



HAL
open science

Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles

Olivier Delestre

► **To cite this version:**

Olivier Delestre. Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2010. Français. NNT: . tel-00531377v1

HAL Id: tel-00531377

<https://theses.hal.science/tel-00531377v1>

Submitted on 2 Nov 2010 (v1), last revised 1 Feb 2011 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



École Doctorale SCIENCES ET TECHNOLOGIE

LABORATOIRE : MAPMO

THÈSE présentée par :

Olivier DELESTRE

soutenue le : 13 juillet 2010

pour obtenir le grade de : Docteur de l'université d'Orléans

Discipline : Mathématiques Appliquées

**SIMULATION DU RUISSELLEMENT D'EAU DE PLUIE
SUR DES SURFACES AGRICOLES**

THÈSE DIRIGÉE PAR :

CORDIER Stéphane

Professeur, Université d'Orléans

JAMES François

Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

KLEIN Rupert

Professeur, Université de Berlin

PARÉS MADRONAL Carlos

Professeur, Université de Malaga

JURY :

BERTHON Christophe

Professeur, Université de Nantes

BOUCHUT François

Directeur de Recherche, Université de Marne-la-Vallée

Président du jury

CORDIER Stéphane

Professeur, Université d'Orléans

DARBOUX Frédéric

Chargé de Recherche, INRA d'Orléans

JAMES François

Professeur, Université d'Orléans

MOUSSA Roger

Directeur de Recherche, INRA de Montpellier

PARÉS MADRONAL Carlos

Professeur, Université de Malaga

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans (MAPMO), UMR CNRS 6628 à l'aide des logiciels L^AT_EX, JabRef, gimp, gnuplot, paraview, gfortran, g++ et doxygen.

Ces années de thèse furent pour moi une réelle expérience scientifique, professionnelle et humaine. De nombreuses personnes ont contribué à l'aboutissement de ce travail et je souhaite ici les remercier.

Tout d'abord je tiens à remercier l'existence de la fête de la science qui a permis la rencontre de Stéphane Cordier, Frédéric Darboux et François James autour du simulateur de pluie de l'INRA d'Orléans. C'est ainsi que mon sujet de thèse a vu le jour.

J'exprime mes plus vifs remerciements à mes co-directeurs de thèse Stéphane et François pour m'avoir offert la possibilité de réaliser ce travail. Malgré ses lourdes fonctions administratives, Stéphane a fait preuve d'un soutien, d'une totale confiance à mon égard. François a toujours été très disponible. Son attention et ses conseils m'ont été un soutien précieux et constant tout au long de ce travail. Et j'ai vraiment apprécié la possibilité que j'ai eue d'orienter ma thèse comme je le souhaitais.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Rupert Klein et à Carlos Parés d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Leurs commentaires ont permis d'améliorer la précision de ce mémoire.

François Bouchut m'a fait un grand honneur en acceptant de présider le jury de cette thèse. Je lui en suis reconnaissant, ainsi que pour certaines discussions qui m'ont aidé pour ce travail.

Je tiens aussi à remercier très chaleureusement les membres du jury : Christophe Berthon, Frédéric Darboux, Carlos Parés et Roger Moussa.

Merci à Frédéric Darboux pour les nombreuses discussions, ses conseils, pour m'avoir accueilli en stage de M2 CCI à l'INRA d'Orléans, pour ses pâtisseries maison et pour m'avoir conseillé de m'inscrire à l'ASPTT natation.

Un grand merci à Marie-Odile Bristeau pour sa disponibilité, sa gentillesse et ses conseils. Marie-Odile m'a énormément apporté tout au long de ces années de thèse.

Je souhaite aussi remercier Fabien Marche. J'ai vraiment apprécié la façon dont s'est déroulée notre collaboration et j'espère que nous aurons l'occasion de travailler à nouveau ensemble.

Merci à Nicolas Seguin pour les discussions concernant les frottements et les roll-waves.

Je remercie très vivement Michel Esteves et Olivier Planchon de m'avoir fourni des jeux de données, pour les conseils et les nombreux échanges.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Enrique Fernandez-Nieto pour m'avoir accueilli pendant trois mois à son laboratoire et j'espère que nous aurons l'occasion de collaborer à nouveau ensemble.

Merci à Bénédicte Augéard et à Stéphanie Becque pour m'avoir permis de chronométrer l'avancée de fronts sec/mouillé (voir Becque [2008]).

Je remercie tous les membres du projet ANR METHODE pour les discussions et les conseils. C'est une vraie chance que j'ai eu de pouvoir bénéficier de l'apport d'un projet pluridisciplinaire et en particulier de données expérimentales.

Merci à tout ceux qui ont accepté de répondre à mes questions : Nicole Goutal, Jean-Michel Hervouet, Vincent Guinot, Olivier Thual, Valerio Caleffi, Jacques Sainte-Marie, André Paquier, Patricio Bohórquez, Yin-Tik Que et Kun Xu.

Un grand merci à Christian Laguerre, Carine Lucas et Ulrich Razafison pour leur gentillesse, leur aide et leur soutien.

Je remercie Mohamed El Bouajaji, Marie Rousseau et Tuoi Vo Thi Ngoc pour l'apport de leurs travaux. Je leur souhaite bonne route dans leur quête et j'espère avoir à nouveau l'opportunité de travailler avec eux.

Merci à Thomas Haberkorn pour ses cours de C++.

Un grand merci à Frédéric Loulergue pour m'avoir permis de faire un M2 CCI à la "carte".

Je remercie Thomas Genty pour m'avoir incité à utiliser Ubuntu ainsi que pour son aide.

Une pensée à tous les doctorants du MAPMO que j'ai croisés et en particulier un grand merci à Mouhamad Jradeh pour m'avoir accompagné à HYP2008, je crois que nous nous en souviendrons longtemps.

Je tiens à exprimer toute ma considération et tous mes remerciements au personnel administratif du laboratoire pour sa disponibilité et son efficacité, en particulier Anne, Christelle et Marie-France. Elles ont été pour moi des guides au travers de la jungle administrative.

Merci ma famille pour son soutien.

Enfin, je remercie la région Centre, le CNRS et l'université d'Orléans pour l'aide financière qu'ils m'ont attribuée pendant ce travail.

REMERCIEMENTS

REMERCIEMENTS

Résumé

L'objectif de ce travail est le développement d'un modèle et d'une méthode numérique adaptés à la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. Pour cela, nous utilisons un système d'équations aux dérivées partielles pour les eaux peu profondes : le système de Saint Venant. La pluie et l'infiltration y sont pris en compte par l'ajout de termes source et le couplage avec un modèle d'infiltration. Le système étant hyperbolique et conservatif nous choisissons d'utiliser un schéma aux volumes finis avec reconstruction hydrostatique. Avec cette reconstruction nous obtenons un schéma permettant de traiter les équilibres stationnaires et les interfaces sec/mouillé dues aux événements pluvieux. Tout d'abord, nous effectuons une comparaison systématique de différents flux numériques, de différentes reconstructions d'ordre deux (MUSCL et ENO modifiées) et de différentes méthodes de traitement des frottements sur des solutions analytiques unidimensionnelles. Ces comparaisons nous permettent de choisir une méthode numérique adaptée à la simulation du ruissellement qui en outre capture les phénomènes de type roll-waves. Ensuite nous nous intéressons au traitement de la pluie et de l'infiltration à l'aide du modèle de Green-Ampt. Cette méthode généralisée en dimension deux est validée sur des résultats expérimentaux obtenus à l'INRA d'Orléans et à l'IRD. La méthode numérique choisie et validée a été implémentée dans FullSWOF_2D un logiciel libre écrit en C++ pour la simulation de ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles.

Mots clés : Ruissellement, Saint-Venant, schéma équilibré, volume fini, reconstruction hydrostatique, terme source, frottement, pluie, infiltration, C++, eau peu profonde, flux numériques, roll waves, solutions analytiques.

RÉSUMÉ

Abstract

In this work, we aim at developing both a model and a numerical method adapted to the simulation of rainfall runoff on agricultural fields. The model used is a system of partial differential equations for shallow water flows : namely the system of Saint Venant. Rain and infiltration are treated as source terms and with a coupled model of infiltration. Because of the hyperbolicity and conservativity properties, we are using a finite volume scheme with the hydrostatic reconstruction. This reconstruction allows us to deal with stationary equilibria and wet/dry transitions due to rainfall events. First, a systematic comparison on analytic solutions is achieved between various numerical fluxes, two second order reconstructions (a MUSCL and a modified ENO reconstructions) and different numerical treatment of the friction term. This allows us to choose a numerical method adapted to runoff simulation. Moreover it is able to catch roll waves phenomenons. Then we are interested in the rain and infiltration treatment. Infiltration is modeled thanks to the Green Ampt model. This method is thereafter generalized to two dimensions and validated on experimental results obtained by the INRA of Orléans and the IRD. The chosen numerical method has been implemented in an C++ open-source software for rainfall runoff on agricultural fields simulations : FullSWOF_2D.

Keywords : Overland flow, Saint-Venant, Well-balanced scheme, finite volume, hydrostatic reconstruction, source term, friction, rain, infiltration, C++, shallow water, numerical fluxes, roll waves, analytic solutions.

ABSTRACT

Table des matières

Glossaire	15
Introduction	17
1 Modèle de Saint-Venant et volumes finis	19
1.1 Le modèle	19
1.1.1 Propriétés du modèle	21
1.1.2 Modèles liés à Saint-Venant	24
1.1.3 Etats d'équilibre	25
1.2 Schéma aux volumes finis	27
1.2.1 Conservativité et hyperbolicité	27
1.2.2 Schéma équilibré	29
2 Flux numériques 1d	33
2.1 Méthode numérique	33
2.1.1 Reconstruction hydrostatique	33
2.1.2 Flux numériques	39
2.2 Validation numérique	43
2.2.1 Tests généraux	43
2.2.2 Résultats numériques	52
2.2.3 Choix pour le ruissellement	89
3 Frottements	91
3.1 Lois de frottement	91
3.2 Traitement numérique	94
3.2.1 Topographie apparente	95
3.2.2 Traitement semi-implicite	97
3.3 Comparaison des méthodes	99
3.3.1 Tests analytiques	99
3.3.2 Résultats numériques	112

TABLE DES MATIÈRES

3.3.3	Choix pour le ruissellement	139
4	Roll-waves	141
4.1	Ecoulement stationnaire homogène	144
4.1.1	Etude de stabilité pour la loi de Darcy-Weisbach	144
4.1.2	Evolution des roll-waves	146
4.1.3	Profil analytique de Dressler	147
4.1.4	Critère de stabilité pour la loi de Manning	152
4.2	Simulations numériques	152
4.2.1	Loi de Darcy-Weisbach	153
4.2.2	Loi de Manning	154
4.2.3	Ecoulement non homogène	160
5	Modèle complet de ruissellement	167
5.1	La pluie	167
5.1.1	Dérivation du modèle avec pluie	168
5.1.2	Pluie idéale	169
5.1.3	Version Saint-Venant	171
5.1.4	Version approximation d'onde cinématique	173
5.1.5	Version numérique	175
5.2	L'infiltration	189
5.3	La méthode numérique bidimensionnelle	193
6	Expérimental	197
6.1	Pluie idéale - Etape 0	197
6.2	Parcelles JAC et ERO (1994)	203
6.2.1	Parcelle ERO	205
6.2.2	Parcelle JAC	210
6.3	Parcelle de Thies (28 juin 2004)	214
6.4	Synthèse	215
7	Le logiciel FullSWOF_2D	223
7.1	Spécificités de FullSWOF_2D	223
7.1.1	Solutions de programmation	223
7.1.2	Doxygen	231
7.2	Premiers tests numériques	233
	Conclusion	237
A	Propriétés supplémentaires du système de Saint-Venant	239

TABLE DES MATIÈRES

A.1	Saint-Venant et l'équation des ondes	239
A.2	Invariants de Riemann	240
A.3	Conditions aux limites	241
B	Solutions analytiques	243
B.1	Ruptures de barrage	243
B.2	Écoulements sur une bosse parabolique	246
B.3	Solutions de Sampson et de Thacker 1d	251
B.4	Écoulements stationnaires	255
C	Résultats complémentaires sur les cas tests 2.2	257
C.1	Écoulement fluvial	257
C.2	Écoulement transcritique sans choc	260
C.3	Écoulement transcritique avec choc	263
	Index	292

TABLE DES MATIÈRES

Glossaire



FIG. 1: Bassin versant de Bourville (drapage réalisé par Olivier Cerdan).

- *Bassin versant* : Portion de territoire dont les eaux alimentent un exutoire commun. Le bassin versant est délimité par sa ligne de crête (en rouge sur la figure 1).
- *Erosion* : phénomène de dégradation et transformation du relief. Il est causé par tout agent externe (tel que le ruissellement de l'eau de pluie).
- *Exutoire* : Point de drainage d'un bassin ou d'une entité hydrologique (point vert sur la figure 1).
- *Hydrogramme* : Représentation de l'évolution des débits au cours du temps (figure 2).
- *Hyétogramme* : Représentation de l'évolution de l'intensité d'une pluie au cours du temps (figure 2).
- *Infiltration* : Processus d'entrée de l'eau dans le sol.
- *MNT* : Modèle Numérique de Terrain. On parle aussi de MNA (Modèle Numérique d'Altitude). Le mot "modèle" est à prendre au sens de "représentation de la réalité". C'est souvent, mais pas uniquement, sous la forme d'un maillage régulier à mailles carrées. La résolution d'un MNT est habituellement comprise entre quelques mètres et quelques dizaines de mètres. Cette taille de maille permet de bien représenter la topographie. Par contre tous les objets de dimensions inférieurs à quelques mailles

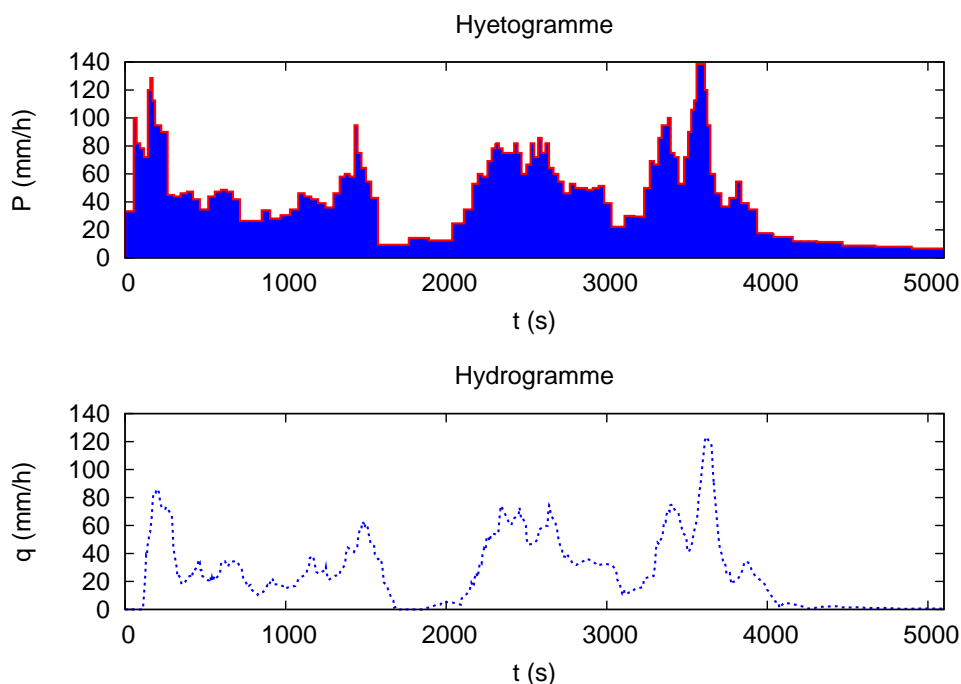


FIG. 2: Hyétogramme et hydrogramme mesurés pour la parcelle ERO au Niger, le 04 septembre 1994 (voir le chapitre 7).

ne sont pas représentables (mottes, sillons, chemins par exemple).

- *Parcelle* : Division élémentaire du sol (délimitée en bleu sur la figure 1). Elle a en général, une taille supérieure à l’hectare. De ce fait, sa topographie n’est pas uniforme. Par contre, la parcelle est travaillée de manière homogène par l’agriculteur ce qui fait que l’état de sa surface est sensiblement égal partout (taille des mottes, direction des sillons).
- *Placette* : Petite parcelle, utilisée pour des recherche expérimentales. Son aire est de quelques mètres carrés (centaines de m^2 exceptionnellement). Elle est utilisée pour clarifier les processus hydrologiques en conditions homogènes.
- *Ruissellement* : Phénomène d’écoulement d’eau à la surface du sol. Le ruissellement peut être un facteur important de l’érosion au niveau du sol.

Introduction

Le ruissellement est le phénomène d'écoulement des eaux à la surface des sols (par opposition au phénomène d'infiltration). L'eau de ruissellement entraîne avec elle des particules plus ou moins grosses en fonction de la quantité d'eau en mouvement et de la pente, ce qui peut avoir un effet abrasif sur le terrain. Ce phénomène, appelé érosion, ne sera pas étudié dans ce travail. La généralisation des sols imperméabilisés (routes, stationnement automobile, zones bâties, ...) augmente le ruissellement aux dépens de l'infiltration, ce qui peut conduire à des crues violentes et augmente les risques de saturation des collecteurs d'eau et d'inondation en aval. On doit donc prendre en compte ce phénomène dans l'aménagement urbain. Le ruissellement est aussi un facteur d'aggravation des pollutions liées à l'agriculture : les engrais et autres produits de traitement sont entraînés vers les cours d'eau, puis vers la mer.

Dans cette thèse ainsi que dans le cadre du projet METHODE, nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. Pour ce type d'écoulement, où la couche d'eau est peu épaisse par rapport aux dimensions du système (placette, parcelle et bassin versant), les modèles d'approximation d'onde cinématique et d'approximation d'onde diffusives sont souvent utilisés. Depuis peu le système de Saint-Venant est utilisé pour modéliser ce type de problème. Ce système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles a été introduit en 1871 par Jean-Claude Adhémar Barré comte de Saint-Venant pour modéliser des écoulements dans des canaux. Ces équations régissent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes, d'où leur appellation anglaise "shallow water equations". Il est possible de les obtenir à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre pour un fluide incompressible avec viscosité (voir entre autres Gerbeau and Perthame [2000, 2001], Marche [2005, 2007] et Lucas [2007]), à l'aide d'hypothèses simplificatrices : pente faible et petite hauteur d'eau par rapport à la taille du domaine. Pour le problème qui nous intéresse, cette dernière hypothèse semble raisonnable.

Ces équations et leurs variantes sont aujourd'hui très utilisées pour la simulation de nombreux phénomènes d'actualité : protection de l'environnement, pollution environnementale, catastrophes naturelles, évolution climatique, rupture de barrage, calcul des marées, étude des crues, sédimentologie, tsunamis, ... Pour tous ces phénomènes, toute expérimentation en vraie grandeur reste difficile, voire impossible à réaliser. Pour les comprendre, une maîtrise de la mécanique des fluides à surface libre est donc indispensable. Cette maîtrise a d'abord été assurée par des maquettes et des modèles physiques ; mais ces dernières années, ils ont cédé du terrain face à la résolution numérique de ces équations, qui s'est imposée comme un outil fondamental pour l'hydraulique de l'environnement, favorisée par une progression très importante des capacités des ordinateurs.

INTRODUCTION

Cependant, les équations de Saint-Venant posent des problèmes numériques spécifiques, dont voici deux exemples :

- "Séchage", la hauteur d'eau s'annule, les équations dégènèrent, et certains schémas calculent alors des hauteurs d'eau négatives ;
- "Termes sources", provenant du modèle de topographie, mais aussi de l'alimentation en eau par la pluie et de l'infiltration dans le sol.

La présence de ces termes sources implique l'existence d'états d'équilibre tels que les flaques d'eau. Les schémas devront préserver la positivité des hauteurs et être compatibles avec les états d'équilibre.

Enfin, les méthodes numériques doivent être validées sur des solutions analytiques et sur des données expérimentales fournies par l'INRA d'Orléans et l'IRD.

Chapitre 1

Modèle de Saint-Venant et volumes finis

1.1 Le modèle

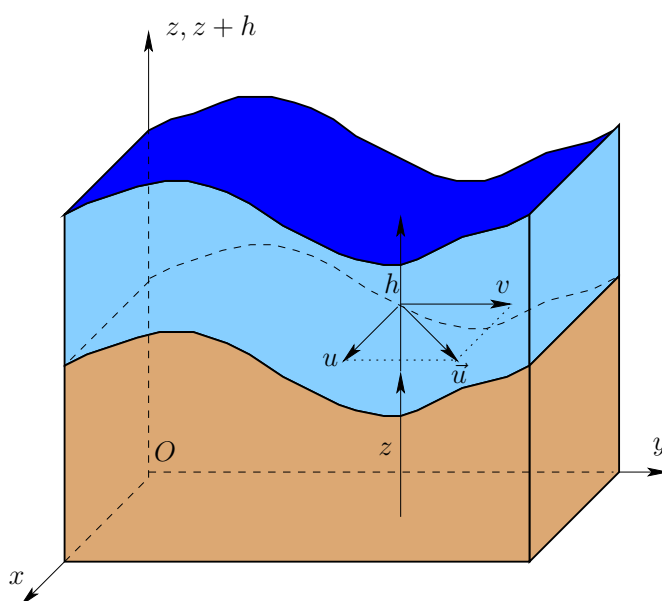


FIG. 1.1: Illustration des variables du système de Saint-Venant 2d.

Pour modéliser le ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles, nous utilisons le système de Saint-Venant bidimensionnel. Ce système d'équations aux dérivées partielles modélise les écoulements en eaux peu profondes (ou shallow water), la couche d'eau est suffisamment mince pour supposer la vitesse constante sur l'épaisseur, ce qui justifie le nom du modèle. Ce système, déjà utilisé pour ce type de problème (voir entre autres Galbiati and Savi [1995], Esteves et al. [2000], Fiedler and Ramirez [2000], Gandolfi and Savi [2000], Erduran et al. [2005]), décrit l'écoulement de l'eau par l'intermédiaire de la hauteur d'eau $h(t, x, y) \geq 0$ [m] et du vecteur vitesse moyen $\vec{u}(t, x, y) = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ [m/s] (avec x [m] et

1.1. LE MODÈLE

y [m] les coordonnées spatiales et t [s] le temps, voir la figure 1.1). Ce système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = P - I \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + \partial_y(huv) = gh(S_{0x} - S_{f_x}) \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + gh^2/2) = gh(S_{0y} - S_{f_y}) \end{cases}, \quad (1.1)$$

$$\text{avec } S_{0x} = -\partial_x z(x, y) \text{ et } S_{0y} = -\partial_y z(x, y),$$

où

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ est la constante de gravité,
- $P(t, x, y)$ [m/s] l'intensité de la pluie,
- $I(t, x, y)$ [m/s] le taux d'infiltration de l'eau dans le sol,
- $\vec{S}_f = (S_{f_x}, S_{f_y}) \in \mathbb{R}^2$ le terme de frottement qui dépend de la loi de frottement choisie (voir le chapitre 3),
- $z(x, y)$ [m] la topographie.

Enfin, l'opposé de S_{0x} (respectivement de S_{0y}) est un nombre sans dimension qui représente la variation de la topographie selon x (respectivement selon y). Il est plus communément appelé pente selon x (respectivement selon y).

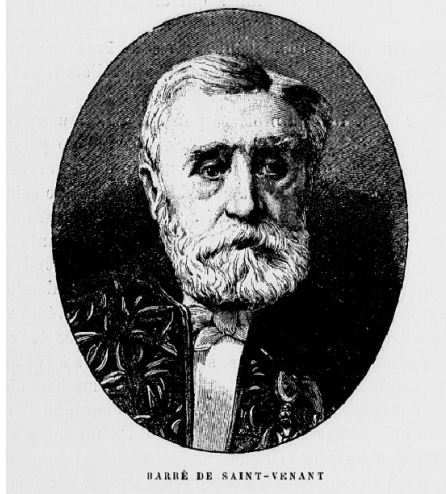


FIG. 1.2: Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant (extrait de Debaube [1893, p.432]).

Le système de Saint-Venant a été introduit dans un cadre unidimensionnel par l'ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant (figure 1.2) dans un Compte Rendu à l'Académie des Sciences (voir de Saint Venant [1871]). Pour décrire l'écoulement de l'eau dans un canal dont la section est rectangulaire et le fond plat et horizontal, il propose le système suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1. LE MODÈLE

où h et u ne dépendent que de x et de t . La topographie est $z = Cte$ pour Saint-Venant, nous utilisons une topographie indépendante du temps car nous ne prenons pas en compte les phénomènes d'érosion. Ces phénomènes peuvent être pris en compte partiellement en prenant z comme fonction donnée du temps. Un modèle complet nécessiterait des équations supplémentaires pour les échanges et la conservation de la matière (voir entre autres Nord and Esteves [2005] et Raff and Ramirez [2005]).

1.1.1 Propriétés du modèle

Dans ce qui suit nous nous intéressons à quelques propriétés fondamentales du système de Saint-Venant que nous présentons dans le cadre unidimensionnel, ces propriétés restent valables ou sont facilement généralisables à la dimension supérieure (voir par exemple l'hyperbolicité en dimension deux dans le chapitre 5.3). En dimension un le système (1.1) s'écrit sous la forme du système de deux équations suivant

$$\partial_t h + \partial_x (hu) = P - I \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - gh(S_0 - S_f) = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{avec } S_0 = -\partial_x z(x),$$

où

- $P(t, x)$ [m/s] l'intensité de la pluie,
- $I(t, x)$ [m/s] le taux d'infiltration de l'eau dans le sol qui dépend du modèle d'infiltration choisi,
- $S_f \in \mathbb{R}$ le terme de frottement qui dépend de la loi de frottement choisie (voir le chapitre 3),
- $z(x)$ [m] la topographie.

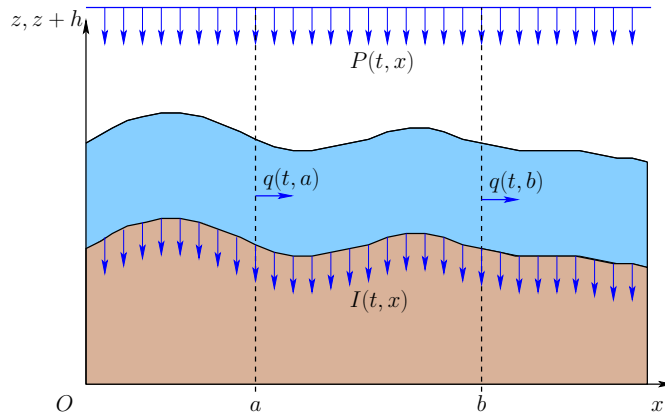


FIG. 1.3: Illustration de la conservation de la masse.

1.1.1.1 Lois de conservation

Le système de Saint-Venant est un système de lois de conservation. L'équation (1.3) est l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) et l'équation (1.4) est

1.1. LE MODÈLE

l'équation de conservation de quantité de mouvement. En intégrant l'équation (1.3) pour x compris entre a et b , nous obtenons la relation suivante

$$\partial_t \int_a^b h(t, x) dx = h(t, a)u(t, a) - h(t, b)u(t, b) + \int_a^b P(t, x) - I(t, x) dx. \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) signifie que la variation du volume d'eau pour $x \in [a, b]$ ne dépend que des quantités de mouvement hu (produit de la masse par la vitesse) aux bords du domaine (en $x = a$ et en $x = b$) et des volumes d'eau apportés par la pluie et infiltrés dans le sol pour $x \in [a, b]$ comme illustré sur la figure 1.3. C'est donc bien une conservation de masse, puisque la densité de l'eau est supposée constante. Et (1.4) est le principe de la dynamique

$$\begin{aligned} \partial_t \int_a^b hu dx + \int_a^b \partial_x hu^2 dx &= -g \int_a^b h (\partial_x (h + z) + S_f) dx \\ &= F \end{aligned}, \quad (1.6)$$

où F est la somme des forces extérieures s'exerçant sur les particules contenues dans le volume $[a, b]$. La variation de la quantité de mouvement des particules occupant à l'instant t le volume $[a, b]$ est donc égale au bilan des forces extérieures F (la force de pression hydrostatique, la force motrice due à la gravité et la force de frottement aux parois).

En hydrologie, la grandeur conservative hu est plus communément appelée le débit, nous le notons

$$q(t, x) = hu \text{ [m}^2\text{/s]}.$$

En une dimension, les termes "débit" et "volume" sont des abus de langage, habituellement en dimension 2 le débit s'exprime en m^3/s et le volume en m^3 . Cet abus de langage permet d'avoir un vocabulaire unifié entre les deux dimensions. Le débit est le flux lié à la hauteur (donc à la masse) et le terme $gh^2/2 + hu^2$ est le flux associé à la quantité de mouvement.

1.1.1.2 Hyperbolicité

Nous pouvons écrire le système de Saint-Venant sous la forme vectorielle conservative suivante

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = S(U, t, x), \quad (1.7)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(U, t, x) = \begin{pmatrix} P - I \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix},$$

où U est le vecteur des variables conservatives, $F(U)$ le flux et $S(U, t, x)$ le vecteur des termes sources. Après calculs, le système s'écrit encore sous la forme

$$\partial_t U + F'(U)\partial_x U = S(U, t, x), \quad (1.8)$$

où $F'(U)$ est la matrice jacobienne du flux $F(U)$:

$$F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

1.1. LE MODÈLE

Cette formulation met en évidence les propriétés de transport du système. En effet, pour h non nul, la matrice (1.9) est diagonalisable de valeurs propres (voir l'annexe A.2)

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}. \quad (1.10)$$

Ces valeurs propres sont en fait les vitesses de propagation d'ondes de surface, elles sont aussi appelées vitesses caractéristiques. En dehors des zones sèches ($h > 0$), le système de Saint-Venant est donc un système strictement hyperbolique (voir Godlewski and Raviart [1996, p.2]). Le problème de non hyperbolicité du système en présence des zones sèches est un problème important puisque de telles zones sont fréquentes dans le cadre des écoulements qui nous intéressent. La capacité à résoudre les transitions sec/mouillé sera donc un critère primordial dans le choix de la méthode.

1.1.1.3 Type d'écoulement et hauteur critique

Le nombre de Froude (analogue du nombre de Mach en dynamique des gaz) est défini pour $h > 0$ par le rapport

$$Fr = \frac{|u|}{\sqrt{gh}}, \quad (1.11)$$

ce nombre adimensionnel permet de caractériser l'importance relative des forces liées à la vitesse par rapport à la force de pesanteur de l'écoulement. Les valeurs prises par le nombre de Froude permettent de caractériser un écoulement. Trois cas sont possibles :

- si $Fr < 1$, l'écoulement est dit fluvial (analogue de l'écoulement subsonique). L'écoulement est piloté par l'aval.
- si $Fr > 1$, l'écoulement est dit torrentiel (analogue de l'écoulement supersonique). L'écoulement est gouverné par les forces de gravité.
- si $Fr = 1$, l'écoulement est dit critique (analogue de l'écoulement sonique).

L'écoulement est dit transcritique (analogue de transsonique), quand il passe de l'état fluvial à torrentiel ou de l'état torrentiel à fluvial.

Dans le cas d'un écoulement critique, le débit peut être exprimé uniquement en fonction de h , nous avons $q = uh = \sqrt{gh}h^{3/2}$. Pour un débit donné ceci définit la hauteur critique h_c

$$h_c = \left(\frac{q}{\sqrt{g}} \right)^{2/3}. \quad (1.12)$$

La hauteur critique permet de déterminer les types d'écoulement :

- si $h > h_c$, l'écoulement est fluvial,
- si $h < h_c$, l'écoulement est torrentiel,
- si $h = h_c$, l'écoulement est critique.

D'un point de vue numérique, le système de Saint-Venant est résolu à partir de l'instant $t = 0$ s, sur un domaine de dimension(s) finie(s). Ainsi, ce système doit être complété par les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} & \text{– en une dimension} && U(t = 0, x) = U_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ & \text{– en deux dimensions} && U(t = 0, x, y) = U_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

et par des conditions aux limites spécifiques à chaque situation (hauteur fixée, débit constant, ...). Le type d'écoulement influe entre autres sur ces conditions aux limites (voir

1.1. LE MODÈLE

les sections A.2 et A.3 de l'annexe A). Afin de modéliser certains écoulements des conditions aux limites doivent aussi être intégrées au modèle : écoulement dans un canal à parois verticales, alimentation, exutoire,

1.1.2 Modèles liés à Saint-Venant

Nous présentons ici quelques modèles simplifiés obtenus à partir du système de Saint-Venant, et très usités en hydrologie.

$$\overset{I}{\frac{\partial hu}{\partial t}} + \overset{II}{\frac{\partial}{\partial x}(hu^2)} + \overset{III}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{gh^2}{2}\right)} - \overset{IV}{gh(S_0 - S_f)} = 0 \quad (1.14)$$

Revenons à l'équation de conservation de quantité de mouvement (1.14) du système de Saint-Venant : le premier terme, désigné par *I*, représente l'évolution en temps, le terme *II* la convection, le terme *III* la pression hydrostatique et le terme *IV* prend en compte les effets des frottements sur le fond et de la pente sur l'écoulement. Le système de Saint-Venant admet plusieurs approximations : l'approximation d'onde cinématique *IV*, l'approximation d'onde diffusivité ou diffusante *III+IV*, l'approximation d'onde quasi-permanente *II+III+IV* et l'approximation d'onde de gravité *I+II+III* (voir entre autres Ponce and Simons [1977], Moussa and Bocquillon [2000] et Viollet et al. [2002, p.269-278]).

Parmi toutes ces approximations, les approximations d'onde cinématique et d'onde diffusivité sont souvent utilisées pour la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. L'approximation d'onde diffusivité (Ponce et al. [1978], Ponce [1989, p.288-291], Parlange et al. [1990], Jain et al. [2004], Gottardi and Venutelli [2008]) consiste à négliger les variations spatiale et temporelle du moment local. En une dimension d'espace, l'équation de quantité de mouvement s'écrit alors

$$\partial_x h = (S_0 - S_f).$$

Enfin, l'approximation d'onde cinématique (Hjelmfelt Jr. [1978], Ponce et al. [1978], Ponce [1989, p.277-288], Bell et al. [1989], Parlange et al. [1990], Dholakia et al. [1998]) consiste à ne prendre en compte que les effets des frottements et de la perte d'énergie potentielle. En une dimension d'espace, l'équation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme

$$S_0 - S_f = 0. \quad (1.15)$$

Cette relation permet d'écrire u comme une fonction de h : $u = \phi(h)$. En l'injectant dans l'équation de conservation de la masse (1.3), le système se réduit à une équation de type trafic routier

$$\partial_t h + \partial_x (h\phi(h)) = P - I.$$

Cette approximation n'est pas valable quand la pente est nulle.

Il existe différentes méthodes pour choisir l'approximation la plus adaptée, la plus naturelle consistant à comparer plusieurs modèles sur des simulations communes. Le choix d'une approximation se fait alors en fonction de la finesse attendue sur les résultats. Par exemple, dans Tatard [2005], Tatard et al. [2008], les auteurs comparent les modèles de Saint-Venant, de l'approximation d'onde cinématique et de l'approximation d'onde diffusivité.

1.1. LE MODÈLE

Dans Moussa and Bocquillon [2000], le choix se fait en analysant la propagation d'onde à l'aide de petites perturbations. Cette étude montre que des modèles tels que l'approximation d'onde cinématique et l'approximation d'onde diffusive ne sont pas valables dans le cas d'écoulements faisant intervenir des ondes se propageant vers l'amont ou lorsque la profondeur et la vitesse de l'écoulement changent rapidement.

Enfin une dernière méthode consiste à comparer les ordres de grandeur des différents termes de l'équation (1.14). Pour cela, à l'image de ce qui est fait notamment dans Woolhiser and Liggett [1967], Ponce [1991], Richardson and Julien [1994], Moussa and Bocquillon [2000] et Viollet et al. [2002, p.271], nous écrivons l'équation (1.14) sous forme non dimensionnelle, en posant :

$$h = H_0 h_*, \quad u = U_0 u_*, \quad t = T_0 t_*, \quad x = L_0 x_*, \quad z = Z_0 z_*, \quad \text{et } \alpha_0 = \frac{Z_0}{L_0},$$

où les variables d'indice 0 sont les grandeurs caractéristiques qui fixent les unités du problème et les variables d'indice * sont les grandeurs adimensionnées. Nous avons

$$\frac{1}{T_0} \partial_{t_*} (H_0 h_* U_0 u_*) + \frac{1}{L_0} \partial_{x_*} \left(g \frac{H_0^2 h_*^2}{2} + H_0 h_* U_0^2 u_*^2 \right) = g H_0 h_* (S_0 - S_f)$$

avec

$$S_0 = \partial_x z = \frac{Z_0}{L_0} \partial_{x_*} z_* = \alpha_0 \partial_{x_*} z_* \quad \text{et} \quad S_f = S_{f0} S_{f*}, \quad (1.16)$$

où les termes S_{f0} et S_{f*} dépendent de la loi de frottement choisie. Nous obtenons donc

$$a_1 \partial_{t_*} h_* u_* + a_2 \partial_{x_*} \frac{h_*^2}{2} + a_3 \partial_{x_*} h_* u_*^2 = a_4 h_* \partial_{x_*} z_* - a_5 S_{f*}$$

avec $a_1 = \frac{H_0 U_0}{T_0}$, $a_2 = \frac{g H_0^2}{L_0}$, $a_3 = \frac{H_0 U_0^2}{L_0}$, $a_4 = g H_0 \alpha_0$ et $a_5 = g H_0 S_{f0}$. A partir de simulations effectuées à l'aide du modèle de Saint-Venant, l'analyse de l'ordre de grandeur des coefficients a_1 , a_2 , a_3 , a_4 et a_5 permet de vérifier la validité des différents modèles.

Dans cette thèse, en plus du système de Saint-Venant, nous nous intéressons ponctuellement à l'approximation d'onde cinématique (voir le chapitre 5 et l'annexe B).

1.1.3 Etats d'équilibre

Dans la nature, il existe des écoulements particuliers qui sont les états d'équilibres stationnaires. Pour le système de Saint-Venant unidimensionnel (1.3)-(1.4), cela revient à considérer que l'on a

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0.$$

Le système de Saint-Venant (1.3)-(1.4) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \partial_x h u = P - I \\ \partial_x \left(h u^2 + \frac{g h^2}{2} \right) = g h (S_0 - S_f) \end{cases}, \quad (1.17)$$

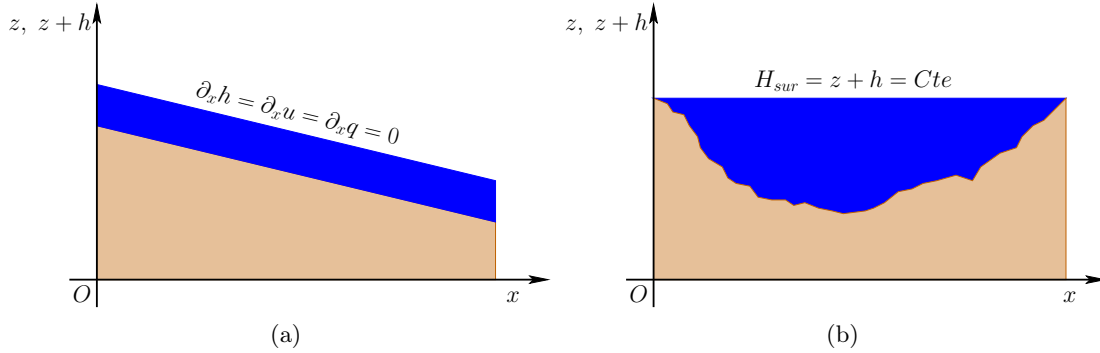


FIG. 1.4: Exemples (a) d'écoulement parallèle et (b) d'équilibre du lac au repos.

ce qui exprime un équilibre entre les termes de flux et les termes sources. Parmi les différents équilibres stationnaires de la forme (1.17), certains sont plus importants que d'autres. Notamment les équilibres stationnaires homogènes (ou équilibres homogènes ou encore écoulements parallèles) c'est-à-dire pour lesquels les inconnues sont constantes sur le domaine (figure 1.4a). Dans le cas des écoulements parallèles, (1.17) s'écrit

$$\begin{cases} P - I = 0 \\ gh(S_0 - S_f) = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour ce type d'écoulement nous retrouvons l'approximation d'onde cinématique (1.15), nous avons donc un équilibre entre le terme de frottement et le terme de gravité. Les équilibres parallèles peuvent être utiles pour l'étude de la stabilité des écoulements comme nous le verrons au chapitre 4.

Les équilibres du lac au repos (voir Audusse [2004, p.56] et Audusse et al. [2004]) ou équilibres au repos jouent aussi un rôle important, en particulier pour la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. En effet, ces derniers états d'équilibre dans le contexte du ruissellement sont simplement les flaques d'eau (figure 1.4b) et s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} u = 0 \\ H_{sur} = h + z = Cte \end{cases} \quad (1.19)$$

avec H_{sur} est la cote de la surface libre.

Pour les équilibres au repos (1.19), il y a équilibre entre le terme de pression hydrostatique et le terme de topographie. Cet équilibre est donc aussi qualifié d'équilibre hydrostatique.

La classe des états d'équilibre est doublement importante : d'une part elle dirige le choix des méthodes numériques, qui doivent pouvoir capturer, d'autre part elle fournit un ensemble de solutions analytiques exactes ou quasi-analytiques (voir l'annexe B) que nous utiliserons afin de valider la méthode numérique choisie.

1.2 Schéma aux volumes finis

Il existe différentes méthodes numériques permettant de résoudre le système de Saint-Venant dont les plus classiques sont : les éléments finis, les différences finies et les volumes finis. Dans cette partie notre choix sera orienté par les propriétés mathématiques du système homogène : la conservativité et l'hyperbolicité (voir 1.1.1). De plus ce schéma devra être en mesure de préserver certains équilibres fondamentaux pour le problème qui nous intéresse : les flaques d'eau (voir 1.1.3).

1.2.1 Conservativité et hyperbolicité

La dérivation de Saint-Venant met en évidence une relation avec le système de Navier-Stokes et les méthodes de type éléments finis développées pour résoudre le système de Navier-Stokes. Mais la méthode des éléments finis n'est adaptée ni au caractère discontinu des solutions, ni au caractère conservatif du système de Saint-Venant. Les différences finies quant à elles, sont beaucoup utilisées par les hydrologues, notamment le schéma de MacCormack (Jovanović and Djordjević [1995], Dholakia et al. [1998], Esteves et al. [2000], Fiedler and Ramirez [2000], Gandolfi and Savi [2000]), mais sont peu adaptées à la résolution de problèmes hyperboliques. De plus, avec la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies, il est difficile d'assurer la positivité de la hauteur d'eau.

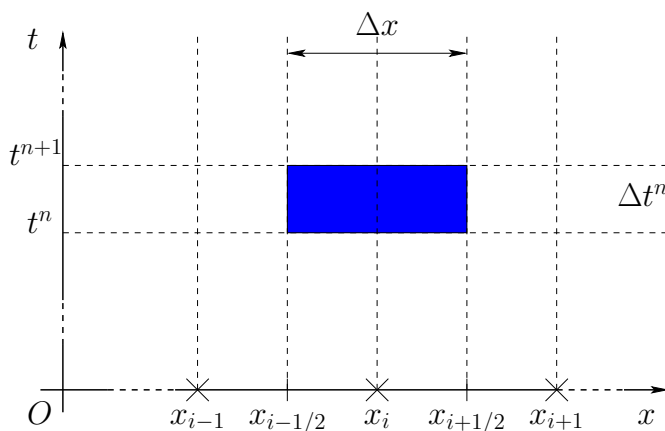


FIG. 1.5: Illustration de la discrétisation en une dimension d'espace.

Notre choix se porte donc sur la méthode des volumes finis qui est plus adaptée au caractère hyperbolique et conservatif du système de Saint-Venant. Cette méthode consiste à découper l'espace en cellules (comme illustré en une dimension d'espace sur la figure 1.5). Nous obtenons par construction un algorithme conservatif, car le système est intégré sur chaque cellule et sur un pas de temps. Cela fait alors intervenir les moyennes des solutions sur chaque cellule et des termes de bords (les flux échangés entre les cellules au niveau de leurs interfaces). Ainsi le flux sortant d'une cellule est égal à celui qui rentre dans la cellule voisine.

Pour les simulations, nous optons pour des maillages bidimensionnels structurés, pour les raisons suivantes :

1.2. SCHÉMA AUX VOLUMES FINIS

- les données physiques et les résultats des mesures de terrain sont souvent fournis sur de tels maillages (MNT, voir le Glossaire p.15),
- le choix d'un maillage structuré nous permet de décrire la méthode aux volumes finis appliquée au système de Saint-Venant unidimensionnel puis de la généraliser facilement au cas bidimensionnel comme nous le verrons dans le chapitre 6.

Nous considérons un maillage régulier, en gardant à l'esprit que cette méthode sera généralisée au cas bidimensionnel (chapitre 6). La suite de points $(x_{i+1/2})_{i \in \mathbb{Z}}$ est définie par $x_{i+1/2} = x_{i-1/2} + \Delta x$, où Δx est le pas d'espace. Ces points sont les interfaces des cellules $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ centrées en x_i . De plus, la suite $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $t^0 = 0$ et $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$ où Δt^n est le pas de temps entre les instants t^n et t^{n+1} . Il peut être choisi fixe ou variable.

La solution U du problème (1.2)-(1.13) est approchée par les valeurs discrètes U_i^n , $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, obtenues en projetant sur l'espace des fonctions constantes par maille

$$U_i^0 \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U_0(x) dx \quad \text{et} \quad U_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(t^n, x) dx. \quad (1.20)$$

Un schéma aux volumes finis est le résultat de l'intégration du système homogène (1.2) sur $[t^n, t^{n+1}[\times]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\partial_t U + \partial_x F(U)) dx dt = 0$$

où F est le flux de l'écriture vectorielle. Nous obtenons alors

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (U(t^{n+1}, x) - U(t^n, x)) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (F(U(t, x_{i+1/2})) - F(U(t, x_{i-1/2}))) dt = 0 \quad (1.21)$$

La première intégrale dans (1.21) est approchée en utilisant (1.20). Le schéma est complètement déterminé après avoir choisi l'approximation des flux dans (1.21), appelée flux numérique :

$$F_{i+1/2}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{i+1/2})) dt.$$

Ainsi, nous obtenons un schéma aux volumes finis conservatif de la forme

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) = 0, \quad (1.22)$$

Les $F_{i+1/2}^n$, $i \in \mathbb{Z}$ étant des approximations des flux aux interfaces, nous choisissons d'utiliser des flux numériques à deux points

$$F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n).$$

Comme nous le verrons dans le chapitre 2, il existe différents flux numériques. Il est connu que le choix naturel consistant à prendre un flux centré

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{1}{2} (F(U_G) + F(U_D)) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(U_G, U_D) = F\left(\frac{U_G + U_D}{2}\right),$$

où U_G (respectivement U_D) est la valeur à gauche (resp. à droite) de l'interface, engendre des oscillations. Nous préférons par conséquent des flux décentrés (ou upwind) qui sont adaptés au caractère hyperbolique du système de Saint-Venant (voir 1.1.1.2), tels que le flux de Lax-Friedrichs

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - c \frac{U_D - U_G}{2} \quad (1.23)$$

où $c > 0$ est un paramètre. Les flux que nous utiliserons sont des variantes de ce type de flux (voir le chapitre 2.1.2).

La fonction flux numérique $\mathcal{F}(U_G, U_D)$ doit être choisie de telle sorte que le schéma vérifie certaines propriétés de consistance et de stabilité, pour cela nous avons des conditions sur le flux :

Consistance Si la suite U_i^n converge vers une fonction régulière et que cette fonction est solution de (1.2) alors la méthode numérique est consistante. Le schéma aux volumes finis associé au flux numérique $\mathcal{F}(U_G, U_D)$ est consistant si nous avons

$$\mathcal{F}(U, U) = F(U).$$

Stabilité Il existe différentes propriétés de stabilité. Mais ce qui nous intéresse le plus est la préservation de la hauteur d'eau positive

$$h_i^n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z} \Rightarrow h_i^{n+1} \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Cette propriété est liée à la stabilité de la norme du sup (parfois notée stabilité L^∞). Les propriétés de stabilité sont obtenues sous une condition de CFL (Courant-Fredrichs-Levy)

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} |c_{i+1/2}| \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \leq 1, \quad (1.24)$$

où $c_{i+1/2}$ est une approximation appropriée de la vitesse de l'onde et sera précisée dans le chapitre 2.1.2.5. La condition de CFL (1.24) permet à chaque itération en temps, l'utilisation d'un pas de temps variable vérifiant

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{\max_{i \in \mathbb{Z}} |c_{i+1/2}|}.$$

La condition de CFL est une condition très générale de stabilité et de convergence. Elle peut être plus contraignante que la condition (1.24) si nous augmentons l'ordre de la méthode (voir le chapitre 2.1.2.5) ou si nous ajoutons un terme de diffusion au système de Saint-Venant (comme dans Marche [2005]).

1.2.2 Schéma équilibré

Les schémas hyperboliques sont en général incompatibles avec les états d'équilibre (voir la section 1.1.3) : pour ces écoulements stationnaires nous avons un équilibre entre les termes de flux et les termes sources dont le traitement numérique est bien souvent décorréllé. Les schémas ainsi obtenus génèrent des oscillations dont les amplitudes sont non-négligeables

(voir entre autres Goutal and Maurel [1997]). Depuis Greenberg and LeRoux [1996], les schémas numériques préservant des équilibres stationnaires sont appelés schémas équilibrés (ou well-balanced). Parmi les premiers à s'intéresser à ce type de schéma, nous pouvons citer Bermudez and Vazquez [1994], Bermúdez et al. [1998] proposent une généralisation du schéma de Roe qui consiste à décentrer le terme de topographie en le projetant sur les vecteurs propres de la matrice jacobienne du flux. Ce schéma rend compatible les traitements numériques du flux et du terme source. Vázquez-Cendón [1999] a étendu cette méthode au traitement du terme de frottement. Greenberg and LeRoux [1996] proposent une modification du schéma de Godunov qui permet la prise en compte du terme de topographie. En modifiant le solveur de Riemann, LeVeque [1998] obtient un schéma qui capture les ondes quasi-stationnaires : ce schéma calcule correctement les petites perturbations d'états d'équilibre stationnaires. Cependant ces schémas ne permettent pas de préserver la positivité des hauteurs d'eau, ce qui est fondamental pour le problème qui nous intéresse.

A notre connaissance, il n'existe pas de schéma permettant de préserver des équilibres de la forme (1.17). Mais il existe des schémas préservant une forme simplifiée des équilibres (1.17) où les termes de pluie, d'infiltration et de frottement sont ignorés :

$$gH = \frac{u^2}{2} + g(h + z) = Cte, \quad hu = Cte, \quad (1.25)$$

avec la charge (totale hydraulique) H qui est homogène à une hauteur.

Pour cet état d'équilibre particulier, nous avons la conservation du débit. Il s'agit d'un écoulement avec conservation de la charge (voir Flamant [1891, p.29-33], le chapitre 3.1 et l'annexe B). Nous pouvons trouver des schémas ayant cette propriété dans Gosse [2000], Jin [2001], Jin and Wen [2004, 2005], Marche [2005, p.152-153], Russo [2005], Wen [2006], Castro et al. [2007], Morales De Luna [2007, p.43-67], Noelle et al. [2007], Thanh et al. [2008] et Bouchut and Morales [2009]. Cependant, ces schémas sont compliqués à mettre en œuvre et le gain en précision n'est pas toujours évident en fonction de l'ordre du schéma, comme constaté dans Morales De Luna [2007, p.61] et dans Bouchut and Morales [2009]. De plus certains de ces schémas ne préservent pas la positivité de la hauteur d'eau.

Comme nous l'avons vu précédemment (voir la section 1.1.3), parmi les états d'équilibre stationnaires, les états d'équilibre du lac au repos (voir Audusse [2004, p.56] et Audusse et al. [2004]) jouent un rôle important dans la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles puisqu'ils correspondent aux flaques d'eau (1.19). Un schéma qui préserve les équilibres du lac au repos avec une erreur d'ordre p vérifie la propriété-C approchée d'ordre p (ou approximate C-property) et si il les préserve exactement alors il vérifie la propriété-C exacte (voir entre autres Bermudez and Vazquez [1994], Bermúdez et al. [1998], Caselles et al. [2009] et Ricchiuto [2010]). Afin d'obtenir un schéma préservant ces équilibres, Audusse [2004], Audusse et al. [2004], Bouchut [2004] et Marche [2005] ont introduit la méthode de reconstruction hydrostatique qui consiste à "préparer" les variables (reconstruction) avant de leur appliquer un schéma adapté à la résolution du système homogène (1.2). Cette méthode sera détaillée dans le chapitre 2.

Dans ce chapitre, nous avons fait le choix d'un modèle et d'une méthode numérique. Nous allons voir dans les prochains chapitres comment modifier cette méthode numérique afin de résoudre le système de Saint-Venant bidimensionnel (1.1). Dans le chapitre qui suit nous allons faire un choix de flux numérique et voir comment prendre en compte le terme de topographie tout en préservant les états d'équilibre par reconstruction hydrostatique et

1.2. SCHÉMA AUX VOLUMES FINIS

comment améliorer la précision du schéma en utilisant des reconstructions sur les variables.

1.2. SCHÉMA AUX VOLUMES FINIS

Chapitre 2

Flux numériques 1d

L'objectif de ce chapitre est de déterminer une méthode numérique de résolution du système de Saint-Venant permettant de développer un code fiable, robuste et offrant un bon compromis entre précision et temps de calcul. De plus, cette méthode numérique doit vérifier les propriétés importantes de ce système énoncées dans le chapitre 1, en particulier la préservation des états d'équilibre au repos. La méthode numérique consiste à appliquer un schéma volumes finis pour la résolution du système de Saint-Venant homogène sur des variables reconstruites (reconstruction hydrostatique et reconstruction d'ordre 2 en espace). Cette méthode permet d'avoir un schéma adapté à la résolution du système de Saint-Venant avec topographie

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z \end{cases} \quad (2.1)$$

Puis nous validons notre méthode numérique sur des tests analytiques.

2.1 Méthode numérique

2.1.1 Reconstruction hydrostatique

2.1.1.1 Reconstruction hydrostatique à l'ordre 1

A l'ordre 1, le schéma avec reconstruction hydrostatique consiste à appliquer un schéma volumes finis usuel

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n) = 0$$

à des variables obtenues par reconstruction hydrostatique (basée sur les équilibres (1.19)). Il s'avère nécessaire d'ajouter un terme source supplémentaire afin d'assurer la consistance du schéma et la préservation des équilibres.

Afin de faciliter la programmation de ce schéma, nous allons détailler la méthode numérique de façon la plus proche possible de l'algorithme.

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

Etape 1 La reconstruction hydrostatique consiste à calculer de nouvelles variables $U_{.G}$ et $U_{.D}$ de la manière suivante

$$\begin{cases} h_{i+1/2G} = (h_i + z_i - \max(z_i, z_{i+1}))_+, & U_{i+1/2G} = (h_{i+1/2G}, h_{i+1/2G}u_i) \\ h_{i+1/2D} = (h_{i+1} + z_{i+1} - \max(z_i, z_{i+1}))_+, & U_{i+1/2D} = (h_{i+1/2D}, h_{i+1/2D}u_i) \end{cases} .$$

La partie positive de la reconstruction hydrostatique ($(\cdot)_+ = \max(0, \cdot)$) permet d'assurer que les hauteurs d'eau obtenues sont positives.

Nous pouvons remarquer qu'avec la reconstruction hydrostatique, les variables vérifient l'équation d'équilibre du lac au repos (1.19) ainsi que des équilibres plus généraux de la forme :

$$H_{sur} = h + z = Cte, \quad u = Cte. \quad (2.2)$$

Ces équilibres sont presque hydrostatiques, c'est-à-dire caractérisés par la relation

$$u \ll \sqrt{gh}. \quad (2.3)$$

Etape 2 Nous appliquons un schéma volumes finis usuel de flux \mathcal{F} donné pour le système homogène. Il s'écrit

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n) = 0$$

avec

$$F_{i-1/2D}^n = \mathcal{F}(U_{i-1/2G}^n, U_{i-1/2D}^n) + S_{i-1/2D} \quad (2.4)$$

$$F_{i+1/2G}^n = \mathcal{F}(U_{i+1/2G}^n, U_{i+1/2D}^n) + S_{i+1/2G} \quad (2.5)$$

La préservation des états d'équilibre nécessite la discrétisation suivante du terme source (voir Audusse [2004, p.57-59]) et Audusse et al. [2004])

$$\begin{aligned} S_{i+1/2G} - S_{i-1/2D} &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ g \frac{(h_i^n)^2 - (h_{i+1/2G}^n)^2}{2} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ g \frac{(h_i^n)^2 - (h_{i-1/2D}^n)^2}{2} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ g \frac{(h_{i-1/2D}^n)^2 - (h_{i+1/2G}^n)^2}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

En écrivant la reconstruction hydrostatique sous la forme

$$\begin{cases} h_{i+1/2G} = (h_i - \max(0, \Delta z_{i+1/2}))_+ \\ h_{i+1/2D} = (h_{i+1} + \min(0, \Delta z_{i+1/2}))_+ \end{cases} ,$$

nous constatons que cette méthode présente un défaut à l'ordre 1. En effet, pour tout $\Delta z_{i+1/2}$ tel que $\Delta z_{i+1/2} \geq h_i$, nous obtenons $h_{i+1/2G} = 0$, comme illustré sur les figures 2.1 a-b (nous avons un résultat similaire concernant $h_{i+1/2D}$). Nous avons obtenu les graphiques de la figure 2.1 en effectuant la simulation d'écoulements sur des canaux de différentes pentes (comprises entre 13 et 18%) avec le schéma à l'ordre 1 et à l'ordre 2 et un maillage dont les mailles sont de taille $\Delta x = 0.1$ m. Nous avons pris une condition en entrée torrentielle avec

$$h(0) = 0.02 \text{ m et } q(0) = 0.0025 \text{ m}^2/\text{s},$$

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

ce qui empêche l'écoulement d'agir sur la condition d'alimentation. Nous constatons à l'ordre 1 (voir fig. 2.1 d) que pour les pentes supérieures ou égales à 16% les surfaces libres calculées sont superposées. Ce qui n'est pas le cas avec le schéma à l'ordre 2 (fig. 2.1 f). Ce qui veut dire que dans ces situations, l'effet de la pente sur l'écoulement est mal calculé à l'ordre 1 et que ce défaut disparaît lors du passage à l'ordre 2.

Les écoulements ne sont pas toujours quasi-hydrostatiques (2.3). Dans la suite nous comparerons sur des tests appropriés, la méthode de reconstruction hydrostatique avec la méthode de correction du vide¹ (non publiée à ce jour). Cette dernière consiste à modifier la reconstruction hydrostatique de la façon suivante

$$\begin{cases} h_{i+1/2G} = (h_i - \max(0, \Delta z_{i+1/2} + \min(0, u_{i+1}^2 - u_i^2)/(2g)))_+ \\ h_{i+1/2D} = (h_{i+1} + \min(0, \Delta z_{i+1/2} + \max(0, u_{i+1}^2 - u_i^2)/(2g)))_+ \end{cases}, \quad (2.6)$$

avec

$$\Delta z_{i+1/2} = z_{i+1} - z_i.$$

Cette reconstruction permet de préserver les équilibres de la forme

$$\frac{u^2}{2g} + h + z = Cte, \quad u = Cte.$$

Ces équilibres ont déjà intéressé Gallouët et al. [2003] avec leur schéma VFRoe-ncv qui présente une approche différente de la correction du vide.

2.1.1.2 Reconstruction hydrostatique à l'ordre 2

Afin d'améliorer la précision du schéma, il convient de réaliser un passage du schéma à l'ordre 2.

Pour obtenir un schéma d'ordre 2, nous combinons :

- une méthode de reconstruction linéaire des variables pour obtenir l'ordre 2 en espace. Par cette reconstruction linéaire, les variables $(U_i, z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont remplacées par des variables $(U_{i+1/2\pm}, z_{i+1/2\pm})_{i \in \mathbb{Z}}$. Nous effectuons la reconstruction hydrostatique sur ces dernières. Comme indiqué dans Audusse [2004, p.65] et Audusse et al. [2004] la reconstruction est faite sur h et $z + h$ car c'est le seul moyen de préserver les états d'équilibre et de garantir la positivité de h aux interfaces sec/mouillé (voir Audusse [2004, p.65] et Audusse et al. [2004] pour plus de détails).
- la méthode de Heun pour obtenir l'ordre 2 en temps.

Afin de faciliter la programmation, nous allons détailler la méthode numérique de façon la plus proche possible de l'algorithme.

Etape 1 Pour obtenir les variables (U_{\pm}, z_{\pm}) , nous effectuons une méthode de reconstruction linéaire sur les variables $u, h, z + h$ et en déduisons la reconstruction de z . Il faut remarquer qu'en procédant ainsi une dépendance en temps des variables de topographie z_{\pm} est introduite.

¹Communication personnelle avec François Bouchut du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées - UMR 8050, Université Paris-Est - Marne-la-Vallée

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

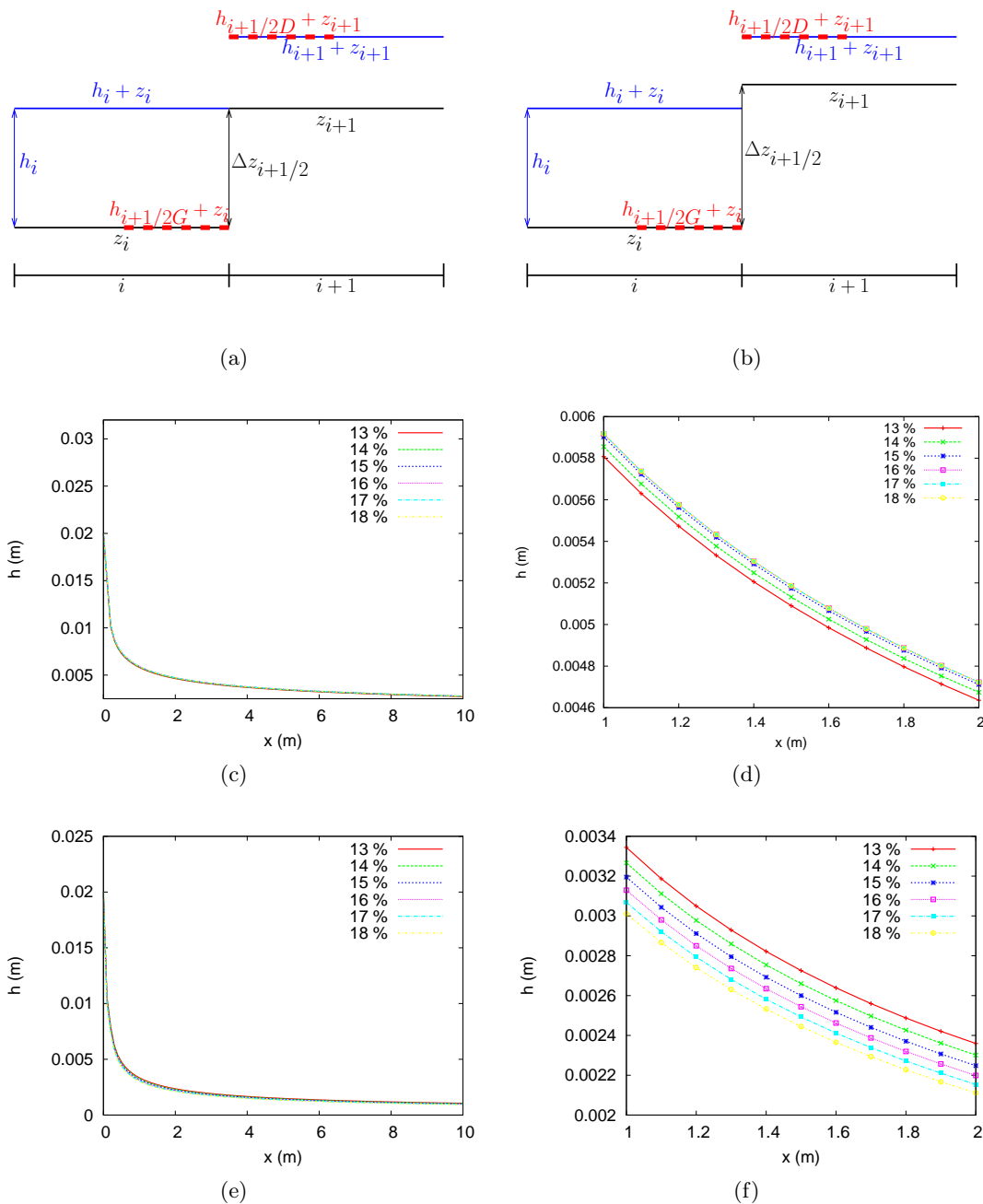


FIG. 2.1: Illustration du défaut de la reconstruction hydrostatique à l'ordre 1 : pour (a) $\Delta z_{i+1/2} = h_i$ et (b) $\Delta z_{i+1/2} > h_i$, $h_{i+1/2G}$ prend la même valeur. Tracé de la hauteur d'eau (c) (d) à l'ordre 1 et (e) (f) à l'ordre 2.

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

Pour reconstruire les variables, nous nous sommes intéressés à deux méthodes : la reconstruction MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Law) et la reconstruction ENO (Essentially Non Oscillatory).

Pour une fonction scalaire $s \in \mathbb{R}$, on définit sa reconstruction linéaire par

$$s_{i-1/2+} = s_i - \frac{\Delta x}{2} Ds_i \quad \text{et} \quad s_{i+1/2-} = s_i + \frac{\Delta x}{2} Ds_i,$$

où D est l'un des trois opérateurs de reconstruction suivants D_{mm} , D_{eno} et D_{enom} . Nous introduisons le limiteur de pente

$$\text{minmod}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } x, y \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{si } x, y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

MUSCL L'opérateur

$$D_{mm}s_i = \text{minmod} \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{\Delta x}, \frac{s_{i+1} - s_i}{\Delta x} \right) \quad (2.7)$$

donne la reconstruction MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Law, voir van Leer [1979]). Cette reconstruction présente l'avantage de vérifier le principe du maximum nécessaire à la positivité de h (voir Bouchut [2007, p. 235])

$$\inf_j s_j \leq s_{i-1/2+}, s_{i+1/2-} \leq \sup_j s_j.$$

ENO L'opérateur

$$D_{eno}s_i = \text{minmod} \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{\Delta x} + \theta_{eno} \frac{\Delta x}{2} D^2 s_{i-1/2}, \frac{s_{i+1} - s_i}{\Delta x} - \theta_{eno} \frac{\Delta x}{2} D^2 s_{i+1/2} \right), \quad (2.8)$$

avec

$$D^2 s_{i+1/2} = \text{minmod} \left(\frac{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{s_{i+2} - 2s_{i+1} + s_i}{\Delta x^2} \right),$$

et $\theta_{eno} = 1$, conduit à la reconstruction ENO (Essentially Non Oscillatory, voir Harten et al. [1986, 1987], Shu and Osher [1988], Bouchut [2004, p.55] et Bouchut [2007, p.235-236]). Cette reconstruction permet de gagner en précision par rapport à la reconstruction MUSCL (la dérivée discrète DU_i est d'ordre 2), mais cette reconstruction peut introduire des instabilités, nous pouvons prendre $\theta_{eno} \in [0, 1]$. Dans Bouchut [2007, p.236], il est conseillé de prendre $\theta_{eno} = 0.25$ pour stabiliser les résultats. De plus avec cette reconstruction, nous risquons la perte du principe du maximum.

ENO modifiée La reconstruction ENO modifiée (voir Bouchut [2004, p.55-56] et Bouchut [2007, p.235-237]) est obtenue avec l'opérateur

$$D_{enom}s_i = \text{minmod}(D_{eno}s_i, 2\theta_{enom}D_{mm}s_i), \quad \text{avec } \theta_{enom} \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

La valeur $\theta_{enom} = 1$ permet de retrouver le principe du maximum. Mais pour plus de sécurité, il est préférable de prendre $\theta_{enom} = 0.9$ (voir Bouchut [2007, p.236]).

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

Les reconstructions précédentes appliquées sur h s'écrivent

$$h_{i-1/2+} = h_i - \frac{\Delta x}{2} Dh_i, \quad h_{i+1/2-} = h_i + \frac{\Delta x}{2} Dh_i$$

et conduisent à la relation de conservation suivante

$$\frac{h_{i-1/2+} + h_{i+1/2-}}{2} = h_i.$$

Afin d'obtenir le même genre de relation pour les débits, nous devons effectuer la reconstruction modifiée suivante sur u

$$u_{i-1/2+} = u_i - \frac{h_{i+1/2-}}{h_i} \frac{\Delta x}{2} Du_i, \quad u_{i+1/2-} = u_i - \frac{h_{i-1/2+}}{h_i} \frac{\Delta x}{2} Du_i.$$

Cette modification conduit à la relation de conservation suivante

$$\frac{h_{i-1/2+}u_{i-1/2+} + h_{i+1/2-}u_{i+1/2-}}{2} = h_i u_i.$$

Bouchut [2004, p.56] préconise d'utiliser la reconstruction ENO (2.8) sur la variable u et la reconstruction ENO modifiée (2.9) sur h et $z + h$, ce qui permet de retrouver le principe du maximum à la différence de la reconstruction ENO. C'est pour cette raison que nos comparaisons seront faites entre le schéma à l'ordre 1 et le schéma à l'ordre 2 avec les reconstructions MUSCL et ENO modifiée (avec $\theta_{eno} = 1$ et $\theta_{enom} = 0.9$) uniquement.

Etape 2 Les variables $U.G$ et $U.D$ sont obtenues par reconstruction hydrostatique à partir des variables $U.-$ et $U.+$

$$\begin{cases} h_{i+1/2G} = (h_{i+1/2-} + z_{i+1/2-} - \max(z_{i+1/2-}, z_{i+1/2+}))_+ \\ h_{i+1/2D} = (h_{i+1/2+} + z_{i+1/2+} - \max(z_{i+1/2-}, z_{i+1/2+}))_+ \\ U_{i+1/2G} = (h_{i+1/2G}, h_{i+1/2G}u_{i+1/2-}), \quad U_{i+1/2D} = (h_{i+1/2D}, h_{i+1/2D}u_{i+1/2+}) \end{cases}.$$

Etape 3 Afin d'avoir un schéma équilibré et consistant (voir Audusse et al. [2004], Bouchut [2004, p.103-105] et Marche [2005, p.151-152]), il est nécessaire d'ajouter un terme source centré Fc_i . Le schéma s'écrit alors sous la forme

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n - Fc_i^n) = 0$$

avec

$$F_{i-1/2D}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1/2G}^n, U_{i-1/2D}^n, \Delta z_{i-1/2}^n)$$

$$F_{i+1/2G}^n = \mathcal{F}_G(U_{i+1/2G}^n, U_{i+1/2D}^n, \Delta z_{i+1/2}^n)$$

$$Fc_i^n = \mathcal{F}_c(U_{i-1/2D}^n, U_{i+1/2G}^n, \Delta z_i^n)$$

où

$$\Delta z_{i+1/2}^n = z_{i+1/2+}^n - z_{i+1/2-}^n$$

$$\Delta z_i^n = z_{i+1/2-}^n - z_{i-1/2+}^n$$

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

\mathcal{F}_D et \mathcal{F}_G sont les flux définis à l'ordre 1 (voir (2.4) et (2.5)) avec la discrétisation suivante du terme source

$$S_{i+1/2G} - S_{i-1/2D} = \left(g \frac{0 - (h_{i+1/2-}^n)^2 - (h_{i+1/2G}^n)^2}{2} \right) - \left(g \frac{0 - (h_{i-1/2+}^n)^2 - (h_{i-1/2D}^n)^2}{2} \right)$$

et le flux centré

$$Fc_i^n = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -g \frac{h_{i-1/2+}^n + h_{i+1/2-}^n}{2} \Delta z_i^n \end{array} \right) \quad (2.10)$$

Nous obtenons ainsi un schéma d'ordre 2 en espace qui peut s'écrire sous la forme

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \Phi(U^n) \text{ avec } U = (U_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

et

$$\Phi(U_i^n) = \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2G} - F_{i-1/2D} - Fc_i^n). \quad (2.11)$$

Etape 4 Pour obtenir un schéma d'ordre 2 en temps, nous utilisons la méthode de Heun qui est une méthode de prédiction-correction simple à mettre en œuvre et robuste. Nous obtenons le schéma d'ordre 2 en temps et en espace suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{n+1} &= U^n + \Delta t \Phi(U^n), \\ \tilde{U}^{n+2} &= \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \Phi(\tilde{U}^{n+1}), \\ U^{n+1} &= \frac{U^n + \tilde{U}^{n+2}}{2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où Φ est défini par (2.11).

2.1.2 Flux numériques

Maintenant que le schéma est présenté à l'ordre 1 et à l'ordre 2, il convient de choisir un flux numérique. Le schéma avec reconstruction hydrostatique a déjà été utilisé avec plusieurs flux numériques : Rusanov (Bouchut [2004, p.30]), HLL (Bouchut [2004, p.32]), Suliciu (Bouchut [2004, p.33]), cinétique (Audusse [2004]), VFRoe et sa variante VFRoe-ncv (Bouchut [2004] et Marche [2005]). D'autres flux numériques tel que le flux Apstat (Lhomme [2006, p.187-194]) ont été utilisés avec d'autres schémas aux volumes finis. Dans ce qui va suivre, nous allons donner l'expression de quelques flux numériques afin de faciliter leur programmation, puis effectuer leur comparaison dans la section 2.2.

2.1.2.1 Flux de Rusanov et HLL

- Le flux de Rusanov (voir Bouchut [2004, p.30]) consiste à généraliser le flux de Lax-Friedrichs (1.23)

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - c \frac{U_D - U_G}{2},$$

en prenant

$$c = \sup_{U=U_G, U_D} (\sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)|),$$

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

où $\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}$ sont les valeurs propres du système de Saint-Venant.

• Le flux de Harten, Lax et van Leer (voir Bouchut [2004, p.32]), noté HLL, est lui-même une généralisation du flux de Rusanov. Il est de la forme

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) & \text{si } 0 < c_1 \\ \frac{c_1 F(U_G) - c_2 F(U_D)}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (U_D - U_G) & \text{si } c_1 < 0 < c_2 \\ F(U_D) & \text{si } c_2 < 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

avec deux paramètres $c_1 < c_2$ donnés par

$$c_1 = \inf_{U=U_G, U_D} \left(\inf_{j \in \{1,2\}} \lambda_j(U) \right) \text{ et } c_2 = \sup_{U=U_G, U_D} \left(\sup_{j \in \{1,2\}} \lambda_j(U) \right),$$

où $\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}$ sont les valeurs propres du système de Saint-Venant.

Le flux HLL s'écrit aussi sous la forme :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = t_1 F(U_D) + t_2 F(U_G) - t_3 (U_D - U_G),$$

avec

$$t_1 = \frac{\min(c_2, 0) - \min(c_1, 0)}{c_2 - c_1}, \quad t_2 = 1 - t_1, \quad t_3 = \frac{c_2 |c_1| - c_1 |c_2|}{2(c_2 - c_1)}.$$

Nous devons remarquer qu'il existe plusieurs variantes du flux HLL dans la littérature, dont une attribuée à E. F. Toro (voir entre autres Valiani et al. [1999b,a, 2002], Zhou et al. [2001], Liang et al. [2004], George [2004, 2006, 2008] et Kim et al. [2007]). Cette variante consiste à utiliser (2.13) avec

$$c_1 = \begin{cases} u_D - 2\sqrt{gh_D} & \text{si } h_G = 0 \\ \min(u_G - \sqrt{gh_G}, u_* - \sqrt{gh_*}) & \text{si } h_G > 0 \end{cases}$$

et

$$c_2 = \begin{cases} u_G + 2\sqrt{gh_G} & \text{si } h_D = 0 \\ \max(u_D + \sqrt{gh_D}, u_* + \sqrt{gh_*}) & \text{si } h_D > 0 \end{cases},$$

où Einfeld en 1988 (voir Godlewski and Raviart [1996, p.204-205], LeVeque [2002, p.328-329] et Kim et al. [2009]) suggère d'utiliser les états de Roe moyens

$$\begin{cases} u_* = \frac{1}{2} (u_G + u_D) + \sqrt{gh_G} - \sqrt{gh_D} \\ h_* = \frac{c_*^2}{g} = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{gh_G} + \sqrt{gh_D}) + \frac{1}{4} (u_G - u_D) \right]^2, \end{cases} \quad (2.14)$$

obtenus à l'aide des invariants de Riemann (voir annexe A.2)

$$\begin{cases} u_* + 2c_* = u_G + 2c_G \\ u_* - 2c_* = u_D + 2c_D \end{cases},$$

où $c_* = \sqrt{gh_*}$, $c_G = \sqrt{gh_G}$ et $c_D = \sqrt{gh_D}$.

Cette variante du flux HLL est appelée flux HLLE (Harten, Lax, van Leer et Einfeld) et a été conçue afin d'améliorer les transitions sec/mouillé, ce que nous vérifierons sur des cas tests adaptés (section 2.2).

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

2.1.2.2 Flux cinétique

Le flux cinétique (voir Audusse [1999, p.25]) s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = F_+(U_G) + F_-(U_D),$$

avec

$$F_+(U_G) = \frac{h_G}{2\sqrt{3T_G}} \begin{pmatrix} M_+^2 - M_-^2 \\ \frac{2}{M_+^3 - M_-^3} \\ \frac{3}{m_+^2 - m_-^2} \end{pmatrix},$$

$$F_-(U_D) = \frac{h_D}{2\sqrt{3T_D}} \begin{pmatrix} m_+^2 - m_-^2 \\ \frac{2}{m_+^3 - m_-^3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{cases} M_+ = \max(0, u_G + \sqrt{3T_G}) \\ M_- = \max(0, u_G - \sqrt{3T_G}) \\ m_+ = \min(0, u_D + \sqrt{3T_D}) \\ m_- = \min(0, u_D - \sqrt{3T_D}) \end{cases},$$

avec

$$T_G = \frac{gh_G}{2} \text{ et } T_D = \frac{gh_D}{2}.$$

Ce flux numérique est obtenu en faisant le lien entre le système de Saint-Venant au niveau macroscopique et une description microscopique du fluide (pour plus de détails voir principalement Audusse [1999] ainsi que Audusse et al. [2000] et Audusse and Bristeau [2005]).

2.1.2.3 Flux VFRoe-ncv

Le flux VFRoe-ncv (voir Gallouët et al. [2003]) s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) & \text{si } 0 < \lambda_1(\tilde{U}) \\ F(U_*) & \text{si } \lambda_1(\tilde{U}) < 0 < \lambda_2(\tilde{U}) \\ F(U_D) & \text{si } \lambda_2(\tilde{U}) < 0 \end{cases},$$

avec l'état moyen

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{g\tilde{h}} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{c} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_G + c_D}{2} \\ \frac{u_G + u_D}{2} \end{pmatrix},$$

et

$$U_* = \begin{pmatrix} h_* \\ h_* u_* \end{pmatrix},$$

où h_* et u_* sont les états de Roe moyens (2.14). Nous avons les relations suivantes

$$\begin{cases} \sqrt{gh_*} = c_* = \tilde{c} - \frac{1}{4}(u_D - u_G) \\ u_* = \tilde{u} - (c_D - c_G) \end{cases}.$$

2.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

Lorsque $\lambda_1(U_G) < 0 < \lambda_1(U_D)$ ou $\lambda_2(U_G) < 0 < \lambda_2(U_D)$, des solutions non entropiques peuvent apparaître. Il est alors nécessaire de faire une correction d'entropie (Buffard et al. [2000]) telle que la correction suivante, pour

$$\lambda_i(U_G) < 0 < \lambda_i(U_D) \text{ avec } i \in \{1, 2\},$$

nous introduisons un état intermédiaire

$$W_m = \begin{pmatrix} 2c_m \\ u_m \end{pmatrix} = \frac{\lambda_i(W_D) - \lambda_i(\widetilde{W})}{\lambda_i(W_D) - \lambda_i(W_G)} W_D + \frac{\lambda_i(\widetilde{W}) - \lambda_i(W_G)}{\lambda_i(W_D) - \lambda_i(W_G)} W_G,$$

avec lequel nous calculons le flux numérique

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = F(U_m),$$

où U_m est le vecteur des variables conservatives obtenu à l'aide de W_m .

Cependant d'après Bouchut [2004, p.59 et 121], cette correction d'entropie ne donne pas toujours des résultats satisfaisants, ce que nous avons vérifié (ces résultats ne sont pas présentés dans ce travail). C'est pourquoi nous avons choisi de faire la correction d'entropie à l'aide du flux de Rusanov. Cette méthode est proche de celle pratiquée dans de nombreux travaux et pour différents domaines d'application, où la correction d'entropie est effectuée à l'aide du flux de Lax-Friedrichs (1.23) (voir Godlewski and Raviart [1996, p.203], Herrmann [2002], Bajaj et al. [2006], Crnjaric-Zic et al. [2006] et Caselles et al. [2009]). Nous n'avons pas comparé les deux approches et la correction d'entropie par le flux de Rusanov n'est pas plus compliquée à programmer.

2.1.2.4 Flux Apstat

Le flux Apstat, introduit dans Lhomme [2006, p.187-194] et Lhomme and Guinot [2007] est défini par

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) \text{ si } \lambda_1(U_G) > 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{(u_G + 2c_G)^3}{27g} \\ \frac{(u_G + 2c_G)^4}{54g} \end{pmatrix} \text{ si } \lambda_1(U_G) < 0 \text{ et } \lambda_1(U_*) > 0 \\ \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{pmatrix} \text{ si } \lambda_1(U_*) < 0 \text{ et } \lambda_2(U_*) > 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{(u_D - 2c_D)^3}{27g} \\ \frac{(u_D - 2c_D)^4}{54g} \end{pmatrix} \text{ si } \lambda_2(U_*) < 0 \text{ et } \lambda_2(U_D) > 0 \\ F(U_D) \text{ si } \lambda_2(U_D) < 0 \end{cases},$$

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

avec

$$U_* = \begin{pmatrix} h_* \\ h_* u_* \end{pmatrix},$$

où h_* et u_* sont les états de Roe moyens (2.14),

$$F_1^* = \frac{F_2(U_G) - F_2(U_D) - \lambda_1 F_1(U_G) + \lambda_2 F_1(U_D)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

et

$$F_2^* = \frac{\lambda_2 F_2(U_G) + \lambda_1 F_2(U_D) - \lambda_1 \lambda_2 (F_1(U_G) - F_1(U_D))}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

où

$$\lambda_1 = \inf_{U=U_G, U_D} \lambda_1(U) \text{ et } \sup_{U=U_G, U_D} \lambda_2(U).$$

Nous rappelons que $\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}$ sont les valeurs propres du système de Saint-Venant.

Ce flux numérique est obtenu (voir citet[p.187-194]Lhomme06 et Lhomme and Guinot [2007]) en exprimant les invariants de Riemann en fonction des termes de flux.

2.1.2.5 Condition de CFL

Le schéma choisi étant explicite, nous devons veiller à sa stabilité, en imposant une condition de CFL théorique qui est

$$\Delta t \leq n_{CFL} \frac{\min_i(\Delta x_i)}{\max_i(|u_i| + \sqrt{gh_i})},$$

où i est l'ensemble des valeurs possibles du domaine de calcul et avec $n_{CFL} = 1$ à l'ordre 1 et $n_{CFL} = 0.5$ à l'ordre 2. Bien souvent, nous pourrions utiliser à l'ordre 2 la même condition qu'à l'ordre 1 (voir la section 2.2).

Il faut aussi noter que le flux cinétique nécessite une condition de CFL particulière voir Audusse [1999, p.24]

$$\Delta t \leq n_{CFL} \frac{\min_i(\Delta x_i)}{\max_i(|u_i| + \sqrt{MT_i})}.$$

2.2 Validation numérique

2.2.1 Tests généraux

Dans la section 2.1, nous avons présenté cinq flux différents, le schéma à l'ordre 1 et deux types de reconstructions à l'ordre 2. Dans cette partie, nous tentons de répondre aux questions suivantes :

- Quel flux numérique devons-nous choisir pour la simulation numérique du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles ?
- Devons-nous utiliser le schéma à l'ordre 1, avec la reconstruction MUSCL ou encore la reconstruction ENO modifiée ?

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

Pour répondre à ces questions nous mettons en place une batterie de cas tests analytiques permettant de reproduire les phénomènes hydrologiques rencontrés à différentes échelles : placette, parcelle et bassin versant (voir le Glossaire à partir de la page 15). A priori, tous les phénomènes hydrologiques peuvent être rencontrés. Cependant, nous devons mettre en relief les situations les plus importantes. Lors de précipitations sur le sol, nous pouvons observer des successions d'états transitoires et d'équilibres au repos (les flaques d'eau) et d'états stationnaires (les écoulements établis). Ces équilibres sont accompagnés de la conservation de certaines grandeurs physiques telles que le débit. De plus les régimes d'écoulements peuvent être fluviaux, torrentiels ou critiques. Par ailleurs, quelle que soit l'échelle considérée, nous pouvons rencontrer l'alternance de zones sèches et de zones mouillées. Le calcul des transitions sec/mouillé d'un point de vue numérique est un problème difficile (de nombreuses méthodes numériques produisent des hauteurs d'eau négatives). Enfin à l'échelle de la placette, nous pouvons observer la formation et le déplacement de ressauts hydrauliques. A des échelles plus grandes, il devient nécessaire de prendre des mailles numériques plus grandes, les ressauts peuvent devenir invisibles. Nous devons donc être en mesure de localiser ces chocs, mais leur calcul précis n'est pas nécessaire.

La méthode choisie devra donc être en mesure de capturer tous ces phénomènes avec le meilleur rapport précision/temps de calcul. Elle devra aussi être fiable, c'est-à-dire produire les résultats souhaités ou tout du moins le plus proche possible de ces résultats. Dans ce qui va suivre, nous allons présenter les différents cas tests analytiques qui nous permettront de comparer et valider les différentes méthodes numériques.

2.2.1.1 Rupture de barrage sur fond mouillé

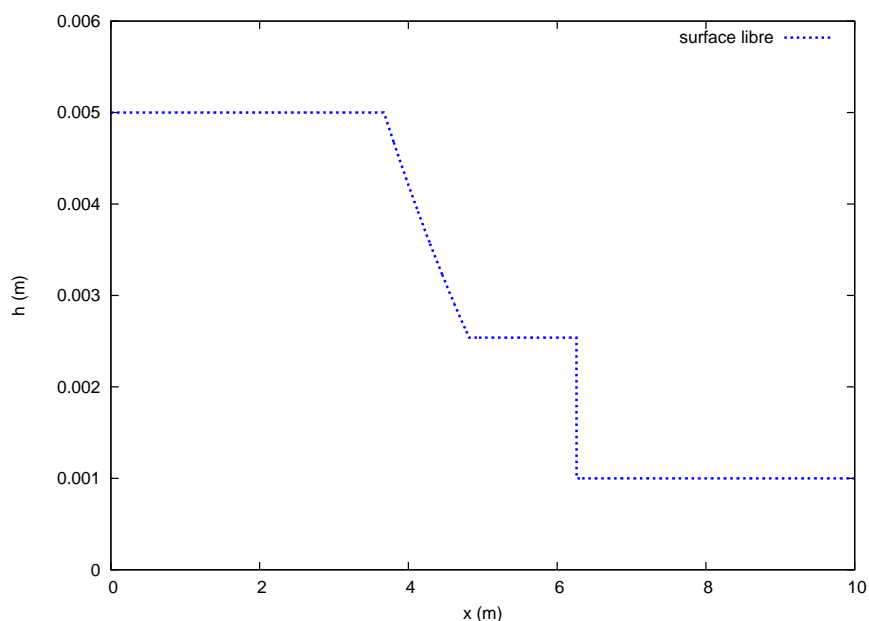


FIG. 2.2: La surface libre 6 secondes après la rupture du barrage.

La rupture de barrage idéale sur fond plat est un cas test analytique classique (voir la section B.1) proposé notamment dans le workshop Goutal and Maurel [1997, p.22-24], ainsi

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

que dans Audusse [1999, p.70-72]. Ce test nous permet d'évaluer la capacité des méthodes à calculer le déplacement d'un choc. Ce cas test est personnalisable : nous pouvons choisir la longueur du domaine (L), la position du barrage avant rupture (x_0), ainsi que les hauteurs d'eau de part et d'autre du barrage.

Pour ce cas test, la longueur du domaine est $L = 10$ m, la position du barrage est en $x_0 = 5$ m et la topographie est définie par

$$z(x) = 0 \text{ pour } 0 \text{ m} < x < 10 \text{ m.}$$

Les conditions initiales sont

$$h = \begin{cases} 0.005 \text{ m} & \text{pour } 0 \text{ m} < x \leq 5 \text{ m} \\ 0.001 \text{ m} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$q = 0 \text{ m}^2/\text{s.}$$

Lors de simulation du ruissellement d'eau de pluie nous serons amenés à simuler des écoulements dont l'épaisseur sera de l'ordre de grandeur du millimètre. C'est pourquoi nous avons choisi ces hauteurs d'eau initiales. La rupture du barrage se produit à l'instant $t = 0$, la simulation s'arrête à l'instant $t = 6$ s. Nous obtenons alors la surface libre de la figure 2.2.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique,
- d'un choc en mouvement,
- de deux zones au repos,
- de hauteurs d'eau de l'ordre de grandeur du millimètre.

2.2.1.2 Ecoulements sur bosse parabolique

A travers cette série de tests proposés dans le workshop Goutal and Maurel [1997, p.14-17], nous voulons évaluer la capacité des méthodes numériques à converger vers un état d'équilibre puis à le maintenir pour une topographie non-plane et différents types d'écoulements.

Pour ces cas tests, la longueur du domaine est de 25 m et la topographie est définie par

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.005(x - 10)^2 & \text{si } 8 \text{ m} < x < 12 \text{ m,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tous les cas, les conditions initiales sont

$$h + z = Cte \text{ et } q = 0.$$

En fonction des conditions initiales et des conditions aux bords, nous obtenons différents écoulements (voir B.2) : un équilibre au repos, un écoulement fluvial, un écoulement transcritique ou un écoulement transcritique avec ressaut. La solution de ces cas tests n'est pas une solution explicite (voir B.2).

- **Equilibre au repos**

Avec les conditions initiales

$$h + z = 0.5 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

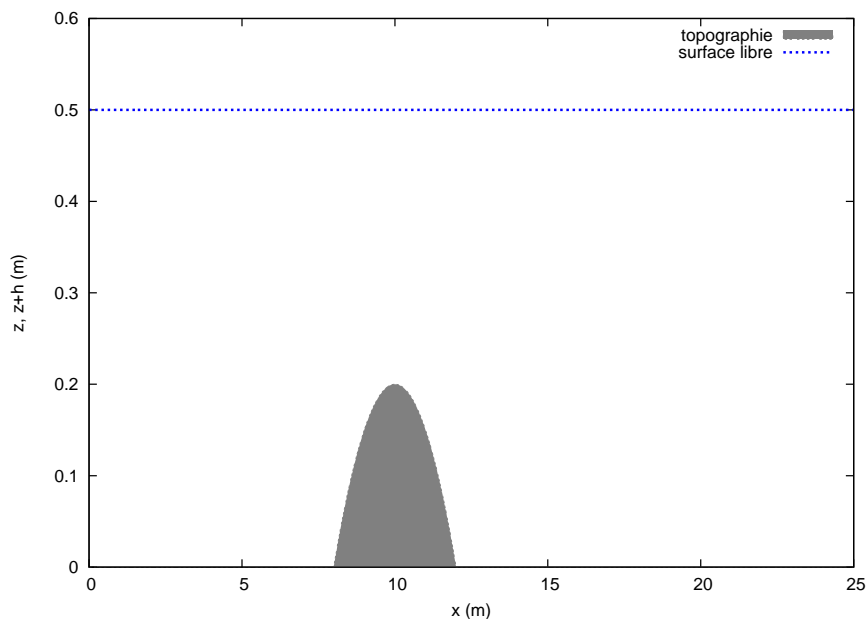


FIG. 2.3: Etat d'équilibre au repos.

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} h = 2 \text{ m} \\ q = 0 \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} ,$$

nous obtenons un écoulement stagnant appelé équilibre au repos (fig. 2.3).

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement à débit nul.

- **Écoulement fluvial**

Avec les conditions initiales

$$h + z = 2 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} \text{en amont } q = 4.42 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval } h = 2 \text{ m} \end{cases} ,$$

nous obtenons un écoulement stationnaire de type fluvial (fig. 2.4).

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique,
- d'une topographie variable,
- de la hauteur spatialisée en régime permanent,
- d'un régime fluvial.

- **Écoulement transcritique**

Avec les conditions initiales

$$h + z = 0.66 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

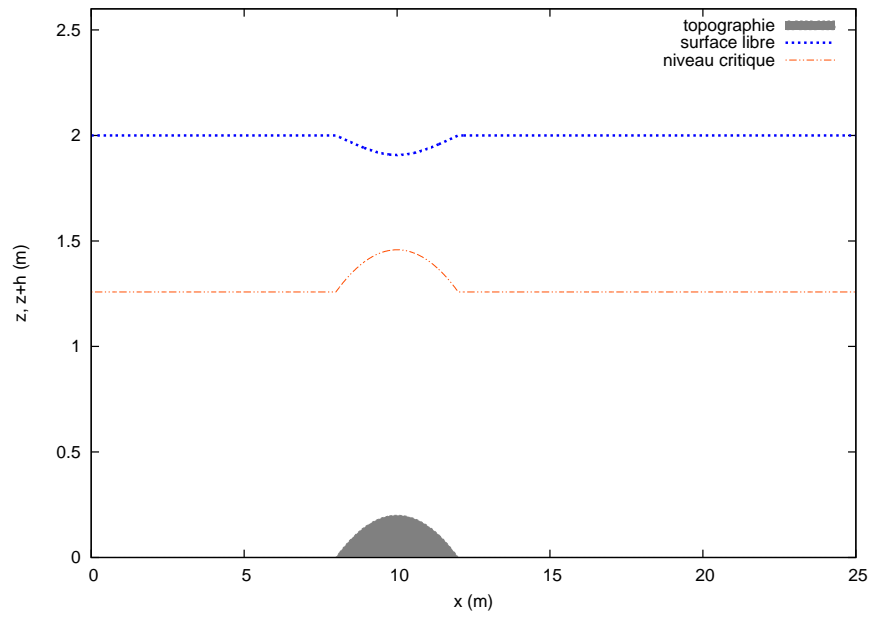


FIG. 2.4: Ecoulement fluvial à l'équilibre.

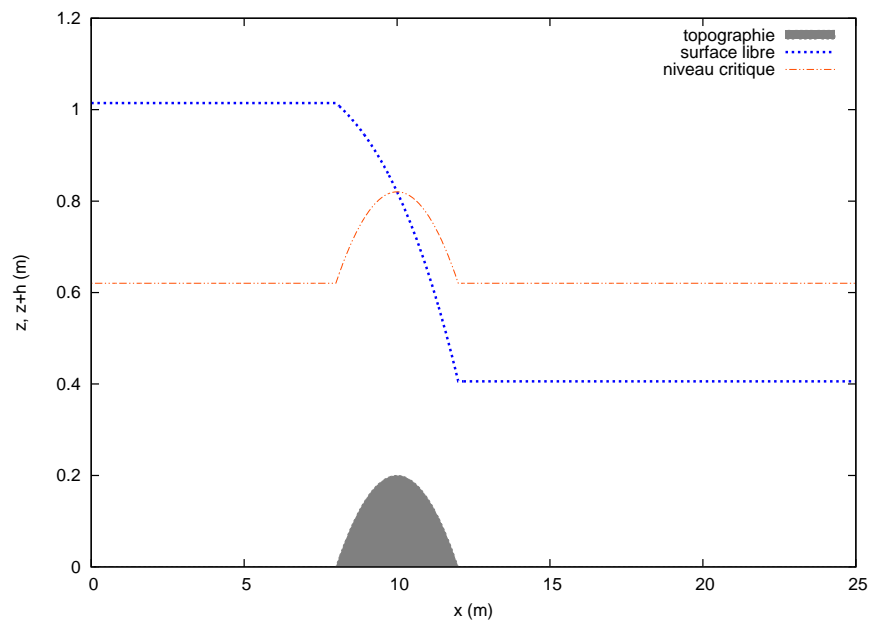


FIG. 2.5: Ecoulement transcritique à l'équilibre.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} \text{en amont } q = 1.53 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval } h = 0.66 \text{ m tant que l'écoulement est fluvial} \end{cases},$$

nous obtenons un écoulement transcritique (fig. 2.5). L'écoulement en amont du sommet de la bosse est fluvial. Au passage de celui-ci, il devient torrentiel.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique,
 - d'une topographie variable,
 - de la hauteur spatialisée en régime permanent,
 - d'un régime transcritique.
- **Écoulement transcritique avec ressaut**

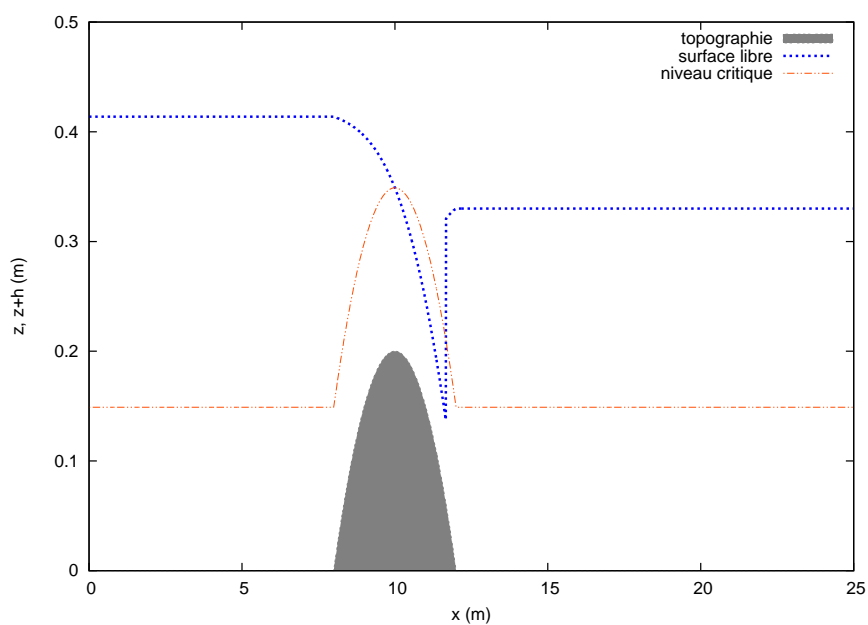


FIG. 2.6: Écoulement transcritique avec ressaut à l'équilibre.

Avec les conditions initiales

$$h + z = 0.33 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} \text{en amont } q = 0.18 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval } h = 0.33 \text{ m} \end{cases},$$

nous obtenons un écoulement transcritique avec un ressaut (fig. 2.6). L'écoulement est fluvial en amont du sommet de la bosse, passe au régime torrentiel en aval et se termine en régime fluvial au travers d'un ressaut.

