



HAL
open science

Contribution à l'homogénéisation des structures périodiques unidimensionnelles : application en biomécanique à la structure axonémale du flagelle et des cils vibratiles

Jérémy Toscano

► **To cite this version:**

Jérémy Toscano. Contribution à l'homogénéisation des structures périodiques unidimensionnelles : application en biomécanique à la structure axonémale du flagelle et des cils vibratiles. Autre. Université Paris-Est, 2009. Français. NNT : 2009PEST1060 . tel-00534570

HAL Id: tel-00534570

<https://theses.hal.science/tel-00534570>

Submitted on 10 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ — — PARIS-EST

École doctorale MODES

Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle (CNRS, FRE 3160)

Équipe de mécanique

Spécialité : Mécanique

Thèse de Doctorat pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

Présentée et soutenue publiquement le 18 décembre 2009 par

Jérémy TOSCANO

Contribution à l'homogénéisation des structures périodiques unidimensionnelles. Application en biomécanique à la structure axonémale du flagelle et des cils vibratiles

Directeur de thèse

Guy BONNET

Jury :

J.F. GANGHOFFER	ENSEM	<i>Président, rapporteur</i>
P. CARTRAUD	Ecole Centrale Nantes	<i>Rapporteur</i>
C. CIBERT	Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines	<i>Examineur</i>
V. PENSEE	Université PARIS-EST	<i>Examineur</i>
K. SAB	Ecole des Ponts ParisTech	<i>Examineur</i>
G. BONNET	Université PARIS-EST	<i>Directeur de thèse</i>

A mes grands-parents

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu les personnes dont la contribution à ce projet fut la plus grande. Naturellement je commence par le professeur Guy Bonnet. Je le remercie de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle de l'Université de Paris-Est et dirigé ce projet. Ses compétences scientifiques, la qualité de ses échanges, sa grande disponibilité, ses principaux conseils m'ont guidé et permis de progresser et de mieux appréhender ce projet de recherche. Je remercie au même titre Vincent Pensée pour sa grande participation. Merci Vincent pour ton implication dans ce travail, pour ton aide, ta disponibilité, tes nombreux conseils, ton soutien sans faille et surtout ta bonne humeur. Je remercie Christian Cibert pour tout le temps qu'il a consacré à m'expliquer une quantité colossale de subtilités en biologie, pour ses conseils et son aide. La tâche fut compliquée, mais riche en apports. Je remercie également le professeur Karam Sab pour son regard neuf sur le projet, pour les idées d'exploration très intéressantes. Je tiens à souligner la grande qualité scientifique, la rigueur ainsi que le soutien constant tout au long de ce travail dont ces personnes ont fait preuve. Enfin, je remercie les professeurs Jean-François Ganghoffer et Patrice Cartraud d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse (et président de mon jury de soutenance pour monsieur Ganghoffer). Leurs commentaires et leurs questions m'ont permis d'améliorer mon manuscrit et m'ont ouvert de nouvelles pistes de réflexion. Je remercie d'autant plus toutes ces personnes de s'être déplacées afin de venir m'écouter malgré la neige.

Mes pensées vont également vers mes proches en commençant par mes parents et ma petite soeur Sophie qui me soutiennent et m'encouragent depuis toutes ces années. Ils ont fait tout leur possible pour que je me consacre pleinement à mon projet de recherche durant ces trois années. Au travers de cette expérience, ils ont découvert la recherche avec les bons, mais également les mauvais côtés. Il m'arrivait souvent de discuter avec eux au sujet de mes travaux pour essayer de leur expliquer mes avancées ce qui m'a permis de mieux les vulgariser. Ils m'ont écouté à chaque fois que je désirais faire des répétitions de soutenance ou autre. En résumé, ils ont fait tout leur possible pour m'aider. Je leur exprime donc toute ma gratitude. D'autant que Sophie a relu plus d'une fois mes écrits pour les corriger et j'en passe. De plus, son tiramisù est devenu populaire au laboratoire. Je pense aussi à Isabelle, mon amie, pour son soutien. Je n'oublierai jamais le regard de fierté que ces quatre personnes avaient le jour de ma soutenance et l'amour qu'ils m'apportent a été d'une grande aide pour achever ce projet.

Mes remerciements ne s'arrêtent pas là, tous les acteurs du laboratoire ont fait preuve d'une

grande humanité pour que l'on puisse tous mener à bien nos thèses. L'entraide a été bénéfique pour tout le monde. Nous avons formé je ne dirai pas une famille, mais presque sachant qu'au fil du temps des personnes partaient pour voler de leurs propres ailes que ce soit en France ou dans leur pays d'origine tandis que d'autres rejoignaient le laboratoire. Ce fut un grand plaisir d'avoir travaillé et d'avoir bénéficié du multiculturalisme de ce lieu (toutes les régions du monde étaient représentées). Merci donc à toi Fred (*Fredo si Fredi*), Elie (*le Cri du LaM* ou *Kader* ou *Greg*), Evangéline (*la Fille*), Eric M. (*la Force tranquille*), Eric S. (*le Viking*), Sandra (*Mon colonel*), Morad (*Samir* ou bien *Jimmy* -même s'il débute l'apprentissage de la guitare... il a de l'avenir ce bonhomme-), Moustapha (*Sir*), Charles (*Carlito*), Benoit (*le Souffleur de bouteilles* ou *Kimco 2000*), Camille (*Solénoïde*), Sulpicio (*Félicious*), David (*Oh my god*), Monsef (*la Monseftonik*), Bao (*le Parain vietnamien*), Amin (*A min a max* ou bien *Avec de la sauce*), Thiago (*Relacha*), Francisco (*Salsa man*), Seddik (*le Monsieur muscle du CPC*), tous les Vietnamiens (qui m'ont permis d'avoir un diplôme de vietnamien ... mais pas très littéraire je l'avoue), Christophe, Ziane (pour ses discours et blagues interminables), Toan (*Toan Heo*), Linh (pour avoir partagé le bureau B13 avec moi durant ces trois années en restant très discret), Chantal et Isabelle (les secrétaires incontournables du labo) avec bien entendu N'guyen, Pardonnez-moi si j'en oublie. Je ne ferai également pas l'impasse du LPMDI en commençant par Rémi (*RRRREEEEEEMMMMMIIIIII* ou *l'Espion*), Guillaume (*Monsieur mille*), Nicolas, Kevin (*Breton*), Aline, le dahu (*Julien*). Avec toutes ces personnes, j'ai passé des moments inoubliables que ce soit au labo ou à l'extérieur (au Margen's, à l'Australian bar, à la cantine, au TnT, aux cinélams, aux matchs de foot et de basket, au footbolito, au fitness...). Il me tient de souligner plusieurs choses, les cris du LaM manquent à tous les anciens (tu as compris Elie), j'espère que les courageuses personnes ayant participé à mes cours de fitness continueront à en faire avec le même enthousiasme. Je souhaite également m'adresser à tous les doctorants ainsi que les organisateurs des doctorales 2008 de Paris-Est qui ont réussi à faire évader mon esprit de ma thèse pendant une semaine. Plus particulièrement l'équipe des rouges avec laquelle on a eu l'idée de créer une société commercialisant le "12read pad".

Pour terminer, je tiens à dédier ce travail aux personnes qui ne sont plus présentes physiquement, mais présentes dans mon coeur et qui auraient tant aimé voir l'aboutissement de mes études.

Table des matières

Introduction générale	1
I Homogénéisation périodique de poutres de Timoshenko	5
Introduction	7
1 Etude des poutres de Timoshenko non symétriques	9
1.1 Cinématique de la "poutre de Timoshenko"	10
1.1.1 Champ de déplacement	10
1.1.2 Tenseur de déformation	11
1.2 Efforts internes et équations d'équilibre	12
1.2.1 Définitions des efforts internes	12
1.2.2 Relations entre les efforts internes et les contraintes	13
1.2.3 Equations d'équilibre	13
1.3 Loi de comportement pour les milieux élastiques linéaires	14
1.4 Cinématique de la poutre console isostatique	15
1.5 Cinématique de la poutre console hyperstatique	17
2 Présentation de la méthode d'homogénéisation	25
2.1 Technique d'homogénéisation	25
2.1.1 Cellule de base	26
2.1.2 L'homogénéisation de structures périodiques	26
2.1.3 Méthodes de résolution	28
2.2 Homogénéisation de poutres périodiques composées de cellules pleines	30
2.3 Homogénéisation de poutres périodiques de cellules quelconques	32

Table des matières

2.4	Détermination des raideurs équivalentes	35
2.4.1	Cinématiques élémentaires	35
2.4.2	Détermination numérique des raideurs équivalentes	41
3	Application de la méthode d'homogénéisation et validation	45
3.1	Validation du calcul des raideurs équivalentes	45
3.1.1	Résultats analytiques	46
3.1.2	Résultats numériques	46
3.2	Validation de l'hypothèse permettant de relier distorsion et dérivée de cour- bure	47
3.3	Principe de validation de la méthode sur des structures complexes	48
3.3.1	Comparaison des déplacements	49
3.3.2	Comparaison des efforts internes : relocalisation	50
3.4	Structure bidimensionnelle symétrique constituée de poutres	50
3.4.1	Convergence des raideurs équivalentes	51
3.4.2	Comparaison des déplacements	52
3.4.3	Comparaison des efforts internes	54
3.5	Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-flexion	54
3.5.1	Convergence des raideurs équivalentes	54
3.5.2	Comparaison des déplacements	56
3.5.3	Comparaison des efforts internes	57
3.6	Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-cisaillement	59
3.6.1	Convergence des raideurs équivalentes	59
3.6.2	Comparaison des déplacements	60
3.6.3	Comparaison des efforts internes	63
3.7	Structure tridimensionnelle	64
3.8	Structures possédant des éléments transverses souples et effets de bord	64
4	Prise en compte des déformations libres	71
4.1	Cas de l'homogénéisation tridimensionnelle	72
4.2	Problème d'homogénéisation périodique avec déformation libre pour des structures à périodicité unidirectionnelle	73
4.2.1	Problème théorique	73
4.2.2	Méthode de résolution	74
4.3	Résultats numériques et validations	75

4.3.1	Déformations libres sur une structure symétrique	75
4.3.2	Déformations libres imposées sur une structure non symétrique. Couplage traction-flexion	75
4.3.3	Déformations libres sur une structure non symétrique. Couplage traction-cisaillement	75
II	Application à l'axonème	79
	Introduction	81
5	Biomécanique de l'axonème et construction d'un modèle numérique adapté	83
5.1	Contexte biomécanique	83
5.1.1	Structure et fonctionnement de l'axonème "9+2"	85
5.1.2	Objectif de notre travail	93
5.2	Modélisation de l'axonème	93
5.2.1	Modélisation des doublets et de l'appareil central	94
5.2.2	Les bras de dynéine	95
5.2.3	Liens de nexine et ponts radiaires	96
5.2.4	Représentation d'une cellule de base du modèle complet	96
5.2.5	Courbure plane, activité des bras de dynéine et géométrie cylin- drique de l'axonème	97
6	Etude d'une structure axonémale réduite	101
6.1	Courbures déviées des doublets libres	101
6.2	Déformation du modèle complet soumis à des efforts externes	104
6.3	Flexion de l'axonème soumis à un effort externe et partition des moteurs sur les deux demi axonèmes délimités par le plan de courbure.	107
6.4	Conclusions sur la flexion de l'axonème induite par des efforts externes . . .	111
6.5	Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine . . .	115
6.5.1	Modes de chargements	115
6.5.2	Déformées de l'axonème	117
6.5.3	Interprétation dynamique des déformées obtenues selon des efforts internes	124

Table des matières

7	Application des techniques d'homogénéisation sur la structure de l'axonème.	129
7.1	Homogénéisation des propriétés mécaniques de l'axonème	129
7.2	Homogénéisation des déformations libres appliquées sur l'axonème	133
	Conclusion générale	139
A	Cinématiques de la poutre 2D isostatique	143
B	Cinématiques de la poutre 2D hyperstatique	147
C	Caractéristiques homogénéisées des différentes structures 2D	151
	Bibliographie	155

Introduction générale

Les structures en treillis constituées d'un nombre important de barres et de poutres sont largement utilisées, notamment en génie civil. Elles ont l'avantage d'être légères, très résistantes et peu coûteuses. L'étude de telles structures passe le plus souvent par l'utilisation de modèles utilisant la méthode des éléments finis qui peuvent rapidement conduire à des calculs très coûteux. Il peut être intéressant dans certains cas, et particulièrement lorsque la maille répétitive du treillis est complexe, de réduire la taille du problème en définissant un milieu continu équivalent à la structure considérée. C'est le cas par exemple de la structure biologique qui constitue l'application qui a motivé la mise au point de la méthode. L'objectif à terme est de modéliser le mouvement de la structure, ce qui nécessite un nombre d'itérations important sur une structure comportant un grand nombre de degrés de liberté.

Dans ce travail, on s'intéresse en particulier aux structures dont deux dimensions sont petites par rapport à la troisième et qui sont construites par la répétition dans une direction d'une cellule de base. Ainsi, en se plaçant dans le cadre des méthodes d'homogénéisation des milieux périodiques, on cherchera à définir une poutre de Timoshenko équivalente à la structure étudiée. La méthode sera étendue afin de prendre en compte des déformations libres internes à la structure (déformations thermiques par exemple).

L'axonème est la structure biologique qui a été étudiée. Il correspond à la structure axiale et active des cils et des flagelles (cils bronchiques, spermatozoïdes). Il est composé d'un cylindre de neuf doublets de microtubules externes reliés entre eux par des moteurs moléculaires (les bras de dynéine) et des structure *a priori* élastiques (les liens de nexine). L'axe de ce cylindre est constitué de l'"appareil central" organisé autour de deux microtubules. Chaque doublet externe est relié à l'appareil central par un "pont radiaire". La courbure de la structure est due au fonctionnement des moteurs moléculaires qui engendre un glissement des doublets les uns par rapport aux autres. Ce glissement est converti en courbure grâce à la présence de liaisons élastiques transversales. Pour plus de détails, le mouvement de l'axonème est décrit en partie 2.

Le mémoire est structuré en deux parties.

La première partie expose dans un premier temps la méthode d'homogénéisation proposée (obtention de propriétés macroscopiques équivalentes). La méthode est validée sur un certain nombre d'exemples. Dans un deuxième temps, on introduit des déformations libres "microscopiques" dans la structure et l'on cherche des déformations libres "macroscopiques" équivalentes aux déformations libres microscopiques. Les déformations libres "microscopiques" sont d'amplitude connue mais leur localisation, fortement inhomogène, ne permet pas de déterminer simplement les déformations libres de poutre équivalente. Une méthode d'homogénéisation est proposée pour obtenir les déformations libres équivalentes et validée sur des exemples simples.

La seconde partie est consacrée à l'application des techniques développées en première partie à l'étude du mouvement de l'axonème, partie axiale et motrice du flagelle ou des cils vibratiles. Un modèle complet, mais comprenant un nombre restreint de cellules périodiques est étudié dans un premier temps, afin d'étudier au mieux les effets des hypothèses réalisées sur les déformées de la structure. Dans un deuxième temps, la méthode développée en première partie est appliquée à la structure de l'axonème et les résultats obtenus par homogénéisation sont testés sur une structure de comparaison.

Première partie

Homogénéisation périodique de poutres de Timoshenko

Introduction

L'idée de base de l'homogénéisation est de " remplacer " un milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent. On entend ainsi définir, en utilisant un certain nombre d'informations sur la microstructure, des propriétés macroscopiques décrivant de façon satisfaisante le comportement global du milieu. Les objectifs de ce type d'approches de changement d'échelle peuvent être multiples :

- Il peut s'agir d'enrichir la modélisation du comportement macroscopique en utilisant des informations données à l'échelle microscopique.
- On peut aussi chercher à s'affranchir de la description complète de la microstructure et simplifier ainsi le problème à l'échelle macroscopique. Ceci peut permettre un gain de temps de calcul lorsque l'on s'intéresse à la simulation de structures complexes.

L'utilisation de telles méthodes nécessite que l'on puisse identifier deux échelles caractérisant le milieu. D'une part, l'échelle microscopique est suffisamment petite pour analyser le comportement des hétérogénéités du milieu. D'autre part, l'échelle macroscopique est suffisamment grande pour que le milieu soit considérée comme homogène.

Le milieu hétérogène peut être supposé organisé aléatoirement. C'est le cas d'un grand nombre de matériaux composites ou encore le cas des matériaux polycristallins. Les approches visant à déduire le comportement élastique de tels matériaux reposent souvent sur les travaux d'Eshelby [54] ou des travaux comparables qui visent à modéliser l'interaction entre une ou plusieurs hétérogénéités avec le milieu qui les environne. Il s'agit :

- soit d'estimer les propriétés du milieu hétérogène en utilisant les schémas auto-cohérent, auto-cohérent généralisé ou de Mori-Tanaka.
- soit d'encadrer les propriétés en définissant des bornes telles celles de Voigt et Reuss, Hashin-Shtrikman [67] ou Walpole [116].
- soit, pour certaines structures simples, de déterminer des solutions exactes.

Une présentation détaillée de ces méthodes peut être trouvée dans les ouvrages de Nemat-Nasser et Hori [89], Milton [83] ou encore Bornert et al. [10].

Introduction

Par ailleurs, certains milieux hétérogènes sont obtenus par répétition périodique d'une même morphologie (cellule de base). C'est le cas des structures en treillis considérées dans ce travail. Des méthodes spécifiques sont développées pour de telles structures ; celles-ci s'appuient généralement sur les méthodes asymptotiques [102]. Dans la lignée des méthodes d'homogénéisation tridimensionnelles, elles s'appliquent aux plaques périodiques [35] et notamment aux murs en maçonnerie [4, 39, 40] constitués de cellules pleines et décrites comme des milieux continus. On notera aussi les travaux tels que ceux de Boutin et al. [12] (entre autres...) qui traitent les structures en treillis de façon discrète et appliquent les développements asymptotiques sur de telles structures. D'un point de vue pratique, il est exclu de traiter simplement les structures de façon discrète dès que le nombre de degrés de liberté devient important et il faut dans ce cas recourir à une méthode numérique qui est généralement la méthode des éléments finis. Nous avons donc préféré, dans la suite des travaux de thèse de F. Laudarin (2007), utiliser une méthode générale d'homogénéisation, dont l'utilisation est possible quel que soit la structure de la cellule élémentaire.

La première partie de ce mémoire est construite autour de quatre chapitres. Le chapitre 1 introduit la théorie des poutres sous l'hypothèse cinématique de Timoshenko. Un certain nombre de résultats sont établis qui serviront à la validation de la méthode d'homogénéisation. Le chapitre 2 est consacré à la présentation de la méthode d'homogénéisation des poutres périodiques. Au chapitre 3, on propose l'étude d'un certain nombre d'exemples qui permettent de valider la méthode présentée. Enfin, dans le chapitre 4, nous introduisons la prise en compte dans la méthode d'homogénéisation, de déformations libres (par exemple d'origine thermique) appliquées à la microstructure.

Chapitre 1

Etude des poutres de Timoshenko non symétriques

Sommaire

1.1 Cinématique de la "poutre de Timoshenko"	10
1.2 Efforts internes et équations d'équilibre	12
1.3 Loi de comportement pour les milieux élastiques linéaires	14
1.4 Cinématique de la poutre console isostatique	15
1.5 Cinématique de la poutre console hyperstatique	17

Ce chapitre est consacré à l'étude des poutres épaisses dites "poutres de Timoshenko", pour lesquelles les déformations de cisaillement ne sont pas négligeables devant les déformations induites par les déformations de courbure [113, 112]. La plupart des notions introduites sont bien établies dans le cas de poutres simples, généralement planes et symétriques. Dans ce cas, les équations de comportement sont pour la plupart découplées, ce qui simplifie considérablement la mise en oeuvre du système d'équations obtenues. Notre apport a été d'étendre la validité de cette approche aux poutres qui ne présentent *a priori* aucune symétrie, comme le sont les poutres constituées par la juxtaposition axiale et périodique de cellules élémentaires identiques.

Rappelons que la théorie des poutres est une théorie approchée s'appliquant à des solides pour lesquels deux dimensions sont petites par rapport à la troisième. L'approximation réside :

- dans la réduction d'un solide tridimensionnel à un milieu curviligne
- dans la concentration, en un point P d'une courbe C (ligne moyenne¹), des informations

1. La ligne moyenne peut-être le lieu des centres de gravité, mais il n'y a pas d'obligation à la définir ainsi, en particulier lorsque la poutre est hétérogène, comme on peut le constater dans le cas de poutres composites. Dans

des points Q appartenant à la section droite ; c'est-à-dire la section du solide contenue dans le plan perpendiculaire en P à la courbe C (cf. fig. 1.1). On note s l'abscisse curviligne du point P de la fibre moyenne.

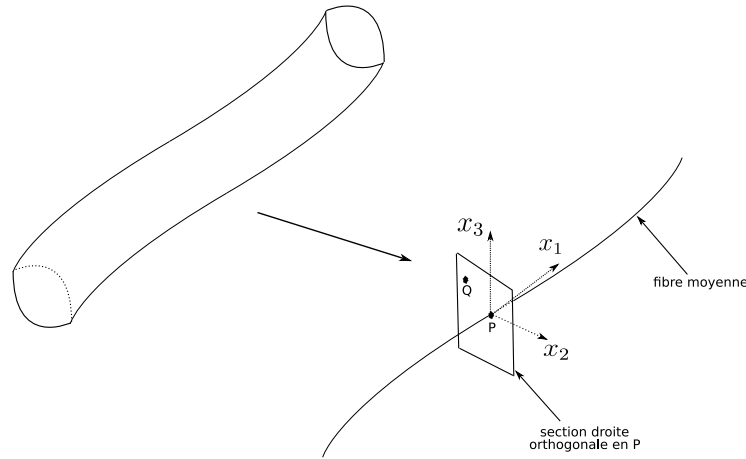


FIGURE 1.1 – Représentation du problème unidimensionnel.

Les différentes sections de ce chapitre portent sur la cinématique de la poutre de Timoshenko, sur les efforts internes et sur la loi de comportement de la poutre élastique linéaire, puis sur la résolution d'un système simple constitué d'une poutre console, dans le cas isostatique, puis dans le cas hyperstatique.

1.1 Cinématique de la "poutre de Timoshenko"

1.1.1 Champ de déplacement

La cinématique de la poutre, c'est-à-dire le déplacement des points P , est décrite par le vecteur déplacement

$$\underline{u}^{(0)}(s) = u_1^{(0)}(s)\underline{e}_1 + u_2^{(0)}(s)\underline{e}_2 + u_3^{(0)}(s)\underline{e}_3 \quad (1.1)$$

où le système d'axe est représenté sur la figure 1.1. On notera que l'axe 1 est tangent en P à la courbe C , orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes, et les axes 2 et 3 sont dans le plan de la section tel que le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ soit orthonormé direct.

Les déplacements des points courants Q de la section droite associée à P sont ensuite obtenus en supposant que, en première approximation, les sections droites restent droites après déformation. Il vient :

$$\underline{u}(Q) = \underline{u}^{(0)}(P) + \underline{\theta}(s) \wedge \underline{PQ} + \underline{E}^{(0)} \cdot \underline{PQ} \quad (1.2)$$

ce cas, on pourra supposer que la ligne moyenne est le lieu des points situés à mi-hauteur de la section.

Dans cette expression,

- $\underline{\theta}(s)$ est le vecteur rotation de la section qui dépend de l'abscisse curviligne,
- $\underline{E}^{(0)} = E_{22}^{(0)}(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + E_{33}^{(0)}(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$ est ajouté de manière à rendre cohérent le champ de déplacement avec les conditions aux limites imposées sur les faces de la poutre en raison de l'"effet Poisson".

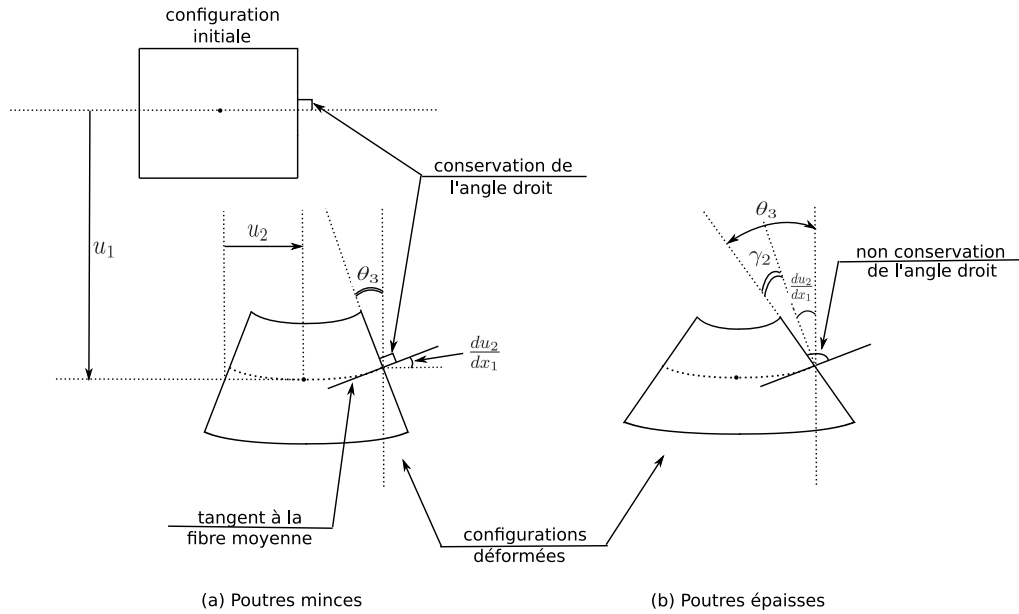


FIGURE 1.2 – Distorsion de la section.

1.1.2 Tenseur de déformation

Dans le système d'axe $Px_1x_2x_3$, le tenseur de déformation correspondant au champ de déplacement, défini par l'équation (1.2), s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{x}) = & (\Delta - x_2 \cdot \chi_3 + x_3 \chi_2) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\gamma_2 - x_3 \cdot \chi_1) \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_2 + (\gamma_3 + x_2 \cdot \chi_1) \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_3 \\ & + E_{22}^{(0)} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + E_{33}^{(0)} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

où l'on a introduit les variables définissant la cinématique de poutre, qui sont données par :

- Δ , qui caractérise l'extension de la poutre :

$$\Delta = \frac{du_1^{(0)}}{dx_1} \quad (1.4)$$

- γ_2 et γ_3 , qui sont les composantes de distorsion :

$$\gamma_2 = \frac{du_2}{dx_1} - \theta_3 \quad (1.5)$$

$$\gamma_3 = \frac{du_3}{dx_1} + \theta_2 \quad (1.6)$$

- χ_1 qui décrit la torsion
- les termes de flexion ($\chi_i, i = 2, 3$), avec :

$$\chi_i = \frac{d\theta_i}{dx_1} \quad (1.7)$$

La cinématique de la poutre est ainsi décrite par six paramètres, qui peuvent être considérées comme les composantes d'un torseur dénommé "torseur des déformations" [109]. On sait que le champ de déformations obtenu en (1.2) ne vérifie pas les équations d'équilibre et n'inclut pas le gauchissement de section. Il ne peut être considéré comme valable qu'en première approximation.

1.2 Efforts internes et équations d'équilibre

1.2.1 Définitions des efforts internes

Les efforts internes représentent les efforts exercés par la partie droite de la poutre sur la partie gauche conformément à l'orientation des abscisses curvilignes.

Le torseur des efforts internes (cf fig. 1.3) est caractérisé par ses éléments de réduction au point

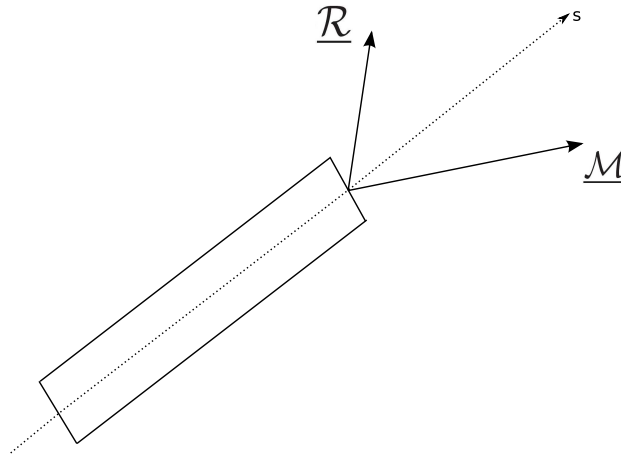


FIGURE 1.3 – Torseur des efforts internes.

P à savoir la résultante des efforts $\underline{\mathcal{R}}$ et le moment $\underline{\mathcal{M}}$.

Dans le système d'axe $Px_1x_2x_3$, la résultante des efforts s'écrit :

$$\underline{\mathcal{R}} = Ne_1 + T_2e_2 + T_3e_3 \quad (1.8)$$

où N est l'effort normal et T_2 et T_3 sont les composantes de l'effort tranchant. De même, le moment s'écrit

$$\underline{\mathcal{M}} = M_1 \underline{e}_1 + M_2 \underline{e}_2 + M_3 \underline{e}_3 \quad (1.9)$$

où M_1 est le moment de torsion et M_2 et M_3 sont les composantes du moment de flexion.

