théorème 72.** *Le nombre d'Entringer  $E_{n,k}$  dénombre les permutations alternantes descendantes  $\sigma$  de  $[n]$  telles que  $\sigma(1) = k$ .*

Nous noterons dans la suite  $\mathcal{A}_{n,k}^-$  l'ensemble des permutations alternantes descendantes d'ordre  $n$  dont le premier terme est  $k$ . L'avantage d'écrire les nombres d'Entringer de cette manière est que, si on les écrit dans une table, les nombres apparaissent à présent de manière croissante sur chaque ligne (voir Table 5.1).

TABLE 5.1 – Les premières valeurs des nombres d'Entringer  $E_{n,k}$

| $n \setminus k$ | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
|-----------------|---|----|----|----|----|----|----|
| 1               | 1 |    |    |    |    |    |    |
| 2               | 0 | 1  |    |    |    |    |    |
| 3               | 0 | 1  | 1  |    |    |    |    |
| 4               | 0 | 1  | 2  | 2  |    |    |    |
| 5               | 0 | 2  | 4  | 5  | 5  |    |    |
| 6               | 0 | 5  | 10 | 14 | 16 | 16 |    |
| 7               | 0 | 16 | 32 | 46 | 56 | 61 | 61 |

Bien entendu la table de Seidel-Kempner reste valable, en positionnant les nombres d'Entringer comme dans la Table 5.1. Les nombres d'Euler  $E_n = E_{n+1,n+1}$  sont alors les nombres diagonaux dans la Table 5.2.

Le théorème 62 qui donnait les relations triangulaires des nombres d'Entringer peut alors s'écrire de manière plus simple.

**Théorème 73.** *Les nombres  $(E_{n,k})$  ( $n \geq k \geq 1$ ) satisfont la récurrence suivante :*

$$E_{1,1} = 1, \quad E_{n,1} = 0 \quad (n \geq 2), \quad E_{n,k} = E_{n,k-1} + E_{n-1,n-k+1}. \quad (5.1)$$

**Définition 74.** Une suite d'ensembles  $(X_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est appelée une *famille d'Entringer* si pour  $1 \leq k \leq n$ , le cardinal de l'ensemble  $X_{n,k}$  est égal à  $E_{n,k}$ .

Soit  $X = \{x_1, \dots, x_n\}_<$  un ensemble ordonné tel que  $x_1 < \dots < x_n$ . Un *arbre croissant* sur  $X$  est un arbre couvrant du graphe complet sur  $X$ , enraciné en  $x_1$  et orienté depuis le plus petit sommet  $x_1$ , de telle sorte que les sommets croissent le long des branches de l'arbre. Notons  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des *arbres binaires croissants* sur  $[n]$ , i.e. les arbres croissants pour lesquels au plus deux arêtes partent de chaque sommet (voir Figure 5.1).

Foata et Schützenberger ont prouvé dans [FS73, §5] que le nombre d'Euler  $E_n$  était également le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{T}_n$ . Une correspondance bijective entre



**Théorème 76.** *Pour tous  $n \geq 1$  et  $k \in [n]$ , il existe une bijection explicite  $\Psi : \mathcal{A}_{n,k}^- \rightarrow \mathcal{T}_{n,k}$  vérifiant*

$$\forall \pi \in \mathcal{A}_{n,k}^-, \quad \text{FIRST}(\pi) = \text{LEAF}(\Psi(\pi)),$$

où  $\text{FIRST}(\pi)$  désigne la première valeur de la permutation  $\pi$  et  $\text{LEAF}(\Psi(\pi))$  désigne l'extrémité  $p(T)$  du chemin minimal de l'arbre  $\Psi(\pi)$ .

Poupard [Pou82, Pou97] a donné également d'autres interprétations des nombres d'Entringer  $E_{n,k}$  (voir Section 5.4) dans les arbres croissants et les permutations alternantes, à l'aide de preuves par récurrence. Notre second but est de fournir des bijections simples entre ces différentes interprétations de Poupard et l'interprétation originale d'Entringer dans  $\mathcal{A}_{n,k}^-$ . Remarquons également que d'autres interprétations des nombres d'Entringer  $E_{n,k}$  dans le modèle des arbres croissants (non binaires) ont été données dans [KPP94]. Récemment, deux nouvelles interprétations des nombres d'Euler ont été découvertes par Martin et Wagner [MW09] dans leur modèle des G-mots et R-mots. Nous donnerons alors les interprétations correspondantes des nombres d'Entringer  $E_{n,k}$  dans ces derniers modèles.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 5.2, nous introduisons un modèle intermédiaire  $\mathcal{D}_{n,k}$  et présentons une bijection  $\psi$  entre  $\mathcal{A}_{n,k}$  et  $\mathcal{D}_{n,k}$ . Dans la Section 5.3, nous décrivons une bijection  $\varphi$  entre  $\mathcal{D}_{n,k}$  et  $\mathcal{T}_{n,k}$  et ainsi l'application  $\Psi = \varphi \circ \psi$  fournit la bijection cherchée dans le Théorème 76. Comme application, à la fin du paragraphe 5.3, nous donnons une interprétation directe de l'équation (5.1) dans le modèle des arbres croissants. Dans la Section 5.4, nous rappelons les autres interprétations de  $E_{n,k}$  trouvées par Poupard et établissons des bijections entre ces différents modèles. Enfin dans la Section 5.5, nous donnons deux nouvelles interprétations de  $E_{n,k}$ , tout d'abord en raffinant les résultats de Martin et Wagner [MW09] dans leur modèle des G-mots et R-mots, et ensuite en introduisant le nouveau modèle des U-mots.

## 5.2 Le codage gauche-à-droite $\psi$ des permutations alternantes

Considérons les permutations alternantes descendantes sur un ensemble fini ordonné  $I = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}_<$  of  $\mathbb{N}$ . Deux éléments  $a$  et  $b$  de  $I$  sont dits *adjacents* s'il n'existe pas d'élément  $c \in I$  situé entre  $a$  et  $b$ .

Soit  $\sigma$  une permutation alternante descendante sur  $I$ , i.e.,  $\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \dots$ . Supposons que  $\sigma(1) = a_i$  et  $\sigma(2) = a_j$  avec  $a_i > a_j$ . Si  $\sigma(1)$  et  $\sigma(2)$  sont adjacents, alors, en effaçant  $\sigma(1)\sigma(2)$ , on obtient encore une permutation alternante descendante sur  $I \setminus \{a_i, a_j\}$ . Sinon, on peut appliquer successivement les

transpositions adjacentes  $(a_i, a_{i-1}), (a_{i-1}, a_{i-2}), \dots, (a_{j+2}, a_{j+1})$  à la permutation  $\sigma$  (de gauche-à-droite) :

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= (a_i, a_{i-1}) \circ \sigma, \\ \sigma^{(2)} &= (a_{i-1}, a_{i-2}) \circ \sigma^{(1)}, \\ &\dots \\ \sigma^{(i-j-1)} &= (a_{j+2}, a_{j+1}) \circ \sigma^{(i-j-2)},\end{aligned}$$

de telle sorte que toutes les permutations  $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(i-j-1)}$  sont alternantes descendantes et que les deux premiers éléments dans  $\sigma^{(i-j-1)}$  sont adjacents. En effaçant les deux premiers éléments, on obtient encore une permutation alternante descendante, disons  $\sigma^{(i-j)}$ , sur  $I \setminus \{a_{j+1}, a_j\}$ . Si on enregistre par  $(a, b)$  la composition à gauche par l'involution adjacente  $(a, b)$ , et par  $(a, b)^*$  l'effacement des deux premières lettres  $a$  et  $b$ , alors les opérations du processus ci-dessus peuvent être encodées par le mot

$$(a_i, a_{i-1})(a_{i-1}, a_{i-2}) \dots (a_{j+2}, a_{j+1})(a_{j+1}, a_j)^*.$$

Puisque la permutation obtenue  $\sigma^{(i-j)}$  est encore alternante descendante, on peut itérer ce processus jusqu'à ce qu'on obtienne une permutation vide. De manière évidente, le dernier effacement sera  $(a_m)^*$  si  $m$  est impair. On appelle *code gauche-à-droite* le mot obtenu en concaténant les opérations successives dans ce processus, et on le note  $\psi(\sigma) = \Delta_1 \Delta_2 \dots$ , où chaque élément  $\Delta_\ell$  est soit une transposition  $(j, i)$ , un effacement  $(j, i)^*$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , ou l'effacement  $(n)^*$ .

De manière plus formelle, on peut écrire l'algorithme de la façon suivante.

1. On part de  $(\sigma, \Delta = \emptyset)$  et d'ensemble support  $I = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}_<$
2. Tant que  $Card(I) \geq 2$ , faire :
  - (a) Tant qu'il existe un  $a \in I$  tel que  $\sigma(1) > a > \sigma(2)$ , faire :
$$\begin{aligned}\Delta &\leftarrow \Delta.(\sigma(1), a'), \text{ où } a' = \max\{a \in I, \sigma(1) > a > \sigma(2)\}, \\ \sigma &\leftarrow (\sigma(1), a') \circ \sigma.\end{aligned}$$
  - (b) S'il n'existe pas de  $a \in I$  tel que  $\sigma(1) > a > \sigma(2)$ , faire :
$$\begin{aligned}\Delta &\leftarrow \Delta.(\sigma(1), \sigma(2))^*, \\ \sigma &\leftarrow \sigma(3)\sigma(4) \dots \sigma(n) \text{ (éventuellement } \sigma = \emptyset), \\ I &\leftarrow I \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}.\end{aligned}$$
3. Si  $Card(I) = 1$  avec  $I = \{a_n\}$ , faire :
$$\begin{aligned}\Delta &\leftarrow \Delta.(a_n)^*, \\ \sigma &\leftarrow \emptyset, \\ I &\leftarrow \emptyset.\end{aligned}$$



*Exemple 77.* Prenons  $\sigma = 748591623 \in \mathcal{A}_{9,7}^-$ . Alors, l'algorithme se réalise de la manière suivante :

| Etape | $\sigma^{(\ell)}$ | $\Delta_\ell$ |
|-------|-------------------|---------------|
| 0     | 748591623         | $\emptyset$   |
| 1     | 648591723         | (7, 6)        |
| 2     | 548691723         | (6, 5)        |
| 3     | 8691723           | (5, 4)*       |
| 4     | 7691823           | (8, 7)        |
| 5     | 91823             | (7, 6)*       |
| 6     | 81923             | (9, 8)        |
| 7     | 31928             | (8, 3)        |
| 8     | 21938             | (3, 2)        |
| 9     | 938               | (2, 1)*       |
| 10    | 839               | (9, 8)        |
| 11    | 9                 | (8, 3)*       |
| 12    | $\emptyset$       | (9)*          |

Ainsi, le code gauche-à-droite de  $\sigma$  est :

$$\psi(\sigma) = (7, 6)(6, 5)(5, 4)^*(8, 7)(7, 6)^*(9, 8)(8, 3)(3, 2)(2, 1)^*(9, 8)(8, 3)^*(9)^*.$$

Un *domino* sur  $[n]$  est un couple  $(j, i)$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) et un *domino étoilé* sur  $[n]$  est un couple étoilé  $(j, i)^*$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) ou  $(n)^* = (n, n)^*$ . Notons  $\mathbb{A}_n$  l'alphabet consistant des dominos (étoilés ou non) sur  $[n]$ .

**Définition 78.** Un mot  $\Delta = \Delta_1 \dots \Delta_r$  sur  $\mathbb{A}_n$  est une *suite codante* de  $[n]$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) les éléments présents dans les dominos étoilés de  $\Delta$  sont distincts et leur union est exactement  $[n]$ ,
- (ii) si  $\Delta_\ell = (j, i)^*$ , alors le prochain domino (s'il y en a un) débute avec un élément strictement supérieur à  $i$ , et aucun élément dans un domino apparaissant plus tard dans  $\Delta$  ne peut se situer entre  $i$  et  $j$ ,
- (iii) si  $\Delta_\ell = (j, i)$ , alors  $i$  et  $j$  apparaissent dans des dominos plus tard,  $i$  est le premier élément du domino suivant, et chaque entier entre  $i$  et  $j$  apparaît dans un domino étoilé placé avant dans  $\Delta$ .

*Remarque 79.* Il est clair d'après la définition qu'un élément de la forme  $(n, i)^*$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ne peut que se trouver en dernière position dans une suite codante. De plus, une suite codante ne peut débiter que par un élément de la forme  $(k, k - 1)$  ou  $(k, k - 1)^*$  pour  $2 \leq k \leq n$ .

On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des suites codantes de  $[n]$ , et  $\mathcal{D}_{n,k}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{D}_n$  consistant des suites codantes commençant par  $(k, k-1)$  ou  $(k, k-1)^*$ , pour  $2 \leq k \leq n$ .

Par exemple, l'ensemble  $\mathcal{D}_4$  est la réunion des trois sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{4,2} &= \{(2, 1)^* (4, 3)^*\}, \\ \mathcal{D}_{4,3} &= \{(3, 2)^* (4, 1)^*, (3, 2) (2, 1)^* (4, 3)^*\}, \\ \mathcal{D}_{4,4} &= \{(4, 3) (3, 2)^* (4, 1)^*, (4, 3) (3, 2) (2, 1)^* (4, 3)^*\}.\end{aligned}$$

**Théorème 80.** *Pour tous  $n \geq 1$  et  $k \in [n]$ , l'application de codage gauche-à-droite  $\psi : \mathcal{A}_{n,k}^- \rightarrow \mathcal{D}_{n,k}$  est une bijection. Ainsi, la suite  $(\mathcal{D}_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est une famille d'Entringer.*

*Démonstration.* Soit  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$  un élément de  $\mathcal{A}_{n,k}^-$ . Alors,  $\sigma(1) = k$ , donc la première lettre de  $\psi(\sigma)$  est  $(k, i)$  ou  $(k, i)^*$  ( $1 \leq i < k$ ) par définition de  $\psi$ . Il rest donc à vérifier que le mot  $\psi(\sigma)$  vérifie les points (i)-(iii) de la Définition 78. Puisque le processus réduit la permutation  $\sigma$  à la permutation vide, la condition (i) est vérifiée.

