



HAL
open science

Propagation acoustique en guides fluides et solides à parois rugueuses : formulation intégrale pour ondes de pression, de cisaillement et de Lamb

T. Valier-Brasier

► To cite this version:

T. Valier-Brasier. Propagation acoustique en guides fluides et solides à parois rugueuses : formulation intégrale pour ondes de pression, de cisaillement et de Lamb. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2010. Français. NNT: . tel-00534139

HAL Id: tel-00534139

<https://theses.hal.science/tel-00534139>

Submitted on 8 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PROPAGATION ACOUSTIQUE EN GUIDES FLUIDES
ET SOLIDES À PAROIS RUGUEUSES :
FORMULATION INTÉGRALE POUR ONDES DE PRESSION,
DE CISAILLEMENT ET DE LAMB

Tony Valier-Brasier

Thèse de Doctorat en Acoustique
Université du Maine, Le Mans, France, 2010

Université du Maine, Académie de Nantes, École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur,
Géosciences, Architecture

Thèse de doctorat
Spécialité : Acoustique

PROPAGATION ACOUSTIQUE EN GUIDES FLUIDES ET SOLIDES
À PAROIS RUGUEUSES :
FORMULATION INTÉGRALE POUR ONDES DE PRESSION,
DE CISAILLEMENT ET DE LAMB

Tony Valier-Brasier

Soutenue le 29 septembre devant le jury composé de :

A.-C. Hladky-Hennion	Directeur de Recherches CNRS, IEMN, Lille	Rapporteur
A. Maurel	Chargée de Recherches CNRS, HDR, LOA, Paris	Rapporteur
P. Calmon	Ingénieur de Recherches, CEA, Saclay	Examinateur
M. Deschamps	Directeur de Recherches CNRS, LMP, Bordeaux	Examinateur
J.-L. Izbicki	Professeur, LOMC, Le Havre	Examinateur
V. Tournat	Chargé de Recherches CNRS, HDR, LAUM, Le Mans	Examinateur
M. Bruneau	Professeur Émérite, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse
C. Potel	Professeur, LAUM, Le Mans	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Ma première pensée va bien évidemment à mes deux directeurs de thèse Catherine Potel et Michel Bruneau. La confiance qu'ils m'ont accordée durant ces trois années a été un moteur pour ma motivation. J'ai apprécié leur disponibilité, leur patience et leur pédagogie. J'ai également largement profité de la richesse de leurs connaissances et de leurs conseils. Ces trois années à leur côté ont été un réel plaisir et je tiens à leur exprimer respect et sympathie.

Je remercie Agnès Maurel et Anne-Christine Hladky-Hennion d'avoir accepté d'être rapporteurs, ainsi que Marc Deschamps, Pierre Calmon, Jean-Louis Izbicki et Vincent Tournat d'avoir accepté de faire partie du jury.

Durant ces trois années de thèse, j'ai eu la chance de collaborer avec Damien Leduc et Bruno Morvan du LOMC et aussi avec Philippe Gatignol de l'UTC. Je les remercie vivement pour nos discussions et l'apport considérable que chacun m'a amené. Je tiens à remercier également tous les membres du LOMC pour l'excellent accueil que j'ai reçu durant les deux semaines passées au Havre.

Je remercie Yves Aurégan et Rachid El-Guerjouma, en leur qualité respective de directeur et directeur adjoint du laboratoire, pour m'avoir accueilli au sein du LAUM durant ces trois années.

Je remercie également Simon Félix et Bertrand Lihoreau, pour leur accueil au bureau 380. Comme nous n'avons jamais parlé de littérature, de football ou de rugby, j'ai toujours pu travailler dans un excellent environnement, et pour cela, je tiens à leur exprimer toute ma gratitude.

Un grand merci à Najat Tahani, Olivier Dazel, Bernard Castagnède et Laurent Simon avec qui j'ai eu la chance de me former au métier d'enseignant par leur discussion et leur confiance.

J'adresse un remerciement à tous les amis "thésards" que j'ai rencontrés au cours de ces trois années et tout particulièrement à Ygaël, Jacques, Frédéric, Benoît, Jean-Baptiste, Miguel, Sylvain, Cyril, Mathieu, Marcos et Adrien. Que nos discussions tournaient autour de la physique, de l'enseignement ou du football, que nos rencontres se soient déroulées autour d'une (ou plusieurs) bière(s) ou d'un (ou plusieurs) café(s), j'ai partagé, avec chacun d'entre eux, d'excellents moments que je n'oublierai pas.

Je souhaite également exprimer toute ma gratitude aux nombreuses personnes travaillant à la Faculté des Sciences et notamment à Joël Gilbert, Aroune Duclos, Vincent Pagneux, Bruno Brouard, Christophe Ayrault, Jean-Philippe Groby, Philippe Béquin,

Olivier Richoux, Pierrick Lotton, Guillaume Pénelet, Hervé Mézières, Éric Égon, Francis Chavanon, Yassine El Mendili et Muriel.

Je n'oublie pas de remercier tous les enseignants rencontrés durant mon cursus à l'Université Bordeaux 1 et notamment Christophe Aristégui, Stéphane Baste, Michel Castaings, Bertrand Audoin et Jean-Charles Razafindrakoto.

Je remercie la famille Valier-Brasier pour son soutien sans faille et la confiance qu'ils m'ont toujours accordée durant mes études. Je salue également la famille Mareï et les amis bordelais Hadrien, Amaury, Bruno, Julie, Rémi et Gabriel dont les discussions ont été trop souvent téléphoniques à mon goût. Le mot de la fin est pour Nora, qui m'apporte du bonheur tous les jours depuis que je l'ai rencontrée.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	I
Table des symboles	V
Introduction	1
1 Champ acoustique en guide à parois rugueuses et fluide dissipatif	5
1.1 Le problème fondamental	6
1.1.1 Le guide à parois rugueuses	6
1.1.2 Modèle de dissipation et réaction des couches limites thermo- visqueuses	7
1.1.3 Équations fondamentales, formes de solutions	8
1.1.4 Fonctions propres	8
1.2 Modèles analytiques	9
1.2.1 Premier modèle (M1)	9
1.2.2 Second modèle (M2)	13
1.2.3 Résolution par approximations successives	14
1.2.4 Cas particulier du guide rugueux à deux dimensions	15
1.3 Rugosités périodiques : conditions d'accord de phase ou relation de phonon	16
1.4 Couplage de modes, comparaison des résultats des deux modèles	17
1.4.1 Convergence des deux méthodes	20
1.4.2 Stabilité des deux méthodes	20
1.4.3 Limites des deux méthodes	22
1.5 Effet de la dissipation sur la propagation des ondes	23
1.6 Champ de pression dans une bande d'arrêt	24
1.7 Champ de pression acoustique généré par une source surfacique	27
1.7.1 Géométrie du problème	27
1.7.2 Champ de pression dans le domaine D_1	28
1.7.3 Champ de pression dans le domaine D_2	29
1.7.4 Exemple d'un champ source $\hat{W}^{(\alpha,\mu)}$ au point $x = 0$	31
1.7.5 Résultats	31
1.8 Conclusion	32

2	Propagation d'ondes SH dans des plaques solides à parois rugueuses	33
2.1	Le problème fondamental	33
2.1.1	Le guide à parois rugueuses	33
2.1.2	Conditions aux frontières	35
2.1.3	Développements modaux	35
2.1.4	Formulation intégrale	36
2.1.5	Recherche de solutions par approximations successives	38
2.1.6	Limites de la méthode	39
2.2	Couplage de modes, comparaison des modèles	40
2.3	Flux d'énergie	42
2.3.1	Coefficients de réflexion et de transmission en énergie	42
2.3.2	Évolutions des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de la fréquence	43
2.4	Étude expérimentale	45
2.4.1	Couplage de deux modes guidés dans une bande d'arrêt	47
2.4.2	Coefficient de réflexion et de transmission en énergie	49
2.4.3	Comparaison des résultats expérimentaux et théoriques	52
2.5	Conclusion	54
3	Étude du couplage de modes guidés	55
3.1	Expressions analytiques approchées des amplitudes des modes	55
3.2	Étude du sens de propagation des modes créés par couplage	58
3.2.1	Étude d'un couplage co-directionnel	58
3.2.2	Étude d'un couplage contra-directionnel	62
3.3	Théorie des modes couplés	65
3.3.1	Couplage co-directionnel	65
3.3.2	Couplage contra-directionnel	67
3.3.3	Exemple de résultat	68
3.4	Influence des paramètres géométriques sur le couplage de modes	71
3.4.1	Influence de la hauteur de rugosité sur le couplage de modes	71
3.4.2	Influence de la longueur de rugosité sur le couplage de modes	73
3.4.3	Influence de la forme de la rugosité sur le couplage de modes	74
3.4.4	Étude de l'effet de l'enveloppe du profil de rugosité	76
3.5	Études de profils de rugosité ayant plusieurs périodicités spatiales	80
3.5.1	Profils de rugosité ayant deux périodicités spatiales voisines	80
3.5.2	Profil de rugosité ayant trois périodicités spatiales éloignées	83
3.5.3	Profil de rugosité pseudo-aléatoire	85
3.6	Conclusion	88
4	Propagation d'ondes de Lamb dans des plaques à parois rugueuses	89
4.1	La plaque rugueuse	89
4.2	Équations fondamentales	90
4.2.1	Les équations de propagation	90
4.2.2	Conditions aux frontières	91

4.2.3	Ondes de Lamb en guides à parois lisses	92
4.3	Formulation intégrale du problème	93
4.3.1	Formulation intégrale du problème en l'absence de rugosité	93
4.3.2	Fonction de Green	93
4.3.3	Formulation intégrale du problème en présence de rugosité : couplages	95
4.3.4	Résolution par approximations successives	96
4.4	Couplage de deux ondes de Lamb dans une bande d'arrêt	97
4.4.1	Résultats au premier ordre des approximations	97
4.4.2	Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux	100
4.4.3	Cartographies des champs	101
4.5	Conclusion	104
Conclusion		105
Références		107
A Fonctions propres (1D) du guide régulier		115
A.1	Fonctions propres pour champ scalaire en fluide non dissipatif	115
A.2	Fonctions propres en fluide dissipatif : solution générale	116
A.3	Fonctions propres en fluide dissipatif : solution approchée	116
B Opérateur d'épaisseur		119
B.1	Expressions de l'opérateur de volume en fluide dissipatif	119
B.1.1	Cas $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$	119
B.1.2	Cas $(\alpha, \mu) = (\sigma, m)$	120
B.2	Expressions de l'opérateur de volume en fluide non dissipatif	120
B.2.1	Cas $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$	120
B.2.2	Cas $(\alpha, \mu) = (\sigma, m)$	121
C Intégration numérique		123
C.1	Calcul de la fonction I_u	123
C.2	Calcul de la fonction I_v	124
D Expression de la source surfacique		127
D.1	Expression des modes $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$	128
D.2	Expression du terme source des modes (σ, m)	129
E Modèle des petites masses (PM)		131
F Conservation de l'énergie		133
F.1	Flux d'énergie moyen	133
F.2	Densité moyenne d'énergie	134
F.3	Vitesse de groupe des modes couplés	135
F.3.1	Vitesse de groupe d'un mode couplé co-propagatif	135
F.3.2	Vitesse de groupe d'un mode couplé contra-propagatif	136

G	Approximations	137
G.1	Approximations des fonctions propres sur la frontière rugueuse	137
G.2	Approximations des dérivées des fonctions propres sur la frontière rugueuse	138
G.3	Expressions approchées de l'opérateur de volume	138
H	Théorie des modes couplés	139
H.1	Propagation dans le même sens (couplage co-directionnel)	139
H.2	Propagation en sens inverse (couplage contra-directionnel)	140
I	Ondes de Lamb	143
I.1	Onde de Lamb symétrique	145
I.2	Onde de Lamb antisymétrique	146
J	Fonction de Green pour ondes de Lamb	149
K	Fonction de Green pour ondes de Lamb : intégrale de Fourier	153
K.1	Convergence de l'intégrale	153
K.2	Calcul numérique de la fonction de Green	154
L	Fonction de Green pour ondes de Lamb : calcul des résidus	157
L.1	Fonction de Green paire	157
L.2	Fonction de Green impaire	159
L.3	Contours d'intégration	159
M	Relation entre la méthode des résidus et les développements modaux	161
M.1	Calculs des résidus	161
M.2	Contours d'intégration	162

TABLES DES SYMBOLES

CHAPITRE 1

- $\hat{A}^{(\sigma,m)}$: amplitude du mode (σ, m) dans le guide rugueux
 $\hat{A}_1^{(\sigma,m)}$ et $\hat{A}_2^{(\sigma,m)}$: amplitudes du mode (σ, m) respectivement dans les domaines D_1 et D_2
 $^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}$: amplitude du mode (σ, m) à l'ordre N des approximations successives
 $^{(N)}\hat{A}^{(\sigma,m)}$: correction d'amplitude du mode (σ, m) à l'ordre N
 $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base orthonormée directe associée au repère R
 c_0 : célérité adiabatique du son dans le fluide constituant le guide
 C_P et C_V : capacités calorifiques massiques respectivement à pression et volume constants
 D : domaine du guide rugueux de frontière ∂D
 D_0 : domaine du guide à géométrie compatible (guide extérieur) de frontière ∂D_0
 D_1 et D_2 : domaines d'étude du champ de pression créé par la source pariétale
 d : épaisseur du guide d'onde fictif intérieur au guide rugueux
 f : fréquence
 $\hat{f}(r)$: amplitude harmonique du champ source incident
 $\hat{F}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{W}^{(\sigma,m)}$: termes intégraux représentant le champ incident (termes source)
 G et G_1 : fonctions de Green
 $g^{(\sigma,m)}$ et $g_1^{(\sigma,m)}$: coefficients des développements modaux respectivement des fonctions de Green G et G_1 .
 h_1 et h_2 : fonctions arithmétiques définissant les profils de rugosité respectivement des surfaces z_1 et z_2
 h : hauteur maximale de rugosité
 \vec{k}_0 : vecteur d'onde acoustique
 $k_{0//}$: projection sur le plan de propagation du vecteur d'onde acoustique \vec{k}_0
 $\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)}$ et $k_{xy}^{(\sigma,m)}$: projection sur le plan de propagation des nombres d'ondes du mode (σ, m) respectivement en fluide dissipatif et non dissipatif
 L_z : épaisseur du guide d'onde fictif extérieur au guide rugueux
 ℓ : longueur de rugosité
 ℓ_t : longueur du transducteur
 m, μ et ν : nombres quantiques
 \vec{n}_1 et \vec{n}_2 : vecteurs unitaires normaux aux surfaces rugueuses z_1 et z_2 et orientés vers l'extérieur du guide

- N_1 et N_2 : normes respectives des vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2
 N_c : nombre d'itérations assurant la convergence des approximations successives
 O : opérateur de rugosité
 \hat{p} : champ de pression acoustique complexe dans le guide rugueux
 \hat{p}_1 et \hat{p}_2 : champ de pression acoustique complexe respectivement dans les domaines D_1 et D_2
 $\hat{Q}^{(\sigma,m)}$: amplitude de la source du mode (σ, m)
 $R = (O, x, y, z)$: repère cartésien orthonormé direct
 \vec{r} et \vec{r}' : vecteurs positions
 t : temps
 V : vitesse vibratoire du transducteur d'amplitude V_0
 (x, y, z) et (x', y', z') : composantes respectives dans la base B des vecteurs \vec{r} et \vec{r}'
 \hat{Y} : admittance équivalente de paroi
 z_1 et z_2 : surfaces rugueuses délimitant le guide réel
 $\hat{\beta}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{B}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$: opérateurs d'épaisseur respectivement du premier et du second modèle
 χ_T et χ_S : coefficients de compressibilité isotherme et adiabatique respectivement
 $\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}$ et $k_z^{(\sigma,m)}$: valeurs propres du mode (σ, m) respectivement en fluide dissipatif et non dissipatif
 δ_v et δ_h : épaisseurs des couches limites respectivement visqueuse et thermique
 γ : rapport des capacités calorifiques massiques respectivement à pression et volume constants
 $\hat{\eta}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$: opérateurs intégraux de surface respectivement du premier et du second modèle
 Λ : périodicité spatiale de la rugosité
 λ_0 : coefficient de conduction thermique
 μ_0 : coefficient de viscosité de cisaillement
 ω : pulsation
 ρ_0 : masse volumique du fluide constituant le guide
 $\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z)$ et $\psi^{(\sigma,m)}(z)$: fonctions propres du mode (σ, m) respectivement en fluide dissipatif et non dissipatif
 σ , α et β : paramètres permettant de classer les modes selon leur symétrie par rapport à l'axe $z = 0$

CHAPITRE 2

- $\hat{A}^{(\sigma,m)}$: amplitude du mode (σ, m)
 $[N]\hat{A}^{(\sigma,m)}$: amplitude du mode (σ, m) à l'ordre N des approximations successives
 $(N)\hat{A}^{(\sigma,m)}$: correction d'amplitude du mode (σ, m) à l'ordre N
 $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base orthonormée directe associée au repère R
 $B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$: opérateur d'épaisseur
 c_T : célérité des ondes de volume transversales
 D : domaine du guide rugueux de frontière ∂D
 D_0 : domaine du guide à géométrie compatible (guide extérieur) de frontière ∂D_0
 d : épaisseur du guide d'onde fictif extérieur au guide rugueux.
 f : fréquence
 $\hat{F}^{(\sigma,m)}$: terme intégrale représentant le champ incident (terme source)
 $\hat{f}(r)$: amplitude harmonique du champ source incident
 G : fonction de Green à deux dimensions
 $g^{(\sigma,m)}$: coefficient du développement modal de la fonction de Green G du mode (σ, m)
 $\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$: opérateur intégral de surface
 h_1 et h_2 : fonctions arithmétiques définissant les profils de rugosité
 h : hauteur maximale de rugosité
 $h_q^{(0)}$: hauteur des petites cavités (petites masses)
 $k_x^{(\sigma,m)}$: projection suivant la direction de propagation du nombre d'onde du mode (σ, m)
 k_T : nombre d'onde des ondes de volume transversales
 $k_z^{(\sigma,m)}$: valeur propre du mode (σ, m)
 L_z : épaisseur du guide d'onde fictif extérieur au guide rugueux.
 ℓ : longueur de rugosité
 m_q : masse linéique des petites cavités
 N_1 et N_2 : normes respectives des vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2
 N_c : nombre d'itérations assurant la convergence des approximations successives
 \vec{n}_1 et \vec{n}_2 : vecteurs unitaires normaux aux surfaces rugueuses orientés à l'extérieur du guide
 P_x : composante suivant la direction de propagation x du vecteur de Poynting
 $R = (O, x, y, z)$: repère cartésien orthonormé direct
 $R^{(\sigma,m)}$: coefficient de réflexion en énergie du mode (σ, m) en amont de la rugosité
 $\hat{Q}^{(\sigma,m)}$: coefficient du développement modal de la fonction source
 $\hat{\hat{T}}$: tenseur des contraintes harmonique
 t : temps
 $T^{(\sigma,m)}$: coefficient de transmission du mode (σ, m) en aval de la rugosité
 t_{xy} : composante xy du tenseur des contraintes réel
 \hat{U}_y : champ de déplacement harmonique selon la direction y
 u_y : champ de déplacement réel projeté suivant y

z_1 et z_2 : surfaces rugueuses délimitant le guide réel

Λ : périodicité spatiale de la rugosité

μ : second coefficient de Lamé

ω : pulsation

ρ : masse volumique du solide isotrope constituant le guide

$\bar{\phi}$: moyenne temporelle du flux d'énergie

$\bar{\phi}^{(\sigma,m)}$: moyenne temporelle du flux d'énergie porté par le mode (σ, m)

$\psi^{(\sigma,m)}$: fonction propre du mode (σ, m)

CHAPITRE 3

- $\hat{A}^{(\sigma,m)}$: amplitude du mode (σ, m)
 $^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}$: amplitude du mode (σ, m) à l'ordre N des approximations successives
 $^{(N)}\hat{A}^{(\sigma,m)}$: correction d'amplitude du mode (σ, m) à l'ordre N
 $B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$: opérateur d'épaisseur
 $c_g^{(\sigma,m)}$: vitesse de groupe du mode (σ, m)
 \hat{C}_n : coefficients complexes des séries de Fourier des fonctions définissant les rugosités
 c_T : célérité des ondes de volume transversales
 d : épaisseur du guide d'onde fictif extérieur au guide rugueux.
 $\text{DSP}(h_1)$: densité spectrale de puissance du profil de rugosité h_1
 $\bar{E}^{(\sigma,m)}$: moyenne temporelle de l'énergie totale portée par le mode (σ, m)
 f : fréquence
 $g^{(\sigma,m)}$: coefficient du développement modal de la fonction de Green G du mode (σ, m)
 $\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$: opérateur intégral de surface
 h : hauteur maximale de rugosité
 h_1 et h_2 : fonctions arithmétiques définissant les profils de rugosité
 $k_x^{(\sigma,m)}$: projection suivant la direction de propagation du nombre d'onde du mode (σ, m)
 k_T : nombre d'onde des ondes de volume transversales
 $k_z^{(\sigma,m)}$: valeur propre du mode (σ, m)
 L_z : épaisseur du guide d'onde fictif extérieur au guide rugueux.
 ℓ : longueur de rugosité
 \vec{n}_1 et \vec{n}_2 : vecteurs unitaires normaux aux surfaces rugueuses orientés à l'extérieur du guide
 N_1 et N_2 : normes respectives des vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2
 N_c : nombre d'itérations assurant la convergence des approximations successives
 $R^{(\sigma,m)}$: coefficient de réflexion du mode (σ, m) en amont de la rugosité
 $S_i(x)$ et $S_d(x)$: amplitudes des modes couplés
 $T^{(\sigma,m)}$: coefficient de transmission du mode (σ, m) en aval de la rugosité
 z_1 et z_2 : surfaces rugueuses délimitant le guide réel
 $\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$, $n\hat{\eta}^{(\alpha,r)}$ et $n\hat{\xi}^{(\alpha,r)}$: coefficients de couplage
 $n\hat{\delta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$, $n\hat{\varepsilon}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$, δ_1 et ε_2 : paramètres de désaccord
 Λ , Λ_0 , Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 et Λ_4 : périodicités spatiales de la rugosité
 ω : pulsation
 $\psi^{(\sigma,m)}$: fonction propre du mode (σ, m)
 $\bar{\phi}^{(\sigma,m)}$: moyenne temporelle du flux d'énergie porté par le mode (σ, m)

CHAPITRE 4

$B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base associée au repère R

D : domaine du guide rugueux de frontière ∂D

D_0 : domaine du guide à géométrie compatible (guide extérieur) de frontière ∂D_0

c_L et c_T : célérités des ondes de volume respectivement longitudinales et transversales

\hat{F} : vecteur traduisant l'effet des sources

$\hat{F}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$: terme source d'un mode de Lamb (τ, n)

f : fréquence

$G_{\eta_j}^{(\tau, n)}$: fonction de Green du mode de Lamb (τ, n)

h_1 et h_2 : fonctions arithmétiques définissant les profils de rugosité

h : hauteur maximale de rugosité

$h_{\eta_j}^{(\tau, n)}$: fonction de Green transverse du mode de Lamb (τ, n)

$k_{\eta_z}^{(\tau, n)}$: nombres d'onde transverse du mode de Lamb (τ, n)

$k_x^{(\tau, n)}$: nombre d'onde suivant la direction de propagation x du champ de déplacement

η ($\eta = L, T$) du mode de Lamb (τ, n)

k_T : nombres d'onde des ondes de volume respectivement longitudinales et transversales

L_z : épaisseur du guide d'onde fictif extérieur au guide rugueux.

ℓ : longueur de rugosité

n et m : nombres quantiques

\vec{n}_1 et \vec{n}_2 : vecteurs unitaires normaux aux surfaces rugueuses orientés à l'extérieur du guide

N_1 et N_2 : normes respectives des vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2

$\hat{Q}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$: amplitude complexe de la composante suivant j ($j = x, z$) du champ de déplacement η ($\eta = L, T$) du mode (τ, n)

$R = (O, x, y, z)$: repère cartésien

$\hat{U}(x, z)$: vecteur déplacement complexe

$\hat{U}_L(x, z)$: vecteur déplacement complexe longitudinal

$\hat{U}_T(x, z)$: vecteur déplacement complexe transversal

$\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$: composante suivant j ($j = x, z$) du champ de déplacement η ($\eta = L, T$) du mode (τ, n)

$[N]\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$: composante suivant j ($j = x, z$) du champ de déplacement η ($\eta = L, T$) du mode (τ, n) à l'ordre N des approximations successives

$(N)\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$: correction de la composante suivant j ($j = x, z$) du champ de déplacement η ($\eta = L, T$) du mode (τ, n) à l'ordre N

\hat{U}_{L_x} et \hat{U}_{L_z} : composantes respectivement suivant les directions x et z du vecteur déplacement complexe longitudinal

\hat{U}_{T_x} et \hat{U}_{T_z} : composantes respectivement suivant les directions x et z du vecteur déplacement complexe transversal

\hat{T} : tenseur des contraintes

- $\hat{T}_{xx}, \hat{T}_{xz}$ et \hat{T}_{zz} : composantes du tenseur des contraintes
 $\hat{Y}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$: admittance équivalente de paroi du mode de Lamb (τ, n)
 z_1 et z_2 : surfaces rugueuses délimitant le guide réel
 $z_>$ et $z_<$: coordonnées des fonctions de Green h_{η_j} et G_{η_j}
 χ : variable d'intégration (fonctions de Green)
 $\alpha_{\eta_j}^{(\tau,n)}$: paramètre associé à l'admittance $\hat{Y}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$
 $\delta\hat{\Gamma}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$: opérateur intégral sur les frontières rugueuses des composantes du champ de déplacement du mode (τ, n)
 $\hat{\Gamma}_{\eta_j}^{(0)}$: opérateur intégral sur les frontières (lisses) du guide extérieur des composantes du champ de déplacement du mode (τ, n)
 $\hat{\Gamma}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$: opérateur intégral sur les frontières rugueuses des composantes du champ de déplacement du mode (τ, n)
 κ_{η_z} : projection suivant la direction z du nombre d'onde k_η (χ est la projection suivant x)
 Λ : périodicité spatiale de la rugosité
 λ et μ : coefficients de Lamé
 ω : pulsation
 ρ : masse volumique du solide isotrope constituant le guide

INTRODUCTION

Le problème de la propagation dans les guides d'ondes à géométrie complexe a fait l'objet de nombreuses études dans diverses disciplines de la physique, dont l'acoustique. En acoustique, les champs d'applications touchent à plusieurs domaines, dont celui du Contrôle Non Destructif (CND) par ultrasons qui a motivé au départ ce travail de thèse. L'étude de la propagation des ondes élastiques dans des plaques présentant des défauts en surface ou en volume trouve sa place dans divers domaines industriels (aéronautiques, automobiles, aérospatiales, ...) pour le contrôle de l'état de santé des matériaux. Le CND est utilisé pour inspecter l'état des matériaux, que ce soit pendant leur élaboration ou au cours de leur utilisation, afin par exemple de suivre de possibles endommagements ; il est aussi utilisé pour le contrôle de pièces après usage. De nombreux travaux sont réalisés sur diverses configurations, dont l'étude sur la propagation dans des matériaux composites [1,2], dans des matériaux fissurés [3,4] ou dans les matériaux stratifiés [5–8] ; d'autres études sont menées sur des sujets plus académiques tels la réflexion de bord de plaque [9–11], la propagation dans des plaques inhomogènes [12,13] ou la propagation dans des plaques viscoélastiques [14–16]. Un des enjeux reste l'obtention de méthodes plus simples et/ou plus rapides que celles disponibles à l'heure actuelle, qui permettent de modéliser la propagation d'ondes dans des situations plus ou moins complexes.

Concernant l'étude de la propagation d'ondes dans des guides rugueux, objet du travail présenté dans ce mémoire, diverses applications peuvent être envisagées, telles la caractérisation de l'état de surface d'un matériau, la vérification de la qualité d'un collage dans une structure assemblée, la mesure des caractéristiques d'une couche de peinture, la détection d'effets de corrosion ou d'imperfection d'usinages, ... La rugosité peut être caractérisée par des paramètres statistiques, tels que la profondeur crête à crête, moyenne ou RMS (entre autres paramètres proposés dans la littérature) ; elle peut également être caractérisée par des fonctions spectrales pour révéler des périodicités spatiales du profil.

L'étude menée ici porte plus particulièrement sur les effets de rugosité de frontières de guides d'ondes fluides ou solides sur la propagation acoustique, en vue, en pratique, de caractériser cette rugosité par analyse de son influence sur la propagation des ondes guidées. Le processus de diffusion sur ces rugosités de parois se traduit par des couplages modaux, transferts d'énergie entre modes créés ou non par des sources, modes propres en fluides ou pour des ondes SH dans les solides, modes de Lamb dans les guides solides.

L'étude des effets des parois rugueuses sur la propagation d'ondes prend une part importante de la littérature dans le domaine de l'acoustique. Plusieurs modèles ont été développés pour décrire la propagation de champs scalaires (champ de pression en fluide ou champ de déplacement des ondes SH) [17–21], parmi lesquels la méthode multi-échelles [22–26] et la méthode multimodale [27–29] comptent parmi les modèles les plus utilisés pour décrire le couplage d'ondes dû aux irrégularités de surface. Les modèles décrivant la propagation des ondes de Lamb sont plus rares [30, 31], la condition d'orthogonalité des modes de Lamb restant un outil mathématique relativement complexe [32–34]. Les principaux modèles développés sur ce sujet reposent essentiellement sur des méthodes multi-modales [29, 35, 36]. Le formalisme intégrale tensoriel parfois utilisé, qui repose sur le théorème de Green [37, 38], fait appel à des notions relativement complexes à mettre en œuvre [29, 39, 40]. La réflexion et la transmission d'ondes sur des interfaces rugueuses ont également été étudiées [41–44]. De nombreux modèles ont aussi été développés pour prédire la propagation d'ondes de surface (ondes de Rayleigh et ondes de Love notamment) à l'interface séparant deux milieux et comportant des irrégularités périodiques ou non [38, 45–50]. Enfin, la propagation dans les guides périodiques et les notions qui y sont attachées (bandes d'arrêt, bandes passantes, accord de phase, ...) ont été très largement traitées [51–60] et de nombreux résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature [59, 61–64]. Ainsi, de nombreux modèles sont proposés dans la littérature, mais aucun ne permet d'allier semble-t-il simplicité de mise en œuvre, rapidité en terme de temps de calculs et efficacité (pour traiter notamment tout type de rugosité). C'est dans ce contexte que s'inscrit cette thèse, dont l'objet est alors de proposer des modèles simples, rapides et efficaces, qui permettent de traiter la propagation dans les guides à surfaces rugueuses, les rugosités restant de faibles perturbations (comme c'est le cas pour les applications envisagées) et de pouvoir relier les caractéristiques de ces rugosités à des paramètres acoustiques accessibles à la mesure.

Malgré l'importance des travaux qui touchent de près ou de loin aux préoccupations de l'étude présentée ici, la mise en place d'un modèle susceptible de traiter simultanément des problèmes en guides fluides et solides, dont l'efficacité et la relative simplicité d'emploi le rende utilisable en pratique, restait, à nos yeux, à envisager. C'est ainsi que, dans ce cadre, une nouvelle formulation est proposée, qui repose sur la formulation intégrale (théorème de Green) des équations de propagation scalaires et sur une recherche de solutions sur des bases modales appropriées ou, pour les ondes élastiques, sur des modes de Lamb exprimés dans le cadre de cette formulation (le choix de fonctions de Green (scalaires) appropriées en propagation fluide et solide jouant là un rôle important). Les relations entre champs acoustiques (de pression ou élastique) et profils de rugosité ont été étudiées pour tous types de rugosité, mais plus particulièrement pour des rugosités périodiques qui permettent des analyses plus avancées.

Le premier chapitre est consacré à la mise en place de deux modèles pour décrire la propagation d'ondes acoustiques dans des guides fluides à parois rugueuses, l'un repris d'une étude préalable [65], l'autre proposé comme alternative. La dissipation dans les couches limites thermo-visqueuses est prise en compte dans le but de comparer les effets

des processus de diffusion dus à la rugosité et de dissipation pariétale. Les résultats obtenus avec ces deux méthodes sont comparés, en termes de stabilité et de convergence, ce qui mène au choix définitif du second modèle. Enfin, un modèle de source pariétal, en relation avec le champ de pression incident recherché, est proposé en vue d'orienter les choix de sources en pratique.

Le second modèle développé au premier chapitre est ensuite adapté dans le second chapitre pour modéliser la propagation d'ondes de cisaillement polarisées horizontalement dans des plaques solides isotropes délimitées par des parois striées (stries et polarisation des ondes restant colinéaires). Les résultats obtenus par ce modèle sont discutés et comparés à d'autres résultats théoriques et expérimentaux, dont ceux issus d'expériences réalisées en collaboration avec le LOMC au Havre.

Le troisième chapitre a pour objet de faire le lien entre les couplages des modes guidés (ondes en fluides ou ondes SH dans les solides) et les rugosités de surface, rugosités tout d'abord périodiques qui permettent de mettre en évidence les paramètres clés du guide qui interviennent dans les couplages modaux, puis rugosités plus complexes qui permettent de mettre en lumière la corrélation entre rugosité et propagation.

Le quatrième et dernier chapitre aborde la propagation des ondes de Lamb dans les plaques rugueuses. Le problème est traité, en termes d'équations intégrales scalaires et de fonctions de Green adaptées, séparément pour chacune des composantes des ondes longitudinales et transversales (à l'instar du modèle développé dans les chapitres précédents), ces équations étant couplées par les conditions de contraintes nulles sur les frontières rugueuses. Les résultats obtenus pour le couplage des ondes de Lamb sont ensuite comparés à des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

En résumé, ce mémoire présente un modèle unique et relativement simple à mettre en œuvre, qui se décline de façons différentes suivant que l'on traite de propagation d'ondes SH en solides ou d'ondes en fluides, ou suivant que l'on traite d'ondes de Lamb. Ce modèle permet dans tous les cas de traiter de la propagation en guides à parois rugueuses ; peut-être ouvre-t-il l'espoir de répondre à certaines attentes dans le domaine du Contrôle Non Destructif par ultrasons.

N. B. : Pour une part, ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC, FRE CNRS 3102) du Havre et avec l'Institut d'Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologies (IEMN, UMR CNRS 8520) de Lille. Cette collaboration, sous la tutelle de la Fédération Acoustique du Nord-Ouest (FANO, FR CNRS 3110), permet (notamment) d'allier modélisation analytique (LAUM, objet de cette thèse), approche expérimentale (LOMC), et simulations numériques (IEMN, logiciel ATILA) sur le thème de la propagation en guides rugueux.

Chapitre 1

CHAMP ACOUSTIQUE EN GUIDE À PAROIS RUGUEUSES ET FLUIDE DISSIPATIF

Comme mentionné dans l'introduction de ce mémoire, l'objectif du travail est de développer une méthode qui repose au départ sur un article récent [65], pour modéliser la diffusion des ondes acoustiques par des rugosités de parois de guides d'ondes. Cette méthode repose sur le formalisme intégral classique des problèmes aux limites de l'acoustique en milieu fluide, les solutions étant exprimées sous forme modale. Il apparaît que la convergence de la technique d'itération retenue pour exprimer les couplages de modes dus à la rugosité n'est assurée que dans la situation de très faible rugosité. C'est ainsi que nous avons été amenés, après analyse des facteurs responsables de cette convergence relativement lente, à modifier la présentation du modèle en terme d'ordre dans l'application de la formulation intégrale et de la méthode modale de résolution retenue, sans changer le fond de la méthode.

C'est l'objet de ce chapitre que de présenter ces deux modèles et de comparer la convergence des solutions retenues pour chacun d'eux. Ils sont désignés dans la suite par la forme qu'ils prennent, à savoir respectivement pour le modèle d'origine et celui proposé ici : projection modale des équations de propagation suivie de la résolution reposant sur la formulation intégrale (modèle désigné par l'acronyme MII), formulation intégrale puis projection modale (modèle IM). De surcroît, les effets réactifs et dissipatifs des couches limites thermovisqueuses sont pris en compte sous forme d'une admittance équivalente de paroi, pour en analyser les effets sur l'amplitude des modes considérés, en regard de ceux liés à la rugosité de parois. Enfin, le couplage source-champ, le plus souvent occulté dans les modèles, mais aussi le plus souvent pierre d'achoppement de l'expérimentateur, est traité de manière à pouvoir modéliser la nature du champ source pour une fonction source harmonique définie par sa localisation et par son extension, son amplitude et sa phase (la rétro-action du champ sur le fonctionnement électroacoustique intrinsèque de la source est négligé). A noter que dans le second chapitre et les suivants, seul le dernier modèle (IM) préconisé dans ce premier chapitre est retenu (en raison de sa stabilité et de sa rapidité).

1.1 Le problème fondamental

1.1.1 Le guide à parois rugueuses

Le repère cartésien choisi est défini par $R = (O, x, y, z)$, la base orthonormée associée par $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les composantes dans la base B des vecteurs position \vec{r} et \vec{r}' étant notées respectivement (x, y, z) et (x', y', z') . Le guide d'onde étudié est une plaque fluide délimitée par deux plans parallèles rugueux de longueur et de largeur infinies (figure 1.1). Le domaine D de frontière ∂D considéré dans la suite est défini par $x \in [0, +\infty[$, $y \in]-\infty, +\infty[$ et $z \in [z_1, z_2]$, où les coordonnées z_1 et z_2 définissent les cotes des frontières du guide, donc celles de la rugosité pour x compris dans l'intervalle $[0, \ell]$. Les coordonnées des surfaces rugueuses ∂D définies par $(-L_z/2 + h_1)$ et $(L_z/2 - h_2)$ sont notées dans la suite, par commodité, z_1 et z_2 , les fonctions arithmétiques h_1 et h_2 définissant les profils de rugosité. Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont les vecteurs unitaires respectivement normaux aux surface z_1 et z_2 en tout point des rugosités, et orientés vers l'extérieur du guide. Pour les besoins du modèle, deux guides fictifs sont définis, l'un d'épaisseur L_z (domaine D_0 de frontière ∂D_0), défini par $x \in [0, +\infty[$, $y \in]-\infty, +\infty[$ et $z \in [-L_z/2, L_z/2]$ et l'autre d'épaisseur d (le premier est extérieur au guide réel et le second intérieur).

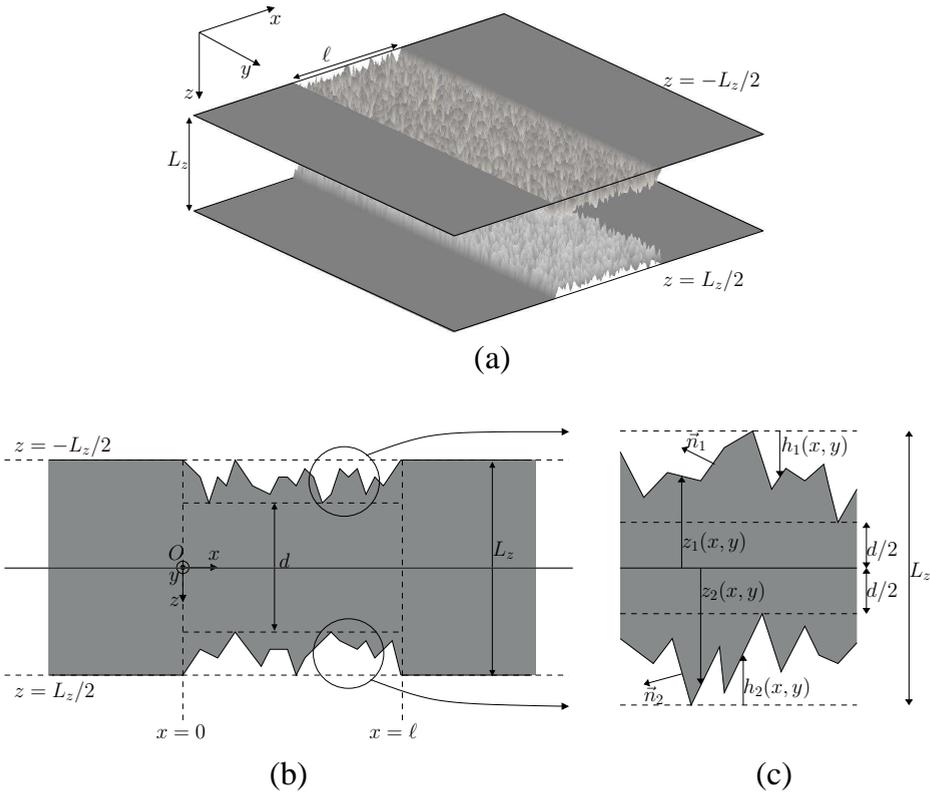


Figure 1.1 – (a) Schéma du guide d'onde délimité par deux surfaces rugueuses. (b) Coupe dans le plan $y = 0$. (c) Zoom sur les rugosités.

Exprimée en fonction de la normale unitaire \vec{n}_q à la paroi située en z_q ($q = 1, 2$), la dérivée normale correspondante prend la forme

$$\partial_{n_q} = \vec{n}_q \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{N_q} \left[(\partial_x h_q) \partial_x + (\partial_y h_q) \partial_y + (-1)^q \partial_z \right], \quad \forall (x, y) \quad q = 1, 2, \quad (1.1)$$

où

$$N_q = \sqrt{(\partial_x h_q)^2 + (\partial_y h_q)^2 + 1}, \quad (1.2)$$

∂_u représentant la dérivée partielle par rapport à la variable u .

Le fluide, dissipatif et au repos, est caractérisé par la masse volumique ρ_0 , la célérité adiabatique c_0 , le coefficient de viscosité de cisaillement μ_0 et le coefficient de conduction thermique λ_0 . Le mouvement est supposé harmonique de pulsation ω [la dépendance au temps étant exprimée par le facteur $\exp(i\omega t)$].

1.1.2 Modèle de dissipation et réaction des couches limites thermo-visqueuses

Les échanges de chaleur entre le fluide et la paroi (dus aux écarts instantanés de température associés à la pression acoustique) et la friction visqueuse du fluide sur la paroi (due au déplacement acoustique) impliquent des pertes d'énergie et un retard à la réflexion sur la paroi rigide. Dans la mesure où les épaisseurs des couches limites thermo-visqueuses restent ici très inférieures aux dimensions transversales du guide fluide, ces pertes d'énergie et ce retard peuvent être modélisés par une admittance équivalente de paroi \hat{Y} telle que [66] :

$$\hat{Y} = (1 + i) \sqrt{\frac{k_0}{2}} \left[\frac{k_{0//}^2}{k_0^2} \delta_v + (\gamma - 1) \delta_h \right], \quad (1.3)$$

où $k_{0//}/k_0$ est le rapport de la projection $k_{0//}$ sur le plan de propagation du vecteur d'onde acoustique \vec{k}_0 et de sa norme ($k_0 = \omega/c_0$), où $\gamma = C_P/C_V$ désigne le rapport des capacités calorifiques (massiques) respectivement à pression et volume constants et où les paramètres $\delta_v = \sqrt{2\mu_0/\rho_0\omega}$ et $\delta_h = \sqrt{2\lambda_0/\rho_0\omega C_P}$ sont des épaisseurs des couches limites respectivement de viscosité et de diffusion thermique. Le rapport $k_{0//}^2/k_0^2$ est le carré du sinus de l'angle d'incidence de l'onde sur la paroi (le facteur lié à la viscosité s'annule pour une incidence normale et est maximal pour une incidence rasante). Étant donné que le propos se limite ici à l'évaluation de l'ordre de grandeur relatif des effets de rugosité et de dissipation sur les ondes, ce facteur est dans la suite remplacé par sa valeur moyenne égale à un demi (dans les faits, il dépend de la nature de l'onde considérée). Selon la formule de Reech, le facteur γ représente le rapport des pentes de l'adiabatique ($1/\chi_S$) et de l'isotherme ($1/\chi_T$) dans le diagramme de Clapeyron. Par suite, la relation

$$\gamma - 1 = \frac{\chi_T - \chi_S}{\chi_S} \quad (1.4)$$

représente une "mesure" de l'intervalle dans lequel la compressibilité χ prend sa valeur (ce facteur prenant au demeurant ici des valeurs complexes qui traduisent un effet de relaxation thermique).

1.1.3 Équations fondamentales, formes de solutions

Dans le cadre des hypothèses de l'acoustique linéaire, le champ de pression complexe acoustique harmonique $\hat{p}(x, y, z)$ est solution du système d'équations suivant, comportant l'équation de propagation et des conditions mixtes aux frontières,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2 + k_0^2 \right] \hat{p}(\vec{r}) = -\hat{f}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in D, \\ \left[\partial_{n_q} + ik_0 \hat{Y} \right] \hat{p}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \partial D, \\ \text{absence d'onde retour à l'infini,} \end{array} \right. \quad (1.5a)$$

$$\left[\partial_{n_q} + ik_0 \hat{Y} \right] \hat{p}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \partial D, \quad (1.5b)$$

$$\text{absence d'onde retour à l'infini,} \quad (1.5c)$$

où la fonction $\hat{f}(\vec{r})$ représente l'amplitude (harmonique) du champ source incident à l'entrée du domaine, les $\hat{}$ représentant des valeurs complexes.

Le problème (1.5) est traité dans la suite par deux méthodes intrinsèquement équivalentes, qui font intervenir le développement de la pression sur une base de fonctions propres du guide fictif à géométrie compatible extérieur au guide à parois rugueuses et la formulation intégrale. La différence entre les deux méthodes, mentionnée dans l'introduction de ce chapitre, réside essentiellement dans l'ordre d'utilisation des deux procédés mathématiques : dans la première méthode, la formulation intégrale précède le développement modal, *a contrario* de la seconde méthode.

Dans les deux cas, la pression est recherchée sous la forme d'un développement sur les fonctions propres $\hat{\psi}^{(\sigma, m)}(z)$ dans le domaine $[-L_z/2, L_z/2]$,

$$\hat{p}(x, y, z) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}^{(\sigma, m)}(x, y) \hat{\psi}^{(\sigma, m)}(z), \quad (1.6)$$

où la variable dichotomique σ peut prendre les valeurs 1 et 2 et où le nombre quantique m prend les valeurs entières de 0 à l'infini. L'introduction de la variable σ permet de séparer les modes en fonction de leur symétrie par rapport au plan $z = 0$: la valeur $\sigma = 1$ est relative aux modes antisymétriques $\hat{\psi}^{(1, m)}$ et la valeur $\sigma = 2$ aux modes symétriques $\hat{\psi}^{(2, m)}$.

1.1.4 Fonctions propres

Les fonctions propres retenues ici sont solutions du problème aux valeurs propres transverse pour le guide à géométrie compatible (guide extérieur au guide réel),

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{zz}^2 + \left(\hat{\chi}_z^{(\sigma, m)} \right)^2 \right] \hat{\psi}^{(\sigma, m)}(z) = 0, \quad z \in \left[-\frac{L_z}{2}, \frac{L_z}{2} \right], \\ \left[\partial_z \pm ik_0 \hat{Y} \right] \hat{\psi}^{(\sigma, m)}(z) = 0, \quad z = \pm \frac{L_z}{2}. \end{array} \right. \quad (1.7a)$$

$$\left[\partial_z \pm ik_0 \hat{Y} \right] \hat{\psi}^{(\sigma, m)}(z) = 0, \quad z = \pm \frac{L_z}{2}. \quad (1.7b)$$

Les fonctions propres antisymétriques et symétriques ont pour expressions respectives (annexe A),

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}^{(1, m)}(z) = \left(\hat{N}^{(1, m)} \right)^{-1} \sin \left(\hat{\chi}_z^{(1, m)} z \right), \\ \hat{\psi}^{(2, m)}(z) = \left(\hat{N}^{(2, m)} \right)^{-1} \cos \left(\hat{\chi}_z^{(2, m)} z \right), \end{array} \right. \quad (1.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}^{(1, m)}(z) = \left(\hat{N}^{(1, m)} \right)^{-1} \sin \left(\hat{\chi}_z^{(1, m)} z \right), \\ \hat{\psi}^{(2, m)}(z) = \left(\hat{N}^{(2, m)} \right)^{-1} \cos \left(\hat{\chi}_z^{(2, m)} z \right), \end{array} \right. \quad (1.8b)$$

où les coefficients de normalisation $\hat{N}^{(\sigma,m)}$ sont donnés par la relation,

$$\hat{N}^{(\sigma,m)} = \sqrt{\frac{L_z}{2} + \frac{ik_0\hat{Y}}{\left(\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}\right)^2 - \left(ik_0\hat{Y}\right)^2}}, \quad (1.9)$$

et où les valeurs propres $\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}$ sont solutions des équations transcendantales

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hat{\chi}_z^{(1,m)}}{ik_0\hat{Y}} = \tan\left(\frac{\hat{\chi}_z^{(1,m)}L_z}{2}\right), \\ \frac{ik_0\hat{Y}}{\hat{\chi}_z^{(2,m)}} = \tan\left(\frac{\hat{\chi}_z^{(2,m)}L_z}{2}\right). \end{array} \right. \quad (1.10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hat{\chi}_z^{(1,m)}}{ik_0\hat{Y}} = \tan\left(\frac{\hat{\chi}_z^{(1,m)}L_z}{2}\right), \\ \frac{ik_0\hat{Y}}{\hat{\chi}_z^{(2,m)}} = \tan\left(\frac{\hat{\chi}_z^{(2,m)}L_z}{2}\right). \end{array} \right. \quad (1.10b)$$

Dans le cas particulier du fluide parfait ($\hat{Y} = 0$), les valeurs propres s'écrivent :

$$k_z^{(\sigma,m)} = \frac{(2m + \delta_{\sigma 1})\pi}{L_z}, \quad (1.11)$$

où $\delta_{\sigma 1}$ est le symbole de Kronecker.

La fonction de Green choisie dans le formalisme intégral retenu dans la suite est définie dans le domaine D_0 du guide à géométrie compatible (guide extérieur) et satisfait à des conditions aux frontières mixtes faisant intervenir l'admittance de paroi \hat{Y} donnée par la relation (1.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2 + k_0^2 \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{r}, \vec{r}' \in D_0, \\ \left[\partial_z \pm ik_0\hat{Y} \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \in \partial D_0 \text{ et } \vec{r}' \in D_0, \end{array} \right. \quad (1.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2 + k_0^2 \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{r}, \vec{r}' \in D_0, \\ \left[\partial_z \pm ik_0\hat{Y} \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \in \partial D_0 \text{ et } \vec{r}' \in D_0, \end{array} \right. \quad (1.12b)$$

où $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ est la fonction de Dirac. Cette fonction de Green peut être développée sur la base des fonctions propres orthogonales (1.8) comme suit [66, 67] :

$$G(x, y, z; x', y', z') = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} g^{(\sigma,m)}(x, y; x', y') \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z') \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z), \quad (1.13)$$

où les coefficients $g^{(\sigma,m)}$ [donnés plus loin par la relation (1.40) pour le cas du guide à deux dimensions] sont des fonctions de Green à deux dimensions, solutions de l'équation,

$$\left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] g^{(\sigma,m)}(x, y; x', y') = -\delta(x - x')\delta(y - y'), \quad (1.14)$$

avec

$$\left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 = k_0^2 - \left(\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} \right)^2. \quad (1.15)$$

1.2 Modèles analytiques

1.2.1 Premier modèle (MII)

En intégrant sur $[z_1, z_2]$ le produit de l'équation (1.5a) par la fonction propre $\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z)$ et en effectuant une double intégration par parties d'un des facteurs, l'équation

de propagation (1.5a) devient, compte tenu des relations (1.7a) et (1.15),

$$\int_{z_1}^{z_2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{p}(x, y, z) dz = - \int_{z_1}^{z_2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \hat{f}(x, y, z) dz - \left[\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \partial_z \hat{p}(x, y, z) - \hat{p}(x, y, z) \partial_z \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \right]_{z_1}^{z_2}. \quad (1.16)$$

Compte tenu de l'expression de la dérivée normale sur chaque frontière rugueuse (1.1) ainsi que des conditions aux frontières (1.5b), le terme $\partial_z \hat{p}(x, y, z)$ de l'équation (1.16) peut être mis sous la forme

$$\partial_z \hat{p} = (-1)^{q+1} \left[(\partial_x h_q) \partial_x + (\partial_y h_q) \partial_y + ik_0 \hat{Y} N_q \right] \hat{p}, \quad \forall (x, y), \quad z = z_q, \quad q = 1, 2. \quad (1.17)$$

Le report de ces conditions aux frontières (1.17) puis du développement modal de la pression (1.6) permettent d'écrire l'équation (1.16) sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \int_{z_1}^{z_2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) dz = - \hat{S}^{(\sigma,m)}(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{q=1}^2 \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) N_q O(x, y, z) \left\{ \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \Big|_{z=z_q(x, y)}, \quad (1.18)$$

où la fonction source $\hat{S}^{(\sigma,m)}(x, y)$ est définie par

$$\hat{S}^{(\sigma,m)}(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \hat{f}(x, y, z) dz, \quad (1.19)$$

où le second terme du second membre de l'équation (1.18) provient du terme entre crochet de l'équation (1.16) et où l'opérateur $O(x, y, z)$ est défini par

$$O(x, y, z) = ik_0 \hat{Y} + \frac{1}{N_q} \left[(\partial_x h_q) \partial_x + (\partial_y h_q) \partial_y + (-1)^q \partial_z \right] \Big|_{z=z_q}, \quad \forall (x, y), \quad q = 1, 2. \quad (1.20)$$

Compte tenu de l'orthogonalité des fonctions propres dans le domaine $[-L_z/2, L_z/2]$ (sur l'épaisseur du guide extérieur), il vient :

$$\left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = - \hat{S}^{(\sigma,m)}(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{q=1}^2 \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) N_q O(x, y, z) \left\{ \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \Big|_{z=z_q(x, y)} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y), \quad (1.21)$$

les coefficients $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ étant donnés par la relation,

$$\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x) = \left(\int_{-L_z/2}^{z_1(x,y)} dz + \int_{z_2(x,y)}^{L_z/2} dz \right) \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \quad (1.22)$$

(leurs expressions sont données dans l'annexe B). L'opérateur $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ peut être qualifié "d'opérateur d'épaisseur" [65, 68–70], c'est-à-dire une intégration dans la direction de l'épaisseur du guide, qui provient de la non orthogonalité des fonctions propres dans le domaine $[z_1, z_2]$ (guide rugueux) et qui dépend de la profondeur de rugosité. En ajoutant et en retranchant le terme $\left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)}\right)^2$ dans le crochet du second membre de la relation (1.21), cette dernière peut être mise sous la forme,

$$\begin{aligned} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)}\right)^2 \right] \hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) &= -\hat{S}^{(\sigma,m)}(x, y) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{q=1}^2 \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) N_q O(x, y, z) \left\{ \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \Big|_{z=z_q(x,y)} \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left[\left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)}\right)^2 - \left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)}\right)^2 \right] \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)}\right)^2 \right] \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y). \end{aligned} \quad (1.23)$$

En remarquant que le terme entre crochet du troisième terme du membre de droite de la relation (1.23) peut être mis sous la forme, compte tenu de l'expression (1.15),

$$\left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)}\right)^2 - \left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)}\right)^2 = \left(\hat{\chi}_z^{(\alpha,\mu)}\right)^2 - \left(\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}\right)^2, \quad (1.24)$$

et en tenant compte de l'expression (B.5) de l'opérateur $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$, pour $(\sigma, m) \neq (\alpha, \mu)$, il vient

$$\begin{aligned} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left[\left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)}\right)^2 - \left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)}\right)^2 \right] &= \\ \sum_{q=1}^2 (-1)^q \left[\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \partial_z \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) - \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) \partial_z \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \right] &\Big|_{z=z_q(x,y)}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le report de l'expression (1.25) dans la relation (1.23) conduit à la relation

$$\begin{aligned}
& \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = -\hat{S}^{(\sigma,m)}(x, y) \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{q=1}^2 \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z_q) N_q O(x, y, z_q) \left\{ \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z_q) \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \sum_{q=1}^2 (-1)^q \left[\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \partial_z \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) - \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) \partial_z \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \right] \Bigg|_{z=z_q(x,y)} \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

qui peut être mise sous la forme, compte tenu de l'expression (1.20) de l'opérateur O ,

$$\begin{aligned}
& \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = -\hat{S}^{(\sigma,m)}(x, y) \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{q=1}^2 \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) N_q O(x, y, z) \left\{ \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \Bigg|_{z=z_q(x,y)} \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

La formulation intégrale associée prend la forme [66, 67],

$$\hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} + \hat{\beta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \right], \tag{1.28}$$

où le terme source a pour expression (compte tenu des hypothèses exprimées dans l'introduction),

$$\hat{F}^{(\sigma,m)}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^0 dx' \int_{z_1}^{z_2} dz' g^{(\sigma,m)}(x, y; x', y') \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z') \hat{f}(x', y', z'), \tag{1.29}$$

et où les opérateurs intégraux de rugosité prennent les formes respectives,

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} = & - \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{+\infty} dx' \left[\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z') g^{(\sigma,m)}(x, y; x', y') \right. \\
& \left. N_q O(x', y', z') \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x', y') \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z') \right\} \right] \Bigg|_{z'=z_q(x,y)},
\end{aligned} \tag{1.30}$$

et

$$\hat{\beta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x,y) \right\} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{+\infty} dx' \left(\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x',y') g^{(\sigma,m)}(x,y;x',y') \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \left(\hat{k}_{xy}^{(\alpha,\mu)} \right)^2 \right] \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x',y') \right\} \right). \quad (1.31)$$

L'opérateur intégrale $\hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ est un opérateur de surface [65, 68–70] qui traduit les effets de la pente et de la profondeur de la rugosité.

Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, un second modèle, basé, comme le premier, sur une formulation intégrale et sur des développements modaux, mais qui diffère du premier sur l'ordre d'utilisation de ces deux procédés mathématiques est présenté au paragraphe suivant.

1.2.2 Second modèle (IIM)

Le champ de pression acoustique dans le domaine D du guide étudié peut être exprimé de la façon suivante [66] :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} \in (D), \\ \vec{r} \in (D_0 - D), \end{array} \right\} \hat{p}(\vec{r}) = \iiint_D G(\vec{r}; \vec{r}') \hat{f}(\vec{r}') d\vec{r}' + \sum_{q=1}^2 \iint_{\partial D} [G(\vec{r}; \vec{r}') \partial_{n_q} \hat{p}(\vec{r}') - \hat{p}(\vec{r}') \partial_{n_q} G(\vec{r}; \vec{r}')] d\vec{r}', \quad (1.32)$$

où $d\vec{r}'$ signifie dV ou dS suivant l'intégrale triple ou double, où l'intégrale triple représente l'effet des sources (\hat{f}) et où l'intégrale double traduit les effets des frontières du domaine (en regard de la contribution incluse dans la fonction de Green). Par suite, compte tenu des conditions aux frontières (1.5b) et des développements sur la base des fonctions propres de la fonction de Green (1.13) et du champ de pression (1.6), les termes $\hat{p}(\vec{r}') \partial_{n_q} G(\vec{r}; \vec{r}')$ et $G(\vec{r}; \vec{r}') \partial_{n_q} \hat{p}(\vec{r}')$ de l'équation (1.32), peuvent être mis sous les formes respectives

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\vec{r}; \vec{r}') \partial_{n_q} \hat{p}(\vec{r}') = - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x',y') i k_0 \hat{Y} \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z') \\ \quad \hat{\psi}^{(\beta,\nu)}(z') g^{(\beta,\nu)}(x,y;x',y') \Big|_{z'=z_q(x,y)} \hat{\psi}^{(\beta,\nu)}(z), \end{array} \right. \quad (1.33a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}(\vec{r}') \partial_{n_q} G(\vec{r}; \vec{r}') = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x',y') \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z') \\ \quad \partial_{n_q} \left[\hat{\psi}^{(\beta,\nu)}(z') g^{(\beta,\nu)}(x,y;x',y') \right] \Big|_{z'=z_q(x,y)} \hat{\psi}^{(\beta,\nu)}(z), \end{array} \right. \quad (1.33b)$$

et ainsi, l'équation (1.32) prend la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} (x, y, z) \in (D), & \quad \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\nu} \hat{A}^{(\beta,\nu)}(x, y) \hat{\psi}^{(\beta,\nu)}(z) \\ (x, y, z) \in (D_0 - D), & \quad 0 \end{aligned} \right\} = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\hat{F}^{(\beta,\nu)}(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\beta,\nu)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \right] \hat{\psi}^{(\beta,\nu)}(z), \quad (1.34)$$

où l'expression du terme source $\hat{F}^{(\beta,\nu)}$ est donnée par la relation (1.29) et où l'opérateur intégral de rugosité prend la forme

$$\hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\beta,\nu)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} = - \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{+\infty} dx' \left[\hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x', y') \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z') \right. \\ \left. O(x', y', z') \left\{ \hat{\psi}^{(\beta,\nu)}(z') g^{(\beta,\nu)}(x, y; x', y') \right\} \right] \Big|_{z'=z_q(x, y)}, \quad (1.35)$$

l'opérateur O étant donné par l'expression (1.20).

En multipliant l'équation (1.34) par la fonction propre $\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z)$ et en intégrant le résultat sur l'épaisseur du guide rugueux, il vient, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions propres dans le domaine $[-L_z/2, L_z/2]$:

$$\hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} + \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right], \quad (1.36)$$

où l'opérateur $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y)$ est donné par la relation (1.22).