1.2.2 Relations entre les efforts internes et les contraintes

Les composantes du torseur des efforts internes (cf fig. 1.3) sont classiquement obtenues par intégration du vecteur contrainte $\underline{T}(Q, \underline{n}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}$ sur la section S de "coupure" où $\underline{\Sigma}$ est le tenseur des contraintes en Q et \underline{n} est le vecteur normal à la section. Il vient :

$$\underline{\mathcal{R}} = \int_S \underline{T}(Q, \underline{n}) dS \quad (1.10)$$

$$\underline{\mathcal{M}} = \int_S \underline{PQ} \wedge \underline{T}(Q, \underline{n}) dS \quad (1.11)$$

Dans le système d'axe $Px_1x_2x_3$, ces définitions conduisent aux relations suivantes entre composantes du torseur des efforts intérieurs et celles du torseur des déformations :

$$N = \int_S \Sigma_{11} dS ; \quad T_2 = \int_S \Sigma_{12} dS ; \quad T_3 = \int_S \Sigma_{13} dS \quad (1.12)$$

$$M_1 = \int_S (x_2 \Sigma_{13} - x_3 \Sigma_{12}) dS ; \quad M_2 = \int_S x_3 \Sigma_{11} dS ; \quad M_3 = \int_S -x_2 \Sigma_{11} dS \quad (1.13)$$

1.2.3 Equations d'équilibre

On considère un élément de poutre droite (ou de faible courbure) de longueur dx_1 , sollicité par une charge répartie $\underline{p}(x_1)$ (cf. fig. 1.4). La première équation d'équilibre conduit à :

$$d\underline{\mathcal{R}} + \underline{p}(x_1) dx_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{d\underline{\mathcal{R}}}{dx_1} = -\underline{p}(x_1) \quad (1.14)$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{dN}{dx_1} = -p_1 \quad (1.15)$$

$$\frac{dT_2}{dx_1} = -p_2 \quad (1.16)$$

$$\frac{dT_3}{dx_1} = -p_3 \quad (1.17)$$

La seconde équation est donnée classiquement, au premier ordre en dx_1 , par :

$$d\underline{\mathcal{M}} - \underline{\mathcal{R}} \wedge \underline{P}'P = 0 \quad (1.18)$$

et l'on a :

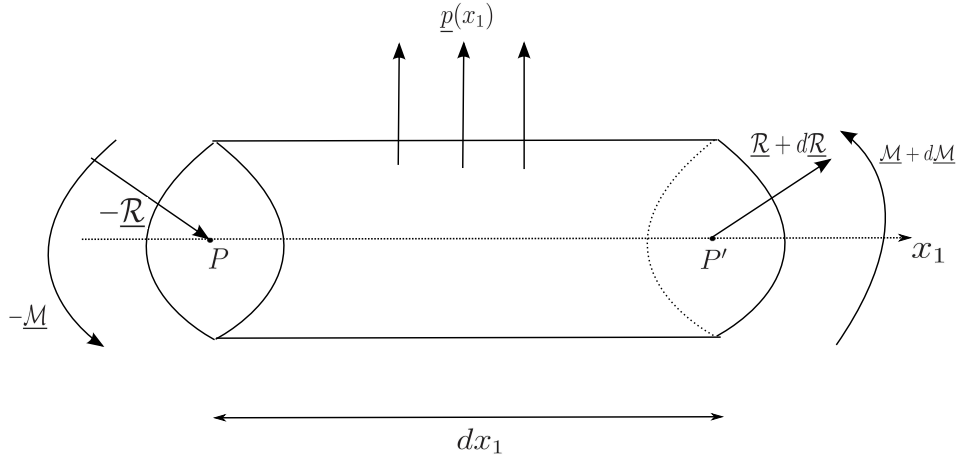


FIGURE 1.4 – Élément de poutre chargé.

$$\frac{dM_1}{dx_1} = 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{dM_2}{dx_1} = T_3 \quad (1.20)$$

$$\frac{dM_3}{dx_1} = -T_2 \quad (1.21)$$

1.3 Loi de comportement pour les milieux élastiques linéaires

La loi de Hooke, qui relie les contraintes et les déformations, induit des relations linéaires entre les composantes du tenseur des efforts internes et les variables cinématiques de la poutre. Dans le système d'axe $Px_1x_2x_3$, l'application linéaire est représentée à l'aide d'une matrice 6×6 par :

$$\begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Ce qui s'écrit :

$$\underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{G}_\gamma \quad (1.23)$$

où $\underline{F} = (N, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3)^T$ et $\underline{G}_\gamma = (\Delta, \gamma_2, \gamma_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3)^T$. La matrice de rigidité K est nécessairement symétrique et définie positive. Les composantes K_{ij} dépendent

des propriétés du ou des matériaux constituant la section ainsi que de la géométrie de celle-ci. Dans le cas d'un matériau isotrope et d'une section symétrique, la matrice de raideur devient diagonale puisque tout les termes de couplages (K_{ij} pour $i \neq j$) deviennent nuls. K_{11} correspond à ES , K_{22} à Gk_2S , K_{33} à Gk_3S , K_{44} à GJ , K_{55} à EI_2 et K_{66} à EI_3 où E correspond au module d'Young, S à la section, J au moment polaire, I_2 et I_3 aux moments d'inertie autour de l'axe 2 et 3 respectivement, k_2 et k_3 aux facteurs de correction cisaillement et G au module de cisaillement. Dans le cas général, la matrice de raideur K_{ij} est a priori pleine.

1.4 Cinématique de la poutre console isostatique

L'objectif de ce paragraphe est d'établir les expressions des composantes du tenseur de déformation dans une poutre tridimensionnelle isostatique.

On considère un problème posé sur une poutre console tridimensionnelle (cf. fig. 1.5). La loi

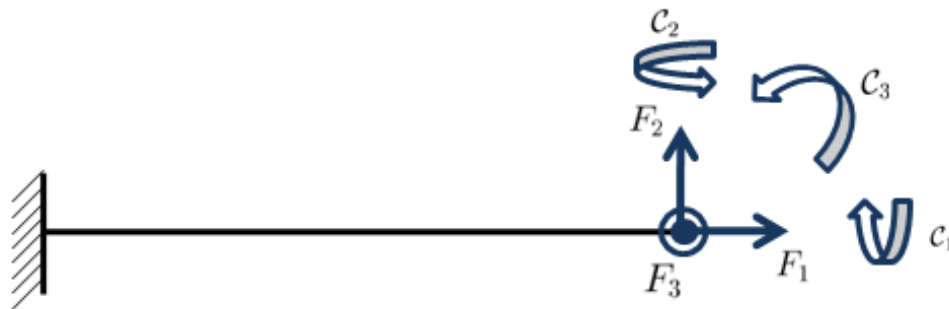


FIGURE 1.5 – Poutre console isostatique

de comportement est donnée par (1.22) en supposant la matrice de raideur pleine.

Les efforts internes sont donnés par la méthode classique de la coupure :

$$\begin{cases} N(x_1) = F_1 \\ T_2(x_1) = F_2 \\ T_3(x_1) = F_3 \\ M_1(x_1) = C_1 \\ M_2(x_1) = C_2 - F_3(l - x_1) \\ M_3(x_1) = C_3 + F_2(l - x_1) \end{cases} \quad (1.24)$$

Les composantes du tenseur des déformations sont obtenues comme suit :

– en inversant la loi de comportement, il vient :

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{15} & H_{25} & H_{35} & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

où $H = K^{-1}$.

- Les variables cinématiques sont obtenues en injectant les efforts internes (1.24) dans la loi de comportement inversée (1.25).
- Enfin, l'intégration des définitions (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7) des variables cinématiques permet d'obtenir les champs de déplacement et de rotation. On a :

1.5. Cinématique de la poutre console hyperstatique

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_1(x_1) = (H_{11}F_1 + H_{12}F_2 + H_{13}F_3 + H_{14}C_1 + H_{15}C_2 + H_{16}C_3)x_1 + \\
 \quad (H_{16}F_2 - H_{15}F_3)(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + a \\
 u_2(x_1) = (H_{12}F_1 + H_{22}F_2 + H_{23}F_3 + H_{24}C_1 + H_{25}C_2 + H_{26}C_3)x_1 + \\
 \quad (H_{26}F_2 - H_{25}F_3)(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + \\
 \quad (H_{16}F_1 + H_{26}F_2 + H_{36}F_3 + H_{46}C_1 + H_{56}C_2 + H_{66}C_3)\frac{x_1^2}{2} + \\
 \quad (H_{66}F_2 - H_{56}F_3)(l\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6}) + fx_1 + b \\
 u_3(x_1) = (H_{13}F_1 + H_{23}F_2 + H_{33}F_3 + H_{34}C_1 + H_{35}C_2 + H_{36}C_3)x_1 + \\
 \quad (H_{36}F_2 - H_{35}F_3)(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) - \\
 \quad (H_{15}F_1 + H_{25}F_2 + H_{35}F_3 + H_{45}C_1 + H_{55}C_2 + H_{56}C_3)\frac{x_1^2}{2} - \\
 \quad (H_{56}F_2 - H_{55}F_3)(l\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6}) - ex_1 + c \\
 \theta_1(x_1) = (H_{14}F_1 + H_{24}F_2 + H_{34}F_3 + H_{44}C_1 + H_{45}C_2 + H_{46}C_3)x_1 + \\
 \quad (H_{46}F_2 - H_{45}F_3)(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + d \\
 \theta_2(x_1) = (H_{15}F_1 + H_{25}F_2 + H_{35}F_3 + H_{45}C_1 + H_{55}C_2 + H_{56}C_3)x_1 + \\
 \quad (H_{56}F_2 - H_{55}F_3)(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + e \\
 \theta_3(x_1) = (H_{16}F_1 + H_{26}F_2 + H_{36}F_3 + H_{46}C_1 + H_{56}C_2 + H_{66}C_3)x_1 + \\
 \quad (H_{66}F_2 - H_{56}F_3)(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + f
 \end{array} \right. \quad (1.26)$$

L'extrémité $x_1 = 0$ étant encastree, on en deduit la nullite des constantes a, b, c, d, e et f .

1.5 Cinématique de la poutre console hyperstatique

L'objectif de ce paragraphe est d'établir les expressions du champ de déplacement et des efforts internes dans une poutre tridimensionnelle hyperstatique. La difficulté, qui est bien connue dans le cas de la poutre symétrique, provient du fait que la combinaison entre les équations de la statique et les équations de comportement conduisent à des équations différentielles couplées portant sur les distorsions et les courbures. L'algèbre est ici un peu plus complexe, du fait du couplage introduit par le comportement élastique de poutre.

On considère un problème posé sur une poutre tridimensionnelle. La loi de comportement est donnée par (1.22) en supposant la matrice de raideur pleine. Les équations d'équilibre à résoudre sont données par les équations (1.15), (1.16), (1.17), (1.19), (1.20) et (1.21) où l'on suppose $p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

Chapitre 1. Etude des poutres de Timoshenko non symétriques

A partir des équations d'équilibre, nous exprimons les dérivées des variables cinématiques en fonction des dérivées des courbures χ'_2 et χ'_3 . En injectant la loi de comportement (1.22) dans (1.16) et (1.17), en supposant $p_2 = p_3 = 0$, il vient :

$$\gamma'_2 = -\frac{K_{12}}{K_{22}}\Delta' - \frac{K_{23}}{K_{22}}\gamma'_3 - \frac{K_{24}}{K_{22}}\chi'_1 - \frac{K_{25}}{K_{22}}\chi'_2 - \frac{K_{26}}{K_{22}}\chi'_3 \quad (1.27)$$

et

$$\gamma'_3 = -(A_1\Delta' + A_2\chi'_1 + A_3\chi'_2 + A_4\chi'_3) \quad (1.28)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{K_{13} - \frac{K_{23}K_{12}}{K_{22}}}{K_{33} - \frac{K_{23}^2}{K_{22}}}; & A_2 &= \frac{K_{34} - \frac{K_{23}K_{24}}{K_{22}}}{K_{33} - \frac{K_{23}^2}{K_{22}}}; \\ A_3 &= \frac{K_{35} - \frac{K_{23}K_{25}}{K_{22}}}{K_{33} - \frac{K_{23}^2}{K_{22}}}; & A_4 &= \frac{K_{36} - \frac{K_{23}K_{26}}{K_{22}}}{K_{33} - \frac{K_{23}^2}{K_{22}}}. \end{aligned}$$

De la première équation d'équilibre (1.15), et en utilisant la loi de comportement (1.22) et les résultats (1.27) et (1.28), on déduit :

$$\Delta' = -(B_1\chi'_1 + B_2\chi'_2 + B_3\chi'_3) \quad (1.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{K_{14} - \frac{K_{12}K_{24}}{K_{22}} - A_2 \left(K_{13} - \frac{K_{23}K_{12}}{K_{22}} \right)}{K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}} - A_1 \left(K_{13} - \frac{K_{23}K_{12}}{K_{22}} \right)}; & B_2 &= \frac{K_{15} - \frac{K_{12}K_{25}}{K_{22}} - A_3 \left(K_{13} - \frac{K_{23}K_{12}}{K_{22}} \right)}{K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}} - A_1 \left(K_{13} - \frac{K_{23}K_{12}}{K_{22}} \right)}; \\ B_3 &= \frac{K_{16} - \frac{K_{12}K_{26}}{K_{22}} - A_4 \left(K_{13} - \frac{K_{23}K_{12}}{K_{22}} \right)}{K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}} - A_1 \left(K_{13} - \frac{K_{23}K_{12}}{K_{22}} \right)}. \end{aligned}$$

De la même façon, l'utilisation de la loi de comportement dans l'équation (1.19), en y injectant (1.27), (1.28) et (1.29), permet d'écrire :

$$\chi'_1 = -(C_1\chi'_2 + C_2\chi'_3) \quad (1.30)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{K_{45} - \frac{K_{24}K_{25}}{K_{22}} - A_3 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) - B_2 \left(K_{14} - \frac{K_{24}K_{12}}{K_{22}} - A_1 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) \right)}{K_{44} - \frac{K_{24}^2}{K_{22}} - A_2 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) - B_1 \left(K_{14} - \frac{K_{24}K_{12}}{K_{22}} - A_1 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) \right)}; \\ C_2 &= \frac{K_{46} - \frac{K_{24}K_{26}}{K_{22}} - A_4 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) - B_3 \left(K_{14} - \frac{K_{24}K_{12}}{K_{22}} - A_1 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) \right)}{K_{44} - \frac{K_{24}^2}{K_{22}} - A_2 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) - B_1 \left(K_{14} - \frac{K_{24}K_{12}}{K_{22}} - A_1 \left(K_{34} - \frac{K_{24}K_{23}}{K_{22}} \right) \right)}. \end{aligned}$$

1.5. Cinématique de la poutre console hyperstatique

Finalemment, à partir de (1.30), (1.29), (1.28) et (1.27), les dérivés des variables cinématiques sont exprimées uniquement en fonction de χ'_2 et χ'_3 .

Dérivons maintenant (1.20) et (1.21). En tenant compte de (1.17) et (1.16), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 M_2}{dx_1^2} = 0 \\ \frac{d^2 M_3}{dx_1^2} = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

ce qui, en injectant les expressions (1.30), (1.29), (1.28) et (1.27), s'écrit :

$$\begin{cases} D_1 \chi_2'' + D_2 \chi_3'' = 0 \\ E_1 \chi_2'' + E_2 \chi_3'' = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

avec :

$$\begin{aligned} D_1 &= K_{15}(B_1 C_1 - B_2) + K_{35}(A_1 B_2 - A_3 - C_1(A_1 B_1 - A_2)) - K_{45} C_1 + K_{55} + \\ &\quad K_{25} \left(-\frac{K_{12}}{K_{22}}(B_1 C_1 - B_2) - \frac{K_{23}}{K_{22}}(A_1 B_2 - A_3 - C_1(A_1 B_1 - A_2)) + \frac{K_{24}}{K_{22}} C_1 - \frac{K_{25}}{K_{22}} \right) ; \\ D_2 &= K_{15}(B_1 C_2 - B_3) + K_{35}(A_1 B_3 - A_4 - C_2(A_1 B_1 - A_2)) - K_{45} C_2 + K_{56} + \\ &\quad K_{25} \left(-\frac{K_{12}}{K_{22}}(B_1 C_2 - B_3) - \frac{K_{23}}{K_{22}}(A_1 B_3 - A_4 - C_2(A_1 B_1 - A_2)) + \frac{K_{24}}{K_{22}} C_2 - \frac{K_{26}}{K_{22}} \right) ; \\ E_1 &= K_{16}(B_1 C_1 - B_2) + K_{36}(A_1 B_2 - A_3 - C_1(A_1 B_1 - A_2)) - K_{46} C_1 + K_{56} + \\ &\quad K_{26} \left(-\frac{K_{12}}{K_{22}}(B_1 C_1 - B_2) - \frac{K_{23}}{K_{22}}(A_1 B_2 - A_3 - C_1(A_1 B_1 - A_2)) + \frac{K_{24}}{K_{22}} C_1 - \frac{K_{25}}{K_{22}} \right) ; \\ E_2 &= K_{16}(B_1 C_2 - B_3) + K_{36}(A_1 B_3 - A_4 - C_2(A_1 B_1 - A_2)) - K_{46} C_2 + K_{66} + \\ &\quad K_{26} \left(-\frac{K_{12}}{K_{22}}(B_1 C_2 - B_3) - \frac{K_{23}}{K_{22}}(A_1 B_3 - A_4 - C_2(A_1 B_1 - A_2)) + \frac{K_{24}}{K_{22}} C_2 - \frac{K_{26}}{K_{22}} \right) . \end{aligned}$$

La seule solution de ce système est :

$$\begin{cases} \chi_2'' = 0 \\ \chi_3'' = 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Par ailleurs, (1.20) et (1.21) permettent de déduire :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -(F_1 \Delta + F_2 \chi_1 + F_3 \chi_2 + F_4 \chi_3 + F_5 \chi_2' + F_6 \chi_3') \\ \gamma_3 &= G_1 \Delta + G_2 \chi_1 + G_3 \chi_2 + G_4 \chi_3 + G_5 \chi_2' + G_6 \chi_3' \end{aligned} \quad (1.34)$$

avec :

Chapitre 1. Etude des poutres de Timoshenko non symétriques

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{K_{12} - \frac{K_{23}K_{13}}{K_{33}}}{K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}}}; & F_2 &= \frac{K_{24} - \frac{K_{23}K_{34}}{K_{33}}}{K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}}}; & F_3 &= \frac{K_{25} - \frac{K_{23}K_{35}}{K_{33}}}{K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}}}; \\
 F_4 &= \frac{K_{26} - \frac{K_{23}K_{36}}{K_{33}}}{K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}}}; & F_5 &= \frac{E_1 + \frac{K_{23}}{K_{33}}D_1}{K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}}}; & F_6 &= \frac{E_2 + \frac{K_{23}}{K_{33}}D_2}{K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}}}.
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{K_{23}}{K_{33}}F_1 - \frac{K_{13}}{K_{33}}; & G_2 &= \frac{K_{23}}{K_{33}}F_2 - \frac{K_{34}}{K_{33}}; & G_3 &= \frac{K_{23}}{K_{33}}F_3 - \frac{K_{35}}{K_{33}}; \\
 G_4 &= \frac{K_{23}}{K_{33}}F_4 - \frac{K_{36}}{K_{33}}; & G_5 &= \frac{K_{23}}{K_{33}}F_5 + \frac{D_1}{K_{33}}; & G_6 &= \frac{K_{23}}{K_{33}}F_6 + \frac{D_2}{K_{33}}.
 \end{aligned}$$

Intégrons maintenant les variables cinématiques pour déterminer les champs de déplacement et de rotation. La procédure peut se décrire comme suit :

- En utilisant (1.33), on tire $\chi'_2 = a$ et $\chi'_3 = d$ où a et d sont des constantes. En intégrant une nouvelle fois, on obtient χ_2 et χ_3 .
- Les équations (1.29) et (1.30) permettent d'exprimer Δ' et χ'_1 en fonction de a et d . D'où l'on déduit, en intégrant, Δ et χ_1 .
- Il s'ensuit les expressions de γ_2 et γ_3 en utilisant (1.34).
- Enfin, l'intégration des définitions (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7) des variables cinématiques permet d'obtenir les champs de déplacement et de rotation. On a :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \theta_2 &= a\frac{x_1^2}{2} + bx_1 + c \\
 \theta_3 &= d\frac{x_1^2}{2} + ex_1 + f \\
 \theta_1 &= -(aC_1 + dC_2)\frac{x_1^2}{2} + gx_1 + h \\
 u_1 &= (aX_1 + dX_2)\frac{x_1^2}{2} + ix_1 + j \\
 u_2 &= d\frac{x_1^3}{6} + (e + aY_1 + dY_2)\frac{x_1^2}{2} + (f - iF_1 - gF_2 - bF_3 - eF_4 - aF_5 - dF_6)x_1 + k \\
 u_3 &= -a\frac{x_1^3}{6} + (-b + aZ_1 + dZ_2)\frac{x_1^2}{2} + (-c + iG_1 + gG_2 + bG_3 + eG_4 + aG_5 + dG_6)x_1 + l
 \end{aligned} \right. \quad (1.35)$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
 X_1 &= B_1C_1 - B_2; & X_2 &= B_1C_2 - B_3; \\
 Y_1 &= F_2C_1 - F_3 + F_1B_2 - F_1B_1C_1; & Y_2 &= F_2C_2 - F_4 + F_1B_3 - F_1B_1C_2; \\
 Z_1 &= G_1B_1C_1 - G_1B_2 - G_2C_1 + G_3; & Z_2 &= G_1B_1C_2 - G_1B_3 - G_2C_2 + G_4.
 \end{aligned}$$

1.5. Cinématique de la poutre console hyperstatique

On s'intéresse désormais à une poutre console de longueur l telle que l'extrémité $x_1 = 0$ est encastree et l'extrémité $x_1 = l$ est soumise à six conditions qui peuvent être statiques, cinématiques ou mixtes. De la condition d'encastrement, on déduit la nullité des constantes c, f, h, j, k et l . Par ailleurs, compte tenu de leurs définitions (1.4, 1.5, 1.6 et 1.7) les variables cinématiques sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = (aX_1 + dX_2)x_1 + i \\ \gamma_2 = (aY_1 + dY_2)x_1 - (iF_1 + gF_2 + bF_3 + eF_4 + aF_5 + dF_6) \\ \gamma_3 = (aZ_1 + dZ_2)x_1 + (iG_1 + gG_2 + bG_3 + eG_4 + aG_5 + dG_6) \\ \chi_1 = -(aC_1 + dC_2)x_1 + g \\ \chi_2 = ax_1 + b \\ \chi_3 = dx_1 + e \end{array} \right. \quad (1.36)$$

Enfin, l'injection de (1.36) dans la loi de comportement permet de déduire l'expression des efforts internes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = (aT_{11} + dT_{12})x_1 + T_{13}i + T_{14}g + T_{15}b + T_{16}e + T_{17}a + T_{18}d \\ T_2 = (aT_{21} + dT_{22})x_1 + T_{23}i + T_{24}g + T_{25}b + T_{26}e + T_{27}a + T_{28}d \\ T_3 = (aT_{31} + dT_{32})x_1 + T_{33}i + T_{34}g + T_{35}b + T_{36}e + T_{37}a + T_{38}d \\ M_1 = (aT_{41} + dT_{42})x_1 + T_{43}i + T_{44}g + T_{45}b + T_{46}e + T_{47}a + T_{48}d \\ M_2 = (aT_{51} + dT_{52})x_1 + T_{53}i + T_{54}g + T_{55}b + T_{56}e + T_{57}a + T_{58}d \\ M_3 = (aT_{61} + dT_{62})x_1 + T_{63}i + T_{64}g + T_{65}b + T_{66}e + T_{67}a + T_{68}d \end{array} \right. \quad (1.37)$$

avec : (ici l'indice i varie de 1 à 6)

$$T_{i1} = K_{i1}X_1 + K_{i2}Y_1 + K_{i3}Z_1 - K_{i4}C_1 + K_{i5} ;$$

$$T_{i2} = K_{i1}X_2 + K_{i2}Y_2 + K_{i3}Z_2 - K_{i4}C_2 + K_{i6} ;$$

$$T_{i3} = K_{i1} - K_{i2}F_1 + K_{i3}G_1 ;$$

$$T_{i4} = K_{i4} - K_{i2}F_2 + K_{i3}G_2 ;$$

$$T_{i5} = K_{i5} - K_{i2}F_3 + K_{i3}G_3 ;$$

$$T_{i6} = K_{i6} - K_{i2}F_4 + K_{i3}G_4 ;$$

$$T_{i7} = -K_{i2}F_5 + K_{i3}G_5 ;$$

$$T_{i8} = -K_{i2}F_6 + K_{i3}G_6 .$$

La résolution du problème général utilise l'expression matricielle :

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & \frac{x_1^2}{2} & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 \frac{x_1^2}{2} & -C_2 \frac{x_1^2}{2} & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ X_1 \frac{x_1^2}{2} & X_2 \frac{x_1^2}{2} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ Y_1 \frac{x_1^2}{2} - F_5 x_1 & Y_2 \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{6} - F_6 x_1 & \frac{x_1^2}{2} - F_4 x_1 & -F_1 x_1 & -F_2 x_1 & -F_3 x_1 \\ Z_1 \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6} + G_5 x_1 & Z_2 \frac{x_1^2}{2} + G_6 x_1 & G_4 x_1 & G_1 x_1 & G_2 x_1 & G_3 x_1 - \frac{x_1^2}{2} \\ T_{11} x_1 + T_{17} & T_{12} x_1 + T_{18} & T_{16} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} x_1 + T_{27} & T_{22} x_1 + T_{28} & T_{26} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} x_1 + T_{37} & T_{32} x_1 + T_{38} & T_{36} & T_{33} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} x_1 + T_{47} & T_{42} x_1 + T_{48} & T_{46} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} x_1 + T_{57} & T_{52} x_1 + T_{58} & T_{56} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \\ T_{61} x_1 + T_{67} & T_{62} x_1 + T_{68} & T_{66} & T_{63} & T_{64} & T_{65} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \\ e \\ i \\ g \\ b \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

où les conditions aux limites à l'extrémité droite de la poutre produisent 6 valeurs dans la matrice colonne du terme de gauche.

Prenons l'exemple de la poutre console soumise à un déplacement longitudinal u_0 à l'extrémité $x_1 = l$ qui est par ailleurs libre d'effort. Les six constantes sont déterminées par la résolution du système :

$$\begin{pmatrix} u_1 = u_0 \\ T_2 = 0 \\ T_3 = 0 \\ M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \\ M_3 = 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \frac{l^2}{2} & X_2 \frac{l^2}{2} & 0 & l & 0 & 0 \\ T_{21} l + T_{27} & T_{22} l + T_{28} & T_{26} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} l + T_{37} & T_{32} l + T_{38} & T_{36} & T_{33} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} l + T_{47} & T_{42} l + T_{48} & T_{46} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} l + T_{57} & T_{52} l + T_{58} & T_{56} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \\ T_{61} l + T_{67} & T_{62} l + T_{68} & T_{66} & T_{63} & T_{64} & T_{65} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \\ e \\ i \\ g \\ b \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Finalement, la généralisation de la démarche classiquement utilisée pour les poutres homogènes et symétriques au cas d'une poutre ne disposant pas de symétrie se généralise sans

1.5. Cinématique de la poutre console hyperstatique

difficulté particulière. Les résultats obtenus précédemment seront utilisés pour l'interprétation et l'exploitation des résultats obtenus dans le cas de la poutre périodique dans les chapitres suivants.

Chapitre 1. Etude des poutres de Timoshenko non symétriques

Chapitre 2

Présentation de la méthode d'homogénéisation

Sommaire

2.1	Technique d'homogénéisation	25
2.2	Homogénéisation de poutres périodiques composées de cellules pleines	30
2.3	Homogénéisation de poutres périodiques de cellules quelconques	32
2.4	Détermination des raideurs équivalentes	35

Dans ce chapitre, on présente une méthode d'homogénéisation pour une poutre dont la structure comporte une périodicité unidimensionnelle. L'objectif est de remplacer la structure par une poutre équivalente de Timoshenko de manière à prendre en compte les déformations de cisaillement à l'échelle macroscopique. Bien que certains aspects puissent être adaptés à d'autres méthodes, l'approche est ici pragmatique et repose sur une résolution du problème de cellule par éléments finis.

On rappelle tout d'abord quelques résultats concernant l'homogénéisation des milieux périodiques volumiques. Puis la méthode proposée pour les poutres est présentée en détails.

2.1 Technique d'homogénéisation

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéressons uniquement aux poutres constituées de milieux hétérogènes à microstructure périodique. L'objectif de ce paragraphe est de rappeler et de discuter quelques résultats concernant l'homogénéisation de milieux périodiques dans le cas général (2D ou 3D).

2.1.1 Cellule de base

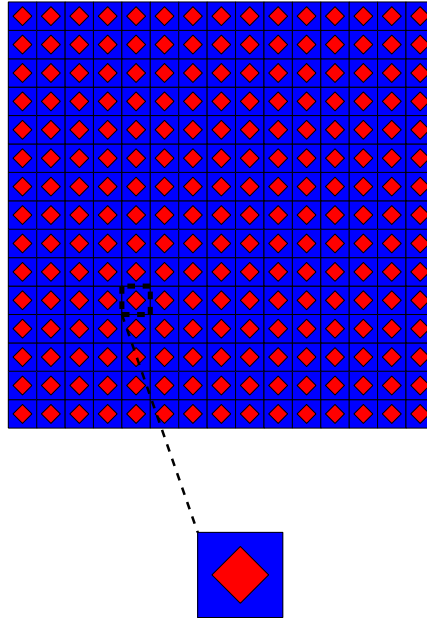


FIGURE 2.1 – Structure périodique et cellule de base.

Par définition, une microstructure périodique est obtenue par la répétition dans une ou plusieurs directions de l'espace, d'un même motif morphologique, dénommé cellule de base. Cette cellule de base contient toutes les informations sur les propriétés du milieu. La figure 2.1 représente une cellule de base rectangulaire de dimensions $d_1 \times d_2$. Le système de couleurs délimite deux zones constituées de matériaux différents. La périodicité induit que les propriétés élastiques locales sont périodiques, c'est à dire vérifient la relation :

$$\underline{\underline{a}}(\underline{x} + \underline{d}) = \underline{\underline{a}}(\underline{x}) \quad (2.1)$$

où $\underline{d} = \sum d_i \underline{e}_i$.

2.1.2 L'homogénéisation de structures périodiques

Les techniques d'homogénéisation périodique sont, d'une façon générale, destinées à obtenir les propriétés du milieu homogène équivalent à la microstructure périodique [10, 9, 6]. Dans ce cas, les techniques de développement asymptotique permettent de définir, à la limite

où le rapport d'échelle ϵ donné par "dimension de période/longueur caractéristique de la structure" tend vers zéro, un ensemble de problèmes à résoudre sur la cellule périodique pour les différentes composantes de $\underline{\underline{E}}$. Ces problèmes peuvent se décrire comme ci-après.

Localement, en un point \underline{x} de la cellule périodique Ω , le champ de déformation peut être décomposé sous la forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{x}) \quad (2.2)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{x})$ dérive d'un champ de déplacement périodique $\underline{u}_{per}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{E}}$ est la déformation macroscopique. Le champ de déformation est ainsi décomposé en une partie moyenne et une fluctuation périodique. On peut alors écrire le champ de déplacement :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} + \underline{u}_{per}(\underline{x}) \quad (2.3)$$

avec $\underline{u}_{per}(\underline{x} + \underline{d}) = \underline{u}_{per}(\underline{x})$.

Du fait de la périodicité de \underline{u}_{per} , on a

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{x}) \rangle = 0 \quad (2.4)$$

et l'on déduit $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle = \underline{\underline{E}}$.

Le champ de contrainte doit satisfaire à l'équation d'équilibre sur la cellule Ω :

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.5)$$

Compte tenu de (2.1) et de la périodicité de $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$, il est aisé de montrer que $\underline{\underline{\sigma}}$ est périodique. Il s'ensuit que le vecteur contrainte est antipériodique

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x} + \underline{d}) \cdot \underline{n}(\underline{x} + \underline{d}) = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad (2.6)$$

Par ailleurs, le champ de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ est obtenu comme la moyenne du champ de contrainte microscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rangle \quad (2.7)$$

De manière synthétique, le problème à résoudre sur la cellule s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div} \left(\underline{\underline{a}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{x}) \right) + \underline{F} = \underline{0} \\ \underline{F} = \underline{div} \left(\underline{\underline{a}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \right) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{x}) = \underline{grad}^s \underline{u}_{per} \\ \underline{u}_{per} \quad \text{périodique sur } \partial\Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad \text{antipériodique sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où \underline{F} est une quantité connue, dépendant des propriétés élastiques et du champ macroscopique, et qui apparaît comme une force de volume.

2.1.3 Méthodes de résolution

Le problème d'homogénéisation sur la cellule peut être résolu entre autres par la méthode des transformées de Fourier [87], par équations intégrales ou par la méthode des éléments finis. Compte tenu de la prééminence de la méthode des éléments finis en mécanique du solide, et compte tenu du fait que cette méthode sera utilisée sous une autre forme dans la suite, nous allons examiner plus en détail cette méthode de résolution dans sa formulation adaptée à la résolution de l'homogénéisation de structures périodiques.

Classiquement, l'écriture de la solution par éléments finis peut s'effectuer en écrivant la formulation du problème aux limites (2.8) sous forme faible. Pour ce faire, on introduit, d'une part l'espace \mathcal{T} de solutions $\underline{x} \rightarrow \underline{u}^*(\underline{x})$ suffisamment régulières du problème aux limites tel que

$$\mathcal{T} = \{ \underline{x} \rightarrow \underline{u}^*(\underline{x}) \mid \underline{u}^*(\underline{x}) \text{ périodique sur } \partial\Omega \} \quad (2.9)$$

et d'autre part l'espace \mathcal{W} des fonctions tests $\underline{x} \rightarrow \underline{w}^*(\underline{x})$ des champs de déplacements tel que

$$\mathcal{W} = \{ \underline{x} \rightarrow \underline{w}^*(\underline{x}) \text{ suffisamment régulière et telle que } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \} \quad (2.10)$$

où $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_T$ et $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_T = \emptyset$.