- Si  $\Delta_\ell = (j, i)^*$ , comme  $i$  et  $j$  sont adjacents dans l'ensemble support de  $\sigma^{(\ell)}$ , les entiers entre  $i$  et  $j$  ont été enlevés dans des dominos étoilés précédemment, également la première valeur du prochain domino doit être strictement supérieure à  $i$  puisque  $\sigma^{(\ell)}$  est alternante descendante.
- Si  $\Delta_\ell = (j, i)$ , comme  $i$  et  $j$  sont adjacents dans l'ensemble support de  $\sigma^{(\ell)}$ , les entiers entre  $i$  et  $j$  ont été enlevés dans des dominos étoilés précédemment, également le prochain domino doit être  $(i, m)$  ou  $(i, m)^*$  avec  $i > m$  puisque  $i$  est la première valeur de  $\sigma^{(\ell)}$ .

Il résulte que  $\psi(\sigma) \in \mathcal{D}_{n,k}$ .

Réciproquement, partant d'une suite codante  $\Delta = \Delta_1 \dots \Delta_\ell \in \mathcal{D}_{n,k}$ , on construit par récurrence  $\sigma^{(\ell)}$  de telle sorte que  $\text{FIRST}(\sigma^{(j)})$  soit égal au premier élément du domino  $\Delta_j$  pour  $j = \ell, \ell-1, \dots, 1$ .

Pour initialiser, si  $\Delta_\ell = (n)^*$ , on définit alors  $\sigma^{(\ell)} = n$ , tandis que si  $\Delta_\ell = (n, i)^*$  avec  $i < n$ , on définit alors  $\sigma^{(\ell)} = n i$ .

Supposons que  $\sigma^{(j+1)}$  soit construite avec  $\text{FIRST}(\sigma^{(j+1)}) = k_{j+1}$ . Par définition de  $\Delta$ , on a deux cas :

- (i) si  $\Delta_j = (k_j, k_{j+1})$ , où  $k_j$  et  $k_{j+1}$  sont adjacents dans l'ensemble support de  $\sigma^{(j+1)}$ , alors on définit  $\sigma^{(j)} := (k_j, k_{j+1}) \circ \sigma^{(j+1)}$ ; cette permutation est encore alternante descendante et le premier élément de  $\sigma^{(j)}$  est  $k_j$ ,
- (ii) si  $\Delta_j = (a_j, b_j)^*$ , où  $a_j > b_j < k_{j+1}$ , et  $a_j, b_j$  ne sont pas dans l'ensemble support de  $\sigma^{(j+1)}$ , alors on définit  $\sigma^{(j)}$  comme le mot  $a_j b_j \sigma^{(j+1)}$ ; puisque  $a_j > b_j < k_{j+1}$ , la permutation  $\sigma^{(j)}$  est alternante descendante avec  $a_j$  en tant que premier élément.

On pose alors  $\psi^{-1}(\Delta) := \sigma^{(1)}$ , qui est un élément de  $A_{n,k}^-$ .  $\square$

*Remarque 81.* Notons la partie entière d'un réel  $x$  par  $\lfloor x \rfloor$  et le nombre de couples  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i + 1 < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(i + 1) < \sigma(j) < \sigma(i)$  par  $31-2(\pi)$ . Alors, on peut voir facilement que la longueur de la suite  $\psi(\sigma)$  est égale à

$$31-2(\sigma) + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

En effet,  $31-2(\sigma)$  correspond au nombre d'occurrences des éléments  $(j, i)$ ,  $j > i$ , dans  $\psi(\sigma)$ , et il y a exactement  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$  occurrences d'éléments  $(j, i)^*$ ,  $j > i$ , dans  $\psi(\sigma)$ . Remarquons que de nombreuses formules pour le dénombrement des motifs  $31-2$  dans les permutations alternantes sont données dans [Che08, JV09, SZ10].

**Théorème 82.** *Soit  $n \geq 2$  et  $k \geq 2$ . Le nombre d'éléments de  $\mathcal{D}_{n,k}$  commençant par  $(k, k-1)$  est égal à  $E_{n,k-1}$ , et le nombre d'éléments de  $\mathcal{D}_{n,k}$  commençant par  $(k, k-1)^*$  est égal à  $E_{n-1, n+1-k}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Delta \in \mathcal{D}_{n,k}$ .

Si  $\Delta_1 = (k, k-1)$ , alors, le reste de la suite  $(\Delta_2, \Delta_3, \dots)$  est encore une suite codante de  $[n]$ , commençant par  $\Delta_2 \in \{(k-1, i), (k-1, i), 1 \leq i \leq k-2\}$ . Ainsi, il y a  $E_{n,k-1}$  suites encodantes commençant par  $(k, k-1)$ .

Si  $\Delta_1 = (k, k-1)^*$ , alors, le reste de la suite  $(\Delta_2, \Delta_3, \dots)$  ne contient pas les éléments  $k$  et  $k+1$  et commence par un élément dans  $\{(i, j), (i, j)^*, 1 \leq j \leq i-1\}$  with  $i \geq k+1$ . Autrement dit, c'est une suite codante de  $n-2$  éléments, commençant par un entier  $i$  qui doit être plus grand que les  $k-2$  plus petits éléments. Ainsi, il y a  $E_{n-2, k-1} + E_{n-2, k} + \dots + E_{n-2, n-2} = E_{n-1, n-k+1}$  suites codantes commençant par  $(k, k-1)^*$ .  $\square$

Puisque toute suite codante dans  $\mathcal{D}_{n,k}$  commence soit par  $(k, k-1)$ , ou  $(k, k-1)^*$  ( $2 \leq k \leq n$ ), la formule d'Entringer (5.1) résulte directement du théorème précédent.

### 5.3 Le codage gauche-à-droite des arbres croissants

Le but de ce paragraphe est de construire une bijection  $\varphi$  entre l'ensemble  $\mathcal{D}_{n,k}$  introduit au paragraphe précédent et l'ensemble  $\mathcal{T}_{n,k}$  des arbres binaires croissants dont le chemin minimal finit par  $k$ .

Partons d'une suite codante  $\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_\ell \in \mathcal{D}_{n,k}$ , nous allons construire un arbre  $T = \varphi(\Delta) \in \mathcal{T}_{n,k}$  en lisant la suite  $\Delta$  dans l'ordre inverse, i.e., de droite-à-gauche. Plus précisément, pour  $m = \ell, \ell-1, \dots, 1$ , nous voudrions construire un

arbre binaire croissant  $T_m$  correspondant au mot  $\Delta_m \dots \Delta_{\ell-1} \Delta_\ell$  de manière à ce que

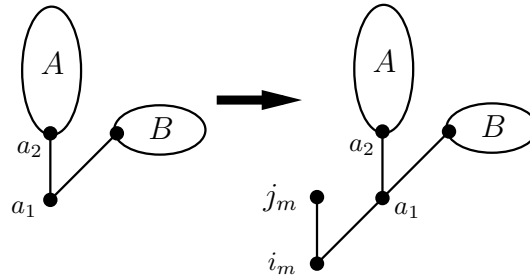
$$\Delta_m = (j_m, i_m) \text{ ou } (j_m, i_m)^* \implies \text{LEAF}(T_m) = j_m, \tag{5.2}$$

et nous définirons alors  $T = T_1 := \varphi(\Delta)$ . L'algorithme s'énonce de la façon suivante :

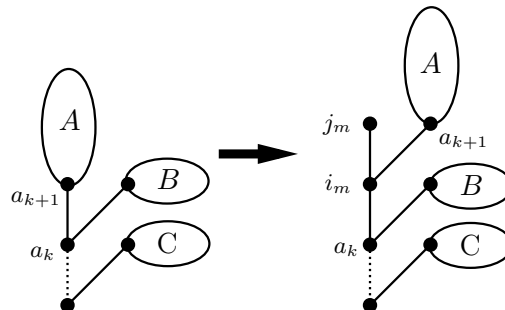
Si  $\Delta_\ell = (n)^*$ , on construit l'arbre  $T_\ell$  avec un unique sommet  $n$  ; si  $\Delta_\ell = (n, i)^*$ , on construit l'arbre croissant  $T_\ell$  qui ne contient qu'une arête  $i \rightarrow n$ . Clairement (5.2) est vérifiée.

Supposons que nous ayons construit un tel arbre  $T_{m+1}$  correspondant au mot  $\Delta_{m+1} \dots \Delta_\ell$ .

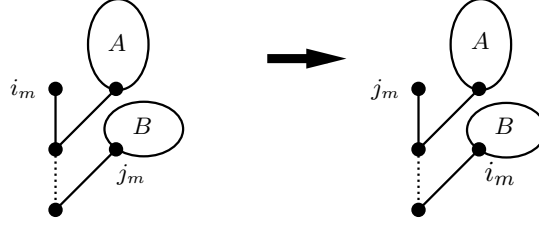
- (i) Si  $\Delta_m = (j_m, i_m)^*$ , on veut ajouter  $i_m$  et  $j_m$  dans l'arbre  $T_{m+1}$  pour obtenir  $T_m$ . Supposons que le chemin minimal de  $T_{m+1}$  soit  $(a_1, \dots, a_{p_m})$ .
  - Si  $i_m < a_1$ , on ajoute les arêtes  $(i_m, a_1)$  et  $(i_m, j_m)$  à l'arbre  $T_{m+1}$ . Alors, l'arbre  $T_m$  est un arbre croissant enraciné en  $i_m$  avec  $(i_m, j_m)$  comme chemin minimal.



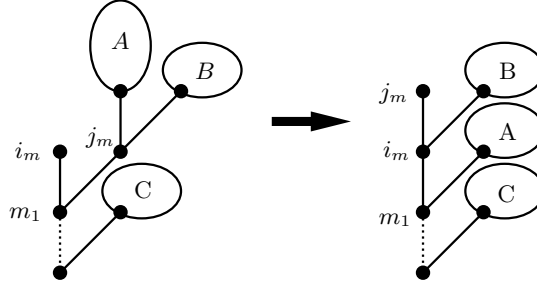
- Si  $i_m > a_1$ , par hypothèse de récurrence et la propriété (ii) des suites croissantes, on voit que  $a_1 < m$ . Ainsi, il existe  $k \in \{1, \dots, p_m - 1\}$  tel que  $a_k < i_m < a_{k+1}$ . Alors, on efface l'arête  $(a_k, a_{k+1})$ , et on crée les arêtes  $(a_k, i_m)$ ,  $(i_m, a_{k+1})$  et  $(i_m, j_m)$ . Clairement, l'arbre  $T_m$  est toujours croissant et l'arête  $(i_m, j_m)$  est la dernière présente dans le chemin minimal de  $T_m$ .



- (ii) Si  $\Delta_m = (j_m, i_m)$  avec  $i_m$  et  $j_m$  qui ne sont pas frères dans  $T_{m+1}$ , par hypothèse de récurrence et la propriété (iii) des suites codantes, on déduit que  $i_m$  est l'extrémité du chemin minimal de  $T_{m+1}$ . Alors, on transforme l'arbre  $T_{m+1}$  comme suit : on échange juste les places des entiers  $i_m$  et  $j_m$  dans  $T_{m+1}$ . L'arbre obtenu  $T_m$  reste bien croissant et  $j_m$  est à l'extrémité du chemin minimal de  $T_m$ .



- (iii) Si  $\Delta_m = (j_m, i_m)$ , avec  $i_m$  et  $j_m$  frères dans  $T_{m+1}$ , comme dans le cas précédent,  $i_m$  est à l'extrémité du chemin minimal de  $T_{m+1}$ . On transforme alors  $T_{m+1}$  avec la procédure suivante : Si  $m_1$  est le père commun de  $i_m$  et  $j_m$  dans  $T_{m+1}$ , on efface l'arête  $(m_1, j_m)$ , on crée l'arête  $(i_m, j_m)$ , et si  $A$  et  $B$  sont les deux sous-arbres enracinés en  $j_m$  avec  $\min(A) < \min(B)$  (éventuellement  $B$  est vide), on coupe le sous-arbre  $A$  à partir de  $j_m$  et on l'ajoute comme sous-arbre direct de  $m_1$ , ou coupe le sous-arbre  $B$  à partir de  $j_m$  et on l'ajoute comme sous-arbre direct de  $i_m$ . La procédure peut être illustrée par la figure suivante.



Posons  $\varphi(\Delta) := T_1$ , qui est bien alors un élément de  $\mathcal{T}_{n,k}$ .

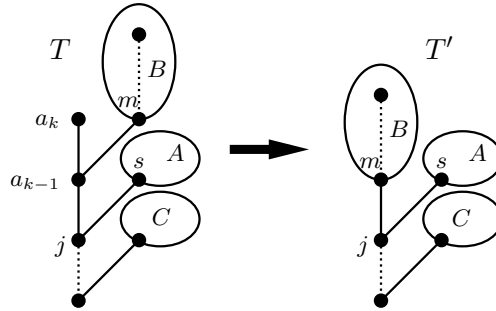
**Théorème 83.** *Pour tous  $n \geq 1$  et  $k \in [n]$ , l'application  $\varphi : \mathcal{D}_{n,k} \longrightarrow \mathcal{T}_{n,k}$  est une bijection.*

*Démonstration.* Il est suffisant de construire l'application inverse de  $\varphi$  pour montrer que c'est bien une bijection.

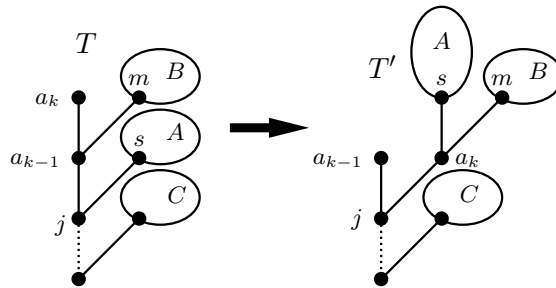
Etant donné  $T$  un arbre binaire croissant sur l'ensemble ordonné  $\{a_1, \dots, a_n\}$  avec  $a_1 < \dots < a_n$ , et  $p(T) = a_k$  (qui peut être interprété par un élément de  $\mathcal{T}_{n,k}$  en normalisant de façon naturelle), on construit la suite codante  $\Delta = \varphi^{-1}(T)$  de  $[n]$  récursivement de la façon suivante.