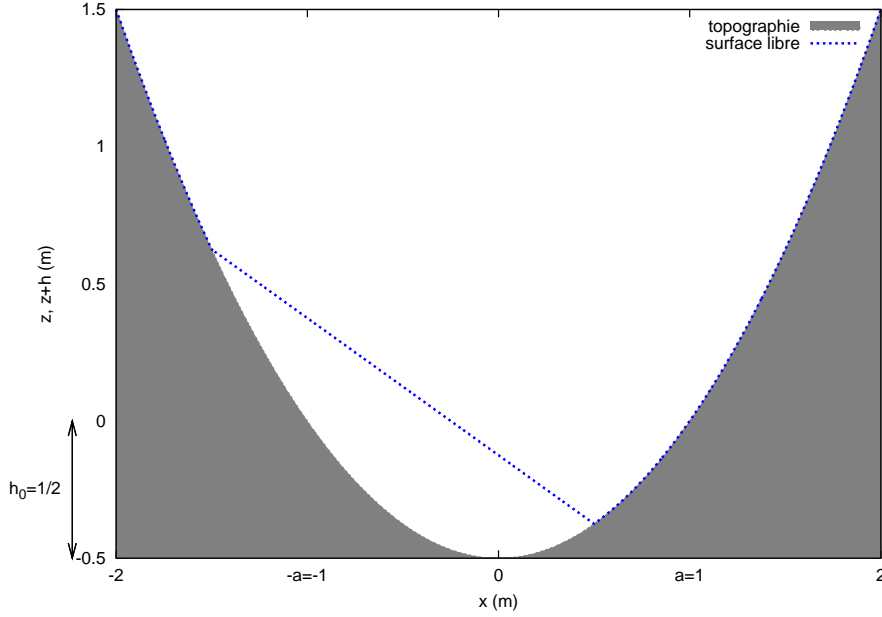


FIG. 2.7: Position initiale de la surface libre pour le cas test de Thacker.

2.2.1.3 Thacker : test de transition sec/mouillé

Ce cas test est un cas particulier 1d d'un cas test 2d introduit dans Thacker [1981] et repris dans Sampson et al. [2006], Sampson [2008, 2009]. Il s'agit d'un problème de recouvrement/découvrement un peu comme sur une plage, c'est pourquoi ce test et ses variantes sont souvent utilisés pour la validation des méthodes numériques pour l'océanographie (voir entre autres Balzano [1998], Marche [2005], Marche et al. [2007], Sampson [2008]). Nous avons choisi ce cas test car il permet de tester la capacité des méthodes numériques à traiter les transitions sec/mouillé. De plus, la solution étant périodique, elle nous permet aussi de tester le degré de diffusion numérique des différentes méthodes.

La longueur du domaine est de 4 m et la topographie (fig. 2.7) est une parabole définie par

$$z(x) = h_0 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \text{ pour } -2 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}.$$

Nous obtenons une solution explicite périodique (voir le détail des calculs à l'annexe B.3) dont la surface libre reste plane et oscille entre les points

$$x_1(t) = -\frac{B}{\omega} \cos(\omega t) - a \text{ et } x_2(t) = -\frac{B}{\omega} \cos(\omega t) + a,$$

avec la pulsation $\omega = \sqrt{2gh_0/a^2}$ et la période $T = 2\pi/\omega$.

Les conditions initiales sont $u(0, x) = 0$ m/s et

$$h(0, x) = \begin{cases} -\frac{h_0}{a^2} \left(\left(x + \frac{B}{\omega} \right)^2 - a^2 \right) & \text{pour } x_1(0) < x < x_2(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

La hauteur d'eau est décrite par

$$h(t, x) = \begin{cases} -\frac{h_0}{a^2} \left(\left(x + \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) \right)^2 - a^2 \right) & \text{pour } x_1(t) < x < x_2(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la vitesse par

$$u(t, x) = \begin{cases} B \sin(\omega t) & \text{pour } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour les paramètres, nous prenons

$$B = \omega/2, \quad a = 1 \text{ et } h_0 = 1/2.$$

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique explicite,
- d'une topographie variable,
- de transitions sec/mouillé en mouvement,
- d'une solution périodique.

2.2.1.4 Récapitulatif des tests utilisés

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

Tests	Types d'écoulement		Pentes		Régimes fluvial-torrentiel ressaut				R.	Commentaires
	Stat.	Trans.	Nullé	Var.	Fl.	To.	Fl.→To.			
Barrage		X	X							choc en mouvement
Equilibre au repos	X			X						débit nul
Fluvial	X			X	X					
Transcritique	X			X			X			
Transcritique avec ressaut	X								X	
Thacker		X		X						transition sec/mouillé

2.2.2 Résultats numériques

Dans cette partie, nous effectuons une comparaison systématique du schéma à l'ordre 1, à l'ordre 2 avec les reconstructions MUSCL et ENO modifiée (voir la section 2.1.1.2) et des cinq flux numériques de la section 2.1.2 sur les tests présentés à la section 2.2.1.

Nous avons généré les résultats de cette partie à l'aide d'un code en fortran dont la réalisation a débuté dans Cordier et al. [2007]. Nous avons utilisé le compilateur gfortran sans option de compilation (car l'effet des options dépend à la fois du compilateur et de la machine utilisée et certains résultats obtenus avec les options peuvent être légèrement différents de ceux obtenus sans option). La configuration pour lancer l'exécutable a été la suivante :

- système d'exploitation : Ubuntu version 8.10,
- matériel :
 - mémoire 2.9 Go,
 - processeur Intel[®] Core[™] 2 Duo CPU T5750 2.00 GHz.

L'évaluation du temps de calcul est effectuée en comptant le nombre de coups d'horloge à l'aide du sous-programme `SYSTEM_CLOCK` utilisé de la façon suivante :

```
integer :: nb_periodes_s, &      !nombre de periodes d horloge par seconde
          nb_periodes_max, &    !valeur maximale du compteur d horloge
          nb_periodes_ini, &    !valeur initiale du compteur
          nb_periodes_fin, &    !valeur finale du compteur
          nb_periodes           !nombre de periodes d horloge comptabilisees

real :: temps_ecoule           !temps de calcul en secondes

CALL SYSTEM_CLOCK(COUNT_RATE=nb_periodes_sec,COUNT_MAX=nb_periodes_max)
CALL SYSTEM_CLOCK(COUNT=nb_periodes_ini)
!           .....
! Portion de code a chronometrer
!           .....
CALL SYSTEM_CLOCK(COUNT=nb_periodes_fin)

nb_periodes=nb_periodes_fin-nb_periodes_ini

if (nb_periodes<nb_periodes_ini) then      !le compteur a depasse le
  nb_periodes=nb_periodes+nb_periodes_max !nombre maximal de periodes
endif

temps_ecoule=float(nb_periodes)/nb_periodes_sec
```

Enfin, les calculs d'erreur sont effectués à l'aide de la norme L^1 (comme conseillé dans LeVeque [2002, p.140-141] pour les lois de conservation) que nous notons $|\cdot|_{L^1}$. Par exemple pour les hauteurs d'eau, nous aurons

$$|h - h_{ex}|_{L^1} = \Delta x \sum_{i=0}^J |h_i - h_{ex}(x_i)|.$$

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

Et les erreurs relatives seront notées ER_{L^1} . Par exemple pour les hauteurs d'eau, nous aurons pour une solution exacte stationnaire

$$ER(h)_{L^1} = \frac{|h^n - h_{ex}|_{L^1}}{|h^0 - h_{ex}|_{L^1}} = \frac{\sum_{i=0}^J |h_i^n - h_{ex}(x_i)|}{\sum_{i=0}^J |h_i^0 - h_{ex}(x_i)|}$$

et pour une solution exacte non stationnaire

$$ER(h)_{L^1} = \frac{|h^n - h_{ex}^n|_{L^1}}{|h_{ex}^n|_{L^1}} = \frac{\sum_{i=0}^J |h_i^n - h_{ex}^n(x_i)|}{\sum_{i=0}^J |h_{ex}^n(x_i)|}.$$

2.2.2.1 Rupture de barrage sur fond mouillé

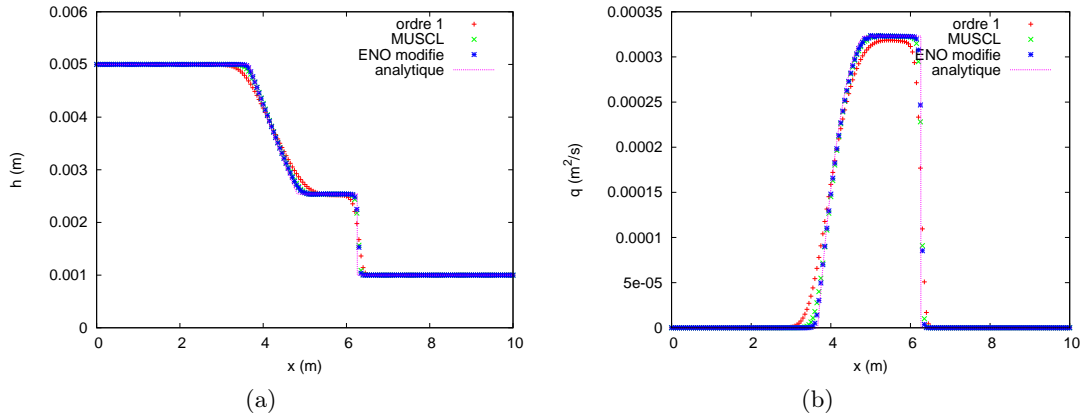


FIG. 2.8: Flux de Rusanov : comparaison au temps $t = 6$ s (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits.

Nous avons utilisé une discrétisation numérique de 200, 400, 800, 1600 et 3200 mailles. Le temps total de la simulation correspond à 6 secondes. Nous avons effectué tous les calculs en respectant la condition de CFL théorique ($n_{CFL} = 1$ à l'ordre 1 et $n_{CFL} = 0.5$ à l'ordre 2).

Ce qui nous intéresse le plus dans cette simulation est le déplacement du choc. La vitesse de propagation du choc est correctement calculée comme illustré sur la figure 2.8a pour le flux de Rusanov avec 200 mailles, il en est de même pour le calcul du débit (fig. 2.8b) en dépit des faibles hauteurs d'eau considérées. Il faut signaler que le flux de Rusanov est le flux le moins précis sur ce cas test. En augmentant le nombre de mailles, nous améliorons le calcul du choc.

La montée en ordre de la méthode permet de rendre le schéma moins diffusif et donc d'améliorer les calculs. La reconstruction ENO modifiée étant la méthode la moins diffusive, elle nous donne les meilleurs résultats.

2.2.2.2 Ecoulements sur bosse parabolique

Pour chacun des cas tests de cette section, nous avons utilisé une discrétisation numérique de 100, 200, 400, 800 et 1600 mailles. Le temps total des simulations correspond à 300 secondes. Nous avons réalisé tous les calculs avec une condition de CFL de 1, excepté pour l'écoulement fluvial où nous avons dû respecter la condition théorique ($n_{CFL} = 0.5$, voir 2.1.2.5).

– Équilibre au repos

Ce cas test est un équilibre au repos (1.19) qui est un cas particulier des équilibres de la forme (2.2). Or la reconstruction hydrostatique a été conçue pour préserver ces états d'équilibre. Nous avons vérifié ceci pour toutes les méthodes numériques sans exception, comme illustré pour le flux HLL au bout de 300 s (fig. 2.9).

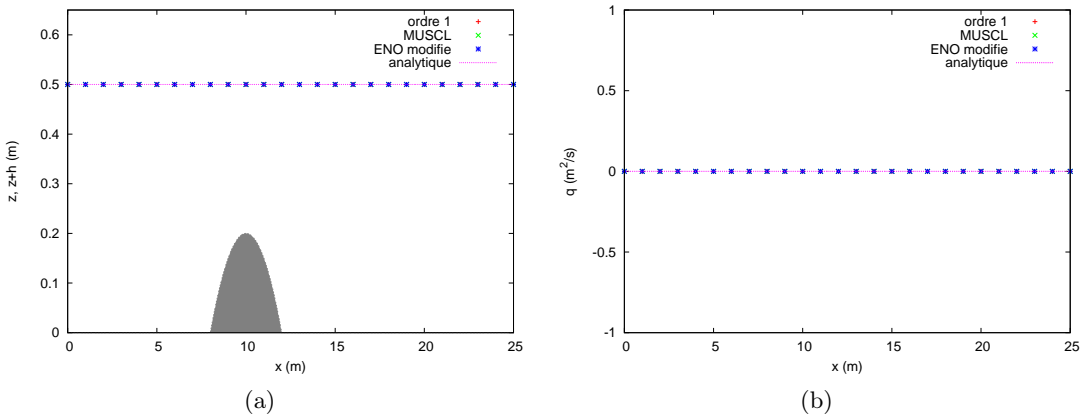


FIG. 2.9: Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s.

Nous avons aussi effectué ce test avec une cote de 0.1 m, nous obtenons ainsi un test avec une bosse émergée. La condition initiale est

$$z + h = \max(0.1, z) \text{ et } u = 0 \text{ m/s.}$$

Nous avons vérifié que le schéma préservait les équilibres au repos avec des interfaces sec/mouillé, comme illustré pour le flux de Rusanov au bout de 300 s (fig. 2.10). Nous pouvons constater une propriété importante du schéma, la présence des interfaces sec/mouillé n'introduit pas de débit artificiel (vérifié pour toutes les méthodes présentées).

– Écoulement fluvial

Pour les figures 2.11 à 2.15, obtenues pour l'écoulement fluvial, la partie (a) (respectivement (b)) correspond à la superposition de la surface libre (respectivement le débit) analytique avec les surfaces libres obtenues (respectivement les débits obtenus) à l'ordre 1, à l'ordre 2 avec la reconstruction MUSCL et à l'ordre 2 avec la reconstruction ENO modifiée en fonction de la position x pour le maillage le plus grossier (100 mailles). La partie (c) (respectivement (d)) correspond aux courbes de convergence L^1 pour h (respectivement q) en fonction du maillage pour les différentes méthodes. La partie (e) correspond à la comparaison des temps de calcul en

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

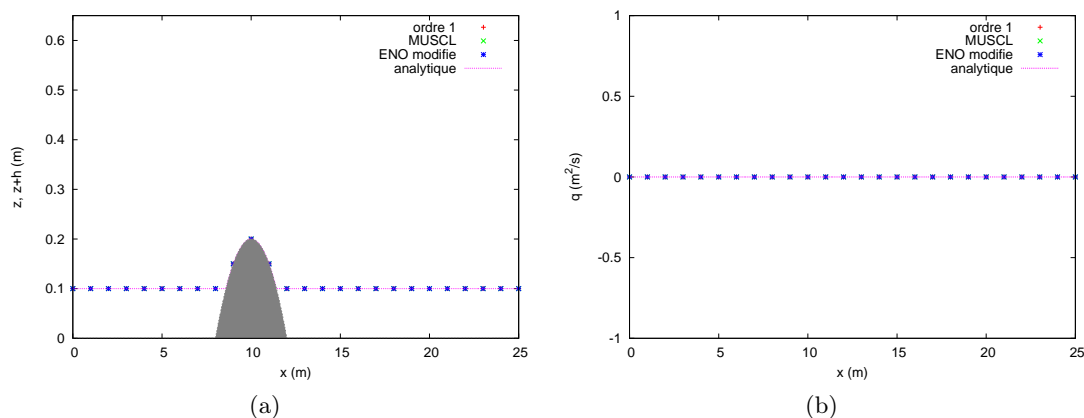


FIG. 2.10: Flux de Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s.

fonction du maillage pour les différentes méthodes. Enfin, la partie (f) correspond à l'étude de la convergence des méthodes vers les surfaces libres en fonction du temps de simulation pour 100 mailles.

La figure 2.16 constitue un bilan visuel des données que nous pouvons trouver dans la section C.1. La partie (a) (respectivement (b)) représente l'erreur faite sur h en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). La partie (c) (respectivement (d)) représente l'erreur faite sur le débit q en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). Enfin, la partie (e) (respectivement (f)) représente le temps de calcul en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée).

A $t = 300$ s, nous obtenons dans chacun des cas des solutions stationnaires (figs 2.11 f, 2.12 f, 2.13 f, 2.14 f et 2.15 f). Les résultats sont assez proches de l'état stationnaire exact (figs 2.11 a-b, 2.12 a-b, 2.13 a-b, 2.14 a-b et 2.15 a-b). A l'ordre 1, nous observons une surévaluation de la surface libre qui n'affecte pas le débit. Nous constatons une amélioration des résultats à l'ordre 2. L'étude des taux de convergence nous permet de retrouver les ordres théoriques (figs 2.11 c-d, 2.12 c-d, 2.13 c-d, 2.14 c-d et 2.15 c-d). Les résultats obtenus avec la reconstruction ENO modifiée sont légèrement meilleurs que les résultats donnés par la reconstruction MUSCL. Les temps de calcul sont à l'avantage de la reconstruction MUSCL (figs 2.11 e, 2.12 e, 2.13 e, 2.14 e et 2.15 e).

Le flux de Rusanov est le flux qui nécessite les temps de calcul les plus courts (figs 2.16 e-f), mais c'est aussi le moins précis (figs 2.16 a-b-c-d) et avec la reconstruction ENO, nous observons des oscillations sur le débit (fig. 2.11 b).

Le flux cinétique est le flux qui nécessite les temps de calcul les plus longs (figs 2.16 e-f), il nécessite un nombre d'itérations en temps plus grand (voir l'annexe C) dû au calcul de sa condition de CFL (voir la section 2.1.2.5). Sa précision sur le calcul des débits est comparable aux flux HLL, VFRoe-ncv et Apstat (figs 2.16 c-d). Mais les hauteurs sont moins bien calculées (figs 2.16 a-b).

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

Les flux HLL, VFRoe-ncv et Apstat donnent des résultats comparables (figs 2.16 a-b-c-d), mais les temps de calcul sont à l'avantage du flux VFRoe-ncv (figs 2.16 e-f).

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

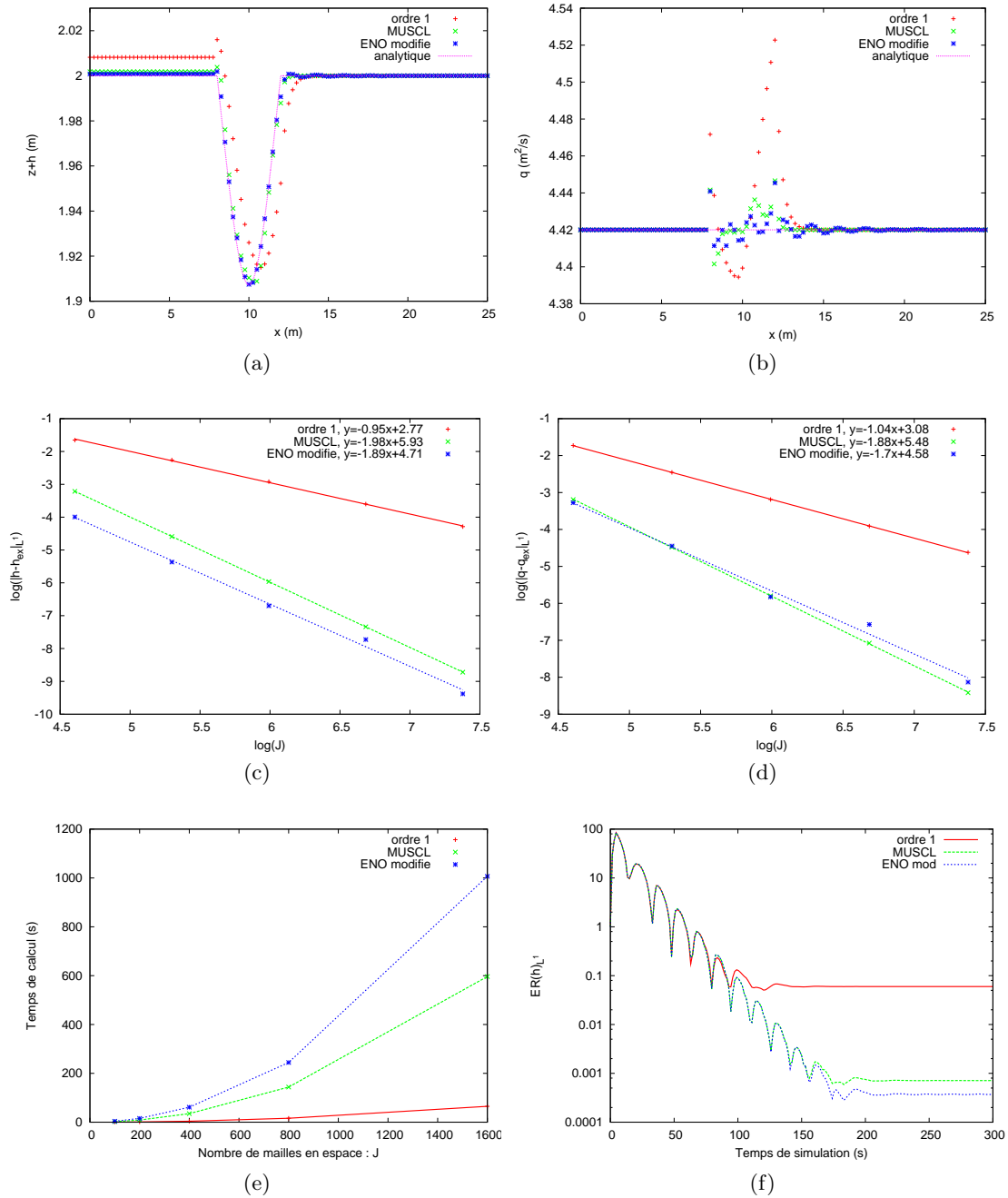


FIG. 2.11: Flux Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

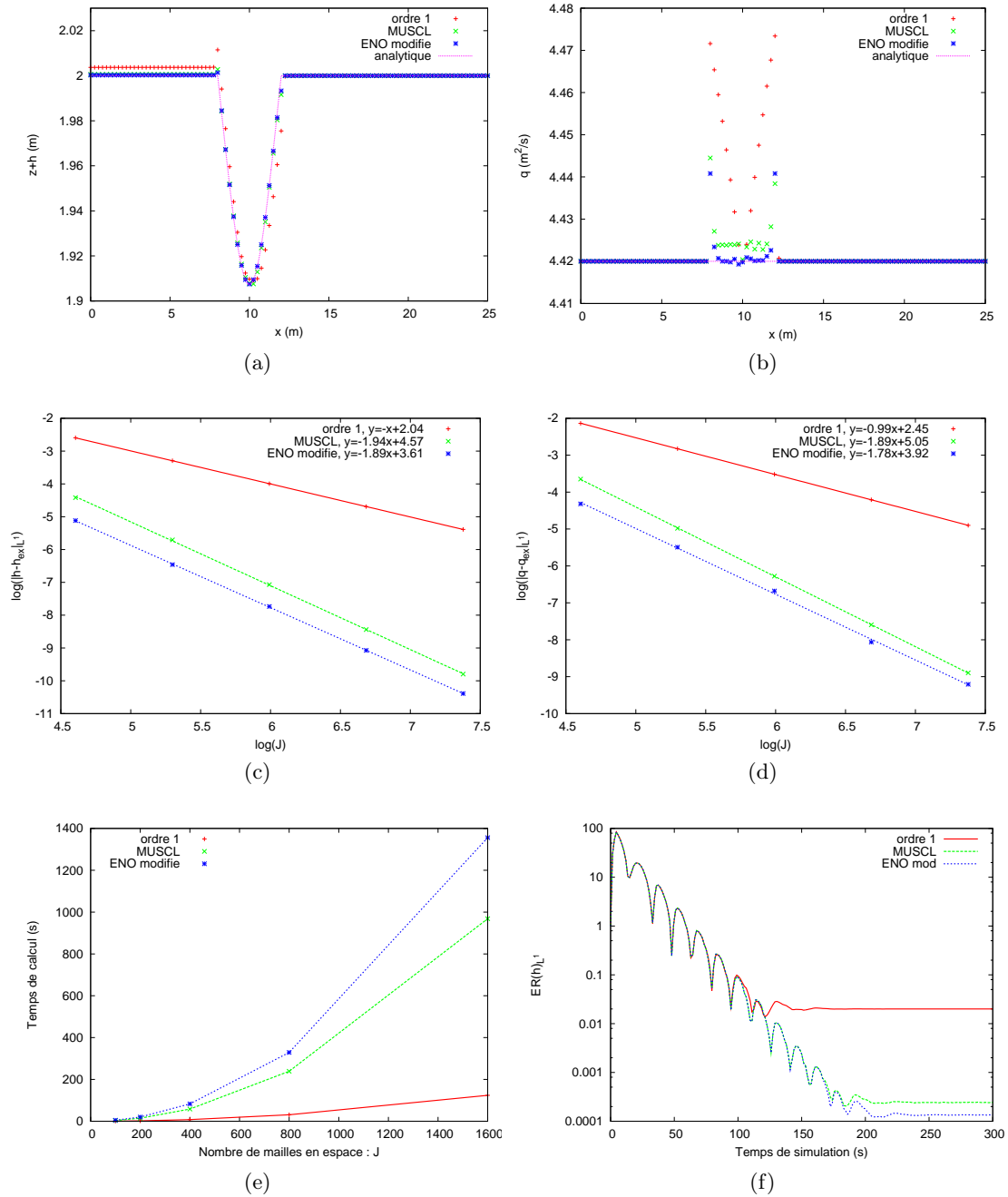


FIG. 2.12: Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

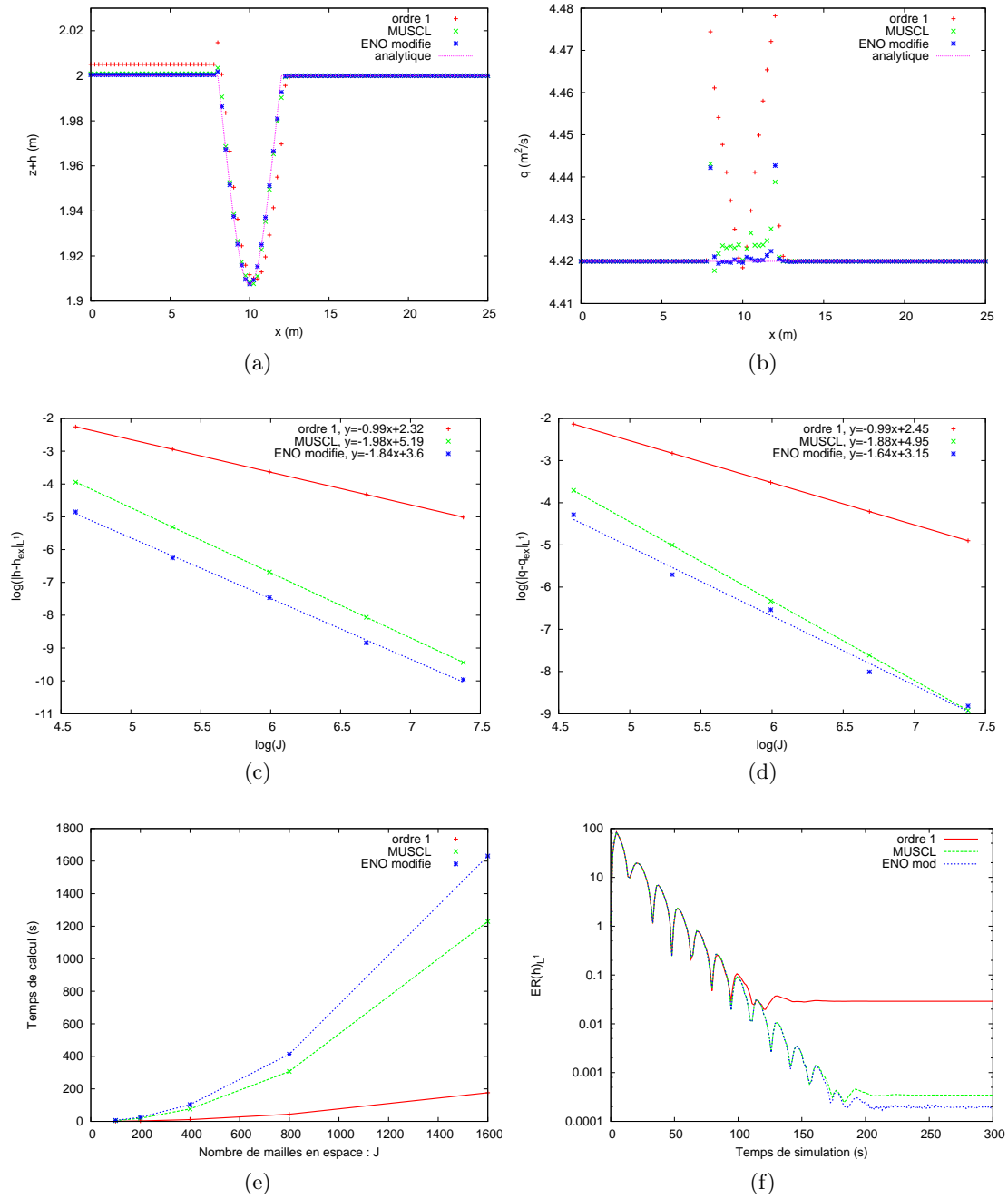


FIG. 2.13: Flux Cinétique : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

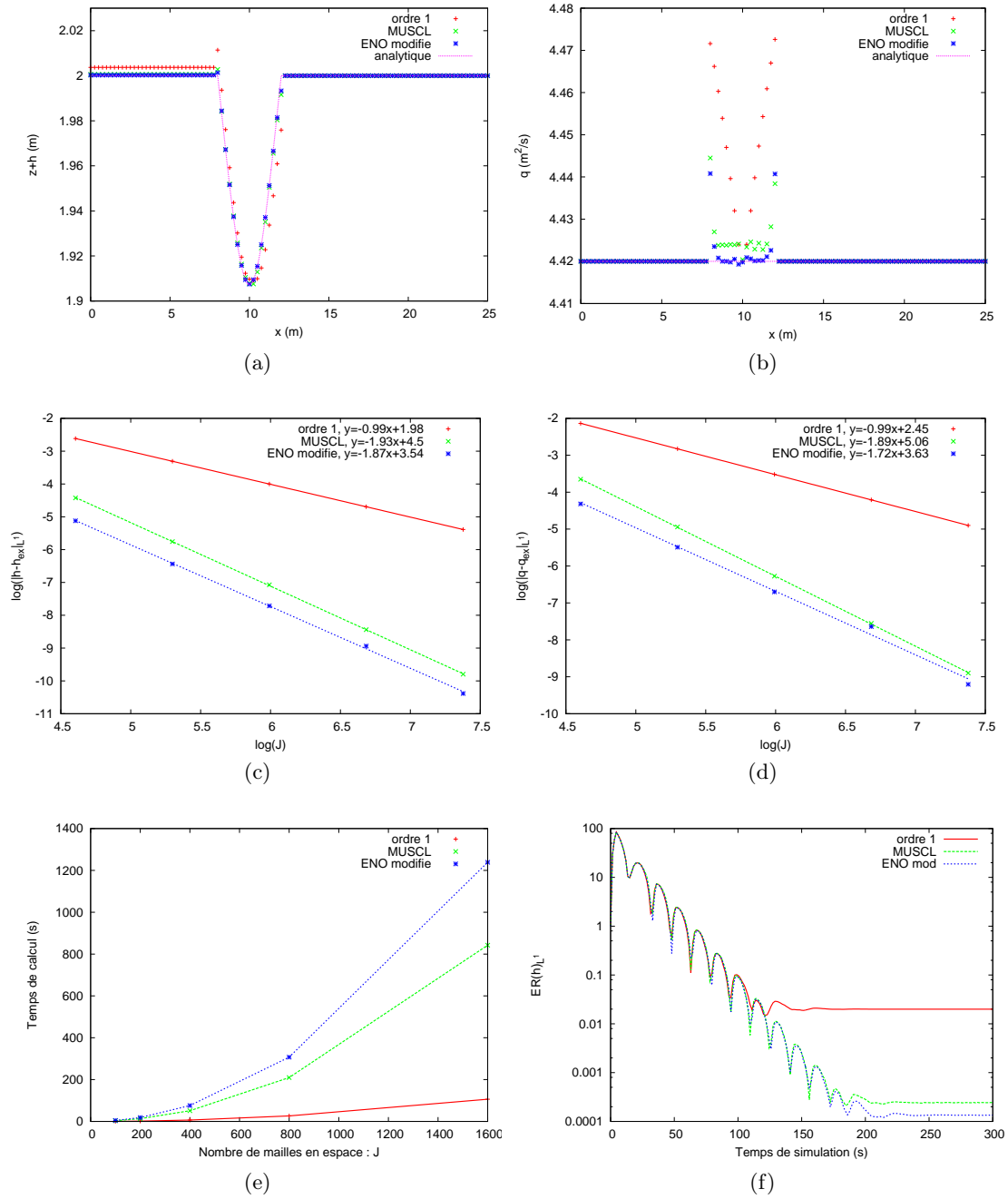


FIG. 2.14: Flux VFRoe-ncv : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

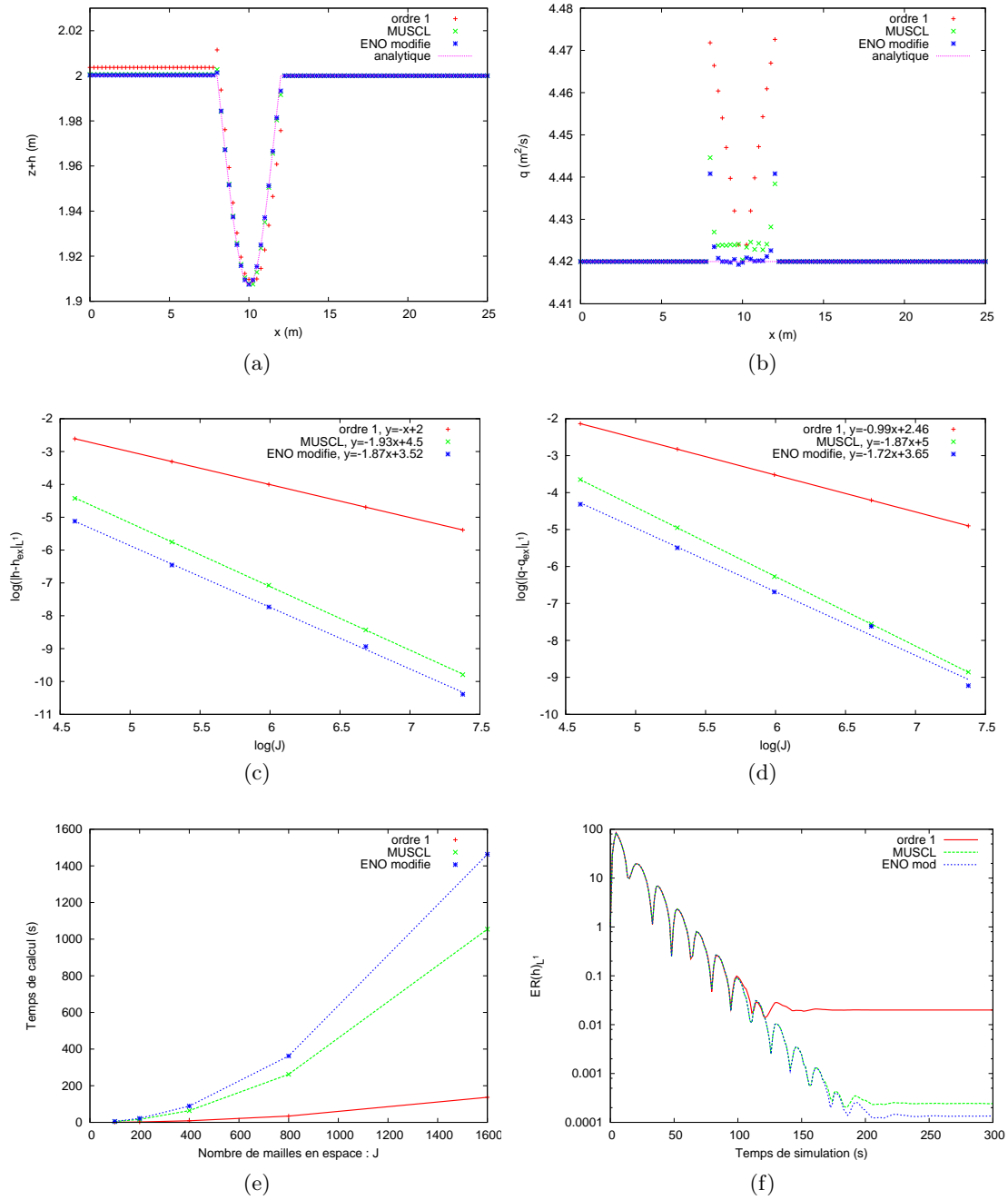


FIG. 2.15: Flux Apstat : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

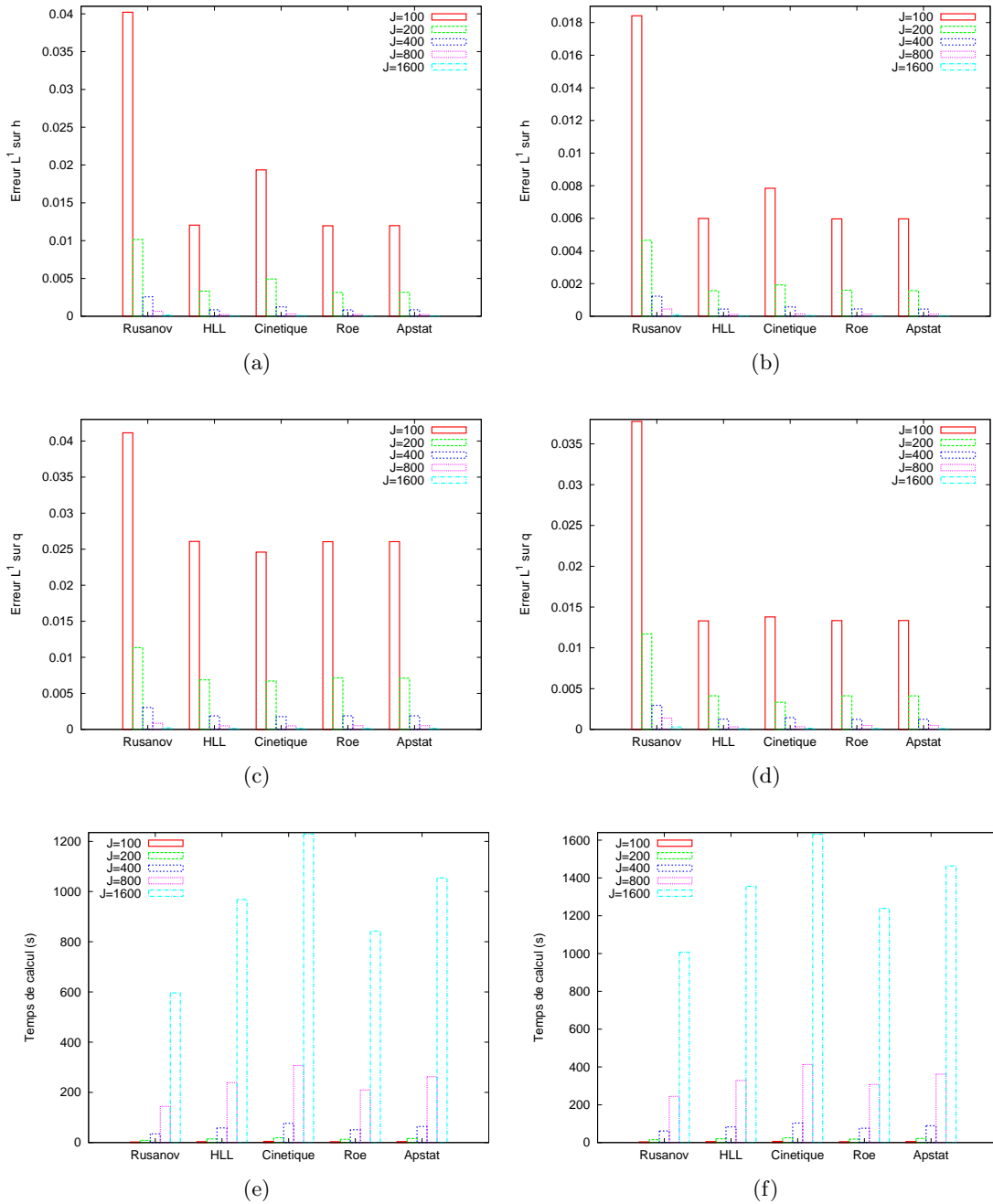


FIG. 2.16: Ecoulement fluvial : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.

– Écoulement transcritique

Pour les figures 2.17 à 2.21 obtenues pour l'écoulement transcritique, la partie (a) (respectivement (b)) correspond à la superposition de la surface libre (respectivement le débit) analytique avec les surfaces libres obtenues (respectivement les débits obtenus) à l'ordre 1, à l'ordre 2 avec la reconstruction MUSCL et à l'ordre 2 avec la reconstruction ENO modifiée en fonction de la position x pour le maillage le plus grossier (100 mailles). La partie (c) (respectivement (d)) correspond aux courbes de convergence L^1 pour h (respectivement q) en fonction du maillage pour les différentes méthodes. La partie (e) correspond à la comparaison des temps de calcul en fonction du maillage pour les différentes méthodes. Enfin, la partie (f) correspond à l'étude de la convergence des méthodes vers les surfaces libres en fonction du temps de simulation pour 100 mailles.

La figure 2.22 constitue un bilan visuel des données que nous pouvons trouver dans la section C.2. La partie (a) (respectivement (b)) représente l'erreur faite sur h en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). La partie (c) (respectivement (d)) représente l'erreur faite sur q en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). Enfin, la partie (e) (respectivement (f)) représente le temps de calcul en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée).

À $t = 300$ s, nous obtenons dans chacun des cas une solution stationnaire (figs 2.17 f, 2.18 f, 2.19 f, 2.20 f et 2.21 f). Nous constatons même que ces équilibres sont atteints à $t = 50$ s. Les résultats sont assez bons, excepté pour le flux de Rusanov à l'ordre 1. Dans ce cas la surface libre et le débit ne sont pas calculés correctement (figs 2.17 a-b). Il faut noter que ce problème disparaît en raffinant le maillage. L'ordre 2 permet une amélioration des résultats et nous retrouvons à nouveau les ordres théoriques (figs 2.17 c-d, 2.18 c-d, 2.19 c-d, 2.20 c-d et 2.21 c-d). Les résultats obtenus avec la reconstruction MUSCL et ENO modifiée sont vraiment très proches (figs 2.18 c-d, 2.19 c-d, 2.20 c-d et 2.21 c-d), avec des temps de calcul plus faibles pour la reconstruction MUSCL (figs 2.17 e, 2.18 e, 2.19 e, 2.20 e et 2.21 e).

Le flux de Rusanov reste globalement le flux numérique le moins précis (figs 2.22 a-b-c-d). De plus, ses temps de calcul sont comparables aux autres flux numériques (figs 2.22 e-f).

Les quatre autres flux donnent des résultats comparables sur le calcul des débits (figs 2.22 c-d). Cependant, pour des maillages "grossiers" (100 mailles), les flux VFRoe-ncv et apstat sont moins précis que les flux HLL et cinétique dans le calcul de la surface libre (figs 2.22 a-b).

Enfin, le flux cinétique coûte plus cher en temps de calcul que le flux HLL (et que tous les autres flux, voir figs 2.22 e-f).

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

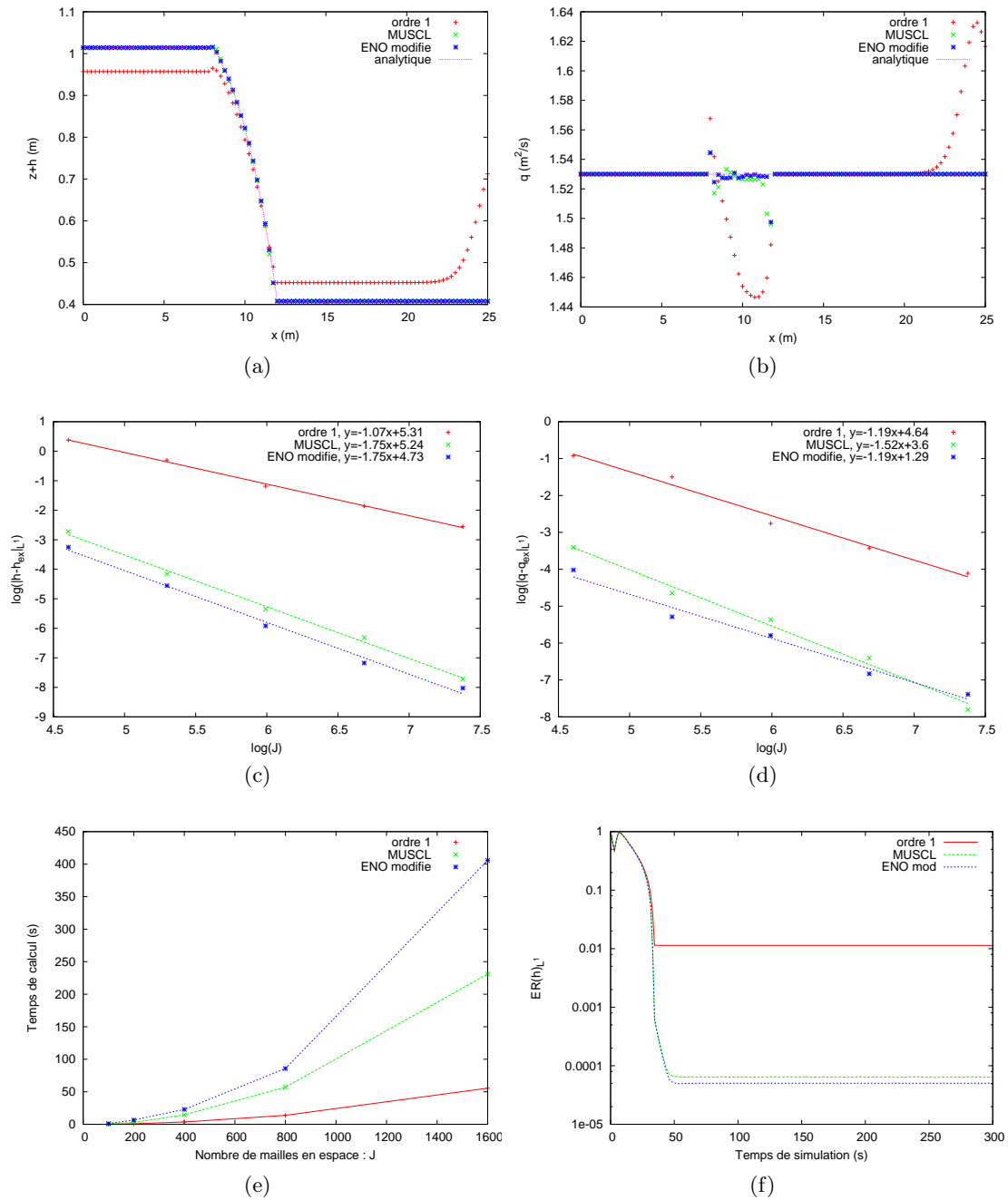


FIG. 2.17: Flux Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

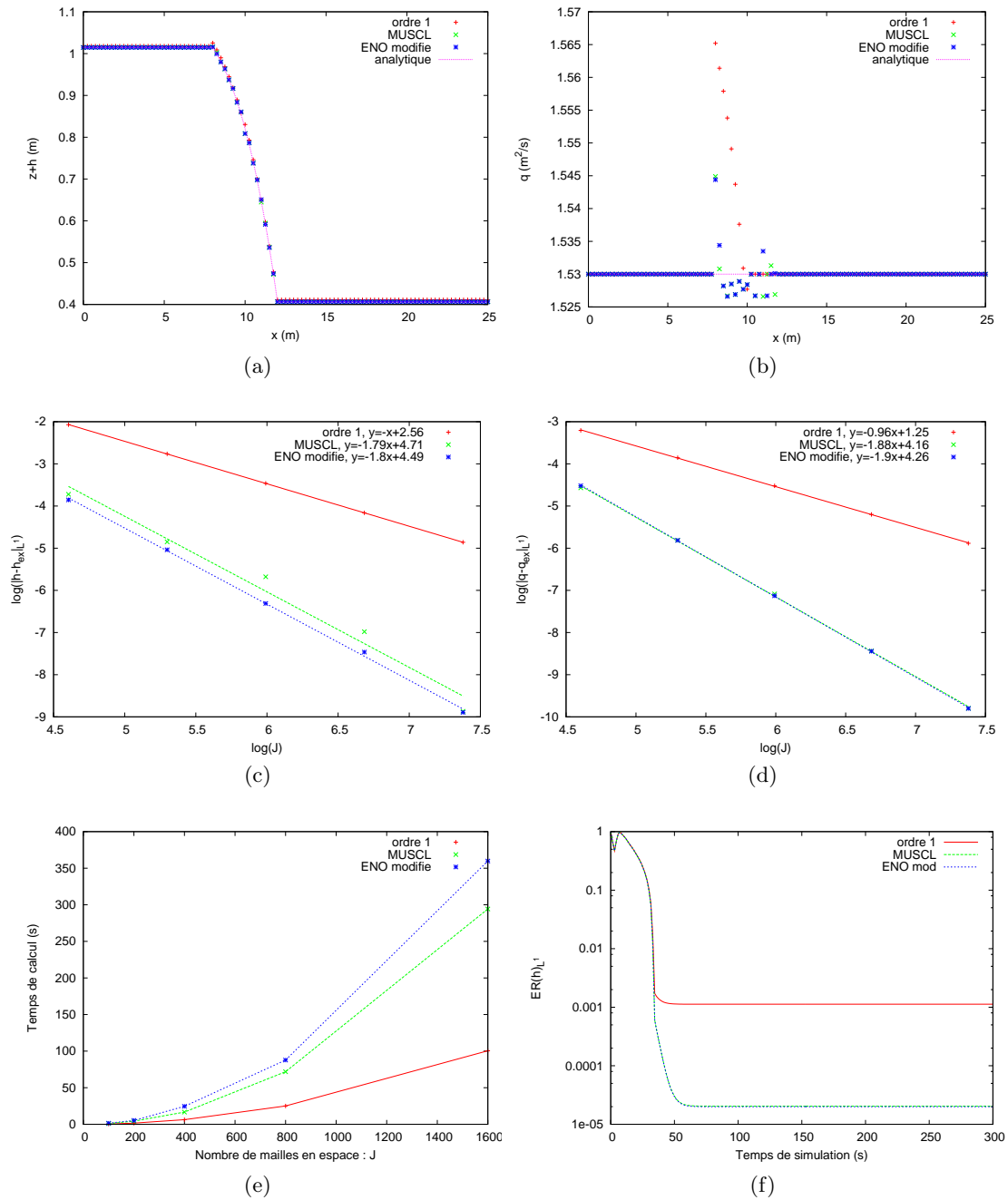


FIG. 2.18: Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

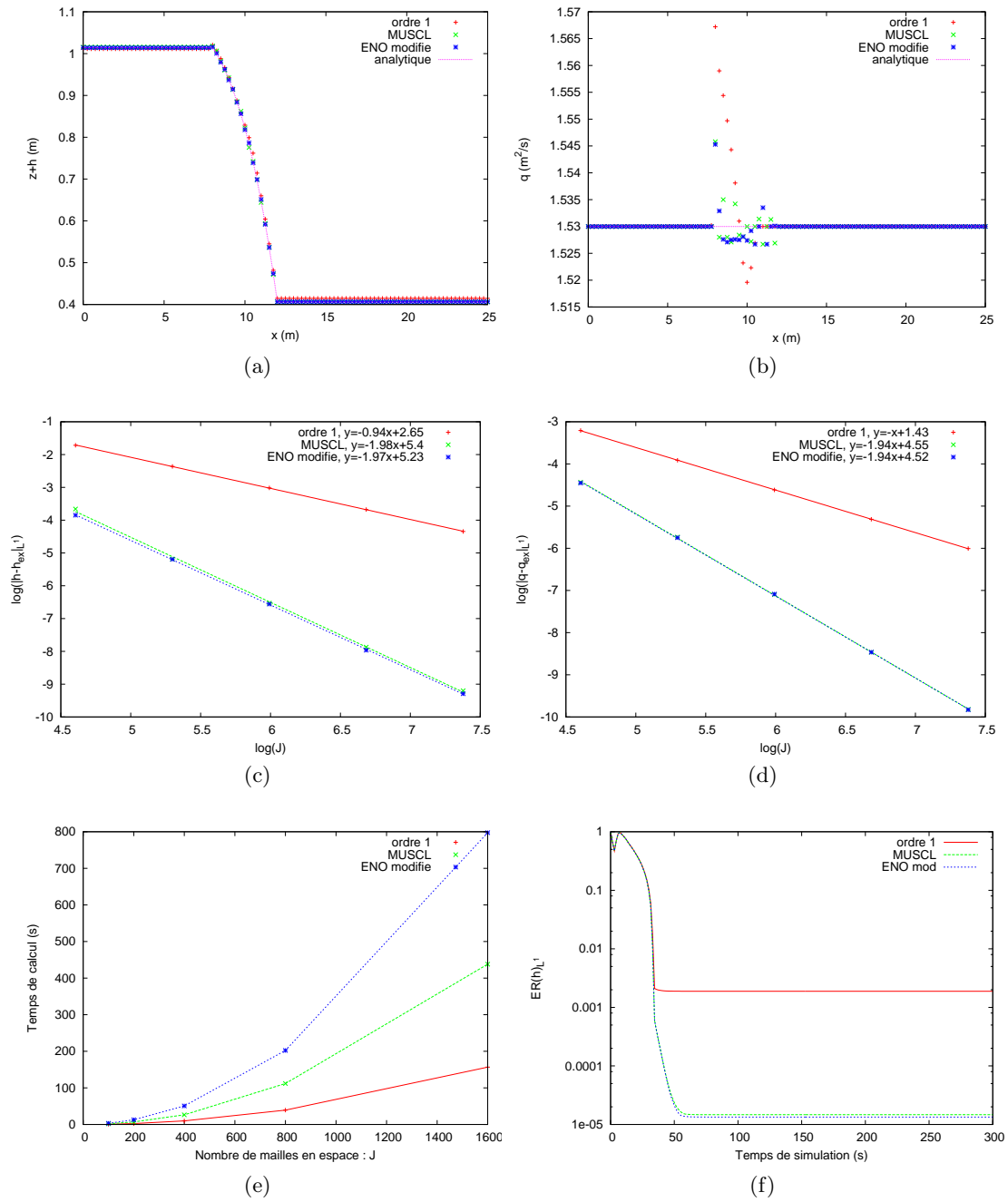


FIG. 2.19: Flux Cinétique : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

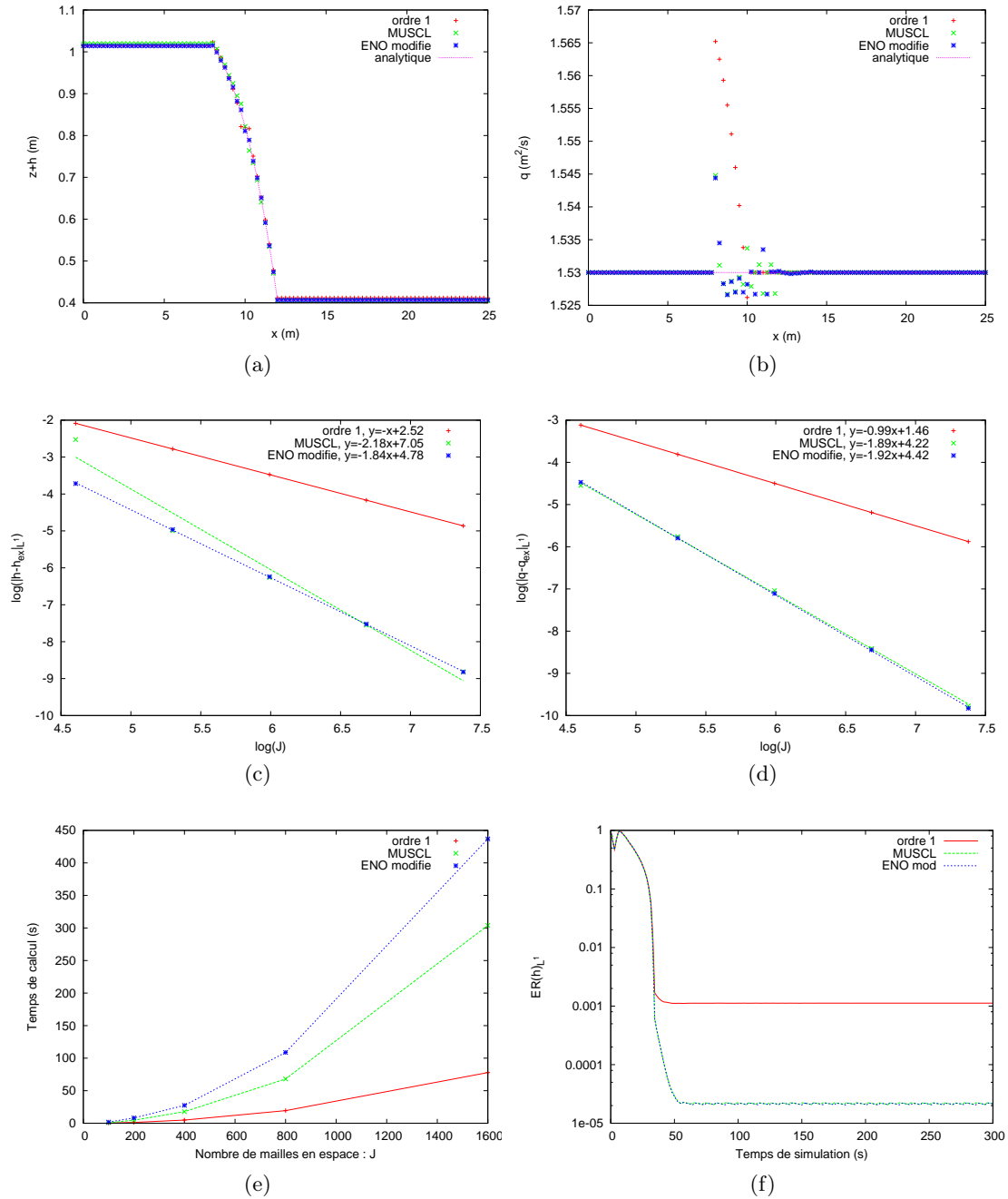


FIG. 2.20: Flux VFRoe-ncv : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

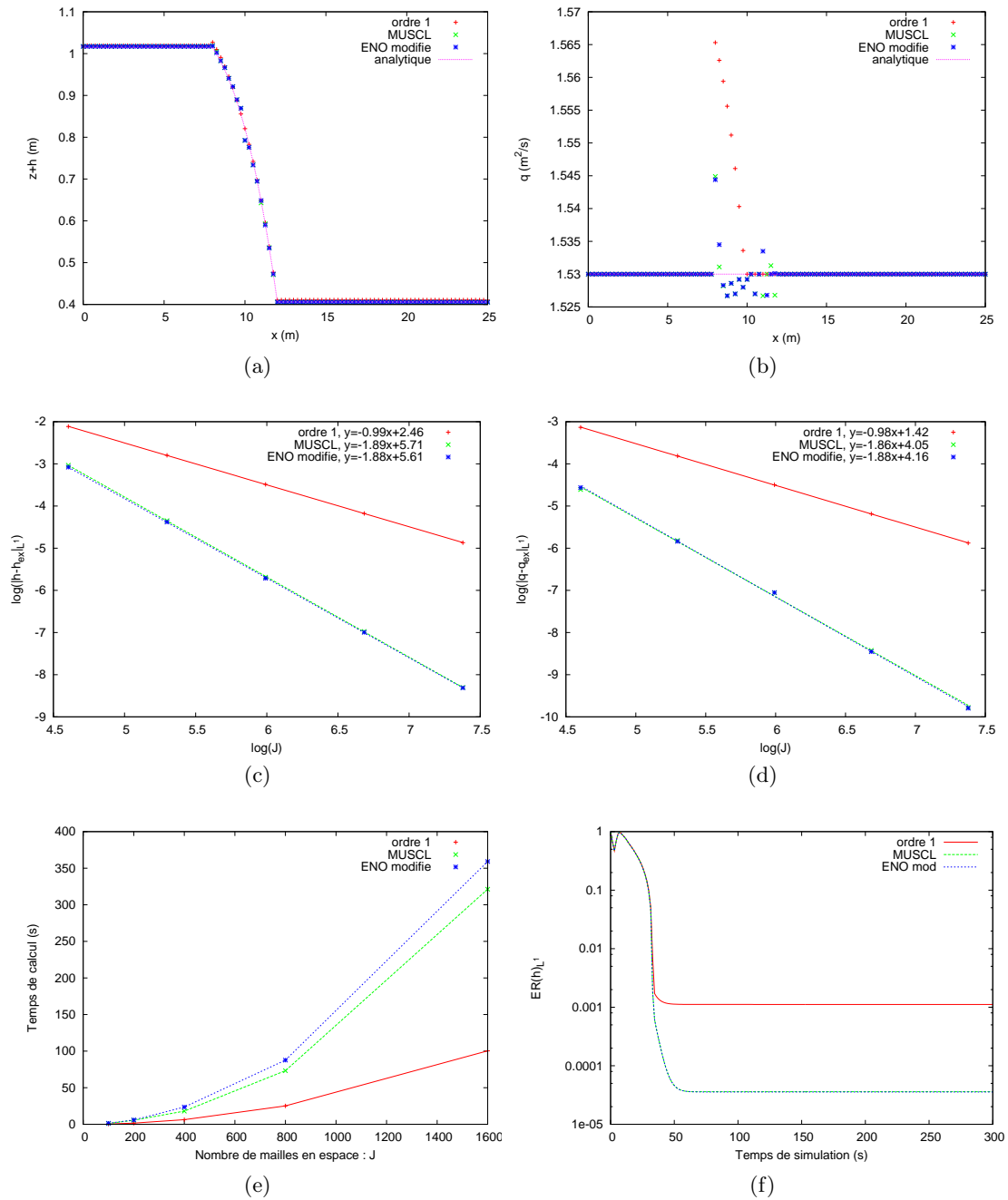


FIG. 2.21: Flux Apstat : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

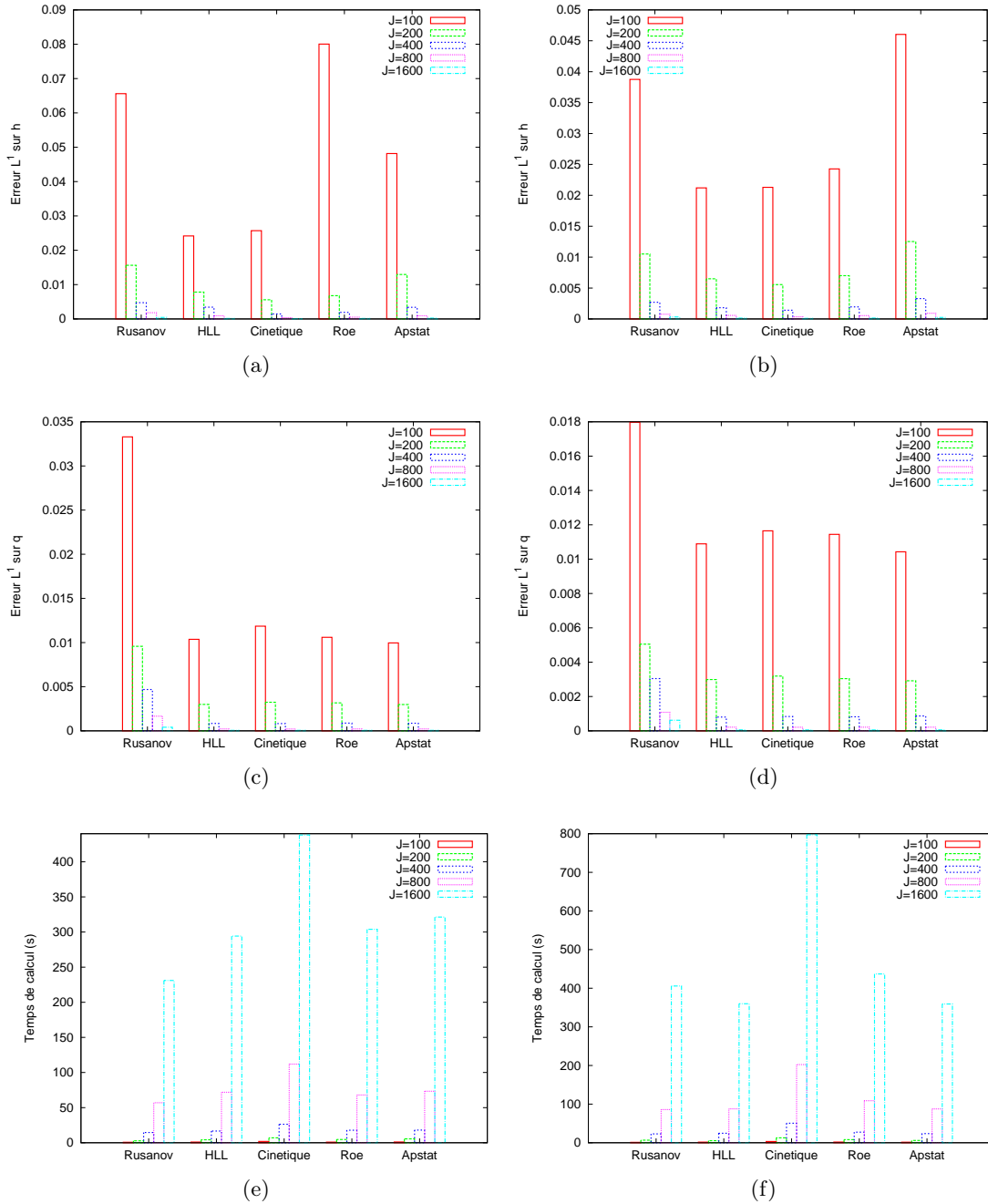


FIG. 2.22: Ecoulement transcritique : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.

– **Écoulement transcritique avec ressaut**

Pour les figures 2.23 à 2.27, obtenues pour l'écoulement transcritique avec ressaut, la partie (a) (respectivement (b)) correspond à la superposition de la surface libre (respectivement le débit) analytique avec les surfaces libres obtenues (respectivement les débits obtenus) à l'ordre 1, à l'ordre 2 avec la reconstruction MUSCL et à l'ordre 2 avec la reconstruction ENO modifiée en fonction de la position x pour le maillage le plus grossier (100 mailles). La partie (c) (respectivement (d)) correspond aux courbes de convergence L^1 pour h (respectivement q) en fonction du maillage pour les différentes méthodes. La partie (e) correspond à la comparaison des temps de calcul en fonction du maillage pour les différentes méthodes. Enfin, la partie (f) correspond à l'étude de la convergence des méthodes vers les surfaces libres en fonction du temps de simulation pour 100 mailles.

La figure 2.28 constitue un bilan visuel des données que nous pouvons trouver dans la section C.3. La partie (a) (respectivement (b)) représente l'erreur faite sur h en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). La partie (c) (respectivement (d)) représente l'erreur faite sur q en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). Enfin, la partie (e) (respectivement (f)) représente le temps de calcul en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée).

La surface libre et le débit pour 100 mailles semblent être capturés correctement excepté pour le flux apstat avec la reconstruction MUSCL (figs 2.27 a-b). La plupart des méthodes conduisent à une solution presque stationnaire à $t = 300$ s (figs 2.23 f, 2.24 f, 2.25 f et 2.26 f), excepté pour le flux apstat (fig 2.27 f). Les résultats du flux apstat sont trop irréguliers pour être analysés (figs 2.27 d-f et 2.28 b-d). C'est un phénomène que nous retrouvons pour tous les flux numériques avec la reconstruction ENO modifié (figs 2.28 b-d).

La reconstruction MUSCL permet d'obtenir des résultats meilleurs qu'à l'ordre 1 (figs 2.23 c-d, 2.24 c-d, 2.25 c-d et 2.26 c-d). Cependant, nous pouvons observer une réduction de l'ordre de la méthode MUSCL due à la présence du ressaut. En effectuant le calcul des erreurs en amont du ressaut, nous retrouvons l'ordre théorique de la méthode (fig 2.29).

Nous allons donc focaliser notre étude sur la comparaison des flux de Rusanov, HLL, cinétique et VFRoe-ncv pour la reconstruction MUSCL.

Le flux de Rusanov reste le flux le moins précis (figs 2.28 a-c), mais est aussi le moins coûteux en temps de calcul (fig 2.28 e).

Le flux HLL est un peu moins précis que les flux cinétique et VFRoe-ncv dans le calcul des hauteurs d'eau et des débits (figs 2.28 a-c). Et il nécessite un petit peu plus de temps de calcul que le flux VFRoe-ncv (fig 2.28 e).

Le flux cinétique donne des résultats comparables au flux VFRoe-ncv (figs 2.28 a-c), mais reste handicapé par le temps de calcul (fig 2.28 e).

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

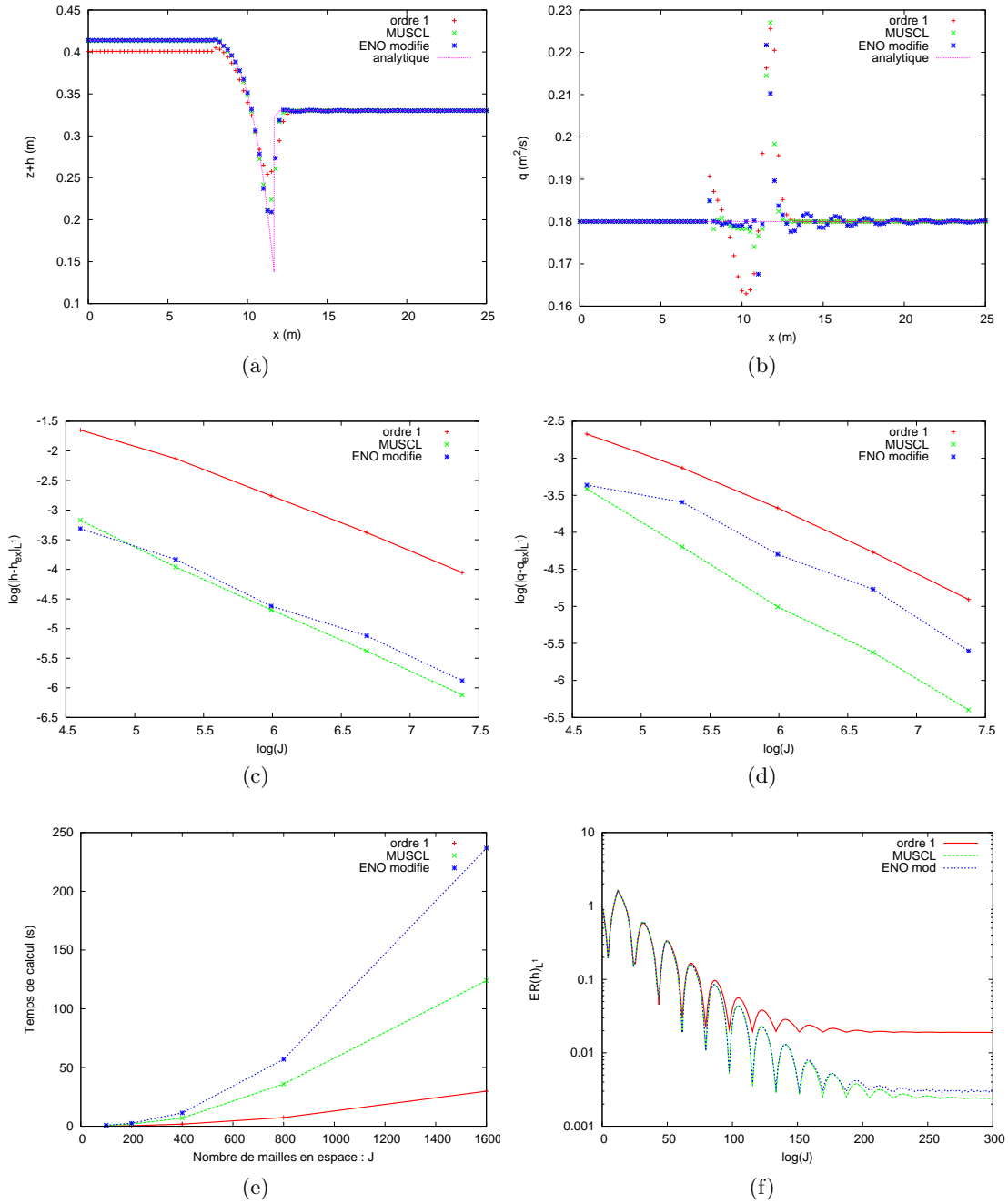


FIG. 2.23: Flux Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

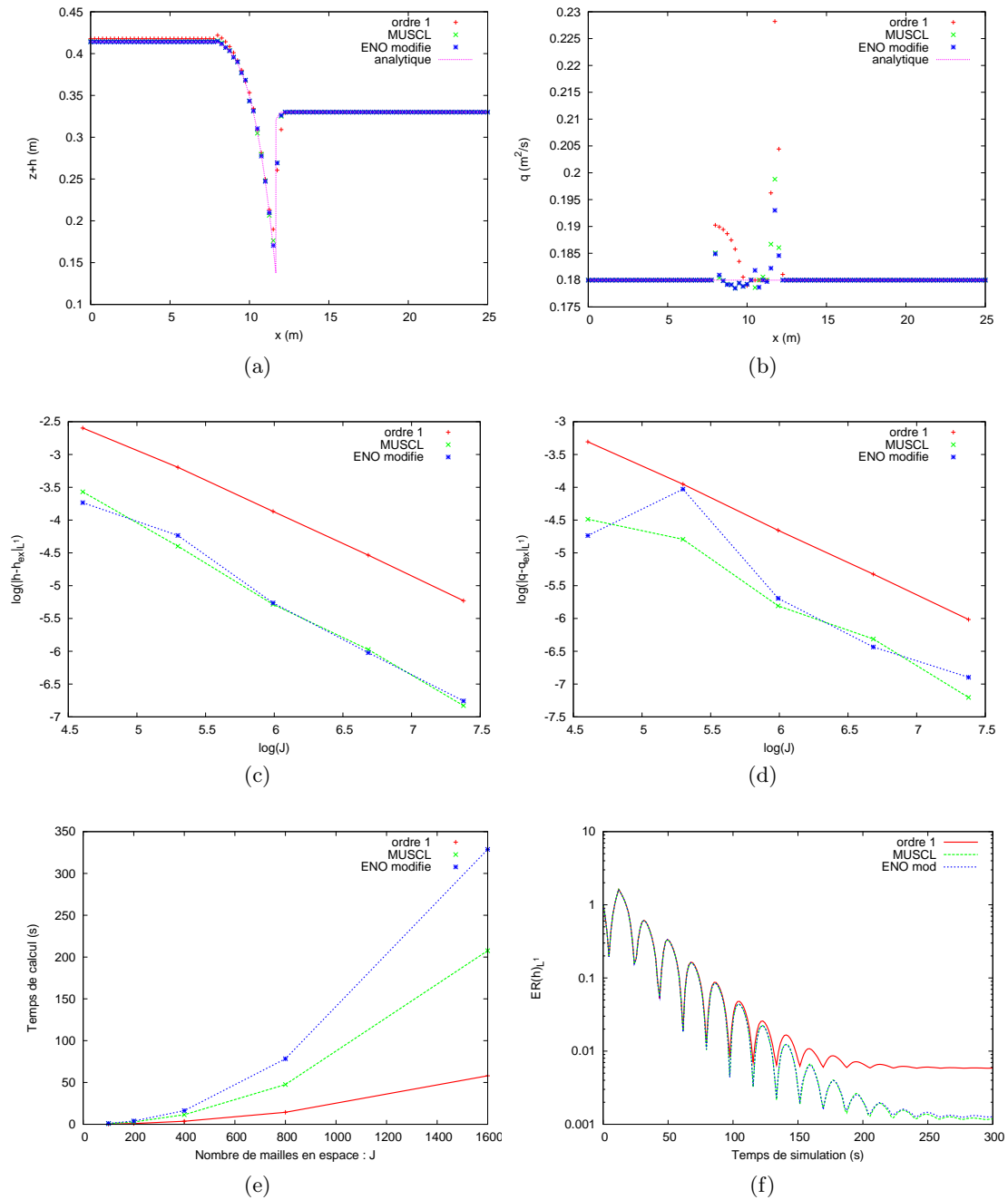


FIG. 2.24: Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

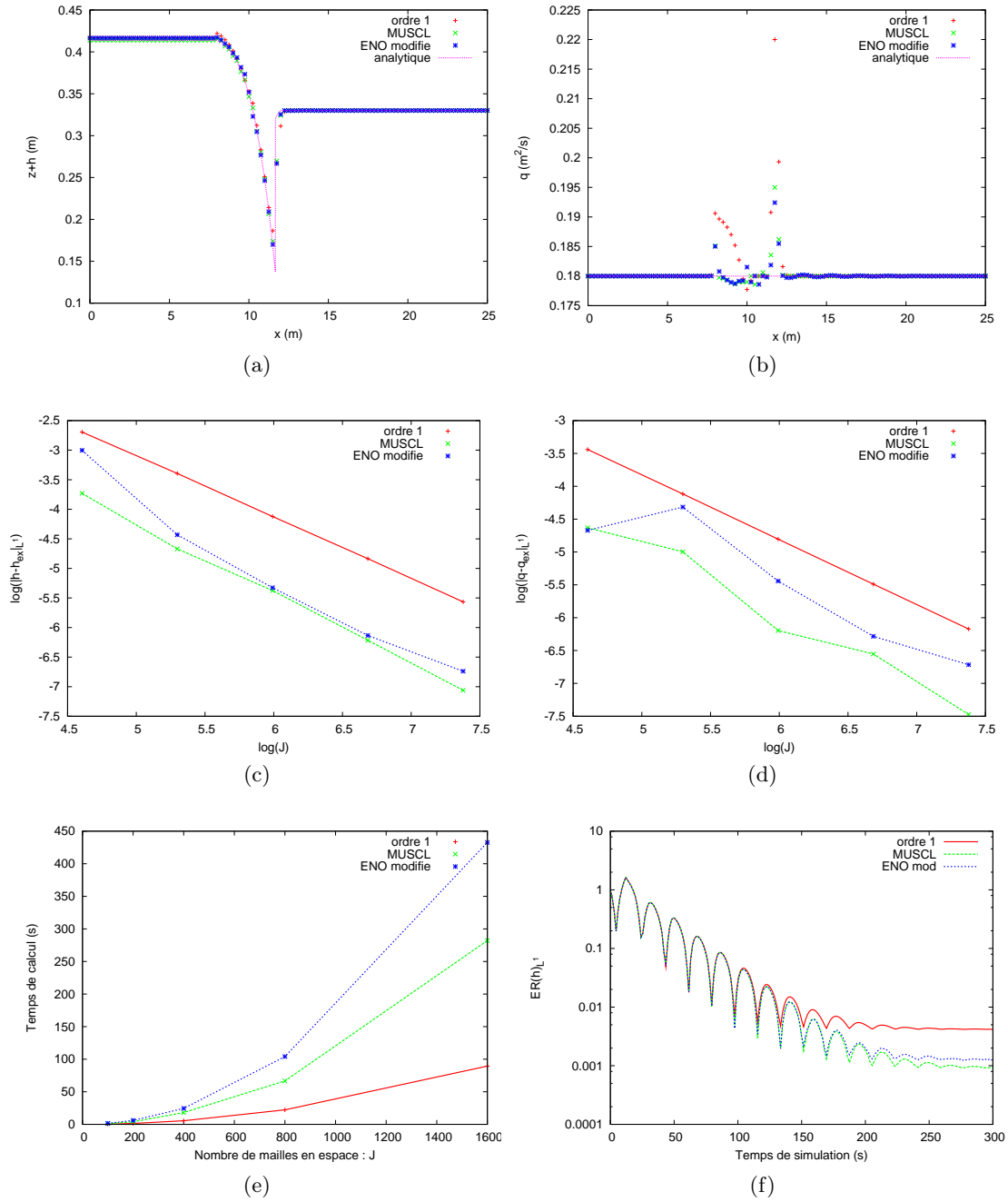


FIG. 2.25: Flux Cinétique : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

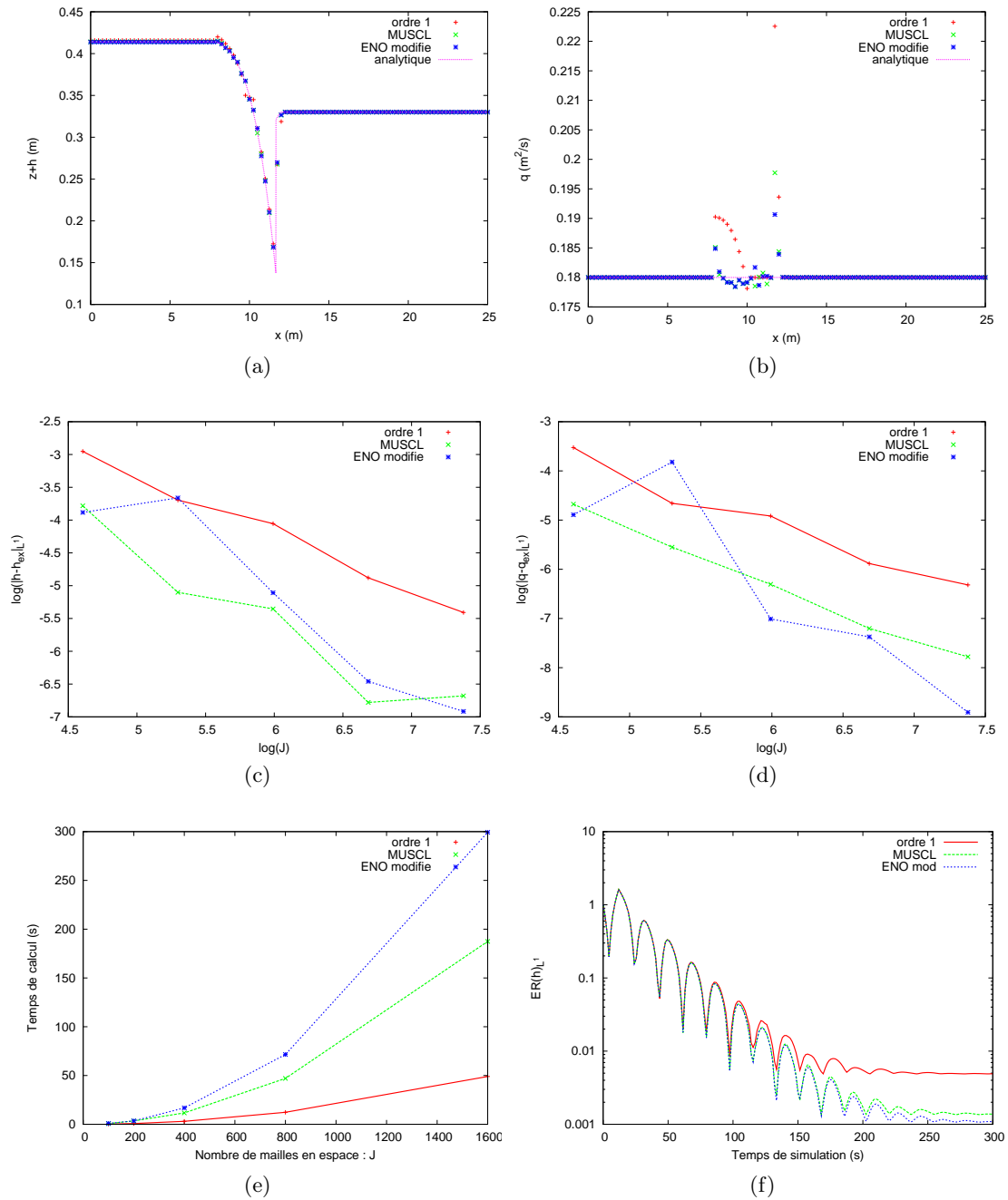


FIG. 2.26: Flux VFRoe-ncv : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

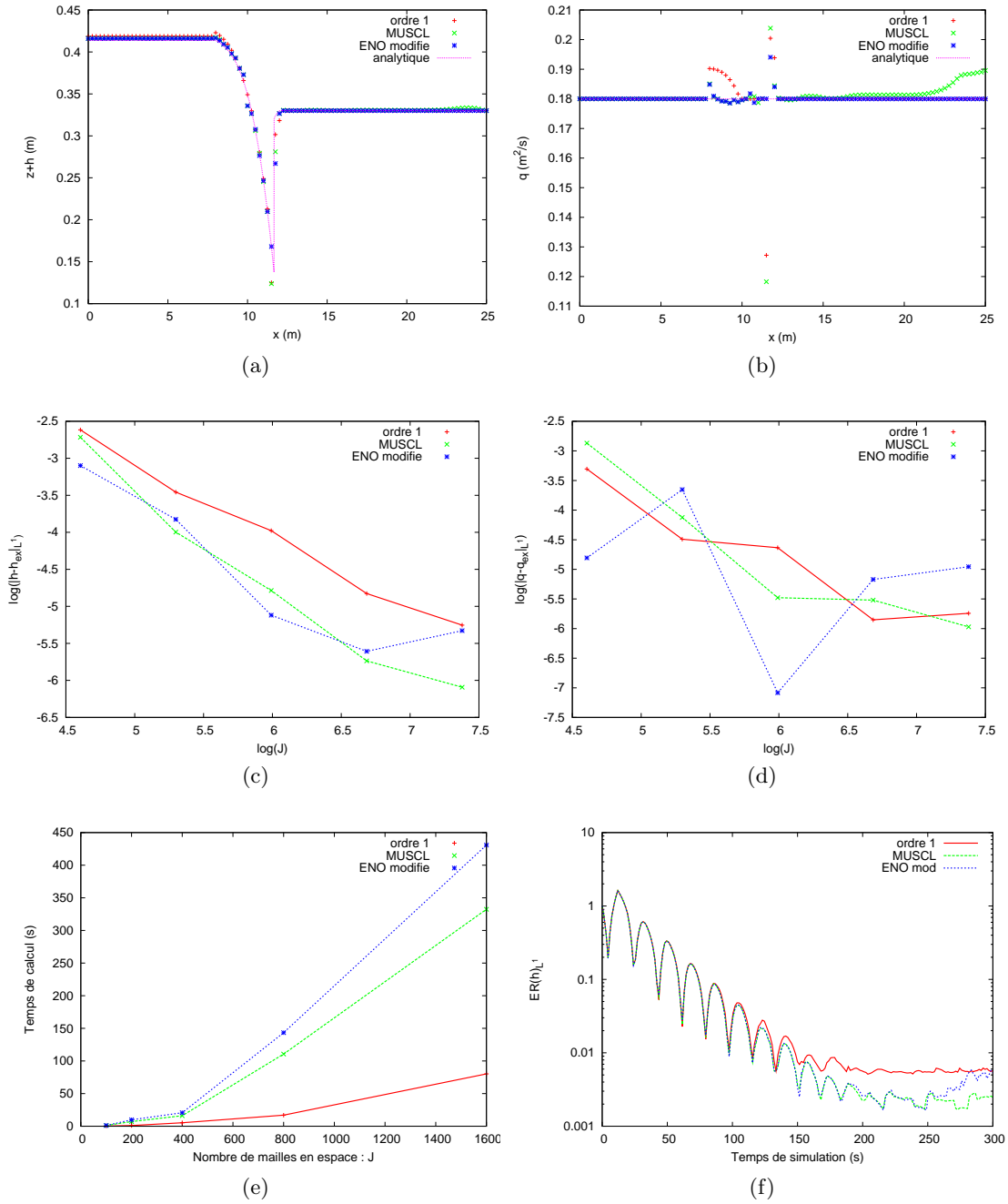


FIG. 2.27: Flux Apstat : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

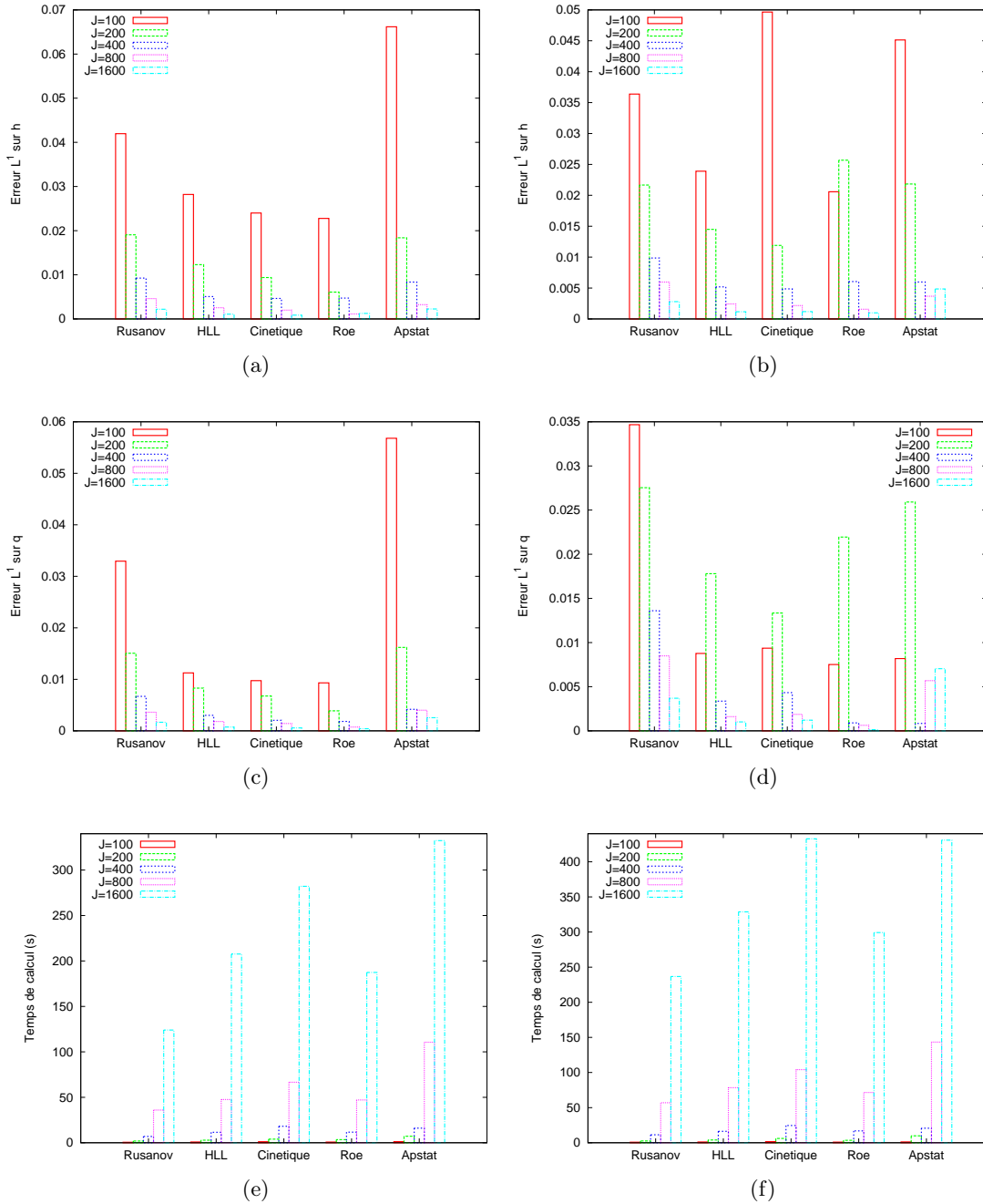


FIG. 2.28: Ecoulement transcritique avec ressaut : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

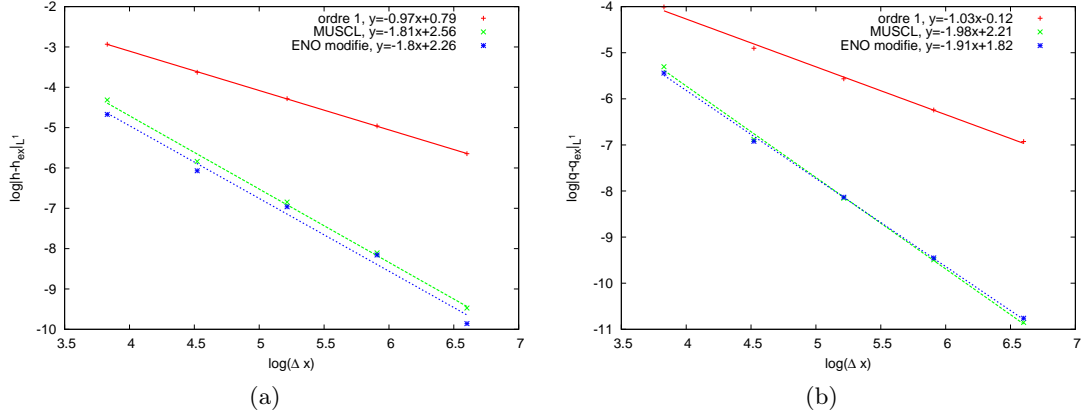


FIG. 2.29: Flux HLL : comparaison des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) le débit en amont du ressaut.

2.2.2.3 Thacker

Pour le cas test de cette section, nous avons utilisé une discrétisation numérique de 25, 50, 100, 200 et 400 mailles. Le temps total de la simulation correspond à 5 périodes ($t = 5T$, voir B.3 pour l'expression de T). A partir des résultats de la section précédente, nous choisissons de focaliser notre étude sur les méthodes numériques d'ordre 2. Nous avons utilisé une condition de CFL de 0.5. Les calculs effectués avec le flux Apstat ont donné des hauteurs d'eau négatives. Exceptionnellement pour ce flux numérique et ce cas test, nous avons remplacé les valeurs négatives (non physiques) par des hauteurs nulles. Ce qui nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants, ceci témoigne de la robustesse de la méthode numérique choisie. En raison des hauteurs d'eau négatives obtenues, nous excluons le flux Apstat de notre analyse. Dans cette section, nous avons choisi d'étudier le flux HLL (voir la section 2.1.2.1).

Pour les figures 2.30 à 2.35, obtenues pour le cas test de Thacker, la partie (a) (respectivement (b)) correspond à l'évolution de l'erreur relative faite sur les hauteurs d'eau (de l'erreur faite sur les débits) au cours du temps pour deux maillages ($J = 50$ et $J = 400$) pour les reconstructions MUSCL et ENO modifiée. La partie (c) (respectivement (d)) correspond aux courbes de convergence L^1 pour h (respectivement q) en fonction du maillages pour les deux reconstructions. La partie (e) représente les débits obtenus à $t = 5T$ pour deux maillages ($J = 50$ et $J = 400$) pour les deux reconstructions. Enfin, la partie (f) correspond à la comparaison des temps de calcul en fonction du maillage pour les deux reconstructions.

La figure 2.36 constitue un bilan visuel. La partie (a) (respectivement (b)) représente l'erreur faite sur h en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). La partie (c) (respectivement (d)) représente l'erreur faite sur le débit q en fonction du nombre de mailles pour les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée). Enfin, la partie (e) (respectivement (f)) représente le temps de calcul en fonction du nombre de mailles pour

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

les différents flux avec la reconstruction MUSCL (respectivement ENO modifiée).

L'étude des taux de convergence à $t = 5T$, nous permet de retrouver les ordres théoriques (figs 2.30 c-d, 2.31 c-d, 2.32 c-d, 2.33 c-d, 2.34 c-d et 2.35 c-d). Les résultats obtenus avec la reconstruction ENO modifiée sont à nouveau légèrement meilleurs que les résultats obtenus par la reconstruction MUSCL (figs 2.36 a-b-c-d). Les erreurs faites sur les hauteurs et les débits augmentent en fluctuant au cours du temps (figs 2.30 a-b, 2.31 a-b, 2.32 a-b, 2.33 a-b, 2.34 a-b et 2.35 a-b). A $t = 5T$, nous constatons l'amélioration du calcul des débits avec l'augmentation du nombre de mailles (figs 2.30 e, 2.31 e, 2.32 e, 2.33 e, 2.34 e et 2.35 e). A la fin de la simulation, nous constatons un léger amortissement des oscillations pour un maillage grossier ($J = 50$), mais qui disparaît en prenant un maillage plus fin ($J = 400$), comme illustré pour le flux HLL sur les figures 2.37 c-d. Sur la figure 2.37 b, nous avons tracé l'évolution au cours du temps de la hauteur d'eau en $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$ et $x_3 = 1$ avec le flux HLL, la reconstruction MUSCL et $J = 400$ mailles en espace. Nous constatons (comme pour les autres flux numériques) que le phénomène périodique est parfaitement capturé. La figure 2.37 a représente l'évolution du volume en eau au cours du temps pour le flux HLL. Nous constatons une parfaite conservation du volume d'eau, ainsi qu'une convergence vers le volume exact en raffinant le maillage (les résultats obtenus avec les autres flux numériques sont identiques).

Les résultats obtenus avec le flux VFRoe-ncv sont moins précis que ceux obtenus avec les autres flux numériques. Le flux cinétique est à nouveau le flux qui nécessite les temps de calcul les plus longs. Sa précision sur le calcul des hauteurs d'eau et des débits est comparable à celle obtenue avec les flux HLL et HLLE. Le flux HLLE est légèrement plus coûteux en temps de calcul que le flux HLL, ceci s'explique algorithmiquement par la présence de tests supplémentaires. Enfin, le flux de Rusanov est à la fois le plus précis et le moins coûteux.

Ce cas test nous a aussi permis de faire des essais avec la reconstruction MUSCL en remplaçant le limiteur de pente minmod (MUSCL MM) par le limiteur de Van Leer (MUSCL VL, voir entre autres Zhou et al. [2001])

$$VL(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \leq 0 \\ \frac{2xy}{x+y} & \text{sinon} \end{cases},$$

avec et sans correction du vide (2.6). Les résultats obtenus avec le flux HLL (les autres flux donnent des résultats comparables) sont présentés sur les figures 2.37 e-f et 2.38. Le limiteur de pente de Van Leer et la correction du vide permettent d'améliorer les transitions sec/mouillé au niveau des interfaces (figs 2.37 e-f pour $J = 400$). De plus, le limiteur de Van Leer et la correction du vide permettent de réduire la diffusion numérique du schéma et d'augmenter la précision dans le calcul des hauteurs d'eau et des débits (figs 2.38 a-b-e). L'étude des taux de convergence à $t = 5T$ nous permet de retrouver des méthodes d'ordre 2 (figs 2.38 c-d). Enfin, pour des maillages grossiers la reconstruction MUSCL minmod permet d'obtenir les temps de calcul les plus courts, ce qui s'inverse à l'avantage du limiteur de Van Leer pour des maillages plus fins (voir 2.38 f).