Considérons l'équation suivante, venant de (2.8) :

$$\begin{cases} \underline{div} \left(\underline{a}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}^*(\underline{x}) \right) + \underline{F} = \underline{0} \\ \underline{F} = \underline{div} \left(\underline{a}(\underline{x}) : \underline{E} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

en multipliant les termes de cette équation par une fonction test et en intégrant sur le domaine Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} \underline{w}^* \cdot \underline{div}(\underline{\sigma}) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{w}^* \cdot \underline{F} d\Omega = 0 \quad (2.12)$$

En prenant en compte l'expression de \underline{F} ainsi que celle de $\underline{\sigma}$ et en utilisant le théorème de la divergence, on déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{grad}^s \underline{w}^* : \underline{a} : \underline{grad}^s \underline{u}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{w}^* \cdot \underline{a} : \underline{grad}^s \underline{u}^* \cdot \underline{n}(\underline{x}) \partial\Omega + \\ \int_{\Omega} \underline{grad}^s \underline{w}^* : \underline{a} : \underline{E} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{w}^* \cdot \underline{a} : \underline{E} \cdot \underline{n}(\underline{x}) \partial\Omega = 0 . \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1. Technique d'homogénéisation

Du fait du caractère périodique de \underline{u}^* et \underline{w}^* et de l'anti périodicité du vecteur contrainte sur les bords périodiques en vis à vis, il vient :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{grad}}^s \underline{w}^* : (\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{grad}}^s \underline{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{grad}}^s \underline{w}^* : (\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{E}}) d\Omega = 0 . \quad (2.14)$$

La discrétisation de (2.14) conduit à :

$$\sum_{e=1}^n \left(\int_{\Omega_e} \underline{\underline{grad}}^s \underline{w}^* : (\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{grad}}^s \underline{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega_e} \underline{\underline{grad}}^s \underline{w}^* : (\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{E}}) d\Omega \right) = 0 . \quad (2.15)$$

où n correspond au nombre d'éléments du maillage du domaine Ω .

L'écriture de la modélisation par éléments finis s'effectue à l'aide de l'introduction des fonctions de forme. Soit Ω_e un élément fini quelconque du maillage du domaine Ω . Cet élément possède m noeuds, ses fonctions d'interpolation sont notées $N_1^e(\underline{x}), \dots, N_m^e(\underline{x})$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{u}^{*e}(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^m N_i^e(\underline{x}) \tilde{\underline{u}}_i^* \\ \underline{w}^{*e}(\underline{x}) &= \sum_{j=1}^m N_j^e(\underline{x}) \tilde{\underline{w}}_j^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $\tilde{\underline{u}}_i^*$ correspond au vecteur des degrés de liberté au noeud i et où $\tilde{\underline{w}}_j^*$ correspond à la valeur de la fonction de pondération au noeud j de l'élément.

Dans ce qui suit, nous allons passer à l'écriture matricielle et vectorielle de ces expressions. Par convention de notation, $\underline{\underline{C}}_e$ désigne l'écriture matricielle du tenseur $\underline{\underline{a}}$ (tenseur de rigidité) de l'élément de travail, $\underline{\underline{E}}_e$ correspond à l'écriture vectorielle du tenseur $\underline{\underline{E}}$ (tenseur des déformations macroscopiques) de l'élément de travail. Notons aussi que les vecteurs des degrés de liberté doivent être exprimés dans le repère global, ce qui se traduit par l'introduction des matrices de passages :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}}_i^*(\underline{x}) &= \underline{\underline{Z}} \cdot \hat{\underline{u}}^* \\ \tilde{\underline{w}}_i^*(\underline{x}) &= \underline{\underline{Z}} \cdot \hat{\underline{w}}^* \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les matrices de passages n'ont aucune dépendance en \underline{x} de même pour $\hat{\underline{u}}^*$, $\hat{\underline{w}}^*$ (correspondant au vecteur des degrés de liberté de l'ensemble du domaine Ω). Ceci produit donc le système d'équations suivant :

$$\hat{\underline{w}}^{*T} \cdot \left(\sum_e \underline{\underline{Z}}^T \cdot \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{C}}_e \cdot \underline{\underline{B}} dV \cdot \underline{\underline{Z}} \right) \cdot \hat{\underline{u}}^* + \hat{\underline{w}}^{*T} \cdot \left(\sum_e \underline{\underline{Z}}^T \cdot \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{C}}_e \cdot \underline{\underline{E}}_e \cdot dV \right) = 0 \quad (2.18)$$

Cette égalité étant valable pour toute fonction de pondération $\hat{\underline{w}}^*$, on obtient alors :

$$\underline{\underline{k}} \cdot \hat{\underline{u}}^* = \underline{\underline{f}}_V \quad (2.19)$$

où :

$$\begin{aligned}\underline{k} &= \sum_e \underline{Z}^T \cdot \int_{\Omega_e} \underline{B}^T \cdot \underline{C}_e \cdot \underline{B} dV \cdot \underline{Z} \\ \underline{f}_V &= - \sum_e \underline{Z}^T \cdot \int_{\Omega_e} \underline{B}^T \cdot \underline{C}_e \cdot \underline{E}_e dV\end{aligned}\tag{2.20}$$

et où \underline{B} est la matrice du gradient des fonctions d'interpolation.

Par rapport à un calcul usuel par éléments finis, la résolution de ce système matriciel comporte deux aspects spécifiques :

- Tout d'abord, le fait de travailler sur le champ de déplacement périodique \underline{u}^* , implique l'application de conditions de périodicité entre les bords concernés, telles que décrites en (2.8)
- Une difficulté réside par ailleurs dans le calcul du terme contenant \underline{f}_V qu'il faut construire à partir des fonctions d'interpolation. L'utilisation des fonctions d'interpolation conduit donc à une méthode "intrusive" qui ne peut être utilisée que lorsque l'accès au code est possible.

Une autre méthode consiste à introduire des conditions de "pseudo-périodicité" obtenues en combinant la condition de périodicité et la décomposition de la déformation locale entre déformation macroscopique et partie périodique [118, 39, 11]. Là encore, la mise en oeuvre de cette méthode n'est pas accessible sur tous les codes, la mise en oeuvre d'une condition de périodicité stricte étant par contre très facile à mettre en oeuvre sur n'importe quel code de calcul par éléments finis. La méthode développée dans [69] pour le cas des poutres sera utilisée par la suite. Elle n'utilise que la condition de périodicité stricte et peut se définir comme suit :

Dans une première étape, la déformation macroscopique est imposée sur toute la cellule périodique. Les "forces de volume équivalentes" sont alors calculées. Lors du calcul par la méthode des éléments finis, ces forces sont équivalentes à des réactions nodales.

Dans une deuxième étape, l'opposé des forces de volume équivalentes est appliqué et des conditions aux limites de périodicité sont imposées, ce qui permet de calculer la fluctuation périodique.

2.2 Homogénéisation de poutres périodiques composées de cellules pleines

L'homogénéisation de structures périodiques a été appliquée au cas des plaques et des poutres composées de cellules périodiques. L'approche est fondamentalement différente de celle utilisée pour l'homogénéisation de structures périodiques classiques, car les poutres et plaques

2.2. Homogénéisation de poutres périodiques composées de cellules pleines

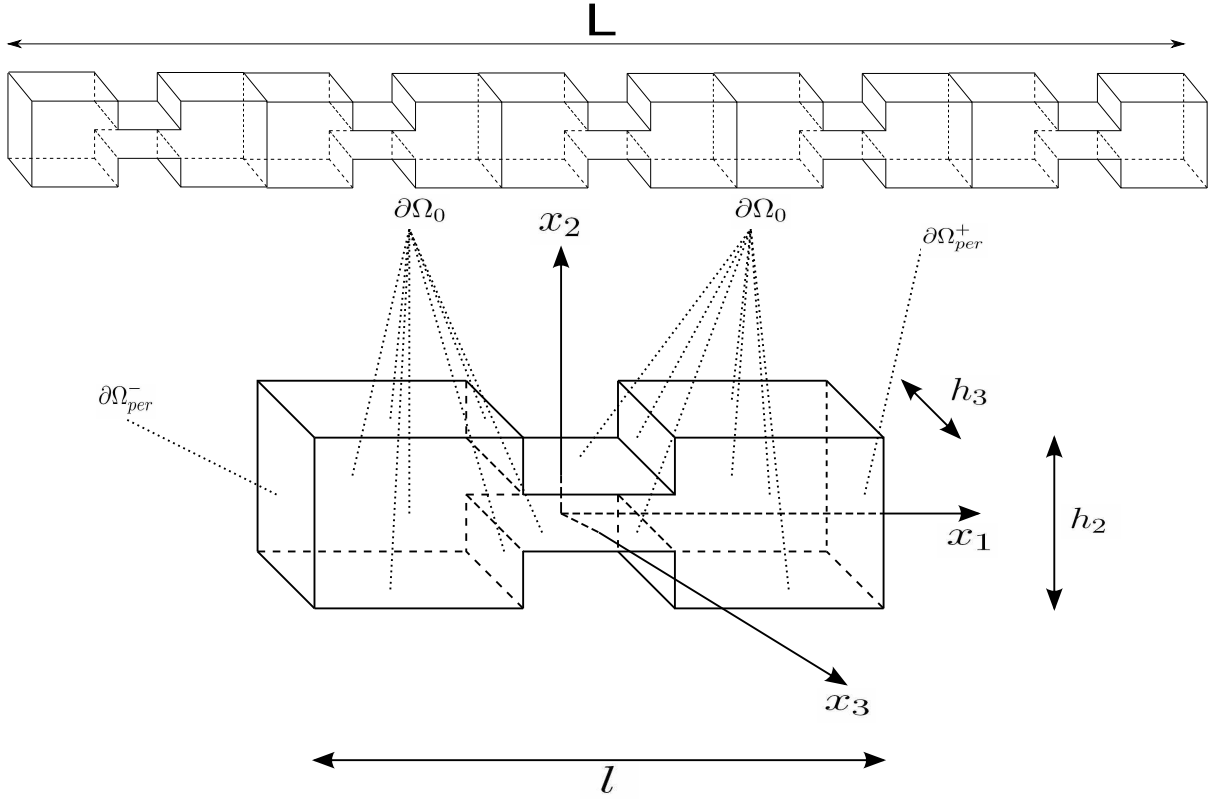


FIGURE 2.2 – Milieu ω_o (en haut) et cellule Ω (en bas)

elles-mêmes peuvent se caractériser par un deuxième paramètre d'échelle donné par e/L où e est l'épaisseur de la structure et L une dimension caractéristique de la structure. Il est alors possible de distinguer plusieurs types d'homogénéisation en comparant les deux rapports d'échelle [35, 11, 38, 29]. Le cas qui nous intéresse ici est celui où l'épaisseur de la plaque (poutre) est du même ordre de grandeur que la taille de la cellule dans son plan. Dans ce cas, le problème d'homogénéisation périodique associé peut se décrire comme ci-après, dans le cas de la poutre périodique.

Soit Ω une cellule périodique du milieu ω_o . Le bord $\partial\Omega$ de Ω est scindé en deux sous-domaines adjacents $\partial\Omega_0$ et $\partial\Omega_{per}$ tel que $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_{per}$ et $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{per}$. Notons l la longueur de la cellule, le bord $\partial\Omega_{per} = \partial\Omega_{per}^- \cup \partial\Omega_{per}^+ = \{\underline{x} = (-\frac{l}{2}, x_2, x_3), \underline{x} \in \Omega\} \cup \{\underline{x} = (\frac{l}{2}, x_2, x_3), \underline{x} \in \Omega\}$ est constitué de la réunion disjointe des deux interfaces avec les cellules périodiques adjacentes, chaque interface est l'image l'une de l'autre par la translation de vecteur périodique le_1 . Le milieu Ω_0 est libre d'effort sur son bord extérieur $\partial\Omega_0$.

Comme dans le cas de l'homogénéisation volumique, il est fait comme hypothèse que le champ de déplacement dans la cellule se décompose comme la somme d'un champ de déplacement macroscopique $\underline{u}_{macro}(\underline{x})$ décrivant la cinématique du milieu curviligne homogène équi-

valent et d'un champ de déplacement périodique $\underline{u}_{per}(\underline{x})$ représentant la fluctuation du champ de déplacement autour de la valeur moyenne $\underline{u}_{macro}(\underline{x})$. La déformation induite par le champ de déplacement $\underline{u}_{macro}(\underline{x})$ est $\underline{E}(\underline{x}) = \underline{grad}^s(\underline{u}_{macro}(\underline{x}))$. Le champ de déformation dans la cellule est donc $\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{E}(\underline{x}) + \underline{grad}^s(\underline{u}_{per}(\underline{x})) = \underline{grad}^s(\underline{u}_{cel}(\underline{x}))$ où

$$\underline{u}_{cel}(\underline{x}) = \underline{u}_{macro}(\underline{x}) + \underline{u}_{per}(\underline{x}) \quad (2.21)$$

est le champ de déplacement total dans la cellule.

Le problème mécanique posé sur la cellule est, dans le cas d'une déformation homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\sigma})(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{\sigma} = \underline{a}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{E}(\underline{x}) + \underline{grad}^s(\underline{u}_{per}(\underline{x})) \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0 \\ \underline{u}_{per}(\underline{x}) = \underline{u}_{per}(\underline{x} + l\underline{e}_1) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{per}^- \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = -\underline{\sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x} + l\underline{e}_1) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{per}^- \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Formellement, le problème aux limites ainsi défini est proche de celui défini pour l'homogénéisation 2D ou 3D, mais en ajoutant les conditions aux limites de bord libre. Par contre, l'homogénéisation appliquée aux poutres nécessite l'extension au cas de la cinématique de poutre complète définie dans le chapitre précédent en formule (1.3) Toutefois, comme indiqué précédemment, la cinématique définie comporte les déformations induites par l'effet Poisson qui sont inconnues. Ces composantes doivent permettre de vérifier la condition de bord libre. La méthode qui suit est décrite dans la ligne des travaux de Laudarin [69] qui s'appuie sur les travaux de Cecchi et Sab [39].

2.3 Homogénéisation de poutres périodiques de cellules quelconques

Outre les méthodes décrites pour l'homogénéisation de structures périodiques bi ou tridimensionnelles, l'homogénéisation de structures périodiques appliquées aux structures minces (poutres et plaques) peut également se rencontrer avec des cellules composées d'éléments de poutres. Le problème peut alors se traiter sous forme discrète et fait également l'objet de plusieurs travaux (par exemple, [36, 66, 30]). Dans ce qui suit, on utilisera la méthode décrite dans

2.3. Homogénéisation de poutres périodiques de cellules quelconques

[69], et qui repose sur la méthode décrite en référence [39], qui permet de traiter indifféremment les structures discrètes, continues ou mixtes, les déformations de cisaillement étant prises en compte. La détermination des raideurs équivalentes de la poutre de Timoshenko repose sur le principe d'équivalence énergétique. Pour une cinématique donnée, ce principe impose l'égalité entre l'énergie calculée sur la cellule de base et celle déterminée en considérant la poutre équivalente (cf figure 2.3).

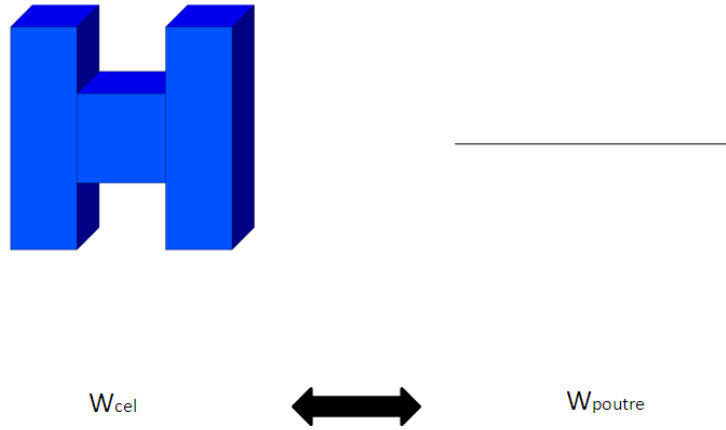


FIGURE 2.3 – Principe d'équivalence énergétique

Ceci se traduit par :

$$W_{cel} = W_{poutre} \quad (2.23)$$

où l'on définit

$$\begin{cases} W_{cel} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega \\ W_{poutre} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \underline{G}_{\gamma}^T \cdot \underline{F} dx_1 \end{cases}$$

où \underline{F} et \underline{G}_{γ} sont donnés par (1.23) et (1.22).

Pour une cinématique imposée, la résolution de (2.23) nécessite la connaissance du champ de déplacement $u_{cel}(\underline{x})$ solution du problème de cellule qui peut être décrit comme en section 2.1 en deux sous problèmes :

Dans le premier sous-problème la déformation "macroscopique" est imposée sur la cellule. Comme indiqué au chapitre précédent, dans le cas de l'extension et de la flexion, la déformation macroscopique comporte une déformation locale en extension E_{11} et des composantes transverses induites par l'effet Poisson. Les composantes transverses étant a priori inconnues,

Chapitre 2. Présentation de la méthode d'homogénéisation

examinons le cas où le tenseur $\underline{\underline{E}} = E_{11} \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ est introduit dans la première étape définie dans la section 2.1. Cette étape peut se décrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})(\underline{x}) + \underline{f}_E(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{a}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} \end{array} \right. \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0 \quad (2.24)$$

On voit que les composantes du tenseur des contraintes σ_{22} et σ_{33} sont non nulles et qu'il est nécessaire non seulement d'appliquer des forces de volume, mais également des forces nécessaires à rétablir la nullité du vecteur contrainte sur la surface libre. Cette situation peut être rétablie en équilibrant uniquement les composantes longitudinale des efforts internes et l'étape 1 du problème d'homogénéisation s'écrit ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})(\underline{x}) + \underline{f}_E(\underline{x}) \right) \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{a}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} \end{array} \right. \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0 \quad (2.25)$$

D'un point de vue pratique, cette procédure revient à imposer les composantes longitudinales de déplacement et à calculer les efforts internes qui rétablissent l'équilibre.

Le second sous-problème est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})(\underline{x}) - \underline{f}_E(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{a}}(\underline{x}) : \underline{\underline{grad}}^s(\underline{u}_{per}(\underline{x})) \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{u}_{per}(\underline{x}) = \underline{u}_{per}(\underline{x} + l\underline{e}_1) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \text{ antipériodique sur } \partial\Omega_{per}^- \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0 \\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{per}^- \end{array} \quad (2.26)$$

Dans ce deuxième sous problème, l'opposé des "forces de volumes équivalentes" est imposé et la solution de ce sous-problème est le champ de déplacement $\underline{u}_{per}(\underline{x})$ qui doit respecter la condition de périodicité.

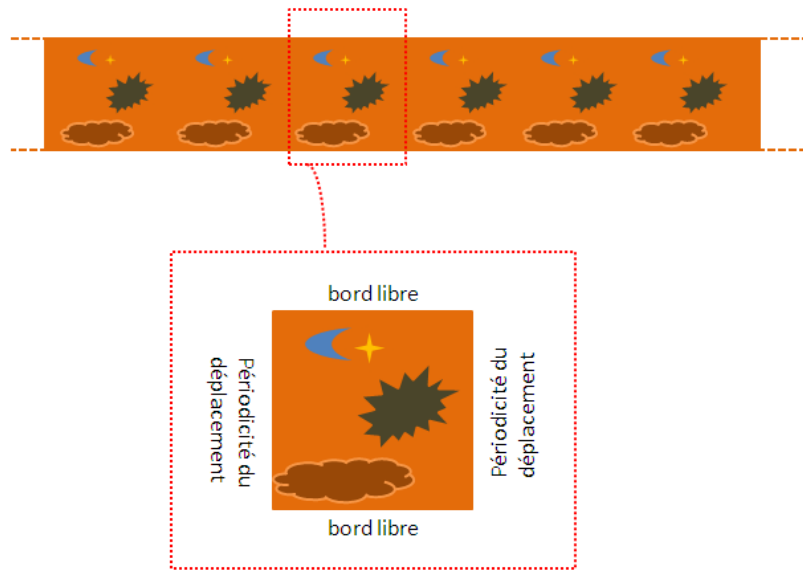


FIGURE 2.4 – Conditions de bord de la période

Après résolution des deux sous problèmes, le champ de déplacement dans la cellule $\underline{u}_{cel} = \underline{u}_{macro} + \underline{u}_{per}$ est totalement connu. Il est alors possible de calculer l'énergie de déformation W_{cel} .

2.4 Détermination des raideurs équivalentes

2.4.1 Cinématiques élémentaires

Les raideurs équivalentes sont déterminées en considérant six cinématiques élémentaires (extension, flexions dans les deux plans, torsion et cisaillements dans les deux plans) et en appliquant pour chacun le principe d'équivalence énergétique exposé plus haut.

2.4.1.1 Cinématique d'extension

La cinématique d'extension est appliquée à la cellule de base et à la poutre équivalente, soit :

$$u_1(\underline{x}) = \Delta x_1 \quad (2.27)$$

Comme souligné précédemment, seule la composante de déplacement suivant x_1 est imposée. L'énergie calculée sur la cellule (après résolution du problème 2.22), notée W_{TT} , et est déterminée numériquement par éléments finis. Sur un élément de poutre de longueur l , l'énergie

de déformation est donnée par :

$$W_{poutre} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} K_{11} \Delta^2 dx_1 = \frac{1}{2} K_{11} \Delta^2 l \quad (2.28)$$

Le principe d'équivalence énergétique conduit à

$$K_{11} = 2 \frac{W_{TT}}{\Delta^2 l} \quad (2.29)$$

2.4.1.2 Cinématiques de flexion (à courbure imposée)

Les cinématiques de flexion dans les plans x_1x_3 et x_1x_2 sont considérées successivement. Il s'agit d'imposer les champs de déplacement et de rotation suivants :

$$\text{plan } x_1x_3 : \begin{cases} u_1 = x_1x_3\chi_2 \\ \theta_2 = x_1\chi_2 \end{cases} \quad (2.30) \quad \text{plan } x_1x_2 : \begin{cases} u_1 = -x_1x_2\chi_3 \\ \theta_3 = x_1\chi_3 \end{cases} \quad (2.31)$$

On note que ces cinématiques nécessitent d'imposer à l'intérieur de la cellule non seulement des degrés de liberté de translation, mais aussi des degrés de liberté de rotation qui s'appliquent aux éléments constitutifs de la cellule qui apparaissent sous forme de plaques et de poutres. Les énergies de déformation W_{cell} correspondant à ces essais sont notées respectivement W_{F1F1} et W_{F2F2} et sont obtenues numériquement. Pour la poutre équivalente, elles sont définies dans le plan x_1x_3 par :

$$W_{poutre} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} K_{55} \chi_2^2 dx_1 = \frac{1}{2} K_{55} \chi_2^2 l \quad (2.32)$$

et dans le plan x_1x_2 par :

$$W_{poutre} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} K_{66} \chi_3^2 dx_1 = \frac{1}{2} K_{66} \chi_3^2 l \quad (2.33)$$

On en déduit les raideurs équivalentes :

$$K_{55} = \frac{2.W_{F1F1}}{\chi_2^2 l} \quad (2.34)$$

$$K_{66} = \frac{2.W_{F2F2}}{\chi_3^2 l} \quad (2.35)$$

2.4.1.3 Cinématique de torsion

Une rotation de torsion des sections est appliquée à la cellule de base, soit :

$$\begin{cases} u_2(\underline{x}) = -\chi_1 x_1 x_3 \\ u_3(\underline{x}) = \chi_1 x_1 x_2 \\ \theta_1(\underline{x}) = \chi_1 x_1 \end{cases} \quad (2.36)$$

L'énergie de déformation calculée sur la cellule de base, notée W_{ToTo} , est obtenue numériquement. Sur un élément de poutre de longueur l , l'énergie de déformation est donnée par :

$$W_{poutre} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} K_{44} \chi_1^2 dx_1 = \frac{1}{2} K_{44} \chi_1^2 l \quad (2.37)$$

Le principe d'équivalence énergétique conduit à

$$K_{44} = 2 \frac{W_{ToTo}}{\chi_1^2 l} \quad (2.38)$$

2.4.1.4 Cinématique de cisaillement

La stratégie adoptée précédemment conduirait à imposer une cinématique définie par γ_3 . Par intégration et en cohérence avec la théorie des poutres, le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\underline{u} = \gamma_3 x_1 \underline{e}_3 \quad (2.39)$$

L'utilisation d'une telle cinématique de cisaillement induit des déplacements transversaux sur la surface libre de la cellule qui induisent des efforts sur cette même surface. Dans le cas de cellules fortement hétérogènes, les efforts appliqués sur la surface libre ne sont pas équilibrés, ce qui induit également un déséquilibre des efforts transmis par la partie de cellule en contact avec les autres périodes. Il s'ensuit que l'application des deux étapes décrites précédemment conduit à des forces de volume qui ne sont pas en équilibre. Les résultats obtenus montrent ainsi que la procédure décrite précédemment ne peut s'appliquer que si les efforts de bord s'équilibrent et que ce résultat n'est pas atteint si l'on applique une cinématique de cisaillement. On note par ailleurs que ce problème est principalement induit par le fait que la cinématique induite par le cisaillement est transversale, ce qui affecte directement les efforts normaux sur le bord libre. Pour étudier plus avant ce problème, le cas de la poutre homogène va être revisité afin de définir une cinématique induisant du cisaillement à partir de la dérivée de courbure.

Cas d'une poutre homogène

Considérons une poutre homogène, supposée pour simplifier de section rectangulaire, et constituée d'un matériau isotrope. Etudions le voisinage d'un point où le moment fléchissant et la courbure sont nuls, mais où l'effort tranchant est non nul.

Supposons un moment fléchissant défini par :

$$M_2(x_1) = \frac{dM_2}{dx_1} x_1 = T_3 x_1 \quad (2.40)$$

où l'on a utilisé la relation (1.20). On en déduit les composantes non nulles du champ de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = T_3 \frac{x_1 x_3}{I_2} \\ \sigma_{13} = \frac{T_3 \left(\frac{b^2}{4} - x_2^2 \right)}{2h \cdot I_2} \end{cases} \quad (2.41)$$

où I_2 est l'inertie de la section de la poutre de largeur b et de hauteur h . Un champ de déplacement compatible avec ce champ de contrainte est donné par :

$$\begin{cases} u_1 = T_3 \frac{3x_1^2 x_3 - (2+\nu)x_3^3}{6 \cdot E \cdot I_2} \\ u_2 = -T_3 \frac{(-3b^2(1+\nu)x_1 + 2x_1^3 + 6\nu x_3^2 x_1)}{12 \cdot E \cdot I_2} \end{cases}$$

La forme de ce champ de déplacement appelle plusieurs remarques :

- la composante u_2 ne permet pas de vérifier la condition de bord libre, pour les raisons indiquées précédemment.
- La composante u_1 contient un terme proportionnel à $x_1^2 x_3$ induit par la courbure. Ce terme est prépondérant.
- La même composante contient un terme proportionnel à x_3^3 lié au gauchissement qui peut être négligé dans un premier temps. Il a la propriété d'être périodique et peut donc être calculé dans la deuxième étape d'homogénéisation.

Cherchons maintenant à exprimer T_3 en fonction des variables cinématiques. Pour ce faire, utilisons l'équation d'équilibre (1.20) et la loi de comportement (1.22), dans le cas simple considéré ici, on obtient :

$$T_3 = K_{55} \chi'_2 = EI_2 \chi'_2 \quad (2.42)$$

Cinématique à dérivée de courbure imposée.

L'exemple précédent suggère d'introduire un champ de déplacement de la forme :

$$u_1 = \frac{1}{2} \chi'_2 x_1^2 x_3 \quad (2.43)$$

2.4. Détermination des raideurs équivalentes

auquel on ajoute un champ de rotation (pour les structures composées partiellement ou totalement de poutres et de plaques)

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\chi'_2 x_1^2 \quad (2.44)$$

Un raisonnement similaire vis-à-vis de la variable γ_2 conduit à considérer un champ de déplacement

$$u_1 = -\frac{1}{2}\chi'_3 x_1^2 x_2 \quad (2.45)$$

et un champ de rotation

$$\theta_3 = \frac{1}{2}\chi'_3 x_1^2 \quad (2.46)$$

Remarque 2.1 *Dans le cas de structures dissymétriques, ce champ de déplacement peut encore conduire à des efforts au bord de la cellule qui ne s'équilibrent pas et plus particulièrement pour les efforts normaux. Dans ce cas, l'analyse de ce déséquilibre a conduit à adopter un champ de déplacement identique, mais pour une origine prise au centre élastique de la cellule et non au centre géométrique. Ceci s'écrit :*

$$\text{plan } x_1 x_3 : \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}x_1^2(x_3 - x_{3_0})\chi'_2 \\ \theta_2 = \frac{1}{2}x_1^2\chi'_2 \end{cases} \quad \text{plan } x_1 x_2 : \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}x_1^2(x_2 - x_{2_0})\chi'_3 \\ \theta_3 = \frac{1}{2}x_1^2\chi'_3 \end{cases} \quad (2.47) \quad (2.48)$$

où x_{2_0} et x_{3_0} correspondent respectivement à la position du centre élastique dans les plans $x_1 x_2$ et $x_1 x_3$.

Energie de déformation et raideur équivalente

Les cinématiques qui viennent d'être définies sont exprimées en fonction de χ'_2 et χ'_3 qui ne sont pas les variables cinématiques γ_2 et γ_3 adoptées pour définir la cinématique "macroscopique". La relation entre ces deux jeux de variables peut s'effectuer comme décrit ci-après.

Les équations d'équilibre (1.20) et (1.21) ainsi que la loi de comportement (1.22) permettent d'écrire :

$$\gamma_3 = -\frac{K_{13}}{K_{33}}\Delta - \frac{K_{23}}{K_{33}}\gamma_2 - \frac{K_{34}}{K_{33}}\chi_1 - \frac{K_{35}}{K_{33}}\chi_2 - \frac{K_{36}}{K_{33}}\chi_3 + \frac{K_{55}}{K_{33}}\chi'_2 + \frac{K_{56}}{K_{33}}\chi'_3 \quad (2.49)$$

$$\gamma_2 = -\frac{K_{12}}{K_{22}}\Delta - \frac{K_{23}}{K_{22}}\gamma_3 - \frac{K_{24}}{K_{22}}\chi_1 - \frac{K_{25}}{K_{22}}\chi_2 - \frac{K_{26}}{K_{22}}\chi_3 - \frac{K_{56}}{K_{22}}\chi'_2 - \frac{K_{66}}{K_{22}}\chi'_3 \quad (2.50)$$

Chapitre 2. Présentation de la méthode d'homogénéisation

Une étude systématique sur plusieurs types de cellules a montré que les termes liés respectivement à χ'_2 et à χ'_3 sont prépondérants et il vient :

$$\gamma_3 = \frac{K_{55}}{K_{33}} \chi'_2 \quad (2.51)$$

$$\gamma_2 = -\frac{K_{66}}{K_{22}} \chi'_2 \quad (2.52)$$

Cette hypothèse revient à considérer que :

$$-\frac{K_{13}}{K_{55}} \ll 1, -\frac{K_{23}}{K_{55}} \ll 1, -\frac{K_{34}}{K_{55}} \ll 1, -\frac{K_{35}}{K_{55}} \ll 1, -\frac{K_{36}}{K_{55}} \ll 1, \frac{K_{56}}{K_{55}} \ll 1 \quad (2.53)$$

d'une part et

$$\frac{K_{12}}{K_{66}} \ll 1, \frac{K_{23}}{K_{66}} \ll 1, \frac{K_{24}}{K_{66}} \ll 1, \frac{K_{25}}{K_{66}} \ll 1, \frac{K_{26}}{K_{66}} \ll 1, \frac{K_{56}}{K_{66}} \ll 1 \quad (2.54)$$

d'autre part.