(a) Si  $a_{k-1}$  est le père de  $a_k$  dans  $T$ , alors posons  $m$  ( $m > a_k$ ) l'autre fils de  $a_{k-1}$  ( $m = \infty$  si  $a_k$  est l'unique fils de  $a_{k-1}$ ) et  $s$  ( $s > k$ ) le frère de  $a_{k-1}$  s'il existe ( $s = \infty$  si  $a_{k-1}$  n'a pas de frère), et  $j$  le père de  $a_{k-1}$  dans  $T$ .

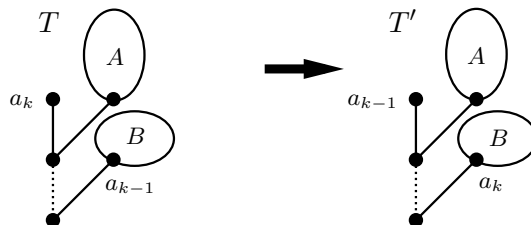
(a1) Si  $m < \infty$  et  $m < s$ , alors on définit  $\varphi^{-1}(T) = ((a_k, a_{k-1})^*, \varphi^{-1}(T'))$ , où  $T'$  est l'arbre obtenu à partir de  $T$  en effaçant les sommets  $a_{k-1}$ ,  $a_k$  et leurs arêtes adjacentes dans  $T$ , et en ajoutant une nouvelle arête entre  $m$  et  $j$ .



(a2) Dans les autres cas ( $m = \infty$  ou  $m > s$ ), on définit alors  $\varphi^{-1}(T) = ((a_k, a_{k-1}), \varphi^{-1}(T'))$ , où  $T'$  est l'arbre obtenu à partir de  $T$  en effaçant les arêtes  $(a_{k-1}, a_k)$ ,  $(a_{k-1}, m)$  et  $(j, s)$  dans  $T$ , et en ajoutant les arêtes  $(j, a_k)$ ,  $(a_k, s)$ ,  $(a_k, m)$ . La procédure peut être illustrée par la figure suivante.



(b) Si  $a_{k-1}$  n'est pas le père de  $a_k$  dans  $T$ , on définit alors  $\varphi^{-1}(T) = ((a_k, a_{k-1}), \varphi^{-1}(T'))$ , où  $T'$  est l'arbre obtenu à partir de  $T$  en échangeant les étiquettes  $a_{k-1}$  et  $a_k$  dans  $T$ .



Remarquons que les cas (a1), (a2) et (b) dans la construction de  $\varphi^{-1}$  correspondent respectivement aux cas (i), (ii) et (iii) dans la construction de  $\varphi$ .

Il reste à prouver que la suite obtenue  $\Delta$  vérifie les points (i)-(iii) de la Définition 78.

- Il est facile de voir que chaque entier de  $[n]$  est enlevé une et une seule fois de  $T$ . Donc (i) est bien vérifiée.
- Si un élément  $(j, i)^*$  apparaît dans  $\Delta$ , cela correspond au cas (a1), lorsque l'on efface les sommets  $i$  et  $j$  de l'arbre  $T$ . Alors, les prochains éléments dans  $\Delta$  ne contiendront ni  $i$  ni  $j$  puisqu'ils correspondent à  $\varphi^{-1}(T')$ . De plus, si nous sommes dans le cas (a1), le chemin minimal de l'arbre  $T'$  contient au moins un élément  $m$  avec  $m > j > i$ , donc le prochain élément dans  $\Delta$  sera de la forme  $(m, k)$  ou  $(m, k)^*$  avec  $m > k$ . Donc la propriété (ii) est vérifiée.
- Si un élément  $(j, i)$  apparaît dans  $\Delta$ , dans les cas (a2) ou (b), l'arbre  $T'$  a pour extrémité  $i$  dans son chemin minimal. Alors, le prochain élément dans  $\Delta$  doit être  $(i, k)$  ou  $(i, k)^*$  avec  $i > k$ . De plus,  $i$  et  $j$  doivent être des éléments adjacents dans l'ensemble ordonné des étiquettes de  $T$ . Alors, les éléments  $\ell$  tels que  $i < \ell < j$  n'apparaissent pas dans  $T$ . Donc la propriété (iii) est vérifiée.  $\square$

Posons  $\Psi = \varphi \circ \psi$ . Alors  $\Psi : \mathcal{A}_{n,k}^- \rightarrow \mathcal{T}_{n,k}$  est une bijection satisfaisant  $\text{FIRST}(\sigma) = \text{LEAF}(\Psi(\sigma))$  pour toute permutation alternante descendante  $\sigma \in \mathcal{A}_{n,k}^-$ . Ainsi, le Théorème 76 est démontré.

*Exemple 84.* Continuant l'Exemple 77, on applique  $\Psi$  à  $\sigma$  en utilisant le codage gauche-à-droite obtenu précédemment de  $\pi = 748591623$ . Les détails sont donnés dans la Figure 5.2.

La bijection  $\Psi$  fournit alors un moyen simple d'interprétation de la formule (5.1) dans le modèle des arbres binaires croissants  $\mathcal{T}_n$ . En effet, suivant l'interprétation de l'équation (5.1) dans  $\mathcal{D}_n$  (cf Théorème 5.2) et la bijection  $\varphi$ , on doit considérer la décomposition de l'ensemble  $\mathcal{T}_{n,k}$  selon si la première étape dans la construction de  $\varphi^{-1}$  effacera les éléments  $k-1$  et  $k$ , ou bien transformera juste l'arbre pour obtenir un autre arbre de  $\mathcal{T}_n$ .

Pour un élément  $T$  de  $\mathcal{T}_{n,k}$ , on dit que l'arête  $(k-1, k)$  est *détachable* si  $k-1$  est le père de  $k$  et si  $k-1$  a un autre fils  $m$  plus grand que le frère de  $k-1$  (si ce dernier existe). Pour une représentation plus visible, un arbre  $T$  a l'arête  $(k-1, k)$  détachable si et seulement s'il correspond au cas A-1 dans la preuve du Théorème 83.

Si l'arête  $(k-1, k)$  n'est pas détachable, l'arbre obtenu après la première opération dans la construction de  $\varphi^{-1}$  sera un arbre croissant ayant encore  $n$  éléments et dont l'extrémité du chemin minimal sera  $k-1$ . Ainsi, il y a exactement  $E_{n,k-1}$  arbres binaires croissants sur  $[n]$  dont le chemin minimal termine par  $k$  et tels que l'arête  $(k-1, k)$  ne soit pas détachable.

|                            |        |         |         |           |           |           |
|----------------------------|--------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|
| $\sigma^{(m)}$             | 9      | 839     | 938     | 21938     | 31928     | 81923     |
| FIRST( $\sigma^{(m)}$ )    | 9      | 8       | 9       | 2         | 3         | 8         |
| $\Delta_m$                 | (9)*   | (8, 3)* | (9, 8)  | (2, 1)*   | (3, 2)    | (8, 3)    |
| $T_m = \Psi(\sigma^{(m)})$ |        |         |         |           |           |           |
| LEAF( $T_m$ )              | 9      | 8       | 9       | 2         | 3         | 8         |
| $\sigma^{(m)}$             | 91823  | 7691823 | 8691723 | 548691723 | 648591723 | 748591623 |
| FIRST( $\sigma^{(m)}$ )    | 9      | 7       | 8       | 5         | 6         | 7         |
| $\Delta_m$                 | (9, 8) | (7, 6)* | (8, 7)  | (5, 4)*   | (6, 5)    | (7, 6)    |
| $T_m = \Phi(\sigma^{(m)})$ |        |         |         |           |           |           |
| LEAF( $T_m$ )              | 9      | 7       | 8       | 5         | 6         | 7         |

FIGURE 5.2 – The construction of the tree  $\Psi(748591623)$

Si l'arête est détachable, l'arbre obtenu après la première opération dans la construction de  $\varphi^{-1}$  sera un arbre croissant sur  $n - 2$  éléments (sans les éléments  $k - 1$  et  $k$ ), et l'extrémité du chemin minimal devra être un élément  $i$  plus grand que les  $k - 2$  plus petits éléments. Ainsi, il y a exactement  $E_{n-2,k-1} + E_{n-2,k} + \dots + E_{n-2,n-2} = E_{n-1,n-k+1}$  arbres binaires croissants sur  $[n]$  dont l'arête  $(k - 1, k)$  est détachable.

Finalement, nous obtenons une interprétation de l'équation (5.1) dans le modèle de  $\mathcal{T}_n$ ; elle correspond à la décomposition selon si l'arête  $(k - 1, k)$  est détachable ou non dans  $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ .

## 5.4 Les autres familles d'Entringer de Poupard

Pour éviter de nombreuses parenthèses dans les notations, nous identifierons à présent une permutation  $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$  avec le mot  $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_n$  défini par  $\pi_i = \sigma(i)$  pour  $i \in [n]$ .

### 5.4.1 Une autre interprétation dans les arbres croissants

Soit  $\mathcal{T}'_{n,k}$  l'ensemble des arbres  $T \in \mathcal{T}_n$  tels que le père de  $n$  dans  $T$  soit  $k - 1$ . Par des raisonnements par récurrence, Poupard a démontré que le nombre d'Entringer



$E_{n,k}$  était également le nombre d'arbres dans  $\mathcal{T}'_{n,k}$ . Une bijection  $\varphi'$  entre  $\mathcal{T}_{n,k}$  et  $\mathcal{T}'_{n,k}$  a été donnée dans [KPP94, §6] pour une classe plus générale d'arbres croissants, appelés arbres géométriques.

Rappelons ici la restriction de l'application  $\varphi'$  à  $\mathcal{T}_{n,k}$ . Soit  $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ . Notons son chemin minimal  $(a_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ , où  $a_1 = 1$  et  $a_\ell = k$ . On construit un arbre  $T'$  sur  $\{2, \dots, n+1\}$  en modifiant seulement les étiquettes le long du chemin minimal, de manière à ce que celui-ci devienne  $(a_2, a_3, \dots, a_\ell, n+1)$ . Puis, on diminue toutes les étiquettes de  $T'$  d'une unité pour obtenir un arbre  $T''$  qui est alors dans  $\mathcal{T}_n$ . L'arbre  $T'$  est bien binaire croissant, puisque chaque sommet sur le chemin minimal de  $T$  est plus petit que son frère (s'il en a un), on peut donc le faire devenir le père de son frère. De plus, le père de  $n$  dans  $T''$  devient  $a_\ell - 1$ , c'est-à-dire  $k - 1$ , donc on a bien  $T'' \in \mathcal{T}'_{n,k}$ . Comme le processus est clairement inversible, l'application  $\varphi' : T \rightarrow T''$  est bien une bijection entre  $\mathcal{T}_{n,k}$  et  $\mathcal{T}'_{n,k}$ .

### 5.4.2 Une autre interprétation dans les permutations alternantes

Si  $\pi$  est une permutation de  $\mathcal{A}_{n,k}^-$ , on définit  $\theta(\pi)$  comme suit :

- si  $k < n - k + 1 + \pi_2$ , alors  $\theta(\pi) = (n - k + 1 + \pi_2, n - k + \pi_2, \dots, k + 1, k) \circ \pi$ ,
- si  $k > n - k + 1 + \pi_2$ , alors  $\theta(\pi) = (n - k + 1 + \pi_2, n - k + 2 + \pi_2, \dots, k - 1, k) \circ \pi$ .

Puisque  $\pi$  est alternante descendante,  $\pi_2 < k = \pi_1$ . Si  $k < n - k + 1 + \pi_2$ ,  $\pi_2$  est inchangé par le cycle et donc  $\sigma(\pi)_2 = \pi_2$ . Ainsi  $\sigma(\pi)_2 < k < n - k + 1 + \pi_2 = \sigma(\pi)_1$  et  $\theta(\pi)$  est encore alternante descendante. Si  $k > n - k + 1 + \pi_2$ , puisque  $k \leq n$ , alors  $n - k + 1 + \pi_2 \geq \pi_2 + 1$ , donc  $\pi_2$  est inchangé par le cycle,  $\sigma(\pi)_1 = n - k + 1 + \pi_2 > \pi_2 = \sigma(\pi)_2$  et  $\theta(\pi)$  est encore alternante.

Notons  $\mathcal{A}'_{n,k}$  l'ensemble des permutations  $\pi \in \mathcal{A}_n^-$  telles que  $\pi_1 - \pi_2 = n + 1 - k$ .

**Théorème 85.** *Pour tous  $n \geq 1$  et  $k \in [n]$ , l'application  $\theta$  est une bijection de  $\mathcal{A}_{n,k}^-$  vers  $\mathcal{A}'_{n,k}$ . De plus, pour tout  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k}$ ,  $\theta(\pi)_2 = \pi_2$ .*

*Démonstration.* Par construction,  $\theta$  est clairement inversible. De plus, si  $\sigma \in \mathcal{A}_n^-$  avec  $\sigma_1 - \sigma_2 = n - k + 1$ ,

- si  $k < n - k + 1 + \sigma_2$ , alors  $\theta^{-1}(\sigma) = (k, k + 1, \dots, n - k + \sigma_2, n - k + 1 + \sigma_2) \circ \sigma$ ,
  - si  $k > n - k + 1 + \sigma_2$ , alors  $\theta^{-1}(\sigma) = (k, k - 1, \dots, n - k + 2 + \sigma_2, n - k + 1 + \sigma_2) \circ \sigma$ ,
- et donc  $\theta^{-1}(\sigma) \in \mathcal{A}_{n,k}$ .  $\square$

En utilisant le Théorème 85, on retrouve l'interprétation suivante de Poupard, prouvée dans [Pou97] par des relations de récurrence.