Remarque :

Qu'il s'agisse du premier ou du second modèle, l'amplitude $\hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y)$ de chaque mode, donnée par les expressions (1.28) ou (1.36), peut être exprimée comme la somme d'un champ incident représenté par le terme source $\hat{F}^{(\sigma,m)}$ et d'un champ diffusé qui est l'effet des frontières rugueuses sur le champ incident et qui est traduit analytiquement par les opérateurs $\hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{\beta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ pour le premier modèle et par les opérateurs $\hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ pour le second modèle. Si la source acoustique générant le champ incident à l'entrée du guide d'onde est considérée comme une source primaire, la rugosité peut être considérée comme une distribution locale de sources secondaires générant, par processus successifs de diffusion du champ incident, des modes non générés par la source acoustique, associés à la perturbation corrélative du mode incident. Les amplitudes des modes qui représentent le champ de pression $\hat{p}(x, y, z)$ sont solution de ces équations intégrales (1.28) et (1.36). Ces deux modèles sont comparés au paragraphe 1.4.

1.2.3 Résolution par approximations successives

En faisant l'hypothèse que les termes entre crochets des équations (1.28) et (1.36) sont de faibles amplitudes en comparaison du terme source $\hat{F}^{(\sigma,m)}(x, y)$, les solutions,

notées $^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}$, des équations (1.28) et (1.36) sont recherchées par approximations successives,

$$^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)} = {}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)} + {}^{(1)}\hat{A}^{(\sigma,m)} + {}^{(2)}\hat{A}^{(\sigma,m)} + \dots + {}^{(N-1)}\hat{A}^{(\sigma,m)} + {}^{(N)}\hat{A}^{(\sigma,m)}, \quad (1.37)$$

où N est le nombre d'itérations et où $^{[0]}\hat{A}^{(\sigma,m)}$ est la solution à l'ordre $N = 0$ (en l'absence de rugosité) des équations (1.28) et (1.36), $^{[1]}\hat{A}^{(\sigma,m)}$ est la solution à l'ordre $N = 1$ (approximation de Born) [71], et ainsi de suite. Les solutions à l'ordre $N = 0$ de chacune des équations (1.28) et (1.36) sont les solutions en l'absence de rugosité, c'est-à-dire pour des parois lisses confondues avec les frontières du guide extérieur ($z_1 = -L_z/2$ et $z_2 = L_z/2$), données, pour chacun des deux modèles, par la relation

$${}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x, y). \quad (1.38)$$

Les solutions à l'ordre N des équations pour chacun des deux modèles (1.28) et (1.36) sont exprimées en fonction des solutions à l'ordre $N - 1$ respectivement par

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)} \left\{ {}^{[N-1]}\hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \\ \quad + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{\beta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) \left\{ {}^{[N-1]}\hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\}, \end{array} \right. \quad (1.39a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x, y) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)} \left\{ {}^{[N-1]}\hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y) \right\} \\ \quad + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) {}^{[N-1]}\hat{A}^{(\alpha,\mu)}(x, y). \end{array} \right. \quad (1.39b)$$

1.2.4 Cas particulier du guide rugueux à deux dimensions

Dans le cas où le champ est bidimensionnel (l'amplitude $\hat{A}^{(\sigma,m)}$ ne dépend alors que de la variable x), la fonction de Green $g^{(\sigma,m)}$ à une dimension a pour expression [66]

$$g^{(\sigma,m)}(x; x') = \frac{e^{-i\hat{k}_x^{(\sigma,m)}|x-x'|}}{i2\hat{k}_x^{(\sigma,m)}}. \quad (1.40)$$

L'expression de la fonction source $f(x', z')$ est développée sur la base des fonctions propres (1.8)

$$f(x', z') = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \hat{Q}^{(\sigma,m)} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z') \delta(x'), \quad (1.41)$$

où le coefficient $\hat{Q}^{(\sigma,m)}$ désigne l'amplitude de la source du mode (σ, m) . Le terme source (1.29) a alors pour expression, compte tenu de la relation (1.41) et de l'orthogonalité des fonctions propres dans le domaine $[-L_z/2; L_z/2]$,

$$\hat{F}^{(\sigma,m)}(x) = \hat{Q}^{(\sigma,m)} \frac{e^{-i\hat{k}_x^{(\sigma,m)}x}}{i2\hat{k}_x^{(\sigma,m)}}. \quad (1.42)$$

Les résultats présentés dans la suite de ce chapitre admettent une fonction source $\hat{F}^{(\sigma,m)}$ unitaire ($\hat{Q}^{(\sigma,m)}/2ik_x^{(\sigma,m)} = 1$). Le développement de la fonction source (1.41) sur les fonctions propres permet de prendre en compte tout type de champ de pression incident. Toutefois pour la clarté de la discussion, dans la suite de ce chapitre, un unique mode est généré par la source acoustique; il est représenté par le couple (σ, m) les autres modes étant créés par couplage dû à la rugosité et représentés par le couple (α, μ) .

Dans la suite, les intégrales sont calculées numériquement par la méthode des trapèzes (annexe C). La convergence de la série de fonctions donnée par la relation (1.37) est jugée établie lorsqu'il existe un nombre entier positif N_c tel que la relation

$$\left| {}^{(N_c)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right| - \left| {}^{(N_c-1)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right| < 0,001, \quad \forall x \in [0, \ell], \quad (1.43)$$

est vérifiée pour tous les modes pris en compte dans les calculs.

1.3 Rugosités périodiques : conditions d'accord de phase ou relation de phonon

Que la rugosité soit périodique ou non, des phénomènes de couplage entre les modes guidés apparaissent. Lorsqu'un mode guidé créé par couplage se propage dans le même sens que le ou les mode(s) source(s) (qui apporte(nt) de l'énergie au système), le couplage est co-directionnel; à l'inverse, il est dit contra-directionnel [52, 55]. Ce dernier type de couplage prend place en particulier dans des domaines finis de fréquence appelés "bandes d'arrêt", dans lesquelles la rugosité agit comme un filtre fréquentiel en terme de propagation des ondes dans le guide. Ces mécanismes de transfert d'énergie entre modes sont assujettis à une condition d'accord de phase liant les longueurs d'ondes d'un ou de deux modes guidés à la périodicité spatiale de la rugosité [52, 55, 72] (ces propos sont étayés au paragraphe 3.1). Cette condition, également nommée relation de phonon [59, 60, 64, 65, 69, 73–77] ou encore relation de Bragg [26, 57], a pour expression [couplage du mode incident (σ, m) et du mode couplé (α, μ)],

$$k_x^{(\sigma,m)} \pm k_x^{(\alpha,\mu)} - \frac{2n\pi}{\Lambda} = 0, \quad (1.44)$$

où n est un entier non nul auquel est associé un harmonique de la rugosité de périodicité spatiale Λ et où le signe devant le nombre d'onde $k_x^{(\alpha,\mu)}$ indique le sens de propagation du mode (α, μ) (le signe + traduit un couplage contradirectionnel et le signe - un couplage codirectionnel). Quand elle est satisfaite, cette relation, qui dépend de la fréquence, assure un couplage maximal entre le mode (σ, m) et le mode (α, μ) , quelle que soit la longueur de rugosité. Compte tenu des expressions (1.15) et (1.11) dans le cas d'un fluide parfait, la relation de dispersion des modes guidés s'écrit,

$$\frac{k_x^{(\sigma,m)} d}{2\pi} = \sqrt{\left(\frac{fd}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{(2m + \delta_{\sigma 1})d}{L_z}\right)^2}, \quad (1.45)$$

où fd/c_0 est la fréquence adimensionnée de la source acoustique (avec $\omega = 2\pi f$). Dans la situation où la condition d'accord de phase (1.44) est satisfaite, la relation de dispersion

pour les modes couplés prend la forme,

$$\frac{k_x^{(\alpha,\mu)} d}{2\pi} = \frac{nd}{\Lambda} \mp \sqrt{\left(\frac{fd}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{(2\mu + \delta_{\alpha 1})d}{L_z}\right)^2}. \quad (1.46)$$

Cette équation ne dépend ni de la forme de la rugosité ni de la longueur de rugosité. Elle ne dépend que du rapport d/Λ et de la profondeur relative de la rugosité d/L_z , ce dernier facteur restant toujours proche de 1. Les situations considérées dans ce premier chapitre et le suivant sont celles où l'accord de phase (1.44) associé à un couplage contra-directionnel avec $n = 1$ (fréquence fondamentale de la rugosité) est satisfait. Les courbes de dispersion correspondantes sont tracées sur la figure 1.3.

N. B. : Si les relations (1.45) et (1.46) étaient normées par $L_z/2\pi$ au lieu de $d/2\pi$, les intersections des courbes de dispersion et des courbes de couplage n'indiqueraient plus approximativement les fréquences centrales des bandes d'arrêt, mais les fréquences d'un des bords de ces bandes d'arrêt.

1.4 Couplage de modes, comparaison des résultats des deux modèles

Bien que reposant sur les mêmes méthodes, les deux modèles présentés précédemment possèdent des différences notables. Ces différences apparaissent dans les opérateurs $\hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{\beta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ pour le premier modèle [voir équation (1.28)] et les opérateurs $\hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ pour le second modèle [voir équation (1.36)]. Les opérateurs $\hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ ont des expressions similaires à la différence que pour l'opérateur intégral $\hat{\eta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ [équation (1.30)], l'opérateur O [équation (1.20)] est appliqué aux coefficients du développement du champ de pression (le calcul est numérique), alors que pour l'opérateur intégral $\hat{H}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ [équation (1.35)], l'opérateur O est appliqué aux coefficients du développement de la fonction de Green (le calcul est analytique). Les opérateurs $\hat{\beta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ et $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ ont des expressions très différentes, puisque l'opérateur $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ [équation (1.22)] est en réalité un simple coefficient multiplicatif alors que l'opérateur $\hat{\beta}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ [équation (1.31)] est un opérateur intégral faisant intervenir le coefficient $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ ainsi qu'une dérivée seconde (ce qui milite en faveur du second modèle).

Les résultats de ces deux modèles sont dans la suite comparés dans le cas d'un guide délimité par une paroi rugueuse (en trapèzes symétriques) de hauteur h et de périodicité spatiale Λ et une paroi lisse (figure 1.2). Les valeurs des paramètres du guide d'onde sont consignées dans le tableau 1.1, le paramètre ℓ/Λ représentant le nombre de motifs.

$fd/c_0 = 1,29$	$d/\Lambda = 2$
$\Lambda/\lambda = 0,64$	$h/d = 0,005$
$k_0\ell = 202,6$	$\ell/\Lambda = 50$

Tableau 1.1 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats présentés sur les figures 1.3, 1.4 et 1.5. f est la fréquence de la source acoustique et $\lambda = c_0/f$ est la longueur d'onde.

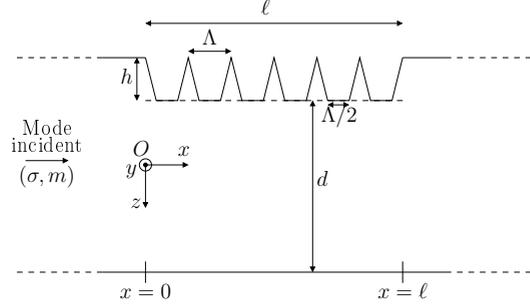


Figure 1.2 – Schéma du guide considéré

Quatre modes sont pris en compte dans les calculs : le mode incident antisymétrique ($\sigma = 1, m = 0$) et trois modes créés par couplage, soient les modes symétriques ($\alpha = 2, \mu = 0$) et ($\alpha = 2, \mu = 1$) et le mode antisymétrique ($\alpha = 1, \mu = 1$), ces modes étant propagatifs, à l'exception du mode antisymétrique ($\alpha = 1, \mu = 1$) qui est évanescent. Les courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, μ) (traits pleins), la courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et les courbes de couplage de la relation (1.46) (pour $n = 1$ et un signe "-" devant la racine) (tirets) sont tracées sur la figure 1.3 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_0 . Les intersections des courbes de dispersion et des courbes de couplage indiquent les couplages possibles entre les modes. La source acoustique génère le mode ($\sigma = 1, m = 0$) à une fréquence telle que $fd/c_0 = 1,29$. Ainsi un couplage fort entre le mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) et le mode créé par couplage ($\alpha = 2, \mu = 1$) prend place ; par contre, les couplages du mode incident avec les autres modes sont faibles.

N. B. : Dans la suite, les courbes de dispersion et les courbes de couplage sont tracées dans le plan $\left(\frac{fd}{c_0}, \frac{k_x^{(\dots, \dots)}d}{2\pi}\right)$, où la notation (\dots, \dots) désigne un mode (σ, m) ou un mode (α, μ) .

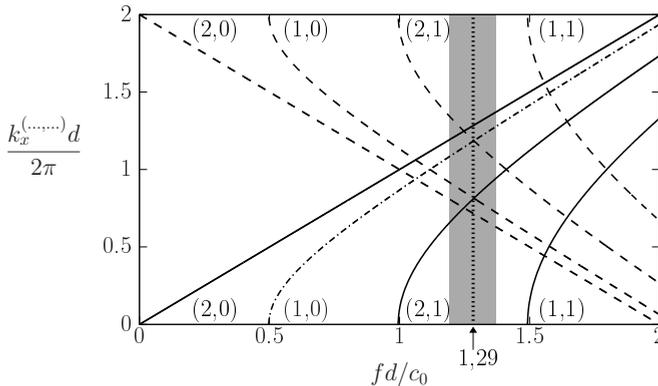


Figure 1.3 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, μ) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage données par l'expression (1.46) (pour $n = 1$ et un signe "-" devant la racine) (tirets).

Les modules des amplitudes normalisées [par rapport à l'amplitude de l'onde incidente ($\sigma = 1, m = 0$)] des quatre modes pris en compte dans les calculs sont tracés sur les figures 1.4 en fonction de la position adimensionnée k_0x . Ces amplitudes sont calculées par le premier modèle MII (traits pleins) et par le second modèle IIM (pointillés). La décroissance de l'amplitude du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) au cours de la propagation et la croissance importante du mode créé par couplage ($\alpha = 2, \mu = 1$) contra-propagatif (dans le sens des x décroissants) indiquent que le couplage prévu est bien traduit dans les faits. Les amplitudes des autres modes créés par couplage ($\alpha = 2, \mu = 0$) et ($\alpha = 1, \mu = 1$) sont de faibles amplitudes en comparaison de celle du mode créé par couplage ($\alpha = 2, \mu = 1$), confirmant, de ce fait, que le couplage du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) avec le mode créé par couplage ($\alpha = 2, \mu = 1$) est le seul couplage fort observé. Les différences entre les résultats des deux modèles sont faibles notamment en ce qui concerne les amplitudes des deux modes principaux impliqués dans le couplage prévu. Toutefois, les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus avec des temps de calcul qui diffèrent d'une méthode à l'autre, le critère de convergence (1.43) étant respecté pour $N_c = 12$ itérations pour le premier modèle contre $N_c = 5$ itérations seulement pour le second. Cette différence se trouve confirmée dans les résultats que nous avons obtenus dans d'autres configurations de couplages, non répertoriées ici.

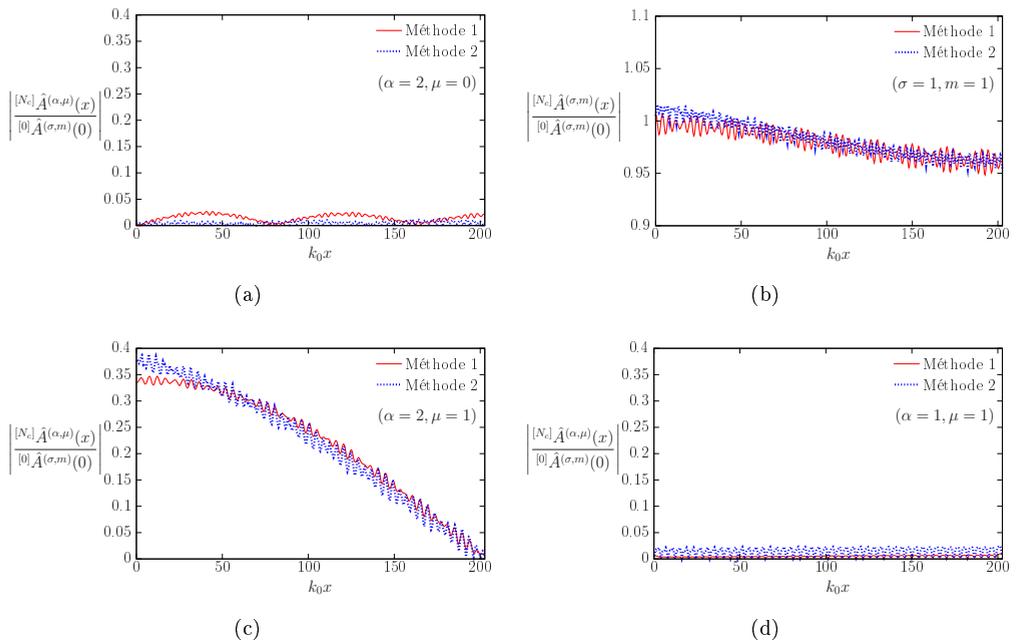


Figure 1.4 – Modules de l'amplitude normalisée du mode : (a) créé par couplage symétrique ($\alpha = 2, \mu = 0$), (b) incident antisymétrique ($\sigma = 1, m = 0$), (c) créé par couplage symétrique ($\alpha = 2, \mu = 1$) et (d) créé par couplage antisymétrique ($\alpha = 1, \mu = 1$) en fonction de la position adimensionnée k_0x . Les courbes en traits pleins représentent les résultats obtenus par la première méthode (MII) ($N_c = 12$) et les courbes en pointillés ceux obtenus par la seconde méthode (IIM) ($N_c = 5$).

1.4.1 Convergence des deux méthodes

Comme il vient juste d'être indiqué, les résultats obtenus par les deux modèles sont similaires (figures 1.4a-d), mais les nombres N_c d'itérations sont différents ($N_c = 12$ par le premier modèle contre $N_c = 5$ par le second). La convergence des deux méthodes pour ces résultats est observée ici en traçant les amplitudes $^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}$ pour les itérations $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ et $N = N_c$ des modes incident antisymétrique ($\sigma = 1, m = 0$) et créé par couplage symétrique ($\alpha = 2, \mu = 1$) en fonction de la position adimensionnée k_0x (figures 1.5). Le second modèle converge plus rapidement que le premier et ce de manière différente, selon que l'ordre N est pair ou impair : pour N impair, l'amplitude du mode incident est très faiblement corrigée contrairement à l'amplitude du mode créé par couplage, tandis qu'aux ordres N pairs, c'est l'inverse. Le second modèle converge très rapidement car les amplitudes des modes à l'ordre $N = 2$ sont de très bonnes approximations des amplitudes calculées jusqu'à la convergence au sens de la relation (1.43), ce qui n'est pas du tout le cas du premier modèle.

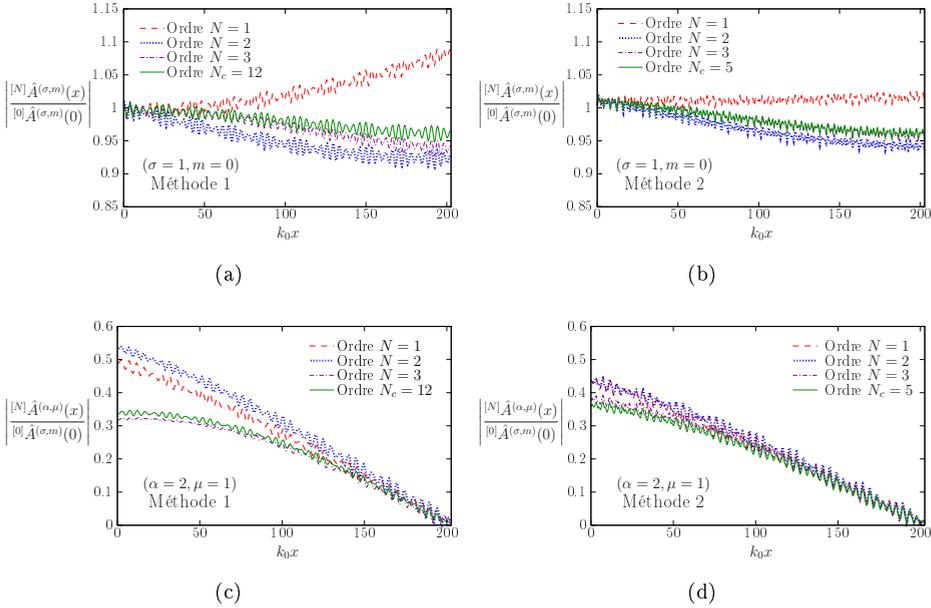


Figure 1.5 – Modules de l'amplitude normalisée du mode : (a) et (b) incident antisymétrique ($\sigma = 1, m = 0$) et (c) et (d) créé par couplage symétrique ($\alpha = 2, \mu = 1$) aux ordres $N = 1$ (tirets), $N = 2$ (pointillés), $N = 3$ (tirets points) et $N = N_c$ (traits pleins). Les résultats des figures (a) et (c) sont obtenus par le premier modèle (MII) et ceux des figures (b) et (d) par le second modèle (IIII).

1.4.2 Stabilité des deux méthodes

Afin d'observer quels sont les paramètres qui entrent en jeu dans la stabilité de chacun des modèles, le nombre N_c de corrections nécessaires pour que la relation (1.43)

soit vérifiée est étudié ici en fonction de la fréquence de la source acoustique et de la hauteur de rugosité (première configuration) ou en fonction de la fréquence de la source acoustique et de la longueur de rugosité (seconde configuration). Le rapport d/Λ (épaisseur du guide fictif intérieur sur périodicité spatiale de la rugosité) est le même que celui du guide étudié au paragraphe précédent et le même couplage est recherché. La bande fréquentielle d'excitation est comprise entre les valeurs adimensionnées $fd/c_0 = 1,2$ et $fd/c_0 = 1,35$ (bande grisée de la figure 1.3). Les valeurs des paramètres géométriques du guide d'onde pour les deux configurations sont consignées dans le tableau 1.2.

Config. 1	$\ell/\Lambda = 10$	$h/d = 0,01$	$h/d = 0,02$	$h/d = 0,03$	$h/d = 0,04$
Config. 2	$h/d = 0,005$	$\ell/\Lambda = 25$	$\ell/\Lambda = 50$	$\ell/\Lambda = 75$	$\ell/\Lambda = 100$

Tableau 1.2 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats présentés sur les figures 1.6 et 1.7. d est l'épaisseur du guide d'intérieur (guide fictif) et Λ , h et ℓ sont respectivement la périodicité spatiale, la hauteur maximale et la longueur de la rugosité.

Les nombres d'itérations N_c vérifiant la relation (1.43) sont tracés en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_0 pour les quatre valeurs du paramètre h/d de la première configuration (première ligne du tableau 1.2) et pour chaque méthode (figures 1.6). Pour les deux méthodes, le nombre N_c augmente lorsque la fréquence de la source acoustique se rapproche de la fréquence centrale de la bande d'arrêt. De même, plus la hauteur de rugosité est grande, plus le nombre N_c est grand. La premier modèle est beaucoup plus coûteux en terme d'itérations et donc de temps de calcul que le second modèle. De plus, pour la plus grande hauteur de rugosité ($h/d = 0,04$), le premier modèle n'est plus capable de calculer pour certaines fréquences, alors que le second modèle le peut. Les limites en terme de hauteur de rugosité sont donc plus restrictives pour le premier modèle que pour le second.

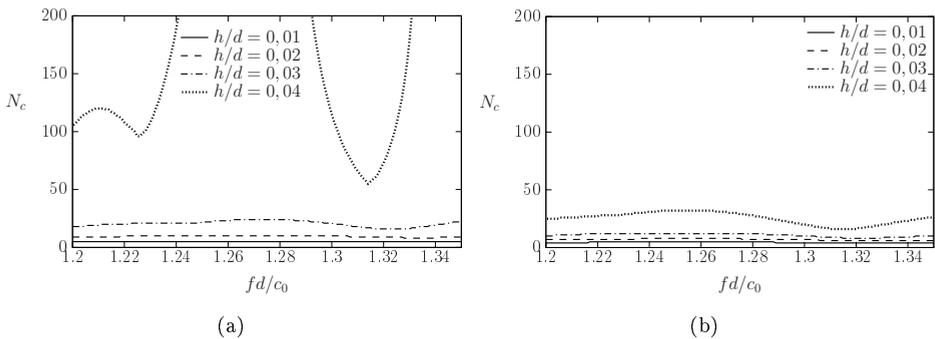


Figure 1.6 – Évolution du nombre d'itérations N_c nécessaire à la convergence de la série (1.37) en fonction de la fréquence de la source acoustique dans le cadre de la première configuration pour (a) le premier modèle et (b) le second modèle.

Les nombres d'itérations N_c vérifiant la relation (1.43) sont tracés en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_0 pour les quatre valeurs du paramètre ℓ/Λ de la seconde configuration (seconde ligne du tableau 1.2) et pour chaque méthode (figures 1.7). Ceci confirme les résultats des figures 1.6 : le second modèle s'avère beaucoup plus efficace en terme de temps de calcul, mais aussi en terme de limites liées à la longueur de rugosité.

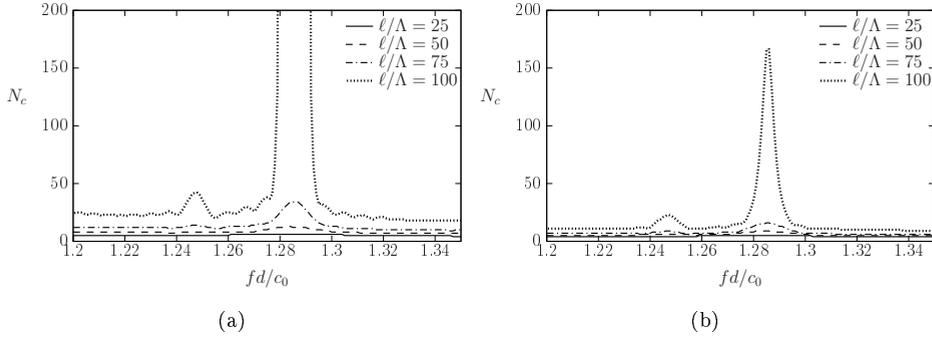


Figure 1.7 – Évolution du nombre d'itérations N_c nécessaire à la convergence de la série (1.37) en fonction de la fréquence de la source acoustique dans le cadre de la seconde configuration pour (a) le premier modèle et (b) le second modèle.

1.4.3 Limites des deux méthodes

Les deux modèles présentent les mêmes limites, ces limites étant liées à l'utilisation des approximations successives pour résoudre les équations (1.28) et (1.36).

i) Si la fréquence de la source acoustique est au voisinage de la fréquence de coupure d'un mode, alors l'amplitude calculée du mode en question diverge. Ceci est inhérent au modèle de base retenu.

ii) La seconde limite des deux modèles concerne les couplages de modes dans les bandes d'arrêt. Lorsque la longueur de rugosité et/ou la hauteur de rugosité est/sont importante(s) et si un couplage fort entre le mode incident et un mode créé par couplage a lieu, alors les amplitudes des deux modes couplés ont le même ordre de grandeur.

Pour ces deux cas, la correction d'amplitude à l'ordre $N = 1$ du mode créé par couplage devient supérieure à celle d'ordre $N = 0$ du mode incident, empêchant la convergence de la technique d'approximations successives retenue, car l'hypothèse selon laquelle le terme entre crochet des équations (1.28) et (1.36) est faible devant le terme source n'est plus respectée.

Les temps de calcul étant directement liés au nombre d'itérations considérés, ces temps de calculs (calculs effectués sous Matlab) varient d'un cas à l'autre et sont bien souvent compris entre quelques secondes et quelques minutes. Dans la suite de l'étude, en raison de sa bien meilleure convergence et de sa plus grande rapidité de calcul, c'est le second modèle qui est retenu.

1.5 Effet de la dissipation sur la propagation des ondes

L'objet de ce paragraphe est de comparer les effets de décroissance de l'amplitude des ondes liés à la dissipation thermovisqueuse en parois, traduit par l'admittance équivalente \hat{Y} (1.3), à ceux dus aux transferts d'énergie entre les modes induits par la rugosité des parois. Cette comparaison est présentée ici pour une rugosité en dents de scie symétriques (triangles isocèles) de hauteur h et de périodicité spatiale Λ sur une surface, l'autre surface étant parfaitement lisse (figure 1.8). Les valeurs des paramètres sans dimension utilisés sont consignées dans le tableau 1.3. La source génère le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) et trois autres modes propagatifs, créés par couplage, sont pris en compte dans les calculs, les modes symétrique ($\alpha = 2, \mu = 1$) et antisymétriques ($\alpha = 1, \mu = 0$) et ($\alpha = 1, \mu = 1$), ces quatre modes étant tous propagatifs.

$fd/c_0 = 1,78$	$d/\Lambda = 2,5$
$\Lambda/\lambda = 0,52$	$h/d = 0,02$
$k_0\ell = 163,4$	$\ell/\Lambda = 25$

Tableau 1.3 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats présentés sur les figures 1.9 et 1.10.

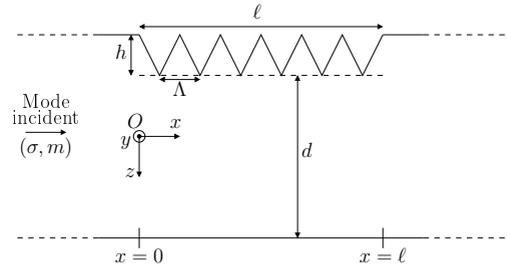


Figure 1.8 – Schéma du guide considéré.

Les courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, μ) (traits pleins), la courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et les courbes de couplage de la relation (1.46) (tirets) sont tracées sur la figure 1.9 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_0 . La fréquence adimensionnée de la source acoustique ayant pour valeur $fd/c_0 = 1,78$, le couplage du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) avec le mode ($\alpha = 1, \mu = 1$) est étudié.

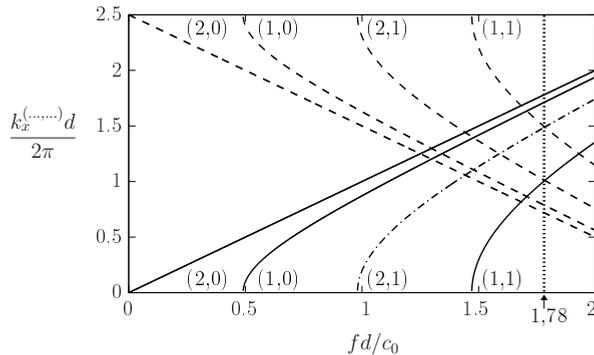


Figure 1.9 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, μ) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) (tirets).

Les modules des amplitudes des modes incident ($\sigma = 2, m = 1$) et créé par couplage ($\alpha = 1, \mu = 1$) sont tracés respectivement sur les figures 1.10a et 1.10b en fonction de la position adimensionnée k_0x pour trois configurations correspondant aux rapports $\delta_{v,h}/h = 0, \delta_{v,h}/h = 0,02$ et $\delta_{v,h}/h = 0,14$ (δ_v et δ_h sont des longueurs caractéristiques, du même ordre de grandeur, respectivement de viscosité et de conductivité thermique). La décroissance du mode incident est d'autant plus importante que le rapport $\delta_{v,h}/h$ est grand. La croissance dans le sens des x décroissants du mode créé par couplage rétrodiffusé ($\alpha = 1, \mu = 1$) est d'autant plus faible que ce rapport $\delta_{v,h}/h$ augmente, ce qui traduit dans chacun des deux cas une perte d'énergie de l'onde au cours de sa propagation. Lorsque la hauteur de rugosité est du même ordre de grandeur que l'épaisseur des couches limites thermique et visqueuse, la diffusion due à la rugosité n'est plus le processus dominant ; reste alors que le modèle d'impédance thermovisqueuse équivalente n'est plus réellement valable.

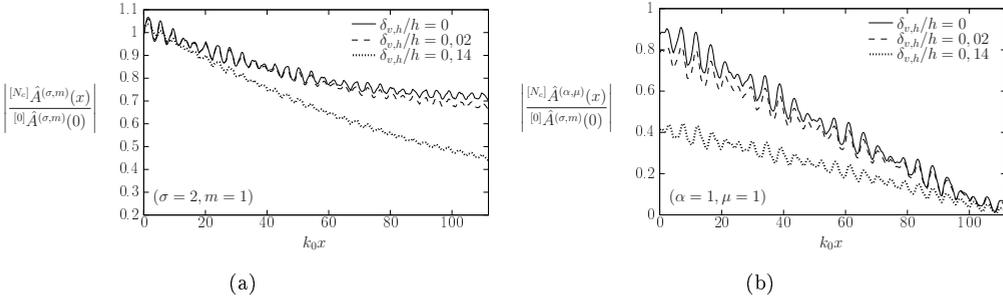


Figure 1.10 – Module de l'amplitude normalisée du mode (a) incident symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) et (b) créé par couplage antisymétrique ($\alpha = 1, \mu = 1$) en fonction de la position adimensionnée k_0x . Les courbes en traits pleins sont les résultats pour la configuration $\delta_{v,h}/h = 0$ (fluide non dissipatif), les courbes en tirets pour la configuration $\delta_{v,h}/h = 0,02$ et les courbes en pointillés pour la configuration $\delta_{v,h}/h = 0,14$.

1.6 Champ de pression dans une bande d'arrêt

Lorsque la rugosité est périodique, des bandes d'arrêt fréquentielles apparaissent, qui peuvent avoir de nombreuses applications, notamment la réduction du bruit dans des conduits, par exemple. C'est ainsi que l'objectif de ce chapitre est de modéliser un champ de pression dans un guide rugueux périodique pour diverses fréquences dont l'une d'entre elle est proche de la fréquence centrale d'une bande d'arrêt et d'observer l'atténuation du champ incident.

Le cas traité ici est celui du mode plan se propageant dans un guide d'onde à parois sinusoïdales et symétriques par rapport au plan $z = 0$ (figure 1.11). Les valeurs des paramètres sans dimension utilisés sont consignées dans le tableau 1.4. La source génère le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 0$) (mode plan); cinq autres modes, créés par couplage, sont pris en compte dans les calculs, les modes évanescents symétriques ($\alpha = 2, \mu = 1, 2, 3, 4, 5$). Trois configurations sont étudiées, correspondant chacune à une fréquence d'excitation du mode plan, la première ($fd/c_0 = 0,23$) et la troisième

($fd/c_0 = 0,27$) de part et d'autre de la seconde fréquence ($fd/c_0 = 0,25$), cette seconde fréquence satisfaisant la condition d'accord de phase,

$$k_x^{(\sigma=2,m=0)} + k_x^{(\sigma=2,m=0)} - \frac{2\pi}{\Lambda} = 0. \quad (1.47)$$

N. B. :

Le couplage d'un mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) avec lui-même est un couplage sur le bord de la première zone de Brillouin [51, 59, 78]. Ce couplage a lieu lorsque la fréquence de la source est telle que le nombre d'onde du mode incident $k_x^{(\sigma=2,m=0)}$ est égal au rapport $\frac{\pi}{\Lambda}$ [relation (1.47)], ce rapport étant appelé le bord de la première zone de Brillouin.

$d/\Lambda = 0,5$
$h/d = 0,1$
$\ell/\Lambda = 12$

Tableau 1.4 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats présentés sur les figures 1.12 et 1.13.

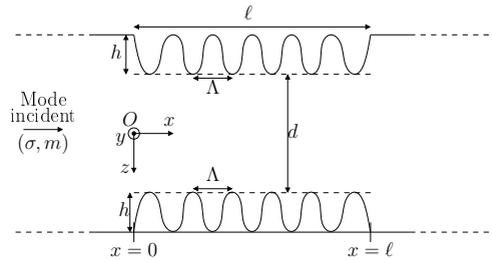


Figure 1.11 – Schéma du guide considéré.

La courbe de dispersion du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) (tirets points), la courbe de dispersion du premier mode évanescent ($\alpha = 1, \mu = 0$) (trait plein) et la courbe de couplage du mode ($\sigma = 2, m = 0$) sont tracées sur la figure 1.12 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_0 .

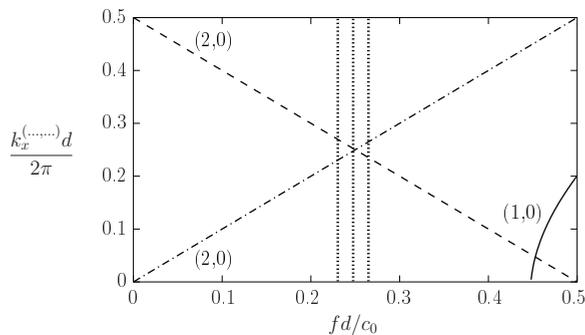


Figure 1.12 – Courbes de dispersion du mode créé par couplage ($\alpha = 1, \mu = 0$) (trait plein), courbe de dispersion du mode incident (plan) ($\sigma = 2, m = 0$) (tirets points) et courbe de couplage du mode plan ($\sigma = 2, m = 0$) répondant à la relation d'accord de phase (1.47) (tirets).

Le module du champ de pression dans le guide d'onde est tracé en fonction des positions adimensionnées x/Λ en abscisses et $2z/L_z$ en ordonnées pour chacune

des trois fréquences d'excitation (figures 1.13). Comme attendu, l'atténuation du mode plan incident est beaucoup plus forte à la seconde fréquence [$fd/c_0 = 0,25$, satisfaisant la condition d'accord de phase (1.47)] qu'aux première et troisième fréquences (respectivement $fd/c_0 = 0,23$ et $fd/c_0 = 0,27$) [57].

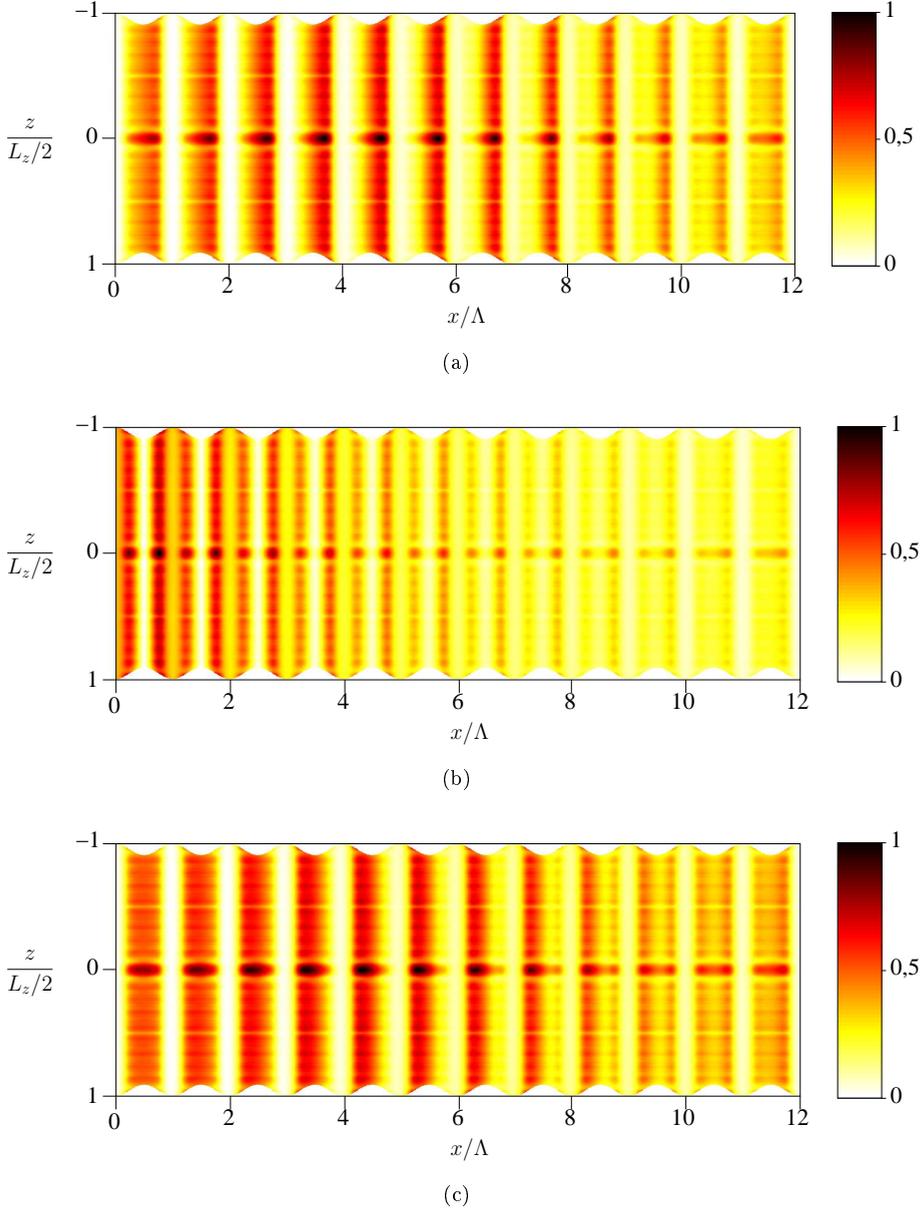


Figure 1.13 – Module du champ de pression normalisé en fonction des positions adimensionnées x/Λ en abscisses et $2z/L_z$ en ordonnées aux fréquences : (a) $fd/c_0 = 0,23$, (b) $fd/c_0 = 0,25$ [satisfaisant la condition d'accord de phase (1.47)] et (c) $fd/c_0 = 0,27$.

1.7 Champ de pression acoustique dans un guide générée par une source surfacique

Jusqu'à ce point du chapitre, la source ne générerait qu'un seul et unique mode. Toutefois, en pratique, il est très difficile de définir une source ayant cette capacité. L'apport de ce paragraphe est de relier la fonction source à la nature du champ incident [mode (σ, m)] qu'elle crée. L'intérêt de cette étude est d'établir la relation entre le déplacement (ou la vitesse) imposé par une source affleurante à la colonne de fluide et le champ de pression de l'onde générée par cette source, en vue de favoriser un unique mode incident sur la partie rugueuse de la plaque.

1.7.1 Géométrie du problème

Le guide considéré est défini par le domaine D_0 (voir paragraphe 1.1.1). Un transducteur situé dans l'intervalle $x \in [-2\ell_t, 0]$ et sur la paroi interne du guide en $z = -L_z/2$ impose une vitesse vibratoire harmonique $V(x)$ suivant z supposée symétrique par rapport au plan $x = -\ell_t$, imposant une vitesse particulière nulle en $x = -\ell_t$ (frontière rigide en $x = -\ell_t$). La rétroaction du champ créé par la source sur le fonctionnement intrinsèque de cette source est négligée (source supposée insensible à sa charge acoustique). Deux domaines sont étudiés dans la suite, le premier, noté D_1 (quantités indicées "1") étant défini par $x \in [-\ell_t, 0]$ et $z \in [-L_z/2, L_z/2]$ et le second (domaine d'étude du champ acoustique), noté D_2 (quantités indicées "2") étant défini par $x \in [0, +\infty)$ et $z \in [-L_z/2, L_z/2]$ (figure 1.14). Le fluide considéré est non dissipatif et au repos.

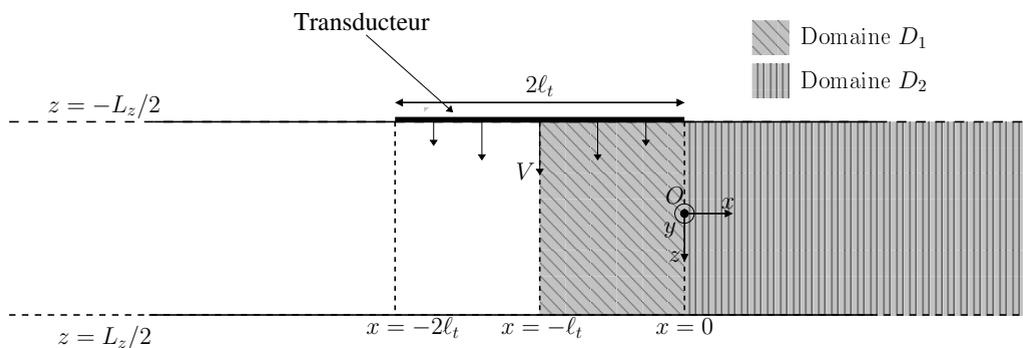


Figure 1.14 – Schéma de la géométrie considérée. Le domaine hachuré en diagonale représente le domaine D_1 et le domaine hachuré verticalement représente le domaine D_2 .

Dans la suite, les champs de pression acoustiques complexes \hat{p}_1 et \hat{p}_2 associés respectivement aux domaines D_1 et D_2 sont recherchés à l'aide de la formulation intégrale. La fonction de Green G_1 dans le domaine D_1 est développée sur la base des fonctions

propres de Neumann (A.3),

$$G_1(x, z; x_1, z_1) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} g_1^{(\sigma, m)}(x; x_1) \psi^{(\sigma, m)}(z) \psi^{(\sigma, m)}(z_1), \quad (1.48)$$

où les coefficients $g_1^{(\sigma, m)}$ (fonction de Green à une dimension satisfaisant à la condition de Neumann en $x = -\ell_t$) ont pour expressions,

$$g_1^{(\sigma, m)}(x; x_1) = \frac{1}{i2k_x^{(\sigma, m)}} [e^{-ik_x^{(\sigma, m)}|x-x_1|} + e^{-ik_x^{(\sigma, m)}(x+x_1+2\ell_t)}]. \quad (1.49)$$

La fonction de Green G dans le domaine D_2 est donnée par les relations (1.13) et (1.40). Le développement des fonctions de Green G_1 et G sur les fonctions propres implique d'exprimer les champs de pression \hat{p}_1 et \hat{p}_2 sous la forme du développement modal :

$$\hat{p}_j(x, z) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_j^{(\sigma, m)}(x) \psi^{(\sigma, m)}(z), \quad j = 1, 2. \quad (1.50)$$

A la frontière entre les domaines D_1 et D_2 , en $x = 0$, les relations de continuité des champs de pression et des composantes suivant l'axe x des vitesses particulières ont respectivement pour expression,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_1(x = 0^-, z) = \hat{p}_2(x = 0^+, z), \\ \partial_x \hat{p}_1(x = 0^-, z) = \partial_x \hat{p}_2(x = 0^+, z), \end{array} \right. \quad (1.51a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_1(x = 0^-, z) = \hat{p}_2(x = 0^+, z), \\ \partial_x \hat{p}_1(x = 0^-, z) = \partial_x \hat{p}_2(x = 0^+, z), \end{array} \right. \quad (1.51b)$$

la continuité de la composante z de la vitesse étant assurée par le choix d'exprimer des champs de pression sur une base modale suivant z . Ces expressions peuvent être mises sous les formes respectives, compte tenu des développements modaux des champs de pression (1.50) et de l'orthogonalité des fonctions propres sur l'épaisseur du guide,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x = 0^-) = \hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x = 0^+), \\ \partial_x \hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x = 0^-) = \partial_x \hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x = 0^+). \end{array} \right. \quad (1.52a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x = 0^-) = \hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x = 0^+), \\ \partial_x \hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x = 0^-) = \partial_x \hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x = 0^+). \end{array} \right. \quad (1.52b)$$

1.7.2 Champ de pression dans le domaine D_1

Le champ de pression \hat{p}_1 dans le domaine D_1 , symétrique par rapport au plan $x = -\ell_t$ et à dérivée suivant x nulle en $x = -\ell_t$ (pour raison de symétrie) est obtenu en faisant usage de la formulation intégrale,

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(x, z) = & - \int_{-\ell_t}^0 G_1(x, z; x_1, z_1) \partial_{z_1} \hat{p}_1(x_1, z_1) \Big|_{z_1 = -L_z/2} dx_1 \\ & + \int_{-L_z/2}^{L_z/2} [G_1(x, z; x_1, z_1) \partial_{x_1} \hat{p}_1(x_1, z_1) - \hat{p}_1(x_1, z_1) \partial_{x_1} G_1(x, z; x_1, z_1)] \Big|_{x_1 = 0^-} dz_1. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Le report du développement de la fonction de Green (1.48) dans l'équation intégrale (1.53) conduit à l'expression de $\hat{p}_1(x, z)$,

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(x, z) = & - \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \psi^{(\sigma, m)}(z) \left\{ \psi^{(\sigma, m)}(z_1) \int_{-\ell_t}^0 g_1^{(\sigma, m)}(x; x_1) \partial_{z_1} \hat{p}_1(x_1, z_1) \Big|_{z_1=-L_z/2} dx_1 \right. \\ & \left. + \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \psi^{(\sigma, m)}(z_1) \left[g_1^{(\sigma, m)}(x; x_1) \partial_{x_1} \hat{p}_1(x_1, z_1) - \hat{p}_1(x_1, z_1) \partial_{x_1} g_1^{(\sigma, m)}(x; x_1) \right] \Big|_{x_1=0^-} dz_1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Compte tenu du développement (1.50) du champ de pression \hat{p}_1 et de l'orthogonalité des fonctions propres dans le domaine $[-L_z/2, L_z/2]$, les amplitudes des modes $\hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x)$ peuvent être mises sous la forme,

$$\hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x) = \hat{W}^{(\alpha, \mu)}(x) + \left[g_1^{(\alpha, \mu)}(x; x_1) \partial_{x_1} \hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x_1) - \partial_{x_1} g_1^{(\alpha, \mu)}(x; x_1) \hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x_1) \right] \Big|_{x_1=0^-}, \quad (1.55)$$

avec

$$\hat{W}^{(\alpha, \mu)}(x) = i\omega\rho\psi^{(\alpha, \mu)}(z_1 = -L_z/2) \int_{-\ell_t}^0 V(x_1) g_1^{(\alpha, \mu)}(x; x_1) dx_1. \quad (1.56)$$

1.7.3 Champ de pression dans le domaine D_2

Le champ de pression \hat{p}_2 dans le domaine D_2 est exprimé à l'aide de la formulation intégrale,

$$\hat{p}_2(x, z) = \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \left[\hat{p}_2(x_2, z_2) \partial_{x_2} G(x, z; x_2, z_2) - G(x, z; x_2, z_2) \partial_{x_2} \hat{p}_2(x_2, z_2) \right] \Big|_{x_2=0} dz_2, \quad (1.57)$$

cette expression pouvant être mise, comme précédemment, sous la forme, après le report des développements modaux de la fonction de Green G (1.13), où $g^{(\alpha, \mu)}$ est donné par la relation (1.40), et du champ de pression \hat{p}_2 (1.48),

$$\hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x) = \left[\partial_{x_2} g^{(\alpha, \mu)}(x; x_2) \hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x_2) - g^{(\alpha, \mu)}(x; x_2) \partial_{x_2} \hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x_2) \right] \Big|_{x_2=0^+}. \quad (1.58)$$

Compte tenu des relations de continuité (1.52a) et (1.52b), la relation (1.58) au point $x_2 = 0^+$ peut être mise sous la forme,

$$\hat{A}_2^{(\alpha, \mu)}(x_2 = 0^+) = \frac{\hat{W}^{(\alpha, \mu)}(x_2 = 0^+) + g_1^{(\alpha, \mu)}(x_2 = 0^+; x_1 = 0^-) \partial_{x_1} \hat{A}_1^{(\alpha, \mu)}(x_1 = 0^-)}{1 + \partial_{x_1} g_1^{(\alpha, \mu)}(x_2 = 0^+; x_1 = 0^-)}. \quad (1.59)$$

La dérivée par rapport à la variable x des coefficients $\hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x)$ donnés par l'expression (1.58) ayant pour expression,

$$\partial_x \hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x) = \left[\hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x_2) \partial_{x_2}^2 g^{(\alpha,\mu)}(x; x_2) - \partial_{x_2} \hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x_2) \partial_x g^{(\alpha,\mu)}(x; x_2) \right] \Big|_{x_2=0^+}, \quad (1.60)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x g^{(\alpha,\mu)}(x=0; x_2=0^+) = -\frac{1}{2}, \\ \partial_{x_2}^2 g^{(\alpha,\mu)}(x=0; x_2=0^+) = -\frac{ik_x^{(\alpha,\mu)}}{2}, \end{array} \right. \quad (1.61a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x g^{(\alpha,\mu)}(x=0; x_2=0^+) = -\frac{1}{2}, \\ \partial_{x_2}^2 g^{(\alpha,\mu)}(x=0; x_2=0^+) = -\frac{ik_x^{(\alpha,\mu)}}{2}, \end{array} \right. \quad (1.61b)$$

il vient :

$$\partial_{x_2} \hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^+) = -ik_x^{(\alpha,\mu)} \hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^+). \quad (1.62)$$

Le report de l'expression (1.62) dans la relation (1.59) conduit alors à l'expression

$$\hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^+) = \hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^-). \quad (1.63)$$

Compte tenu des expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g^{(\alpha,\mu)}(x; x_2=0) = \frac{e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}x}}{2ik_x^{(\alpha,\mu)}}, \\ \partial_{x_2} g^{(\alpha,\mu)}(x; x_2=0) = \frac{e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}x}}{2}, \end{array} \right. \quad (1.64a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g^{(\alpha,\mu)}(x; x_2=0) = \frac{e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}x}}{2ik_x^{(\alpha,\mu)}}, \\ \partial_{x_2} g^{(\alpha,\mu)}(x; x_2=0) = \frac{e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}x}}{2}, \end{array} \right. \quad (1.64b)$$

et des expressions (1.62) et (1.63), la relation (1.59) peut être mise sous la forme,

$$\hat{A}_2^{(\alpha,\mu)}(x) = \hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^-) e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}x}. \quad (1.65)$$

Cette expression montre que l'excitation d'un mode donné (σ, m) , à l'exception de tous les autres (par exemple), est assurée par un coefficient $\hat{W}^{(\sigma,m)}(x_2=0^-)$ de valeur très supérieure aux coefficients $\hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^-)$ [avec $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$].

A noter que, compte tenu des expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^-; x_1=0) = \frac{1}{ik_x^{(\alpha,\mu)}} \exp(-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t) \cos(k_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t), \\ \partial_{x_1} g_1^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^-; x_1=0) = -\exp(-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t) \cos(k_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t), \end{array} \right. \quad (1.66a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^-; x_1=0) = \frac{1}{ik_x^{(\alpha,\mu)}} \exp(-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t) \cos(k_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t), \\ \partial_{x_1} g_1^{(\alpha,\mu)}(x_2=0^-; x_1=0) = -\exp(-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t) \cos(k_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t), \end{array} \right. \quad (1.66b)$$

et des expressions (1.52a), (1.52b), (1.62) et (1.63), la relation (1.55) peut être mise sous la forme,

$$\hat{A}_1^{(\alpha,\mu)}(x) = \hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x). \quad (1.67)$$

1.7.4 Exemple d'un champ source $\hat{W}^{(\alpha,\mu)}$ au point $x = 0$

A titre d'exemple, dans le but de favoriser l'excitation d'un mode (σ, m) en particulier, la source de vitesse $V(x)$ considérée ici est une source dont la vitesse possède un profil spatial suivant x de la forme

$$V(x) = V_0 \cos \left[k_x^{(\sigma,m)}(x + \ell_t) \right], \quad (1.68)$$

où $k_x^{(\sigma,m)}$ est le nombre d'onde suivant la direction x du mode (σ, m) . L'expression (1.56) du terme source $\hat{W}^{(\alpha,\mu)}$ au point $x = 0$ peut alors être mise sous la forme (Annexe D),

$$\hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x = 0) = \frac{\omega \rho V_0 \ell_t (-1)^{\alpha+\mu}}{2k_x^{(\alpha,\mu)}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{\alpha 2} \delta_{\mu 0}}{L_z}} e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)} \ell_t} \left(\text{sinc} \left[\left(k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)} \right) \ell_t \right] + \text{sinc} \left[\left(k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)} \right) \ell_t \right] \right), \quad (1.69)$$

où la fonction $\text{sinc}(u)$ est la fonction sinus cardinal $\sin(u)/u$.

Le second sinus cardinal de la relation (1.69) étant égal à 1 pour le mode (σ, m) , il est donc prépondérant. Le mode recherché peut être privilégié en retenant une valeur de ℓ_t qui rend le premier sinus cardinal très petit. Ainsi, pour une longueur ℓ_t du transducteur suffisamment grande ($k_x^{(\sigma,m)} \ell_t \gg 1$), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{W}^{(\sigma,m)}(x = 0) = -i(-1)^{\sigma+m} \frac{\rho \omega \pi V_0}{\left(2k_x^{(\sigma,m)}\right)^2} \sqrt{\frac{2 - \delta_{\sigma 2} \delta_{m 0}}{L_z}} e^{-ik_x^{(\sigma,m)} \ell_t}, \quad (1.70a) \\ \hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x = 0) \ll \hat{W}^{(\sigma,m)}(x = 0), \quad \text{pour } (\alpha, \mu) \neq (\sigma, m). \quad (1.70b) \end{array} \right.$$

1.7.5 Résultats

L'objectif de ce paragraphe est de comparer le champ de pression généré par une source fictive (monomode), c'est-à-dire une source idéale ne générant qu'un seul et unique mode (σ, m) , avec celui généré par une source réelle (modèle de source pariétale, présenté ci-dessus) lorsque ses caractéristiques [argument du cosinus de la relation (1.68) et longueur du transducteur ℓ_t] permettent de favoriser la génération du même mode (σ, m) . La fréquence de la source acoustique choisie est telle que les vingt et un premiers modes sont propagatifs ($fd/c_0 = 10, 7$).

Le module du champ de pression dans la section transverse du guide au point $x = 0$ est tracé sur les figures 1.15 pour les modes symétriques ($\sigma = 2, m = 1$) et ($\sigma = 2, m = 6$) et antisymétriques ($\sigma = 1, m = 3$) et ($\sigma = 1, m = 10$) pour la source idéale (monomode) (traits pleins) et pour la source réelle (source pariétale) (tirets). La longueur du transducteur de la source surfacique s'avère être prépondérante et n'est pas la même selon le type de mode favorisé. De plus, la différence entre les résultats calculés par les deux modèles est plus faible pour les modes supérieurs (figure 1.15b et 1.15d) que pour les premiers modes (1.15a).

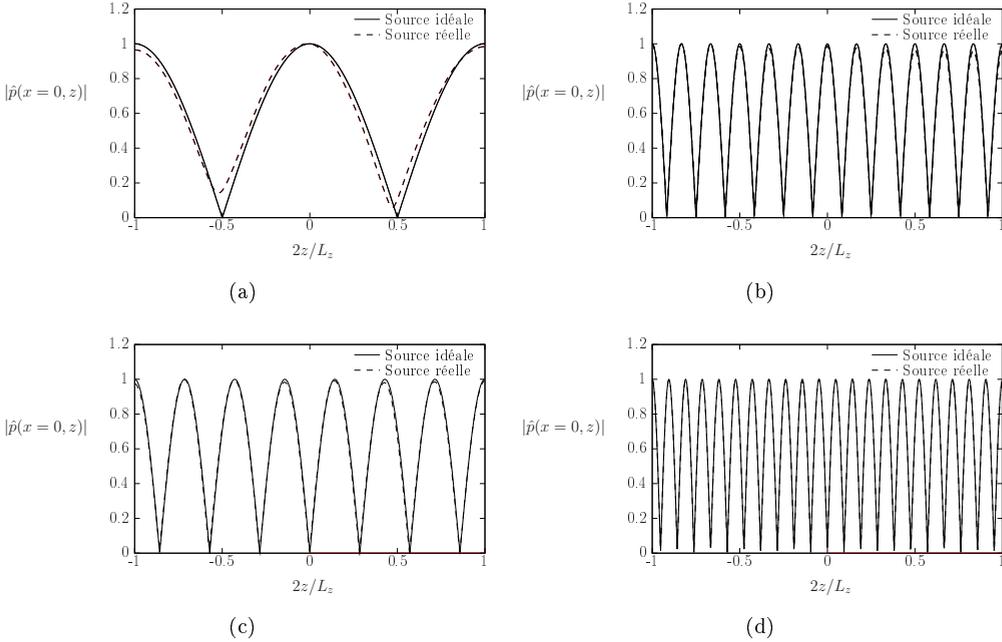


Figure 1.15 – Module du champ de pression dans l'épaisseur du guide au point $x = 0$ en fonction de la position $2z/L_z$ lorsque le mode incident est : (a) mode symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) ($k_x^{(2,1)}\ell_t = 570\pi$), (b) mode symétrique ($\sigma = 2, m = 6$) ($k_x^{(2,6)}\ell_t = 400\pi$), (c) mode antisymétrique ($\sigma = 1, m = 3$) ($k_x^{(1,3)}\ell_t = 500\pi$) et (d) mode antisymétrique ($\sigma = 1, m = 10$) ($k_x^{(1,10)}\ell_t = 10\pi$). Les courbes en traits pleins représentent les résultats obtenus avec la source idéale (monomode) et les courbes en tirets représentent ceux obtenus avec la source réelle (source pariétale).

1.8 Conclusion

Ce chapitre présente deux modèles simples qui permettent de prédire la propagation de champs de pression acoustique dans des guides à parois rugueuses. Ces modèles, qui peuvent prendre en compte tout type de rugosité, s'avèrent être efficaces en terme de coût de calcul, le premier (MII) étant néanmoins nettement moins performant que le second (MIIM). L'introduction de la dissipation, par le biais d'une admittance équivalente de paroi, permet de modéliser les effets dissipatifs liés à la viscosité et à la conduction thermique. Ceci est important pour les couplages très forts entre deux modes guidés dans les bandes d'arrêt ainsi que pour les fréquences proches des fréquences de coupure. Enfin, un modèle de source pariétale est proposé qui permet de définir le profil de vitesse de cette source en fonction du mode recherché dans le guide.