Enfin, le lecteur soucieux d'améliorer encore plus les transitions sec/mouillé pourra utiliser une hauteur d'eau seuil h_{min} qui consiste à remplacer les hauteurs d'eau nulles par h_{min} (voir Alcrudo and Gil [1999], Marche [2005, p.134-135] et Marche et al. [2007]). Cette méthode donne de bons résultats avec la reconstruction hydrostatique (Marche et al.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

[2007]). Cependant, nous avons choisi de ne pas tester cette méthode car nous sommes amenés à prendre en compte l'infiltration de l'eau dans le sol, ce qui nécessiterait l'ajout de tests supplémentaires. A la place, nous mettons à 0 les hauteurs et les vitesses correspondantes quand les hauteurs sont plus petites que le seuil :

$$h_{seuil} = 10^{-14} \text{ m.}$$

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

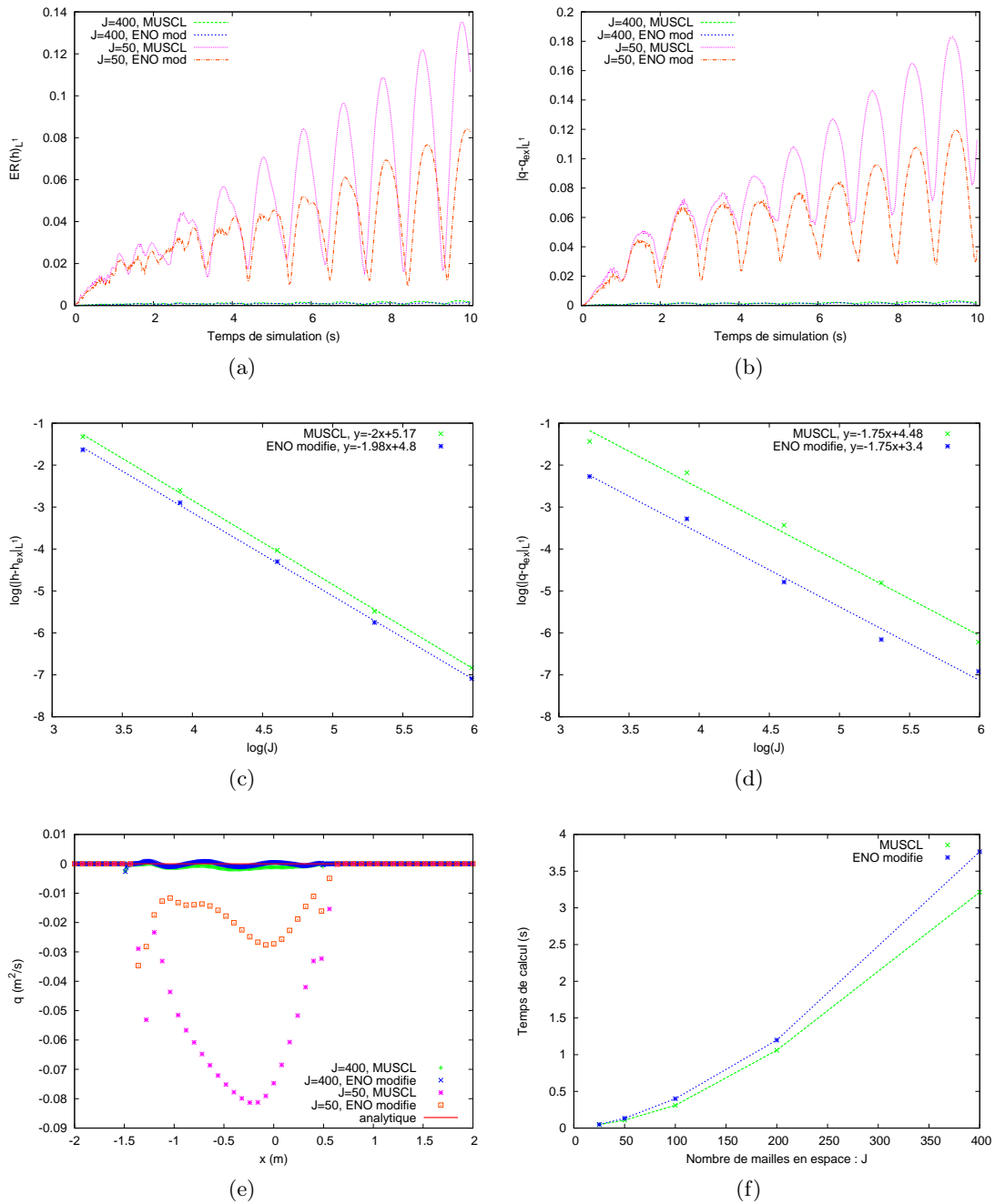


FIG. 2.30: Flux Rusanov : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

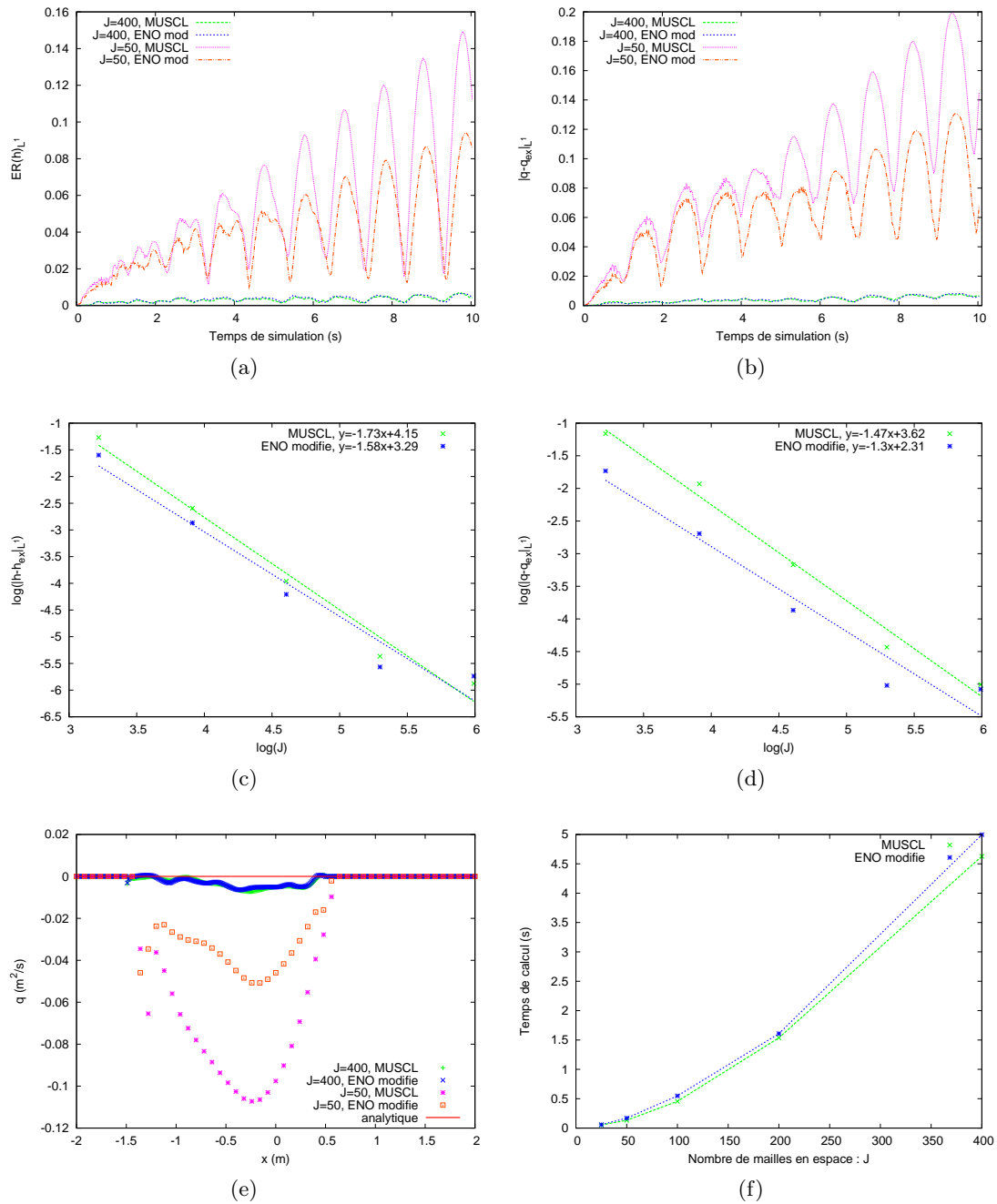


FIG. 2.31: Flux HLL : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

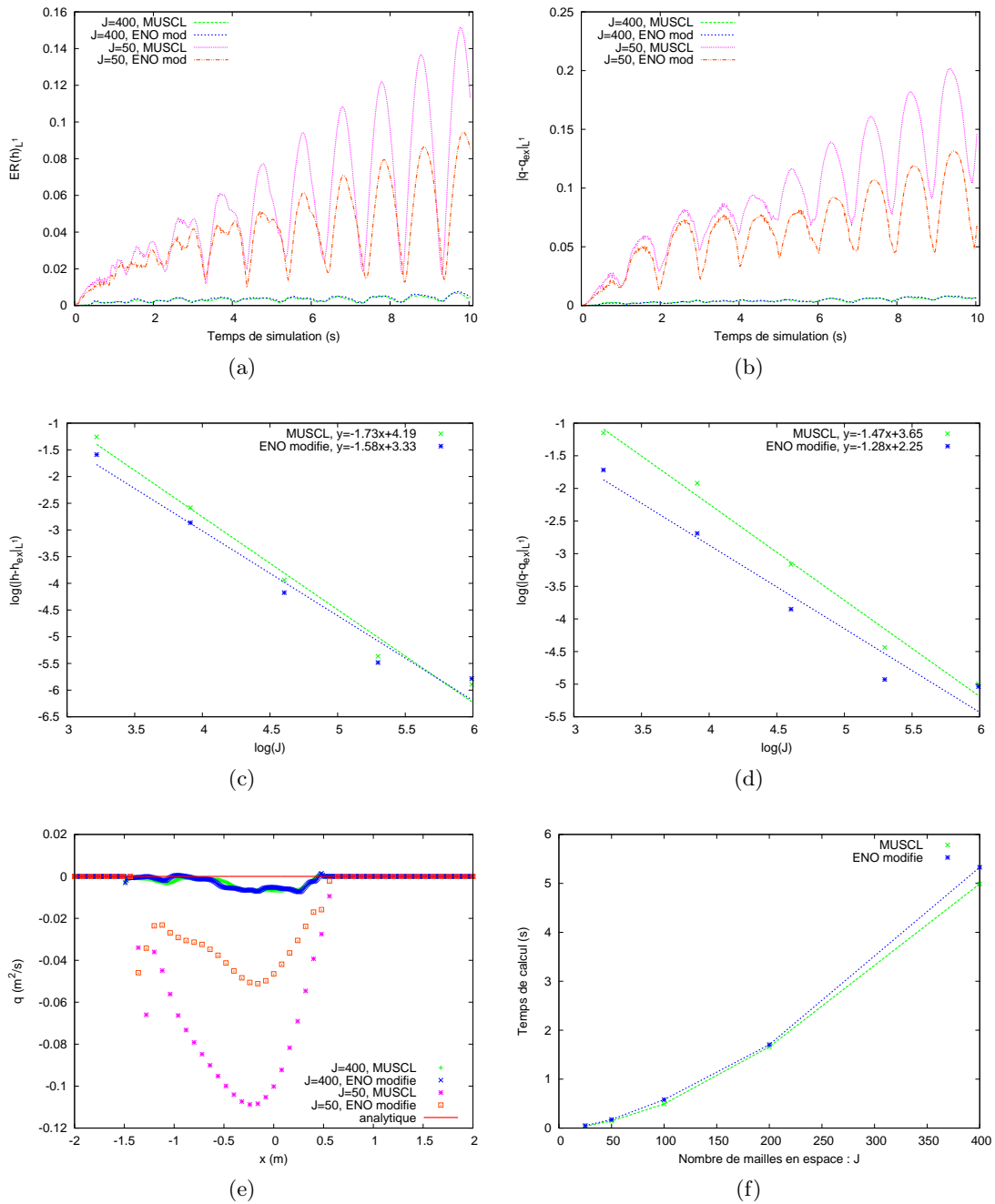


FIG. 2.32: Flux HLLE : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

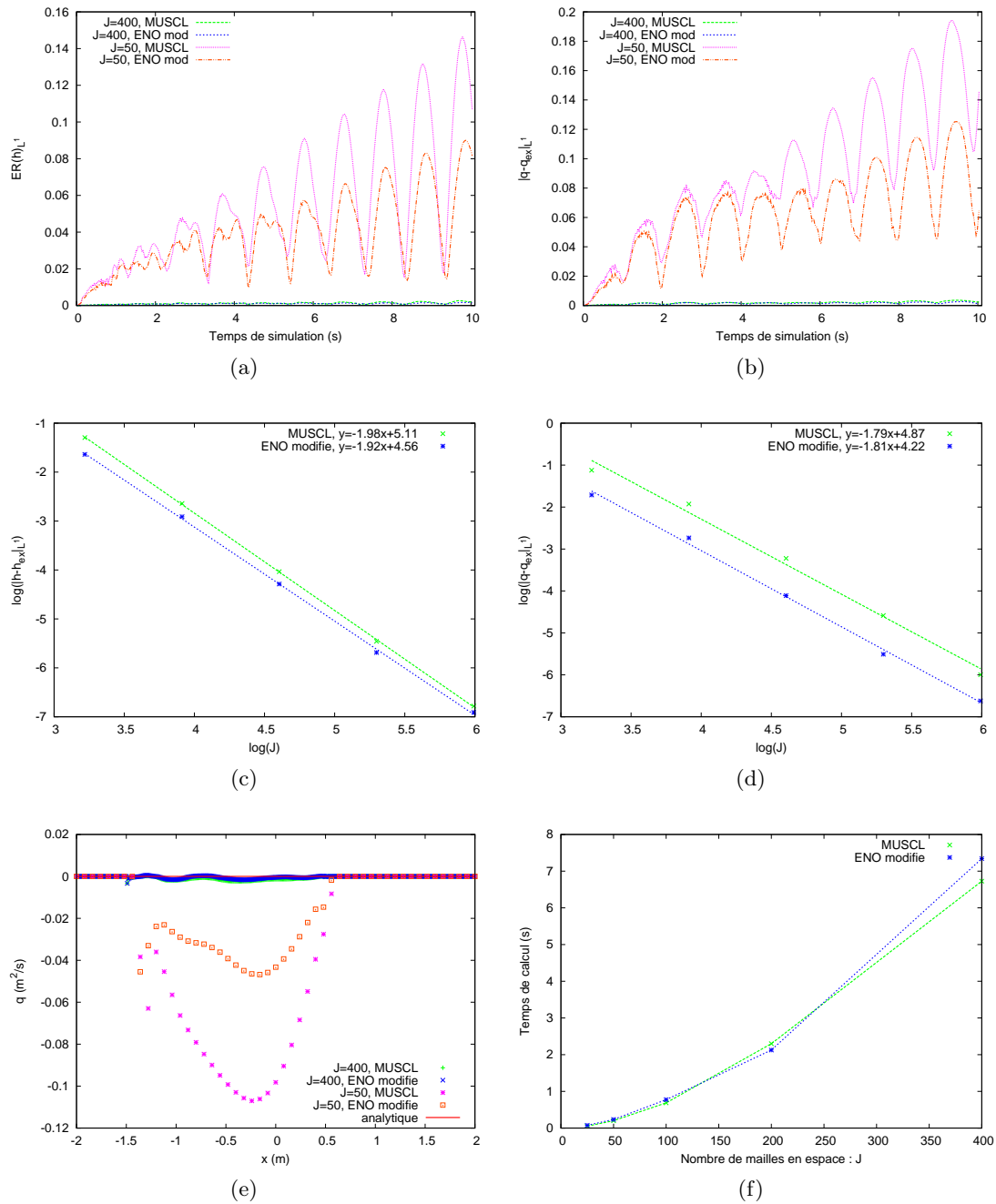


FIG. 2.33: Flux Cinétique : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

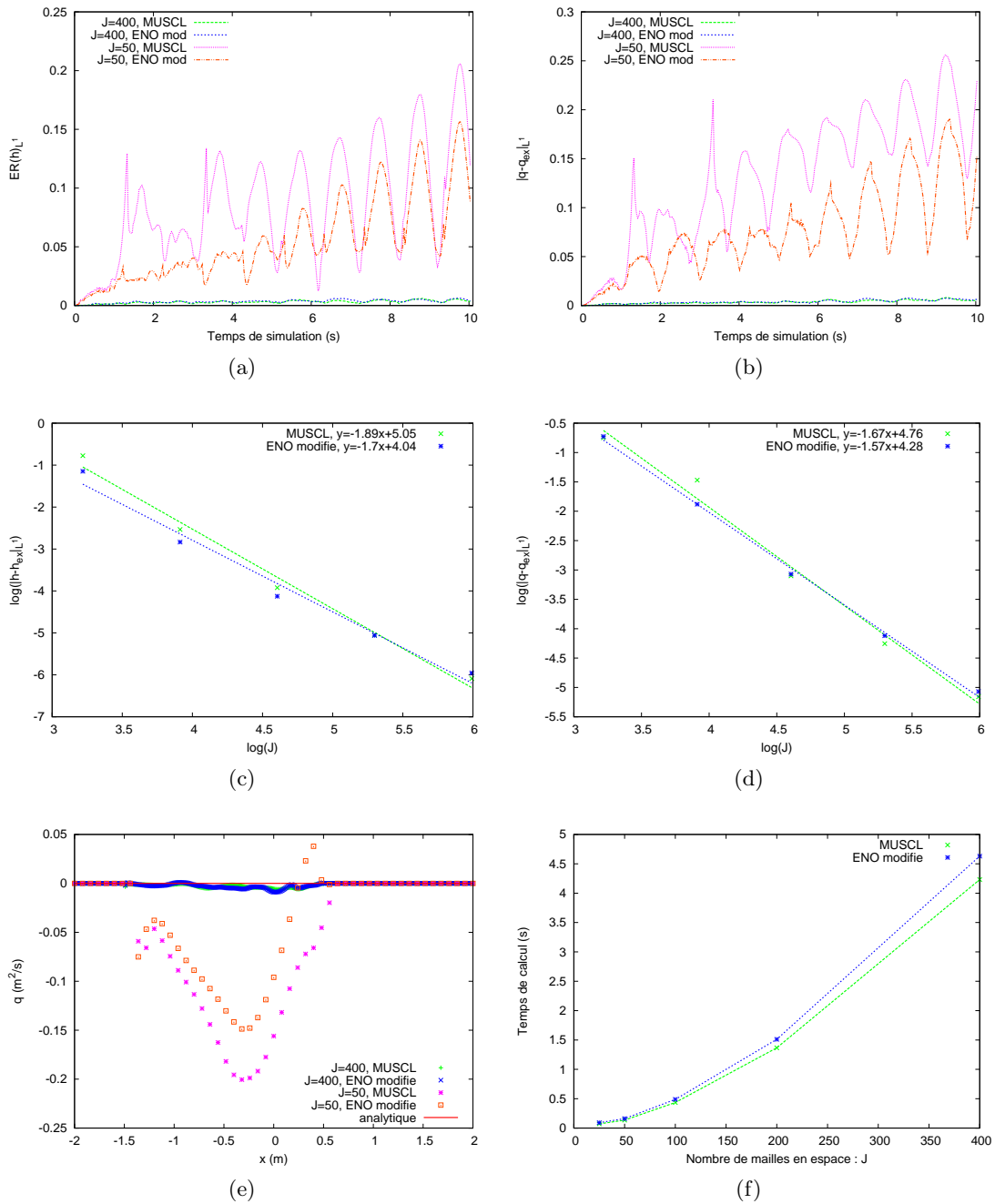


FIG. 2.34: Flux VFRoe-ncv : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

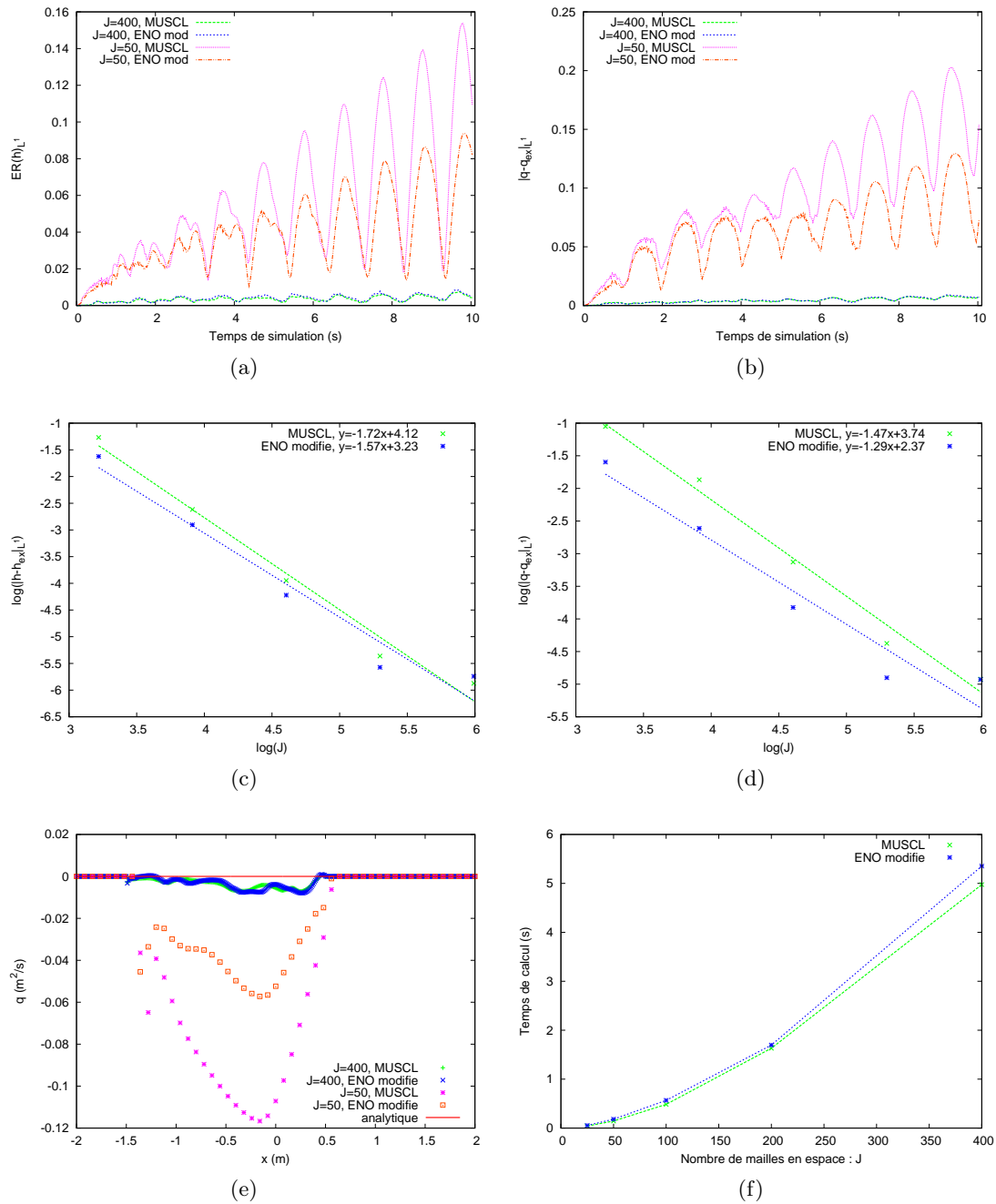


FIG. 2.35: Flux Apstat : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

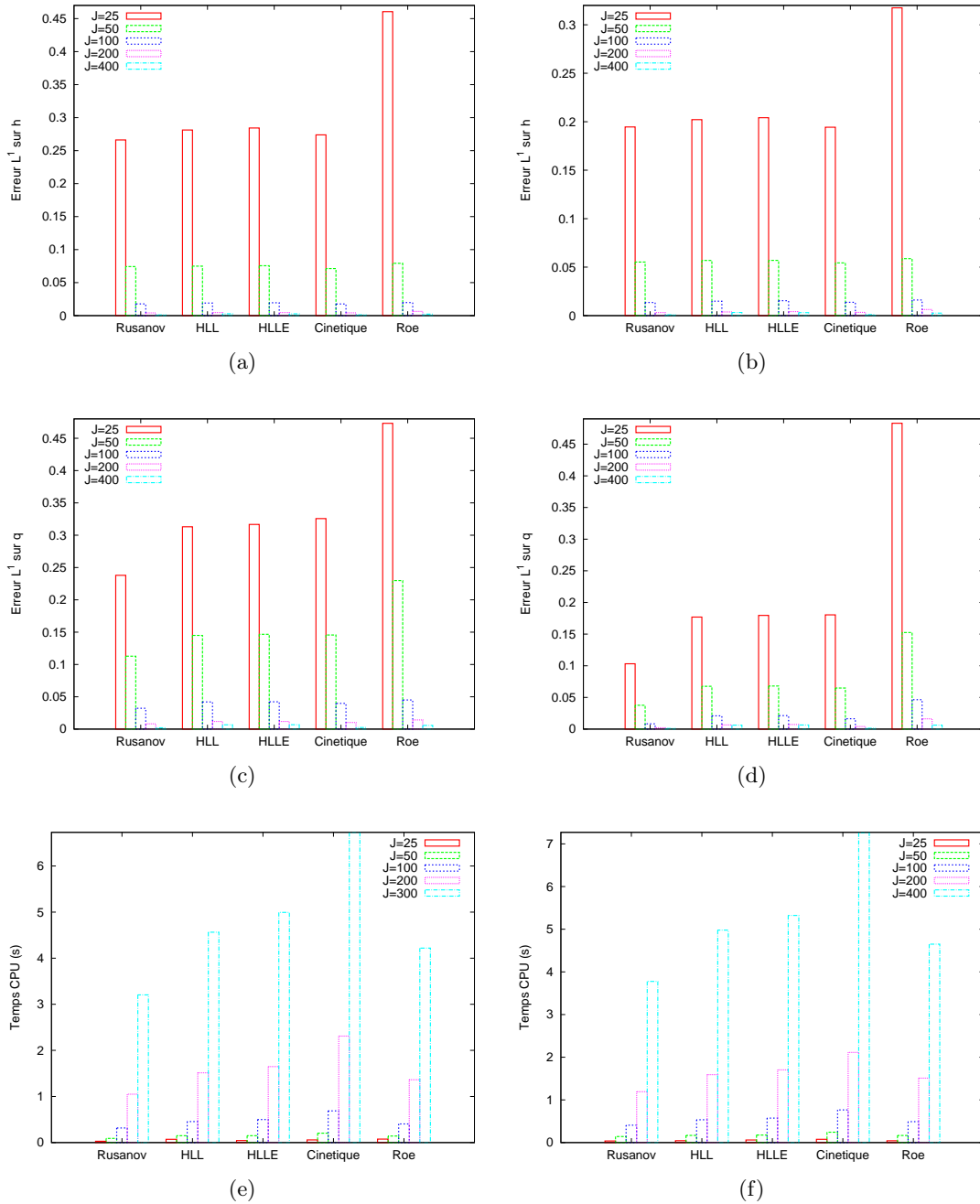


FIG. 2.36: Cas test de Thacker après 5 périodes : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

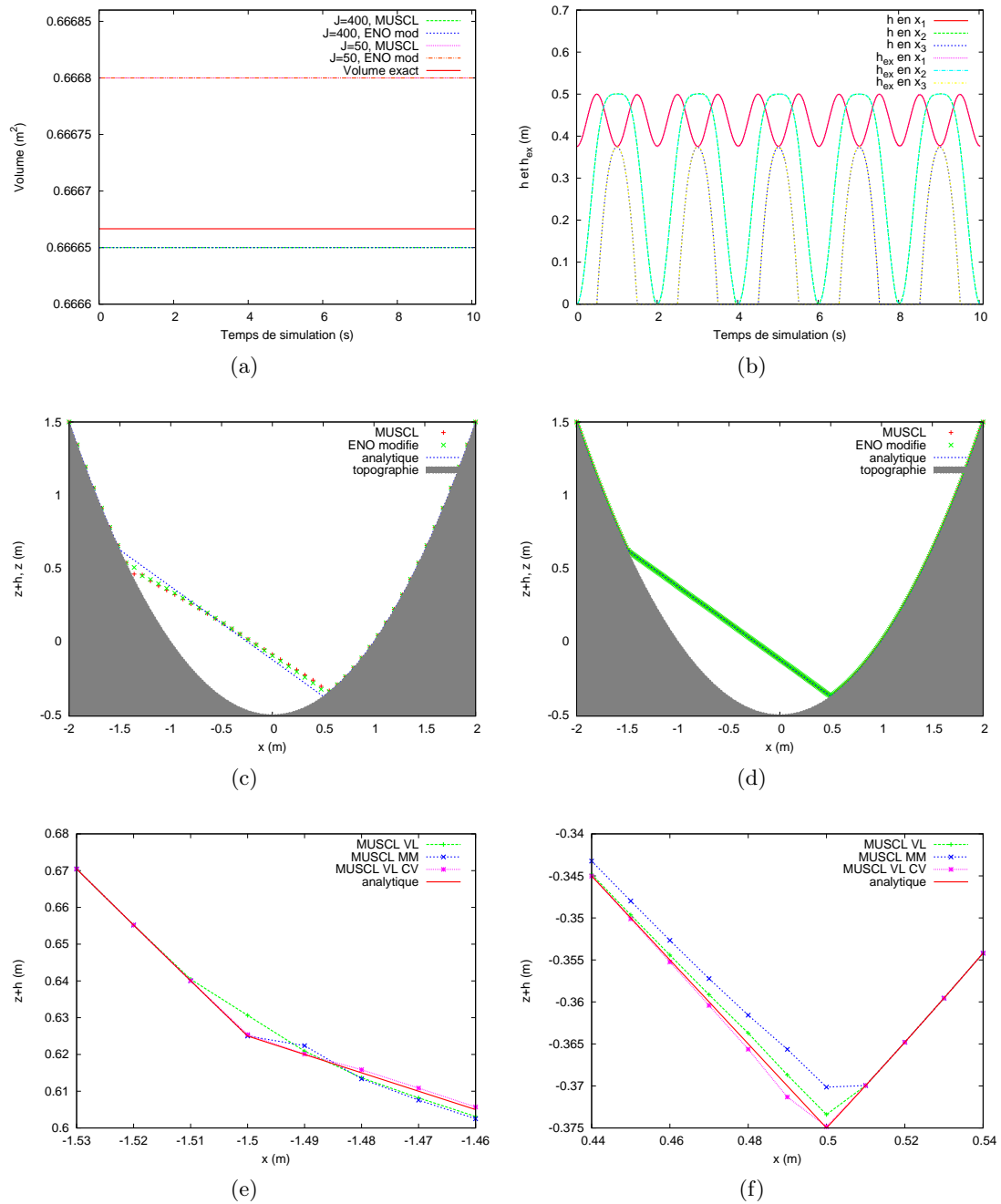


FIG. 2.37: Cas test de Thacker : comparaison de l'évolution (a) des volumes d'eau, (b) des hauteurs d'eau en différents points de la parabole, de la surface libre à $t = 5T$ (c) pour 50 mailles et (d) pour 400 mailles et (e)-(f) de la surface libre aux interfaces.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

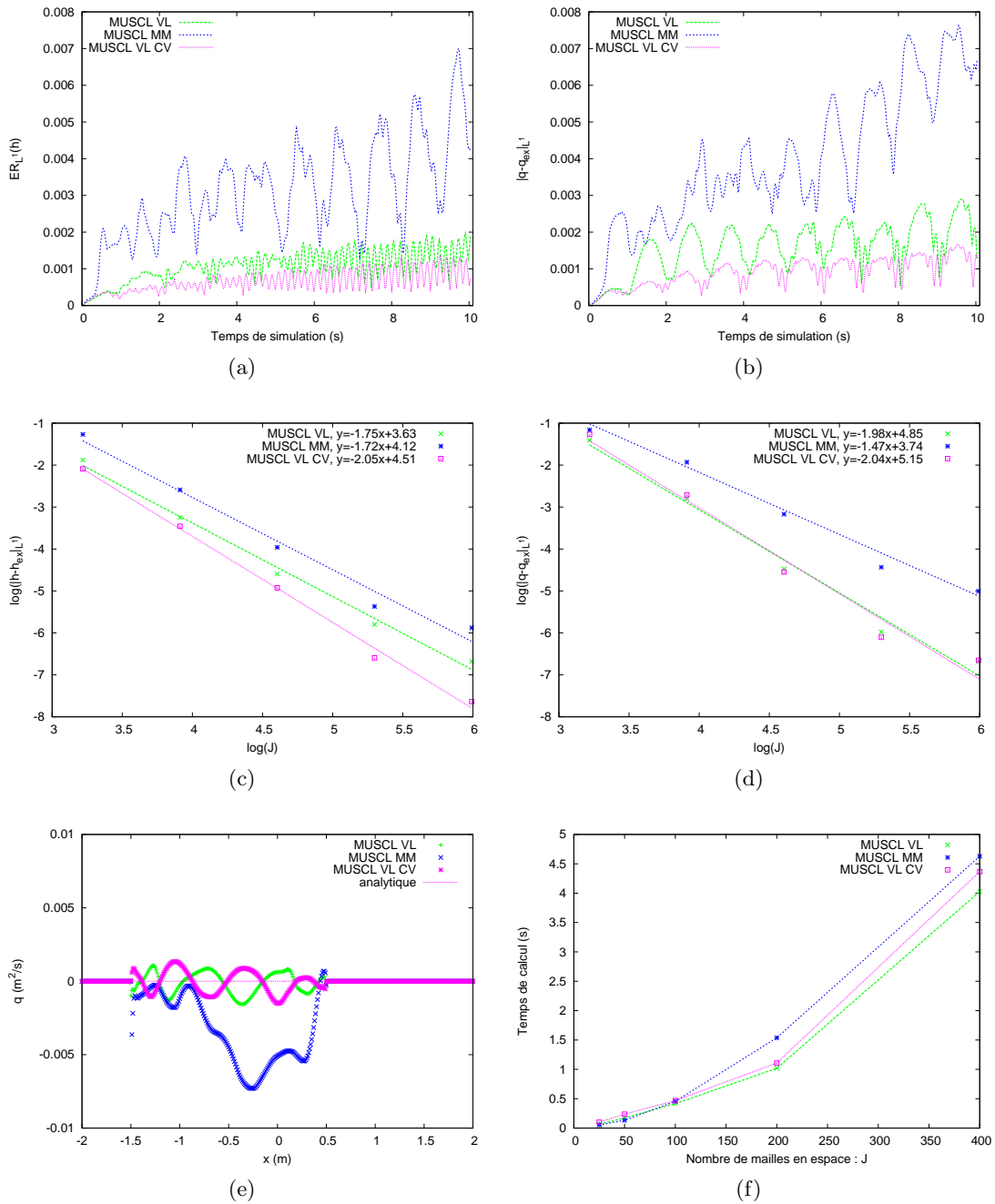


FIG. 2.38: Flux HLL : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.

2.2.3 Choix pour le ruissellement

A l'image de ce qui a été fait dans Balzano [1998], Erduran et al. [2002], Bouchut [2004], Abdallah [2005], nous avons effectué la comparaison de méthodes numériques de résolution du système de Saint-Venant sur différents tests analytiques. Mais à la différence de ces références, notre objectif était de choisir une méthode numérique adaptée à la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. En particulier, comme expliqué dans le chapitre 1, nous privilégions les méthodes numériques préservant les états d'équilibre stationnaires et les flux numériques capables de traiter les transitions sec/mouillé.

Les résultats présentés dans ce chapitre nous conduisent à utiliser dans la suite le flux HLL avec la reconstruction MUSCL. En effet, les résultats obtenus avec la reconstruction ENO modifiée sont trop irréguliers : sur certains tests nous observons des oscillations et le fait de raffiner le maillage n'améliore pas systématiquement la précision des résultats obtenus. Une solution consisterait à utiliser la reconstruction ENO modifiée avec $\theta_{eno} = 0.25$. De plus sur certains tests, les temps de calcul avec la reconstruction ENO modifiée sont presque multipliés par deux par rapport à ceux de la reconstruction MUSCL (voir entre autres les figures 2.17e, 2.19e et 2.23e) pour des erreurs du même ordre de grandeur (voir entre autres figs 2.17 c-d, 2.19 c-d et 2.23 c-d). Etant donné les résultats prometteurs obtenus avec le limiteur de pente de Van Leer et la correction du vide, il faudra envisager d'effectuer d'autres tests avec cette configuration. Nous pourrions aussi choisir de tester d'autres limiteurs de pente tels que MC (monotonized central), Van Albada ou encore Superbee.

Le modèle étudié dans ce chapitre présente certaines limites. En particulier, il ne tient pas compte de l'effet du sol sur l'écoulement. Dans le chapitre qui suit, nous allons voir comment modifier le modèle afin de prendre en compte ces effets.

2.2. VALIDATION NUMÉRIQUE

Chapitre 3

Frottements

3.1 Lois de frottement

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés au système de Saint-Venant sous la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour la simulation du ruissellement de l'eau de pluie sur une surface agricole, ce modèle est incomplet. En effet, il suffit de considérer des solutions stationnaires suffisamment régulières. Nous avons alors :

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0,$$

nous avons alors la conservation de la charge ou relation de Bernoulli (voir Flamant [1891, p.29-33] et annexe B) :

$$H(x) = \frac{u(x)^2}{2g} + z(x) + h(x) = Cte.$$

Cette relation signifie que l'énergie de l'écoulement est conservée :

$$E_c + E_{pes} + E_{pr} = Cte,$$

avec

- E_c : l'énergie cinétique,
- E_{pes} : l'énergie potentielle de pesanteur,
- E_{pr} : l'énergie potentielle de pression.

Cette hypothèse de "fluide parfait" (voir Flamant [1891, p.33-34]) est irréaliste : la rugosité et la nature du sol génèrent une perte d'énergie, appelée perte de charge, qui ne peut être négligée.

Afin de rendre le modèle plus réaliste, nous tenons compte de cette perte de charge (voir Flamant [1891, p.33-34]) sous la forme d'une loi de frottement liée aux propriétés du fond. Le système de Saint-Venant prend alors la forme

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh(\partial_x z + S_f) \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1. LOIS DE FROTTEMENT

où S_f est la loi de frottement.

Différentes lois de frottement empiriques existent dans la littérature, issues pour la plupart de l'étude des écoulements dans les tuyaux de conduite et dans les canaux ouverts (Flamant [1891, p.169-282]). Parmi toutes ces lois, nous nous intéressons particulièrement à deux familles de lois classiques en hydrologie. Il s'agit de la famille des lois de Manning et Strickler d'une part, de Darcy-Weisbach et Chézy d'autre part.

Les lois de la famille Manning et Strickler s'écrivent sous la forme

$$S_f = C_f \frac{u|u|}{h^{4/3}} = C_f \frac{q|q|}{h^{10/3}}$$

où C_f est le coefficient de frottement. Il existe différentes façons d'écrire ce coefficient. En posant $C_f = n^2$, nous obtenons la loi de frottement de Manning (plutôt utilisée par les anglo-saxons, voir Hervouet [2003, p. 58] , Smith et al. [2007])

$$S_f = n^2 \frac{u|u|}{h^{4/3}} = n^2 \frac{q|q|}{h^{10/3}}$$

où n est le coefficient de Manning. En ce qui concerne ce coefficient, il existe des tables qui référencent des valeurs pour n en fonction du sol (voir entre autres le site du logiciel FishXing version 3¹ dont est extraite la figure 3.1). La plupart de ces tables ont été élaborées à partir des travaux effectués dans Chow [1959, p.98-114].

Avec $C_f = 1/K^2$, nous obtenons la loi de frottement de Strickler (voir Viollet et al. [2002], Hervouet [2003, p.58])

$$S_f = \frac{u|u|}{K^2 h^{4/3}} = \frac{q|q|}{K^2 h^{10/3}}.$$

où K est le coefficient de Strickler.

Les lois de la famille de Darcy-Weisbach et Chézy s'écrivent sous la forme

$$S_f = C_f \frac{u|u|}{h} = C_f \frac{q|q|}{h^3},$$

ici encore il existe différentes façons d'écrire C_f . En posant $C_f = \frac{1}{C^2}$, nous obtenons la loi de Chézy (voir Hervouet [2003, p.58], Smith et al. [2007])

$$S_f = \frac{u|u|}{C^2 h} = \frac{q|q|}{C^2 h^3},$$

où C est le coefficient de Chézy.

Avec $C_f = \frac{f}{8g}$, nous obtenons la loi de Darcy-Weisbach (voir Viollet et al. [2002], Chanson [2006], Smith et al. [2007])

$$S_f = \frac{f u|u|}{8gh} = \frac{f q|q|}{8gh^3},$$

où f est le coefficient de Darcy-Weisbach.

Dans certains modèles en hydrologie, ces coefficients sont remplacés par des termes non constants. Voyons quelques exemples :

¹http://www.fsl.orst.edu/geowater/FX3/help/8_Hydraulic_Reference/Mannings_n_Tables.htm

3.1. LOIS DE FROTTEMENT

Manning's n for Channels (Chow, 1959).

Type of Channel and Description	Minimum	Normal	Maximum
Natural streams - minor streams (top width at floodstage < 100 ft)			
1. Main Channels			
a. clean, straight, full stage, no rifts or deep pools	0.025	0.030	0.033
b. same as above, but more stones and weeds	0.030	0.035	0.040
c. clean, winding, some pools and shoals	0.033	0.040	0.045
d. same as above, but some weeds and stones	0.035	0.045	0.050
e. same as above, lower stages, more ineffective slopes and sections	0.040	0.048	0.055
f. same as "d" with more stones	0.045	0.050	0.060
g. sluggish reaches, weedy, deep pools	0.050	0.070	0.080
h. very weedy reaches, deep pools, or floodways with heavy stand of timber and underbrush	0.075	0.100	0.150
2. Mountain streams, no vegetation in channel, banks usually steep, trees and brush along banks submerged at high stages			
a. bottom: gravels, cobbles, and few boulders	0.030	0.040	0.050
b. bottom: cobbles with large boulders	0.040	0.050	0.070
3. Floodplains			
a. Pasture, no brush			
1. short grass	0.025	0.030	0.035
2. high grass	0.030	0.035	0.050
b. Cultivated areas			
1. no crop	0.020	0.030	0.040
2. mature row crops	0.025	0.035	0.045
3. mature field crops	0.030	0.040	0.050
c. Brush			
1. scattered brush, heavy weeds	0.035	0.050	0.070
2. light brush and trees, in winter	0.035	0.050	0.060
3. light brush and trees, in summer	0.040	0.060	0.080
4. medium to dense brush, in winter	0.045	0.070	0.110
5. medium to dense brush, in summer	0.070	0.100	0.160

FIG. 3.1: Tableau de coefficients de frottement de Manning.

3.2. TRAITEMENT NUMÉRIQUE

- Dans Fiedler and Ramirez [2000], Dunkerley [2002], Raff and Ramirez [2005], nous trouvons une loi de frottement de Darcy-Weisbach avec le coefficient $f = K_0/Re = \nu K_0/|q|$, où ν est la viscosité cinématique (pour de l'eau à 20°C : $\nu = 1.005 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$), K_0 dépend de la nature du sol et $Re = |q|/\nu$ est le nombre de Reynolds (qui s'interprète comme le rapport entre force d'inertie et forces visqueuses). Dans ce cas nous retrouvons une loi de frottement linéaire en u

$$S_f = \frac{\nu K_0 u}{8gh^2} = \frac{\nu K_0 q}{8gh^3}.$$

- Dans Lawrence [1997], Smith et al. [2007], nous trouvons des coefficients de frottement dépendant de la taille des microrugosités du sol.

Les lois de frottements peuvent s'écrire sous la forme "universelle" suivante

$$S_f = C(h, |u|)u \tag{3.3}$$

avec

- pour la loi de Manning : $C(h, |u|) = n^2 \frac{|u|}{h^{4/3}}$,
- pour la loi de Darcy-Weisbach : $C(h, |u|) = \frac{f}{8g} \frac{|u|}{h}$

et sous la forme

$$S_{f_x} = C(h, \sqrt{u^2 + v^2})u \quad \text{et} \quad S_{f_y} = C(h, \sqrt{u^2 + v^2})v \tag{3.4}$$

pour le modèle bidimensionnel. Nous reviendrons sur les lois de frottement bidimensionnelle dans le chapitre 5.

Dans la suite de ce travail, nous choisissons d'utiliser les lois de Manning et de Darcy-Weisbach avec coefficients de frottement constants car elles sont très usitées en hydrologie. Nous allons nous intéresser à leur traitement numérique.

3.2 Traitement numérique

Dans la littérature, il existe différentes façons de traiter le terme de frottement parmi lesquelles : explicite, implicite, semi-implicite (voir entre autres Paquier [1995, p.43-45], Garcia-Navarro et al. [1999], Valiani et al. [1999b,a, 2002] et Caleffi et al. [2003]), splitting de Strang (Liang and Marche [2009]) et topographie apparente (voir Bouchut [2004, p.96-99], Mangeney-Castelnau et al. [2005] et Mangeney et al. [2007]).

Avant même d'aller plus loin, nous pouvons déjà éliminer certaines méthodes de traitement des frottements. Bien qu'étant simple à mettre en œuvre, le traitement explicite des frottements n'est pas adapté au problème qui nous intéresse. En effet, comme mentionné dans Paquier [1995, p.44], le traitement explicite donne des instabilités et des vitesses anormalement élevées au niveau des interfaces sec/mouillé. La méthode implicite est lourde à mettre en œuvre, elle nécessite la résolution d'une équation du second degré et ne peut être passée en dimension deux. De plus, la méthode semi-implicite lui sera toujours préférée car elle donne des résultats équivalents tout en ayant un degré de complexité moindre (voir Paquier [1995, p.43-45]). Le splitting de Strang consiste à calculer l'effet des frottements sur un demi-pas de temps, puis à résoudre le système de Saint-Venant sans frottement et

3.2. TRAITEMENT NUMÉRIQUE

enfin calculer à nouveau l'effet des frottements sur un demi-pas de temps ; cela permet d'obtenir une méthode d'ordre 2. Cependant, cette méthode nécessite une programmation à pas de temps fixe ou d'alourdir l'algorithme pour garder un code à CFL fixe. De plus, ici encore la méthode semi-implicite permet d'obtenir des résultats très proches de ceux de la méthode de Strang (voir Liang and Marche [2009]). C'est pourquoi, nous nous intéressons au traitement semi-implicite (voir Fiedler and Ramirez [2000], Bristeau and Coussin [2001], Marche [2005, p.185-198] et Liang and Marche [2009]).

La présence du terme source de frottement entraîne l'existence de nouveaux états d'équilibre qui peuvent poser des problèmes d'un point de vue numérique. Or la méthode de topographie apparente est une méthode équilibrée à la différence des méthodes précédentes. Cette méthode consiste à interpréter le terme de frottement comme une modification de la topographie. La reconstruction hydrostatique est alors appliquée avec cette topographie modifiée. La méthode de topographie apparente a été utilisée pour la résolution du système de Saint-Venant avec force de Coriolis (Bouchut [2004, p.115]) et avec force de frottement de Coulomb dans Bouchut [2004, p.97-99] et Mangeney et al. [2007]. D'autres méthodes numériques utilisent le même principe (Chinnayya and LeRoux [1999], Lukáčová-Medvidová [2005], Lukáčová-Medvid'ová and Teschke [2006] et Lukáčová-Medvid'ová et al. [2007]).

Dans ce qui suit, nous nous intéressons donc à la méthode de topographie apparente (introduite dans Bouchut [2004, p.96-99]) ainsi qu'à la méthode de traitement semi-implicite (la méthode la plus utilisée). Puis sur des tests, nous vérifierons leur capacité à préserver les états d'équilibre et à calculer correctement les écoulements avec transitions sec/mouillé.

3.2.1 Topographie apparente

La méthode de topographie apparente consiste à interpréter le système de Saint-Venant avec frottement (3.2) comme un système de Saint-Venant avec topographie (3.1) ou système de Saint-Venant usuel (car le plus étudié dans la littérature). En effet, S_f dépend de h et de u (fonctions du temps t et de l'espace x), ce qui permet d'écrire les frottements sous la forme d'une fonction de t et de x : $S_f(t, x)$. Le système (3.2) s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z_{app} \end{cases} \quad (3.5)$$

où z_{app} est la topographie "apparente"

$$z_{app} = z + b,$$

avec

$$\partial_x b = S_f. \quad (3.6)$$

Appliquer la méthode de reconstruction hydrostatique au système (3.5) permet d'obtenir un schéma qui préserve les états d'équilibre du lac au repos (1.19) avec la topographie z_{app}

$$\begin{cases} u = 0 \\ h + z_{app} = Cte \end{cases} ,$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$\begin{cases} u = 0 \\ \partial_x(h + z) = -S_f \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2. TRAITEMENT NUMÉRIQUE

Il s'agit de l'équilibre stationnaire du lac au repos avec frottement. Cette interprétation permet donc d'obtenir un schéma équilibre avec frottement.

A l'ordre 1 le schéma s'écrit

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n \right) = 0,$$

avec

$$\begin{cases} F_{i-1/2D}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1}^n, U_i^n, \Delta z_{i-1/2} + \Delta b_{i-1/2}^n) \\ F_{i+1/2G}^n = \mathcal{F}_G(U_i^n, U_{i+1}^n, \Delta z_{i+1/2} + \Delta b_{i+1/2}^n) \end{cases},$$

où $\Delta z_{i+1/2} = z_{i+1} - z_i$, les fonctions \mathcal{F}_G et \mathcal{F}_D sont les flux numériques associés au problème de Saint-Venant usuel (voir le chapitre 2.1.1.1) et $\Delta b_{i+1/2}^n$ est obtenu à partir de la discrétisation explicite de (3.6) sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1})

$$\frac{\Delta b_{i+1/2}^n}{\Delta x} = S_{f_{i+1/2}}^n.$$

Le schéma ainsi obtenu préserve les états d'équilibre discrets de la forme

$$\begin{cases} u_i = u_{i+1} = 0 \\ g(h_{i+1} + z_{i+1}) = g(h_i + z_i) - gS_{f_{i+1/2}}\Delta x \end{cases},$$

qui sont des approximations des états d'équilibre au repos (3.7).

Le schéma d'ordre 2 est obtenu en reprenant celui du chapitre 2.1.1.2

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n - Fc_i^n \right) = 0,$$

avec la modification suivante du flux centré

$$Fc_i^n = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{h_{i-1/2D}^n + h_{i+1/2G}^n}{2} (\Delta z_i^n + \Delta b_i^n) \end{pmatrix},$$

avec

$$\frac{\Delta b_i^n}{\Delta x} = S_{f_i}^n.$$

Nous devons maintenant nous intéresser à l'écriture de S_f à l'ordre 1 pour les lois de frottement choisies. Pour les frottements de Manning, nous posons

$$S_{f_{i+1/2}}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_i^n = h_{i+1}^n = 0 \\ n^2 \frac{u_{i+1/2}^n |u_{i+1/2}^n|}{h_{i+1/2}^{4/3}} & \text{sinon} \end{cases},$$

et pour les frottements de Darcy-Weisbach

$$S_{f_{i+1/2}}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_i^n = h_{i+1}^n = 0 \\ f \frac{u_{i+1/2}^n |u_{i+1/2}^n|}{8gh_{i+1/2}^n} & \text{sinon} \end{cases},$$

3.2. TRAITEMENT NUMÉRIQUE

avec

$$u_{i+1/2}^n = \frac{h_i^n u_i^n + h_{i+1}^n u_{i+1}^n}{h_i^n + h_{i+1}^n} \quad \text{et} \quad h_{i+1/2}^n = \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}.$$

Nous considérons que si la hauteur d'eau est nulle alors il n'y a pas de frottement.

A l'ordre 2 pour le calcul de $S_{f_{i+1/2}}^n$, les variables d'indice i (respectivement $i+1$) sont remplacées par les variables d'indice $i+1/2-$ (respectivement $i+1/2+$) obtenues par une des reconstruction : MUSCL, ENO ou ENO modifiée (voir le chapitre 2.1.1.2). Et le terme centré $S_{f_i}^n$ est obtenu d'une façon analogue à $S_{f_{i+1/2}}^n$, en utilisant les variables d'indices $i-1/2+$ et $i+1/2-$.

3.2.2 Traitement semi-implicite

Le traitement semi-implicite est une méthode à pas fractionnaire. A l'ordre 1, ce traitement se résume à effectuer les deux étapes suivantes

1. Résolution du système de Saint-Venant

$$U^* = U^n + \Delta t \Phi(U^n),$$

2. Résolution du terme source de frottement

$$\tilde{U}^{n+1} = Sf_{\Delta t}(U^*).$$

La première étape (comme son nom l'indique) consiste à résoudre sur un pas de temps le système de Saint-Venant à partir des variables U^n , afin d'obtenir des valeurs intermédiaires U^*

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+1/2G}^n - F_{i-1/2D}^n \right).$$

Pour la deuxième étape, le système

$$\partial_t U = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_f \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

doit être résolu ce qui permet d'obtenir les variables U^{n+1} . La première équation du système (3.8) s'écrit $\partial_t h = 0$. D'un point de vue numérique, nous avons donc $h^{n+1} = h^*$ et l'étape 2 se réduit donc à la résolution de l'équation différentielle suivante

$$\partial_t q = -ghS_f.$$

Pour la discrétisation en temps, nous utilisons un schéma d'Euler explicite

$$h_i^* \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) = -ghS_f.$$

Dans la littérature le terme S_f est discrétisé de deux façons différentes. La première (voir Marche [2005, p.197]) s'écrit pour la loi de Manning

$$h_i^* \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) = -gn^2 \frac{q_i^{n+1} |q_i^*|}{(h_i^{n+1})^{7/3}}$$

3.2. TRAITEMENT NUMÉRIQUE

et pour la loi de Darcy-Weisbach

$$h_i^* \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) = -\frac{f q_i^{n+1} |q_i^*|}{8 (h_i^{n+1})^2}$$

La deuxième (voir Bristeau and Coussin [2001]) s'écrit

$$h_i^* \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) = -gn^2 \frac{q_i^{n+1} |q_i^n|}{h_i^n (h_i^{n+1})^{4/3}}$$

pour la loi de Manning et

$$h_i^* \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) = -\frac{f q_i^{n+1} |q_i^n|}{8 h_i^n h_i^{n+1}}$$

pour la loi de Darcy-Weisbach. Dans ce qui va suivre, afin de faciliter leur comparaison, nous parlerons de méthode semi-implicite 1 (respectivement semi-implicite 2) pour désigner la première méthode semi-implicite présentée (respectivement la deuxième).

Comme mentionné dans Marche [2005, p.197], le traitement semi-implicite des frottements présente quelques propriétés importantes :

- préservation de la positivité de la hauteur d'eau,
- préservation des états d'équilibre au repos.

D'un point de vue physique (voir Burguete et al. [2008] et Liang and Marche [2009]), la force de frottement admet une valeur maximale qui ne peut être dépassée : l'effet maximum des frottements est de stopper l'écoulement. D'un point de vue numérique la vitesse et le débit doivent rester de signe constant

$$q^{n+1} q^n \geq 0.$$

Cependant cette propriété peut être violée d'un point de vue numérique, en particulier au voisinage des interfaces sec/mouillé où le traitement du terme de frottement est susceptible de produire des instabilités (comme observé numériquement dans Burguete et al. [2008]).

Afin de remédier à ce problème nous écrivons le traitement des frottements sous la forme suivante

$$q^{n+1} = \Delta t S_f + q^n,$$

ce qui nous permet d'obtenir les valeurs limites suivantes (voir Burguete et al. [2008] et Liang and Marche [2009])

$$ghS_f \begin{cases} \geq -q^n/\Delta t & \text{si } q^n \geq 0 \\ \leq -q^n/\Delta t & \text{si } q^n \leq 0 \end{cases} .$$

Le schéma d'ordre 2 (voir 2.12) est modifié de la façon suivante

1. Résolution du système de Saint-Venant

$$U^* = U^n + \Delta t \Phi(U^n),$$

2. Résolution du terme source

$$\tilde{U}^{n+1} = Sf_{\Delta t}(U^*),$$

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

3. Résolution du système de Saint-Venant

$$U^{**} = \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \Phi \left(\tilde{U}^{n+1} \right),$$

4. Résolution du terme source

$$\tilde{U}^{n+2} = Sf_{\Delta t}(U^{**}),$$

5. Mise à jour des variables par la méthode de Heun

$$U^{n+1} = \frac{U^n + \tilde{U}^{n+2}}{2},$$

où Φ est défini par (2.11).

Bien que ce traitement du terme source de frottement soit d'ordre 1 et détériore donc l'ordre général du schéma (voir LeVeque [2002, p.380-384]), numériquement elle permet de retrouver des résultats très proches de ceux obtenus avec des méthodes d'ordre 2 telles que le splitting de Strang (voir Liang and Marche [2009]).

3.3 Comparaison des méthodes

3.3.1 Tests analytiques

Dans la section 3.2, nous avons présenté trois méthodes de traitement des frottements : topographie apparente, semi-implicite 1 et semi-implicite 2. Dans cette partie, nous tentons de répondre à la question suivante : quelle méthode de traitement des frottements devons-nous utiliser pour la simulation numérique du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles ?

A l'image de ce qui a été fait dans le chapitre 2, nous mettons en place une batterie de cas tests analytiques permettant de reproduire différents phénomènes hydrologiques. Pour cela nous utilisons la solution de Dressler (voir Dressler [1952] et l'annexe B) qui est une solution approchée d'une rupture de barrage sur fond sec avec frottement. Ce cas test permet d'évaluer la capacité des différentes méthodes à calculer correctement les transitions sec/mouillé. Puis nous reprenons les solutions analytiques obtenues dans le cadre d'un stage de M2 effectué au laboratoire MAPMO² (voir Vo Thi Ngoc [2008]). Ces solutions analytiques correspondent à des équilibres stationnaires. Elles reposent sur une idée originale proposée dans les travaux de Ian MacDonald (voir MacDonald [1994], MacDonald et al. [1994, 1995], MacDonald [1996] et MacDonald et al. [1997]) qui peut être vue comme un problème inverse. Nous nous donnons un débit constant et un profil de hauteur d'eau (notée h_{ex} dans ce chapitre) sur tout le domaine, puis nous calculons la topographie associée à cet équilibre stationnaire à l'aide de la relation

$$\partial_x z = \left(\frac{q^2}{gh^3} - 1 \right) \partial_x h - S_f$$

et d'une méthode d'intégration numérique. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers les travaux de Ian MacDonald, Vo Thi Ngoc [2008] ainsi que vers la section B.4.

Nous avons à notre disposition différentes configurations :

²Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans : Université d'Orléans & CNRS

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

- alimentation : fluviale ou torrentielle,
- sortie : fluviale ou torrentielle,
- loi de frottement : Manning ou Darcy-Weisbach.

Comme dans le chapitre 2, nous devons être en mesure de localiser les ressauts, mais leur calcul précis n'est pas nécessaire.

La méthode choisie devra avoir le meilleur rapport précision/temps de calcul. Dans ce qui va suivre, nous allons présenter les différents cas tests analytiques qui nous permettront de comparer et valider les différentes méthodes numériques.

3.3.1.1 Solution de Dressler

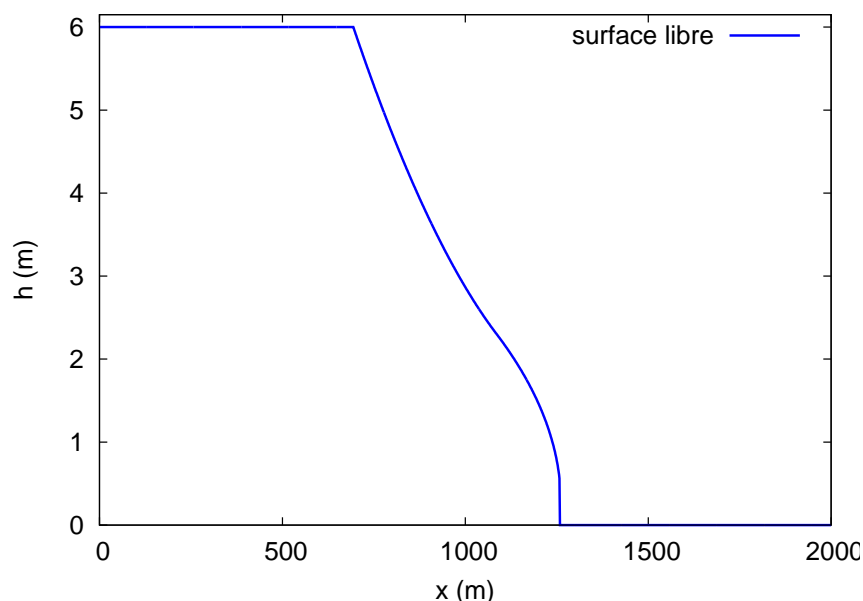


FIG. 3.2: Solution de Dressler 40 s après la rupture du barrage.

La solution de Dressler est une solution approchée d'une rupture de barrage sur fond sec avec frottement de Darcy-Weisbach (voir Dressler [1952] et Chanson [2005, p.13-14]). C'est un cas test qui a été souvent utilisé dans le cadre du projet européen CADAM³ (voir Morris [2000]) afin de valider différentes méthodes numériques (voir Goutal and Maurel [1997] et Valiani et al. [1999b, 2002]). Ce test nous permet d'évaluer la capacité des méthodes à calculer le déplacement d'une transition sec/mouillé avec un terme de frottement. Ce cas test est personnalisable, il est possible de choisir une taille de domaine (L), la position du barrage avant rupture (x_0) et une hauteur d'eau en amont du barrage proche de celles que nous sommes amenés à rencontrer sur les problèmes qui nous intéressent. Mais nous avons préféré reprendre les valeurs données dans Goutal and Maurel [1997, p.26-28], car elles ont été utilisées avec de nombreux schémas. Ces résultats numériques nous serviront de références en plus de la solution analytique approchée.

Pour ce cas test, la longueur du domaine est $L = 2000$ m, la position du barrage est en

³Concerted Action on Dam-break Modelling, voir www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

$x_0 = 1000$ m et la topographie est définie par

$$z(x) = 0 \text{ pour } 0 \text{ m} < x < 2000 \text{ m.}$$

Les conditions initiales sont

$$h = \begin{cases} 6 \text{ m} & \text{pour } 0 \text{ m} < x \leq 1000 \text{ m} \\ 0 \text{ m} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$q = 0 \text{ m}^2/\text{s.}$$

Nous considérons un frottement de Darcy-Weisbach avec un coefficient de valeur fixe

$$f = \frac{8g}{40^2},$$

ce qui revient à prendre la loi de frottement de Chézy avec un coefficient $C = 40$.

La rupture du barrage se produit à l'instant $t = 0$, la simulation s'arrête à l'instant $t = 40$ s. Nous obtenons alors la surface libre de la figure 3.2.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique approchée avec terme de frottement,
- d'une transition sec/mouillé,
- de deux zones au repos (dont une sèche).

3.3.1.2 Ecoulement fluvial-fluvial 1

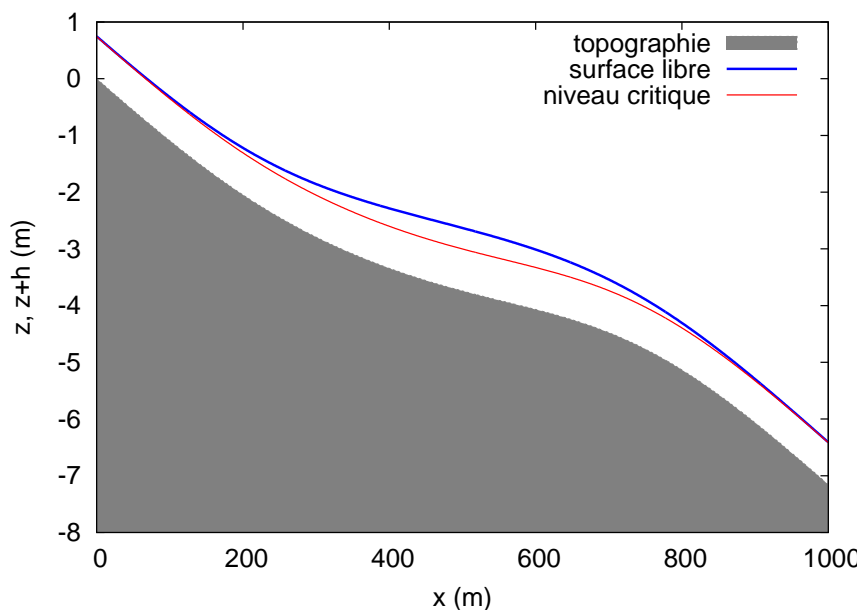


FIG. 3.3: Ecoulement fluvial-fluvial pour la loi de Darcy-Weisbach.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

Nous considérons un canal de 1000 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(-16 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right) \quad (3.9)$$

et

$$\frac{d}{dx} h_{ex}(x) = - \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \frac{2}{125} \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-16 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Le débit est $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, nous avons donc un écoulement entièrement fluvial (comme illustré pour la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 3.3).

Les coefficients de frottement sont pour la loi de

- Manning : $n = 0.033$,
- Darcy-Weisbach : $f = 0.093$.

Les conditions initiales sont

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en amont } q = 2 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval } h = h_{ex}(1000) \text{ m} \end{array} \right. ,$$

nous obtenons un écoulement fluvial.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement entièrement fluvial,
- de conditions de bord fluviales.

3.3.1.3 Ecoulement torrentiel-torrentiel 1

Nous considérons un canal de 1000 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{5} \exp\left(-36 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

et

$$\frac{d}{dx} h_{ex}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \frac{9}{625} \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-36 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Le débit est $q = 2.5 \text{ m}^2/\text{s}$, nous avons donc un écoulement entièrement torrentiel (comme illustré pour la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 3.4).

Les coefficients de frottement sont pour la loi de

- Manning : $n = 0.04$,
- Darcy-Weisbach : $f = 0.065$.

Les conditions initiales sont

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

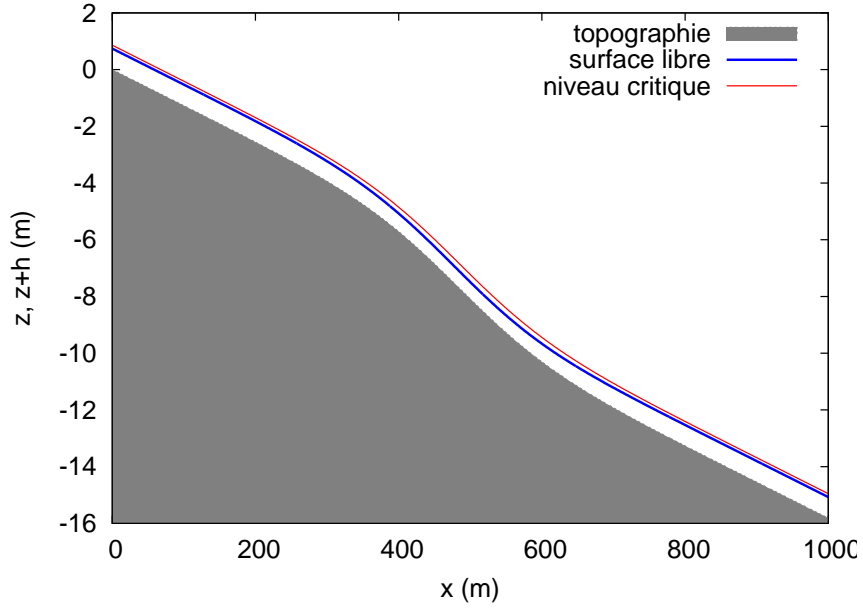


FIG. 3.4: Écoulement torrentiel-torrentiel pour la loi de Darcy-Weisbach.

et les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en amont } q = 2.5 \text{ m}^2/\text{s} \text{ et } h = h_{ex}(0) \text{ m} \\ \text{en aval sortie libre} \end{array} \right. ,$$

nous obtenons un écoulement torrentiel.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement entièrement torrentiel,
- de conditions de bord torrentielles.

3.3.1.4 Écoulement fluvial-torrentiel 1

Nous considérons un canal de 1000 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{3} \tanh \left(3 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) & 0 \leq x \leq 500 \text{ m} \\ \left(\frac{4}{g} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{6} \tanh \left(6 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) & 500 < x \leq 1000 \text{ m} \end{cases}$$

et

$$\frac{d}{dx} h_{ex}(x) = \begin{cases} - \left(\frac{4}{g} \right)^{1/3} \frac{1}{1000} \left(1 - \tanh \left(3 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2} \right) \right) \right)^2 & 0 \leq x \leq 500 \text{ m} \\ - \left(\frac{4}{g} \right)^{1/3} \frac{1}{1000} \left(1 - \tanh \left(6 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2} \right) \right) \right)^2 & 500 < x \leq 1000 \text{ m} \end{cases} .$$

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

Le débit est $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, nous avons donc un écoulement transcritique. L'écoulement en amont est fluvial et devient torrentiel (comme illustré pour la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 3.5).

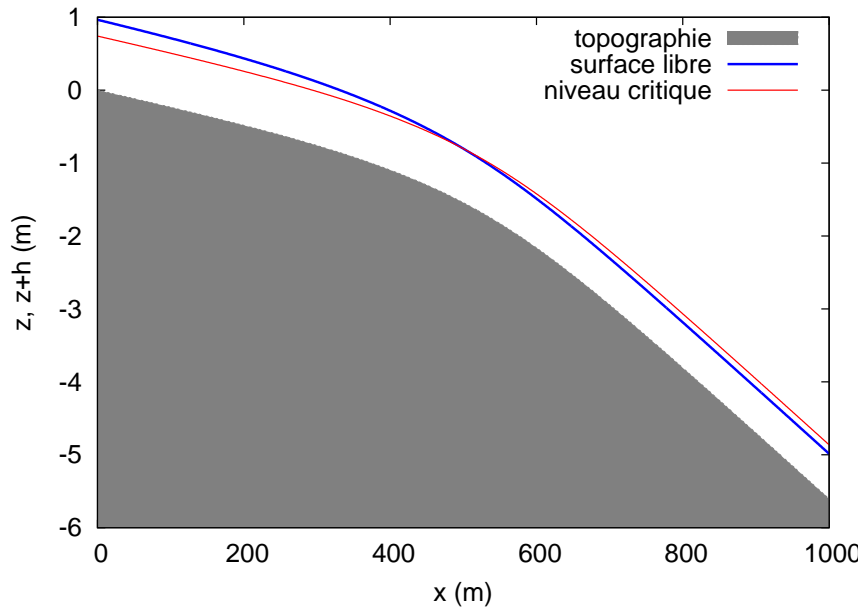


FIG. 3.5: Ecoulement fluvial-torrentiel pour la loi de Darcy-Weisbach.

Les coefficients de frottement sont pour la loi de

- Manning : $n = 0.0218$,
- Darcy-Weisbach : $f = 0.042$.

Les conditions initiales sont

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en amont } q = 2 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval sortie libre} \end{array} \right. ,$$

nous obtenons un écoulement transcritique.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement transcritique,
- de conditions de bord fluviale en amont et torrentielle en aval.

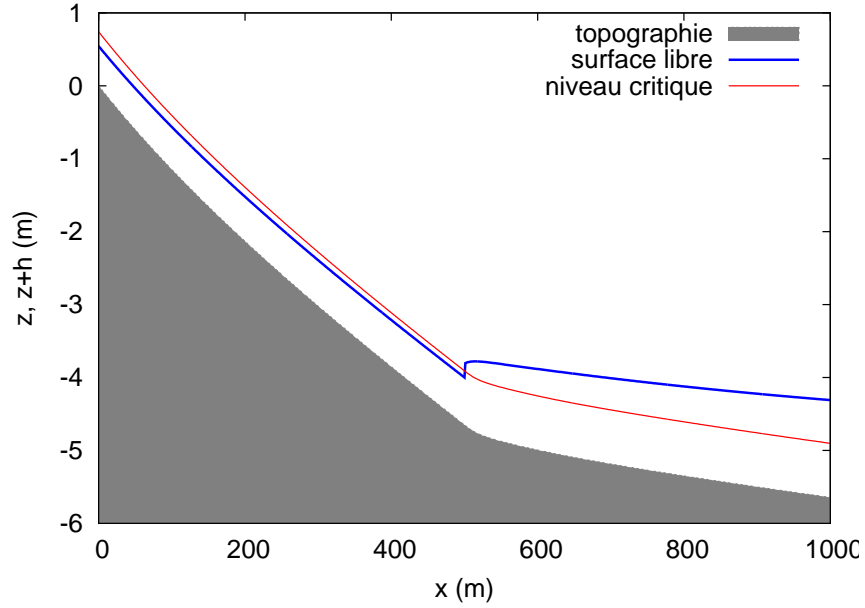


FIG. 3.6: Ecoulement torrentiel-fluvial pour la loi de Darcy-Weisbach.

3.3.1.5 Ecoulement torrentiel-fluvial 1

Nous considérons un canal de 1000 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{6} \exp\left(-\frac{x}{250}\right)\right) & , 0 \leq x \leq 500 \text{ m} \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 + \sum_{k=1}^3 a_k \exp\left(-20k \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right)\right) \\ + \frac{4}{5} \exp\left(\frac{x}{1000} - 1\right) & , 500 < x \leq 1000 \text{ m} \end{cases}$$

et

$$\frac{d}{dx} h_{ex}(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \frac{1}{1500} \exp\left(-\frac{x}{250}\right) & , 0 \leq x \leq 500 \text{ m} \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{50} \sum_{k=1}^3 k a_k \exp\left(-20k \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right)\right) \\ + \frac{1}{1250} \exp\left(\frac{x}{1000} - 1\right) & , 500 < x \leq 1000 \text{ m} \end{cases}$$

avec $a_1 = -0.348427$, $a_2 = 0.552264$, $a_3 = -0.55558$.

Le débit est $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, nous avons donc un écoulement transcritique avec ressaut. L'écoulement en amont est torrentiel et devient fluvial au travers d'un ressaut (comme illustré

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

pour la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 3.6).

Les coefficients de frottement sont pour la loi de

- Manning : $n = 0.0218$,
- Darcy-Weisbach : $f = 0.0425$.

Les conditions initiales sont

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en amont } q = 2 \text{ m}^2/\text{s et } h = h_{ex}(0) \text{ m} \\ \text{en aval } h = h_{ex}(1000) \text{ m} \end{array} \right. ,$$

nous obtenons un écoulement transcritique avec choc.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement transcritique avec un ressaut,
- de conditions de bord torrentielle en amont et fluviale en aval.

3.3.1.6 Ecoulement fluvial-fluvial 2

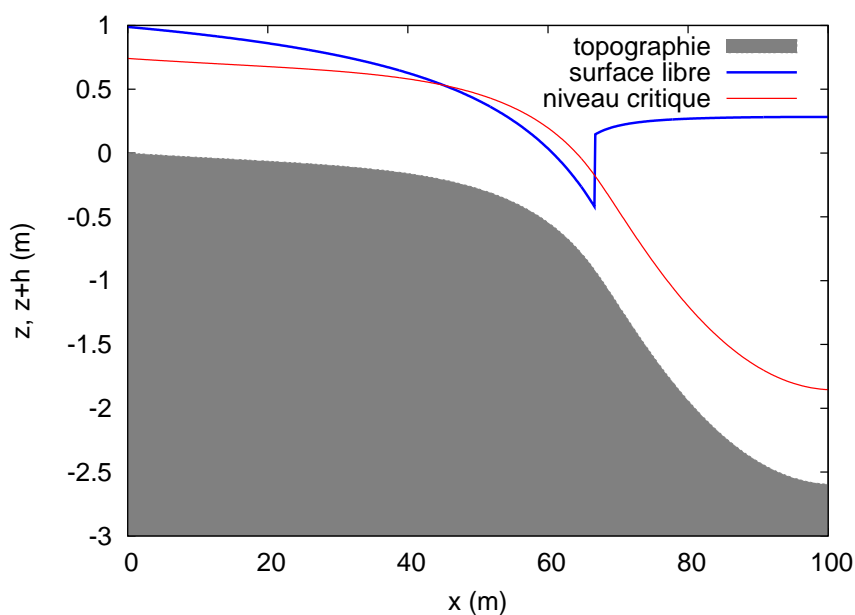


FIG. 3.7: Ecoulement fluvial-fluvial pour la loi de Manning.

Ce cas test est certainement le plus complet de cette série. En effet, nous avons un écoulement fluvial en entrée qui devient torrentiel pour redevenir fluvial à travers un ressaut (fig. 3.7).

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

Nous considérons un canal de 100 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(\frac{4}{3} - \frac{x}{100}\right) - \frac{9x}{1000} \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right) & , 0 \leq x \leq \frac{200}{3} \text{ m} \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(a_1 \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right)^4 + a_1 \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right)^3 - a_2 \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right)^2 + a_3 \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right) + a_4\right) & , \frac{200}{3} < x \leq 100 \text{ m} \end{cases}$$

et

$$\frac{d}{dx}h_{ex}(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{100}\right) - \frac{9}{500} \left(\frac{x}{100} - \frac{1}{3}\right) & , 0 \leq x \leq \frac{200}{3} \text{ m} \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(\frac{4a_1}{100} \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{3a_1}{100} \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2a_2}{100} \left(\frac{x}{100} - \frac{2}{3}\right) + \frac{a_3}{100}\right) & , \frac{200}{3} < x \leq 100 \text{ m} \end{cases}$$

avec $a_1 = 0.674202$, $a_2 = 21.7112$, $a_3 = 14.492$ et $a_4 = 1.4305$.

Le débit est $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$.

Le coefficient de frottement est pour la loi de Manning : $n = 0.0328$. Les conditions initiales sont

$$h = \max(h_{ex}(100) + z(100) - z, 0) \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} \text{en amont } q = 2 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval } h = h_{ex}(100) \text{ m} \end{cases}$$

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement transcritique et avec ressaut,
- de conditions de bord fluviales.

3.3.1.7 Ecoulement fluvial-torrentiel 2

Nous considérons un canal de 100 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{(x-50)}{200} + \frac{(x-50)^2}{30000}\right)$$

et

$$\frac{d}{dx}h_{ex}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{200} + \frac{(x-50)}{15000}\right).$$

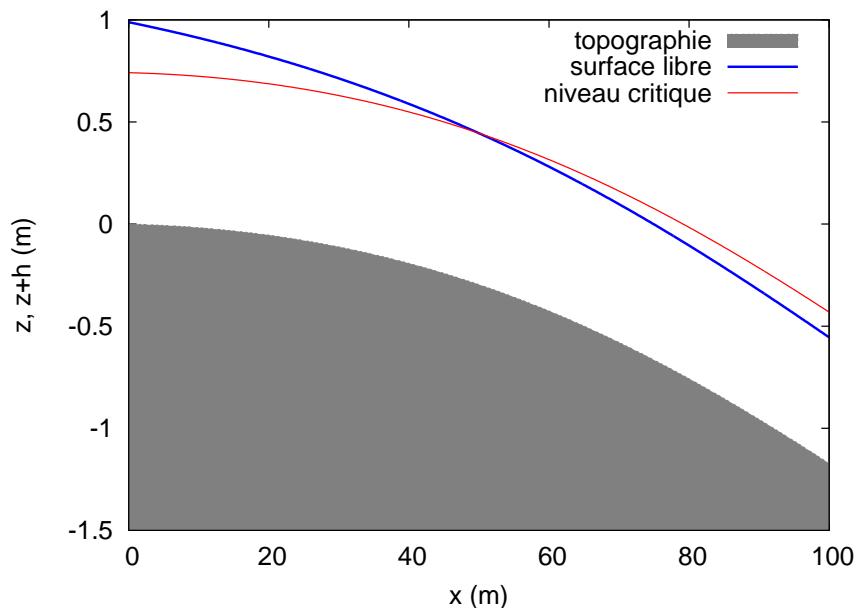


FIG. 3.8: Écoulement fluvial-torrentiel pour la loi de Manning.

Le débit est $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, nous avons donc un écoulement transcritique. L'écoulement en amont est fluvial et devient torrentiel (fig. 3.8).

Les coefficients de frottement est pour la loi de Manning : $n = 0.0328$. Les conditions initiales sont

$$h = \max(h_{ex}(100) + z(100) - z, 0) \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en amont } q = 2 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval sortie libre} \end{array} \right. ,$$

nous obtenons un écoulement transcritique.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement transcritique,
- de conditions de bord fluviale en amont et torrentielle en aval.

3.3.1.8 Écoulement torrentiel-torrentiel 2

Nous considérons un canal de 100 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{4} \exp\left(-4 \left(\frac{x}{100} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

et

$$\frac{d}{dx} h_{ex}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \frac{1}{50} \left(\frac{x}{100} - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-4 \left(\frac{x}{100} - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

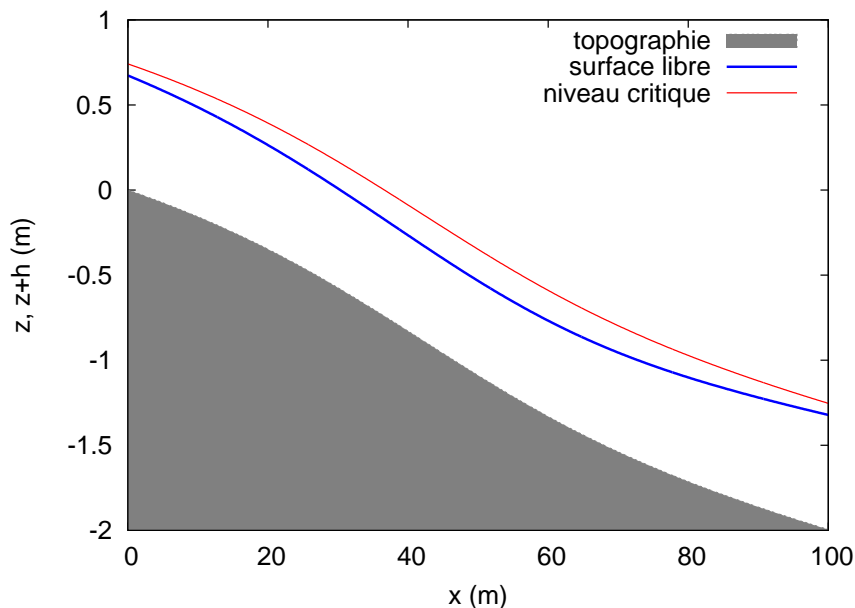


FIG. 3.9: Écoulement torrentiel-torrentiel pour la loi de Manning.

Le débit est $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, nous avons donc un écoulement entièrement torrentiel (fig. 3.9). Le coefficient de frottement est pour la loi de Manning : $n = 0.03$. Les conditions initiales sont

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en amont } q = 2 \text{ m}^2/\text{s et } h = h_{ex}(0) \text{ m} \\ \text{en aval sortie libre} \end{array} \right. ,$$

nous obtenons un écoulement torrentiel.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement entièrement torrentiel,
- de conditions de bord torrentielles.

3.3.1.9 Écoulement fluvial-fluvial périodique

Nous considérons un canal de 5000 m de long et la hauteur d'eau à l'équilibre donnée par

$$h_{ex}(x) = \frac{9}{8} + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{500}\right)$$

et

$$\frac{d}{dx} h_{ex}(x) = \frac{\pi}{2000} \cos\left(\frac{\pi x}{500}\right).$$

Le débit est $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, nous avons donc un écoulement entièrement fluvial (fig. 3.10).

Le coefficient de frottement est pour la loi de Manning : $n = 0.03$. Les conditions initiales

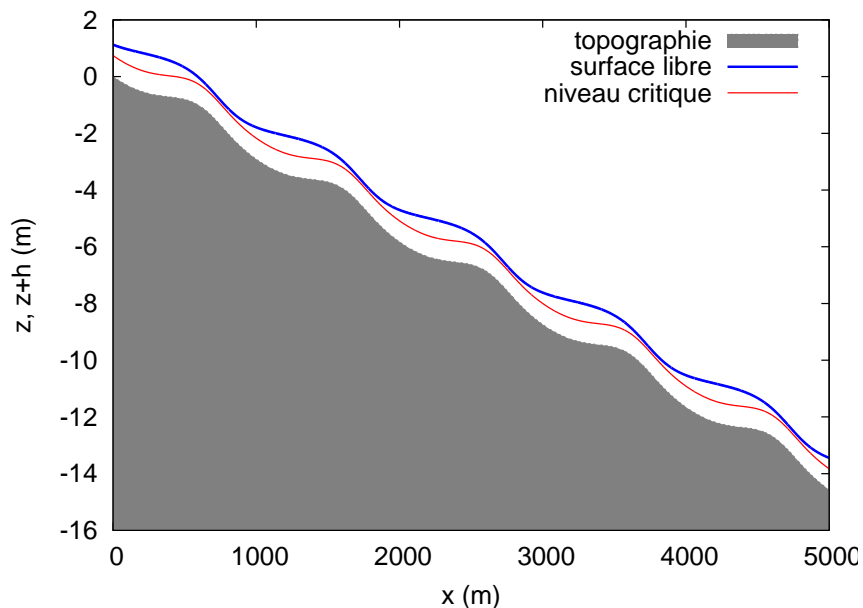


FIG. 3.10: Ecoulement fluvial-fluvial périodique pour la loi de Manning.

sont

$$h = \max(h_{ex}(5000) + z(5000) - z, 0) \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} \text{en amont } q = 2 \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{en aval } h = h_{ex}(5000) \text{ m} \end{cases} ,$$

nous obtenons un écoulement fluvial.

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement en régime permanent,
- d'une solution analytique périodique,
- d'une topographie variable qui se rapproche de la forme des sillons,
- d'un écoulement entièrement fluvial,
- de conditions de bord fluviales.

3.3.1.10 Récapitulatif des tests utilisés

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

Tests	Stat.	Trans.	Nulle	Var.	Régimes fluvial-torrentiel ressaut				Man.	Dar.	Commentaires
					Fl.	To.	Fl.→To.	R.			
Dressler		X	X						X	transition sec/ mouillé	
fluv-fluv1	X			X					X		
tor-tor1	X			X	X				X		
fluv-tor1	X			X		X			X		
tor-fluv1	X			X			X		X		
fluv-fluv2	X			X			X		X	transcritique et ressaut	
fluv-tor2	X			X		X			X		
tor-tor2	X			X	X				X		
périodique	X			X	X				X	configuration proche des sillons	

3.3.2 Résultats numériques

Nous avons généré les résultats de cette partie à l'aide de variantes du code utilisé au chapitre 2. Nous avons à nouveau utilisé le compilateur gfortran sans option de compilation (voir la section 2.2.2). La configuration pour lancer l'exécutable a été la suivante :

- système d'exploitation : Ubuntu version 9.04,
- matériel :
 - mémoire 2.9 Go,
 - processeur Intel[®] Core[™] 2 Duo CPU T5750 2.00 GHz.

Les temps de calcul sont évalués à l'aide du sous-programme `SYSTEM_CLOCK` (comme au chapitre 2). Enfin, nous avons effectué tous les calculs avec le flux HLL et la reconstruction MUSCL en respectant la condition de CFL théorique ($n_{CFL} = 0.5$).

Nous avons quatre groupes de tests :

- La solution de Dressler. Pour ce test, la loi de frottement est la loi de Darcy-Weisbach. La longueur du domaine est $L = 2000$ m, le temps total de la simulation correspond à 40 secondes et nous avons utilisé une discrétisation numérique de 50, 100, 200, 400 et 800 mailles.
- Les écoulements fluvial-fluvial 1, torrentiel-torrentiel 1, fluvial-torrentiel 1 et torrentiel-fluvial 1. Pour chacun de ces tests nous avons deux solutions une pour le terme de frottement de Manning et une pour le terme de frottement de Darcy-Weisbach. La condition initiale est un sol sec afin de tester la capacité de la méthode numérique à capturer un écoulement stationnaire après une phase transitoire. La longueur du domaine est $L = 1000$ m, le temps total des simulations correspond à 1500 secondes et nous avons utilisé une discrétisation numérique de 25, 50, 100, 200 et 400 mailles.
- Les écoulements fluvial-fluvial 2, fluvial-torrentiel 2 et torrentiel-torrentiel 2. Pour chacun de ces tests nous n'avons qu'une seule solution pour le terme de frottement de Manning (il serait assez aisé d'en obtenir une pour la loi de Darcy-Weisbach). La longueur du domaine est $L = 100$ m, le temps total des simulations correspond à 1500 secondes et nous avons utilisé une discrétisation numérique de 25, 50, 100, 200 et 400 mailles. Les mailles sont donc dix fois plus petites que pour la série de tests précédente, ce qui permet de tester la méthode numérique à différentes échelles.
- L'écoulement fluvial-fluvial périodique. Pour ce test, la loi de frottement est la loi de Manning. La longueur du domaine est $L = 5000$ m, le temps total de la simulation correspond à 5000 secondes et nous avons utilisé une discrétisation numérique de 100, 200, 400, 800 et 1600 mailles.

Pour les figures 3.15, 3.16, 3.18, 3.19, 3.21, 3.22, 3.24, 3.25, 3.27, 3.29, 3.32 et 3.34, la partie (a) (respectivement (b)) correspond à la superposition de la hauteur d'eau (respectivement du débit) analytique avec les hauteurs obtenues avec le maillage le plus grossier (les débits obtenus avec le maillage le plus fin) avec la reconstruction MUSCL, le flux HLL et les différentes façons de traiter les frottements. La partie (c) (respectivement (d)) correspond aux courbes de convergence L^1 pour h (respectivement q) en fonction du maillage pour les différentes méthodes. La partie (e) correspond à la comparaison des temps de calcul en fonction du maillage. Enfin, la partie (f) correspond à l'étude de la convergence des méthodes vers les surfaces libres en fonction du temps de simulation pour le maillage le plus fin.

3.3.2.1 Solution de Dressler

Avant de commenter les résultats obtenus, signalons que les graphiques 3.11 c-d sont extraits de Valiani et al. [1999b]. Ils ont été obtenus à l'aide d'un schéma volume fini non-équilibre d'ordre 2 explicite avec un flux HLL et un traitement des frottements semi-implicite.

Ce qui nous intéresse le plus dans cette simulation est le déplacement de la transition sec/mouillé et la préservation des équilibres au repos. Nous constatons que chacune des méthodes de traitement des frottements donne une position de la transition sec/mouillé un peu plus avancée que celle donnée par la solution de Dressler (figure 3.12). De plus la vitesse au niveau du front d'onde n'est pas constante et est plus élevée que celle donnée par la solution de Dressler. Ceci a été vérifié avec d'autres méthodes numériques (voir Goutal and Maurel [1997] et figs. 3.11 c-d extraites de Valiani et al. [1999b]). La solution de Dressler est une solution approchée basée sur un développement asymptotique (voir Dressler [1952]), cette solution donne seulement un ordre de grandeur des vitesses à obtenir. Les équilibres au repos sont parfaitement préservés et la topographie étant plate, il n'est pas nécessaire d'avoir un schéma équilibre afin de préserver ces états d'équilibres au repos (figs 3.11 c-d). Avec 50 mailles, les deux méthodes de traitement semi-implicites donnent des résultats très proches et sans oscillation (figs 3.12 a-c-e). En raffinant le maillage, les résultats sont améliorés (figs 3.12 b-d-f). Avec la méthode de topographie apparente, nous constatons un pic de surévaluation de la vitesse calculée au niveau de la transition sec/mouillé (fig. 3.12 c), l'amplitude de ce pic diminue en raffinant le maillage (fig. 3.12 d). Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le flux de Rusanov a donné les meilleurs résultats sur le test de Thacker qui permet de tester les transitions sec/mouillé. Nous avons donc refait les calculs avec le flux de Rusanov et la méthode de topographie apparente (figs 3.11 a-b). Nous obtenons des pics moins prononcés que ceux obtenus avec le flux HLL.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

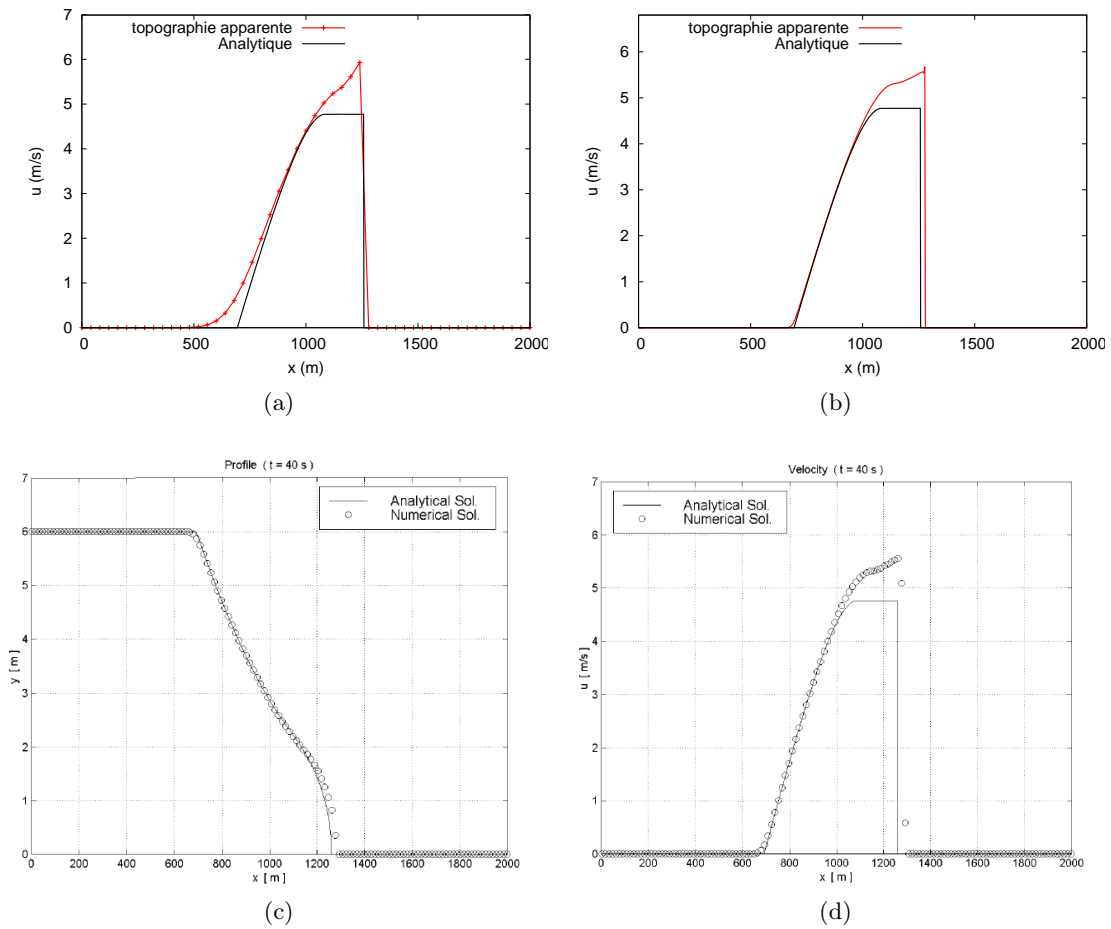


FIG. 3.11: Solution de Dressler à $t = 40$ s : comparaison du profil de vitesses obtenu avec la méthode de topographie apparente et le flux de Rusanov pour (a) 50 mailles et (b) 800 mailles et les profils (c) de hauteur et (d) de vitesse obtenus dans Valiani et al. [1999b].

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

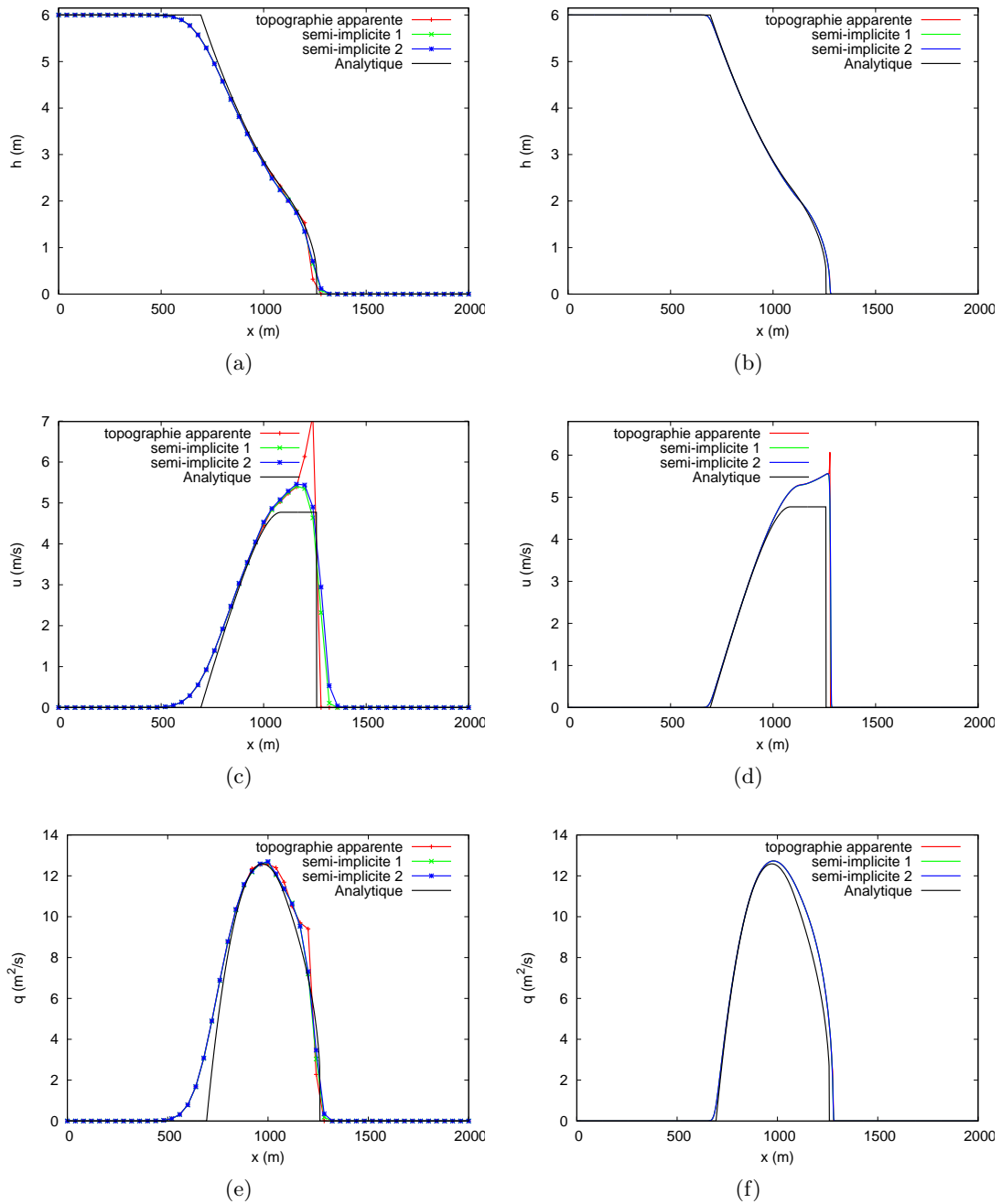


FIG. 3.12: Solution de Dressler à $t = 40$ s : comparaison des hauteurs d'eau pour (a) 50 et (b) 800 mailles, des vitesses pour (c) 50 et (d) 800 mailles et des débits pour (e) 50 et (f) 800 mailles.