**Corollaire 86.** *La suite  $(\mathcal{A}'_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est une famille d'Entringer.*

Puisque  $\mathcal{A}'_{n,k} \subset \mathcal{A}_n^-$ , on peut bien définir  $\theta^2(\pi)$  pour  $\pi \in \mathcal{A}_n^-$ . En réalité, il est facile de vérifier que  $\theta$  est involutive sur  $\mathcal{A}_n^-$ .

Le résultat peut également être généralisé avec l'observation suivante. Pour tout  $\pi \in \mathcal{A}_n^-$ , on définit la *permutation complémentaire*  $\bar{\pi}$  avec  $\bar{\pi}_i = n + 1 - \pi_i$  pour  $i \in [n]$ . Ainsi l'ensemble des permutations  $\pi$  telles que  $\bar{\pi} \in \mathcal{A}_n^-$  correspond à l'ensemble  $\mathcal{A}_n^+$ .

**Corollaire 87.** *Pour  $n \geq 1$ ,*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{A}_n^+} q^{\pi_1} p^{\pi_2 - \pi_1} = \sum_{\pi \in \mathcal{A}_n^+} p^{\pi_1} q^{\pi_2 - \pi_1}.$$

*Démonstration.* L'application  $\pi \mapsto \theta(\bar{\pi})$  est une bijection entre  $\{\pi \in \mathcal{A}_n^+ : \pi_1 = k\}$  et  $\{\pi \in \mathcal{A}_n^+ : \pi_2 - \pi_1 = k\}$ . Ainsi, les deux statistiques  $\pi_1$  et  $\pi_2 - \pi_1$  sont équidistribuées sur  $\mathcal{A}_n^+$ . En fait, avec la preuve du Théorème 85, l'application  $\pi \mapsto \theta(\bar{\pi})$  est une bijection entre  $\{\pi \in \mathcal{A}_n^+ : \pi_1 = k, \pi_2 - \pi_1 = \ell\}$  et  $\{\pi \in \mathcal{A}_n^+ : \pi_1 = \ell, \pi_2 - \pi_1 = k\}$ . Ainsi, la distribution de ces deux statistiques est symétrique.  $\square$

### 5.4.3 Interprétations dans les permutations alternantes directes

Introduisons l'ensemble  $\mathcal{AD}_n$  des *permutations alternantes directes de  $[n]$* , c'est-à-dire, les permutations  $\pi$  de  $[n]$  telles que  $\pi_1^{-1} < \pi_n^{-1}$  (le chiffre 1 apparaît "avant" le chiffre  $n$ ) et

$$\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \cdots \quad \text{ou} \quad \pi_1 < \pi_2 > \pi_3 < \cdots .$$

Ces permutations sont parfois appelées des *min-max permutations* en référence aux positions respectives de leur minimum et maximum. Par exemple, les permutations alternantes directes de  $[4]$  sont

$$1423, \quad 1324, \quad 3142, \quad 2314, \quad 2143.$$

Notons  $\mathcal{AD}_{n,k}$  l'ensemble des  $\pi \in \mathcal{AD}_n$  telles que  $|\pi_1 - \pi_2| = n - k + 1$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}'_{n,k}$  peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints :  $\mathcal{A}'_{n,k,1n}$ , qui est l'ensemble des permutations dans  $\mathcal{A}'_{n,k} \cap \mathcal{AD}_n$ , et  $\mathcal{A}'_{n,k,n1} = \mathcal{A}'_{n,k} \setminus \mathcal{A}'_{n,k,1n}$ . Si  $\pi \in \mathcal{A}'_{n,k,1n}$ , on définit  $\beta(\pi) = \pi$ , et si  $\pi \in \mathcal{A}'_{n,k,n1}$ , on définit  $\beta(\pi) = \bar{\pi}$ . Alors  $\beta(\pi) \in \mathcal{AD}_n$  et  $\beta(\pi)_1 - \beta(\pi)_2 = -(n - k + 1)$ .

**Théorème 88.** *Pour tous  $n \geq 1$  et  $k \in [n]$ , l'application  $\beta$  est une bijection entre  $\mathcal{A}'_{n,k}$  et  $\mathcal{AD}_{n,k}$ .*

En utilisant le Théorème précédent, on retrouve l'interprétation suivante de Poupard, prouvée dans [Pou97] par des relations de récurrence.

**Corollaire 89.** *La suite  $(\mathcal{AD}_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est une famille d'Entringer.*

Notons  $\mathcal{AD}'_{n,k}$  l'ensemble des permutations  $\pi \in \mathcal{AD}_n$  telles que le terme immédiatement avant 1 est  $k$ , si  $k \leq n-1$ , et  $\mathcal{AD}'_{n,n}$  l'ensemble des permutations  $\pi \in \mathcal{AD}_n$  telles que  $\pi_1 = 1$ .

On veut construire une bijection  $\rho$  entre  $\mathcal{A}_{n,k}$  et  $\mathcal{AD}'_{n,k}$ .

Si  $k = n$ , il suffit de définir pour  $\pi \in \mathcal{A}_{n,n}$ ,  $\rho(\pi) = \bar{\pi}$ . Alors,  $\rho(\pi) \in \mathcal{AD}'_{n,n}$ .

Supposons que  $k \leq n-1$ . L'ensemble  $\mathcal{A}_{n,k}$  peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints  $\mathcal{A}_{n,k,1n}$  qui est  $\mathcal{A}_{n,k} \cap \mathcal{AD}_n$  et  $\mathcal{A}_{n,k,n1} := \mathcal{A}_{n,k} \setminus \mathcal{A}_{n,k,1n}$ . Pour un ensemble ordonné  $I = \{a_1, \dots, a_n\}$  avec  $a_1 < \dots < a_n$ , on note  $\sigma_I$  la permutation :

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour une permutation  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$  sur l'ensemble ordonné  $I$ , notons  $\bar{\pi}$  la *permutation complémentaire sur  $I$* , qui est  $\bar{\pi} := \sigma_I \circ \pi$ , et  $\pi^R$  la *permutation retournée* :

$$\pi^R := \pi_n \pi_{n-1} \dots \pi_1.$$

Remarquons que lorsque  $I = [n]$ , la définition de permutation complémentaire coïncide avec celle vue dans la Sous-Section 5.4.2.

Alors, pour une permutation  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k}$ ,

- si  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k,1n}$ , on peut écrire  $\pi = \sigma_1 1 \sigma_2$ , alors, on définit  $\rho(\pi) = \sigma_1^R 1 \sigma_2$  ; puisque  $1 < \pi_1 > \pi_2$ ,  $\rho(\pi)$  est encore alternante, et le terme juste avant le 1 dans  $\rho(\pi)$  est  $\pi_1 = k$ .
- si  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k,n1}$ , on peut écrire  $\pi = \sigma_1 n \sigma_2$ , alors, on définit  $\rho(\pi) = \sigma_1^R 1 \bar{\sigma}_2$  ; puisque  $1 < \pi_1 > \pi_2$  et  $\bar{\sigma}_2$  est alternante,  $\rho(\sigma_1)$  est encore alternante, et le terme juste avant le 1 dans  $\rho(\pi)$  est  $\pi_1 = k$ .

**Théorème 90.** *Pour tous  $n \geq 1$  et  $k \in [n]$ , l'application  $\rho$  est une bijection entre  $\mathcal{A}_{n,k}$  et  $\mathcal{AD}'_{n,k}$ .*

*Démonstration.* Pour prouver que  $\rho$  est une bijection, il suffit de décrire l'application inverse de  $\rho$ . Soit  $\pi$  un élément de  $\mathcal{AD}_n$  tel que le terme immédiatement avant le 1 est  $k$ . Suivant la construction de  $\rho$ , on a :

- si  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k}$ , on écrit  $\pi = \tau_1 1 \tau_2$ , et alors,  $\rho^{-1}(\pi) = \tau_1^R 1 \tau_2$  ;
- si  $\pi \notin \mathcal{A}_{n,k}$ , on écrit  $\pi = \tau_1 1 \tau_2$ , et alors lors,  $\rho^{-1}(\pi) = \tau_1^R n \bar{\tau}_2$ . □

En utilisant le Théorème précédent, on retrouve l'interprétation suivante de Poupard, prouvée dans [Pou97] par des relations de récurrence.

**Corollaire 91.** *La suite  $(\mathcal{AD}'_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est une famille d'Entringer.*

Notons  $\mathcal{AD}''_{n,k}$  l'ensemble des permutations  $\pi \in \mathcal{AD}_n$  telles que le terme immédiatement après  $n$  est  $n+1-k$ , si  $k \leq n-1$ , et  $\mathcal{AD}''_{n,n}$  l'ensemble des permutations  $\pi \in \mathcal{AD}_n$  telles que  $\pi_n = n$ .

Notons  $\rho'$  l'application définie pour  $\pi \in \mathcal{AD}''_{n,k}$  par  $\rho'(\pi) = \overline{\pi^R}$ .

**Théorème 92.** *Pour tous  $n \geq 1$  et  $k \in [n]$ , l'application  $\rho'$  est une bijection entre  $\mathcal{AD}'_{n,k}$  et  $\mathcal{AD}''_{n,k}$ . Ainsi, la suite  $(\mathcal{AD}''_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est une famille d'Entringer.*

*Démonstration.* Il est clair que pour  $k \leq n-1$ ,  $\pi \in \mathcal{AD}_n$  a le  $k$  juste avant le 1 si et seulement si  $\rho'(\pi)$  a le  $n+1-k$  juste après le  $n$ .  $\square$

## 5.5 De nouvelles familles d'Entringer

### 5.5.1 Interprétations dans les G-mots et les R-mots

Une permutation  $\pi$  de  $I = \{a_1, \dots, a_n\}$  avec  $a_1 < \dots < a_n$  est appelée un *G-mot* si :

- (i)  $\pi_1 = a_n, \pi_n = a_{n-1}$ ,
- (ii)  $\pi_2 > \pi_{n-1}$  (if  $n \geq 4$ ).

De même, une permutation  $\pi$  de  $I$  est appelée un *R-mot* si la condition précédente (i) est vérifiée et si (ii) est remplacée par la condition :

- (ii')  $\pi_2 < \pi_{n-1}$  (if  $n \geq 4$ ).

Un G-mot (resp. un R-mot) est dit *primitif* si pour tout  $(i, j) \in [n]^2$ , ni le mot  $\pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_j$  ni le mot  $\pi_j \pi_{j-1} \dots \pi_i$  ne sont des G-mots (resp. des R-mots). On note respectivement par  $\mathcal{G}_n$  et  $\mathcal{R}_n$  les ensembles de G-mots primitifs sur  $[n]$  et ensembles de R-mots primitifs sur  $[n]$ . Par exemple, les G-mots dans  $\mathcal{G}_n$  sont :

$$634215, \quad 642315, \quad 623415, \quad 643215, \quad 624315,$$

et les R-mots dans  $\mathcal{R}_n$  sont :

$$621435, \quad 623145, \quad 614235, \quad 631245, \quad 624135.$$

Ces permutations ont été introduites dans [Mar06] avec le problème suivant. Soit  $I_n$  l'idéal des relations algébriques sur les pentes de toutes les droites qu'on peut former en plaçant  $n$  points dans le plan. Alors, suivant deux ordres distincts, l'idéal  $I_n$  est engendré par des monômes correspondants respectivement aux G-mots primitifs et aux R-mots primitifs.

Martin et Wagner ont prouvé [MW09] que  $E_n$  est le nombre de G-mots primitifs (resp. le nombre de R-mots primitifs) sur  $[n+2]$ . En réalité, ces résultats peuvent être raffinés aux nombres d'Entringer, en introduisant une statistique sur les G-mots et les R-mots.

Étant donné un G-mot primitif ou un R-mot primitif  $\pi$  sur  $[n+2]$ , on définit la *route* de  $\pi$  comme la suite  $(\alpha_i)$  définie par la procédure suivante :

- $\alpha_1 = n + 2 = \pi_1$ ,  $\alpha_2 = n + 1 = \pi_{n+2}$ ,
- pour  $k \geq 2$ , si  $\alpha_k = \pi_i$ , on définit  $A_k = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$ , et

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } \{\pi_{i-1}, \pi_{i+1}\} \subset A_k, \\ \max \left[ \begin{array}{l} \{\pi_j | j < i \text{ et } \pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_{i-1} \notin A_k\} \\ \cup \{\pi_j | j > i \text{ et } \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, \pi_j \notin A_k\} \end{array} \right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut représenter la route d'un G-mot ou d'un R-mot  $\pi$  comme un graphe sur les sommets  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  alignés sur une droite, avec un seul chemin partant de  $n$ , tracé toujours au-dessus de la droite et joignant, successivement, et si cela est possible sans croisement, les sommets  $n - 1, n - 2, \dots, 1$  (voir Figure 5.3 pour un exemple). Notons  $\mathcal{G}_{n,k}$  (resp.  $\mathcal{R}_{n,k}$ ) l'ensemble des G-mots primitifs  $\pi$  sur  $[n + 2]$  (resp. R-mots primitifs  $\pi$  sur  $[n + 2]$ ) tels que  $\alpha_{n+2} = n + 1 - k$ .