Chapitre 2

PROPAGATION D'ONDES DE CISAILLEMENT POLARISÉES HORIZONTALEMENT DANS DES PLAQUES SOLIDES ISOTROPES À PAROIS RUGUEUSES

2.1 Le problème fondamental

Du fait de l'analogie qui existe entre les ondes de pression en milieu fluide et les ondes SH en milieu solide considérées dans ce chapitre (compte tenu de la rugosité retenue), le formalisme retenu dans ce chapitre présenté dans les paragraphes 2.1 et 2.2 ci-dessous a évidemment beaucoup de points communs avec celui du chapitre 1. Il est néanmoins repris ci-dessous *in extenso* pour que ces paragraphes 2.1 et 2.2 puissent être lus sans avoir à se reporter régulièrement au chapitre précédent. Au delà de la présentation du formalisme, les résultats présentés dans ce chapitre ont en particulier pour objet de compléter ceux présentés au chapitre précédent, dans un contexte différent.

2.1.1 Le guide à parois rugueuses

Le repère cartésien choisi est défini par $R = (O, x, y, z)$, la base orthonormée associée par $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le guide d'onde considéré, caractérisé par sa masse volumique ρ et son second coefficient de Lamé μ , est une plaque limitée par deux plans parallèles rugueux de longueur et de largeur infinies dans le vide (figure 2.1). Le plan de propagation correspondant (par choix) au plan (x, z) et le guide étant infini suivant la dimension y , le domaine D d'étude de frontière ∂D (problème 2D) est défini par x positif et par z appartenant à l'intervalle $[z_1(x), z_2(x)]$, où les coordonnées z_1 et z_2 définissent les cotes des frontières du guide donc celles de la rugosité pour x compris dans l'intervalle $[0, \ell]$. Un guide fictif aux parois situées en $z = -L_z/2$ et $z = L_z/2$, immédiatement extérieur au guide réel (confondu avec le guide réel en dehors de la rugosité), définit le domaine

d'étude retenu (D_0) pour la formulation intégrale utilisée. Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont les vecteurs unitaires normaux respectivement aux surfaces $z_1(x)$ et $z_2(x)$ en tout point des rugosités et orientés vers l'extérieur du guide. Les surfaces $z_1(x)$ et $z_2(x)$ sont données respectivement par les expressions $z_1(x) = -L_z/2 + h_1(x)$ et $z_2(x) = L_z/2 - h_2(x)$, où les fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$ sont des fonctions arithmétiques définissant la rugosité à partir des surfaces du guide extérieur. Le paramètre d , caractérisant l'épaisseur d'un guide d'onde fictif intérieur au guide rugueux, est introduit, non pas dans le modèle analytique, mais pour adimensionner les grandeurs acoustiques et géométriques du guide d'onde rugueux (voir paragraphe 1.3). Ce paramètre d est également utilisé dans le modèle "Petites Masses" (PM) développé dans l'annexe E.

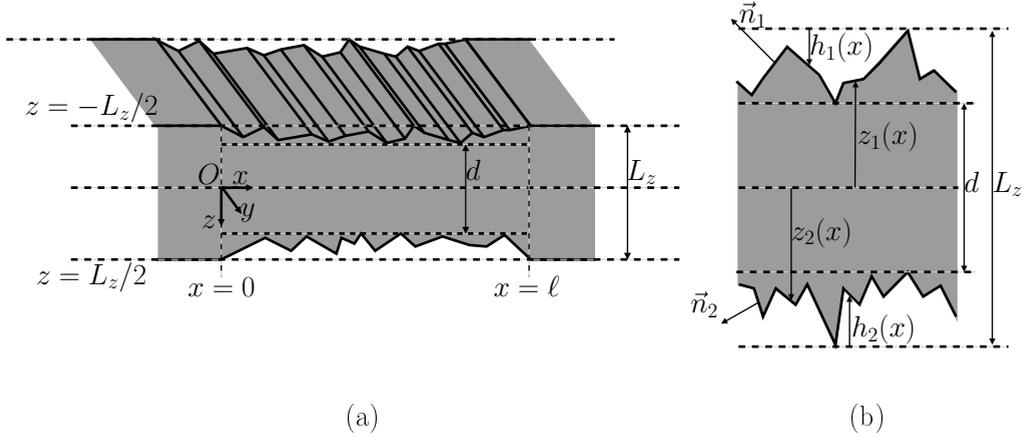


Figure 2.1 – (a) Schéma du guide d'onde délimité par deux surfaces rugueuses et (b) zoom sur la rugosité.

Le champ de déplacement, polarisé suivant la direction y et harmonique de pulsation ω , est exprimé en fonction du temps par la fonction $\exp(i\omega t)$. Ainsi, dans le cadre des hypothèses de l'acoustique linéaire et étant donné les symétries du système étudié, l'amplitude complexe de ce champ de déplacement $\hat{U}_y(x, z)$ ne dépend que des deux variables x et z , et est solution du système d'équations suivant, comportant l'équation de Helmholtz et des conditions de contraintes nulles aux frontières :

$$\begin{cases} [\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_T^2] \hat{U}_y(x, z) = -\hat{f}(x, z), & \forall (x, z) \in D, & (2.1a) \\ \hat{\hat{T}}(x, z) \cdot \vec{n}_q = \vec{0}, & \forall (x, z) \in \partial D, & (2.1b) \end{cases}$$

où $k_T = \omega/c_T$, $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ étant la vitesse des ondes de cisaillement dans le solide isotrope homogène constituant le guide d'onde, où $\hat{\hat{T}}(x, z)$ représente le tenseur des contraintes et où la fonction $\hat{f}(x, z)$ représente l'amplitude (harmonique) du champ source incident à l'entrée du domaine $x > 0$. Le champ incident, créé dans le domaine $x \leq 0$, se propage dans le sens des x croissants et est imposé en $x = 0$.

2.1.2 Conditions aux frontières

Les vecteurs unitaires normaux \vec{n}_q aux surfaces $z_q(x)$ ($q = 1, 2$) du guide d'onde rugueux et orientés à l'extérieur de ce guide d'onde ayant pour expression

$$\vec{n}_q = N_q^{-1} \left[(\partial_x h_q) \vec{e}_x + (-1)^q \vec{e}_z \right], \quad (2.2)$$

avec

$$N_q = \sqrt{1 + (\partial_x h_q)^2}, \quad (2.3)$$

les conditions de contraintes nulles sur les frontières rugueuses (2.1b) peuvent être mises sous la forme

$$\hat{\vec{T}}(x, z_q) \cdot \vec{n}_q = N_q^{-1} \left[(\partial_x h_q) \hat{T}_{xy}(x, z_q) + (-1)^q \hat{T}_{zy}(x, z_q) \right] \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \forall x, \quad q = 1, 2. \quad (2.4)$$

Compte tenu de la loi de Hooke,

$$\begin{cases} \hat{T}_{xy} = \mu \partial_x \hat{U}_y, \\ \hat{T}_{zy} = \mu \partial_z \hat{U}_y, \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$(2.5b)$$

de la nature du champ de déplacement acoustique (déplacement polarisé selon l'axe y) et de la forme suivant y de rugosité retenue (parallèle à l'axe y), la relation (2.4) peut être mise sous la forme

$$\partial_{n_q} \hat{U}_y(x, z_q) = 0, \quad \forall x, \quad z = z_q, \quad q = 1, 2, \quad (2.6)$$

où la dérivée normale aux frontières rugueuses ∂_{n_q} a pour expression

$$\partial_{n_q} = \vec{n}_q \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{N_q} \left[(\partial_x h_q(x)) \partial_x + (-1)^q \partial_z \right]. \quad (2.7)$$

Les conditions de contraintes nulles sur les frontières rugueuses se ramènent donc à des conditions de Neumann pour le déplacement transversal \hat{U}_y sur les frontières rugueuses.

2.1.3 Développements modaux

La solution du problème (2.1) est recherchée sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres $\psi^{(\sigma, m)}(z)$ dans le domaine $[-L_z/2, L_z/2]$,

$$\hat{U}_y(x, z) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}^{(\sigma, m)}(x) \psi^{(\sigma, m)}(z), \quad (2.8)$$

où les fonctions propres orthogonales et normalisées, respectivement antisymétriques ($\sigma = 1$) et symétriques ($\sigma = 2$), sont solutions du problème aux valeurs propres défini par l'équation de Helmholtz et des conditions de Neumann sur les frontières $z = \pm L_z/2$ du guide à géométrie compatible (guide extérieur) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{zz}^2 + \left(k_z^{(\sigma, m)} \right)^2 \right] \psi^{(\sigma, m)}(z) = 0, \quad z \in [-L_z/2, L_z/2], \\ \partial_z \psi^{(\sigma, m)}(z) = 0, \quad z = \pm L_z/2. \end{array} \right. \quad (2.9a)$$

$$(2.9b)$$

Les fonctions propres $\psi^{(\sigma,m)}(z)$ ont pour expression,

$$\begin{cases} \psi^{(1,m)}(z) = \sqrt{2/L_z} \sin(k_z^{(1,m)} z), & (2.10a) \\ \psi^{(2,m)}(z) = \sqrt{(2 - \delta_{m0})/L_z} \cos(k_z^{(2,m)} z), & (2.10b) \end{cases}$$

et les valeurs propres associées $k_z^{(\sigma,m)}$ sont données par

$$\begin{cases} k_z^{(1,m)} = (2m + 1)\pi/L_z, & (2.11a) \\ k_z^{(2,m)} = 2m\pi/L_z, & (2.11b) \end{cases}$$

où le nombre quantique m prend toutes les valeurs entières positives.

2.1.4 Formulation intégrale

Le champ de déplacement \hat{U}_y dans le domaine D du guide étudié satisfaisant au système d'équations (2.1) peut être exprimé, par application du théorème de Green, de la façon suivante [66, 67] :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (x, z) \in (D), \\ (x, z) \in (D_0 - D), \end{aligned} \right\} \hat{U}_y(x, z) &= \int_0^{+\infty} \int_{z_1}^{z_2} G(x, z; x', z') \hat{f}(x', z') dz' dx' \\ &+ \sum_{q=1}^2 \int_0^{+\infty} \left[G(x, z; x', z_q) \partial_{n_q} \hat{U}_y(x', z_q) - \hat{U}_y(x', z_q) \partial_{n_q} G(x, z; x', z_q) \right] dx', \end{aligned} \quad (2.12)$$

où l'intégrale double représente l'effet des sources (\hat{f}), et où l'intégrale simple (intégrale de surface fermée à l'infini) traduit les effets des frontières du domaine. La fonction de Green $G(x, z; x', z')$ choisie est définie dans le domaine D_0 du guide à géométrie compatible (guide extérieur) et satisfait à des conditions de Neumann aux frontières :

$$\begin{cases} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_T^2 \right] G(x, z; x', z') = -\delta(x - x') \delta(z - z'), & \forall (x, z, x', z') \in D_0, & (2.13a) \\ \partial_z G(x, z; x', z') = 0, & \forall (x, x', z') \in D_0 \text{ et en } z = \pm L_z/2. & (2.13b) \end{cases}$$

Cette fonction de Green peut être développée sur la base des fonctions propres $\psi^{(\sigma,m)}(z)$ [66, 67],

$$G(x, z; x', z') = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[g^{(\sigma,m)}(x, x') \psi^{(\sigma,m)}(z') \right] \psi^{(\sigma,m)}(z), \quad (2.14)$$

avec

$$g^{(\sigma,m)}(x, x') = \frac{e^{-ik_x^{(\sigma,m)}|x-x'|}}{2ik_x^{(\sigma,m)}}, \quad (2.15)$$

et

$$\left(k_x^{(\sigma,m)} \right)^2 = k_T^2 - \left(k_z^{(\sigma,m)} \right)^2. \quad (2.16)$$

Compte tenu des conditions aux frontières (2.6), le terme $G\partial_{n_q}\hat{U}_y$ de l'équation (2.12) est nul, et en faisant usage du développement sur les fonctions propres de la fonction de Green (2.14) et consécutivement du champ de déplacement (2.8), l'équation intégrale (2.12) peut être directement mise sous la forme,

$$\left. \begin{aligned} (x, z) \in (D), & \quad \sum_{\beta=1}^2 \sum_p \hat{A}^{(\beta,p)}(x) \hat{\psi}^{(\beta,p)}(z) \\ (x, z) \in (D_0 - D), & \quad 0 \end{aligned} \right\} = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \left[\hat{F}^{(\beta,p)}(x) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\beta,p)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right\} \right] \hat{\psi}^{(\beta,p)}(z), \quad (2.17)$$

où le terme source représentant le transfert d'énergie entre la source acoustique \hat{f} et le mode (β, p) a pour expression

$$\hat{F}^{(\beta,p)}(x) = \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{-\infty}^0 dx' g^{(\beta,p)}(x, x') \psi^{(\beta,p)}(z') \hat{f}(x', z'), \quad (2.18)$$

et où le terme ayant pour expression

$$\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\beta,p)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right\} = - \sum_{q=1}^{\ell} \int_0^{\ell} \hat{A}^{(\alpha,r)}(x') \psi^{(\alpha,r)}(z_q) \partial_{n_q} \psi^{(\beta,p)}(z_q) g^{(\beta,p)}(x, x') dx', \quad (2.19)$$

est un opérateur "de surface" [65, 68–70] qui représente le couplage de modes dû aux rugosités des frontières, l'expression de la dérivée normale aux frontières rugueuses ∂_{n_q} étant donnée par la relation (2.7).

En multipliant l'équation (2.17) par la fonction propre $\psi^{(\sigma,m)}(z)$, en intégrant le résultat sur l'épaisseur du guide extérieur, il vient, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions propres dans le domaine $[-L_z/2, L_z/2]$:

$$\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left[\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right\} + B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x) \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right], \quad (2.20)$$

où

$$B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x) = \left(\int_{-L_z/2}^{z_1} dz + \int_{z_2}^{L_z/2} dz \right) \psi^{(\alpha,r)}(z) \psi^{(\sigma,m)}(z), \quad (2.21)$$

est un opérateur "d'épaisseur" [65, 68–70] qui tient compte de la profondeur de rugosité et dont les expressions sont données en annexe B.

Comme cela a déjà été mentionné au paragraphe 1.2.2, l'amplitude $\hat{A}^{(\sigma,m)}$ de chaque mode, donnée par l'expression (2.20), peut être exprimée comme la somme d'un champ incident représenté par le terme source $\hat{F}^{(\sigma,m)}$ et d'un champ diffusé qui résulte de l'effet des frontières rugueuses sur le champ incident et qui est traduit analytiquement par les deux opérateurs $\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$ et $B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$. Si la source acoustique générant le champ incident à l'entrée du guide d'onde est considérée comme une source primaire, la rugosité peut être

considérée comme une distribution locale de sources secondaires générant, par processus successifs de diffusion du champ incident, des modes non générés par la source acoustique et une perturbation corrélative du mode incident.

Remarque :

Si, dans le formalisme présenté ci-dessus, la forme de la rugosité est négligée, elle peut être représentée par des "excroissances" (des dents) sortant du domaine $z \in [-d/2, d/2]$ représentées par leur masse surfacique (modèle "Petites Masses", PPM). La condition en frontière imposée par ce facteur d'inertie est obtenu en appliquant la loi de Newton à chaque masse surfacique m_q localisée, assimilée à un parallépipède rectangle de hauteur h_q^0 ,

$$m_q = \rho h_q^0, \quad q = 1, 2, \quad (2.22)$$

qui relie le facteur d'inertie $(-\omega^2 \rho h_q^0 \hat{U}_y)$ à la contrainte de cisaillement

$$\hat{T}_y z = (-1)^q \mu \hat{U}_y, \quad (2.23)$$

en $z = \pm d/2$:

$$-\omega^2 \rho h_q^0 \hat{U}_y = (-1)^q \mu \hat{U}_y. \quad (2.24)$$

Cette condition en frontière traduit une simple condition traduite par une admittance de paroi

$$k_T h_q^0, \quad q = 1, 2. \quad (2.25)$$

En d'autres termes, le formalisme présenté dans le paragraphe 2.1.4 ci-dessus s'applique ici en remplaçant simplement l'opérateur ∂_{n_q} sur les frontières réelles de la rugosité dans l'expression (2.19) de l'opérateur $\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}$ par l'opérateur

$$\partial_{z_q} = (-1)^q k_T^2 h_q^0, \quad (2.26)$$

appliqué sur la surface du guide fictif intérieur ($z = \pm d/2$). Ce modèle simplifié est présenté plus en détail dans l'annexe E [76].

2.1.5 Recherche de solutions par approximations successives

En considérant chaque terme entre crochets de l'équation (2.20) comme petit devant le terme source $\hat{F}^{(\sigma,m)}$, les solutions de l'équation (2.20), notées $^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}$, peuvent être recherchées par approximations successives,

$$^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)} = {}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)} + {}^{(1)}\hat{A}^{(\sigma,m)} + \dots + {}^{(N-1)}\hat{A}^{(\sigma,m)} + {}^{(N)}\hat{A}^{(\sigma,m)}, \quad (2.27)$$

où N est le nombre d'itérations retenu pour le calcul de l'amplitude $\hat{A}^{(\sigma,m)}$, ${}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)}$ étant la perturbation à l'ordre $N = 0$ (solution en l'absence de rugosité), ${}^{(1)}\hat{A}^{(\sigma,m)}$, la perturbation à l'ordre $N = 1$ et ainsi de suite. La solution en l'absence de rugosité est donnée par le terme source :

$${}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x). \quad (2.28)$$

La solution à l'ordre $[N]$ est exprimée en fonction de la solution à l'ordre $[N - 1]$,

$${}^{[N]}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left[\hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)} \left\{ {}^{[N-1]}\hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right\} + B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x) {}^{[N-1]}\hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right]. \quad (2.29)$$

La convergence de la série de fonctions donnée par la relation (2.27) est, dans la suite, jugée établie lorsqu'il existe un nombre entier positif N_c tel que la relation

$$\left| {}^{(N_c)}\hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right| - \left| {}^{(N_c-1)}\hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right| < 0,001, \quad \forall x \in [0, \ell], \quad (2.30)$$

est vérifiée pour tous les modes pris en compte dans les calculs. Les intégrales sont calculées numériquement par la méthode des trapèzes (annexe C).

Nous supposons dans la suite que la source ne génère qu'un seul mode incident, représenté par le couple (σ, m) , les autres modes, notés (α, r) , étant créés par couplage; le terme source \hat{f} peut alors être mis sous la forme,

$$\hat{f}(x, z) = \hat{Q}^{(\sigma,m)} \psi^{(\sigma,m)}(z) \delta(x), \quad (2.31)$$

et, en conséquence, la correction d'ordre $N = 0$ donnée par la relation (2.28) peut être mise sous la forme, compte tenu des expressions (2.15) et (2.18),

$${}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \frac{\hat{Q}^{(\sigma,m)}}{2ik_x^{(\sigma,m)}} e^{-ik_x^{(\sigma,m)}x}. \quad (2.32)$$

En pratique, dans la suite, le facteur $\hat{Q}^{(\sigma,m)}/2ik_x^{(\sigma,m)}$ est pris égal à l'unité de telle sorte que la relation (2.32) puisse être mise sous la forme,

$${}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = e^{-ik_x^{(\sigma,m)}x}, \quad (2.33)$$

étant bien entendu que l'amplitude ${}^{(0)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x)$ n'est pas sans dimension ($\text{m}^{3/2}$).

2.1.6 Limites de la méthode

Le choix de la fonction de Green implique la présence d'un pôle dans les coefficients $g^{(\alpha,r)}(x, x')$, donnés par la relation (2.15), ce pôle traduisant la fréquence de coupure du mode (α, r) correspondant. Dans le calcul des corrections d'amplitude ${}^{(N)}\hat{A}^{(\alpha,r)}$, lorsque la fréquence de la source acoustique est proche de la fréquence de coupure d'un mode, le modèle ne converge plus. La dissipation viscoélastique, traduite par des coefficients d'élasticité complexes, devrait être introduite si l'on devait s'intéresser à cette situation. Par ailleurs, si un couplage entre le mode incident et un mode créé par couplage est si fort que toute l'énergie ou presque du mode incident est cédée à ce mode couplé, ceci provoque une divergence du modèle, car l'hypothèse selon laquelle le terme entre crochets de l'équation (2.20) est faible devant le terme source n'est plus valable. Ce cas particulier qui ne se rencontre que dans les bandes d'arrêt est étudié plus en détail dans le chapitre 3 où une méthode alternative basée sur la théorie des modes couplés pour résoudre l'équation (2.20) est proposée dans le cas d'une rugosité périodique, et pour deux modes seulement.

2.2 Couplage de modes, comparaison des modèles

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les résultats obtenus en prenant en considération la forme de la rugosité (conditions de contraintes nulles sur les frontières rugueuses) à ceux obtenus en traduisant l'effet de cette rugosité par de simples facteurs d'inertie (remarque de fin de paragraphe 2.1.4). Les résultats sont dans la suite présentés dans le cas d'un guide ayant une rugosité périodique de période Λ en dents de scie symétriques (triangles isocèles) de hauteur h sur une surface, l'autre étant parfaitement lisse (figure 2.2). Les valeurs des paramètres du guide d'onde sont consignées dans le tableau 2.1.

$fd/c_T = 1,45$	$d/\Lambda = 2,5$
$\Lambda/\lambda = 0,58$	$h/d = 0,01$
$k_T \ell = 109,3$	$\ell/\Lambda = 30$

Tableau 2.1 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats présentés sur les figures 2.3 et 2.4.

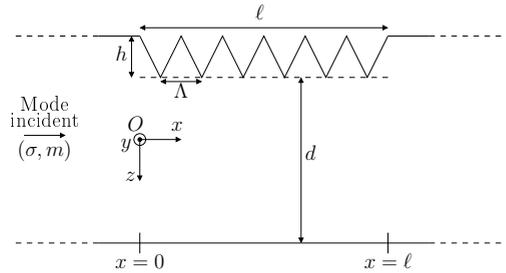


Figure 2.2 – Schéma du guide considéré.

Quatre modes sont pris en compte dans les calculs : le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) et les modes créés par couplage à savoir, le mode symétrique ($\alpha = 2, r = 0$) et les modes antisymétriques ($\alpha = 1, r = 0$) et ($\alpha = 1, r = 1$), ces modes étant propagatifs à l'exception du mode antisymétrique ($\alpha = 1, r = 1$) qui est évanescent. Les courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), la courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et les courbes de couplage [relation (1.46)] (tirets) sont tracées sur la figure 2.3 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

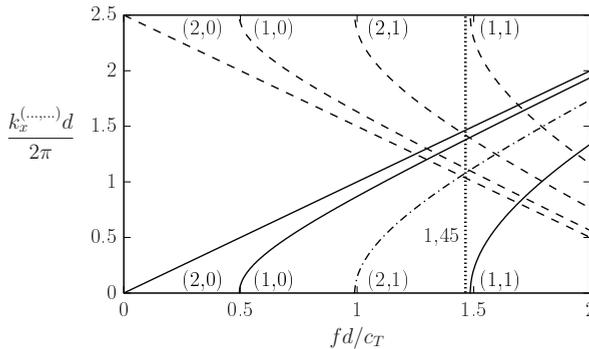


Figure 2.3 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) (tirets). Le trait vertical en pointillés représente la fréquence de la source acoustique ($fd/c_T = 1,45$).

La fréquence adimensionnée de la source acoustique ayant pour valeur $fd/c_T = 1,45$ [trait vertical sur la figure 2.3], deux couplages sont recherchés : le couplage entre le mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) et les modes créés par couplage et contra-propagatifs ($\alpha = 2, r = 0$) et ($\alpha = 1, r = 0$). Les modules des amplitudes normalisées [par rapport à l'amplitude du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$)] des quatre modes pris en compte dans les calculs sont tracés sur les figures 2.4 en fonction de la position adimensionnée $k_T x$, en traits pleins pour une rugosité décrite par sa forme (opérateur ∂_{n_q} , modèle IM) et en tirets pour une rugosité décrite par l'inertie des dents (petites masses, modèle PM). Les modules des amplitudes des modes créés par couplage obtenus à partir de opérateur ∂_{n_q} sont supérieurs à ceux obtenus par la méthode des petites masses. En particulier, la croissance de l'amplitude du mode ($\alpha = 2, r = 0$) contra-propagatif (dans le sens des x décroissants) est plus importante dans le premier cas que dans le second. De même, la décroissance du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) est légèrement plus importante dans le premier cas que dans le second. Comme on pouvait s'y attendre, la forme de la rugosité a donc une influence non négligeable sur le couplage entre modes guidés, dans le sens où elle contribue à l'effet de diffusion.

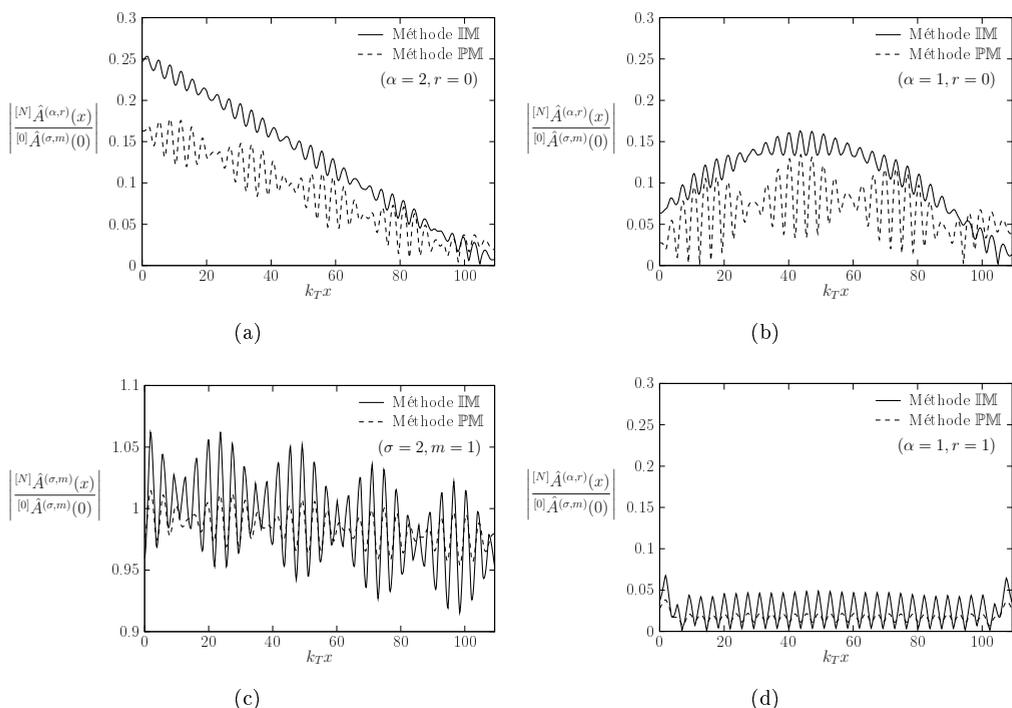


Figure 2.4 – Module de l'amplitude normalisée du mode en fonction de la position adimensionnée $k_T x$: (a) créé par couplage ($\alpha = 2, r = 0$), (b) créé par couplage ($\alpha = 1, r = 0$), (c) incident ($\sigma = 2, m = 1$) et (d) créé par couplage ($\alpha = 1, r = 1$). Les résultats obtenus pour une rugosité décrite par sa forme (IM) sont représentés par des traits pleins et ceux obtenus par la méthode des petites masses (PM) par des tirets.

2.3 Flux d'énergie

L'objectif de ce paragraphe est d'exprimer, à l'entrée ($x = 0$) et à la sortie ($x = \ell$) du domaine rugueux, les flux d'énergie des modes incident et créés par couplage et d'en déduire les coefficients de réflexion et de transmission en énergie de chaque mode.

2.3.1 Coefficients de réflexion et de transmission en énergie

La moyenne temporelle du flux total d'énergie sur une profondeur unitaire (selon y), en Watt, portée par une onde SH est donnée par [79, 80]

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} P_x(x, z; t) dz, \quad (2.34)$$

où $P_x(x, z; t) = -t_{xy}(x, z; t) \partial_t u_y(x, z; t)$ est la composante du vecteur de Poynting selon la direction de propagation x , t_{xy} et u_y étant respectivement la composante xy du tenseur des contraintes réel et le champ de déplacement réel projeté suivant y . Ce flux d'énergie moyen a pour expression en un point x (annexe F),

$$\bar{\phi}(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \bar{\phi}^{(\alpha, r)}(x), \quad \text{en } x = 0 \text{ et en } x = \ell, \quad (2.35)$$

où $\bar{\phi}^{(\alpha, r)}$ représente le flux d'énergie moyen du mode (α, r) et a pour expression,

$$\bar{\phi}^{(\alpha, r)}(x) = -\frac{1}{4} i \omega \mu \left[\hat{A}^{(\alpha, r)}(x) \left(\partial_x \hat{A}^{(\alpha, r)}(x) \right)^* - \left(\hat{A}^{(\alpha, r)}(x) \right)^* \partial_x \hat{A}^{(\alpha, r)}(x) \right]. \quad (2.36)$$

Les coefficients de réflexion en énergie au point $x = 0$ et de transmission en énergie au point $x = \ell$ ont respectivement pour expressions pour chaque mode (α, r) ,

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{(\alpha, r)} = \left| \frac{\bar{\phi}^{(\alpha, r)}(x = 0)}{\bar{\phi}_{inc}} \right|, \end{array} \right. \quad (2.37a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{(\alpha, r)} = \left| \frac{\bar{\phi}^{(\alpha, r)}(x = \ell)}{\bar{\phi}_{inc}} \right|, \end{array} \right. \quad (2.37b)$$

où, pour un facteur de source $\hat{Q}^{(\sigma, m)} = 2i k_x^{(\sigma, m)}$ [relation (2.33)],

$$\bar{\phi}_{inc} = \frac{1}{2} \omega \mu k_x^{(\sigma, m)}, \quad (2.38)$$

est la moyenne temporelle du flux d'énergie porté par le mode incident (σ, m) à l'entrée de la zone rugueuse du guide.

2.3.2 Évolutions des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de la fréquence

Les mécanismes de transfert d'énergie significatifs entre modes guidés prennent place dans des domaines restreints de fréquences. De plus, chaque couplage a lieu à des fréquences différentes et les amplitudes des modes couplés sont également toujours différentes. Ce paragraphe a pour objectifs, d'une part, d'étudier les évolutions des coefficients de réflexion et de transmission en énergie associés à chaque mode guidé en fonction de la fréquence de la source acoustique, et d'autre part, de comparer plusieurs couplages entre eux au travers de ces coefficients de réflexion et de transmission.

Le guide d'onde considéré est une plaque solide isotrope délimitée par une paroi rugueuse et par une paroi lisse, la rugosité étant une distribution régulière de dents de scie symétriques (triangles isocèles) de hauteur h et de périodicité spatiale Λ (figure 2.5). Les valeurs des paramètres du guide d'onde sont consignées dans le tableau 2.2.

$d/\Lambda = 3$
$h/d = 0,01$
$\ell/\Lambda = 30$

Tableau 2.2 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats présentés sur les figures 2.6 et 2.7.

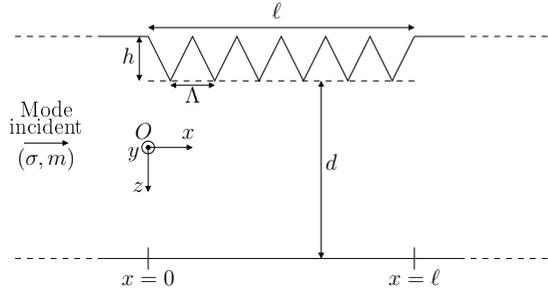


Figure 2.5 – Schéma du guide considéré.

Six modes sont pris en compte dans les calculs : le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 2$) et les modes créés par couplage, à savoir les modes symétriques ($\alpha = 2, r = 0$) et ($\alpha = 2, r = 1$) et les modes antisymétriques ($\alpha = 1, r = 0$), ($\alpha = 1, r = 1$) et ($\alpha = 1, r = 2$), tous ces modes étant propagatifs, à l'exception du mode ($\alpha = 1, r = 2$) qui est évanescent. Les courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), la courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et les courbes de couplage de la relation (1.46) (tirets) sont tracées sur la figure 2.6 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . La fréquence de la source acoustique étant choisie comprise entre les valeurs adimensionnées $fd/c_T = 2,05$ et $fd/c_T = 2,45$ (bande grisée sur la figure 2.6 et zoom sur la figure 2.7a), sur les modes pris en compte, seuls sont recherchés les couplages du mode incident ($\sigma = 2, m = 2$) avec les modes créés par couplage contra-propagatifs ($\alpha = 2, r = 0$), ($\alpha = 1, r = 0$), ($\alpha = 2, r = 1$) et ($\alpha = 1, r = 1$).

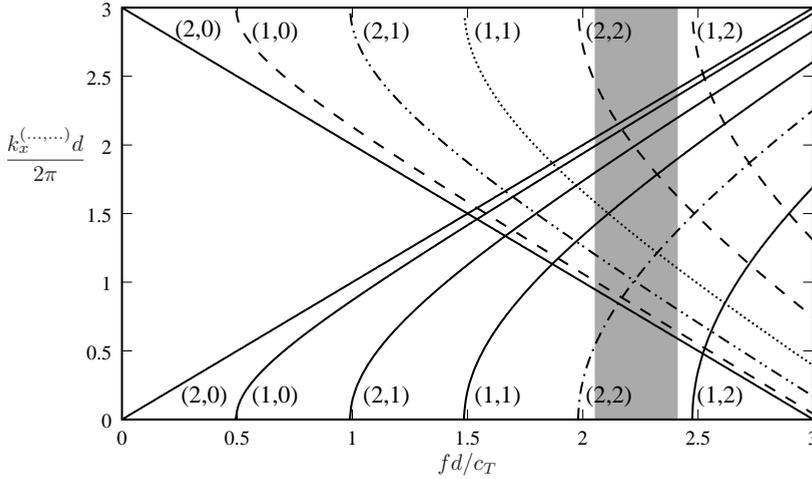


Figure 2.6 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) (tirets). Le domaine grisé correspond à la bande fréquentielle d'excitation de la source acoustique.

Le domaine fréquentiel de l'étude est discrétisé et pour chaque valeur de la fréquence dans ce domaine, les coefficients de réflexion et de transmission associés à chaque mode guidé (pris en compte dans les calculs) sont calculés. Les évolutions des coefficients de transmission du mode incident symétrique $(\sigma = 2, m = 2)$ (trait plein) et de réflexion des modes créés par couplage symétriques $(\alpha = 2, r = 0)$ (tirets) et $(\alpha = 2, r = 1)$ (tirets points) et antisymétriques $(\alpha = 1, r = 0)$ (pointillés) et $(\alpha = 1, r = 1)$ (tirets points points) sont tracées sur la figure 2.7b en fonction de la fréquence de la source acoustique sur l'intervalle $fd/c_T \in [2, 05; 2, 45]$. L'évolution du coefficient de réflexion associé à chacun de ces quatre modes créés par couplage a une variation très importante pour les fréquences proches de la fréquence d'accord de phase de chaque couplage recherché. Aussi, à chaque variation d'un des coefficients de réflexion, est associée une variation opposée du coefficient de transmission du mode incident $(\sigma = 2, m = 2)$, ce qui explique que l'énergie cédée par le mode incident est bien égale à l'énergie reçue par chaque mode créé par couplage. Ces résultats obtenus avec des ondes SH sont clairement en accord avec ceux donnés dans la littérature pour des ondes SH [26] et même pour des ondes de Lamb [60, 81]. A noter que les fréquences des couplages du mode incident $(\sigma = 2, m = 2)$ avec les modes créés par couplage $(\alpha = 2, r = 0)$ et $(\alpha = 1, r = 0)$ étant relativement voisines, ces deux couplages se chevauchent (en terme de fréquence) : il en résulte une plus grande perte d'énergie du mode incident et un étalement de son coefficient de transmission. Les quatre coefficients de réflexion tracés ont des maxima différents les uns par rapport aux autres notamment celui du mode plan $(\alpha = 2, r = 0)$: l'énergie reçue par un mode créé par couplage dépend donc des caractéristiques intrinsèques de ce mode. L'influence de ces caractéristiques intrinsèques (nombre d'onde suivant la direction de propagation) est étudiée au paragraphe 3.1.

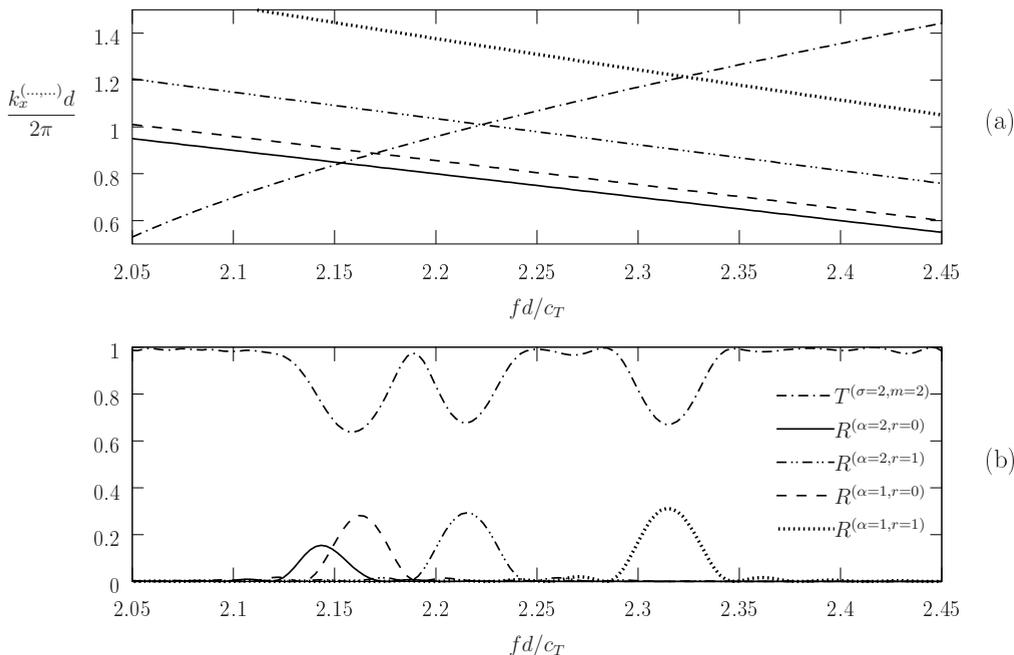


Figure 2.7 – (a) Zoom du domaine grisé de la figure 2.6 et (b) évolutions des coefficients de réflexion en énergie des modes créés par couplage ($\alpha = 2, r = 0$) (trait plein), ($\alpha = 1, r = 0$) (tirets), ($\alpha = 2, r = 1$) (tirets points points), ($\alpha = 1, r = 1$) (pointillés) au point $x = 0$ et du coefficient de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 2$) (tirets points) au point $x = \ell$.

2.4 Étude expérimentale

L'étude expérimentale de la propagation d'ondes SH dans des matériaux à géométrie complexe connaît un véritable regain d'intérêt ces dernières années [4, 82–87]. Reste que ces ondes, qui ont la particularité d'être plus difficiles à exciter que des ondes de Lamb, sont pour l'instant beaucoup moins utilisées dans le cadre du contrôle non destructif que les ondes de Lamb, bien que plusieurs méthodes existent pour exciter ces modes SH guidés : excitation par un transducteur acousto-electromagnétique (EMAT) dans des plaques conductrices [88, 89], excitation par impact laser dans des plaques piézoélectriques [90] ou encore excitation du mode plan par un transducteur piézoélectrique. Si les deux premières méthodes citées ont l'avantage de pouvoir déplacer la source sans difficulté, ce n'est pas le cas pour la méthode d'excitation par un transducteur piézoélectrique du fait qu'il doit être collé au matériau par le biais d'un gel de couplage.

Dans la continuité de travaux expérimentaux menés au LOMC (Le Havre) sur la propagation d'ondes de Lamb dans des plaques à parois rugueuses [59, 63, 64, 91], deux études expérimentales complémentaires ont été réalisées avec des ondes SH ; elles sont reportées ici. L'objectif de ces travaux est d'étudier le couplage entre deux modes guidés dans le cas d'une rugosité périodique sur une des surfaces de chaque plaque. La première

expérience a pour but de rechercher le couplage de deux ondes guidées dans une bande d'arrêt en déplaçant la source d'excitation et en observant, à une fréquence donnée, la propagation d'une onde incidente en fonction de la distance entre la source d'excitation et le récepteur. La seconde étude consiste à coller deux transducteurs sur les tranches de la plaque de part et d'autre de la partie rugueuse (distance source-récepteur fixe) et d'observer les coefficients de réflexion et de transmission en fonction de la fréquence d'excitation.

Les deux plaques étudiées sont en aluminium de masse volumique $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$. La célérité des ondes de cisaillement dans le matériau est $c_T = 3140 \text{ m.s}^{-1}$. Les deux plaques¹ ont une paroi rugueuse et une paroi lisse (figures 2.8). Le profil de rugosité de la première plaque est une distribution régulière et périodique de créneaux sur toute la surface rugueuse et le profil de rugosité de la seconde plaque est une distribution régulière et périodique de dents de scie symétriques sur une longueur $\ell = 126 \text{ mm}$. Les paramètres géométriques des deux plaques sont consignés dans le tableau 2.3.

Première plaque	$L_z = 2,88 \text{ mm}$	$\Lambda = 4,2 \text{ mm}$	$h = 0,12 \text{ mm}$	$\ell = 126 \text{ mm}$
Seconde plaque	$L_z = 10 \text{ mm}$	$\Lambda = 5,4 \text{ mm}$	$h = 0,4 \text{ mm}$	$\ell = 124,2 \text{ mm}$

Tableau 2.3 – Paramètres géométriques des deux plaques étudiées.

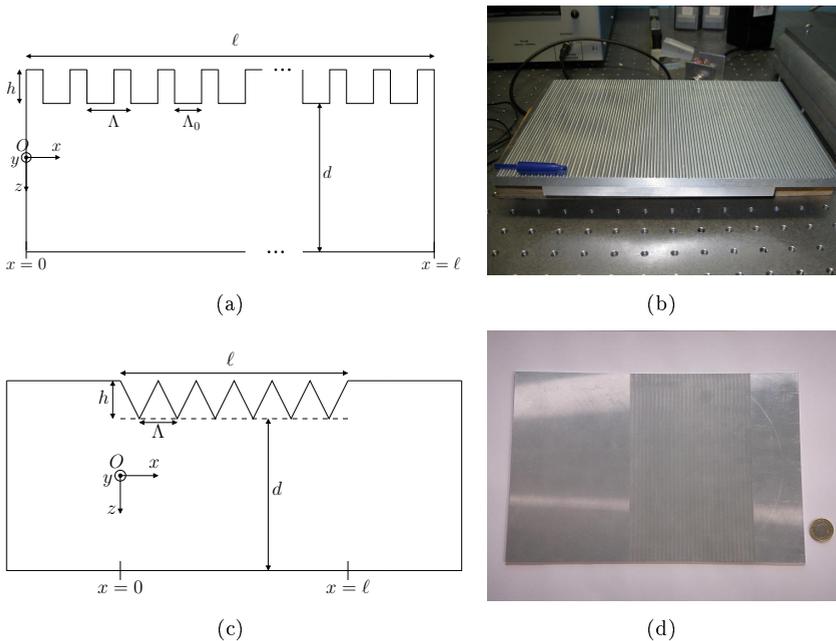


Figure 2.8 – (a) Photographie de la première plaque et (b) photographie de la seconde plaque.

1. Les deux plaques ont été usinées par Philippe Saint-Martin à l'IUT du Havre.

2.4.1 Couplage de deux modes guidés dans une bande d'arrêt

L'excitation d'un mode SH guidé est assurée par un transducteur acousto-electromagnétique (EMAT). A l'instar des transducteurs à couplage par air ou des lasers, ce transducteur peut être déplacé afin de balayer la surface de la plaque (translation motorisée) car il permet de s'affranchir des problèmes de contact (gel de couplage pour les transducteurs piézoélectriques classiques). Ces transducteurs, qui sont apparus au début des années 1970 [88, 89, 92], sont utilisés pour le contrôle non destructif de rails [93] ou encore pour mesurer le délaminage dans des matériaux composites stratifiés [94]. Comme mentionné précédemment, l'objet de cette expérience est de mettre en évidence le couplage entre deux modes guidés dans une bande d'arrêt.

À l'émission, la chaîne de mesure est composée d'un générateur haute fréquence et d'un amplificateur de puissance qui alimente un transducteur émetteur EMAT. La réception est composée d'un transducteur piézoélectrique muni d'un sabot et d'un préamplificateur (gain de 40dB) dont la sortie est reliée à un oscilloscope de contrôle et de conversion des signaux mémorisés dans un ordinateur (figures 2.9).

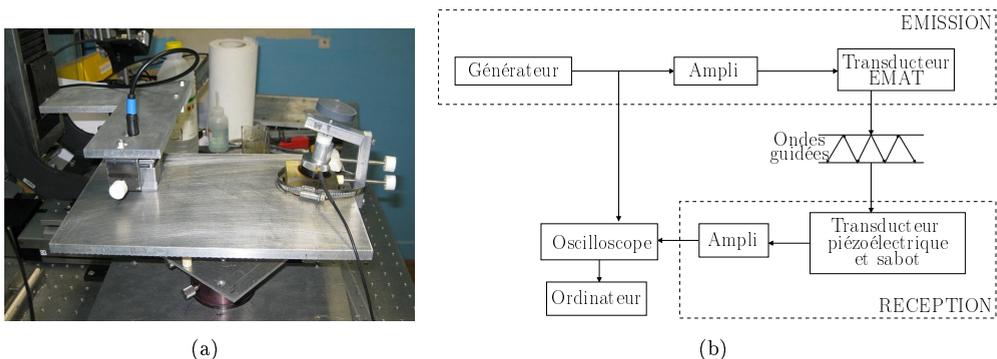


Figure 2.9 – (a) Photographie et (b) schéma du montage expérimental.

Les amplitudes du déplacement captées par le récepteur (fixe) sont enregistrées en fonction de la distance émetteur-récepteur qui la sépare de l'émetteur (mobile) en 500 points sur une distance de 100 mm. En chaque point, une moyenne est effectuée sur un grand nombre de burst et enregistrés en fonction du temps sur un intervalle de $105 \mu\text{s}$ en 1500 points. Les amplitudes, normalisées pour entrer dans l'intervalle $[-0,5;0,5]$, sont représentées dans le plan (temps, distance) sur la figure 2.10. La largeur des bursts (100 ms), le nombre de signal dans le burst (5), et le champ direct (trace supérieure) et réfléchi sur le bord de la plaque située à l'arrière de l'émetteur (trace inférieure) apparaissent clairement sur la figure.

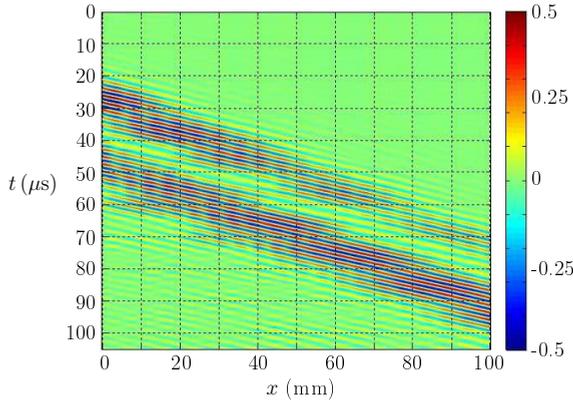


Figure 2.10 – Représentation des signaux en fonction du temps t (en ordonnées) et de la distance émetteur-récepteur x (en abscisses) pour la première plaque (rugosité en créneaux).

La double FFT temporelle et spatiale [95] est représentée dans le plan (k_x, f) sur la figure 2.11. Trois modes guidés sont localisés sur la figure 2.11 (marqués par des taches) : le mode $(\sigma = 2, m = 1)$ se propageant dans le sens des x croissants ($k_x^{(\sigma=2,m=1)}$ positif), le mode $(\alpha = 1, r = 1)$ se propageant dans le sens des x croissants ($k_x^{(\alpha=1,r=1)}$ positif) et le mode $(\alpha = 1, r = 1)$ se propageant dans le sens des x décroissants ($k_x^{(\alpha=1,r=1)}$ négatif). Puisque les deux premiers modes cités sont générés par le transducteur EMAT (leur longueur d'onde correspond à la périodicité spatiale du profil de champ de force exercé par le transducteur EMAT), il est clair que le mode $(\alpha = 1, r = 1)$ se propageant dans le sens des x décroissants est créé par couplage avec le mode incident $(\sigma = 2, m = 1)$ à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 1,55$.

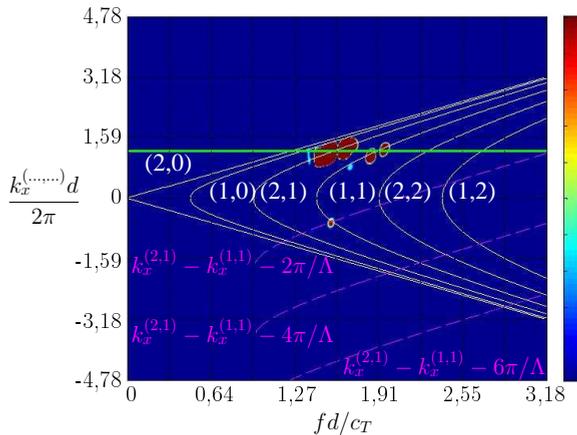


Figure 2.11 – Représentation de la double transformée de Fourier spatiale et temporelle des signaux en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T et du nombre d'onde adimensionné $k_x^{(\dots)}d/2\pi$ pour la première plaque (rugosité en créneaux).

Cette première expérience, purement qualitative, permet de mettre en évidence le couplage entre deux modes guidés dans une bande d'arrêt. Le modèle analytique présenté au paragraphe 2.1 ne permet pas de présenter les résultats théoriques correspondants car les propriétés géométriques de la plaque sont en dehors des limites de validité du modèle (rugosités trop profondes, voir paragraphe 1.4.3).

2.4.2 Coefficient de réflexion et de transmission en énergie

Après avoir mis en lumière par la première expérience (paragraphe 2.4.1) le couplage de deux modes guidés dans une bande d'arrêt, l'objectif de cette seconde expérience est de mettre en évidence quantitativement un couplage de modes. Pour cela, la mesure des coefficients de réflexion et de transmission en deux points distincts (de part et d'autre de la partie rugueuse de la plaque) est réalisée sur une large bande de fréquence.

La chaîne de mesure est représentée sur la figure 2.12. Le transducteur piézoélectrique d'entrée joue le rôle d'émetteur et de récepteur. Il transmet un burst monochromatique $s_e(t)$ composé de 5 périodes $T = 2\pi/\omega$ fenêtré par une fonction porte qui génère une onde ultrasonore plane [mode guidé plan ($\sigma = 2, m = 0$)] dans l'échantillon et il capte le signal $s_{ref}(t)$ de l'onde créée par couplage (contra-propagative). Le transducteur récepteur capte le signal $s_{tr}(t)$ de l'onde transmise à la sortie du réseau de rugosité (onde incidente atténuée).

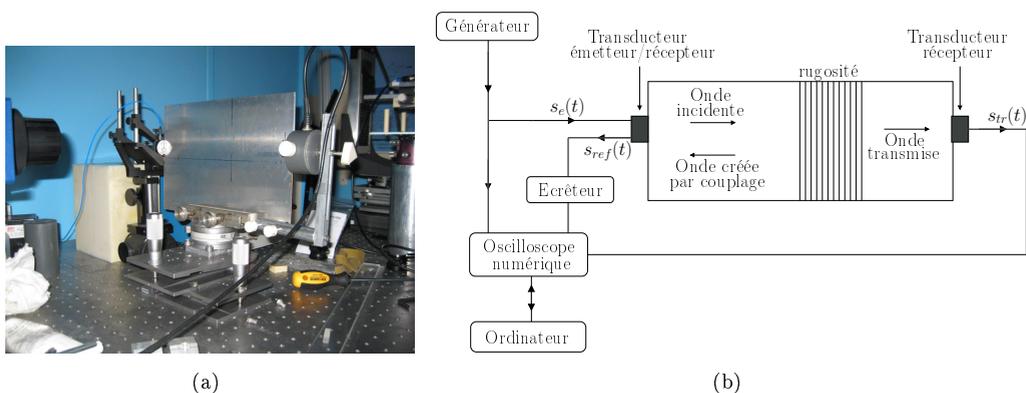


Figure 2.12 – (a) Photographie et (b) schéma du montage expérimental.

La courbe de dispersion du mode créé par couplage ($\alpha = 1, r = 0$) (trait plein), la courbe de dispersion du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) (tirets points) et la courbe de couplage de la relation (1.46) avec le mode incident (tirets) sont tracées sur la figure 2.13 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . La fréquence de la source acoustique étant choisie comprise entre les valeurs adimensionnées $fd/c_T = 0,26$ et $fd/c_T = 0,4$ [bande grisée sur la figure 2.13], c'est le couplage du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) avec lui-même qui est privilégié.

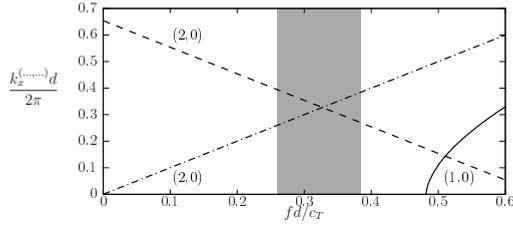


Figure 2.13 – Courbe de dispersion du modes créé par couplage (α, r) (trait plein), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbe de couplage donnée par l’expression (1.46) (tirets).

Deux exemples de signaux enregistrés par chaque transducteur sont représentés sur les figures 2.14 en fonction du temps t . Les signaux enregistrés à l’entrée de la plaque sont représentés sur les figures 2.14a et 2.14b et ceux enregistrés à la sortie de la plaque sont représentés sur les figures 2.14c et 2.14d. Les signaux des figures 2.14a et 2.14c sont obtenus pour une excitation à une fréquence $fd/c_T = 0,249$ (fréquence hors de la bande d’arrêt) et les signaux des figures 2.14b et 2.14d sont obtenus pour une fréquence $fd/c_T = 0,33$ (fréquence proche de la fréquence centrale de la bande d’arrêt). Sur la figure 2.14b apparaît le signal porté par l’onde créée par couplage, contrairement à la figure 2.14a. Les amplitudes des paquets d’ondes réfléchies sur les bords de la plaque sont plus grandes à la fréquence $fd/c_T = 0,33$ qu’à la fréquence $fd/c_T = 0,249$ car la fréquence centrale de la bande passante des deux transducteurs est $fd/c_T = 0,433$.

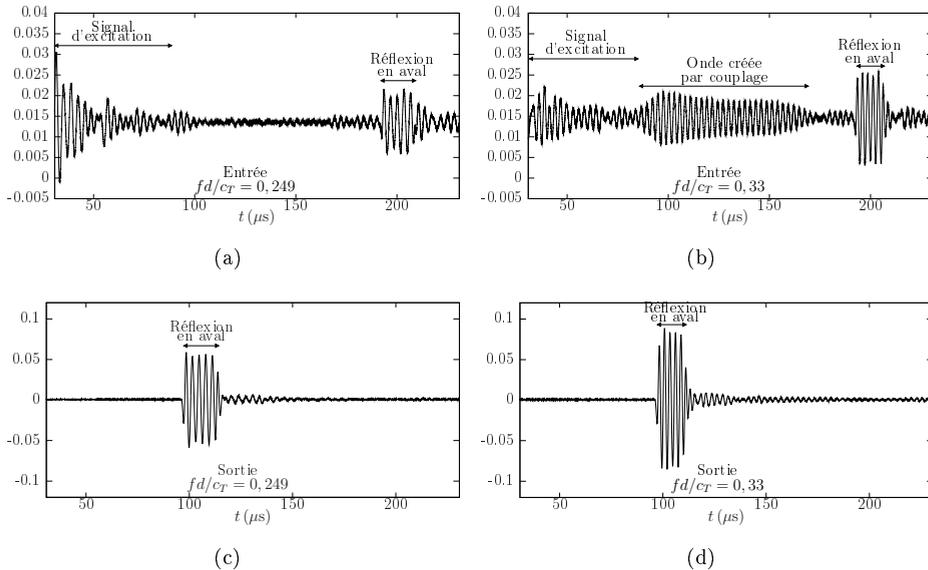


Figure 2.14 – (a) et (b) Signaux enregistrés par le transducteur émetteur/récepteur et (c) et (d) signaux enregistrés par le transducteur récepteur en fonction du temps t . La fréquence d’excitation des signaux des figures (a) et (c) est $fd/c_T = 0,249$ et celle des signaux des figures (b) et (d) $fd/c_T = 0,33$.

151 signaux (correspondant chacun à une fréquence adimensionnée comprise dans l'intervalle $f d/c_T \in [0, 26; 0, 4]$) moyennés sur 100 acquisitions sont enregistrés par chaque transducteur. Chaque signal est stocké sous la forme d'un vecteur, puis ces vecteurs sont concaténés en une matrice dont chaque ligne correspond à un signal temporel à une unique fréquence d'excitation. Les résultats sont représentés dans le plan (fréquence, temps) sur les figures 2.15a et 2.15c. A titre d'exemple, les signaux des figures 2.14a et 2.14b sont repérés sur la figure 2.15a respectivement par des tirets et des pointillés horizontaux (l'onde créée par couplage apparaît clairement autour de cette dernière ligne). De même, les signaux des figures 2.14c et 2.14d sont repérés sur la figure 2.15c respectivement par des tirets et des pointillés horizontaux. La même procédure est réalisée sur une plaque vierge (sans rugosité) et les matrices obtenues sont comparées avec celles obtenues pour l'échantillon rugueux (figure 2.15). La tache sur la figure 2.15a correspond aux signaux de l'onde créée par couplage.

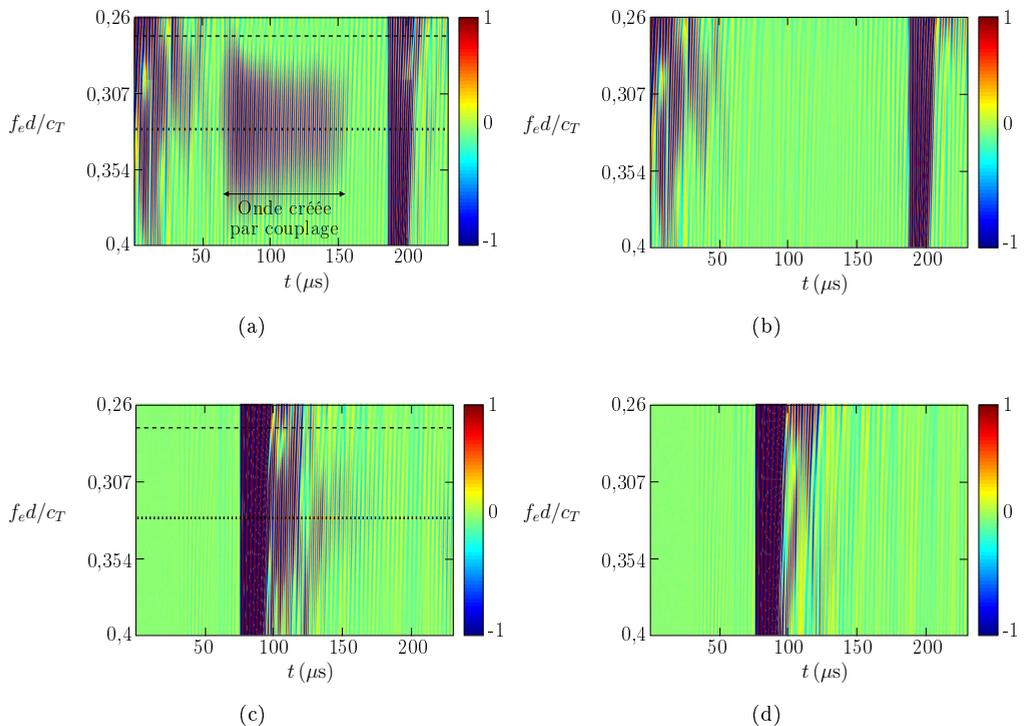


Figure 2.15 – (a) et (b) Signaux enregistrés par le transducteur émetteur/récepteur et (c) et (d) signaux enregistrés par le transducteur récepteur. Les signaux des figures (a) et (c) sont obtenus avec la plaque rugueuse et ceux des figures (b) et (d) avec la plaque vierge.

Pour chacune des quatre matrices de signaux dans le plan (f_e, t) des figures 2.15, une FFT temporelle est faite sur une partie de chaque ligne, c'est-à-dire sur une partie de chaque signal temporel. À partir de la nouvelle matrice (f_e, f) obtenue, pour chaque

fréquence d'excitation f_{e_j} (chaque ligne), la valeur de la FFT de la ligne f_{e_j} à la colonne $f = f_{e_j}$ est notée dans un vecteur \hat{A} qui correspond aux amplitudes complexes des FFT aux fréquences d'excitation. Chaque composante du vecteur \hat{A} est ensuite multipliée par son conjugué, conduisant à la création d'un vecteur $\hat{A}\hat{A}^*$ (figure 2.16). Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie résultent alors de la division des composantes des vecteurs $\hat{A}\hat{A}^*$ correspondant respectivement à la réflexion et à la transmission obtenus avec la plaque à surface rugueuse par les composantes des vecteurs $\hat{A}\hat{A}^*$ correspondant respectivement à la réflexion et à la transmission obtenus avec la plaque à surfaces lisses. La normalisation des résultats de la première par les résultats de la seconde permet de s'affranchir des effets de la bande passante des transducteurs sur les mesures, mais aussi des phénomènes d'atténuation de l'onde incidente tels ceux dus à l'ouverture du faisceau ultrasonore ou à la dissipation viscoélastique.