3.3.2.2 Ecoulement fluvial-fluvial 1

A $t = 1500$ s, les différentes méthodes ont convergé vers une solution stationnaire et ont une phase transitoire semblable (figs 3.15f et 3.16f). Les résultats obtenus sont proches de l'état stationnaire exact (figs 3.15 a-b et 3.16 a-b) : les erreurs relatives sont inférieures à 0.2% (figs 3.15f et 3.16f). Nous constatons des oscillations sur les courbes des débits calculés à proximité de la sortie (figs 3.15b et 3.16b). L'écoulement étant fluvial en aval, la hauteur d'eau en sortie est imposée. Ainsi le traitement des conditions de bord peut être mis en cause. Pour chacune des méthodes, nous retrouvons des taux de convergence de 1 (figs 3.15 c-d et 3.16 c-d). Le traitement semi-implicite 1 est la méthode qui donne les résultats les moins bons. Le traitement semi-implicite 2 et la topographie apparente donnent des résultats assez proches (figs 3.15 a-b-c-d-f et 3.16 a-b-c-d-f). La méthode semi-implicite 1 est celle qui nécessite les temps de calcul les plus longs, la méthode semi-implicite 2 nécessite au contraire les temps les plus courts (figs 3.15e et 3.16e). La figure 3.14a (respectivement fig. 3.14b) représente l'erreur faite sur les hauteurs d'eau (resp. les vitesses) en fonction du temps de calcul (pour la loi de Darcy-Weisbach), ce qui permet de comparer l'efficacité des différentes méthodes. Le traitement semi-implicite 2 est légèrement plus efficace que la topographie apparente. Au niveau de l'interface sec/mouillé à l'instant $t = 100$ s (fig. 3.14c), nous observons un pic de surestimation de la vitesse avec la topographie apparente (fig. 3.14d pour 25 et 400 mailles) que nous n'avons pas avec les méthodes semi-implicites. Comme pour le cas test de Dressler, nous avons refait les calculs avec le flux de Rusanov et la topographie apparente (fig. 3.13). Nous obtenons encore des pics plus petits que ceux obtenus avec le flux HLL.

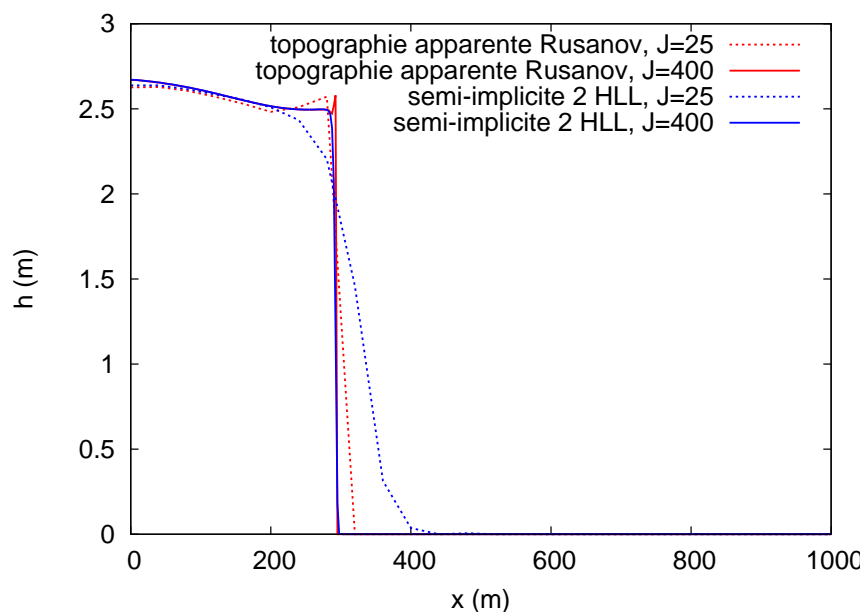


FIG. 3.13: Ecoulement fluvial-fluvial 1 pour la loi de Darcy-Weisbach : comparaison des vitesses obtenues avec le flux de Rusanov associé à la topographie apparente avec le flux HLL associé au traitement semi-implicite 2 pour 25 et 400 mailles.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

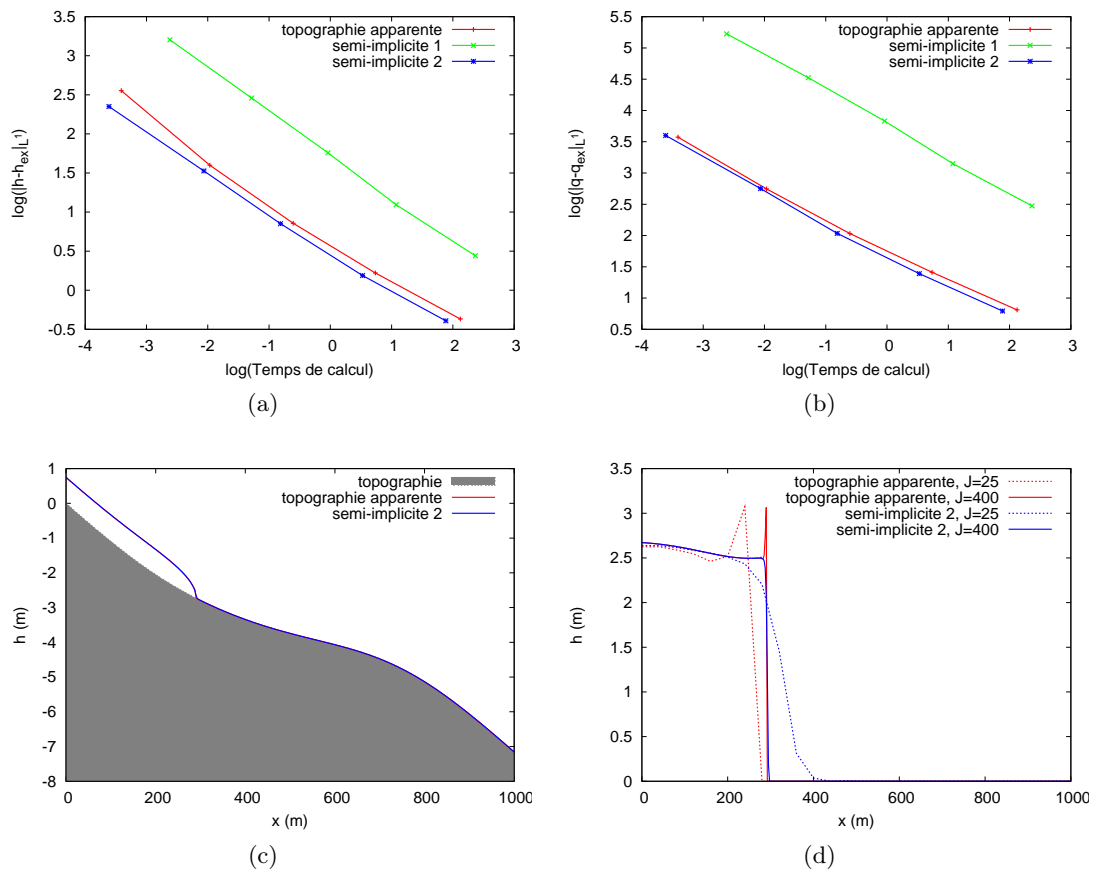


FIG. 3.14: Ecoulement fluvial-fluvial 1, loi de Darcy-Weisbach : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses et comparaison de la transition sec/mouillé au niveau (c) de la surface libre et (d) de la vitesse à l'instant $t = 100$ s.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

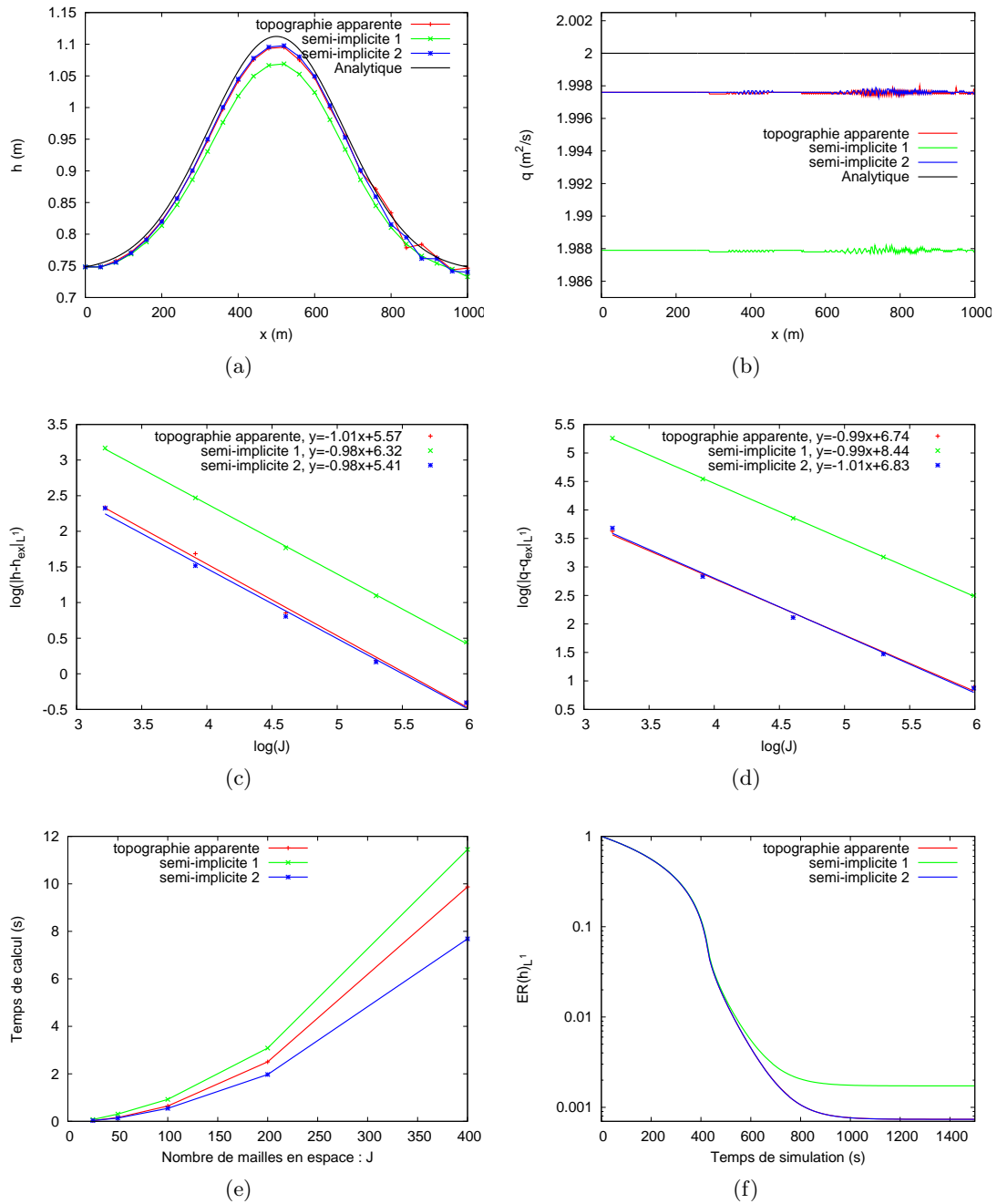


FIG. 3.15: Ecoulement fluvial-fluvial 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

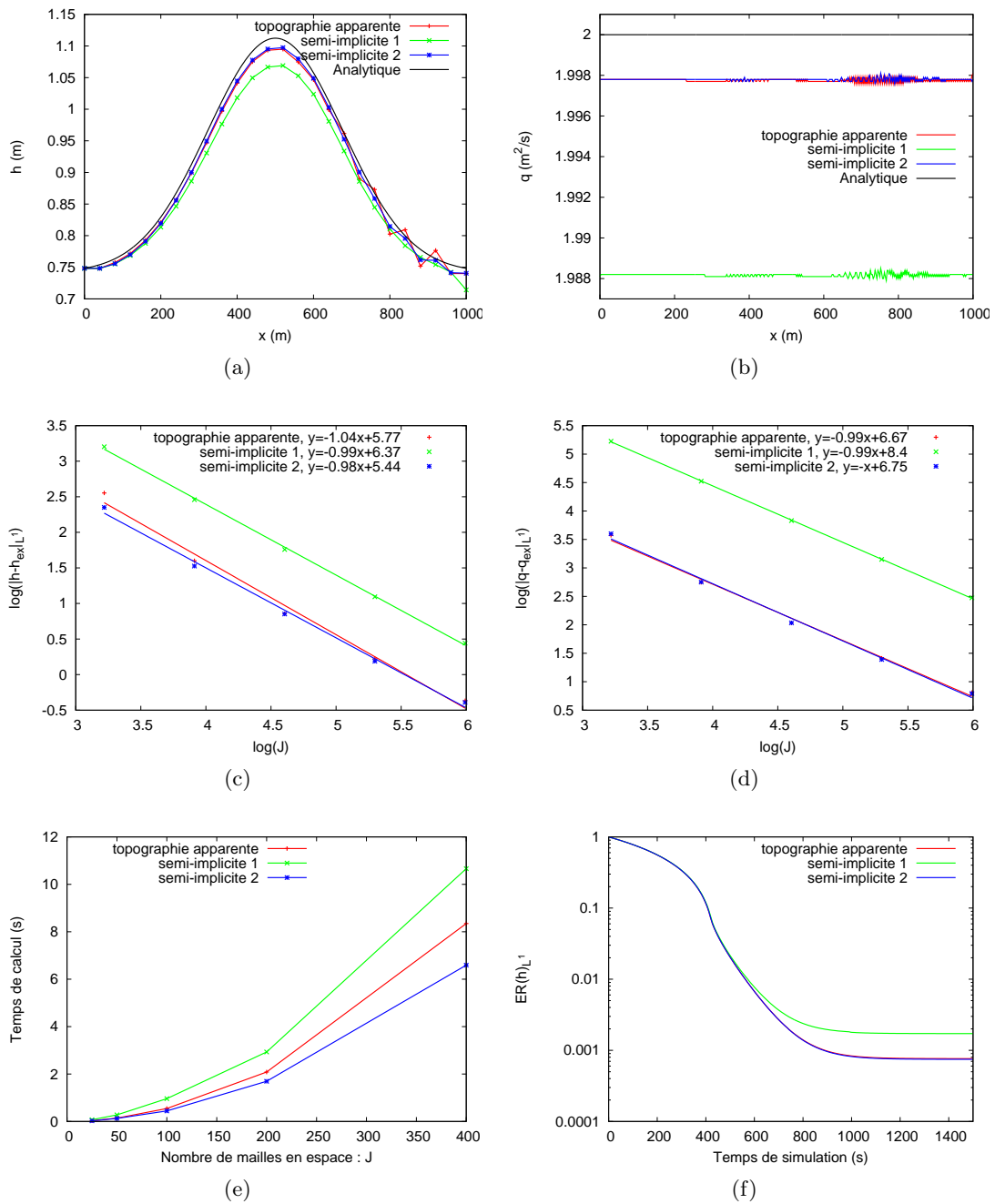


FIG. 3.16: Ecoulement fluvial-fluvial 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3.2.3 Ecoulement torrentiel-torrentiel 1

A $t = 1500$ s, chacune des méthodes a convergé vers une solution stationnaire (figs. 3.18f et 3.19f pour 400 mailles). Le traitement semi-implicite 1 donne des hauteurs d'eau assez éloignées de la solution exacte (figs 3.17a, 3.18a, 3.19a, 3.18f et 3.19f). Même pour un maillage grossier, il est très difficile de voir ce défaut sur un graphique représentant la surface libre (fig. 3.17b). Les débits sont parfaitement calculés (figs 3.19b et 3.18b), les oscillations sont de très faibles amplitudes. Pour la loi de Manning, les frottements sont surévalués avec la topographie apparente avec 25 mailles. En effet, l'écoulement reste bloqué sur la première maille (fig. 3.18a). Ce problème disparaît en raffinant le maillage (fig. 3.17a, 50 mailles). Nous n'avons pas ce problème pour la loi de Darcy-Weisbach (fig. 3.19a). Le calcul des taux de convergence pour la topographie apparente ne prennent pas en compte les résultats obtenus pour 25 mailles (figs 3.18 a-b) pour la loi de Manning. La topographie apparente et le traitement semi-implicite 2 donnent des résultats assez proches et meilleurs que ceux obtenus avec la méthode semi-implicite 1 (figs 3.18 c-d et 3.19 c-d). Les temps de calculs sont tous très proches (figs 3.18e et 3.19e).

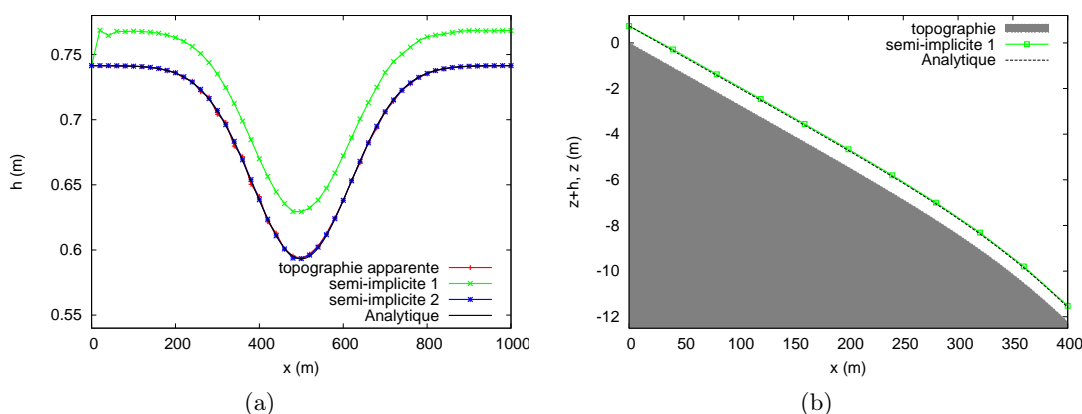


FIG. 3.17: Ecoulement torrentiel-torrentiel 1, loi de Manning : (a) hauteurs d'eau pour $J = 50$ mailles et (b) zoom sur la surface libre obtenue avec la méthode semi-implicite 1 pour $J = 25$ mailles.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

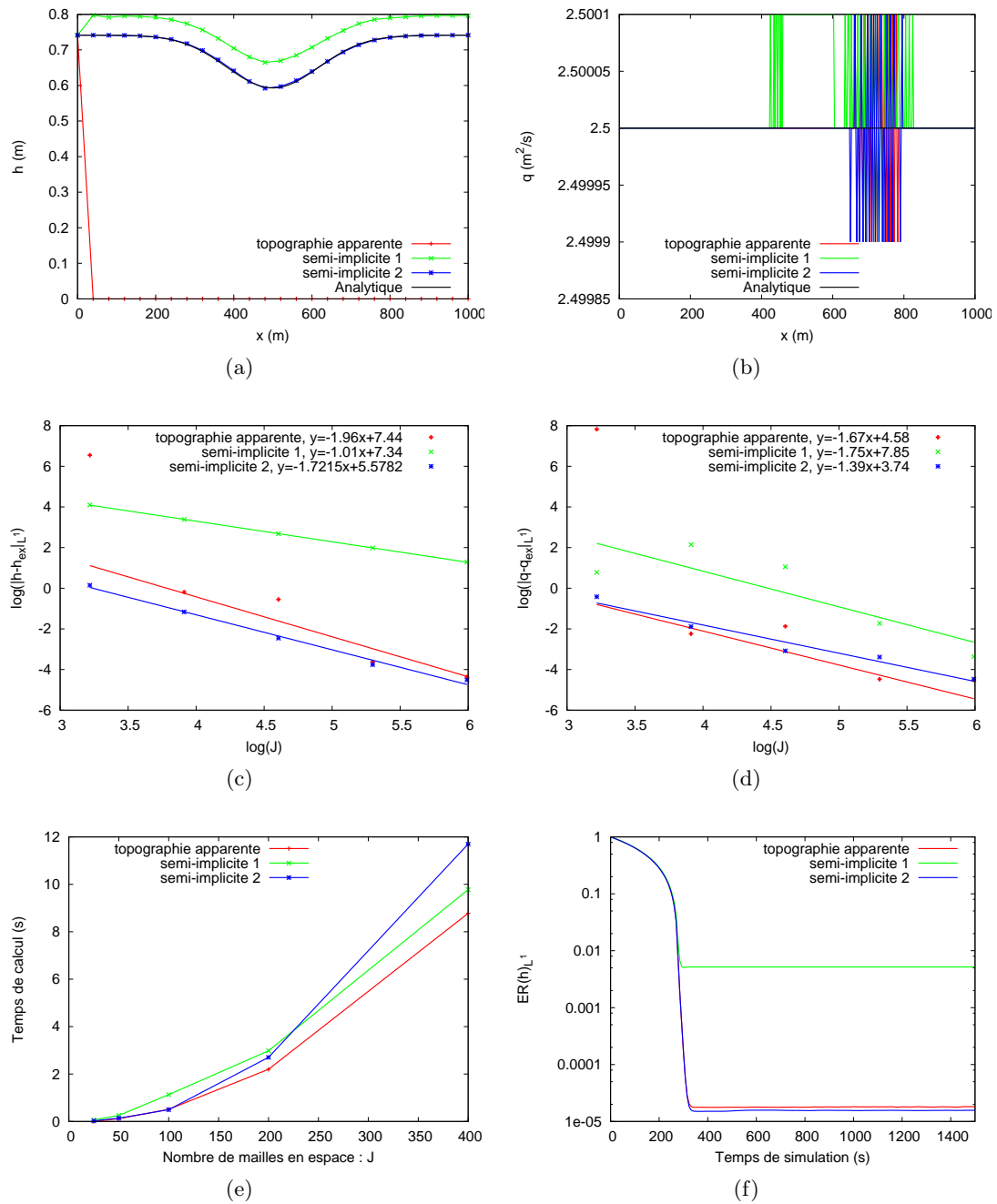


FIG. 3.18: Ecoulement torrentiel-torrentiel 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

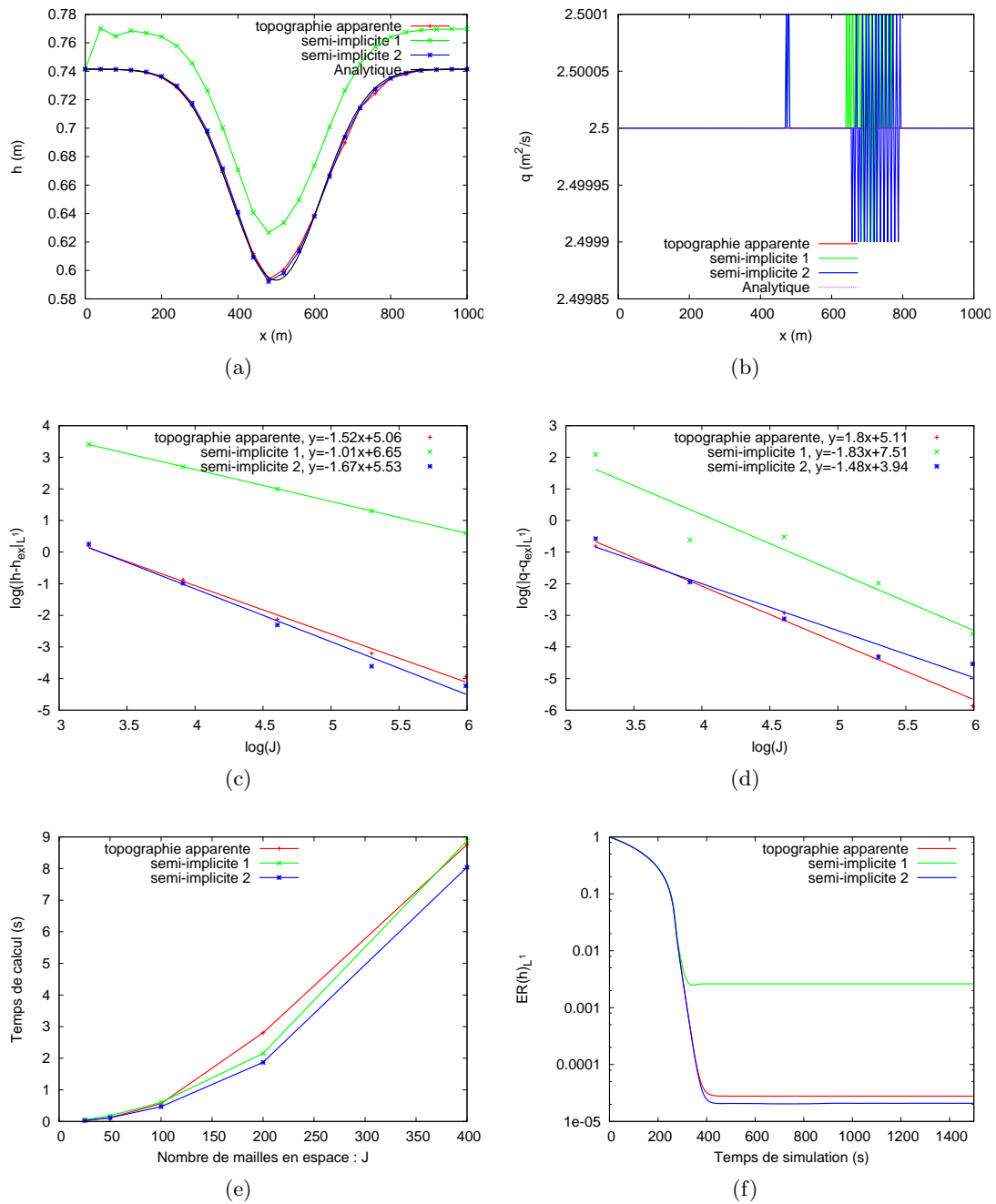


FIG. 3.19: Ecoulement torrentiel-torrentiel 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

3.3.2.4 Ecoulement fluvial-torrentiel 1

La phase transitoire est commune à toutes les méthodes numériques et chacune des méthodes a convergé vers une solution stationnaire à la fin de la simulation (figs 3.21f et 3.22f). Comme pour le test précédent, la méthode semi-implicite 1 donne les hauteurs d'eau les plus éloignées de la solution exacte, la hauteur est surestimée en aval (figs 3.21 a-c-f et 3.22 a-c-f). Avec la topographie apparente, nous observons des oscillations au niveau des hauteurs et des débits (figs 3.21 a-b et 3.22 a-b). Ces oscillations semblent se former au niveau de la transition fluvial/torrentiel. Le traitement semi-implicite 2 permet d'obtenir un débit parfaitement constant pour la loi de Darcy-Weisbach (fig. 3.22b) et avec de légères oscillations pour la loi de Manning (fig. 3.21b). La méthode semi-implicite 1 donne à nouveau les moins bons résultats, la méthode semi-implicite 2 est la plus précise et la topographie apparente se rapproche de la méthode semi-implicite 2 en raffinant le maillage (3.21 c-d et 3.21 c-d). Le meilleur compromis précision/temps de calcul est obtenu avec le traitement demi-implicite 2 devant la topographie apparente (comme illustré pour la loi de Manning et la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 3.20).

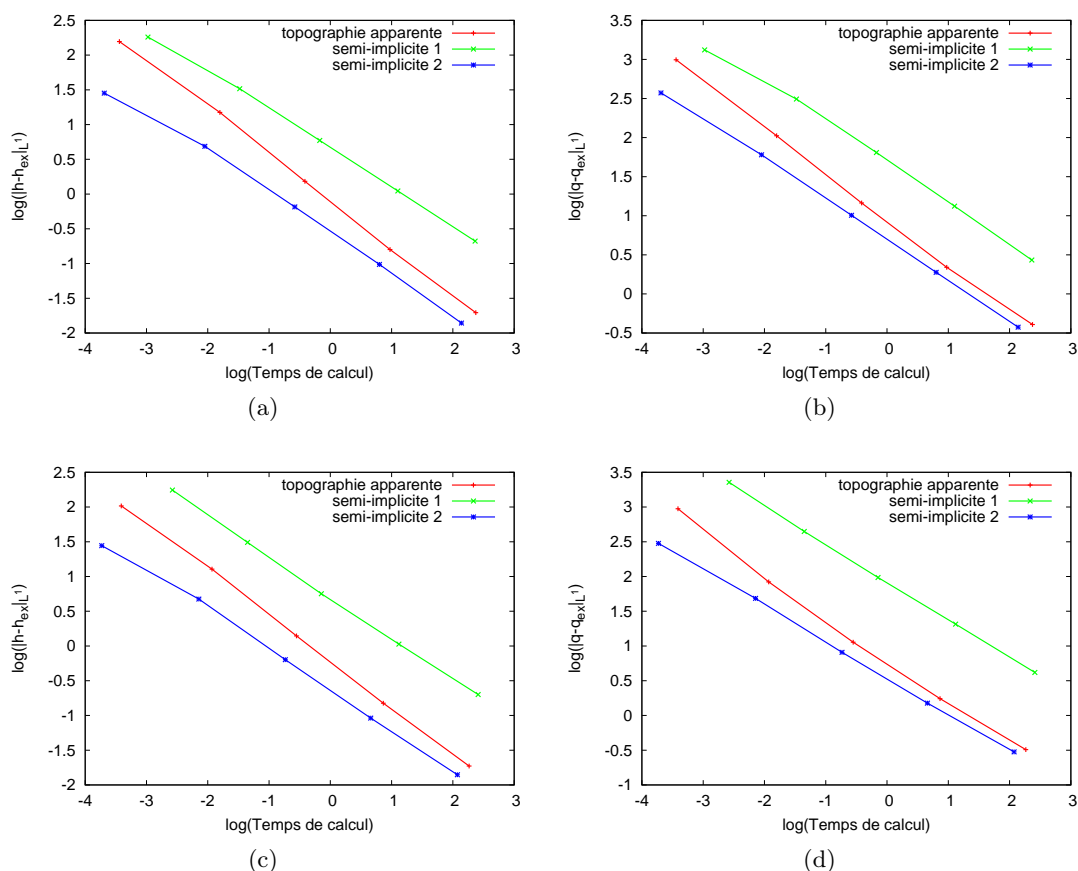


FIG. 3.20: Ecoulement fluvial-torrentiel 1 : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses pour la loi de Manning et (c) des hauteurs d'eau, (d) des vitesses pour la loi de Darcy-Weisbach.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

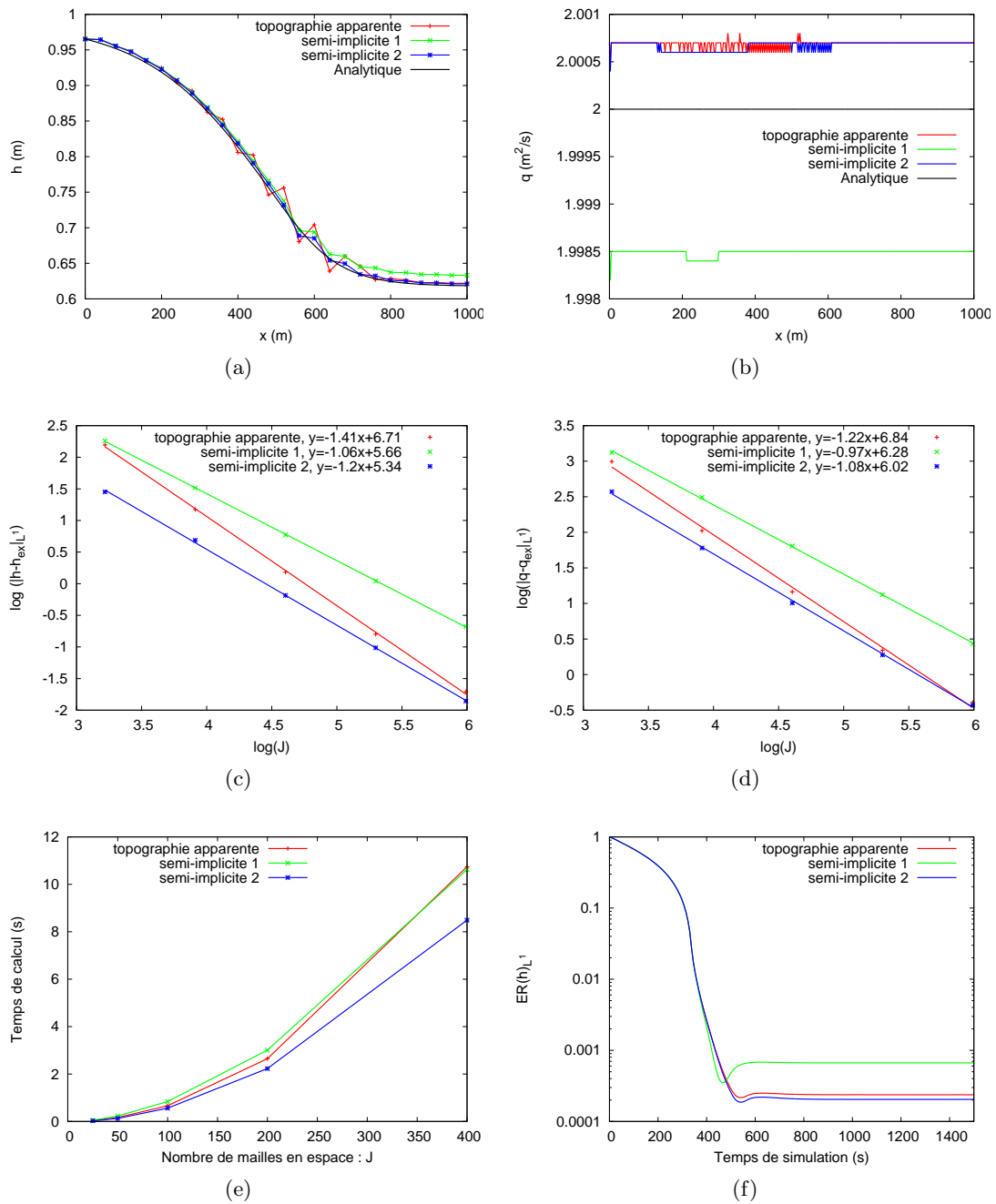


FIG. 3.21: Ecoulement fluvial-torrentiel 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

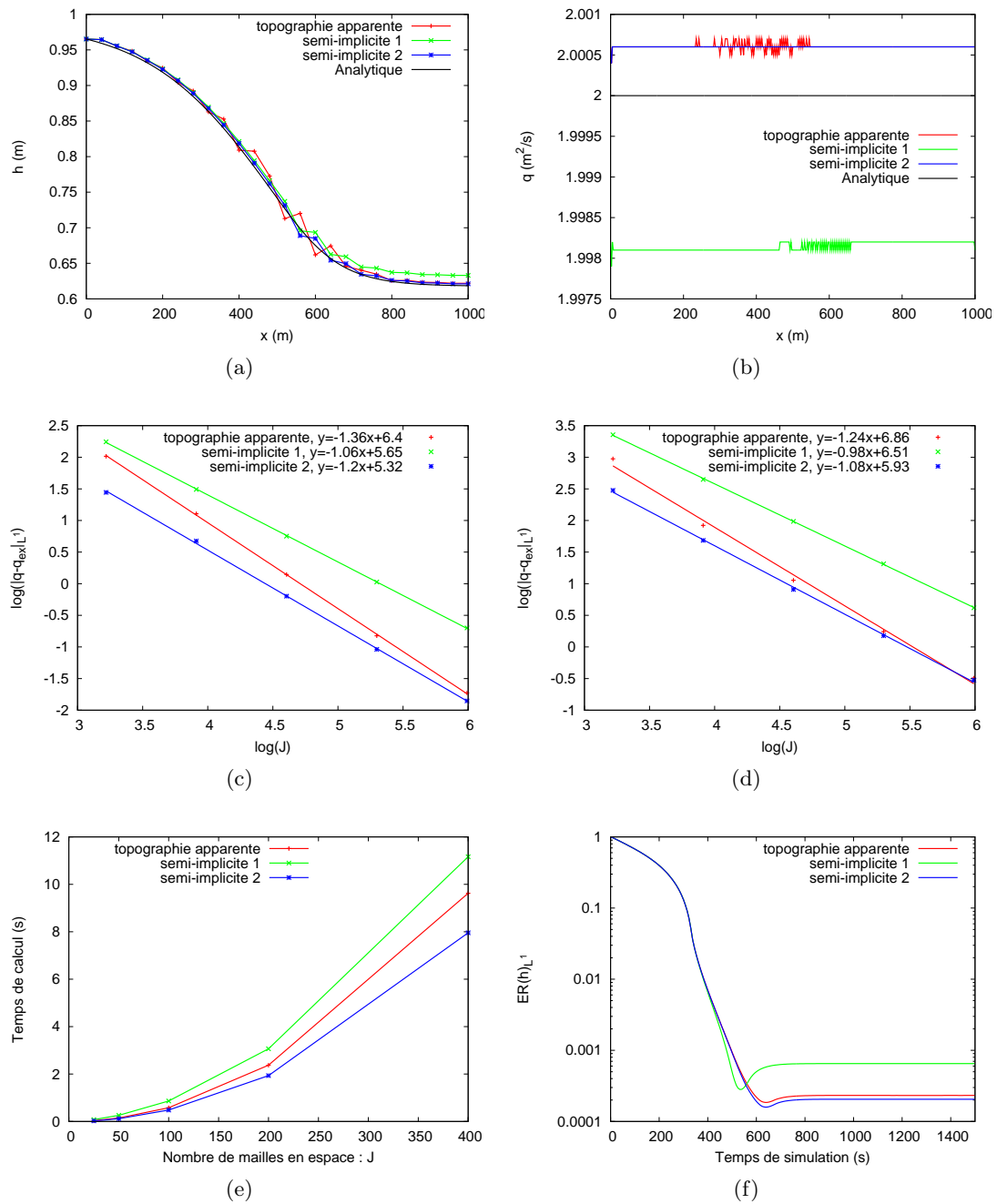


FIG. 3.22: Ecoulement fluvial-torrentiel 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3.2.5 Ecoulement torrentiel-fluvial 1

Après 1500 secondes, chacune des méthodes a convergé vers une solution stationnaire (figs 3.24f et 3.25f). Le ressaut est parfaitement localisé, même pour un maillage grossier (figs 3.24a et 3.25a). Cependant, toutes les méthodes donnent une surestimation de la hauteur d'eau en aval du ressaut (figs 3.24a, 3.23 et 3.25a) ce qui peut être dû à une condition de bord aval non adaptée. En amont du choc, la hauteur d'eau est légèrement surévaluée par la méthode semi-implicite 1 (figs 3.24a, 3.23 et 3.25a). Avec la topographie apparente et la loi de Manning, nous observons à nouveau un blocage de l'eau au niveau la première maille du domaine avec 25 mailles (fig. 3.24a) qui disparaît en raffinant le maillage (fig. 3.23 pour 50 mailles). Ce problème n'est pas observé avec la loi de Darcy-Weisbach (fig. 3.25a). Pour le calcul des débits, chacune des méthodes donne des résultats assez proches et très satisfaisants pour le calcul des débits, à l'exception d'un pic au niveau du ressaut (figs. 3.24 b-d et 3.25 b-d). Concernant le calcul des hauteurs d'eau, le traitement semi-implicite 1 est le moins précis et les deux autres méthodes donnent des résultats très proches (figs 3.24c et 3.25c). Enfin, les traitements semi-implicites demandent moins de temps de calcul que la topographie apparente (figs 3.24e et 3.25e).

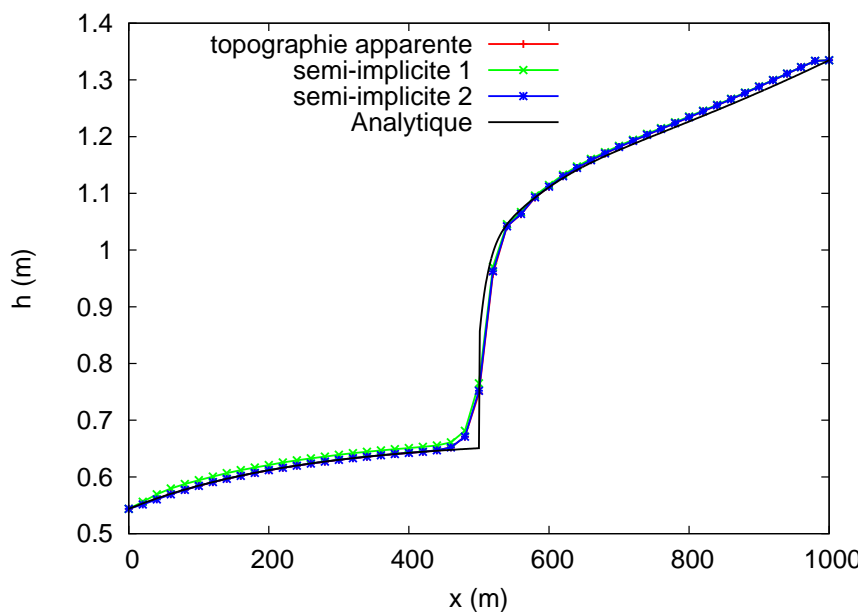


FIG. 3.23: Ecoulement torrentiel-fluvial 1, loi de Manning : comparaison des hauteurs pour $J = 50$ mailles.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

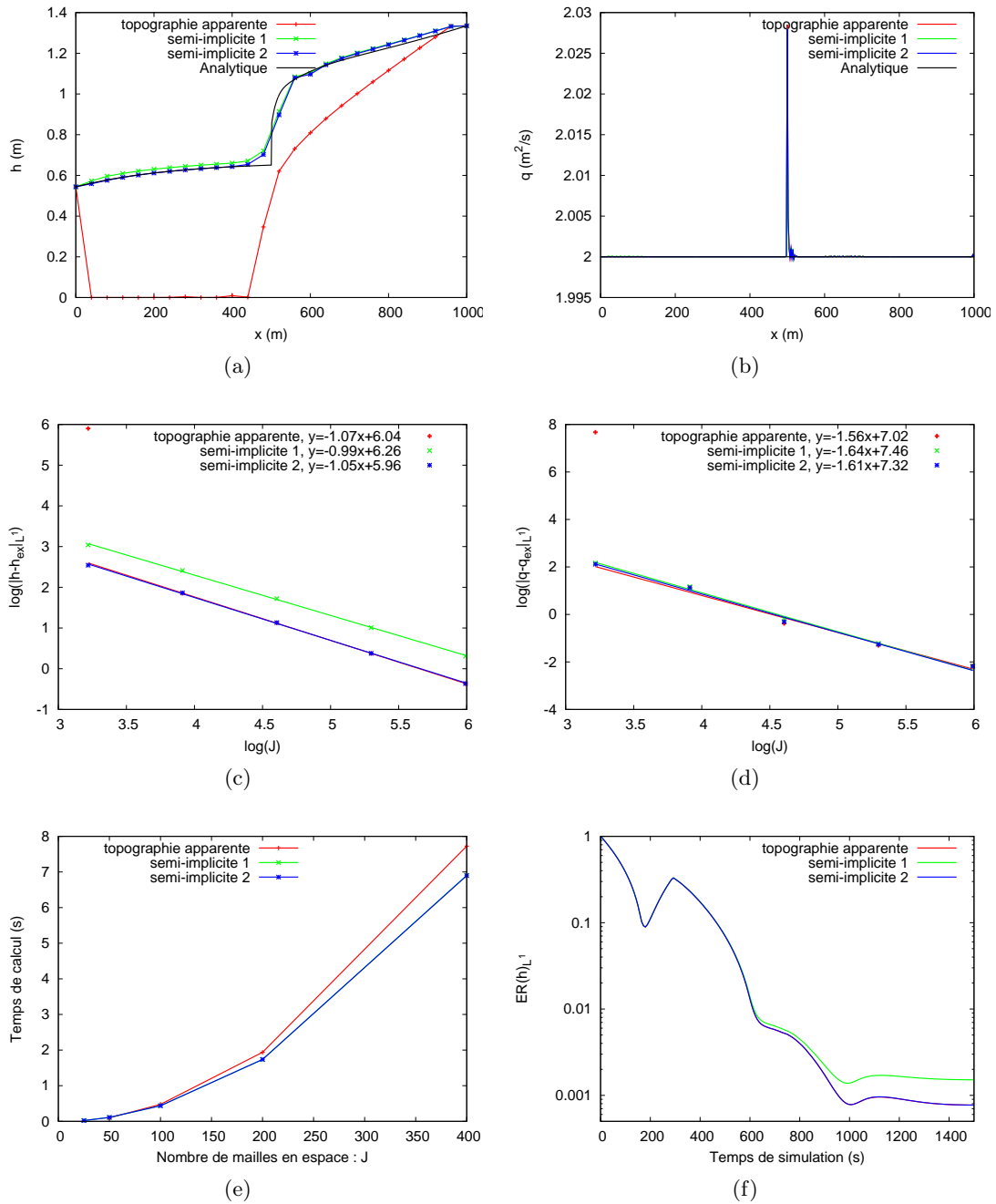


FIG. 3.24: Ecoulement torrentiel-fluvial 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

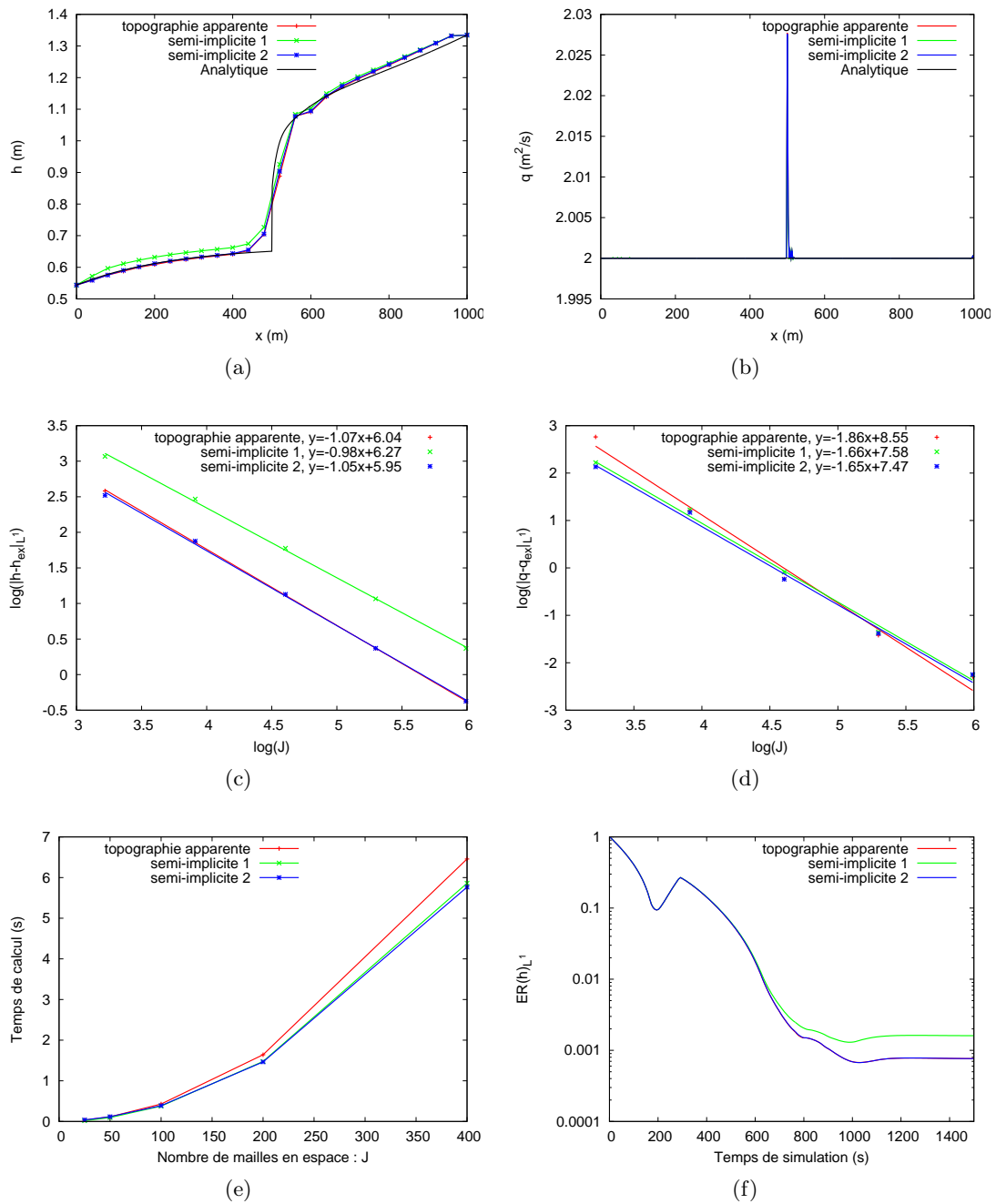


FIG. 3.25: Ecoulement torrentiel-fluvial 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

3.3.2.6 Ecoulement fluvial-fluvial 2

Après 400 secondes de simulation, chacune des méthodes a convergé vers une solution stationnaire (fig 3.27f). Comme nous l'avons dit précédemment, ce cas test est très complet : il présente deux difficultés une transition fluvial/torrentiel et un ressaut (fig. 3.7). En dépit de ces difficultés, chacune des méthodes localise correctement la position du choc (fig. 3.27a avec 25 mailles). Concernant le calcul des hauteurs d'eau, les méthodes donnent des résultats très proches (fig. 3.27c). Le traitement semi-implicite 1 est à la fois le plus coûteux en temps de calcul et le plus précis dans le calcul des débits (figs 3.27 d-e). Le débit stationnaire est correctement calculé par chacune de ces méthodes (fig. 3.27b). Le rapport précision/temps de calcul de chacune de ces méthodes est très proche l'un de l'autre (fig. 3.26), plus particulièrement pour la hauteur d'eau (fig. 3.26a).

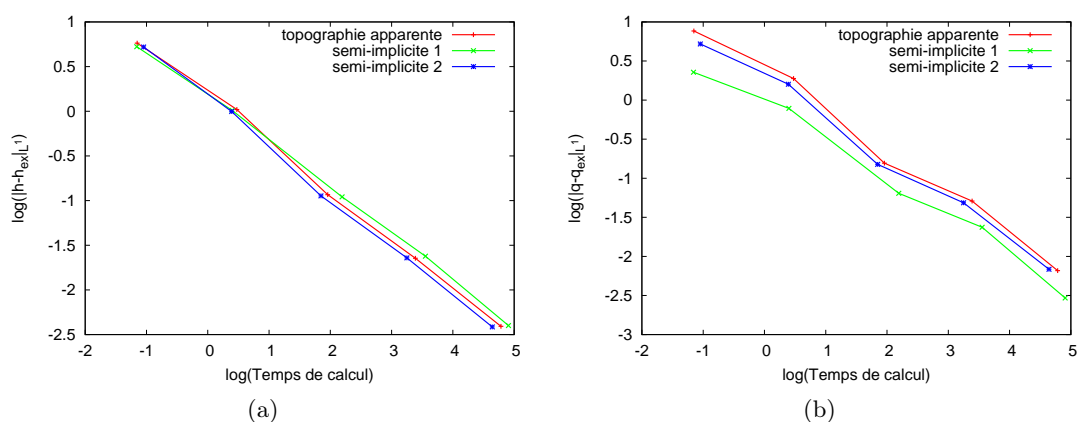


FIG. 3.26: Ecoulement fluvial-fluvial 2, loi de Manning : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

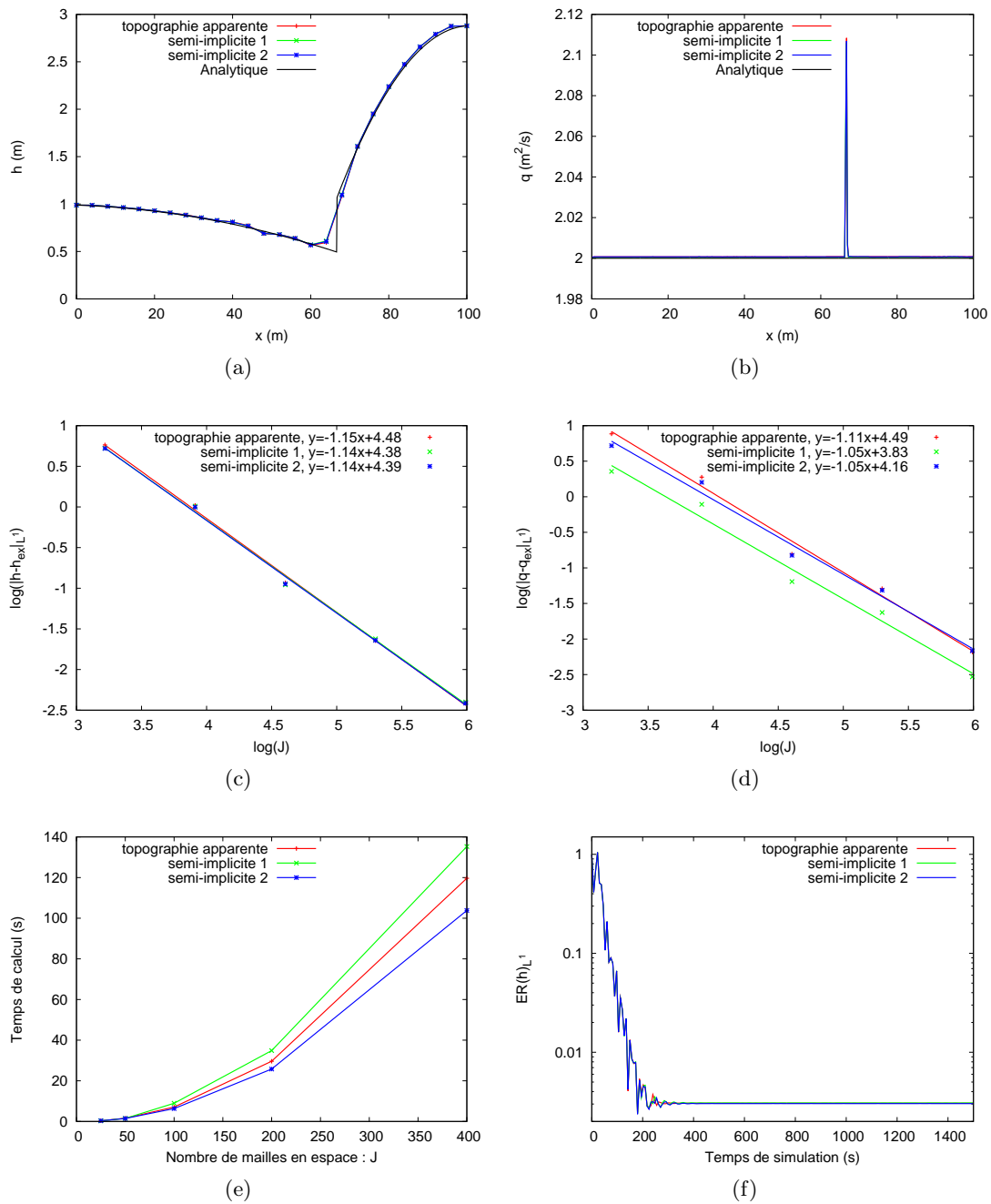


FIG. 3.27: Ecoulement fluvial-fluvial 2 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3.2.7 Ecoulement fluvial-torrentiel 2

A $t = 1500$ s, chacune des méthodes a convergé vers une solution stationnaire (fig. 3.29f). Chacune des méthodes surestime la hauteur d'eau dès l'entrée et nous observons des oscillations au niveau de la transition fluvial/torrentiel (fig. 3.29a pour 25 mailles). En affinant le maillage (figs 3.28 c-d, 400 mailles), nous observons toujours une surestimation de la hauteur d'eau et des oscillations au voisinage du point de transition fluvial/torrentiel. Cependant, l'amplitude des oscillations diminue en s'éloignant du point sonique. Nous avons refait ce test avec le traitement semi-implicite 2, les flux de Rusanov et cinétique. Avec ces flux numériques qui sont plus diffusifs que le flux HLL, ces oscillations disparaissent (figs 3.28 e-f, 400 mailles), elles sont peut être dues à un petit défaut du flux HLL au niveau du point sonique. Les résultats obtenus avec chacune des méthodes sont très proches les uns des autres (figs 3.29 a-b-c-d-e-f), ce qui est confirmé par l'étude des rapports précision/temps de calcul (figs 3.28 a-b).

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

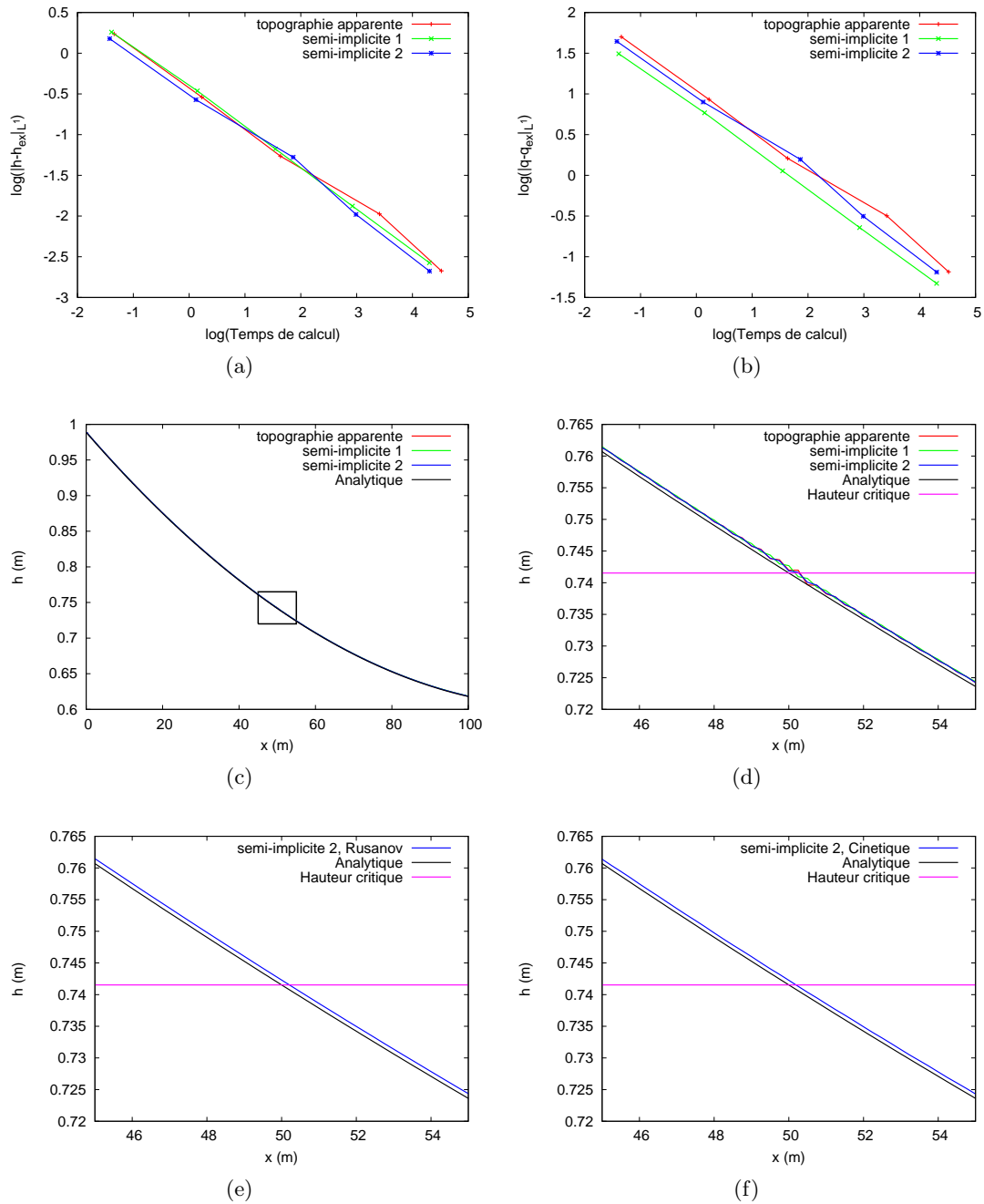


FIG. 3.28: Ecoulement fluvial-torrentiel 2, loi de Manning pour $J = 400$ mailles : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses et comparaison (c) des hauteurs d'eau, (d) zoom sur les oscillations et zoom sur la même zone pour les flux (e) de Rusanov et (f) cinétique.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

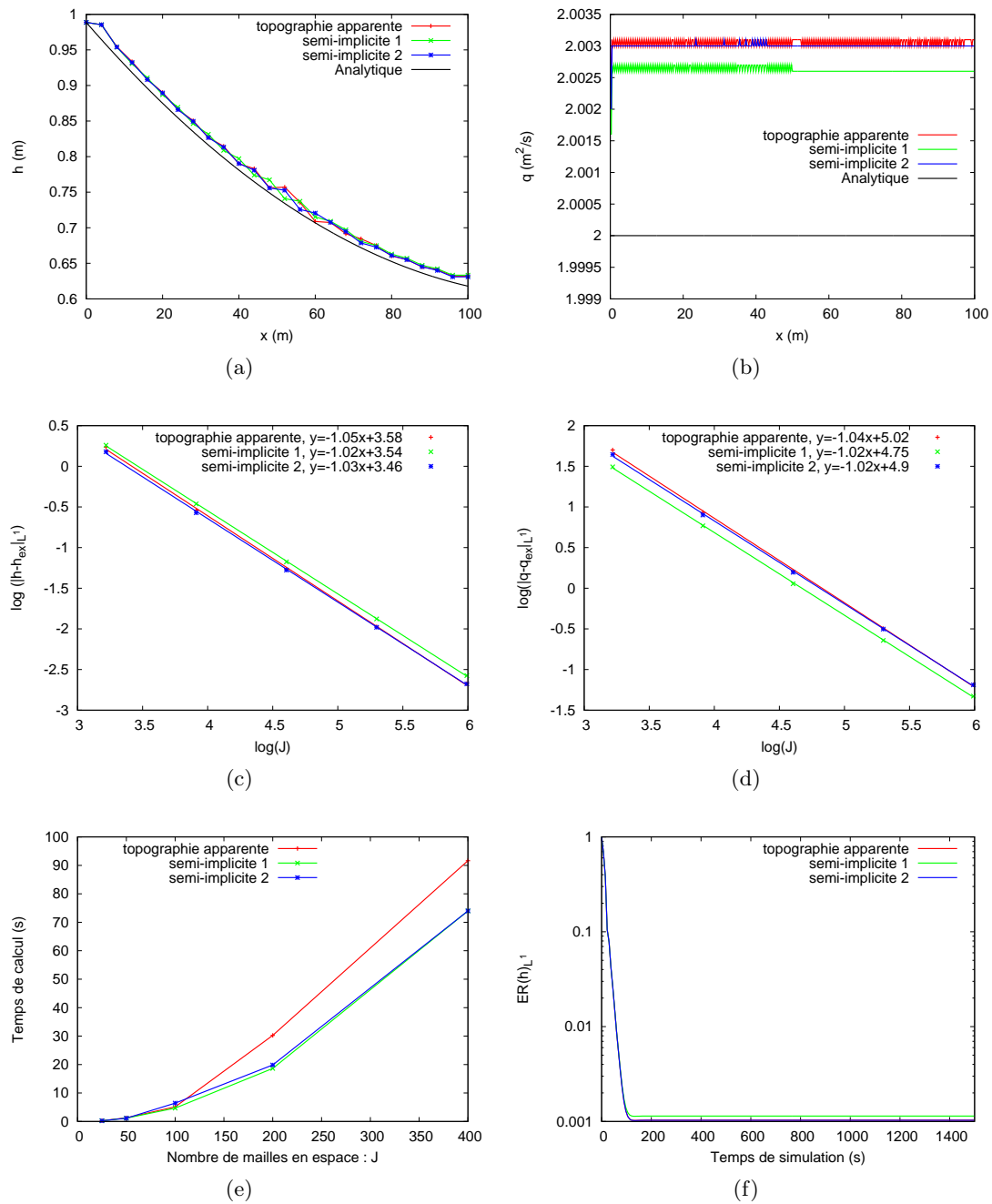


FIG. 3.29: Ecoulement fluvial-torrentiel 2 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3.2.8 Ecoulement torrentiel-torrentiel 2

A $t = 1500$ s, chacune des méthodes a convergé vers une solution stationnaire (fig. 3.32f). La méthode semi-implicite 1 surestime à nouveau légèrement la hauteur d'eau (fig. 3.32a). Nous pouvons observer visuellement la condition de bord aval choisie : ouverte ou de Neumann (fig. 3.32a). Afin d'améliorer les résultats, nous pourrions avoir recours à une cellule fantôme (comme dans Marche [2005, p.157-163]). La hauteur d'eau est toutefois assez bien calculée par les deux autres méthodes (semi-implicite 2 et topographie apparente). Avec 400 mailles, le calcul du débit est parfait quelle que soit la méthode utilisée (fig. 3.32b). Concernant le calcul des débits, les trois méthodes sont à peu près équivalentes (fig. 3.32d). Nous obtenons des taux de convergence supérieurs à 1. La méthode semi-implicite 1 est la moins bonne pour le calcul des hauteurs d'eau (fig. 3.32d) et les deux autres donnent des résultats très proches. Les temps de calcul sont à l'avantage du traitement semi-implicite 2 (fig. 3.32e). La surface libre obtenue pour 400 mailles semblent parfaitement calculée (fig. 3.31a). Mais en effectuant un zoom, nous remarquons des oscillations dont l'amplitude et la période semblent constantes (fig. 3.31b). Comme pour le test précédent, nous avons refait ce test avec le traitement semi-implicite 2, les flux de Rusanov et cinétique. Avec le flux cinétique, nous obtenons aussi des oscillations qui sont inexistantes avec le flux de Rusanov (figs 3.31 c-d pour 400 mailles). L'écoulement en sortie étant presque critique, les oscillations peuvent être dues à un problème de condition de bord. L'écoulement étant torrentiel, ses oscillations peuvent aussi être des roll-waves. Nous reviendrons sur ce phénomène hydrologique dans le chapitre 4. Enfin, en traçant les coefficients a_i du système de Saint-Venant sous forme non dimensionnelle (1.16), nous constatons que le terme de frottement et le terme de topographie ont le même ordre de grandeur (voir la figure 3.30). Il faudra peut être traiter les frottements en s'inspirant de ce qui est fait dans Bouchut et al. [2007], Coquel et al. [2008], Chalons et al. [0000] et Berthon and Turpault [0000] afin de préserver ce quasi-équilibre.

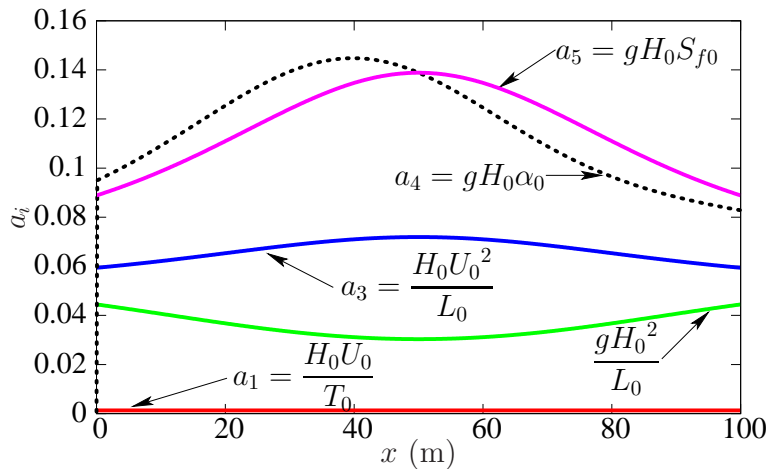


FIG. 3.30: Ecoulement torrentiel-torrentiel 2 : analyse de l'ordre de grandeur des coefficients a_i du système de Saint-Venant sous forme non dimensionnelle.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

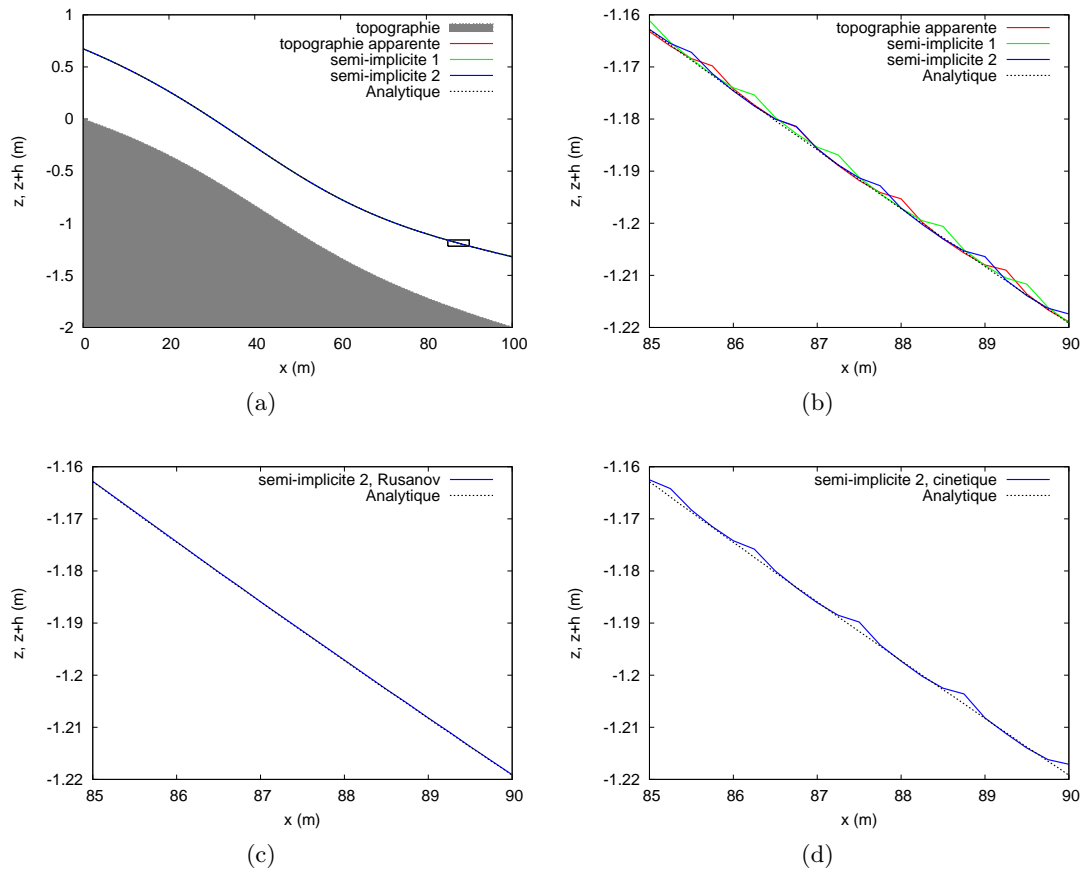


FIG. 3.31: Ecoulement torrentiel-torrentiel 2 : (a) surface libre, (b) zoom sur les oscillations pour $J = 400$ mailles et zoom sur la même zone pour les flux (c) de Rusanov et (d) cinétique.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

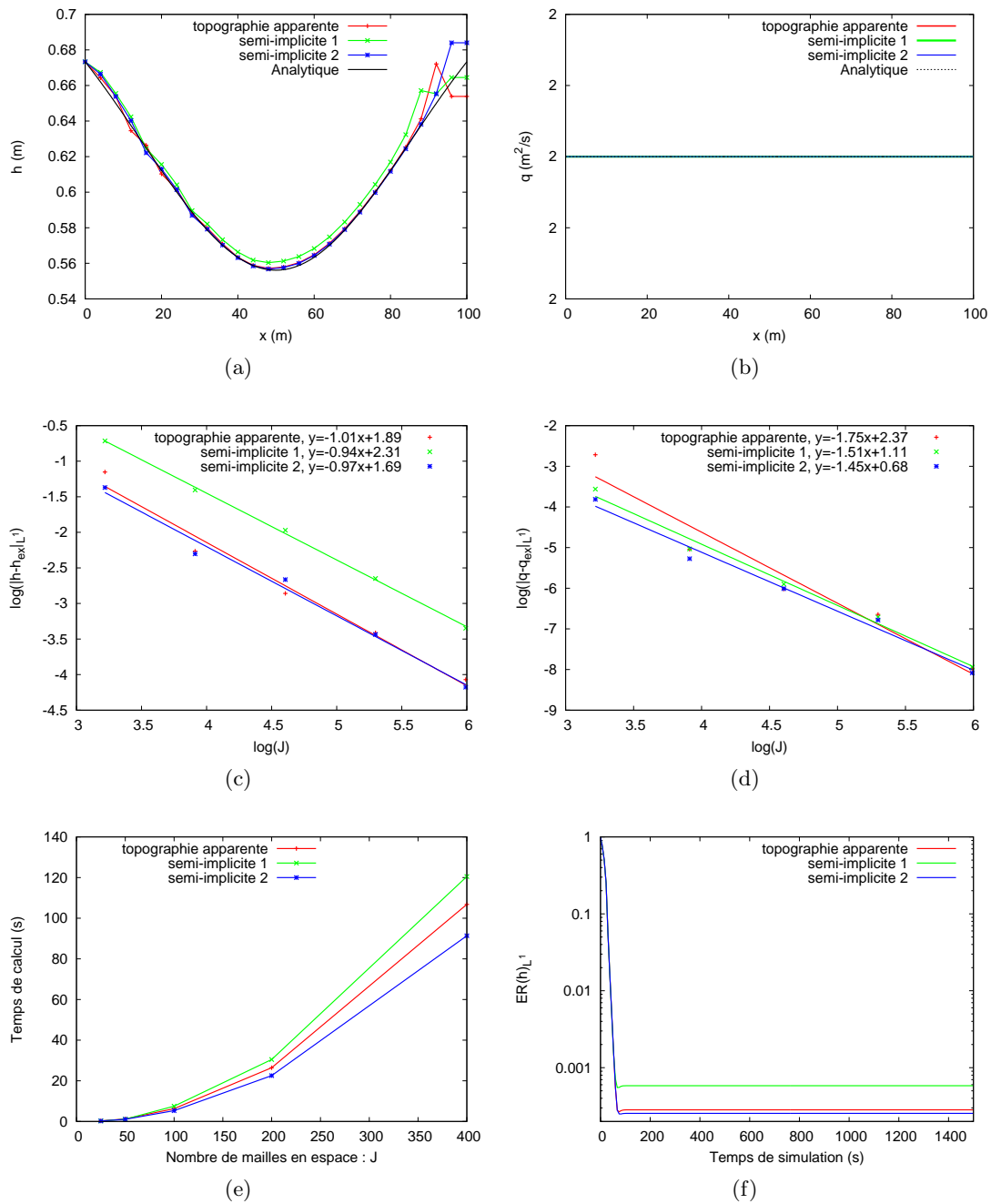


FIG. 3.32: Ecoulement torrentiel-torrentiel 2 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3.2.9 Ecoulement fluvial-fluvial périodique

Sur ce cas test, nous avons encore rencontré un problème de surévaluation des frottements avec la méthode de topographie apparente. Ce qui a engendré un blocage de l'eau comme à la section 3.3.2.5. C'est pourquoi nous avons choisi sur ce cas test de focaliser notre analyse sur les méthodes semi-implicites. A $t = 5000$ s, les deux méthodes ont convergé vers une solution stationnaire, nous constatons que l'erreur faite sur la hauteur d'eau est proche de 0.1% (fig. 3.34f). La méthode semi-implicite 1 donne de meilleurs résultats sur le calcul des hauteurs d'eau (figs 3.34a, 3.34c et 3.34f). Au contraire, la méthode semi-implicite est meilleure sur le calcul des débits (figs 3.34b et 3.34d). Pour un maillage de 1600 mailles (fig. 3.34b), nous obtenons d'assez bons résultats. En effet, l'erreur faite sur le débit est d'environ 0.5% (respectivement 0.7%) pour le traitement semi-implicite 2 (respectivement semi-implicite 1). Enfin, les temps de calcul sont à l'avantage de la méthode semi-implicite 2. Comme illustré sur la figure 3.33, la méthode semi-implicite 2 est donc globalement plus intéressante que la méthode semi-implicite 1.

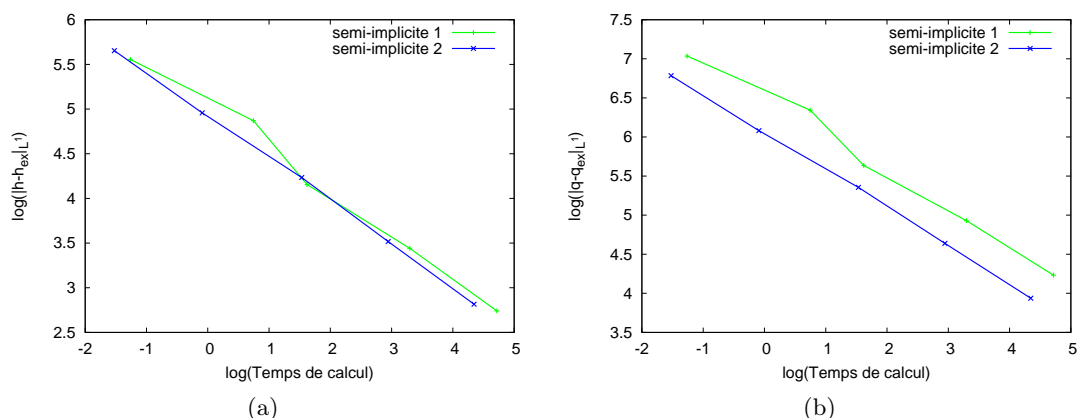


FIG. 3.33: Ecoulement fluvial-fluvial périodique, loi de Manning : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

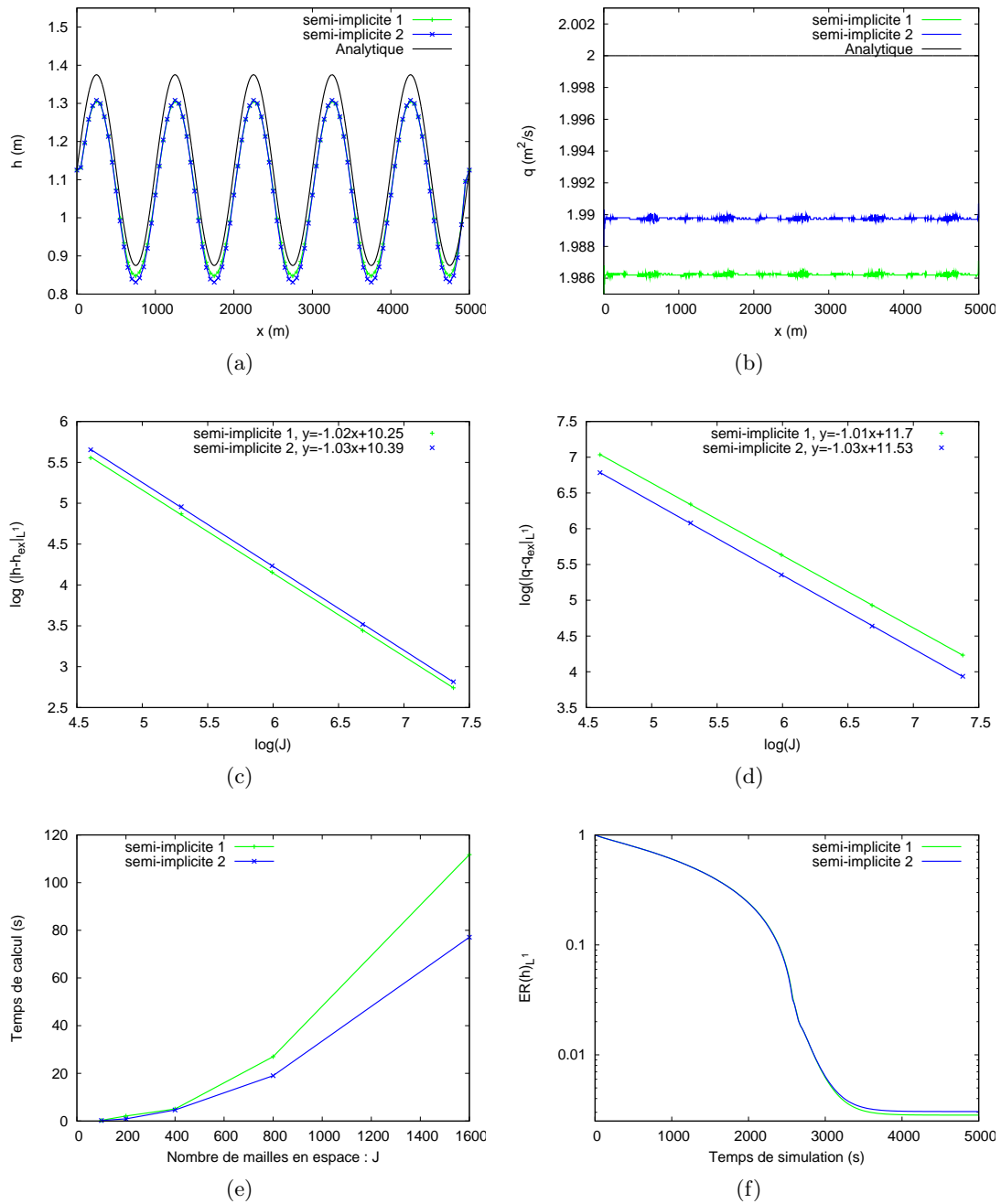


FIG. 3.34: Ecoulement fluvial-fluvial périodique avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.

3.3.3 Choix pour le ruissellement

A l'image de ce qui a été fait dans Paquier [1995, p.43-45], Liang and Marche [2009], Burguete et al. [2008], nous avons effectué la comparaison de méthodes de traitement numérique du terme de frottement sur des tests analytiques. Mais à la différence de ces références, notre objectif était de déterminer la méthode la plus adaptée à la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. Comme expliqué dans le chapitre 1, nous privilégions les méthodes numériques préservant les états d'équilibre stationnaires et traitant correctement les transitions sec/mouillé. Avec certaines façons de traiter numériquement les frottements, des instabilités peuvent faire apparaître au niveau des interfaces sec/mouillé.

Ce chapitre nous conduit à choisir la méthode de traitement semi-implicite 2 proposée dans Bristeau and Coussin [2001]. Il faudra envisager d'améliorer le traitement des conditions de bord. Nous pourrions essayer une méthode des caractéristiques modifiée qui prend en compte les frottements et la topographie à l'image de ce qui est fait dans Crossley [1999, p.18-21 et p.75-79], Abdallah [2005, p.63-66] et Kesserwani et al. [2008]. Nous pourrions aussi essayer le solveur d'interface décrit dans LeRoux [2001] qui permet aussi la prise en compte des frottements et de la topographie.

3.3. COMPARAISON DES MÉTHODES

Chapitre 4

Roll-waves

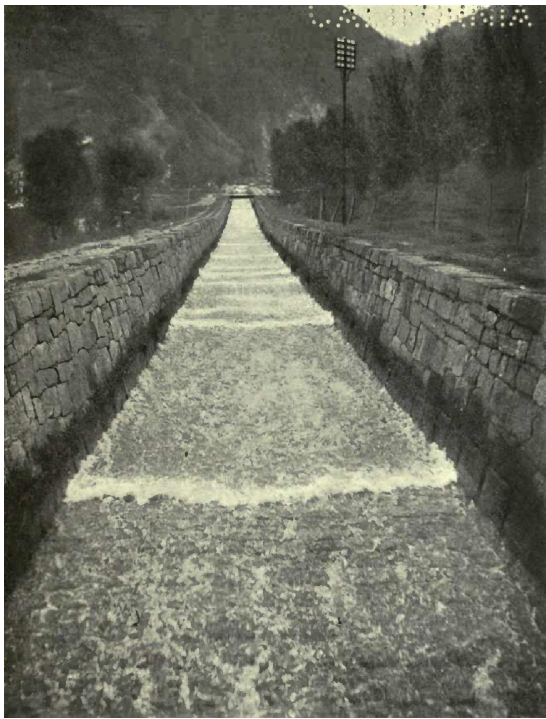
Avec certains types d'écoulements, il est possible d'observer la formation d'ondes progressives périodiques et discontinues (figure 4.1) appelées roll-waves ou plus rarement train d'ondes (voir Julien and Hartley [1986]). Le premier à observer et étudier ce phénomène semble être Cornish (voir Cornish [1907] et Cornish [1910, p.294-330]). Son travail est basé sur de l'observation (notamment des photographies, voir la figure 4.2) et des mesures de terrain. Sa production la plus connue est Cornish [1934] (voir entre autres Needham and Merkin [1984], Jin and Katsoulakis [2000], Jin and Kim [2001], Liu et al. [2005], Bohorquez and Fernandez-Feria [2006], et la photo dans Dressler [1949]) dans laquelle il fait un bilan de ses différents travaux. Dans Jeffreys [1925], nous trouvons la première étude de stabilité d'un écoulement homogène pour la loi de Chézy à partir du système de Saint-Venant sous forme non-conservative. Jeffreys trouve que les écoulements homogènes sont instables pour $Fr > 2$ et il essaie de justifier les observations faites par Cornish. Depuis, Dressler [1949] a repris cette étude et a obtenu un profil de roll-waves analytique en reliant entre elles des portions de solutions régulières par des chocs (travail repris notamment dans Whitham [1974], Que [2003, p.89-99], Liu et al. [2005], Que and Xu [2006] et Noble [2006]). Craya [1952] en utilisant le nombre de Vedernikov (Wedernikow [1945] et Vedernikov [1946]¹) retrouve le critère de stabilité de Jeffreys [1925]. L'utilisation du nombre de Vedernikov lui permet de trouver une condition de stabilité pour les écoulements stationnaires homogènes ou écoulements parallèles (voir le chapitre 1.1.3) avec loi de Manning : $Fr > 1.5$ pour un canal de section rectangulaire (voir aussi Montuori [1961], Chow [1959, p.210] et Ponce and Maisner [1993]). Certains essaient d'obtenir des résultats plus généraux : Bohorquez and Fernandez-Feria [2006], Bohórquez Rodríguez de Medina [2008, p.50-95] et Bohorquez [2010] s'intéressent à la stabilité des écoulements non-parallèles pour la loi de Chézy. Notre méthode numérique permet de simuler ces roll-waves qui peuvent apparaître en ruissellement sur des surfaces agricoles (voir Liu et al. [2005]).

Dans ce qui suit, nous reprenons l'analyse de stabilité d'un écoulement parallèle et la solution de Dressler [1949] (voir aussi Whitham [1974], Que [2003, p.89-99], Que and Xu [2006] et Noble [2006]) pour la loi de Darcy-Weisbach. Puis nous vérifions numériquement les critères de stabilité énoncé dans Jeffreys [1925] et dans Craya [1952]. Enfin, nous effectuons un test proposé dans Bohorquez and Fernandez-Feria [2006] permettant d'observer des roll-waves pour un écoulement non-parallèle.

¹le nom est écrit Wedernikow sur l'article de 1945 et Vedernikov sur celui de 1946



FIG. 4.1: Roll-waves (photo de Nick Tabram).



(a)



(b)

FIG. 4.2: (a)-(b) Photos de roll-waves dans le conduit de Grünbach à Merlingen (Suisse) extraites des pages 303 et 315 de Cornish [1910].

4.1 Ecoulement stationnaire homogène

4.1.1 Etude de stabilité pour la loi de Darcy-Weisbach

Dans cette section nous nous intéressons à la stabilité au sens des roll-waves d'un écoulement stationnaire homogène pour la loi de Darcy-Weisbach sur un canal plan de pente constante : $S_0 = -\partial_x z > 0$. Le système de Saint-Venant s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z - \frac{f}{8}u|u| \end{cases} \quad (4.1)$$

Ceci revient donc à considérer les solutions (h_0, u_0) du système (4.1) qui vérifient

$$\partial_t h_0 = \partial_x h_0 = \partial_t u_0 = \partial_x u_0 = 0. \quad (4.2)$$

h_0 et u_0 sont donc des constantes.

La notion de stabilité au sens des roll-waves est définie par

Définition 4.1. *Un écoulement est stable au sens des roll-waves s'il ne peut se former de roll-waves.*

Concernant la stabilité au sens des roll-waves de ce type d'écoulement, nous avons la proposition suivante

Proposition 4.2. *Critère de Jeffreys : les écoulements parallèles avec loi de Darcy-Weisbach sont stables si le nombre de Froude vérifie*

$$Fr < 2.$$

et le corollaire

Corollaire 4.3. *Les écoulements parallèles avec loi de Darcy-Weisbach sont stables sous l'une des deux conditions équivalentes suivantes*

$$u_0 < 2\sqrt{gh_0}.$$

ou

$$S_0 < \frac{f}{2}.$$

La démonstration de la proposition 4.2 et du corollaire 4.3 reprend une étude classique de stabilité des écoulements stationnaires homogènes (voir Dressler [1949], Whitham [1974, p.85-87], Que [2003, p.91-92] et Que and Xu [2006]).

Démonstration. Nous étudions le comportement des solutions régulières de la forme

$$\begin{cases} h(t, x) = h_0 + h_1(t, x) \\ u(t, x) = u_0 + u_1(t, x) \end{cases} ,$$

où h_1 et u_1 sont de petites perturbations de l'équilibre (4.2).

4.1. ECOULEMENT STATIONNAIRE HOMOGENÈNE

En injectant ces expressions dans (4.1), nous obtenons en négligeant les termes d'ordre 2 et plus

$$\partial_t h_1 + u_0 \partial_x h_1 + h_0 \partial_x u_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$\partial_t u_1 + u_0 \partial_x u_1 + g \partial_x h_1 = \left(g S_0 - \frac{f}{8} \frac{u_0^2}{h_0} \right) + g S_0 \frac{h_1}{h_0} - \frac{f}{8} \frac{2u_0}{h_0} u_1 \quad (4.4)$$

Nous pouvons remarquer que le terme $g S_0 - \frac{f}{8} \frac{u_0^2}{h_0}$ n'est pas supposé nul.

Multiplions la première équation par $(\partial_t + u_0 \partial_x)$, la seconde par $(-h_0 \partial_x)$ et additionnons les deux relations, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t^2 h_1 + 2u_0 \partial_{tx} h_1 + h_0 \partial_{tx} u_1 + u_0^2 \partial_{x^2} h_1 + h_0 u_0 \partial_{x^2} u_1 \\ &\quad - h_0 (\partial_{tx} u_1 + u_0 \partial_{x^2} u_1 + g \partial_{x^2} h_1) + g S_0 \partial_x h_1 - \frac{f}{8} 2u_0 \partial_x u_1, \end{aligned}$$

qui devient, en annulant quelques termes et en utilisant (4.3) pour remplacer $\partial_x u_1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t^2 h_1 + 2u_0 \partial_{tx} h_1 + u_0^2 \partial_{x^2} h_1 - g h_0 \partial_{x^2} h_1 + g S_0 \partial_x h_1 \\ &\quad - \frac{f}{8} \frac{2u_0}{h_0} (-\partial_t h_1 - u_0 \partial_x h_1) \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\partial_t h_1 + C_0 \partial_x h_1 = -\frac{8}{f} \frac{h_0}{2u_0} [\partial_t + C_- \partial_x] [\partial_t + C_+ \partial_x] h_1, \quad (4.5)$$

avec

$$C_0 = u_0 + \frac{8}{f} \frac{g h_0}{2u_0}, \quad C_- = u_0 - \sqrt{g h_0} \quad \text{et} \quad C_+ = u_0 + \sqrt{g h_0}.$$

Pour étudier la stabilité de ce système, nous remplaçons les dérivées en temps du second membre par des dérivées en espace, grâce à l'équation elle-même

$$\partial_t h_1 + C_0 \partial_x h_1 = -\frac{8}{f} \frac{h_0}{2u_0} [C_- - C_0] [C_+ - C_0] \partial_{x^2} h_1 + \dots, \quad (4.6)$$

où les termes manquants sont des termes différentiels d'ordre 3 et plus. Ainsi, le coefficient de diffusion de (4.6) est positif dès lors que

$$C_- < C_0 < C_+,$$

ce qui se traduit par

$$\frac{8}{f} S_0 < 2F_0, \quad (4.7)$$

avec $F_0 = u_0 / \sqrt{g h_0}$ le nombre de Froude de l'état constant.

Nous pouvons remarquer que dans tous ces calculs, aucune hypothèse sur l'état constant n'a été nécessaire. Néanmoins, pour que cet état constant soit une solution du système, il faut que

$$g h_0 S_0 = \frac{f}{8} u_0^2, \quad (4.8)$$

ce qui correspond à l'approximation d'onde cinématique (voir le chapitre 1.1.2).

4.1. ECOULEMENT STATIONNAIRE HOMOGENÈ

Avec (4.7) et (4.8), nous aboutissons donc aux critères de stabilité classiques de l'état d'équilibre stationnaire homogène (voir Dressler [1949], Whitham [1974], Brook et al. [1999], Que and Xu [2006])

$$u_0 < 2\sqrt{gh_0},$$

qui s'écrit aussi sous la forme (critère obtenu dans Jeffreys [1925])

$$F_0 < 2. \quad (4.9)$$

En utilisant à nouveau (4.8), nous avons aussi

$$S_0 < 4\frac{f}{8}.$$

Cette dernière inégalité signifie que la pente S_0 doit être suffisamment petite par rapport au coefficient de frottement f , afin de conserver la stabilité de l'écoulement stationnaire uniforme. □

4.1.2 Evolution des roll-waves

Dans la section précédente, nous avons obtenu un critère de stabilité pour les écoulements homogènes avec loi de Darcy-Weisbach. Si un écoulement stationnaire homogène stable/instable est perturbé, il est possible de prévoir la vitesse de décroissance/croissance des perturbations (voir Brook et al. [1999], Que [2003, p.89-99] et Que and Xu [2006]). Nous avons la propriété suivante

Proposition 4.4. *Si un écoulement stationnaire homogène est soumis à de petites perturbations de la forme*

$$h_1(t, x) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.10)$$

où la longueur d'onde k est un multiple de 2π et $\omega = \omega_R + i\omega_I$, alors le logarithme de l'amplitude de la perturbation

$$\ln |h - h_0| = \ln C + \omega_I t,$$

où C est une constante, évolue selon une droite de pente ω_I avec

$$\omega_I = u_0 k + \sqrt{r} \frac{\sin(\theta/2)}{2}, \quad (4.11)$$

où

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{B}{r},$$

avec

$$A = 4gh_0k^2 - 4\left(\frac{f}{8}\frac{u_0}{h_0}\right)^2 \quad \text{et} \quad B = 4\frac{f}{8}\frac{u_0^2}{h_0}k.$$

Démonstration. Avec (4.5) et (4.8), nous obtenons l'équation linéarisée

$$\partial_t h_1 + C_0 \partial_x h_1 = -\frac{u_0}{2gS_0} [\partial_t + C_+ \partial_x] [\partial_t + C_- \partial_x] h_1. \quad (4.12)$$

4.1. ECOULEMENT STATIONNAIRE HOMOGENÈNE

En utilisant (4.10) pour remplacer h_1 , (4.12) devient

$$[-\omega + C_0 k] i e^{i(kx - \omega t)} = -\frac{u_0}{2gS_0} [-\omega^2 + (C_+ + C_-)\omega k - C_+ C_- k^2] e^{i(kx - \omega t)}.$$

Nous avons donc

$$\frac{u_0}{2gS_0} i \omega^2 - \left[\frac{2u_0^2 k}{2gS_0} i + 1 \right] \omega + \frac{3u_0 k}{2} + \frac{u_0}{2gS_0} (u_0^2 - gh_0) k^2 i = 0.$$

Avec (4.8), nous obtenons la relation de dispersion

$$\omega^2 + b\omega + c = 0,$$

où

$$b = -2u_0 k + 2\frac{f}{8} \frac{u_0}{h_0} i \quad \text{et} \quad c = (u_0^2 - gh_0) k^2 - 3k \frac{f}{8} \frac{u_0^2}{h_0} i.$$

Nous avons donc

$$\omega = \omega_R + i\omega_I = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

En écrivant $b^2 - 4c = A + Bi = re^{i\theta}$, avec

$$A = 4gh_0 k^2 - 4 \left(\frac{f}{8} \frac{u_0}{h_0} \right)^2 \quad \text{et} \quad B = 4 \frac{f}{8} \frac{u_0^2}{h_0} k,$$

nous avons

$$\omega_I = -\Im \left(\frac{b}{2} \right) + \sqrt{r} \frac{\sin(\theta/2)}{2} = u_0 k + \sqrt{r} \frac{\sin(\theta/2)}{2}, \quad (4.13)$$

avec \Im la partie imaginaire et

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{B}{r}.$$

□

4.1.3 Profil analytique de Dressler

Dans les sections précédentes nous avons déterminé un critère de stabilité d'un écoulement homogène, puis étudié l'évolution de petites perturbations de cet écoulement. Dans le cas d'un écoulement instable, Dressler [1949] recherche des ondes progressives solutions du système de Saint Venant. Le problème consiste à trouver des solutions périodiques à l'équation

$$H' = -\frac{H \left[gm - \frac{f}{8} \frac{(cH - K) |cH - K|}{H^3} \right]}{\left(\frac{K}{H} \right)^2 - gH}. \quad (4.14)$$

Dressler [1949] démontre que l'équation (4.14) n'admet pas de solution périodique continue. Par contre nous avons la proposition suivante

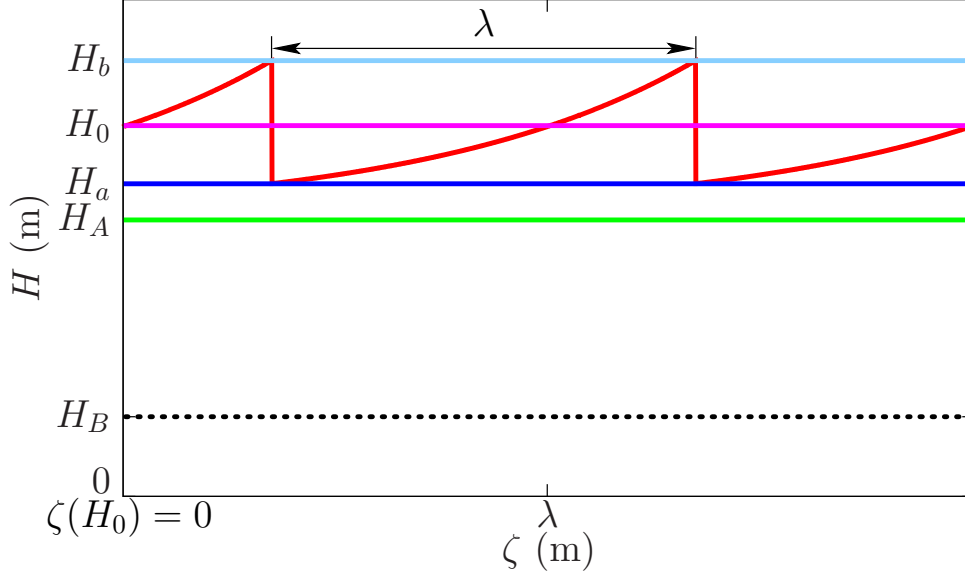


FIG. 4.3: Illustration des différentes variables nécessaires à la construction du profil de Dressler.

Proposition 4.5. *Solution de Dressler : soit $\frac{8}{f}S_0 > 4$, $\lambda > 0$ et $c > 0$, il existe une onde progressive périodique C^1 par morceaux de vitesse c et de longueur d'onde λ (voir la figure 4.3), solution du système de Saint Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach (4.1).*

Démonstration. Nous reprenons ici le raisonnement de Dressler (voir Dressler [1949], Whitham [1974], Que [2003, p.89-99], LeRoux and LeRoux [2004], Que and Xu [2006], Noble [2006] et LeRoux [2009]), pour cela considérons une onde progressive se déplaçant dans le sens de la pente à une vitesse constante c .