Cette hypothèse peut évidemment se vérifier a posteriori.

Par ailleurs, on notera que le fait d'imposer χ'_2 ou χ'_3 implique que les courbures ne sont pas rigoureusement nulles dans la cellule, mais sont données par :

$$\begin{cases} \chi_2 = \chi'_2 x_1 \\ \chi_3 = \chi'_3 x_1 \end{cases} \quad (2.55)$$

On en déduit l'expression des énergies de déformations :

$$W_{C_1C_1} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (K_{33}\gamma_3^2 + K_{55}\chi_2^2) dx_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{K_{55}^2}{K_{33}} \chi_2'^2 l + K_{55} \frac{l^3}{12} \chi_2'^2 \right) \quad (2.56)$$

$$W_{C_2C_2} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (K_{22}\gamma_2^2 + K_{66}\chi_3^2) dx_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{K_{66}^2}{K_{22}} \chi_3'^2 l + K_{66} \frac{l^3}{12} \chi_3'^2 \right) \quad (2.57)$$

D'où l'on déduit :

$$K_{22} = \frac{K_{66}^2}{2 \frac{W_{C_1C_1}}{l\chi_3'^2} - \frac{l^2}{12} K_{66}} \quad (2.58)$$

$$K_{33} = \frac{K_{55}^2}{2 \frac{W_{C_2C_2}}{l\chi_2'^2} - \frac{l^2}{12} K_{55}} \quad (2.59)$$

Cette procédure permet ainsi de compléter la détermination des termes diagonaux de la matrice de raideur.

2.4.2 Détermination numérique des raideurs équivalentes

La première étape de la procédure numérique consiste à identifier dans la structure la période élémentaire (cellule de base). La cellule périodique peut être ou non symétrique par rapport aux différents plans du repère lié au centre de cellule. Cette absence de symétrie peut être intrinsèque ou dépendre du choix de la cellule choisie, comme montré en figure 2.5

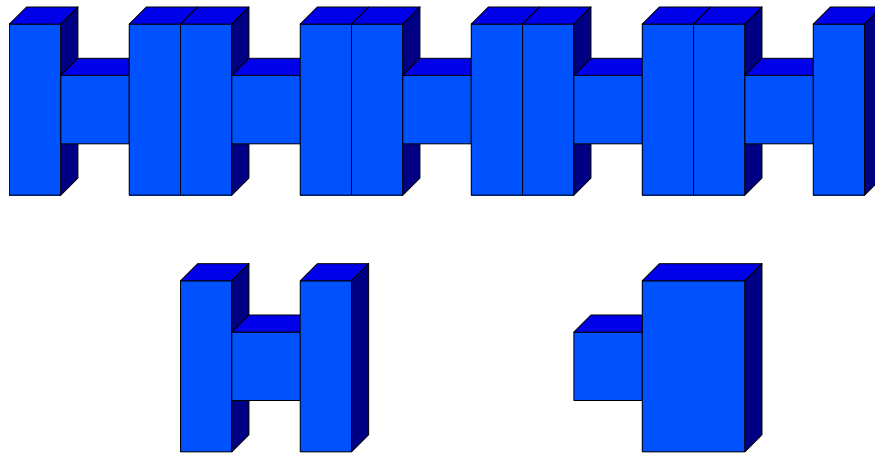


FIGURE 2.5 – Différents types de cellules de base. En haut : modèle complet ; en bas à gauche : période symétrique ; en bas à droite : période non symétrique par rapport au plan transversal.

La détermination des raideurs équivalentes suit trois étapes. Pour une cinématique donnée, les sous problèmes (2.24) et (2.26) sont résolus successivement (étape 1 et 2) puis l'énergie de déformation est calculée (étape 3). Ces trois étapes sont répétées pour les 6 cinématiques élémentaires déjà présentées.

Les calculs aux Eléments Finis sont réalisés à l'aide du logiciel MSC NASTRAN. Une interface Matlab a été créée pour la gestion et l'exploitation des données et des résultats. Il est nécessaire pour le bon fonctionnement de la méthode d'utiliser un format double précision pour les nombres réels (*i.e.*, avec 16 chiffres significatifs).

2.4.2.1 Etape 1. Application de la cinématique macroscopique

L'objectif de cette étape est de déterminer \underline{f}_E , le vecteur représentant la répartition des forces de volume équivalentes, intervenant dans la résolution du sous problème (2.24).

Pour ce faire, on impose à tous les noeuds de la cellule élémentaire le champ de déplacement correspondant à une cinématique élémentaire. Celui-ci est donné par (2.27) pour l'extension,

(2.30) et (2.31) pour les flexions, (2.36) pour la torsion et (2.47) et (2.48) pour les cisaillements.

Remarque 2.2 *Les cinématiques de cisaillement nécessitent d'avoir déterminé la position du centre élastique.*

La position du centre élastique est obtenue numériquement en considérant que c'est la position qui annule les efforts de réactions longitudinaux F_R au noeud encastré.

Le vecteur correspondant aux forces de volume équivalentes est alors représenté dans les résultats du calcul en éléments finis par les forces de réactions nodales. Par ailleurs, le champ de déplacement total à cette étape est stocké.

2.4.2.2 Etape 2. Rééquilibrage avec conditions de périodicité

Dans cette étape, il s'agit d'identifier le champ de déplacement \underline{u}_{per} intervenant dans le sous problème (2.26). Ceci est réalisé en imposant aux noeuds (en excluant les noeuds des bords périodiques de la cellule élémentaire pour le cas de cisaillement) le vecteur force \underline{f}_E . Ceci revient à : $P^- \in \partial\Omega_{per}^-$ et $P^+ \in \partial\Omega_{per}^+$ tels que $P^+ = P^- + l\underline{e}_1$ dont les degrés de liberté δ_i vérifient $\delta_i^+ - \delta_i^- = 0$ pour $i=1, \dots, 6$. Pour la réalisation du calcul, un des noeuds du maillage est encastré afin d'éviter tout déplacement de corps rigide.

A l'issue de cette étape, le champ de déplacement \underline{u}_{per} est déterminé et le champ de déplacement total $\underline{u}_{cel} = \underline{u}_{macro} + \underline{u}_{per}$ est entièrement connu.

2.4.2.3 Etape 3. Calcul de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation correspondant à la cinématique élémentaire étudiée est obtenue en imposant le champ de déplacement $\underline{u}_{cel} = \underline{u}_{macro} + \underline{u}_{per}$ aux noeuds de la cellule. L'énergie de déformation recherchée est déterminée sous la forme

$$W = \frac{1}{2} \underline{U}_{cel} \cdot \underline{F}_R \quad (2.60)$$

où \underline{F}_R est le vecteur force de réaction aux noeuds de la cellule, lorsque le déplacement \underline{U}_{cel} est appliqué à la cellule.

Remarque 2.3 *Le problème étant à déplacements imposés en tous les noeuds du maillage, le nombre de déplacements inconnus est nul, ce qui n'est pas admissible dans la plupart des*

2.4. Détermination des raideurs équivalentes

codes de calcul par éléments finis. Pour y remédier, il suffit d'ajouter un élément à la structure, connecté à un noeud quelconque du maillage et non chargé. Cet élément suit la structure sans se déformer, mais ne modifie pas les résultats.

2.4.2.4 Raideurs équivalentes

Les raideurs équivalentes diagonales (de type K_{ii}) sont obtenues à l'aide des relations (2.29) pour l'extension, (2.34) et (2.35) pour les flexions, (2.38) pour la torsion et (2.58) et (2.59) pour les cisaillements. Les énergies intervenant dans ces relations sont directement celles calculées à l'étape 3 (2.60) pour chaque cinématique élémentaire étudiée.

Il reste à déterminer les raideurs équivalentes de couplage (non diagonales). Ces termes peuvent être déterminés en appliquant simultanément deux degrés de liberté. Prenons l'exemple du calcul de la raideur K_{15} couplant traction et flexion dans le plan x_1x_3 . L'énergie correspondant à l'application simultanée d'une cinématique d'extension et de flexion est donnée sur la poutre équivalente par :

$$W = \frac{1}{2}K_{11}\Delta^2l + \frac{1}{2}K_{55}\chi_2^2l + \Delta K_{15}\chi_2l \quad (2.61)$$

Sur la cellule périodique, l'énergie élastique correspondante est donnée par

$$W = W_{TT} + W_{F_1F_1} + W_{TF_1} \quad (2.62)$$

où W_{TT} et $W_{F_1F_1}$ ont déjà été introduites (cf. (2.29) et (2.34)) et où W_{TF_1} est l'énergie de couplage. Cette méthode permet de déterminer l'énergie de couplage, mais oblige à multiplier les calculs par éléments finis. Pour éviter de réaliser ces calculs supplémentaires, il est possible de calculer directement l'énergie de couplage à partir des résultats obtenus pour chaque degré de liberté. Plus précisément, l'énergie de couplage W_{TF_1} est donnée par :

$$W_{TF_1} = \underline{U}_{celT} \cdot \underline{F}_{RF_1} \quad (2.63)$$

où \underline{U}_{celT} est le vecteur de déplacement nodal sur la cellule en imposant une cinématique d'extension (étape 2) et \underline{F}_{RF_1} est le vecteur force de réaction obtenu à l'étape 3 en considérant une cinématique de flexion dans le plan x_1x_3 .

Le principe d'équivalence en énergie permet de déduire

$$K_{15} = \frac{W_{TF_1}}{\Delta\chi_2l} \quad (2.64)$$

Cette démarche peut être aisément reproduite pour le calcul des 14 autres raideurs de couplages possibles qui sont donnés dans le tableau (2.1)

Chapitre 2. Présentation de la méthode d'homogénéisation

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= -\frac{W_{TC_1}K_{22}}{K_{66}\Delta\chi'_3l} & K_{13} &= \frac{W_{TC_2}K_{33}}{K_{55}\Delta\chi'_2l} & K_{14} &= \frac{W_{TT_0}}{\Delta\chi_1l} \\
 K_{15} &= \frac{W_{TF_1}}{\Delta\chi_2l} & K_{16} &= \frac{W_{TF_2}}{\Delta\chi_3l} & K_{23} &= \frac{K_{56}K_{22}K_{33}l^2}{12K_{66}K_{55}} - \frac{W_{C_1}C_2K_{22}K_{33}}{K_{66}K_{55}\chi'_2\chi'_3l} \\
 K_{24} &= -\frac{W_{C_1T_0}K_{22}}{K_{66}\chi_1\chi'_3l} & K_{25} &= -\frac{W_{C_1F_1}K_{22}}{K_{66}\chi_2\chi'_3l} & K_{26} &= -\frac{W_{C_1F_2}K_{22}}{K_{66}\chi_3\chi'_3l} \\
 K_{34} &= \frac{W_{C_2T_0}K_{33}}{K_{55}\chi_1\chi'_3l} & K_{35} &= \frac{W_{C_2F_1}K_{33}}{K_{55}\chi_2\chi'_3l} & K_{36} &= \frac{W_{C_2F_2}K_{33}}{K_{55}\chi_3\chi'_3l} \\
 K_{45} &= \frac{W_{T_0F_1}}{\chi_1\chi_2l} & K_{46} &= \frac{W_{T_0F_2}}{\chi_1\chi_3l} & K_{56} &= \frac{W_{F_1F_2}}{\chi_2\chi_3l}
 \end{aligned}$$

TABLE 2.1 – Expressions des raideurs équivalentes de couplages

Comme il a été expliqué, i.e. la méthode proposée est adaptable à n'importe quelle composition de cellule périodique, comportant des plaques, poutres, éléments massifs,... La raideur de cisaillement peut être obtenue et seuls six calculs par éléments finis correspondant aux 6 degrés de liberté sont nécessaires, les termes de couplage étant obtenus à partir des résultats intermédiaires obtenus lors du calcul de la réponse aux six degrés de liberté de poutre.

Chapitre 3

Application de la méthode d'homogénéisation et validation

L'objectif de ce chapitre est de valider la méthode d'homogénéisation présentée au chapitre précédent, en l'appliquant à des structures bi et tridimensionnelles. Dans ce qui suit, plusieurs cas tests seront introduits pour évaluer l'aptitude de la méthode à obtenir les raideurs de poutre dans des cas présentant peu ou pas de symétrie.

3.1 Validation du calcul des raideurs équivalentes

La première validation proposée consiste à comparer les raideurs équivalentes obtenues sur un cas simple à leur valeur théorique. Ainsi, nous considérons une structure homogène composée d'éléments de plaques, le matériau constitutif étant élastique et isotrope. La période élémentaire représentative de la structure de travail est représentée à la figure 3.1 Cette cellule a

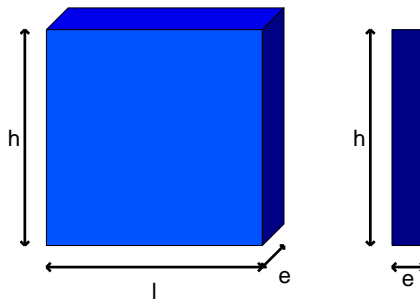


FIGURE 3.1 – Période élémentaire représentative

une longueur l et une hauteur h de 10cm pour une épaisseur b de 1cm , le module d'Young du

matériau constitutif est $E = 15.10^9 N.m^{-2}$ et le coefficient de Poisson est $\nu = 0,3$.

Les rigidités de la section transversale de cette poutre sont obtenues dans un premier temps par un calcul analytique et dans un second temps par l'application de la procédure d'homogénéisation.

3.1.1 Résultats analytiques

Les caractéristiques géométriques de la section transversale, c'est à dire l'aire S , le facteur de correction de cisaillement k_2 et le moment d'inertie de la section sont donnés par (3.1)

$$\begin{cases} S = bl = 10cm^2 \\ k_2 = \frac{5}{6} \simeq 0,83 \\ I_3 = \frac{bl^3}{12} \simeq 83,3cm^4 \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.2 Résultats numériques

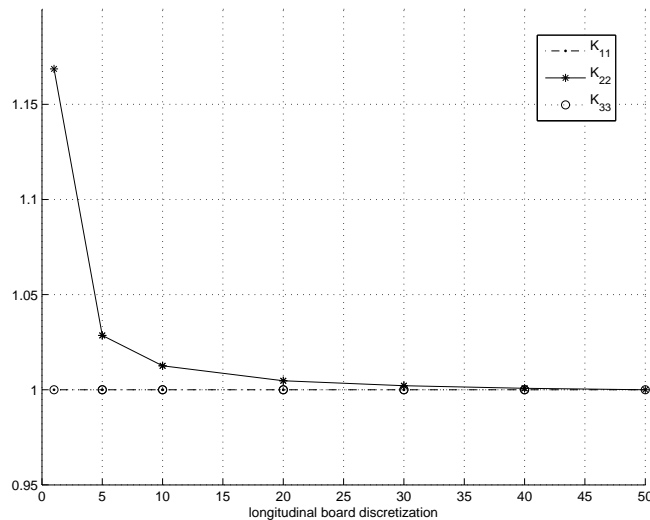


FIGURE 3.2 – Graphique de convergence des raideurs équivalentes normalisées en fonction de la discrétisation des éléments proches longitudinalement des bords $\partial\Omega_{per}$.

Pour chacune des raideurs calculées, nous étudions tout d'abord la convergence du résultat obtenu en fonction de la discrétisation de la cellule. La figure 3.2 montre l'évolution du rapport entre la raideur calculée pour un nombre d'éléments donné et la raideur converge en fonction du nombre d'éléments. Comme on pouvait s'y attendre, seule la raideur K_{22} nécessite un nombre

3.2. Validation de l'hypothèse permettant de relier distorsion et dérivée de courbure

Homogénéisation	Analytique
$K_{11} = 1,50.10^7\text{N}$	$ES = 1,50.10^7\text{N}$
$K_{22} = 4,70.10^6\text{N}$	$Gk_2S = 4,81.10^6\text{N}$
$K_{66} = 1,25.10^4\text{N.m}^2$	$EI_3 = 1,25.10^4\text{N.m}^2$

TABLE 3.1 – Comparatif des valeurs de la procédure d'homogénéisation et des valeurs analytiques pour une structure test 2.D.

d'éléments de l'ordre de 30 pour obtenir une estimation correcte de la raideur. Ce résultat est dû probablement au fait que la répartition de contraintes de cisaillement est parabolique dans la section.

Les valeurs des raideurs théoriques et numériques sont données dans le tableau 3.1. Là encore, la raideur en cisaillement présente l'écart le plus important entre valeur théorique et valeur calculée, avec un écart relatif qui n'est toutefois que de 0,02.

3.2 Validation de l'hypothèse permettant de relier distorsion et dérivée de courbure

Comme il a été vu au chapitre précédent, l'obtention de la raideur en cisaillement n'a été possible que sous une hypothèse permettant de relier la dérivée de la courbure à la distorsion à partir des équations d'équilibre, (cf. eq. (2.53) et (2.54)). Cette hypothèse a permis d'exprimer γ_2 (resp. γ_3) uniquement en fonction de χ_2' (resp. χ_3'); ces hypothèses doivent être vérifiées a posteriori sur chaque structure étudiée. Nous avons pu vérifier cette hypothèse sur quelques structures composées de poutres et l'objet de ce paragraphe est de présenter les résultats correspondants.

Les cellules de base des structures étudiées sont indiquées dans le tableau 3.2. Les traits pleins représentent des poutres tandis que les traits pointillés caractérisent des barres. Enfin, les poutres de couleur rouge ont un module d'Young différent de celles dessinées en noir. Les propriétés des matériaux et des sections ainsi que l'ensemble des raideurs calculées sont indiquées en annexe C.

Les rapports $\frac{K_{12}}{K_{66}}$ et $\frac{K_{26}}{K_{66}}$ reportés dans le tableau 3.2 confirment la pertinence de l'hypothèse qui a été faite puisque la valeur maximale des rapports obtenus est de $6,70.10^{-3}$. Ces exemples

$\frac{K_{12}}{K_{66}}$	$5,31.10^{-11}$	$-4,01.10^{-11}$	$5,30.10^{-3}$	$3,90.10^{-3}$	$6,70.10^{-3}$
$\frac{K_{26}}{K_{66}}$	$-1,18.10^{-14}$	$2,30.10^{-14}$	$-1,19.10^{-14}$	$-1,16.10^{-14}$	$-1,49.10^{-14}$
$\frac{K_{12}}{K_{66}}$	$-1,44.10^{-9}$	$-1,60.10^{-3}$	$-2,61.10^{-9}$	$2,00.10^{-3}$	$-6,33.10^{-5}$
$\frac{K_{26}}{K_{66}}$	$-1,47.10^{-14}$	$1,42.10^{-14}$	$-1,34.10^{-14}$	$-1,83.10^{-14}$	$-1,91.10^{-14}$
$\frac{K_{12}}{K_{66}}$	$6,72.10^{-5}$	$-7,87.10^{-10}$	$5,90.10^{-3}$	$4,70.10^{-3}$	$2,27.10^{-11}$
$\frac{K_{26}}{K_{66}}$	$-1,91.10^{-14}$	$1,47.10^{-14}$	$-1,45.10^{-14}$	$-1,15.10^{-14}$	$-1,18.10^{-14}$

TABLE 3.2 – Tableau des rapports des raideurs équivalentes

n'ayant pas valeur de généralité, il sera nécessaire de vérifier cette hypothèse a posteriori pour chaque structure étudiée.

3.3 Principe de validation de la méthode sur des structures complexes

Les premiers résultats obtenus sur la poutre pleine ont nécessité le calcul de la valeur théorique des raideurs de la structure, qui sont disponibles pour une poutre homogène. Dans le cas général, il n'existe pas de valeur théorique. Nous proposons donc la validation de la méthode d'homogénéisation en la testant sur des structures 2.D et 3.D plus ou moins complexes en comparant les résultats obtenus par homogénéisation avec ceux obtenus sur une structure complète

3.3. Principe de validation de la méthode sur des structures complexes

comprenant un grand nombre de cellules. Deux types de résultats sont présentés :

- à efforts extérieurs imposés, la comparaison des déplacements obtenus d'une part sur la structure complète (modèle éléments finis) et d'autre part sur la poutre équivalente (structure homogénéisée).
- la comparaison des efforts internes dans la structure d'une part et sur la cellule de base d'autre part après une étape de relocalisation qui sera explicitée dans la suite.

3.3.1 Comparaison des déplacements

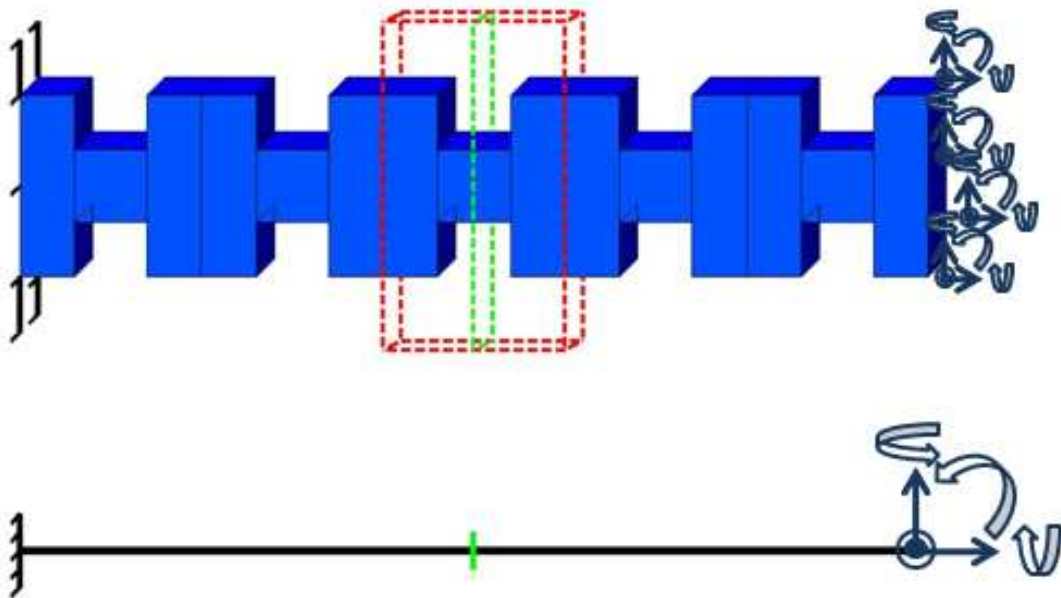


FIGURE 3.3 – En haut : structure non homogénéisée soumise à un des efforts sur la section en noir ; en bas : poutre équivalente soumise à un chargement similaire

Les déplacements obtenus à efforts imposés sont déterminés sur des poutres consoles, encastées à une extrémité et sollicitées à l'autre extrémité. Les calculs seront réalisés d'une part sur la structure complète (modèle Eléments Finis) et d'autre part sur la poutre équivalente.

Sur la structure homogénéisée, nous utiliserons les résultats théoriques obtenus au chapitre 1 au paragraphe 1.4 pour une structure tridimensionnelle et en annexe A pour une structure bidimensionnelle.

Les déplacements obtenus à une abscisse X_1 de la poutre équivalente sont comparés à la

moyenne des déplacements calculés sur la cellule dont le centre a la même abscisse (cf fig 3.3)

3.3.2 Comparaison des efforts internes : relocalisation

On considère de nouveau une poutre console. La comparaison des efforts internes obtenus sur la structure complète avec ceux calculés sur la cellule après relocalisation est réalisée de la façon suivante :

- Pour un chargement donné en déplacement, on détermine le champ de déplacement dans la poutre équivalente en utilisant les résultats du chapitre 1 au paragraphe 1.5 pour une structure tridimensionnelle et en annexe B pour une structure bidimensionnelle. On en déduit le champ de déformation macroscopique.
- On identifie la valeur des variables cinématiques correspondant à l'abscisse du centre de la cellule faisant l'objet de la comparaison. La déformation est supposée constante sur la cellule.
- On impose les cinématiques correspondantes sur la cellule en utilisant les définitions (2.27) pour l'extension, (2.30) et (2.31) pour les flexions, (2.36) pour la torsion et (2.47) et (2.48) pour les cisaillements. On obtient les efforts internes relocalisés qui sont à comparer avec ceux obtenus sur la structure complète.

Remarque 3.1 *D'un point de vue pratique, les efforts internes ont été calculés pour des variables cinématiques unitaires. Il suffit ensuite de les combiner en pondérant par les valeurs réelles des variables cinématiques.*

3.4 Structure bidimensionnelle symétrique constituée de poutres

On considère tout d'abord une structure bidimensionnelle constituée de 10 cellules périodiques (cf. fig. 3.4) constituées d'éléments de poutres. Ces éléments ont tous la même géométrie et sont constitués du même matériau (cf. tab C.4). La hauteur de la cellule est notée H et la longueur est définie par l . On considère ici $H = l = 10$. La poutre transversale est discrétisée uniformément en 10 éléments. Les membrures sont discrétisées en 10 éléments uniformes et les éléments adjacents au bord périodique sont discrétisés plus finement de manière à mieux estimer l'énergie de déformation.

3.4. Structure bidimensionnelle symétrique constituée de poutres

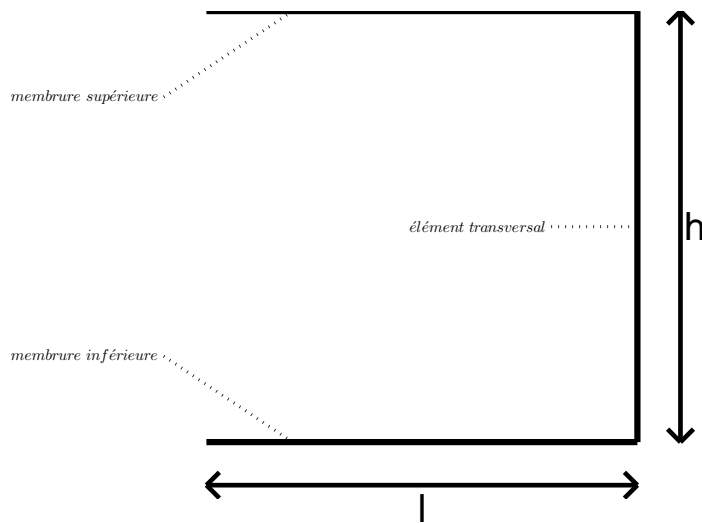


FIGURE 3.4 – cellule de base

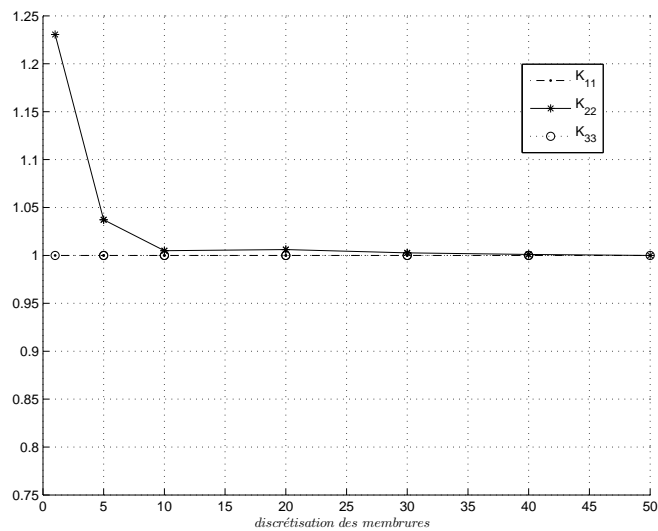


FIGURE 3.5 – Convergence des raideurs équivalentes normalisées en fonction de la discrétisation des bords

3.4.1 Convergence des raideurs équivalentes

La figure 3.5 représente la convergence des raideurs équivalentes en fonction de la discrétisation des éléments constituant les bords périodiques. On notera que seul le calcul de la raideur K_{22} nécessite un maillage plus fin sur les bords pour les raisons précédemment indiquées.

3.4.2 Comparaison des déplacements

La comparaison des déplacements obtenus sur la structure équivalente avec ceux calculés sur la structure complète est réalisée en considérant successivement chaque cinématique élémentaire. A chaque fois, le résultat du calcul sur la structure complète est comparé avec celui correspondant sur la poutre équivalente, en considérant ou non les déformations de cisaillement (poutres de Bernoulli et de Timoshenko).

3.4.2.1 Traction

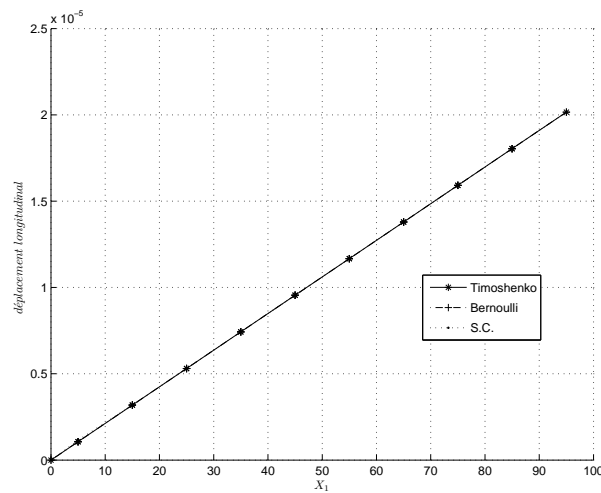


FIGURE 3.6 – Déplacement longitudinal pour un effort normal appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalents

La figure 3.6 permet de comparer le déplacement longitudinal obtenu en imposant une extension. Les résultats obtenus sont concordants quelque soit le modèle de poutre considéré ; ce résultat est évidemment dû au fait que les éléments transversaux n'interviennent pas dans le résultat.

3.4.2.2 Flexion pure

La figure 3.7 représente le déplacement transversal obtenu en imposant un couple à l'extrémité libre de la structure. Les résultats obtenus sur les poutres équivalentes coïncident parfaitement avec les calculs réalisés sur la structure complète. Ceci valide le calcul de la raideur K_{33} .