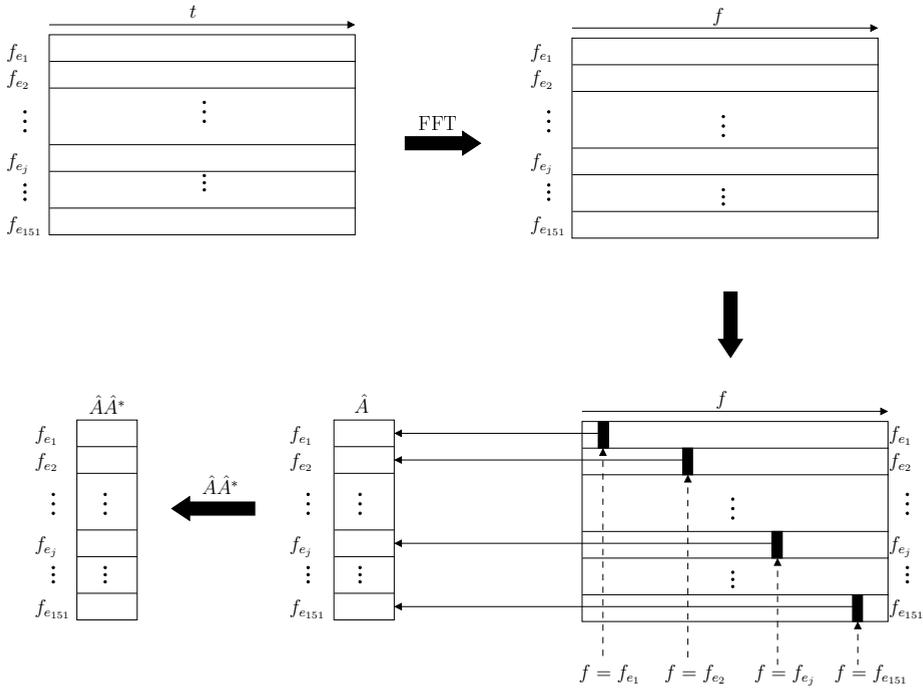


Figure 2.16 – Schéma d'obtention des coefficients de réflexion et de transmission expérimentaux.

2.4.3 Comparaison des résultats expérimentaux et théoriques

Dans ce paragraphe, les coefficients de réflexion et de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) obtenus de façon théorique (indice th) à partir des relations (2.37) et de façon expérimentale (indice exp) sont comparés. Les évolutions des coefficients de réflexion $R_{th}^{(\sigma=2, m=0)}$ et de transmission $T_{th}^{(\sigma=2, m=0)}$ théoriques du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) sont tracées en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T sur la figure 2.17. La fréquence correspondant au minimum du coefficient de transmission

et au maximum du coefficient de réflexion est très voisine de la fréquence centrale de la bande d'arrêt, ce qui confirme le couplage du mode incident avec lui-même (avec sa partie contra-propagative) sur le bord de la première zone de Brillouin (le bord étant considéré comme la fréquence centrale de la bande d'arrêt).

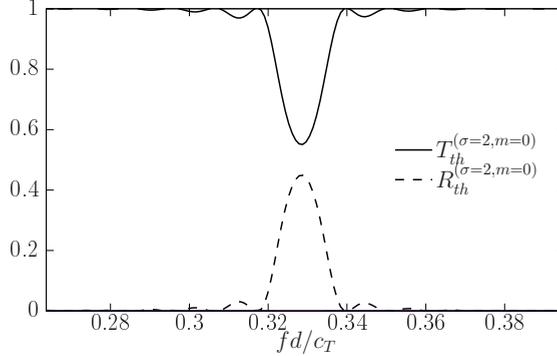


Figure 2.17 – Évolutions des coefficients de transmission (trait plein) et de réflexion (tirets) théoriques du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

Les coefficients de réflexion théorique $R_{th}^{(\sigma=2,m=0)}$ et expérimental $R_{exp}^{(\sigma=2,m=0)}$ du mode incident sont dans la suite normalisés à l'unité ; leurs évolutions en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T sont tracées sur la figure 2.18. La largeur du lobe principal (correspondant approximativement à la largeur de la bande d'arrêt) est sensiblement la même pour les deux résultats. De même, les fréquences centrales de la bande d'arrêt (fréquence centrale du lobe principal) sont également très voisines. Les faibles décalages sont certainement dus à une imperfection d'usinage car une modification de la périodicité spatiale de la rugosité a pour conséquence le décalage de la fréquence centrale de la bande d'arrêt. Les amplitudes du lobe secondaire à gauche du lobe principal sont également très voisines pour les deux résultats.

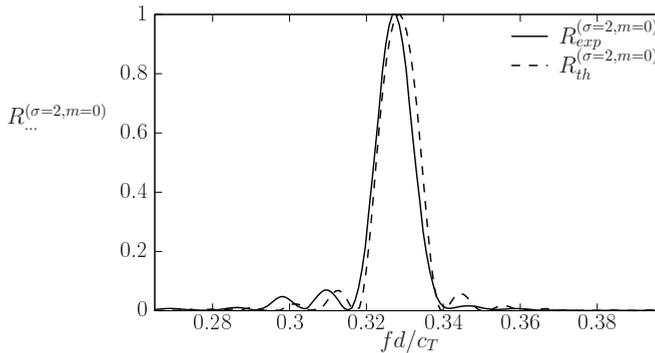


Figure 2.18 – Évolutions des coefficients de réflexion expérimental (trait plein) et théorique (tirets) du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

L'évolution du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) est tracée en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T sur la figure 2.19. Le couplage mentionné précédemment apparaît clairement, car le coefficient de transmission théorique présente une variation importante pour les fréquences proches de la bande d'arrêt. Toutefois, ce résultat ne permet pas d'être comparé quantitativement avec le résultat théorique associé, car l'effet de la bande passante mal maîtrisée des transducteurs n'a pas pu être corrigé. En effet, du fait que la fixation des transducteurs, par gels de couplage, n'est pas reproductible, la normalisation des résultats obtenus sur la plaque à surface rugueuse par ceux obtenus sur la plaque à surface lisse est entachée d'une incertitude qui peut expliquer ce résultat.

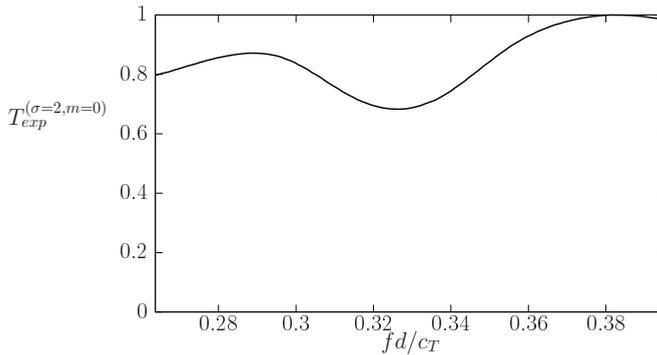


Figure 2.19 – Évolution du coefficient de transmission expérimental du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

2.5 Conclusion

Traiter de la diffusion des ondes SH sur les parois rugueuses d'une plaque simple par la méthode retenue au premier chapitre (pour la diffusion d'ondes guidées en fluide non dissipatif) n'était affaire que d'adaptation de variable. C'est la raison pour laquelle ce second chapitre avait pour objectif non seulement de confirmer l'acquis du premier chapitre en terme de méthode et de résultats sur le profil des ondes couplées, mais aussi de compléter ces propos par l'étude des coefficients de réflexion et de transmission (respectivement en amont et en aval de la rugosité) et d'en discuter les résultats en regard de résultats expérimentaux obtenus au LOMC. L'ensemble des résultats présentés ici (comme de certains autres résultats de simulation qui confirment ceux présentés) permet de conclure à l'intérêt de la méthode retenue pour traiter des problèmes de rugosité, en raison, de surcroît, des faibles temps de calcul qu'elle nécessite. Le fait de trouver la même largeur de bande d'arrêt de manières expérimentale et théorique s'avère prépondérant pour la caractérisation de la rugosité et, dans cette optique, l'influence des paramètres de la rugosité sur les coefficients de réflexion et de transmission nécessite d'être étudiée (c'est l'objet en particulier du chapitre qui suit).

Chapitre 3

ÉTUDE DU COUPLAGE DE MODES GUIDÉS

L'objet de ce chapitre est de poursuivre l'étude des mécanismes de transfert d'énergie entre modes guidés dans des plaques dont l'état de surface est irrégulier. Cette étude porte essentiellement sur les effets de rugosités périodiques exprimées sous forme de séries de Fourier (des profils de rugosité pseudo-aléatoires sont évoqués en fin du chapitre). Les amplitudes des modes guidés co- ou contra-propagatifs sont d'abord exprimés aux premiers ordres des approximations successives, sur la base du modèle IMI présenté aux chapitres 1 et 2. Une méthode basée sur la théorie des modes couplés est ensuite présentée comme alternative à la technique des approximations successives (dans le cas de rugosité périodique pour deux modes). Enfin, le lien entre la densité spectrale de puissance et les coefficients de réflexion et de transmission (en énergie) des modes guidés est établi.

3.1 Expressions analytiques approchées des amplitudes des modes pour une rugosité périodique

La surface z_2 (figure 2.1) est considérée parfaitement lisse. L'expression (2.19) de l'opérateur de surface prend alors la forme,

$$\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} \left\{ \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right\} = - \int_0^\ell \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') \psi^{(\sigma,m)}(z_1) \partial_{n_1} \psi^{(\alpha,r)}(z_1) g^{(\alpha,r)}(x, x') dx', \quad (3.1)$$

qui, compte tenu de l'expression de la fonction de Green à une dimension (2.15) et de l'expression de la dérivée normale (2.7), peut être mise sous la forme

$$\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} \left\{ \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right\} = - \int_0^\ell \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') \psi^{(\sigma,m)}(z_1) N_1^{-1} \left[\psi^{(\alpha,r)}(z_1) (\partial_{x'} h_1) \partial_{x'} \left(\frac{e^{-ik_x^{(\alpha,r)} |x-x'|}}{2ik_x^{(\alpha,r)}} \right) - \frac{e^{-ik_x^{(\alpha,r)} |x-x'|}}{2ik_x^{(\alpha,r)}} \partial_{z_1} \psi^{(\alpha,r)}(z_1) \right] dx'. \quad (3.2)$$

A noter qu'à la fréquence de coupure du mode (α, r) , cet opérateur $\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$ présente une singularité $(k_x^{(\alpha,r)} \rightarrow 0)$.

En ne retenant que l'approximation à l'ordre le plus bas des fonctions propres pour de faibles hauteurs de rugosité h_1 (annexe G),

$$\begin{cases} \psi^{(\sigma,m)}(z_1) \approx (-1)^{m+\sigma} \sqrt{\frac{2 - \delta_{\sigma 2} \delta_{m0}}{L_z}}, & (3.3a) \\ \partial_{z_1} \psi^{(\sigma,m)}(z_1) \approx (-1)^{m+\sigma+1} \sqrt{\frac{2 - \delta_{\sigma 2} \delta_{m0}}{L_z}} \left(k_z^{(\sigma,m)}\right)^2 h_1, & (3.3b) \end{cases}$$

et en séparant l'intégrale en deux parties suivant le signe de $(x - x')$, cet opérateur prend la forme approchée suivante

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} \left\{ \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right\} = & -\frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}}{ik_x^{(\alpha,r)}} \left\{ \int_0^x \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{ik_x^{(\alpha,r)}(x'-x)} \left[ik_x^{(\alpha,r)} \partial_{x'} h_1(x') + \left(k_z^{(\alpha,r)}\right)^2 h_1(x') \right] dx' \right. \\ & \left. + \int_x^\ell \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{-ik_x^{(\alpha,r)}(x'-x)} \left[-ik_x^{(\alpha,r)} \partial_{x'} h_1(x') + \left(k_z^{(\alpha,r)}\right)^2 h_1(x') \right] dx' \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où le coefficient $\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$ a pour expression,

$$\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} = (-1)^{m+r+\sigma+\alpha} \frac{\sqrt{(2 - \delta_{m0} \delta_{\sigma 2})(2 - \delta_{r0} \delta_{\alpha 2})}}{2L_z}. \quad (3.5)$$

Pour une rugosité périodique de période Λ et dont le profil peut être exprimé par la série de Fourier,

$$h_1(x') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{C}_n e^{i \frac{2n\pi}{\Lambda} x'}, \quad (3.6)$$

où le coefficient \hat{C}_n est exprimé par la relation,

$$\hat{C}_n = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda h_1(x) e^{-i \frac{2n\pi}{\Lambda} x} dx, \quad (3.7)$$

il vient :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} \left\{ \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right\} = & \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}}{k_x^{(\alpha,r)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{C}_n \left\{ n \hat{\eta}^{(\alpha,r)} e^{-ik_x^{(\alpha,r)} x} \int_0^x \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{i(k_x^{(\alpha,r)} + \frac{2n\pi}{\Lambda}) x'} dx' \right. \\ & \left. + n \hat{\zeta}^{(\alpha,r)} e^{ik_x^{(\alpha,r)} x} \int_x^\ell \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{i(-k_x^{(\alpha,r)} + \frac{2n\pi}{\Lambda}) x'} dx' \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où les coefficients

$$\begin{cases} n\hat{\eta}^{(\alpha,r)} = i \left[-k_x^{(\alpha,r)} \frac{2n\pi}{\Lambda} + \left(k_z^{(\alpha,r)} \right)^2 \right], \\ n\hat{\xi}^{(\alpha,r)} = i \left[k_x^{(\alpha,r)} \frac{2n\pi}{\Lambda} + \left(k_z^{(\alpha,r)} \right)^2 \right], \end{cases} \quad (3.9a)$$

$$(3.9b)$$

sont des coefficients de couplage [38, 72] qui dépendent de la fréquence de la source acoustique et de la forme de la rugosité.

À noter que l'opérateur $\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$ se présente sous la forme d'une transformée de Fourier des propriétés de la surface $z = z_1$ fenêtrée sur l'intervalle $[0, \ell]$ où la rugosité est présente; cette intégrale est scindée en deux intégrales de Fourier qui représentent respectivement les amplitudes (à un facteur près) des ondes co- et contra-propagatives.

Le report dans la relation (2.29) de l'expression (3.8) de l'opérateur $\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$ et de l'expression (G.7) de l'opérateur $B_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$, conduit à l'expression suivante, pour les corrections d'amplitude à l'ordre N ,

$$\begin{aligned} (N)\hat{A}^{(\alpha,r)}(x) &= \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}}{k_x^{(\alpha,r)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{C}_n \left\{ \right. \\ &\quad n\hat{\eta}^{(\alpha,r)} \left(\int_0^x (N-1)\hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{i(k_x^{(\alpha,r)} + \frac{2n\pi}{\Lambda})x'} dx' \right) e^{-ik_x^{(\alpha,r)}x} \\ &\quad + n\hat{\xi}^{(\alpha,r)} \left(\int_x^\ell (N-1)\hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{i(-k_x^{(\alpha,r)} + \frac{2n\pi}{\Lambda})x'} dx' \right) e^{ik_x^{(\alpha,r)}x} \\ &\quad \left. + 2k_x^{(\alpha,r)(N-1)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) e^{i\frac{2n\pi}{\Lambda}x} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A l'ordre $N = 0$, seule l'amplitude du mode incident [représenté dans la suite par le couple (σ, m)] n'est pas nulle [relation (2.33)]. A l'ordre $N = 1$, l'amplitude (3.10) de chaque mode (α, r) (créé par couplage) et la perturbation du mode incident $(\alpha, r) = (\sigma, m)$ sont données par

$$\begin{aligned} (1)\hat{A}^{(\alpha,r)}(x) &= \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}}{k_x^{(\alpha,r)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{C}_n \left\{ \right. \\ &\quad n\hat{\eta}^{(\alpha,r)} e^{-i(n\hat{\delta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} + k_x^{(\alpha,r)})x} x \operatorname{sinc} \left(n\hat{\delta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} x \right) \\ &\quad + n\hat{\xi}^{(\alpha,r)} e^{-in\hat{\varepsilon}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}\ell} e^{-i(n\hat{\varepsilon}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} - k_x^{(\alpha,r)})x} (\ell - x) \operatorname{sinc} \left[n\hat{\varepsilon}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} (\ell - x) \right] \\ &\quad \left. + 2k_x^{(\alpha,r)} e^{-i(k_x^{(\sigma,m)} - \frac{2n\pi}{\Lambda})x} \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où la fonction $\operatorname{sinc}(u)$ est telle que $\operatorname{sinc}(u) = \sin(u)/u$ (sinus cardinal) et où les coefficients

$$\begin{cases} n\hat{\delta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} = \frac{1}{2} \left[k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,r)} - \frac{2n\pi}{\Lambda} \right], \\ n\hat{\varepsilon}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} = \frac{1}{2} \left[k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,r)} - \frac{2n\pi}{\Lambda} \right], \end{cases} \quad (3.12a)$$

$$(3.12b)$$

sont appelés paramètres de désaccord [55, 72].

Si l'un de ces paramètres de désaccord est faible, en d'autres termes si la fréquence est telle que l'accord de phase est approximativement réalisé pour un mode (α, r) donné (mode co- ou contra-propagatif) et si, de surcroît, le coefficient \hat{C}_n de la série de Fourier de la rugosité est élevé, alors ce mode présente une amplitude dominante.

A noter que si la hauteur de rugosité est telle que les approximations (3.3) ne sont plus valables, les amplitudes des modes aux premiers ordres des perturbations peuvent être calculées analytiquement, non pas en développant en série de Fourier la fonction h_1 , mais le terme $\psi^{(\sigma, m)}(z_1) \partial_{n_1} \psi^{(\alpha, r)}(z_1)$ de la relation (3.1) [46].

3.2 Étude du sens de propagation des modes créés par couplage

Si la fréquence est telle qu'une seule relation d'accord de phase entre le mode incident et un mode créé par couplage est approximativement vérifiée (faible paramètre de désaccord) pour un certain harmonique n de la rugosité, alors l'amplitude du mode créé par couplage est très fortement influencée par cet harmonique de la rugosité. Deux types de conditions d'accord de phase associées aux paramètres de désaccord $n \hat{\delta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha, r)}$ et $n \hat{\varepsilon}_{(\sigma, m)}^{(\alpha, r)}$, donnés respectivement par les relations (3.12a) et (3.12b), sont considérés dans ce paragraphe : elles correspondent respectivement à des couplages co- et contra-directionnels. Pour chacune de ces deux relations, des approximations permettent de donner l'amplitude du mode créé par couplage à l'ordre $N = 1$ et d'obtenir sa vitesse de groupe, mais aussi de donner l'amplitude du mode incident à l'ordre $N = 2$.

3.2.1 Étude d'un couplage co-directionnel

Dans ce paragraphe, le couplage fort entre le mode incident (σ, m) , le mode (α_1, r_1) créé par couplage co-directionnel et l'harmonique n_1 de la rugosité est considéré. Le paramètre de désaccord associé à ce couplage est donné par la relation,

$$\frac{1}{2} \left[k_x^{(\sigma, m)} - k_x^{(\alpha_1, r_1)} - \frac{2n_1\pi}{\Lambda} \right] = n_1 \hat{\delta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)} = \delta_1 \quad (3.13)$$

(δ_1 étant la notation retenue dans ce paragraphe pour ne pas alourdir le formalisme). Tous les autres couplages étant supposés comme négligeables, l'amplitude (3.11) du mode (α_1, r_1) à l'ordre $N = 1$ a alors pour expression approchée (la contribution à l'ordre $N = 0$ étant nulle)

$$^{[1]}\hat{A}^{(\alpha_1, r_1)}(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)}}{k_x^{(\alpha_1, r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1, r_1)} \hat{C}_{n_1} e^{-i(\delta_1 + k_x^{(\alpha_1, r_1)})x} x \operatorname{sinc}(\delta_1 x). \quad (3.14)$$

Le report de l'expression (3.14) de l'amplitude du mode (α_1, r_1) dans l'expression (3.10) conduit à l'expression approchée de la correction d'ordre $N = 2$ de l'amplitude du mode

incident :

$${}^{(2)}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = -\frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\alpha_1,r_1)}} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\sigma,m)}} \frac{n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1,r_1)-n_1} \hat{\eta}^{(\sigma,m)}}{4\delta_1^2} \hat{C}_{n_1} \hat{C}_{-n_1} e^{-ik_x^{(\sigma,m)}x} [e^{2i\delta_1 x} - 1 - 2i\delta_1 x]. \quad (3.15)$$

En tenant compte de l'expression (2.27) et en considérant la correction d'amplitude du mode incident (σ, m) à l'ordre $N = 1$ comme négligeable devant les corrections d'ordre $N = 0$ et $N = 2$ (voir paragraphe 1.4.1), l'amplitude du mode incident (σ, m) à l'ordre $N = 2$ a pour expression,

$${}^{[2]}\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = e^{-ik_x^{(\sigma,m)}x} \left\{ 1 - \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\alpha_1,r_1)}} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\sigma,m)}} \frac{n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1,r_1)-n_1} \hat{\eta}^{(\sigma,m)}}{4\delta_1^2} \hat{C}_{n_1} \hat{C}_{-n_1} [e^{2i\delta_1 x} - 1 - 2i\delta_1 x] \right\}. \quad (3.16)$$

Le report de l'expression (3.14) de l'amplitude du mode créé par couplage à l'ordre $N = 1$ dans les expressions du flux d'énergie moyen et de la densité moyenne d'énergie donnés respectivement par les relations (2.36) et (F.19) conduit au rapport (relation (F.24) de l'annexe F)

$$\frac{\bar{\phi}^{(\alpha_1,r_1)}}{\bar{E}^{(\alpha_1,r_1)}} = c_g^{(\alpha_1,r_1)} + \frac{\delta_1}{2} \frac{c_T}{k_T}, \quad (3.17)$$

où $c_g^{(\alpha_1,r_1)} = k_x^{(\alpha_1,r_1)} \frac{c_T}{k_T}$ est la vitesse de groupe du mode (α_1, r_1) en l'absence de rugosité. Ainsi, lorsque le couplage est parfait, c'est-à-dire pour $\delta_1 = 0$, la vitesse de groupe du mode (α_1, r_1) est égale, en première approximation, à la vitesse de groupe du même mode du guide extérieur (guide lisse non rugueux).

Afin de vérifier si les expressions (3.14) et (3.16) sont de bonnes approximations respectivement des amplitudes des modes créé par couplage (α_1, r_1) et incident (σ, m) , les amplitudes des modes calculées "numériquement" (intégration par la méthode des trapèzes) sont comparées à celles calculées analytiquement [données par les relations (3.14) et (3.16)], pour un guide ayant un profil de rugosité sinusoidal sur une surface, l'autre surface étant parfaitement lisse (figure 3.1). Les paramètres adimensionnés utilisés sont consignés dans le tableau 3.1.

$fd/c_T = 1,607$	$d/\Lambda = 0,67$
$\Lambda/\lambda = 2,4$	$h/d = 0,005$
$k_T\ell = 271,3$	$\ell/\Lambda = 18$

Tableau 3.1 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats des figures 3.2, 3.3 et 3.4.

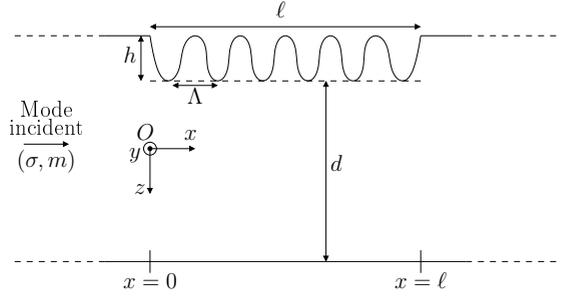


Figure 3.1 – Schéma du guide considéré.

Quatre modes propagatifs sont pris en compte dans les calculs "numériques", le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) et les modes créés par couplage, le mode symétrique ($\alpha = 2, r = 0$) et les modes antisymétriques ($\alpha = 1, r = 0$) et ($\alpha_1 = 1, r_1 = 1$). La courbe de dispersion du mode incident (tirets points) et celles des modes créés par couplage (traits pleins) sont tracées sur la figure 3.2 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Jusqu'à présent dans ce document, les courbes de couplage étaient tracées à partir de la relation (1.46) avec un signe "-" devant le nombre d'onde $k_x^{(\alpha,r)}$ correspondant à des couplages contra-directionnels. Ce paragraphe portant sur l'étude du couplage d'un mode incident avec un mode co-propagatif, les courbes de couplage doivent être tracées à partir de la relation (1.46), avec un signe "+" devant le nombre d'onde $k_x^{(\alpha,r)}$ (figure 3.2). La fréquence adimensionnée de la source ayant pour valeur $fd/c_T = 1,607$, le couplage de modes satisfaisant à la relation (3.13) est étudié pour le mode incident ($\sigma = 2, m = 1$), le mode créé par couplage ($\alpha_1 = 1, r_1 = 1$) et la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$).

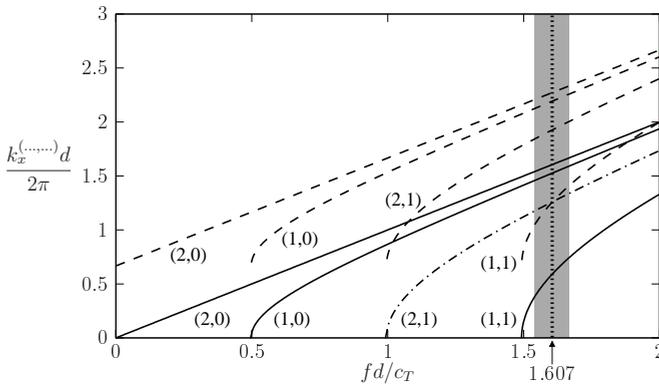


Figure 3.2 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) (tirets).

Les modules des amplitudes normalisées des modes incident ($\sigma = 2, m = 1$) et créé par couplage ($\alpha_1 = 1, r_1 = 1$) à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 1,607$ sont tracés

respectivement sur les figures 3.3a et 3.3b en fonction de la position adimensionnée $k_T x$. La croissance de l'amplitude du mode créé par couplage co-directionnel ($\alpha_1 = 1, r_1 = 1$) dans le sens des x croissants et la décroissance de l'amplitude du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) dans le sens des x croissants attendues sont retrouvées numériquement (traits pleins) et analytiquement (tirets). Les deux amplitudes calculées numériquement présentent des oscillations contrairement aux amplitudes calculées analytiquement, ces oscillations résultant des autres couplages (faibles) existant à cette fréquence. En effet, les amplitudes obtenues analytiquement sont calculées en négligeant les autres modes, tandis que quatre modes sont pris en compte dans les calculs numériques.

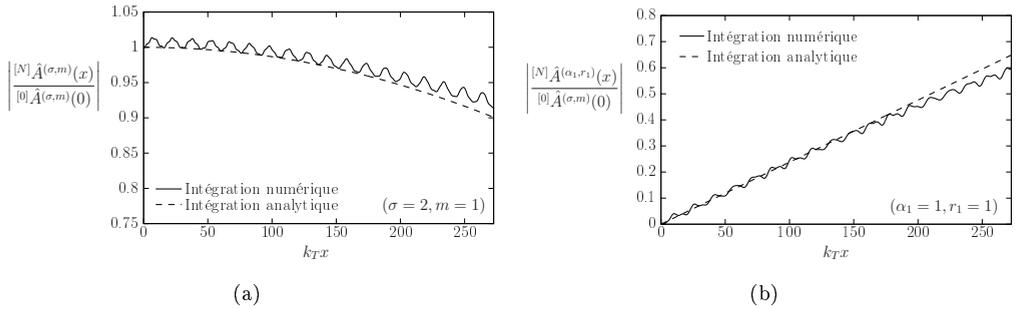


Figure 3.3 – Modules des amplitudes normalisées des modes : (a) incident ($\sigma = 2, m = 1$) et (b) créé par couplage co-directionnel ($\alpha_1 = 1, r_1 = 1$) en fonction de la position adimensionnée $k_T x$ à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 1,607$.

Les amplitudes des quatre modes sont calculés ici sur une bande de fréquence comprise entre les valeurs adimensionnées $fd/c_T \in [1,55; 1,7]$ (bande grisée de la figure 3.2). Les modules des amplitudes normalisées au point $x = \ell$ des modes incident ($\sigma = 2, m = 1$) et créé par couplage co-directionnel ($\alpha_1 = 1, r_1 = 1$) sont tracés respectivement sur les figures 3.4a et 3.4b en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Le sinus cardinal, mis en lumière par la relation (3.14), du résultat numérique de la figure 3.4b est déphasé par rapport à celui calculé analytiquement, ce déphasage devant être lié aux approximations faites pour calculer les relations (3.14) et (3.16).

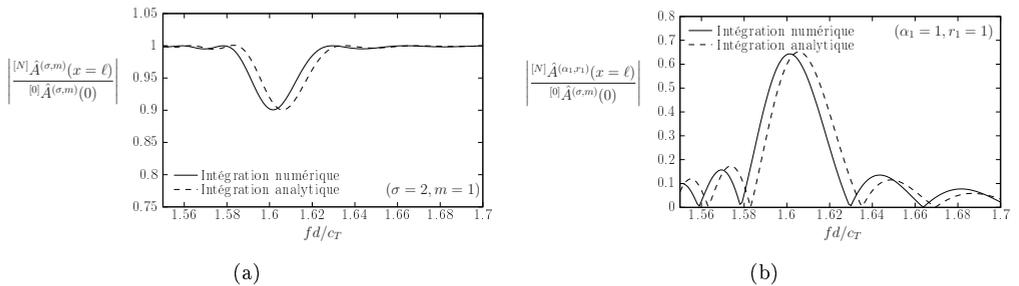


Figure 3.4 – Modules des amplitudes normalisées au point $x = \ell$ des modes : (a) incident ($\sigma = 2, m = 1$) et (b) créé par couplage co-directionnel ($\alpha_1 = 1, r_1 = 1$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

3.2.2 Étude d'un couplage contra-directionnel

Dans ce paragraphe, le couplage fort entre le mode incident (σ, m) , le mode (α_2, r_2) créé par couplage contra-propagatif et l'harmonique n_2 de la rugosité est considéré. Le paramètre de désaccord associé à ce couplage est donné par la relation,

$$\frac{1}{2} \left[k_x^{(\sigma, m)} + k_x^{(\alpha_2, r_2)} - \frac{2n_2\pi}{\Lambda} \right] = n_2 \hat{\epsilon}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)} = \epsilon_2 \quad (3.18)$$

(ϵ_2 est la notation retenue dans ce paragraphe pour ne pas alourdir le formalisme). Tous les autres couplages étant considérés comme négligeables, l'amplitude (3.11) du mode (α_2, r_2) à l'ordre $N = 1$ a alors pour expression approchée (la contribution à l'ordre $N = 0$ étant nulle)

$$^{[1]}\hat{A}^{(\alpha_2, r_2)}(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)}}{k_x^{(\alpha_2, r_2)}} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2)} \hat{C}_{n_2} e^{-i\epsilon_2(\ell+x)} e^{ik_x^{(\alpha_2, r_2)}x} (\ell-x) \text{sinc} [\epsilon_2(\ell-x)]. \quad (3.19)$$

Le report de l'expression (3.19) de l'amplitude du mode (α_2, r_2) dans l'expression (3.10) conduit à l'expression approchée de la correction d'ordre $N = 2$ de l'amplitude du mode incident :

$$^{(2)}\hat{A}^{(\sigma, m)}(x) = -\frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)}}{k_x^{(\alpha_2, r_2)}} \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_2, r_2)}^{(\sigma, m)}}{k_x^{(\sigma, m)}} \frac{n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2) - n_2} \hat{\eta}^{(\sigma, m)}}{4\epsilon_2^2} \hat{C}_{n_2} \hat{C}_{-n_2} e^{-ik_x^{(\sigma, m)}x} \left[2i\epsilon_2 x - e^{2i\epsilon_2(x-\ell)} + e^{-2i\epsilon_2\ell} \right]. \quad (3.20)$$

En tenant compte de l'expression (2.27) et en considérant la correction d'amplitude du mode incident (σ, m) à l'ordre $N = 1$ comme négligeable devant les corrections d'ordre $N = 0$ et $N = 2$ (voir paragraphe 1.4.1), l'amplitude du mode incident (σ, m) à l'ordre $N = 2$ peut être mise sous la forme,

$$^{[2]}\hat{A}^{(\sigma, m)}(x) = e^{-ik_x^{(\sigma, m)}x} \left\{ 1 - \frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)}}{k_x^{(\alpha_2, r_2)}} \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_2, r_2)}^{(\sigma, m)}}{k_x^{(\sigma, m)}} \frac{n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2) - n_2} \hat{\eta}^{(\sigma, m)}}{4\epsilon_2^2} \hat{C}_{n_2} \hat{C}_{-n_2} \left[2i\epsilon_2 x - e^{2i\epsilon_2(x-\ell)} + e^{-2i\epsilon_2\ell} \right] \right\}. \quad (3.21)$$

Le report de l'expression (3.19) de l'amplitude du mode créé par couplage à l'ordre $N = 1$ dans les expressions du flux d'énergie moyen et de la densité moyenne d'énergie totale donnés respectivement par les relations (2.36) et (F.19) conduit au rapport (relation (F.29) de l'annexe F)

$$\frac{\bar{\phi}^{(\alpha_2, r_2)}}{\bar{E}^{(\alpha_2, r_2)}} = -c_g^{(\alpha_2, r_2)} + \frac{\epsilon_2}{2} \frac{c_T}{k_T}. \quad (3.22)$$

Ainsi, en première approximation lorsque le couplage est parfait, c'est-à-dire pour $\epsilon_2 = 0$, la vitesse de groupe du mode (α_2, r_2) est l'opposé de la vitesse de groupe du même mode du guide extérieur (guide lisse non rugueux).

Afin de vérifier si les expressions (3.19) et (3.21) sont de bonnes approximations respectivement des amplitudes des modes créé par couplage (α_2, r_2) et incident (σ, m), les amplitudes des modes calculées "numériquement" sont comparées à celles calculées analytiquement [données par les relations (3.19) et (3.21)] pour un guide ayant une paroi lisse et une paroi rugueuse, le profil de rugosité étant une distribution régulière et périodique de trapèzes symétriques (figure 3.5). Les paramètres adimensionnés utilisés sont consignés dans le tableau 3.2.

$fd/c_T = 1,844$	$d/\Lambda = 1,67$
$\Lambda/\lambda = 1,1$	$h/d = 0.01$
$k_T \ell = 277,5$	$\ell/\Lambda = 40$

Tableau 3.2 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats des figures 3.6, 3.7 et 3.8.

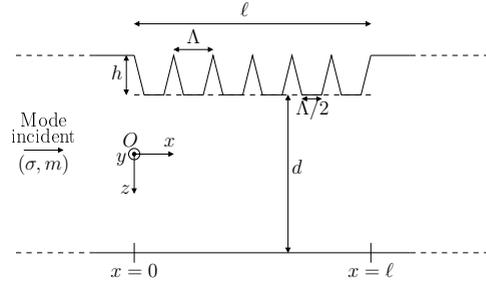


Figure 3.5 – Schéma du guide considéré.

Quatre modes sont pris en compte dans les calculs "numériques", le mode incident antisymétrique ($\sigma = 1, m = 0$) et les modes créés par couplage, les modes symétriques ($\alpha = 2, r = 0$) et ($\alpha_2 = 2, r_2 = 1$) et le mode antisymétrique ($\alpha = 1, r = 1$), ces modes étant tous des modes propagatifs (figure 3.6). La courbe de dispersion du mode incident (tirets points) et celles des modes créés par couplage (traits pleins) sont tracées sur la figure 3.6 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Sur la même figure, sont tracées les courbes de couplage pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$) (tirets) et celles pour le premier harmonique de la rugosité ($n = 2$) (pointillés). La fréquence adimensionnée de la source ayant pour valeur $fd/c_T = 1,844$, le couplage entre le mode incident ($\sigma = 1, m = 0$), le mode créé par couplage contra-directionnel ($\alpha_2 = 2, r_2 = 1$) et le premier harmonique de la rugosité ($n = 2$) est recherché.

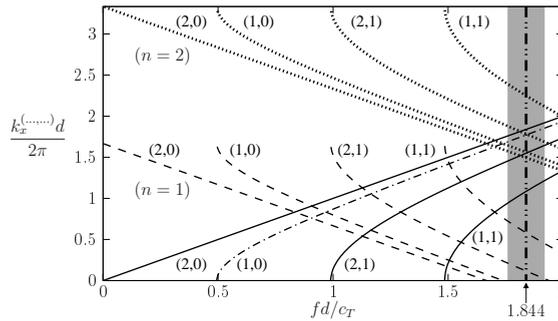


Figure 3.6 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points), courbes de couplage pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$) (tirets) et courbes de couplage pour le premier harmonique de la rugosité ($n = 2$) (pointillés).

Les modules des amplitudes normalisées des modes incident ($\sigma = 1, m = 0$) et créé par couplage ($\alpha_2 = 2, r_2 = 1$) à la fréquence $fd/c_T = 1,844$ sont tracés respectivement sur les figures 3.7a et 3.7b en fonction de la position adimensionnée $k_T x$. La croissance de l'amplitude du mode créé par couplage contra-directionnel ($\alpha_2 = 2, r_2 = 1$) dans le sens des x décroissants et la décroissance de l'amplitude du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) dans le sens des x croissants attendues sont retrouvées numériquement (traits pleins) et analytiquement (tirets). Ainsi, les couplages de modes pour les harmoniques de la rugosité sont similaires aux couplages pour la fréquence fondamentale de la rugosité [59]. De plus, le couplage de deux modes par une périodicité spatiale autre que la fréquence fondamentale laisse penser que chaque périodicité spatiale d'un profil de rugosité peut être déterminée par l'analyse des amplitudes des modes guidés. Les deux amplitudes calculées numériquement présentent des oscillations contrairement aux amplitudes calculées analytiquement, ces oscillations résultant des autres couplages existants. Les amplitudes obtenues analytiquement sont en effet calculées en négligeant les autres modes et les autres fréquences de la rugosité, tandis que quatre modes et un nombre important d'harmoniques de la rugosité sont pris en compte dans les calculs numériques.

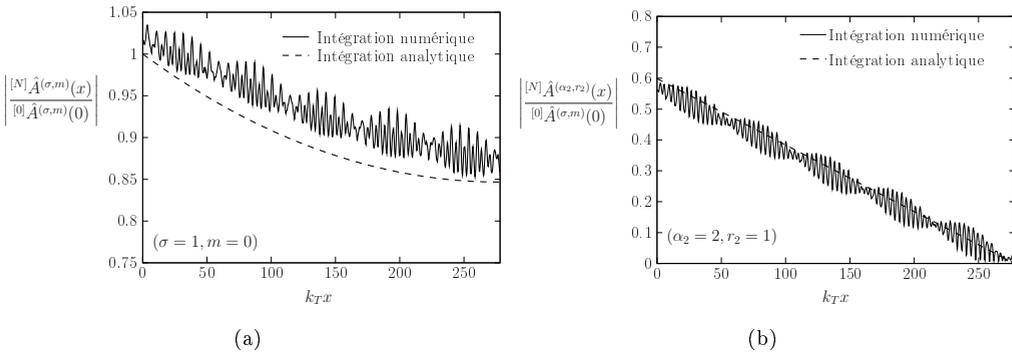


Figure 3.7 – Module des amplitudes normalisées des modes : (a) incident ($\sigma = 1, m = 0$) et (b) créé par couplage contra-directionnel ($\alpha_2 = 2, r_2 = 1$) en fonction de la position adimensionnée $k_T x$ à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 1,844$.

Les amplitudes des quatre modes sont calculées ici sur une bande de fréquence comprise entre les valeurs adimensionnées $fd/c_T = 1,77$ et $fd/c_T = 1,92$ (bande grisée de la figure 3.6). Les modules des amplitudes normalisées des modes incident ($\sigma = 1, m = 0$) au point $x = \ell$ et créé par couplage contra-directionnel ($\alpha_2 = 2, r_2 = 1$) au point $x = 0$ sont tracés respectivement sur les figures 3.8a et 3.8b en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Le sinus cardinal de la relation (3.19) est retrouvé sur le résultat numérique, avec un déphasage du même ordre de grandeur que celui observé pour le couplage co-directionnel (voir figure 3.8b).

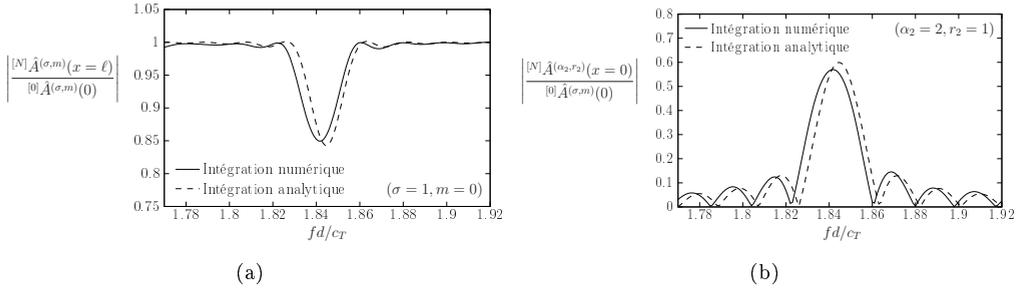


Figure 3.8 – Module des amplitudes normalisées des : (a) incident ($\sigma = 1, m = 0$) au point $x = \ell$ et (b) créé par couplage contra-directionnel ($\alpha_2 = 2, r_2 = 1$) au point $x = 0$ en fonction de la fréquence adimensionnée $f d/c_T$.

3.3 Théorie des modes couplés

Le modèle présenté dans les chapitres 1 et 2 ne converge pas dans certaines configurations où un couplage fort a lieu entre deux modes guidés (voir paragraphe 1.4.2). L'utilisation d'une technique d'approximations successives nécessite en effet l'hypothèse selon laquelle les effets dus à la rugosité (intégrale de contour dans l'opérateur $\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$) sont faibles en comparaison avec le terme source représenté par l'intégrale de volume. Mais dans le cas précis où un couplage fort entre un mode incident et un mode créé par couplage a lieu, cette hypothèse n'est plus respectée. Le paragraphe précédent a en effet permis de mettre en lumière que lorsqu'un seul couplage fort a lieu entre un mode incident et un mode créé par couplage, alors ces deux modes prédominent largement. Il est possible, sous réserve de certaines approximations [les mêmes qu'au paragraphe 3.1 données par le système (3.3)], de s'affranchir de la technique des approximations successives : une méthode alternative, basée sur la théorie des modes couplés [38, 72], peut s'y substituer.

Cette méthode présentée ci-dessous repose au départ sur l'expression (2.20) exprimée pour deux modes fortement couplés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \hat{F}^{(\sigma,m)}(x) + \hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right\} + \hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right\} \\ \quad + B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)} \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) + B_{(\sigma,m)}^{(\sigma,m)} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x), \end{array} \right. \quad (3.23a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) = \hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} \left\{ \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right\} + \hat{H}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)} \left\{ \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right\} \\ \quad + B_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) + B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)} \hat{A}^{(\alpha,r)}(x), \end{array} \right. \quad (3.23b)$$

où les couples (σ, m) et (α, r) représentent respectivement le mode incident et le mode couplé.

3.3.1 Couplage co-directionnel

Les caractéristiques physiques de l'étude sont ici supposées telles que le couplage fort entre le mode incident (σ, m) et le mode créé par couplage (α_1, r_1) se propageant dans

le sens des x croissants est favorisé par l'harmonique n_1 de la rugosité (tous les autres couplages sont considérés comme négligeables). Le paramètre de désaccord δ_1 associé à ce couplage est donné par la relation (3.13). Le report de l'expression (2.33) de l'opérateur $\hat{F}^{(\sigma,m)}$ et de l'expression (3.8) de l'opérateur $\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$ dans le système (3.23) conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = e^{-ik_x^{(\sigma,m)}x} \\ \left[1 + \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_1,r_1)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_1 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \hat{C}_{-n_1} \int_0^x \hat{A}^{(\alpha_1,r_1)}(x') e^{i(k_x^{(\sigma,m)} - \frac{2n_1\pi}{\Lambda})x'} dx' \right], \quad (3.24a) \\ \hat{A}^{(\alpha_1,r_1)}(x) = e^{-ik_x^{(\alpha_1,r_1)}x} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\alpha_1,r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1,r_1)} \hat{C}_{n_1} \\ \int_0^x \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{i(k_x^{(\alpha_1,r_1)} + \frac{2n_1\pi}{\Lambda})x'} dx'. \quad (3.24b) \end{array} \right.$$

La dérivée de chaque équation par rapport à la variable x permet d'écrire, compte tenu de l'expression (3.13),

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{ik_x^{(\sigma,m)}x} \left[\partial_x + ik_x^{(\sigma,m)} \right] \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \\ \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_1,r_1)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_1 \hat{\eta}_1^{(\sigma,m)} \hat{C}_{-n_1} \hat{A}^{(\alpha_1,r_1)}(x) e^{i(2\delta_1 + k_x^{(\alpha_1,r_1)})x}, \quad (3.25a) \\ e^{ik_x^{(\alpha_1,r_1)}x} \left[\partial_x + ik_x^{(\alpha_1,r_1)} \right] \hat{A}^{(\alpha_1,r_1)}(x) = \\ \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\alpha_1,r_1)}} n_1 \hat{\eta}_1^{(\alpha_1,r_1)} \hat{C}_{n_1} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) e^{-i(2\delta_1 - k_x^{(\sigma,m)})x}. \quad (3.25b) \end{array} \right.$$

En écrivant ces amplitudes sous la forme d'une onde qui se propage vers les x croissants, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \hat{S}_i(x) e^{-i(k_x^{(\sigma,m)} - \delta_1)x}, \quad (3.26a) \\ \hat{A}^{(\alpha_1,r_1)}(x) = \hat{S}_d(x) e^{-i(k_x^{(\alpha_1,r_1)} + \delta_1)x}, \quad (3.26b) \end{array} \right.$$

le coefficient $\hat{S}_i(0)$ représente l'amplitude du mode incident en $x = 0$ qui est choisi égale à l'unité [$\hat{S}_i(0) = 1$] et le coefficient $\hat{S}_d(0)$ représente l'amplitude du mode créé par couplage en $x = 0$, à savoir ici $\hat{S}_d(0) = 0$.

Le système d'équation (3.25) se ramène alors au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x \hat{S}_i(x) = -i\delta_1 \hat{S}_i(x) + \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_1,r_1)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_1 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \hat{C}_{-n_1} \hat{S}_d(x), \quad (3.27a) \\ \partial_x \hat{S}_d(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\alpha_1,r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1,r_1)} \hat{C}_{n_1} \hat{S}_i(x) + i\delta_1 \hat{S}_d(x), \quad (3.27b) \end{array} \right.$$

dont les solutions satisfaisant à $\hat{S}_i(0) = 1$ et $\hat{S}_d(0) = 0$ s'écrivent (la vérification est immédiate) (annexe H) :

$$\begin{cases} \hat{S}_i(x) = \cos(\gamma_1 x) - i\delta_1 \frac{\sin(\gamma_1 x)}{\gamma_1}, \\ \hat{S}_d(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\sigma,m)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1,r_1)} \hat{C}_{n_1} \frac{\sin(\gamma_1 x)}{\gamma_1}, \end{cases} \quad (3.28a)$$

$$\quad (3.28b)$$

avec

$$\gamma_1^2 = \delta_1^2 - \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\sigma,m)}} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_1 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1,r_1)} \hat{C}_{n_1} \hat{C}_{-n_1}. \quad (3.29)$$

3.3.2 Couplage contra-directionnel

Les caractéristiques physiques de l'étude sont ici supposées telles que le couplage fort entre le mode incident (σ, m) et le mode créé par couplage (α_2, r_2) se propageant dans le sens des x décroissants est favorisé par l'harmonique n_2 de la rugosité (tous les autres couplages sont considérés comme négligeables). Le paramètre de désaccord ϵ_2 associé à ce couplage est donné par la relation (3.18). Le report de l'expression (2.33) de l'opérateur $\hat{F}^{(\sigma,m)}$ et de l'expression (3.8) de l'opérateur $\hat{H}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$ dans le système (3.23) conduit au système

$$\begin{cases} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = e^{-ik_x^{(\sigma,m)}x} \\ \left[1 + \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_2,r_2)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_2 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \hat{C}_{-n_2} \int_0^x \hat{A}^{(\alpha_2,r_2)}(x') e^{i(k_x^{(\sigma,m)} - \frac{2n_2\pi}{\lambda})x'} dx' \right], \\ \hat{A}^{(\alpha_2,r_2)}(x) = e^{ik_x^{(\alpha_2,r_2)}x} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_2,r_2)}}{k_x^{(\alpha_2,r_2)}} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \hat{C}_{n_2} \\ \int_x^\ell \hat{A}^{(\sigma,m)}(x') e^{-i(k_x^{(\alpha_2,r_2)} - \frac{2n_2\pi}{\lambda})x'} dx'. \end{cases} \quad (3.30a)$$

$$\quad (3.30b)$$

La dérivée de chaque équation par rapport à la variable x permet d'écrire, compte tenu de l'expression (3.18),

$$\begin{cases} e^{ik_x^{(\sigma,m)}x} \left[\partial_x + ik_x^{(\sigma,m)} \right] \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \\ \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_2,r_2)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_2 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \hat{C}_{-n_2} \hat{A}^{(\alpha_2,r_2)}(x) e^{i(2\epsilon_2 - k_x^{(\alpha_2,r_2)})x}, \\ e^{-ik_x^{(\alpha_2,r_2)}x} \left[\partial_x - ik_x^{(\alpha_2,r_2)} \right] \hat{A}^{(\alpha_2,r_2)}(x) = \\ - \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_2,r_2)}}{k_x^{(\alpha_2,r_2)}} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \hat{C}_{n_2} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) e^{i(-2\epsilon_2 - k_x^{(\sigma,m)})x}. \end{cases} \quad (3.31a)$$

$$\quad (3.31b)$$

En écrivant l'amplitude du mode incident (σ, m) sous la forme d'une onde qui se propage vers les x croissants et celle du mode créé par couplage (α_2, r_2) sous la forme d'une onde

qui se propage vers les x décroissants, à savoir

$$\begin{cases} \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = \hat{S}_i(x) e^{i(\epsilon_2 - k_x^{(\sigma,m)})x}, \\ \hat{A}^{(\alpha_2,r_2)}(x) = \hat{S}_d(x) e^{-i(\epsilon_2 - k_x^{(\alpha_2,r_2)})x}, \end{cases} \quad (3.32a)$$

$$\quad (3.32b)$$

le coefficient $\hat{S}_i(0)$ représente l'amplitude du mode incident en $x = 0$ qui est choisi égale à l'unité [$\hat{S}_i(0) = 1$] et le coefficient $\hat{S}_d(\ell)$ représente l'amplitude du mode créé par couplage en $x = \ell$, à savoir ici $\hat{S}_d(\ell) = 0$.

Le système d'équation (3.31a) se ramène alors au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_x \hat{S}_i(x) = -i\epsilon_2 \hat{S}_i(x) + \frac{\hat{\beta}^{(\sigma,m)}_{(\alpha_2,r_2)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_2 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \hat{C}_{-n_2} \hat{S}_d(x), \\ \partial_x \hat{S}_d(x) = -\frac{\hat{\beta}^{(\alpha_2,r_2)}_{(\sigma,m)}}{k_x^{(\alpha_2,r_2)}} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \hat{C}_{n_2} \hat{S}_i(x) + i\epsilon_2 \hat{S}_d(x), \end{cases} \quad (3.33a)$$

$$\quad (3.33b)$$

dont les solutions satisfaisant à $\hat{S}_i(0) = 1$ et $\hat{S}_d(\ell) = 0$ s'écrivent (annexe H) :

$$\begin{cases} \hat{S}_i(x) = \frac{\gamma_2 \cos[\gamma_2(\ell - x)] + i\epsilon_2 \sin[\gamma_2(\ell - x)]}{\gamma_2 \cos(\gamma_2 \ell) + i\epsilon_2 \sin(\gamma_2 \ell)}, \\ \hat{S}_d(x) = \frac{\hat{\beta}^{(\alpha_2,r_2)}_{(\sigma,m)} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \hat{C}_{n_2} \sin[\gamma_2(\ell - x)]}{k_x^{(\alpha_2,r_2)} [\gamma_2 \cos(\gamma_2 \ell) + i\epsilon_2 \sin(\gamma_2 \ell)]}, \end{cases} \quad (3.34a)$$

$$\quad (3.34b)$$

avec

$$\gamma_2^2 = \epsilon_2^2 + \frac{\hat{\beta}^{(\sigma,m)}_{(\alpha_2,r_2)}}{k_x^{(\sigma,m)}} - n_2 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \frac{\hat{\beta}^{(\alpha_2,r_2)}_{(\sigma,m)}}{k_x^{(\alpha_2,r_2)}} - n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \hat{C}_{n_2} \hat{C}_{-n_2}. \quad (3.35)$$

3.3.3 Exemple de résultat

La comparaison des deux formes de solution de l'équation (2.20) (approximations successives et théorie des modes couplés) est effectuée pour une plaque ayant une paroi lisse et une paroi rugueuse dont le profil de rugosité est une distribution régulière de trapèzes (dents de scie inversées) de hauteur h et de périodicité spatiale Λ (figure 3.9). Les paramètres adimensionnés utilisés sont consignés dans le tableau 3.3.

$d/\Lambda = 1,67$
$h/d = 0,01$
$\ell/\Lambda = 40$

Tableau 3.3 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats des figures 3.10, 3.11 et 3.12.

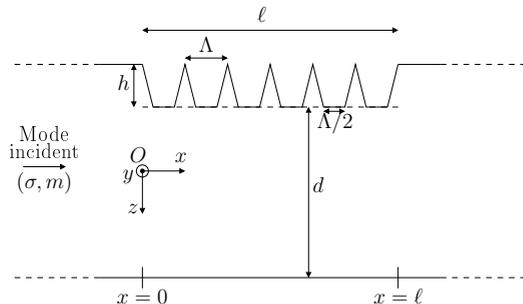


Figure 3.9 – Schéma du guide considéré.

Quatre modes sont pris en compte dans les calculs numériques (approximations successives), le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) et les modes créés par couplage, le mode symétrique ($\alpha = 2, r = 0$) et les modes antisymétriques ($\alpha = 1, r = 0$) et ($\alpha = 1, r = 1$), ces modes étant tous des modes propagatifs à l'exception du mode ($\alpha = 1, r = 1$) qui est évanescent (figure 3.10).

La courbe de dispersion du mode incident (tirets points), les courbes de dispersion des modes créés par couplage (traits pleins) et les courbes de couplage contra-directionnel [équation (1.46)] pour la fréquence fondamentale de la rugosité (tirets) sont tracées sur la figure 3.10 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . La fréquence de la source étant définie dans l'intervalle $fd/c_T \in [1, 2; 1, 35]$ (zone grisée), le couplage contra-directionnel du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) avec lui-même pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$) se trouve privilégiée.

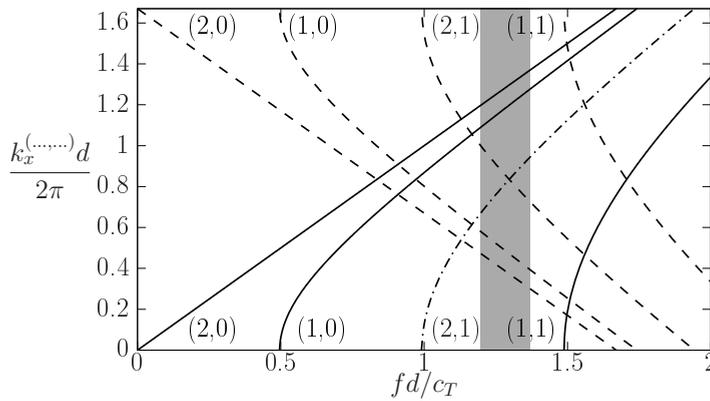


Figure 3.10 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) (tirets).

Le coefficient de réflexion en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = 0$ et le coefficient de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = \ell$ [donnés respectivement par les expressions (2.37a) et (2.37b)] sont tracés respectivement sur les figures 3.11a et 3.11b en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Les résultats sont obtenus de façon numérique par les approximations successives (traits pleins) et de façon analytique par la théorie des modes couplés (tirets). Les deux amplitudes calculées par la théorie des modes couplés ont des formes proches de sinus cardinaux. Le décalage fréquentiel des courbes est du même ordre de grandeur que celui observé au paragraphe 3.2 (figures 3.8). Par contre, les largeurs du lobe principal et des lobes secondaires sont approximativement les mêmes entre les résultats obtenus par approximations successives et ceux obtenus par la théorie des modes couplés.

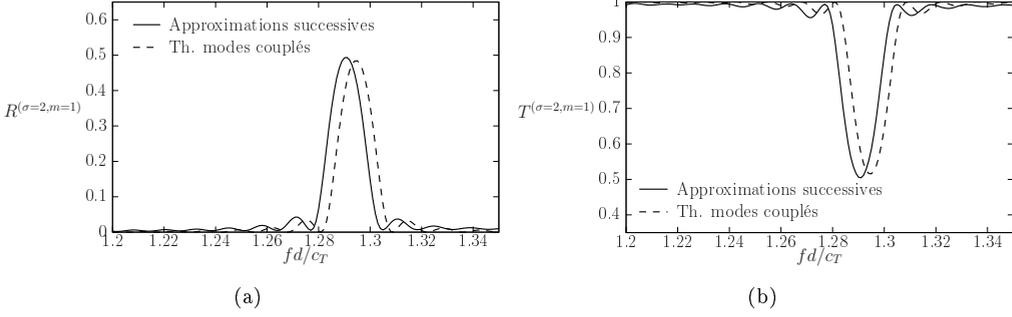


Figure 3.11 – Evolution des coefficients (a) de réflexion en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = 0$ et (b) de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = \ell$ en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Les résultats obtenus par les approximations successives sont en traits pleins et les résultats obtenus par la théorie des modes couplés sont représentés par des tirets.

Du fait que la technique des approximations successives ne converge plus lorsque le nombre de motifs constituant le profil est trop élevé, lorsqu'un couplage fort entre deux modes guidés a lieu (voir paragraphe 1.4.2), c'est l'objectif du travail présenté ici que d'observer un couplage pour une longueur de rugosité importante en faisant usage de la théorie des modes couplés. Le guide étudié précédemment est à nouveau considéré, mais ici pour une longueur de rugosité telle que $\ell/\Lambda = 100$ (nombre de motifs).

Les évolutions des coefficients de réflexion en énergie au point $x = 0$ et de transmission en énergie au point $x = \ell$ du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) sont tracées respectivement sur les figures 3.12a et 3.12b en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Pour les fréquences situées dans la bande d'arrêt, le coefficient de réflexion du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) est égal à l'unité et le coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) est nul, ce qui implique que toute l'énergie apportée dans le guide par le mode incident a été rétro diffusée.

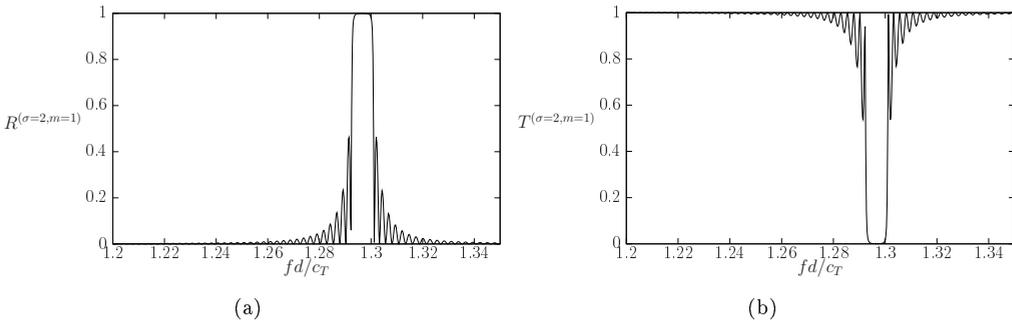


Figure 3.12 – Évolutions des coefficients (a) de réflexion en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = 0$ et (b) de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = \ell$ en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

3.4 Influence des paramètres géométriques du guide d'onde sur le couplage de modes

Les transferts d'énergie entre modes induits par la rugosité dépendent de la hauteur, de la forme et de la longueur de rugosité. Le développement des fonctions définissant les rugosités sur des séries de Fourier fait apparaître, dans le calcul des amplitudes des modes aux premiers ordres des perturbations, les coefficients de couplage ${}^n\hat{\xi}^{(\alpha,r)}$ et ${}^n\hat{\eta}^{(\alpha,r)}$ (3.9) qui tiennent compte de plusieurs paramètres acoustiques et géométriques définissant les guides d'onde. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'influence de certains paramètres apparaissant dans ces deux coefficients sur les amplitudes des modes. Dans ce paragraphe, les amplitudes des modes sont calculées numériquement (par approximations successives) jusqu'à convergence.

3.4.1 Influence de la hauteur de rugosité sur le couplage de modes

Afin d'observer l'influence de la hauteur de rugosité sur les amplitudes des modes, plusieurs guides d'onde ayant la même périodicité spatiale et la même forme de rugosité, mais des hauteurs de rugosité différentes sont étudiés. La géométrie considérée est une plaque ayant une paroi lisse et une paroi rugueuse, le profil de rugosité étant une distribution régulière et périodique de dents de scie symétriques (triangles isocèles) de hauteur h et de périodicité spatiale Λ (figure 3.13). Les paramètres adimensionnés utilisés sont consignés dans le tableau 3.4.