Soit $\zeta = x - ct$, posons

$$u(x, t) = U(x - ct) = U(\zeta) \text{ et } h(x, t) = H(x - ct) = H(\zeta)$$

nous avons

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, t) &= U'(\zeta), & \partial_t u(x, t) &= -cU'(\zeta), \\ \partial_x h(x, t) &= H'(\zeta), & \partial_t h(x, t) &= -cH'(\zeta). \end{aligned}$$

Donc l'équation de la conservation de la masse donne

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t h + \partial_x (hu) = \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u \\ &= -cH' + UH' + HU' = HU' + (U - c)H \end{aligned}$$

Et l'équation de conservation de quantité de mouvement

$$\partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z - \frac{f}{8}u|u|,$$

4.1. ECOULEMENT STATIONNAIRE HOMOGENÈNE

qui s'écrit, avec $m = -\partial_x z$, sous la forme non-conservative

$$\partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x h = gm - \frac{f u |u|}{8 h}$$

soit encore

$$(U - c)U' + gH' = gm - \frac{f U |U|}{8 H}.$$

Nous obtenons donc le système

$$\begin{cases} (U - c)U' + gH' = gm - \frac{f U |U|}{8 H} \\ HU' + (U - c)H' = 0 \end{cases},$$

dont la résolution donne

$$U' = \frac{(U - c) \left[gm - \frac{f U |U|}{8 H} \right]}{(U - c)^2 - gH} \quad \text{et} \quad H' = -\frac{H \left[gm - \frac{f U |U|}{8 H} \right]}{(U - c)^2 - gH}.$$

Nous avons donc

$$\frac{H'}{U'} = \frac{H}{c - U},$$

d'où

$$(c - U)H = K,$$

où K est une constante qui correspond au débit apparent vu du repère mobile ζ . Ce débit est appelé débit progressif dans Dressler [1949]. Nous avons donc $U = (cH - K)/H$ qui nous permet d'écrire

$$H' = -\frac{H \left[gm - \frac{f U |U|}{8 H} \right]}{(U - c)^2 - gH} = -\frac{H \left[gm - \frac{f (cH - K) |cH - K|}{8 H^3} \right]}{\left(\frac{K}{H} \right)^2 - gH}.$$

Différentes situations sont étudiées dans Dressler [1949], mais la seule possible correspond au cas où le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément. Soit ζ_0 le point où l'écoulement est critique, notons avec l'indice 0 la valeur des variables en ce point, ce qui donne le système

$$\begin{cases} (U_0 - c)^2 = gH_0 \\ gm - \left(\frac{f U_0^2}{8 H_0} \right) = 0 \end{cases}$$

La pente est supposée négative d'où $U_0 > 0$, ce qui permet d'écrire ce système sous la forme

$$H_0 = \frac{(c - U_0)^2}{g} \quad \text{et} \quad U_0 = \sqrt{\frac{8gmH_0}{f}} = \sqrt{\frac{8m}{f}} (c - U_0).$$

Par ailleurs

$$H_0 = \frac{1}{g} \left[\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right]^2 \quad \text{et} \quad K = K_0 = [c - U_0] H_0 = \frac{1}{g} \left[\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right]^3, \quad (4.15)$$

d'où

$$H_0 = \frac{K_0^{2/3}}{g^{1/3}} = \frac{K_0^{2/3}}{g^{1/3}}. \quad (4.16)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} H' &= - \frac{H \left[gm - \frac{f(cH - K)^2}{8H^3} \right]}{(U - c)^2 - gH} \\ H' &= - \frac{H \left[gm - \frac{f(c^2H^2 - 2CHK + K^2)}{8H^3} \right]}{(U - c)^2 - gH} \\ &= \frac{m}{H^3} \frac{\left[H^3 - \frac{f}{8gm} (c^2H^2 - 2CHK + K^2) \right]}{1 - \frac{(U - c)^2}{gH}} \end{aligned}$$

Nous avons $(c - U)H = K = K_0$ soit encore $(c - U)^2H^2 = K^2 = K_0^2 = gH_0^3$ d'où

$$H' = m \frac{H^3 - \frac{f}{8gm} (c^2H^2 - 2CHK_0 + K_0^2)}{H^3 - H_0^3}$$

Avec 4.15, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{2cf}{8gm} K_0 &= \frac{2cf}{8g^2m} \left[\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right]^3 \\ &= \frac{cf}{8g^2m} \left(\frac{c^3}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right)^3 \left(1 - \sqrt{\frac{8m}{f}} + 1 + \sqrt{\frac{8m}{f}} \right) \\ &= \frac{f}{8g^2m} \left(\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right)^4 \left(1 - \frac{8m}{f} \right) + \frac{c^2f}{8g^2m} \left(\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{g^2} \left(\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right)^4 \left(\frac{f}{8m} - 1 \right) + \frac{c^2f}{8gm} \frac{1}{g} \left(\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{8m}{f}}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{f}{8m} - 1 \right) H_0^2 + \frac{c^2f}{8gm} H_0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{d\zeta} &= m \frac{H^3 + \left[H_0 - \frac{c^2 f}{8gm} \right] H^2 - H_0 H^2 - H_0 \left[H_0 - \frac{c^2 f}{8gm} \right] H + H_0^2 \frac{f}{8m} H - \frac{f}{8m} H_0^3}{H^3 - H_0^3} \\
 &= m \frac{H^2 + \left[H_0 - \frac{c^2 f}{8gm} \right] H + \frac{f H_0^2}{8m}}{H^2 + H H_0 + H_0^2} \\
 \frac{d\zeta}{dH} &= \frac{1}{m} \frac{H^2 + H H_0 + H_0^2}{H^2 + \left[H_0 - \frac{c^2 f}{8gm} \right] H + \frac{f H_0^2}{8m}}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Notons H_A et H_B les racines du dénominateur (avec $0 < H_B < H_A < H_0$ comme illustré sur la figure 4.3), 4.17 s'écrit sous la forme

$$\frac{d\zeta}{dH} = \frac{1}{m} + \frac{H_A^2 + H_A H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \frac{1}{H - H_A} - \frac{H_B^2 + H_B H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \frac{1}{H - H_B}$$

dont les primitives sont de la forme

$$\zeta = A + \frac{1}{m} H + \frac{H_A^2 + H_A H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \ln(H - H_A) - \frac{H_B^2 + H_B H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \ln(H - H_B)$$

où A est une constante.

Nous avons en particulier

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{H - H_0}{m} + \frac{H_A^2 + H_A H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \ln \left(\frac{H - H_A}{H_0 - H_A} \right) \\
 &\quad - \frac{H_B^2 + H_B H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \ln \left(\frac{H - H_B}{H_0 - H_B} \right)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

la primitive telle que $\zeta(H_0) = 0$.

Nous rappelons que le profil des roll-waves obtenues par Dressler est un ensemble de portions de solutions régulières de longueur λ reliées par des ressauts hydrauliques. Les portions régulières sont obtenues à partir de (4.18) à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson que nous ne détaillerons pas ici (voir Que [2003, p.97-99] et Que and Xu [2006]) car nous utilisons le code donné dans Que [2003, p.124-126]. La vitesse c est mesurée à l'aide des résultats numériques. Il faudra regarder ce qui est fait dans Liu et al. [2005] pour obtenir une expression exacte de c . Enfin les ressauts sont localisés à l'aide de la relation de Rankine Hugoniot qui s'écrit ici sous la forme (voir Noble [2006])

$$\frac{g}{2K} H_b^2 + \frac{K}{H_b} = \frac{g}{2K} H_a^2 + \frac{K}{H_a}, \tag{4.19}$$

où H_b (respectivement H_a) est la hauteur avant (resp. après) le ressaut (voir la figure 4.3) vérifiant

$$0 < H_a < H_0 < H_b. \tag{4.20}$$

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Avec (4.16) et (4.20), la relation de Rankine Hugoniot donne

$$H_a = \frac{1}{2} \left[\left(H_b^2 + \frac{8K^2}{gH_b} \right)^{1/2} - H_b \right]. \quad (4.21)$$

Deux chocs sont séparés par une distance λ (voir la figure 4.3), nous avons alors

$$\begin{aligned} \lambda &= \zeta(H_b) - \zeta(H_a) \\ &= H_b - H_a + \frac{H_A^2 + H_A H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \ln \left(\frac{H_b - H_A}{H_a - H_A} \right) \\ &\quad - \frac{H_B^2 + H_B H_0 + H_0^2}{m(H_A - H_B)} \ln \left(\frac{H_b - H_B}{H_a - H_B} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

En remplaçant H_a dans (4.22) à l'aide de (4.21), il est possible de déterminer H_b (puis H_a et la position des ressauts) par une méthode itérative de Newton-Raphson (voir Que [2003, p.97-99] et Que and Xu [2006]). Le profil de Dressler est ainsi entièrement déterminé. \square

4.1.4 Critère de stabilité pour la loi de Manning

Craya [1952], en utilisant une approche semblable à celle de la section 4.1.1 (que nous n'avons pas repris ici), obtient un critère de stabilité basé sur le nombre de Vedernikov V (voir Vedernikov [1945] et Vedernikov [1946]). Ce critère (résumé dans Chow [1959, p.210] et Ponce and Maisner [1993]) s'écrit

Proposition 4.6. *Critère de Craya : Les écoulements parallèles sont stables si le nombre de Vedernikov vérifie*

$$V < 1.$$

Le nombre de Vedernikov dépend de la forme du canal considéré (Chow [1959, p.210]), pour un écoulement unidimensionnel il s'écrit

$$V = \frac{\gamma u}{\sqrt{gh}} = \gamma Fr, \quad (4.23)$$

avec

- $\gamma = 1/2$ pour la loi de Darcy-Weisbach (et Chézy),
- $\gamma = 2/3$ pour la loi de Manning.

Pour la loi de Darcy-Weisbach nous retrouvons le critère de stabilité de Jeffreys [1925] ($Fr < 2$, voir la proposition 4.2). Pour la loi de Manning, nous avons le critère de stabilité suivant :

Proposition 4.7. *Les écoulements parallèles avec loi de Manning sont stables si le nombre de Froude vérifie*

$$Fr < \frac{3}{2}.$$

4.2 Simulations numériques

Dans cette section, nous vérifions numériquement les différentes propriétés énoncées dans la section 4.1. Nous avons généré les résultats de cette partie à l'aide de variantes du

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

code utilisé dans les chapitres 2 et 3. Nous avons à nouveau utilisé le compilateur gfortran sans option de compilation (voir la section 2.2.2). La configuration pour lancer l'exécutable a été la suivante :

- système d'exploitation : Ubuntu version 9.04,
- matériel :
 - mémoire 2.9 Go,
 - processeur Intel[®] Core[™] 2 Duo CPU T5750 2.00 GHz.

Enfin, nous avons effectué tous les calculs avec le flux HLL, la reconstruction MUSCL et le traitement semi-implicite des frottements en respectant la condition de CFL théorique ($n_{CFL} = 0.5$).

4.2.1 Loi de Darcy-Weisbach

Dans cette section nous considérons huit écoulements stationnaires homogènes légèrement perturbés (l'approximation d'onde cinématique est donc une assez bonne approximation) à nombres de Froude fixés ($Fr = 1.5, 1.9, 2, 2.1, 2.25, 2.5, 3$ et 3.7). La pente du canal est fixée par la relation d'approximation d'onde cinématique

$$S_0 = \frac{f u^2}{8 g h} = \frac{f}{8} Fr^2.$$

Le canal s'étend sur un domaine de longueur $L = 2$ m. Nous nous donnons

- un coefficient de frottement de Darcy-Weisbach : $f = 0.048$,
- un débit : $q(x, 0) = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$,

et nous considérons la hauteur d'eau initiale

$$h(x, 0) = h_0 (1 + \epsilon \sin(kx)),$$

où $\epsilon = 0.5\%$, $k = 5\pi$ et h_0 est fixée par la relation

$$h_0 = \frac{q(x, 0)}{(\sqrt{g} Fr)^{2/3}}. \quad (4.24)$$

Afin de simuler un canal de longueur "infinie", nous considérons des conditions de bord périodiques. Enfin le temps total de la simulation est $t = 50$ s et la taille des mailles numériques est $\Delta x = 8.10^{-4}$ m.

Sur les figures 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 nous avons représenté l'évolution des vitesses et des hauteurs d'eau au cours du temps. Nous vérifions la stabilité des écoulements dont le nombre de Froude est inférieur à deux (figure 4.5) : à la fin de la simulation les oscillations ont disparu. Pour les écoulements à nombre de Froude supérieurs à deux, nous observons la convergence vers les roll-waves (figures 4.7 et 4.8) et la méthode numérique attrape parfaitement le profil analytique de Dressler (figure 4.9). Sur la figure 4.4, nous avons représenté les droites de pente ω_I (voir la formule (4.13)), ainsi que le logarithme de l'amplitude des ondes $\ln(\max |h - h_0|)$ en fonction du temps. Pour les nombres de Froude supérieurs à deux cette amplitude augmente à la vitesse prédite puis nous obtenons une convergence vers les états quasi-stationnaires que sont les roll-waves. Le cas du nombre $Fr = 2$ est un peu particulier, il s'agit du cas critique. Les oscillations gardent leur amplitude initiale à diffusion numérique près. Enfin, pour les nombres de Froude inférieurs à deux, nous retrouvons bien la vitesse de décroissance des amplitudes prédite.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

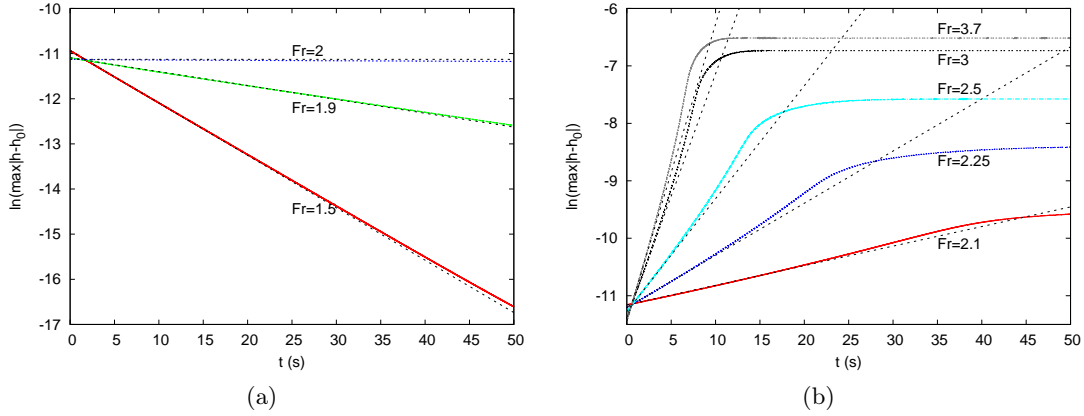


FIG. 4.4: Taux de convergence vers l'état stationnaire final pour la loi de Darcy-Weisbach (a) $Fr \leq 2$, (b) $Fr > 2$.

4.2.2 Loi de Manning

Dans cette section nous effectuons le même type de simulations que dans la section précédente. Nous considérons huit écoulements stationnaires homogènes légèrement perturbés à nombres de Froude fixés ($Fr = 1.2, 1.4, 1.5, 1.55, 1.6, 1.8, 2$ et 2.2). La pente du canal est à nouveau fixée par la relation d'approximation d'onde cinématique

$$S_0 = g \frac{n^2 Fr^2}{h_0^{1/3}}.$$

La longueur du domaine est $L = 2$ m. Nous nous donnons

- un coefficient de frottement de Manning : $n = 0.02$,
- un débit : $q(x, 0) = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$,

et nous considérons la hauteur d'eau initiale

$$h(x, 0) = h_0 (1 + \epsilon \sin(kx)),$$

où $\epsilon = 0.5\%$, $k = 5\pi$ et h_0 est toujours fixée par la relation (4.24). Nous obtenons ainsi une perturbation avec cinq périodes, donc la longueur d'onde est de $\lambda = 0.4$. Les conditions de bord sont périodiques. Les simulations sont effectuées pour $t = 50$ s et la taille des mailles numériques est $\Delta x = 8.10^{-4}$ m.

Les figures 4.11, 4.12 et 4.13 représentent l'évolution des vitesses et des hauteurs d'eau au cours du temps et la figure 4.10 représente le logarithme de l'amplitude des ondes $\ln(\max|h - h_0|)$ en fonction du temps. Ces simulations nous permettent de vérifier le critère de stabilité de Craya [1952] :

- Pour $Fr > 1.5$, l'écoulement est instable, nous observons la formation de roll-waves (figures 4.13 et 4.10b).
- Pour $Fr = 1.5$, l'écoulement est critique, l'amplitude des oscillations reste constante (figures 4.12 et 4.10a).

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

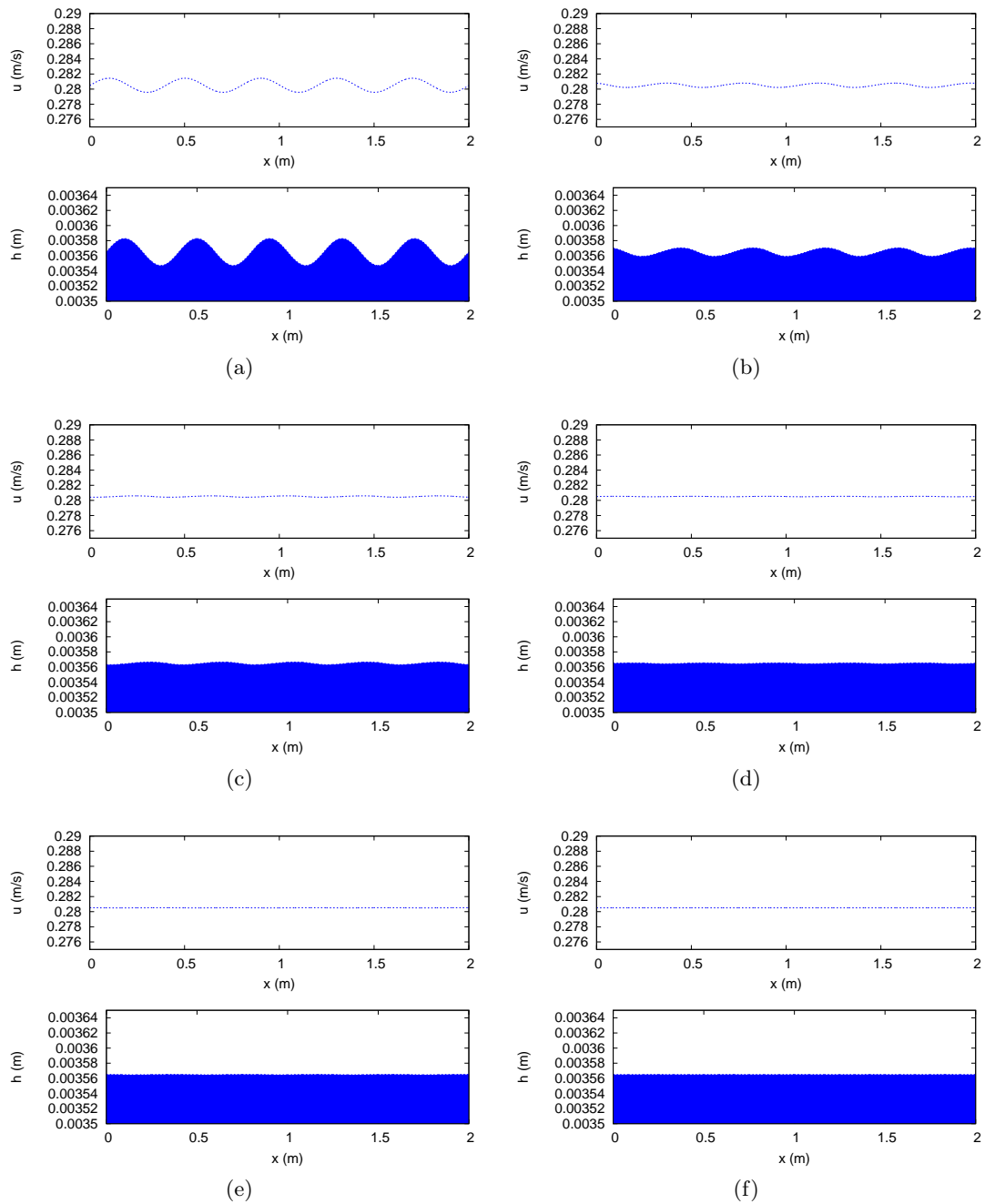


FIG. 4.5: $Fr = 1.5$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

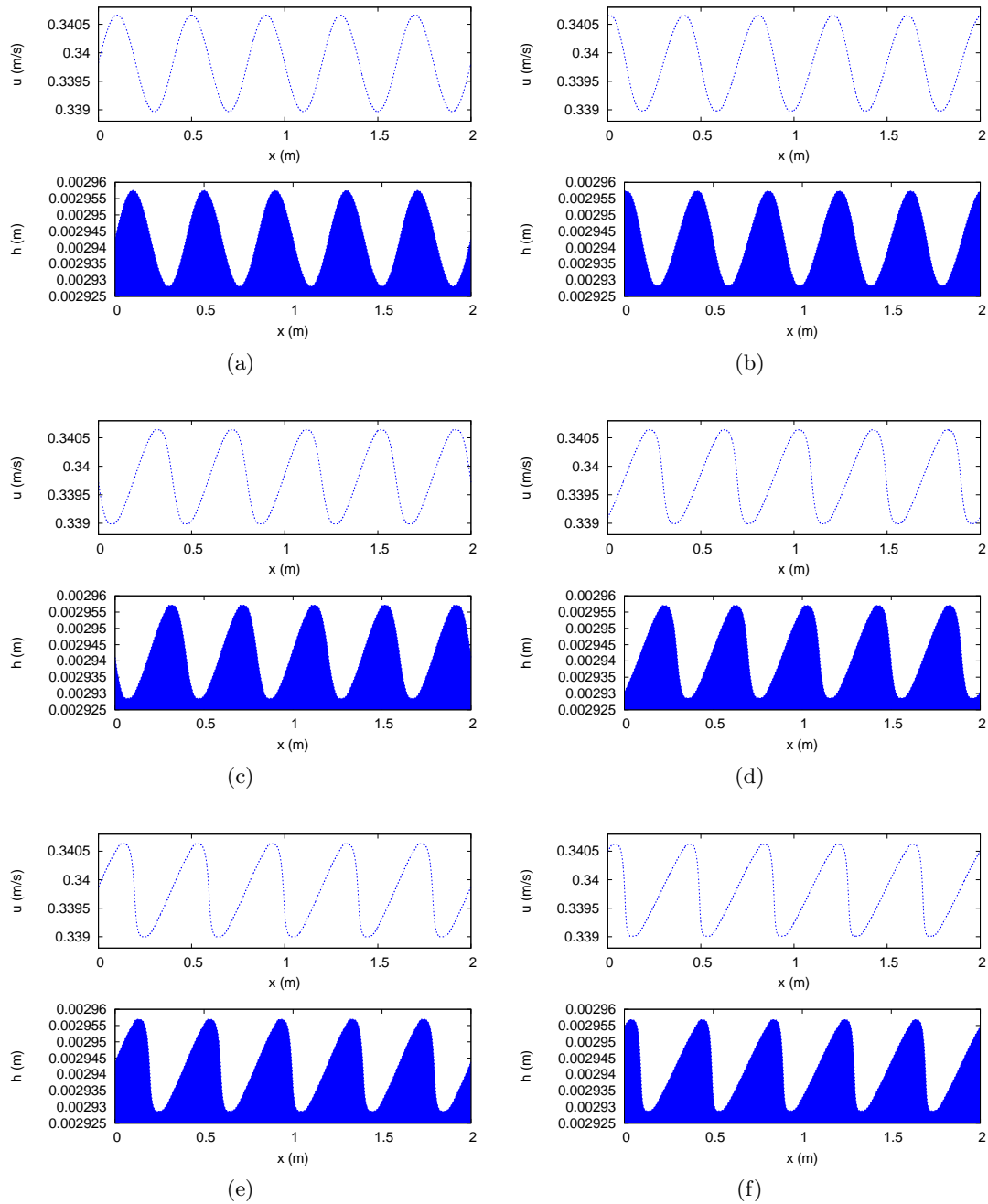


FIG. 4.6: $Fr = 2$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

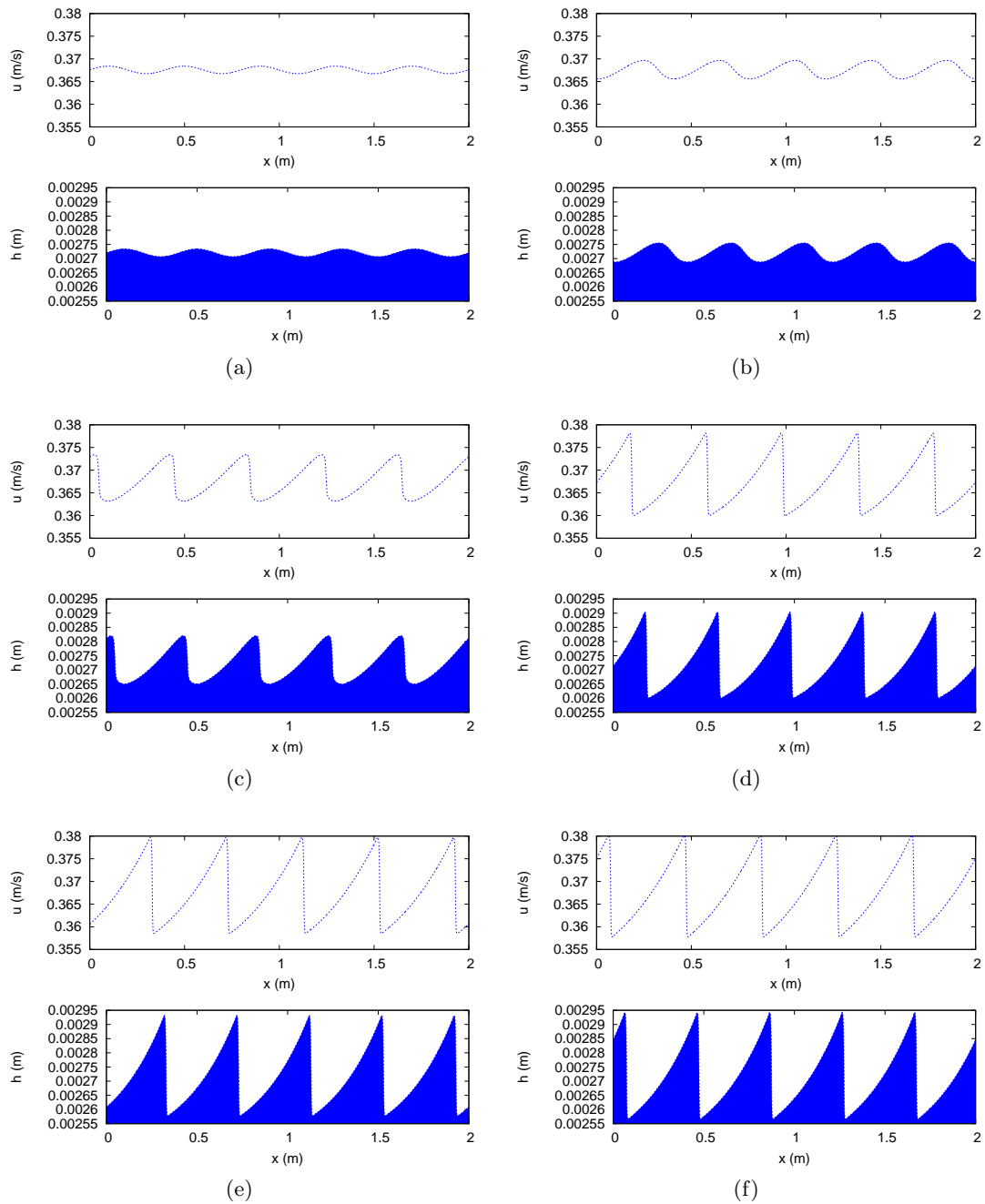


FIG. 4.7: $Fr = 2.25$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

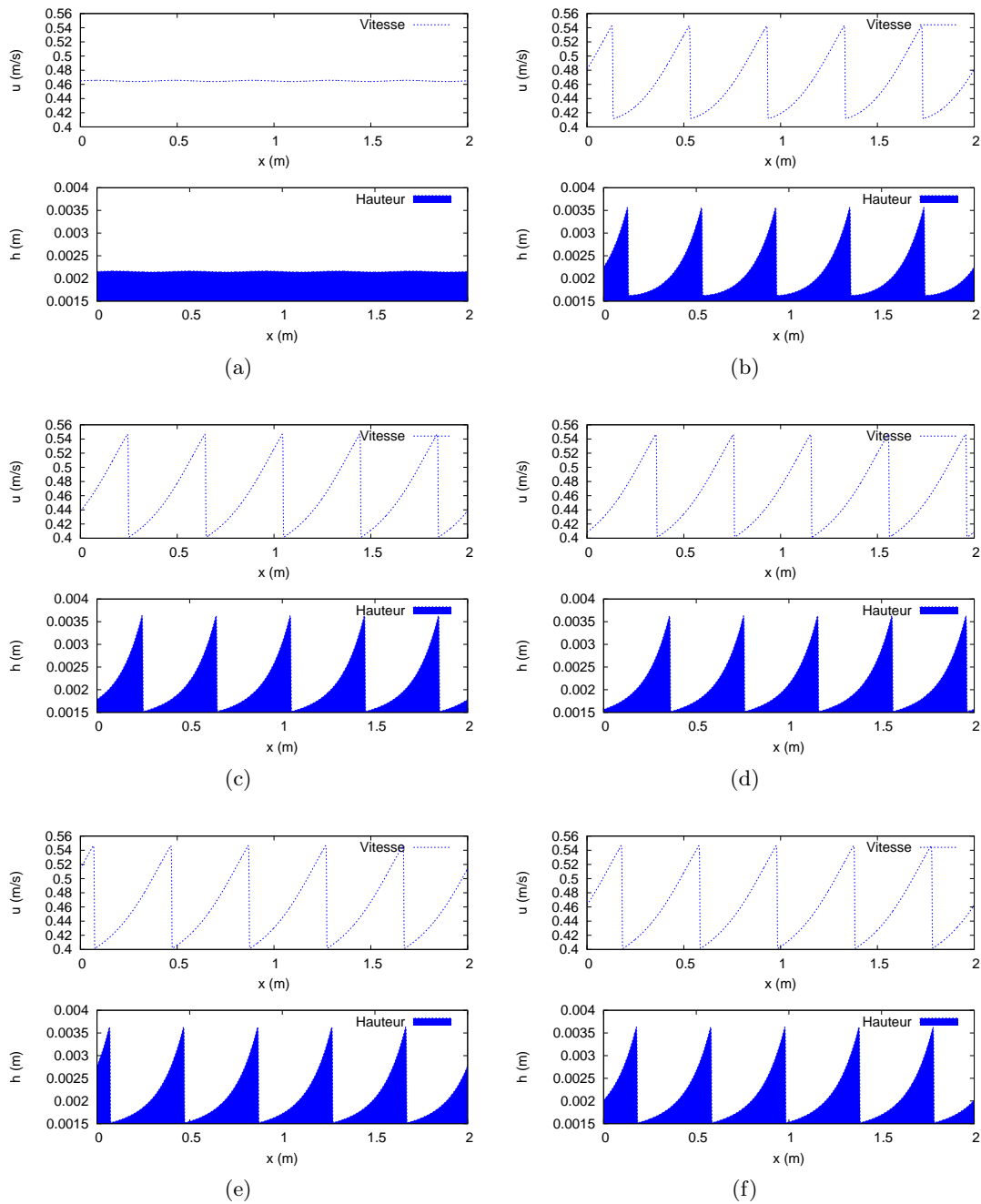


FIG. 4.8: $Fr = 3.7$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.

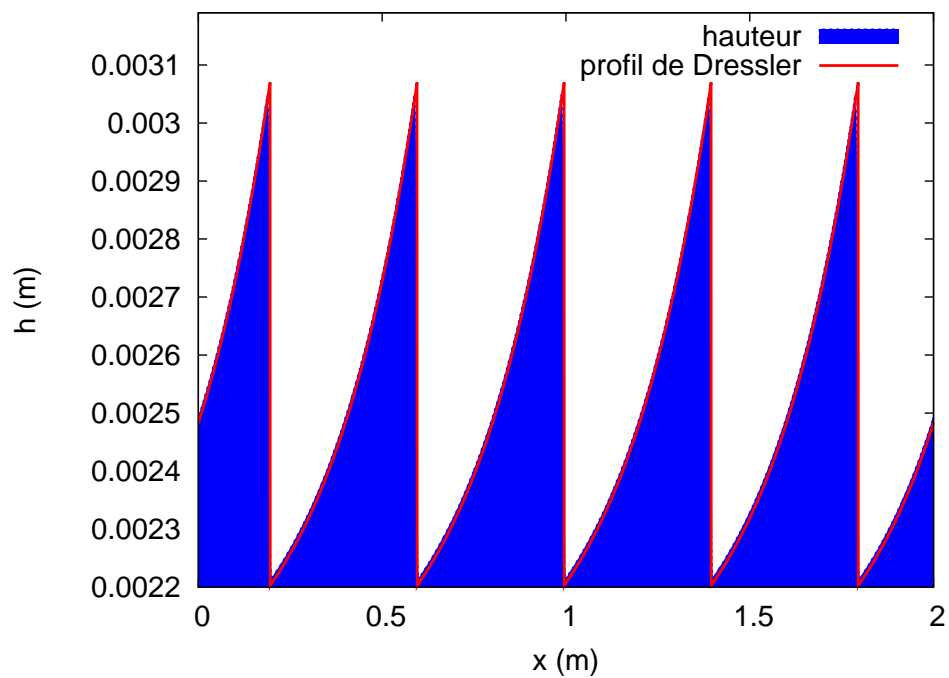


FIG. 4.9: Comparaison de la hauteur d'eau avec la solution de Dressler après convergence du schéma pour $Fr = 2.5$ et la loi de Darcy-Weisbach.

- Pour $Fr < 1.5$, l'écoulement est stable, l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps et à la fin des simulations nous retrouvons des états stationnaires homogènes (figures 4.11 et 4.10a).

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

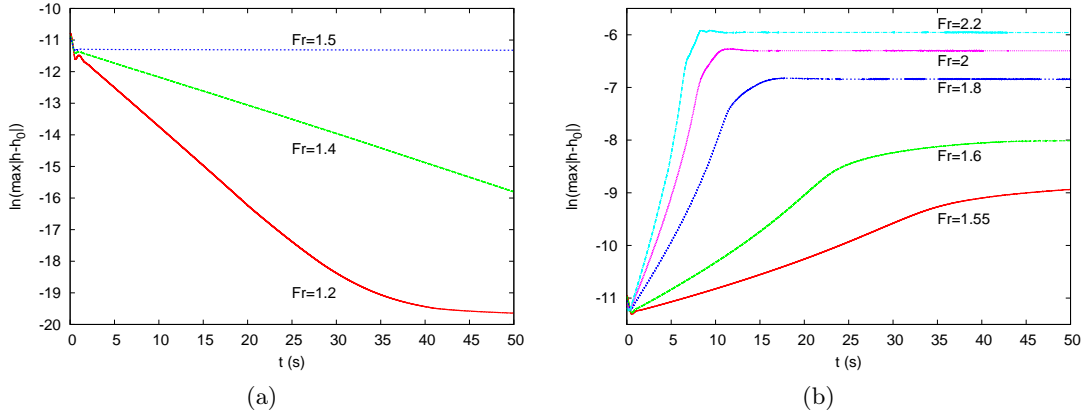


FIG. 4.10: Taux de convergence vers l'état stationnaire final pour la loi de Manning pour (a) $Fr \leq 1.5$, (b) $Fr > 1.5$.

4.2.3 Ecoulement non homogène

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés à la formation des roll-waves pour les écoulements stationnaires. Nous reprenons ici un test présenté dans Bohorquez and Fernandez-Feria [2006], Bohórquez Rodríguez de Medina [2008, p.50-58] et Bohorquez [2010] pour lequel nous observons la formation de roll-waves pour un écoulement non-parallèle. Dans Bohorquez and Fernandez-Feria [2006], la présence de ces roll-waves est justifiée théoriquement à l'aide d'une méthode basée sur l'approximation d'onde cinématique et vérifiée numériquement par résolution du système de Saint-Venant à l'aide du schéma volume fini TVD décrit dans Burguete and García-Navarro [2001]. Il faudra reprendre cette analyse et vérifier si elle est valable pour d'autres écoulements. Il s'agit d'effectuer la rupture d'un barrage sur fond incliné avec des frottements de Darcy-Weisbach de coefficient $f = 0.0223$. La longueur du domaine est $L = 5000$ m. La topographie est définie par

$$z(x) = -\tan(\pi/180)x.$$

La condition initiale est (voir la figure 4.14a)

$$h(x, 0) = \begin{cases} -z(x) & \text{si } z(x) > -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } u(x, 0) = 0 \text{ m/s.}$$

Le temps de la simulation correspond à $t = 2000$ s. La simulation est effectuée pour différents maillages : $J = 1875, 3750, 7500, 15000, 30000$ et 60000 mailles. Nous avons représenté la hauteur d'eau au cours du temps pour 3750 mailles (fig 4.14b), la progression du front sec/mouillé se fait correctement. Pour 1875 et 3750 mailles, la hauteur d'eau à la fin de la simulation est parfaitement lisse (figures 4.14c et 4.14e), ce qui n'est pas le cas pour des maillages plus fins (figures 4.14d, 4.14e et 4.14f). Pour 7500 mailles, nous observons l'apparition de roll-waves (4.14e) dont la période semble devenir fixe dès 15000 mailles (4.14f). L'amplitude des ondes nous permet d'observer la réduction de la diffusion numérique en affinant le maillage (4.14f). Il faudra envisager de faire une étude plus approfondie de cette configuration pour déterminer l'origine de ces roll-waves. D'après

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

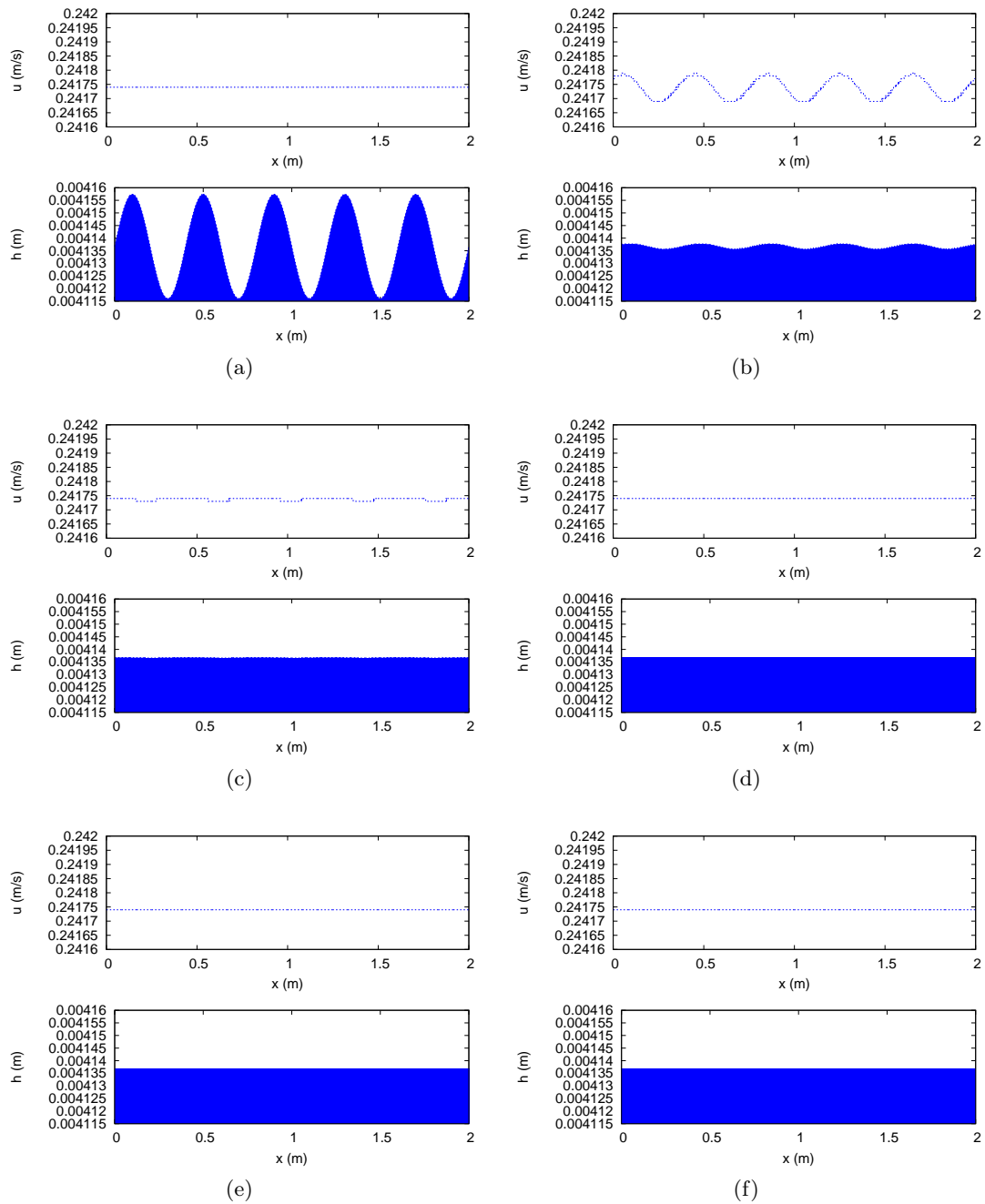


FIG. 4.11: $Fr = 1.2$ et loi de Manning : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

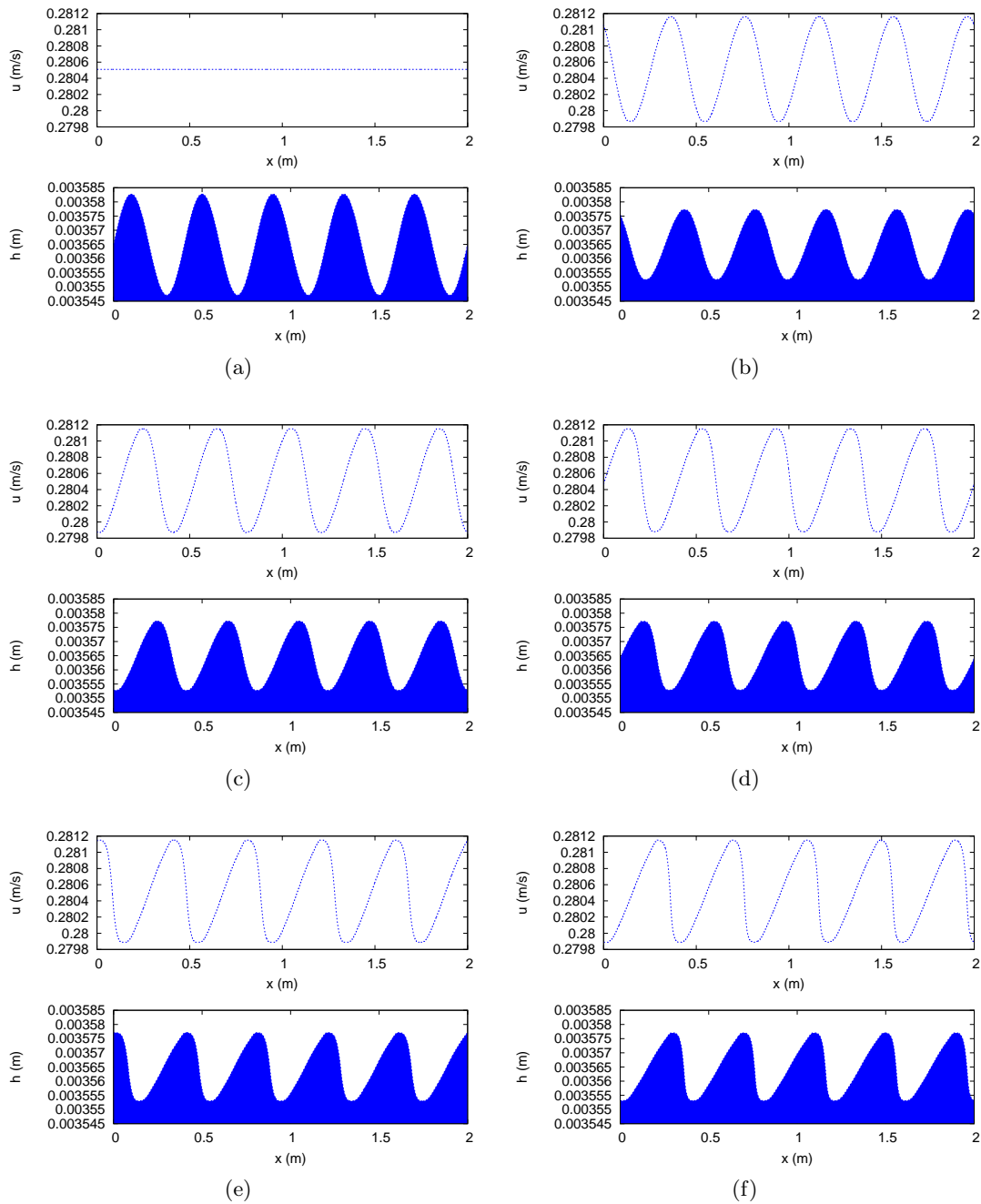


FIG. 4.12: $Fr = 1.5$ et loi de Manning : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

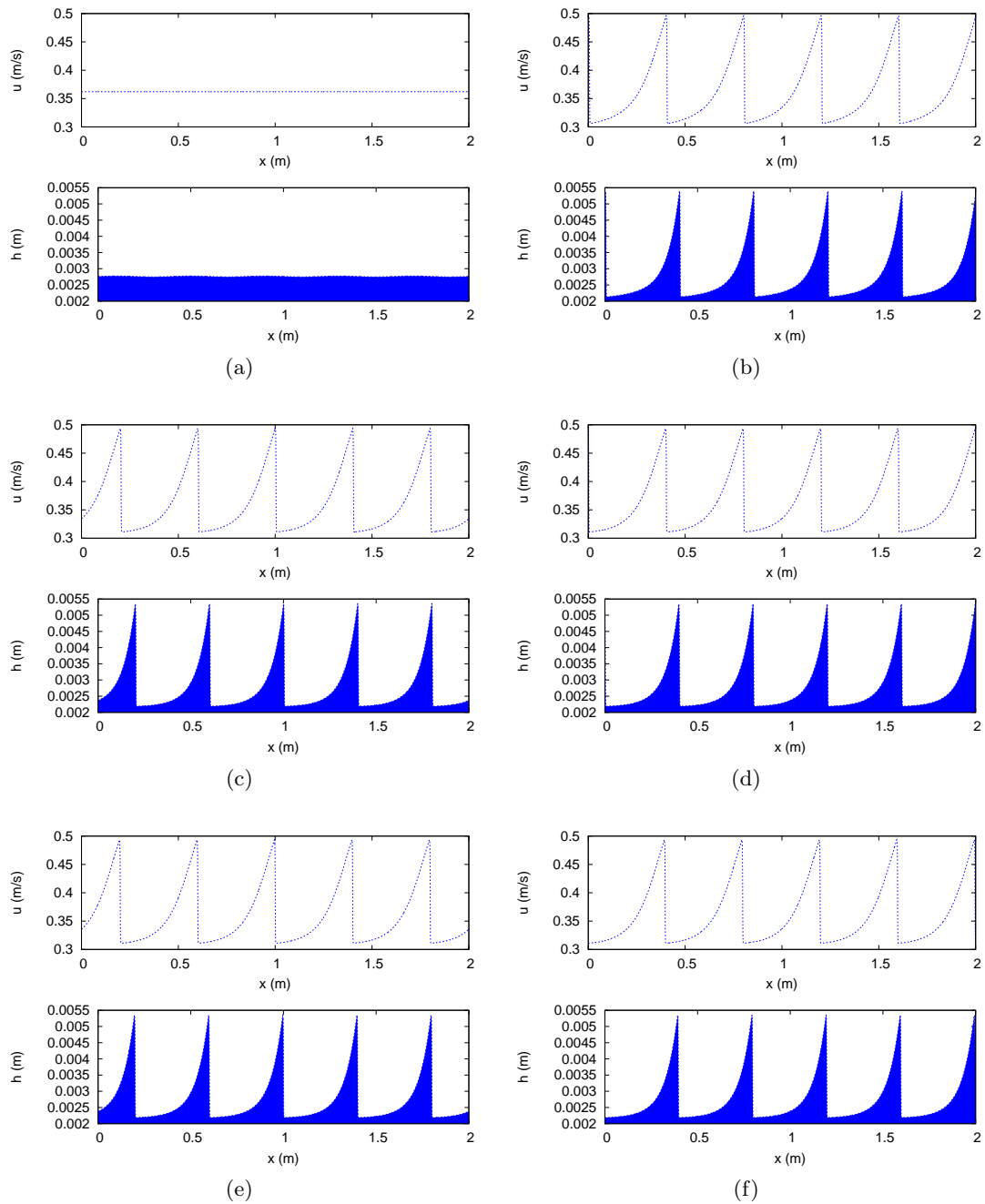


FIG. 4.13: $Fr = 2.2$ et loi de Manning : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Bohorquez and Fernandez-Feria [2006] et Bohorquez [2010], ces roll-waves sont d'origine numérique. Si tel est le cas il faudra trouver un moyen de les faire disparaître tout en permettant la formation des roll-waves naturelles. Dans Bohorquez and Fernandez-Feria [2006] et Bohorquez [2010], il est montré que l'écoulement est proche de l'approximation d'onde cinématique. Donc comme pour le chapitre 3.3.2.8, nous pouvons supposer que notre méthode numérique ne traite pas les bons équilibres. Il faudra peut être traiter les frottements en s'inspirant de ce qui est fait dans Bouchut et al. [2007], Coquel et al. [2008], Chalons et al. [0000] et Berthon and Turpault [0000] afin de préserver ce quasi-équilibre.

Par ailleurs, il faudra s'intéresser à la formation de roll-waves pour des topographies plus complexes comme dans Plumerault et al. [2010] où les auteurs s'intéressent à la formation de roll-waves sur une topographie périodique.

Dans les chapitres précédents, nous avons fait le choix d'une méthode numérique adaptée à la résolution des problèmes de ruissellement. Dans ce chapitre nous avons montré que dans certains cas, les écoulements peuvent être instables et que la méthode numérique choisie capture correctement ces instabilités. Au chapitre suivant, nous allons voir comment traiter numériquement le terme de pluie.

4.2. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

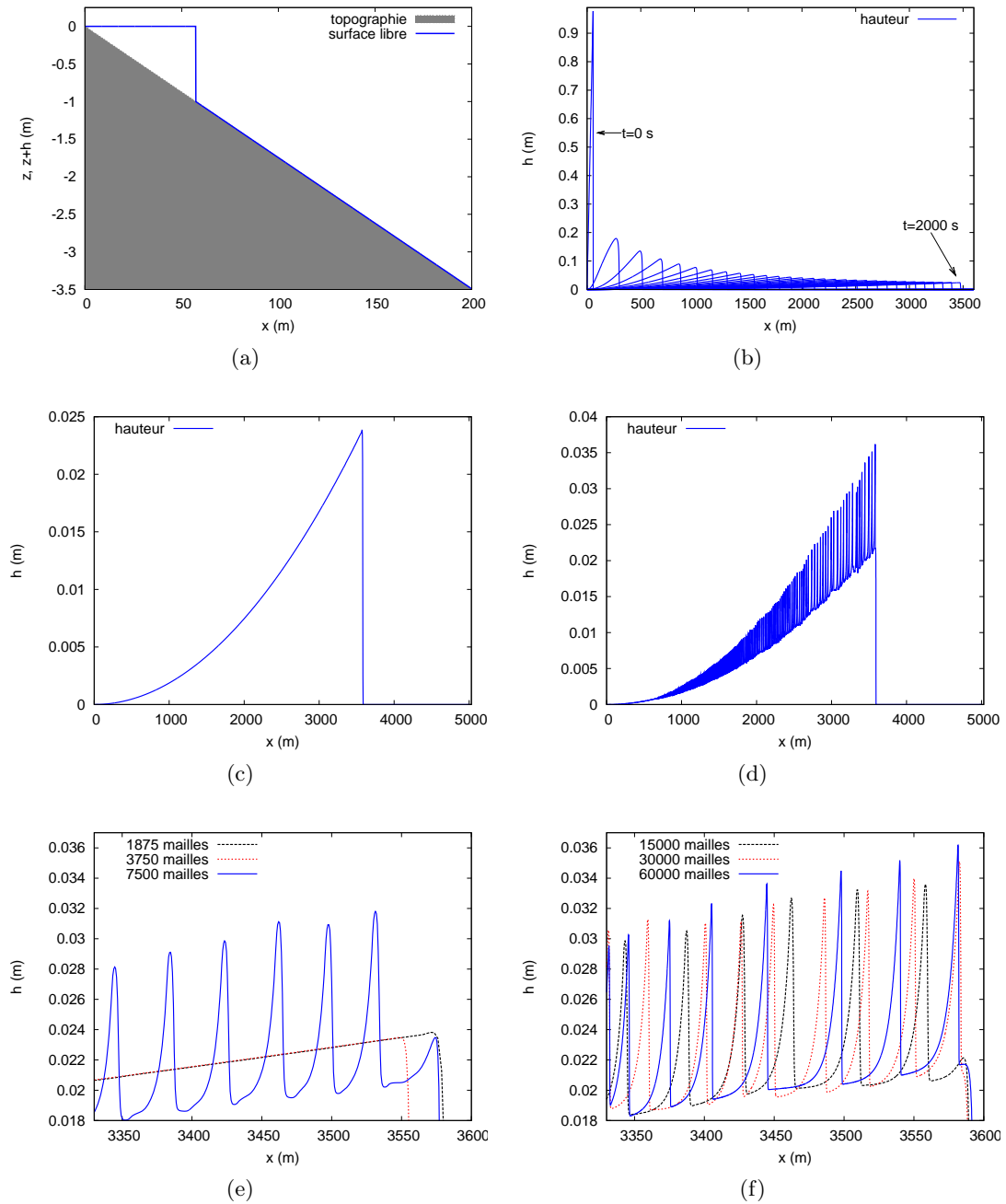


FIG. 4.14: Rupture de barrage sur plan incliné : (a) condition initiale, (b) la hauteur d'eau à différents instants, la hauteur d'eau à la fin de la simulation pour (c) 1875 mailles et (d) 60000 mailles et zoom sur la hauteur d'eau à la fin de la simulation pour des mailages (e) grossiers et (f) fins.

Chapitre 5

Modèle complet de ruissellement

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons choisi une méthode numérique adaptée à la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles : le schéma aux volumes finis d'ordre 2 avec reconstruction hydrostatique, flux HLL, reconstruction MUSCL et traitement semi-implicite des frottements. Pour rendre notre modélisation du ruissellement complète, dans notre modèle, nous devons tenir compte de "l'apport" en eau lié à la pluie et du "prélèvement" lié aux phénomènes d'infiltration. De plus le modèle doit être bidimensionnel. Dans un premier temps nous allons nous intéresser au terme de pluie et à son traitement. Dans certaines configurations il est possible d'obtenir des solutions analytiques telles que le test de la "pluie idéale". Puis, nous verrons comment modéliser l'infiltration et coupler ce modèle avec le modèle de ruissellement. Enfin, nous verrons comment généraliser la méthode numérique au cadre bidimensionnel.

5.1 La pluie

Nous proposons d'ajouter le terme source P (m/s) dans l'équation de conservation de la masse comme dans Esteves et al. [2000], Fiedler and Ramirez [2000], Erduran et al. [2005]. Ce terme source peut être variable en espace et en temps (comme étudié dans Niemczynowicz [1991] et de Lima and Singh [2002, 2003]). Mais dans ce travail, nous nous limitons à l'étude d'une pluie d'intensité variable en temps et homogène en espace. En ajoutant le terme source dans l'équation de la masse, le système de Saint-Venant prend alors la forme

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = P \\ \partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) = gh(S_0 - S_f) \end{cases} \quad (5.1)$$

La forme du système (5.1) en particulier le fait que le terme de pluie n'apparaît pas dans l'équation de quantité de mouvement peut être justifiée en reprenant la dérivation effectuée par Jacques Sainte-Marie ¹ dans le cadre du projet ANR METHODE. Nous verrons en particulier qu'une hypothèse de pluie verticale est utilisée. Puis nous présenterons la méthode choisie pour le traitement numérique de ce terme source supplémentaire. Enfin, nous vérifierons sur des tests analytiques et sur des mesures expérimentales que cette

¹Laboratoire Saint-Venant, 6 quai Watier, 78400 Chatou et INRIA Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France

méthode est adaptée au problème qui nous intéresse.

5.1.1 Dérivation du modèle avec pluie

Nous partons de l'équation d'Euler hydrostatique bidimensionnelle (x, z) , soit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad (5.4)$$

avec u (respectivement w) est la composante horizontale (resp. verticale) de la vitesse, p la pression et

$$t > t_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z_b(x, t) \leq z \leq \eta(x, t),$$

où $\eta(x, t)$ (respectivement $z_b(x, t)$) représente la cote de la surface libre (respectivement du fond). Nous avons donc

$$\eta(x, t) = z_b(x, t) + h(x, t), \quad \text{avec } h(x, t) \text{ la hauteur d'eau.} \quad (5.5)$$

5.1.1.1 Condition aux limites cinématique

L'équation de la surface libre s'écrit

$$z - \eta(x, t) = 0.$$

Soit M , le point de coordonnées

$$M = \begin{pmatrix} x \\ \eta(x, t) \end{pmatrix},$$

en l'absence de pluie, la condition cinématique à la surface libre s'écrit

$$(M \text{ reste sur la surface libre à tout instant } t)$$

soit encore

$$\frac{D(z - \eta(x, t))}{Dt} = 0, \quad (5.6)$$

avec

$$\frac{Df(x, z, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \quad \mathbf{u} = (u, w)^T. \quad (5.7)$$

Avec (5.7), l'équation cinématique (5.6) s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_s = 0,$$

où (u_s, w_s) est le vecteur vitesse à l'interface eau/air.

En présence de pluie, la surface libre est donnée par

$$\frac{D(z - \eta(x, t))}{Dt} = P,$$

où l'intensité de pluie P est homogène à une vitesse, ce qui se traduit par

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_s = P. \quad (5.8)$$

5.1.1.2 Saint-Venant avec pluie

L'intégration entre z_b et η de l'équation de continuité (5.2) (voir Gerbeau and Perthame [2000, 2001] pour le détail des différentes étapes de l'intégration : règle de Leibnitz, ...) donne l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = P,$$

avec $h\bar{u} = \int_{z_b}^{\eta} u dz$. Par contre l'intégration entre z_b et η de (5.3) donne

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{g}{2}h^2 \right) + u_s \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + u|_s \frac{\partial\eta}{\partial x} - w_s \right) = 0,$$

soit en utilisant (5.8)

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{g}{2}h^2 \right) = Pu_s.$$

Puisque $P \geq 0$ et par analogie à ce que nous faisons quand nous voulons décentrer des flux, nous devons prendre $u_s = u_P$ où u_P est la composante horizontale de la vitesse de la pluie. Ce qui donne l'équation des moments

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{g}{2}h^2 \right) = Pu_P,$$

et pour l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{2}\bar{u}^2 + \frac{g}{2}h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u} \left(\frac{h}{2}\bar{u}^2 + gH^2 \right) \right) = P \left(u_P\bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + ghP.$$

Donc dans le cas d'une pluie verticale (avec $u_P = 0$) et en ajoutant les termes sources de topographie et de frottement, nous retrouvons bien le système (5.1).

5.1.2 Pluie idéale

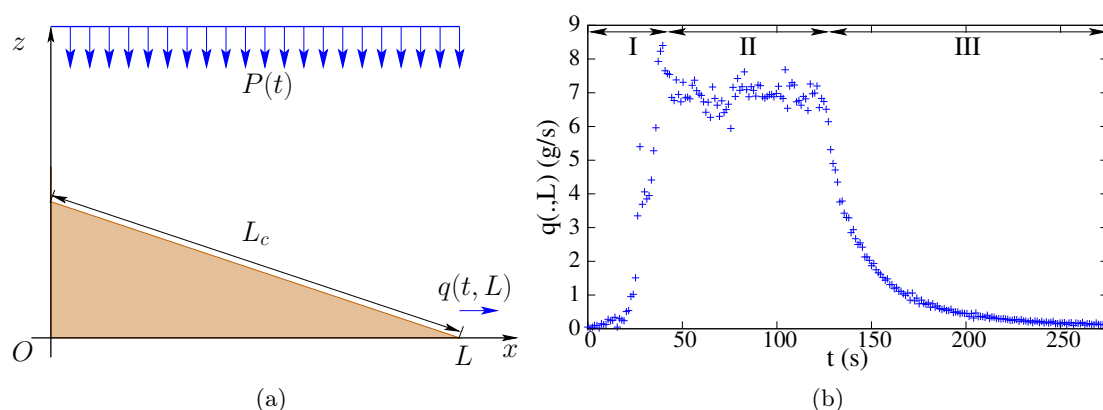


FIG. 5.1: Test de la pluie idéale : (a) Configuration et (b) hydrogramme mesuré en $x = L$.

5.1. LA PLUIE

Nous appelons test de la pluie "idéale", la reconstitution de l'hydrogramme $q(t, L)$ (figure 5.1b) observé à l'aval d'un canal incliné de longueur au sol (ou longueur projetée) L (notons sa longueur L_c) et de pente constante $\partial_x z = -S_0 < 0$ (figure 5.1a), soumis à un événement pluvieux en créneau.

$$P(t) = \begin{cases} I & \text{pour } 0 \leq t \leq T_P \\ 0 & \text{pour } T_P < t \leq T_{Ev} \end{cases},$$

où T_P est l'instant d'arrêt de la pluie et T_{Ev} la fin de l'événement. Nous considérons T_P suffisamment grand pour permettre l'obtention d'un état d'équilibre stationnaire au temps $T_{eq}(L)$ avec $0 < T_{eq}(L) < T_P$. La gouttière est initialement sèche, nous avons donc $h(x, 0) = 0$ m. En amont, nous avons

$$h(0, t) = 0 \text{ m et } q(0, t) = 0 \text{ m}^2/\text{s}, \forall t \geq 0 \text{ s.}$$

Dans la littérature, différentes études concernant ce problème ont été menées aussi bien d'un point de vue numérique, que d'un point de vue expérimental ou encore d'un point de vue analytique (voir entre autres Yu and McNown [1964], Woolhiser and Liggett [1967], Kishii [1981], Ponce et al. [1997], Gottardi and Venutelli [1997, 2008], Wang et al. [2002], Kazezyilmaz-Alhan et al. [2005]).

Nous qualifions cet événement de pluie idéale à cause de son caractère particulier. En effet, ces conditions sont rarement rencontrées dans la réalité (pluie en créneau homogène en espace, pente constante, coefficient de frottement uniforme et sans infiltration).

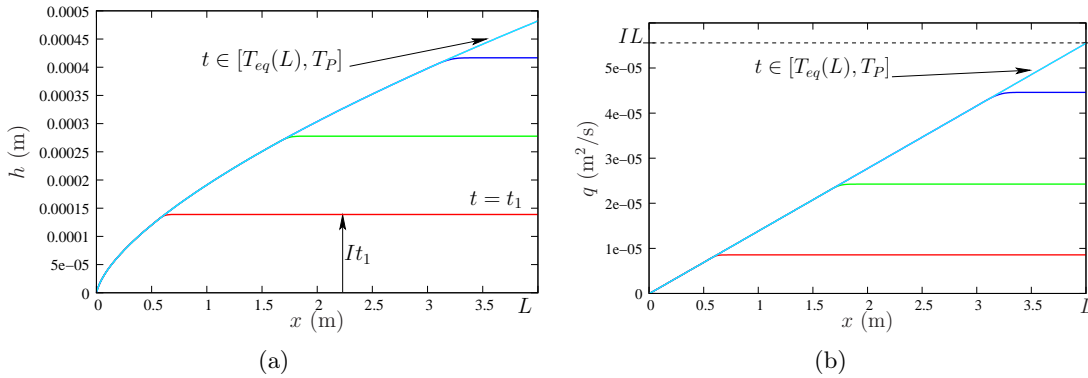


FIG. 5.2: Test de la pluie idéale : Evolution (a) de la hauteur d'eau et (b) du débit pour la montée de l'hydrogramme et le plateau ($t \in [0, T_P]$) pour la loi de Darcy-Weisbach avec $f = 0.14$.

Ce test présente deux avantages, le premier étant qu'il nous a été possible de le simuler expérimentalement à l'aide du simulateur de pluie de l'INRA d'Orléans² (nous reviendrons sur la description de ce dispositif et sur les mesures dans le chapitre 6).

Le second avantage est qu'il est possible d'élaborer deux solutions analytiques, obtenues en analysant les trois phases de l'hydrogramme expérimental (figure 5.1b) :

²pour plus de détails sur le simulateur de pluie voir : http://www.orleans.inra.fr/layout/set/print/les_unites/ur_sciences_du_sol/equipements/simulateur_de_pluie

5.1. LA PLUIE

- I La montée de l'hydrogramme : phase transitoire durant laquelle le débit à l'exutoire augmente jusqu'à atteindre sa valeur limite $q(T_{eq}(L), L) = IL$ au temps $T_{eq}(L)$ (fig. 5.2b), la mise à l'équilibre se fait par l'amont de la gouttière. Durant cette phase, la hauteur d'eau évolue selon la relation : $h(t, L) = It$ (fig. 5.2a).
- II Le plateau : phase pendant laquelle l'écoulement est stationnaire (figs 5.2a et 5.2b). Le débit à l'exutoire est à sa valeur maximale $q(t, L) = IL$. Cette phase s'achève à l'arrêt de la pluie au temps T_P .
- III Le tarissement de l'hydrogramme : phase transitoire où l'intensité de la pluie est nulle. Ainsi la hauteur d'eau (fig. 5.3a) et le débit (fig. 5.3b) diminuent jusqu'à assèchement total du canal. Cet assèchement se fait par l'amont.

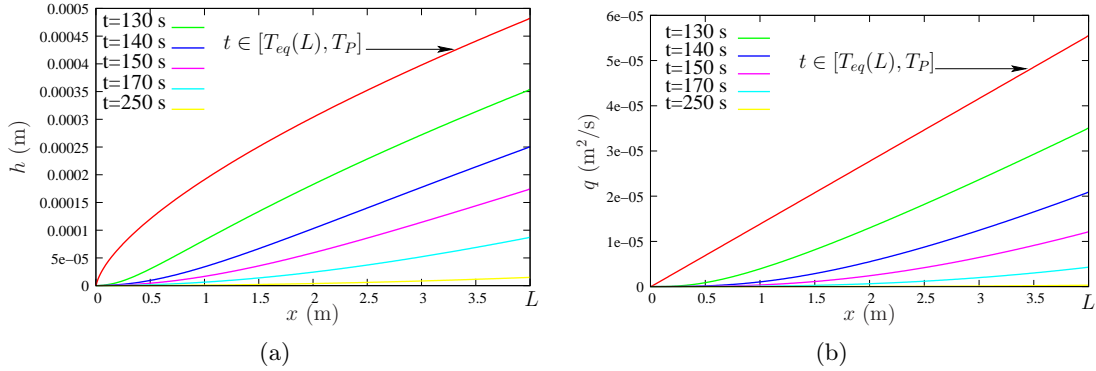


FIG. 5.3: Test de la pluie idéale : Evolution (a) de la hauteur d'eau et (b) du débit pendant le tarissement de l'hydrogramme ($t > T_P$) pour la loi de Darcy-Weisbach avec $f = 0.14$.

La simplicité du test et l'observation de l'hydrogramme (trois phases : montée, plateau puis tarissement), nous permettent d'obtenir deux solutions analytiques :

- pour les deux premières phases à partir du modèle de Saint-Venant,
- pour la totalité de l'événement avec le modèle d'approximation d'onde cinématique (voir le chapitre 1.1.2).

Ceci nous permettra de comparer les deux modèles et de tester la validité de l'approximation d'onde cinématique.

Dans ce qui suit, nous donnons la démonstration de chacune des solutions.

5.1.3 Version Saint-Venant

Montée de l'hydrogramme A $t = 0$ s, la pluie tombe uniformément sur un sol sec. Ainsi, nous avons

$$\partial_x h = \partial_x u = \partial_x q = 0. \quad (5.9)$$

L'équation de conservation de la masse donne donc

$$\partial_t h = P(t),$$

et nous rappelons que tant que $t \leq T_P$, l'intensité de la pluie est constante $P(t) = I > 0$. Ainsi la hauteur d'eau locale augmente uniformément tout le long de la gouttière à la

5.1. LA PLUIE

vitesse $\partial_t h = I$, excepté en $x = 0$ (il n'y a pas de débit entrant). Nous avons donc

$$h = It. \quad (5.10)$$

A l'aide de (5.9), l'équation de quantité de mouvement s'écrit

$$\partial_t(hu) = \partial_t q = -gh[\partial_x z + S_f], \quad (5.11)$$

ce qui nous permet d'obtenir l'évolution des débits et par conséquent des vitesses au cours du temps. La hauteur d'eau locale ($h(x, t)$) continue d'augmenter suivant (5.10), tant que son débit associé ($q(x, t)$) n'a pas atteint sa valeur limite

$$q_{eq}(x) = \int_0^x I dx = Ix \text{ au temps } t = T_{eq}(x).$$

Nous avons décrit la montée de l'hydrogramme.

Le plateau Ensuite, la hauteur d'eau locale et le débit associé restent constants. Ainsi quand l'équilibre a atteint l'exutoire (en $x = L$) au temps $t = T_{eq}(L)$, le débit atteint sa valeur maximale et nous avons

$$q_{eq}(x) = Ix, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.12)$$

et ce jusqu'à ce que la pluie s'arrête ($t = T_P$). Puisque nous sommes à l'état stationnaire, l'équation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme

$$\partial_x \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = -gh(\partial_x z + S_f(q, h)). \quad (5.13)$$

Après calculs avec (5.12) et (5.13), nous avons

$$\partial_x h = \frac{gh^3 [S_f(Ix, h) + \partial_x z] + 2I^2 x h}{x^2 I^2 - gh^3},$$

avec pour la loi de frottement de Manning

$$S_f(Ix, h) = n^2 \frac{I^2 x^2}{h^{10/3}},$$

et pour celle de Darcy-Weisbach

$$S_f(Ix, h) = \frac{f}{8g} \frac{I^2 x^2}{h^3}.$$

Ainsi nous sommes en mesure de calculer les profils de hauteurs d'eau et de débits spatialisés, ainsi que le débit à l'exutoire pour $0 \leq t \leq T_P$.

5.1.4 Version approximation d'onde cinématique

Dans cette partie, nous allons reprendre la solution analytique pour le modèle d'onde cinématique avec la loi de Manning obtenue dans Esclaffer [2003, p. 25-26] et attribuée à Eagleson en 1970 (voir Kazezyilmaz-Alhan et al. [2005]). Nous étendrons ce raisonnement au modèle d'onde cinématique avec la loi de Darcy-Weisbach. Le modèle d'approximation cinématique (voir le chapitre 1.1.2) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = P \\ \partial_x z + S_f = S_f - S_0 = 0 \end{cases} .$$

Pour la loi de Manning, nous avons donc

$$S_0 = n^2 \frac{u|u|}{h^{4/3}} = n^2 \frac{q|q|}{h^{10/3}} \quad (5.14)$$

et pour la loi de Darcy-Weisbach

$$S_0 = \frac{f}{8g} \frac{u|u|}{h} = \frac{f}{8} \frac{q|q|}{h^3}. \quad (5.15)$$

S_0 est supposé positif (voir plus haut), donc (5.14) et (5.15) s'écrivent sous la forme

$$q = \alpha h^{\beta+1}, \quad (5.16)$$

avec pour la loi de Manning d'une part

$$\alpha = \frac{1}{n} \sqrt{S_0} \quad \text{et} \quad \beta = 2/3$$

et pour la loi de Darcy-Weisbach d'autre part

$$\alpha = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{S_0} \quad \text{et} \quad \beta = 1/2.$$

Ce qui suit reste valable pour les deux lois de frottement considérées.

Montée de l'hydrogramme et plateau

Compte tenu de (5.16), l'équation de conservation de la masse peut s'écrire sous la forme

$$\partial_t h + \alpha(\beta + 1) h^\beta \partial_x h = P(t). \quad (5.17)$$

Nous allons utiliser la méthode des caractéristiques. Le long d'une caractéristique $(X(t), t)$, nous avons

$$\frac{dh}{dt}(X(t), t) = \partial_t h + \frac{dX}{dt}(t) \partial_x h,$$

par identification des termes de (5.17), nous obtenons

$$\frac{dh}{dt}(X(t), t) = I \quad (5.18)$$

et

$$\frac{dX}{dt}(t) = \alpha(\beta + 1) h(X(t), t)^\beta. \quad (5.19)$$

5.1. LA PLUIE

Sur la caractéristique issue de $X(0) = x_0 \in [0, L]$, nous avons

$$h(X(t), t) = \int_0^t \frac{dh}{dt}(X(t), t) dt = It, \quad \forall t \geq 0 / X(t) \leq L,$$

et

$$q(X(t), t) = \alpha (It)^{\beta+1}.$$

Ainsi nous avons l'évolution de la hauteur d'eau et du débit sur une caractéristique quelconque. Si nous nous plaçons en $x_1 \in [0, L]$, alors toutes les caractéristiques issues de $x_0 \in [0, x_1]$ passeront par x_1 . Tant que la caractéristique issue de $x = 0$ n'a pas atteint x_1 , nous avons donc

$$\begin{cases} h(x_1, t) = It \\ q(x_1, t) = \alpha (It)^{\beta+1} \end{cases}$$

La caractéristique issue de $x = 0$ atteint le point $x_1 \in [0, L]$ au temps $T_{eq}(x_1)$. Le régime en amont de x_1 est alors stationnaire. En intégrant (5.18) le long de la caractéristique issue de $x = 0$ pour $0 \leq t \leq T_{eq}(x_1)$ nous obtenons

$$h(X(T_{eq}(x_1)), T_{eq}(x_1)) = \int_0^{T_{eq}(x_1)} \frac{dh}{dt}(X(t), t) dt = IT_{eq}(x_1),$$

$$\forall T_{eq}(x_1) \in [0, T_{eq}(L)], \quad \forall x_1 \in [0, L].$$

Puisque $q(x, t) = \alpha h(x, t)^{\beta+1}$, nous avons

$$q(X(T_{eq}(x_1)), T_{eq}(x_1)) = \alpha h(X(T_{eq}(x_1)), T_{eq}(x_1))^{\beta+1} = \alpha (IT_{eq}(x_1))^{\beta+1}.$$

L'intégration de (5.19) donne

$$x_1 = X(T_{eq}(x_1)) = \int_0^{T_{eq}(x_1)} \frac{dX}{dt}(t) dt = \alpha \frac{1}{I} (IT_{eq}(x_1))^{\beta+1},$$

soit

$$T_{eq}(x_1) = \frac{1}{I} \left(\frac{x_1 I}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \quad \text{et} \quad q(x_1, T_{eq}(x_1)) = I x_1.$$

En résumé pour $x \in [0, L]$, nous avons

$$h(x, t) = \begin{cases} It, & \text{pour } t \in [0, T_{eq}(x)] \\ IT_{eq}(x), & \text{pour } t \in [T_{eq}(x), T_P] \end{cases}$$

et

$$q(x, t) = \begin{cases} \alpha (It)^{\beta+1}, & \text{pour } t \in [0, T_{eq}(x)] \\ Ix, & \text{pour } t \in [T_{eq}(x), T_P] \end{cases},$$

avec

$$T_{eq}(x) = \frac{1}{I} \left(\frac{xI}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Tarissement de l'hydrogramme

A l'arrêt de la pluie (au temps T_P), l'écoulement est encore à l'équilibre, nous avons donc

$$\begin{cases} \partial_t h + \alpha(\beta + 1) h^\beta \partial_x h = 0 \\ q(x_1, T_P) = q(x_1, T_{eq}(x_1)) = Ix_1, \quad x_1 \in [0, L] \end{cases} .$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons le long de la caractéristique $(X(t), t)$

$$\frac{dh}{dt}(X(t), t) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t) &= \alpha(\beta + 1) h(X(t), t)^\beta \\ &= \alpha(\beta + 1) \left(\frac{q(X(t), t)}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} . \end{aligned} \tag{5.20}$$

Lors du tarissement, l'assèchement se fait par l'amont et les débits et hauteurs sont conservés le long de leur caractéristique respective. Ainsi, pour obtenir le débit à l'exutoire et la hauteur d'eau au temps $t \geq T_P$, il faut déterminer le temps mis par chacune des caractéristiques pour atteindre l'exutoire.

Considérons la caractéristique issue de $X(T_P) = x_1 \in]0, L]$ à l'arrêt de la pluie au temps T_P . Cette caractéristique atteint l'exutoire au temps $T_L(x_1)$, nous avons donc en intégrant (5.20) entre T_P et $T_L(x_1)$

$$\begin{aligned} L - x_1 &= \int_{T_P}^{T_L(x_1)} \frac{dX}{dt}(t) dt = \int_{T_P}^{T_L(x_1)} \alpha(\beta + 1) \left(\frac{Ix_1}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} dt \\ &= (T_L(x_1) - T_P) \alpha(\beta + 1) \left(\frac{Ix_1}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} . \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$T_L(x_1) = T_P + \frac{L - x_1}{\alpha(\beta + 1)} \left(\frac{Ix_1}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$

et

$$q(L, T_L(x_1)) = q(x_1, T_P) = q(x_1, T_{eq}(x_1)) = Ix_1 .$$

5.1.5 Version numérique

Dans cette section, nous allons nous intéresser au traitement numérique du terme source de pluie. Cette méthode sera validée sur deux familles de test : des solutions stationnaires (généralisation de celles utilisées dans le chapitre 2 et obtenues dans l'annexe B.4) et le test de la pluie idéale.

5.1.5.1 Traitement numérique

Dans Delestre et al. [2009] et Delestre and James [2009], nous avons opté pour un traitement du terme de pluie par splitting, comme ce qui est fait dans Erduran et al. [2005]. A l'image de ce que nous avons dit concernant le traitement des frottements par

splitting de Strang (voir le chapitre 3), le traitement du terme source de pluie par splitting nécessite une programmation avec un pas de temps fixe ou d'alourdir l'algorithme afin de garder un code avec CFL fixe. Par souci d'efficacité, le terme de pluie est traité de façon explicite, ce qui n'influe pas sur les résultats. Ce traitement s'écrit

1. Résolution du système de Saint-Venant

$$U^* = U^n + \Delta t (\Phi(U^n) + P^n),$$

2. Résolution du terme source

$$\tilde{U}^{n+1} = Sf_{\Delta t}(U^*),$$

3. Résolution du système de Saint-Venant

$$U^{**} = \tilde{U}^{n+1} + \Delta t (\Phi(\tilde{U}^{n+1}) + P^n),$$

4. Résolution du terme source

$$\tilde{U}^{n+2} = Sf_{\Delta t}(U^{**}),$$

5. Mise à jour des variables par la méthode de Heun

$$U^{n+1} = \frac{U^n + \tilde{U}^{n+2}}{2},$$

où Φ est défini par (2.11) et P^n est l'intensité de la pluie au temps t_n . Rappelons que la pluie peut être variable en espace (comme étudié dans Niemczynowicz [1991] et de Lima and Singh [2002, 2003]), mais dans tout ce qui suit nous considérons une pluie variable en temps et homogène en espace.

Cette méthode numérique doit maintenant être validée sur des cas tests présentés dans les sections suivantes. Les résultats de ces sections ont été obtenus à l'aide de variantes du code utilisé dans les chapitres 2, 3 et 4. Le compilateur utilisé est gfortran sans option de compilation (voir la section 2.2.2). L'exécutable a été lancé avec la configuration suivante :

- système d'exploitation : Ubuntu version 9.04,
- matériel :
 - mémoire 2.9 Go,
 - processeur Intel[®] Core[™] 2 Duo CPU T5750 2.00 GHz.

Enfin, tous les calculs ont été menés avec la méthode déterminée dans les chapitres 2 et 3 : flux HLL, reconstruction MUSCL et traitement semi-implicite des frottements, tout en respectant la condition de CFL théorique ($n_{CFL} = 0.5$).

5.1.5.2 Solutions stationnaires avec pluie

Ces tests correspondent à des équilibres stationnaires (travail débuté dans le cadre d'un stage de M2 effectué au MAPMO, voir Vo Thi Ngoc [2008]) et se rapproche des tests proposés dans le chapitre 3 (pour plus de détails voir l'annexe B.4). Nous considérons un équilibre stationnaire avec une pluie d'intensité P uniforme et constante sur un domaine de longueur L . En se donnant un débit d'intensité constante en amont du canal : $q(0) = q_0$, l'équation de conservation de la masse donne

$$q(x) = q_0 + xP, \text{ pour } 0 \leq x \leq L. \quad (5.21)$$

5.1. LA PLUIE

Nous avons donc un profil pour le débit et nous nous donnons un profil de hauteur d'eau (notée h_{ex} dans ce chapitre) sur tout le domaine, ce qui nous permet de calculer la topographie associée à cet équilibre stationnaire à l'aide de la relation

$$\partial_x z = \left(\frac{q^2}{gh^3} - 1 \right) \partial_x h - \frac{2qP}{gh^2} - S_f \quad (5.22)$$

et d'une méthode d'intégration numérique. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers Vo Thi Ngoc [2008, p.10] ainsi qu'à l'annexe B.4. Nous avons à notre disposition différentes configurations :

- écoulement : fluvial ou torrentiel,
- loi de frottement : Manning ou Darcy-Weisbach.

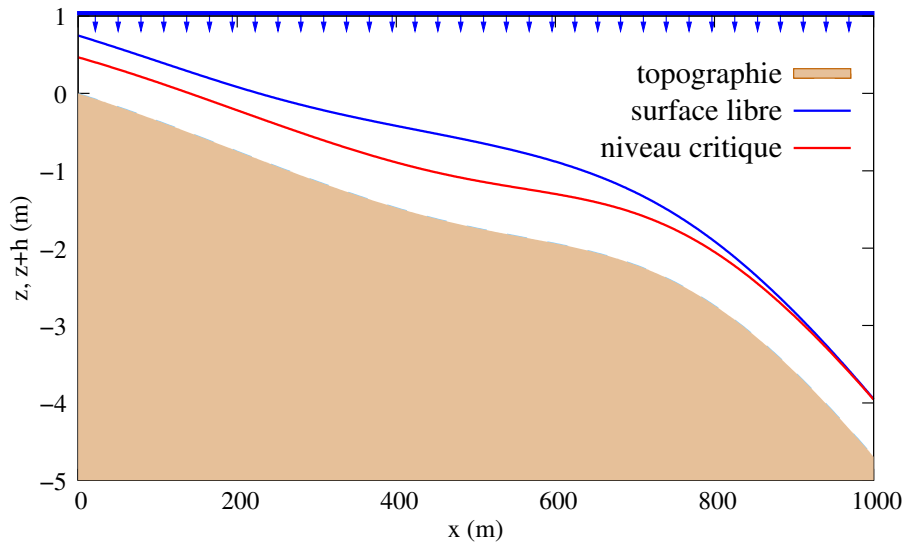


FIG. 5.4: Écoulement fluvial-fluvial avec de la pluie pour la loi de Darcy-Weisbach.

Écoulement fluvial-fluvial Nous considérons un canal de 1000 m de long. A l'équilibre, la hauteur $h_{ex}(x)$ est donnée par (3.9) et le débit est obtenu à l'aide de la relation (5.21). La topographie est calculée à l'aide de (5.22) avec $P = 0.001$ m/s l'intensité de la pluie à la fin de la simulation et $q_0 = 1$ m²/s le débit en entrée à l'équilibre. Nous obtenons ainsi un écoulement entièrement fluvial (comme illustré pour la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 5.4).

Les coefficients de frottement sont pour la loi de

- Manning : $n = 0.033$,
- Darcy-Weisbach : $f = 0.093$.

Les conditions initiales sont

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} \text{en amont } h = h_{ex}(0) \text{ m} \\ \text{en aval } h = h_{ex}(1000) \text{ m} \end{cases} .$$

5.1. LA PLUIE

A la différence des écoulements fluviaux du chapitre 3, nous fixons la hauteur d'eau à la place du débit pour observer l'effet d'un tel choix sur la capture de l'équilibre final. Le débit en amont sera forcé à la première itération en prenant $q(0, 0) = q_0$. La durée totale de l'événement est $t = 3000$ s et l'intensité P de la pluie est donnée par

$$P(t) = \begin{cases} 0 \text{ m/s} & \text{si } t < 1500 \text{ s} \\ 0.001 \text{ m/s} & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'événement pluvieux en créneau permet l'obtention de deux états d'équilibre stationnaires successifs :

1. Lors du premier équilibre, obtenu au temps $t_{eq} < 1500$ s, nous devons retrouver un débit constant (l'intensité de la pluie étant nulle) :

$$q(t, x) = Cte, \quad \text{pour } t \in [t_{eq}, 1500 \text{ s}].$$

2. Le deuxième état d'équilibre stationnaire correspond à l'équilibre décrit au début de cette section (avec la hauteur d'eau (3.9) et le débit obtenu à l'aide de (5.21)).

Ce test permet de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement et pluie en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement entièrement fluvial,
- de conditions de bord fluviales,
- de deux états transitoires,
- d'un état stationnaire intermédiaire.

Nous avons utilisé une discrétisation numérique de 25, 50, 100, 200 et 400 mailles. Sur les figures 5.5 a-c et 5.6 a-c (resp. 5.5 b-d et 5.6 b-d) nous avons représenté les résultats obtenus avec 25 mailles (resp. 400 mailles) lors des deux états d'équilibre stationnaires successifs (aux instants $t = 1450$ s et $t = 3000$ s).

Lors du premier état stationnaire, comme attendu, le débit obtenu numériquement est constant en espace (voir les figures 5.5 c-d et 5.6 c-d). De plus les courbes de convergence obtenues pour 400 mailles (figs 5.5 e et 5.6 e) confirment la convergence numérique vers cet état stationnaire intermédiaire. Les erreurs relatives faites sur les débits et hauteurs d'eau à la fin des simulations sont inférieures à 0.03% ce qui est meilleur que certains résultats obtenus dans le chapitre 3. Nous retrouvons numériquement une convergence d'ordre 1 (figs 5.5 f et 5.6 f). Pour 25 mailles, nous pouvons noter de légères oscillations qui disparaissent en raffinant le maillage (figs 5.5 a-b-c-d et 5.6 a-b-c-d). La façon un peu différente de traiter la condition de bord ne semble pas avoir d'effets négatifs sur les résultats obtenus. Nous constatons juste que le débit de l'état d'équilibre intermédiaire est différent de celui de l'état stationnaire final (figs 5.5 c-d et 5.6 c-d).

5.1. LA PLUIE

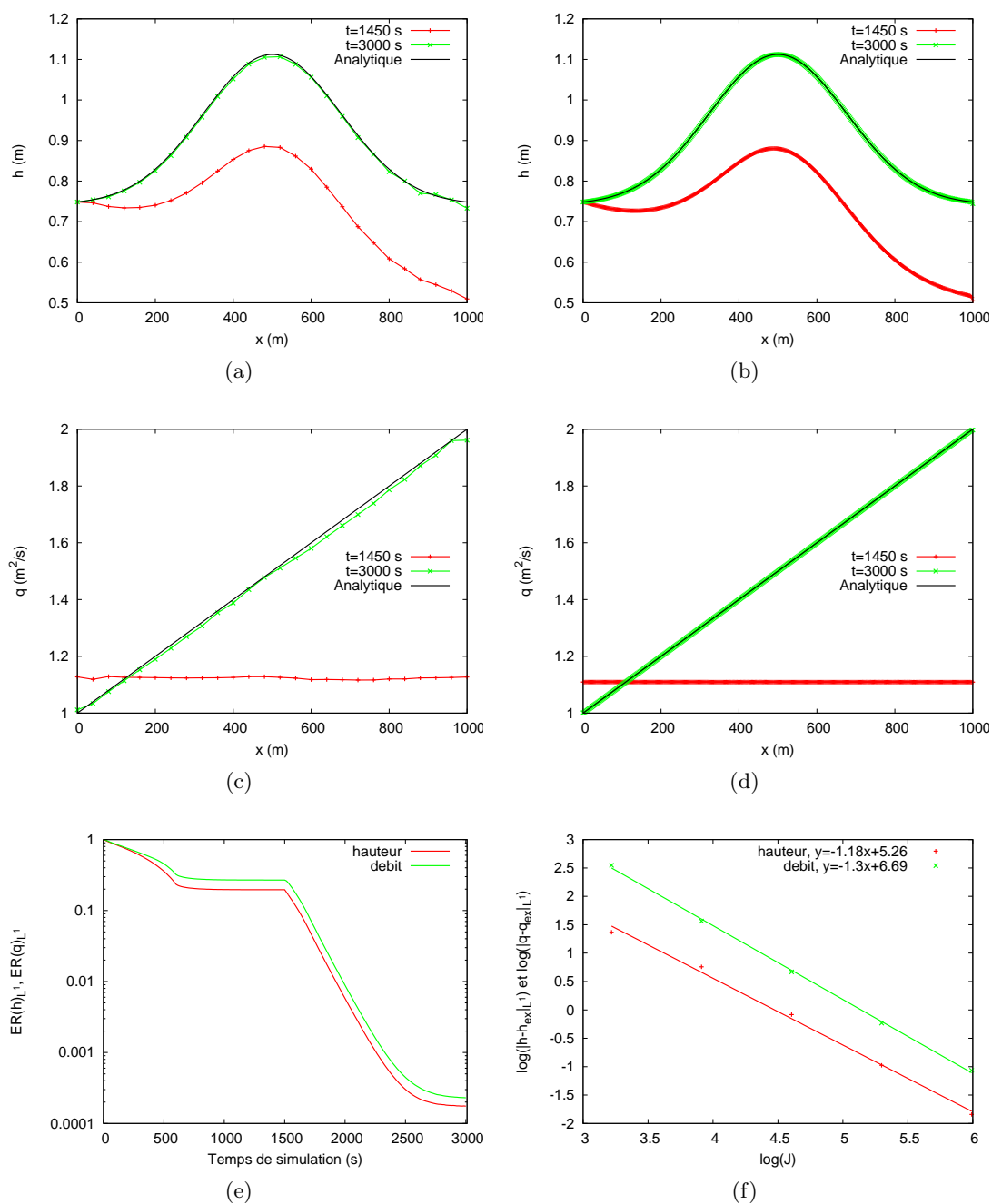


FIG. 5.5: Ecoulement fluvial-fluvial avec pluie et loi de Manning. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.

5.1. LA PLUIE

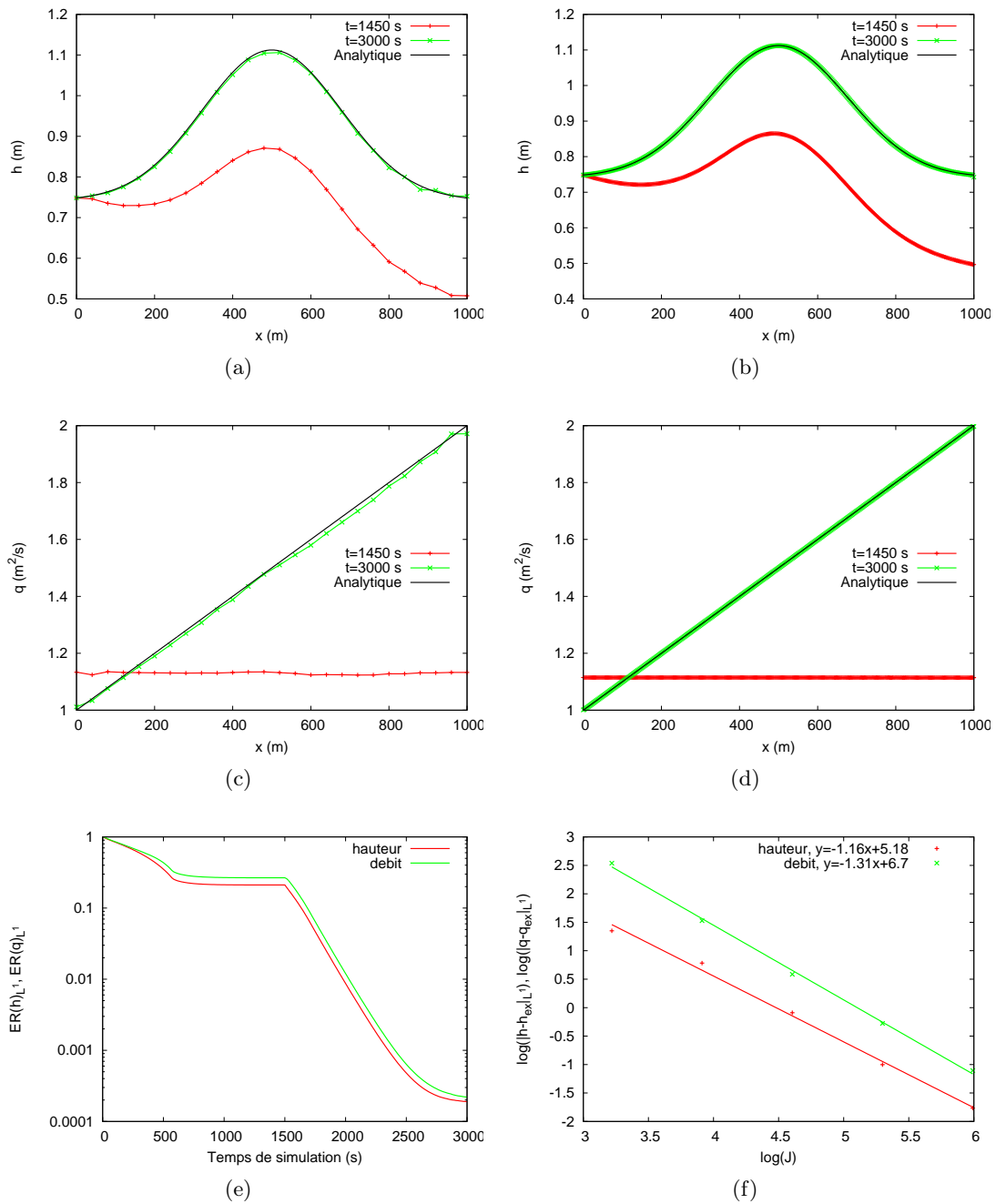


FIG. 5.6: Ecoulement fluvial-fluvial avec pluie et loi de Darcy-Weisbach. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.

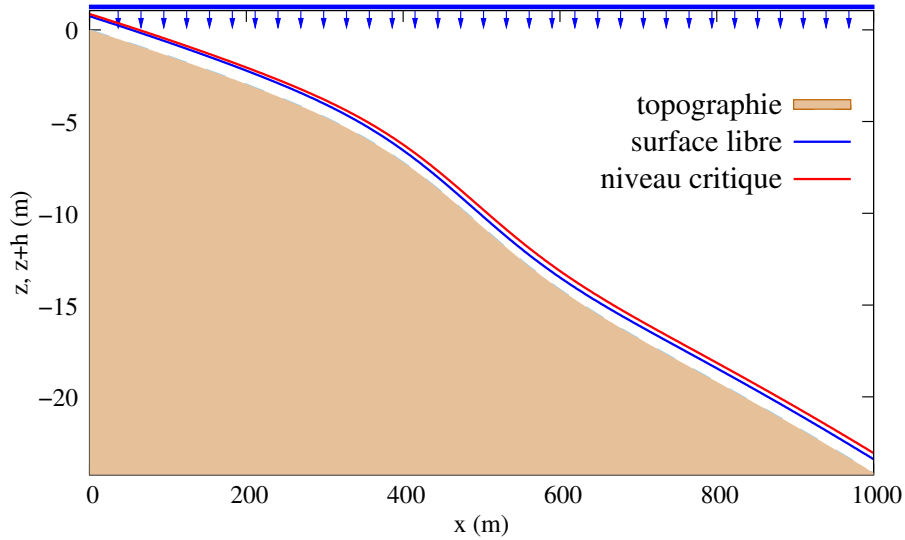


FIG. 5.7: Ecoulement torrentiel-torrentiel avec de la pluie pour la loi de Darcy-Weisbach.

Ecoulement torrentiel-torrentiel La longueur du canal considéré est 1000 m. A l'état stationnaire final, la hauteur $h_{ex}(x)$ est donnée par (3.3.1.3) et le débit est obtenu à l'aide de la relation (5.21). La relation (5.22) permet de calculer la topographie, avec $P = 0.001$ m/s l'intensité de la pluie à la fin de la simulation et $q_0 = 2.5$ m²/s le débit en amont à l'équilibre. L'écoulement stationnaire ainsi obtenu, est entièrement torrentiel (comme illustré pour la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 5.7).

Les coefficients de frottement sont pour la loi de

- Manning : $n = 0.04$,
- Darcy-Weisbach : $f = 0.065$.

Comme pour l'écoulement fluvial précédent, les conditions initiales sont

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Les conditions aux bords sont

$$\begin{cases} \text{en amont } q = 2.5 \text{ m}^2/\text{s et } h = h_{ex}(0) \text{ m} \\ \text{en aval sortie libre} \end{cases} .$$

L'événement se déroule sur une durée totale de $t = 3000$ s et l'intensité P de la pluie est donnée par

$$P(t) = \begin{cases} 0 \text{ m/s} & \text{si } t < 1500 \text{ s} \\ 0.001 \text{ m/s} & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'intérêt de ce test est de disposer :

- d'une solution analytique avec frottement et pluie en régime permanent,
- d'une topographie variable,
- d'un écoulement entièrement torrentiel,
- de conditions de bord torrentielles,
- de deux états transitoires,
- d'un état stationnaire intermédiaire.

5.1. LA PLUIE

Les calculs sont faits pour 25, 50, 100, 200 et 400 mailles. Sur les figures 5.8 a-c et 5.9 a-c (resp. 5.8 b-d et 5.9 b-d) nous avons représenté les résultats obtenus avec 25 mailles (resp. 400 mailles) lors des deux états d'équilibre stationnaires successifs (aux instants $t = 1450$ s et $t = 3000$ s).

Ici encore, le schéma attrape l'équilibre intermédiaire à débit constant (figures 5.8 c-d et 5.9 c-d). Les hauteurs d'eau obtenues par le schéma avec 25 mailles (figures 5.8 a et 5.9 a) sont très proches de celles calculées pour 400 (figures 5.8 b et 5.9 b), ce qui permet de penser que le schéma calcule le bon état stationnaire intermédiaire. Les erreurs relatives faites sur les débits et les hauteurs d'eau à la fin des simulations sont inférieures à 0.04% (figures 5.8 e et 5.9 e). Les droites d'erreur en fonction du maillage permettent de retrouver une convergence à l'ordre 1 (figs 5.8 f et 5.9 f).