3.4. Structure bidimensionnelle symétrique constituée de poutres

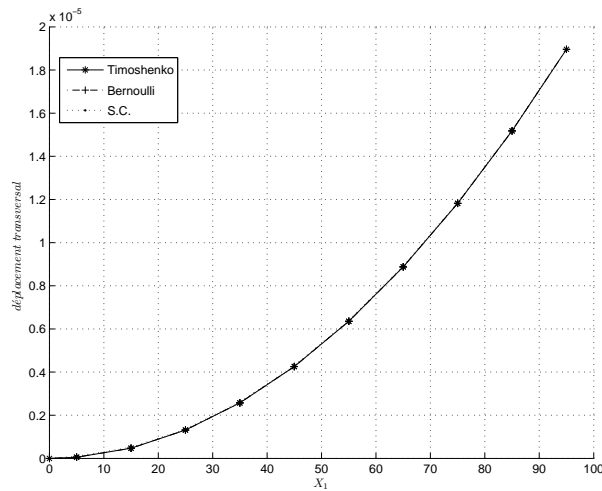


FIGURE 3.7 – Déplacement transversal pour un couple appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

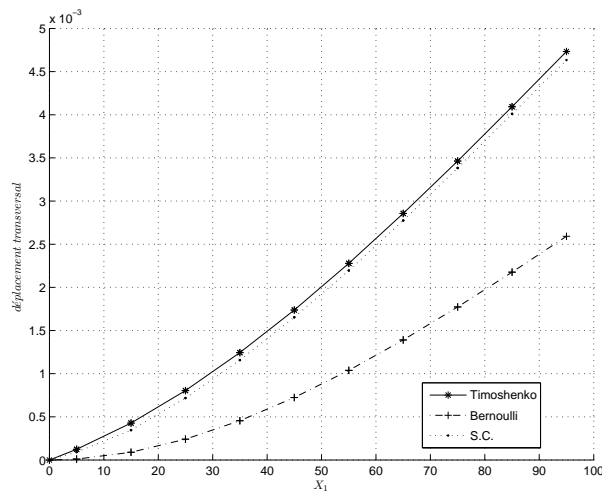


FIGURE 3.8 – Déplacement transversal pour un effort tranchant appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalents

3.4.2.3 Flexion simple

L'essai de flexion simple est réalisé en imposant une force appliquée transversalement à la poutre à l'extrémité libre de la poutre console. La comparaison des déplacements calculés sur la structure complète d'une part et sur les poutres équivalentes d'autre part est illustrée par la figure 3.8. On notera que pour cette sollicitation qui induit un effort tranchant non nul, le modèle de Bernoulli n'est pas satisfaisant. Ce résultat est clairement dû au fait que les déformations de cisaillement ne sont pas négligeables devant les déformations induites par la flexion. Les résultats obtenus par le modèle de Timoshenko sont quant à eux proches de ceux déterminés sur

la structure complète ; l'erreur reste inférieure à 3%. Ce résultat valide le calcul de la raideur équivalente K_{22} .

3.4.3 Comparaison des efforts internes

Pour ne pas multiplier les résultats présentés, seule la flexion simple sera étudiée.

La figure 3.9 présente la comparaison des efforts internes sur la cellule après relocalisation avec ceux obtenus sur la structure complète. Les résultats sont satisfaisants pour le modèle de Timoshenko, ce qui confirme les résultats obtenus pour la raideur. Pour la poutre de Bernoulli, il est connu que les efforts internes sont estimés correctement pour le cas de la flexion pure, mais que le modèle sous-estime les déformations de cisaillement dans la cellule ainsi que les efforts internes correspondants aux efforts de cisaillement. Ces efforts sont généralement ajoutés dans un deuxième temps afin de vérifier les équations d'équilibre lorsque le moment de flexion n'est pas constant (profil parabolique de contraintes de cisaillement dans la poutre homogène par exemple). Les efforts internes présentés ici pour la poutre de Bernoulli comportent donc un terme complémentaire "de cisaillement" calculé à partir de l'effort tranchant et de la raideur en cisaillement. Les figures montrent que cette correction ne suffit pas à rétablir l'égalité entre les efforts internes calculés par les différentes méthodes. Cette correction sera systématiquement adoptée dans les calculs qui correspondent aux sous-sections suivantes.

3.5 Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-flexion

On considère une structure similaire d'un point de vue géométrique à celle étudiée au paragraphe précédent. La différence se situe dans la distribution des propriétés des matériaux : le module d'Young de la membrure supérieure est désormais inférieur à celui de la membrure inférieure. Il en résulte un couplage traction flexion. En effet, supposons que l'on applique le même effort normal aux deux membrures. Leurs déformations seront différentes, d'où une rotation de la section globale.

3.5.1 Convergence des raideurs équivalentes

Comme pour le test reporté au paragraphe 3.1, la figure 3.10 permet d'analyser la convergence des raideurs équivalentes en fonction de la discrétisation des bords périodiques. De nou-

3.5. Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-flexion

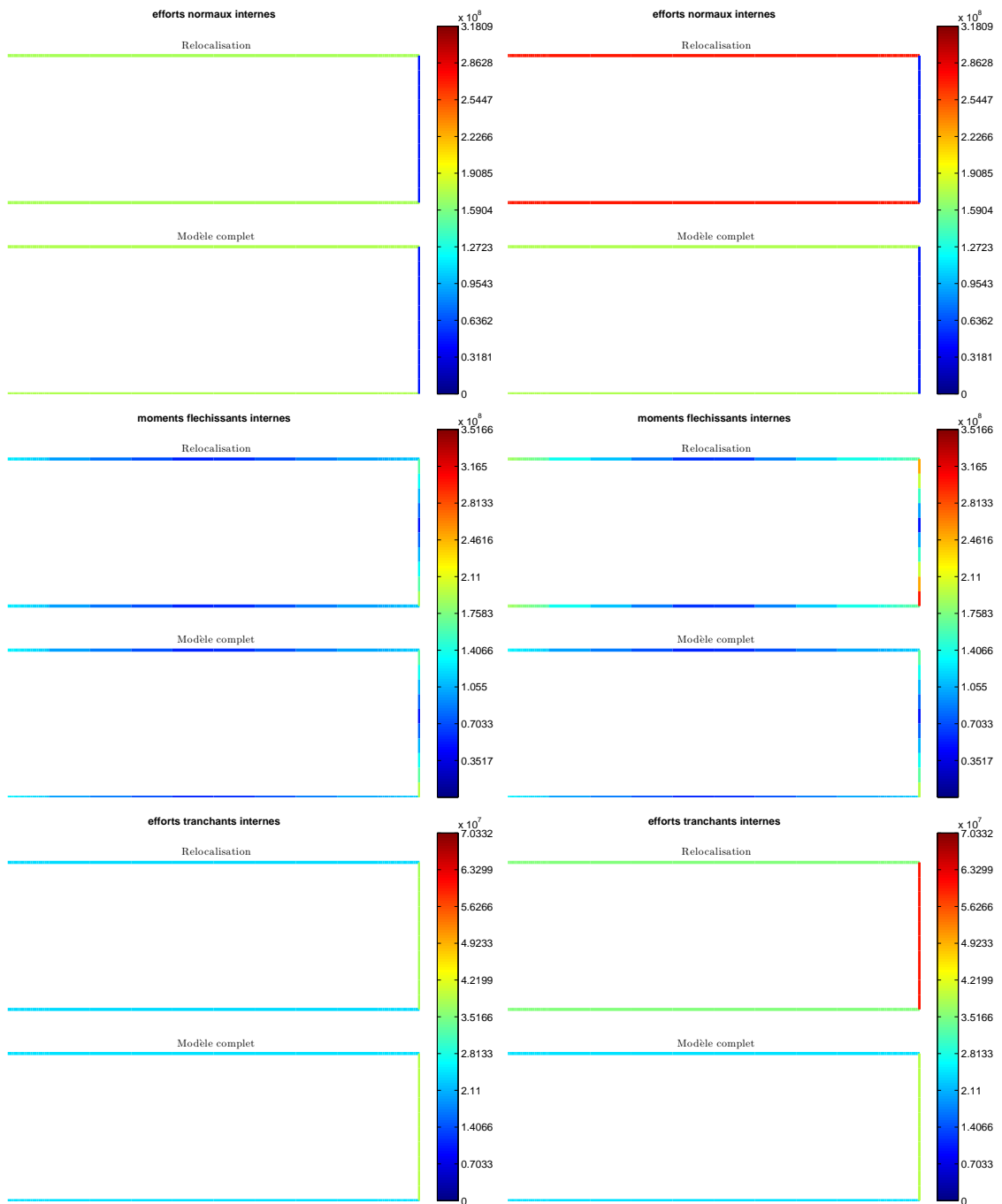


FIGURE 3.9 – Comparatif des efforts internes, De haut en bas on a respectivement : efforts normaux, moments fléchissants et efforts tranchants ; de gauche à droite on a respectivement : modèle de Timoshenko et modèle de Bernoulli (avec dérivée de courbure)

veau, seule la convergence de la raideur en cisaillement K_{22} nécessite une discrétisation plus fine.

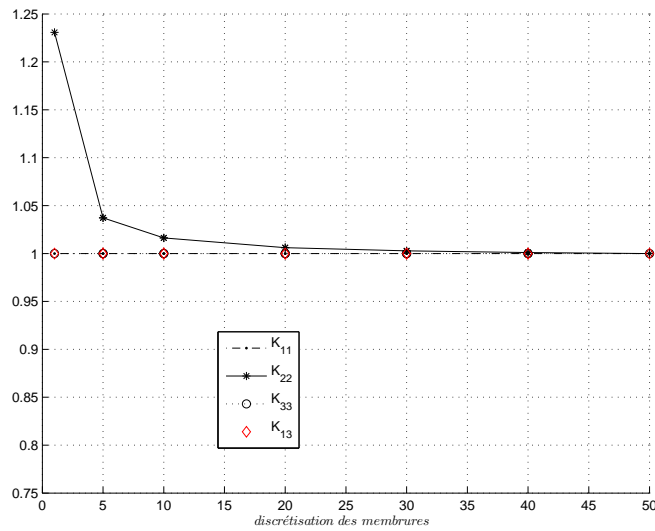


FIGURE 3.10 – Convergence des raideurs équivalentes normalisées en fonction de la discrétisation des bords

3.5.2 Comparaison des déplacements

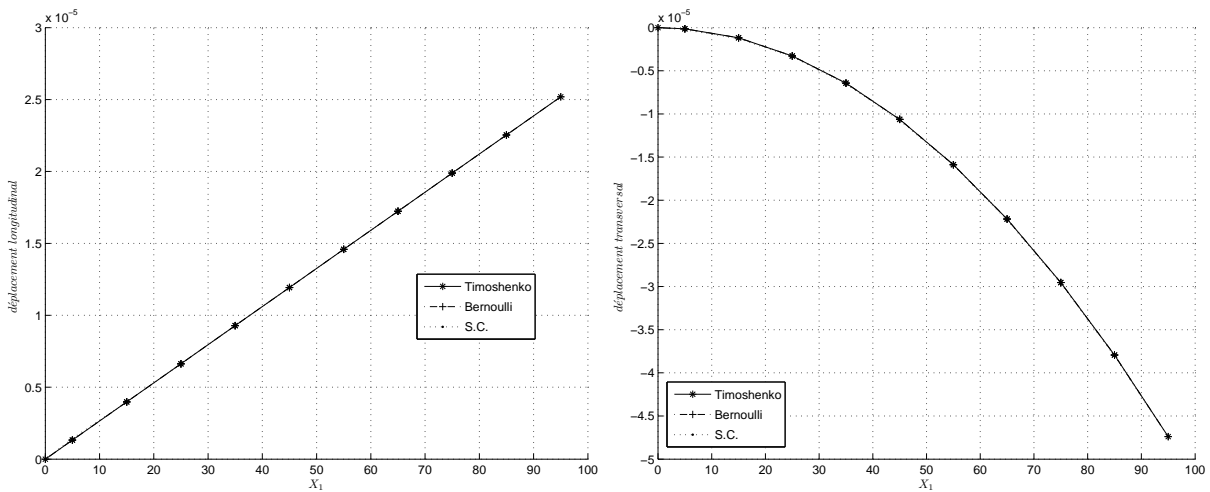


FIGURE 3.11 – Déplacement longitudinal (à gauche) et déplacement transversal (à droite) pour un effort normal appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

On compare les déplacements calculés sur la structure complète et sur les poutres équivalentes de Bernoulli et de Timoshenko. Les figures 3.11, 3.12 et 3.13 sont relatives aux essais de traction, de flexion pure et de flexion simple respectivement sur la poutre console déjà considérée.

Dans les trois cas et pour les déplacements longitudinaux et transversaux, les résultats obtenus

3.5. Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-flexion

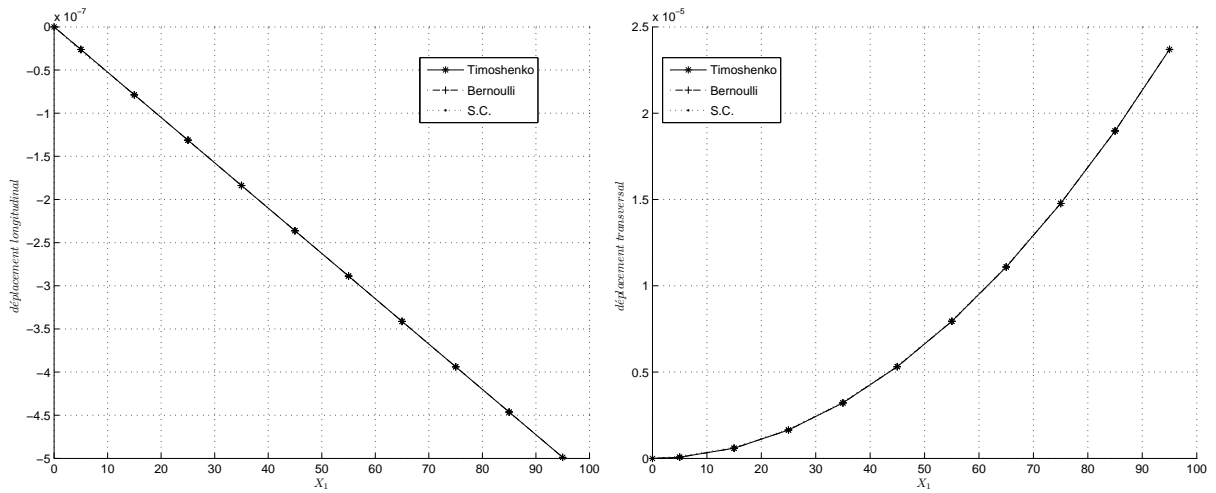


FIGURE 3.12 – Déplacement longitudinal (à gauche) et déplacement transversal (à droite) pour un couple appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

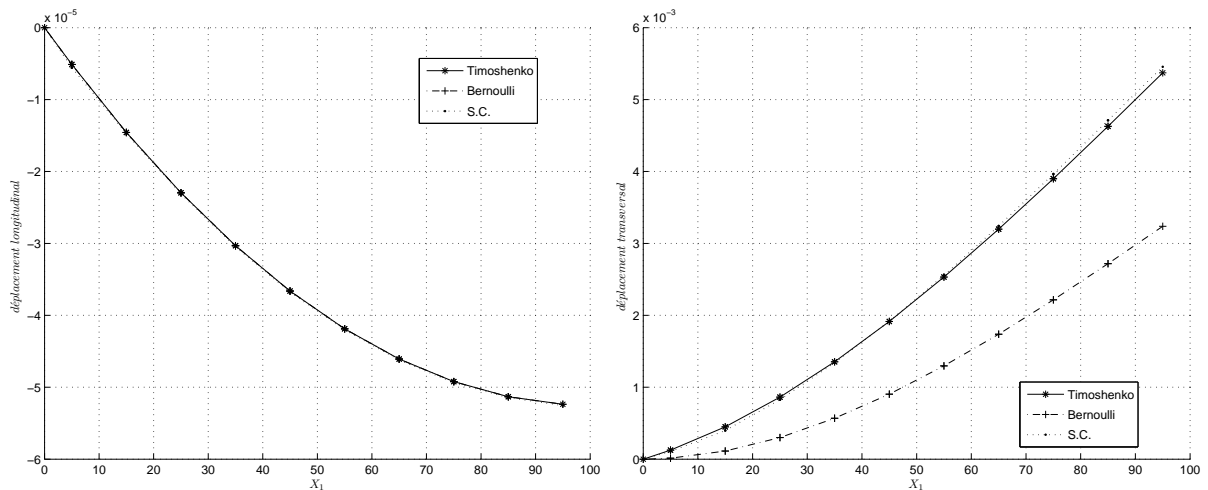


FIGURE 3.13 – Déplacement longitudinal (à gauche) et déplacement transversal (à droite) pour un effort tranchant appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

sur les poutres équivalentes sont en bon accord avec ceux calculés sur la structure complète mis à part pour le déplacement transversal en flexion simple sur la poutre équivalente de Bernoulli.

3.5.3 Comparaison des efforts internes

Les efforts internes sont comparés en utilisant la méthode présentée au paragraphe 3.3.2. Nous considérons de nouveau uniquement une sollicitation de flexion simple consistant à im-

Chapitre 3. Application de la méthode d'homogénéisation et validation

poser un déplacement transversal à l'extrémité libre de la poutre console.

Les résultats obtenus sont illustrés dans la figure 3.14. Les efforts internes relocalisés à partir

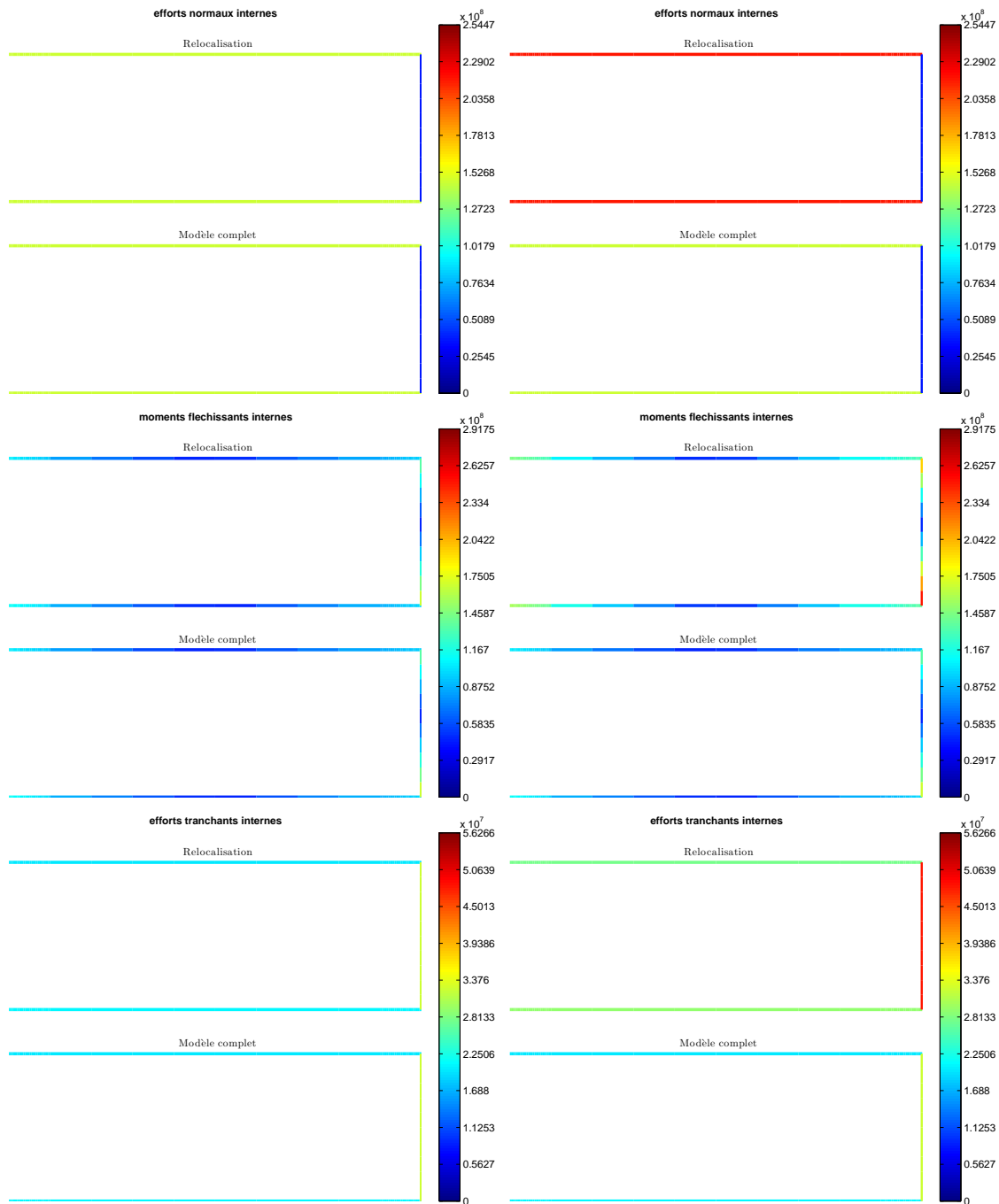


FIGURE 3.14 – Comparatif des efforts internes, De haut en bas on a respectivement : efforts normaux, moments fléchissants et efforts tranchants ; de gauche à droite on a respectivement : modèle de Timoshenko et modèle de Bernoulli (avec dérivée de courbure)

3.6. Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-cisaillement

de la poutre équivalente de Timoshenko sont en très bon accord avec les efforts internes calculés sur la structure complète. A nouveau, la correction apportée pour déterminer les efforts liés au cisaillement est insuffisante pour rétablir les efforts intérieurs.

3.6 Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-cisaillement

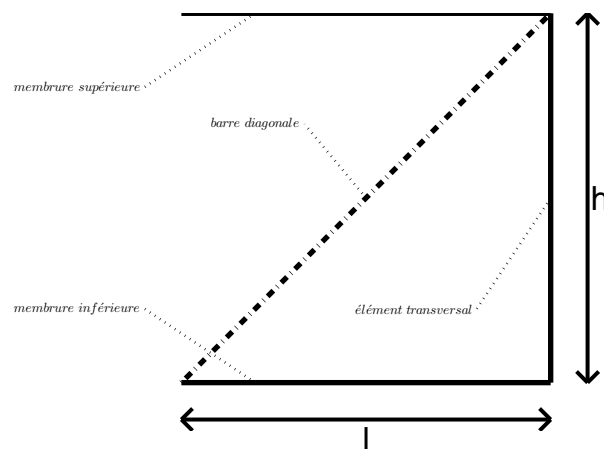


FIGURE 3.15 – Cellule de base

Considérons à présent une structure constituée de 10 cellules périodiques telles que celle présentée à la figure (3.15). Les membrures et l'élément transversal sont des poutres alors que l'élément diagonal est une barre. Les propriétés géométriques et mécaniques sont données dans les tableaux C.4 et C.5 (prenant en compte uniquement les éléments noirs). Cette structure présente un couplage entre traction et cisaillement. La composante K_{12} de la matrice de raideur est donc non nulle.

3.6.1 Convergence des raideurs équivalentes

La figure 3.16 représente la convergence des raideurs normalisées en fonction de la discrétisation des bords périodiques. On note que la détermination des raideurs K_{22} et K_{12} nécessite un maillage suffisamment fin.

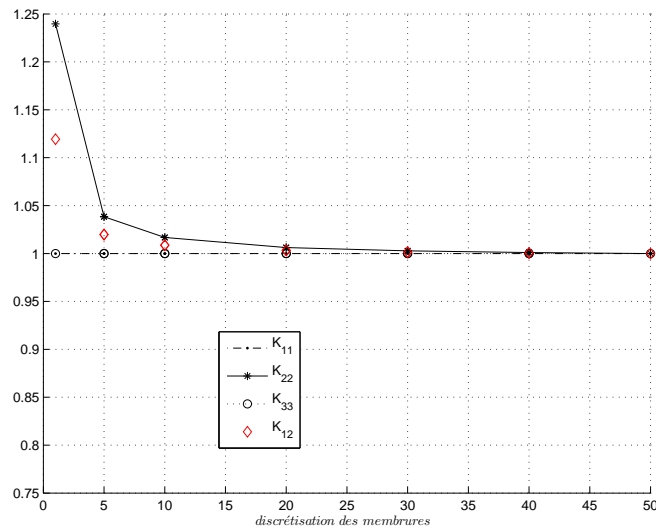


FIGURE 3.16 – Convergence des raideurs équivalentes normalisées en fonction de la discrétisation des bords

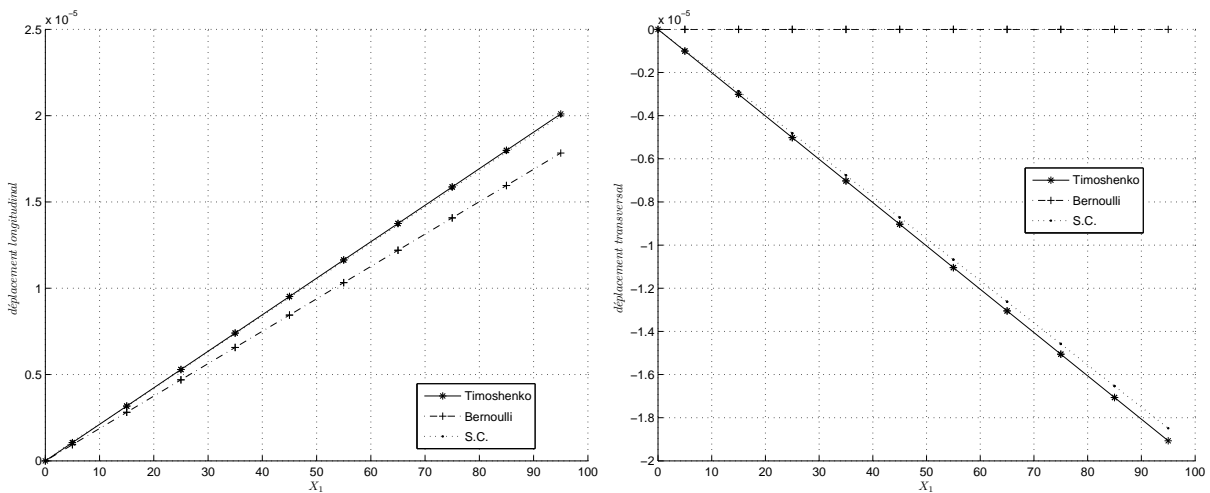


FIGURE 3.17 – Déplacement longitudinal (à gauche) et déplacement transversal (à droite) pour un effort normal appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

3.6.2 Comparaison des déplacements

Les figures 3.17, 3.18 et 3.19 permettent de comparer les déplacements longitudinaux et transversaux obtenus sur la structure complète et sur les poutres équivalentes de Bernoulli et Timoshenko pour des sollicitations de traction, de flexion pure et de flexion simple.

Compte tenu du couplage, les effets du cisaillement sont présents pour deux des trois sollicitations étudiées, et le modèle de Bernoulli ne permet pas d'obtenir la bonne déformée de la poutre

3.6. Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-cisaillement

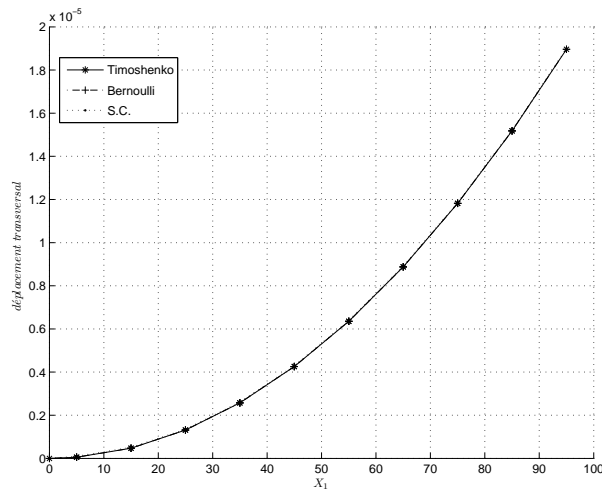


FIGURE 3.18 – Déplacement transversal pour un couple appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

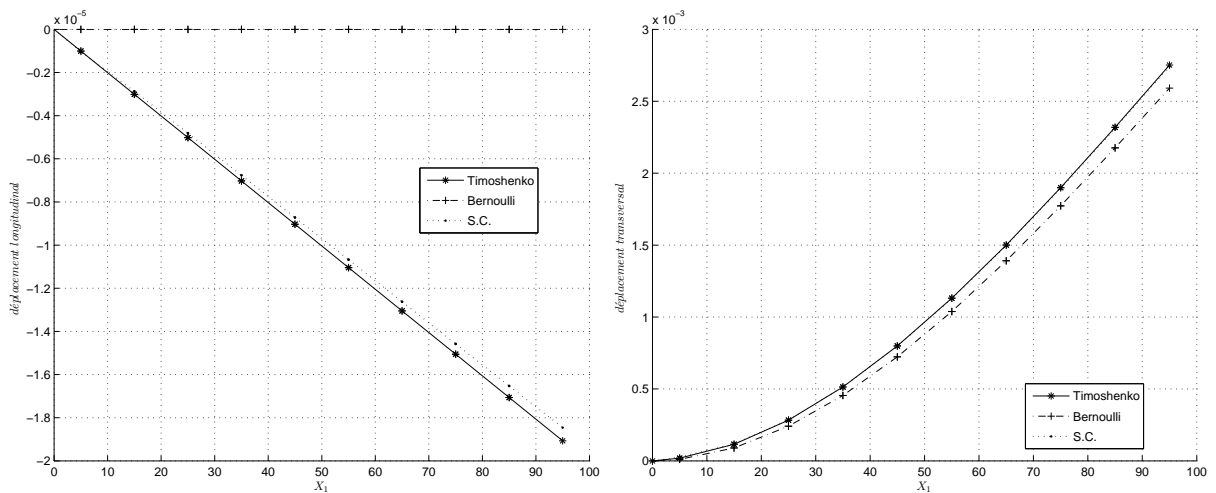


FIGURE 3.19 – Déplacement longitudinal (à gauche) et déplacement transversal (à droite) pour un effort tranchant appliqué sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

équivalente.

La poutre équivalente de Timoshenko montre des résultats proches de ceux obtenus sur la structure complète. L'erreur commise est au maximum de l'ordre de 3% et pourrait s'expliquer par l'hypothèse faite pour exprimer γ_2 en fonction de χ'_3 (cf. Eq. 2.54).