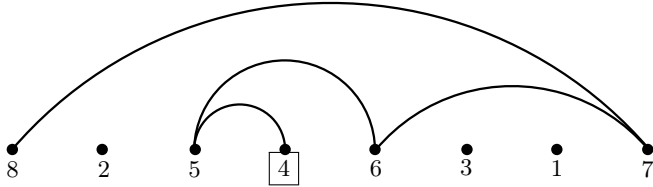


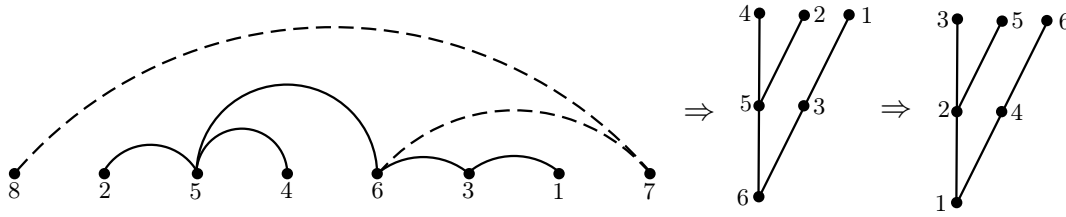
FIGURE 5.3 – La route du G-mot  $\pi = 82546317$

**Théorème 93.** *Les suites  $(\mathcal{G}_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  et  $(\mathcal{R}_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  sont des familles d'Entringer.*

*Démonstration.* On utilise la bijection  $\delta$  de  $\mathcal{G}_n$  vers  $\mathcal{T}_n$  décrite dans [MW09]. Pour  $\pi$  un G-mot primitif sur  $\{a_1, \dots, a_{n+2}$  avec  $a_1 < \dots < a_{n+2}$ , on note  $\pi'$  le mot  $\pi_2 \dots \pi_{n+1}$ . Si  $\pi'$  est un mot sur  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , avec  $a_1 < \dots < a_n$  et  $a_n = \pi'_k$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on définit  $T = \alpha(\pi')$  comme l'arbre enraciné sur le sommet  $a_1$ , duquel partent deux sous-graphes, qui sont  $\alpha(\pi'_1 \pi'_2 \dots \pi'_{k-1})$  et  $\alpha(\pi'_{k+1} \pi'_{k+2} \dots \pi'_n)$  (éventuellement un des deux peut être vide). L'arbre  $\delta(\pi) = \alpha(\pi')$  est un 0-1-2 arbre croissant et l'application  $\delta$  est une bijection de  $\mathcal{G}_n$  vers  $\mathcal{T}_n$  (voir [MW09] pour plus de détails).

De plus, il est facile de voir que les étiquettes le long du chemin minimal de  $T = \delta(\pi)$  sont successivement  $(n+1-a_1), (n+1-a_2), \dots, (n+1-a_m)$ , où  $a_1 \dots, a_m$  ( $a_1 > \dots > a_m$ ) sont les différentes valeurs qui apparaissent dans la route de  $\pi$ . Ainsi, l'extrémité du chemin minimal de  $T$  est  $k$ . Donc,  $\delta$  est une bijection entre  $\mathcal{G}_{n,k}$  et  $\mathcal{T}_{n,k}$ .

Par exemple, on peut construire l'arbre correspondant au G-mot  $\pi = 82546317$  :



Le résultat analogue pour les R-mots peut être prouvé en utilisant la même méthode avec la bijection  $\delta'$  entre  $\mathcal{R}_n$  et  $\mathcal{T}_n$  décrite dans [MW09].  $\square$

### 5.5.2 Interprétations dans les U-mots

**Définition 94.** Un U-mot de longueur  $n$  est une suite  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que  $u_1 = 1$  et  $\forall i \in \{2, \dots, n\}, u_i + u_{i-1} \leq i$ . On note  $\mathcal{U}_n$  l'ensemble des U-mots de longueur  $n$ .

Par exemple, les U-mots de longueur 4 sont :

$$1111, \quad 1112, \quad 1113, \quad 1121, \quad 1122.$$

On note  $\mathcal{U}_{n,k}$  l'ensemble des U-mots  $(u_i) \in \mathcal{U}_n$  tels que  $u_n = n + 1 - k$ .

**Théorème 95.** La suite  $(\mathcal{U}_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est une famille d'Entringer.

*Démonstration.* Pour  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k}$ , on pose  $\gamma(\pi) = w^R$ , où  $w = w_1 \dots w_n$  est le mot défini par :

$$w_i = \begin{cases} \#\{j \geq \pi_i, j \notin \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}\}\}, & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \#\{j \leq \pi_i, j \notin \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}\}\}, & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Par exemple, si  $\pi = 6351724 \in \mathcal{A}_{7,6}$ , alors le mot  $w$  est calculé comme suit :

- $\{j \geq 6\} = \{6, 7\}$ , so  $w_1 = 2$ ,
- $\{j \leq 3, j \neq 6\} = \{1, 2, 3\}$ , so  $w_2 = 3$ ,
- $\{j \geq 5, j \notin \{3, 6\}\} = \{5, 7\}$ , so  $w_3 = 2$ ,
- $\{j \leq 1, j \notin \{3, 5, 6\}\} = \{1\}$ , so  $w_4 = 1$ ,
- $\{j \geq 7, j \notin \{1, 3, 5, 6\}\} = \{7\}$ , so  $w_5 = 1$ ,
- $\{j \leq 2, j \notin \{1, 3, 5, 6, 7\}\} = \{2\}$ , so  $w_6 = 1$ ,
- $\{j \geq 4, j \notin \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}\} = \{4\}$ , so  $w_7 = 1$ .

Ainsi,  $w = 2321111$  et  $\gamma(\pi) = 1111232$ .

On montre que l'application  $\gamma$  est une bijection entre  $\mathcal{A}_{n,k}$  et  $\mathcal{U}_{n,k}$ . Suivant la construction,  $\gamma(\pi)_n = w_1 = n+1 - \pi_1 = n+1 - k$ . De plus, quand le terme  $\gamma(\pi)_i = w_{n+1-i}$  est écrit,  $n-i$  éléments ont été lus dans la permutation  $\pi$  auparavant ; ainsi le nombre d'éléments comptés par  $\gamma(\pi)_i$  doit être inférieur à  $i$ . De plus, les nombres comptés par  $\gamma(\pi)_{i-1}$  et  $\gamma(\pi)_i$  sont parmi les  $n-i$  éléments qui n'ont pas été lus dans  $\pi$  et sont deux ensembles disjoints puisque  $\pi$  est alternante. Ainsi,  $\gamma(\pi)_i + \gamma(\pi)_{i-1}$  doit être inférieur à  $i$ . Enfin, on a montré que  $\gamma(\pi) \in \mathcal{U}_{n,k}$ .

Réciproquement, si  $u \in \mathcal{U}_{n,k}$ , la permutation  $\pi = \gamma^{-1}(u) \in \mathcal{A}_{n,k}$  peut être retrouvée avec :

- $\pi_1 = n + 1 - u_n$ ,
- $\forall n \geq 1, \pi_{2i}$  est le  $u_{n-2i+1}$ -ème plus petit élément dans  $[n] \setminus \{\pi_1, \dots, \pi_{2i-1}\}$ ,
- $\forall n \geq 1, \pi_{2i+1}$  est le  $u_{n-2i}$ -ème plus grand élément dans  $[n] \setminus \{\pi_1, \dots, \pi_{2i}\}$ .  $\square$

Notons  $\mathcal{U}'_{n,k}$  l'ensemble des U-mots  $(u_i) \in \mathcal{U}_n$  tels que  $u_{n-1} + u_n = k$ .

**Théorème 96.** *La suite  $(\mathcal{U}'_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  est une famille d'Entringer.*

*Démonstration.* Il y a deux méthodes pour prouver le résultat précédent.

L'application  $\gamma$  décrite précédemment induit une bijection entre  $\mathcal{A}'_{n,k}$  et  $\mathcal{U}'_{n,k}$ . Pour  $\pi \in \mathcal{A}'_{n,k}$ , il existe au moins un  $j \in [n]$  tel que  $\pi \in \mathcal{A}_{n,j}$ , donc on peut bien définir  $v = \gamma(\pi) \in \mathcal{U}_{n,j} \subset \mathcal{U}_n$ . Il suffit de montrer que  $v \in \mathcal{U}'_{n,k}$ . Dans la construction de  $\gamma(\pi)$ ,  $v_n$  est le nombre d'éléments qui sont plus grands que  $\pi_1$ , et  $v_{n-1}$  est le nombre d'éléments qui sont plus petits que  $\pi_2$ . Donc  $v_n = n + 1 - \pi_1$ ,  $v_{n-1} = \pi_2$ , et  $v_{n-1} + v_n = n + 1 - (\pi_1 - \pi_2) = k$  puisque  $\pi \in \mathcal{A}'_{n,k}$ .

En réalité, il est aussi très simple d'exhiber une bijection  $\alpha : \mathcal{U}_{n,k} \rightarrow \mathcal{U}'_{n,k}$ . Pour  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}_{n,k}$ , on note  $\alpha(u) = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, n + 1 - u_{n-1} - u_n)$ . Puisque  $u \in \mathcal{U}_{n,k}$ ,  $u_n - u_{n-1} \leq n + 1$ , donc on a  $\alpha(u) \in \mathcal{U}_n$ . De plus, le dernier élément est

$$\alpha(u)_n = n + 1 - u_{n-1} - (n + 1 - k) = k - u_{n-1} = k - \alpha(u)_{n-1},$$

donc  $\alpha(u) \in \mathcal{U}'_{n,k}$ . L'application  $\alpha$  est alors clairement une bijection entre  $\mathcal{U}_{n,k}$  et  $\mathcal{U}'_{n,k}$ .  $\square$

## 5.6 Liste des bijections

Dans ce paragraphe, nous listons les douze interprétations de familles d'Entringer ainsi que les bijections décrites dans ce chapitre :

1. la permutation alternante descendante  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k}^-$  telle que  $\text{FIRST}(\pi) = k$ ,
2. la suite codante  $\Delta \in \mathcal{D}_{n,k}$ , obtenue par  $\Delta = \psi(\pi)$ , où  $\psi$  est la bijection décrite dans la Section 5.2, donc  $k$  est le premier élément lu dans  $\Delta$ ,

3. l'arbre binaire croissant  $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ , obtenu par  $T = \varphi(\Delta)$ , où  $\varphi$  est la bijection décrite dans la Section 5.3, donc  $k$  est l'extrémité du chemin minimal de  $T$ ,
4. l'arbre binaire croissant  $T' \in \mathcal{T}'_{n,k}$ , obtenu par  $T' = \varphi'(T)$ , où  $\varphi'$  est la bijection décrite dans la Section 5.4.1, tirée de [KPP94, §6], donc  $k - 1$  est le père de  $n$  dans  $T'$ ,
5. la permutation alternante descendante  $\sigma \in \mathcal{A}'_{n,k}$ , obtenue par  $\sigma = \theta(\pi)$ , où  $\theta$  est la bijection décrite dans la sous-section 5.4.2, donc  $k = n + 1 - \sigma_1 + \sigma_2$ ,
6. la permutation alternante directe  $\sigma' \in \mathcal{AD}_{n,k}$ , obtenue par  $\sigma' = \beta(\sigma)$ , où  $\beta$  est la bijection décrite dans la sous-section 5.4.3, donc  $k = n + 1 - |\sigma_1 - \sigma_2|$ ,
7. la permutation alternante directe  $\tau_1 \in \mathcal{AD}'_{n,k}$ , obtenue par  $\tau_1 = \rho(\pi)$ , où  $\rho$  est la bijection décrite dans la sous-section 5.4.3, donc  $k$  est le terme immédiatement avant 1 (ou  $n$  si  $\tau_1$  commence par 1),
8. la permutation alternante directe  $\tau_2 \in \mathcal{AD}''_{n,k}$ , obtenue par  $\tau_2 = \rho'(\tau_2)$ , où  $\rho'$  est la bijection décrite dans la sous-section 5.4.3, donc  $n + 1 - k$  est le terme immédiatement après  $n$  (ou 1 si  $\tau_2$  se termine par  $n$ ),
9. le G-mot  $\pi' \in \mathcal{G}_{n,k}$ , obtenu par  $\pi' = \delta^{-1}(T)$ , où  $\delta$  est la bijection décrite dans la sous-section 5.5.1, donc  $n + 1 - k$  est l'extrémité de la route de  $\pi'$ ,
10. le R-mot  $\pi'' \in \mathcal{R}_{n,k}$ , obtenu par  $\pi'' = (\delta')^{-1}(T)$ , où  $\delta'$  est la bijection décrite dans la sous-section 5.5.1, donc  $n + 1 - k$  est l'extrémité de la route de  $\pi''$ ,
11. la suite  $u \in \mathcal{U}_{n,k}$ , obtenue par  $u = \gamma(\pi)$ , où  $\gamma$  est la bijection décrite dans la sous-section 5.5.2, donc  $n + 1 - k$  est le dernier élément de  $u$ ,
12. la suite  $v \in \mathcal{U}'_{n,k}$ , obtenue par  $v = \gamma(\sigma) = \alpha(u)$ , où  $\alpha$  et  $\gamma$  sont les bijections décrites dans la sous-section 5.5.2, donc  $k$  est la somme des deux derniers éléments de  $v$ .

On peut résumer les bijections de ce chapitre dans le diagramme de la Figure 5.4, où sur la gauche, on rassemble les modèles concernant les permutations alternantes, et sur la droite, on rassemble toutes les modèles concernant les structures arborescentes.

Dans la Figure 5.5, on résume les douze interprétations pour  $E_{4,k}$ ,  $k \in \{2, 3, 4\}$ . Dans chaque colonne, les éléments correspondants sont décrits via les différentes bijections mentionnées dans le chapitre. De plus, dans la table, on encadre la statistique  $k = \pi_1$  si  $\pi \in \mathcal{A}_{n,k}$  et les statistiques correspondantes dans les autres modèles.