5.1. LA PLUIE

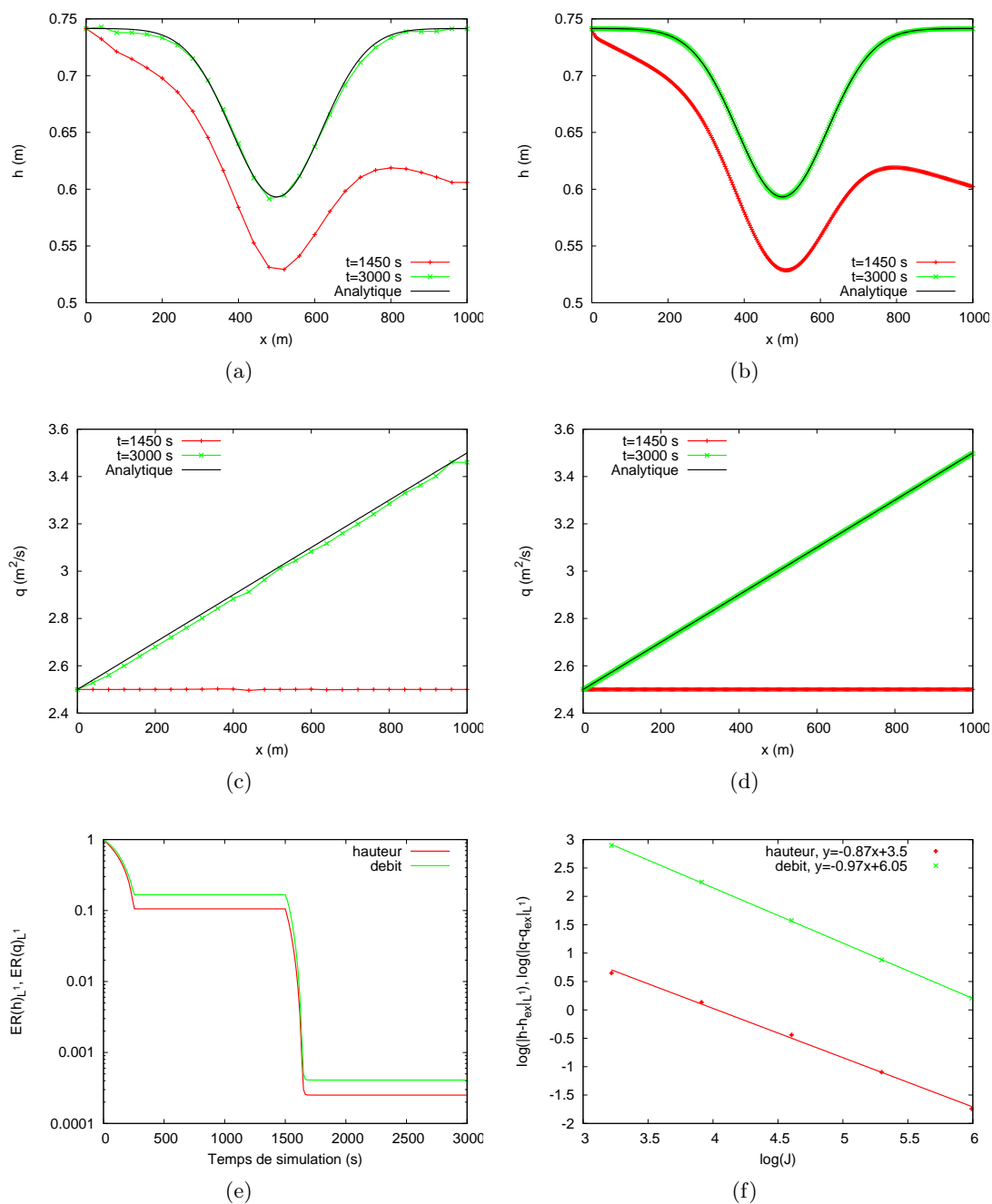


FIG. 5.8: Ecoulement torrentiel-torrentiel avec pluie et loi de Manning. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.

5.1. LA PLUIE

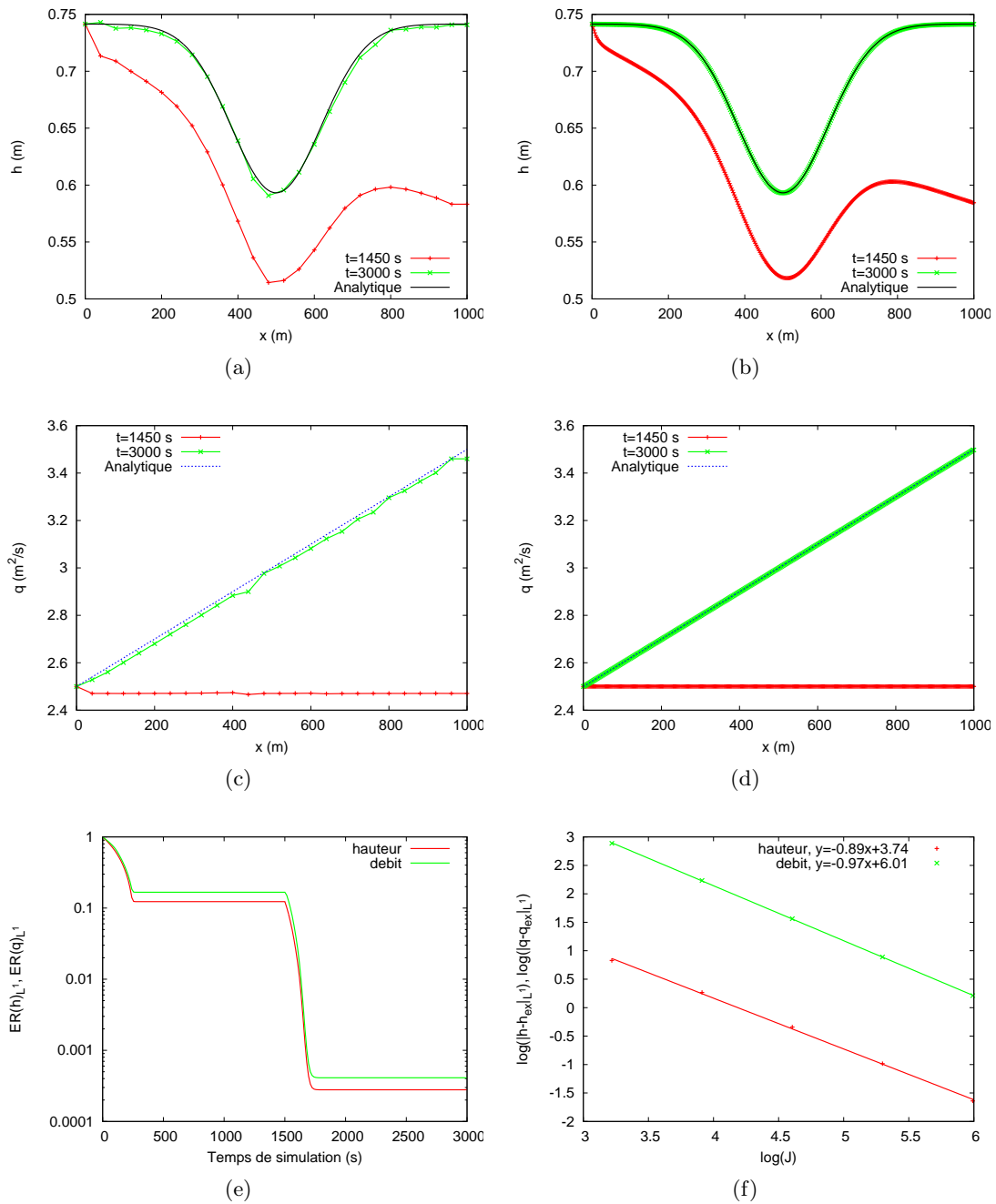


FIG. 5.9: Ecoulement torrentiel-torrentiel avec pluie et loi de Darcy-Weisbach. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.

5.1.5.3 Pluie idéale

Comme nous l'avons vu précédemment (voir la section 5.1.2), le test de la pluie idéale consiste à reconstituer l'hydrogramme observé à l'exutoire d'un canal incliné de pente constante soumis à un événement pluvieux en créneau. Ce test a été réalisé expérimentalement à l'aide du simulateur de pluie de l'INRA d'Orléans (voir le chapitre 6). Dans cette section, nous avons choisi de prendre des paramètres de simulation proches de ceux de l'expérience.

Nous considérons un canal incliné de pente constante $S_0 = 4.96\%$ (avec $\partial_x z = -S_0 < 0$), soumis à un événement pluvieux en créneau

$$P(t) = \begin{cases} 50 \text{ mm/h} & \text{si } t < 120 \text{ s} \\ 0 \text{ mm/h} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le canal est initialement sec

$$h = 0 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

La longueur du domaine est

$$L = 4 \text{ m.}$$

Nous avons utilisé une discrétisation numérique de 400 mailles. Le temps total de la simulation correspond à 250 secondes. Les simulations ont été effectuées avec la loi de Darcy-Weisbach et avec la loi de Manning. Les coefficients de frottement utilisés sont :

- pour la loi de Manning : les 16 coefficients n de 0.01 à 0.025 par pas de 0.001,
- pour la loi de Darcy-Weisbach : les 39 coefficients f de 0.02 à 0.4 par pas de 0.01.

L'objectif avec ce test est de vérifier que les résultats numériques et la solution exacte donnent les mêmes résultats pour chacune des deux lois. Nous allons aussi observer le comportement du schéma numérique en faisant varier les frottements.

Remarque : afin de permettre les comparaisons avec les données expérimentales du chapitre 6, les débits à l'exutoire ont été multipliés par la largeur du canal (0.12 m) puis convertis en g/s.

- En comparant entre eux les résultats des simulations, nous notons en particulier que :
 - lorsque le coefficient de frottement augmente, la montée de l'hydrogramme et son tarissement sont plus longs (figures 5.11a et 5.11b).
 - A l'équilibre (lors du plateau), augmenter les frottements a pour conséquence de diminuer la vitesse (figs 5.11c et 5.11d) et d'augmenter la hauteur d'eau (figs 5.11e et 5.11f).
 - Le débit à l'équilibre ($q(x) = Ix$) est parfaitement capturé (comme illustré pour la loi de Darcy-Weisbach pour différents coefficients sur la figure 5.10), et ce quels que soient la loi de frottement et son coefficient.

Nous notons aussi que les résultats numériques sont très proches des solutions analytiques (comme illustré sur les figures 5.12 a-b-c-d et e, pour la loi de Darcy-Weisbach avec $f = 0.12$ et $f = 0.34$), ce qui a été vérifié de façon systématique pour

- la loi de Darcy-Weisbach en faisant varier f entre 0.12 et 0.34 par pas de 0.02,
- la loi de Manning en faisant varier n entre 0.01 et 0.02 par pas de 0.001.

Dans Woolhiser and Liggett [1967] et Taylor et al. [1974], nous pouvons trouver le critère de validité du modèle d'approximation d'onde cinématique suivant :

5.1. LA PLUIE

Critère 5.1. Pour un écoulement à l'équilibre stationnaire, l'approximation d'onde cinématique est valable si nous avons

$$K = \frac{LS_0}{F_0^2 h_0} > 10$$

avec L la longueur du domaine and F_0 (resp. h_0) le nombre de Froude (resp. la hauteur d'eau) à l'exutoire.

Ce critère semble vérifié comme illustré sur la figure 5.12 f. Il conviendra de regarder comment ce critère est obtenu.

Enfin, en diminuant le coefficient de frottement, nous voyons se former un pic au début du plateau (fig. 5.13 a) et une augmentation du nombre de Froude (fig. 5.13 b). Quand le nombre de Froude dépasse deux, nous observons la formation d'oscillations sur le plateau (fig. 5.13 a). Nous pouvons supposer qu'il s'agit de roll-waves (voir le chapitre 4). Il faudra envisager d'étudier ce cas plus en détails.

Le test de la pluie idéale et les solutions stationnaires avec pluie (section 5.1.5.2) nous ont permis de valider notre méthode de traitement numérique avec pluie. Pour rendre notre modèle de ruissellement plus complet, nous allons nous intéresser à la prise en compte de l'infiltration de l'eau dans le sol et de son traitement numérique.

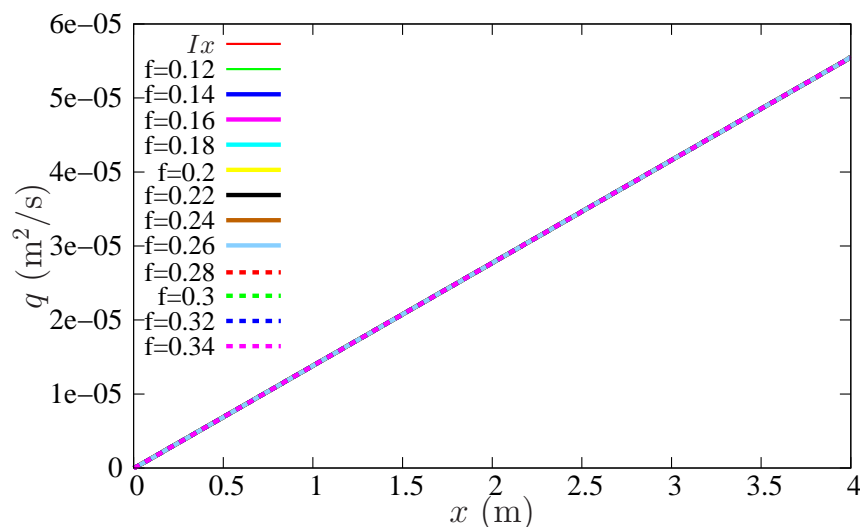


FIG. 5.10: Les débits à l'état stationnaire pour la loi de Darcy-Weisbach avec différents coefficients de frottement.

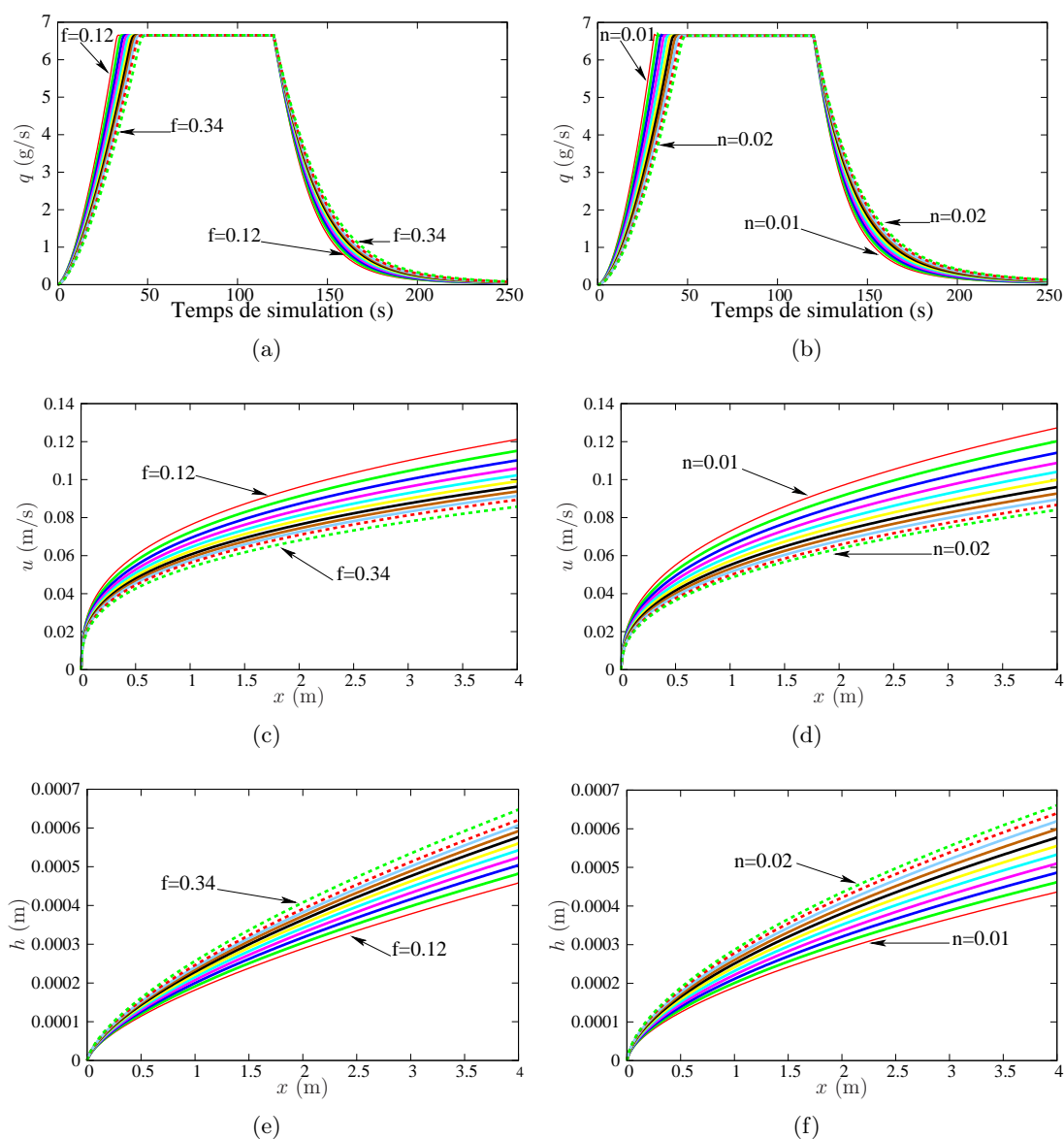


FIG. 5.11: Pluie idéale. Comparaison au cours du temps : des hydrogrammes pour la loi de (a) Darcy-Weisbach et (b) Manning et à l'équilibre : des vitesses pour la loi de (c) Darcy-Weisbach et (d) Manning et des hauteurs d'eau pour la loi de (e) Darcy-Weisbach et (f) Manning avec différents coefficients de frottement.

5.1. LA PLUIE

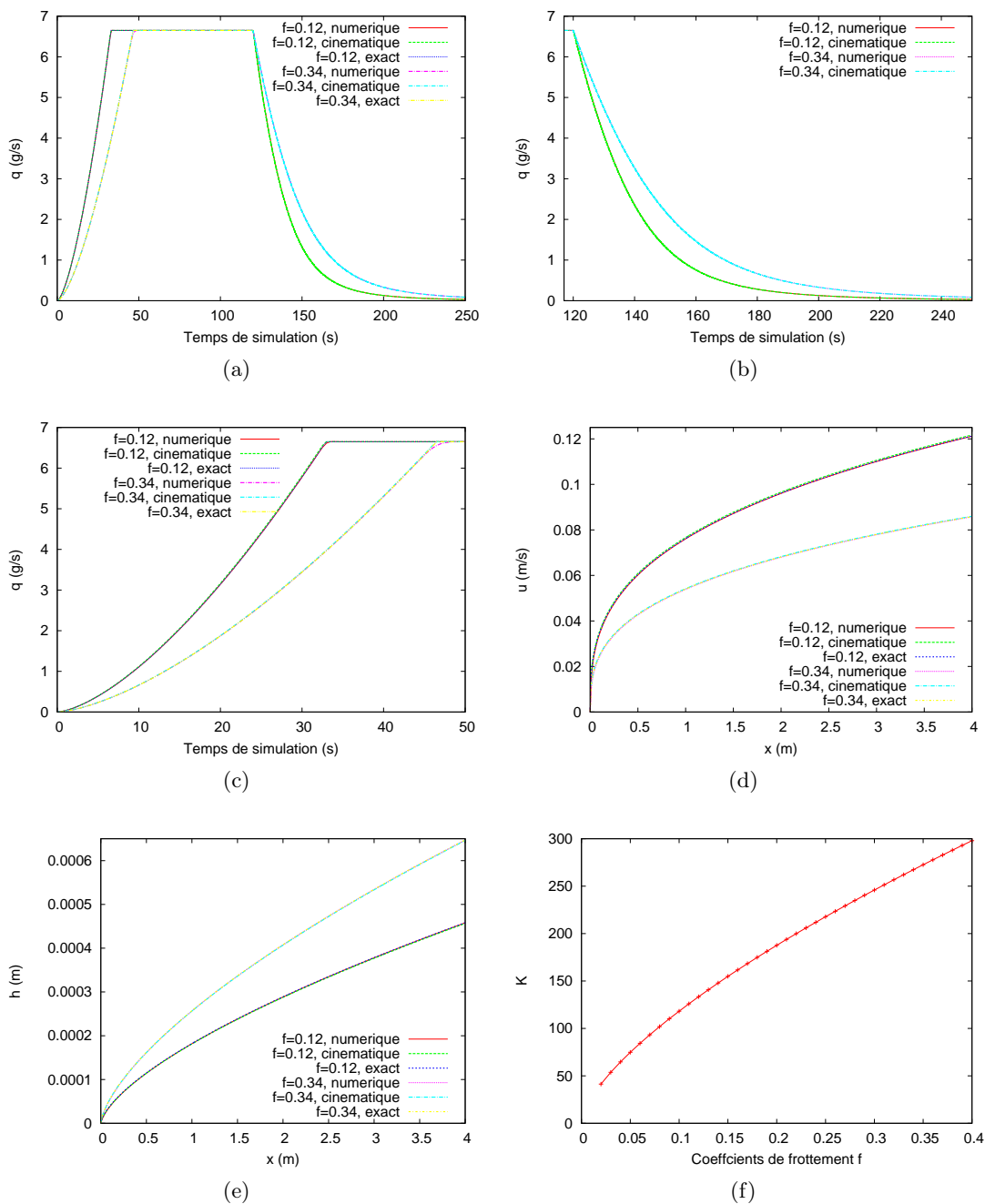


FIG. 5.12: Pluie idéale. Comparaison (a), (b) et (c) des hydrogrammes à l'exutoire, (d) des vitesses et (e) des hauteurs pour la loi de Darcy-Weisbach avec $f = 0.12$ et $f = 0.34$ et (f) vérification du critère de validité de l'approximation d'onde cinématique.

5.2. L'INFILTRATION

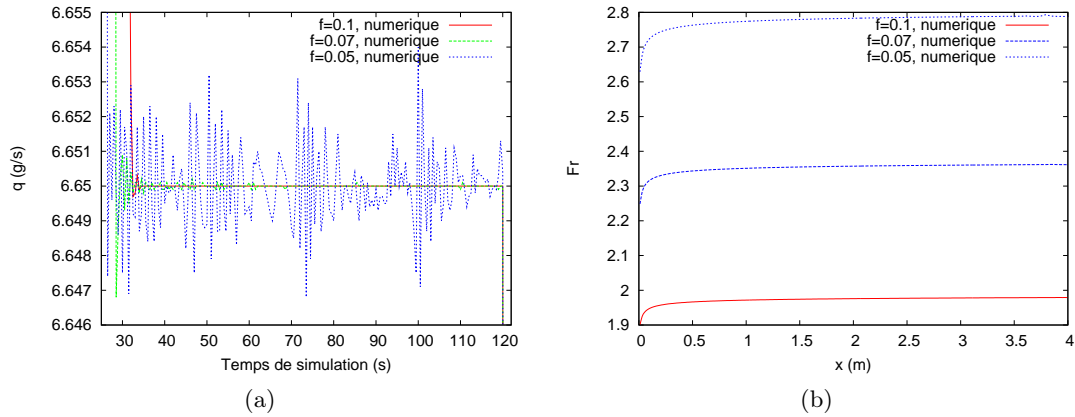


FIG. 5.13: Pluie idéale avec loi de frottement de Darcy-Weisbach : (a) zoom sur l'hydrogramme et (b) comparaison des nombres de Froude pour la phase du plateau.

5.2 L'infiltration

Dans notre modélisation du ruissellement, les phénomènes d'infiltration d'eau dans le sol doivent être pris en compte. Pour cela, nous couplons le modèle de ruissellement de surface (système de Saint-Venant) avec un modèle d'infiltration d'eau dans le sol. Nous choisissons d'utiliser le modèle de Green et Ampt (voir Green and Ampt [1911]) modifié par Mein et Larson (voir Mein and Larson [1973]) parfois appelé modèle GAML (voir Moore et al. [1981] et King et al. [1999]). Il s'agit d'un modèle d'infiltration unidimensionnel : la diffusion horizontale est négligée. Dans la littérature nous trouvons des modèles plus complets prenant en compte ce phénomène de diffusion horizontale (voir entre autres Richards [1931], Weill [2004, 2007], Weill and Patin [2009], Sochala [2008] et Sochala et al. [2009]).

Notre choix de modèle est justifié par certaines données expérimentales utilisées dans le chapitre 6. Ces données ont servi à valider le code PSEM_2D (voir Esteves et al. [2000], Nord and Esteves [2005] et Tatar et al. [2008]), code basé sur la résolution du système de Saint-Venant par le schéma de MacCormack couplé avec le modèle de Green-Ampt. Le choix de ce modèle nous permet donc d'avoir une validation de notre méthode numérique sur des données expérimentales et de la comparer avec une autre méthode numérique.

Avant de décrire le modèle, nous allons définir quelques notions puis montrer comment coupler le schéma avec un modèle d'infiltration quelconque et enfin décrire le modèle de Green-Ampt.

Nous avons les définitions suivantes :

- le taux d'infiltration $I(t)$ (m/s) est le flux en eau qui pénètre dans le sol au temps t ,
- l'infiltration cumulée $V_{inf}(t)$ (m) est le "volume" ou plutôt la hauteur d'eau infiltrée entre $t = 0$ et t :

$$V_{inf}(t) = \int_0^t I(t)dt,$$

- la capacité d'infiltration $I_C(t)$ (m/s) représente le flux en eau maximal pouvant être

5.2. L'INFILTRATION

infiltré dans le sol au temps t ,

- la conductivité hydraulique à saturation K_S (m/s) représente la valeur limite du taux d'infiltration d'un sol homogène saturé. Il s'agit d'un paramètre du modèle d'infiltration.

Notons V_{inf}^n et I_C^n les discrétisations respectives de V_{inf} et de I_C au temps t^n (I et sa discrétisation ne sont pas nécessaires pour décrire l'algorithme). Afin de résoudre notre problème de ruissellement, nous utilisons l'algorithme suivant à l'ordre 2 (valable avec toute loi d'infiltration) :

1. Résolution de l'équation de conservation de la masse

$$h^* = h^n + \Delta t(\Phi_1(U^n) + P^n)$$

2. Couplage avec l'infiltration, deux cas possibles :

- si $h^* \leq \Delta t^n I_C^n$ alors

$$h_{mod}^* = 0 \quad \text{et} \quad q_{mod}^* = 0,$$

et

$$V_{inf}^* = V_{inf}^n + h^*$$

- sinon

$$h_{mod}^* = h^* - \Delta t^n I_C^n,$$

résolution de l'équation de conservation de quantité de mouvement

$$q_{mod}^* = q^n + \Delta t \Phi_2(U^n)$$

et

$$V_{inf}^* = V_{inf}^n + \Delta t I_C^n$$

3. Résolution du terme source de frottement

$$\tilde{U}^{n+1} = S_{f \Delta t}(U_{mod}^*)$$

4. Résolution de l'équation de conservation de la masse

$$h^{**} = \tilde{h}^{n+1} + \Delta t(\Phi_1(\tilde{U}^{n+1}) + P^n)$$

5. Couplage avec l'infiltration, deux cas possibles :

- si $h^{**} \leq \Delta t^n \tilde{I}_C^{n+1}$ alors

$$h_{mod}^{**} = 0 \quad \text{et} \quad q_{mod}^{**} = 0$$

et

$$\tilde{V}_{inf}^{n+2} = V_{inf}^* + h^{**}$$

- sinon

$$h_{mod}^{**} = h^{**} - \Delta t^n \tilde{I}_C^{n+1},$$

résolution de l'équation de conservation de quantité de mouvement

$$q_{mod}^{**} = \tilde{q}^{n+1} + \Delta t \Phi_2(\tilde{U}^{n+1})$$

et

$$\tilde{V}_{inf}^{n+2} = V_{inf}^* + \Delta t I_C^*$$

5.2. L'INFILTRATION

6. Résolution du terme source de frottement

$$\tilde{U}^{n+2} = S_{f_{\Delta t}}(U_{mod}^{**}),$$

7. Mise à jour des variables par la méthode de Heun

$$U^{n+1} = \frac{U^n + \tilde{U}^{n+2}}{2} \text{ et } V_{inf}^{n+1} = \frac{V_{inf}^n + \tilde{V}_{inf}^{n+2}}{2},$$

où Φ est défini par (2.11) et P^n est l'intensité de la pluie au temps t_n . Les différents calculs de I_C (I_C^n et \tilde{I}_C^{n+1}) dépendent du modèle d'infiltration choisi.

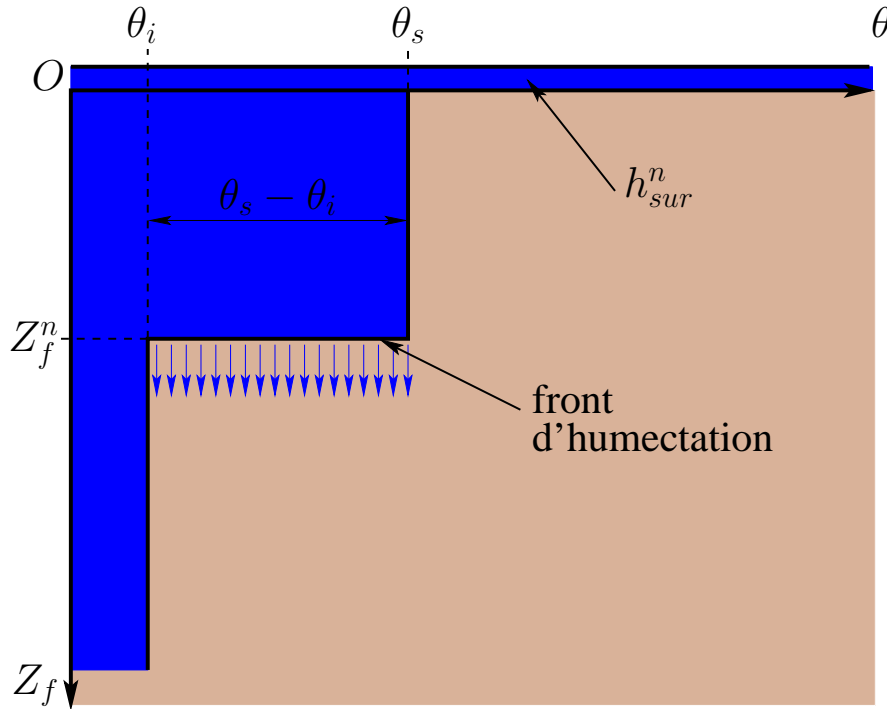


FIG. 5.14: Illustration du modèle de Green-Ampt.

Le modèle de Green-Ampt consiste à supposer que l'infiltration de l'eau dans le sol se fait avec l'avancement d'un front (situé à la profondeur Z_f^n (m)) qui sépare deux zones (voir la figure 5.14) :

- une zone totalement saturée d'humidité volumétrique θ_s
- et une zone d'humidité volumétrique initiale θ_i .

Au temps t_n , le modèle de Green-Ampt permet de calculer la capacité d'infiltration dans un sol uniforme de la façon suivante :

$$I_C^n = K_s \left(1 + \frac{h_f - h_{sur}^n}{Z_f^n} \right) \quad (5.23)$$

avec

$$Z_f^n = \frac{V_{inf}^n}{\theta_s - \theta_i} \quad (5.24)$$

et où

5.2. L'INFILTRATION

- h_f est une constante dépendant de la nature du sol (parfois notée Ψ voir le tableau 5.15), appelée la pression capillaire au front. Il s'agit de la force de succion exercée par le sol insaturé sur la colonne d'eau au niveau du front.
- $-h_{sur} > 0$ (correspond à h^* et à h^{**}) est la hauteur d'eau à la surface susceptible de s'infiltrer.
- Z_f^n au numérateur de (5.23) représente la force de gravité exercée sur la colonne d'eau dans le sol (le signe de h_{sur} est lié à l'orientation de l'axe (OZ_f)).

Nous pouvons donc écrire (5.23) sous la forme

$$I_C^n = K_s \frac{h_1^n - h_0^n}{Z_f^n} = K \frac{\Delta H}{\Delta z}$$

avec $h_1 = Z_f^n + h_f$, $h_0^n = h_{sur}^n$ et $\Delta z = Z_f^n$. Ceci permet de voir que le modèle de Green-Ampt est une approximation de la loi unidimensionnelle de Darcy

$$i = K \frac{\partial H}{\partial z}$$

qui relie la vitesse d'écoulement dans le sol i au gradient de charge.

Il est possible de trouver dans la littérature les valeurs des différents paramètres du modèle de Green-Ampt en fonction de la nature du sol (figure 5.15, voir entre autres Rawls et al. [1982], Chow et al. [1988, p.115] et Wang et al. [1997]).

Soil class	Porosity η	Effective porosity θ_e	Wetting front soil suction head ψ (cm)	Hydraulic conductivity K (cm/h)
Sand	0.437 (0.374–0.500)	0.417 (0.354–0.480)	4.95 (0.97–25.36)	11.78
Loamy sand	0.437 (0.363–0.506)	0.401 (0.329–0.473)	6.13 (1.35–27.94)	2.99
Sandy loam	0.453 (0.351–0.555)	0.412 (0.283–0.541)	11.01 (2.67–45.47)	1.09
Loam	0.463 (0.375–0.551)	0.434 (0.334–0.534)	8.89 (1.33–59.38)	0.34
Silt loam	0.501 (0.420–0.582)	0.486 (0.394–0.578)	16.68 (2.92–95.39)	0.65
Sandy clay loam	0.398 (0.332–0.464)	0.330 (0.235–0.425)	21.85 (4.42–108.0)	0.15
Clay loam	0.464 (0.409–0.519)	0.309 (0.279–0.501)	20.88 (4.79–91.10)	0.10
Silty clay loam	0.471 (0.418–0.524)	0.432 (0.347–0.517)	27.30 (5.67–131.50)	0.10
Sandy clay	0.430 (0.370–0.490)	0.321 (0.207–0.435)	23.90 (4.08–140.2)	0.06
Silty clay	0.479 (0.425–0.533)	0.423 (0.334–0.512)	29.22 (6.13–139.4)	0.05
Clay	0.475 (0.427–0.523)	0.385 (0.269–0.501)	31.63 (6.39–156.5)	0.03

FIG. 5.15: Valeurs des paramètres du modèle de Green-Ampt en fonction du type de sol (extrait de Chow et al. [1988, p.115]).

Remarque : quand le sol est saturé, nous avons $Z_f^n \gg h_f - h_{sur}^n$. Nous avons alors $I_C^n = K_s$ ce qui est en accord avec la définition de K_s (voir plus haut).

En présence d'une croûte d'épaisseur Z_c (de conductivité hydraulique K_c) au dessus d'un milieu de conductivité hydraulique K_s , une infiltration "bicouche" est réalisée en

calculant la capacité d'infiltration de la façon suivante :

$$I_C^n = \begin{cases} K_c \left(1 + \frac{h_f - h_{sur}^n}{Z_f^n} \right) & \text{si } Z_f^n \leq Z_c \\ K_e^n \left(1 + \frac{h_f - h_{sur}^n}{Z_f^n} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.25)$$

avec la conductivité hydraulique effective

$$K_e^n = \frac{Z_f^n}{[(Z_f^n - Z_c)/K_s] + Z_c/K_c}.$$

Dans la littérature, de nombreux modèles d'infiltration sont comparés (voir entre autres Al-Azawi [1985], Hsu et al. [2002], Chahinian et al. [2005] et Turner [2006]), en particulier dans Mishra et al. [2003], quatorze modèles d'infiltrations sont comparés. Dans le cas d'infiltration purement verticale le système de Green-Ampt et ses modifications (pour prendre en compte des couches du sol de nature différente) semble être suffisamment précis (voir Jia and Tamai [1997] et Liu et al. [2008]) et nécessite des temps de calcul plus courts que d'autres modèles. La modélisation d'écoulements plus complexes tels que les écoulements dans des sillons nécessite la prise en compte de la diffusion horizontale dans le modèle d'infiltration (voir Warrick et al. [2007] et Lazarovitch et al. [2009]). Pour cette raison, il faudra essayer de coupler le modèle de Saint-Venant avec des modèles d'infiltration plus complexes (voir entre autres Weill [2004, 2007], Weill and Patin [2009], Sochala [2008] et Sochala et al. [2009]).

Pour que notre modélisation du ruissellement soit complète, dans la section suivante nous nous intéressons à la généralisation de notre méthode numérique au cas bidimensionnel.

5.3 La méthode numérique bidimensionnelle

Nous pouvons écrire le système de Saint-Venant bidimensionnel (1.1) sous la forme vectorielle conservative

$$\partial_t U + \partial_x G(U) + \partial_y H(U) = S(U, t, x, y), \quad (5.26)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \\ huv \end{pmatrix} \quad H(U) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$S(U, t, x, y) = \begin{pmatrix} P - I \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix},$$

5.3. LA MÉTHODE NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNELLE

où les lois de la famille de Manning et Strickler (voir le chapitre 3.1) s'écrivent sous la forme

$$S_{f_x} = C_f \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad \text{et} \quad S_{f_y} = C_f \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}$$

et les lois de la famille de Darcy-Weisbach et Chézy (voir le chapitre 3.1) s'écrivent sous la forme

$$S_{f_x} = C_f \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{h} \quad \text{et} \quad S_{f_y} = C_f \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{h}.$$

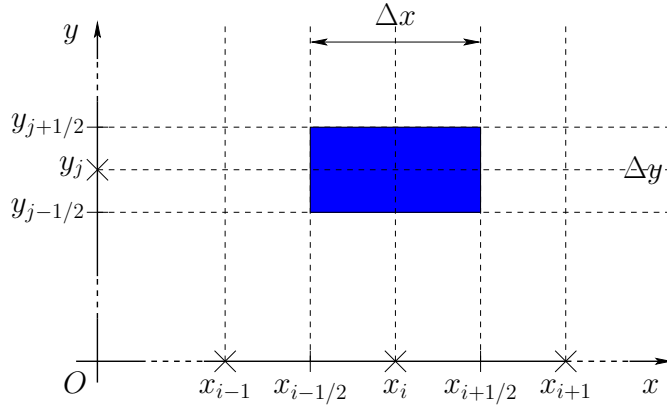


FIG. 5.16: Illustration de la discrétisation bidimensionnelle.

Après calculs, le système (5.26) s'écrit encore sous la forme

$$\partial_t U + DG_x \partial_x U + DH_y \partial_y U = S(U, t, x, y), \quad (5.27)$$

où DG_x et DH_y sont les matrices jacobiennes des flux

$$DG_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad DH_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Soit un vecteur $\xi = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et la matrice $DF(\xi) = \xi_x DG_x + \xi_y DH_y$. Il est possible de démontrer que la matrice $DF(\xi)$ admet trois valeurs propres

$$\lambda_1(\xi) = u_\xi - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2(\xi) = u_\xi, \quad \lambda_3(\xi) = u_\xi + \sqrt{gh},$$

avec $u_\xi = \xi_x u + \xi_y v$ la vitesse de l'écoulement selon ξ . Pour $h > 0$, les valeurs propres vérifient

$$\lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \lambda_3(\xi),$$

le système (5.26) est donc strictement hyperbolique en dehors des zones sèches.

Nous avons fait le choix d'utiliser un maillage structuré. Le domaine selon la direction de l'axe (Ox) est découpé en mailles de taille Δx d'indice i et en mailles de taille Δy d'indice j selon (Oy) (voir la figure 5.16).

5.3. LA MÉTHODE NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNELLE

Le schéma aux volumes finis bidimensionnel d'ordre 1 sur un maillage structuré s'écrit

$$U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(G_{i+1/2G,j}^n - G_{i-1/2D,j}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta y}(H_{i,j+1/2G}^n - H_{i,j-1/2D}^n) = 0$$

avec

$$\begin{aligned} G_{i-1/2D,j}^n &= \mathcal{G}(U_{i-1/2G,j}^n, U_{i-1/2D,j}^n) + S_{i-1/2D,j} \\ G_{i+1/2G,j}^n &= \mathcal{G}(U_{i+1/2G,j}^n, U_{i+1/2D,j}^n) + S_{i+1/2G,j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_{i,j-1/2D}^n &= \mathcal{H}(U_{i,j-1/2G}^n, U_{i,j-1/2D}^n) + S_{i,j-1/2D} \\ H_{i,j+1/2G}^n &= \mathcal{H}(U_{i,j+1/2G}^n, U_{i,j+1/2D}^n) + S_{i,j+1/2G} \end{aligned}$$

où \mathcal{G} et \mathcal{H} sont les flux numériques pour la résolution du système homogène (analogue de \mathcal{F} en une dimension, voir le chapitre 1.2.1). Pour le système de Saint-Venant monodimensionnel (1.7), le flux s'écrit

$$F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Les composantes de ce flux sont communes aux deux premières composantes du flux G et à la première et dernière composante du flux H . Ainsi, les deux premières composantes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 de \mathcal{G} (respectivement la première \mathcal{H}_1 et la dernière \mathcal{H}_3 de \mathcal{H}) sont calculées comme les composantes de \mathcal{F} en faisant attention aux variables utilisées. La dernière composante \mathcal{G}_3 de \mathcal{G} (respectivement la deuxième \mathcal{H}_2 de \mathcal{H}) est traitée comme dans Marche [2005, p.144] et Marche et al. [2007], c'est à dire

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3(U_{i+1/2G,j}^n, U_{i+1/2D,j}^n) &= v_{i+1/2,j}^n \mathcal{G}_1(U_{i+1/2G,j}^n, U_{i+1/2D,j}^n) \\ \mathcal{H}_2(U_{i,j+1/2G}^n, U_{i,j+1/2D}^n) &= u_{i,j+1/2}^n \mathcal{H}_1(U_{i,j+1/2G}^n, U_{i,j+1/2D}^n) \end{aligned}$$

où

$$v_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} v_{i+1/2G,j}^n & \text{si } \tilde{u} > 0 \\ v_{i+1/2D,j}^n & \text{si } \tilde{u} \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} u_{i,j+1/2G}^n & \text{si } \tilde{v} > 0 \\ u_{i,j+1/2D}^n & \text{si } \tilde{v} \leq 0 \end{cases}$$

avec

$$\tilde{u} = \frac{u_{i+1/2G,j}^n + u_{i+1/2D,j}^n}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{v} = \frac{v_{i,j+1/2G}^n + v_{i,j+1/2D}^n}{2}.$$

Comme dans le cas unidimensionnel, la préservation des états d'équilibre nécessite la discrétisation du terme source suivante dans la direction (Ox) (voir le chapitre 2)

$$S_{i+1/2G,j} - S_{i-1/2D,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{(h_{i-1/2D,j}^n)^2 - (h_{i+1/2G,j}^n)^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et son analogue selon (Oy)

$$S_{i,j+1/2G} - S_{i,j-1/2D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \frac{(h_{i,j-1/2D}^n)^2 - (h_{i,j+1/2G}^n)^2}{2} \end{pmatrix},$$

5.3. LA MÉTHODE NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNELLE

où les variables $U_{G, \cdot}$ et $U_{D, \cdot}$ (respectivement $U_{G, \cdot}$ et $U_{D, \cdot}$) sont obtenues par reconstruction hydrostatique (comme dans le chapitre 2) dans la direction (Ox) (respectivement (Oy)).

La montée en ordre du schéma se fait comme pour le cas monodimensionnel :

- reconstruction des variables (MUSCL, ENO ou ENO modifiée) pour l'ordre 2 en espace, sans oublier les termes centrés $Gc_{i,j}^n$ et $Hc_{i,j}^n$ (analogues de (2.10) en une dimension),
- et la méthode de Heun (2.12) pour l'ordre 2 en temps.

Comme nous l'avons choisi au chapitre 3, les frottements sont traités en semi-implicite. Pour la loi de Manning, nous avons

$$h_{i,j}^* \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^*}{\Delta t} \right) = -gn^2 \frac{qx_{i,j}^{n+1} \|\vec{q}_{i,j}^n\|}{h_{i,j}^n (h_{i,j}^{n+1})^{4/3}}$$

et

$$h_{i,j}^* \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^*}{\Delta t} \right) = -gn^2 \frac{qy_{i,j}^{n+1} \|\vec{q}_{i,j}^n\|}{h_{i,j}^n (h_{i,j}^{n+1})^{4/3}},$$

avec

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} qx \\ qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hu \\ hv \end{pmatrix}$$

et

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{qx^2 + qy^2}.$$

Et pour la loi de Darcy-Weisbach, nous avons

$$h_{i,j}^* \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^*}{\Delta t} \right) = -\frac{f}{8} \frac{qx_{i,j}^{n+1} \|\vec{q}_{i,j}^n\|}{h_{i,j}^n h_{i,j}^{n+1}}$$

et

$$h_{i,j}^* \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^*}{\Delta t} \right) = -\frac{f}{8} \frac{qy_{i,j}^{n+1} \|\vec{q}_{i,j}^n\|}{h_{i,j}^n h_{i,j}^{n+1}}.$$

Enfin les termes de pluie et d'infiltration sont traités comme dans les sections précédentes de ce chapitre.

Maintenant que notre modèle de ruissellement est complet et que la méthode numérique est généralisée au cas bidimensionnel, nous devons valider notre méthode sur des données expérimentales.

Chapitre 6

Expérimental

Dans les chapitres précédents, nous avons effectué la validation de notre méthode numérique sur différents cas tests analytiques en une dimension. Ceci nous a permis de choisir une méthode numérique pour la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. L'objectif de ce chapitre est de valider notre méthode numérique appliquée sur trois jeux de mesures expérimentales différents que nous détaillons dans les sections suivantes :

- Le premier jeu de mesures expérimentales, obtenues à l'unité de Science du Sol de l'INRA d'Orléans en août 2005, est composé de mesures de la pluie et des débits à l'exutoire d'un canal incliné (expérience de la pluie idéale : voir le chapitre 5).
- Le deuxième jeu de mesures expérimentales, obtenues au Niger en 1994 par l'IRD sur deux parcelles différentes, est composé de mesures de la pluie, de l'humidité du sol et des débits à l'exutoire.
- Le deuxième jeu de mesures expérimentales, effectuées à Thies au Sénégal le 28 juin 2004 par l'IRD, est composé de la mesure du débit à l'exutoire et de la mesure des vitesses en 54 points de la parcelle ce qui est rare et important. Les mesures des vitesses en plus du débit permettent d'effectuer un calage plus rigoureux des différents paramètres du modèle considéré.

Dans tout ce chapitre, nous utilisons la méthode numérique choisie dans les chapitres précédents : un schéma aux volumes finis avec reconstruction hydrostatique, avec le flux HLL, reconstruction MUSCL, traitement semi-implicite des frottements et traitement explicite du terme de pluie (pour le ruissellement de surface) couplé avec le modèle de Green-Ampt (pour les phénomènes d'infiltration).

6.1 Pluie idéale - Etape 0

Le premier jeu de mesures consiste à reproduire expérimentalement le test de la pluie idéale décrit dans le chapitre 5.1.2. Ces mesures ont été effectuées en août 2005, à l'unité de Science du Sol de l'INRA et constituent "l'étape 0"¹ du projet ANR METHODE².

Les pluies ont été simulées expérimentalement à l'aide du simulateur de pluie de l'INRA

¹<http://methode.netcipia.net/xwiki/bin/view/Donnees/Etape0>

²#ANR-07-BLAN-0232

6.1. PLUIE IDÉALE - ETAPE 0



FIG. 6.1: Dispositif expérimental. (a) Le canal et (b) Les gicleurs (photos de l'unité Science du sol de l'INRA d'Orléans).

d'Orléans. Le système de rampe de gicleurs oscillants (figure 6.1b) permet d'obtenir une pluie uniforme au niveau du canal (figure 6.1a). Différents paramètres ont été utilisés : rugosité du fond du canal, pente du canal et intensité de la pluie. Le débit à l'exutoire aval a été mesuré à l'aide d'une balance électronique.

Dans ce travail, nous nous focalisons sur la configuration suivante

- durée de l'expérience 250 s.
- Un canal à fond lisse, de longueur : $L_c = 4$ m (de longueur projetée L), de largeur : $l = 0.12$ m, de pente : $S_0 = 4.96\%$ et initialement sec

$$h = 0 \text{ m} \quad \text{et} \quad q = 0 \text{ m}^2/\text{s}.$$

- L'événement pluvieux (sans apport en amont)

$$P(t) = \begin{cases} 50.76 \text{ mm/h} & \text{si } (x, t) \in [0, L - 0.05 \text{ m}] \times [5, 125 \text{ s}] \\ 0 \text{ mm/h} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par rapport au test de pluie idéale décrit au chapitre 5.1.2, la pluie ne commence qu'au bout de cinq secondes et il n'y a pas de pluie sur les cinq derniers centimètres du domaine (figure 6.2a).

Cinq pluies ont été simulées expérimentalement à l'aide du dispositif expérimental du simulateur de pluie de l'INRA d'Orléans représenté sur la figure 6.1. L'intensité de la pluie et l'hydrogramme de la figure 6.2b sont obtenus en effectuant la moyenne des mesures de chacun des événements, ce qui permet de réduire les erreurs faites sur les mesures.

Les simulations de cette section ont été effectuées avec une variante des codes fortran utilisés dans les chapitres précédents.

Nous avons utilisé des mailles de taille $\Delta x = 0.01$ m. Le temps total de la simulation correspond à 250 secondes. Les simulations ont été effectuées avec la loi de Darcy-Weisbach et avec la loi de Manning. Les coefficients de frottement utilisés sont :

- pour la loi de Manning : les 9 coefficients n de 0.008 à 0.016 par pas de 0.001,

6.1. PLUIE IDÉALE - ETAPE 0

– pour la loi de Darcy-Weisbach : les 9 coefficients f de 0.1 à 0.18 par pas de 0.01. L’objectif avec cette expérience est de voir si il est possible de caler le modèle sur les résultats expérimentaux et de comparer les résultats donnés pour chacune des deux lois.

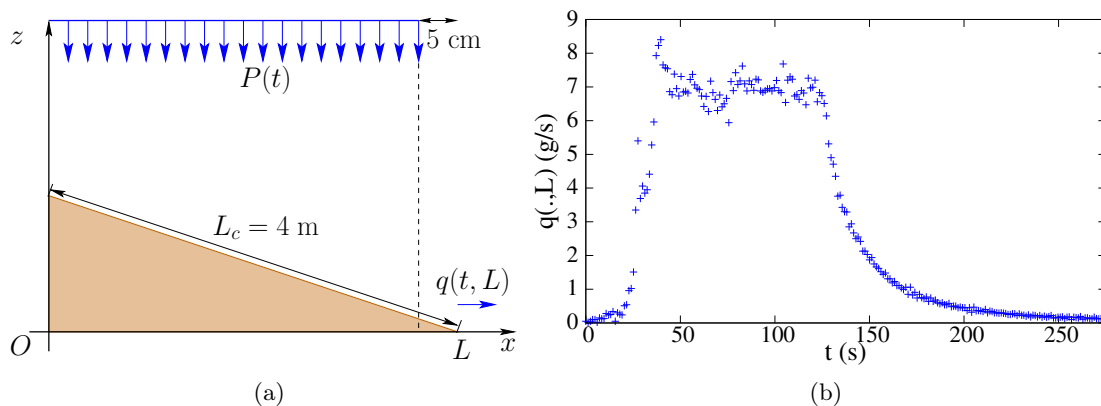


FIG. 6.2: Test de la pluie idéale : (a) Configuration et (b) hydrogramme mesuré en $x = L$.

En utilisant dans nos simulations l’intensité de pluie mesurée (50.76 mm/h), nous obtenons une sous-estimation systématique du niveau du plateau de l’hydrogramme (comme illustré pour la loi de Darcy-Weisbach sur la figure 6.4a) et il en est de même pour le débit cumulé au cours du temps à l’exutoire (figure 6.4b). Ainsi, nous avons repris les simulations avec une intensité de 52 mm/h. Le niveau du plateau est mieux capturé (figures 6.4c et 6.4e). Le volume d’eau sorti à l’exutoire simulé correspond plus à celui mesuré (6.4d et 6.4f). Il ne semble pas possible de caler le modèle sur la totalité de l’hydrogramme : en effet avec la loi de Manning, il semble possible de trouver un coefficient de frottement permettant de caler la descente de l’hydrogramme. Mais nous ne parvenons pas à voir une montée de l’hydrogramme correcte. Plusieurs explications peuvent être avancées :

- les lois de Manning et de Darcy-Weisbach représentent mal la réalité pour cette phase de l’hydrogramme. Il est sûrement nécessaire de prendre en compte les frottements supplémentaires dus à la pluie (voir entre autres Yu and McNown [1964], Yoon and Wenzel [1971], Muzik [1974], Savat [1977], Panday and Huyakorn [2004], Smith et al. [2007] et Li [2009]). Yoon and Wenzel [1971] mesurent des profils verticaux de vitesses (voir la figure 6.5) et constatent que la pluie rajoute des frottements à la surface du fluide. Au contraire, certains (voir Charbeneau et al. [2009]) concluent que ces frottements sont négligeables. Dans Savat [1977], il est observé que les frottements dus à la pluie diminuent avec l’augmentation du débit de l’écoulement ou de la pente de la topographie.
- L’hydrophobicité du canal pourrait être mise en cause. Depuis, d’autres simulations ont été effectuées sur des canaux hydrophiles.
- Enfin les faibles hauteurs d’eau simulées nécessitent peut être la prise en compte des effets de tension de surface. Pour répondre à cette question nous pouvons calculer le nombre de Weber (voir Dunkerley [2002])

$$We = \frac{\rho u^2 h}{\sigma},$$

6.1. PLUIE IDÉALE - ETAPE 0

avec

$$\begin{aligned}\rho &= 998,7 \text{ kg/m}^3, \text{ la densité de l'eau,} \\ \sigma &= 73.10^{-3} \text{ joules/m}^2, \text{ la tension de surface.}\end{aligned}$$

Ce nombre sans dimension donne le rapport entre les forces d'inertie et les les forces de tension de surface. Si nous avons $We < 1$ alors les forces de tension de surface sont non-négligeables. Lors de nos simulations, nous avons calculé le nombre de Weber à différents instants et nous constatons qu'il est plus petit que 1 (comme pour illustré sur la figure 6.3 pour la loi de Manning avec $n = 0.013$).

Ce test soulève des problèmes qui sont liés à la modélisation : le modèle actuel ne prend pas en compte certains phénomènes. Depuis la réalisation de ces expériences, l'étape 0 a été complétée par une autre série de mesures comprenant les mesures de vitesses et de hauteurs d'eau. Ces mesures supplémentaires nous aiderons peut-être à choisir un modèle adapté à ce test.

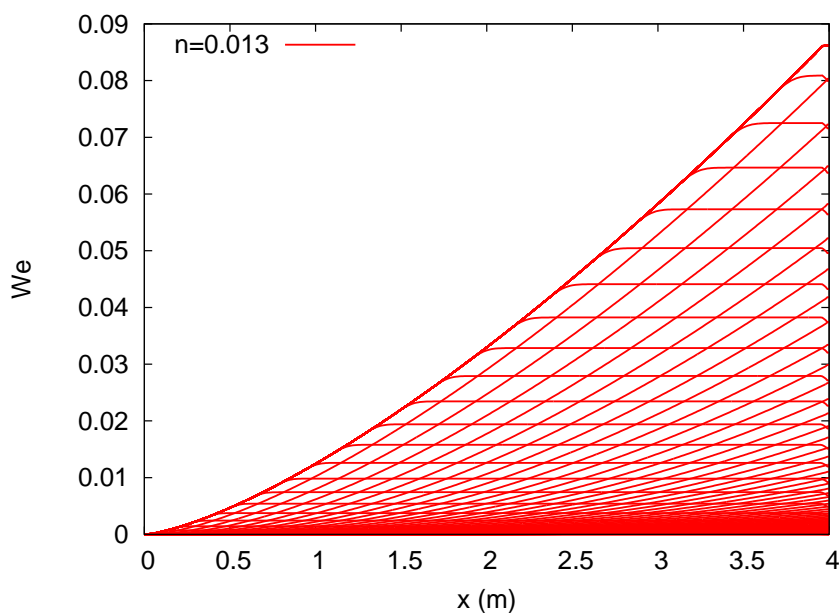


FIG. 6.3: Pluie idéale : Evolution du nombre de Weber au cours du temps pour la loi de Manning avec $n = 0.013$.

Dans les sections suivantes, nous allons nous intéresser à la validation de notre méthode numérique sur des données expérimentales bidimensionnelles.

6.1. PLUIE IDÉALE - ETAPE 0

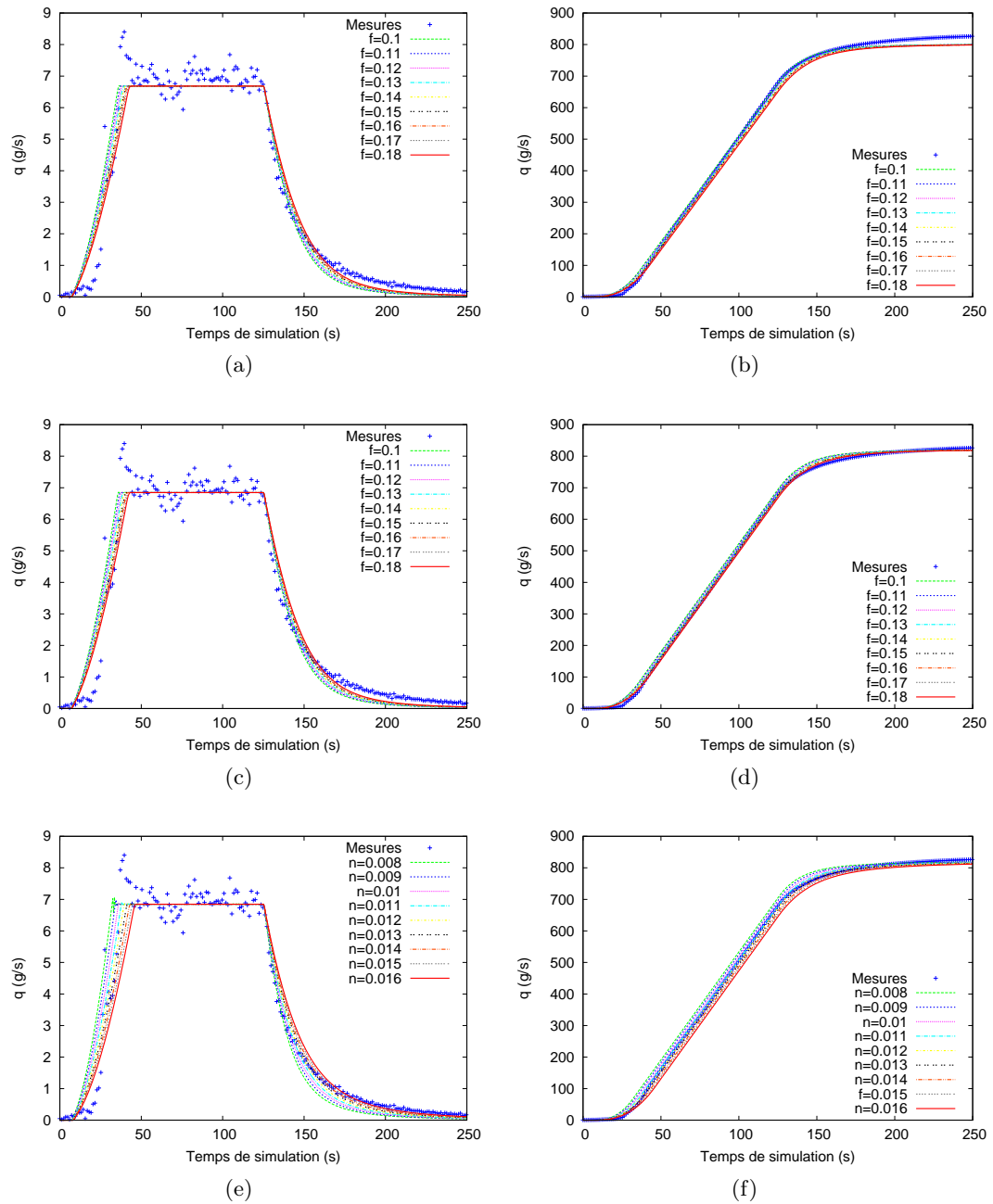


FIG. 6.4: Test de la pluie idéale. Frottement de Darcy-Weisbach et pluie de 50.76 mm/h : (a) débit à l'exutoire et (b) débit cumulé. Frottement de Darcy-Weisbach et pluie de 52 mm/h : (c) débit à l'exutoire et (d) débit cumulé. Frottement de Manning et pluie de 52 mm/h : (e) débit à l'exutoire et (f) débit cumulé.

6.1. PLUIE IDÉALE - ETAPE 0

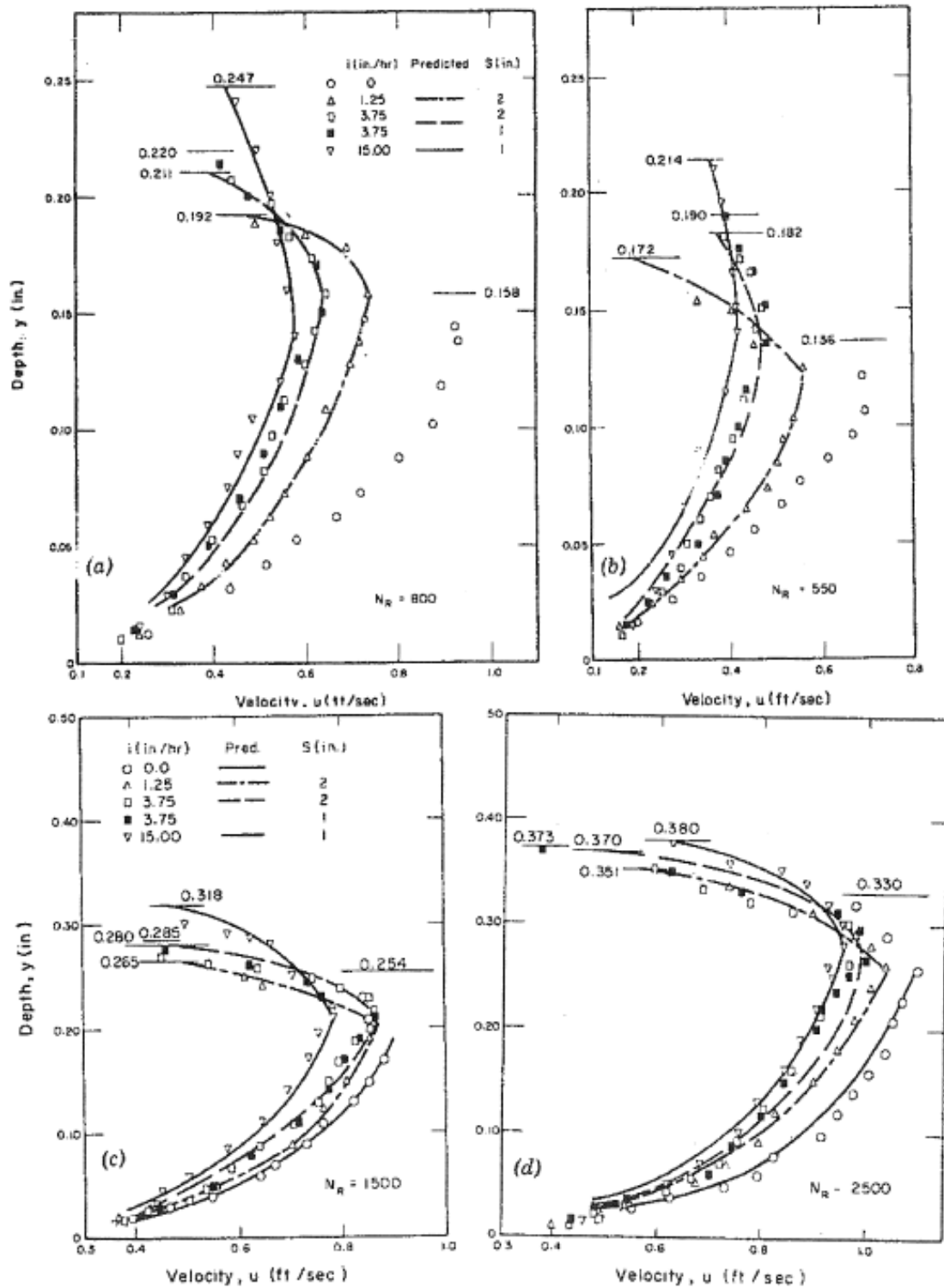


FIG. 6.5: Illustration des frottements supplémentaires à la surface de l'écoulement dus à la pluie à l'aide de profils de vitesses (extrait de Yoon and Wenzel [1971]).

6.2 Parcelles JAC et ERO (1994)

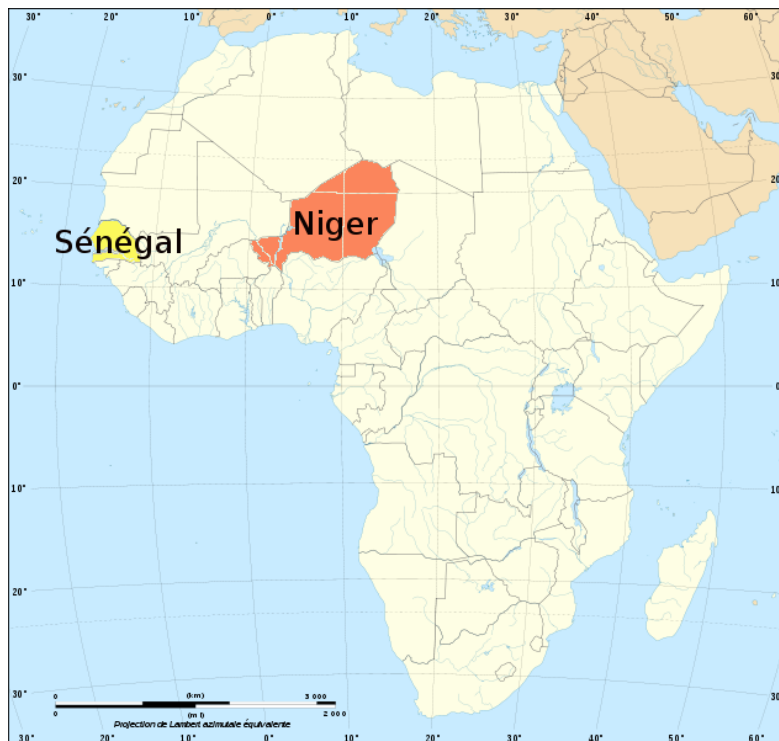


FIG. 6.6: Sénégal et Niger.

Le deuxième jeu de mesures expérimentales a été mis à notre disposition par Michel Esteves³. Ce jeu de mesures, effectuées au Niger (figure 6.6) en 1994 par l'IRD, est composé de mesures de la pluie, de l'humidité du sol et du ruissellement sur deux parcelles : ERO et JAC (voir figures 6.7 a-b et 6.7 c-d). Ces mesures ont été effectuées dans le cadre de l'expérience HAPEX-Sahel (Hydrology and Atmosphere Pilot EXperiment, voir Desconnets et al. [1996], Peugeot et al. [1997] et Esteves and Lapetite [2003]) dont l'objectif était de déterminer à différentes échelles d'espace (de 1 m² à quelques dizaines d'hectares) et de temps (de la minute à l'année), la formation du ruissellement en fonction des états de surfaces identifiés dans cette région du Niger et de voir comment ces écoulements rejoignaient les cours d'eau temporaires. Concernant les types de sols rencontrés, il y a essentiellement trois grandes unités (voir Desconnets et al. [1996] et Esteves and Lapetite [2003])

- un sol nu,
- un glaciis sableux en jachère
- et un glaciis sableux cultivé (champ de mil).

Les mesures effectuées sur les parcelles JAC et ERO, ont permis précédemment la validation du code PSEM_2D⁴ (voir Esteves et al. [2000]). La méthode utilisée pour valider PSEM_2D consiste à effectuer le calage des coefficients de frottement, d'infiltration, ... afin d'obtenir des débits numériques les plus proches possibles des débits mesurés. Ce code est

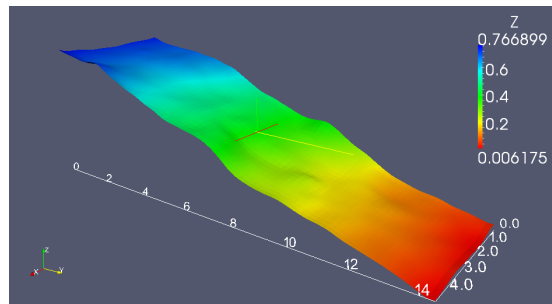
³Laboratoire d'étude des Transferts en Hydrologie Environnement (Grenoble), IRD

⁴Plot Soil Erosion Model 2D

6.2. PARCELLES JAC ET ERO (1994)



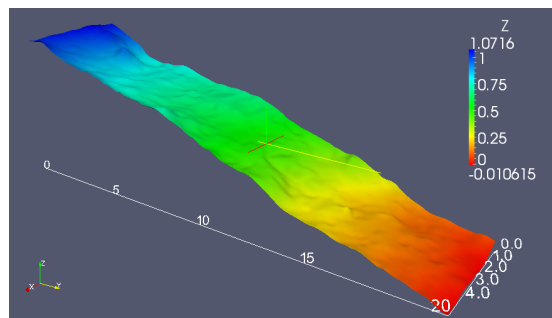
(a)



(b)



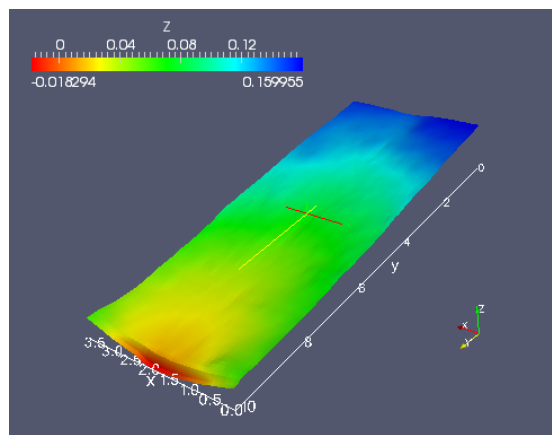
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 6.7: Parcelle (a)-(b) ERO au Niger, (c)-(d) JAC au Niger et (e)-(f) de Thies au Sénégal.

basé sur le schéma de Mac Cormack afin de résoudre le système de Saint-Venant (pour plus de détails voir Esteves et al. [2000] et Nord and Esteves [2005]). Puisque ce code est basé sur le même modèle que celui que nous utilisons, nous reprenons les paramètres obtenus pour PSEM_2D (coefficients de frottements, paramètres d'infiltration, ...). Ceci nous permet de valider notre méthode numérique sur des mesures expérimentales et de comparer nos résultats avec ceux obtenus à l'aide d'une autre méthode numérique.

Dans ce qui suit nous décrivons les caractéristiques de chacune des deux parcelles et nous analysons les résultats numériques obtenus avec notre méthode numérique.

6.2.1 Parcelle ERO

La parcelle ERO (figures 6.7a et 6.7b) est une parcelle de sol nu recouverte par une croûte de type érosion de longueur $L = 14.25$ m, de largeur $l = 5$ m, de pente maximale 0.12 selon (Ox) et 0.21 selon (Oy). Les paramètres utilisés pour le modèle de Green-Ampt et le coefficient de frottement de la loi de Darcy-Weisbach sont donnés dans le tableau 6.1.

Propriétés de la surface		Propriétés du sol	
Nature	Erosion	Type de sol	Sable limoneux
Z_c (m)	0.005	θ_s	0.296
h_f (m)	1.3795	h_f (m)	1.3795
K_s (m/s)	1.7E-8	K_s (m/s)	2.15E-5
f	0.25		

TAB. 6.1: Paramètres utilisés pour la parcelle ERO.

Le maillage utilisé est régulier avec $\Delta x = \Delta y = 0.2$ m. Les conditions de bords sont

- des bords fermés en amont et sur les cotés de la parcelle
- et une sortie ouverte à l'exutoire.

Tous les calculs de cette section et des sections suivantes ont été effectués à l'aide du logiciel FullSWOF_2D, un code orienté objet en C++ (pour plus de détails voir le chapitre 7).

Pour cette parcelle, nous avons eu à notre disposition

- douze événements pluvieux,
- les débits mesurés à l'exutoire,
- les hauteurs d'eau infiltrées au milieu de la parcelle à l'aide d'une sonde à neutron,
- les calages et les résultats obtenus avec le logiciel PSEM_2D (présentés dans Esteves et al. [2000]).

Dans Esteves et al. [2000], le calage des paramètres a été effectué sur l'événement du 10 août 1994.

Pour analyser nos résultats (comme dans Esteves et al. [2000]), nous avons calculé le nombre de Nash et Sutcliffe (voir Nash and Sutcliffe [1970])

$$NS = 1 - \frac{\sum_{n=0}^M (Q_n - Q_n^s)^2}{\sum_{n=0}^M (Q_n - \bar{Q}_n)^2}$$

avec

6.2. PARCELLES JAC ET ERO (1994)

- Q_n le débit mesuré à l'exutoire au temps t_n et \bar{Q}_n sa moyenne,
- Q_n^s le débit simulé à l'exutoire au temps t_n .

Plus NS est proche de 1, meilleurs sont les résultats.

Sur les figures 6.8 et 6.9 sont représentés les hyétogrammes et les hydrogrammes mesurés et simulés numériquement à l'aide de FullSWOF_2D. La figure 6.10 représente des grandeurs (la hauteur d'eau infiltrée au milieu simulées au milieu de la parcelle, le temps de début de ruissellement, le temps d'obtention des pics de ruissellement et la valeur de ces pics) simulées par les logiciels FullSWOF_2D et PSEM_2D en fonction des valeurs mesurées.

Les résultats numériques obtenus avec FullSWOF_2D sont assez proches de ceux observés, les formes complexes des hydrogrammes sont correctement attrapées par notre méthode numérique (figures 6.8 et 6.9). Ceci est confirmé par les nombres de Nash-Sutcliffe (voir le tableau 6.2). Sur ces événements, FullSWOF_2D et PSEM_2D semblent donner des résultats très proches (voir le tableau 6.2 et la figure 6.10). Les deux méthodes numériques sous-estiment de manière systématique le temps de début de ruissellement (figure 6.9c). Les pics de ruissellement sont obtenus au bon moment (figure 6.10c), mais la valeur de ces pics est de manière générale surestimée par les deux méthodes (figure 6.10d). Enfin les hauteurs d'eau infiltrées sont assez bien calculées (figure 6.10a).

Événement	Date	θ_i	NS FullSWOF_2D	NS PSEM_2D
1	20 Juillet 1994	0.048	0.85	0.854
2	21 Juillet 1994	0.103	0.748	0.661
3	07 Août 1994	0.1	0.839	0.9
4	10 Août 1994	0.106	0.873	0.896
5	20 Août 1994	0.067	0.618	0.625
6	20 Août 1994 2	0.095	0.618	0.896
7	24 Août 1994	0.088	0.843	0.883
8	25 Août 1994	0.085	0.922	0.885
9	04 Septembre 1994	0.082	0.928	0.928
10	08 Septembre 1994	0.082	0.605	0.460
11	12 Septembre 1994	0.07	0.755	0.738
12	16 Septembre 1994	0.061	0.661	0.662

TAB. 6.2: Parcelle ERO : humidité initiale du sol et résultats obtenus pour les douze événements pluvieux.

6.2. PARCELLES JAC ET ERO (1994)

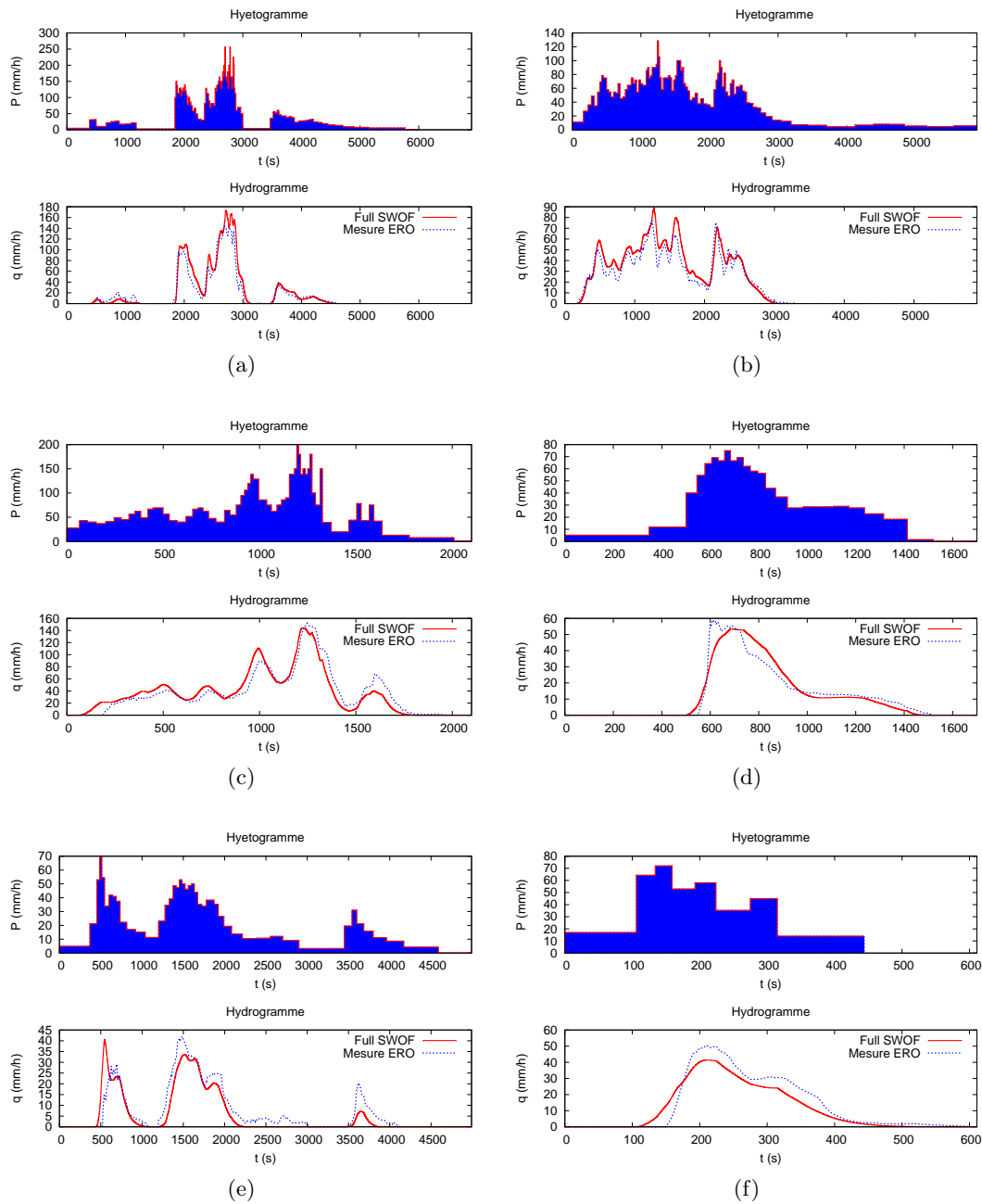


FIG. 6.8: Parcelle ERO : hyétogrammes et hydrogrammes du (a) 20 juillet 1994, (b) 21 juillet 1994, (c) 07 août 1994, (d) 10 août 1994, (e) 20 août 1994 et du (f) 20 août 1994 pour la loi de Darcy-Weisbach.

6.2. PARCELLES JAC ET ERO (1994)

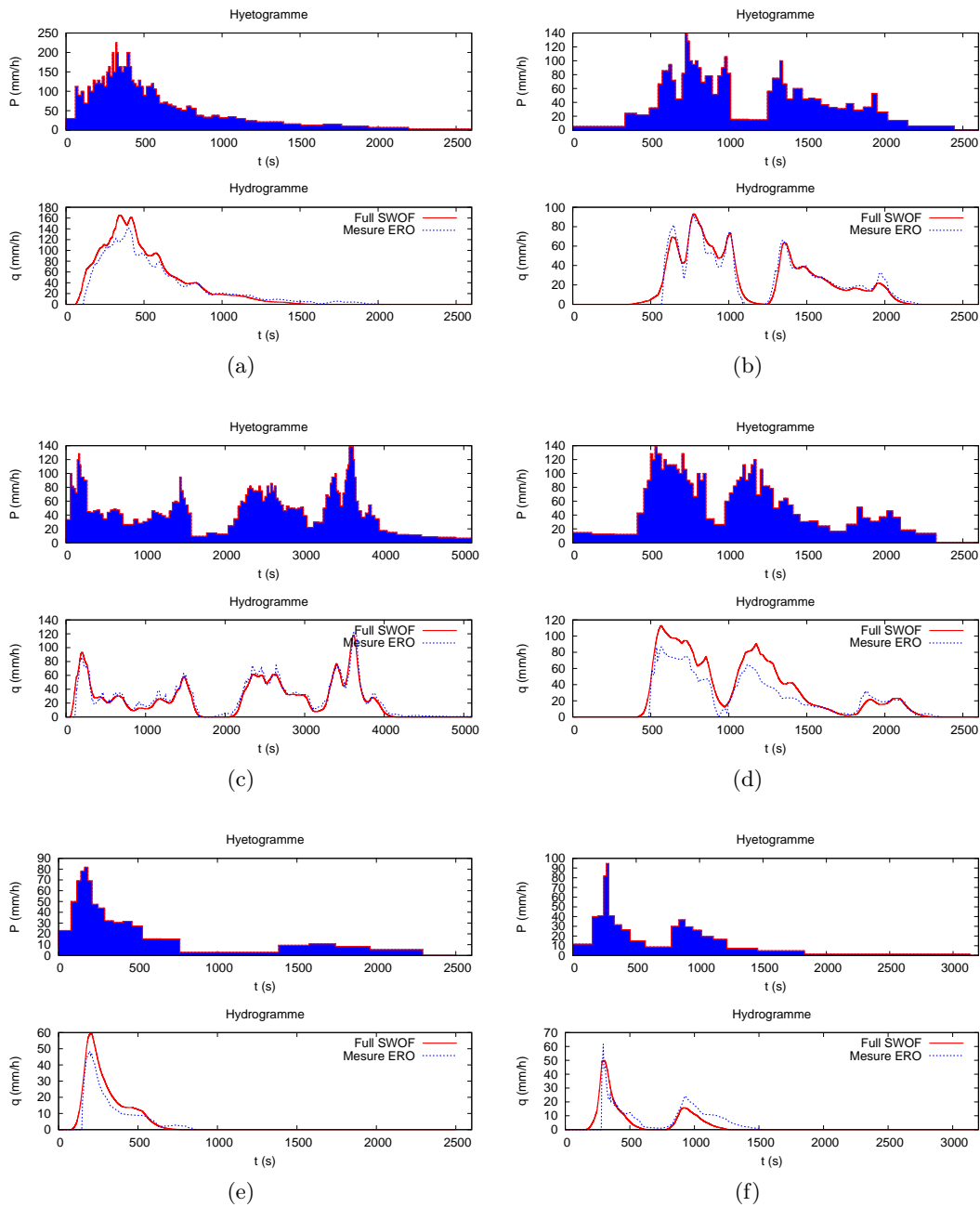


FIG. 6.9: Parcelle ERO : hyétogrammes et hydrogrammes du (a) 24 août 1994, (b) 25 août 1994, (c) 04 septembre 1994, (d) 08 septembre 1994, (e) 12 septembre 1994 et du (f) 16 septembre 1994 pour la loi de Darcy-Weisbach.

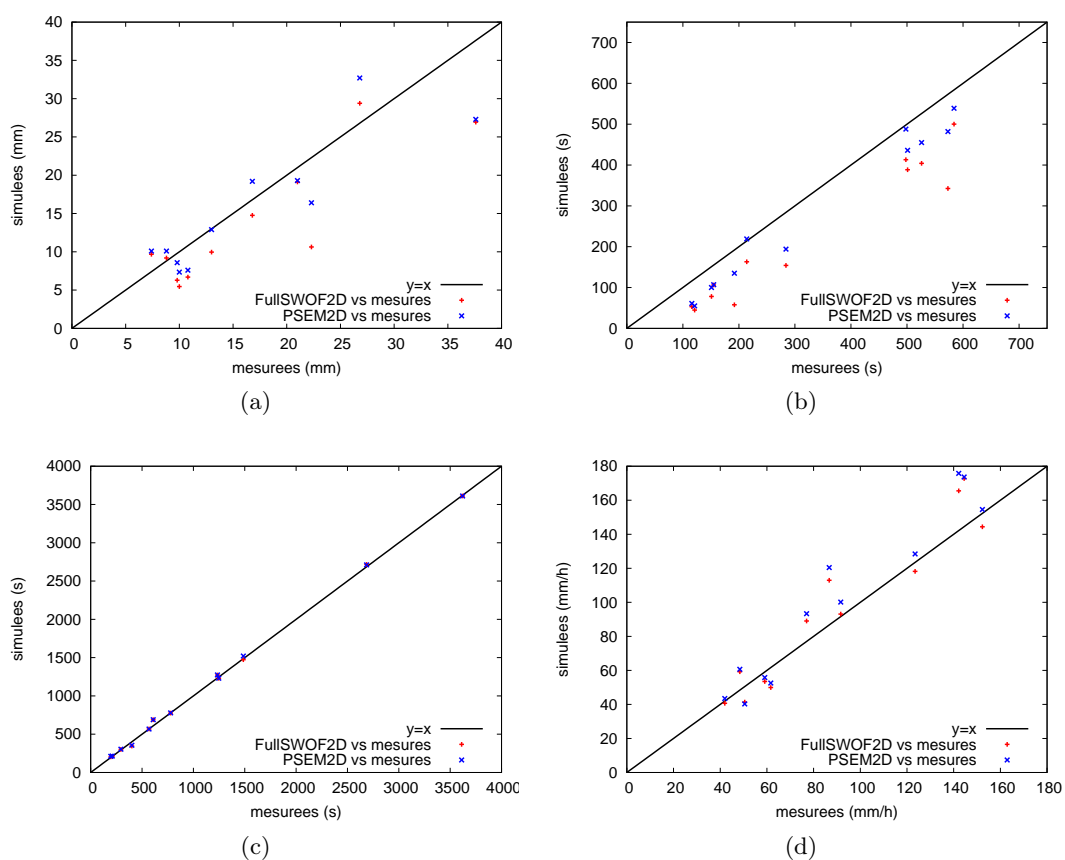


FIG. 6.10: Parcelle ERO, comparaison des résultats simulés pour FullSWOF_2D et PSEM_2D avec les résultats expérimentaux : (a) hauteurs infiltrées en milieu de parcelle, (b) temps de début de ruissellement, (c) temps d'obtention des pics de ruissellement et (d) valeurs de ces pics.

6.2.2 Parcelle JAC

La parcelle JAC (figures 6.7c et 6.7d) est une parcelle en jachère de longueur $L = 20$ m, de largeur $l = 5$ m, de pente maximale 0.19 selon (Ox) et 0.17 selon (Oy) . Les paramètres utilisés pour le modèle de Green-Ampt sont donnés dans le tableau 6.3. A la surface du sol, il y a alternance de zones érodées avec des zones de sable d'où deux coefficients de frottement différents (tableau 6.3).

Propriétés de la surface			Propriétés du sol	
Nature	Erosion	Monts de sable	Type de sol	Sable limoneux
Z_c (m)	0.005	0.05	θ_s	0.296
h_f (m)	1.3795	0.18	h_f (m)	1.3795
K_s (m/s)	1.7E-8	1.9E-6	K_s (m/s)	2.15E-5
f	0.25	0.7		

TAB. 6.3: Paramètres utilisés pour la parcelle JAC.

Le maillage utilisé est régulier avec $\Delta x = \Delta y = 0.06$ m. Les conditions de bords sont

- des bords fermés en amont et sur les cotés de la parcelle
- et une sortie ouverte à l'exutoire.

Nous avons eu à notre disposition pour cette parcelle

- douze événements pluvieux qui sont les mêmes que ceux de la parcelle ERO (nous en avons traité sept),
- les débits mesurés à l'exutoire,
- les hauteurs d'eau infiltrées au milieu de la parcelle
- et les résultats obtenus avec le logiciel PSEM_2D (à l'exception des hauteurs d'eau infiltrées).

Sur les figures 6.11 et 6.12 sont représentés les hyétogrammes et les hydrogrammes mesurés et simulés à l'aide de FullSWOF_2D pour la parcelle JAC. La figure 6.13 représente des grandeurs (la hauteur d'eau infiltrée au milieu simulées au milieu de la parcelle, le temps de début de ruissellement, le temps d'obtention des pics de ruissellement et la valeur de ces pics) simulées par les logiciels FullSWOF_2D et PSEM_2D (à l'exception de l'infiltration) en fonction des valeurs mesurées.

Comme pour la parcelle ERO, FullSWOF_2D permet de retrouver la forme complexe des hydrogrammes, à l'exception de celui du 16 septembre 1994 (figure 6.12f). Sur ces mesures, PSEM_2D donne aussi de mauvais résultats. Nous pouvons supposer que cet événement a mal été mesuré. Globalement, les nombres de Nash Sutcliffe (tableau 6.4) sont meilleurs que ceux obtenus pour la parcelle ERO mais les hauteurs d'eau infiltrées sont moins bien calculées (figure 6.13a). Le temps d'apparition du ruissellement est à nouveau systématiquement sous-évalué par chacun des deux logiciels (figure 6.13b). Enfin les pics de ruissellement sont obtenus au bon moment (figure 6.13c) et la valeur de ces pics est très bien calculée (figure 6.13d).

Pour compléter notre étude, il faudra effectuer les simulations des événements manquant et tracer des cartes de volumes infiltrés.

Bien souvent le calage d'une méthode numérique est effectuée sur l'hydrogramme mesuré à l'exutoire. En général, il est alors possible de réaliser un calage pour la loi de Darcy-

6.2. PARCELLES JAC ET ERO (1994)

Weisbach et pour la loi de Manning. Ces lois étant différentes, des vitesses et hauteurs différentes sont obtenues sur le domaine de calcul. Mais rien ne permet de choisir telle ou telle loi. Le jeu de mesures suivant présente des mesures de vitesses en plus de la mesure du débit à l'exutoire.

Événement	Date	$\theta_s - \theta_i$	<i>NS</i> FullSWOF_2D	<i>NS</i> PSEM_2D
3	07 Août 1994	0.196	0.954	0.969
4	10 Août 1994	0.139	0.962	0.902
5	20 Août 1994	0.229	0.9	0.669
7	24 Août 1994	0.208	0.916	0.901
8	25 Août 1994	0.211	0.976	0.94
11	12 Septembre 1994	0.226	0.852	0.777
12	16 Septembre 1994	0.232	-51.6	-59.67

TAB. 6.4: Parcelle JAC : humidité initiale du sol et résultats obtenus pour les sept événements pluvieux étudiés.

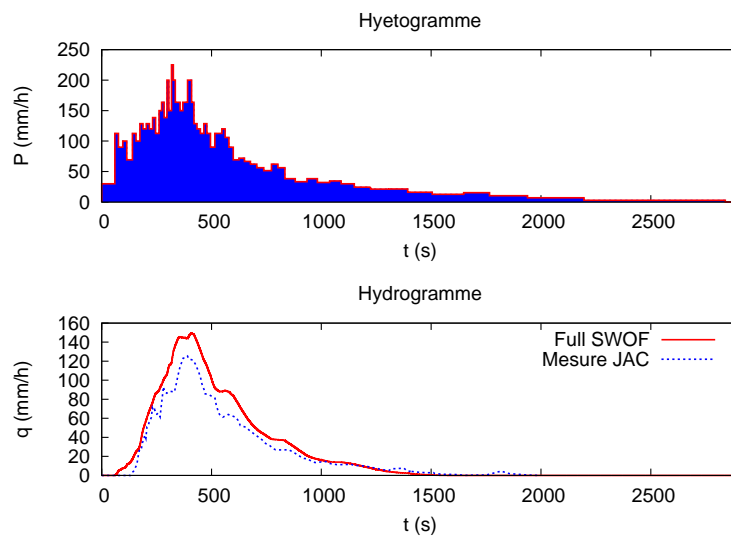


FIG. 6.11: Parcelle JAC : hyétoqramme et hydrogrammes du 24 août 1994.

6.2. PARCELLES JAC ET ERO (1994)

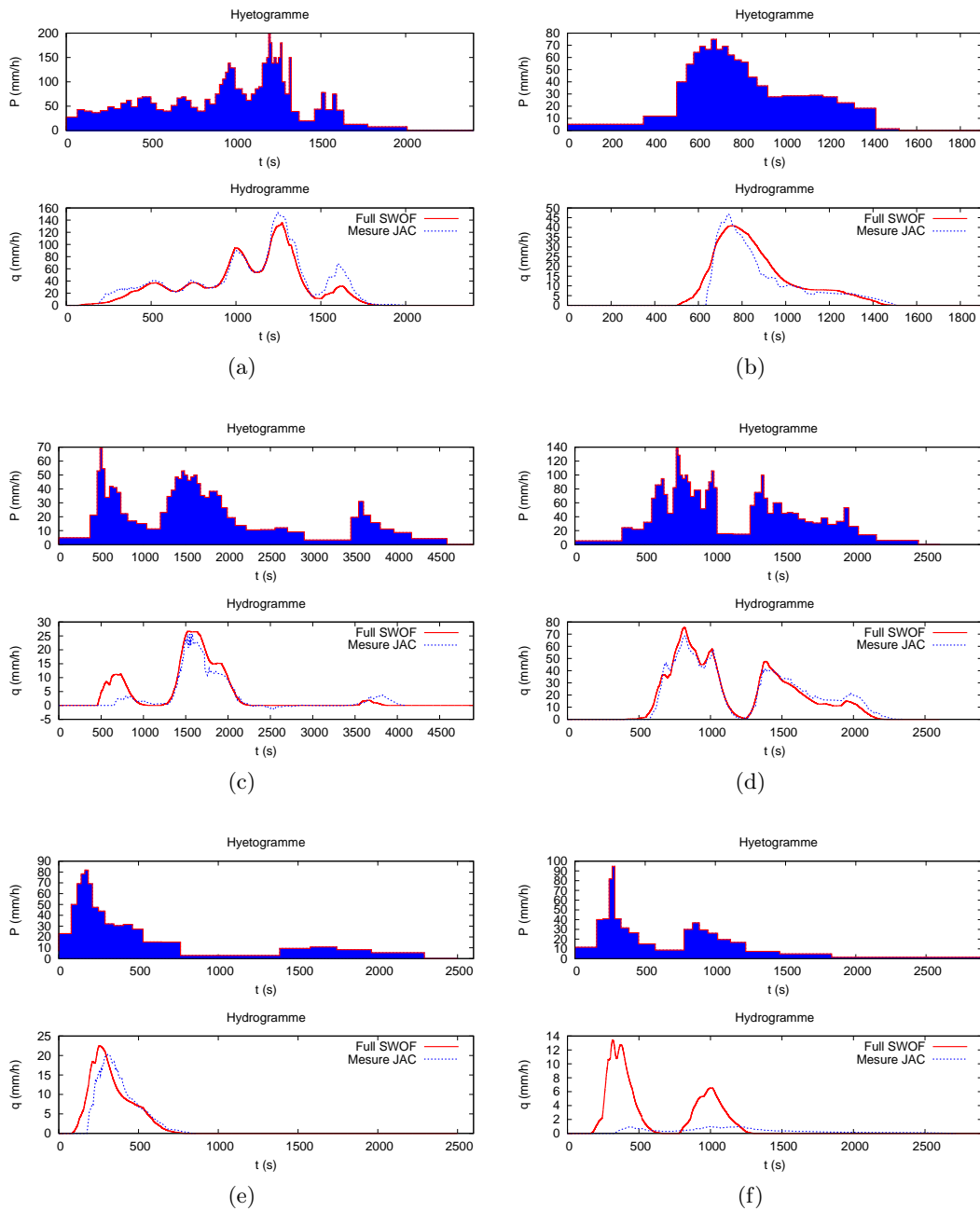


FIG. 6.12: Parcelle JAC : hyétogrammes et hydrogrammes du (a) 07 août 1994, (b) 10 août 1994, (c) 20 août 1994, (d) 25 août 1994, (e) 12 septembre 1994 et du (f) 16 septembre 1994 pour la loi de Darcy-Weisbach.

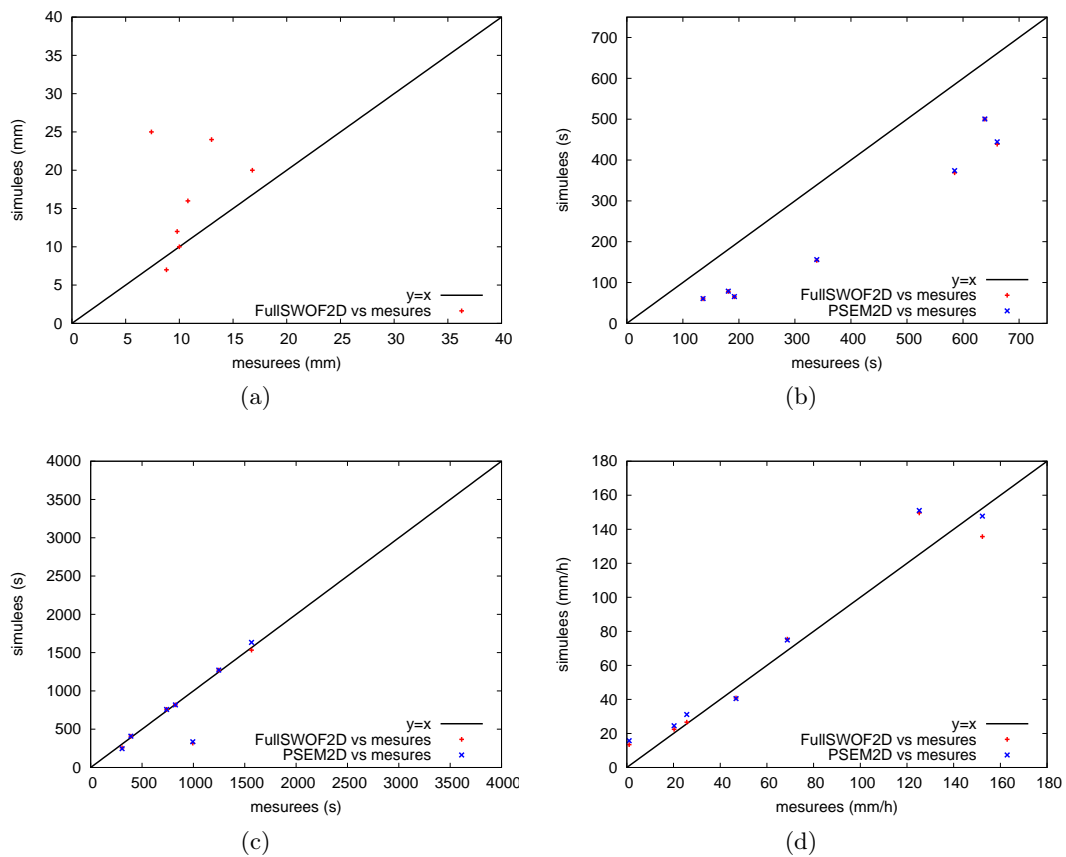


FIG. 6.13: Parcelle JAC, comparaison des résultats simulés pour FullSWOF_2D et PSEM_2D avec les résultats expérimentaux : (a) hauteurs infiltrées en milieu de parcelle, (b) temps de début de ruissellement, (c) temps d'obtention des pics de ruissellement et (d) valeurs de ces pics.