Chapitre 3. Application de la méthode d'homogénéisation et validation

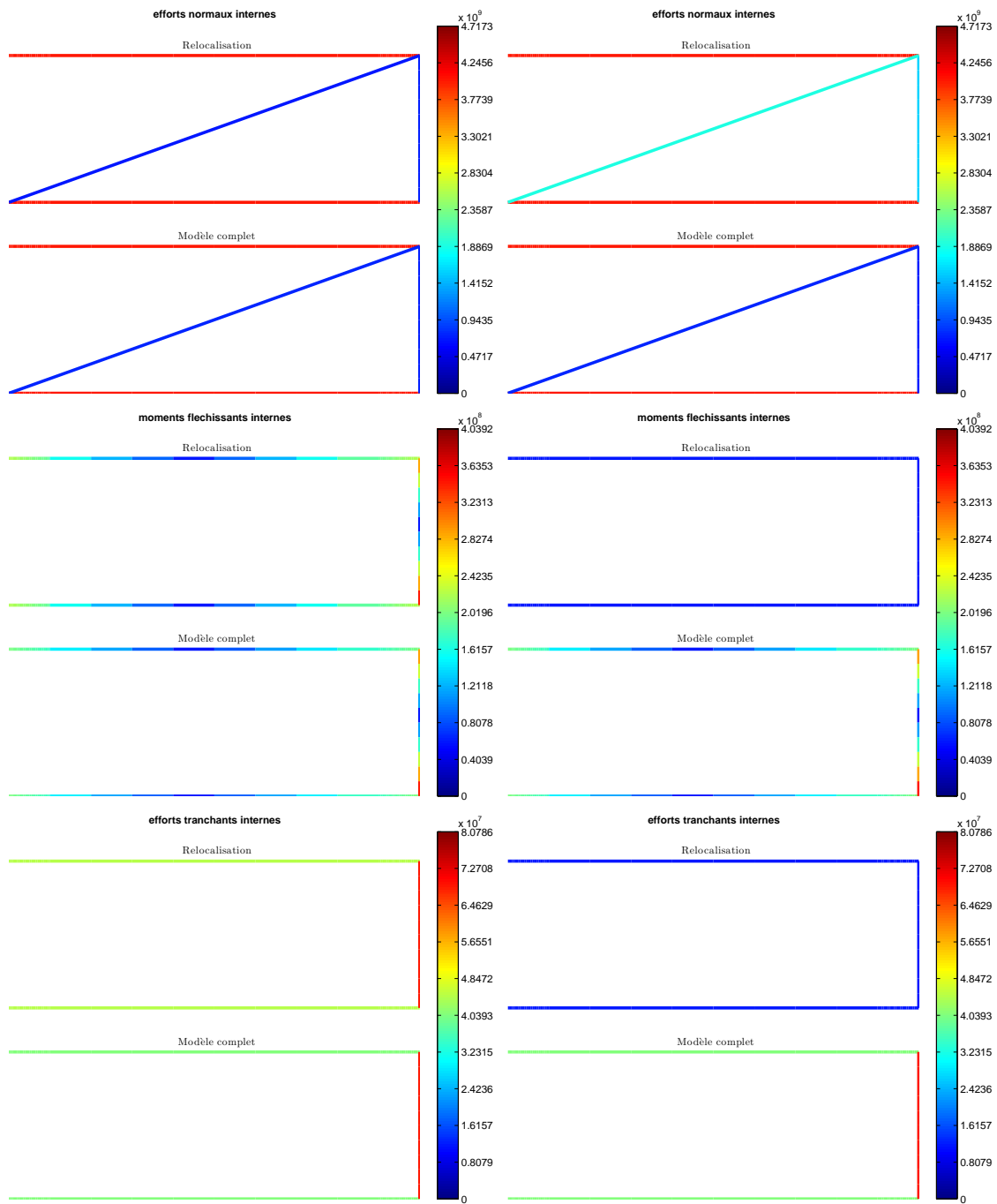


FIGURE 3.20 – Comparatif des efforts internes, De haut en bas on a respectivement : efforts normaux, moments fléchissants et efforts tranchants ; de gauche à droite on a respectivement : modèle de Timoshenko et modèle de Bernoulli (avec dérivée de courbure)

3.6. Structure bidimensionnelle non symétrique : couplage traction-cisaillement

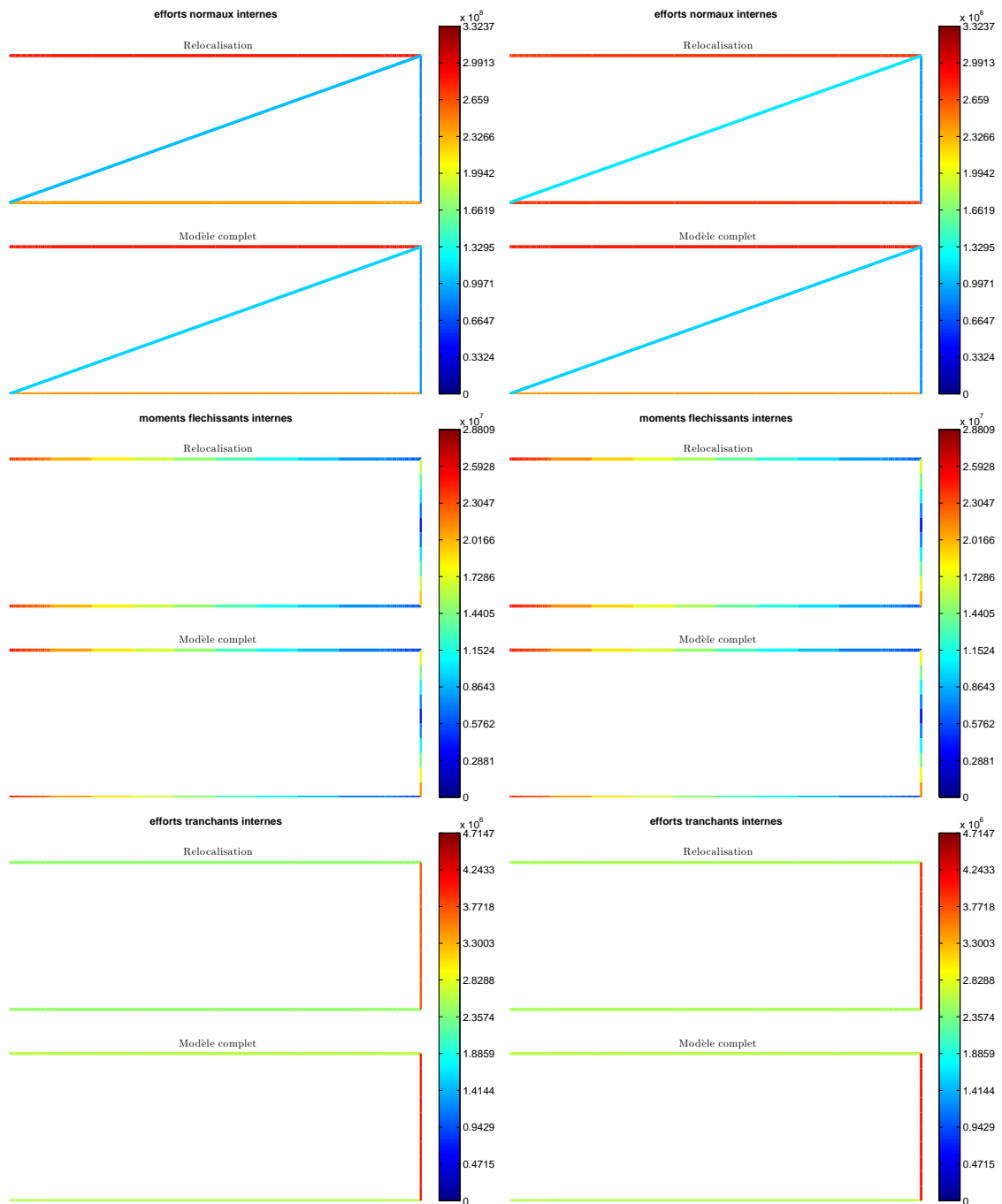


FIGURE 3.21 – Comparatif des efforts internes, De haut en bas on a respectivement : efforts normaux, moments fléchissants et efforts tranchants ; de gauche à droite on a respectivement : modèle de Timoshenko et modèle de Bernoulli (avec dérivée de courbure)

3.6.3 Comparaison des efforts internes

Les figures 3.20 et 3.21 illustrent la comparaison des efforts internes en suivant la démarche présentée au paragraphe 3.3.2 pour les sollicitations de traction et de flexion simple.

A nouveau, le modèle de Bernoulli n'est pas satisfaisant pour déterminer les efforts intérieurs. Les résultats obtenus par l'utilisation de la cinématique de Timoshenko sont bons. On relève un bon accord entre les efforts sur la structure complète et les efforts relocalisés.

3.7 Structure tridimensionnelle

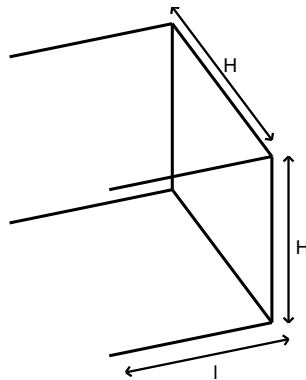


FIGURE 3.22 – Cellule de base

Pour terminer ces exemples permettant de valider la méthode proposée, nous considérons une structure tridimensionnelle constituée de 10 cellules périodiques telles que celle montrée sur la figure 3.22. Celle-ci est constituée d'éléments de poutres dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont reportées dans le tableau C.4 (élément noir).

La figure 3.23 représente la rotation autour de l'axe longitudinal obtenue en imposant un couple de torsion à l'extrémité libre de la poutre console.

Les deux modèles coïncident ; ils diffèrent légèrement du calcul sur la structure complète. L'erreur commise est au maximum de l'ordre de 4%. Ce résultat permet de valider le calcul de la raideur équivalente en torsion

3.8 Structures possédant des éléments transverses souples et effets de bord

Comme on le verra dans la partie 2, la structure biologique qui sera étudiée est caractérisée par une raideur en cisaillement faible. L'objectif de cette section est de montrer qu'il existe dans ce cas un effet de bord qui croît lorsque la raideur en cisaillement diminue. Considérons

3.8. Structures possédant des éléments transverses souples et effets de bord

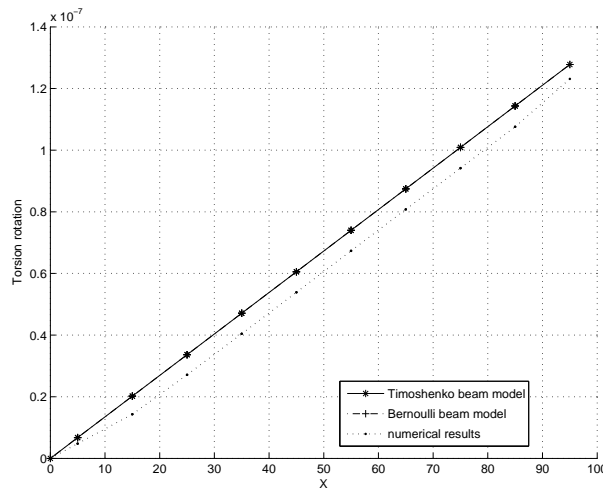


FIGURE 3.23 – Rotation autour de l'axe longitudinal pour un moment de torsion imposé sur la structure complète et sur les 2 modèles de poutres équivalentes

une structure 2-D construite à partir de la cellule de base représentée à la figure 3.4. Les deux membrures ont des caractéristiques mécaniques identiques et l'élément transverse diffère uniquement par la valeur du module d'Young fixée à une valeur 100 fois inférieure à celui des membrures. La structure est sollicitée en flexion simple en imposant un effort transverse à l'extrémité libre.

La figure 3.24 représente la comparaison des déplacements transverses obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente. On a considéré des structures comportant 10, 35 et 70 cellules de bases. Pour que le calcul sur la poutre équivalente soit identique au calcul sur la structure complète, il faut que le nombre de cellules soit suffisant. Cet effet s'explique par le fait qu'il existe à proximité de l'encastrement une déformée de cellule différente de la déformée de la cellule en partie courante. La différence relative diminue lorsque le nombre de cellules en partie courante est suffisamment important comparé aux cellules affectées par l'effet de bord à proximité des appuis. Cet effet de bord est particulièrement important pour des chargements induisant des déformations de cisaillement importantes, particulièrement car le gauchissement de section est empêché à proximité de l'encastrement

Nous considérons maintenant une structure 3-D (cf. Fig. 3.25) construite à partir de la cellule de base représentée sur la figure 3.22, encadrée à une extrémité et sollicitée par un moment de torsion à l'extrémité libre. Nous allons étudier les effets d'une part de la diminution de la raideur des éléments transverses et d'autre part du nombre de cellules (*i.e.* de la longueur de la structure).

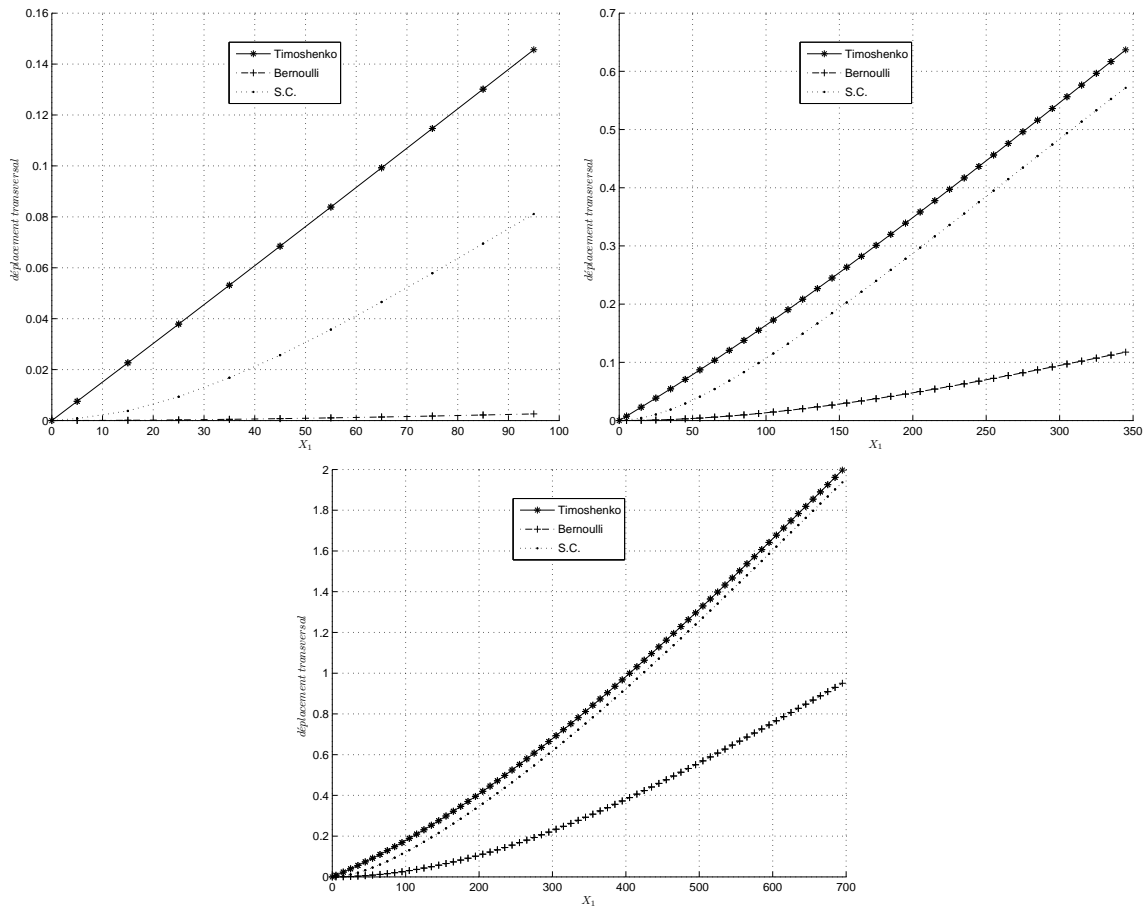


FIGURE 3.24 – Déplacement transversal pour un effort transversal appliqué à l'extrémité libre de la structure : structure composée de 10 cellules de base (en haut à gauche), 35 cellules de base (en haut à droite) et 70 cellules de base (en bas)

Supposons tout d'abord que les caractéristiques mécaniques des éléments soient celles utilisées plus haut (§ 3.7). Le moment fléchissant interne microscopique obtenu pour une poutre longitudinale est représenté sur la figure 3.26. On note que le moment fléchissant est périodique.

Supposons maintenant que les éléments transverses ont des propriétés beaucoup plus souples. Le moment fléchissant dans une poutre longitudinale est donné sur la figure 3.27. On constate que le moment fléchissant le long d'une poutre longitudinale n'est plus périodique, mais varie de façon linéaire. Considérons de nouveau la structure comprenant des éléments transverses plus souples et augmentons le nombre de cellules (et donc la longueur de la poutre). Le moment fléchissant le long des éléments longitudinaux est représenté à la figure 3.28. On constate cette fois que le moment fléchissant converge vers une valeur donnée et varie périodiquement autour de celle-ci. On peut donc raisonnablement conclure que le résultat donné à la figure 3.27 est dû

3.8. Structures possédant des éléments transverses souples et effets de bord

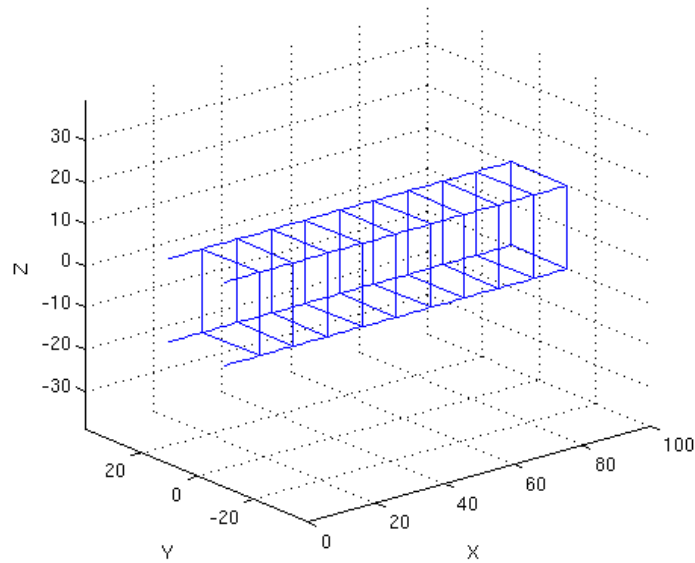


FIGURE 3.25 – Structure tridimensionnelle testée.

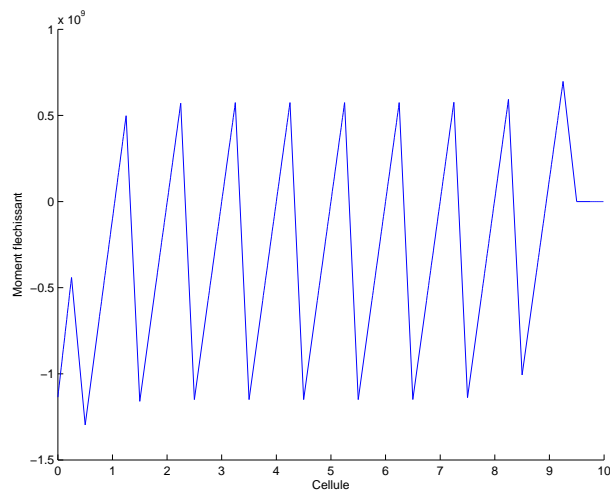


FIGURE 3.26 – Moment fléchissant sur une poutre longitudinale.

à des effets de bord non pris en compte dans le calcul. Ces effets sont plus importants lorsque la raideur des éléments transverses de la structure diminue. Les effets de bord sont dus à des incompatibilités entre le champ de déplacement ou de contrainte réel et celui issu de l'utilisation de la méthode d'homogénéisation. En effet, les méthodes d'homogénéisation passent par une étape de localisation du champ de déplacement ou de contrainte loin des points où sont appliquées les conditions aux limites, c'est-à-dire là où les conditions de périodicité s'appliquent au mieux. Cette solution est dite intérieure et n'est en général pas compatible avec n'importe quelles conditions de bords aux extrémités du milieu. L'effet de bord également appelé solution

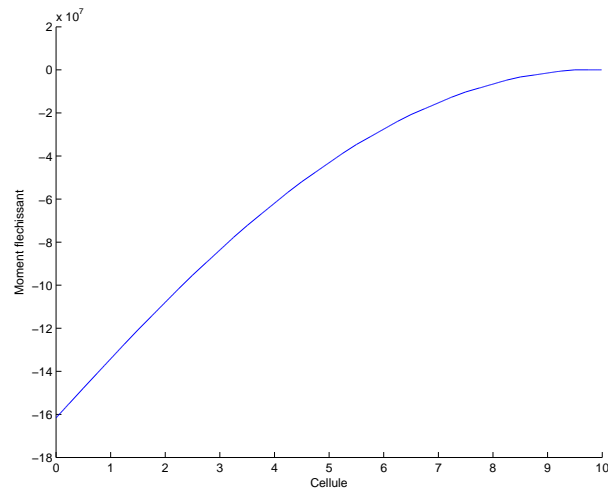


FIGURE 3.27 – Moment fléchissant sur une poutre longitudinale dans le cas où les éléments transverses sont plus souples.

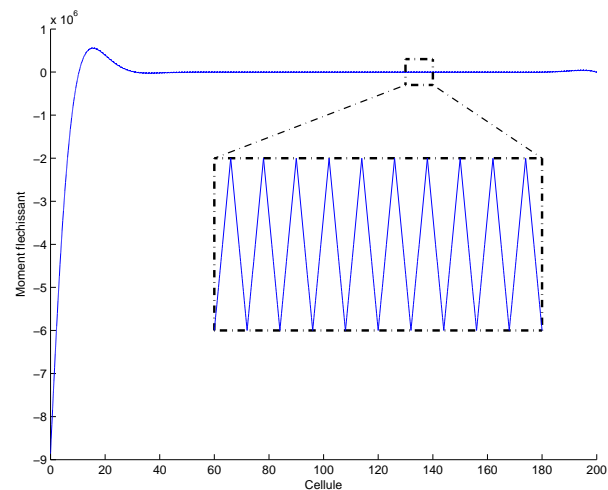


FIGURE 3.28 – Moment fléchissant sur une poutre longitudinale dans le cas où les éléments transverses sont plus souples et en considérant 200 cellules.

extérieure est composé d'un champ de couche limite localisé au voisinage des extrémités et d'une solution prenant en compte la périodicité. L'effet de couche limite décroît normalement rapidement. Diverses approches ont été développées dans la littérature pour prendre en compte l'effet local de couche limite et les perturbations dans les milieux périodiques [37] :

- La première méthode consiste à utiliser un modèle complet décrivant finement la micro-structure à proximité des bords de la structure et un modèle macroscopique équivalent partout ailleurs. Dans cet esprit, on peut citer les travaux de Panasenko [96, 97] et ceux de Ben Dhia *et al.* [7, 8].

3.8. Structures possédant des éléments transverses souples et effets de bord

- Une autre méthode passe par l'introduction d'un deuxième développement asymptotique vérifiant les conditions aux limites du problème [103, 51, 50, 52, 5, 70].
- Dans une troisième approche, on utilise le modèle macroscopique équivalent sur tout le domaine tout en définissant des conditions aux limites macroscopiques appropriées [29, 64, 117, 55, 53, 28, 37].

Dans ce travail, aucune de ces méthodes de régularisation n'a été mise en place.

Chapitre 3. Application de la méthode d'homogénéisation et validation

Chapitre 4

Prise en compte des déformations libres

Sommaire

4.1 Cas de l'homogénéisation tridimensionnelle	72
4.2 Problème d'homogénéisation périodique avec déformation libre pour des structures à périodicité unidirectionnelle	73
4.3 Résultats numériques et validations	75

Comme on le verra en partie 2, l'axonème se courbe du fait des actions combinées des moteurs moléculaires, qui assurent le glissement relatif des doublets externes, et des liens élastiques qui, en reliant les deux doublets externes de chaque paire, convertissent ce cisaillement en courbure.

La structure biologique est mise en mouvement par des "actionneurs biologiques", véritables micromoteurs qui exercent des efforts intérieurs dans la structure, ce qui induit une déformation de la structure dans son ensemble et permet sa mobilité. Il est évident que ces efforts intérieurs sont toujours globalement en équilibre et l'un des procédés, proche d'ailleurs du mécanisme biologique, est de considérer que les actionneurs biologiques exercent des "déformations libres", analogues aux déformations libres d'origine thermique.

Contrairement à la déformation thermique, induite par un champ de température qui peut diffuser dans la structure, on peut considérer que les déformations libres d'origine biologique sont imposées par les actionneurs de façon très rapide par rapport au temps caractéristique correspondant au mouvement de la structure. La localisation de ces actionneurs est bien connue ainsi que leur mode d'action. L'énergie injectée dans les actionneurs ainsi que la réponse au stimulus de ces actionneurs dépendent bien entendu du temps. Toutefois dans tout ce qui suit, on supposera que l'énergie des actionneurs induit des déformations libres supposées connues et

l'on ne considèrera que la déformée statique obtenue après stabilisation. Les actionneurs étant en grand nombre dans la structure, à raison de plusieurs actionneurs par période, il est nécessaire de mettre au point un processus d'homogénéisation spécifique pour déduire les "déformations libres" macroscopiques des déformations libres microscopiques (supposées connues) et des propriétés élastiques de la structure. Ce problème serait résolu si ces déformations libres étaient homogènes, mais c'est loin d'être le cas, les actionneurs étant au contraire localisés dans une partie réduite de la cellule périodique. Ce chapitre est donc consacré à la présentation de la méthode permettant de déduire les déformations libres macroscopiques des déformations libres microscopiques. Ce problème a déjà été abordé surtout dans le cadre thermoélastique [105, 49, 90, 91, 92] et est adapté ici dans le cadre de structures a priori plus complexes que celles déjà étudiées, en particulier en ce qui concerne les symétries de la cellule de base.

4.1 Cas de l'homogénéisation tridimensionnelle

Nous considérons de nouveau le problème exposé au chapitre 2 et posé sur la cellule de base de la figure 2.2. Nous supposons maintenant qu'il existe dans la cellule des déformations libres supposées connues notées $\underline{\underline{\varepsilon}}_f$. Le champ de déformation dans la cellule peut se décomposer classiquement selon :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}_f = \underline{\underline{\text{grad}}}^s(\underline{u}_{cel}(\underline{x})) \quad (4.1)$$

où $\underline{u}_{cel}(\underline{x})$ est le déplacement solution du problème de cellule.

Le problème mécanique posé sur la cellule de base s'écrit dans le cas du problème périodique à périodicité tridimensionnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}})(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{a}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\underline{x}) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}(\underline{x}) + \underline{\underline{\text{grad}}}^s(\underline{u}_{per}(\underline{x})) = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}_f \\ \underline{u}_{per}(\underline{x}) = \underline{u}_{per}(\underline{x} + l\underline{e}_1 + h_2\underline{e}_2 + h_3\underline{e}_3) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{per}^- \end{array} \right. \quad (4.2)$$

La solution de ce problème est évidemment somme de la solution correspondant à la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ et de la solution à déformation macroscopique nulle et à déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}_f$ imposée. Le premier problème a fait l'objet du chapitre 2 et le second problème peut

4.2. Problème d'homogénéisation périodique avec déformation libre pour des structures à périodicité unidirectionnelle

s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\sigma})(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{\sigma} = \underline{a}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}^e(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{grad}^s(\underline{u}_{per}(\underline{x})) = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}_f \\ \underline{u}_{per}(\underline{x}) = \underline{u}_{per}(\underline{x} + l\underline{e}_1 + h_2\underline{e}_2 + h_3\underline{e}_3) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{per}^- \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Le problème de cellule relatif à la déformation libre revient donc à appliquer les déformations libres sur la structure, les conditions aux limites étant périodiques. Dans ces conditions, il est alors possible de déterminer les efforts intérieurs à la structure et de calculer la contrainte macroscopique égale à la moyenne volumique des contraintes locales. La déformation élastique macroscopique est alors obtenue à partir des propriétés homogénéisées et par application de la loi de comportement élastique, la déformation libre macroscopique est alors égale à l'opposé de la déformation libre élastique.

Il est nécessaire, soit de calculer la moyenne de volume du tenseur des contraintes, soit de déterminer le torseur des efforts sur chaque face de la cellule. Seul cette démarche évite de recourir aux informations détaillées sur le maillage (fonctions d'interpolation, ...) pour déterminer la contrainte macroscopique.

4.2 Problème d'homogénéisation périodique avec déformation libre pour des structures à périodicité unidirectionnelle

4.2.1 Problème théorique

Le problème de détermination de la déformation libre décrit précédemment pour l'homogénéisation volumique peut s'étendre au cas de l'homogénéisation de poutre massive sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\sigma})(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{\sigma} = \underline{a}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}^e(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{grad}^s(\underline{u}_{per}(\underline{x})) = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}_f \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0 \\ \underline{u}_{per}(\underline{x}) = \underline{u}_{per}(\underline{x} + l\underline{e}_1) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{per}^- \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Comme précédemment, les efforts intérieurs induits au cours de l'application des déformations libres peuvent se calculer à partir des forces nodales réparties sur les bords périodiques de la cellule. La déformation libre peut alors se déduire comme précédemment à partir de la loi de comportement macroscopique.

4.2.2 Méthode de résolution

L'application de la méthode décrite ci-dessus a été testée sous la forme précédemment décrite. Les résultats sont satisfaisants pour des déformations libres qui induisent macroscopiquement une déformation axiale ou une courbure. Par contre, certaines déformations libres induisent un cisaillement macroscopique. Les résultats obtenus dans ce cas ne sont pas satisfaisants. De meilleurs résultats sont obtenus en remplaçant la condition de périodicité par une condition de bord encasté. Ainsi, la détermination de la déformation libre \underline{G}_f connaissant les déformations libres microscopiques $\underline{\underline{\varepsilon}}_f$ est réalisée par éléments finis sur la cellule de base selon la procédure suivante :

- Les bords périodiques $\partial\Omega_{per}^+$ et $\partial\Omega_{per}^-$ de la cellule sont encastés. Ceci assure $\underline{G}_\gamma = \underline{0}$.
- Les déformations libres microscopiques $\underline{\underline{\varepsilon}}_f$ sont imposées.
- Un bilan d'effort est réalisé sur une des faces périodiques. Ceci permet de calculer \underline{F} .
- La loi de comportement permet de déterminer \underline{G}_f :

$$\underline{G}_f = -\underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{F} \quad (4.5)$$

Connaissant \underline{G}_f , la définition des variables macroscopiques (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7) permet de déduire la cinématique d'une poutre encastée non chargée. En effet, dans ce cas, les efforts intérieurs sont nuls, ainsi que la déformation élastique. Il s'en déduit que la déformation de poutre est égale à la déformation libre. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1) = \Delta_f x_1 \\ u_2(x_1) = \gamma_{2_f} x_1 + \frac{1}{2} \chi_{3_f} x_1^2 \\ u_3(x_1) = \gamma_{3_f} x_1 - \frac{1}{2} \chi_{2_f} x_1^2 \\ \theta_1(x_1) = \chi_{1_f} x_1 \\ \theta_2(x_1) = \chi_{2_f} x_1 \\ \theta_3(x_1) = \chi_{3_f} x_1 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

4.3 Résultats numériques et validations

Dans ce paragraphe, il s'agit de comparer les déplacements de la poutre équivalente (de Timoshenko ou de Bernoulli) à ceux obtenus sur une structure (modèle éléments finis) en imposant des déformations libres microscopiques accompagnées ou non d'efforts externes.

4.3.1 Déformations libres sur une structure symétrique

Nous considérons une structure périodique, construite à partir de 10 cellules de base entièrement symétriques, représentée à la figure 3.4. Nous imposons successivement trois déformations libres différentes :

cas 1-a Les deux membrures subissent la même dilatation.

cas 2-a La membrure supérieure subit une dilatation alors que celle du bas est contractée. L'amplitude est identique.

cas 3-a La membrure supérieure subit une dilatation, la membrure inférieure n'est pas sollicitée.

Les résultats sont représentés sur la figure 4.1. On notera le bon accord entre les résultats obtenus d'une part sur les poutres équivalentes et d'autre part sur la structure complète.

4.3.2 Déformations libres imposées sur une structure non symétrique. Couplage traction-flexion

La cellule de base de la structure considérée est représentée à la figure 3.4. Le module d'Young de la membrure supérieure est inférieur à celui de la membrure inférieure, ce qui induit un couplage traction-flexion. Cette structure est sollicitée par des déformations libres microscopiques correspondant au cas 3-a.

Les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.2. On observe de nouveau que les déplacements calculés sur la structure complète sont très proches de ceux calculés sur les poutres équivalentes.