$d/\Lambda = 2,5$
$h/d \in [0; 0,03]$
$\ell/\Lambda = 50$

Tableau 3.4 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats des figures 3.14, 3.14 et 3.14.

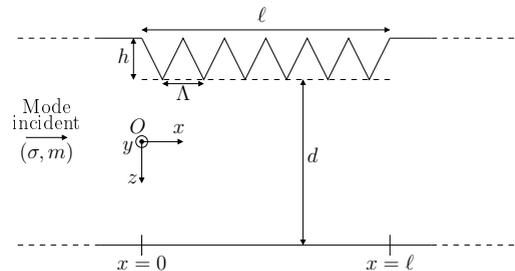


Figure 3.13 – Schéma du guide considéré.

Quatre modes sont pris en compte dans les calculs numériques, le mode incident antisymétrique ($\sigma = 1, m = 0$) et les modes créés par couplage symétriques ($\alpha = 2, r = 0$) et ($\alpha = 2, r = 1$) et antisymétrique ($\alpha = 1, r = 1$), ce dernier étant le seul mode évanescent (figure 3.14). La courbe de dispersion du mode incident (tirets points), les courbes de dispersion des modes créés par couplage (traits pleins) et les courbes de couplage pour la fréquence fondamentale de la rugosité sont tracées sur la figure 3.14 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . La fréquence de la source étant choisie dans l'intervalle $fd/c_T \in [1, 2; 1, 35]$ (bande grisée), le couplage contra-directionnel du

mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) avec le mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) se trouve favorisé pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$).

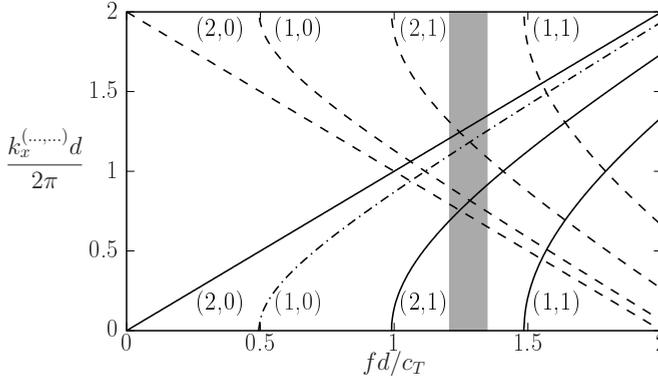


Figure 3.14 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) (tirets).

Les évolutions du coefficient de réflexion en énergie du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) au point $x = 0$ et du coefficient de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) au point $x = \ell$ sont tracées sur la figure 3.15a en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T pour les hauteurs de rugosités adimensionnées $h/d = 0,01$ (traits pleins), $h/d = 0,02$ (tirets) et $h/d = 0,03$ (pointillés). Comme prévu, l'énergie échangée entre le mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) et le mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) augmente avec la hauteur de rugosité [60, 64]. La largeur du lobe principal du sinus cardinal ne varie pas ou peu. La fréquence centrale de la bande d'arrêt (fréquence à laquelle le sinus cardinal atteint sa valeur maximale) varie légèrement en fonction de la hauteur de rugosité. Ceci peut être vérifié à partir de l'équation (1.46), dans laquelle intervient le rapport d/L_z qui reste très proche de l'unité dans les conditions de cette étude. Les nombres d'ondes des modes guidés dépendant de l'épaisseur du guide, toute variation de la hauteur de rugosité (donc de l'épaisseur du guide) a pour conséquence une variation des nombres d'ondes des modes guidés, ce qui traduit ces décalages fréquentielles des couplages.

Les évolutions du maximum du coefficient de réflexion du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) et du minimum du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) sont tracées sur la figure 3.15b en fonction de la hauteur adimensionnée h/d . A partir de la valeur $h/d = 0,01$, les maxima des coefficients de réflexion et les minima du coefficient de transmission varient à peu près linéairement avec la hauteur de rugosité [60]. La hauteur de rugosité apparaît dans les expressions des valeurs propres $k_z^{(\sigma, m)}$ (2.11), dans les expressions des nombres d'ondes $k_x^{(\sigma, m)}$ (2.16) et dans l'expression des coefficients \hat{C}_n (3.7) du développement en série de Fourier des fonctions h_1 définissant les profils de rugosité. Si de faibles variations de la hauteur de rugosité n'ont pas d'influence importante sur les valeurs propres $k_z^{(\sigma, m)}$ et sur les nombres d'ondes $k_x^{(\sigma, m)}$, les coefficients \hat{C}_n varient quant à eux linéairement avec la hauteur de rugosité. De plus, aux premiers ordres des

approximations successives (voir paragraphe 3.2.1 et 3.2.2), les amplitudes des modes guidés dépendent linéairement des coefficients \hat{C}_n , donc linéairement de la hauteur de rugosité.

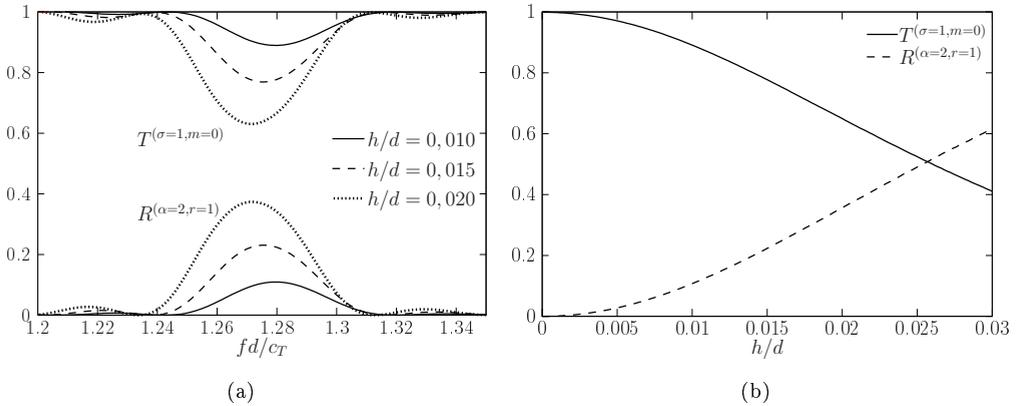


Figure 3.15 – (a) Évolutions des coefficients de réflexion du mode ($\alpha = 2, r = 1$) et de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T pour $h/d = 0,01$ (trait plein), $h/d = 0,02$ (tirets) et $h/d = 0,03$ (pointillés). (b) Évolutions des maxima du coefficient de réflexion du mode ($\alpha = 2, r = 1$) et des minima du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) en fonction de la hauteur adimensionnée h/d .

3.4.2 Influence de la longueur de rugosité sur le couplage de modes

Le guide étudié au paragraphe 3.4.1 est à nouveau considéré ici, mais pour une hauteur de rugosité constante $h/d = 0,025$ et pour différentes longueurs de rugosité, comprises dans l'intervalle $\ell/\Lambda \in [0; 65]$. Les évolutions du coefficient de réflexion en énergie du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) et du coefficient de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) sont tracées sur la figure 3.16a en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T pour les longueurs de rugosité adimensionnées $\ell/\Lambda = 15$ (traits pleins), $\ell/\Lambda = 30$ (tirets) et $\ell/\Lambda = 45$ (pointillés). L'énergie échangée entre le mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) et le mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) augmente avec la longueur de rugosité [60, 81]. La largeur du lobe principal du sinus cardinal varie en fonction de la longueur de rugosité; comme attendu, la fréquence centrale de la bande d'arrêt ne varie pas en fonction de la longueur de rugosité.

Les évolutions des maxima du coefficient de réflexion du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) et des minima du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) sont tracées sur la figure 3.16b en fonction du nombre de motifs ℓ/Λ constituant le profil. Pour les longueurs de rugosité supérieures à 20 motifs, l'évolution du coefficient de réflexion du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) et du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) varie à peu près linéairement [60, 81]. Ces variations linéaires viennent du fait que les amplitudes des modes créés par couplage

à l'ordre $N = 1$, données par les expressions (3.14) pour le couplage co-directionnel et (3.19) pour le couplage contra-directionnel, dépendent linéairement de la longueur de rugosité.

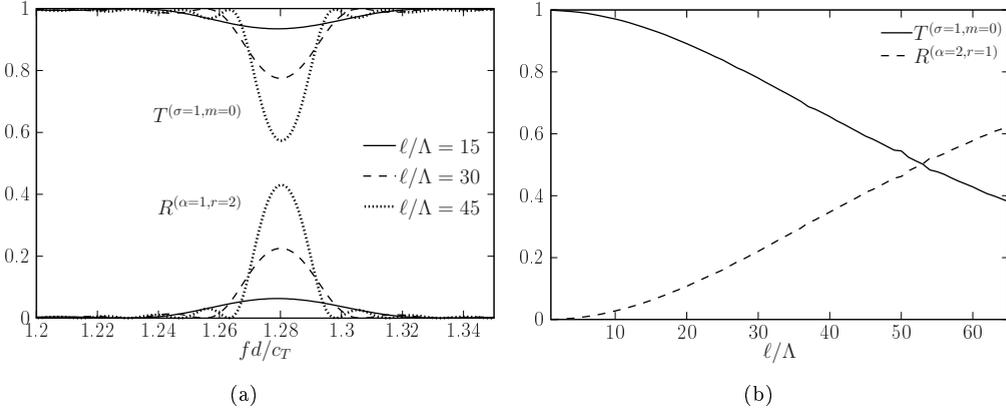


Figure 3.16 – (a) Évolutions des coefficients de réflexion du mode ($\alpha = 2, r = 1$) et de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T pour $\ell/\Lambda = 15$ (trait plein), $\ell/\Lambda = 30$ (tirets) et $\ell/\Lambda = 45$ (pointillés). (b) Évolutions des maxima du coefficient de réflexion du mode ($\alpha = 2, r = 1$) et des minima du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) en fonction de la longueur adimensionnée ℓ/Λ .

3.4.3 Influence de la forme de la rugosité sur le couplage de modes

L'influence de la forme de la rugosité sur les amplitudes des modes est étudiée en traçant les coefficients de réflexion et de transmission de deux modes fortement couplés en fonction des coefficients des séries de Fourier et en comparant les couplages de ces deux modes pour deux fréquences de rugosité différentes.

Pour cela, plusieurs guides d'onde de même périodicité spatiale et de même hauteur de rugosité sont considérés. La géométrie est une plaque ayant une paroi lisse et une paroi rugueuse, le profil de rugosité étant une distribution régulière et périodique de dents de scie. La forme des dents de scie varie d'un guide à l'autre ; la position du sommet d'une dent est comprise dans l'intervalle $[0, \Lambda/2]$, où la position 0 est telle que la dent correspond à un triangle rectangle et où la position $\Lambda/2$ est telle que la dent est un triangle isocèle. Ainsi, pour chaque forme de dent de scie, les coefficients de la série de Fourier sont différents et les évolutions des coefficients de réflexion et de transmission de deux modes fortement couplés sont observés en fonction des coefficients des séries de Fourier. Les paramètres adimensionnés utilisés sont consignés dans le tableau 3.5.

$d/\Lambda = 2$
$h/d = 0,05$
$\ell/\Lambda = 15$

Tableau 3.5 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats des figures 3.18 et 3.19

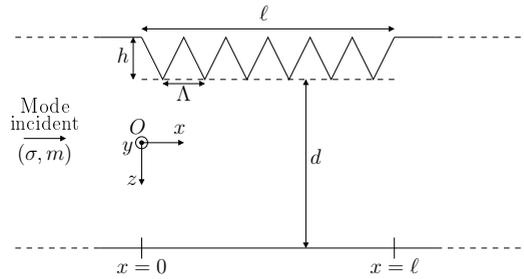


Figure 3.17 – Schéma du guide considéré.

Six modes sont pris en compte dans les calculs numériques, le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) et les modes créés par couplage, à savoir les modes symétriques ($\alpha = 2, r = 0$) et ($\alpha = 2, r = 2$) et les modes antisymétriques ($\alpha = 1, r = 0$), ($\alpha = 1, r = 1$) et ($\alpha = 1, r = 2$). La courbe de dispersion du mode incident (tirets points), les courbes de dispersion des modes créés par couplage (traits pleins), les courbes de couplage pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$) et les courbes de couplage pour le premier harmonique de la rugosité ($n = 2$) sont tracées sur la figure 3.18 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Les couplages contra-directionnels du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) avec le mode créé par couplage ($\alpha = 1, r = 1$) pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$) et pour le premier harmonique de la rugosité ($n = 2$) sont étudiés, le premier couplage à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 1,64$ et le second à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 2,37$.

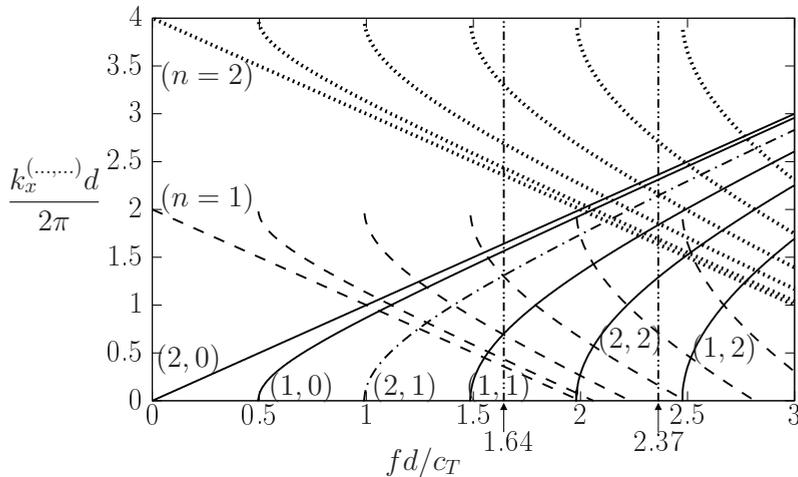


Figure 3.18 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage données par l'expression (1.46) pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$) (tirets) et pour le premier harmonique de la rugosité ($n = 2$) (pointillés).

Les évolutions des coefficients de réflexion en énergie du mode créé par couplage

($\alpha = 1, r = 1$) au point $x = 0$ et des coefficients de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = \ell$ à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 1,64$ sont tracées en fonction du produit $|\hat{C}_1\hat{C}_1^*|/d^2$ sur la figure 3.19a. De même, les évolutions des coefficients de réflexion du mode créé par couplage ($\alpha = 1, r = 1$) et des coefficients de transmission du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) à la fréquence adimensionnée $fd/c_T = 2,37$ sont tracées en fonction du produit $|\hat{C}_2\hat{C}_2^*|/d^2$ sur la figure 3.19b. Pour les deux couplages étudiés, les évolutions des coefficients de réflexion et de transmission évoluent comme prévu linéairement, leurs croissance et décroissance relatives évoluant comme attendu. A noter que pour $\hat{C}_2 = 0$, le coefficient de réflexion du mode créé par couplage ($\alpha = 1, r = 1$) est nul et le coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) est égal à 1, ce qui traduit une absence de couplage entre ces deux modes, bien que l'accord de phase soit vérifié.

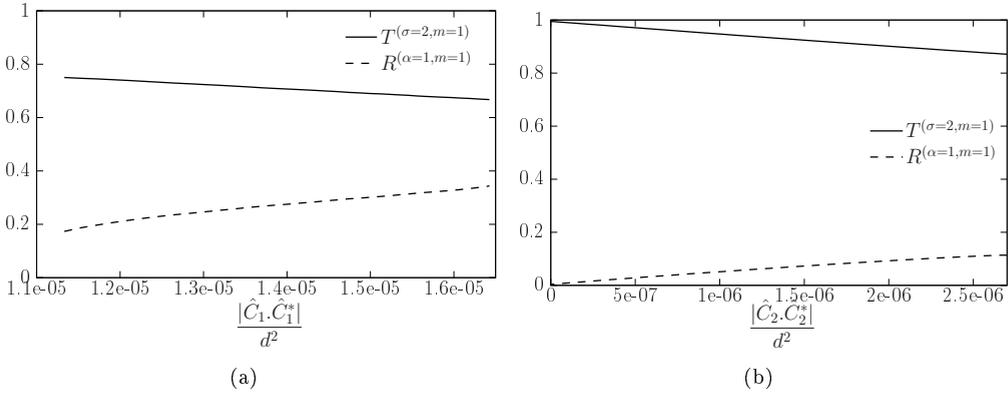


Figure 3.19 – Évolutions des coefficients de réflexion en énergie du mode ($\alpha = 1, r = 1$) au point $x = 0$ et des coefficients de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) au point $x = \ell$: (a) à la fréquence $fd/c_T = 1,64$ en fonction du produit $|\hat{C}_1\hat{C}_1^*|/d^2$ et (b) à la fréquence $fd/c_T = 2,37$ en fonction du produit $|\hat{C}_2\hat{C}_2^*|/d^2$.

3.4.4 Étude de l'effet de l'enveloppe du profil de rugosité

Lorsque la rugosité est une sinusoïde ou une somme de sinusoïde (séries de Fourier), l'amplitude d'un mode au premier ou au dernier point de la rugosité (selon le type de couplage) varie en fonction de la fréquence selon un sinus cardinal de fréquence centrale donnée par la condition d'accord de phase, ce sinus cardinal étant le résultat d'une transformée de Fourier (voir paragraphe 3.1). Afin de vérifier si les amplitudes de modes sont directement liées à une transformée de Fourier du profil, le travail proposé ici consiste à étudier quatre guides d'ondes ayant les mêmes paramètres acoustiques et géométriques, et dont l'unique différence repose sur l'enveloppe du profil de rugosité, à savoir une fonction porte, une fonction triangle (fenêtre de Bartlett), une demie période de sinus (fenêtre de Hann) et une fenêtre de Blackmann, cette dernière ayant pour expression [96] :

$$h_{Blackmann}(x) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_0}x\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi}{\Lambda_0}x\right), & \text{si } x \in [0, \ell], \\ 0, & \text{si } x \notin [0, \ell]. \end{cases} \quad (3.36)$$

Les quatre guides d'ondes sont des plaques ayant une paroi lisse et une paroi rugueuse, le profil de rugosité étant une sinusoïde de période Λ_0 et de hauteur h . Les paramètres adimensionnés utilisés sont consignés dans le tableau 3.6.

$d/\Lambda_0 = 2,5$	$h/d = 0,02$	$\ell/\Lambda_0 = 20$
$fd/c_T \in [1, 65; 1, 9]$	$\Lambda_0/\lambda \in [0, 66; 0, 76]$	$k_T\ell \in [82, 9; 95, 5]$

Tableau 3.6 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats des figures 3.20, 3.21, 3.22 et 3.23.

Les profils de rugosité adimensionnés $h_1(x)/d$ fenêtrés par la fonction porte, la demie période de sinus, la fonction triangle et la fenêtre de Blackmann sont respectivement tracés sur les figures 3.20a, 3.20b, 3.20c et 3.20d en fonction de la position adimensionnée x/Λ_0 .

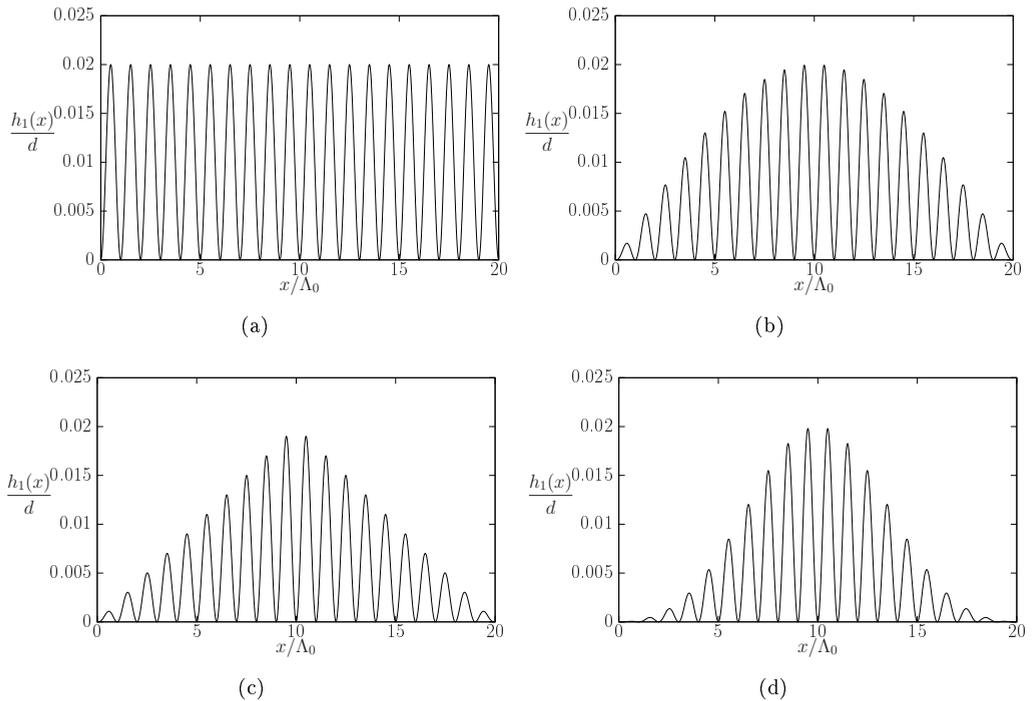


Figure 3.20 – Tracés en fonction de la position adimensionnée x/Λ_0 des profils de rugosité sinusoïdale normalisés $h_1(x)/d$ fenêtrés par (a) une fonction porte, (b) une demie période de sinus, (c) une fonction triangle et (d) une fenêtre de Blackmann.

La densité spectrale de puissance du profil de rugosité $h_1(x)$ est, selon la relation de Wiener-Khintchine [96], la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du profil $h_1(x)$. La transformée de Fourier d'un produit de convolution étant le produit des transformées de Fourier, la densité spectrale de puissance du profil $h_1(x)$ a pour expression,

$$DSP[h_1(x)] = \hat{H}(\Lambda)\hat{H}(\Lambda)^*, \quad (3.37)$$

où $\hat{H}(\Lambda)^*$ est le conjugué de la transformée de Fourier $\hat{H}(\Lambda)$ du profil $h_1(x)$, exprimée par la relation,

$$\hat{H}(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)e^{-i\frac{2\pi}{\Lambda}x} dx. \quad (3.38)$$

Les densités spectrales de puissance (DSP) des quatre profils de rugosité étudiés sont tracées sur la figure 3.21 en fonction du rapport d/Λ . La DSP du profil fenêtré par la fonction porte (tirets points) est le carré d'un sinus cardinal d'amplitude plus importante que les DSP des profils fenêtrés par la demi période de sinus (pointillés), par la fonction triangle (tirets) et par la fenêtre de Blackmann (traits pleins). A noter que ces trois dernières DSP ne présentent pas de lobes secondaires.

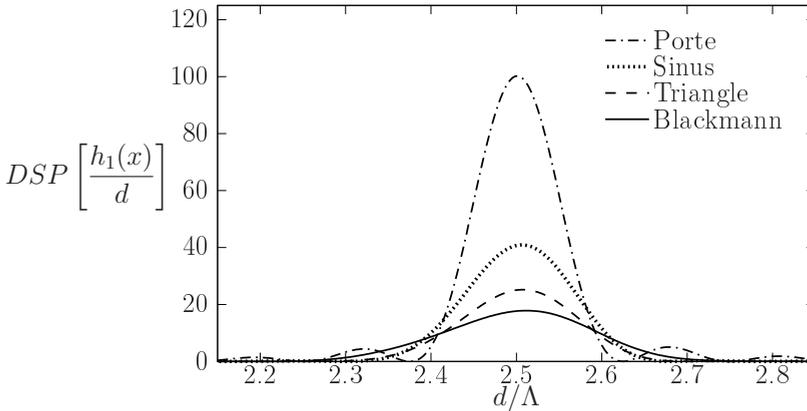


Figure 3.21 – Évolutions en fonction du rapport d/Λ des densités spectrales de puissance des profils de rugosité sinusoidale fenêtrés par une fonction porte (tirets points), une demie période de sinus (pointillés), une fonction triangle (tirets) et une fenêtre de Blackmann (trait plein).

Quatre modes sont pris en compte dans les calculs, le mode incident symétrique ($\sigma = 2, m = 1$) et les modes créés par couplage symétrique ($\alpha = 2, r = 0$) et antisymétriques ($\alpha = 1, r = 0$) et ($\alpha = 1, r = 1$), tous ces modes étant propagatifs. La courbe de dispersion du mode incident (tirets points), les courbes de dispersion des modes créés par couplage (traits pleins) et les courbes de couplage pour la périodicité Λ_0 sont tracées sur la figure 3.22 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . La fréquence de la source étant définie dans l'intervalle $fd/c_T \in [1,65; 1,9]$, le couplage contradirectionnel du mode incident ($\sigma = 2, m = 1$) avec le mode créé par couplage ($\alpha = 1, r = 1$) et la périodicité Λ_0 est étudié.

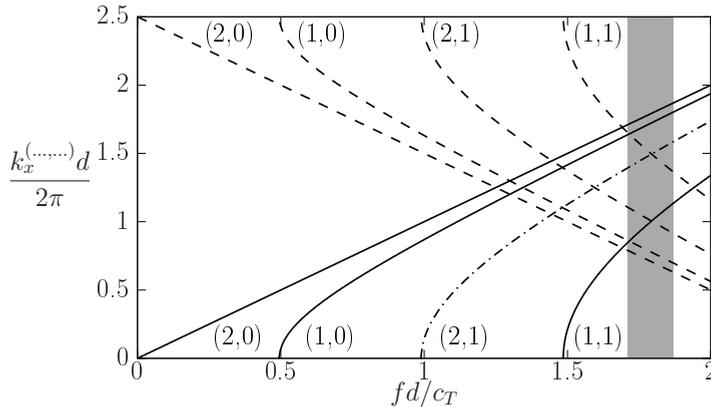


Figure 3.22 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) (tirets).

Les évolutions des coefficients de transmission en énergie du mode incident $(\sigma = 2, m = 1)$ au point $x = \ell$ et du coefficient de réflexion en énergie du mode créé par couplage $(\alpha = 1, r = 1)$ au point $x = 0$ sont tracées respectivement sur les figures 3.23a et 3.23b en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Les formes des coefficients de transmission et de réflexion apparaissent en relation directe avec les formes des DSP pour chacun des profils de rugosité considérés.

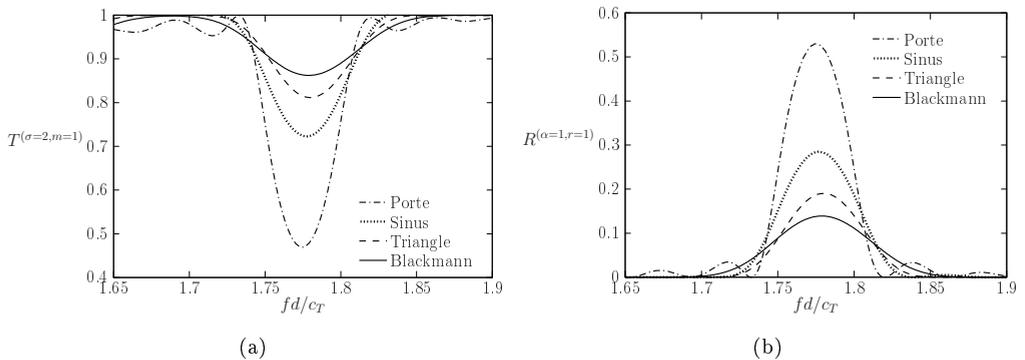


Figure 3.23 – Evolution en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T des coefficients (a) de transmission en énergie du mode incident $(\sigma = 2, m = 1)$ au point $x = \ell$ et (b) de réflexion en énergie du mode créé par couplage $(\alpha = 1, r = 1)$ au point $x = 0$. Les résultats sont obtenus pour des profils de rugosité sinusoïdale fenêtrés par une fonction porte (tirets points), une demie période de sinus (pointillés), une fonction triangle (tirets) et une fenêtre de Blackmann (trait plein).

3.5 Études de profils de rugosité ayant plusieurs périodicités spatiales

Nous avons vu au paragraphe 3.4.4 que la périodicité de la rugosité induisait des couplages privilégiés pour des fréquences déterminées [59, 64]. Toutefois, les profils de rugosité parfaitement périodiques sont rarement rencontrés, mais servent de base aux études menées pour des profils ayant plusieurs périodicités spatiales (la rugosité ou défaut de surface peut être le résultat de phénomènes périodiques présentant plusieurs périodicités spatiales). L'étude présentée ici se place dans la continuité du paragraphe 3.4 sur l'influence des paramètres géométriques des guides d'ondes sur le couplage de modes. Après avoir montré que, pour un profil de rugosité sinusoïdal, les coefficients de réflexion et de transmission lors d'un couplage fort prennent la forme de la DSP du profil de rugosité, l'objectif de l'étude présenté ici est d'abord d'observer des couplages pour des rugosités ayant plusieurs périodicités spatiales [73, 77], puis de montrer la relation entre la DSP des profils de rugosité et les coefficients de réflexion et de transmission en énergie des modes.

3.5.1 Profils de rugosité ayant deux périodicités spatiales voisines

L'objectif de cette partie est d'étudier deux profils de rugosité formés à partir de deux fonctions sinusoïdales ayant des périodicités spatiales voisines Λ_1 et Λ_2 .

Le travail suivant concerne deux plaques ayant une paroi z_1 rugueuse et une paroi z_2 lisse. Le profil de rugosité de la surface z_1 est, dans le premier cas de l'étude, composé de deux sinusoïdes de même longueur $\ell = 96$ mm additionnées, ayant respectivement pour périodicité spatiale $\Lambda_1 = 3$ mm et $\Lambda_2 = 3,2$ mm (figure 3.24a). Pour le second profil étudié, les deux mêmes sinusoïdes de périodicités spatiales Λ_1 et Λ_2 et respectivement de longueurs $\ell_1 = 16\Lambda_1$ et $\ell_2 = 15\Lambda_2$, sont juxtaposées l'une à l'autre, c'est-à-dire dans le prolongement l'une de l'autre (figure 3.24b). Les deux profils obtenus ont la même hauteur maximale de rugosité h telle que $h/d = 0,02$ et la même longueur de rugosité $\ell = 96$ mm.

Le profil sommé a pour expression :

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{h}{4} \left[2 - \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_1}x\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_2}x\right) \right], & \text{si } x \in [0, \ell], \\ 0, & \text{si } x \notin [0, \ell], \end{cases} \quad (3.39)$$

et le profil juxtaposé a pour expression :

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{h}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_1}x\right) \right], & \text{si } x \in [0, \ell_1], \\ \frac{h}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_2}x\right) \right], & \text{si } x \in [\ell_1, \ell_1 + \ell_2], \\ 0, & \text{si } x \notin [0, \ell_1 + \ell_2], \end{cases} \quad (3.40)$$

où h est la hauteur maximale du profil.

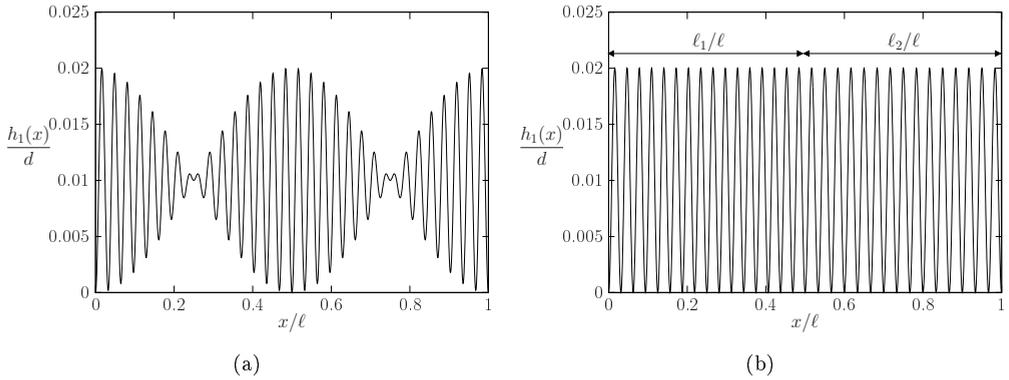


Figure 3.24 – Tracé des profils de rugosité adimensionnés $h_1(x)/d$ (a) sommé et (b) juxtaposé (dans le prolongement l'une de l'autre) en fonction de la position adimensionnée x/ℓ .

Les densités spectrales de puissance (DSP) des deux profils de rugosité sont tracés respectivement sur les figures 3.25a et 3.25b en fonction du rapport d/Λ . Les deux périodicités Λ_1 et Λ_2 sont retrouvées dans chaque DSP. La transformée de Fourier du profil sommé est la somme des transformées de Fourier de chaque sinusoïde dans l'intervalle $[0, \ell]$ (figure 3.25a). Par contre, la transformée de Fourier du profil juxtaposé est la somme des transformées de Fourier de chaque sinusoïde, mais ces deux transformées de Fourier sont effectuées sur deux intervalles différents, la première sur l'intervalle $[0, 16\Lambda_1]$ et la seconde sur l'intervalle $[16\Lambda_1, 16\Lambda_1 + 15\Lambda_2]$. Ainsi, les lobes principaux des sinus cardinaux résultant des transformées de Fourier sont plus larges que ceux du profil "sommé" et, ainsi, un phénomène de recouvrement apparaît, ce phénomène ayant pour conséquence notable, l'émergence d'une périodicité spatiale Λ_3 d'amplitude plus forte que celles des périodicités Λ_1 et Λ_2 et située entre ces deux périodicités (figure 3.25b).

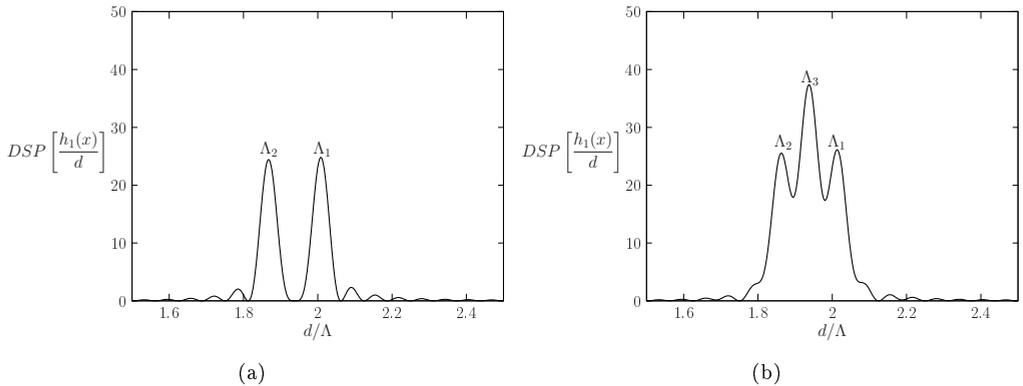


Figure 3.25 – Tracés des densités spectrales de puissance (DSP) des profils de rugosité (a) "sommé" et (b) "collé" en fonction du rapport d/Λ .

Pour les deux guides, la source génère le mode ($\sigma = 2, m = 0$) dans une bande

de fréquence comprise entre les valeurs adimensionnées $fd/c_T = 1,1$ et $fd/c_T = 1,35$. Les quatre premiers modes sont pris en compte dans les calculs, les trois premiers étant propagatifs et le dernier évanescents. La courbe de dispersion du mode incident (tirets points), les courbes de dispersion des modes créés par couplage (traits pleins), les courbes de couplage pour la périodicité Λ_2 (tirets) et les courbes de couplage pour la périodicité Λ_1 (pointillés) sont tracées sur la figure 3.26 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . La fréquence de la source étant définie dans l'intervalle $fd/c_T \in [1,2; 1,35]$, le couplage contra-directionnel du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) et du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) pour les périodicités spatiales Λ_1 et Λ_2 sont étudiés.

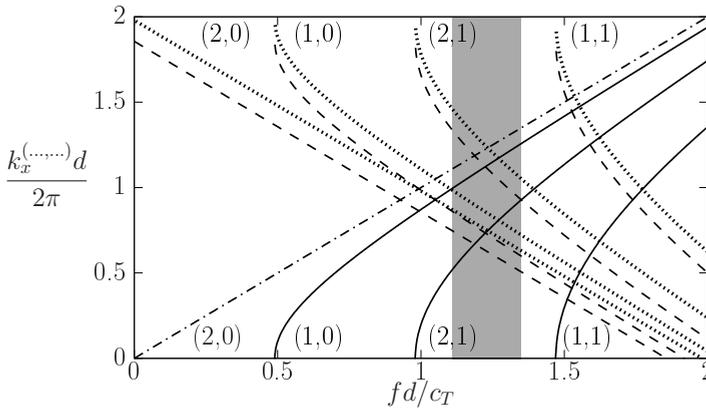


Figure 3.26 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points), courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) pour la périodicité spatiale Λ_2 (tirets) et courbes de couplage donnés par l'expression (1.46) pour la périodicité spatiale Λ_1 (pointillés).

Les évolutions du coefficient de réflexion en énergie du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) au point $x = 0$ et du coefficient de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) au point $x = \ell$ sont tracées en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T sur la figure 3.27a pour le guide d'ondes "sommé" et sur la figure 3.27b pour le guide d'ondes juxtaposé. Pour ces deux guides d'ondes, les couplages pour les périodicités Λ_1 et Λ_2 sont retrouvés. Pour le profil juxtaposé, un couplage entre le mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) et le mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) se produit entre les couplages dus aux périodicités spatiales Λ_1 et Λ_2 , ce couplage étant associé à la périodicité spatiale émergente Λ_3 de la DSP du profil juxtaposé (figure 3.25b). Ainsi que dans le paragraphe du fenêtrage de la rugosité, pour les deux guides d'ondes étudiés, les coefficients de réflexion du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) et de transmission du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) font apparaître une forme voisine de celles des DSP des profils de rugosité.

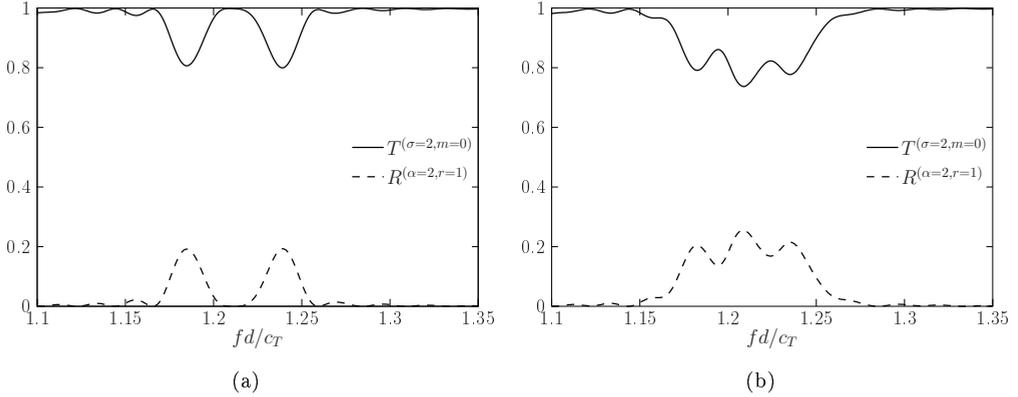


Figure 3.27 – Évolutions du coefficient de réflexion en énergie du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 1$) au point $x = 0$ et du coefficient de transmission en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) au point $x = \ell$ en fonction de la fréquence adimensionnée fd/cr pour (a) le profil sommé et (b) le profil juxtaposé.

3.5.2 Profil de rugosité ayant trois périodicités spatiales éloignées

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier un profil de rugosité composé, sur une longueur ℓ , de trois sinusoïdes d'amplitudes différentes et de périodicités spatiales suffisamment écartées les unes des autres pour éviter le recouvrement mentionné au paragraphe précédent. L'intérêt est toujours de comparer l'évolution de la densité spectrale de puissance d'un profil de rugosité avec les coefficients de réflexion et de transmission en énergie des modes couplés.

Les amplitudes des sinusoïdes ont pour valeurs $h_1 = 0,05$ mm, $h_2 = 0,1$ mm et $h_3 = 0,15$ mm et les périodicités spatiales ont pour valeurs respectives $\Lambda_1 = 3,5$ mm, $\Lambda_2 = 4$ mm et $\Lambda_3 = 5$ mm. La fonction $h(x)$ définissant le profil de rugosité a pour expression :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{h_1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_1}x\right) \right] + \frac{h_2}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_2}x\right) \right] + \frac{h_3}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_3}x\right) \right], & \text{si } x \in [0, \ell], \\ 0, & \text{si } x \notin [0, \ell]. \end{cases} \quad (3.41)$$

Le profil de rugosité adimensionné $h(x)/d$ est tracé en fonction de la position adimensionnée x/ℓ sur la figure 3.28a et sa DSP est tracée en fonction du rapport d/Λ sur la figure 3.28b. Les trois périodicités spatiales sont clairement visibles sur la DSP, avec des hauteurs différentes. Comme prévu, la longueur de rugosité est suffisamment grande et les périodicités spatiales suffisamment éloignées les unes des autres pour éviter tout phénomène de recouvrement.

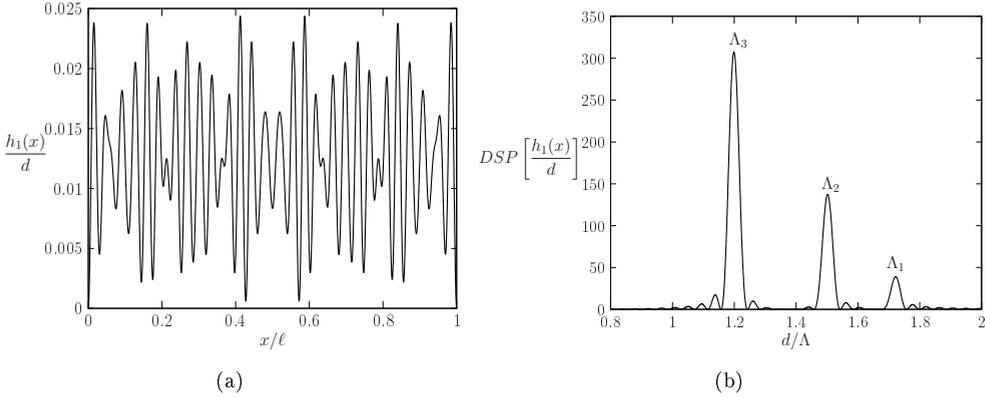


Figure 3.28 – (a) Tracé du profil de rugosité adimensionné $h(x)/d$ en fonction de la position adimensionnée x/ℓ et (b) tracé de la DSP du profil de rugosité en fonction du rapport d/Λ .

La source génère le mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) dans une bande de fréquence comprise entre les valeurs adimensionnées $fd/c_T = 0,1$ et $fd/c_T = 0,35$ (bande grisée de la figure 3.29). Les deux premiers modes du guide sont pris en compte dans les calculs et seul le mode incident est propagatif. La courbe de dispersion du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) (tirets points), la courbe de dispersion du mode créé par couplage ($\alpha = 1, r = 0$) (trait plein) et les courbes de couplage pour les périodicités Λ_1, Λ_2 et Λ_3 (tirets) sont tracées en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T sur la figure 3.29. La fréquence de la source étant définie dans l'intervalle $fd/c_T \in [0,1; 0,35]$, les couplages contra-directionnels du mode incident avec lui-même pour les périodicités Λ_1, Λ_2 et Λ_3 sont privilégiés.

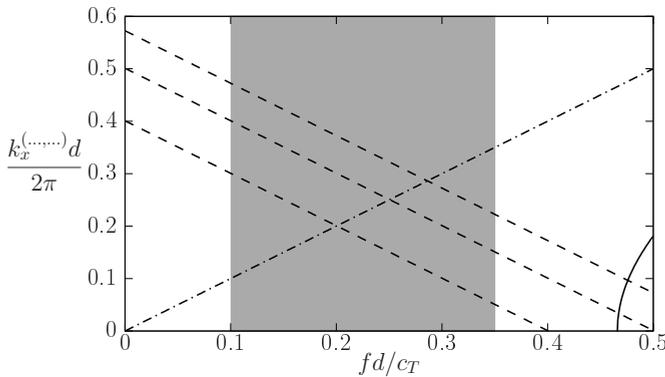


Figure 3.29 – Courbe de dispersion du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) (tirets points), courbe de dispersion du mode créé par couplage ($\alpha = 1, r = 0$) (trait plein) et courbes de couplage contra-directionnel pour les périodicités Λ_1, Λ_2 et Λ_3 (tirets).

Les évolutions des coefficients de transmission et de réflexion en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T sont tracées

sur la figure 3.30. Les couplages pour les trois périodicités Λ_1 , Λ_2 et Λ_3 apparaissent clairement. Les amplitudes associées aux trois périodicités spatiales de la DSP évoluent de la même manière que les coefficients de transmission et de réflexion en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$).

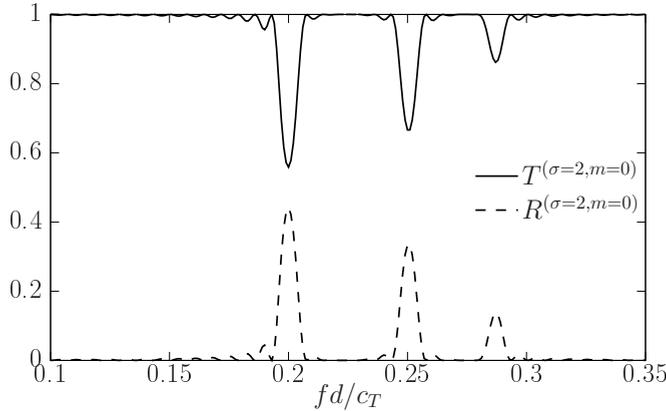


Figure 3.30 – Évolutions des coefficients de transmission et de réflexion en énergie du mode incident ($\sigma = 2, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

3.5.3 Profil de rugosité pseudo-aléatoire

Dans la continuité des travaux réalisés dans ce chapitre sur la relation entre les DSP des profils de rugosité et les couplages de modes, le paragraphe suivant a pour but de mettre en évidence des couplages de modes dans le cas d'une rugosité aléatoire ou pseudo-aléatoire, ayant plusieurs périodicités spatiales importantes.

Le guide considéré ici est délimité par une surface parfaitement lisse et une surface rugueuse dont le profil de rugosité adimensionné $h_1(x)/d$ de longueur ℓ est tracé sur la figure 3.31a en fonction de la position adimensionnée x/ℓ . Ce profil de rugosité est composé de dents de scie distribuées de manière irrégulière et de hauteurs aléatoires. 50 points de mesure ont été sélectionnés aléatoirement parmi les 3001 points de discrétisation du domaine $x \in [0, \ell]$, ces 50 points de mesure représentant les discontinuités du profil. Ensuite, à chacun de ces 50 points de mesure a été affectée une valeur aléatoire correspondant à la hauteur de chaque dent. Une valeur de hauteur a ensuite été attribuée à chacun des 2951 points restants de manière à relier les discontinuités une à une afin de générer le profil de rugosité.

La densité spectrale de puissance du profil de rugosité pseudo-aléatoire est tracée sur la figure 3.31b en fonction du rapport d/Λ . Quatre périodicités spatiales émergent de cette DSP et sont notées, de la plus grande à la plus petite, Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 et Λ_4 .

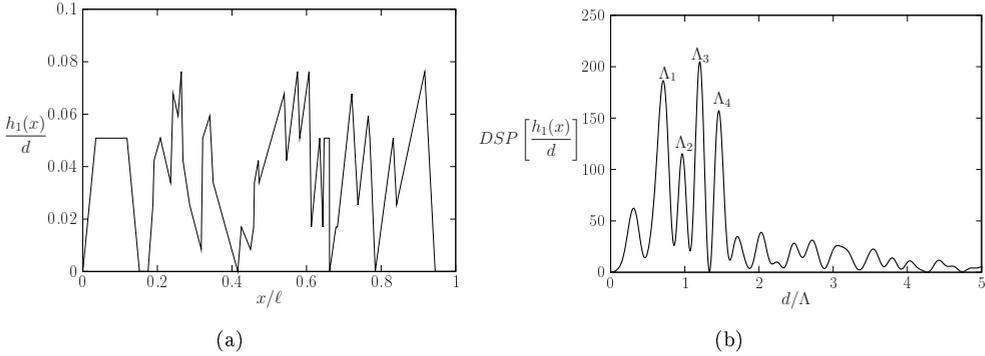


Figure 3.31 – (a) Tracé du profil de rugosité adimensionné $h_1(x)/d$ en fonction de la position adimensionnée x/l et (b) tracé de sa DSP en fonction du rapport d/Λ .

Les quatre premiers modes sont pris en compte dans les calculs, les deux premiers étant propagatifs et les deux suivants évanescents. La fréquence de la source est définie dans l'intervalle $fd/c_T \in [0, 5; 0, 85]$ et la source génère dans le guide d'ondes le mode incident ($\sigma = 1, m = 0$).

La courbe de dispersion du mode incident (tirets points), les courbes de dispersion des modes créés par couplage (traits pleins) sont tracées sur la figure 3.32 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Sur la même figure, sont tracées les courbes de couplage contra-directionnel du mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 0$) pour les périodicités spatiales Λ_2, Λ_3 et Λ_4 (tirets) et les courbes de couplage contra-directionnel du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) pour les périodicités spatiales $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ et Λ_4 (pointillés).

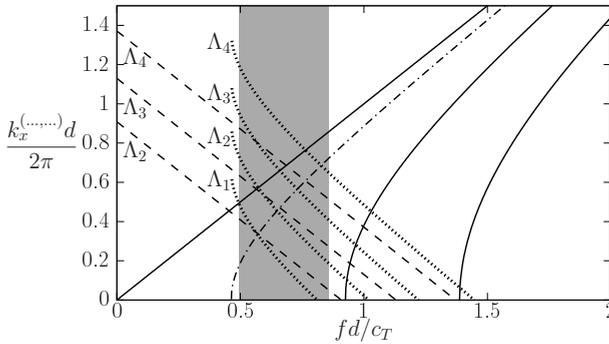


Figure 3.32 – Courbes de dispersion des modes créés par couplage (α, r) (traits pleins), courbe de dispersion du mode incident (σ, m) (tirets points), courbes de couplage contra-directionnel du mode $(2,0)$ (tirets) et courbes de couplage contra-directionnel du mode $(1,0)$ (pointillés).

Les évolutions des coefficients de réflexion des modes créé par couplage ($\alpha = 2, r = 0$) et incident ($\sigma = 1, m = 0$) et du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) sont tracées sur la figure 3.33 en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T . Comme indiqué au paragraphe 2.3.2, les couplages étudiés se chevauchent (en terme de fréquence)

et le coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) ne prend plus la forme de la DSP du profil de rugosité. Le coefficient de réflexion du mode ($\alpha = 2, r = 0$) a trois oscillations importantes correspondant aux couplages avec les périodicités Λ_2, Λ_3 et Λ_4 , et de plus, les trois maxima observables aux fréquences $fd/c_T = 0,55, fd/c_T = 0,65$ et $fd/c_T = 0,75$ correspondent bien, en terme d'amplitude, aux trois maxima de la DSP du profil (pour Λ_2, Λ_3 et Λ_4). Ainsi, le coefficient de réflexion du mode ($\alpha = 2, r = 0$) a bien la même forme qu'une partie de la DSP. Le coefficient de réflexion du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) a quatre oscillations importantes correspondant aux couplages avec les périodicités $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ et Λ_4 . Les amplitudes de ce coefficient aux fréquences $fd/c_T = 0,55$ (couplage avec Λ_1), $fd/c_T = 0,71$ (couplage avec Λ_3) et $fd/c_T = 0,82$ (couplage avec Λ_4), suivent bien la forme de la DSP du profil de rugosité (en terme d'amplitude), mais l'amplitude de ce coefficient à la fréquence $fd/c_T = 0,62$ (couplage avec Λ_2) devrait être plus faible au regard de la DSP du profil ; sans doute cela provient-il du fait que, à la fréquence $fd/c_T = 0,62$, le mode créé par couplage ($\alpha = 2, r = 0$) a reçu de l'énergie du mode incident par couplage avec la périodicité Λ_3 et en a cédé une partie au mode ($\sigma = 1, m = 0$) par couplage avec la périodicité Λ_2 (deux couplages différents à la même fréquence).

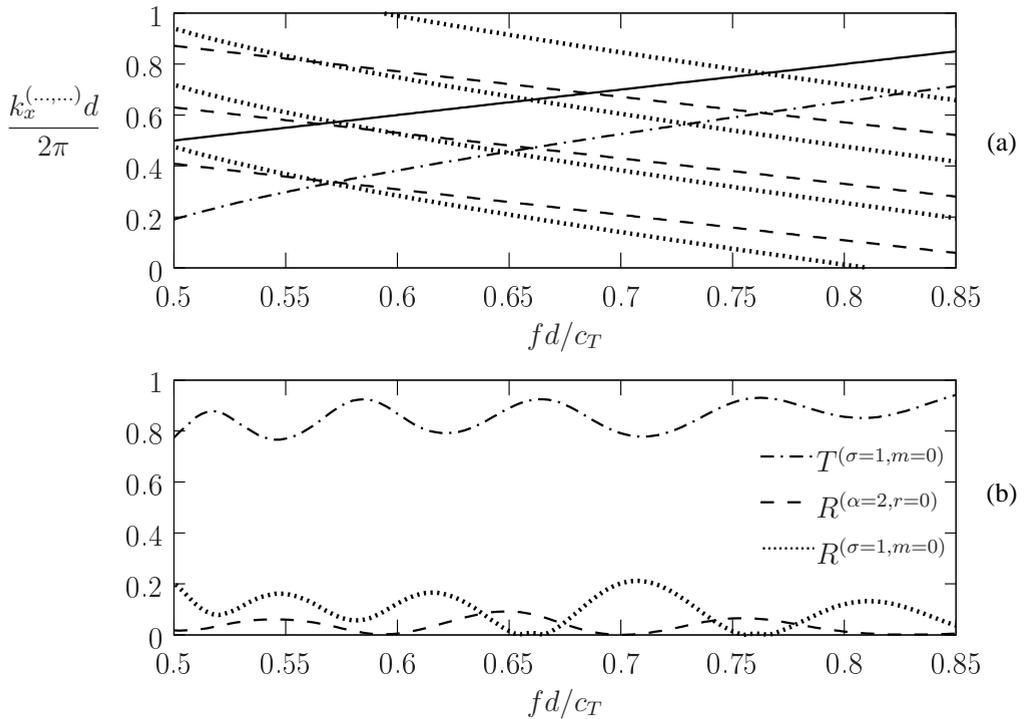


Figure 3.33 – (a) Zoom du domaine grisé de la figure 3.32 et (b) évolution des coefficients de réflexion des modes créé par couplage ($\alpha = 2, r = 0$) et incident ($\sigma = 1, m = 0$) et du coefficient de transmission du mode incident ($\sigma = 1, m = 0$) en fonction de la fréquence adimensionnée fd/c_T .

3.6 Conclusion

En faisant usage de la méthode présentée dans les deux premiers chapitres, nous avons traité, dans ce troisième chapitre, de la diffusion des ondes en guide dont les rugosités de parois font apparaître des périodicités spatiales marquées (parois sinusoïdales, périodiques, pseudo-aléatoires). C'est ainsi que les résultats du modèle proposé dans ce mémoire ont pu être comparés avec ceux obtenus au terme de calculs analytiques (à partir d'expressions analytiques précises) qui mettent en évidence les phénomènes physiques connus dans des situations plus académiques. Ils ont permis de pénétrer plus avant dans l'interprétation des phénomènes et de confirmer le bon comportement du modèle retenu dans ce mémoire. Dans la continuité de l'étude des deux types de couplage, une méthode alternative aux approximations successives, basée sur la théorie des modes couplés, est ensuite proposée, cette technique étant capable de calculer les amplitudes des modes au delà des limites liées aux approximations successives (grandes longueurs ou grandes épaisseurs de rugosité). L'influence des paramètres géométriques de la rugosité sur les coefficients de réflexion et de transmission a permis de mettre en évidence leur relation avec les DSP des profils de rugosité; ceci laisse penser que la caractérisation de la rugosité peut être effectuée expérimentalement en cherchant l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission en énergie en seulement deux points distincts en fonction de la fréquence de la source acoustique (ce qui est d'intérêt en pratique). Dans ce cas, la seconde expérience réalisée au LOMC et présentée au chapitre 2 est importante : la technique utilisée, dont les résultats confirment la largeur de la bande d'arrêt théorique obtenue pour un profil périodique, doit permettre d'accéder aux périodicités spatiales des DSP des profils de rugosité.

Chapitre 4

PROPAGATION D'ONDES DE LAMB DANS DES PLAQUES SOLIDES ISOTROPES À PAROIS RUGUEUSES

L'objet de ce chapitre est de prolonger la formulation intégrale [second modèle, (IM)] proposée pour traiter la propagation en guide fluide à parois rugueuses (chapitre 1) et la propagation des ondes SH (chapitre 2) au cas de la propagation d'ondes de Lamb dans les plaques à parois rugueuses. Bien évidemment, le problème doit être repris à la base en raison de la nature des ondes traitées ici qui est très différente de celles traitées précédemment.

4.1 La plaque rugueuse

Le repère cartésien choisi est défini par $R = (O, x, y, z)$, la base orthonormée associée par $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le guide d'onde considéré, caractérisé par sa masse volumique ρ et ses coefficients de Lamé λ et μ , est une plaque limitée par deux plans parallèles rugueux de longueur et de largeur infinies dans le vide (figure 4.1). Le plan de propagation correspondant (par choix) au plan (x, z) et le guide étant infini suivant la dimension y , le domaine D d'étude de frontière ∂D (problème 2D) est défini par x positif et par z appartenant à l'intervalle $[z_1(x), z_2(x)]$, où les coordonnées z_1 et z_2 définissent les cotes des frontières du guide donc celles de la rugosité pour x compris dans l'intervalle $[0, \ell]$. Un guide fictif aux parois situées en $z = -L_z/2$ et $z = L_z/2$, immédiatement extérieur au guide réel (confondu avec le guide réel en dehors de la rugosité), définit le domaine d'étude retenu pour la formulation intégrale utilisée. Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont les vecteurs unitaires normaux respectivement aux surfaces $z_1(x)$ et $z_2(x)$ en tout point des rugosités et orientés vers l'extérieur du guide. Le guide fictif extérieur d'épaisseur L_z définit le domaine D_0 . Les surfaces $z_1(x)$ et $z_2(x)$ sont données respectivement par les expressions $z_1(x) = -L_z/2 + h_1(x)$ et $z_2(x) = L_z/2 - h_2(x)$, où les fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$ sont des fonctions arithmétiques définissant la rugosité à partir des surfaces du guide extérieur. Les vecteurs unitaires normaux $\vec{n}_q(x)$ aux surfaces $z_q(x)$ ($q = 1, 2$) du

guide d'onde rugueux et orientés à l'extérieur de ce guide d'onde ayant pour expression

$$\vec{n}_q = N_q^{-1} \left[(\partial_x h_q) \vec{e}_x + (-1)^q \vec{e}_z \right], \quad (4.1)$$

avec

$$N_q = \sqrt{1 + (\partial_x h_q)^2}. \quad (4.2)$$

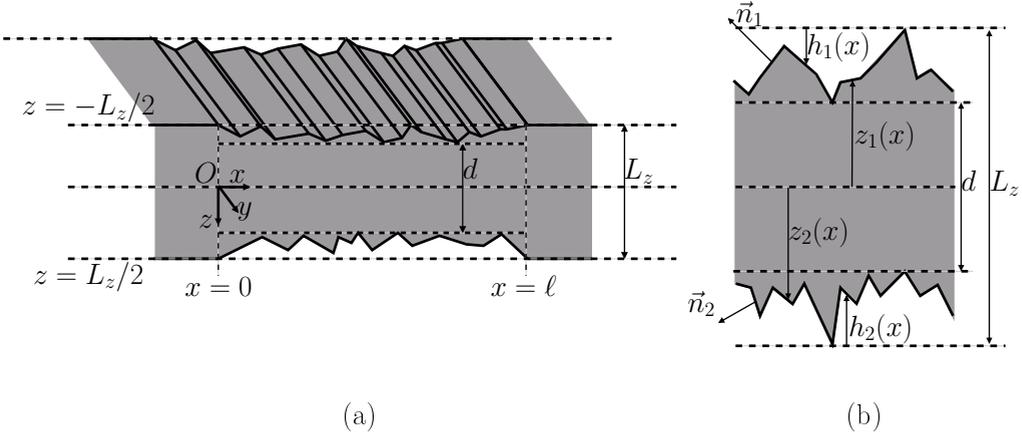


Figure 4.1 – (a) Schéma du guide d'onde délimité par deux surfaces rugueuses et (b) zoom sur la rugosité.