6.3 Parcelle de Thies (28 juin 2004)

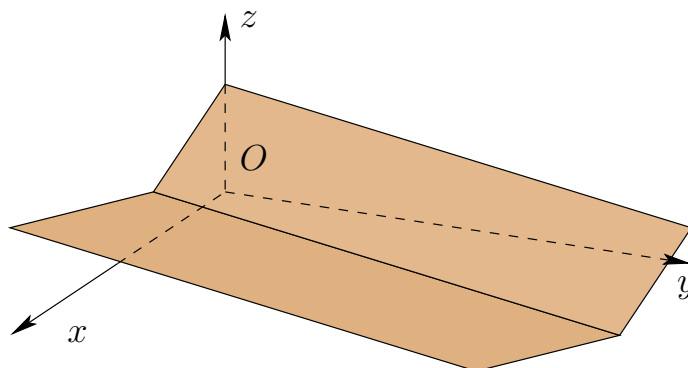


FIG. 6.14: Configuration du livre ouvert de Wooding.

Le troisième et dernier jeu de mesures expérimentales a été mis à notre disposition par Olivier Planchon⁵. Ce jeu de mesures, effectuées à Thies au Sénégal (figure 6.6) par l'IRD dans le cadre du projet PNRH RIDES⁶, est composé de la mesure du débit à l'exutoire et de la mesure des vitesses en 63 points de la parcelle (voir figures 6.7 e-f et 6.15). Ces mesures ont été effectuées par SVG (Salt-Velocity Gauge, voir Planchon et al. [2005] pour plus de détails). L'objectif de ces mesures étaient

- de tester de nouvelles techniques de mesures (SVG),
- d'étudier la dynamique de ruissellement et d'érosion.

Ces mesures ont permis de comparer différents codes de calcul (voir Tatard [2005] et Tatard et al. [2008]) :

- PSEM_2D,
- NCF et MAHLERAN basés sur l'approximation d'onde cinématique 1D dans la direction de la pente,
- RillGrow2 basé sur un algorithme empirique proche de l'approximation d'onde diffractive.

Comme précédemment, nous reprenons à nouveau les paramètres utilisés pour PSEM_2D. Dans Tatard [2005] et Tatard et al. [2008], il est apparu qu'un coefficient de frottement homogène sur toute la parcelle ne permettait pas de retrouver les vitesses mesurées. Ils ont alors utilisés une distribution de coefficients de frottement hétérogène sur tout le domaine, ce qui leur a permis de retrouver numériquement des valeurs de vitesse très proches de celles mesurées.

La parcelle de Thies est une parcelle dont le sol est de type sableux de longueur $L = 10$ m, de largeur $l = 4$ m. Sa configuration est classique en ruissellement, il s'agit de la configuration du livre ouvert de Wooding (voir entre autres Wooding [1965], Ponce [1989, p.145]) avec une pente 1% selon (Ox) et selon (Oy) (comme illustré sur la figure 6.14). La mesure de la topographie a été effectuée sur 160 mailles selon la largeur ((Ox) , $\Delta x = 0.025$ m) et 200 mailles selon la longueur ((Oy) , $\Delta y = 0.05$ m). Les codes utilisés dans Tatard [2005] et Tatard et al. [2008], ont nécessité une dégradation de l'échelle de

⁵IRD (Montpellier), UMR LISAH

⁶Ruissellement, Infiltration, Dynamique des Etats de Surface

résolution de cette topographie (par exemple $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m pour PSEM_2D) à cause notamment de petits pics liés aux erreurs de mesures.

Nous avons effectué les calculs avec le coefficient homogène ($f = 0.26$) pour le maillage dégradé puis pour le maillage plus fin sans aucun problème (figures 6.16 et 6.17). Enfin, nous avons effectué les calculs avec le coefficient hétérogène avec le maillage grossier (figure 6.18).

En raffinant les maillages, nous améliorons la qualité de nos résultats, les zones sont mieux définies (6.17). Mais avec le coefficient de frottement homogène, nous vérifions en effet que les vitesses calculées à certains endroits de la parcelle sont différentes de celles mesurées (voir la figure 6.19a et les tableaux 6.5 et 6.6). Nous retrouvons des vitesses très proches de celles obtenues avec PSEM_2D. Enfin l'utilisation de coefficients hétérogènes permet d'améliorer sensiblement les résultats (la figure 6.19b et les tableaux 6.5 et 6.6). L'utilisation de coefficients hétérogènes ne modifie pas l'hydrogramme obtenu avec un coefficient de frottement homogène (voir la figure 6.20).

- Pour compléter le travail effectué sur la parcelle de Thies, il faudra envisager
- de faire les calculs avec coefficients hétérogènes sur le maillage plus fin et sur des maillages plus grossiers afin d'observer l'influence de la taille du maillage sur les résultats
 - et d'essayer d'autres lois de frottement.

6.4 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons effectué la validation de notre méthode numérique sur des mesures expérimentales. Ceci nous a permis de montrer que notre modélisation ne prend pas en compte certains phénomènes physiques (tels que les frottements dus à la pluie, la tension de surface) qu'il faudra étudier plus en détails et envisager de les prendre en compte dans notre modèle. Les lois de frottement usuelles en hydraulique (Darcy-Weisbach et Manning) ne semblent pas être adaptées à la simulation d'écoulements de faible épaisseur. Il faudra donc aussi essayer d'autres lois de frottement.

Enfin, il faudra effectuer des comparaisons de notre méthode numérique avec d'autres méthodes numériques sur des tests plus compliqués (avec la présence d'équilibres stationnaires tels que des flaques d'eau).

Dans le chapitre suivant, nous donnons une description du logiciel FullSWOF_2D et de ses spécificités.

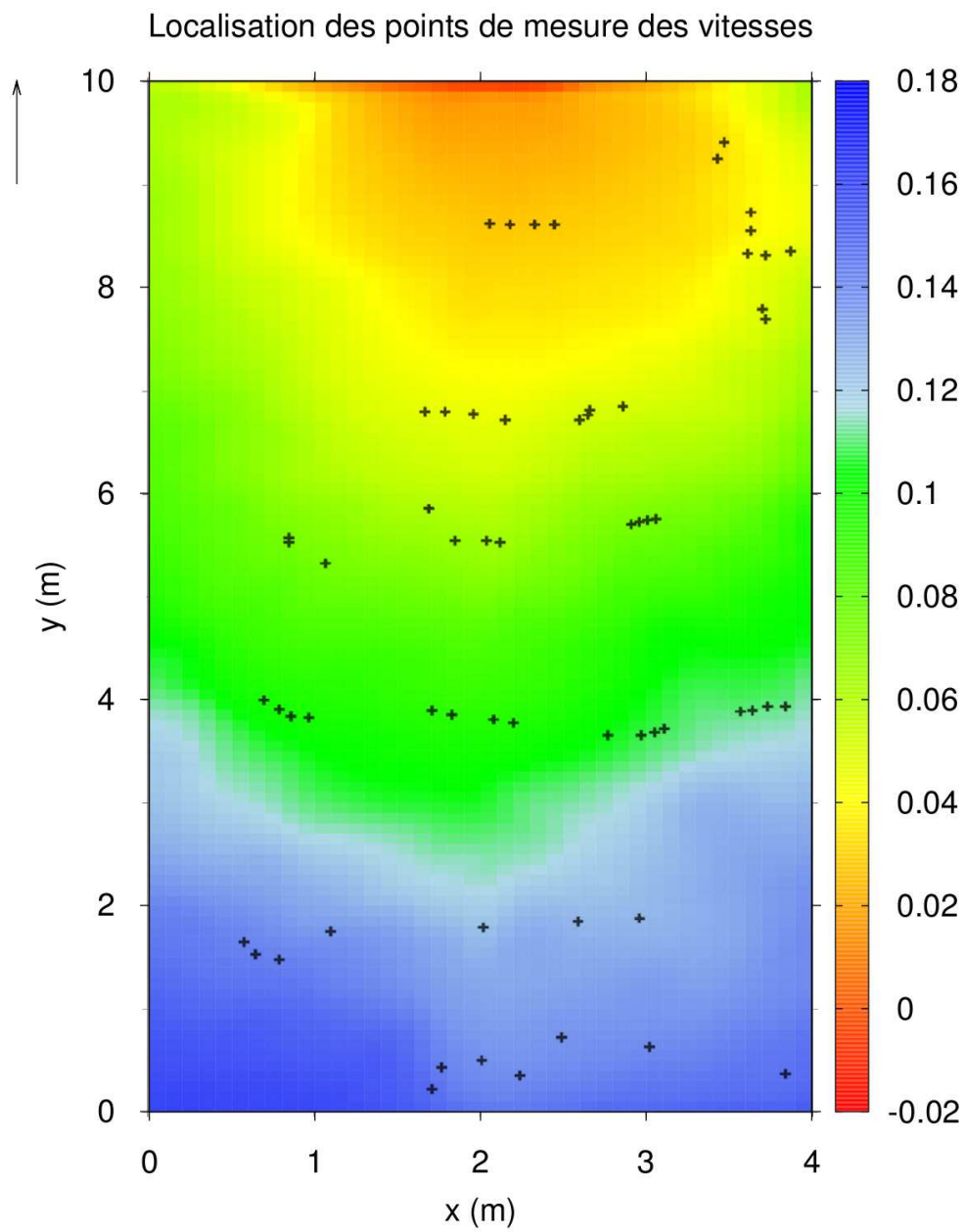


FIG. 6.15: Parcelle de Thies : localisation des points de mesure des vitesses par SVG.

6.4. SYNTHÈSE

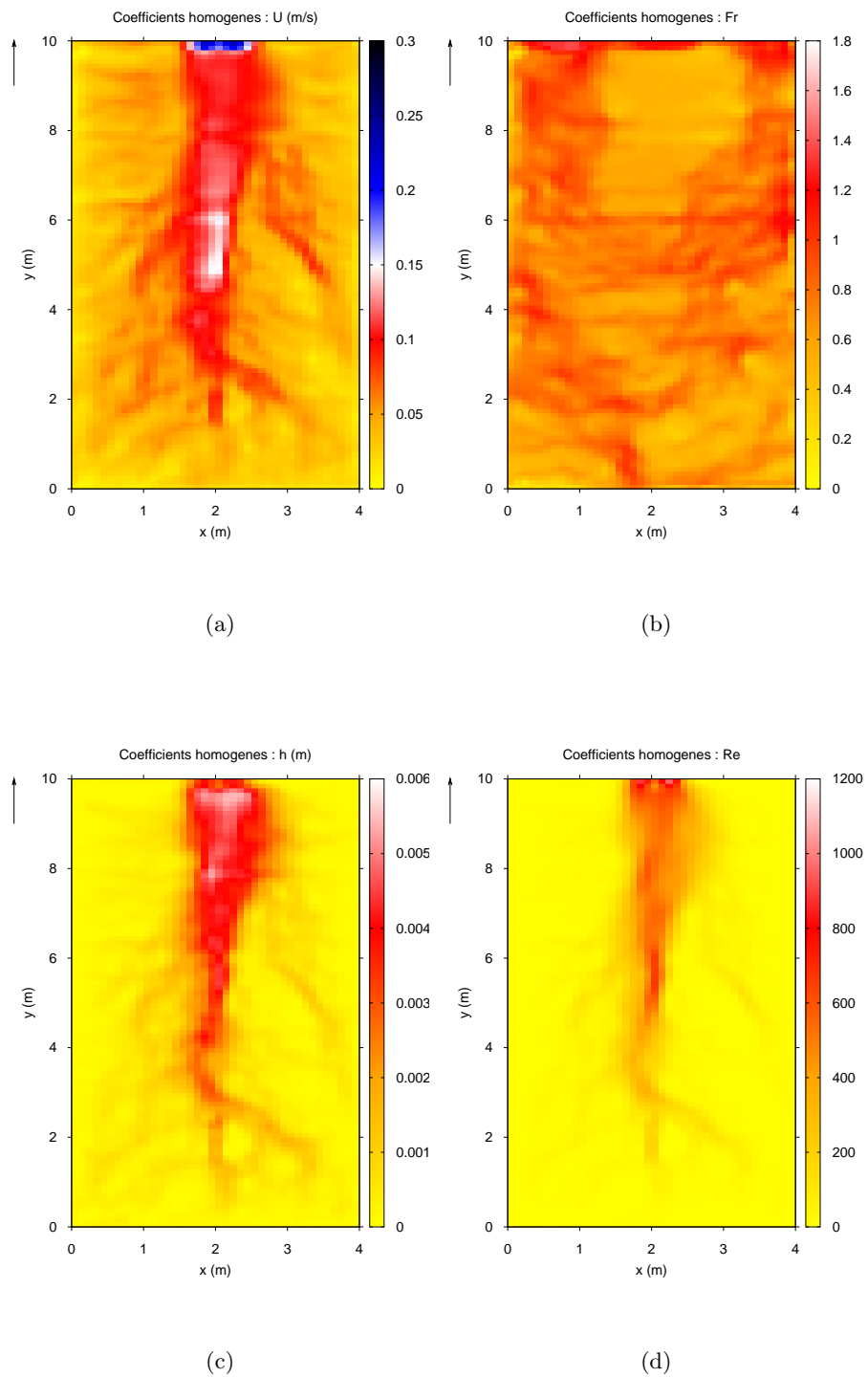


FIG. 6.16: Parcelle de Thies au Sénégal : (a) vitesses, (b) nombres de Froude, (c) hauteurs d'eau et (d) nombres de Reynolds à $t = 7300$ s pour $f = 0.26$ et le maillage grossier.

6.4. SYNTHÈSE

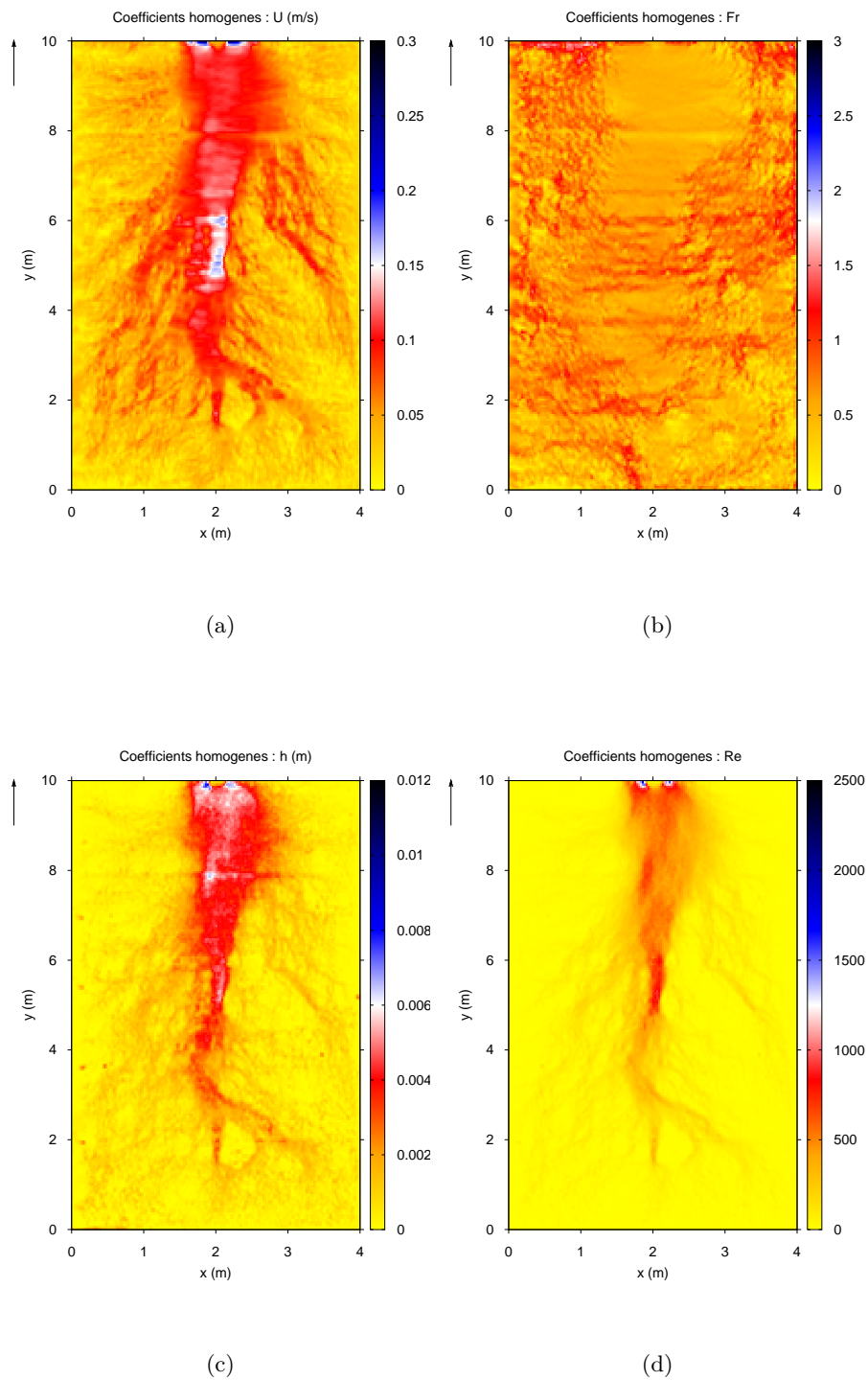


FIG. 6.17: Parcelle de Thies au Sénégal : (a) vitesses, (b) nombres de Froude, (c) hauteurs d'eau et (d) nombres de Reynolds à $t = 7300$ s pour $f = 0.26$ et le maillage fin.

6.4. SYNTHÈSE

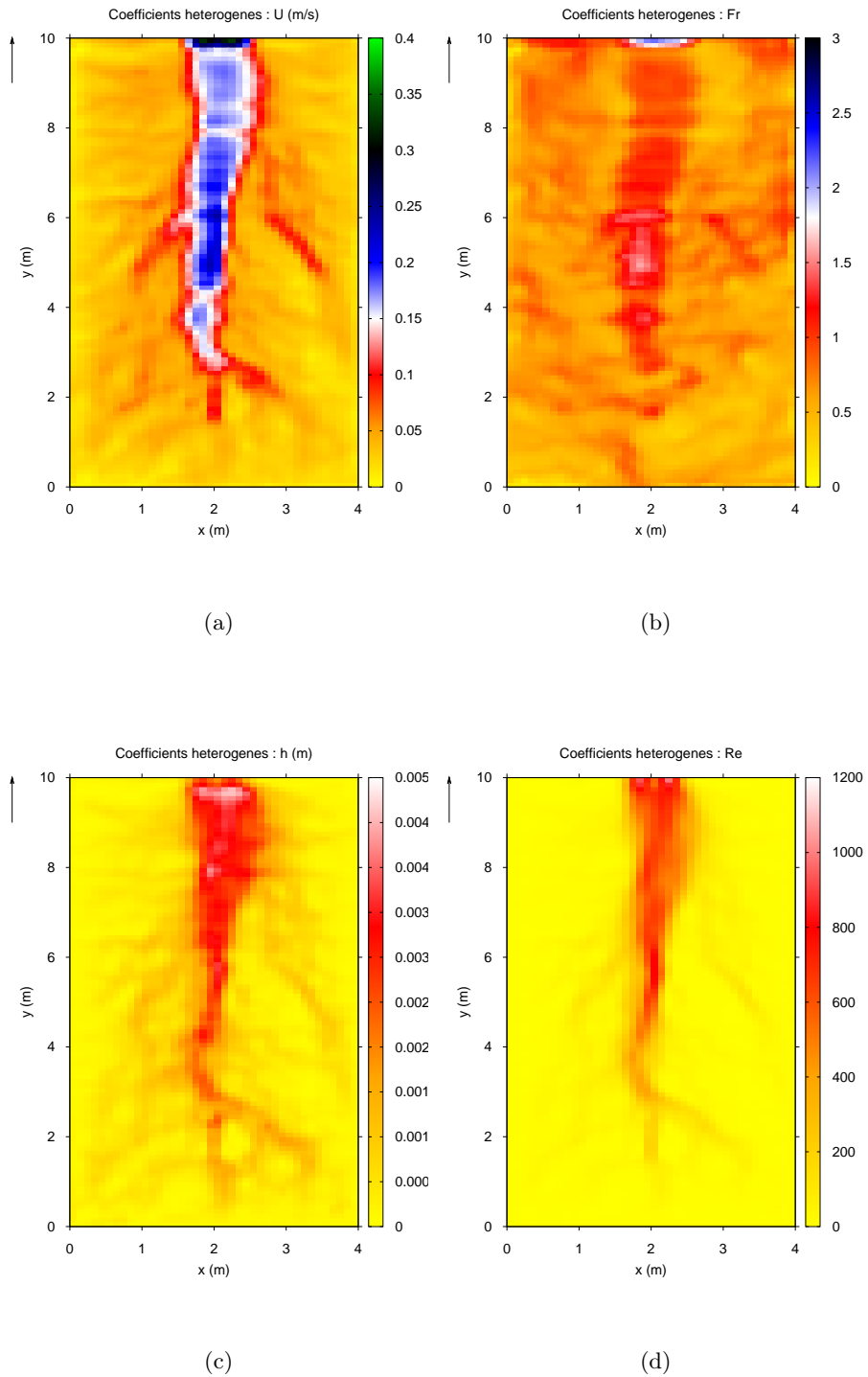


FIG. 6.18: Parcelle de Thies au Sénégal : (a) vitesses, (b) nombres de Froude, (c) hauteurs d'eau et (d) nombres de Reynolds à $t = 7300$ s avec f hétérogène et le maillage grossier.

6.4. SYNTHÈSE

x [m]	y [m]	V [cm.s ⁻¹] mesures	V [cm.s ⁻¹] PSEM_2D f homogène	V [cm.s ⁻¹] PSEM_2D f hétérogène	V [cm.s ⁻¹] FullSWOF f homogène	V [cm.s ⁻¹] FullSWOF f hétérogène
2.12	5.53	26.47	14.14	20.11	14.19	21
2.04	5.55	25.95	15.37	25.32	14.1	21.78
1.96	6.78	18.41	12.13	22.06	12.22	19.81
2.15	6.72	16.27	13.02	20.75	12.49	20
1.71	3.9	15.84	11.77	19.24	10.75	16.85
2.06	8.63	14.93	10.89	18.59	10.7	16.76
2.18	8.62	14.43	11.07	19.54	10.65	16.66
2.33	8.62	14.02	10.18	16.29	10.18	15.77
2.65	6.77	13.58	6.32	5.97	6.67	6.59
1.79	6.8	13.45	10.42	19.42	10.94	17.27
1.85	5.55	11.73	10.76	13.68	11.29	15.95
1.67	6.8	10.91	9.01	12.15	9.93	14.47
3.06	5.76	10.89	8.09	9.32	6.06	10.26
1.69	5.86	10.78	11.12	13.11	10.35	13.49
2.96	5.73	10.75	8.96	10.44	8.53	10.26
2.59	1.85	8.98	6.89	5.94	6.47	5.96
3.01	5.75	8.55	9.14	11.32	8.53	9.51
2.08	3.81	8.35	10.45	12.99	9.72	12.46
2.45	8.62	7.78	9.72	16.33	9.54	14.43
2.2	3.78	7.64	8.49	5.56	8.07	7.31
1.83	3.86	7.50	12.29	20.66	11.29	18.12
2.6	6.72	7.07	6.88	5.93	5.56	5.29
2.91	5.71	6.87	7.97	8.14	7.67	7.39
0.85	5.53	6.74	6.60	5.65	6.04	5.27
2.02	1.79	6.73	11.31	13.72	11.59	14.37
2.86	6.85	6.54	6.44	5.93	5.36	7.18
0.58	1.65	5.44	4.65	4.09	5.26	4.73
0.86	3.84	5.18	5.88	5.08	5.27	4.6
0.97	3.83	5.15	5.30	4.62	5.25	4.67
0.79	3.91	5.14	5.15	4.48	5.03	4.41
2.66	6.82	5.11	7.19	6.83	6.68	6.59
2.96	1.88	4.80	5.88	4.99	5.66	5.28
3.61	8.34	4.73	3.80	3.09	3.49	2.99
3.64	3.9	4.69	4.88	4.19	4.91	4.26
0.65	1.53	4.31	4.92	4.23	4.65	4.19

TAB. 6.5: Vitesses : Mesures et résultats numériques.

6.4. SYNTHÈSE

x [m]	y [m]	V [cm.s ⁻¹] mesures	V [cm.s ⁻¹] PSEM_2D f homogène	V [cm.s ⁻¹] PSEM_2D f hétérogène	V [cm.s ⁻¹] FullSWOF f homogène	V [cm.s ⁻¹] FullSWOF f hétérogène
3.72	7.7	4.24	3.36	2.88	3.33	2.96
3.11	3.72	4.20	4.37	3.75	4.46	4.02
3.05	3.69	4.07	4.37	3.87	3.73	3.37
1.07	5.33	4.04	7.83	7.35	7.36	7.55
3.84	3.94	3.77	4.21	3.85	4.99	4.45
2.77	3.66	3.66	4.26	3.61	3.82	3.44
3.73	3.94	3.47	3.98	3.48	3.77	3.18
2.01	0.5	3.46	6.90	5.86	4.18	3.68
3.47	9.42	3.06	4.76	1.63	4.11	3.57
3.57	3.89	2.99	5.61	4.78	4.91	4.26
3.7	7.8	2.97	0.00	0.01	3.96	3.53
0.85	5.58	2.89	5.75	4.95	5.38	4.72
1.1	1.75	2.81	2.79	2.54	4.17	3.35
3.63	8.74	2.73	3.76	3.39	4.57	4.07
2.97	3.66	2.69	2.31	2.60	4.76	3.37
3.63	8.56	2.58	3.49	3.22	4.35	3.93
3.43	9.26	2.54	4.69	3.76	5.1	4.41
0.79	1.48	2.52	2.97	2.78	3.99	3.57
3.72	8.32	2.41	3.01	2.64	3.4	2.92
2.24	0.35	2.21	3.56	3.29	3.49	3.12
3.84	0.37	2.05	2.01	1.70	2.02	1.81
2.49	0.72	1.85	2.88	2.49	2.56	2.26
0.7	4.	1.62	0.02	0.01	4.42	3.98
1.71	0.22	1.60	6.60	5.65	4.57	3.9
3.87	8.36	1.56	2.11	1.79	2.69	2.34
1.77	0.43	1.43	3.16	3.37	3.8	3.28
3.02	0.63	0.59	1.25	1.06	2.96	2.49

TAB. 6.6: Vitesses : Mesures et résultats numériques.

6.4. SYNTHÈSE

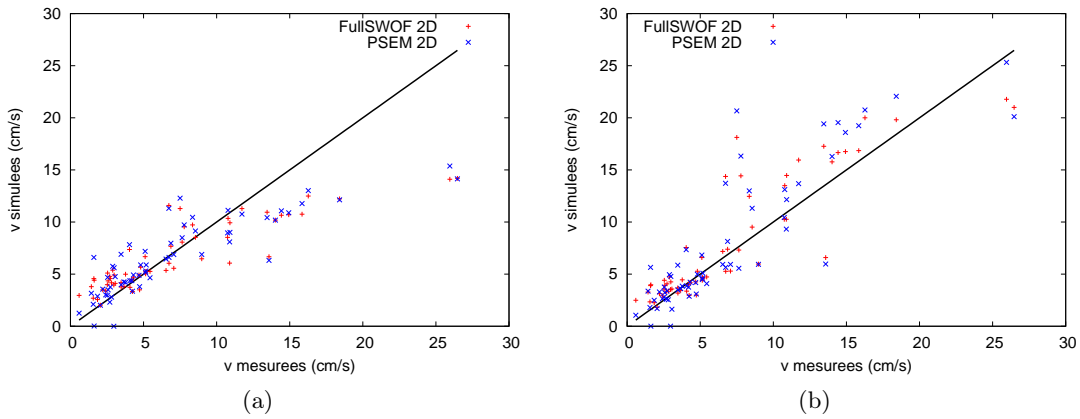


FIG. 6.19: Parcelle de Thies : comparaison des vitesses simulées et mesurées (a) pour $f = 0.26$ et (b) pour les coefficients de frottement hétérogènes.

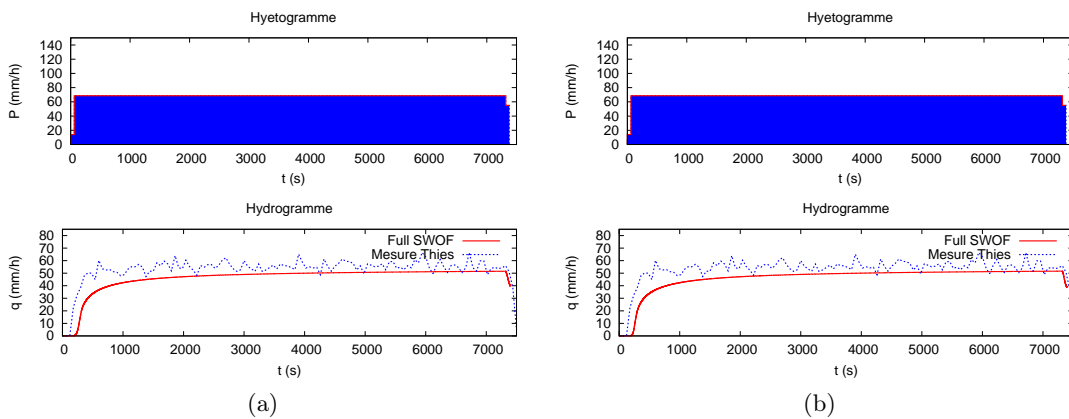


FIG. 6.20: Parcelle de Thies : hyetogramme et comparaison des hydrogrammes simulées et mesurées (a) pour $f = 0.26$ et (b) pour les coefficients de frottement hétérogènes.

Chapitre 7

Le logiciel FullSWOF_2D

Les chapitres précédents, ainsi que les travaux effectués dans le cadre de stages de M2 effectués au BRGM (El Bouajaji [2007] et Rousseau [2008]), nous ont permis de choisir une méthode numérique dans l’optique de réaliser un code pour le ruissellement robuste et ayant un bon compromis précision/temps de calcul. Ceci nous a permis de réaliser un code en C++ appelé FullSWOF_2D¹ (pour Full Shallow Water equations for Overland Flow), son développement a débuté dans le cadre d’un stage de M2 d’informatique à l’INRA d’Orléans (voir Delestre [2008]). La résolution du système bidimensionnel nécessite quelques modifications de la méthode monodimensionnelle. Dans un premier temps nous présentons ces modifications, puis nous détaillons les spécificités de FullSWOF_2D et enfin nous présentons quelques cas tests académiques intégrés dans une librairie développée par Christian Laguerre.

7.1 Spécificités de FullSWOF_2D

7.1.1 Solutions de programmation

Les chapitres précédents et les stages de M2 effectués au BRGM (voir El Bouajaji [2007] et Rousseau [2008]) ont permis de choisir une méthode adaptée à la simulation du ruissellement sur des surfaces agricoles : le schéma aux volumes finis avec les reconstructions hydrostatique, MUSCL et le traitement semi-implicite des frottements. Ce choix est très certainement amené à évoluer avec l’arrivée de nouvelles méthodes. De plus nous voulons intégrer le maximum de flux numériques (HLL, Rusanov, ...), de reconstructions des variables (MUSCL, ENO, ENO modifiée), ..., ce que nous avons fait avec les codes fortran utilisés dans les chapitres précédents. Ces codes sont peu viables : leur structure peu modulaire ne facilite ni l’intégration de nouvelles méthodes, ni la lisibilité du code. A cela s’ajoute, une redondance de tests à chaque itération en espace et en temps pour déterminer la méthode numérique à utiliser. Ci-dessous nous donnons un exemple de redondance, il s’agit du choix des flux numériques du code fortran en dimension 1.

¹Déposé à l’Agence pour la Protection des Programmes avec le numéro de déclaration *DL* 03434 – 01 et une licence CeCILL. Pour les termes de la licence voir :
http://www.cecill.info/licences/Licence_CeCILL_V2-fr.html
http://www.cecill.info/licences/Licence_CeCILL_V2-en.html


```
if (choixflux==1) then
call fluxrus(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
else if (choixflux==2) then
call fluxhll(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
else if (choixflux==3) then
call fluxhll2(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
else if (choixflux==4) then
call fluxroe(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
else if (choixflux==5) then
call fluxcinetique(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
else if (choixflux==6) then
call fluxaps(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
else if (choixflux==7) then
call fluxroeRus(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
else
call fluxRoeSans(ur(i-1),ul(i),hd(i-1),hg(i),fp(i),fd(i),CFL2)
end if
```

Cette redondance de tests peut à la fois avoir un effet négatif sur la lisibilité du code, mais surtout allonger les temps de calcul.

Notre objectif est d'obtenir un code de calcul le plus fiable et maintenable possible :

- La fiabilité du logiciel est la caractéristique d'une part de répondre aux spécifications du logiciel (produire les résultats souhaités pour tout jeu de données d'entrée valide) et d'autre part de ne pas en produire d'erronées (même si les données d'entrée ne sont pas valides). Une solution pour gérer les données d'entrée non valides consiste à utiliser la gestion des erreurs et des exceptions, ceci est parfois appelé robustesse du code.
- La maintenabilité est une donnée essentielle, il est en effet nécessaire que le code puisse évoluer facilement, sans que cela entraîne des coûts excessifs. Il est nécessaire de faciliter les évolutions futures (ajout/modification de fonctionnalités, correction d'anomalies/de dysfonctionnements).

Algorithme 1 Schéma à l'ordre 1

ENTRÉES : h^0, u^0, v^0 et z

SORTIES : h^M, u^M et v^M

- 1: Initialisation de h^0, u^0, v^0 et z
 - 2: **pour** $t = 1$ à N **faire** ▷ Boucle en temps
 - 3: Reconstruction hydrostatique
 - 4: Calcul des flux numériques : HLL, Rusanov, Cinétique, ...
 - 5: Application du schéma
 - 6: Traitement des frottements : Manning ou Darcy-Weisbach
 - 7: **fin pour**
-

Afin de satisfaire ces objectifs, l'idée introduite dans Delestre [2008] consiste à analyser les algorithmes simplifiés de la méthode numérique à l'ordre 1 (Algorithme 1), à l'ordre 2 (Algorithme 2) et de dégager les parties communes.

Algorithme 2 Schéma à l'ordre 2

ENTRÉES : h^0, u^0, v^0 et z **SORTIES :** h^M, u^M et v^M

- 1: Initialisation de h^0, u^0, v^0 et z
 - 2: **pour** $t = 1$ à N **faire** ▷ Boucle en temps
 - 3: Reconstruction ordre 2 en x : MUSCL, ENO ou ENO modifiée
 - 4: Reconstruction hydrostatique
 - 5: Calcul des flux numériques : HLL, Rusanov, Cinétique, ...
 - 6: Application du schéma
 - 7: Traitement des frottements : Manning ou Darcy-Weisbach
 - 8:
 - 9: Reconstruction ordre 2 en x : MUSCL, ENO ou ENO modifiée
 - 10: Reconstruction hydrostatique
 - 11: Calcul des flux numériques : HLL, Rusanov, Cinétique, ...
 - 12: Application du schéma
 - 13: Traitement des frottements : Manning ou Darcy-Weisbach
 - 14:
 - 15: Ordre 2 en t : Méthode de Heun
 - 16: **fin pour**
-

Pour effectuer nos simulations, nous avons besoin d'un *schéma* numérique (à l'ordre 1 ou 2) constitué de la reconstruction *hydrostatique*, d'un *flux* numérique, d'une loi de *frottement* et éventuellement d'une *reconstruction* d'ordre 2 (MUSCL, ENO, ...). Ainsi, nous avons dégagé plusieurs familles. Les éléments d'une même famille (par exemple les flux HLL, cinétique, ... pour la famille *flux*) ont les mêmes entrées, les mêmes sorties et des méthodes communes.

Pour illustrer nos propos nous allons nous focaliser sur la famille *flux* (pour les autres familles nous renvoyons le lecteur vers Delestre [2008]). Indépendamment du flux choisi, pour calculer un flux numérique, nous avons besoin (voir le diagramme de classe TAB. 7.1) : de six variables de type double de part et d'autre de l'interface (h, u et v), de calculer le flux numérique, de récupérer les différentes composantes du flux, de fixer et de récupérer certaines variables pour la CFL. Ainsi, nous définissons une classe mère abstraite (Dupin [2005, p.266]) *flux*, ce qui veut dire que nous ne pouvons pas créer d'objet à partir de cette classe : cette classe ne peut être instanciée. Mais par héritage, cette classe permet de définir les variables, les méthodes, le constructeur et le destructeur communs aux différentes classes de flux ($F_hll, F_Rusanov, \dots$) ainsi que leur structure. Les classes de flux contiennent leur partie spécifique, c'est-à-dire le calcul du flux lui-même. En utilisant les notions d'héritage et de classe mère abstraite, nous obtenons un code plus modulaire et où chacune des classes contient ce qui la distingue des autres classes. Ainsi, il est très facile d'ajouter un autre flux numérique. Cette technique est utilisée pour les autres classes ce qui nous permet d'avoir un code plus structuré donc plus facile à comprendre et maintenir.

Enfin, pour éliminer le problème des tests redondants rencontrés avec les codes en fortran (voir plus haut), nous utilisons ce que nous appelons un "distributeur d'objets" spécifique à chacune des classes abstraites (les classes *choix_...* voir les figures 7.1, 7.2 et 7.3). Comme nous l'avons vu, nous ne pouvons instancier d'objet de classe abstraite,

<i>flux</i>
- <i>f1</i>
- <i>f2</i>
- <i>f3</i>
- <i>tx</i>
- <i>cfl</i>
+ <i>calcul(double, double, double, double, double, double) : void</i>
+ <i>set_tx(double) : void</i>
+ <i>get_f1() : double</i>
+ <i>get_f2() : double</i>
+ <i>get_f3() : double</i>
+ <i>get_cfl() : double</i>
<i>flux()</i>

TAB. 7.1: Le diagramme de la classe flux

cependant nous pouvons déclarer des pointeurs pointant vers des objets de ce type. Puis effectuer un transtypage (ou cast) qui permet de transformer un objet d'une certaine classe en un objet d'une classe fille (par exemple de la classe *flux* en la classe *F_hll*). L'objet ainsi pointé permet alors de faire les calculs nécessaires.

Ainsi au début de l'exécution du code (lors de l'initialisation), plusieurs pointeurs pointant vers des objets de classe abstraite sont déclarés. Un fichier de paramètres (parameters.txt : voir la figure 7.4) est lu par un parser inspiré de celui de Telles [2005] (intégré par Ulrich Razafison puis modifié par Christian Laguerre). Un objet de classe *parameters* contenant tous ces paramètres est envoyé aux distributeurs d'objets qui effectuent le transtypage du pointeur leur correspondant. Enfin les calculs commencent.

Concernant le code il faut signaler que Ulrich Razafison et Christian Laguerre l'ont structuré en projet : ils ont regroupé les fichiers sources (.cpp), les fichiers d'en-tête (ou header : .h), Dans une optique d'optimisation Marie Rousseau a transformé le code qui était à pas de temps fixe en un code à CFL fixe. Toujours dans un soucis d'optimisation de temps de calcul depuis Delestre [2008, p.22], nous traquons les calculs inutiles et nous stockons les résultats d'opérations effectuées plusieurs fois ($g/2$, hu , hv , ...). Pour les calculs, nous avons plus d'accès que d'écriture dans les cellules des tableaux. Nous avons donc opté pour la classe *vector*. En effet, le conteneur *vector* permet un accès direct à un élément quelconque du tableau avec une efficacité en $O(1)$. Christian Laguerre a débuté une analyse d'efficacité du code à l'aide du profiler valgrind (figure 7.5). Enfin, Marie Rousseau a intégré une librairie d'infiltration basée sur la loi de Green-Ampt (Green and Ampt [1911]) (voir le chapitre 5).

Notre objectif est de réaliser des simulations à grandes échelles (à l'échelle d'un bassin versant). De telles simulations nécessitent des temps de calcul assez importants. Il faut donc envisager de paralléliser FullSWOF_2D à l'aide de librairie de parallélisation telle que MPI (Message Passing Interface) qui permet d'exploiter les ressources des ordinateurs à plusieurs processeurs et/ou coeurs. Afin d'étudier la faisabilité, nous avons réalisé une version parallélisée basée sur la méthode unidimensionnelle d'ordre 1 et la décomposition

7.1. SPÉCIFICITÉS DE FULLSWOF_2D

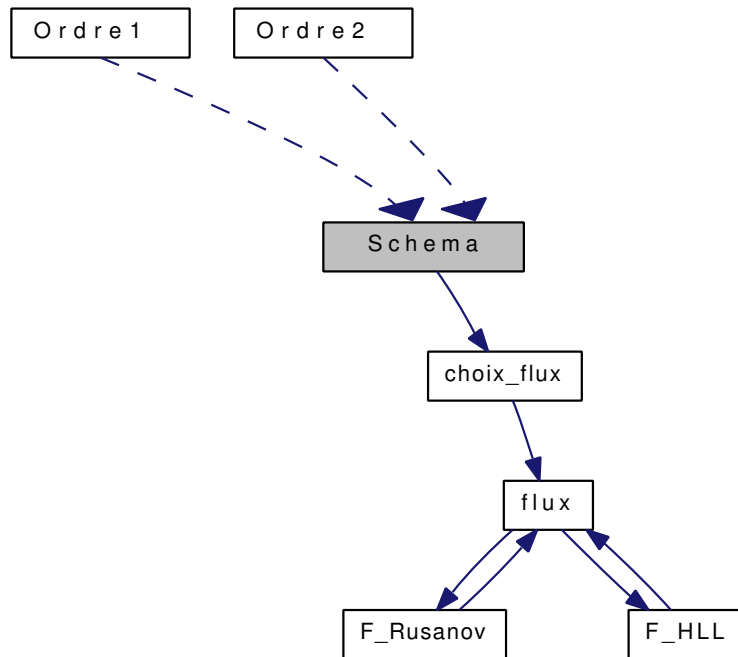


FIG. 7.1: Illustration de l'utilisation de la classe *flux* et du distributeur de flux *choix_flux*.

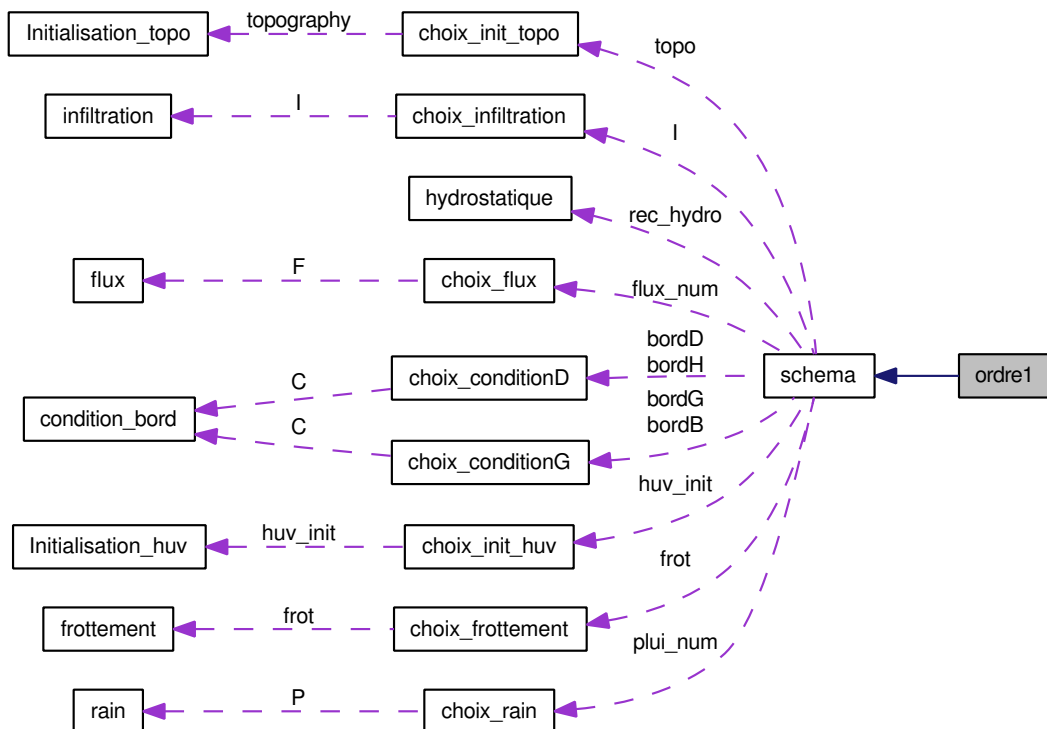
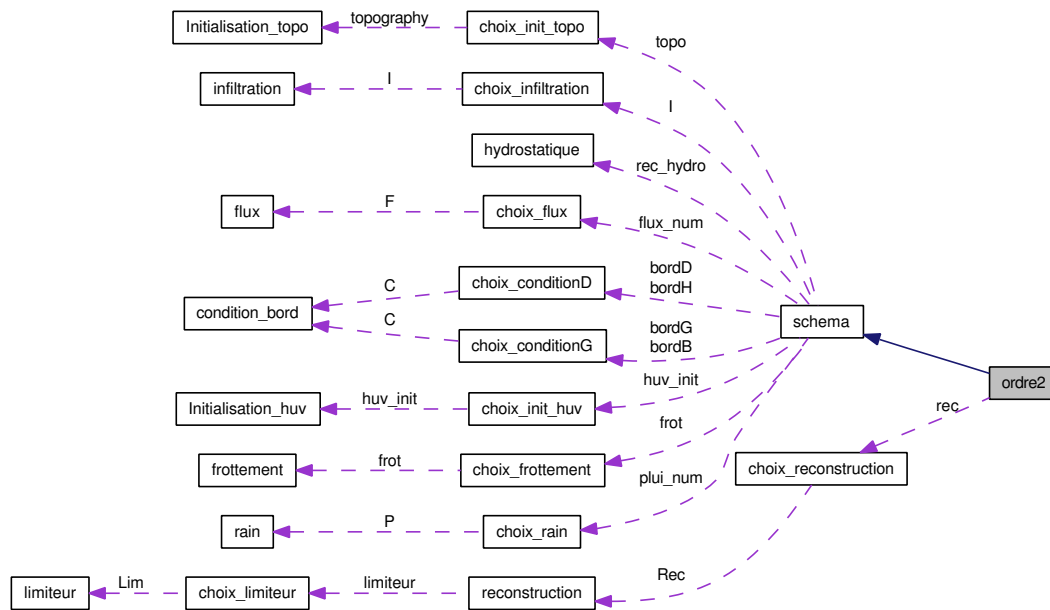


FIG. 7.2: Organisation des classes utilisées par la classe *ordre1*.

FIG. 7.3: Organisation des classes utilisées par la classe *ordre2*.

de domaine (comme dans Em Karniadakis and Kirby II [2003, p.412-454]). Le domaine est découpé en autant de sous-domaines que nous avons de coeurs, ainsi chacun des coeurs effectue les calculs sur son domaine et communique les valeurs aux bords aux coeurs en charge des domaines voisins via une barrière de synchronisation (à l'aide des commandes MPI : `MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD et MPI_Allgather` par exemple). L'algorithme s'écrit alors sous la forme suivante (Algorithme 3).

Algorithme 3 Schéma à l'ordre 1 (parallèle)

ENTRÉES : h^0, u^0, v^0 et z
SORTIES : h^M, u^M et v^M

- 1: Initialisation de h^0, u^0, v^0 et z
 - 2: **pour** $t = 1$ à N **faire** ▷ Boucle en temps
 - 3: **pour** $i = \text{my_offset} - 1$ à J_local **faire** ▷ Boucle en espace
 - 4: Reconstruction hydrostatique
 - 5: Calcul des flux numériques : HLL, Rusanov, Cinétique, ...
 - 6: **fin pour**
 - 7: **pour** $i = \text{my_offset}$ à J_local **faire** ▷ Boucle en espace
 - 8: Application du schéma
 - 9: Traitement des frottements : Manning ou Darcy-Weisbach
 - 10: **fin pour**
 - 11: **Synchronisation & communications**
 - 12: **fin pour**
-

7.1. SPÉCIFICITÉS DE FULLSWOF_2D

```
#####
Un exemple de fichier d'entree parametres.
#####

Number of meshes (x-axis) : 24
Number of meshes (y-axis) : 74
Time of simulation : 2000.
Space step (x) : 0.2
Space step (y) : 0.2
Time step : 0.005
Boundary condition (left)(1-libre/2-mur) : 2
Boundary condition (right)(1-libre/2-mur) : 2
Boundary condition (down)(down)(1-libre/2-mur) : 2
Boundary condition (top)(1-libre/2-mur) : 1
Numerical flux choice(1-Rusanov/2-HLL) : 2
Order of the scheme choice (1-ordre 1/2-ordre 2/3-relaxation) : 2
Reconstruction choice (1-Muscl/2-ENO/3-ENO-modifié) : 3
Friction term choice (1-Manning/2-Darcy-Weisbach): 2
Limiter choice (1-Minmod/2-Vanalbada) : 1
Amortrec : 0.25
Infiltration model (1-Green-Ampt) : 1
Ks, hydraulic conductivity (saturation) of the surface (1.7e-8) : 1.7e-8
Dteta, water content : 0.139
Psi, load pressure : 1.3795
zcrust, epaisseur de la croute : 0.05
Kssoil, hydraulic conductivity (saturation) of the soil : 2.15e-5
cf, friction parameters : 0.25
cflfix, valeur de la cfl que l'on veut fixer : 0.4
topography's choice : 1
Name of the topography file :MNT_ERO.dat
choice of initialization huv (1/file -2/fonction) : 2
Name of the huv initialisation file : Nothing
choice of rain (1/file -2/fonction) : 1
Name of the rain file :pluie1008
```

FIG. 7.4: Le fichier des paramètres d'initialisation.

7.1. SPÉCIFICITÉS DE FULLSWOF_2D

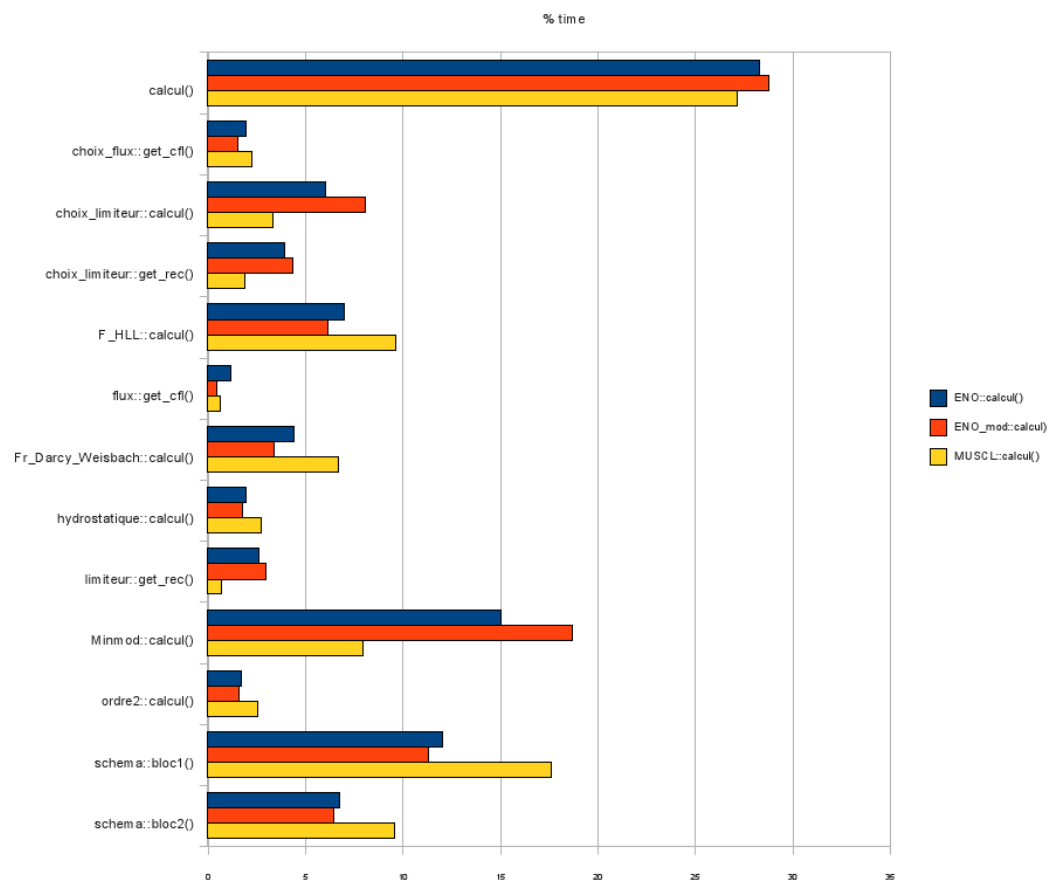


FIG. 7.5: Analyse d'efficacité du logiciel FullSWOF_2D pour différents paramètres (graphique fourni par Christian Laguerre).

7.1.2 Doxygen

Pour faciliter le développement et l'utilisation de FullSWOF_2D, nous documentons notre code à l'aide de commentaires classiques, mais aussi à l'aide du logiciel libre Doxygen² (réalisé en grande partie par Dimitri van Heesch). Ce logiciel permet de générer de la documentation à partir du code source d'un programme. Pour cela, il tient compte du langage (ici le c++) dans lequel est écrit le code source, ainsi que des commentaires écrits dans un format particulier. De plus, il est possible d'intégrer des formules en L^AT_EX qui peut faciliter la compréhension de certaines classes. Enfin Doxygen permet d'obtenir différents formats de documentation : en html, en L^AT_EX, en Rich Text Format (RTF), en XML et même des pages de manuel pour unix/linux. Il est possible de générer des diagrammes de classe, des diagrammes de dépendance, ... (voir les figures 7.1, 7.2 et 7.3).

Si dessous, nous avons le fichier d'entête de la classe *F_Rusanov* avec les commentaires au format Doxygen, ainsi nous obtenons des documentations au format html comme sur la figure 7.6.

```
/*  
*****  
***** F_Rusanov.h *****  
*****  
*  
* A class of FullSWOF_2D  
* Author: Olivier Delestre, october 2008, olivierdelestre41@yahoo.fr  
* Last modified by ..., ....., ...@....  
* Copyright (C) 2008  
*  
*****/  
  
#include <divers.h>  
  
#ifndef Classe_flux  
#include "flux.h"  
#endif  
  
#ifndef Classe_F_Rusanov  
#define Classe_F_Rusanov  
  
/*!  
* \file F_Rusanov.h  
* \brief Rusanov flux  
* \author Olivier Delestre  
* \version 1.0.0  
*/  
  
/*! \class F_Rusanov  
* \brief class which allows to calculate Rusanov flux  
*  
* \f[{\cal F}(U_G,U_D)=\frac{F(U_G)+F(U_D)}{2}-c.\frac{U_D-U_G}{2},\f]  
with  
\f[ c=\max(|u_G|+\sqrt{g_h}_G),|u_D|+\sqrt{g_h}_D)].\f]  
*/
```

²www.doxygen.org/


```
class F_Rusanov: public flux{

public :
  /*!
   * \brief Constructor
   */
  F_Rusanov();

  /*!
   * \brief Calculates Rusanov flux
   */
  void calcul(REEL,REEL,REEL,REEL,REEL,REEL);

  /*!
   * \brief Destructor
   */
  virtual ~F_Rusanov();
};
#endif
```

7.2. PREMIERS TESTS NUMÉRIQUES

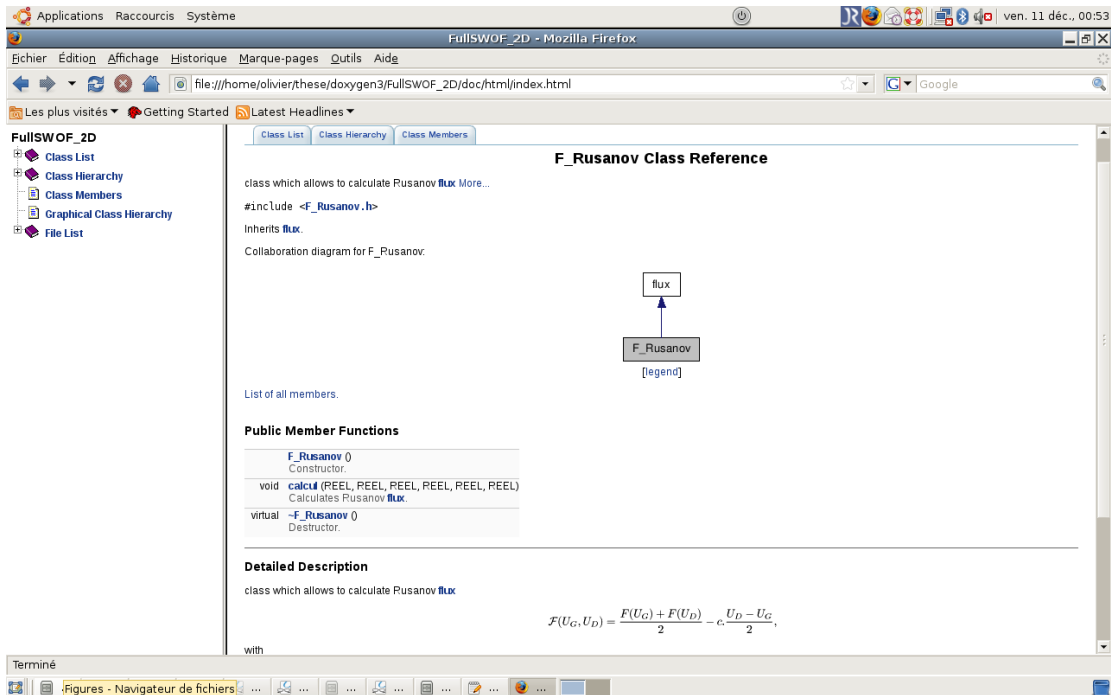


FIG. 7.6: Page HTML générée par le logiciel Doxygen.

7.2 Premiers tests numériques

Pour permettre de tester le logiciel FullSWOF_2D et ses évolutions, Christian Laguerre a mis en place une bibliothèque de tests. Les premiers tests intégrés sont

- une rupture de barrage radiale sur fond sec,
 - une rupture de barrage radiale sur fond mouillé,
 - un test de Thacker : un paraboloïde inversé de révolution dans un paraboloïde de révolution.
- Décrivons chacun de ces tests et montrons les premiers résultats obtenus.

Rupture de barrage radial sur fond sec

Le domaine est défini par

$$(x, y) \in [0, 10 \text{ m}] \times [0, 10 \text{ m}]$$

La topographie est plane $z(x, y) = 0$, la condition initiale (figure 7.7a) est $u(0, x, y) = v(0, x, y) = 0$ m/s et

$$h(0, x, y) = \begin{cases} 0.001 \text{ m} & \text{si } \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2} \leq 1 \text{ m} \\ 0 \text{ m} & \text{sinon} \end{cases} .$$

- La tailles des mailles est $\Delta x = \Delta y = 0.1$ (soit 100 mailles dans les deux directions).
- La durée de la simulation est de 50 s (figure 7.7b).
- Les conditions de bord choisies sont des conditions de mur.

Ce test peut servir à tester une nouvelle méthode sur une transition sec/mouillé. Il peut aussi être utilisé pour déboguer un problème de programmation de flux numérique.

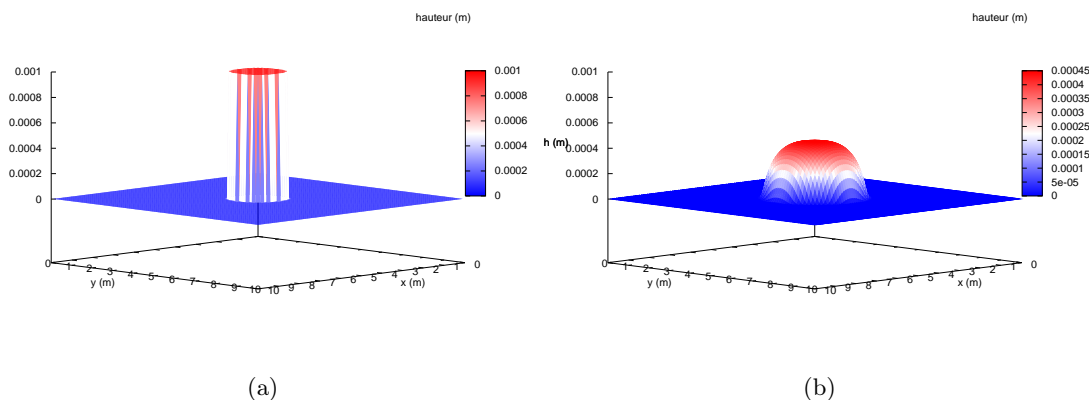


FIG. 7.7: Rupture de barrage radial sur fond sec : (a) Condition initiale et (b) au temps $t = 50$ s.

Rupture de barrage radial sur fond mouillé

Le domaine est défini par

$$(x, y) \in [0, 10 \text{ m}] \times [0, 10 \text{ m}]$$

La topographie est plane $z(x, y) = 0$, la condition initiale (figure 7.8a) est donnée par $u(0, x, y) = v(0, x, y) = 0$ m/s et

$$h(0, x, y) = \begin{cases} 0.011 \text{ m} & \text{si } \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2} \leq 1 \text{ m} \\ 0.001 \text{ m} & \text{sinon} \end{cases}.$$

- La taille des mailles est $\Delta x = \Delta y = 0.1$ (soit 100 mailles dans les deux directions).
 - La durée de la simulation est de 5 s (figure 7.8b).
 - Les conditions de bord choisies sont des conditions de mur.
- Il peut surtout être utilisé pour déboguer un problème de programmation de flux numérique.

Test de Thacker : le paraboloïde inversé

Nous utilisons la configuration donnée dans Marche et al. [2007]. Le domaine est défini par

$$(x, y) \in [0, 4 \text{ m}] \times [0, 4 \text{ m}]$$

La topographie est un paraboloïde centré en $(2, 2)$ d'équation

$$z(x, y) = z_0 (r^2 - 1),$$

avec $r^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$.

Ce test admet une solution analytique périodique donnée à l'instant t par

$$h(t, x, y) = h_0 \left[\frac{(1 - A^2)^{1/2}}{1 - A \cos(\omega t)} - 1 - r^2 \left(\frac{1 - A^2}{(1 - A \cos(\omega t))^2} - 1 \right) \right]$$

et

$$u = \frac{1}{1 - A \cos(\omega t)} \left(\frac{1}{2} \omega x A \sin(\omega t) \right), \quad v = \frac{1}{1 - A \cos(\omega t)} \left(\frac{1}{2} \omega y A \sin(\omega t) \right)$$

7.2. PREMIERS TESTS NUMÉRIQUES

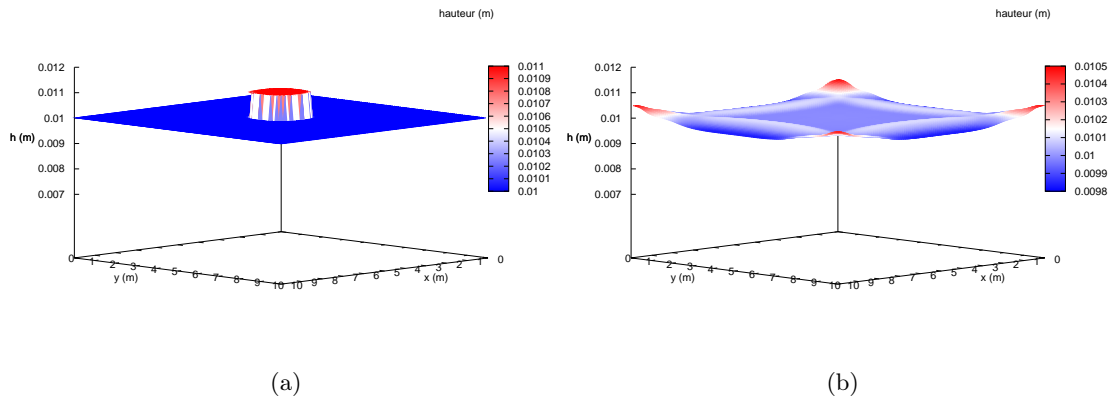


FIG. 7.8: Rupture de barrage radial sur fond mouillé : (a) Condition initiale et (b) au temps $t = 5$ s.

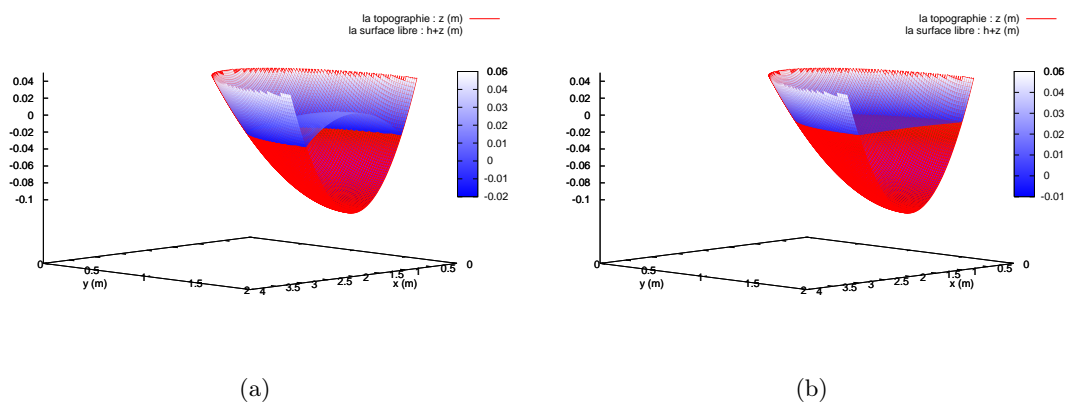


FIG. 7.9: Test de Thacker : (a) Condition initiale et (b) au temps $t = 500$ s.

7.2. PREMIERS TESTS NUMÉRIQUES

avec

$$A = \frac{1 - r_0^2}{1 + r_0^2} \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{8gh_0}$$

où $r_0 = 0.8$ m et $h_0 = 0.1$ m.

- La taille des mailles est $\Delta x = \Delta y = 0.02$ (soit 200 mailles dans les deux directions).
- La durée de la simulation est de 500 s (figure 7.9b).
- Les conditions de bord choisies sont des conditions de mur.

Ce test permet de tester la capacité d'une méthode numérique à traiter les transitions sec/mouillé en présence d'une topographie. La solution étant périodique, elle permet aussi de tester la diffusivité numérique d'un schéma.

Il faudra envisager d'intégrer de nouveaux tests notamment des tests avec frottement, pluie et infiltration.

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous nous sommes attachés à développer un modèle et une méthode numérique adaptée à la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles.

Nous avons choisi de modéliser ce type de problème à l'aide d'un modèle de Saint-Venant bidimensionnel. Les différentes propriétés de ce système : hyperbolicité et conservativité nous ont conduit à choisir un schéma aux volumes finis. Et l'existence d'équilibres stationnaires importants (les flaques d'eau) nous ont incité à choisir un schéma équilibré basé sur la méthode de reconstruction hydrostatique. Nous avons effectué la comparaison de différentes méthodes (flux numériques et reconstruction) à l'aide de solutions analytiques pour déterminer la méthode numérique la plus adaptée au problème qui nous intéresse. Notre choix s'est porté sur le flux HLL et la reconstruction MUSCL. Pour rendre le modèle plus réaliste, il est nécessaire de prendre différents termes sources supplémentaires les frottements afin de prendre en compte les effets du sol sur l'écoulement. La présence de ce terme source supplémentaire implique l'existence d'états d'équilibre plus complexes. Une comparaison systématique de différentes méthodes de traitement des frottements nous ont conduit à utiliser un traitement semi-implicite. La présence de ce terme de frottement permet l'apparition de solutions particulières : les rollwaves. Nous avons vérifié que notre méthode pouvait calculer correctement ces écoulements instables.

Pour rendre notre modèle plus complet, il a été nécessaire de prendre en compte l'ajout en eau dû à la pluie et le prélèvement dû à l'infiltration de l'eau dans le sol. La pluie est prise en compte en ajoutant un terme source au système de Saint-Venant. Ce terme source est traité explicitement. L'infiltration nécessite un couplage avec un modèle d'infiltration. Nous avons choisi le modèle de Green-Ampt. Nous avons effectué une validation du traitement du terme de pluie sur des solutions analytiques que nous avons développées. Enfin, nous avons réalisé une validation de notre méthode sur des mesures expérimentales. Tout ce travail de recherche nous a permis de développer le logiciel FullSWOF_2D, un code orienté objet en C++.

CONCLUSION

Annexe A

Propriétés supplémentaires du système de Saint-Venant

Nous avons vu dans le cadre du chapitre 1 que le système de Saint-Venant est un système hyperbolique de lois de conservation. Nous allons donner ici quelques propriétés supplémentaires : montrer le lien entre le système de Saint-Venant et l'équation des ondes. Puis par l'étude des invariants de Riemann nous allons généraliser les propriétés de transport d'onde. Enfin nous donnerons une description de différentes méthodes de traitement des conditions aux limites dont la méthode des caractéristiques basée sur les invariants de Riemann.

A.1 Saint-Venant et l'équation des ondes

Nous regardons les solutions $U = (h, hu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ du système de Saint-Venant homogène (1.2) que nous rappelons ci-dessous.

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = 0 \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Ce système a deux propriétés fondamentales qui sont la conservation et l'hyperbolicité ou le transport (voir le chapitre 1). Cette notion de transport peut aussi être vue en faisant le lien entre le système de Saint-Venant et l'équation des ondes.

Dans (A.1), nous posons

$$h = h_0 + \eta$$

et

$$u = u_0 + \nu,$$

où h_0 (respectivement u_0) est une hauteur d'eau (respectivement une vitesse) moyenne constante, η (respectivement ν) en est une petite perturbation.

En négligeant les "petits" termes, la première équation du système donne

$$\partial_t(h_0 + \eta) + \partial_x(hu) = \partial_t\eta + h\partial_x u + u\partial_x h = \partial_t\eta + h_0\partial_x\nu + u_0\partial_x\eta = 0.$$

En utilisant la première équation dans la deuxième, nous obtenons

$$h\partial_t u + gh\partial_x h + hu\partial_x u = 0.$$

Pour $h \neq 0$,

$$\partial_t u + g\partial_x h + u\partial_x u = 0,$$

A.2. INVARIANTS DE RIEMANN

nous avons

$$\partial_t \nu + g \partial_x \eta + u_0 \partial_x \nu = 0.$$

Pour $u_0 = 0$, nous avons

$$\begin{cases} \partial_t \eta + h_0 \partial_x \nu = 0 \\ \partial_t \nu + g \partial_x \eta = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

d'où les équations d'onde

$$\partial_{t^2} \nu + g \partial_t \partial_x \eta = \partial_{t^2} \nu + g \partial_x \partial_t \eta = \partial_{t^2} \nu - gh_0 \partial_{x^2} \nu = 0$$

et

$$\partial_{t^2} \eta + h_0 \partial_t \partial_x \nu = \partial_{t^2} \eta + h_0 \partial_x \partial_t \nu = \partial_{t^2} \eta - gh_0 \partial_{x^2} \eta = 0.$$

Ce qui veut dire qu'une "partie" des perturbations se déplace à la vitesse $\sqrt{gh_0}$ et une autre "partie" à la vitesse $-\sqrt{gh_0}$. C'est ce que nous observons en jetant un caillou dans une flaque d'eau.

A.2 Invariants de Riemann

Dans ce qui précède, nous avons vu une relation entre le système de Saint-Venant et l'équation d'onde. Rappelons que ce système est hyperbolique, en effet :

$$\partial_x F(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2/h^2 + gh & 2q/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_x q \end{pmatrix} = F'(U) \cdot \partial_x U,$$

donc le système s'écrit :

$$\partial_t U + F'(U) \partial_x U = 0,$$

avec

$$F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2/h^2 + gh & 2q/h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix},$$

donc

$$\det(F'(U) - \lambda I) = \lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - gh = (\lambda - u)^2 - gh.$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh} \text{ et } \lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}.$$

Si $h > 0$, on a $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$. Donc en dehors des zones sèches, le système de Saint-Venant est un système strictement hyperbolique.

Soit la vitesse critique $c = \sqrt{gh}$, alors

$$\lambda_1(U) = u - c \text{ et } \lambda_2(U) = u + c.$$

Ces valeurs propres sont aussi appelées les vitesses caractéristiques, elles permettent de caractériser un écoulement.

Trois cas sont possibles :

- si $|u| < c$, l'écoulement est dit fluvial,
- si $|u| > c$, l'écoulement est dit torrentiel,
- si $|u| = c$, l'écoulement est dit critique.

A l'aide du système (A.1), nous obtenons le système de Saint-Venant sous forme non conservative

$$\begin{cases} \partial_t h + u \partial_x h + h \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + g \partial_x h + u \partial_x u = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

Comme $h = c^2/g$,

$$\partial_t(2c) + u \partial_x(2c) + c \partial_x u = 0, \quad (\text{A.4})$$

A.3. CONDITIONS AUX LIMITES

et

$$\partial_t u + c \partial_x (2c) + u \partial_x u = 0. \quad (\text{A.5})$$

La somme de (A.4) et de (A.5) donne

$$\partial_t (u + 2c) + (u + c) \partial_x (2c + u) = 0,$$

donc nous avons $\frac{d(u + 2c)}{dt} = 0$ ou encore $u + 2c = Cte$ sur la courbe C_+ d'équation $\frac{dx}{dt} = u + c$, la différence de (A.4) et de (A.5) donne :

$$\partial_t (2c - u) + (u - c) \partial_x (2c - u) = 0,$$

donc nous avons $\frac{d(u - 2c)}{dt} = 0$ ou encore $u - 2c = Cte$ sur la courbe C_- d'équation $\frac{dx}{dt} = u - c$. $u + 2\sqrt{gh}$ (respectivement $u - 2\sqrt{gh}$) est donc l'invariant de Riemann correspondant à l'onde $u + \sqrt{gh}$ (respectivement à $u - \sqrt{gh}$).

Nous représentons les caractéristiques dans un repère (O, x, t) voir fig. A.1. Nous nous plaçons dans la situation où l'axe des x est orienté dans le même sens que l'écoulement (donc $u > 0$). Comme $u + c > 0$, alors quel que soit le type de courant, nous avons $u > 0$, donc $u + c > 0$. La caractéristique C_+ descend donc le courant.

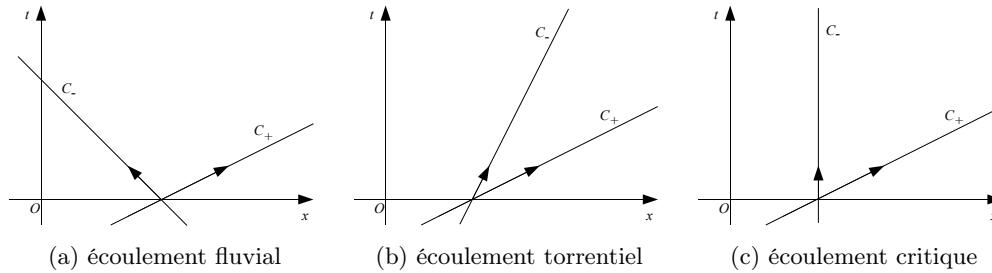


FIG. A.1: Les caractéristiques pour les différents types d'écoulements.

Dans le cas d'un écoulement fluvial ($u < c$), nous avons $u - c < 0$. La caractéristique C_- remonte le courant, une perturbation de la surface libre remonte et descend le courant (fig. A.1a).

Pour un écoulement torrentiel ($u > c$), nous avons $u - c > 0$. La caractéristique C_- descend le courant. Donc la perturbation ne peut pas remonter le courant (fig. A.1b).

Enfin, dans le cas d'un écoulement critique ($u = c$), nous avons $u - c = 0$. La caractéristique C_- est stationnaire. Donc ici encore, la perturbation ne peut remonter le courant (fig. A.1c). Il faut aussi constater que pour un écoulement critique, le débit est fixé. En effet, nous avons $q = uh = \sqrt{gh}^3/2$.

Comme nous le verrons plus loin, les caractéristiques et les invariants de Riemann vont être utiles pour prescrire les conditions aux limites si les bords sont liquides.

A.3 Conditions aux limites

Les méthodes les plus utilisées pour traiter les conditions aux limites sont les méthodes d'extrapolation constante et d'extrapolation linéaire dans l'espace.

A.3. CONDITIONS AUX LIMITES

Soient $U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, U_{J-2}^{n+1}$ et U_{J-1}^{n+1} , les valeurs calculées au temps t_{n+1} à l'aide du schéma numérique, les valeurs U_0^{n+1} et U_J^{n+1} sont calculées à l'aide d'une extrapolation constante par :

$$\begin{cases} U_0^{n+1} = U_1^{n+1} \\ U_J^{n+1} = U_{J-1}^{n+1} \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

ou à l'aide d'une extrapolation linéaire par :

$$\begin{cases} U_0^{n+1} = 2.U_1^{n+1} - U_2^{n+1} \\ U_J^{n+1} = 2.U_{J-1}^{n+1} - U_{J-2}^{n+1} \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

Le traitement des conditions aux limites par ces méthodes, présente l'inconvénient de ne pas tenir compte des caractéristiques de l'écoulement. Dans ce qui va suivre, nous allons voir comment nous pouvons tenir compte de ces caractéristiques.

Considérons la résolution du système de Saint-Venant pour $x \in [0, L]$.

Nous définissons $U_{bord} = U(0)$ ou $U(L)$ et $U_{acote} = U(\Delta x)$ ou $U(L - \Delta x)$, suivant le bord considéré ($x = 0$ ou $x = L$).

– condition aux limites pour un écoulement fluvial

Considérons l'écoulement fluvial au bord, nous avons donc $|u_{bord}| < \sqrt{gh_{bord}}$, c'est à dire

$$(u_{bord} - \sqrt{gh_{bord}})(u_{bord} + \sqrt{gh_{bord}}) < 0. \quad (\text{A.8})$$

Supposons la hauteur d'eau donnée :

$$h_{bord} = h_0.$$

Nous nous plaçons en $x = 0$. L'invariant de Riemann est constant le long de la caractéristique sortante $u - \sqrt{gh}$.

Nous avons alors :

$$\begin{cases} h_{bord} = h_0 \\ u_{bord} = u_{acote} - 2\sqrt{g}(\sqrt{h_{acote}} - \sqrt{h_{bord}}) \end{cases}. \quad (\text{A.9})$$

En $x = L$, avec un raisonnement analogue, nous avons :

$$\begin{cases} h_{bord} = h_0 \\ u_{bord} = u_{acote} + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_{acote}} - \sqrt{h_{bord}}) \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

Attention, si le couple (h_{bord}, u_{bord}) ne vérifie pas (A.8), alors l'écoulement est en fait torrentiel, il faut alors se reporter aux paragraphes suivants. Dans cette situation, nous devons distinguer deux cas : la sortie et l'entrée.

Remarque : nous pouvons aussi donner le flux au bord, mais cela demande plus de travail.

– condition aux limites pour une sortie torrentielle

Nous avons $|u| > \sqrt{gh}$ donc les deux invariants de Riemann sont constants le long des caractéristiques sortantes.

Nous avons donc :

$$\begin{cases} u_{bord} - 2\sqrt{gh_{bord}} = u_{acote} - 2\sqrt{gh_{acote}} \\ u_{bord} + 2\sqrt{gh_{bord}} = u_{acote} + 2\sqrt{gh_{acote}} \end{cases}, \quad (\text{A.11})$$

nous en déduisons que :

$$\begin{cases} h_{bord} = h_{acote} \\ u_{bord} = u_{acote} \end{cases}. \quad (\text{A.12})$$

– condition aux limites pour une entrée torrentielle

Les caractéristiques sont entrantes, nous devons donc imposer h_{bord} et u_{bord} . Nous pouvons aussi imposer h_{bord} et q_{bord} , dans ce cas nous déduisons u_{bord} à l'aide du flux numérique.

Annexe B

Solutions analytiques

Dans ce chapitre nous reprenons la démonstration d'un certain nombre de solutions analytiques du système de Saint-Venant. Certaines sont assez classiques et d'autres beaucoup moins.

B.1 Ruptures de barrage

Dans cette partie, nous allons décrire un cas test classique : la rupture de barrage.

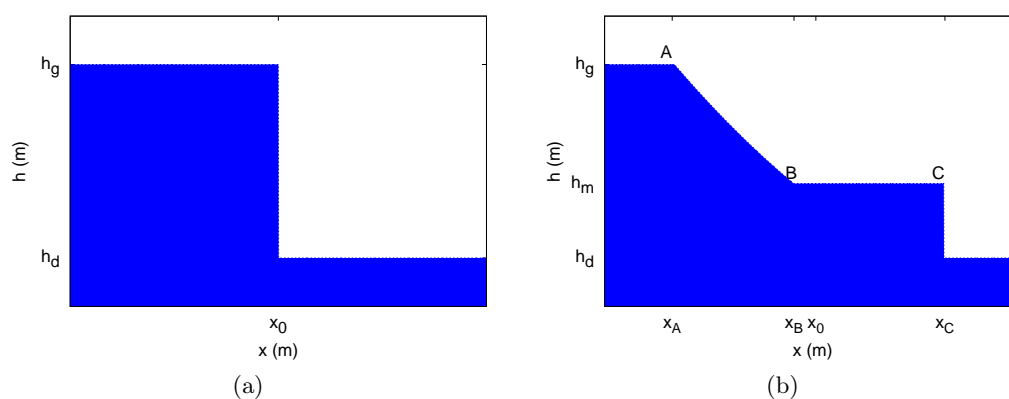


FIG. B.1: Rupture de barrage sur fond mouillé : (a) pour $t = 0$, (b) pour $t > 0$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ la position du barrage, nous avons une condition initiale en hauteur d'eau de type Riemann (figure B.1a)

$$h(0, x) = \begin{cases} h_g & \text{pour } x \leq x_0 \\ h_d & \text{pour } x_0 < x \end{cases}, \quad (\text{B.1})$$

avec

$$0 \leq h_d \leq h_g,$$

donc h_g (respectivement h_d) est la hauteur d'eau en amont (respectivement en aval) du barrage.

La condition initiale en vitesse est :

$$u(0, x) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

B.1. RUPTURES DE BARRAGE

Nous considérons une rupture de barrage idéale : la rupture à $t = 0$ est instantanée et il n'y a pas de frottement sur le fond. Ce cas test a une solution analytique que nous obtenons à l'aide des invariants de Riemann et de la méthode des caractéristiques.

Pour simplifier la description de cette solution analytique, nous considérons que le barrage se trouve en $x_0 = 0$ (pour les simulations numériques, nous pouvons faire une translation de la solution).

Nous nous intéressons à la solution au temps $t > 0$ après la rupture. Nous observons une détente de forme parabolique (entre les points A et B) liant h_g à une valeur intermédiaire h_m , suivie d'un choc (en C) liant h_m à h_d (figure B.1b).

Soit les célérités $c_g = \sqrt{gh_g}$, $c_m = \sqrt{gh_m}$, $c_d = \sqrt{gh_d}$ et u_m la vitesse de l'eau dans la zone à l'état m (entre B et C).

À l'aide des invariants de Riemann et de la théorie des caractéristiques, nous obtenons la célérité et la vitesse pour $x \in [x_A, x_B]$:

$$\begin{cases} c = \sqrt{gh} = \frac{2}{3} \left(c_g - \frac{x}{2t} \right) \\ u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_g \right) \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

d'où

$$h = \frac{4}{9g} \left(c_g - \frac{x}{2t} \right)^2.$$

Comme le point B appartient à la fois à la zone m et à la détente, par les invariants de Riemann, nous avons :

$$u_m = 2(c_g - c_m).$$

Enfin, à l'aide des invariants de Riemann et d'une relation de saut (relation de Rankine-Hugoniot) liant l'état m à l'état d , nous obtenons la vitesse de déplacement du choc :

$$v_c = \frac{h_m u_m}{h_m - h_d},$$

ainsi qu'une équation permettant d'obtenir c_m donc h_m :

$$-8c_d^2 c_m^2 (c_g^2 - c_m^2)^2 + (c_m^2 - c_d^2)^2 (c_m^2 + c_d^2) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Au temps $t > 0$, les points A, B et C se trouvent respectivement en :

- $x_A(t) = -c_g t$,
- $x_B(t) = (u_m - c_m) t = (2c_g - 3c_m) t$,
- $x_C(t) = v_c t$.

En résumé, nous avons :

$$(h(t, x), u(t, x)) = \begin{cases} (h_g, 0) & \text{si } x \leq x_A(t) \\ \left(\frac{4}{9g} \left(c_g - \frac{x}{2t} \right)^2, \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_g \right) \right) & \text{si } x_A(t) \leq x \leq x_B(t) \\ (h_m, 2(c_g - c_m)) & \text{si } x_B(t) \leq x \leq x_C(t) \\ (h_d, 0) & \text{si } x_C(t) \leq x \end{cases}, \quad (\text{B.4})$$

Cette solution est la solution de Stoker (voir Hervouet [2003, p. 133-135] et Audusse [1999, p. 70-72]). Ce cas test permet de tester la capacité d'un schéma à calculer la propagation d'un choc.

Il faut noter que si la rupture se fait sur sol sec $h_d = 0$, alors (B.3) devient :

$$c_m^6 = 0,$$

B.1. RUPTURES DE BARRAGE

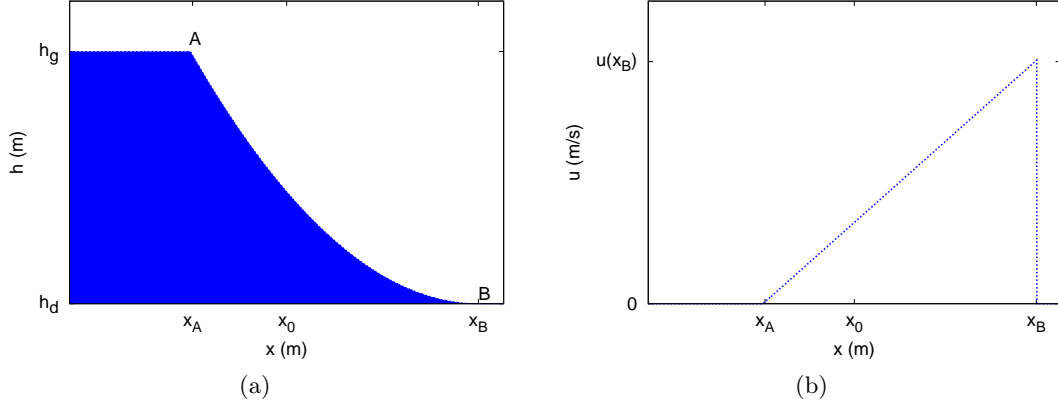


FIG. B.2: Rupture de barrage sur fond sec à $t > 0$: (a) hauteur d'eau, (b) vitesse.

donc

$$h_m = 0.$$

Dans ce cas, nous avons une perte d'hyperbolicité (hauteur d'eau nulle). Le choc disparaît, nous obtenons alors une détente (entre A et B) liant les états g et d (figure B.2a).

Au temps $t > 0$, les points A et B se trouvent respectivement en :

- $x_A(t) = -c_g t$,
- $x_B(t) = 2c_g t$,

et nous avons :

$$(h(t, x), u(t, x)) = \begin{cases} (h_g, 0) & \text{si } x \leq x_A(t) \\ \left(\frac{4}{9g} \left(c_g - \frac{x}{2t} \right)^2, \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_g \right) \right) & \text{si } x_A(t) \leq x \leq x_B(t) \\ (0, 0) & \text{si } x_B(t) \leq x \end{cases}, \quad (\text{B.5})$$

Cette solution est la solution de Ritter, elle permet de vérifier la capacité d'un schéma à calculer une transition sec/mouillé.

Remarque : au niveau du barrage en $x = 0$, à tout temps $t > 0$, nous avons :

$$(h(t, 0), u(t, 0)) = \left(\frac{4}{9} h_g, \frac{2}{3} c_g \right),$$

donc le profil de hauteur d'eau pivote autour du point $\left(0, \frac{4}{9} h_g \right)$.

Il est possible de généraliser la solution de Ritter en prenant en compte les effets des frottements sur l'écoulement. Il existe différentes approches qui permettent d'obtenir une solution analytique avec frottement, nous pouvons citer entre autres Dressler [1952, 1954], Viollet et al. [2002, p.287-290], Chanson [2005, 2006]. Nous allons donner ici la solution obtenue dans Dressler [1952] par développement asymptotique sans en reprendre la démonstration. Cette solution présente l'avantage d'être assez simple, d'être proche de la solution de Ritter et surtout de donner une assez bonne idée de la position de la transition sec/mouillé. La loi de frottement considérée est une loi de Chézy (voir Dressler [1952] et Goutal and Maurel [1997, p.26-28]) ou de Darcy-Weisbach (voir Chanson [2005, p.13]). Nous rappelons que ces deux lois sont de la même forme (voir le chapitre 3)

$$S_f = C_f \frac{u|u|}{h} = C_f \frac{q|q|}{h^3},$$

B.2. ECOULEMENTS SUR UNE BOSSE PARABOLIQUE

avec $C_f = 1/C^2$ pour la loi de Chézy et $C_f = f/(8g)$ pour la loi de Darcy-Weisbach. Dans ce qui suit nous donnons la solution de Dressler pour la loi de Darcy-Weisbach. Nous avons une condition initiale (à $t = 0$ s) qui est la même que pour la solution de Ritter, c'est à dire

$$(h(0, x), u(0, x)) = \begin{cases} (h_g, 0) & \text{si } x \leq 0 \\ (0, 0) & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous avons comme pour la solution de Ritter (voir (B.5))

$$(h(t, x), u(t, x)) = \begin{cases} (h_g, 0) & \text{si } x \leq x_A(t) \\ (0, 0) & \text{si } x_B(t) \leq x \end{cases} ,$$

avec $x_A(t) = -c_g t$ et $x_B(t) = 2c_g t$. La solution de Dressler diffère de la solution de Ritter dans la zone en mouvement pour $x \in [x_A(t), x_B(t)]$ (fig. B.3a). Dans cette zone la solution se décompose en deux parties :

- comme pour la solution de Ritter, nous avons une détente pour $x \in [x_A(t), x_T(t)]$. La surface libre et la vitesse sont données par

$$h(t, x) = \frac{1}{g} \left(\frac{c_g}{3} \left(2 - \frac{x}{c_g t} \right) + \frac{f}{8} g \alpha_1 t \right)^2 \quad (\text{B.6})$$

et

$$u(t, x) = \frac{2c_g}{3} \left(1 + \frac{x}{c_g t} \right) + \frac{f}{8} g \alpha_2 t \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{6}{5 \left(2 - \frac{x}{c_g t} \right)} - \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{135} \left(2 - \frac{x}{c_g t} \right)^{3/2}$$

et

$$\alpha_2 = \frac{12}{2 - \frac{x}{c_g t}} - \frac{8}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{189} \left(2 - \frac{x}{c_g t} \right)^{3/2} - \frac{108}{7 \left(2 - \frac{x}{c_g t} \right)^2} .$$

Nous avons $x_T(t) = \min_{x \in [x_A(t), x_B(t)]} u(t, x)$.

- au niveau du front d'onde ($x \in [x_T(t), x_B(t)]$), la vitesse est considérée comme étant constante (fig. B.3b). Ceci nous permet d'affiner le calcul de la position de l'interface sec/mouillé $x_I(t)$ à l'aide d'une méthode itérative. Par contre la méthode de Dressler ne nous permet pas de calculer la forme de la surface libre dans cette zone.

A l'aide d'une interpolation de degré deux utilisée dans Valiani et al. [1999b, 2002] et conseillée par Valerio Caleffi¹, nous sommes en mesure d'affiner le calcul de la position de la transition sec/mouillé et de calculer la forme de la surface libre au niveau du front d'onde (fig. B.3c). Ainsi nous avons aussi une idée de l'allure du profil du débit (fig. B.3d).

B.2 Ecoulements sur une bosse parabolique

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'obtention des cas tests utilisés pour comparer les flux numériques (voir section 2.2.1.2). Pour cela, nous allons nous inspirer de ce qui a été fait dans Viollet et al. [2002, p. 335-338] et dans Audusse [1999, p. 73-76] (d'après une idée introduite dans Houghton and Kasahara [1968]).

¹Università degli Studi di Ferrara - Dipartimento di Ingegneria

B.2. ECOULEMENTS SUR UNE BOSSE PARABOLIQUE

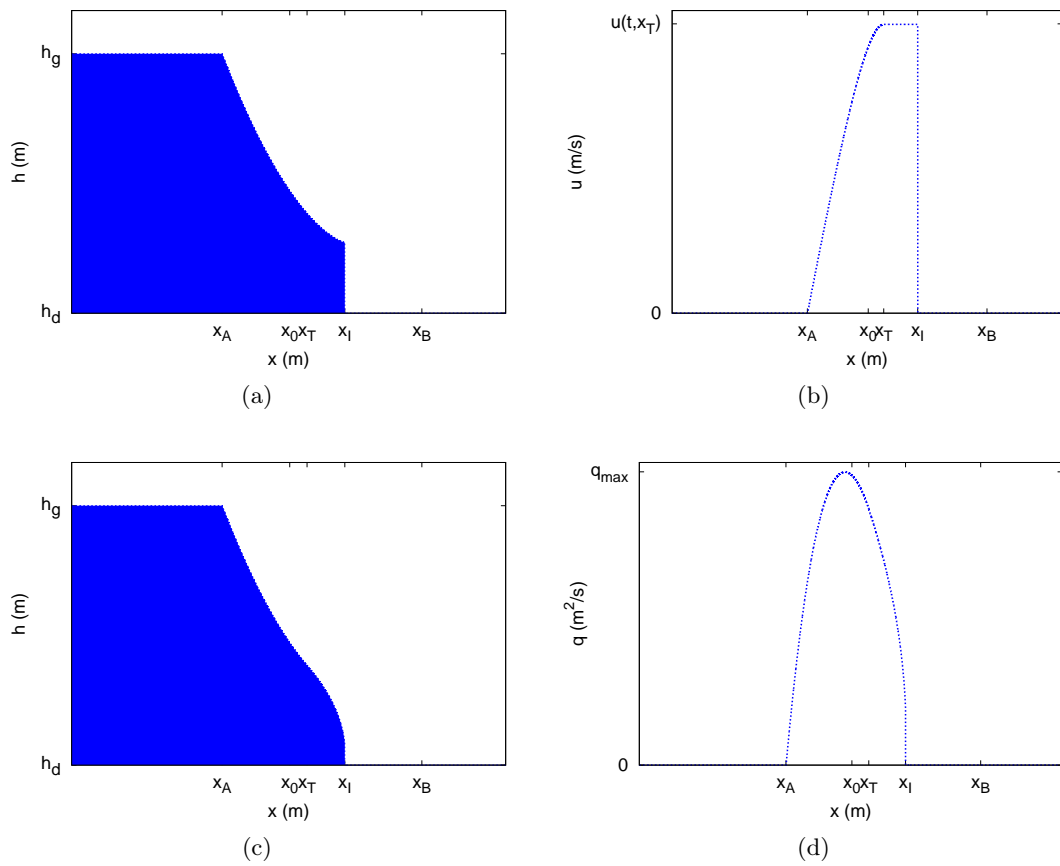


FIG. B.3: Solution de Dressler à $t > 0$: (a) hauteur d'eau, (b) vitesse, (c) hauteur d'eau modifiée et (d) débit.

B.2. ECOULEMENTS SUR UNE BOSSE PARABOLIQUE

Nous rappelons que l'alimentation des cas tests à la section 2.2.1.2 est fluviale :

$$q_0/h_0 - \sqrt{gh_0} < 0 \text{ avec } h(0) = h_0 \text{ et } q(0) = q_0 > 0$$

et la topographie (pour $x \in [0, 25]$) est définie par :

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.005(x - 10)^2 & \text{si } 8 \text{ m} < x < 12 \text{ m,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Les solutions utilisées à la section 2.2.1.2 sont des solutions particulières du système de Saint-Venant sans frottement : des équilibres stationnaires.

Nous avons donc $\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0$. Avec l'équation de conservation de la masse, nous obtenons la conservation du débit : $h(x)u(x) = q(x) = q_0$.

A partir de l'équation de quantité de mouvement, nous avons

$$\partial_x \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x z,$$

soit encore

$$u\partial_x u + g\partial_x h = -g\partial_x z, \text{ pour } h \neq 0. \quad (\text{B.9})$$

Donc pour une solution régulière (sans ressaut), nous avons la relation de Bernoulli :

$$H(x) = \frac{u(x)^2}{2g} + z(x) + h(x) = \text{Cte.}$$

Dans cette égalité, H est la charge totale hydraulique, qui est donc conservée ; nous notons H_0 sa valeur.

Puisque le débit est constant et vaut $q(x) = q_0$, la relation de Bernoulli s'écrit sous la forme :

$$\frac{q_0^2}{2gh(x)^2} + z(x) + h(x) = H_0. \quad (\text{B.10})$$

Avec cette relation et (B.8), nous pouvons facilement montrer que nous avons :

$$h(x) = h(0), \forall x \in [0, 8] \text{ et } h(x) = h(25), \forall x \in [12, 25].$$

Il nous reste donc à décrire l'écoulement sur la bosse, pour $x \in [8, 12]$.

En écrivant la conservation du débit sous la forme

$$u\partial_x h + h\partial_x u = 0,$$

avec (B.9), nous obtenons :

$$\frac{(u^2 - gh)}{u} \partial_x u + g\partial_x z = 0, \text{ pour } u \neq 0. \quad (\text{B.11})$$

Au point où l'obstacle est le plus haut, c'est-à-dire où $\partial_x z = 0$, l'équation peut être satisfaite :

- a) en annulant la dérivée de la vitesse : $\partial_x u = 0$,
- b) ou en annulant $u^2 - gh$.

Rappelons que l'écoulement est fluvial en amont de l'obstacle ($u_0 < \sqrt{gh}$). Examinons le signe des différents termes de l'équation. Nous avons :

$$\partial_x z \begin{cases} > 0, & \text{pour } x \in]8, 10[\\ = 0, & \text{pour } x = 10 \\ < 0, & \text{pour } x \in]10, 12[\end{cases},$$

ainsi nous obtenons le tableau de signes (tab. B.1).

B.2. ECOULEMENTS SUR UNE BOSSE PARABOLIQUE

x	$\partial_x z$	$(u^2 - gh)\partial_x u$	a)			b)		
			$u^2 - gh$	$\partial_x u$	$\partial_x h$	$u^2 - gh$	$\partial_x u$	$\partial_x h$
$]8,10[$	+	-	-	+	-	-	+	-
10	0	0	-	0	0	0	+	-
$]10,12[$	-	+	-	-	+	+	+	-

TAB. B.1: Tableau de signes des différents éléments de l'expression (B.11)

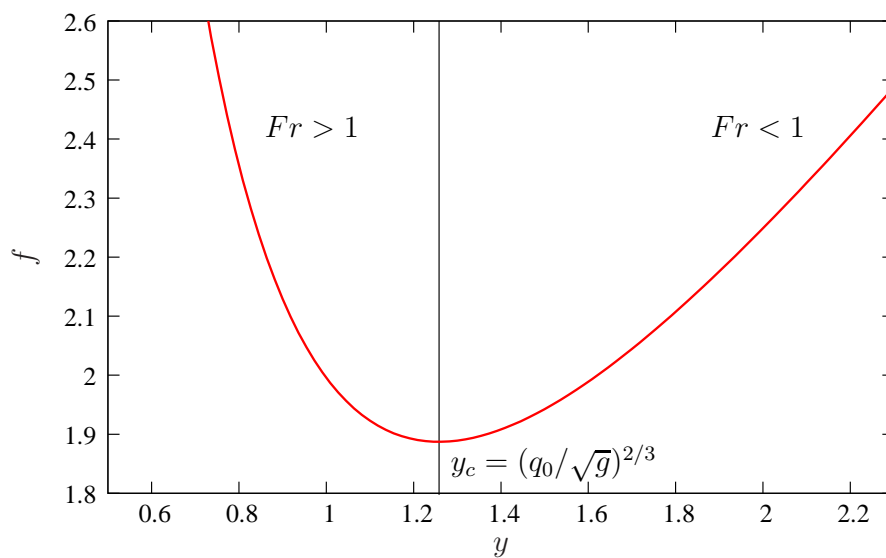


FIG. B.4: Fonction f .