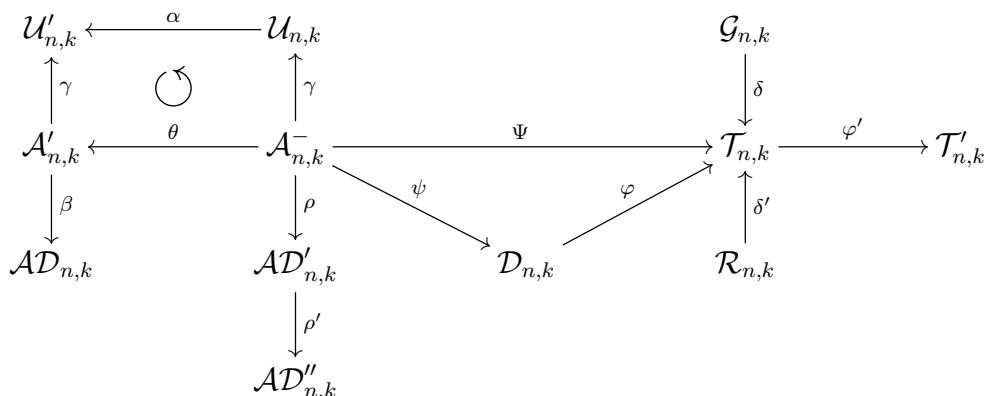


FIGURE 5.4 – Les bijections mentionnées dans ce chapitre

## 5.7 De nouvelles relations sur les nombres d'Entringer

Poupard [Pou82] avait démontré que  $E_{n,k}$  était le cardinal de  $\mathcal{T}_{n,k}$  en montrant, simultanément pour le modèle des permutations alternantes et des arbres croissants, la formule suivante :

$$E_{n+1,k+1} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} E_j \sum_{i=1}^k E_{n-j,i}. \quad (5.3)$$

Cette relation a une interprétation combinatoire simple dans le cadre des arbres croissants. En effet, il suffit de partitionner l'ensemble  $E_{n+1,k+1}$  selon le nombre  $j$  d'éléments constituant le sous-arbre  $T_1$  enraciné au sommet frère de  $k+1$  (si ce frère existe). Le nombre  $j$  varie bien de 0 à  $(n+1) - (k+1)$ , puis on forme un arbre croissant sur ces  $j$  éléments, et les  $n-j$  éléments de  $T \setminus \{T_1 \cup \{k+1\}\}$  doivent former un arbre croissant finissant par le père de  $k+1$ , qui est donc un entier  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Cependant, la relation (5.3) n'admet pas d'interprétation équivalente dans le modèle des permutations alternantes. Poupard avait démontré cette formule à l'aide d'une preuve analytique, en observant les fonctions génératrices diagonales de la table de Seidel-Kempner. Il est donc remarquable qu'il n'y ait pas d'interprétation simple pour cette décomposition dans  $\mathcal{A}_n$ .

Néanmoins, à l'issue de discussions avec Féray [Fer10], plusieurs autres relations entre les nombres d'Entringer ont été découvertes.

|      | $k$                                | 2                                | 3                                |  | 4  |  |
|------|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|--|--|
| (1)  | $\pi \in \mathcal{A}_{4,k}$        | $\boxed{2}143$                   | $\boxed{3}241$                   | $\boxed{3}142$                               | $\boxed{4}231$                               | $\boxed{4}132$   |
| (2)  | $\Delta \in \mathcal{D}_{4,k}$     | $(\boxed{2}, 1)^*$<br>$(4, 3)^*$ | $(\boxed{3}, 2)^*$<br>$(4, 1)^*$ | $(\boxed{3}, 2)$<br>$(2, 1)^*$<br>$(4, 3)^*$ | $(\boxed{4}, 3)$<br>$(3, 2)^*$<br>$(4, 1)^*$ | $(\boxed{4}, 3)$<br>$(3, 2)$<br>$(2, 1)^*$<br>$(4, 3)^*$ |
| (3)  | $T \in \mathcal{T}_{4,k}$          |                                  |                                  |  |  |  |
| (4)  | $T' \in \mathcal{T}'_{4,k}$        |                                  |                                  |  |  |  |
| (5)  | $\sigma \in \mathcal{A}'_{4,k}$    | $\underbrace{41}_{\boxed{3}}32$  | $\underbrace{42}_{\boxed{2}}31$  | $\underbrace{31}_{\boxed{2}}42$              | $\underbrace{32}_{\boxed{1}}41$              | $\underbrace{21}_{\boxed{1}}43$                          |
| (6)  | $\sigma' \in \mathcal{DAP}_{4,k}$  | $\underbrace{14}_{\boxed{3}}23$  | $\underbrace{13}_{\boxed{2}}24$  | $\underbrace{31}_{\boxed{2}}42$              | $\underbrace{23}_{\boxed{1}}14$              | $\underbrace{21}_{\boxed{1}}43$                          |
| (7)  | $\tau_1 \in \mathcal{DAP}'_{4,k}$  | $\boxed{2}143$                   | $2\boxed{3}14$                   | $\boxed{3}142$                               | $\boxed{(4)}1324$                            | $\boxed{(4)}1423$  |
| (8)  | $\tau_2 \in \mathcal{DAP}''_{4,k}$ | $214\boxed{3}$                   | $14\boxed{2}3$                   | $314\boxed{2}$                               | $1324\boxed{(1)}$                            | $2324\boxed{(1)}$  |
| (9)  | $\pi' \in \mathcal{G}_{4,k}$       | $6\boxed{3}4215$                 | $64\boxed{2}315$                 | $6\boxed{2}3415$                             | $6432\boxed{1}5$                             | $6243\boxed{1}5$   |
| (10) | $\pi'' \in \mathcal{R}_{4,k}$      | $6214\boxed{3}5$                 | $6\boxed{2}3145$                 | $614\boxed{2}35$                             | $63\boxed{1}245$                             | $624\boxed{1}35$   |
| (11) | $u \in \mathcal{U}_{4,k}$          | $111\boxed{3}$                   | $112\boxed{2}$                   | $111\boxed{2}$                               | $112\boxed{1}$                               | $111\boxed{1}$   |
| (12) | $v \in \mathcal{U}'_{4,k}$         | $11 \underbrace{11}_{\boxed{2}}$ | $11 \underbrace{21}_{\boxed{3}}$ | $11 \underbrace{12}_{\boxed{3}}$             | $11 \underbrace{22}_{\boxed{4}}$             | $11 \underbrace{13}_{\boxed{4}}$                         |

FIGURE 5.5 – Douze interprétations pour  $E_{4,k}$ ,  $1 \leq k \leq 4$

**Théorème 97.** *Pour tous entiers  $n$  et  $k$ ,*

$$E_{n+1,k+1} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ n-j \text{ impair}}} \sum_{i=1}^k \binom{n-k}{j-k+i} \binom{k-1}{k-i} E_j E_{n-j,i}. \quad (5.4)$$

*Démonstration.* On prouve cette identité dans le modèle des permutations alternantes. Soit  $\sigma \in \mathcal{A}_{n+1,k+1}$ . Vue l'alternance de  $\sigma$ , on sait que 1 sera l'image par  $\sigma$  d'un nombre pair; on peut donc supposer que  $\sigma(n-j+1) = 1$  pour  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  avec  $n-j$  impair. Notons alors  $k-i$  le nombre d'éléments plus petits que  $k+1$  parmi les  $j$  éléments  $\sigma(n-j+2), \dots, \sigma(n+1)$ . Choisir une telle permutation revient donc à choisir  $k-i$  éléments parmi  $\{2, \dots, k\}$  ( $i = 1..k$ ), et  $j-k+i$  éléments parmi  $k+2, \dots, n+1$ , puis former une permutation alternante descendante avec ces  $j$  éléments, et enfin avec les  $n-j$  éléments restants (sans le 1) former une permutation alternante descendantes commençant par  $i$  (en renormalisant).  $\square$

**Théorème 98.** *Pour tous entiers  $n$  et  $k$ ,*

$$E_{n+1,k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^k \binom{n-k}{j-k+i} \binom{k-2}{k-i} E_j E_{n-j,i}. \quad (5.5)$$

*Démonstration.* On prouve cette identité dans le modèle des arbres croissants. Soit  $T \in \mathcal{T}_{n+1,k+1}$ . On décompose  $T$  en trois sous-arbres : la racine 1, un sous-arbre  $A$  contenant 2 et tous ses descendants (qui contient donc la chaîne principale avec les  $k+1$  à son extrémité), et  $B$  le sous-arbre restant (éventuellement vide). Notons  $j$  le nombre de sommets de  $B$ , (on a bien  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ), et  $k-i$  le nombre d'éléments plus petits que  $k+1$  parmi les  $j$  éléments de  $B$ . Choisir un tel arbre revient donc à choisir  $k-i$  éléments parmi  $\{3, \dots, k$  ( $i = 1..k$ ), et  $j-k-i$  éléments parmi  $k+2, \dots, n+1$ , puis former un 0-1-2 arbre croissant avec ces  $j$  éléments, et enfin avec les  $n-j$  éléments restants (sans la racine) former un 0-1-2 arbre croissant dont l'extrémité termine par  $i$  (en renormalisant).  $\square$

On peut remarquer qu'il n'est pas évident que les deux expressions trouvées pour  $E_{n+1,k+1}$  d'après les relations (5.4) and (5.5) soient égales. En effet, une des sommes porte sur tous les entiers  $j$  de 1 à  $n$ , tandis que l'autre somme ne garde qu'un entier sur deux.

De plus, l'équation (5.4) n'a pas d'interprétation évidente dans le modèle des arbres, et l'équation (5.5) n'a pas d'interprétation dans le modèle des permutations. Ce problème reste donc encore ouvert.

---

## Conclusion et perspectives

---

Certains problèmes soulevés dans ce mémoire restent encore à ce jour ouverts, certains semblant plus abordables que d'autres au premier abord. Nous allons revenir sur les principaux problèmes ouverts qui forment ainsi de nouvelles perspectives de recherche pour l'avenir.

Enfin, nous allons voir que les deux parties qui constituent ce recueil ne sont pas si éloignées l'une de l'autre et peuvent très bien prochainement être liées de manière plus équivoque à l'aide des *nombres de Genocchi*.

### 5.8 Problèmes ouverts

**Problème 1.** Les coefficients des nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce dans la base  $(z + 1)^i$  introduits dans le paragraphe 1.2.3 ont une interprétation claire dans le modèle des partitions signées. Il serait bon de savoir s'il est possible de trouver également un sens à ces coefficients dans le modèle des couples de quasi-permutations. On pourrait alors peut-être interpréter également les formules énoncées dans le Théorème 11 dans le modèle des quasi-permutations.

**Problème 2.** Comme nous l'avons souligné au chapitre 1, les fonctions génératrices diagonales des coefficients de Jacobi-Stirling de seconde espèce peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sum_{n \geq 0} p_{n,k}^{(i)} t^n = \frac{A_{k,i}(t)}{(1-t)^{3k-i+1}},$$

où  $A_{k,i}(t)$  est un polynôme en  $t$  de degré  $2k - i$ , vérifiant  $A_{k,i}(0) = 0$ . Il semblerait que les coefficients de  $A_{k,i}$  soient tous des entiers strictement positifs. Dans le cas des nombres de Stirling, Gessel-Stanley [GS78] ont déterminé une interprétation combinatoire de ces coefficients et Egge [Egg10] a fait de même dans le cas des

nombre de Legendre-Stirling. Il semblerait naturel de généraliser ces résultats pour les coefficients de  $A_{k,i}$  pour tous  $k$  et  $i$  tels que  $0 \leq i \leq k$ . Cependant la formule de récurrence 2.19 semble très difficile à interpréter et n'assure même pas, par sa forme, que les coefficients soient tous positifs.

**Problème 2'.** Les fonctions génératrices diagonales des coefficients de Jacobi-Stirling de première espèce induisent un problème analogue, car elles font apparaître des polynômes, dont les coefficients semblent être des entiers relatifs de coefficients de signe constant. Il serait utile de trouver une interprétation de ces coefficients généralisant les résultats de [GS78, Egg10].

**Problème 3.** Dans le cadre des  $r$ -nombre de Jacobi-Stirling de première espèce, il nous apparaît à première vue difficile d'établir une formule claire pour les nombres  $b_{n,r,r}^{(i)}$  et  $b_{n,n-k,r}^{(i)}$  pour tout entier  $i$ , sauf dans le cas où ces nombres se ramènent aux  $r$ -nombre de Stirling ou aux  $r$ -nombre factoriels centraux. Une possibilité serait d'explicitier un autre modèle pour les nombre de Jacobi-Stirling de première espèce, où la statistique du nombre d'éléments saillants deviendrait une autre statistique plus facilement manipulable.

**Problème 4.** Nous avons vu que la théorie des  $q$ -nombre d'Entringer est relativement facile dans le cadre des permutations alternantes pour la statistique d'inversion. Nous avons obtenu une bijection explicite avec le modèle des 0-1-2 arbres croissants ; il est alors naturel de se demander s'il y aurait un  $q$ -analogue des nombre d'Entringer dans les arbres qui coïnciderait avec la statistique d'inversion des permutations alternantes. La notion d'inversion dans les arborescentes a été assez développée (voir par exemple la thèse de Chauve [Cha00]) mais n'a pas vraiment de sens si on se place dans le cadre des arbres croissants. Il faudrait donc définir une nouvelle statistique qui soit mieux adaptée à la situation.

**Problème 5.** Comme nous l'avons précisé dans le chapitre 5, la décomposition triangulaire des nombre d'Entringer possède un  $(p, q)$ -analogue avec les statistiques d'inversions et de la présence du motif 31-2 dans la permutation. Une question naturelle est de savoir si on peut généraliser toutes les formules de récurrence énoncées dans le cas  $q = 1$  ou  $q$  quelconque au cadre des  $p$ -analogues, voire  $(p, q)$ -analogues, avec les résultats connus sur ces motifs. En effet, la théorie des motifs de permutations est en pleine expansion et pourrait apporter de nombreux résultats intéressants à notre étude.

**Problème 6.** Etant donné que nous avons renforcé les liens entre les interprétations combinatoires des nombre  $E_{n,k}$  dans le modèle des arbres et des permutations, il serait utile de donner un sens aux équations :

$$E_{n+1,k+1} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} E_j \sum_{i=1}^k E_{n-j,i},$$

et

$$E_{n+1,k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^k \binom{n-k}{j-k+i} \binom{k-2}{k-i} E_j E_{n-j,i},$$

dans le modèle des permutations alternantes, et de donner un sens à l'équation :

$$E_{n+1,k+1} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ n-j \text{ impair}}} \sum_{i=1}^k \binom{n-k}{j-k+i} \binom{k-1}{k-i} E_j E_{n-j,i},$$

dans le modèle des arbres coissants.