4.2 Équations fondamentales

4.2.1 Les équations de propagation

Le vecteur déplacement harmonique de pulsation ω est exprimé en fonction du temps par la fonction $\exp(i\omega t)$. Ainsi, dans le cadre des hypothèses de l'acoustique linéaire et étant donné les symétries du système étudié, le vecteur déplacement complexe $\hat{\vec{U}}(x, z)$ ne dépend que des deux variables x et z , et est solution du système d'équations suivant, comportant l'équation de propagation (vectorielle) et des conditions de contraintes nulles aux frontières,

$$\begin{cases} \rho\omega^2 \hat{\vec{U}}(x, z) + \text{div} \hat{\vec{T}}(x, z) = -\hat{\vec{F}}(x, z), & \forall (x, z) \in D, \\ \hat{\vec{T}}(x, z) \cdot \vec{n}_q = \vec{0}, & \forall (x, z) \in \partial D, \end{cases} \quad (4.3a)$$

$$\quad (4.3b)$$

où $\hat{\vec{T}}$ est le tenseur des contraintes et $\hat{\vec{F}}$ un vecteur traduisant l'effet des sources. Le vecteur déplacement complexe $\hat{\vec{U}}(x, z)$ est décomposé en un vecteur déplacement complexe longitudinal $\hat{\vec{U}}_L(x, z)$ et un vecteur déplacement complexe transversal $\hat{\vec{U}}_T(x, z)$,

$$\hat{\vec{U}}(x, z) = \hat{\vec{U}}_L(x, z) + \hat{\vec{U}}_T(x, z), \quad (4.4)$$

projetés sur la base B comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\vec{U}}_L(x, z) = \hat{U}_{L_x}(x, z)\vec{e}_x + \hat{U}_{L_z}(x, z)\vec{e}_z, & (4.5a) \\ \hat{\vec{U}}_T(x, z) = \hat{U}_{T_x}(x, z)\vec{e}_x + \hat{U}_{T_z}(x, z)\vec{e}_z. & (4.5b) \end{cases}$$

Ces vecteurs déplacements complexes longitudinal $\hat{\vec{U}}_L(x, z)$ et transversal $\hat{\vec{U}}_T(x, z)$ sont respectivement irrotationnel et à divergence nulle; ils satisfont aux relations

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \hat{\vec{U}}_L(x, z) = \vec{0}, & (4.6a) \\ \text{div} \hat{\vec{U}}_T(x, z) = 0, & (4.6b) \end{cases}$$

qui, compte tenu des expressions (4.5), peuvent être mises sous les formes respectives,

$$\begin{cases} \partial_z \hat{U}_{L_x}(x, z) = \partial_x \hat{U}_{L_z}(x, z), & (4.7a) \\ \partial_z \hat{U}_{T_z}(x, z) = -\partial_x \hat{U}_{T_x}(x, z). & (4.7b) \end{cases}$$

Le report des expressions (4.7) dans l'équation de propagation (4.3a) permet de découpler cette dernière en une équation de Helmholtz pour chacun des quatre termes \hat{U}_{η_j} du champ de déplacement complexe $\hat{\vec{U}}$ ($\eta = L, T, j = x, z$), compte tenu de la loi de Hook [cf. infra équations (4.10)] :

$$\begin{cases} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_L^2 \right] \hat{U}_{L_j}(x, z) = -\hat{f}_{L_j}(x, z), & j = x, z, & (4.8a) \\ \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_T^2 \right] \hat{U}_{T_j}(x, z) = -\hat{f}_{T_j}(x, z), & j = x, z, & (4.8b) \end{cases}$$

où $\hat{f}_{L_j}(x, z)$ et $\hat{f}_{T_j}(x, z)$ sont des fonctions source, $k_L = \omega/c_L$ et $k_T = \omega/c_T$ avec $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$, étant respectivement les vitesses de phase des ondes de volume longitudinales et transversales dans le solide isotrope constituant le guide.

4.2.2 Conditions aux frontières

Les conditions aux limites (4.3b) du problème sont des conditions de contraintes nulles sur les surfaces rugueuses. L'objet de ce paragraphe est de donner les expressions des dérivées normales de chacun des quatre termes $\hat{U}_{\eta_j}(x, z)$ du vecteur déplacement $\vec{U}(x, z)$ sur les frontières rugueuses. Les conditions de contraintes nulles sur les frontières rugueuses (4.3b) se traduisent par les expressions suivantes [compte tenu de l'expression (4.1) des vecteurs unitaires normaux \vec{n}_q] :

$$\begin{cases} (\partial_x h_q) \hat{T}_{xx} + (-1)^q \hat{T}_{xz} = 0, & q = 1, 2, & (4.9a) \\ (\partial_x h_q) \hat{T}_{xz} + (-1)^q \hat{T}_{zz} = 0, & q = 1, 2, & (4.9b) \end{cases}$$

où \hat{T}_{xx} , \hat{T}_{xz} et \hat{T}_{zz} sont les composantes du tenseur des contraintes qui, compte tenu de la nature du champ de déplacement et de la loi de Hooke, ont pour expressions respectives,

$$\begin{cases} \hat{T}_{xx} = (\lambda + 2\mu) \left(\partial_x \hat{U}_{L_x} + \partial_x \hat{U}_{T_x} \right) + \lambda \left(\partial_z \hat{U}_{L_z} + \partial_z \hat{U}_{T_z} \right), & (4.10a) \\ \hat{T}_{zz} = \lambda \left(\partial_x \hat{U}_{L_x} + \partial_x \hat{U}_{T_x} \right) + (\lambda + 2\mu) \left(\partial_z \hat{U}_{L_z} + \partial_z \hat{U}_{T_z} \right), & (4.10b) \\ \hat{T}_{xz} = \mu \left(\partial_z \hat{U}_{L_x} + \partial_z \hat{U}_{T_x} + \partial_x \hat{U}_{L_z} + \partial_x \hat{U}_{T_z} \right). & (4.10c) \end{cases}$$

Le report des expressions des composantes du tenseur des contraintes (4.10) dans les conditions aux frontières (4.9) conduit aux expressions des dérivées normales sur les frontières rugueuses de chaque composante du champ de déplacement,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{n_q} \hat{U}_{L_x} = -(-1)^q \left[\partial_x \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) + \partial_z \hat{U}_{T_x} \right] \\ -\frac{1}{\mu} (\partial_x h_q) \left[\lambda \partial_z \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) + (\lambda + \mu) \partial_x \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + \mu \partial_x \hat{U}_{T_x} \right], \end{array} \right. \quad (4.11a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{n_q} \hat{U}_{T_x} = -(-1)^q \left[\partial_x \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) + \partial_z \hat{U}_{L_x} \right] \\ -\frac{1}{\mu} (\partial_x h_q) \left[\lambda \partial_z \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) + (\lambda + \mu) \partial_x \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + \mu \partial_x \hat{U}_{L_x} \right], \end{array} \right. \quad (4.11b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{n_q} \hat{U}_{L_z} = -(-1)^q \left[\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \partial_x \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + \partial_z \hat{U}_{T_z} \right] \\ -\frac{(\partial_x h_q)}{(\lambda + 2\mu)} \left[\mu \partial_z \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + (\lambda + \mu) \partial_x \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) + (\lambda + 2\mu) \partial_x \hat{U}_{T_z} \right], \end{array} \right. \quad (4.11c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{n_q} \hat{U}_{T_z} = -(-1)^q \left[\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \partial_x \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + \partial_z \hat{U}_{L_z} \right] \\ -\frac{(\partial_x h_q)}{(\lambda + 2\mu)} \left[\mu \partial_z \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + (\lambda + \mu) \partial_x \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) + (\lambda + 2\mu) \partial_x \hat{U}_{L_z} \right]. \end{array} \right. \quad (4.11d)$$

4.2.3 Ondes de Lamb en guides à parois lisses

Dans la suite, le terme $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$ est une composante du champ correspondant à une onde de Lamb (τ, n) , où le paramètre τ permet de classer les modes de Lamb selon leur symétrie ($\tau = 2$ pour les modes symétriques et $\tau = 1$ pour les modes antisymétriques) et où le nombre entier positif n sert à répertorier les modes de Lamb [$(\tau = 1, n = 0) \equiv A0$, $(\tau = 2, n = 0) \equiv S0$, $(\tau = 1, n = 1) \equiv A1$, ...].

Les solutions du problème (4.3) en l'absence de rugosité sont données par les expressions des ondes de Lamb symétriques et antisymétriques, qui prennent la forme suivante [dans le cadre du formalisme retenu ici (Annexe I)] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{\eta_x}^{(2, n)}(x, z) = \hat{Q}_{\eta_x}^{(2, n)} \cos \left(k_{\eta_z}^{(2, n)} z \right) e^{-ik_x^{(2, n)} x}, \end{array} \right. \quad (4.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{\eta_z}^{(2, n)}(x, z) = \hat{Q}_{\eta_z}^{(2, n)} \sin \left(k_{\eta_z}^{(2, n)} z \right) e^{-ik_x^{(2, n)} x}, \end{array} \right. \quad (4.12b)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{\eta_x}^{(1, n)}(x, z) = \hat{Q}_{\eta_x}^{(1, n)} \sin \left(k_{\eta_z}^{(1, n)} z \right) e^{-ik_x^{(1, n)} x}, \end{array} \right. \quad (4.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{\eta_z}^{(1, n)}(x, z) = \hat{Q}_{\eta_z}^{(1, n)} \cos \left(k_{\eta_z}^{(1, n)} z \right) e^{-ik_x^{(1, n)} x}, \end{array} \right. \quad (4.13b)$$

où les amplitudes $\hat{Q}_{\eta_x}^{(\tau, n)}$ et $\hat{Q}_{\eta_z}^{(\tau, n)}$ sont des constantes reliées linéairement entre elles (conditions aux frontières) et où les nombres d'ondes $k_x^{(\tau, n)}$ sont solutions de l'équation

de Rayleigh-Lamb [97–99],

$$\frac{\tan\left(k_{Tz}^{(\tau,n)}L_z/2 + \theta\right)}{\tan\left(k_{Lz}^{(\tau,n)}L_z/2 + \theta\right)} = -\frac{4\left(k_x^{(\tau,n)}\right)^2 k_{Lz}^{(\tau,n)} k_{Tz}^{(\tau,n)}}{\left[\left(k_{Tz}^{(\tau,n)}\right)^2 - \left(k_x^{(\tau,n)}\right)^2\right]^2}, \quad (4.14)$$

avec $\theta = 0$ (modulo π) pour les modes symétriques et $\theta = \frac{\pi}{2}$ (modulo π) pour les modes antisymétriques, et avec

$$\left(k_x^{(\tau,n)}\right)^2 + \left(k_{\eta z}^{(\tau,n)}\right)^2 = k_{\eta}^2, \quad \eta = L, T. \quad (4.15)$$

4.3 Formulation intégrale du problème

4.3.1 Formulation intégrale du problème en l'absence de rugosité

Les quatre composantes $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$ du champ de déplacement d'une onde de Lamb (τ, n) , dans le domaine D_0 du guide extérieur, satisfaisant aux équations de Helmholtz (4.8), peuvent être exprimées, par application du théorème de Green, de la façon suivante [66, 67] :

$$\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) = \hat{F}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) + {}^{(0)}\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) \right\}, \quad (4.16)$$

où le terme source $\hat{F}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z)$ a pour expression,

$$\hat{F}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x', z') \hat{f}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x', z') dx' dz', \quad (4.17)$$

et où l'opérateur intégral, appliqué au champ de déplacement considéré,

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}(x, z) \right\} &= \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x', z_q) \partial_{z_q} \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x', z_q) \right. \\ &\quad \left. - \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x', z_q) \partial_{z_q} G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x', z_q) \right] \Big|_{z_q=(-1)^q \frac{L_z}{2}} dx', \quad (4.18) \end{aligned}$$

traduit le couplage des ondes longitudinales et transversales sur la surface du guide.

4.3.2 Fonction de Green

La fonction de Green est solution du système d'équations suivant, composé de l'équation de propagation [équation de Helmholtz, source ponctuelle en (x_0, z_0)] et de conditions mixtes aux frontières,

$$\left\{ \begin{aligned} (\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_{\eta}^2) G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) &= -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0), \quad \forall (x, z, x_0, z_0) \in D_0, \quad (4.19a) \\ \left(\partial_z \pm ik_{\eta} \hat{Y}_{\eta}^{(\tau,n)} \right) G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) &= 0, \quad \forall (x, x_0, z_0) \in D_0 \text{ et en } z = \pm L_z/2, \quad (4.19b) \end{aligned} \right.$$

où δ est la fonction de Dirac et où

$$\hat{Y}_\eta^{(\tau,n)} = i \frac{k_{\eta z}^{(\tau,n)}}{k_\eta} \tan \left(\alpha_\eta^{(\tau,n)} \right) \quad (4.20)$$

représente une admittance de paroi attachée ici à chaque terme de l'onde de Lamb, les paramètres $\alpha_\eta^{(\tau,n)}$ étant des constantes dont le choix est précisé dans la suite de ce paragraphe. La fonction de Green $G_\eta^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0)$, solution du système d'équations (4.19), est recherchée ici sous la forme d'une transformée de Fourier (en χ),

$$G_\eta^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\eta^{(\tau,n)}(x, z; \chi, z_0) e^{i\chi x_0} d\chi. \quad (4.21)$$

Le report de l'expression (4.21) dans la relation (4.19a) conduit à la relation,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_{zz}^2 + \kappa_{\eta z}^2] h_\eta^{(\tau,n)}(x, z; \chi, z_0) e^{i\chi x_0} d\chi = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0), \quad (4.22)$$

où

$$\chi^2 + \kappa_{\eta z}^2 = k_\eta^2, \quad \eta = L, T. \quad (4.23)$$

Après multiplication de l'équation (4.22) par le terme $e^{-i\chi' x_0}$ et intégration selon la coordonnée x_0 , et compte tenu de la relation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\chi - \chi') x_0} dx_0 = \delta(\chi - \chi'), \quad (4.24)$$

il vient :

$$[\partial_{zz}^2 + \kappa_{\eta z}^2] h_\eta^{(\tau,n)}(x, z; \chi, z_0) = -\frac{1}{2\pi} e^{-i\chi x} \delta(z - z_0). \quad (4.25)$$

La solution $h_\eta^{(\tau,n)}(x, z; \chi, z_0)$, qui répond aux conditions aux frontières (4.19b), est donnée par [66, 67] :

$$h_\eta^{(\tau,n)}(x, z; \chi, z_0) = -\frac{e^{-i\chi x} \cos \left[\kappa_{\eta z} (z_{<} + L_z/2) + \alpha_\eta^{(\tau,n)} \right] \cos \left[\kappa_{\eta z} (z_{>} - L_z/2) - \alpha_\eta^{(\tau,n)} \right]}{2\pi \kappa_{\eta z} \sin \left[\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_\eta^{(\tau,n)} \right]}, \quad (4.26)$$

où

$$\begin{cases} z_{>} = z & \text{et } z_{<} = z_0 & \text{si } z > z_0, \\ z_{>} = z_0 & \text{et } z_{<} = z & \text{si } z < z_0. \end{cases} \quad (4.27a)$$

$$\quad (4.27b)$$

Le report de l'expression (4.26) de la fonction $h_\eta^{(\tau,n)}(x, z; \chi, z_0)$ dans l'expression (4.21) conduit à l'expression de la fonction de Green :

$$G_\eta^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \left[\kappa_{\eta z} (z_{<} + L_z/2) + \alpha_\eta^{(\tau,n)} \right] \cos \left[\kappa_{\eta z} (z_{>} - L_z/2) - \alpha_\eta^{(\tau,n)} \right]}{\kappa_{\eta z} \sin \left[\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_\eta^{(\tau,n)} \right]} \frac{e^{-i\chi(x-x_0)}}{2\pi} d\chi. \quad (4.28)$$

Cette fonction de Green possède une infinité de pôles simples, qui correspondent aux zéros du sinus du dénominateur donnés par

$$\kappa_{\eta_z} = -\frac{2}{L_z} \alpha_{\eta}^{(\tau, n)} + \frac{p\pi}{L_z}, \quad (4.29)$$

où p est un entier relatif, et deux points singuliers en χ (singularités intégrables) donnés par

$$\kappa_{\eta_z} = 0. \quad (4.30)$$

Le choix du coefficient $\alpha_{\eta}^{(\tau, n)}$ est prépondérant. Il est choisi de telle sorte qu'une onde de Lamb particulière soit représentée dans l'équation (4.16) par une simple convolution de la fonction source qui la crée avec la fonction de Green (facteur $\hat{F}_{\eta_j}^{(\tau, n)}(x, z)$ du second membre). Ceci implique d'annuler le second facteur du second membre [c'est-à-dire en annulant l'expression (4.18)] ce qui est réalisé en posant (démonstration en annexe J) :

$$\alpha_{\eta}^{(\tau, n)} = -k_{\eta_z}^{(\tau, n)} \frac{L_z}{2} + \beta \quad \text{avec} \quad \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad (4.31)$$

où $k_{\eta_z}^{(\tau, n)}$ est donné par la relation (4.15). Ainsi (4.31), un nombre fini de pôles simples sont situés sur l'axe des χ réels [les deux premiers de ces pôles ($p = 0, \beta = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$) correspondant à l'onde de Lamb recherchée], les autres pôles (une infinité) étant situés sur l'axe des χ imaginaires ou sur deux demi-droites parallèles à cet axe (annexe K). A noter que $\beta = 0$ correspond à une onde paire (en cosinus) et $\beta = \frac{\pi}{2}$ à une onde impaire (en sinus).

La fonction de Green donnée par la relation (4.28) est soit calculée de façon numérique dans le plan complexe (annexe K), soit exprimée sous la forme d'une somme de résidus (annexe L).

N.B. :

En considérant l'admittance de paroi $\hat{Y}_{\eta}^{(\tau, n)}$ donnée par la relation (4.20) comme nulle, la fonction de Green satisfait alors à des conditions de Neumann sur les frontières $z = \pm L_z/2$. Ainsi, le calcul de la fonction de Green (4.28) par la méthode des résidus est effectué dans l'annexe M pour une admittance nulle et le résultat est comparé à la fonction de Green donnée par la relation (2.14) au chapitre 2 qui satisfait également à des conditions de Neumann et qui est développée sur une base de fonctions propres.

4.3.3 Formulation intégrale du problème en présence de rugosité : couplages

Lors de la propagation d'une onde de Lamb incidente, des ondes de Lamb (τ, n) non générées par la source acoustique sont créées par couplage dû à la rugosité. Ainsi, chaque terme \hat{U}_{η_j} du champ de déplacement (total) est exprimé à partir de

$$\hat{U}_{\eta_j} = \sum_{\tau=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}, \quad \eta = L, T, \quad j = x, z. \quad (4.32)$$

Les quatre termes \hat{U}_{η_j} du vecteur de déplacement $\hat{U}(x, z)$, dans le domaine D du guide étudié, satisfaisant aux équations de Helmholtz (4.8), peuvent être exprimés, par application du théorème de Green, de la façon suivante [66, 67] :

$$\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}(x, z) = \hat{F}_{\eta_j}^{(\tau, n)}(x, z) + \hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}(x, z) \right\}, \quad (4.33)$$

où le terme source a pour expression,

$$\hat{F}_{\eta_j}^{(\tau, n)}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} G_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z; x', z') \hat{f}_{\eta_j}^{(\tau, n)}(x', z') dx' dz', \quad (4.34)$$

et où l'opérateur intégral,

$$\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}(x, z) \right\} = \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z; x', z') \partial_{n_q} \hat{U}_{\eta_j}(x', z') - \hat{U}_{\eta_j}(x', z') \partial_{n_q} G_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z; x', z') \right] \Big|_{z'=z_q} dx', \quad (4.35)$$

traduit les effets de la rugosité sur la propagation du champ \hat{U}_{η_j} .

Dans la suite, la source génère un unique mode noté (σ, m) , les autres modes de Lamb (τ, n) étant créés par couplage dû à la rugosité; le terme source donné par la relation (4.34) est donc nul pour $(\tau, n) \neq (\sigma, m)$.

4.3.4 Résolution par approximations successives

Les composantes du champ de déplacement de chaque onde de Lamb (τ, n) sont recherchées par approximations successives :

$$[N] \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)} = {}^{(0)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)} + {}^{(1)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)} + \dots + {}^{(N-1)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)} + {}^{(N)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}, \quad (4.36)$$

où N est le nombre d'itérations retenu pour le calcul de l'amplitude $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$, ${}^{(0)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$ étant la perturbation à l'ordre $N = 0$ (solution en l'absence de rugosité), ${}^{(1)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$ la perturbation à l'ordre $N = 1$ (approximation de Born) et ainsi de suite.

La solution à l'ordre $N = 0$ en l'absence de rugosité est donnée par la relation (4.16), qui se réduit à

$${}^{(0)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\sigma, m)} = \hat{F}_{\eta_j}^{(\sigma, m)}(x, z), \quad (4.37)$$

du fait du choix du paramètre $\alpha_{\eta}^{(\sigma, m)}$.

En l'absence de rugosité, les champs diffusés ${}^{(1)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)}$ n'existent pas. La perturbation à l'ordre $N = 1$ du champ de chaque onde de Lamb (τ, n) (incidente ou diffusée) est alors donnée par la relation

$${}^{(1)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau, n)} = \delta \hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z) \left\{ {}^{(0)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\sigma, m)}(x, z) \right\}, \quad (4.38)$$

où l'opérateur $\delta \hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z)$ a pour expression

$$\delta \hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z) = \hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z) - {}^{(0)}\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau, n)}(x, z). \quad (4.39)$$

Ainsi, les champs diffusés $(1)\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$ sont donnés par la perturbation géométrique de la surface rugueuse par rapport à la paroi lisse du guide extérieur, traduite par l'opérateur $\delta\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z)$, et proportionnels au champ incident $(0)\hat{U}_{\eta_j}^{(\sigma,m)}$ auquel est appliqué l'opérateur $\delta\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z)$. Lorsque la hauteur de rugosité tend vers 0, les surfaces z_q tendent vers les surfaces du guide extérieur ($\pm L_z/2$), et l'opérateur $\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z)$ tend vers l'opérateur $(0)\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z)$ ($\delta\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z)$ s'annule alors).

Les perturbations à l'ordre N sont données en fonction de toutes les solutions à l'ordre $(N-1)$:

$${}^{(N)}\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)} = \delta\hat{\Gamma}_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z) \left\{ {}^{(N-1)}\hat{U}_{\eta_j}(x, z) \right\}. \quad (4.40)$$

N.B. :

Il est bon de noter que le membre de droite de l'équation (4.40) représente le couplage de modes dû aux profils de rugosité sur la frontière.

4.4 Couplage de deux ondes de Lamb dans une bande d'arrêt

Dans la suite de ce document les composantes normalisées du champ de déplacement des ondes de Lamb suivant les directions x et z sont exprimées par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{x_N}^{(\tau,n)}(x, z) = \frac{\hat{U}_{L_x}^{(\tau,n)}(x, z) + \hat{U}_{T_x}^{(\tau,n)}(x, z)}{\sqrt{\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \right)^* + \hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \right)^*}}, \\ \hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z) = \frac{\hat{U}_{L_z}^{(\tau,n)}(x, z) + \hat{U}_{T_z}^{(\tau,n)}(x, z)}{\sqrt{\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \right)^* + \hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \right)^*}}. \end{array} \right. \quad (4.41a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{x_N}^{(\tau,n)}(x, z) = \frac{\hat{U}_{L_x}^{(\tau,n)}(x, z) + \hat{U}_{T_x}^{(\tau,n)}(x, z)}{\sqrt{\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \right)^* + \hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \right)^*}}, \\ \hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z) = \frac{\hat{U}_{L_z}^{(\tau,n)}(x, z) + \hat{U}_{T_z}^{(\tau,n)}(x, z)}{\sqrt{\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{L_x}^{(\sigma,m)} \right)^* + \hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \left(\hat{Q}_{T_x}^{(\sigma,m)} \right)^*}}. \end{array} \right. \quad (4.41b)$$

4.4.1 Résultats au premier ordre des approximations

L'objectif de ce paragraphe est d'observer l'évolution du champ diffusé par la rugosité dans une bande d'arrêt (paragraphe 1.6) pour trois longueurs de rugosité différentes. Le guide considéré est une plaque ayant une rugosité en dents de scie symétriques (triangles isocèles) sur une surface, l'autre étant parfaitement lisse (figure 4.2). Les valeurs des paramètres du guide d'onde sont consignées dans le tableau 4.1. À noter que la plaque ayant la plus grande longueur de rugosité ($\ell = 30\lambda$) est la plaque utilisée pour l'expérience réalisée avec des ondes SH au LOMC et présentée au paragraphe 2.4.2. Cette plaque a également été utilisée pour une expérience menée au LOMC avec des ondes de Lamb [81].

$L_z = 2,88 \text{ mm}$	$\ell/\Lambda = 10$
$h = 0,12 \text{ mm}$	$\ell/\Lambda = 20$
$\Lambda = 4,2 \text{ mm}$	$\ell/\Lambda = 30$

Tableau 4.1 – Paramètres retenus pour les résultats présentés sur les figures 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6.

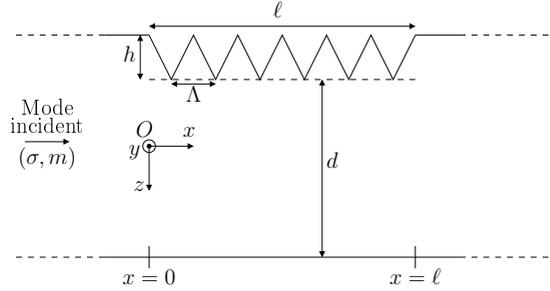


Figure 4.2 – Schéma du guide considéré.

Les courbes de dispersion des ondes A0, S0 et A1 sont tracées sur la figure 4.3 en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z). La source acoustique génère l'onde incidente S0 dans une bande de fréquence comprise dans l'intervalle $(fL_z) \in [1; 1,3]$ MHz.mm (bande grisée de la figure 4.3). Sur cette bande de fréquence, le couplage contra-directionnel entre l'onde incidente S0, l'onde créée par couplage A0 et la fréquence fondamentale de la rugosité est étudiée. Les célérités des ondes de volume longitudinales et transversales ont respectivement pour valeurs $c_L = 6430 \text{ m.s}^{-1}$ et $c_T = 3140 \text{ m.s}^{-1}$.

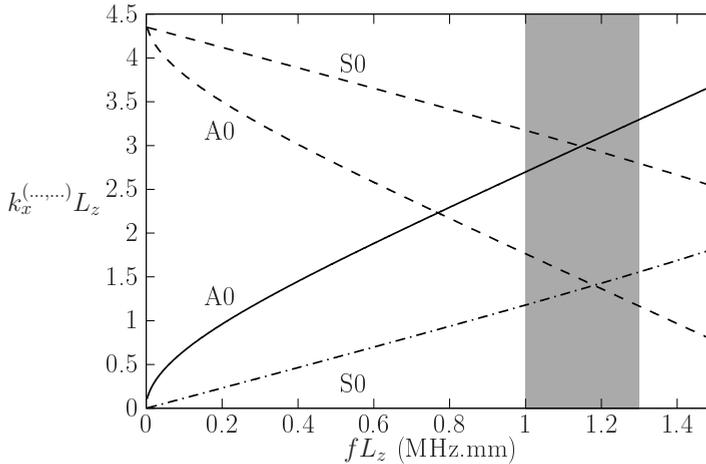


Figure 4.3 – Courbes de dispersion et courbes de couplage des ondes de Lamb en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z).

Les modules de la composante normalisée $\hat{U}_{x_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant x du champ de déplacement de l'onde diffusée A0 aux points $(x = 0, z = 0)$ et $(x = \ell, z = 0)$ sont respectivement tracés sur les figures 4.4a et 4.4b (elles sont quasi nulles en $z = 0$, comportement en sinus), et les modules de sa composante normalisée $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant z aux points $(x = 0, z = 0)$ et $(x = \ell, z = 0)$ sont respectivement tracés sur les figures 4.4c et 4.4d, ces quatre modules étant tracés en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z). L'amplitude de la composante $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ est beaucoup plus importante au point

($x = 0, z = 0$) que celle au point ($x = \ell, z = 0$), lorsque la fréquence de la source se rapproche de la fréquence centrale de la bande d'arrêt. De plus, ces amplitudes au point ($x = 0, z = 0$) varient en fonction de la fréquence selon une forme proche d'un sinus cardinal. L'amplitude du sommet du sinus cardinal augmente avec la longueur de rugosité et la largeur du lobe principal décroît lorsque la longueur de rugosité augmente. Ce résultat est en accord avec des résultats de la littérature [60, 81] et est similaire aux résultats obtenus avec des ondes SH au paragraphe 3.4.2.

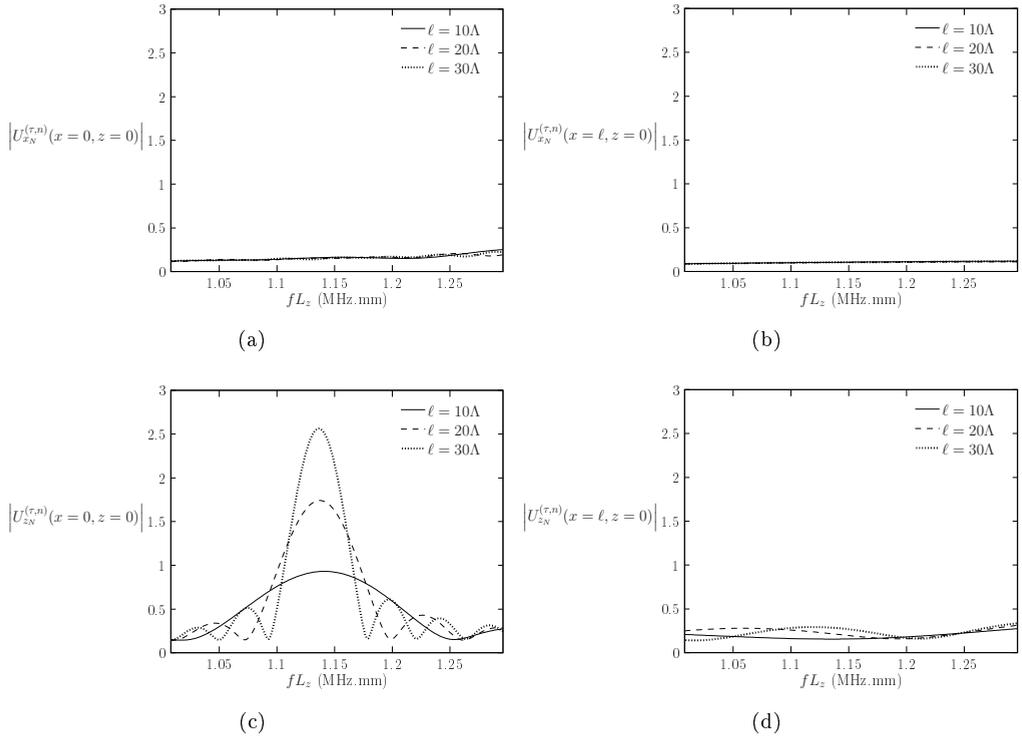


Figure 4.4 – Évolutions du module de la composante normalisée $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant x du champ de déplacement de l'onde diffusée A0 aux points (a) ($x = 0, z = 0$) et (b) ($x = \ell, z = 0$) en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z). Évolutions du module de la composante normalisée $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant z du champ de déplacement de l'onde diffusée A0 aux points (c) ($x = 0, z = 0$) et (d) ($x = \ell, z = 0$) en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z).

Les modules de la composante normalisée $\hat{U}_{x_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant x du champ de déplacement de l'onde diffusée A0 ($\tau = 1, n = 0$) aux points ($x = 0, z = L_z/4$) et ($x = \ell, z = L_z/4$) sont respectivement tracés sur les figures 4.5a et 4.5b et les modules de sa composante normalisée $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant z aux points ($x = 0, z = L_z/4$) et ($x = \ell, z = L_z/4$) sont respectivement tracés sur les figures 4.5c et 4.5d, ces quatre modules étant tracés en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z). Les composantes $\hat{U}_{x_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ et $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ sont, comme attendu, de faible amplitude au

point $(x = \ell, z = L_z/4)$ en comparaison avec celles aux points $(x = 0, z = L_z/4)$. Le module de la composante $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ est plus important au point $(x = 0, z = L_z/4)$ que celui au point $(x = \ell, z = L_z/4)$, car les fréquences de la source (domaine grisé de la figure 4.3) sont telles que le nombre d'onde transverse $k_{L_z}^{(\tau=1,n=0)}$ de l'onde de Lamb A0 est imaginaire : la composante $\hat{U}_{L_z}^{(\tau=1,n=0)}$ [donnée pour une plaque sans rugosité par l'expression (4.13)b] devient "évanescence" (en cosinus hyperbolique et non en cosinus).

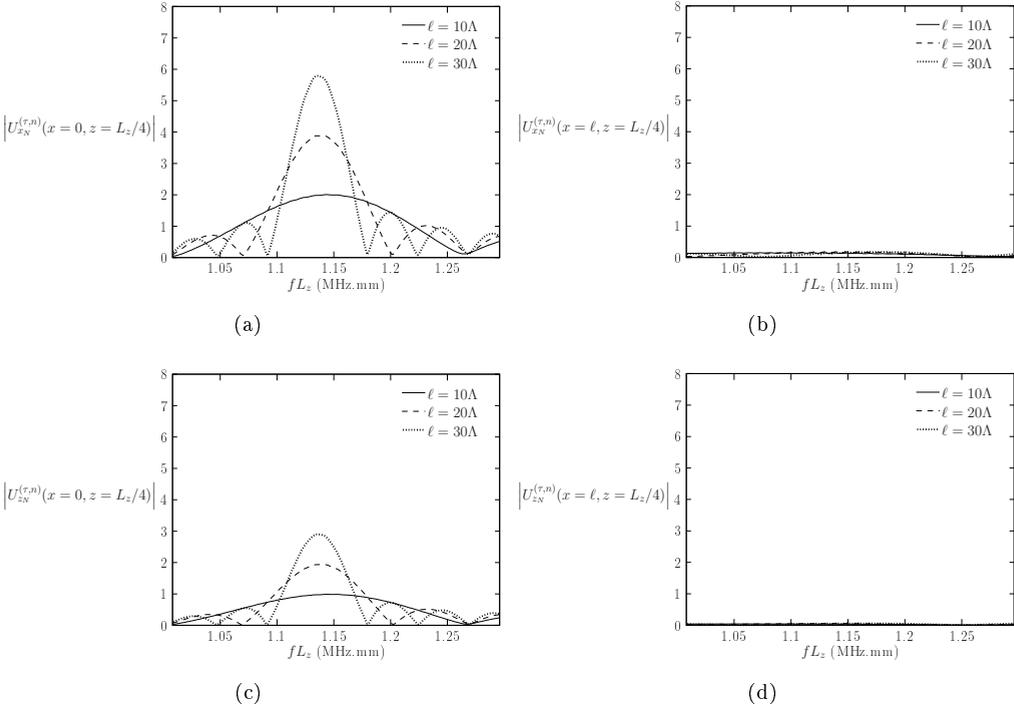


Figure 4.5 – Évolutions du module de la composante normalisée $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant x du champ de déplacement de l'onde diffusée A0 aux points (a) $(x = 0, z = L_z/4)$ et (b) $(x = \ell, z = L_z/4)$ en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z) . Évolutions du module de la composante normalisée $\hat{U}_{z_N}^{(\tau,n)}(x, z)$ suivant z du champ de déplacement de l'onde diffusée A0 aux points (c) $(x = 0, z = L_z/4)$ et (d) $(x = \ell, z = L_z/4)$ en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z) .

4.4.2 Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les résultats théoriques calculés par le modèle présenté dans ce chapitre avec des résultats expérimentaux. La géométrie considérée au paragraphe précédent pour $\ell = 30\Lambda$ est à nouveau considérée ici et le même couplage est recherché. L'amplitude de la composante suivant z du champ de déplacement diffusé de l'onde A0 est calculée au point $(x = 0, z = L_z/2)$. L'amplitude obtenue est normalisée par sa plus grande valeur et est tracée (tirets) sur la figure 4.6 en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z) , et le résultat expérimental correspondant

est tracé sur la même figure (trait plein).

La largeur de la bande d'arrêt, correspondant à la largeur du lobe principal, est approximativement la même entre les résultats expérimental et théorique.

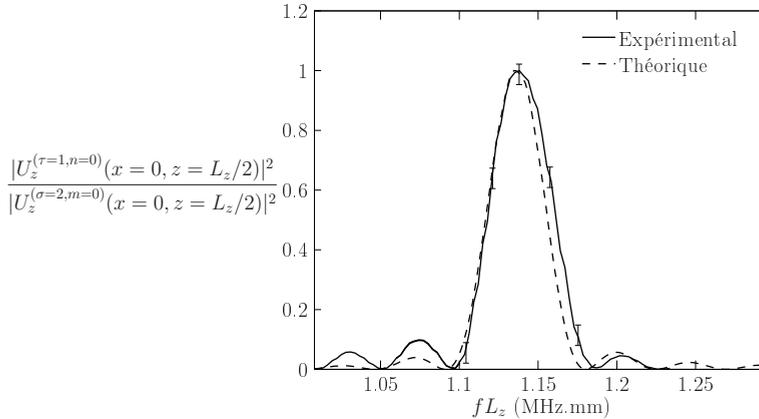


Figure 4.6 – Évolution du carré de la composante $\hat{U}_{zN}^{(\tau=1, n=0)}(x, z)$ suivant z du champ de déplacement de l'onde diffusée A0 au point $(x = 0, z = L_z/2)$ en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z). La courbe en trait plein représente le résultat expérimental et la courbe en tirets le résultat théorique.

Dans les résultats qui précèdent, la fonction de Green a été calculée par intégration numérique au voisinage de l'axe réel (voir annexe K, figures K.1). Cette intégrale peut également être exprimée par la somme de résidus (calculés en annexe L) et d'une intégrale le long du contour de la coupure (figure L.1). Cette dernière intégrale doit être calculée de façon numérique, ce qui rend a priori cette méthode de calcul de l'intégrale de Fourier sans intérêt en regard du calcul direct utilisé au-dessus.

4.4.3 Cartographies des champs

Ce paragraphe a pour objectif de présenter des cartes de champs en présence de rugosité. Étant donné le très grand nombre de points nécessaires à un tracé précis de cette cartographie, ce calcul a été effectué de façon très approchée, au point qu'il est raisonnable de considérer le résultat à ce stade comme étant essentiellement qualitatif. Le guide considéré est une plaque ayant une paroi lisse et une paroi rugueuse dont le profil de rugosité est une sinusoïde. Les paramètres adimensionnés utilisés sont consignés dans le tableau 4.2.

$L_z/\Lambda = 0,625$
$h/d = 0.02$
$\ell/\Lambda = 20$

Tableau 4.2 – Paramètres utilisés pour calculer les résultats des figures 4.8 et 4.9.

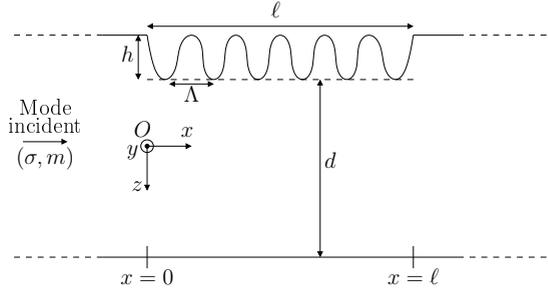


Figure 4.7 – Schéma du guide considéré.

Les courbes de dispersion des ondes de Lamb sont tracées sur la figure 4.8 en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z). La fréquence de la source acoustique, représentée par les pointillés verticaux sur la figure 4.8, étant telle que $fL_z = 1,975 \text{ MHz.mm}$, trois ondes de Lamb sont propagatives, les ondes antisymétriques A0 et A1 et l'onde symétrique S0. Le couplage contra-directionnel de l'onde incidente S0 avec une onde diffusée A1 pour la fréquence fondamentale de la rugosité ($n = 1$) est recherché.

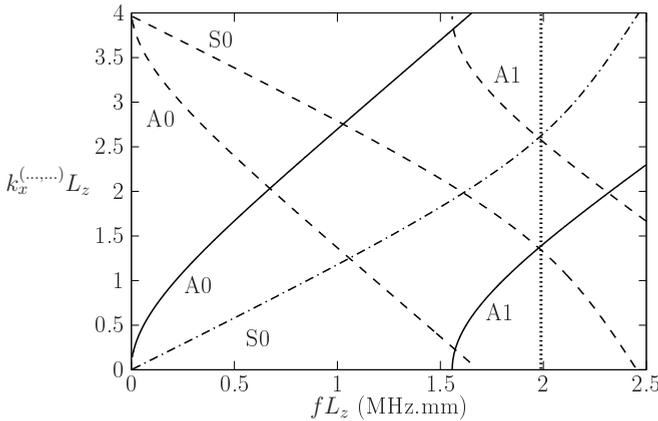
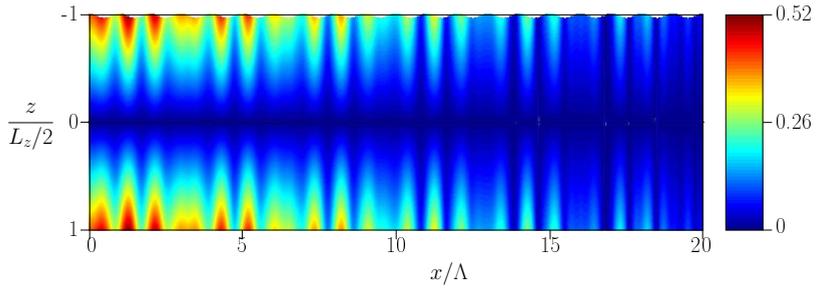
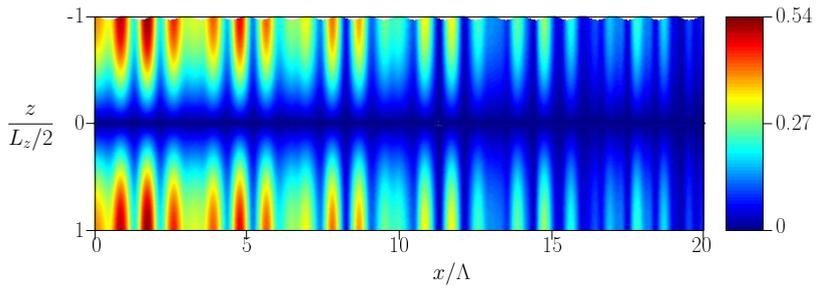


Figure 4.8 – Courbes de dispersion et courbes de couplage des ondes de Lamb en fonction du produit fréquence-épaisseur (fL_z).

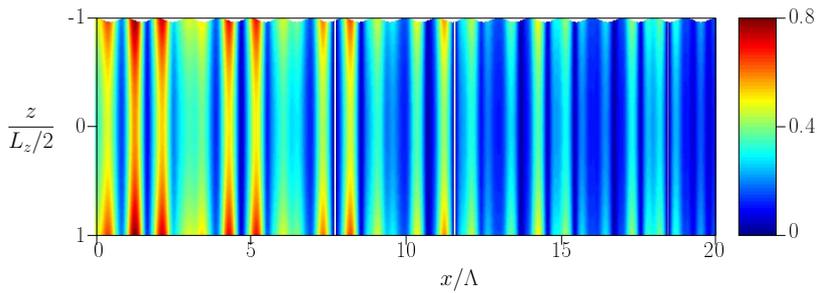
Les modules des quatre composantes $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau=1, n=1)}$ ($\eta = L, T$ et $j = x, z$) du champ de déplacement de l'onde de Lamb A1 diffusée sont tracées sur les figures 4.9 en fonction de la position adimensionnée x/Λ en abscisses et de la position adimensionnée $2z/L_z$ en ordonnées. Les quatre termes décroissent lorsque la position x croît. Comme attendu, les deux termes suivant x du champ de déplacement de l'onde de Lamb rétro-diffusée A1 sont antisymétriques par rapport au plan $z = 0$ et les deux termes suivant z sont symétriques.



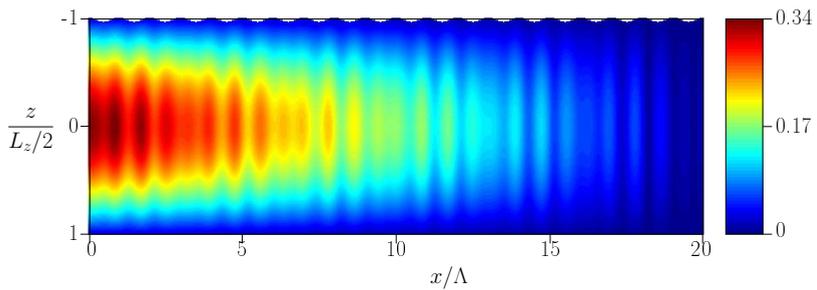
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4.9 – Modules des termes : (a) $\hat{U}_{L_x}^{(\tau=1, n=1)}$, (b) $\hat{U}_{T_x}^{(\tau=1, n=1)}$, (c) $\hat{U}_{L_z}^{(\tau=1, n=1)}$ et (d) $\hat{U}_{T_z}^{(\tau=1, n=1)}$ du champ de déplacement de l'onde de Lamb diffusée A1 en fonction de la position adimensionnée x/Λ en abscisses et de la position adimensionnée $2z/L_z$ en ordonnées.

4.5 Conclusion

L'extension aux ondes de Lamb du modèle proposé dans les chapitres précédents, objet de ce chapitre 4, prend une forme qui diffère assez fondamentalement de ce qui précède. Le modèle proposé, bien que pour l'heure étudié de façon relativement superficielle et validé seulement de façon succincte, nous apparaît présenter un intérêt du fait de sa relative simplicité et de sa capacité à décrire des situations réelles en ne nécessitant *in fine* que des temps de calculs raisonnables.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de modéliser la propagation acoustique dans des guides d'ondes à parois rugueuses. Une même méthode, basée sur une formulation intégrale, a été adaptée à trois différents types d'ondes guidées : ondes acoustiques dans les guides fluides avec dissipation thermo-visqueuse pariétale, ondes de cisaillement et ondes de Lamb dans des plaques solides isotropes.

Deux modèles, basés sur une formulation intégrale et un développement modal du champ de pression acoustique, ont été présentés dans le premier chapitre pour modéliser la propagation des ondes acoustiques dans des guides d'ondes en fluide dissipatif. Les limites du premier modèle (MII), point de départ de cette thèse, nous ont amenés à proposer un second modèle (IMI), équivalent, qui est celui retenu dans la suite de ce mémoire, du fait de sa rapidité (en termes de temps de calcul), de ses limites moins restrictives, mais aussi de sa relative simplicité. La comparaison entre les effets de dissipation thermo-visqueuse (qui prennent place dans les couches limites thermique et visqueuse) et les effets de diffusion dus aux rugosités de surface a permis de mettre en évidence l'influence prépondérante de la dissipation aux fréquences proches des fréquences de coupure des modes guidés et dans les bandes d'arrêt. Un cas simple connu de rugosité périodique a permis de mettre en évidence le phénomène d'atténuation des ondes incidentes dans les bandes d'arrêt et, ainsi, de valider les résultats proposés par le modèle. Enfin, un modèle de source affleurante à un guide d'onde a été proposé pour décrire les fonctions sources à prévoir pour créer un champ à structure donnée dans le guide (mode unique par exemple).

Le second chapitre traite de la propagation des ondes SH dans des plaques solides isotropes. Compte tenu de la polarisation des ondes SH et de la forme de rugosité choisie (parallèle à la polarisation du champ de déplacement), les conditions de contraintes nulles sur les frontières rugueuses conduisent à des conditions de Neumann pour le champ de déplacement (à l'instar de la pression acoustique en guide fluide non dissipatif). Ainsi, la seconde méthode (IMI), présentée au premier chapitre, a été adaptée à la modélisation de la propagation d'ondes SH dans des plaques solides isotropes. La comparaison avec un modèle simplifié (rugosités représentées par des petites cavités) a permis de mettre en lumière l'effet de la forme de la rugosité dans le processus de diffusion. Enfin, deux études expérimentales ont été réalisées, la première pour mettre en évidence le couplage de deux modes guidés dans une bande d'arrêt (résultat essentiellement qualitatif) et la

seconde pour quantifier la largeur de la bande fréquentielle associée à une bande d'arrêt et observer l'énergie reçue par l'onde couplée dans cette bande d'arrêt.

Le travail présenté dans le troisième chapitre s'inscrit dans la continuité du second chapitre. L'interprétation des résultats obtenus à partir de la méthode retenue pour modéliser la propagation des ondes SH dans les plaques rugueuses est approfondie par le calcul des expressions analytiques approchées des amplitudes des modes aux premiers ordres des perturbations (de faible profondeur), sur la base du développement en série de Fourier des profils de rugosité. De ces expressions approchées, deux types de couplage ont été mis en lumière : le couplage co-directionnel de deux modes guidés se propageant dans le même sens et le couplage contra-directionnel de deux modes se propageant dans des sens opposés. Une méthode alternative aux approximations successives, basée sur la théorie des modes couplés, est ensuite proposée, cette méthode permettant de calculer les amplitudes des modes au delà des limites liées aux approximations successives (grandes longueurs ou grandes profondeurs de rugosité), sous réserve de ne considérer que deux modes. L'étude de l'influence des paramètres géométriques de la rugosité hauteur, longueur, forme et fenêtrage de la rugosité et profils de rugosité à plusieurs périodicités spatiales a permis de mettre en évidence l'existence de couplage de modes à des fréquences déterminées (telles celles des bandes d'arrêt dans les réseaux périodiques) et par de là de mettre en évidence une corrélation claire entre les densités spectrales de puissance des profils de rugosité et les coefficients de réflexion et de transmission en énergie des modes. Elle ouvre ainsi la voie à une méthode inverse permettant de caractériser la rugosité à partir de la mesure du champ de déplacement ou en d'autres termes de caractériser des profils de rugosité par l'analyse des champs diffusés.

Enfin, le dernier chapitre aborde l'étude de la propagation des ondes de Lamb dans les plaques isotropes. La formulation intégrale a été appliquée au calcul analytique des quatre termes composant le champ de déplacement d'une onde de Lamb (projection suivant x et z des ondes longitudinales et transversales). Les fonctions de Green sont choisies (conditions aux frontières) de façon à traduire le comportement des champs diffusés par une superposition d'ondes proches des ondes de Lamb privilégiées par la structure du guide rugueux, l'absence des effets de frontière du guide extérieur à parois lisses étant traduite par des intégrales de surface nulles dans le formalisme intégral. Un premier calcul effectué au premier ordre des approximations successives a permis, non seulement de retrouver des résultats similaires à ceux obtenus avec des ondes SH (influence de la longueur de rugosité sur l'amplitude du champ diffusé), mais aussi de retrouver la largeur d'une bande d'arrêt mesurée. Autant pour les deux premiers types d'ondes ("champs scalaires", chapitre 1 et 2), la méthode utilisée a été validée par des études de stabilité et des comparaisons avec des résultats expérimentaux, autant le modèle présenté pour décrire la propagation des ondes de Lamb mérite d'être étudié et validé dans d'autres configurations.

RÉFÉRENCES

- [1] D. CHIMENTI et A. NAYFEH, Leaky Lamb waves in fibrous composite laminates, *J. Appl. Phys.*, vol. **58**(12), p. 4531–4538, 1985.
- [2] D. CHIMENTI et R. MARTIN, Nondestructive evaluation of composite laminates by leaky Lamb waves, *Ultrasonics*, vol. **29**(1), p. 13–21, 1991.
- [3] S. I. ROKHLIN, Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **69**(4), p. 922–928, 1981.
- [4] A. DEMMA, P. CAWLEY et M. LOWE, Scattering of the fundamental shear horizontal mode from steps and notches in plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **113**, p. 1880–1891, 2003.
- [5] A. H. NAYFEH, The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **89**(4), p. 1521–1531, 1991.
- [6] A. M. B. BRAGA et G. HERRMANN, Floquet waves in anisotropic periodically layered composites, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **91**(3), p. 1211–1227, 1992.
- [7] B. A. AULD, D. E. CHIMENTI et P. J. SHULL, Shear horizontal wave propagation in periodically layered composites, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. **43**(2), p. 319–325, 1996.
- [8] V. ALSHITS et G. MAUGIN, Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate, *Wave Motion*, vol. **41**(4), p. 357–394, 2005.
- [9] B. MORVAN, N. WILKIE-CHANCELLIER, H. DUFLO, A. TINEL et J. DUCLOS, Lamb wave reflection at the free edge of a plate, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **113**(3), p. 1417–1425, 2003.
- [10] V. PAGNEUX, Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **120**(2), p. 649–656, 2006.
- [11] E. LE CLEZIO, M. V. PREDOI, M. CASTAINGS, B. HOSTEN et M. ROUSSEAU, Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode, *Ultrasonics*, vol. **41**(1), p. 25–40, 2003.
- [12] V. PAGNEUX et A. MAUREL, Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. **458**, p. 1913–1930, 2002.
- [13] A. SHUVALOV, O. PONCELET et A. KISELEV, Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates, *Wave Motion*, vol. **45**(5), p. 605–615, 2008.

- [14] B. HOSTEN, M. DESCHAMPS et B. TITTMANN, Inhomogeneous wave generation and propagation in lossy anisotropic solids - application to the characterization of viscoelastic composite-materials, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **82**(5), p. 1763–1770, 1987.
- [15] M. CASTAINGS, B. HOSTEN et T. KUNDU, Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties, *NDT and E Int.*, vol. **33**(6), p. 377–392, 2000.
- [16] A. BERNARD, M. LOWE et M. DESCHAMPS, Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **110**(1), p. 186–196, 2001.
- [17] J. C. SAMUELS, On propagation of waves in slightly rough ducts, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **31**(3), p. 319–325, 1959.
- [18] R. F. SALANT, Acoustic propagation in waveguides with sinusoidal walls, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **53**(2), p. 504–507, 1973.
- [19] T. W. DAWSON et J. A. FAWCETT, A boundary integral equation method for acoustic scattering in a waveguide with nonplanar surfaces, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **87**(3), p. 1110–1125, 1990.
- [20] M. SPIVACK, Sound propagation in an irregular two-dimensional waveguide, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **101**(3), p. 1250–1255, 1997.
- [21] J. A. SANCHEZ-GIL, V. FREILIKHER, A. A. MARADUDIN et I. V. YURKEVICH, Reflection and transmission of waves in surface-disordered waveguides, *Phys. Rev. B*, vol. **59**, p. 5915–5925, 1999.
- [22] A. H. NAYFEH, *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons Inc, 1973.
- [23] A. H. NAYFEH, Sound waves in two-dimensional ducts with sinusoidal walls, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **56**(3), p. 768–770, 1974.
- [24] A. H. NAYFEH et O. R. ASFAR, Parallel-plate waveguide with sinusoidally perturbed boundaries, *J. Appl. Phys.*, vol. **45**(11), p. 4797–4800, 1974.
- [25] A. H. NAYFEH, Acoustic waves in ducts with sinusoidally perturbed walls and mean flow, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **57**(5), p. 1036–1039, 1975.
- [26] M. A. HAWWA, Acoustic/elastic stop-band interaction in waveguides involving two periodicities, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **102**(1), p. 137–142, 1997.
- [27] N. AMIR, V. PAGNEUX et J. KERGOMARD, A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. part II. results, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **101**(5), p. 2504–2517, 1997.
- [28] V. PAGNEUX, N. AMIR et J. KERGOMARD, A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. part I. theory and validation, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **100**(4), p. 2034–2048, 1996.
- [29] V. PAGNEUX et A. MAUREL, Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. **462**, p. 1315–1339, 2006.
- [30] S. BANERJEE et T. KUNDU, Elastic wave propagation in sinusoidally corrugated waveguides, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **119**(4), p. 2006–2017, 2006.

- [31] S. BANERJEE et T. KUNDU, Symmetric and anti-symmetric Rayleigh-Lamb modes in sinusoidally corrugated waveguides: an analytical approach, *Int. J. Solids Struct.*, vol. **43**(21), p. 6551–6567, 2006.
- [32] W. B. FRASER, Orthogonality relation for the Rayleigh-Lamb mode of vibration of a plate, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **59**(1), p. 215–216, 1976.
- [33] B. A. AULD, *Acoustic fields and waves in solids*, vol. 2. R. E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1990.
- [34] L. MOREAU, M. CASTAINGS, B. HOSTEN et M. V. PREDOI, An orthogonality relation-based technique for post-processing finite element predictions of waves scattering in solid waveguides, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **120**(2), p. 611–620, 2006.
- [35] G. SHKERDIN et C. GLORIEUX, Lamb mode conversion in a plate with a delamination, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **116**(4), p. 2089–2100, 2004.
- [36] V. PAGNEUX et A. MAUREL, Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **116**(4), p. 1913–1920, 2004.
- [37] Y.-H. PAO et V. VARATHARAJULU, Huygen’s principle, radiation conditions, and integral formulas for the scattering of elastic waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **59**(6), p. 1361–1371, 1976.
- [38] S. V. BIRYUKOV, Y. GULYAEV, V. KRYLOV et V. PLESSKY, *Surface Acoustic Wave in Inhomogenous Media*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1995.
- [39] M. SPIES, Green’s tensor function for Lamb’s problem: The general anisotropic case, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **102**(4), p. 2438–2441, 1997.
- [40] I. NÚÑEZ, R. K. ING, C. NEGREIRA et M. FINK, Transfer and Green functions based on modal analysis for Lamb waves generation, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **107**(5), p. 2370–2378, 2000.
- [41] J. T. FOKKEMA, Reflection and transmission of acoustic waves by the periodic interface between a solid and a fluid, *Wave Motion*, vol. **3**(2), p. 145–157, 1981.
- [42] R. L. HOLFORD, Scattering of sound waves at a periodic, pressure-release surface: An exact solution, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **70**(4), p. 1116–1128, 1981.
- [43] A. JUNGMAN, L. ADLER, J. D. ACHENBACH et R. ROBERTS, Reflection from a boundary with periodic roughness: Theory and experiment, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **74**(3), p. 1025–1032, 1983.
- [44] R. BRIERS, O. LEROY, O. PONCELET et M. DESCHAMPS, Experimental verification of the calculated diffraction field generated by inhomogeneous waves obliquely incident on a periodically rough liquid–solid boundary, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **106**(2), p. 682–687, 1999.
- [45] A. A. MARADUDIN et D. L. MILLS, The attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness, *Ann. Phys.*, vol. **100**(1), p. 262–309, 1976.
- [46] N. E. GLASS, R. LOUDON et A. A. MARADUDIN, Propagation of Rayleigh surface waves across a large-amplitude grating, *Phys. Rev. B*, vol. **24**(12), p. 6843–6861, 1981.

- [47] N. E. GLASS et A. A. MARADUDIN, Leaky surface-elastic waves on both flat and strongly corrugated surfaces for isotropic, nondissipative media, *J. Appl. Phys.*, vol. **54**(2), p. 796–805, 1983.
- [48] A. A. MARADUDIN, P. RYAN et A. R. MCGURN, Shear horizontal acoustic shape resonances, *Phys. Rev. B*, vol. **38**(5), p. 3068–3074, 1988.
- [49] A. A. MARADUDIN, X. HUANG et A. P. MAYER, Propagation of shear horizontal surface acoustic waves parallel to the grooves of a random grating, *J. Appl. Phys.*, vol. **70**(1), p. 53–62, 1991.
- [50] V. V. KOSACHEV et A. V. SHCHEGROV, Dispersion and attenuation of surface acoustic waves of various polarizations on a stress-free randomly rough surface of solid, *Ann. Phys.*, vol. **240**(2), p. 225–265, 1995.
- [51] L. BRILLOUIN et M. PARODI, *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*. Dunod, 1956.
- [52] C. ELACHI et C. YEH, Mode conversion in periodically disturbed thin-film waveguides, *J. Appl. Phys.*, vol. **45**(8), p. 3494–3499, 1974.
- [53] C. ELACHI, Waves in active and passive periodic structures. Review, *Proc. IEEE*, vol. **64**(12), p. 1666–1698, 1976.
- [54] S.-E. SANDSTROM, Stopbands in a corrugated parallel plate waveguide, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **79**(5), p. 1293–1298, 1986.
- [55] S. R. SESHADRI, Coupling of guided modes in thin films with surface corrugation, *J. Appl. Phys.*, vol. **63**(10), p. 115–146, 1988.
- [56] A. EL-BAHRAWY, Stopbands and passbands for symmetric Rayleigh-Lamb modes in a plate with corrugated surfaces, *J. Sound Vib.*, vol. **170**(2), p. 145–160, 1994.
- [57] Z. TAO, W. HE, Y. XIAO et X. WANG, Wide forbidden band induced by the interference of different transverse acoustic standing-wave modes, *Appl. Phys. Lett.*, vol. **92**(12), p. 121920–3, 2008.
- [58] Y. YAO, Z. HOU, F. WU et X. FU, The band structure and propagation property of Lamb waves in stubbed waveguides, *Wave Motion*, vol. **47**(6), p. 343–349, 2010.
- [59] B. MORVAN, A.-C. HLADKY-HENNION, D. LEDUC et J.-L. IZBICKI, Ultrasonic guided waves on a periodical grating: coupled modes in the first Brillouin zone, *J. Appl. Phys.*, vol. **101**(11), p. 114906–7, 2007.
- [60] M. BAVENCOFFE, A. HLADKY-HENNION, B. MORVAN et J. IZBICKI, Attenuation of Lamb waves in the vicinity of a forbidden band in a phononic crystal, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. **56**(9), p. 1960–1967, 2009.
- [61] O. I. LOBKIS et D. E. CHIMENTI, Elastic guided waves in plates with surface roughness. II. Experiments, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **102**(1), p. 150–159, 1997.
- [62] T. KUNDU, S. BANERJEE et K. JATA, An experimental investigation of guided wave propagation in corrugated plates showing stop bands and pass bands, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **120**(3), p. 1217–1226, 2006.