4.3.3 Déformations libres sur une structure non symétrique. Couplage traction-cisaillement

La structure étudiée est obtenue par 10 répétitions de la cellule de base représentée à la figure 3.15. On étudie trois sollicitations :

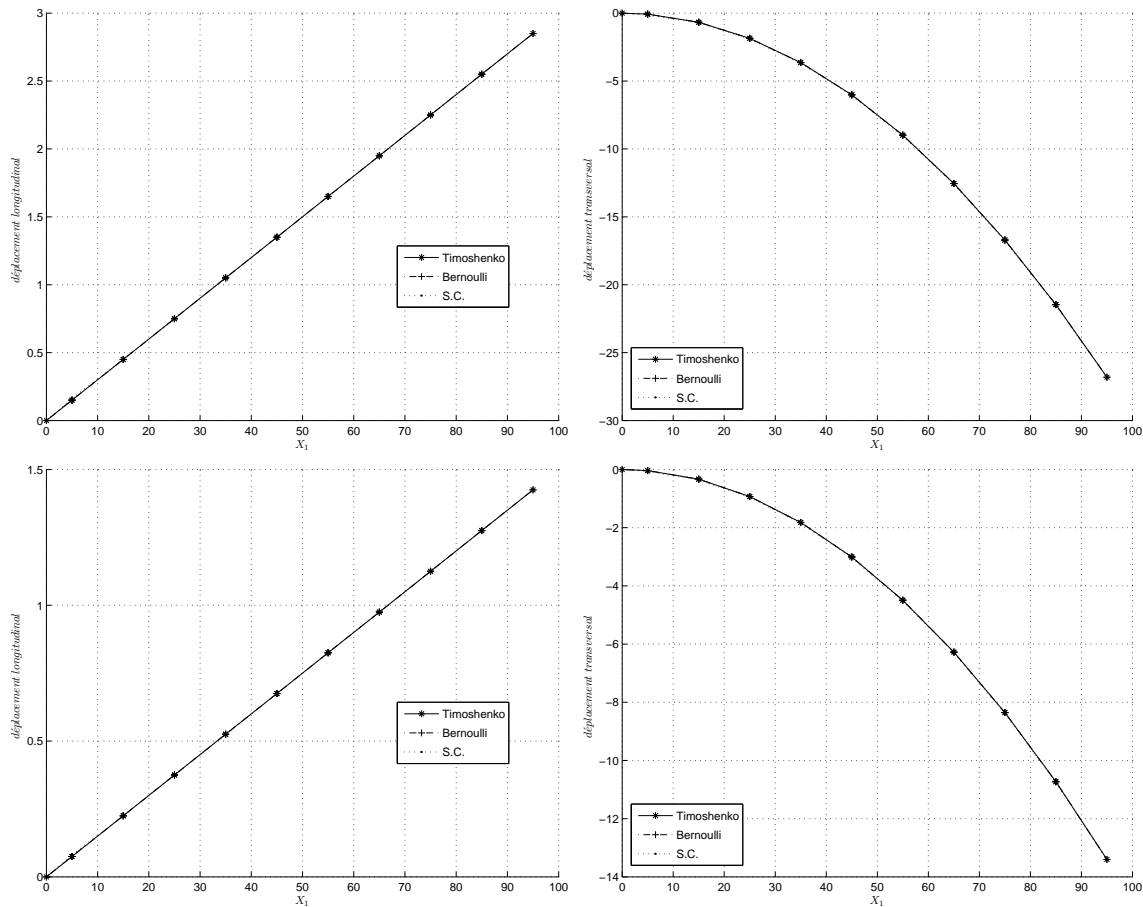


FIGURE 4.1 – Comparatif des déplacements : déplacement longitudinal du cas 1-a en haut à gauche ; déplacement transversal du cas 2-a en haut à gauche ; déplacement longitudinal du cas 3-a en bas à gauche ; déplacement transversal du cas 3-a en bas à gauche

cas 1-b les deux membrures subissent la même dilatation.

cas 2-b la membrure supérieure subit une dilatation, la membrure inférieure n'est pas sollicitée.

cas 3-b seule la barre diagonale est dilatée.

Le cisaillement ayant une large contribution aux déplacements présentés, les résultats obtenus (voir figure 4.3) avec la cinématique de Bernoulli sont par conséquent peu interprétables.

La poutre équivalente de Timoshenko donne des résultats satisfaisants, sauf dans le dernier cas où l'écart entre le calcul sur la poutre homogénéisée et sur la structure réelle est de l'ordre de 20%. Il est à noter que dans ce cas, la déformation libre macroscopique équivalente présente essentiellement une composante de cisaillement. Il semble donc que ce type de déformation libre présente des difficultés spécifiques pour l'application de la méthode proposée.

4.3. Résultats numériques et validations

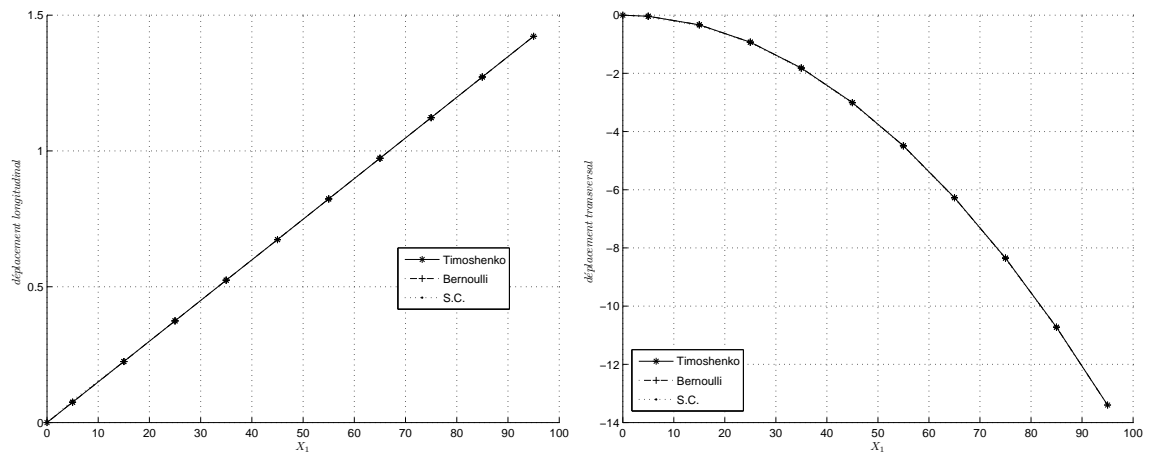


FIGURE 4.2 – Comparatif des déplacements : déplacement longitudinal du cas 3 (gauche) ; déplacement transversal du cas 3-a (droite)

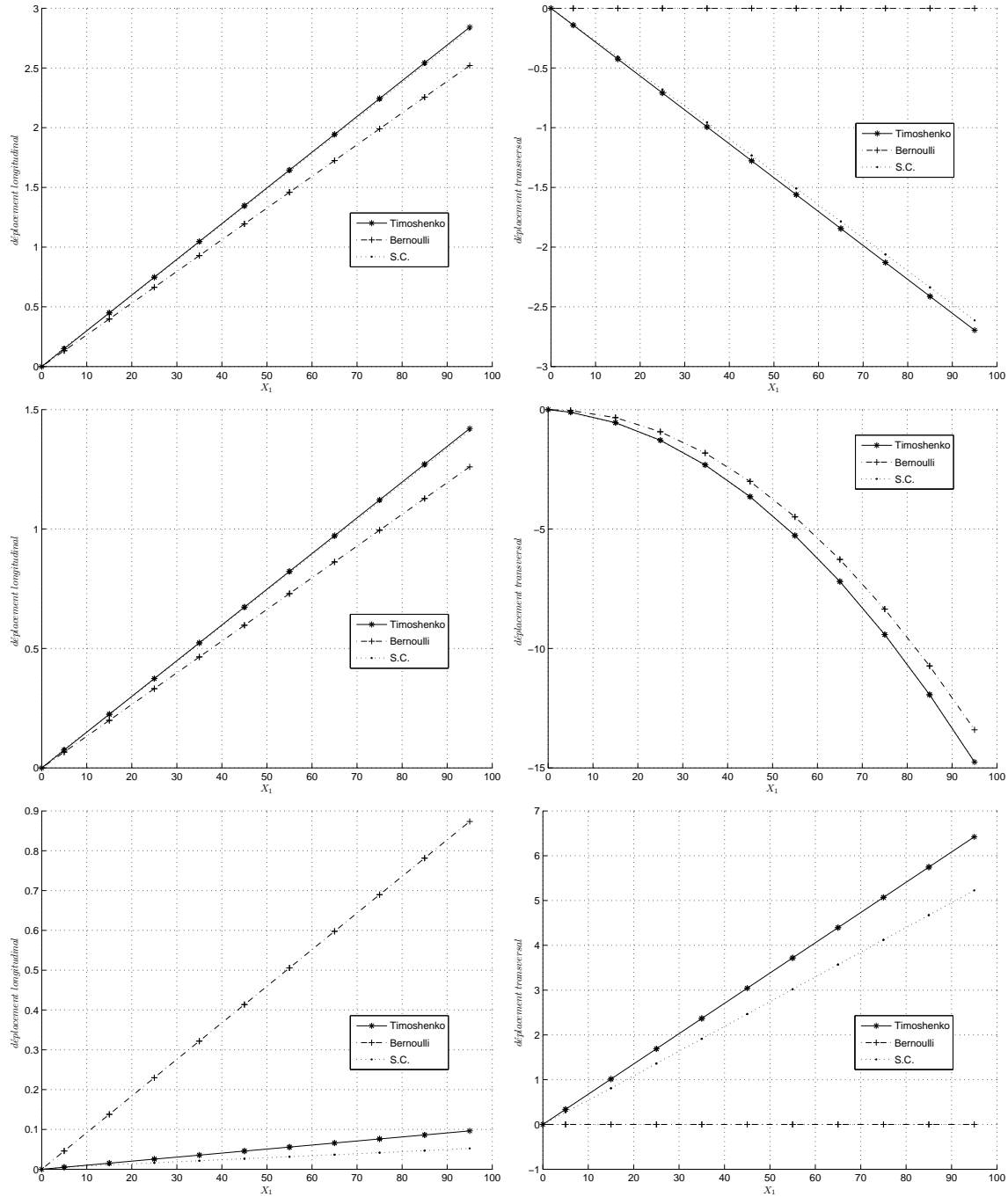


FIGURE 4.3 – Comparatif des déplacements : de haut en bas : cas 1-b, cas 2-b et cas 3-b ; de gauche à droite : déplacement longitudinal et transversal

Deuxième partie

Application à l'axonème

Introduction

Cette seconde partie est consacrée à l'étude de la structure de l'axonème qui constitue l'organe moteur du flagelle des cellules eucaryotes et des cils vibratiles.

Du point de vue du mécanicien, l'axonème est constitué d'un cylindre de 9 poutres (9 génératrices de ce cylindre) considérées comme incompressibles et inextensibles au regard des contraintes physiologiques qu'elles subissent et de leurs propriétés mécaniques. Ces poutres sont reliées deux à deux par des moteurs moléculaires perpendiculaires à leur grand axe (les bras de dynéine) qui engendrent leur glissement relatif, et par des liens élastiques, parallèles aux bras de dynéine (les liens de nexine) qui participent à la conversion de leur glissement relatif en courbure. Ces 9 poutres sont reliées à l'axe central du cylindre (modélisé comme une poutre) par les ponts radiaires. Les bras de dynéine, les liens de nexine et les ponts radiaires sont distribués périodiquement le long de chacune des poutres, tant et si bien que l'on peut considérer que l'axonème est construit par la répétition axiale d'un motif architectural unique, que l'on appellera "cellule de base" dans la suite de ce mémoire. La longueur des cellules élémentaires est égale à 96 nm, en raison des périodicités biologiques des divers appendices portés par les doublets externes.

En considérant la structure complète composée de 30 à 50 cellules, en modélisant l'activité des bras de dynéine qui créent des efforts internes à la structure et en calculant les déformations qu'ils induisent par la méthode des éléments finis, nous avons obtenu des résultats importants qui ont trait à l'aspect mécanique de la régulation des moteurs moléculaires au cours du battement axonémal *in situ*. Nous avons vérifié les hypothèses fondées sur l'analyse d'observations biologiques et rapportées dans la littérature et selon lesquelles les doublets externes autour du cylindre axonémal peuvent être impliqués dans la régulation des moteurs de dynéine. Ce mécanisme théorique est connu sous le nom d'"embrayage géométrique" [74]. En revanche, nous démontrons que ces déplacements sont symétriques de ceux qui ont été décrits dans ce modèle. Ces résultats obtenus à partir de courbures de faible amplitude nous permettent de proposer un cycle mécanique de régulation du battement axonémal qui intègre une cascade d'allumage des moteurs de dynéine. Ils sont soumis pour publication dans "The Journal of Theoretical Biology"

[47].

Les objectifs de ce travail sont les suivants :

- La structure de l’axonème, comme de nombreuses structures biologiques, est extrêmement complexe. Un premier objectif est donc de proposer une modélisation de la structure de l’axonème sous une forme suffisamment fine pour conserver les principales caractéristiques physiques de la structure et suffisamment simple pour en permettre la modélisation numérique. Cette structure modélisée sera constituée d’un ensemble périodique de poutres et barres. On s’attachera en particulier à mettre en place un système de moteurs internes traduisant le glissement relatif des 9 doublets (poutres longitudinales).
- Un deuxième objectif est alors de qualifier la modélisation adoptée. Pour ce faire, l’étude d’un segment du modèle proposé doit permettre de mettre en évidence le rôle structural des différents éléments biologiques qui constituent l’axonème. On sera notamment amené à préciser en vue de leur application certaines hypothèses communément admises en biologie.
- Un troisième objectif est d’ouvrir la voie pour la modélisation de la structure réelle qui comprend un grand nombre de cellules périodiques. Pour ce faire, la méthode développée en partie 1 sera appliquée à la structure biologique et les résultats de l’homogénéisation seront testés.

Ainsi, cette seconde partie est structurée en trois chapitres. Dans le premier, on présente une synthèse sur la biomécanique de l’axonème et on déduit une modélisation par éléments finis de la structure de celui-ci. Dans le chapitre 6, nous étudions la déformation d’un modèle de dimensions réduites de l’axonème sous l’effet d’efforts externes et internes. Cette étude permet de préciser certaines hypothèses communément admises en biologie. Enfin, le chapitre 7 est consacré à l’application de la méthode d’homogénéisation à la structure axonémale ; les déformations libres imposées par le fonctionnement des moteurs internes sont prises en compte. Les résultats de la méthode d’homogénéisation sont testés sur une structure comportant un grand nombre de périodes.

Chapitre 5

Biomécanique de l'axonème et construction d'un modèle numérique adapté

Sommaire

5.1 Contexte biomécanique	83
5.2 Modélisation de l'axonème	93

Dans ce chapitre, nous présentons des données biomécaniques concernant l'axonème ainsi que le modèle simplifié qui en a été déduit.

5.1 Contexte biomécanique

Les cils et les flagelles (cf. fig. 5.1) des cellules eucaryotes² sont des organites³ différenciés à la surface des cellules spécialisées. Ils sont très différents des flagelles bactériens tant sur le plan architectural que sur le plan fonctionnel. Ils sont mus par une structure axiale, l'axonème, qui est ancrée sur un corp basal, implanté dans le cytoplasme cortical de la cellule. Les cils ont une longueur de l'ordre du μm . Les flagelles mesurent plusieurs dizaines de μm de long. Le diamètre de l'axonème est voisin du $\frac{1}{4}$ de micron quelle que soit sa longueur.

2. Cellules biologiques possédant un noyau par opposition aux cellules procaryotes.

3. Les organites désignent différentes structures spécialisées contenues dans le cytoplasme, c'est-à-dire le contenu d'une cellule vivante.

Les flagelles sont appareils de nage des cellules qui les portent (spermatozoïdes, protistes). On dénombre en général de 1 à 2 flagelles sur une cellule. Les cils constituent une "couverture ciliaire" et induisent le déplacement de substances autour de la cellule (cils bronchiques) ; si la cellule est isolée (protiste [pamaméciciel]), alors sa couverture ciliaire lui permet de se mouvoir dans son milieu.

Hormis leur différence de longueur et leur nombre, la principale différence entre ces deux or-

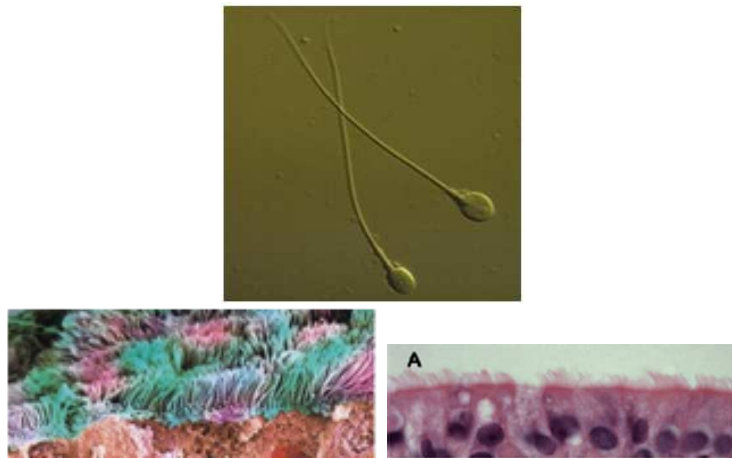


FIGURE 5.1 – En haut nous avons des spermatozoïdes (photo prise d'une ressource internet) et en bas des cils bronchiques [95]

ganelles est liée aux types de battements qu'ils génèrent chacun, alors que leurs structures sont homologues, voire identiques (cf. figure 5.2). Certains protistes flagellés sont capables de faire battre leur appendice soit comme un flagelle soit comme un cil en fonction des conditions de milieu. Ceci démontre que les processus de régulation de la machinerie axonémale est complexe.

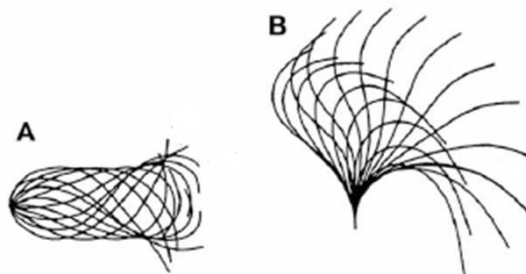


FIGURE 5.2 – Battement flagellaire (à gauche) et ciliaire (à droite) [78]

5.1.1 Structure et fonctionnement de l'axonème "9+2"

L'axonème est formé de 3, 6 ou 9 doublets de microtubules externes. Ce nombre correspond au nombre de triplets de microtubules présents dans le corps basal dont ils assurent la continuité. L'axonème "9+2" (qui est le modèle sur lequel nous avons travaillé) est formé de 9 doublets de microtubules externes et de deux microtubules centraux (cf. fig. 5.3), d'où son nom. Les 2 microtubules centraux organisent l'appareil central dont la fonction est *a priori* régulatrice. Il a d'abord été proposé théoriquement puis démontré expérimentalement que c'est en glissant les uns par rapport aux autres que les 9 doublets de microtubules externes induisent la courbure de l'axonème [79, 59, 21, 75, 121].

Les doublets externes sont constitués de deux microtubules (cf. fig. 5.6, 5.4 et 5.5) [79, 65, 59, 101, 2, 3] composés chacun de 9 à 15 protofilaments [2, 3]. Chaque protofilament est formé par un enchaînement périodique de dimères polarisés de tubuline- α et de tubuline- β (fig. 5.6). Comme les protofilaments sont tous parallèles au sein de la paroi d'un microtubule, et que les dimères de tubulines sont des entités indissociables, chacune des tubuline- α et des tubulines- β sera exprimée à l'une des extrémités d'un microtubule. Pour des raisons liées aux équilibres d'assemblage des dimères de tubuline α et β aux deux extrémités d'un microtubule, l'extrémité " α " du microtubule sera baptisée "bout moins"; son extrémité " β " sera baptisée "bout plus". Puisque les doublets externes sont parallèles et orientés au sein de l'axonème, leurs "bout moins" et leurs "bout plus" seront orientés respectivement vers la base et l'extrémité libre de l'organelle. D'un point de vue mécanique, les microtubules - par conséquent les doublets qu'ils constituent - sont inextensibles et incompressibles au regard des efforts qu'ils subissent *in situ*; leur module d'Young est proche de celui du plexiglas [56, 60] soit environ 2.380 MPa.

Les doublets externes sont reliés deux à deux par deux rangées de bras de dynéine (OA (pour "outer arm") et IA (pour "inner arm") figure 5.3) et par les liens de nexine (non représentés sur la figure 5.3). Les premiers sont des moteurs moléculaires responsables du cisaillement des doublets externes. Les liens de nexine sont constitués d'une protéine élastique et participent à la conversion du cisaillement des doublets externes en courbure. La liaison entre les doublets externes et l'appareil central est assurée par les ponts radiaux (RS pour "Radial Spokes", fig. 5.3). Le rapport qui existe entre la structure et le mouvement (changements conformationnels) des moteurs moléculaires est maintenant bien documenté [59, 101, 32, 31, 33, 34] (fig. 5.7 et 5.8).

Ces appendices transverses essentiels sont distribués périodiquement le long des doublets externes et possèdent une fréquence spatiale propre. La périodicité des bras de dynéine externe est de 24 nm. Celle des bras de dynéine interne n'est pas aussi régulière; sur une longueur de

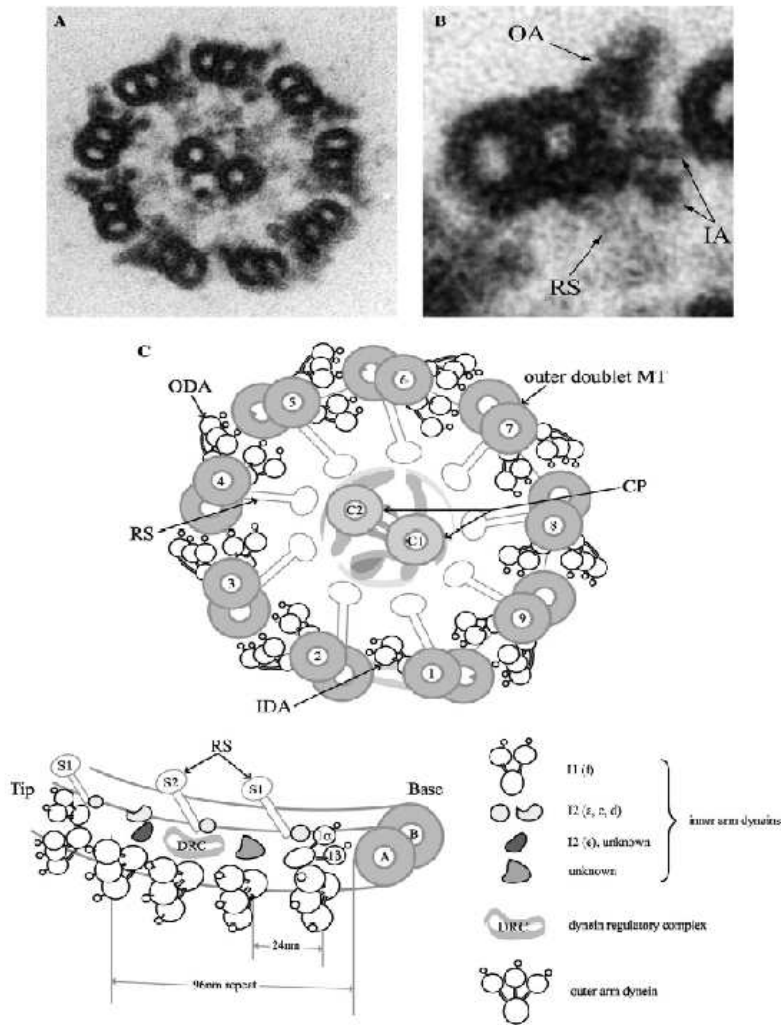


FIGURE 5.3 – (A) photo de la section de l'axonème. (B) zoom sur un doublet. (C) schéma de la section de l'axonème et des périodicités des appendices dont les dénominations sont les suivantes : RS : ponts radiaires ; CP : appareil central, DRC : complexe de régulation de dynéine ; OA : bras de dynéine externe ; OI : bras de dynéine interne. Les doublets sont numérotés de 1 à 9. Les liens de nexine n'apparaissent pas sur ce schéma. [101]

96 nm, 4 bras internes sont espacés respectivement de 24, 32 et 40 nm. Les liens de nexine possèdent une périodicité de 96 nm. Les ponts radiaires ont une périodicité très voisine de celle des bras de dynéine internes. Puisque la périodicité la plus grande des appendices portés par les doublets externes est égale à 96 nm, nous avons choisi de modéliser l'axonème comme une succession de "cellules de base" d'une longueur égale à 96 nm. En regardant l'axonème du pôle basal vers son extrémité, on peut numérotter les doublets externes de 1 à 9 dans le sens des

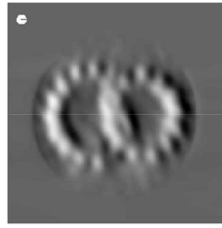


FIGURE 5.4 – Reconstruction d'un doublet externe. Ceci fait bien apparaître la distinction des différents protofilaments et la structure des différents microtubules. Par définition le microtubule ayant la forme d'un C (celui de gauche) est nommé B tandis que celui qui est "complet" est nommé A. [111]

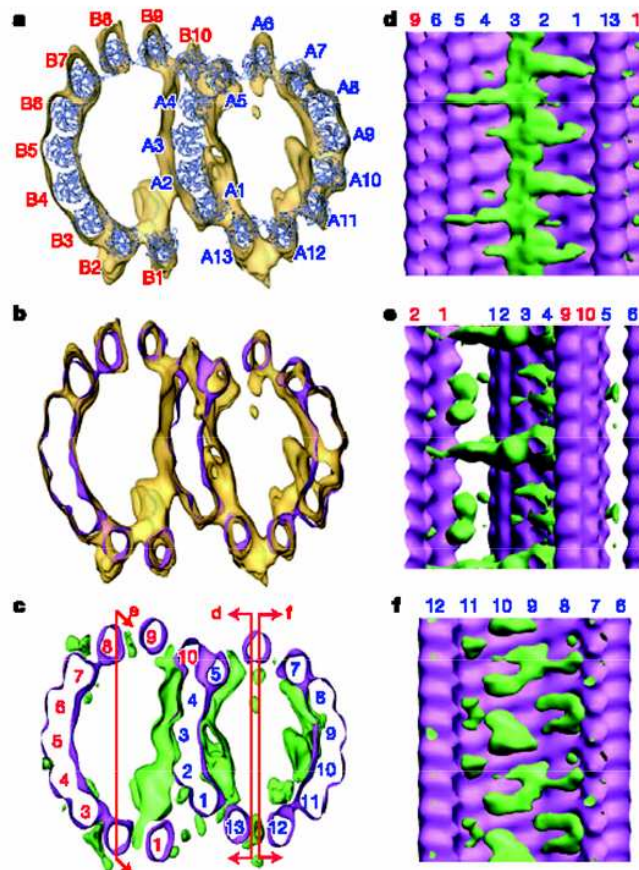


FIGURE 5.5 – Schémas d'interprétation de la structure d'un doublet externe. La colonne de gauche correspond à la vue de face, la colonne de droite à la vue tangentielle. Les taches vertes correspondent aux protéines rattachant les protofilaments entre eux. [111]

aiguilles d'une montre. Dans ces conditions, et pour utiliser une analogie anthropique, les bras

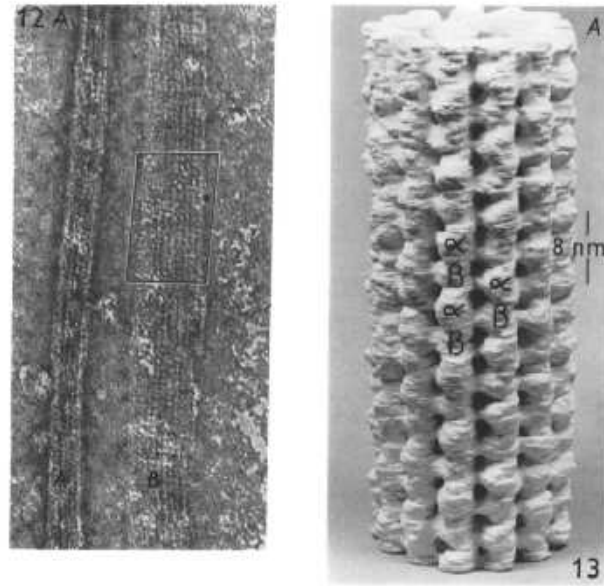


FIGURE 5.6 – A gauche : cliché d'un microtubule. A droite : reconstruction de celui-ci montrant la polarité α et β des dimères de tubuline le long des protofilaments [1]

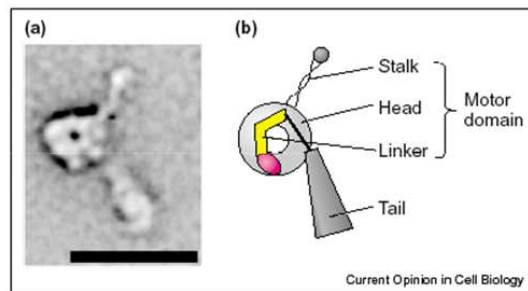


FIGURE 5.7 – (a) Electronographie d'un bras de dynéine interne. (b) schéma interprétatif de sa structure. [94]

de dynéine ont chacun leur épaule fixée sur le doublet externe de rang N et leur main se lie à la tubuline- β du doublet N+1.

Certains auteurs comme Holwill [68], ont proposé que les efforts transmis par les bras de dynéine soient polarisés. D'autres auteurs suggèrent que ces efforts peuvent être dirigés selon les deux polarité [22, 76]. Le modèle de Holwill est cohérent avec les expériences dites de "splitting". Il a été observé que, si les liens élastiques et les ponts radiaux sont hydrolysés et que l'axonème est placé en suspension dans une solution qui permet aux moteurs de dynéine d'être actifs, les doublets glissent les uns sur les autres, toujours selon la même polarité ; l'axonème se désorganise à la manière d'une antenne télescopique [121] (fig. 5.9).

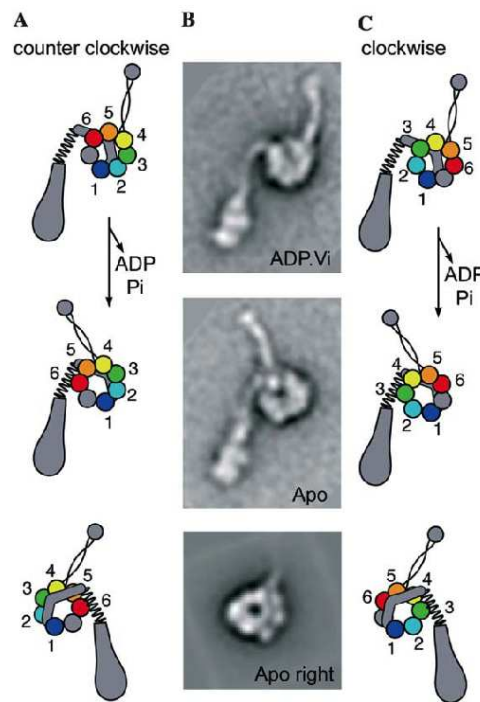


FIGURE 5.8 – *Modèle de fonctionnement des bras de dynéine. La grosse extrémité (Tail) correspond à l'accroche sur le microtubule B et la fine tige (Stalk) correspond à la partie du moteur en mouvement qui se fixe sur le microtubule A du doublet voisin. [34, 33]*

Comme la structure de l'axonème est polarisée, puisque fonction de l'orientation des doublets externes, il faut imaginer que les bras de dynéine sont tous orientés de la même façon autour du cylindre axonémal et qu'ils propulsent le doublet qui les porte vers le pôle basal - le bout moins - du doublet sur lequel ils s'agrippent. Ce fonctionnement polarisé n'est pas sans conséquences en raison de l'organisation cylindrique des doublets externes [45] : si tous les moteurs fonctionnent autour du cylindre axonémal selon la même polarité et la même amplitude, aucune courbure ne peut être observée. Le corollaire de cette assertion étant que pour qu'une courbure soit créée, il est nécessaire que les activités des moteurs soient différentes sur les demi cylindres séparés par le plan de battement de l'axonème. Ainsi selon Holwill, si le plan de battement contient le doublet 1 et le milieu de la paire 5-6 (fig. 5.3), les doublets 1→4 et 6→9 seront alternativement actifs et inactifs au cours du battement. En revanche, si les bras de dynéine peuvent produire des forces dans les deux directions, ils produisent des efforts opposés sur les deux faces opposées de l'axonème.