**Problème 7.** Considérons les *nombre tangents réduits*  $t_n = E_{2n+1}/2^n$ . Poupard [Pou89] a prouvé que  $t_n$  est en réalité le nombre de 0-2 arbres croissants (i.e. les arbres dans  $\mathcal{T}_n$  pour lesquels chaque sommet a seulement 0 ou 2 fils). Cependant, il semble qu'il n'y ait pas d'interprétation analogue pour  $t_n$  dans les permutations alternantes. Par ailleurs, si  $t_{n,k}$  représente le nombre de 0-2 arbres croissants tels que l'extrémité du chemin minimal est  $k$ , alors la suite  $(t_{n,k})$  est de manière évidente un raffinement de  $t_n$  comme les nombres d'Entringer en sont un pour les nombres d'Euler.

Notons  $t'_n$  (resp.  $t'_{n,k}$ ) le nombre d'*arrangements à paires séparées* de  $[n]$ , qui sont des arrangements  $\sigma$  du multi-ensemble  $\{0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$  tels que  $\sigma(1) = n$  (resp.  $\sigma(1) = \sigma(k+1) = n$ ) et, entre les deux apparitions de  $i$  dans  $\sigma$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ), le nombre  $i+1$  apparaît exactement une fois.

Récemment, Graham et Zang [GZ08] ont prouvé que pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $t'_{n,k} = t_{n,k}$ . En particulier,  $t'_n = t_n$ . Cependant, il n'y a aucune preuve bijective entre le modèle de Poupard et le modèle de Graham et Zang. Signalons également que récemment une  $q$ -généralisation du modèle des arrangements à paires séparées a été construit par [FH09] avec la notion de doublons.

## 5.9 Les nombres de Genocchi

Les *nombre de Genocchi de première espèce*  $(G_{2n})_{n \geq 1}$  peuvent être définis par leur fonction génératrice :

$$\frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n \geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Ces nombres ont été étudiés par Dumont [Dum74] et sont liés à la fois aux nombres factoriels centraux  $U(n, k)$  par la formule :

$$G_{2n+2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} (k!)^2 U(n, k),$$

mais également aux nombres tangents par la relation :

$$G_{2n} = \frac{n}{2^{2n-2}} E_{2n-1}.$$

Les nombres de Genocchi ont des interprétations combinatoires intéressantes [Dum74] puisque  $G_{2n}$  est le nombre de permutations  $\sigma$  d'ordre  $2n-1$  telles que  $\sigma(i+1) > i$  si  $i$  est impair, et  $\sigma(i+1) < i$  si  $i$  est pair [Dum74]. Cependant, le problème est toujours ouvert de trouver un sens combinatoire à l'identité  $2^{2n-2}G_{2n} = nE_{2n-1}$ .

Les *nombres de Genocchi de seconde espèce*  $(G'_{2n})_{n \geq 1}$  peuvent être définis par leur interprétation combinatoire :  $G'_{2n}$  est le nombre de permutations  $\sigma$  de  $[2n-2]$  telles que  $\sigma(i) > i$  si  $i$  est impair et  $\sigma(i) < i$  si  $i$  est pair.

Les nombres de Genocchi de deux espèces sont reliés par une table triangulaire :

|   |     |     |     |     |     |   |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|---|
|   | 1   |     |     |     |     |   |
| → | 1   | 1   |     |     |     |   |
|   | 2   | 1   |     | ←   |     |   |
| → | 2   | 3   | 3   |     |     |   |
|   | 8   | 6   | 3   |     | ←   |   |
| → | 8   | 14  | 17  | 17  |     |   |
|   | 56  | 48  | 34  | 17  |     | ← |
| → | 56  | 104 | 138 | 155 | 155 |   |
|   | 608 | 552 | 448 | 310 | 155 | ← |

avec des relations faciles, proches de la table de Seidel-Kempner. Plus précisément, les nombres  $g_{n,k}$  de cette table vérifient les relations :

$$g_{2n,k} = g_{2n,k-1} + g_{2n-1,k}, \quad g_{2n+1,k} = g_{2n+1,k+1} + g_{2n,k},$$

(voir [Kre97] pour plus de détails). Dans cette table, les nombres de la première colonne sont les nombres de Genocchi de seconde espèce, alors que les nombres sur le bord droit sont les nombres de Genocchi de première espèce.

Kreweras et ensuite Ehrenborg-Steingrímsson [Kre97, ES00] ont remarqué des relations entre les nombres de table de Genocchi et les permutations selon leur premier terme. Cependant, il existe des  $q$ -analogues des nombres de Genocchi [Cig09, ZZ06], et on peut définir des  $q$ -généralisations de la table de Genocchi. Zeng et Zhou ont des interprétations combinatoires de chaque valeur de la table en termes de statistiques sur les pistolets alternants. Il serait intéressant de trouver des résultats plus proches de ceux des nombres tangents-sécants, en exprimant chaque valeur en termes de statistiques sur les permutations alternantes selon leur premier (ou dernier) terme. Cela fournirait une analogie avec notre travail sur les permutations alternantes quelconques.

Signalons que les nombres de Genocchi sont liés à d'autres problèmes combinatoires récents, comme la théorie des tableaux alternatifs et des polynômes

de Dumont Foata [JV10], ou celle des fonctions symétriques non-commutatives [HNTT09].

## 5.10 Les matrices d'Euler-Seidel

Soit  $(b_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres (ou plus généralement des éléments dans un anneau commutatif). On appelle *matrice d'Euler-Seidel* associée à  $(b_n)$  la suite double  $(b_{n,k})_{n,k \geq 0}$  donnée par :

$$b_{n,0} = b_n \quad (n \geq 0), \quad b_{n,k} = b_{n,k-1} + b_{n+1,k-1} \quad (n \geq 0, k \geq 1). \quad (5.6)$$

La *suite initiale* est la suite  $(b_{n,0})_{n \geq 0} = (b_n)_{n \geq 0}$ . La *suite finale* est la suite  $(b_{0,n})_{n \geq 0}$ .

Dans [Dum95], Dumont rappelle les formules impliquées par la matrice d'Euler-Seidel : relations de récurrence, liens avec les fonctions génératrices ordinaires ou exponentielles, et donne finalement plusieurs exemples pour illustrer la théorie.

Si on prend pour suite initiale les nombres tangents signés, i.e.

$$b_{0,0} = 1, \quad b_{2n,0} = 0, \quad b_{2n-1,0} = (-1)^n a_{2n-1} \quad (n \geq 1),$$

alors on obtient comme suite finale les nombres sécants signés :  $b_{0,2n} = (-1)^n a_{2n}$ ,  $b_{0,2n-1} = 0$  ( $n \geq 1$ ). De manière équivalente, si on commence cette fois par les nombres sécants signés, on réobtient les nombres tangents signés pour suite finale.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -16 & -16 & \\ -1 & 1 & 4 & -14 & -32 & & \\ 0 & 5 & -10 & -46 & & & \\ 5 & -5 & -56 & & & & \\ 0 & -61 & & & & & \\ -61 & & & & & & \end{array}$$

En réalité, la table de Kempner et la table de Genocchi sont simplement des cas particuliers de matrices d'Euler-Seidel, écrites d'une manière plus simple, en enlevant les signes et écrivant les éléments dans des positions différentes.

Puisque les formules décrites dans [Dum95] sont vraies pour des polynômes, il serait intéressant d'écrire la table pour les polynômes eulériens généralisés, avec d'autres statistiques classiques plutôt que seulement le nombre d'inversions. On pose

$$c_n(q, x, y) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x^{\text{fix}(\sigma)} y^{\text{exc}(\sigma)} q^{\text{maj}(\sigma)},$$

$$c_{n,k}(q, x, y) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,k}} x^{\text{fix}(\sigma)} y^{\text{exc}(\sigma)} q^{\text{maj}(\sigma)},$$



où  $\mathcal{S}_n$  (resp.  $\mathcal{S}_{n,k}$ ) désigne l'ensemble des permutations  $\sigma$  d'ordre  $n$  (resp. d'ordre  $n$  telles que  $\sigma(n) = k$ ), et pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,

$$\text{fix}(\sigma) = \sum_{i=1}^n \chi(\sigma(i) = i),$$

$$\text{exc}(\sigma) = \sum_{i=1}^n \chi(\sigma(i) > i),$$

et

$$\text{maj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1)).$$

En fait, Foata et Han [FH08] ont remarqué un lien entre les nombres  $q$ -tangents et les nombres  $q$ -sécants et les polynômes eulériens comme suit :

$$\begin{aligned} c_{2n+1} \left( 1, -\frac{1}{q}, q \right) &= (-1)^n a_{2n+1}(q), & c_{2n} \left( 1, -\frac{1}{q}, q \right) &= 0, \\ c_{2n+1} \left( 0, -\frac{1}{q}, q \right) &= 0, & c_{2n+1} \left( 0, -\frac{1}{q}, q \right) &= (-1)^n a_{2n}(q). \end{aligned}$$

Ainsi, si on écrit la table des nombres  $c_{n,k}$ , on obtient des  $(x, y, q)$ -versions des nombres tangents et sécants sur les côtés de la table. Un problème ouvert serait de trouver d'intéressantes formules entre les nombres  $c_{n,k}$  comme celles décrites dans le Chapitre 4, et de fournir des interprétations combinatoire pour de telles relations, des formules qui permettraient de retrouver celles de la table de Kempner en spécialisant les valeurs de  $x$ ,  $y$  and  $q$  et peut-être établir un lien avec la table de Genocchi. D'intéressants résultats dans [CHZ97] avec les matrices de  $q$ -Euler-Seidel pourraient être utiles.

---

## Bibliographie

---

- [And79] D. André, *Développement de  $\sec x$  et  $\tan x$* , Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 88 (1879), p.965–979.
- [And81] D. André, *Sur les permutations alternées*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 7 (1881), p.167–184.
- [AL09] G. E. Andrews et L. L. Littlejohn, *A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers*, Proceedings of the American Mathematical Society, 137 (2009), p.2581–2590.
- [AGL09] G. E. Andrews, W. Gawronski et L. L. Littlejohn, *The Legendre-Stirling numbers*, submitted (2009).
- [Arn91] V. I. Arnold, *Bernoulli-Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics*, Duke Mathematic Journal, 63 (1991), p.537–555.
- [BHPSD07] P. Blasiak, A. Horzela, K. A. Penson, A. I. Solomon et G. H. E. Duchamp, *Combinatorics and Boson normal ordering : A gentle introduction*, American Journal of Physics, 75 (2007), p.639–646.
- [Bro84] A. Z. Broder, *The  $r$ -Stirling numbers*, Discrete Mathematics, 49 (1984) p.241–259.
- [Cal05] D. Callan, *A note on downup permutations and increasing 0-1-2 trees*, preprint (2009).
- [Car73] L. Carlitz, *Permutations with prescribed pattern*, Mathematische Nachrichten, 58 (1973), p.31–53.
- [Cha00] C. Chauve, *Structures arborescentes, problèmes algorithmiques et combinatoires*, Thèse de doctorat (2000).

- [Che08] D. Chebikin, *Variations on descents and inversions in permutations*, Electronic Journal of Combinatorics, 15 (2008), no. 1, Research Paper 132, 34 pages.
- [Cig09] J. Cigler, *q-Fibonacci polynomials and q-Genocchi numbers*, preprint (2009).
- [CHZ97] R. J. Clarke, G. -N. Han et J. Zeng, *A combinatorial interpretation of the Seidel generation of q-derangement numbers*, Annals of Combinatorics, 4 (1997), p.313–327.
- [Com74] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, Boston, Dordrecht (1974).
- [Don75] R. Donaghey, *Alternating permutations and binary increasing trees*, Journal of Combinatorial Theory Series A, 18 (1975), p.141–148.
- [Dum74] D. Dumont, *Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi*, Duke Mathematical Journal, 41 (1974), p.305–318.
- [Dum81] D. Dumont, *Matrices d'Euler-Seidel*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B05c (1981), 25 pp.
- [Dum95] D. Dumont, *Further triangles of Seidel-Arnold type and continued fractions related to Euler and Springer numbers*, Advances in Applied Mathematics, 16 (1995), p.275–296.
- [DV80] D. Dumont et G. Viennot, *A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers*, Annals of Discrete Mathematics, 6 (1980), p.77–87.
- [Egg10] E.S. Egge, *Legendre-Stirling permutations*, European Journal of Combinatorics (2010), doi :10.1016/j.ejc.2010.03.005.
- [ES00] R. Ehrenborg et E. Steingrímsson, *Yet another triangle for the Genocchi numbers*, European Journal of Combinatorics, 21-5 (2000), p.593–600.
- [Ent66] R.C. Entinger, *A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers*, Nieuw Archief voor Wiskunde, 14 (1966), p.241–246.
- [ELW02] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn, et R. Wellman, *Legendre polynomials, Legendre-Stirling numbers, and the left-definite spectral analysis of the Legendre differential expression*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 148 (2002), p.213–238.
- [EKLWY07] W. N. Everitt, K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, R. Wellman et G. J. Yoon, *Jacobi-Stirling numbers, Jacobi polynomials, and the left-definite analysis of the classical Jacobi differential expression*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 208 (2007), p.29–56.
- [Fer10] V. Féray, communication privée (2010).