- [63] D. LEDUC, B. MORVAN, P. PAREIGE et J.-L. IZBICKI, Measurement of the effects of rough surfaces on Lamb waves propagation, *NDT and E Int.*, vol. **37**(3), p. 207–211, 2004.
- [64] D. LEDUC, A.-C. HLADKY-HENNION, B. MORVAN, J.-L. IZBICKI et P. PAREIGE, Propagation of Lamb waves in a plate with a periodic grating: interpretation by phonon, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **118**(4), p. 2234–2239, 2005.
- [65] C. POTEL et M. BRUNEAU, Modes coupling due to nonhomogeneously shaped walls in duct acoustics, *J. Sound Vib.*, vol. **313**, p. 738–759, 2008.
- [66] M. BRUNEAU, *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermes Sciences Publicat., 1998.
- [67] P. M. MORSE et H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics, Part I*. McGraw-Hill, 1953.
- [68] K. S. SUM et J. PAN, Effects of the inclination of a rigid wall on the free vibration characteristics of acoustic modes in a trapezoidal cavity, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **119**(4), p. 2201–2210, 2006.
- [69] T. VALIER-BRASIER, C. POTEL et M. BRUNEAU, On the modeling of modes coupling in dissipative fluid-filled waveguide with corrugated surfaces, *J. Appl. Phys.*, vol. **106**(3), p. 034913–8, 2009.
- [70] T. VALIER-BRASIER, C. POTEL et M. BRUNEAU, Shear acoustic waves polarized along the ridged surface of an isotropic solid plate: Mode coupling effects due to the shape profile, *J. Appl. Phys.*, vol. **108**(7), p. 074910–4, 2010.
- [71] P. M. MORSE et H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics, Part II*. McGraw-Hill, 1953.
- [72] D. ROYER et E. DIEULESAINT, *Ondes élastiques dans les solides : Génération, interaction acousto-optique, applications*, vol. 2. Masson, 1997.
- [73] D. LEDUC, B. MORVAN, A.-C. HLADKY-HENNION, P. PAREIGE et J.-L. IZBICKI, Lamb wave propagation in a plate with a grooved surface with several spatial periodicities, *Ultrasonics*, vol. **44**, p. 1359–1363, 2006.
- [74] C. POTEL, D. LEDUC, B. MORVAN, C. DEPOLLIÉ, A.-C. HLADKY-HENNION, J.-L. IZBICKI, P. PAREIGE et M. BRUNEAU, Lamb wave propagation in a rough plate. I. Analytical and experimental results in an anisotropic plate, *J. Appl. Phys.*, vol. **104**(7), p. 074908–10, 2008.
- [75] C. POTEL, D. LEDUC, B. MORVAN, C. DEPOLLIÉ, A.-C. HLADKY-HENNION, J.-L. IZBICKI, P. PAREIGE et M. BRUNEAU, Lamb wave propagation in a rough plate. II. Analytical and numerical results in a fluid plate, *J. Appl. Phys.*, vol. **104**(7), p. 074909–6, 2008.
- [76] T. VALIER-BRASIER, C. POTEL et M. BRUNEAU, Modes coupling of shear acoustic waves polarized along a one-dimensional corrugation on the surfaces of an isotropic solid plate, *Appl. Phys. Lett.*, vol. **93**(16), p. 164101–3, 2008.
- [77] D. LEDUC, B. MORVAN, A.-C. HLADKY-HENNION et J.-L. IZBICKI, Interaction of Lamb waves with a grating composed of two spatial periodicities: study in dual space, *NDT and E Int.*, vol. **42**(6), p. 513–517, 2009.

- [78] C. KITTEL, *Introduction To Solid State Physics*. John Wiley & Sons Inc, 8th revised éd., 2004.
- [79] J. ACHENBACH, *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland, 1987.
- [80] J. MIKLOWITZ, *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. Elsevier Science Ltd, 1984.
- [81] M. BAVENCOFFE, *Propagation d'ondes de Lamb dans un guide d'ondes à interface périodique*. Thèse doctorat, Université du Havre, 2009.
- [82] M. CASTAINGS et B. HOSTEN, Lamb and SH waves generated and detected by air-coupled ultrasonic transducers in composite material plates, *NDT and E Int.*, vol. **34**(4), p. 249–258, 2001.
- [83] M. V. PREDOI, M. CASTAINGS, B. HOSTEN et C. BACON, Wave propagation along transversely periodic structures, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **121**(4), p. 1935–1944, 2007.
- [84] P. RAJAGOPAL et M. J. S. LOWE, Short range scattering of the fundamental shear horizontal guided wave mode normally incident at a through-thickness crack in an isotropic plate, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **122**(3), p. 1527–1538, 2007.
- [85] P. RAJAGOPAL et M. J. S. LOWE, Scattering of the fundamental shear horizontal guided wave by a part-thickness crack in an isotropic plate, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **124**(5), p. 2895–2904, 2008.
- [86] M. RATASSEPP, M. J. S. LOWE, P. CAWLEY et A. KLAUSON, Scattering of the fundamental shear horizontal mode in a plate when incident at a through crack aligned in the propagation direction of the mode, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **124**(5), p. 2873–2882, 2008.
- [87] B. LE CROM et M. CASTAINGS, Shear horizontal guided wave modes to infer the shear stiffness of adhesive bond layers, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **127**(4), p. 2220–2230, 2010.
- [88] R. B. THOMPSON, Generation of horizontally polarized shear waves in ferromagnetic materials using magnetostrictively coupled meander-coil electromagnetic transducers, *Appl. Phys. Lett.*, vol. **34**(2), p. 175–177, 1979.
- [89] C. F. VASILE et R. B. THOMPSON, Excitation of horizontally polarized shear elastic waves by electromagnetic transducers with periodic permanent magnets, *J. Appl. Phys.*, vol. **50**(4), p. 2583–2588, 1979.
- [90] V. GUSEV et M. KOUZNETSOV, Laser-induced piezoexcitation of acousti shear horizontal wave-guide modes, *Ultrasonics*, vol. **31**(4), p. 251–257, 1993.
- [91] D. LEDUC, *Propagation d'ondes de Lamb en présence d'une interface rugueuse*. Thèse doctorat, Université du Havre, 2005.
- [92] R. B. THOMPSON, Mechanisms of electromagnetic generation and detection of ultrasonic Lamb waves in iron-nickel alloy polycrystals, *J. Appl. Phys.*, vol. **48**(12), p. 4942–4950, 1977.
- [93] M. HIRAO et H. OGI, An SH-wave EMAT technique for gas pipeline inspection, *NDT and E Int.*, vol. **32**(3), p. 127–132, 1999.

- [94] H. GAO, S. ALI et B. LOPEZ, Efficient detection of delamination in multilayered structures using ultrasonic guided wave EMATs, *NDT and E Int.*, vol. **43**(4), p. 316–322, 2010.
- [95] D. ALLEYNE et P. CAWLEY, A two-dimensional fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. **89**(3), p. 1159–1168, 1991.
- [96] J. MAX et J.-L. LACOUME, *Méthodes et techniques de traitement du signal*. Dunod, 2001.
- [97] B. A. AULD, *Acoustic fields and waves in solids*, vol. 1. R. E. Krieger Publishing Compagny, Malabar, Florida, 1990.
- [98] D. ROYER et E. DIEULESANT, *Ondes élastiques dans les solides : Propagation libre et guidée*, vol. 1. Masson, 1997.
- [99] I. A. VIKTOROV, *Rayleigh and Lamb waves: Physical theory and applications*. Plenum Press, 1967.
- [100] L. BRILLOUIN, *Wave Propagation and Group Velocity*. Academic Pr, 1960.
- [101] P. GATIGNOL, C. POTEL et N. BEDRICI, Improvement of the computation of fourier integrals using the complex plane: Application to acoustic fields, *Appl. Phys. Lett.*, vol. **96**(4), p. 044103–3, 2010.

Annexe A

FONCTIONS PROPRES (1D) DU GUIDE RÉGULIER

Les fonctions propres $\hat{\psi}^{(\sigma,m)}$ transverses (1D) du guide régulier sont des solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{zz}^2 + \left(\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) = 0, \\ \left[\partial_z \pm ik_0 \hat{Y} \right] \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z \in \left[-\frac{L_z}{2}, \frac{L_z}{2} \right], \\ z = \pm \frac{L_z}{2}. \end{array} \quad (\text{A.1a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{zz}^2 + \left(\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) = 0, \\ \left[\partial_z \pm ik_0 \hat{Y} \right] \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z \in \left[-\frac{L_z}{2}, \frac{L_z}{2} \right], \\ z = \pm \frac{L_z}{2}. \end{array} \quad (\text{A.1b})$$

Ces fonctions propres peuvent être classées en fonction de leur symétrie par rapport au plan $z = 0$: les fonctions $\hat{\psi}^{(1,m)}$ représentent les modes antisymétriques et les fonctions $\hat{\psi}^{(2,m)}$ les modes symétriques. Ces fonctions propres sont orthogonales et normées à l'unité :

$$\int_{-L_z/2}^{L_z/2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) dz = \delta_{\mu m} \delta_{\alpha \sigma}, \quad (\text{A.2})$$

où $\delta_{\mu m}$ (et $\delta_{\alpha \sigma}$) est le symbole de Kronecker, où α et σ représentent des variables dichotomiques prenant les valeurs 1 (modes antisymétriques) ou 2 (modes symétriques) et où μ et m sont des nombres quantiques prenant toutes les valeurs entières de 0 à l'infini.

A.1 Fonctions propres pour champ scalaire en fluide non dissipatif ou en solide isotrope (ondes SH)

En considérant l'admittance de paroi \hat{Y} comme nulle dans le système (A.1), c'est-à-dire en considérant le fluide comme non-dissipatif et la paroi parfaitement rigide, les fonctions propres antisymétriques et symétriques ont pour expressions respectives,

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{(1,m)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin \left(k_z^{(1,m)} z \right), \end{array} \right. \quad (\text{A.3a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{(2,m)}(z) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{m0}}{L_z}} \cos \left(k_z^{(2,m)} z \right), \end{array} \right. \quad (\text{A.3b})$$

avec pour valeurs propres correspondantes,

$$\begin{cases} k_z^{(1,m)} = (2m+1)\pi/L_z, & \text{(A.4a)} \\ k_z^{(2,m)} = 2m\pi/L_z. & \text{(A.4b)} \end{cases}$$

A.2 Fonctions propres en fluide dissipatif : solution générale

Les solutions de l'équation (A.1) en fluide dissipatif, c'est-à-dire pour une admittance de paroi \hat{Y} non nulle, ont pour expressions,

$$\begin{cases} \hat{\psi}^{(1,m)}(z) = \left(\hat{N}^{(1,m)}\right)^{-1} \sin\left(\hat{\chi}_z^{(1,m)} z\right), & \text{(A.5a)} \\ \hat{\psi}^{(2,m)}(z) = \left(\hat{N}^{(2,m)}\right)^{-1} \cos\left(\hat{\chi}_z^{(2,m)} z\right), & \text{(A.5b)} \end{cases}$$

où les valeurs propres $\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}$ sont obtenues en résolvant les expressions

$$\begin{cases} \tan\left[\hat{\chi}_z^{(1,m)} L_z/2\right] = -\hat{\chi}_z^{(1,m)}/ik_0\hat{Y}, & \text{(A.6a)} \\ \tan\left[\hat{\chi}_z^{(2,m)} L_z/2\right] = ik_0\hat{Y}/\hat{\chi}_z^{(2,m)}, & \text{(A.6b)} \end{cases}$$

et où les coefficients de normalisation $\hat{N}^{(\sigma,m)}$ ont pour expression

$$\hat{N}^{(\sigma,m)} = \sqrt{\frac{L_z}{2} + \frac{ik_0\hat{Y}}{\left(\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}\right)^2 - \left(k_0\hat{Y}\right)^2}}. \quad \text{(A.7)}$$

A.3 Fonctions propres en fluide dissipatif : solution approchée

Dans la mesure où les épaisseurs des couches limites thermiques et visqueuses sont de faibles dimension en comparaison avec l'épaisseur du guide, l'utilisation de solutions approchées peut s'avérer plus pratique. Dans ce but, la résolution des équations (A.6a) et (A.6b) peut être menée de façon approchée en considérant l'hypothèse suivante :

$$\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} = k_z^{(\sigma,m)} + \hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)}, \quad \text{avec } k_z^{(\sigma,m)} \gg \left|\hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)}\right|, \quad \forall(\sigma, m) \neq (2, 0), \quad \text{(A.8)}$$

où les termes $k_z^{(\sigma,m)}$ sont les valeurs propres de Neumann données par les relations (A.4) et où les termes $\hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)}$ représentent des perturbations dues aux effets visqueux et thermiques. Compte tenu de l'approximation (A.8) et des expressions des valeurs propres $k_z^{(\sigma,m)}$ (A.4), les équations (A.6a) et (A.6b), peuvent être mises sous la forme,

$$\tan\left(\frac{\hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)} L_z}{2}\right) = \frac{ik_0\hat{Y}}{k_z^{(\sigma,m)} + \hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)}}. \quad \text{(A.9)}$$

En effectuant un développement limité à l'ordre le plus bas en $\hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)} L_z/2$, l'expression (A.9) se ramène aux expressions des perturbations $\hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)}$

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)} = \sqrt{\frac{2ik_0\hat{Y}}{L_z}}, & \text{si } (\sigma, m) = (2, 0), \\ \hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)} = \frac{2ik_0\hat{Y}}{k_z^{(\sigma,m)}L_z}, & \text{si } (\sigma, m) \neq (2, 0). \end{cases} \quad (\text{A.10a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{A.10b})$$

Remarque :

Lorsque l'admittance de paroi tend vers 0, les perturbations $\hat{\varepsilon}_z^{(\sigma,m)}$ tendent également vers 0 et les valeurs propres $\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}$ tendent vers les valeurs propres $k_z^{(\sigma,m)}$. Compte tenu des relations (A.7) et (A.10a), la limite lorsque l'admittance de paroi \hat{Y} tend vers 0 du coefficient de normalisation de la fonction propre associée au mode ($\sigma = 2, m = 0$) a pour expression

$$\lim_{\hat{Y} \rightarrow 0} \hat{N}^{(\sigma,m)} = \lim_{\hat{Y} \rightarrow 0} \sqrt{\frac{L_z}{2} + \frac{1}{\left(\frac{2}{L_z} + ik_0\hat{Y}\right)}} = \sqrt{L_z}. \quad (\text{A.11})$$

De même, la limite lorsque l'admittance de paroi \hat{Y} tend vers 0 du coefficient de normalisation de la fonction propre associée à chaque mode différent du mode ($\sigma = 2, m = 0$) a pour expression

$$\lim_{\hat{Y} \rightarrow 0} \hat{N}^{(\sigma,m)} = \sqrt{\frac{L_z}{2}}. \quad (\text{A.12})$$

Les coefficients de normalisation donnés par les relations (A.11) et (A.12) sont les mêmes que ceux donnés par les relations (A.3), c'est-à-dire les mêmes coefficients de normalisation que pour les expressions des modes propres en fluide non-dissipatif. En pratique, dans les calculs, ce sont ces derniers qui sont retenus en première approximation.

Annexe B

OPÉRATEUR D'ÉPAISSEUR

L'opérateur $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x)$ est un opérateur d'épaisseur qui dépend de la profondeur de la rugosité et qui traduit la non orthogonalité des fonctions propres sur chaque section du guide rugueux. Cet opérateur $B_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x)$ est donné par la relation

$$\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x) = \left(\int_{-L_z/2}^{z_1} dz + \int_{z_2}^{L_z/2} dz \right) \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z), \quad (\text{B.1})$$

qui, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions propres sur l'intervalle $[-L_z/2, L_z/2]$, peut être mise sous la forme,

$$\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x) = \delta_{\sigma\alpha} \delta_{m\mu} - \int_{z_1}^{z_2} \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z) \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z) dz. \quad (\text{B.2})$$

B.1 Expressions de l'opérateur de volume en fluide dissipatif

Pour le calcul de l'opérateur $\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ en fluide dissipatif, deux cas doivent être considérés : le cas où les modes (α, μ) et (σ, m) sont différents et le cas où ils sont égaux.

B.1.1 Cas $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$

Après une double intégration par partie, l'intégrale de l'expression (B.2) peut être mise sous la forme,

$$\begin{aligned} \hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x, y) = & \left[\left(\partial_z \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)} \right) \left(\partial_{zz}^{-2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)} \right) - \left(\partial_z^{-1} \hat{\psi}^{(\sigma,m)} \right) \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)} \right]_{z_1}^{z_2} \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \left(\partial_{zz}^{-2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)} \right) \left(\partial_{zz}^2 \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)} \right) dz, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec $\partial_z \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$ et $\partial_{zz}^2 \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$, les dérivées première et seconde de $\hat{\psi}^{(\sigma,m)}$ par rapport à z , $\partial_z^{-1} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$ une primitive de $\hat{\psi}^{(\sigma,m)}$ et $\partial_z^{-2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$, une primitive de $\partial_z^{-1} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$. Compte tenu des expressions (1.7a), la dérivée seconde $\partial_{zz}^2 \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$ et les primitives, $\partial_z^{-1} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$ et $\partial_z^{-2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}$, peuvent être mises sous les formes respectives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{zz}^2 \hat{\psi}^{(\sigma,m)} = - \left[\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} \right]^2 \hat{\psi}^{(\sigma,m)}, \end{array} \right. \quad (\text{B.4a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z^{-1} \hat{\psi}^{(\sigma,m)} = - \frac{1}{\left[\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} \right]^2} \partial_z \hat{\psi}^{(\sigma,m)}, \end{array} \right. \quad (\text{B.4b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{zz}^{-2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)} = - \frac{1}{\left[\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} \right]^2} \hat{\psi}^{(\sigma,m)}. \end{array} \right. \quad (\text{B.4c})$$

Le report de ces expressions dans l'équation (B.3) conduit à la relation

$$\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x,y) = - \sum_{q=1}^2 (-1)^q \frac{\hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z_q) \partial_z \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z_q) - \hat{\psi}^{(\alpha,\mu)}(z_q) \partial_z \hat{\psi}^{(\sigma,m)}(z_q)}{\left[\hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} \right]^2 - \left[\hat{\chi}_z^{(\alpha,\mu)} \right]^2}. \quad (\text{B.5})$$

B.1.2 Cas $(\alpha, \mu) = (\sigma, m)$

Dans le cas où les modes (α, μ) et (σ, m) sont les mêmes, le report des expressions (1.8a) et (1.8b) dans l'intégrale de l'expression (B.2) conduit à la relation

$$\hat{B}_{(\sigma,\mu)}^{(\sigma,m)}(x,y) = 1 - \frac{1}{2} \left(\hat{N}^{(\sigma,m)} \right)^{-2} \sum_{q=1}^2 (-1)^q \left[z_q - (-1)^\sigma \frac{1}{2 \hat{\chi}_z^{(\sigma,m)}} \sin \left(2 \hat{\chi}_z^{(\sigma,m)} z_q \right) \right]. \quad (\text{B.6})$$

B.2 Expressions de l'opérateur de volume en fluide non dissipatif

L'opérateur $B_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}$ en fluide non-dissipatif est défini selon les deux cas considérés ici.

B.2.1 Cas $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$

Si le mode (σ, m) est le mode plan $[(\sigma, m) = (2, 0)]$, alors l'opérateur de volume a pour expression,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{(\alpha=1,\mu)}^{(\sigma=2,m=0)}(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{L_z k_z^{(\alpha,\mu)}} \sum_{q=1}^2 (-1)^q \cos \left(k_z^{(\alpha,\mu)} z_q \right), \end{array} \right. \quad (\text{B.7a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{(\alpha=2,\mu \neq 0)}^{(\sigma=2,m=0)}(x,y) = - \frac{\sqrt{2}}{L_z k_z^{(\alpha,\mu)}} \sum_{q=1}^2 (-1)^q \sin \left(k_z^{(\alpha,\mu)} z_q \right). \end{array} \right. \quad (\text{B.7b})$$

Si le mode (σ, m) n'est pas le mode plan $[(\sigma, m) \neq (2, 0)]$, alors le raisonnement est le même que pour le cas $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$ en fluide dissipatif. L'opérateur de volume a ainsi

pour expression,

$$\hat{B}_{(\alpha,\mu)}^{(\sigma,m)}(x,y) = - \sum_{q=1}^2 (-1)^q \frac{\psi^{(\sigma,m)}(z_q) \partial_z \psi^{(\alpha,\mu)}(z_q) - \psi^{(\alpha,\mu)}(z_q) \partial_z \psi^{(\sigma,m)}(z_q)}{\left[k_z^{(\sigma,m)} \right]^2 - \left[k_z^{(\alpha,\mu)} \right]^2}. \quad (\text{B.8})$$

B.2.2 Cas $(\alpha, \mu) = (\sigma, m)$

Si le mode (σ, m) est un mode antisymétrique, alors l'opérateur de volume a pour expression,

$$B_{(\sigma=1,m)}^{(\sigma=1,m)}(x,y) = 1 - \frac{1}{L_z} \sum_{q=1}^2 (-1)^q \left[z_q - \frac{1}{2k_z^{(\sigma,m)}} \sin \left(2k_z^{(\sigma,m)} z_q \right) \right], \quad (\text{B.9})$$

et s'il est un mode symétrique, alors l'opérateur de volume a pour expressions,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{(\sigma=2,m=0)}^{(\sigma=2,m=0)}(x,y) = 1 - \frac{1}{L_z} \sum_{q=1}^2 (-1)^q z_q, \end{array} \right. \quad (\text{B.10a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{(\sigma=2,m \neq 0)}^{(\sigma=2,m \neq 0)}(x,y) = 1 - \frac{1}{L_z} \sum_{q=1}^2 (-1)^q \left[z_q + \frac{1}{2k_z^{(\sigma,m)}} \sin \left(2k_z^{(\sigma,m)} z_q \right) \right]. \end{array} \right. \quad (\text{B.10b})$$

Annexe C

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

L'objectif de cet annexe est de présenter la méthode d'intégration des intégrales de contour de la formulation intégrale. Ces intégrales peuvent être mises sous la forme générale,

$$I(x) = \int_0^\ell f(x') \frac{e^{-ik|x-x'|}}{2ik} dx'. \quad (\text{C.1})$$

Cette intégrale est mise sous la forme

$$I(x) = \frac{1}{2ik} [I_u(x) + I_v(x)], \quad (\text{C.2})$$

avec

$$\begin{cases} I_u(x) = e^{-ikx} u(x), & (\text{C.3a}) \\ I_v(x) = e^{ikx} v(x), & (\text{C.3b}) \end{cases}$$

et où

$$\begin{cases} u(x) = \int_0^x f(x') e^{ikx'} dx', & (\text{C.4a}) \\ v(x) = \int_x^\ell f(x') e^{-ikx'} dx'. & (\text{C.4b}) \end{cases}$$

Les intégrales $I_u(x)$ et $I_v(x)$ étant calculées numériquement, il est nécessaire de discrétiser l'axe x en N_x intervalles de même longueur Δx , tels que $\ell = N_x \Delta x$.

C.1 Calcul de la fonction I_u

Au premier point de l'axe x , c'est-à-dire en $x = 0$, les fonctions $u(x)$ et $I_u(x)$ sont nulles. Au point $x = \Delta x$, la fonction $u(x)$ peut être mise sous la forme,

$$u(\Delta x) = \int_0^{\Delta x} f(x') e^{ikx'} dx' \simeq [f(0) + f(\Delta x) e^{ik\Delta x}] \frac{\Delta x}{2}, \quad (\text{C.5})$$

et la fonction $I_u(x)$ a alors pour expression compte tenu de la relation (C.3a),

$$I_u(\Delta x) = [f(0)e^{-ik\Delta x} + f(\Delta x)] \frac{\Delta x}{2}. \quad (\text{C.6})$$

Au point $x = 2\Delta x$, la fonction $u(x)$ peut être mise sous la forme,

$$u(2\Delta x) = \int_0^{2\Delta x} f(x')e^{ikx'} dx' = \int_0^{\Delta x} f(x')e^{ikx'} dx' + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} f(x')e^{ikx'} dx', \quad (\text{C.7})$$

ou encore, compte tenu de l'expression (C.5),

$$u(2\Delta x) = u(\Delta x) + [f(\Delta x)e^{-ik\Delta x} + f(2\Delta x)] \frac{\Delta x}{2} e^{2ik\Delta x}. \quad (\text{C.8})$$

Le report de la relation (C.8) dans la relation (C.3a) conduit à l'expression de la fonction $I_u(x)$ au point $x = 2\Delta x$,

$$I_u(2\Delta x) = e^{-ik2\Delta x} \left\{ u(\Delta x) + [f(\Delta x)e^{-ik\Delta x} + f(2\Delta x)] \frac{\Delta x}{2} e^{2ik\Delta x} \right\}, \quad (\text{C.9})$$

qui, compte tenu de l'expression (C.6), peut être mise sous la forme,

$$I_u(2\Delta x) = I_u(\Delta x)e^{-ik\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} [f(\Delta x)e^{-ik\Delta x} + f(2\Delta x)]. \quad (\text{C.10})$$

D'une manière plus générale, au point $x = n\Delta x$ (avec n un entier positif tel que $0 < n \leq N_x$), la fonction $u(x)$ peut être mise sous la forme,

$$u(n\Delta x) = \int_0^{n\Delta x} f(x')e^{ikx'} dx' = \int_0^{(n-1)\Delta x} f(x')e^{ikx'} dx' + \int_{(n-1)\Delta x}^{n\Delta x} f(x')e^{ikx'} dx', \quad (\text{C.11})$$

ou encore

$$u(n\Delta x) = u[(n-1)\Delta x] + \{f[(n-1)\Delta x]e^{-ik\Delta x} + f(n\Delta x)\} \frac{\Delta x}{2} e^{ikn\Delta x}. \quad (\text{C.12})$$

Ainsi, la fonction $I_u(x)$ a pour expression, compte tenu des relations (C.3a) et (C.12),

$$I_u(n\Delta x) = e^{-ikn\Delta x} u[(n-1)\Delta x] + e^{-ikn\Delta x} \{f[(n-1)\Delta x]e^{-ik\Delta x} + f(n\Delta x)\} \frac{\Delta x}{2} e^{ikn\Delta x}, \quad (\text{C.13})$$

ou encore

$$I_u(n\Delta x) = e^{-ik\Delta x} I_u[(n-1)\Delta x] + \{f[(n-1)\Delta x]e^{-ik\Delta x} + f(n\Delta x)\} \frac{\Delta x}{2}. \quad (\text{C.14})$$

C.2 Calcul de la fonction I_v

Le raisonnement pour calculer cette intégrale est semblable à celui effectué pour calculer la fonction $I_u(x)$, à la différence qu'au lieu de partir du premier point de l'axe ($x = 0$) et de calculer dans le sens des x croissants, il est nécessaire de commencer par le dernier point ($x = \ell = N_x\Delta x$) et de calculer dans le sens des x décroissants.

Au point $x = N_x \Delta x$, les fonctions $v(x)$ et $I_v(x)$ sont nulles. Au point $x = (N_x - 1)\Delta x$, la fonction $v(x)$ peut être mise sous la forme,

$$v[(N_x - 1)\Delta x] = e^{-ik(N_x - 1)\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \{f[(N_x - 1)\Delta x] + f(N_x \Delta x)e^{-ik\Delta x}\}, \quad (\text{C.15})$$

et la fonction $I_v(x)$ a alors pour expression, compte tenu des relations (C.3b) et (C.15),

$$I_v[(N_x - 1)\Delta x] = \frac{\Delta x}{2} \{f[(N_x - 1)\Delta x] + f(N_x \Delta x)e^{-ik\Delta x}\}. \quad (\text{C.16})$$

Au point $x = (N_x - 2)\Delta x$, la fonction $v(x)$ peut être mise sous la forme,

$$v[(N_x - 2)\Delta x] = \int_{(N_x - 2)\Delta x}^{(N_x - 1)\Delta x} f(x')e^{-ikx'} dx' + \int_{(N_x - 1)\Delta x}^{N_x \Delta x} f(x')e^{-ikx'} dx', \quad (\text{C.17})$$

ou encore, compte tenu de l'expression (C.15),

$$\begin{aligned} v[(N_x - 2)\Delta x] &= e^{-ik(N_x - 2)\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \{f[(N_x - 2)\Delta x] + f[(N_x - 1)\Delta x]e^{-ik\Delta x}\} \\ &\quad + v[(N_x - 1)\Delta x]. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Le report de la relation (C.18) dans la relation (C.3b) conduit à l'expression de la fonction $I_v(x)$ au point $x = (N_x - 2)\Delta x$,

$$\begin{aligned} I_v[(N_x - 2)\Delta x] &= \frac{\Delta x}{2} \{f[(N_x - 2)\Delta x] + f[(N_x - 1)\Delta x]e^{-ik\Delta x}\} \\ &\quad + e^{-ik\Delta x} I_v[(N_x - 1)\Delta x]. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

D'une manière plus générale, au point $x = (N_x - p)\Delta x$ (avec p un entier positif tel que $0 < p \leq N_x$), la fonction $v(x)$ peut être mise sous la forme,

$$v[(N_x - p)\Delta x] = \int_{(N_x - p)\Delta x}^{(N_x - p + 1)\Delta x} f(x')e^{-ikx'} dx' + \int_{(N_x - p + 1)\Delta x}^{N_x \Delta x} f(x')e^{-ikx'} dx', \quad (\text{C.20})$$

ou encore

$$\begin{aligned} v[(N_x - p)\Delta x] &= \frac{\Delta x}{2} e^{-ik(N_x - p)\Delta x} \{f[(N_x - p)\Delta x] + f[(N_x - p + 1)\Delta x]e^{-ik\Delta x}\} \\ &\quad + v[(N_x - p + 1)\Delta x]. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Ainsi, la fonction $I_v(x)$ a alors pour expression compte tenu des relations (C.3b) et (C.21),

$$\begin{aligned} I_v[(N_x - p)\Delta x] &= e^{ik(N_x - p)\Delta x} v[(N_x - p + 1)\Delta x] \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2} \{f[(N_x - p)\Delta x] + f[(N_x - p + 1)\Delta x]e^{-ik\Delta x}\}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

ou encore

$$\begin{aligned} I_v[(N_x - p)\Delta x] &= e^{-ik\Delta x} I_v[(N_x - p + 1)\Delta x] \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2} \{f[(N_x - p)\Delta x] + f[(N_x - p + 1)\Delta x]e^{-ik\Delta x}\}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Annexe D

EXPRESSION DE LA SOURCE SURFACIQUE

La fonction source a pour expression (1.56),

$$\hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x) = i\omega\rho\psi^{(\alpha,\mu)}(z_1 = -L_z/2) \int_{-\ell_t}^0 V(x_1)h^{(\alpha,\mu)}(x; x_1)dx_1. \quad (\text{D.1})$$

Compte tenu de l'expression (1.49), la relation (1.56) peut être mise sous la forme

$$\hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x) = i\omega\rho(-1)^{\alpha+\mu} \sqrt{\frac{2 - \delta_{\alpha 2}\delta_{\mu 0}}{L_z}} \frac{1}{2ik_x^{(\alpha,\mu)}} \left(\hat{C}_1^{(\alpha,\mu)}(x) + \hat{C}_2^{(\alpha,\mu)}(x) \right), \quad (\text{D.2})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_1^{(\alpha,\mu)}(x) = \int_{-\ell_t}^0 V_0(x_1)e^{-k_x^{(\alpha,\mu)}|x-x_1|}dx_1, \end{array} \right. \quad (\text{D.3a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_2^{(\alpha,\mu)}(x) = e^{-k_x^{(\alpha,\mu)}(x+2\ell_t)} \int_{-\ell_t}^0 V_0(x_1)e^{-k_x^{(\alpha,\mu)}x_1}dx_1. \end{array} \right. \quad (\text{D.3b})$$

En imposant une source ayant pour expression,

$$V(x) = V_0 \cos \left[k^{(\sigma,m)}(x + \ell_t) \right], \quad (\text{D.4})$$

le système (D.3) peut être mis sous la forme,

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{C}_1^{(\alpha,\mu)} &= \frac{V_0}{2} \left\{ e^{ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t} \int_{-\ell_t}^0 e^{i[k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)}]x_1} dx_1 \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t} \int_{-\ell_t}^0 e^{-i[k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)}]x_1} dx_1 \right\}. \end{aligned} \right. \quad (\text{D.5a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{C}_2^{(\alpha,\mu)} &= \frac{V_0}{2} e^{-2ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t} \left\{ e^{ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t} \int_{-\ell_t}^0 e^{i[k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)}]x_1} dx_1 \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t} \int_{-\ell_t}^0 e^{-i[k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)}]x_1} dx_1 \right\}. \end{aligned} \right. \quad (\text{D.5b})$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\quad \left\{ e^{ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t} \int_{-\ell_t}^0 e^{i[k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)}]x_1} dx_1 \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t} \int_{-\ell_t}^0 e^{-i[k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)}]x_1} dx_1 \right\}. \end{aligned} \right. \quad (\text{D.5c})$$

D.1 Expression des modes $(\alpha, \mu) \neq (\sigma, m)$

Après le calcul des intégrales, les relations du système (D.5) peuvent respectivement être mises sous les formes,

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{C}_1^{(\alpha,\mu)} &= \frac{V_0}{2i} \left[\frac{e^{ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t} - e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t}}{k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)}} + \frac{e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t} - e^{-ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t}}{k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)}} \right], \end{aligned} \right. \quad (\text{D.6a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{C}_2^{(\alpha,\mu)} &= \frac{V_0}{2i} \left[\frac{e^{i(k_x^{(\sigma,m)} - 2k_x^{(\alpha,\mu)})\ell_t} - e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t}}{k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)}} + \frac{e^{ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t} - e^{-i(k_x^{(\sigma,m)} + 2k_x^{(\alpha,\mu)})\ell_t}}{k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)}} \right]. \end{aligned} \right. \quad (\text{D.6b})$$

En sommant les expressions de $\hat{C}_1^{(\alpha,\mu)}$ et $\hat{C}_2^{(\alpha,\mu)}$,

$$\hat{C}_1^{(\alpha,\mu)} + \hat{C}_2^{(\alpha,\mu)} = \frac{V_0}{2i} \left[\frac{e^{ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t} - e^{-i(k_x^{(\sigma,m)} + 2k_x^{(\alpha,\mu)})\ell_t}}{k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)}} + \frac{e^{i(k_x^{(\sigma,m)} - 2k_x^{(\alpha,\mu)})\ell_t} - e^{-ik_x^{(\sigma,m)}\ell_t}}{k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)}} \right], \quad (\text{D.7})$$

et en reportant le résultat dans l'expression (D.1), le terme source associé au mode (α, μ) a pour expression

$$\hat{W}^{(\alpha,\mu)}(x=0) = \frac{\omega\rho V_0 \ell_t (-1)^{\alpha+\mu}}{2k_x^{(\alpha,\mu)}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{\alpha 2} \delta_{\mu 0}}{L_z}} e^{-ik_x^{(\alpha,\mu)}\ell_t} \left\{ \text{sinc} \left[\left(k_x^{(\sigma,m)} + k_x^{(\alpha,\mu)} \right) \ell_t \right] + \text{sinc} \left[\left(k_x^{(\sigma,m)} - k_x^{(\alpha,\mu)} \right) \ell_t \right] \right\}. \quad (\text{D.8})$$

D.2 Expression du terme source des modes (σ, m)

Après intégration, les relations du système (D.5) peuvent respectivement être mises sous les formes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_1^{(\sigma, m)} = \frac{V_0}{2} \left(\frac{e^{ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t} - e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}}{2ik_x^{(\sigma, m)}} \right) + \frac{V_0}{2} \ell_t e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}, \\ \hat{C}_2^{(\sigma, m)} = \frac{V_0}{2} \left(\frac{e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t} - e^{-3ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}}{2ik_x^{(\sigma, m)}} \right) + \frac{V_0}{2} \ell_t e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}. \end{array} \right. \quad (\text{D.9a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_1^{(\sigma, m)} = \frac{V_0}{2} \left(\frac{e^{ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t} - e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}}{2ik_x^{(\sigma, m)}} \right) + \frac{V_0}{2} \ell_t e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}, \\ \hat{C}_2^{(\sigma, m)} = \frac{V_0}{2} \left(\frac{e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t} - e^{-3ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}}{2ik_x^{(\sigma, m)}} \right) + \frac{V_0}{2} \ell_t e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}. \end{array} \right. \quad (\text{D.9b})$$

En sommant les expressions de $\hat{C}_1^{(\sigma, m)}$ et $\hat{C}_2^{(\sigma, m)}$,

$$\hat{C}_1^{(\sigma, m)} + \hat{C}_2^{(\sigma, m)} = V_0 \left[\ell_t e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t} + \frac{e^{ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t} - e^{-3ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t}}{4ik_x^{(\sigma, m)}} \right], \quad (\text{D.10})$$

et en reportant le résultat dans l'expression (D.1), le terme source associé au mode (σ, m) a pour expression

$$\hat{W}^{(\sigma, m)}(x=0) = \frac{\omega \rho V_0 \ell_t (-1)^{\sigma+m}}{2k_x^{(\sigma, m)}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{\sigma 2} \delta_{m0}}{L_z}} e^{-ik_x^{(\sigma, m)} \ell_t} \left[\text{sinc}(2k_x^{(\sigma, m)} \ell_t) + 1 \right], \quad (\text{D.11})$$

où sinc est la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(u) = \sin(u)/u$.

Annexe E

MODÈLE DES PETITES MASSES (PM)

Ce modèle analytique est une première approche de la modélisation de la propagation d'ondes SH dans des plaques solides isotropes à parois rugueuses [76]. Les irrégularités de parois du guide d'onde sont considérées comme de petites dents (petits volumes de matériau assimilées à des parallélépipèdes rectangles de hauteur $h_q^{(0)}$, $q = 1, 2$) placés de part et d'autre d'un guide d'onde d'épaisseur d . Ces petits éléments de matériau sont considérés comme des masses localisées exprimées par unité d'aire $m_q = \rho h_q^{(0)}$, mis en mouvement dans la direction y par une force de cisaillement appliquée aux interfaces intérieures $z = -d/2$ et $z = d/2$. La contrainte de cisaillement agissant sur les masses m_q a pour expression

$$T_{yz} = (-1)^q \mu \partial_z \hat{U}_y. \quad (\text{E.1})$$

En appliquant la seconde loi de Newton à chaque masse surfacique, il vient :

$$\rho h_q \partial_{tt}^2 \hat{U} = (-1)^q \mu \partial_z \hat{U}, \quad q = 1, 2, \quad \forall x > 0, \quad \forall t. \quad (\text{E.2})$$

Le champ de déplacement harmonique est ainsi solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_T^2) \hat{U}(x, z) = 0, & \forall (x, z) \in D, \end{cases} \quad (\text{E.3a})$$

$$\begin{cases} \partial_z \hat{U}(x, z = -d/2) = -k_T^2 h_1(x) \hat{U}(x, z = -d/2), & \forall x > 0, \text{ en } z = -d/2, \end{cases} \quad (\text{E.3b})$$

$$\begin{cases} \partial_z \hat{U}(x, z = d/2) = k_T^2 h_2(x) \hat{U}(x, z = d/2), & \forall x > 0, \text{ en } z = d/2. \end{cases} \quad (\text{E.3c})$$

Le champ de déplacement complexe est recherché sous la forme d'un développement sur les fonctions propres $\psi^{(\sigma, m)}(z)$,

$$\hat{U}_y(x, z) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}^{(\sigma, m)}(x) \psi^{(\sigma, m)}(z). \quad (\text{E.4})$$

Les fonctions propres $\psi^{(\sigma, m)}(z)$ retenues dans ce modèle sont solutions du problème aux valeurs propres transverses de Neumann dans le domaine $z \in [-d/2, d/2]$ du guide intérieur ; elles ont pour expression,

$$\begin{cases} \psi^{(1, m)}(z) = \sqrt{2/d} \sin(k_z^{(1, m)} z), \end{cases} \quad (\text{E.5a})$$

$$\begin{cases} \psi^{(2, m)}(z) = \sqrt{(2 - \delta_{m0})/d} \cos(k_z^{(2, m)} z), \end{cases} \quad (\text{E.5b})$$

et les valeurs propres associées $k_z^{(\sigma,m)}$ sont données par les relations

$$\begin{cases} k_z^{(1,m)} = (2m+1)\pi/d, & \text{(E.6a)} \\ k_z^{(2,m)} = 2m\pi/d. & \text{(E.6b)} \end{cases}$$

En multipliant l'équation (E.3a) par la fonction propre $\psi^{(\sigma,m)}(z)$ et en intégrant le résultat sur l'intervalle $-d/2 \leq z \leq d/2$, il vient :

$$\left[\partial_{xx}^2 + \left(k_x^{(\sigma,m)} \right)^2 \right] \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \hat{\Gamma}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x) \hat{A}^{(\alpha,r)}(x), \quad \text{(E.7)}$$

où $\hat{\Gamma}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x)$ est un opérateur de volume, obtenu après une double intégration par parties, et qui a pour expression

$$\hat{\Gamma}_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x) = (-1)^{m+r} k_T^2 \frac{\sqrt{(2 - \delta_{\sigma 2} \delta_{m0})(2 - \delta_{\alpha 2} \delta_{r0})}}{L_z} [(-1)^{\alpha+\sigma} h_1(x) + h_2(x)]. \quad \text{(E.8)}$$

Le terme du second membre de l'équation (E.7) met en lumière les couplages de modes dus aux rugosité des frontières de la plaque. L'équation (E.7) est résolue par approximations successives (2.27) et en faisant usage à chaque itération N du théorème de Green avec la fonction de Green donnée par la relation (2.15).

L'avantage de ce modèle est d'exprimer les mécanismes de couplages modaux par des solutions analytiques très simples qui doivent pouvoir être suffisante dans certaines applications.

Remarque :

Il est intéressant de noter que le problème considéré ici est analytiquement le même que celui de la propagation d'un champ de pression acoustique dans un guide d'onde fluide délimité par des parois rigides et rugueuses, lorsque la rugosité est modélisée par un opérateur qui tient compte de la compressibilité du fluide piégé dans les dents (considérées comme des petites cavités de volume V_0 et de surface S_0 , avec $V_0/S_0 = h_q$) :

$$\partial_z \hat{p}(x, z = (-1)^q d/2) = (-1)^q k_0^2 \frac{V_0}{S_0} \hat{p}(x, z = (-1)^q d/2). \quad \text{(E.9)}$$

Annexe F

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

F.1 Flux d'énergie moyen

La moyenne temporelle du flux d'énergie d'une onde SH (chapitre 2) est donnée par la relation [79, 80]

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} P_x dz, \quad (\text{F.1})$$

où $P_x = -t_{xy}\dot{u}_y$ est la composante du vecteur de Poynting selon la direction de propagation (x), t_{xy} et \dot{u}_y étant respectivement les parties réelles de la composante \hat{T}_{xy} du tenseur complexe des contraintes et de la vitesse particulaire. Sachant que

$$\begin{cases} t_{xy} = \frac{1}{2} (\hat{T}_{xy} + \hat{T}_{xy}^*), \end{cases} \quad (\text{F.2a})$$

$$\begin{cases} \dot{u}_y = \frac{1}{2} (\hat{u}_y + \hat{u}_y^*), \end{cases} \quad (\text{F.2b})$$

où l'astérisque représente le complexe conjugué, la composante P_x du vecteur de Poynting peut être mise sous la forme

$$P_x = -\frac{1}{4} (\hat{T}_{xy} + \hat{T}_{xy}^*) (\hat{u}_y + \hat{u}_y^*). \quad (\text{F.3})$$

Le champ de déplacement étant monochromatique de pulsation ω , la contrainte \hat{t}_{xy} et la vitesse \hat{u}_y peuvent être mises sous les formes respectives,

$$\begin{cases} \hat{t}_{xy} = \hat{T}_{xy} e^{i\omega t}, \end{cases} \quad (\text{F.4a})$$

$$\begin{cases} \hat{u}_y = \hat{U}_y e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (\text{F.4b})$$

Le report des expressions (F.4) dans la relation (F.3) conduit à la relation

$$P_x = -\frac{1}{4} (\hat{T}_{xy} \hat{U}_y e^{2i\omega t} + \hat{T}_{xy}^* \hat{U}_y^* e^{-2i\omega t} + \hat{T}_{xy} \hat{U}_y^* + \hat{T}_{xy}^* \hat{U}_y), \quad (\text{F.5})$$

dont les seuls termes à moyenne temporelle non nulle sont $\hat{T}_{xy} \hat{U}_y^*$ et $\hat{T}_{xy}^* \hat{U}_y$. Par suite, la composante du vecteur de Poynting a pour expression

$$P_x = -\frac{1}{4} (\hat{T}_{xy} \hat{U}_y^* + \hat{T}_{xy}^* \hat{U}_y). \quad (\text{F.6})$$

Compte tenu de la loi de Hooke, la contrainte \hat{T}_{xy} est exprimée en fonction du déplacement $\hat{U}_y = \hat{U}_y/i\omega$

$$\hat{T}_{xy} = \mu \partial_x \hat{U}_y. \quad (\text{F.7})$$

Le report de l'expression du développement (2.8) du champ de déplacement \hat{U}_y sur la base de fonctions propres dans la relation (F.6) conduit à l'expression

$$P_x = -i \frac{\omega \mu}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \psi^{(\sigma,m)} \psi^{(\alpha,r)} \left[\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \left(\partial_x \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right)^* - \left(\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right)^* \partial_x \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right], \quad (\text{F.8})$$

dont le report dans l'expression (F.1) permet d'exprimer le flux d'énergie moyen sous la forme

$$\bar{\phi} = -i \frac{\omega \mu}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left[\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \left(\partial_x \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right)^* - \left(\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right)^* \partial_x \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right] \int_{z_1}^{z_2} \psi^{(\sigma,m)} \psi^{(\alpha,r)} dz, \quad (\text{F.9})$$

ou encore, compte tenu de la relation (B.2),

$$\bar{\phi} = -i \frac{\omega \mu}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left[\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \left(\partial_x \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right)^* - \left(\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right)^* \partial_x \hat{A}^{(\alpha,r)}(x) \right] \left(\delta_{\alpha\sigma} \delta_{\mu m} - B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x) \right). \quad (\text{F.10})$$

Aux points $x = 0$ et $x = \ell$ correspondant respectivement à l'entrée et à la sortie de la partie rugueuse du guide, le guide rugueux est confondu avec le guide à géométrie compatible, impliquant que le terme $B_{(\alpha,r)}^{(\sigma,m)}(x)$ est nul en ces deux points (annexe B). Le flux d'énergie moyen aux points $x = 0$ et $x = \ell$ peut alors être mis sous la forme

$$\bar{\phi}(x) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\phi}^{(\sigma,m)}(x), \quad \text{en } x = 0 \text{ et en } x = \ell, \quad (\text{F.11})$$

où $\bar{\phi}^{(\sigma,m)}$ représente le flux d'énergie moyen du mode (σ, m) et a pour expression,

$$\bar{\phi}^{(\sigma,m)}(x) = -i \frac{\omega \mu}{4} \left[\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \left(\partial_x \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right)^* - \left(\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right)^* \partial_x \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right], \quad \text{en } x = 0, \ell. \quad (\text{F.12})$$

F.2 Densité moyenne d'énergie

La densité moyenne d'énergie est donnée par la relation [79, 80]

$$\bar{E} = \bar{E}_c + \bar{E}_p, \quad (\text{F.13})$$

où \bar{E}_c et \bar{E}_p sont respectivement les densités moyennes d'énergie cinétique et de déformation, exprimées respectivement par les relations,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_c = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_y)^2 dz, \\ \bar{E}_p = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1}^{z_2} t_{xy} \dot{u}_y dz. \end{array} \right. \quad (\text{F.14a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_c = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_y)^2 dz, \\ \bar{E}_p = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1}^{z_2} t_{xy} \dot{u}_y dz. \end{array} \right. \quad (\text{F.14b})$$

Les densités moyennes d'énergie cinétique \bar{E}_c et potentielle \bar{E}_p étant égales, la densité moyenne d'énergie est donnée par la relation [79, 80, 100],

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1}^{z_2} \rho (\dot{u}_y)^2 dz, \quad (\text{F.15})$$

ou encore, compte tenu de la relation (F.2b),

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{4} \rho (\hat{u}_y + \hat{u}_y^*) (\hat{u}_y + \hat{u}_y^*) dz. \quad (\text{F.16})$$

Le report de l'expression (F.4b) dans la relation (F.16) conduit à

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho \int_{z_1}^{z_2} \hat{U}_y^* \hat{U}_y dz. \quad (\text{F.17})$$

Ainsi, aux points $x = 0$ et $x = \ell$, compte tenu des relations (2.8) et (B.2), la relation (F.17) peut être mise sous la forme,

$$\bar{E} = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{E}^{(\sigma,m)}(x), \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = \ell, \quad (\text{F.18})$$

où $\bar{E}^{(\sigma,m)}$ représente la densité moyenne d'énergie du mode (σ, m) exprimée par

$$\bar{E}^{(\sigma,m)}(x) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \left(\hat{A}^{(\sigma,m)}(x) \right)^*. \quad (\text{F.19})$$

F.3 Vitesse de groupe des modes couplés

F.3.1 Vitesse de groupe d'un mode couplé co-propagatif

A l'ordre $N = 1$, l'expression de l'amplitude du mode couplé co-propagatif est donnée par la relation (3.14) au paragraphe 3.2.1

$$[1] \hat{A}^{(\alpha_1, r_1)}(x) = \hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1) n_1} \hat{\varphi}^{(\alpha_1, r_1)} e^{-i(\delta_1 + k_x^{(\alpha_1, r_1)})x} x \sin c(\delta_1 x), \quad (\text{F.20})$$

dont la dérivée a pour expression

$$\partial_x \left[[1] \hat{A}^{(\alpha_1, r_1)}(x) \right] = \frac{1}{2\delta_1} \hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1) n_1} \hat{\varphi}^{(\alpha_1, r_1)} \left[(2\delta_1 + k_x^{(\alpha_1, r_1)}) e^{-i(2\delta_1 + k_x^{(\alpha_1, r_1)})x} - k_x^{(\alpha_1, r_1)} e^{-ik_x^{(\alpha_1, r_1)}x} \right]. \quad (\text{F.21})$$

Le report des expressions (F.20) et (F.21) dans la relation (F.12) conduit à l'expression du flux d'énergie du mode (α_1, r_1) :

$$\bar{\phi}^{(\alpha_1, r_1)}(x) = \frac{1}{2\delta_1^2} \omega \mu \left(\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)} \right)^2 n_1 \hat{\varphi}^{(\alpha_1, r_1)} \left(n_1 \hat{\varphi}^{(\alpha_1, r_1)} \right)^* (\delta_1 + k_x^{(\alpha_1, r_1)}) \sin^2(\delta_1 x), \quad (\text{F.22})$$

et celui de l'expression (F.20) dans la relation (F.19) conduit à l'expression

$$\bar{E}^{(\alpha_1, r_1)}(x) = \frac{1}{2\delta_1^2} \rho \omega^2 \left(\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)} \right)^2 n_1 \hat{\varphi}^{(\alpha_1, r_1)} \left(n_1 \hat{\varphi}^{(\alpha_1, r_1)} \right)^* \sin^2(\delta_1 x). \quad (\text{F.23})$$

Ainsi, le rapport du flux d'énergie sur la densité moyenne d'énergie conduit à l'expression de la vitesse de groupe du mode (α_1, r_1) ,

$$\frac{\bar{\phi}^{(\alpha_1, r_1)}(x)}{\bar{E}^{(\alpha_1, r_1)}(x)} = \frac{k_T}{c_T} \left(\delta_1 + k_x^{(\alpha_1, r_1)} \right). \quad (\text{F.24})$$

Comme attendu, cette vitesse de groupe est positive.

F.3.2 Vitesse de groupe d'un mode couplé contra-propagatif

A l'ordre $N = 1$, l'expression de l'amplitude du mode couplé contra-propagatif est donnée par la relation (3.19) au paragraphe 3.2.2

$${}^{[1]}\hat{A}^{(\alpha_2, r_2)}(x) = \hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2)} e^{-i\epsilon_2 \ell} e^{i(k_x^{(\alpha_2, r_2)} - \epsilon_2)x} x \sin c(\epsilon_2(\ell - x)), \quad (\text{F.25})$$

dont la dérivée a pour expression

$$\partial_x \left[{}^{[1]}\hat{A}^{(\alpha_2, r_2)}(x) \right] = \frac{1}{2\epsilon_2} \hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2)} \left[(k_x^{(\alpha_2, r_2)} - 2\epsilon_2) e^{i(k_x^{(\alpha_2, r_2)} - 2\epsilon_2)x} - k_x^{(\alpha_2, r_2)} e^{-2i\epsilon_2 \ell} e^{i k_x^{(\alpha_2, r_2)} x} \right]. \quad (\text{F.26})$$

Le report des expressions (F.25) et (F.26) dans la relation (F.12) conduit à l'expression du flux d'énergie du mode (α_2, r_2) :

$$\bar{\phi}^{(\alpha_2, r_2)}(x) = -\frac{1}{2\epsilon_2^2} \omega \mu \left(\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)} \right)^2 n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2)} \left(n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2)} \right)^* (\epsilon_2 - k_x^{(\alpha_2, r_2)}) \sin^2(\epsilon_2(\ell - x)), \quad (\text{F.27})$$

et celui de l'expression (F.25) dans la relation (F.19) conduit à l'expression

$$\bar{E}^{(\alpha_2, r_2)}(x) = \frac{1}{2\epsilon_2^2} \rho \omega^2 \left(\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_2, r_2)} \right)^2 n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2)} \left(n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2, r_2)} \right)^* (\epsilon_2(\ell - x)). \quad (\text{F.28})$$

Ainsi, le rapport du flux d'énergie sur la densité moyenne d'énergie conduit à l'expression de la vitesse de groupe du mode (α_2, r_2) ,

$$\frac{\bar{\phi}^{(\alpha_2, r_2)}(x)}{\bar{E}^{(\alpha_2, r_2)}(x)} = \frac{k_T}{c_T} \left(\epsilon_2 - k_x^{(\alpha_2, r_2)} \right). \quad (\text{F.29})$$

Comme attendu, cette vitesse de groupe est négative.

Annexe G

APPROXIMATIONS

Le calcul des approximations à l'ordre $N = 1$ nécessite la connaissance des expressions des fonctions $\psi^{(\sigma,m)}(z_q)$ et $\partial_{z_q}\psi^{(\sigma,m)}(z_q)$ où z_q représente les surfaces du guide rugueux. Dans le cas où les rugosités sont périodiques, les fonctions $h_q(x)$ définissant ces rugosités peuvent être développées en séries de Fourier, et ainsi il devient possible de connaître les expressions des fonctions $\psi^{(\sigma,m)}(z_q)$ et $\partial_{z_q}\psi^{(\sigma,m)}(z_q)$. Toutefois, le développement en série de Fourier des fonctions $h_q(x)$ n'est pas suffisant pour obtenir des fonctions simples, il est nécessaire de considérer des rugosités de faible épaisseur par rapport à l'épaisseur du guide extérieur, i. e. $h_q(x)/L_z \ll 1$ et de ne considérer que les premiers modes. Le calcul des approximations est réalisé en considérant la surface $z_1(x)$ rugueuse et la surface $z_2(x)$ parfaitement lisse. Les deux surfaces du guide rugueux ont alors pour expressions :

$$\begin{cases} z_1(x) = -L_z/2 + h_1(x), & \text{(G.1a)} \\ z_2(x) = L_z/2. & \text{(G.1b)} \end{cases}$$

G.1 Approximations des fonctions propres sur la frontière rugueuse

Compte tenu des expressions des valeurs propres (2.11), le report de l'expression de la surface $z_1(x)$ donnée par la relation (G.1a) dans les expressions des fonctions propres (2.10) conduit aux relations

$$\begin{cases} \psi^{(1,m)}(z_1) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin \left[k_z^{(1,m)} h_1(x) - (2m+1)\frac{\pi}{2} \right], & \text{(G.2a)} \\ \psi^{(2,m)}(z_1) = \sqrt{\frac{(2-\delta_{m0})}{L_z}} \cos \left[k_z^{(1,m)} h_1(x) - m\pi \right], & \text{(G.2b)} \end{cases}$$

qui peuvent être mises sous la forme plus générale,

$$\psi^{(\sigma,m)}(z_1) = (-1)^{\sigma+m} \sqrt{\frac{(2-\delta_{\sigma 2}\delta_{m0})}{L_z}}. \quad \text{(G.3)}$$

G.2 Approximations des dérivées des fonctions propres sur la frontière rugueuse

Compte tenu des expressions des fonctions propres (2.10) et des valeurs propres (2.11), les dérivées par rapport à z des fonctions propres sur la frontière rugueuse ont pour expressions respectives,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z \psi^{(1,m)}(z_1) = k_z^{(1,m)} \sqrt{\frac{2}{L_z}} \cos \left[k_z^{(1,m)} h_1(x) - (2m+1) \frac{\pi}{2} \right], \\ \partial_z \psi^{(2,m)}(z_1) = -k_z^{(2,m)} \sqrt{\frac{(2-\delta_{m0})}{L_z}} \sin \left[k_z^{(1,m)} h_1(x) - m\pi \right], \end{array} \right. \quad (\text{G.4a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z \psi^{(1,m)}(z_1) = k_z^{(1,m)} \sqrt{\frac{2}{L_z}} \cos \left[k_z^{(1,m)} h_1(x) - (2m+1) \frac{\pi}{2} \right], \\ \partial_z \psi^{(2,m)}(z_1) = -k_z^{(2,m)} \sqrt{\frac{(2-\delta_{m0})}{L_z}} \sin \left[k_z^{(1,m)} h_1(x) - m\pi \right], \end{array} \right. \quad (\text{G.4b})$$

qui peuvent être mises sous la forme plus générale,

$$\partial_{z_1} \psi_z^{(\sigma,m)}(z_1) \approx (-1)^{m+\sigma+1} \sqrt{\frac{2-\delta_{\sigma 2} \delta_{m0}}{L_z}} \left(k_z^{(\sigma,m)} \right)^2 h_1(x). \quad (\text{G.5})$$

G.3 Expressions approchées de l'opérateur de volume

En tenant compte des approximations (G.3) et (G.5) et des relations (2.10) et (2.11), les relations (B.7a) à (B.10b), peuvent toutes être mises sous la forme,

$$B_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}(x) = (-1)^{m+r+\sigma+\alpha} \frac{\sqrt{(2-\delta_{m0}\delta_{\sigma 2})(2-\delta_{r0}\delta_{\alpha 2})}}{L_z} h_1(x), \quad (\text{G.6})$$

qui, compte tenu de l'expression du coefficient $\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}$ donnée par la relation (3.5) et du développement en séries de Fourier de la fonction $h_1(x)$ (3.6), peut être réécrite,

$$B_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)}(x) = 2\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha,r)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{C}_n e^{i\frac{2n\pi}{\Lambda}x}. \quad (\text{G.7})$$

Annexe H

THÉORIE DES MODES COUPLÉS

H.1 Propagation dans le même sens (couplage co-directionnel)

Le système d'équations différentielles linéaires (3.27) au paragraphe 3.3.1,

$$\begin{cases} \partial_x \hat{S}_i(x) = -i\delta_1 \hat{S}_i(x) + \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_1, r_1)}^{(\sigma, m)}}{k_x^{(\sigma, m)}} -n_1 \hat{\eta}^{(\sigma, m)} \hat{S}_d(x), \\ \partial_x \hat{S}_d(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)}}{k_x^{(\alpha_1, r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1, r_1)} \hat{S}_i(x) + i\delta_1 \hat{S}_d(x), \end{cases} \quad (\text{H.1a})$$

$$\begin{cases} \partial_x \hat{S}_i(x) = -i\delta_1 \hat{S}_i(x) + \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_1, r_1)}^{(\sigma, m)}}{k_x^{(\sigma, m)}} -n_1 \hat{\eta}^{(\sigma, m)} \hat{S}_d(x), \\ \partial_x \hat{S}_d(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)}}{k_x^{(\alpha_1, r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1, r_1)} \hat{S}_i(x) + i\delta_1 \hat{S}_d(x), \end{cases} \quad (\text{H.1b})$$

est écrit sous la forme matricielle,

$$\partial_x [X(x)] = [F] [X(x)], \quad (\text{H.2})$$

avec

$$[X(x)] = \begin{pmatrix} \hat{S}_i(x) \\ \hat{S}_d(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{H.3})$$

et

$$[F] = \begin{pmatrix} -i\delta_1 & \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_1, r_1)}^{(\sigma, m)}}{k_x^{(\sigma, m)}} -n_1 \hat{\eta}^{(\sigma, m)} \\ \frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)}}{k_x^{(\alpha_1, r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1, r_1)} & i\delta_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{H.4})$$

où la matrice $[F]$ est une matrice constante et dépendante des paramètres acoustiques et géométriques du guide d'ondes qui possède la particularité de présenter un carré diagonal :

$$[F]^2 = -\gamma_1^2 [I], \quad (\text{H.5})$$

avec

$$\gamma_1^2 = \delta_1^2 - \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_1, r_1)}^{(\sigma, m)}}{k_x^{(\sigma, m)}} -n_1 \hat{\eta}^{(\sigma, m)} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma, m)}^{(\alpha_1, r_1)}}{k_x^{(\alpha_1, r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1, r_1)}, \quad (\text{H.6})$$

et où $[I]$ est la matrice identité. Compte tenu de la propriété énoncée précédemment sur la matrice $[F]$ [relation (H.5)], il vient

$$e^{[F]x} = \left(1 - \frac{\gamma_1^2 x^2}{2!} + \frac{\gamma_1^4 x^4}{4!} - \dots\right) [I] + \left(x - \frac{\gamma_1^2 x^3}{3!} + \frac{\gamma_1^4 x^5}{5!} - \dots\right) [F], \quad (\text{H.7})$$

soit

$$e^{[F]x} = [I] \cos(\gamma_1 x) + \frac{1}{\gamma_1} [F] \sin(\gamma_1 x). \quad (\text{H.8})$$

La solution formelle de l'équation (H.2) s'écrit

$$[X(x)] = e^{[F](x-x_0)} [X(x_0)], \quad (\text{H.9})$$

où, pour $x_0 = 0$, les deux composantes du vecteur $[X(x)]$ ont pour expression $\hat{S}_i(0) = 1$ et $\hat{S}_d(0) = 0$ (hypothèse de départ sur le choix des ondes couplées). La solution s'écrit donc finalement

$$[X(x)] = e^{[F]x} [X(0)]. \quad (\text{H.10})$$

Le report de l'expression (H.8) dans la solution matricielle (H.10) donne immédiatement les solutions recherchées

$$\begin{cases} \hat{S}_i(x) = \cos(\gamma_1 x) - i\delta_1 \frac{\sin(\gamma_1 x)}{\gamma_1}, \end{cases} \quad (\text{H.11a})$$

$$\begin{cases} \hat{S}_d(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_1,r_1)}}{k_x^{(\alpha_1,r_1)}} n_1 \hat{\eta}^{(\alpha_1,r_1)} \frac{\sin(\gamma_1 x)}{\gamma_1}. \end{cases} \quad (\text{H.11b})$$

H.2 Propagation en sens inverse (couplage contra-directionnel)

Le système d'équations différentielles linéaires (3.30) au paragraphe 3.3.2,

$$\begin{cases} \partial_x \hat{S}_i(x) = -i\epsilon_2 \hat{S}_i(x) + \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_2,r_2)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} -n_2 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \hat{S}_d(x), \end{cases} \quad (\text{H.12a})$$

$$\begin{cases} \partial_x \hat{S}_d(x) = -\frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_2,r_2)}}{k_x^{(\alpha_2,r_2)}} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \hat{S}_i(x) + i\epsilon_2 \hat{S}_d(x), \end{cases} \quad (\text{H.12b})$$

est mis sous la forme matricielle (H.2) où l'expression du vecteur $[X(x)]$ est donnée par la relation (H.3) et où la matrice $[F]$ donnée par la relation

$$[F] = \begin{pmatrix} -i\epsilon_2 & \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_2,r_2)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} -n_2 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \\ -\frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_2,r_2)}}{k_x^{(\alpha_2,r_2)}} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} & i\epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{H.13})$$

vérifie la relation (H.5) avec

$$\gamma_2^2 = \epsilon_2^2 + \frac{\hat{\beta}_{(\alpha_2,r_2)}^{(\sigma,m)}}{k_x^{(\sigma,m)}} -n_2 \hat{\eta}^{(\sigma,m)} \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_2,r_2)}}{k_x^{(\alpha_2,r_2)}} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)}. \quad (\text{H.14})$$

La solution formelle de l'équation (H.2) s'écrit ici

$$[X(x)] = e^{[F](x-x_0)} [X(x_0)] \quad (\text{H.15})$$

où les coefficients $\hat{S}_i(0) = 1$ (onde incidente propagative) et $\hat{S}_d(\ell) = 0$ (onde créée par couplage contra-propagative) dépendent de l'hypothèse de départ sur le choix des ondes couplées. Afin d'exprimer les amplitudes inconnues, à savoir $\hat{S}_i(\ell)$ et $\hat{S}_d(0)$ le système (H.15) est mis sous la forme (pour $x_0 = 0$)

$$[X(\ell)] = e^{[F]\ell} [X(0)], \quad (\text{H.16})$$

conduisant aux expressions des amplitudes inconnues, compte tenu des expressions (H.8) et (H.13),

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_i(\ell) = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 \cos(\gamma_2 \ell) + i\epsilon_2 \sin(\gamma_2 \ell)}, \end{array} \right. \quad (\text{H.17a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_d(0) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_2,r_2)} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \sin(\gamma_2 \ell)}{k_x^{(\alpha_2,r_2)} [\gamma_2 \cos(\gamma_2 \ell) + i\epsilon_2 \sin(\gamma_2 \ell)]}. \end{array} \right. \quad (\text{H.17b})$$

Le report de l'expression (H.8) dans la solution matricielle (H.15) donne les solutions recherchées, compte tenu de l'expression (H.17b),

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_i(x) = \frac{\gamma_2 \cos[\gamma_2(\ell - x)] + i\epsilon_2 \sin[\gamma_2(\ell - x)]}{\gamma_2 \cos(\gamma_2 \ell) + i\epsilon_2 \sin(\gamma_2 \ell)}, \end{array} \right. \quad (\text{H.18a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_d(x) = \frac{\hat{\beta}_{(\sigma,m)}^{(\alpha_2,r_2)} n_2 \hat{\xi}^{(\alpha_2,r_2)} \sin[\gamma_2(\ell - x)]}{k_x^{(\alpha_2,r_2)} [\gamma_2 \cos(\gamma_2 \ell) + i\epsilon_2 \sin(\gamma_2 \ell)]}. \end{array} \right. \quad (\text{H.18b})$$

Annexe I

ONDES DE LAMB

L'objectif de cette annexe est de présenter, dans le formalisme du chapitre 4, les expressions des champs de déplacement des ondes de Lamb se propageant dans des plaques infinies délimitées par des surfaces parfaitement lisses [98]. Le vecteur déplacement, supposé harmonique de pulsation ω , est exprimé en fonction du temps par la fonction $\exp(i\omega t)$. Ainsi, étant donné les symétries du système étudié, le vecteur déplacement complexe $\hat{\vec{U}}(x, z)$ ne dépend que des deux variables x et z , et est solution du système d'équations suivant, comportant l'équation de propagation et des conditions de contraintes nulles aux frontières,

$$\begin{cases} \rho\omega^2 \hat{\vec{U}}(x, z) + \text{div} \hat{\vec{T}}(x, z) = \vec{0}, & \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall z \in [-L_z/2, L_z/2], & \text{(I.1a)} \\ \hat{T}_{xz}(x, z) = 0, & \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{en} \quad z = \pm L_z/2, & \text{(I.1b)} \\ \hat{T}_{zz}(x, z) = 0, & \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{en} \quad z = \pm L_z/2, & \text{(I.1c)} \end{cases}$$

où \hat{T}_{xz} et \hat{T}_{zz} sont des composantes du tenseur des contraintes dont les expressions sont données par la loi de Hooke.