B.2. ECOULEMENTS SUR UNE BOSSE PARABOLIQUE

- dans le premier cas (a), l'écoulement reste fluvial. L'épaisseur de la couche d'eau (respectivement la vitesse) diminue (resp. augmente) sur la face amont de l'obstacle pour augmenter (resp. diminuer) sur la face aval. Avec (B.9) et la conservation du débit ($q(x) = h(x)u(x) = q_0$), nous avons :

$$-\partial_x z = \partial_x \left(\frac{q_0^2}{2gh(x)^2} + h(x) \right). \quad (\text{B.12})$$

Or z est symétrique par rapport à $x = 10$, donc par (B.12), la charge spécifique

$$H_s(x) = \frac{q_0^2}{2gh(x)^2} + h(x)$$

est symétrique par rapport à $x = 10$.

De plus, la fonction $f(y) = \frac{q_0^2}{2gy^2} + y$ est bijective sur $[y_c, +\infty[$ (fig. B.4), où y_c correspond à la hauteur critique (B.14) associée au débit q_0 . L'écoulement est fluvial donc nous avons $h(x) > y_c, \forall x \in [0, 25]$.

L'image réciproque d'une fonction symétrique par une fonction bijective est une fonction symétrique, donc h est symétrique par rapport à $x = 10$. La conservation du débit, nous permet d'en déduire la symétrie de la vitesse par rapport à $x = 10$. Par symétrie, la hauteur et la vitesse retrouvent donc leurs valeurs d'entrée. L'écoulement étant fluvial, il dépend de l'écoulement en amont, mais aussi de l'écoulement en aval (A.2). Nous imposons donc le débit q_0 en entrée et la hauteur h_{25} en sortie.

Par la relation de Bernoulli (B.10), nous avons :

$$\frac{q_0^2}{2gh_{25}^2} + h_{25} + z(25) = \frac{q_0^2}{2gh_{25}^2} + h_{25} = \frac{q_0^2}{2gh(x)^2} + h(x) + z(x), \forall x \in [0, 25].$$

Nous obtenons donc la hauteur d'eau en résolvant l'équation du troisième degré suivante :

$$h(x)^3 + \left(z(x) - \frac{q_0^2}{2gh_{25}^2} - h_{25} \right) h(x)^2 + \frac{q_0^2}{2g} = 0, \forall x \in [0, 25]. \quad (\text{B.13})$$

La solution obtenue correspond à l'écoulement fluvial utilisé à la section 2.2.1.2.

- dans le second cas (b), la vitesse augmente et devient torrentielle en aval de l'obstacle. La partie torrentielle de l'écoulement dépend uniquement de l'amont. La hauteur en sortie à l'équilibre est donc inconnue. Cependant, nous avons toujours la conservation du débit $q(x) = q_0, \forall x \in [0, 25]$. De plus, l'écoulement est critique en $x = 10$, nous avons donc $q_0/h_c - \sqrt{gh_c} = 0$ avec $h(10) = h_c$. Ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$h_c = \left(\frac{q_0}{\sqrt{g}} \right)^{2/3}, \quad (\text{B.14})$$

où l'on retrouve la hauteur critique h_c .

Par la relation de Bernoulli (B.10), nous avons :

$$\frac{q_0^2}{2gh_c^2} + h_c + z(10) = \frac{q_0^2}{2gh(x)^2} + h(x) + z(x), \forall x \in [0, 25].$$

Nous obtenons donc la hauteur d'eau en résolvant l'équation du troisième degré suivante :

$$h(x)^3 + \left(z(x) - \frac{q_0^2}{2gh_c^2} - h_c - z(10) \right) h(x)^2 + \frac{q_0^2}{2g} = 0, \forall x \in [0, 25]. \quad (\text{B.15})$$

La solution obtenue est l'écoulement transcritique utilisé à la section 2.2.1.2.

B.3. SOLUTIONS DE SAMPSON ET DE THACKER 1D

Maintenant, nous considérons l'écoulement transcritique avec choc. La discontinuité ne permet pas d'utiliser la relation de Bernoulli sur tout le domaine. Cependant, l'écoulement est fluvial en entrée, devient torrentiel au sommet de la bosse puis redevient fluvial au passage du choc. Ainsi, nous utilisons l'équation (B.15) en amont du ressaut puis l'équation (B.13) en aval pour déterminer la hauteur d'eau de l'écoulement.

Il nous reste à déterminer la position x_{res} du ressaut. Pour cela, nous avons la conservation du débit et de la quantité de mouvement (ou de l'impulsion) qui s'écrivent sous la forme (voir Viollet et al. [2002, p. 258-260] et Hervouet [2003, p. 44-45]) :

$$\begin{cases} h_1 u_1 = h_2 u_2 = q_0 \\ h_1 u_1^2 + g \frac{h_1^2}{2} = h_2 u_2^2 + g \frac{h_2^2}{2} \end{cases}, \quad (\text{B.16})$$

où h_1 et u_1 (resp. h_2 et u_2) sont la hauteur d'eau et la vitesse en amont (resp. en aval) du ressaut en x_{res}^- (resp. en x_{res}^+). Une solution évidente est $h_1 = h_2$ et $u_1 = u_2$ qui correspond à un écoulement régulier. La deuxième équation de (B.16) se réécrit

$$h_1 u_1^2 - h_2 u_2^2 + g \frac{h_1^2}{2} - g \frac{h_2^2}{2} = 0,$$

que nous pouvons écrire sous la forme :

$$q_0^2 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \frac{g}{2} (h_1^2 - h_2^2) = 0 \quad (\text{B.17})$$

qui est une relation de conjugaison sur les hauteurs.

Avec (B.15), (B.13) et (B.17), nous obtenons le système :

$$\begin{cases} h(x_{res})^3 + \left(z(x_{res}) - \frac{q_0^2}{2gh_c^2} - h_c - z(10) \right) h(x_{res})^2 + \frac{q_0^2}{2g} = 0 \\ h(x_{res})^3 + \left(z(x_{res}) - \frac{q_0^2}{2gh_{25}^2} - h_{25} \right) h(x_{res})^2 + \frac{q_0^2}{2g} = 0 \\ q_0^2 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \frac{g}{2} (h_1^2 - h_2^2) = 0 \end{cases},$$

qui nous permet de déterminer h_1 , h_2 , $z(x_{res})$ et surtout x_{res} . L'écoulement est ainsi entièrement déterminé.

B.3 Solutions de Sampson et de Thacker 1d

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'obtention des cas tests utilisés pour comparer les flux numériques (voir le chapitre 2.2.1.3) et les différentes façons de traiter les frottements (ce que nous n'avons eu le temps d'essayer). Pour cela, nous allons nous inspirer de ce qui a été fait dans Thacker [1981], Sampson et al. [2006] et Sampson [2008, p. 53-71].

Dans la suite, nous considérons le système de Saint-Venant suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -\tau hu - gh\partial_x z \end{cases},$$

et une topographie de la forme :

$$z = h_0 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right), \quad (\text{B.18})$$

B.3. SOLUTIONS DE SAMPSON ET DE THACKER 1D

où h_0 et a sont des constantes. Le terme de frottement n'est pas un terme classique de frottement en hydrologie, mais il permet d'obtenir des solutions analytiques évolutives en temps.

La topographie est indépendante du temps, donc nous pouvons écrire l'équation de conservation de la masse sous la forme :

$$\partial_t(h+z) + \partial_x(hu) = 0 \quad (\text{B.19})$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement nous donne pour $h \neq 0$:

$$\partial_t u + u \partial_x u + \tau u + g \partial_x(h+z) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Nous recherchons la vitesse sous la forme d'une fonction du temps :

$$u = u_0(t), \quad (\text{B.21})$$

en injectant (B.21) dans (B.20), nous avons

$$\partial_t u_0(t) + \tau u_0 + g \partial_x(h+z) = 0,$$

à tout instant t , la surface libre est donc plane

$$h+z = F_0(t) + F_1(t, x) = F_0(t) - \frac{x}{g} (\partial_t u_0 + \tau u_0), \quad (\text{B.22})$$

en utilisant (B.18) et (B.22) dans (B.19), nous obtenons :

$$\partial_t \left[F_0(t) - \frac{x}{g} (\partial_t u_0 + \tau u_0) \right] + \partial_x \left[\left(F_0(t) - \frac{x}{g} (\partial_t u_0 + \tau u_0) + h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right) u_0 \right] = 0,$$

soit encore

$$\partial_t F_0(t) - \frac{x}{g} (\partial_t^2 u_0 + \tau \partial_t u_0) - \left(\frac{1}{g} (\partial_t u_0 + \tau u_0) + \frac{2h_0 x}{a^2} \right) u_0 = 0,$$

par identification des puissances de x , nous obtenons deux équations :

$$\partial_t F_0(t) - \frac{u_0}{g} \partial_t u_0 - \frac{\tau}{g} u_0^2 = 0 \quad (\text{B.23})$$

et

$$\partial_t^2 u_0(t) + \tau \partial_t u_0(t) + \frac{2gh_0}{a^2} u_0(t) = 0. \quad (\text{B.24})$$

L'équation caractéristique de (B.24) est

$$\lambda^2 + \tau \lambda + \frac{2gh_0}{a^2} = 0, \quad (\text{B.25})$$

dont les racines sont

$$\lambda_1 = \frac{-\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\omega^2}}{2},$$

avec $\omega = \sqrt{2gh_0/a^2}$, ou encore

$$\lambda_1 = \frac{-\tau - \sqrt{\tau^2 - p^2}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-\tau + \sqrt{\tau^2 - p^2}}{2}, \quad (\text{B.26})$$

avec $p = 2\omega$.

Trois cas sont possibles :

- $0 \leq \tau < p$,
- $\tau = p$,

B.3. SOLUTIONS DE SAMPSON ET DE THACKER 1D

– $\tau > p$.

Dans la suite, nous allons uniquement nous intéresser à la première situation. Pour les deux autres cas, nous renvoyons le lecteur vers Sampson et al. [2006] et Sampson [2008, p. 64-71].

Pour $\tau < p$, les deux racines (B.26) de l'équation caractéristique (B.25) sont complexes conjuguées, donc l'équation différentielle (B.24) a pour solution

$$u_0(t) = [A \cos(st) + B \sin(st)] e^{-\tau t/2},$$

où A et B sont des constantes et

$$s = \frac{\sqrt{p^2 - \tau^2}}{2} = \frac{\sqrt{4\omega^2 - \tau^2}}{2}.$$

Nous supposons la vitesse initiale nulle, donc

$$u_0(t) = B \sin(st) e^{-\tau t/2}. \quad (\text{B.27})$$

En injectant (B.27) dans (B.23), nous obtenons

$$\partial_t F_0(t) = \frac{B^2}{g} \sin(st) e^{-\tau t} \left[s \cos(st) + \frac{\tau}{2} \sin(st) \right].$$

Après intégration suivant t et différents calculs, nous obtenons

$$F_0(t) = -\frac{B^2}{g} \frac{e^{-\tau t}}{4s^2 + \tau^2} \left(\sqrt{2}s \cos(st) + \frac{\tau}{\sqrt{2}} \sin(st) \right)^2 + C, \quad (\text{B.28})$$

où C est une constante d'intégration à déterminer.

Nous avons :

$$F_1(t, x) = -\frac{x}{g} [\partial_t u_0 + \tau u_0],$$

soit encore

$$F_1(t, x) = -\frac{x}{g} B e^{-\tau t/2} \left(s \cos(st) - \frac{\tau}{2} \sin(st) + \tau \sin(st) \right). \quad (\text{B.29})$$

En injectant (B.28) et (B.29) dans (B.22), nous obtenons l'équation sur la surface libre suivante

$$h + z = -\frac{B^2}{g} \frac{e^{-\tau t}}{4s^2 + \tau^2} \left(\sqrt{2}s \cos(st) + \frac{\tau}{\sqrt{2}} \sin(st) \right)^2 - \frac{x}{g} B e^{-\tau t/2} \left(s \cos(st) + \frac{\tau}{2} \sin(st) \right) + C. \quad (\text{B.30})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h + z = C$$

Pour $\tau > 0$, les frottements amortissent les oscillations. La surface libre tend vers une surface libre horizontale dont la cote est C . Nous prenons $C = 0$. Avec (B.18) et (B.30), l'équation sur la hauteur d'eau s'écrit donc

$$h = -\frac{B^2}{g} \frac{e^{-\tau t}}{4s^2 + \tau^2} \left(\sqrt{2}s \cos(st) + \frac{\tau}{\sqrt{2}} \sin(st) \right)^2 - \frac{x}{g} B e^{-\tau t/2} \left(s \cos(st) + \frac{\tau}{2} \sin(st) \right) + h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Nous avons

$$4s^2 + \tau^2 = p^2 = \frac{8gh_0}{a^2}$$

après calculs, nous avons

$$h = -\frac{h_0}{a^2} \left(x^2 + \frac{Ba^2}{gh_0} e^{-\tau t/2} \left(s \cos(st) + \frac{\tau}{2} \sin(st) \right) x + \left(\frac{Ba^2}{2gh_0} \right)^2 e^{-\tau t} \left(s \cos(st) + \frac{\tau}{2} \sin(st) \right)^2 - a^2 \right)$$

B.3. SOLUTIONS DE SAMPSON ET DE THACKER 1D

Nous recherchons la position des interfaces sec/mouillé au cours du temps, ce qui revient à résoudre en fonction de x , l'équation $h = 0$. Nous avons donc

$$x^2 + \frac{Ba^2}{gh_0} e^{-\tau t/2} \left(s \cos(st) + \frac{\tau}{2} \sin(st) \right) x + \left(\frac{Ba^2}{2gh_0} \right)^2 e^{-\tau t} \left(s \cos(st) + \frac{\tau}{2} \sin(st) \right)^2 - a^2 = 0,$$

soit encore

$$\left(x + \frac{a^2 e^{-\tau t/2}}{2gh_0} \left(Bs \cos(st) + \frac{\tau B}{2} \sin(st) \right) \right)^2 - a^2 = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont

$$x_1 = -\frac{a^2 e^{-\tau t/2}}{2gh_0} \left(Bs \cos(st) + \frac{\tau B}{2} \sin(st) \right) - a$$

et

$$x_2 = -\frac{a^2 e^{-\tau t/2}}{2gh_0} \left(Bs \cos(st) + \frac{\tau B}{2} \sin(st) \right) + a.$$

En résumé, nous avons donc

$$h(t, x) = \begin{cases} -\frac{h_0}{a^2} \left(\left(x + \frac{a^2 e^{-\tau t/2}}{2gh_0} \left(Bs \cos(st) + \frac{\tau B}{2} \sin(st) \right) \right)^2 - a^2 \right) & \text{pour } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$u(t, x) = \begin{cases} B \sin(st) e^{-\tau t/2} & \text{pour } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans le cas particulier sans frottement ($\tau = 0$), la surface libre oscille entre les points

$$x_1 = -\frac{a^2}{2gh_0} B\omega \cos(\omega t) - a = -\frac{B}{\omega} \cos(\omega t) - a$$

et

$$x_2 = -\frac{a^2}{2gh_0} B\omega \cos(\omega t) + a = -\frac{B}{\omega} \cos(\omega t) + a$$

avec la période

$$T = 2\pi/\omega$$

et la pulsation

$$\omega = \sqrt{2gh_0/a^2}.$$

La surface libre est décrite par l'équation

$$h(t, x) = \begin{cases} -\frac{h_0}{a^2} \left(\left(x + \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) \right)^2 - a^2 \right) & \text{pour } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la vitesse par

$$u(t, x) = \begin{cases} B \sin(\omega t) & \text{pour } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, la solution sans frottement est aussi un cas particulier d'une des situations obtenues dans Thacker [1981] et reprise dans Sampson et al. [2006] et Sampson [2008, p. 53-56]. En effet, Thacker [1981], Sampson et al. [2006] et Sampson [2008, p. 53-56] obtiennent une solution avec force de Coriolis et il suffit de la considérer nulle pour retrouver la solution sans frottement.

B.4 Ecoulements stationnaires

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'obtention de solutions analytiques avec frottements (utilisées dans le chapitre 3), avec terme de pluie (utilisées dans le chapitre 5), avec terme de diffusion. MacDonald [1994, 1996], MacDonald et al. [1997] se sont intéressés aux solutions stationnaires du système de Saint-Venant 1d à section variable (ou pseudo-2d) avec frottements de Manning. Dans Vo Thi Ngoc [2008], Delestre et al. [2009] et Delestre and James [2009], cette idée a été adaptée au système de Saint-Venant 1d avec frottements de Manning et frottements de Darcy-Weisbach. Rappelons brièvement l'obtention de ces solutions. Nous recherchons des solutions stationnaires, nous avons donc

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0,$$

l'équation de conservation de la masse nous donne donc la conservation du débit (comme à la section B.2)

$$q(x) = Cte.$$

L'équation de quantité de mouvement s'écrit

$$hu\partial_x u + u\partial_x(hu) + gh\partial_x h = gh(S_0 - S_f).$$

A l'aide de la relation $hu = q$ et de la conservation du débit, nous obtenons

$$\partial_x z = \left(\frac{q^2}{gh^3} - 1 \right) \partial_x h - S_f. \quad (\text{B.31})$$

Habituellement, les inconnues du système de Saint-Venant sont la hauteur d'eau h , la vitesse u et par conséquent le débit $hu = q$. Comme le débit est préservé en régime stationnaire, nous pouvons nous donner un débit d'entrée et un profil de hauteur d'eau explicite physiquement admissible (nous pouvons reprendre les profils proposés par I. MacDonald). Ce profil dépend uniquement de la position x . Nous obtenons ainsi un problème inverse qui consiste à déterminer la topographie associée.

Nous pouvons remarquer que (B.31) peut s'écrire sous la forme

$$\partial_x h = \frac{S_f + \partial_x z}{q^2/gh^3 - 1} = \frac{S_f + \partial_x z}{Fr^2 - 1},$$

cette équation différentielle du premier ordre en h , appelée équation de courbe de remous, est bien connue en hydraulique et en hydrologie (Viollet et al. [2002, p. 339-347]). Cette équation permet d'obtenir des solutions analytiques supplémentaires à l'aide d'une méthode de résolution numérique itérative.

En adaptant la méthode de MacDonald, il nous est possible d'obtenir des solutions analytiques avec des termes sources supplémentaires : terme de diffusion (voir Delestre and Marche [2010]), terme de pluie. Tout d'abord, considérons le système de Saint-Venant avec terme de diffusion (Gerbeau and Perthame [2000], Marche [2005, 2007])

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = gh(S_0 - S_f) + 4\mu\partial_x(h\partial_x u) \end{cases},$$

où μ est la viscosité dynamique. Le terme de diffusion permet de tenir compte de la viscosité turbulente. A l'état stationnaire, l'équation de quantité de mouvement peut s'écrire sous la forme

$$\partial_x(q^2/h + gh^2/2) - 4\mu\partial_x(h\partial_x q/h) + ghS_f = ghS_0,$$

soit encore

$$\partial_x z = \frac{1}{gh} [-\partial_x(q^2/h + gh^2/2) + 4\mu\partial_x(h\partial_x q/h)] - S_f.$$

B.4. ECOULEMENTS STATIONNAIRES

Nous avons

$$\partial_x (h\partial_x q/h) = -\frac{q}{h}\partial_{x^2}h - \frac{q}{h^2}[\partial_x h]^2.$$

Nous obtenons alors la relation suivante

$$\partial_x z = -\frac{1}{gh} \left[\partial_x (q^2/h + gh^2/2) + 4\mu \left(\frac{q}{h}\partial_{x^2}h + \frac{q}{h^2}(\partial_x h)^2 \right) \right] - S_f.$$

En utilisant des hauteurs d'eau explicites suffisamment régulières, nous sommes en mesure de déterminer la topographie associée.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'obtention de solutions stationnaires avec pluie (utilisées au chapitre 4). Nous considérons le système de Saint-Venant avec pluie (voir entre autres Esteves et al. [2000], Fiedler and Ramirez [2000])

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = P \\ \partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) = gh(S_0 - S_f) \end{cases}.$$

Nous considérons une pluie d'intensité P uniforme et constante sur un domaine de longueur L . A l'entrée du canal (en $x = 0$ m), nous injectons un débit d'intensité constante $q(0) = q_0$. A l'état stationnaire l'équation de quantité de mouvement donne donc

$$q(x) = q_0 + xP, \text{ pour } 0 \leq x \leq L.$$

L'équation de quantité de mouvement donne

$$gh\partial_x z = -\frac{2q}{h}\partial_x q + \frac{q^2}{h^2}\partial_x h - gh\partial_x h - ghS_f,$$

soit encore

$$\partial_x z = \left(\frac{q^2}{gh^3} - 1 \right) \partial_x h - \frac{2qP}{gh^2} - S_f.$$

Annexe C

Résultats complémentaires sur les cas tests 2.2

Afin de permettre la comparaison avec d'autres méthodes numériques, nous donnons ici des résultats complémentaires à ceux donnés dans le chapitre 2.2, pour chacun des trois tests d'écoulement sur une bosse parabolique. Il s'agit des erreurs L^1 faites sur les débits ainsi que sur les hauteurs, les temps de calcul et les nombres d'itérations pour différents maillages (avec J le nombre de mailles), flux et ordres de la méthode. Pour chacun de ces tests, la longueur du domaine est de 25 m et la topographie est définie par

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.005(x - 10)^2 & \text{si } 8 \text{ m} < x < 12 \text{ m} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le temps de la simulation est $t = 300$ s. Les conditions initiales sont des conditions stationnaires au repos. En fonction des conditions de bord, nous obtenons trois types d'écoulement stationnaires : fluvial, transcritique et transcritique avec choc. En plus des résultats, nous rappellerons les conditions initiales et de bords utilisées ainsi que les profils de hauteur d'eau exacts à obtenir (voir la section B.2).

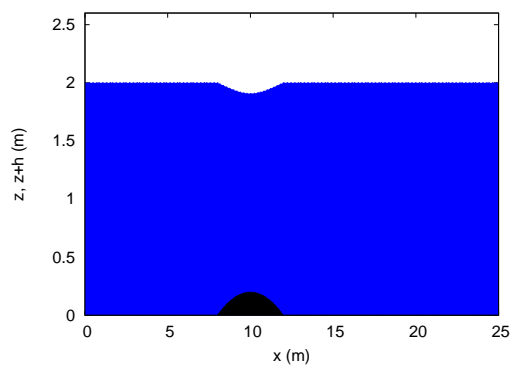
C.1 Ecoulement fluvial

Conditions initiales

$$h + z = 2 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Conditions aux bords

- en aval $h = 2$ m,
- en amont $q = 4.42$ m²/s.



C.1. ECOULEMENT FLUVIAL

Rusanov

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.19142	0.17784	0.40211E-1	0.41139E-1	0.18419E-1	0.37751E-1
200	0.10456	0.8589E-1	0.1015E-1	0.11339E-1	0.46621E-2	0.11717E-1
400	0.54013E-1	0.41264E-1	0.25752E-2	0.30397E-2	0.12305E-2	0.29501E-2
800	0.27324E-1	0.20034E-1	0.65016E-3	0.8458E-3	0.4409E-3	0.14002E-2
1600	0.13722E-1	0.98386E-2	0.16308E-3	0.22076E-3	0.8445E-4	0.29387E-3

HLL

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.74719E-1	0.11817	0.12051E-1	0.26072E-1	0.59946E-2	0.13303E-1
200	0.37067E-1	0.59333E-1	0.33246E-2	0.68738E-2	0.15684E-2	0.41219E-2
400	0.18415E-1	0.29725E-1	0.85097E-3	0.18804E-2	0.43684E-3	0.12591E-2
800	0.91765E-2	0.14877E-1	0.21612E-3	0.50287E-3	0.11474E-3	0.31485E-3
1600	0.45806E-2	0.74419E-2	0.55621E-4	0.13698E-3	0.30775E-4	0.10036E-3

Cinétique

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.10448	0.1182	0.19362E-1	0.24593E-1	0.78455E-2	0.1379E-1
200	0.52872E-1	0.59226E-1	0.49361E-2	0.67156E-2	0.19223E-2	0.3329E-2
400	0.26538E-1	0.29683E-1	0.12523E-2	0.17722E-2	0.57341E-3	0.1448E-2
800	0.13289E-1	0.14864E-1	0.31495E-3	0.49388E-3	0.14442E-3	0.33228E-3
1600	0.66486E-2	0.74385E-2	0.79222E-4	0.134E-3	0.47287E-4	0.14807E-3

VFRoe-ncv

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.73087E-1	0.11814	0.11971E-1	0.26035E-1	0.59682E-2	0.13337E-1
200	0.36634E-1	0.59315E-1	0.31603E-2	0.71439E-2	0.15997E-2	0.41233E-2
400	0.18304E-1	0.29719E-1	0.8494E-3	0.18846E-2	0.44596E-3	0.12316E-2
800	0.91487E-2	0.14875E-1	0.21624E-3	0.52454E-3	0.1311E-3	0.48104E-3
1600	0.45736E-2	0.74414E-2	0.55688E-4	0.13673E-3	0.3092E-4	0.10055E-3

Apstat

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.735E-1	0.11825	0.1199E-1	0.26049E-1	0.59736E-2	0.1335E-1
200	0.36741E-1	0.59344E-1	0.31723E-2	0.70967E-2	0.15708E-2	0.41138E-2
400	0.18331E-1	0.29726E-1	0.85162E-3	0.1884E-2	0.43928E-3	0.12454E-2
800	0.91554E-2	0.14877E-1	0.21818E-3	0.52397E-3	0.13143E-3	0.49083E-3
1600	0.45753E-2	0.74419E-2	0.55827E-4	0.14239E-3	0.30799E-4	0.98603E-4

TAB. C.1: Erreurs L^1 pour l'écoulement fluvial à t=300s.

C.1. ECOULEMENT FLUVIAL

Rusanov

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.267	8083	2.203	16174	3.849	16185
200	1.1018	16154	8.715	32373	15.456	32386
400	4.063	32324	34.895	64779	61.263	64793
800	16.216	64703	143.82	129599	244.38	129614
1600	64.986	129503	596.21	259244	1006.7	259263

HLL

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.5	8093	3.596	16193	4.991	16192
200	1.948	16193	14.638	32396	20.074	32396
400	7.803	32397	58.435	64809	83.011	64810
800	30.868	64809	238.8	129634	328.96	129635
1600	123.99	129632	968.17	259287	1355.7	259289

Cinétique

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.699	8806	4.83	17651	6.314	17657
200	2.759	17641	19.093	35335	24.958	35339
400	11.029	35324	76.6	70704	103.19	70708
800	44.04	70697	307.11	141438	412.99	141443
1600	176.38	141450	1229.1	282909	1631.3	282916

VF_{Roe-ncv}

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.426	8091	3.218	16184	4.552	16186
200	1.663	16189	13.019	32359	18.513	32371
400	6.664	32393	51.081	64739	75.839	64763
800	26.515	64816	209.61	129567	307.03	129602
1600	105.99	129717	842.5	259156	1239	259234

Apstat

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.547	8120	3.989	16238	5.336	16220
200	2.154	16264	16.105	32499	21.824	32493
400	8.606	32520	63.951	65099	88.791	65075
800	34.283	65151	262.31	130173	362.36	130155
1600	136.86	130161	1054.3	260342	1463.2	260278

TAB. C.2: Temps de calcul et nombre d'itérations pour l'écoulement fluvial à t=300s.

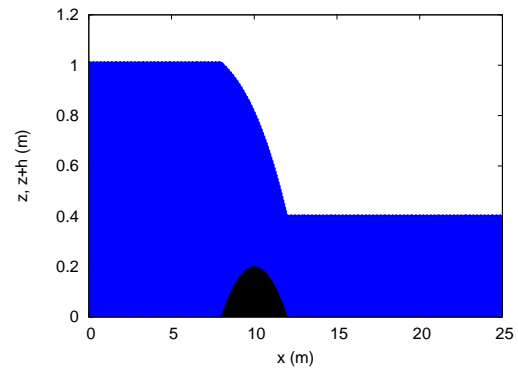
C.2 Ecoulement transcritique sans choc

Conditions initiales

$$h + z = 0.66 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Conditions aux bords

- en aval $h = 0.66 \text{ m}$
tant que l'écoulement est fluvial,
- en amont $q = 1.53 \text{ m}^2/\text{s}$.



C.2. ECOULEMENT TRANSCRITIQUE SANS CHOC

Rusanov

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	1.4625	0.39839	0.65606E-1	0.33291E-1	0.3875E-1	0.17973E-1
200	0.74119	0.2242	0.15629E-1	0.95754E-2	0.10504E-1	0.50489E-2
400	0.30593	0.63455E-1	0.47387E-2	0.46838E-2	0.26976E-2	0.30458E-2
800	0.15487	0.3248E-1	0.18127E-2	0.16597E-2	0.76549E-3	0.1079E-2
1600	0.7818E-1	0.16424E-1	0.44488E-3	0.40631E-3	0.32765E-3	0.6168E-3

HLL

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.12621	0.40492E-1	0.24173E-1	0.10366E-1	0.21199E-1	0.10892E-1
200	0.63066E-1	0.2117E-1	0.78283E-2	0.29974E-2	0.64926E-2	0.29882E-2
400	0.31341E-1	0.10882E-1	0.34197E-2	0.83719E-3	0.1816E-2	0.80083E-3
800	0.15573E-1	0.55242E-2	0.93067E-3	0.21686E-3	0.57357E-3	0.21553E-3
1600	0.77499E-2	0.27841E-2	0.14058E-3	0.55602E-4	0.13731E-3	0.55392E-4

Cinétique

Cin.	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.17979	0.40475E-1	0.25714E-1	0.11858E-1	0.21288E-1	0.1165E-1
200	0.94347E-1	0.19967E-1	0.55898E-2	0.32351E-2	0.5558E-2	0.31899E-2
400	0.48978E-1	0.98984E-2	0.14611E-2	0.82488E-3	0.14163E-2	0.83589E-3
800	0.25287E-1	0.49316E-2	0.38164E-3	0.21051E-3	0.34799E-3	0.211E-3
1600	0.12985E-1	0.24624E-2	0.10114E-3	0.54379E-4	0.92119E-4	0.53774E-4

VF_{Roe}-ncv

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.12411	0.44344E-1	0.80045E-1	0.1059E-1	0.24277E-1	0.11442E-1
200	0.62085E-1	0.22151E-1	0.67751E-2	0.31638E-2	0.70032E-2	0.30395E-2
400	0.31013E-1	0.11131E-1	0.19067E-2	0.87624E-3	0.19509E-2	0.81847E-3
800	0.15475E-1	0.55869E-2	0.52477E-3	0.22264E-3	0.54096E-3	0.21506E-3
1600	0.77223E-2	0.27998E-2	0.1481E-3	0.56965E-4	0.1477E-3	0.53936E-4

Apstat

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.1207	0.43524E-1	0.48157E-1	0.99604E-2	0.46032E-1	0.10428E-1
200	0.6095E-1	0.22101E-1	0.12947E-1	0.29787E-2	0.12528E-1	0.29156E-2
400	0.30617E-1	0.11138E-1	0.33926E-2	0.86052E-3	0.32978E-2	0.86557E-3
800	0.15343E-1	0.55912E-2	0.93439E-3	0.21982E-3	0.91698E-3	0.21297E-3
1600	0.76799E-2	0.28012E-2	0.24806E-3	0.56656E-4	0.24572E-3	0.55704E-4

TAB. C.3: Erreurs L^1 pour l'écoulement transcritique sans choc à t=300 s.

C.2. ECOULEMENT TRANSCRITIQUE SANS CHOC

Rusanov

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.212	6566	0.66	6862	1.075	6872
200	0.857	13421	2.754	13764	6.59	13770
400	3.471	27182	14.546	27554	22.909	27557
800	13.808	54733	56.974	55119	85.836	55123
1600	55.457	109852	231.05	110247	405.73	110248

HLL

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.391	6847	1.033	6884	1.547	6886
200	1.569	13739	4.26	13778	5.295	13779
400	6.312	27522	16.697	27562	24.618	27566
800	25.082	55085	71.812	55125	87.747	55137
1600	100.49	110211	294.25	110252	359.81	110275

Cinétique

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.616	7939	1.87	8024	3.268	8021
200	2.468	15965	7.015	16056	12.737	16056
400	9.825	32025	26.288	32121	50.608	32121
800	39.179	64149	111.94	64248	202.28	64249
1600	156.68	128396	438.11	128501	797.31	128498

VFRoe-ncv

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.308	6842	0.885	6896	1.786	6885
200	1.223	13737	4.669	13777	8.12	13779
400	4.836	27521	17.796	27561	27.398	27565
800	19.429	55085	68.022	55124	108.8	55136
1600	77.847	110213	303.87	110252	436.88	110276

Apstat

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.405	6909	1.106	6951	1.408	6944
200	1.586	13847	5.555	13892	5.965	13890
400	6.347	27730	18.003	27788	23.568	27788
800	25.148	55497	73.295	55591	87.649	55609
1600	100.38	111029	321.3	111183	359.1	111172

TAB. C.4: Temps de calcul pour l'écoulement transcritique sans choc à $t=300$ s.

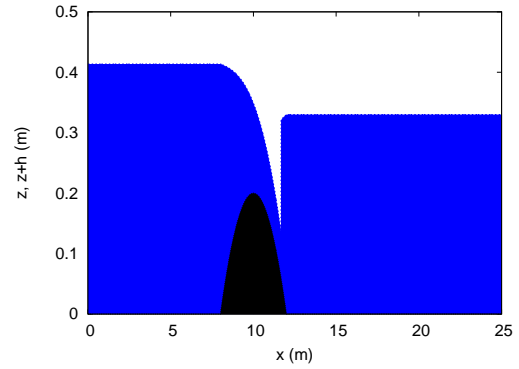
C.3 Ecoulement transcritique avec choc

Conditions initiales

$$h + z = 0.33 \text{ m et } q = 0 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Conditions aux bords

- en aval $h = 0.33 \text{ m}$,
- en amont $q = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$.



C.3. ECOULEMENT TRANSCRITIQUE AVEC CHOC

Rusanov

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.19243	0.6904E-1	0.41963E-1	0.32937E-1	0.36382E-1	0.34672E-1
200	0.11874	0.43713E-1	0.19052E-1	0.15061E-1	0.21659E-1	0.27533E-1
400	0.63425E-1	0.25456E-1	0.92532E-2	0.66995E-2	0.98597E-2	0.13603E-1
800	0.34081E-1	0.14003E-1	0.46155E-2	0.36184E-2	0.59676E-2	0.84942E-2
1600	0.17338E-1	0.73968E-2	0.21974E-2	0.16636E-2	0.27963E-2	0.36913E-2

HLL

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.74508E-1	0.36647E-1	0.28188E-1	0.11254E-1	0.23901E-1	0.87683E-2
200	0.40955E-1	0.19204E-1	0.12294E-1	0.82876E-2	0.14497E-1	0.17799E-1
400	0.2091E-1	0.94992E-2	0.50675E-2	0.30051E-2	0.51814E-2	0.3367E-2
800	0.10729E-1	0.48714E-2	0.25441E-2	0.18131E-2	0.24253E-2	0.16039E-2
1600	0.5357E-2	0.24406E-2	0.10822E-2	0.74335E-3	0.11623E-2	0.10104E-2

Cinétique

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.67559E-1	0.32048E-1	0.23988E-1	0.97425E-2	0.49654E-1	0.93603E-2
200	0.33578E-1	0.16298E-1	0.93757E-2	0.67589E-2	0.11897E-1	0.13346E-1
400	0.16212E-1	0.81893E-2	0.46343E-2	0.20382E-2	0.48611E-2	0.43317E-2
800	0.79453E-2	0.41297E-2	0.19979E-2	0.14265E-2	0.21658E-2	0.18665E-2
1600	0.38264E-2	0.20867E-2	0.85746E-3	0.56758E-3	0.11833E-2	0.12106E-2

VFRoe-ncv

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.52186E-1	0.2944E-1	0.22767E-1	0.93152E-2	0.2058E-1	0.75083E-2
200	0.24825E-1	0.94738E-2	0.60874E-2	0.38843E-2	0.25686E-1	0.21942E-1
400	0.17341E-1	0.73218E-2	0.47274E-2	0.18253E-2	0.60502E-2	0.90279E-2
800	0.75925E-2	0.2785E-2	0.11356E-2	0.74423E-3	0.15665E-2	0.62707E-3
1600	0.44794E-2	0.18031E-2	0.12562E-2	0.41847E-3	0.99092E-3	0.13542E-3

Apstat

	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
J	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$	$ h_{ex} - h _{L^1}$	$ q_{ex} - q _{L^1}$
100	0.7308E-1	0.36697E-1	0.6617E-1	0.56796E-1	0.45134E-1	0.81826E-2
200	0.3153E-1	0.11201E-1	0.18374E-1	0.16194E-1	0.21826E-1	0.25916E-1
400	0.18739E-1	0.97084E-2	0.83513E-2	0.41748E-2	0.59798E-2	0.83831E-3
800	0.80122E-2	0.28752E-2	0.32273E-2	0.40095E-2	0.36699E-2	0.56834E-2
1600	0.52269E-2	0.32067E-2	0.22612E-2	0.2551E-2	0.48543E-2	0.70416E-2

TAB. C.5: Erreurs L^1 pour l'écoulement transcritique avec choc à $t=300s$.

C.3. ECOULEMENT TRANSCRITIQUE AVEC CHOC

Rusanov

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.104	3154	0.515	3496	0.749	3542
200	0.426	6711	1.892	7270	2.549	7376
400	1.761	14111	6.894	14875	11.366	14999
800	7.34	29205	35.967	30123	56.964	30291
1600	29.841	59617	123.99	60651	236.68	60872

HLL

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.212	3494	0.804	3618	1.089	3664
200	0.884	7318	2.805	7420	3.92	7424
400	3.605	14916	11.489	15050	16.29	15050
800	14.374	30239	47.52	30374	78.39	30380
1600	57.997	60806	207.63	60946	328.76	60961

Cinétique

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.323	4046	1.16	4233	1.57	4297
200	1.35	8526	3.935	8684	6.087	8687
400	5.474	17426	18.111	17667	24.498	17641
800	22.207	35405	66.58	35626	104.04	35630
1600	89.438	71279	282.15	71512	432.74	71522

VF_{Roe-ncv}

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.184	3597	0.727	3695	0.933	3699
200	0.752	7450	3.44	7576	3.427	7588
400	3.056	15061	11.685	15187	16.823	15191
800	12.289	30398	47.033	30531	71.532	30534
1600	49.01	60964	187.4	61103	299.27	61104

Apstat

J	ordre 1		MUSCL		eno modifié	
	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.	T. Calc. (s)	Nb. it.
100	0.299	4521	1.198	4372	1.179	3985
200	1.01	7692	7.142	11992	9.816	12556
400	5.304	20302	16.103	17096	20.691	16604
800	16.998	32579	110.57	47863	143.29	47591
1600	80.159	77032	332.42	78054	430.81	76681

TAB. C.6: Temps de calcul pour l'écoulement transcritique avec choc à t=300s.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- Abdallah, M. (2005). *Sur les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint-Venant pour la modélisation de l'hydraulique en réseau d'assainissement*. PhD thesis, Université Louis Pasteur - Strasbourg I.
- Al-Azawi, S. A. (1985). Experimental evaluation of infiltration models. *Journal of Hydrology (NZ)*, 24(2) :77–88.
- Alcrudo, F. and Gil, E. (1999). The Malpasset dam break case study. In *the 4th CADAM Workshop, Zaragoza*, pages 95–109.
- Audusse, E. (1999). Schémas cinétiques pour le système de Saint-Venant. Master's thesis, Université Paris 6.
- Audusse, E. (2004). *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*. PhD thesis, Université Paris VI – Pierre et Marie Curie. 196 pages.
- Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M.-O., Klein, R., and Perthame, B. (2004). A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6) :2050–2065.
- Audusse, E. and Bristeau, M.-O. (2005). A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 206 :311–333.
- Audusse, E., Bristeau, M.-O., and Perthame, B. (2000). Kinetic schemes for Saint-Venant equations with source terms on unstructured grids. Technical Report 3989, INRIA.
- Bajaj, R. L., Xu, G., and Zhang, Q. (2006). Smooth Surface Constructions via a Higher-Order Level-Set Method. Technical report, ICES Report 06-18, Institute for Computational and Engineering Sciences, The University of Texas at Austin.
- Balzano, A. (1998). Evaluation of methods for numerical simulation of wetting and drying in shallow water flow models. *Coastal Engineering*, 34 :83–107.
- Becque, S. (2008). Etude expérimentale et numérique de l'influence d'une rugosité orientée sur le ruissellement. Master's thesis, Ecole Polytechnique Universitaire Pierre et Marie Curie, Cemagref d'Antony. Encadrants : Yves Nédélec, Bénédicte Augeard, Frédéric Darboux.
- Bell, N. C., Wheeler, H. S., and Johnston, P. M. (1989). Evaluation of overland flow models using laboratory catchment data. ii : Parameter identification of physically based (kinematic wave) models. *Hydrological sciences journal*, 34(3) :289–317.
- Bermúdez, A., Dervieux, A., Desideri, J.-A., and Vázquez, M. E. (1998). Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1-2) :49 – 72.

BIBLIOGRAPHIE

- Bermudez, A. and Vazquez, M. E. (1994). Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers & Fluids*, 23(8) :1049 – 1071.
- Berthon, C. and Turpault, R. (0000). Asymptotic preserving hll schemes. (*A paraître dans*.
- Bohorquez, P. (2010). Competition between kinematic and dynamic waves in floods on steep slopes. *Journal of Fluid Mechanics*, 645(-1) :375–409.
- Bohorquez, P. and Fernandez-Feria, R. (2006). Nonparallel spatial stability of shallow water flow down an inclined plane of arbitrary slope. In Ferreira, R., Alves, E., Leal, J., and Cardoso, A., editors, *River Flow 2006*, volume 1, pages 503–512, London. Taylor and Francis Group.
- Bohórquez Rodríguez de Medina, P. (2008). *Study and Numerical Simulation of Sediment Transport in Free-Surface Flow*. PhD thesis, University of Málaga in the subject of Fluid Mechanics.
- Bouchut, F. (2004). *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, volume 2/2004. Birkhäuser Basel.
- Bouchut, F. (2007). Chapter 4 efficient numerical finite volume schemes for shallow water models. In Zeitlin, V., editor, *Nonlinear Dynamics of Rotating Shallow Water : Methods and Advances*, volume 2 of *Edited Series on Advances in Nonlinear Science and Complexity*, pages 189 – 256. Elsevier Science.
- Bouchut, F. and Morales, T. (2009). A subsonic-well-balanced reconstruction scheme for shallow water flows. <http://www.math.ntnu.no/conservation/2009/032.html>. Preprint.
- Bouchut, F., Ounaissa, H., and Perthame, B. (2007). Upwinding of the source term at interfaces for euler equations with high friction. *Computers and Mathematics with Applications*, 53 :361—375.
- Bristeau, M.-O. and Coussin, B. (2001). Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes. Technical Report 4282, INRIA.
- Brook, B. S., Falle, S. A. E. G., and Pedley, T. J. (1999). Numerical solutions for unsteady gravity-driven flows in collapsible tubes : evolution and roll-wave instability of a steady state. *Journal of Fluid Mechanics*, 396 :223–256.
- Buffard, T., Gallouët, T., and Hérard, J.-M. (2000). A sequel to a rough godunov scheme : application to real gases. *Computers & Fluids*, 29 :813–847.
- Burguete, J. and García-Navarro, P. (2001). Efficient construction of high-resolution tvd conservative schemes for esquations with source terms : application to shallow water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37 :209–248.
- Burguete, J., García-Navarro, P., and Murillo, J. (2008). Friction term discretization and limitation to preserve stability and conservation in the 1d shallow-water model : Application to unsteady irrigation and river flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(4) :403–425.
- Caleffi, V., Valiani, A., and Zanni, A. (2003). Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels. *Journal of Hydraulic Research*, 41(2) :167–177.
- Caselles, V., Donat, R., and Haro, G. (2009). Flux-gradient and source term balancing for certain high resolution shock-capturing schemes. *Computers & Fluids*, 38(1) :16–36.
- Castro, M. J., Pardo, A., and Parès, C. (2007). Well-balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(12) :2065–2113.

BIBLIOGRAPHIE

- Chahinian, N., Moussa, R., Andrieux, P., and Voltz, M. (2005). Comparison of infiltration models to simulate flood events at the field scale. *Journal of Hydrology*, 306 :191–214.
- Chalons, C., Coquel, F., Godlewski, E., Raviart, P.-A., and Seguin, N. (0000). Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter dependent source. the case of euler system with friction. *A paraître dans M3AS*, Rapport interne du LJLL R09039.
- Chanson, H. (2005). Applications of the Saint-Venant Equations and Method of Characteristics to the Dam Break Wave Problem. *Report No. CH55/05*, Dept. of Civil Engineering, The University of Queensland, Brisbane, Australia, May :135 pages.
- Chanson, H. (2006). Solutions analytiques de l'onde de rupture de barrage sur plan horizontal et incliné. *La Houille Blanche*, (3) :76–86.
- Charbeneau, R. J., Jeong, J., and Barrett, M. E. (2009). Physical Modeling of Sheet Flow on Rough Impervious Surfaces. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(6) :487–494.
- Chinnayya, A. and LeRoux, A.-Y. (1999). A new General Riemann Solver for the Shallow Water equations, with friction and topography. <http://www.math.ntnu.no/conservation/1999/021.html>. Preprint.
- Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill.
- Chow, V. T., Maidment, D. R., and Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Book Company.
- Coquel, F., Godlewski, E., Raviart, P.-A., and Seguin, N. (2008). An asymptotic preserving scheme for euler equations with gravity and friction. In *Finite volumes for complex applications V, Aussois, France, 8-13 juin 2008*, p. 305–312, ISTE, Londres.
- Cordier, S., Darboux, F., Delestre, O., and James, F. (2007). Etude d'un modèle de ruissellement 1D. Technical report, Université d'Orléans, France.
- Cornish, V. (1907). Progressive waves in rivers. *The Geographical Journal*, 29(1) :23–31.
- Cornish, V. (1910). *Waves of the sea and other water waves*. London, T. Fisher Unwin.
- Cornish, V. (1934). Ocean waves and kindred geophysical phenomena. *Cambridge University Press*.
- Craya, A. (1952). The criterion for the possibility of roll-wave formation. *Proceedings of the Gravity Waves Symposium, U.S. National Bureau of Standards, Circular 521*, pages 141–151.
- Crnjarić-Zić, N., Vuković, S., and Sopta, L. (2006). On different flux splittings and flux functions in weno schemes for balance laws. *Computers & Fluids*, 35(10) :1074–1092.
- Crossley, A. J. (1999). *Accurate and efficient numerical solutions for the Saint Venant equations of open channel flow*. PhD thesis, university of Nottingham.
- de Lima, J. L. M. P. and Singh, V. P. (2002). influence of the pattern of moving rainstorms on overland flow. *Advances in Water Resources*, 25 :817–828.
- de Lima, J. L. M. P. and Singh, V. P. (2003). Laboratory experiments on the influence of storm movement on overland flow. *Physics and Chemistry of the Earth*, 28 :277–282.
- de Saint Venant, A. J.-C. (1871). Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 73 :147–154.

BIBLIOGRAPHIE

- Debauxe, A. (1893). *Les travaux publics et les ingénieurs des ponts et chaussées depuis le XVIII^e siècle*. Vve C. Dunod (Paris).
- Delestre, O. (2008). Ecriture d'un code c++ pour la simulation en hydrologie. Master's thesis, Université d'Orléans, disponible sur : <http://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00446163/fr/>. Encadrant : Frédéric Darboux.
- Delestre, O., Cordier, S., James, F., and Darboux, F. (2009). Simulation of rain-water overland-flow. In *Proceedings of the 12th International Conference on Hyperbolic Problems*, University of Maryland, College Park (USA), 2008, E. Tadmor, J.-G. Liu and A. Tzavaras Eds., Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 67, Amer. Math. Soc., 537–546.
- Delestre, O. and James, F. (2009). Simulation of rainfall events and overland flow. In *Proceedings of X International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics*, Jaca, Spain, september 2008, Monografias Matemáticas García de Galdeano.
- Delestre, O. and Marche, F. (2010). A numerical scheme for a viscous shallow water model with friction. *J. Sci. Comput.*, DOI 10.1007/s10915-010-9393-y.
- Desconnets, J., Galle, S., Leduc, C., and Peugeot, C. (1996). Les processus de redistribution des eaux en région sahélienne : l'hydrologie dans l'expérience hapex-sahel. In *L'hydrologie tropicale : géoscience et outil pour le développement (Actes de la conférence de Paris, mai 1995)* IAHS Publ. no. 238.
- Dholakia, M., Misra, R., and Zaman, M. S. (1998). Simulation of border irrigation system using explicit maccormack finite difference method. *Agricultural Water Management*, 36(3) :181 – 200.
- Dressler, R. F. (1949). Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2 :149–194.
- Dressler, R. F. (1952). Hydraulic resistance effect upon the dam-break. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(3) :217–225.
- Dressler, R. F. (1954). Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave. *Int. Assoc. Sci. Hydraul.*, 38 :319–328.
- Dunkerley, D. (2002). Surface tension and friction coefficients in shallow, laminar overland flow through organic litter. *Earth Surface Processes and Landforms*, 27 :45–58.
- Dupin, S. (2005). *Le langage C++*. CampusPress.
- El Bouajaji, M. (2007). Modélisation des écoulements à surface libre : étude du ruissellement des eaux de pluie. Master's thesis, Université Louis Pasteur, disponible sur : <http://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00459336/fr/>, Strasbourg. Encadrants : Fabrice Dupros et Olivier Cerdan.
- Em Karniadakis, G. and Kirby II, R. M. (2003). *Parallel Scientific Computing in C++ and MPI*. Cambridge University Press.
- Erduran, K. S., Kutija, V., and Hewett, C. J. M. (2002). Performance of finite volume solutions to the shallow water equations with shock-capturing schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(10) :1237–1273.
- Erduran, K. S., Kutija, V., and MacAlister, C. R. (2005). Finite volume solution to integrated shallow surface-saturated groundwater flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49 :763–783.

BIBLIOGRAPHIE

- Esclaffer, T. (2003). Etude théorique de la formation des débits de crues à l'échelle du versant. Master's thesis, Université Paris XII-ENGREF-ENPC.
- Esteves, M., Faucher, X., Galle, S., and Vauclin, M. (2000). Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values. *Journal of Hydrology*, 228 :265–282.
- Esteves, M. and Lapetite, J. M. (2003). A multi-scale approach of runoff generation processes in a sahelian gully catchment : a case study in niger. *Catena*, 50 :255–271.
- Fiedler, R. F. and Ramirez, J. A. (2000). A numerical method for simulating discontinuous shallow flow over an infiltrating surface. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32 :219–240.
- Flamant, A.-A. (1891). *Mécanique appliquée - Hydraulique*. Baudry et Cie.
- Galbiati, G. and Savi, F. (1995). Evaluation of the Comparative Influence of Soil Hydraulic Properties and Roughness on Overland Flow at the Local Scale. *J. agric. Engng Res.*, 61 :183–190.
- Gallouët, T., Hérard, J.-M., and Seguin, N. (2003). Some approximate godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers & Fluids*, 32 :479–513.
- Gandolfi, C. and Savi, F. (2000). A Mathematical Model for the Coupled Simulation of Surface Runoff and Infiltration. *J. agric. Engng Res.*, 75 :49–55.
- Garcia-Navarro, P., Fras, A., and Villanueva, I. (1999). Dam-break flow simulation : some results for one-dimensional models of real cases. *Journal of Hydrology*, 216(3-4) :227 – 247.
- George, D. L. (2004). Numerical approximation of the nonlinear shallow water equations with topography and dry beds. Master's thesis, University of Washington.
- George, D. L. (2006). *Finite volume methods and adaptive refinement for tsunami propagation and inundation*. PhD thesis, University of Washington.
- George, D. L. (2008). Augmented riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation. *Journal of Computational Physics*, 227 :3089–3113.
- Gerbeau, J.-F. and Perthame, B. (2000). Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar water ; numerical validation. Technical Report 4084, INRIA.
- Gerbeau, J.-F. and Perthame, B. (2001). Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1) :89–102.
- Godlewski, E. and Raviart, P.-A. (1996). *Numerical approximations of hyperbolic systems of conservation laws*, volume Applied Mathematical Sciences 118. Springer-Verlag, New York.
- Gosse, L. (2000). A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Computers & Mathematics with Applications*, 39(9-10) :135 – 159.
- Gottardi, G. and Venutelli, M. (1997). Landflow : Computer program for the numerical simulation of two-dimensional overland flow. *Computers & Geosciences*, 23(1) :77–89.
- Gottardi, G. and Venutelli, M. (2008). An accurate time integration method for simplified overland flow models. *Advances in Water Resources*, 31 :173–180.

BIBLIOGRAPHIE

- Goutal, N. and Maurel, F. (1997). Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation. Technical report, EDF-DER.
- Green, W. H. and Ampt, G. A. (1911). Studies on soil physics. *The Journal of Agricultural Science*, 4 :1–24.
- Greenberg, J. M. and LeRoux, A.-Y. (1996). A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33 :1–16.
- Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S. R. (1987). Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III. *Journal of Computational Physics*, 71 :231–303.
- Harten, A., Osher, S., Engquist, B., and Chakravarthy, S. R. (1986). Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. *Applied Numerical Mathematics*, 2(3-5) :347 – 377. Special Issue in Honor of Milt Rose’s Sixtieth Birthday.
- Herrmann, M. (2002). An Eulerian Level-Set/Vortex-Sheet Method for Two-Phase Interface Dynamics. *CTR Annual Research Briefs*, pages 103–114.
- Hervouet, J.-M. (2003). *Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*. Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Hjelmfelt Jr., A. T. (1978). Influence of infiltration on overland flow. *Journal of Hydrology*, 36 :179–185.
- Houghton, D. D. and Kasahara, A. (1968). Nonlinear shallow fluid flow over an isolated ridge. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXI :1–23.
- Hsu, S. M., Ni, C.-F., and Hung, P.-F. (2002). Assessment of Three Infiltration Formulas based on Model Fitting on Richards Equation. *Journal of Hydrologic Engineering*, 7(5) :373–379.
- Jain, M. K., Kothiyari, U. C., and Ranga Raju, K. G. (2004). A GIS based distributed rainfall-runoff model. *Journal of Hydrology*, 299 :107–135.
- Jeffreys, H. (1925). The Flow of Water in an Inclined Channel of Rectangular Section. *The London, Edinburg and Dublin philosophical magazine and journal of science*, 49(293) :793–80.
- Jia, Y. and Tamai, N. (1997). Modeling infiltration into a multi-layered soil during an unsteady rain. *Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE*, 41 :31–36.
- Jin, S. (2001). A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms. *M2AN*, 35(4) :631–645.
- Jin, S. and Katsoulakis, M. A. (2000). Hyperbolic Systems with Supercharacteristic Relaxations and Roll Waves. *SIAM J. Appl. Math.*, 29 :583–593.
- Jin, S. and Kim, Y. J. (2001). On the Computation of Roll Waves. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 35 :463–480.
- Jin, S. and Wen, X. (2004). efficient method for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations. *J. Comput. Math.*, 22 :230–249.
- Jin, S. and Wen, X. (2005). Two interface type numerical methods for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 26 :2079–2101.
- Jovanović, M. and Djordjević, D. (1995). Experimental verification of the maccormack numerical scheme. *Advances in Engineering Software*, 23 :61–67.

BIBLIOGRAPHIE

- Julien, P. Y. and Hartley, D. M. (1986). Formation of roll waves in laminar sheet flow. *Journal of Hydraulic Research*, 24(1) :5–17.
- Kazezyilmaz-Alhan, C. M., Medina Jr., M. A., and Rao, P. (2005). On numerical modeling of overland flow. *Applied Mathematics and Computation*, 166(3) :724–740.
- Kesserwani, G., Ghostine, R., Vazquez, J., Ghenaim, A., and Mosé, R. (2008). Application of a second-order runge-kutta discontinuous galerkin scheme for the shallow water equations with source terms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56 :805–821.
- Kim, D.-H., Cho, Y.-S., and Yi, Y.-K. (2007). Propagation and run-up of nearshore tsunamis with hllc approximate riemann solver. *Ocean Engineering*, 34(8-9) :1164 – 1173.
- Kim, S. D., Lee, B. J., Lee, H. J., Jeung, I.-S., and Choi, J.-Y. (2009). Realization of contact resolving approximate riemann solvers for strong shock and expansion flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- King, K., Arnold, J., and Bingner, R. (1999). Comparison of green-ampt and curve number methods on goodwin creek watershed using swat. *American Society of Agricultural Engineers*, 42(4) :919–925.
- Kishii, T. (1981). On the experiment of surface runoff from experimental slope.
- Lawrence, D. S. L. (1997). Macroscale surface roughness and frictional resistance in overland flow. *Earth Surface Processes and Landforms*, 22 :365–382.
- Lazarovitch, N., Warrick, A. W., Furman, A., and Zerihun, D. (2009). Subsurface Water Distribution from Furrows Described by Moment Analyses. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 135(1) :7–12.
- LeRoux, A.-Y. (2001). Conditions aux limites et Problèmes Hyperboliques : un point de vue numérique. Workshop Conditions Limites Numériques pour les Systèmes Hyperboliques, I.H.P., Paris, Juin 2001. www-gm3.univ-mrs.fr (suivre "équipe de Bordeaux").
- LeRoux, A.-Y. (2009). The linear appearance theorem for a class of non linear non homogeneous hyperbolic systems involving a transport equation. <http://www.math.ntnu.no/conservation/2009/034.html>. Preprint.
- LeRoux, A.-Y. and LeRoux, M.-N. (2004). Source Waves. <http://www.math.ntnu.no/conservation/2004/045.html>. Preprint.
- LeVeque, R. J. (1998). Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods : The quasi-steady wave-propagation algorithm. *Journal of Computational Physics*, 146(1) :346 – 365.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lhomme, J. (2006). *Modélisation des inondations en milieu urbain : approches unidimensionnelle, bidimensionnelle et macroscopique*. PhD thesis, Université Montpellier II.
- Lhomme, J. and Guinot, V. (2007). A general approximate-state riemann solver for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53 :1509–1540.
- Li, G. (2009). Preliminary study of the interference of surface objects and rainfall in overland flow resistance. *Catena*, 78 :154–158.

BIBLIOGRAPHIE

- Liang, Q., Borthwick, A. G. L., and Stelling, G. (2004). Simulation of dam- and dyke-break hydrodynamics on dynamically adaptative grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46 :127–162.
- Liang, Q. and Marche, F. (2009). Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms. *Advances in Water Resources*, 32(6) :873 – 884.
- Liu, J., Zhang, J., and Feng, J. (2008). Green-ampt Model for Layered Soils with Nonuniform Initial Water Content Under Unsteady Infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 72(4) :1041–1047.
- Liu, Q. Q., Chen, L., Li, J. C., and Singh, V. P. (2005). Roll Waves in Overland Flow. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(2) :110–117.
- Lucas, C. (2007). *Effets de petites échelles, du tenseur des contraintes, des conditions au fond et à la surface sur les équations de Saint-Venant*. PhD thesis, Université Joseph Fourier – Grenoble I.
- Lukáčová-Medvidová, M. (2005). Numerical Modeling of Shallow Flows Including Bottom Topography and Friction Effects. In Handlovicova, A., Kriva, Z., Mikula, K., and Sevcovic, D., editors, *Proceedings of Algoritmy 2005, Slovakia*, pages 73–82.
- Lukáčová-Medvid'ová, M., Noelle, S., and Kraft, M. (2007). Well-balanced finite volume evolution Galerkin methods for the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 221(1) :122 – 147.
- Lukáčová-Medvid'ová, M. and Teschke, U. (2006). Comparison study of some finite volume and finite element methods for the shallow water equations with bottom topography and friction terms. *J. Appl. Mech. Math. (ZAMM)*, 86(11) :874–891.
- MacDonald, I. (1994). Test problems with analytic solutions for steady open channel flow. Technical report, Department of Mathematics–University of Reading.
- MacDonald, I. (1996). *Analysis and computation of steady open channel flow*. PhD thesis, University of Reading–Department of mathematics.
- MacDonald, I., Baines, M. J., and Nichols, N. K. (1994). Analysis and computation of steady open channel flow using a singular perturbation problem. Technical Report 7, Department of Mathematics–University of Reading.
- MacDonald, I., Baines, M. J., Nichols, N. K., and Samuels, P. G. (1995). Steady open channel test problems with analytic solutions. Technical Report 3, Department of Mathematics–University of Reading.
- MacDonald, I., Baines, M. J., Nichols, N. K., and Samuels, P. G. (1997). Analytic benchmark solutions for open-channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(11) :1041–1045.
- Mangeney, A., Bouchut, F., Thomas, N., Vilotte, J. P., and Bristeau, M.-O. (2007). Numerical modeling of self-channeling granular flow and of their levee-channel deposits. *Journal of Geophysical Research*, 112(F2) :F02017.
- Mangeney-Castelnau, A., Bouchut, F., Vilotte, J. P., Lajeunesse, E., Aubertin, A., and Pirulli, M. (2005). On the use of saint-venant equations to simulate the spreading of a granular mass. *Journal of Geophysical Research*, 110 :B09103.
- Marche, F. (2005). *Theoretical and numerical study of shallow water models. Applications to nearshore hydrodynamics*. PhD thesis, Laboratoire de mathématiques appliquées – université de Bordeaux 1.

BIBLIOGRAPHIE

- Marche, F. (2007). Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 26 :49–63.
- Marche, F., Bonneton, P., Fabrie, P., and Seguin, N. (2007). Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2D wetting and drying processes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53 :867–894.
- Mein, R. G. and Larson, C. L. (1973). Modeling Infiltration during a Steady Rain. *Water Resources Research*, 9(2) :384–394.
- Mishra, S. K., Tyagi, J. V., and Singh, V. P. (2003). Comparison of infiltration models. *Hydrological Processes*, 17 :2629–2652.
- Montuori, C. (1961). La formazione spontanea dei treni d'onde su canali a pendenza molto forte. In *Estratto dal fascicolo n. 2 Vol. XXXVIII della Rivista mensile "L'Energia Elettrica"*.
- Moore, I., Larson, C., Slack, D., Wilson, B., Idike, F., and Hirschi, M. (1981). Modelling infiltration : A measurable parameter approach. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 26(1) :21 – 32.
- Morales De Luna, T. (2007). *Schémas entropiques pour la résolution de systèmes de type Saint Venant*. PhD thesis, université Paris VI.
- Morris, M. W. (2000). Cadam concerted action on dambreak modelling, final report february 1998 - january 2000. Technical Report Report SR 571, EC Contract number ENV4-CT97-0555.
- Moussa, R. and Bocquillon, C. (2000). Approximation zones of the saint-venant equations for flood routing with overbank flow. *Hydrology and Earth System Sciences*, 4(2) :251–261.
- Muzik, I. (1974). State variable model of overland flow. *Journal of Hydrology*, 22 :347–364.
- Nash, J. E. and Sutcliffe, J. V. (1970). River flow forecasting through conceptual models part i - a discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10 :282–290.
- Needham, D. J. and Merkin, J. H. (1984). On roll waves down an open inclined channel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical*, 394 :259–278.
- Niemczynowicz, J. (1991). On storm movement and its applications. *Atmospheric Research*, 27 :109–127.
- Noble, P. (2006). On the Spectral Stability of Roll-waves. *Indiana University Mathematics Journal*, 55(2) :795–848.
- Noelle, S., Xing, Y., and Shu, C. W. (2007). High-order well-balanced finite volume weno schemes for shallow water equation with moving water. *Journal of Computational Physics*, 226(1) :29 – 58.
- Nord, G. and Esteves, M. (2005). PSEM_2D : A physically based model of erosion processes at the plot scale. *Water Resources Research*, 41(8) :W08407.
- Panday, S. and Huyakorn, P. S. (2004). fully coupled physically-based spatially-distributed model for evaluating surface/subsurface flow. *Advances in Water Resources*, 27 :361–382.
- Paquier, A. (1995). *Modélisation et simulation de la propagation de l'onde de rupture de barrage*. PhD thesis, Université Jean Monnet.

BIBLIOGRAPHIE

- Parlange, J.-Y., Hogarth, W., Sander, G., Rose, C., Haverkamp, R., Surin, A., and Brutsaert, W. (1990). Asymptotic expansion for steady state overland flow. *Water Resources Research*, 26(4) :579–583.
- Peugeot, C., Esteves, M., Galle, S., Rajot, J., and Vandervaere, J. (1997). Runoff generation processes : results and analysis of field data collected at the east central supersite of the hapex-sahel experiment. *Journal of Hydrology*, 188–189 :179–202.
- Planchon, O., Silvera, N., Gimenez, R., Favis-Mortlock, D., Wainwright, J., Le Bissonnais, Y., and Govers, G. (2005). An automated salt-tracing gauge for flow-velocity measurement. *Earth Surface Processes and Landforms*, 30(7) :833–844.
- Plumerault, L.-R., Astruc, D., and Thual, O. (2010). High-reynolds shallow flow over an inclined sinusoidal bottom. *Physics of Fluids*, 22(054110).
- Ponce, V. M. (1989). *Engineering Hydrology : Principles and Practices*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Ponce, V. M. (1991). The Kinematic Wave Controversy. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(4) :511–525.
- Ponce, V. M., Cordero-Braña, O. I., and Hasenin, S. Y. (1997). Generalized conceptual modeling of dimensionless overland flow hydrographs. *Journal of Hydrology*, 200 :222–227.
- Ponce, V. M., Li, R.-M., and Simons, D. B. (1978). Applicability of Kinematic and Diffusion Models. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, No. HY3, Proc. Paper 13635 :353–360.
- Ponce, V. M. and Maisner, M. P. (1993). Verification of Theory of Roll-Wave Formation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 119(6) :768–773.
- Ponce, V. M. and Simons, D. B. (1977). Shallow Wave Propagation in Open Channel Flow. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 103, No. HY12, Proc. Paper 13392 :1461–1476.
- Que, Y. T. (2003). BGK Kinetic Scheme for the Shallow-Water Equations. Master’s thesis, Hong Kong University of Science & Technology.
- Que, Y.-T. and Xu, K. (2006). The numerical study of roll-waves in inclined open channels and solitary wave run-up. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50 :1003–1027.
- Raff, D. A. and Ramirez, J. A. (2005). A physical, mechanistic and fully coupled hillslope hydrology model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49 :1193–1212.
- Rawls, W. J., Brakensiek, D. L., and Saxton, K. E. (1982). Estimation of soil water properties. *TRANSACTIONS of the ASAE*, 25(5) :1316–1320 & 1328.
- Ricchiuto, M. (2010). On the c-property and generalized c-property of residual distribution for the shallow water equations. *J Sci Comput*, DOI 10.1007/s10915-010-9369-y.
- Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1 :318–333.
- Richardson, J. R. and Julien, P. Y. (1994). Suitability of simplified overland flow equations. *Water Resources Research*, 30(3) :665–671.
- Rousseau, M. (2008). Modélisation des écoulements à surface libre : étude du ruissellement des eaux de pluie. Master’s thesis, Université de Nantes, disponible sur : <http://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00494243/fr/>.

BIBLIOGRAPHIE

- Russo, G. (2005). Central schemes for conservation laws with application to shallow water equations. *S. Rionero, G. Romano (Eds.), Trends and Applications of Mathematics to Mechanics : STAMM 2002, Springer Verlag, Italia SRL*, pages 225–246.
- Sampson, J. (2008). *Some solutions of the shallow water wave equations*. PhD thesis, Faculty of Engineering and Industrial Sciences Swinburne University of Technology Melbourne, Australia.
- Sampson, J. (2009). A numerical solution for moving boundary shallow water flow above parabolic bottom topography. In Mercer, G. N. and Roberts, A. J., editors, *Proceedings of the 14th Biennial Computational Techniques and Applications Conference, CTAC-2008*, volume 50 of *ANZIAM J.*, pages C898–C911.
- Sampson, J., Easton, A., and Singh, M. (2006). Moving boundary shallow water flow above parabolic bottom topography.
- Savat, J. (1977). The hydraulics of sheet flow on a smooth surface and the effect of simulated rainfall. *Earth Surface Processes*, 2 :125–140.
- Shu, C.-W. and Osher, S. (1988). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2) :439 – 471.
- Smith, M. W., Cox, N. J., and Bracken, L. J. (2007). Applying flow resistance equations to overland flows. *Progress in Physical Geography*, 31(4) :363–387.
- Sochala, P. (2008). *Méthodes numériques pour les écoulements souterrains et couplage avec le ruissellement*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Sochala, P., Ern, A., and Piperno, S. (2009). Mass conservative bdf-discontinuous galerkin/explicit finite volume schemes for coupling subsurface and overland flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(27-29) :2122 – 2136.
- Tatard, L. (2005). Modélisation numérique de la vitesse de ruissellement sur sol nu ; implications sur la modélisation de l'érosion / numerical modelling of flow velocities on a bare sandy soil ; implications for modelling soil erosion. Master's thesis, Université Pierre & Marie Curie.
- Tatard, L., Planchon, O., Wainwright, J., Nord, G., Favis-Mortlock, D., Silvera, N., Ribolzi, O., Esteves, M., and Huang, C.-h. (2008). Measurement and modelling of high-resolution flow-velocity data under simulated rainfall on a low-slope sandy soil. *Journal of Hydrology*, 348(1-2) :1–12.
- Taylor, C., Al-Mashidani, G., and Davis, J. M. (1974). A finite element approach to watershed runoff. *Journal of Hydrology*, 21 :231–246.
- Telles, M. (2005). *C++ Trucs et Astuces pour les Nuls*. First Interactive.
- Thacker, W. C. (1981). Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 107(-1) :499–508.
- Thanh, M. D., Fazlul Karim, M., and Ismail, A. I. M. (2008). Well-balanced scheme for shallow water equations with arbitrary topography. *Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations*, 1(3) :196–204.
- Turner, E. (2006). Comparison of infiltration equations and their field validation by rainfall simulation. Master's thesis, Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park.

BIBLIOGRAPHIE

- Valiani, A., Caleffi, V., and Zanni, A. (1999a). Finite Volume scheme for 2D Shallow-Water equations : Application to a flood event in the Toce river. In *the 4th CADAM Workshop, Zaragoza*, pages 185–206.
- Valiani, A., Caleffi, V., and Zanni, A. (1999b). Finite volume scheme for 2D shallow-water equations. Application to Malpasset dam-break. In *the 4th CADAM Workshop, Zaragoza*, pages 63–94.
- Valiani, A., Caleffi, V., and Zanni, A. (2002). Case Study : Malpasset Dam-Break Simulation using a Two-Dimensional Finite Volume Methods. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(5) :460–472.
- van Leer, B. (1979). Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method. *Journal of Computational Physics*, 32(1) :101 – 136.
- Vázquez-Cendón, M. E. (1999). Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics*, 148 :497–526.
- Vedernikov, V. V. (1946). Characteristic features of a liquid flow in an open channel. *Comptes Rendus (Doklady) de l’Académie des Sciences de l’URSS*, LII(3) :207–210.
- Viollet, P.-L., Chabard, J.-P., Esposito, P., and Laurence, D. (2002). *Mécanique des fluides appliquée, écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières autour de structures et dans l’environnement*. Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Vo Thi Ngoc, T. (2008). One dimensional Saint-Venant system. Master’s thesis, Université d’Orléans, France.
- Wang, G.-T., Chen, S., Boll, J., Stockle, C. O., and Mccool, D. K. (2002). Modelling overland flow based on Saint-Venant equations for a discretized hillslope system. *Hydrological Processes*, 16(12) :2409–2421.
- Wang, Z., Feyen, J., Nielsen, D. R., and van Genuchten, M. T. (1997). Two-phase flow infiltration equations accounting for air entrapment effects. *Water Resources Research*, 33(12) :2759–2767.
- Warrick, A. W., Lazarovitch, N., Furman, A., and Zerihun, D. (2007). Explicit Infiltration Function for Furrows. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 133(4) :307–313.
- Wedernikow, V. V. (1945). Conditions at the front of a translation wave disturbing a steady motion of a real fluid. *Comptes Rendus (Doklady) de l’Académie des Sciences de l’URSS*, XLVIII(4) :239–242.
- Weill, S. and Mouche, E. and Patin, J. (2009). A generalized richards equation for surface/subsurface flow modelling. *Journal of Hydrology*, 366 :9–20.
- Weill, S. (2004). Modélisation hydrodynamique du cycle de l’eau de pluie sur un sol incliné. Master’s thesis, Paris VI.
- Weill, S. (2007). *Modélisation des échanges surface/subsurface à l’échelle de la parcelle par une approche darcéenne multidomaine*. PhD thesis, école des Mines de Paris.
- Wen, X. (2006). A steady state capturing and preserving method for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations. *Journal of Computational Physics*, 219(1) :322 – 390.
- Whitham, G. (1974). *Linear and Nonlinear Waves*.

BIBLIOGRAPHIE

- Wooding, R. (1965). A hydraulic model for the catchment-stream problem : I. kinematic-wave theory. *Journal of Hydrology*, 3(3-4) :254–267.
- Woolhiser, D. and Liggett, J. A. (1967). Unsteady, one-dimensional flow over a plane - the rising hydrograph. *Water Resources Research*, 3(3) :753–771.
- Yoon, Y. and Wenzel, H. (1971). Mechanics of sheet flow under simulated rainfall. *Proc. of ASCE, J. of Hydraul. Div.*, 97 (HY9) :1367–1386.
- Yu, Y. S. and McNown, J. S. (1964). Runoff from impervious surfaces. *Journal of Hydraulic Research*, 2(1) :3–24.
- Zhou, J. G., Causon, D. M., Mingham, C. G., and Ingram, D. M. (2001). The surface gradient method for treatment of source terms in the shallow-water equations. *Journal of Computational Physics*, 168 :1–25.

BIBLIOGRAPHIE

Liste des tableaux

6.1	Paramètres utilisés pour la parcelle ERO.	205
6.2	Parcelle ERO : humidité initiale du sol et résultats obtenus pour les douze événements pluvieux.	206
6.3	Paramètres utilisés pour la parcelle JAC.	210
6.4	Parcelle JAC : humidité initiale du sol et résultats obtenus pour les sept événements pluvieux étudiés.	211
6.5	Vitesses : Mesures et résultats numériques.	220
6.6	Vitesses : Mesures et résultats numériques.	221
7.1	Le diagramme de la classe flux	226
B.1	Tableau de signes des différents éléments de l'expression (B.11)	249
C.1	Erreurs L^1 pour l'écoulement fluvial à $t=300s$	258
C.2	Temps de calcul et nombre d'itérations pour l'écoulement fluvial à $t=300s$	259
C.3	Erreurs L^1 pour l'écoulement transcritique sans choc à $t=300$ s.	261
C.4	Temps de calcul pour l'écoulement transcritique sans choc à $t=300$ s.	262
C.5	Erreurs L^1 pour l'écoulement transcritique avec choc à $t=300s$	264
C.6	Temps de calcul pour l'écoulement transcritique avec choc à $t=300s$	265

LISTE DES TABLEAUX

Table des figures

1	Bassin versant de Bourville (drapage réalisé par Olivier Cerdan).	15
2	Hyétogramme et hydrogramme mesurés pour la parcelle ERO au Niger, le 04 septembre 1994 (voir le chapitre 7).	16
1.1	Illustration des variables du système de Saint-Venant 2d.	19
1.2	Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant (extrait de Debauve [1893, p.432]).	20
1.3	Illustration de la conservation de la masse.	21
1.4	Exemples (a) d'écoulement parallèle et (b) d'équilibre du lac au repos.	26
1.5	Illustration de la discrétisation en une dimension d'espace.	27
2.1	Illustration du défaut de la reconstruction hydrostatique à l'ordre 1 : pour (a) $\Delta z_{i+1/2} = h_i$ et (b) $\Delta z_{i+1/2} > h_i$, $h_{i+1/2G}$ prend la même valeur. Tracé de la hauteur d'eau (c) (d) à l'ordre 1 et (e) (f) à l'ordre 2.	36
2.2	La surface libre 6 secondes après la rupture du barrage.	44
2.3	Etat d'équilibre au repos.	46
2.4	Ecoulement fluvial à l'équilibre.	47
2.5	Ecoulement transcritique à l'équilibre.	47
2.6	Ecoulement transcritique avec ressaut à l'équilibre.	48
2.7	Position initiale de la surface libre pour le cas test de Thacker.	49
2.8	Flux de Rusanov : comparaison au temps $t = 6$ s (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits.	53
2.9	Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s.	54
2.10	Flux de Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits pour l'équilibre au repos au bout de 300 s.	55
2.11	Flux Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	57
2.12	Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	58
2.13	Flux Cinétique : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	59
2.14	Flux VFroe-ncv : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	60

TABLE DES FIGURES

2.15 Flux Apstat : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	61
2.16 Ecoulement fluvial : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.	62
2.17 Flux Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	64
2.18 Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps. .	65
2.19 Flux Cinétique : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	66
2.20 Flux VFRoe-ncv : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	67
2.21 Flux Apstat : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	68
2.22 Ecoulement transcritique : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.	69
2.23 Flux Rusanov : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	71
2.24 Flux HLL : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps. .	72
2.25 Flux Cinétique : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	73
2.26 Flux VFRoe-ncv : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	74
2.27 Flux Apstat : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	75
2.28 Ecoulement transcritique avec ressaut : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.	76
2.29 Flux HLL : comparaison des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) le débit en amont du ressaut.	77

TABLE DES FIGURES

2.30 Flux Rusanov : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.	80
2.31 Flux HLL : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.	81
2.32 Flux HLLE : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.	82
2.33 Flux Cinétique : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.	83
2.34 Flux VFRoe-ncv : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.	84
2.35 Flux Apstat : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.	85
2.36 Cas test de Thacker après 5 périodes : comparaison des erreurs sur les hauteurs d'eau (a) pour la reconstruction MUSCL, (b) pour la reconstruction ENO modifiée, des erreurs sur les débits (c) pour la reconstruction MUSCL, (d) pour la reconstruction ENO modifiée, des temps de calcul (e) pour la reconstruction MUSCL, (f) pour la reconstruction ENO modifiée.	86
2.37 Cas test de Thacker : comparaison de l'évolution (a) des volumes d'eau, (b) des hauteurs d'eau en différents points de la parabole, de la surface libre à $t = 5T$ (c) pour 50 mailles et (d) pour 400 mailles et (e)-(f) de la surface libre aux interfaces.	87
2.38 Flux HLL : comparaison de l'évolution des erreurs sur (a) les hauteurs d'eau, (b) les débits, des convergences à $t = 5T$ sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des débits à $t = 5T$ et (f) des temps de calcul.	88
3.1 Tableau de coefficients de frottement de Manning.	93
3.2 Solution de Dressler 40 s après la rupture du barrage.	100
3.3 Ecoulement fluvial-fluvial pour la loi de Darcy-Weisbach.	101
3.4 Ecoulement torrentiel-torrentiel pour la loi de Darcy-Weisbach.	103
3.5 Ecoulement fluvial-torrentiel pour la loi de Darcy-Weisbach.	104
3.6 Ecoulement torrentiel-fluvial pour la loi de Darcy-Weisbach.	105
3.7 Ecoulement fluvial-fluvial pour la loi de Manning.	106
3.8 Ecoulement fluvial-torrentiel pour la loi de Manning.	108
3.9 Ecoulement torrentiel-torrentiel pour la loi de Manning.	109
3.10 Ecoulement fluvial-fluvial périodique pour la loi de Manning.	110
3.11 Solution de Dressler à $t = 40$ s : comparaison du profil de vitesses obtenu avec la méthode de topographie apparente et le flux de Rusanov pour (a) 50 mailles et (b) 800 mailles et les profils (c) de hauteur et (d) de vitesse obtenus dans Valiani et al. [1999b].	114
3.12 Solution de Dressler à $t = 40$ s : comparaison des hauteurs d'eau pour (a) 50 et (b) 800 mailles, des vitesses pour (c) 50 et (d) 800 mailles et des débits pour (e) 50 et (f) 800 mailles.	115

TABLE DES FIGURES

3.13	Écoulement fluvial-fluvial 1 pour la loi de Darcy-Weisbach : comparaison des vitesses obtenues avec le flux de Rusanov associé à la topographie apparente avec le flux HLL associé au traitement semi-implicite 2 pour 25 et 400 mailles.	116
3.14	Écoulement fluvial-fluvial 1, loi de Darcy-Weisbach : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses et comparaison de la transition sec/mouillé au niveau (c) de la surface libre et (d) de la vitesse à l'instant $t = 100$ s.	117
3.15	Écoulement fluvial-fluvial 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	118
3.16	Écoulement fluvial-fluvial 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	119
3.17	Écoulement torrentiel-torrentiel 1, loi de Manning : (a) hauteurs d'eau pour $J = 50$ mailles et (b) zoom sur la surface libre obtenue avec la méthode semi-implicite 1 pour $J = 25$ mailles.	120
3.18	Écoulement torrentiel-torrentiel 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	121
3.19	Écoulement torrentiel-torrentiel 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	122
3.20	Écoulement fluvial-torrentiel 1 : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses pour la loi de Manning et (c) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses pour la loi de Darcy-Weisbach.	123
3.21	Écoulement fluvial-torrentiel 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	124
3.22	Écoulement fluvial-torrentiel 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	125
3.23	Écoulement torrentiel-fluvial 1, loi de Manning : comparaison des hauteurs pour $J = 50$ mailles.	126
3.24	Écoulement torrentiel-fluvial 1 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	127
3.25	Écoulement torrentiel-fluvial 1 avec loi de Darcy-Weisbach : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	128
3.26	Écoulement fluvial-fluvial 2, loi de Manning : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses.	129
3.27	Écoulement fluvial-fluvial 2 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	130
3.28	Écoulement fluvial-torrentiel 2, loi de Manning pour $J = 400$ mailles : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses et comparaison (c) des hauteurs d'eau, (d) zoom sur les oscillations et zoom sur la même zone pour les flux (e) de Rusanov et (f) cinétique.	132

TABLE DES FIGURES

3.29	Ecoulement fluvial-torrentiel 2 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	133
3.30	Ecoulement torrentiel-torrentiel 2 : analyse de l'ordre de grandeur des coefficients a_i du système de Saint-Venant sous forme non dimensionnelle.	134
3.31	Ecoulement torrentiel-torrentiel 2 : (a) surface libre, (b) zoom sur les oscillations pour $J = 400$ mailles et zoom sur la même zone pour les flux (c) de Rusanov et (d) cinétique.	135
3.32	Ecoulement torrentiel-torrentiel 2 avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	136
3.33	Ecoulement fluvial-fluvial périodique, loi de Manning : comparaison de l'efficacité des méthodes pour le calcul (a) des hauteurs d'eau, (b) des vitesses.	137
3.34	Ecoulement fluvial-fluvial périodique avec loi de Manning : comparaison (a) des hauteurs d'eau, (b) des débits, des erreurs sur (c) les hauteurs, (d) les débits, (e) des temps de calcul et (f) des convergences en temps.	138
4.1	Roll-waves (photo de Nick Tabram).	142
4.2	(a)-(b) Photos de roll-waves dans le conduit de Grünbach à Merlingen (Suisse) extraites des pages 303 et 315 de Cornish [1910].	143
4.3	Illustration des différentes variables nécessaires à la construction du profil de Dressler.	148
4.4	Taux de convergence vers l'état stationnaire final pour la loi de Darcy-Weisbach (a) $Fr \leq 2$, (b) $Fr > 2$	154
4.5	$Fr = 1.5$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.	155
4.6	$Fr = 2$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.	156
4.7	$Fr = 2.25$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.	157
4.8	$Fr = 3.7$ et loi de Darcy-Weisbach : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.	158
4.9	Comparaison de la hauteur d'eau avec la solution de Dressler après convergence du schéma pour $Fr = 2.5$ et la loi de Darcy-Weisbach.	159
4.10	Taux de convergence vers l'état stationnaire final pour la loi de Manning pour (a) $Fr \leq 1.5$, (b) $Fr > 1.5$	160
4.11	$Fr = 1.2$ et loi de Manning : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.	161
4.12	$Fr = 1.5$ et loi de Manning : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.	162
4.13	$Fr = 2.2$ et loi de Manning : évolution des perturbations sur les vitesses et les hauteurs d'eau (a) à $t = 0$ s, (b) à $t = 10$ s, (c) à $t = 20$ s, (d) à $t = 30$ s, (e) à $t = 40$ s, (f) à $t = 50$ s.	163

TABLE DES FIGURES

4.14	Rupture de barrage sur plan incliné : (a) condition initiale, (b) la hauteur d'eau à différents instants, la hauteur d'eau à la fin de la simulation pour (c) 1875 mailles et (d) 60000 mailles et zoom sur la hauteur d'eau à la fin de la simulation pour des maillages (e) grossiers et (f) fins.	165
5.1	Test de la pluie idéale : (a) Configuration et (b) hydrogramme mesuré en $x = L$. . .	169
5.2	Test de la pluie idéale : Evolution (a) de la hauteur d'eau et (b) du débit pour la montée de l'hydrogramme et le plateau ($t \in [0, T_P]$) pour la loi de Darcy-Weisbach avec $f = 0.14$	170
5.3	Test de la pluie idéale : Evolution (a) de la hauteur d'eau et (b) du débit pendant le tarissement de l'hydrogramme ($t > T_P$) pour la loi de Darcy-Weisbach avec $f = 0.14$	171
5.4	Ecoulement fluvial-fluvial avec de la pluie pour la loi de Darcy-Weisbach.	177
5.5	Ecoulement fluvial-fluvial avec pluie et loi de Manning. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.	179
5.6	Ecoulement fluvial-fluvial avec pluie et loi de Darcy-Weisbach. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.	180
5.7	Ecoulement torrentiel-torrentiel avec de la pluie pour la loi de Darcy-Weisbach.	181
5.8	Ecoulement torrentiel-torrentiel avec pluie et loi de Manning. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.	183
5.9	Ecoulement torrentiel-torrentiel avec pluie et loi de Darcy-Weisbach. Hauteurs d'eau pour : (a) 25 mailles et (b) 400 mailles, débits pour : (c) 25 mailles et (d) 400 mailles, (e) convergences en temps et (f) erreurs en fonction du maillage.	184
5.10	Les débits à l'état stationnaire pour la loi de Darcy-Weisbach avec différents coefficients de frottement.	186
5.11	Pluie idéale. Comparaison au cours du temps : des hydrogrammes pour la loi de (a) Darcy-Weisbach et (b) Manning et à l'équilibre : des vitesses pour la loi de (c) Darcy-Weisbach et (d) Manning et des hauteurs d'eau pour la loi de (e) Darcy-Weisbach et (f) Manning avec différents coefficients de frottement.	187
5.12	Pluie idéale. Comparaison (a), (b) et (c) des hydrogrammes à l'exutoire, (d) des vitesses et (e) des hauteurs pour la loi de Darcy-Weisbach avec $f = 0.12$ et $f = 0.34$ et (f) vérification du critère de validité de l'approximation d'onde cinématique.	188
5.13	Pluie idéale avec loi de frottement de Darcy-Weisbach : (a) zoom sur l'hydrogramme et (b) comparaison des nombres de Froude pour la phase du plateau.	189
5.14	Illustration du modèle de Green-Ampt.	191
5.15	Valeurs des paramètres du modèle de Green-Ampt en fonction du type de sol (extrait de Chow et al. [1988, p.115]).	192
5.16	Illustration de la discrétisation bidimensionnelle.	194
6.1	Dispositif expérimental. (a) Le canal et (b) Les gicleurs (photos de l'unité Science du sol de l'INRA d'Orléans).	198
6.2	Test de la pluie idéale : (a) Configuration et (b) hydrogramme mesuré en $x = L$	199
6.3	Pluie idéale : Evolution du nombre de Weber au cours du temps pour la loi de Manning avec $n = 0.013$	200

TABLE DES FIGURES

6.4	Test de la pluie idéale. Frottement de Darcy-Weisbach et pluie de 50.76 mm/h : (a) débit à l'exutoire et (b) débit cumulé. Frottement de Darcy-Weisbach et pluie de 52 mm/h : (c) débit à l'exutoire et (d) débit cumulé. Frottement de Manning et pluie de 52 mm/h : (e) débit à l'exutoire et (f) débit cumulé.	201
6.5	Illustration des frottements supplémentaires à la surface de l'écoulement dus à la pluie à l'aide de profils de vitesses (extrait de Yoon and Wenzel [1971]).	202
6.6	Sénégal et Niger.	203
6.7	Parcelle (a)-(b) ERO au Niger, (c)-(d) JAC au Niger et (e)-(f) de Thies au Sénégal.	204
6.8	Parcelle ERO : hyétogrammes et hydrogrammes du (a) 20 juillet 1994, (b) 21 juillet 1994, (c) 07 août 1994, (d) 10 août 1994, (e) 20 août 1994 et du (f) 20 août 1994 2 pour la loi de Darcy-Weisbach.	207
6.9	Parcelle ERO : hyétogrammes et hydrogrammes du (a) 24 août 1994, (b) 25 août 1994, (c) 04 septembre 1994, (d) 08 septembre 1994, (e) 12 septembre 1994 et du (f) 16 septembre 1994 pour la loi de Darcy-Weisbach.	208
6.10	Parcelle ERO, comparaison des résultats simulés pour FullSWOF_2D et PSEM_2D avec les résultats expérimentaux : (a) hauteurs infiltrées en milieu de parcelle, (b) temps de début de ruissellement, (c) temps d'obtention des pics de ruissellement et (d) valeurs de ces pics.	209
6.11	Parcelle JAC : hyétogramme et hydrogrammes du 24 août 1994.	211
6.12	Parcelle JAC : hyétogrammes et hydrogrammes du (a) 07 août 1994, (b) 10 août 1994, (c) 20 août 1994, (d) 25 août 1994, (e) 12 septembre 1994 et du (f) 16 septembre 1994 pour la loi de Darcy-Weisbach.	212
6.13	Parcelle JAC, comparaison des résultats simulés pour FullSWOF_2D et PSEM_2D avec les résultats expérimentaux : (a) hauteurs infiltrées en milieu de parcelle, (b) temps de début de ruissellement, (c) temps d'obtention des pics de ruissellement et (d) valeurs de ces pics.	213
6.14	Configuration du livre ouvert de Wooding.	214
6.15	Parcelle de Thies : localisation des points de mesure des vitesses par SVG.	216
6.16	Parcelle de Thies au Sénégal : (a) vitesses, (b) nombres de Froude, (c) hauteurs d'eau et (d) nombres de Reynolds à $t = 7300$ s pour $f = 0.26$ et le maillage grossier.	217
6.17	Parcelle de Thies au Sénégal : (a) vitesses, (b) nombres de Froude, (c) hauteurs d'eau et (d) nombres de Reynolds à $t = 7300$ s pour $f = 0.26$ et le maillage fin.	218
6.18	Parcelle de Thies au Sénégal : (a) vitesses, (b) nombres de Froude, (c) hauteurs d'eau et (d) nombres de Reynolds à $t = 7300$ s avec f hétérogène et le maillage grossier.	219
6.19	Parcelle de Thies : comparaison des vitesses simulées et mesurées (a) pour $f = 0.26$ et (b) pour les coefficients de frottement hétérogènes.	222
6.20	Parcelle de Thies : hyétogramme et comparaison des hydrogrammes simulées et mesurées (a) pour $f = 0.26$ et (b) pour les coefficients de frottement hétérogènes.	222
7.1	Illustration de l'utilisation de la classe <i>flux</i> et du distributeur de flux <i>choix_flux</i>	227
7.2	Organisation des classes utilisées par la classe <i>ordre1</i>	227
7.3	Organisation des classes utilisées par la classe <i>ordre2</i>	228
7.4	Le fichier des paramètres d'initialisation.	229
7.5	Analyse d'efficacité du logiciel FullSWOF_2D pour différents paramètres (graphique fourni par Christian Laguerre).	230
7.6	Page HTML générée par le logiciel Doxygen.	233
7.7	Rupture de barrage radial sur fond sec : (a) Condition initiale et (b) au temps $t = 50$ s.	234

TABLE DES FIGURES

7.8	Rupture de barrage radial sur fond mouillé : (a) Condition initiale et (b) au temps $t = 5$ s.	235
7.9	Test de Thacker : (a) Condition initiale et (b) au temps $t = 500$ s.	235
A.1	Les caractéristiques pour les différents types écoulements.	241
B.1	Rupture de barrage sur fond mouillé : (a) pour $t = 0$, (b) pour $t > 0$	243
B.2	Rupture de barrage sur fond sec à $t > 0$: (a) hauteur d'eau, (b) vitesse.	245
B.3	Solution de Dressler à $t > 0$: (a) hauteur d'eau, (b) vitesse, (c) hauteur d'eau modifiée et (d) débit.	247
B.4	Fonction f	249

TABLE DES FIGURES

Index

- Approximations du système de Saint-Venant
 - approximation d'onde diffusive, 24
- Approximations du système de Saint-Venant, 24
 - approximation d'onde cinématique, 24
 - système de Saint-Venant sous forme non dimensionnelle, 25
- Bassin versant, 15
- Condition de CFL, 29, 43
- Correction du vide, 35
- Erosion, 15
- Etat d'équilibre stationnaire, 25
 - écoulement parallèle, 141
 - écoulement parallèle, 26
 - équilibre du lac au repos, 26
 - équilibre homogène, 26
 - équilibre hydrostatique, 26
- Exutoire, 15
- Flux numérique, 28
 - Apstat, 42
 - cinétique, 41
 - correction d'entropie, 42
 - états de Roe moyens, 40
 - flux centré, 28
 - HLL, 40
 - HLLE, 40
 - Lax-Friedrichs, 29
 - Rusanov, 39
 - VFRoe-ncv, 41
- Green-Ampt, 191
- Hauteur critique, 23
- Hyétogramme, 15
- Hydrogramme, 15
- Infiltration, 15
- Limiteur de pente
 - minmod, 37
 - Van Leer, 78
- Loi de frottement
 - Chézy, 92
 - Darcy-Weisbach, 92
 - linéaire, 94
 - Manning, 92
 - Strickler, 92
- Méthode de Heun, 39
- MNT, 15
- Nombre de Froude, 23
- Nombre de Reynolds, 94
- Nombre de Vedernikov, 152
- Parcelle, 16
- Placette, 16
- Propriétés du système de Saint-Venant
 - état d'équilibre *voir aussi* Etat d'équilibre stationnaire, 25
 - hyperbolicité, 22
 - lois de conservation, 21
- Reconstruction hydrostatique, 34, 38
- Reconstruction linéaire
 - ENO, 37
 - ENO modifiée, 37
 - MUSCL, 37
- Roll-waves, 141
 - critère de Craya, 152
 - critère de Jeffreys, 144
 - nombre de Vedernikov, 152
 - profil de Dressler, 147
- Ruissellement, 16
- Schéma aux volumes finis, 27
 - conservativité, 27
 - consistance, 29
 - hyperbolicité, 27
 - propriété-C approchée, 30
 - propriété-C exacte, 30
 - schéma équilibre (well-balanced), 29
 - stabilité, 29
- Traitement numérique des frottements
 - traitement semi-implicite, 196

INDEX

- Traitement numérique des frottements
 - topographie apparente, 95
 - traitement semi-implicite, 97
- Type d'écoulement, 23
 - critique, 23
 - fluvial, 23
 - torrentiel, 23

Olivier DELESTRE
Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles

Résumé :

L'objectif de ce travail est le développement d'un modèle et d'une méthode numérique adaptés à la simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles. Pour cela, nous utilisons un système d'équations aux dérivées partielles pour les eaux peu profondes : le système de Saint Venant. La pluie et l'infiltration y sont pris en compte par l'ajout de termes source et le couplage avec un modèle d'infiltration. Le système étant hyperbolique et conservatif nous choisissons d'utiliser un schéma aux volumes finis avec reconstruction hydrostatique. Avec cette reconstruction nous obtenons un schéma permettant de traiter les équilibres stationnaires et les interfaces sec/mouillé dues aux événements pluvieux. Tout d'abord, nous effectuons une comparaison systématique de différents flux numériques, de différentes reconstructions d'ordre deux (MUSCL et ENO modifiées) et de différentes méthodes de traitement des frottements sur des solutions analytiques unidimensionnelles. Ces comparaisons nous permettent de choisir une méthode numérique adaptée à la simulation du ruissellement qui en outre capture les phénomènes de type roll-waves. Ensuite nous nous intéressons au traitement de la pluie et de l'infiltration à l'aide du modèle de Green-Ampt. Cette méthode généralisée en dimension deux est validée sur des résultats expérimentaux obtenus à l'INRA d'Orléans et à l'IRD. La méthode numérique choisie et validée a été implémentée dans FullSWOF_2D un logiciel libre écrit en C++ pour la simulation de ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles.

Mots clés : Ruissellement, Saint-Venant, schéma équilibré, volume fini, reconstruction hydrostatique, terme source, frottement, pluie, infiltration, C++, eau peu profonde, flux numériques, roll waves, solutions analytiques.

Rain water overland flow on agricultural fields simulation

Abstract :

In this work, we aim at developing both a model and a numerical method adapted to the simulation of rainfall runoff on agricultural fields. The model used is a system of partial differential equations for shallow water flows : namely the system of Saint Venant. Rain and infiltration are treated as source terms and with a coupled model of infiltration. Because of the hyperbolicity and conservativity properties, we are using a finite volume scheme with the hydrostatic reconstruction. This reconstruction allows us to deal with stationary equilibria and wet/dry transitions due to rainfall events. First, a systematic comparison on analytic solutions is achieved between various numerical fluxes, two second order reconstructions (a MUSCL and a modified ENO reconstructions) and different numerical treatment of the friction term. This allows us to choose a numerical method adapted to runoff simulation. Moreover it is able to catch roll waves phenomenons. Then we are interested in the rain and infiltration treatment. Infiltration is modeled thanks to the Green Ampt model. This method is thereafter generalized to two dimensions and validated on experimental results obtained by the INRA of Orléans and the IRD. The chosen numerical method has been implemented in an C++ open-source software for rainfall runoff on agricultural fields simulations : FullSWOF_2D.

Keywords : Overland flow, Saint-Venant, Well-balanced scheme, finite volume, hydrostatic reconstruction, source term, friction, rain, infiltration, C++, shallow water, numerical fluxes, roll waves, analytic solutions.



MAPMO UMR 6628, Fédération Denis Poisson
Université d'Orléans, UFR Sciences
Bâtiment de mathématiques - Route de Chartres
B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2
FRANCE