- [FH00] D. Foata et G. -N. Han, *Principes de combinatoire classique*, Notes de cours, Strasbourg (2000), nouvelle version 2008.
- [FH08] D. Foata et G. -N. Han, *The  $q$ -tangent and  $q$ -secant numbers via basic Eulerian polynomials*, Proceedings of the American Mathematical Society, 138 (2009), p.385–393.
- [FH09] D. Foata et G. -N. Han, *Doublings and new  $q$ -tangent numbers*, Quarterly Journal of Mathematics, (2009), 17pp.
- [FS72] D. Foata, M. P. Schützenberger, *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, Lecture Notes in Math no. 138, Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [FS73] D. Foata and M.-P. Schützenberger, *Nombres d’Euler et permutations alternantes*, A survey of combinatorial theory [J.N. Srivastava et al., eds.], Amsterdam, North-Holland (1973), p.173–187.
- [GZ10] Y. Gelineau et J. Zeng, *Combinatorial interpretations of the Jacobi-Stirling numbers*, The Electronic Journal of Combinatorics, 17 (2010), Research Paper 70.
- [GSZ10] Y. Gelineau, H. Shin et J. Zeng, *Bijections between Entringer families*, European Journal of Combinatorics 32 (2011), p.100–115.
- [GS78] I. Gessel et R. P. Stanley, *Stirling polynomials*, Journal of Combinatorial Theory Series A, 24 (1978), p.24–33.
- [Gla71] A. Glaser, *History of binary and other nondecimal numeration*, Tomash (1971).
- [GZ08] R. Graham et N. Zang, *Enumerating split-pair arrangements*, Journal of Combinatorial Theory Series A, 115 (2008), no.2, p.293–303.
- [Her00] T. Herriot, Manuscript Add 6782.111<sup>r</sup>, British Museum Archive, ( $\simeq$  1600).
- [HNTT09] F. Hivert, J.-C. Novelli, L. Tevlin et J.-Y. Thibon, *Permutation statistics related to a class of noncommutative symmetric functions and generalizations of the Genocchi numbers*, Selecta Mathematica, 15 (2009), no. 1, p.105–119.
- [HY09] T. Huber et A. J. Yee, *Combinatorics of generalized  $q$ -Euler numbers*, to appear in Journal of Combinatorial Theory Series A.
- [Jac04] F. H. Jackson, *A basic-sine and cosine with symbolic solutions of certain differential equations*, Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, 22 (1904), p.28–39.
- [Jor47] C. Jordan, *Calculus of Finite Difference*, Chelsea, New York (1947).
- [JV09] M. Josuat-Vergès, *A  $q$ -enumeration of alternating permutations*, European J. Combin. (2010), no. doi :10.1016/j.ecj.2010.01.008.

- [JV10] M. Josuat-Vergès, *Generalized Dumont-Foata polynomials and alternative tableaux*, preprint (2010).
- [Kem33] A. J. Kempner, *On the shape of polynomial curves*, Tôhoku Mathematical Journal, 37 (1933), p.347–362.
- [Kre97] G. Kreweras, *Sur les permutations comptées par les nombres de Genocchi de 1-ière et 2-ième espèce*, European Journal of Combinatorics, 18-1 (1997), p.49–58.
- [KPP94] A. G. Kuznetsov, I. M. Pak et A. E. Postnikov, *Increasing trees and alternating permutations*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk. Izdatel'stvo Nauka, 49 (1994), p.79–110.
- [Lou10] A. F. Loureiro, *New results on the Bochner condition about classical orthogonal polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 364 (2010), p.307–323.
- [Mac16] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, Cambridge (1916), réimpression Chelsea, New York (1960).
- [Mar06] J. L. Martin, *The slopes determined by  $n$  points in the plane*, Duke Mathematical Journal, 131 (2006), no.1, p.119–165.
- [MW09] J. L. Martin and J. D. Wagner, *Updown numbers and the initial monomials of the slope variety*, Electronic Journal of Combinatorics, 16 (2009), no.1, Research Paper 82, 8pp.
- [Nie06] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Grammafunktion*, B.G. Teubner, Leipzig (1906) ; réimpression sous le titre *Die Grammafunktion*, Chelsea, New York (1965).
- [Pou82] C. Poupard, *De nouvelles significations énumératives des nombres d'Entringer*, Discrete Mathematics, 38 (1982), p.265–271.
- [Pou89] C. Poupard, *Deux propriétés des arbres binaires ordonnés stricts*, European Journal of Combinatorics, 10 (1989), p.369–374.
- [Pou97] C. Poupard, *Two other interpretations of the Entringer numbers*, European Journal of Combinatorics, 18 (1997), p.939–943.
- [Rio58] J. Riordan, *An introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York (1958).
- [Rio68] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons Inc., New York (1968).
- [Sei77] L. Seidel, *Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen*, Sitzungsber. Münchener. Akad., 4 (1877), p.157–187.

- [SZ10] H. Shin et J. Zeng, *The  $q$ -tangent and  $q$ -secant numbers via continued fractions*, European Journal of Combinatorics 31 (2010), p.1689–1705.
- [Slo] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <http://www.research.att.com/njas/sequences/>.
- [Sta78] R. P. Stanley, *Generating functions*, Studies in Combinatorics, Mathematical Association of America (1978), p.100–141.
- [Sta99] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol.2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62 (1999).
- [Sta09] R. P. Stanley, *A Survey of Alternating Permutations*, arXiv :0912.4240 (2009).
- [Sti30] J. Stirling, *Methodus Differentialis, Sive Tractatus De Summatione et Interpolazione Serierum Infinitorum*, London (1730).
- [Twe22] C. Tweedie, *James Stirling, A Sketch of his Life and Works*, Clarendon Press, Oxford (1922).
- [Vie79] G. Viennot, *Permutations ayant une forme donnée*, Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation, Université Pierre et Marie Curie, no.79-32 (1979).
- [ZZ06] J. Zeng et J. Zhou, *A  $q$ -analog of the Seidel generation of Genocchi numbers*, European Journal of Combinatorics, 27-3 (2006), p.364–381.

- arbres binaires croissants, 84  
 arbres croissants, 95  
 arête détachable, 94
- chemin dans un arbre, 85  
   chemin minimal, 85
- Entringer  
   nombres de, voir Nombres
- équerre diagonale, 31
- Euler  
   nombres de, voir Nombres
- extrémité d'un arbre, 85
- Factoriels centraux  
   nombres, voir Nombres
- forme d'une permutation, 81
- G-mots, 99  
   primitifs, 99  
   route, 99
- Genocchi  
   nombres de, voir Nombres
- Jacobi  
   Opérateur différentiel de, 19  
   polynômes de, 19
- Jacobi-Stirling  
   nombres de, voir Nombres
- Legendre-Stirling  
   nombres de, voir Nombres
- Matrices d'Euler-Seidel, 111
- Nombres  
   d'Entringer, 71, 83  
   d'Euler, 71, 74  
   de Genocchi  
     de première espèce, 109  
     de seconde espèce, 110  
   de Jacobi-Stirling  
     de première espèce, 45, 49  
     de seconde espèce, 20  
     diagonal de seconde espèce, 37  
   de Jacobi-Stirling diagonal  
     de première espèce, 53  
   de Legendre Stirling  
     de première espèce, 50  
     de seconde espèce, 24, 26, 33  
   de Stirling  
     de première espèce, 46, 50  
     de seconde espèce, 21, 26, 32  
   factoriels centraux  
     de première espèce, 46, 50, 61, 65  
     de seconde espèce, 21, 27, 32, 61,  
     65  
    $q$ -Entringer, 77
- partition signée, 25

- permutations alternantes
  - descendantes, 83
  - montantes, 71
- permutations alternantes directes, 97
- Polynômes eulériens généralisés, 111
  
- q-secante
  - $q$ -sécante, 76
- q-tangente
  - $q$ -tangente, 76
- quasi-permutation
  - à simples équerres, 30
  - sous-diagonale, 32
  - super-diagonale, 32
  
- R-mots, 99
  - primitifs, 99
  - route, 99
- $r$ -nombres
  - de Jacobi-Stirling
    - de première espèce, 57
    - de seconde espèce, 41
  - de Stirling
    - de première espèce, 57
    - de seconde espèce, 41
  
- element
  - élément, 49
- Seidel-Kempner
  - table de, voir Tables
- Stirling
  - nombres de, voir Nombres
- suite codante, 88
  
- Table
  - de Seidel-Kempner, 73, 84
- table
  - de  $q$ -Seidel-Kempner, 79
  
- U-mots, 101



---

## Liste des tableaux

---

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Les premières valeurs de $JS(n, k; z)$ . . . . .                                      | 22 |
| 1.2 | Les premières valeurs de $JS(n, k; z)$ dans la base $((z + 1)^i)_i$ . . . . .         | 28 |
| 1.3 | Les premières valeurs de $\alpha_{k,i}$ . . . . .                                     | 39 |
| 1.4 | Les premières valeurs de $F_{k,i}(t)$ . . . . .                                       | 42 |
| 2.1 | Les premières valeurs de $js(n, k; z)$ . . . . .                                      | 47 |
| 2.2 | La table étendue de $JS(n, k; z)$ . . . . .   | 52 |
| 2.3 | Les premières valeurs de $F_{k,i}(t)$ . . . . .                                       | 56 |
| 3.1 | Nombres factoriels centraux $T(n, k)$ et $t(n, k)$ . . . . .                          | 62 |
| 3.2 | Suites extraites des nombres factoriels centraux $T(n, k)$ et $t(n, k)$ . . . . .     | 64 |
| 4.1 | La table de Kempner des nombres d'Entringer . . . . .                                 | 74 |
| 4.2 | La table de $q$ -Kempner pour les permutations alternantes . . . . .                  | 78 |
| 4.3 | La table de Seidel-Kempner pour les permutations de forme $w =$<br>$--+-++$ . . . . . | 82 |
| 5.1 | Les premières valeurs des nombres d'Entringer $E_{n,k}$ . . . . .                     | 84 |
| 5.2 | La table de Seidel-Kempner des nombres d'Entringer $E_{n,k}$ . . . . .                | 85 |

---

## Table des figures

---

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.1 | La quasi-permutation à simples équerres de [6] $Q = \{(2, 5), (4, 2), (6, 3)\}$ , sur laquelle on a tracé l'équerre diagonale $H_4$ . . . . . | 31  |
| 1.2 | Un couple de quasi-permutations à simples équerres de $\mathcal{C}_{10,3}^{(3)}$ . . . . .  | 32  |
| 1.3 | La quasi-permutation sous-diagonale qui correspond à une partition par l'application $\varphi$ . . . . .                                      | 33  |
| 5.1 | Les arbres binaires croissants sur [4] . . . . .  | 85  |
| 5.2 | The construction of the tree $\Psi(748591623)$ . . . . .  | 95  |
| 5.3 | La route du G-mot $\pi = 82546317$ . . . . .  | 100 |
| 5.4 | Les bijections mentionnées dans ce chapitre . . . . .   | 104 |
| 5.5 | Douze interprétations pour $E_{4,k}, 1 \leq k \leq 4$ . . . . .   | 105 |

---

## Table des matières

---

|  |           |
|--|-----------|
| Remerciements  | 3         |
| Résumé   | 5         |
| Introduction   | 9         |
| <b>I Nombres de Jacobi-Stirling</b>                                  | <b>15</b> |
| <b>1 Nombres de Jacobi-Stirling de 2<sup>nd</sup>e espèce</b>        | <b>19</b> |
| 1.1 Définitions . . . . .  | 19        |
| 1.2 Interprétations combinatoires . . . . .                          | 24        |
| 1.2.1 Le modèle des partitions signées . . . . .                     | 24        |
| 1.2.2 Une autre décomposition de $JS(n, k; z)$ . . . . .             | 27        |
| 1.2.3 Une seconde interprétation . . . . .                           | 30        |
| 1.2.4 Le lien entre les deux modèles . . . . .                       | 33        |
| 1.3 Fonctions génératrices diagonales . . . . .                      | 36        |
| 1.4 Les $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce . . . . .  | 41        |
| <b>2 Nombres de Jacobi-Stirling de 1<sup>ère</sup> espèce</b>        | <b>45</b> |
| 2.1 Définitions . . . . .  | 45        |
| 2.2 Interprétation combinatoire . . . . .                            | 49        |
| 2.3 Fonctions génératrices diagonales . . . . .                      | 51        |
| 2.4 Les $r$ -nombres de Jacobi-Stirling de première espèce . . . . . | 57        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>3</b>  | <b>Nombres factoriels centraux</b>                                      | <b>61</b>  |
| 3.1       | Suites extraites d'ordre pair et impair . . . . .                       | 61         |
| 3.2       | Interprétations combinatoires . . . . .                                 | 65         |
| <b>II</b> | <b>Nombres d'Entringer</b>  | <b>67</b>  |
| <b>4</b>  | <b>Nombres d'Entringer et <math>q</math>-analogues</b>                  | <b>71</b>  |
| 4.1       | Nombres d'Entringer . . . . .   | 71         |
| 4.2       | Table de Seidel-Kempner . . . . .                                       | 73         |
| 4.3       | Une $q$ -version de la table de Kempner . . . . .                       | 76         |
| 4.4       | Permutations de forme donnée . . . . .                                  | 81         |
| <b>5</b>  | <b>Bijections entre les familles d'Entringer</b>                        | <b>83</b>  |
| 5.1       | Définitions . . . . .   | 83         |
| 5.2       | Le codage gauche-à-droite $\psi$ des permutations alternantes . . . . . | 86         |
| 5.3       | Le codage gauche-à-droite des arbres croissants . . . . .               | 90         |
| 5.4       | Les autres familles d'Entringer de Poupard . . . . .                    | 95         |
| 5.4.1     | Une autre interprétation dans les arbres croissants . . . . .           | 95         |
| 5.4.2     | Une autre interprétation dans les permutations alternantes . . . . .    | 96         |
| 5.4.3     | Interprétations dans les permutations alternantes directes . . . . .    | 97         |
| 5.5       | De nouvelles familles d'Entringer . . . . .                             | 99         |
| 5.5.1     | Interprétations dans les G-mots et les R-mots . . . . .                 | 99         |
| 5.5.2     | Interprétations dans les U-mots . . . . .                               | 101        |
| 5.6       | Liste des bijections . . . . .  | 102        |
| 5.7       | De nouvelles relations sur les nombres d'Entringer . . . . .            | 104        |
|           | <b>Conclusion et perspectives</b>                                       | <b>107</b> |
| 5.8       | Problèmes ouverts . . . . .   | 107        |
| 5.9       | Les nombres de Genocchi . . . . .                                       | 109        |
| 5.10      | Les matrices d'Euler-Seidel . . . . .                                   | 111        |
|           | <b>Bibliographie</b>  | <b>113</b> |
|           | <b>Index</b>  | <b>120</b> |
|           | <b>Liste des tables</b>   | <b>120</b> |
|           | <b>Liste des figures</b>  | <b>121</b> |
|           | <b>Table des matières</b>   | <b>123</b> |