Le vecteur déplacement complexe $\hat{\vec{U}}(x, z)$ est décomposé en un vecteur déplacement complexe longitudinal $\hat{\vec{U}}_L(x, z)$ et un vecteur déplacement complexe transversal $\hat{\vec{U}}_T(x, z)$,

$$\hat{\vec{U}}(x, z) = \hat{\vec{U}}_L(x, z) + \hat{\vec{U}}_T(x, z), \quad \text{(I.2)}$$

où les vecteurs déplacement complexes longitudinal et transversal peuvent être projetés de la manière suivante

$$\begin{cases} \hat{\vec{U}}_L(x, z) = \hat{U}_{L_x}(x, z)\vec{e}_x + \hat{U}_{L_z}(x, z)\vec{e}_z, & \text{(I.3a)} \\ \hat{\vec{U}}_T(x, z) = \hat{U}_{T_x}(x, z)\vec{e}_x + \hat{U}_{T_z}(x, z)\vec{e}_z. & \text{(I.3b)} \end{cases}$$

Les vecteurs déplacement complexes longitudinal $\hat{\vec{U}}_L(x, z)$ et transversal $\hat{\vec{U}}_T(x, z)$ sont respectivement irrotationnel et à divergence nulle; ils satisfont respectivement aux relations

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \hat{\vec{U}}_L(x, z) = \vec{0}, & \text{(I.4a)} \\ \text{div} \hat{\vec{U}}_T(x, z) = 0, & \text{(I.4b)} \end{cases}$$

qui, compte tenu des expressions (I.3), peuvent être mises sous les formes respectives,

$$\begin{cases} \partial_z \hat{U}_{L_x}(x, z) = \partial_x \hat{U}_{L_z}(x, z), & \text{(I.5a)} \\ \partial_z \hat{U}_{T_z}(x, z) = -\partial_x \hat{U}_{T_x}(x, z). & \text{(I.5b)} \end{cases}$$

Le report de ces deux expressions dans les équations du système (I.1) permet de découpler l'équation de propagation vectorielle (I.1a) et conduit à une équation de Helmholtz pour chacune des quatre composantes du champ de déplacement complexe ($\eta = L, T$),

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_\eta^2 \right] \hat{U}_{\eta_j}(x, z) = 0, \quad j = x, z, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in [-L_z/2, L_z/2], \quad \text{(I.6a)} \\ \hat{T}_{xz} = \mu \left[\partial_z \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + \partial_x \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) \right] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z = \pm L_z/2, \quad \text{(I.6b)} \\ \hat{T}_{zz} = \lambda \partial_x \left(\hat{U}_{L_x} + \hat{U}_{T_x} \right) + (\lambda + 2\mu) \partial_z \left(\hat{U}_{L_z} + \hat{U}_{T_z} \right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z = \pm L_z/2. \quad \text{(I.6c)} \end{array} \right.$$

En posant

$$\hat{U}_{\eta_j}(x, z) = \hat{u}_{\eta_j}(z) e^{-ik_x x}, \quad \text{avec } \eta = L, T \quad \text{et } j = x, z, \quad \text{(I.7)}$$

l'équations (I.6a) peut être mise sous la forme,

$$\left[\partial_{zz}^2 + k_{\eta_z}^2 \right] \hat{u}_{\eta_j}(z) = 0, \quad \text{avec } \eta = L, T \quad \text{et } j = x, z, \quad \text{(I.8)}$$

avec

$$k_{\eta_z}^2 = k_\eta^2 - k_x^2, \quad \text{(I.9)}$$

et a pour solution,

$$\hat{u}_{\eta_j}(z) = \hat{q}_{\eta_j}^{(1)} \sin(k_{\eta_z} z) + \hat{q}_{\eta_j}^{(2)} \cos(k_{\eta_z} z), \quad \text{(I.10)}$$

où $\hat{q}_{\eta_j}^{(m)}$ ($m = 1, 2$) sont des constantes complexes à déterminer. Compte tenu de l'expression (I.10), les composantes \hat{T}_{xz} et \hat{T}_{zz} du tenseur des contraintes ont respectivement pour expressions aux points $z = \pm L_z/2$,

$$\begin{aligned} \hat{T}_{xz}(z = \pm L_z/2) = & -\mu k_{L_z} \left[-\hat{q}_{L_x}^{(1)} \cos(k_{L_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{L_x}^{(2)} \sin(k_{L_z} L_z/2) \right] \\ & - \mu k_{T_z} \left[-\hat{q}_{T_x}^{(1)} \cos(k_{T_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{T_x}^{(2)} \sin(k_{T_z} L_z/2) \right] \\ & - i\mu k_x \left[\hat{q}_{L_z}^{(2)} \cos(k_{L_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{L_z}^{(1)} \sin(k_{L_z} L_z/2) \right] \\ & - i\mu k_x \left[\hat{q}_{T_z}^{(2)} \cos(k_{T_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{T_z}^{(1)} \sin(k_{T_z} L_z/2) \right], \quad \text{(I.11)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{T}_{zz}(z = \pm L_z/2) = & -i\lambda k_x \left[\hat{q}_{L_x}^{(2)} \cos(k_{L_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{L_x}^{(1)} \sin(k_{L_z} L_z/2) \right] \\ & - i\lambda k_x \left[\hat{q}_{T_x}^{(2)} \cos(k_{T_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{T_x}^{(1)} \sin(k_{T_z} L_z/2) \right] \\ & - (\lambda + 2\mu) k_{L_z} \left[-\hat{q}_{L_z}^{(1)} \cos(k_{L_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{L_z}^{(2)} \sin(k_{L_z} L_z/2) \right] \\ & - (\lambda + 2\mu) k_{T_z} \left[-\hat{q}_{T_z}^{(1)} \cos(k_{T_z} L_z/2) \pm \hat{q}_{T_z}^{(2)} \sin(k_{T_z} L_z/2) \right]. \quad \text{(I.12)} \end{aligned}$$

Les contraintes \hat{T}_{xz} et \hat{T}_{zz} en $z = \pm L_z/2$ données respectivement par les relations (I.11) et (I.12) sont nulles si et seulement si ces contraintes sont des fonctions paires ou impaires. Ainsi, les solutions recherchées sont séparées en fonction de leur symétrie : pour les ondes de Lamb symétriques, la contrainte \hat{T}_{zz} est une fonction paire et la contrainte \hat{T}_{xz} est une fonction impaire, ce qui implique que les constantes $\hat{q}_{L_x}^{(1)}$, $\hat{q}_{T_x}^{(1)}$, $\hat{q}_{L_z}^{(2)}$ et $\hat{q}_{T_z}^{(2)}$ sont toutes nulles, et pour les ondes de Lamb antisymétriques la contrainte \hat{T}_{zz} est une fonction impaire et la contrainte \hat{T}_{xz} est une fonction paire, ce qui implique que les constantes $\hat{q}_{L_x}^{(2)}$, $\hat{q}_{T_x}^{(2)}$, $\hat{q}_{L_z}^{(1)}$ et $\hat{q}_{T_z}^{(1)}$ sont toutes nulles. Les expressions du champ de déplacement des ondes de Lamb étant différentes selon leur symétrie, les ondes de Lamb symétriques et antisymétriques sont traitées séparément dans la suite.

I.1 Onde de Lamb symétrique

En considérant les constantes $\hat{q}_{L_x}^{(1)}$, $\hat{q}_{T_x}^{(1)}$, $\hat{q}_{L_z}^{(2)}$ et $\hat{q}_{T_z}^{(2)}$ nulles, la relation (I.10) peut être mise sous les formes,

$$\begin{cases} \hat{u}_{\eta_x}(z) = \hat{q}_{\eta_x} \cos(k_{\eta_x} z), & \text{avec } \eta = L, T, \\ \hat{u}_{\eta_z}(z) = \hat{q}_{\eta_z} \sin(k_{\eta_z} z), & \text{avec } \eta = L, T, \end{cases} \quad (\text{I.13a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{I.13b})$$

où, dans le but de simplifier les notations, les constantes \hat{q}_{η_x} et \hat{q}_{η_z} correspondent respectivement aux constantes $\hat{q}_{\eta_x}^{(2)}$ et $\hat{q}_{\eta_z}^{(1)}$. Le report des relations (I.13), dans un premier temps, dans les expressions (I.5) conduit aux relations,

$$\begin{cases} \hat{q}_{L_z} = -i\hat{q}_{L_x} k_{L_z}/k_x, \\ \hat{q}_{T_x} = -i\hat{q}_{T_z} k_{T_x}/k_x, \end{cases} \quad (\text{I.14a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{I.14b})$$

et, dans un second temps, dans les conditions aux frontières (I.6b) et (I.6c) conduit aux relations,

$$\begin{cases} (k_{L_z} \hat{q}_{L_x} + i k_x \hat{q}_{L_z}) \sin(k_{L_z} L_z/2) + (k_{T_z} \hat{q}_{T_x} + i k_x \hat{q}_{T_z}) \sin(k_{T_z} L_z/2) = 0, \\ [(\lambda + 2\mu) k_{L_z} \hat{q}_{L_z} - i k_x \lambda \hat{q}_{L_x}] \cos(k_{L_z} L_z/2) \\ \quad \quad \quad + [(\lambda + 2\mu) k_{T_z} \hat{q}_{T_z} - i k_x \lambda \hat{q}_{T_x}] \cos(k_{T_z} L_z/2) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.15a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{I.15b})$$

Le report des expressions (I.14) dans les relations (I.15) conduit aux expressions,

$$\begin{cases} i [\lambda k_x^2 + (\lambda + 2\mu) k_{L_z}^2] \hat{q}_{L_x} \cos(k_{L_z} L_z/2) + 2\mu k_x k_{T_z} \hat{q}_{T_z} \cos(k_{T_z} L_z/2) = 0, \\ 2k_x k_{L_z} \hat{q}_{L_z} \sin(k_{L_z} L_z/2) + i (k_x^2 - k_{T_z}^2) \hat{q}_{T_x} \sin(k_{T_z} L_z/2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.16a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{I.16b})$$

qui, compte tenu de la relation,

$$\lambda k_x^2 + (\lambda + 2\mu) k_{L_z}^2 = \mu (k_{T_z}^2 - k_x^2), \quad (\text{I.17})$$

peuvent être mises sous les formes,

$$\begin{cases} i (k_x^2 - k_{T_z}^2) \hat{q}_{L_x} \cos(k_{L_z} L_z/2) + 2k_x k_{T_z} \hat{q}_{T_z} \cos(k_{T_z} L_z/2) = 0, \\ 2k_x k_{L_z} \hat{q}_{L_z} \sin(k_{L_z} L_z/2) + i (k_x^2 - k_{T_z}^2) \hat{q}_{T_x} \sin(k_{T_z} L_z/2) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.18a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{I.18b})$$

Le système d'équation (I.18) est mis sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} i\mu(k_x^2 - k_{T_z}^2) \cos(k_{L_z} L_z/2) & 2\mu k_x k_{T_z} \cos(k_{T_z} L_z/2) \\ 2k_x k_{L_z} \sin(k_{L_z} L_z/2) & i(k_x^2 - k_{T_z}^2) \sin(k_{T_z} L_z/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{L_x} \\ \hat{q}_{T_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.19})$$

Le déterminant de la matrice carrée de la relation (I.19) est nul si et seulement si la relation

$$\frac{\tan(k_{T_z} L_z/2)}{\tan(k_{L_z} L_z/2)} = -\frac{4k_x^2 k_{L_z} k_{T_z}}{(k_{T_z}^2 - k_x^2)^2}, \quad (\text{I.20})$$

est vérifiée.

Compte tenu de l'expression (I.18a), l'expression de la constante \hat{q}_{T_z} peut alors être mise sous la forme,

$$\hat{q}_{T_z} = -i \left(\frac{k_x^2 - k_{T_z}^2}{2k_x k_{T_z}} \right) \frac{\cos(k_{L_z} L_z/2)}{\cos(k_{T_z} L_z/2)} \hat{q}_{L_x}. \quad (\text{I.21})$$

I.2 Onde de Lamb antisymétrique

En considérant les constantes $\hat{q}_{L_x}^{(2)}$, $\hat{q}_{T_x}^{(2)}$, $\hat{q}_{L_z}^{(1)}$ et $\hat{q}_{T_z}^{(1)}$ nulles, les relations (I.10) peuvent être mises sous les formes respectives,

$$\begin{cases} \hat{u}_{\eta_x}(z) = \hat{q}_{\eta_x} \sin(k_{\eta_x} z), & \text{avec } \eta = L, T, \end{cases} \quad (\text{I.22a})$$

$$\begin{cases} \hat{u}_{\eta_z}(z) = \hat{q}_{\eta_z} \cos(k_{\eta_z} z), & \text{avec } \eta = L, T, \end{cases} \quad (\text{I.22b})$$

où, dans le but de simplifier les notations, les constantes \hat{q}_{η_x} et \hat{q}_{η_z} correspondent respectivement aux constantes $\hat{q}_{\eta_x}^{(1)}$ et $\hat{q}_{\eta_z}^{(2)}$. Le report des relations (I.22), dans un premier temps, dans les expressions (I.5) conduit aux relations,

$$\begin{cases} \hat{q}_{L_z} = i\hat{q}_{L_x} k_{L_z}/k_x, \end{cases} \quad (\text{I.23a})$$

$$\begin{cases} \hat{q}_{T_x} = i\hat{q}_{T_z} k_{T_x}/k_x, \end{cases} \quad (\text{I.23b})$$

et, dans un second temps, dans les conditions aux frontières (I.6b) et (I.6c) conduit aux relations,

$$\begin{cases} (k_{L_z} \hat{q}_{L_x} - ik_x \hat{q}_{L_z}) \cos(k_{L_z} L_z/2) + (k_{T_z} \hat{q}_{T_x} - ik_x \hat{q}_{T_z}) \cos(k_{T_z} L_z/2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.24a})$$

$$\begin{cases} (ik_x \lambda \hat{q}_{L_x} + (\lambda + 2\mu) k_{L_z} \hat{q}_{L_z}) \sin(k_{L_z} L_z/2) \\ \quad + (ik_x \lambda \hat{q}_{T_x} + (\lambda + 2\mu) k_{T_z} \hat{q}_{T_z}) \sin(k_{T_z} L_z/2) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.24b})$$

Le report des expressions (I.23) dans les relations (I.24) conduit aux expressions,

$$\begin{cases} i[\lambda k_x^2 + (\lambda + 2\mu) k_{L_z}^2] \hat{q}_{L_x} \sin(k_{L_z} L_z/2) + 2\mu k_x k_{T_z} \hat{q}_{T_z} \sin(k_{T_z} L_z/2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.25a})$$

$$\begin{cases} 2k_x k_{L_z} \hat{q}_{L_x} \cos(k_{L_z} L_z/2) + i(k_{T_z}^2 - k_x^2) \hat{q}_{T_z} \cos(k_{T_z} L_z/2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.25b})$$

ou encore, compte tenu de la relation (I.17),

$$\begin{cases} i(k_{T_z}^2 - k_x^2) \hat{q}_{L_x} \sin(k_{L_z} L_z/2) + 2k_x k_{T_z} \hat{q}_{T_z} \sin(k_{T_z} L_z/2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.26a})$$

$$\begin{cases} 2k_x k_{L_z} \hat{q}_{L_x} \cos(k_{L_z} L_z/2) + i(k_{T_z}^2 - k_x^2) \hat{q}_{T_z} \cos(k_{T_z} L_z/2) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.26b})$$

Le système d'équation (I.26) est mis sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} i(k_{T_z}^2 - k_x^2) \sin(k_{L_z} L_z/2) & 2k_x k_{T_z} \sin(k_{T_z} L_z/2) \\ 2k_x k_{L_z} \cos(k_{L_z} L_z/2) & i(k_{T_z}^2 - k_x^2) \cos(k_{T_z} L_z/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{L_x} \\ \hat{q}_{T_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.27})$$

Le déterminant de la matrice carrée est nul, si la relation

$$\frac{\tan(k_{T_z} L_z/2)}{\tan(k_{L_z} L_z/2)} = -\frac{(k_{T_z}^2 - k_x^2)^2}{4k_x^2 k_{L_z} k_{T_z}} \quad (\text{I.28})$$

est satisfaite.

Compte tenu de l'expression (I.26a), l'expression de la constante \hat{q}_{T_z} peut alors être mise sous la forme,

$$\hat{q}_{T_z} = i \left(\frac{2k_x k_{L_z}}{k_{T_z}^2 - k_x^2} \right) \frac{\cos(k_{L_z} L_z/2)}{\cos(k_{T_z} L_z/2)} \hat{q}_{L_x}. \quad (\text{I.29})$$

Annexe J

FONCTION DE GREEN POUR ONDES DE LAMB

La fonction de Green est choisie de telle sorte que l'expression (4.18), reportée ci-dessous en (J.5) et (J.13), soit nulle, de manière à ce qu'une onde de Lamb en guide non rugueux soit représentée dans l'équation intégrale par une simple convolution de la fonction source avec la fonction de Green. La fonction de Green (paragraphe 4.3.2) est solution du système d'équations, composé de l'équation de propagation (équation de Helmholtz) et de conditions mixtes aux frontières,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_\eta^2) G_\eta^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = -\delta(x - x_0)\delta(z - z_0), \quad \forall(x, z, x_0, z_0) \in D_0 \text{ (J.1a)} \\ (\partial_z \pm ik_\eta \hat{Y}_\eta^{(\tau,n)}) G_\eta^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = 0, \quad \forall(x, x_0, z_0) \in D_0 \text{ et } z = \pm L_z/2, \text{ (J.1b)} \end{array} \right.$$

où δ est la fonction de Dirac et où l'admittance spécifique de parois $\hat{Y}_\eta^{(\tau,n)}$ est exprimée en fonction d'un paramètre disponible (à déterminer) $\alpha_\eta^{(\tau,n)}$ comme suit :

$$\hat{Y}_\eta^{(\tau,n)} = i \frac{k_{\eta z}^{(\tau,n)}}{k_\eta} \tan(\alpha_\eta^{(\tau,n)}). \quad (\text{J.2})$$

Les quatre termes $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$ du vecteur déplacement $\hat{U}(x, z)$, dans le domaine D_0 du guide extérieur, satisfaisant aux équations de Helmholtz (J.1a), peuvent être exprimés, par application du théorème de Green, de la façon suivante [66, 67] :

$$\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) = \hat{F}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) + {}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x, z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) \right\}, \quad (\text{J.3})$$

où le terme source a pour expression,

$$\hat{F}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} G_\eta^{(\tau,n)}(x, z; x', z') \hat{f}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x', z') dx' dz', \quad (\text{J.4})$$

et où l'opérateur intégrale prend la forme

$${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}(x,z) \right\} = \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^q \left[G_\eta^{(\tau,n)}(x,z;x',z_q) \partial_z \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x',z_q) - \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x',z_q) \partial_z G_\eta^{(\tau,n)}(x,z;x',z_q) \right] \Big|_{z_q=(-1)^q \frac{L_z}{2}} dx'. \quad (\text{J.5})$$

Deux cas sont à envisager.

i) Si le terme du champ de déplacement a pour expression,

$$\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x',z') = \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} \cos\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z'\right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'}, \quad (\text{J.6})$$

alors le paramètre $\alpha_\eta^{(\tau,n)}$ est choisi tel que

$$\alpha_\eta^{(\tau,n)} = -k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}. \quad (\text{J.7})$$

Le report de l'expression (J.6) du champ $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$ dans l'opérateur ${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z)$ (J.5) conduit à la relation

$${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\} = \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-G_\eta^{(\tau,n)}\left(x,z;x',(-1)^q \frac{L_z}{2}\right) (-1)^q k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \sin\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} (-1)^q \frac{L_z}{2}\right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} - \cos\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}\right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} (-1)^q \partial_z G_\eta^{(\tau,n)}\left(x,z;x',(-1)^q \frac{L_z}{2}\right) \right] dx'. \quad (\text{J.8})$$

Le report des conditions aux frontières (J.1b) dans la relation (J.8) donne

$${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\} = \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-G_\eta^{(\tau,n)}\left(x,z;x',(-1)^q \frac{L_z}{2}\right) k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \sin\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}\right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} + \cos\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}\right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} ik_\eta \hat{Y}_\eta^{(\tau,n)} G_\eta^{(\tau,n)}\left(x,z;x',(-1)^q \frac{L_z}{2}\right) \right] dx'. \quad (\text{J.9})$$

Compte tenu de l'expression (J.7) du paramètre $\alpha_\eta^{(\tau,n)}$ et de la relation (J.2), l'expression (J.9) peut être mise sous la forme,

$${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\} = \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta^{(\tau,n)}\left(x,z;x',(-1)^q \frac{L_z}{2}\right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} \left[-\sin\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}\right) + \cos\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}\right) \tan\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}\right) \right] dx'. \quad (\text{J.10})$$

Dans ce cas, l'opérateur ${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\}$ est nul.

ii) Si le terme du champ de déplacement a pour expression,

$$\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x',z') = \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} \sin\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z'\right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'}, \quad (\text{J.11})$$

alors le paramètre $\alpha_\eta^{(\tau,n)}$ est choisi tel que

$$\alpha_\eta^{(\tau,n)} = -k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} + \frac{\pi}{2}. \quad (\text{J.12})$$

Le report de l'expression (J.11) du champ $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$ dans l'opérateur ${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z)$ (J.5) conduit à la relation

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\} = \\ \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_\eta^{(\tau,n)} \left(x, z; x', (-1)^q \frac{L_z}{2} \right) k_{\eta_z}^{(\tau,n)} (-1)^q \cos \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} \right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} \right. \\ \left. - \sin \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} (-1)^q \frac{L_z}{2} \right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} (-1)^q \partial_z G_\eta^{(\tau,n)} \left(x, z; x', (-1)^q \frac{L_z}{2} \right) \right] dx'. \quad (\text{J.13}) \end{aligned}$$

Le report des conditions aux frontières (J.1b) dans la relation (J.13) donne

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\} = \\ \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_\eta^{(\tau,n)} \left(x, z; x', (-1)^q \frac{L_z}{2} \right) k_{\eta_z}^{(\tau,n)} (-1)^q \cos \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} \right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} \right. \\ \left. + (-1)^q \sin \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} \right) e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} ik_\eta \hat{Y}_\eta^{(\tau,n)} G_\eta^{(\tau,n)} \left(x, z; x', (-1)^q \frac{L_z}{2} \right) \right] dx'. \quad (\text{J.14}) \end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression (J.12) du paramètre $\alpha_\eta^{(\tau,n)}$ et de la relation (J.2), l'expression (J.14) peut être mise sous la forme,

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\} = \\ \hat{q}_{\eta_j}^{(\tau,n)} k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \sum_{q=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^q e^{-ik_x^{(\tau,n)} x'} G_\eta^{(\tau,n)} \left(x, z; x', (-1)^q \frac{L_z}{2} \right) \\ \left[\cos \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} \right) - \sin \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} \right) \cot \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} \right) \right] dx'. \quad (\text{J.15}) \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'opérateur ${}^{(0)}\hat{\Gamma}_\eta^{(\tau,n)}(x,z) \left\{ \hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}(x,z) \right\}$ est nul.

Ainsi, les choix retenus pour la fonction de Green annulent les intégrales de surface sur chacune des frontières du guide extérieur (guide lisse). Le champ $\hat{U}_{\eta_j}^{(\tau,n)}$ est alors exprimé par une simple convolution de la fonction de Green par la fonction source à l'origine du champ.

Annexe K

FONCTION DE GREEN POUR ONDES DE LAMB : INTÉGRALE DE FOURIER

La fonction de Green choisie est donnée par la transformée de Fourier

$$G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \left[\kappa_{\eta z} (z_{<} + L_z/2) + \alpha_{\eta}^{(\tau,n)} \right] \cos \left[\kappa_{\eta z} (z_{>} - L_z/2) - \alpha_{\eta}^{(\tau,n)} \right] e^{-i\chi(x-x_0)}}{\kappa_{\eta z} \sin \left[\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)} \right]} \frac{d\chi}{2\pi}. \quad (\text{K.1})$$

Cette intégrale peut être calculée de façon numérique suivant un parcours adapté [101]; cette méthode est présentée dans les paragraphes qui suivent.

K.1 Convergence de l'intégrale

La relation (K.1) peut être exprimée de la manière suivante :

$$G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\chi(x-x_0)} \left\{ \frac{e^{i[\kappa_{\eta z} (z_{<} - z_{>} + L_z) + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} + e^{-i[\kappa_{\eta z} (z_{<} - z_{>} + L_z) + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]}}{\kappa_{\eta z} \left(e^{i[\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} - e^{-i[\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} \right)} + \frac{e^{i[\kappa_{\eta z} (z_{<} + z_{>})]} + e^{-i[\kappa_{\eta z} (z_{<} + z_{>})]}}{\kappa_{\eta z} \left(e^{i[\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} - e^{-i[\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} \right)} \right\} d\chi, \quad (\text{K.2})$$

ou encore,

$$G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\chi(x-x_0)} \left\{ \frac{e^{i[\kappa_{\eta z}(z_<-z_>)+2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} + e^{-i[\kappa_{\eta z}(z_<-z_>+2L_z)+2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]}}{\kappa_{\eta z} \left(e^{2i\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}} - e^{-2i[\kappa_{\eta z}L_z+\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} \right)} + \frac{e^{i[\kappa_{\eta z}(z_<+z_>-L_z)]} + e^{-i[\kappa_{\eta z}(z_<+z_>+L_z)]}}{\kappa_{\eta z} \left(e^{2i\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}} - e^{-2i[\kappa_{\eta z}L_z+\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}]} \right)} \right\} d\chi. \quad (\text{K.3})$$

Compte tenu de la relation,

$$\chi^2 + \kappa_{\eta z}^2 = k_{\eta}^2, \quad (\text{K.4})$$

lorsque $\chi \rightarrow \pm\infty$, la partie réelle de $\kappa_{\eta z}$ est nulle et sa partie imaginaire tend vers l'infini. Ainsi, dans ce cas précis, les quatre exponentielles du numérateur de l'expression (K.3) tendent vers 0 respectivement si les relations suivantes

$$\begin{cases} (z_< - z_>) < 0, & (\text{K.5a}) \\ (z_< - z_> + 2L_z) > 0, & (\text{K.5b}) \\ (z_< + z_> - L_z) < 0, & (\text{K.5c}) \\ (z_< + z_> + L_z) > 0, & (\text{K.5d}) \end{cases}$$

sont toutes vérifiées, ce qui est le cas, compte tenu de la relation,

$$-L_z/2 < z_< < z_> < L_z/2, \quad (\text{K.6})$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale à l'infini.

K.2 Calcul numérique de la fonction de Green

La fonction de Green donnée par la relation (K.1) possède, outre deux singularités pour $\kappa_{\eta z}$, une infinité de pôles, dont la position dépend de la valeur prise par le paramètre $\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}$. Les paramètres $\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}$ choisis ont pour expressions

$$\begin{cases} \alpha_{\eta}^{(\tau,n)} = -k_{\eta z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}, & (\text{K.7a}) \\ \alpha_{\eta}^{(\tau,n)} = -k_{\eta z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} + \frac{\pi}{2}, & (\text{K.7b}) \end{cases}$$

où $k_{\eta z}^{(\tau,n)}$ est la composante suivant z du nombre d'onde k_{η} dans la direction de l'épaisseur du guide [relation (4.15)]. Les pôles de la fonction de Green ont pour expression

$$\chi = \pm \sqrt{\left(k_x^{(\tau,n)}\right)^2 - \frac{2p\pi}{L_z} k_{\eta z}^{(\tau,n)} - \left(\frac{2p\pi}{L_z}\right)^2}, \quad (\text{K.8})$$

où le nombre d'onde $k_x^{(\tau,n)}$ est le nombre d'onde suivant la direction de propagation (suivant x) de l'onde de Lamb recherchée et avec p un entier relatif. Deux cas de figures sont à envisager selon que le nombre d'onde $k_x^{(\tau,n)}$ est supérieur ou inférieur au nombre d'onde k_η $\left[k_\eta^2 = \left(k_x^{(\tau,n)} \right)^2 + \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \right)^2 \right]$, relation (4.15)].

i) Si $k_x^{(\tau,n)}$ est inférieur au nombre d'onde k_η , la composante $k_{\eta_z}^{(\tau,n)}$ suivant z du nombre d'onde k_η est réelle et ainsi, d'après la relation (K.8), deux familles de pôles existent : les pôles situés sur l'axe des χ réels qui correspondent à des ondes propagatives, le premier pôle étant le pôle correspondant à l'onde de Lamb recherchée, et les pôles situés sur l'axe des χ imaginaires qui correspondent à des ondes évanescentes (figure K.1a).

ii) Si $k_x^{(\tau,n)}$ est supérieur au nombre d'onde k_η , la composante $k_{\eta_z}^{(\tau,n)}$ suivant z du nombre d'onde k_η est imaginaire et ainsi, deux familles de pôles existent : les pôles situés sur l'axe des χ réels qui correspondent à des ondes propagatives, le premier pôle étant le pôle correspondant à l'onde de Lamb considérée et les pôles situés sur deux demies droites parallèles à l'axe $\Im m(\chi)$ qui correspondent à des ondes évanescentes (figure K.1b).

L'intégrale (K.3) peut alors être calculée suivant les parcours proposés sur les figures K.1a lorsque $k_x^{(\tau,n)} < k_\eta$ et K.1b lorsque $k_x^{(\tau,n)} > k_\eta$. Ces contours sont composés de trois segments notés Q_1P_1 , P_1P_2 et P_2Q_2 . Les points Q_1 et Q_2 ont pour coordonnées respectives dans le plan complexe $(-\chi_{max}, -\delta)$ et (χ_{max}, δ) , où δ est une constante réelle positive très petite et où la constante réelle positive χ_{max} est définie telle que les contributions sur les domaines $]-\infty, Q_1]$ et $]Q_2, +\infty]$ sont négligeables en comparaison avec les contributions sur les trois domaines considérés. Les points P_1 et P_2 ont respectivement pour coordonnées dans le plan complexe $(-k_\eta, -\epsilon)$ et (k_η, ϵ) , où ϵ est une constante réelle supérieure d'un ordre de grandeur à la constante δ .

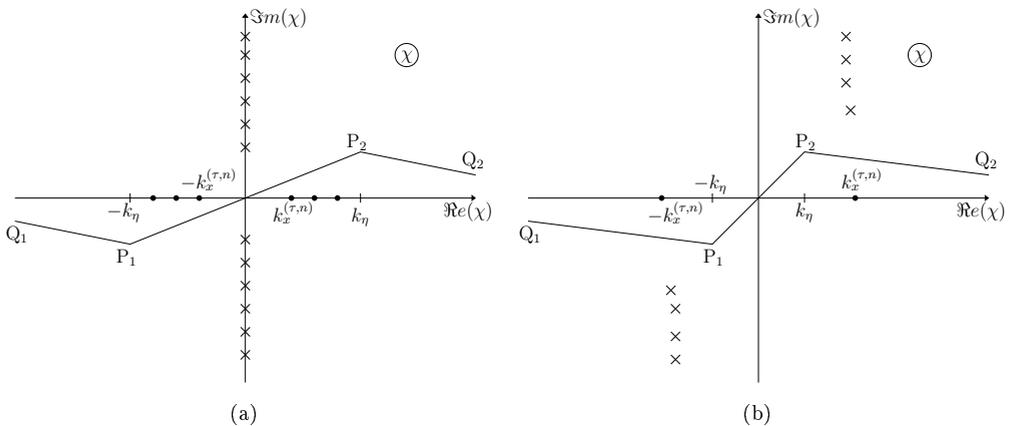


Figure K.1 – Schéma des contours d'intégration dans le plan complexe lorsque (a) $k_x^{(\tau,n)} < k_\eta$ et (b) $k_x^{(\tau,n)} > k_\eta$.

Annexe L

FONCTION DE GREEN POUR ONDES DE LAMB : CALCUL DES RÉSIDUS

Les fonctions de Green retenues dans le problème de diffusion des ondes de Lamb (paragraphe 4.3.2) ont pour expression :

$$G_{\eta}^{(\tau,n)}(x, z; x_0, z_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \left[\kappa_{\eta z} \left(z_{<} + \frac{L_z}{2} \right) + \alpha_{\eta}^{(\tau,n)} \right] \cos \left[\kappa_{\eta z} \left(z_{>} - \frac{L_z}{2} \right) - \alpha_{\eta}^{(\tau,n)} \right] e^{-i\chi(x-x_0)}}{\kappa_{\eta z} \sin \left(\kappa_{\eta z} L_z + 2\alpha_{\eta}^{(\tau,n)} \right)} \frac{1}{2\pi} d\chi, \quad (\text{L.1})$$

avec

$$k_{\eta}^2 = \chi^2 + \kappa_{\eta z}^2, \quad (\text{L.2})$$

et où les paramètres $\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}$ sont choisis [cf. infra (L.4) et (L.14)] de manière à ce que le premier des pôles de l'intégrande corresponde au nombre d'ondes $k_x^{(\tau,n)}$ d'une onde de Lamb (τ, n) , les ondes paires (en cosinus) et impaires (en sinus) étant générées par une phase additionnelle de 0 ou $\pi/2$ respectivement (cf. infra). Cette phase n'a pas d'incidence sur la position des pôles donnés par la relation

$$\kappa_{\eta z} = k_{\eta z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \quad \Longleftrightarrow \quad \chi = \pm k_{\eta x}^p = \pm \sqrt{\left(k_x^{(\tau,n)} \right)^2 - 2 \frac{p\pi}{L_z} k_{\eta z}^{(\tau,n)} - \left(\frac{p\pi}{L_z} \right)^2}. \quad (\text{L.3})$$

Les résidus pour chaque pôle sont calculés dans la suite pour les deux expressions du paramètre $\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}$.

L.1 Fonction de Green paire

Lorsque le paramètre $\alpha_{\eta}^{(\tau,n)}$ a pour expression

$$\alpha_{\eta}^{(\tau,n)} = -k_{\eta z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2}, \quad (\text{L.4})$$

la fonction de Green est associée à une composante d'une onde de Lamb paire (en cosinus). Le dénominateur de la fonction de Green (L.1) peut s'écrire :

$$\lim_{\kappa_{\eta_z} \rightarrow k_{\eta_z}^{(\tau,n)}} \kappa_{\eta_z} \sin \left[\left(\kappa_{\eta_z} - k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \right) L_z \right] \cong k_{\eta_z}^{(\tau,n)} L_z \lim_{\kappa_{\eta_z} \rightarrow k_{\eta_z}^{(\tau,n)}} \left(\kappa_{\eta_z} - k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \right). \quad (\text{L.5})$$

ou encore, compte tenu de la relation (L.2),

$$\lim_{\kappa_{\eta_z} \rightarrow k_{\eta_z}^{(\tau,n)}} \kappa_{\eta_z} \sin \left[\left(\kappa_{\eta_z} - k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \right) L_z \right] \cong -\frac{L_z}{2} \lim_{\chi \rightarrow \pm k_{\eta_x}^0} (\chi - k_{\eta_x}^0) (\chi + k_{\eta_x}^0). \quad (\text{L.6})$$

Par suite, les résidus des pôles pour $p = 0$

$$\text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^0} = -\frac{\cos \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z_{<} \right) \cos \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z_{>} \right)}{2\pi} e^{\mp i k_{\eta_x}^0 (x-x_0)} \lim_{\chi \rightarrow \pm k_{\eta_x}^0} \frac{(\chi \mp k_{\eta_x}^0)}{\kappa_{\eta_z} \sin(\kappa_{\eta_z} L_z)}, \quad (\text{L.7})$$

prennent la forme suivante :

$$\text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^0} = \pm \frac{1}{2\pi} \cos \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z_{<} \right) \cos \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z_{>} \right) \frac{e^{\mp i k_{\eta_x}^0 (x-x_0)}}{k_{\eta_x}^0 L_z}. \quad (\text{L.8})$$

Pour $p \neq 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa_{\eta_z} \rightarrow k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z}} \kappa_{\eta_z} \sin \left[\left(\kappa_{\eta_z} - k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \right) L_z \right] &\approx \\ &(-1)^p \frac{L_z}{2} \lim_{\kappa_{\eta_z} \rightarrow k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z}} \left[\kappa_{\eta_z}^2 - \left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{L.9})$$

ou encore, compte tenu des relations (L.2) et (L.3),

$$\lim_{\kappa_{\eta_z} \rightarrow k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z}} \kappa_{\eta_z} \sin \left[\left(\kappa_{\eta_z} - k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \right) L_z \right] \approx (-1)^p \frac{L_z}{2} \lim_{\chi \rightarrow \pm k_{\eta_x}^p} (\chi - k_{\eta_x}^p) (\chi + k_{\eta_x}^p). \quad (\text{L.10})$$

Les résidus des pôles, pour $p \neq 0$, ont alors pour expression :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^p} = -\frac{e^{\mp i k_{\eta_x}^p (x-x_0)}}{2\pi} \cos \left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \right) z_{<} + \frac{p\pi}{2} \right] \cos \left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \right) z_{>} - \frac{p\pi}{2} \right] \\ \lim_{\chi \rightarrow \pm k_{\eta_x}^p} \frac{(\chi \mp k_{\eta_x}^p)}{\kappa_{\eta_z} \sin(\kappa_{\eta_z} L_z)}, \end{aligned} \quad (\text{L.11})$$

soit, si p est pair,

$$\text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^p} = \pm \frac{1}{2\pi} \cos \left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \right) z_{<} \right] \cos \left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \right) z_{>} \right] \frac{e^{\mp i k_{\eta_x}^p (x-x_0)}}{k_{\eta_x}^p L_z}, \quad (\text{L.12})$$

et, si p est impair,

$$\text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^p} = \pm \frac{1}{2\pi} \sin \left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \right) z_{<} \right] \sin \left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z} \right) z_{>} \right] \frac{e^{\mp i k_{\eta_x}^p (x-x_0)}}{k_{\eta_x}^p L_z} \quad (\text{L.13})$$

L.2 Fonction de Green impaire

Lorsque le paramètre $\alpha_\eta^{(\tau,n)}$ a pour expression

$$\alpha_\eta^{(\tau,n)} = -k_{\eta_z}^{(\tau,n)} \frac{L_z}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad (\text{L.14})$$

la fonction de Green est associée à une composante d'une onde de Lamb impaire (en sinus). Le sinus du dénominateur de l'expression (L.1) a alors pour expression

$$\sin\left(\kappa_{\eta_z} L_z + 2\alpha_\eta^{(\tau,n)}\right) = -\sin\left[\left(\kappa_{\eta_z} - k_{\eta_z}^{(\tau,n)}\right) L_z\right]. \quad (\text{L.15})$$

Ainsi, les pôles sont les mêmes pour la fonction de Green impaire que pour la fonction de Green paire et la démarche pour calculer les résidus de ces pôles est sensiblement la même. Les résidus des pôles pour $p = 0$ de la fonction de Green impaire ont pour expression

$$\text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^0} = \pm \frac{1}{2\pi} \sin\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z_{<}\right) \sin\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} z_{>}\right) \frac{e^{\mp i k_{\eta_x}^0 (x-x_0)}}{k_{\eta_x}^0 L_z}, \quad (\text{L.16})$$

et les résidus des pôles pour $p \neq 0$ ont pour expressions, si p est pair,

$$\text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^p} = \pm \frac{1}{2\pi} \sin\left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z}\right) z_{<}\right] \sin\left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z}\right) z_{>}\right] \frac{e^{\mp i k_{\eta_x}^p (x-x_0)}}{k_{\eta_x}^p L_z}, \quad (\text{L.17})$$

et, si p est impair,

$$\text{Res}_{\pm k_{\eta_x}^p} = \pm \frac{1}{2\pi} \cos\left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z}\right) z_{<}\right] \cos\left[\left(k_{\eta_z}^{(\tau,n)} + \frac{p\pi}{L_z}\right) z_{>}\right] \frac{e^{\mp i k_{\eta_x}^p (x-x_0)}}{k_{\eta_x}^p L_z}. \quad (\text{L.18})$$

L.3 Contours d'intégration

Lorsque $x > x_0$, la convergence de l'intégrale est assurée pour $\Im m(\chi) < 0$; le contour d'intégration des figures L.1a et L.1c doivent donc être fermés par le bas, comprenant les pôles correspondant aux modes évoluant vers les x croissants. Lorsque $x < x_0$, la convergence de l'intégrale est assurée pour $\Im m(\chi) > 0$; le contour d'intégration des figures L.1b et L.1d doivent donc être fermés par le haut, comprenant les pôles correspondant aux modes évoluant vers les x décroissants.

Dans les deux cas, l'intégrale doit donc se ramener à la somme de l'intégrale de branche, constituée d'un aller-retour le long de la coupure, et de la somme infinie des résidus (pôles encerclés suivant le contour d'intégration).

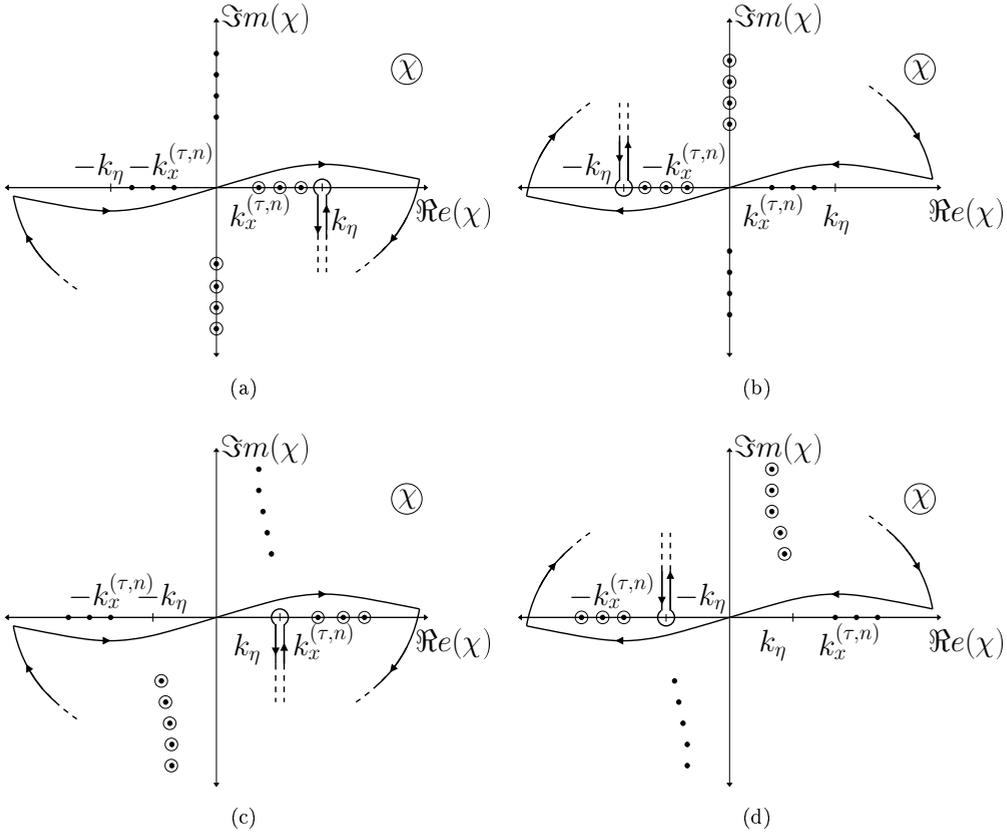


Figure L.1 – Schémas des contours d'intégration dans le plan complexe lorsque (a) et (b) $k_x^{(\tau,n)} < k_\eta$ et (c) et (d) $k_x^{(\tau,n)} > k_\eta$. Lorsque $x > x_0$, les contours des schémas (a) et (c) sont fermés par le bas et lorsque $x < x_0$, les contours des schémas (b) et (d) sont fermés par le haut.

Annexe M

RELATION ENTRE LA MÉTHODE DES RÉSIDUS ET LES DÉVELOPPEMENTS MODAUX

L'objectif de cette annexe n'est pas d'apporter des compléments au modèle traitant de la propagation des ondes de Lamb dans des guides rugueux (chapitre 4), mais d'apporter des éléments de nature à mettre en évidence la cohérence dans le choix de la fonction de Green utilisée dans ce chapitre 4. Pour cela, la fonction de Green $G_\eta(x, z; x_0, z_0)$ donnée par la relation (4.28) est calculée pour une admittance de paroi nulle [$\alpha_\eta^{(\sigma, m)} = 0$, relation (4.20)], c'est-à-dire pour une fonction de Green satisfaisant à des conditions de Neumann sur les frontières du guide extérieur. Cette fonction de Green est ensuite comparée à la fonction de Green utilisée au chapitre 2 pour traiter de la propagation des ondes SH, fonction de Green donnée sous la forme d'un développement modal [relation (2.14)].

M.1 Calculs des résidus

Le paramètre $\alpha_\eta^{(\sigma, m)}$ étant nul, la fonction de Green $G_\eta(x, z; x_0, z_0)$, donnée par la relation (4.28) a pour expression :

$$G_\eta(x, z; x_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[\kappa_{\eta z}(z_< + \frac{L_z}{2})] \cos[\kappa_{\eta z}(z_> - \frac{L_z}{2})]}{\kappa_{\eta z} \sin(\kappa_{\eta z} L_z)} e^{-i\chi(x-x_0)} d\chi \quad (\text{M.1})$$

avec

$$k_\eta^2 = \chi^2 + \kappa_{\eta z}^2. \quad (\text{M.2})$$

Cette fonction de Green admet une double infinité de pôles simples :

$$\kappa_{\eta z} = \frac{m\pi}{L_z} \iff \chi_m = \pm k_{x_m} = \pm \sqrt{k_\eta^2 - \left(\frac{m\pi}{L_z}\right)^2}. \quad (\text{M.3})$$

Compte tenu de l'expression (M.2), le dénominateur de la fonction de Green peut s'écrire :

$$\lim_{\kappa_{\eta z} \rightarrow 0} \kappa_{\eta z} \sin(\kappa_{\eta z} L_z) \cong \lim_{\chi \rightarrow \pm k_\eta} (k_\eta - \chi)(k_\eta + \chi)L_z; \quad (\text{M.4})$$

par suite, les résidus des pôles pour $m = 0$

$$\text{Res}_{\pm k_{x_0}} = -\frac{e^{\mp i k_{x_0}(x-x_0)}}{2\pi} \lim_{\chi \rightarrow \pm k_{x_0}} \frac{(\chi \mp k_{x_0})}{\kappa_{\eta z} \sin(\kappa_{\eta z} L_z)}, \quad (\text{M.5})$$

prennent la forme suivante :

$$\text{Res}_{\pm k_{x_0}} = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\mp i k_{x_0}(x-x_0)}}{2k_\eta L_z}. \quad (\text{M.6})$$

Pour $m \neq 0$, compte tenu de la relation

$$\lim_{\kappa_{\eta z} \rightarrow \frac{m\pi}{L_z}} \kappa_{\eta z} \sin(\kappa_{\eta z} L_z) \approx (-1)^m \frac{m\pi}{L_z} \lim_{\kappa_{\eta z} \rightarrow \frac{m\pi}{L_z}} (\kappa_{\eta z} L_z - m\pi), \quad (\text{M.7})$$

et de la relation (M.2), le dénominateur de la fonction de Green peut s'écrire

$$\lim_{\kappa_{\eta z} \rightarrow \frac{m\pi}{L_z}} \frac{1}{\kappa_{\eta z} \sin(\kappa_{\eta z} L_z)} = 2 \frac{(-1)^m}{L_z} \lim_{\chi \rightarrow \pm k_{x_m}} \frac{1}{(k_{x_m} - \chi)(k_{x_m} + \chi)}. \quad (\text{M.8})$$

Les résidus des pôles, pour $m \neq 0$, ont alors pour expression :

$$\text{Res}_{\pm k_{x_m}} = -\frac{e^{\mp i k_{x_m}(x-x_0)}}{2\pi} \cos\left[\frac{m\pi}{L_z} \left(z < + \frac{L_z}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{m\pi}{L_z} \left(z > - \frac{L_z}{2}\right)\right] \lim_{\chi \rightarrow \pm k_{x_m}} \frac{(\chi \mp k_{x_m})}{\kappa_{\eta z} \sin(\kappa_{\eta z} L_z)}. \quad (\text{M.9})$$

soit, si m est pair,

$$\text{Res}_{\pm k_{x_m}} = \pm \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{m\pi}{L_z} z <\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_z} z >\right) \frac{e^{\mp i k_{x_m}(x-x_0)}}{k_{x_m} L_z}, \quad (\text{M.10})$$

et si m est impair,

$$\text{Res}_{\pm k_{x_m}} = \pm \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{L_z} z <\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_z} z >\right) \frac{e^{\mp i k_{x_m}(x-x_0)}}{k_{x_m} L_z} \quad (\text{M.11})$$

M.2 Contours d'intégration

Les contours d'intégration sont représentés sur les figure M.1. Les pôles situés sur l'axe $\Re(\chi)$ sont associés aux ondes propagatives ($m\pi/L_z < k_T$) et les pôles situés sur l'axe $\Im m(\chi)$ sont associés aux ondes évanescentes ($m\pi/L_z > k_T$). Lorsque $x > x_0$, la convergence de l'intégrale est assurée pour $\Im m(\chi) < 0$; le contour d'intégration doit être fermé par le bas (figure M.1a). Lorsque $x < x_0$, la convergence de l'intégrale est assurée

pour $\Im m(\chi) > 0$; le contour d'intégration doit être fermé par le haut (figure M.1b). La fonction de Green a alors pour expression

$$G_\eta(x, x_0; z, z_0) = \begin{cases} -2i\pi \sum_{m=0}^{\infty} \text{Res}_{k_{x_m}}, & \text{si } x > x_0, \\ 2i\pi \sum_{m=0}^{\infty} \text{Res}_{-k_{x_m}}, & \text{si } x < x_0. \end{cases} \quad (\text{M.12})$$

Le report des expressions des résidus donnés par les relations (M.6), (M.10) et (M.11)

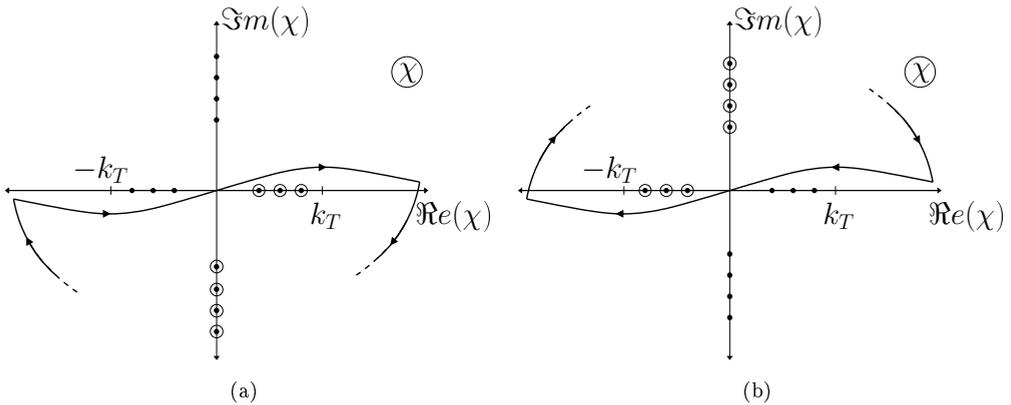


Figure M.1 – Schémas des contours d'intégration dans le plan complexe lorsque (a) $x > x_0$ (contour fermé par le bas) et (b) $x < x_0$ (contour fermé par le haut).

dans la relation (M.12) conduit à l'expression suivante pour la fonction de Green

$$G_\eta(x, x_0; z, z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{2 - \delta_{m0}}{2ik_{x_{2m}}L_z} \cos \left[\frac{2m\pi}{L_z} z \right] \cos \left[\frac{2m\pi}{L_z} z_0 \right] e^{-ik_{x_{2m}}|x-x_0|} + \frac{1}{ik_{x_{2m+1}}L_z} \sin \left[\frac{(2m+1)\pi}{L_z} z \right] \sin \left[\frac{(2m+1)\pi}{L_z} z_0 \right] e^{-ik_{x_{2m+1}}|x-x_0|} \right\}. \quad (\text{M.13})$$

L'expression (M.13) de la fonction de Green calculée dans le plan complexe est donc la même que l'expression (2.14) de la fonction de Green développée sur une base de fonctions propres [compte tenu des expressions (2.15), (2.16), (2.10) et (2.11)]. Non seulement cette comparaison permet de mettre en évidence le lien entre le résidu de chaque pôle avec un des coefficients du développement modal de la fonction de Green.

Propagation acoustique en guides fluides et solides à parois rugueuses : formulation intégrale pour ondes de pression, de cisaillement et de Lamb

Dans le cadre du contrôle non destructif, l'étude de la propagation d'ondes dans des guides rugueux ouvre la voie à diverses applications, telles la caractérisation de l'état de surface d'un matériau ou de la qualité d'un collage dans une structure assemblée, la détection d'effets de corrosion ou d'imperfections d'usinages, ... Dans ce contexte, l'étude menée au cours de cette thèse porte sur l'analyse des effets de rugosité de frontières de guides d'ondes fluides ou solides sur la propagation des ondes acoustiques, en vue, en pratique, de caractériser cette rugosité.

Le processus de diffusion sur des rugosités de parois se traduit par des couplages modaux, transferts d'énergie entre modes créés ou non par des sources, modes propres pour ondes de pression en fluides ou pour ondes SH en solides, modes de Lamb en guides solides. Qu'il s'agisse de champs à caractère scalaire (en fluide ou ondes SH en solide) ou vectoriel (ondes de Lamb), un modèle nouveau, qui repose sur une formulation intégrale des équations scalaires de propagation, est mis en œuvre, modèle dans lequel le choix des fonctions de Green joue un rôle prépondérant.

Les relations entre champs acoustiques (de pression ou élastiques) et profils de rugosité ont été étudiées pour tous types de rugosité, mais plus particulièrement pour des rugosités périodiques qui permettent des analyses plus avancées. La relation entre les densités spectrales de puissance (DSP) des profils de rugosité et les coefficients de réflexion et de transmission en énergie des modes guidés est établie; certains résultats obtenus ont été comparés à ceux d'expériences réalisées à cet effet.

Acoustic propagation in fluid and solid waveguides with rough surfaces: integral formulation for pressure waves, SH waves and Lamb waves

Analysing the wave propagation in rough waveguides, in the frame of Non Destructive Testing (NDT), opens the way to several applications such as the characterization of surfaces of materials or of adhesive properties, the detection of the corrosion or of the surface defects, and so on. The aim of this work, taken in this context, is to present a method for analysing the effects of roughness of boundaries (fluid or solid waveguides) on the propagation of acoustic guided waves, with a practical view to the characterization of the roughness.

The scattering from rough boundaries leads to modal coupling, i.e. energy transfer between modes created or not by sources, namely eigenmodes for pressure waves (fluid waveguides) and SH waves (solid waveguides), Lamb modes in solid waveguides. As regards fields characterized either by a scalar behaviour (pressure or SH waves) or by a vectorial behaviour (Lamb waves), the effects of the roughness are described in a new derivation from an integral representation of the scalar propagation equations, where the Green's functions chosen plays an important role.

The relations between the acoustic fields (pressure fields or elastic fields) and the roughness profiles are discussed for any kind of roughness, drawing particularly the attention to periodic profiles because they allow more advanced analysis. The relation between the Power Spectral Density (PSD) of the roughness profile and the energy reflexion/transmission coefficients of the guided modes is provided; results are compared to those obtained from experiments conducted for this purpose.