Ceci pose inéluctablement la question de savoir quels sont les mécanismes qui régulent cet équilibre qui se produit à la fréquence de battement des flagelles et des cils qui peut voisiner les 100

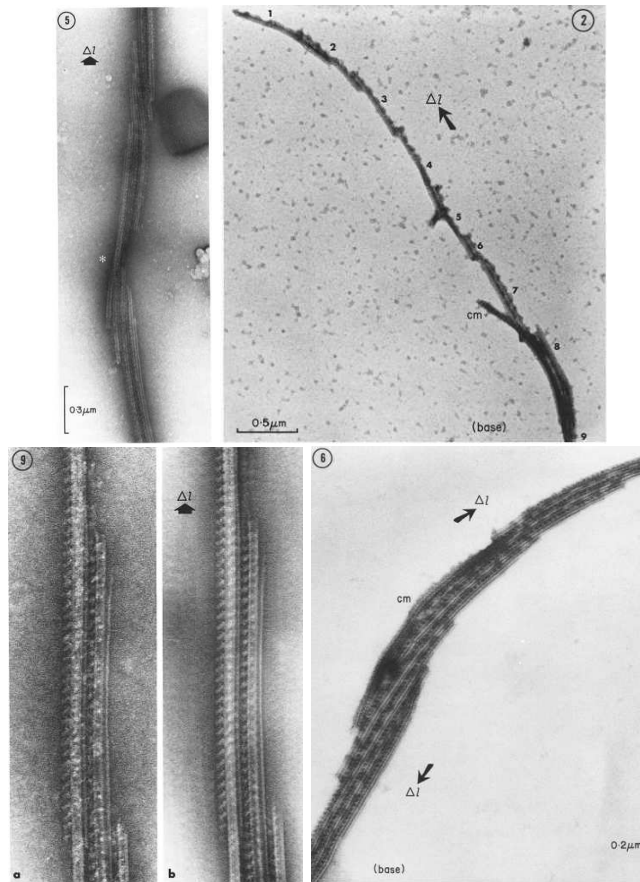


FIGURE 5.9 – Observation du glissement des doublets les uns sur les autres quand les moteurs fonctionnent en l'absence des liaisons transverses [121]

Hz.

Un modèle très intégré, établi à partir de données structurales de l'axonème et connu sous le nom d'embrayage géométrique a été proposé par Charles Lindemann (fig. 5.10 et 5.11) [73, 123]. Le postulat fondamental de ce modèle est que les tensions longitudinales qui s'exercent le long des doublets externes au cours du battement sont converties en tensions transversales, perpendiculaires à l'axe des doublets. Ceci aurait pour conséquence de changer la distance inter-doublet de façon ordonnée en fonction de la progression du train d'onde généré par l'axonème lui-même sur ses deux faces opposées délimitées par le plan de courbure. En se plaçant dans le principe d'Holwill, au dessus d'un certain seuil de distance, les bras de dynéine se décrochent du doublet sur lequel ils s'agrippent ; au-dessous de ce même seuil, ils deviennent opérationnels [46]. Le même raisonnement peut être tenu pour expliquer le changement de polarité de fonctionnement des bras de dynéine.

Des données expérimentales et théoriques montrent que chez certaines espèces, la torsion de

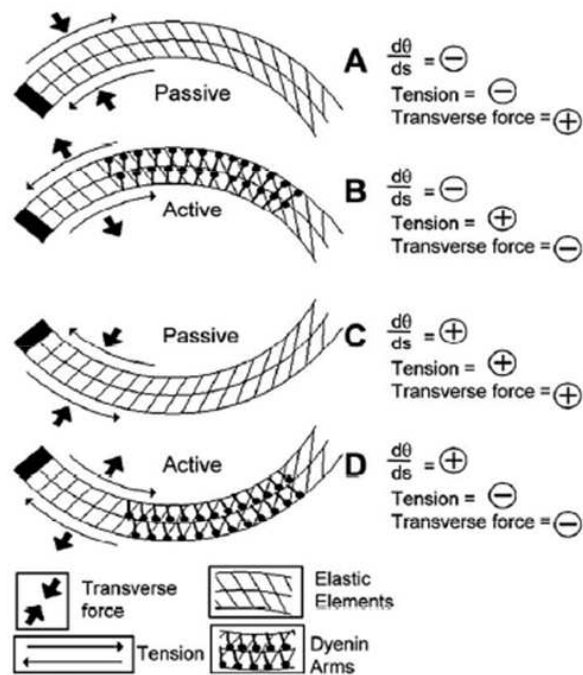


FIGURE 5.10 – Modèle de l’embrayage géométrique. [78]

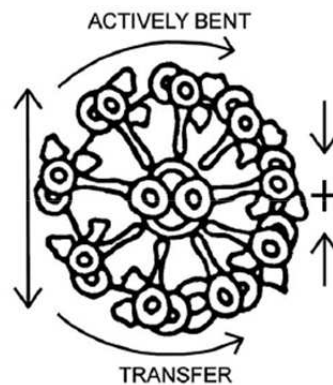


FIGURE 5.11 – Mouvement inter-doublet engendrant des changements de probabilité d’accroche des bras de dynéine (embrayage géométrique). [78]

l’appareil central (figure 5.12) est corrélée à la courbure de l’axonème et pourrait être l’un des éléments de régulation de la machinerie axonémale [86]. Il a été proposé que les liens de nexine soient impliqués dans un cycle mécanique en gardant une longueur finie [41]. Les ponts radiaux seraient des "palpeurs" (fig. 5.13) qui permettraient à l’axonème de connaître son état de courbure local instantané [43].

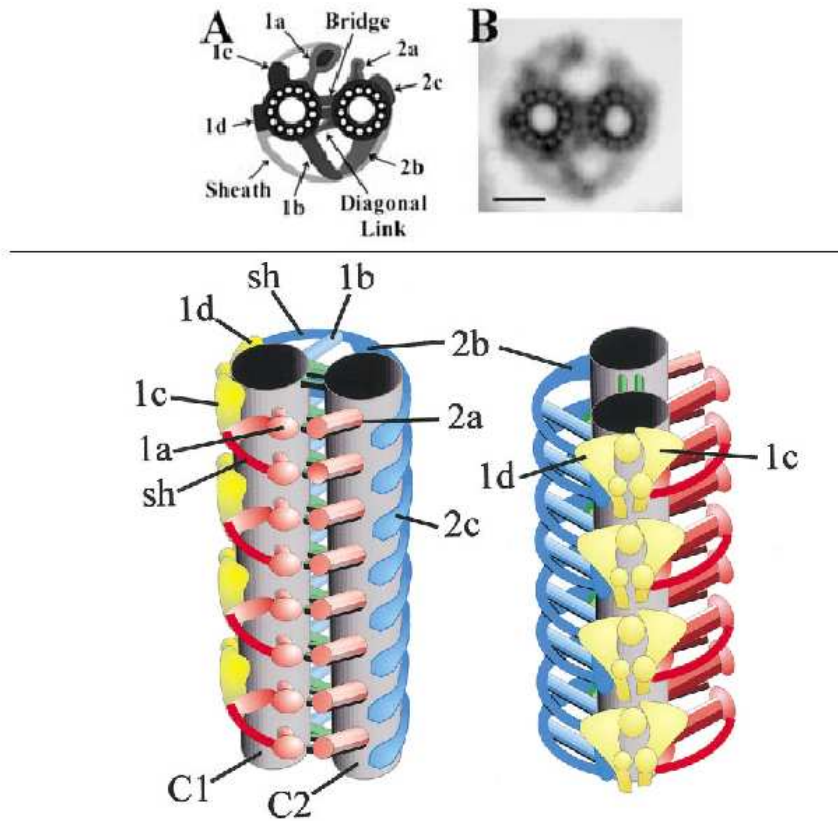


FIGURE 5.12 – Photo et schémas de l'appareil central. [85]

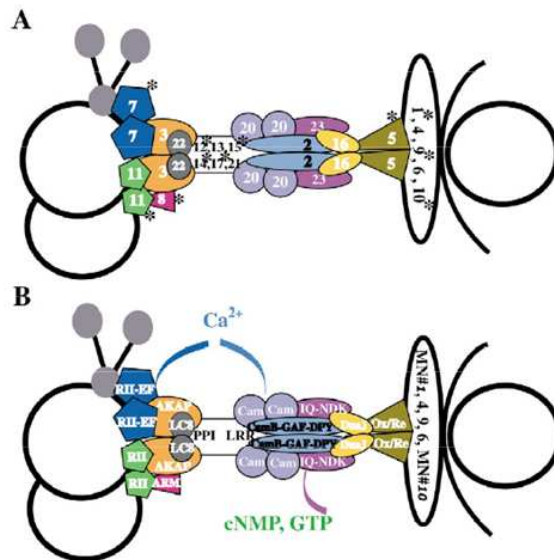


FIGURE 5.13 – Schémas de la structure d'un pont radiaire. [122]

5.1.2 Objectif de notre travail

En modélisant les interactions qui existent entre les protofilaments on peut calculer les propriétés élastiques d'un doublet externe (module d'Young) ainsi que ses moments d'inertie selon ces deux plans principaux [106] (figure 5.14). Ces valeurs théoriques sont compatibles avec les données expérimentales obtenues depuis [114]. A partir de ces valeurs, Cibert et Heck [44] ont montré, par la méthode des éléments finis que, lorsque l'axonème se courbe, les doublets externes sont soumis à des courbures déviées qui contribuent à la modification de leur distribution spatiale au sein même du cylindre axonémal comme le prédit le modèle de l'embrayage géométrique proposé par Charles Lindemann.

Cependant, dans ce travail, les doublets sont libres parce que l'ensemble des liaisons élastiques

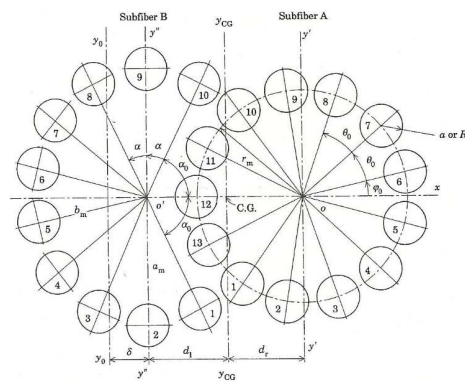


FIGURE 5.14 – Modélisation de la section des doublets retenus par Schoutens [106]

transverses est ignoré. Or, il semble évident que les liaisons inter-doublets (bras de dynéine et liens de nexine), comme les ponts radiaires qui unissent chaque doublet à l'appareil central, contribuent à propager les efforts de quelque nature qu'ils soient au sein de l'axonème et contribuent aux modifications conformationnelles de l'axonème.

C'est ce que nous avons tenté de démontrer dans ce travail.

5.2 Modélisation de l'axonème

S'il est facile d'énoncer ce problème, la complexité architecturale de l'axonème rend la tâche quasiment impossible, puisqu'on ne connaît pas (ou très mal) l'ensemble des propriétés mécaniques des éléments structuraux de l'axonème. C'est donc en construisant un modèle simplifié de l'axonème que nous sommes parvenus à obtenir des résultats significatifs, évidem-

ment entachés des erreurs que nous avons commises en retenant comme essentiels certains des éléments structuraux de l'axonème.

5.2.1 Modélisation des doublets et de l'appareil central

Les doublets externes sont modélisés par des poutres dont les inerties sont égales à $I_y = 3,558.10^4 nm^4$ et $I_z = 5,310.10^4 nm^4$ [106, 44] dans leurs deux plans principaux. L'appareil central est modélisé par une poutre dont les moments d'inertie sont égaux à $I_y = 7,12.10^4 nm^4$ et $I_z = 23,2.10^4 nm^4$ dans les deux plans principaux [106, 44].

Par simplification, nous avons choisi de ne pas considérer chacun des appendices portés par les doublets externes, mais de modéliser, sur les 9 doublets inclus dans une cellule de 96 nm de long, les 4 sous-ensembles qu'ils constituent par : un bras de dynéine interne, un bras de dynéine externe, un lien de nexine et un pont radiaire, chaque appendice ayant les caractéristiques mécaniques de l'ensemble des éléments qu'il remplace.

Pour lier chacun de ces appendices aux poutres qui remplacent les doublets externes, et conserver néanmoins l'enveloppe convexe d'un doublet externe, nous avons construit un ensemble de poutres rigides et centré sur l'axe d'inertie de chaque doublet externe (Fig. 5.15). Ce système permet de transmettre les efforts des appendices aux doublets externes, notamment les moments induits par les différents bras de levier.

Les noeuds 3, 4 et 5 de ce système sont respectivement les sites de fixation des bras de dynéine

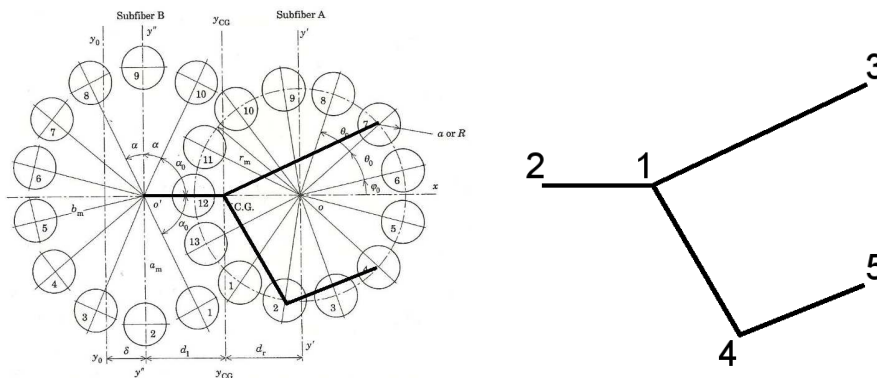


FIGURE 5.15 – Modélisation d'un doublet et numérotation

externes, des ponts radiaires et des bras de dynéine internes. Le noeud 2 est le site de fixation des bras de dynéine appartenant au doublet précédent. La position de ce noeud a été déterminée comme le lieu de convergence des bras de dynéine internes et externes tel qu'il est observé sur les coupes transversales d'un axonème.

Le module d'Young des poutres représentant les doublets externes, leur coefficient de Poisson

et leurs inerties de flexion sont issus de la littérature [106, 44, 114]. Les coefficients de cisaillement k_y et k_z sont égaux à 0,5, ce qui revient à assimiler chaque doublet externe à un cylindre creux. Les poutres formant le système d'ancrage transverse décrit plus haut ont une section circulaire pleine de 8 nm de rayon et sont suffisamment rigides pour limiter leur gauchissement. L'appareil central est modélisé comme une paire de poutres de section circulaire [120, 44].

5.2.2 Les bras de dynéine

Comme indiqué plus haut, les bras de dynéine sont les moteurs moléculaires qui génèrent le glissement relatif des doublets entre lesquels ils sont situés. Comme le montre la figure 5.8, l'une des hypothèses formulées pour expliquer la relation qui existe entre les modifications conformationnelles et la production d'une force par un bras de dynéine, correspond au déplacement oscillant de sa hampe. Il était difficile cependant de transcrire exactement ce mécanisme dans le contexte dans lequel nous nous sommes placés. Le schéma que nous avons retenus est décrit dans la figure 5.16.

Dans ce schéma, les poutres qui représentent les doublets externes et le système de poutres

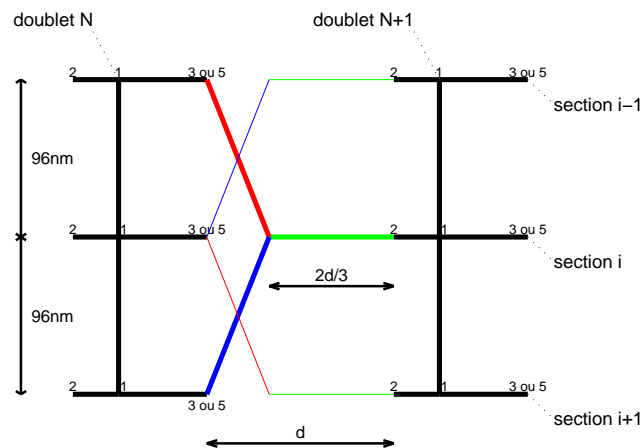


FIGURE 5.16 – Modélisation d'un moteur dynéique

perpendiculaires à l'axe du doublet externe, sur lequel les appendices sont liés, sont représentés en noir. L'intervalle qui sépare deux doublets contigus est égal à d . La longueur de hampe du moteur moléculaire, représentée en vert, mesure $\frac{2d}{3}$. Cette poutre est ancrée sur le nœud 2 du doublet externe voisin, et sur deux barres représentées en bleu et en rouge, ses actuateurs, dont

les dilatations coordonnées (déformations libres) permettent au bras de dynéine de produire des forces selon les deux polarités, et d'induire le déplacement relatif des deux doublets contigus. Les éléments de poutres ont une section circulaire pleine de 8 nm de rayon. Leur rigidité est suffisamment élevée pour assurer une bonne transmission aux doublets des moments de flexion induits par les actuateurs. Le module d'Young de la hampe du moteur est équivalent à un ressort de raideur 0,47 pN.nm [76].

5.2.3 Liens de nexine et ponts radiaires

Les poutres qui modélisent les ponts radiaires et les liens de nexine ont des diamètres respectivement égaux à 8 nm et 4 nm. Les liens de nexine sont équivalents à des ressort de raideur $1,6 \cdot 10^{-5}$ pN.nm [77]. Le module d'Young des ponts radiaires a été choisi comme égal à celui des actuateurs des bras de dynéine.

5.2.4 Représentation d'une cellule de base du modèle complet

Les figures 5.17 et 5.18 représentent la modélisation d'une cellule de 96 nm de long, dont les caractéristiques mécaniques sont résumées dans les tableaux 5.1 et 5.2.

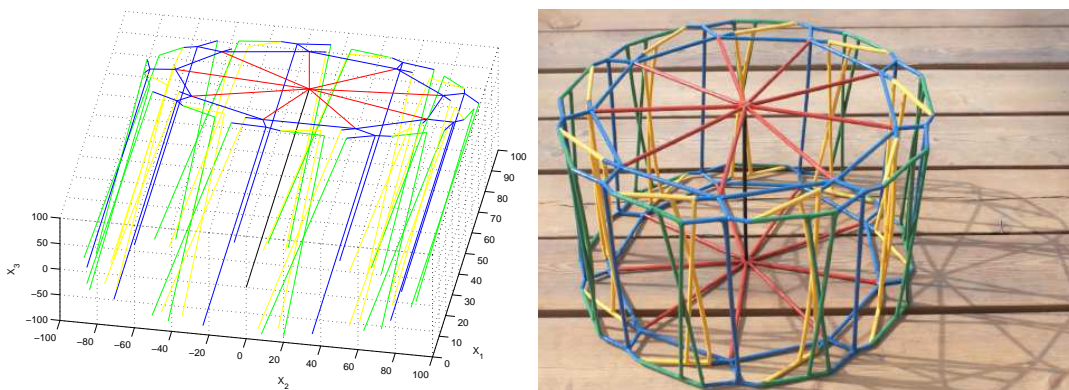


FIGURE 5.17 – Modélisation d'un monomère de 96nm. (Bleu : liens de nexine et doublets ; Jaune : moteurs dynéiques internes ; Vert : moteurs dynéiques externes ; Rouge : radials spokes ; Noir : appareil central)

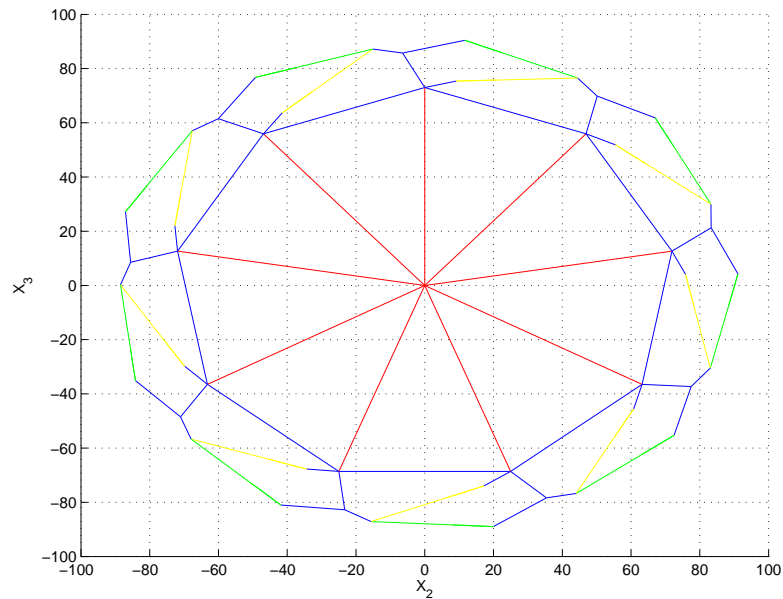


FIGURE 5.18 – Vue de face

	LN	PR	Actuateurs
E (pN.nm ²)	0,016	16	16
ν	0,3	0,3	0,3
S (nm ²)	50	200	4
J (nm ⁴)	400	6400	6400

TABLE 5.1 – Caractéristiques mécaniques des différents éléments barres. LN : Liens de Nexine ; PR : Ponts radiaires ; Actuateurs : Actuateurs des moteurs dynéiques

5.2.5 Courbure plane, activité des bras de dynéine et géométrie cylindrique de l'axonème

Les déformées du modèle que nous avons calculées dans la suite de ce mémoire, ont été obtenues soit en soumettant le modèle à un effort externe uniformément réparti sur toute sa longueur, soit en rendant actifs les bras de dynéine que nous avons modélisés de telle sorte qu'ils génèrent une courbure plane. Dans ce cas, du fait de la géométrie cylindrique de l'axonème, les efforts produits par les bras de dynéine ont été calculés en fonction de leur position dans le

	Doublets	SD	BD	AC
E (pN.nm ²)	2,0.10 ³	2,0.10 ³	0,5	1,6
ν	0,3	0,3	0,3	0,3
S (nm ²)	380	200	200	430
I_y (nm ⁴)	3,5.10 ⁴	3,2.10 ³	3,2.10 ³	7.10 ⁴
I_z (nm ⁴)	5,3.10 ⁴	3,2.10 ³	3,2.10 ³	23.10 ⁴
J (nm ⁴)	8,9.10 ⁴	6,4.10 ⁴	6,4.10 ⁴	30.10 ⁴
k_y	0,5	0,9	0,9	0,5
k_z	0,5	0,9	0,9	0,5

TABLE 5.2 – Caractéristiques mécaniques des différents éléments de poutres. Doublets ; SD : éléments de la section des doublets ; BD : éléments de poutres des moteurs dynéiques internes et externes ; AC : Appareil Central

cylindre axonémal et de l'orientation du plan de courbure (fig. 5.19), c'est-à-dire en fonction de la longueur de leur projection dans le plan de courbure attendu. Les valeurs numériques des coefficients de correction sont données dans la figure 5.20.

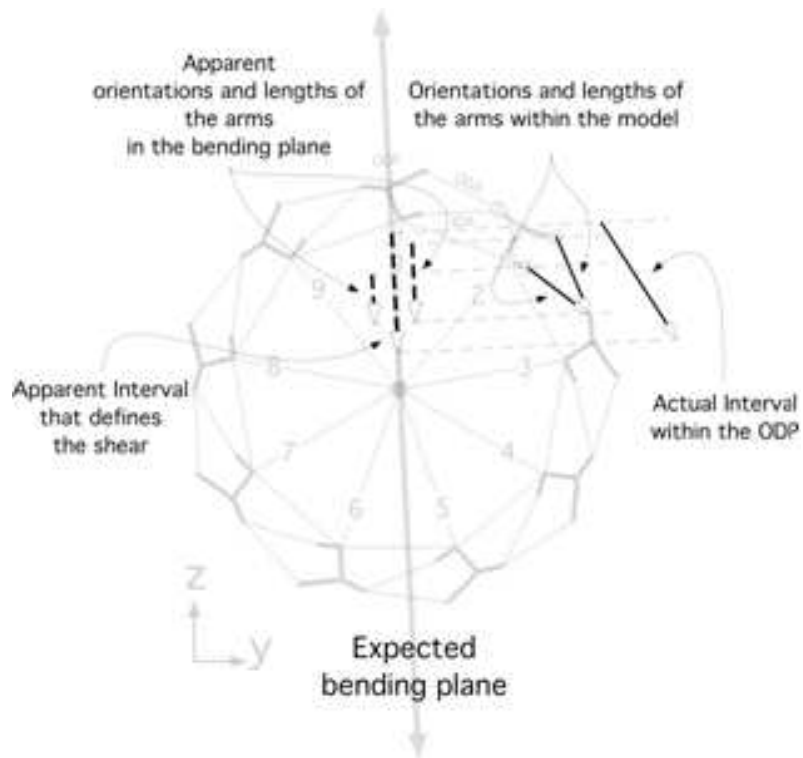


FIGURE 5.19 – Activité des moteur d'une section

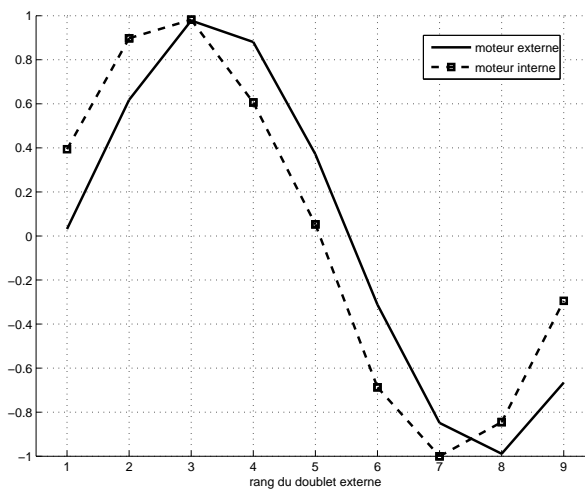


FIGURE 5.20 – Valeur des déformées des actuators d'une section (gradient transverse)

Chapitre 6

Etude d'une structure axonémale réduite

Sommaire

6.1 Courbures déviées des doublets libres	101
6.2 Déformation du modèle complet soumis à des efforts externes	104
6.3 Flexion de l'axonème soumis à un effort externe et partition des mo- teurs sur les deux demi axonèmes délimités par le plan de courbure. .	107
6.4 Conclusions sur la flexion de l'axonème induite par des efforts externes	111
6.5 Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine	115

Ce chapitre est consacré à l'étude par éléments finis du modèle simplifié de l'axonème présenté au chapitre précédent.

6.1 Courbures déviées des doublets libres

Nous avons vérifié les résultats obtenus par Cibert et Heck [44], en considérant les doublets externes dépourvus de leurs appendices périodiques, dont les calculs peuvent être faits de façon analytique.

Considérons une poutre console (cf. Fig.6.1) ayant les caractéristiques mécaniques d'un doublet de longueur L et dont l'axe longitudinal (x_1) est l'axe X_1 du repère global. Les axes x_2 et x_3 sont les axes du repère local lié à la poutre définis par ses plans principaux d'inertie. Puisque les doublets externes dessinent un cylindre, et que leur grand axe d'inertie forme un angle de $\sim 10^\circ$ par rapport à la tangente au cylindre, si le plan de courbure inclut l'un des axes X_2 ou X_3 du repère global et l'axe X_1 , il est attendu que les axes d'inertie de tous les doublets externes ne soient pas parallèles à la direction de fléchissement choisi. On notera α l'angle formé par les

deux repères. La poutre est sollicitée par un effort F de flexion selon X_3 (le plan de courbure est défini par les axes X_1 et X_3).

La loi de comportement d'un doublet, exprimée dans le repère local, s'écrit :

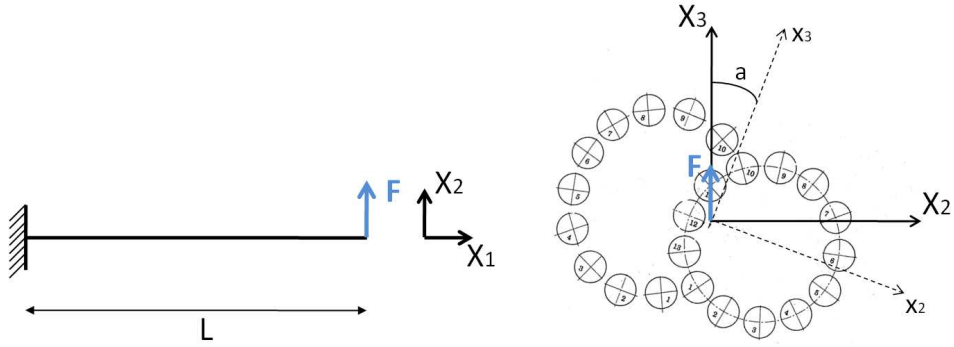


FIGURE 6.1 – Problème de la flexion des doublets libres

$$\begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Gk_2S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Gk_3S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{x_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Nous exprimons les efforts dans les plans locaux :

$$\underline{f} = \underline{R} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \sin(a) \\ F \cos(a) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Les résultats établis au chapitre 1 (eq. 1.26) permettent d'exprimer le champ des déplacements locaux :

$$\begin{cases} u_1(X_1) = 0 \\ u_2(X_1) = \frac{F \sin(a)}{Gk_2 S} X_1 + \frac{F \sin(a)}{EI_{x_3}} \left(L \frac{X_1^2}{2} - \frac{X_1^3}{6} \right) \\ u_3(X_1) = \frac{F \cos(a)}{Gk_3 S} X_1 + \frac{F \cos(a)}{EI_{x_2}} \left(L \frac{X_1^2}{2} - \frac{X_1^3}{6} \right) \\ \theta_1(X_1) = 0 \\ \theta_2(X_1) = -\frac{F \cos(a)}{EI_{x_3}} \left(L X_1 - \frac{X_1^2}{2} \right) \\ \theta_3(X_1) = \frac{F \sin(a)}{EI_{x_2}} \left(L X_1 - \frac{X_1^2}{2} \right) \end{cases} \quad (6.3)$$

qui sont exprimés dans le repère global par :

$$\underline{U} = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{u} \quad (6.4)$$

équation dans laquelle la matrice de changement de base permet de calculer les déplacements et les rotations.

Si les doublets ont une longueur de 30 cellules de base (2.880 nm) et si l'intensité de l'effort externe qui leur est appliqué est de 0,3 pN, la figure 6.2 représente leurs déplacements dans le plan (X_2, X_3) lorsque la charge externe est orientée soit selon $+X_3$, soit selon $-X_3$. Puisque la solution est linéaire, les déplacements changent de signe si la polarité de la force change. La figure 6.3 représente la position de l'extrémité des doublets en fonction de l'orientation de la force F dans le plan (X_2, X_3) . Le cercle central indique le code couleur correspondant à l'orientation de la force. On notera que les extrémités des doublets décrivent une ellipse lorsque l'orientation de la force change ; les doublets sont bien impliqués dans une flexion déviée.

Afin de visualiser les déplacements relatifs des doublets externes les uns par rapport aux autres, déplacements difficiles à observer sur les deux graphes précédents, nous avons exprimé les mêmes résultats en considérant qu'un doublet externe est fixe par rapport au repère global. La figure 6.4 illustre ces résultats (un coefficient multiplicatif a été introduit pour mieux visualiser les résultats) par rapport au doublet 1 ou par rapport au doublet 5 ; ces deux doublets ont été choisis en raison de leur proximité du plan de flexion. On constate que les doublets ont tendance à se déplacer vers le côté externe de la courbure (fig. 6.5). Plus les doublets sont éloignés du plan de courbure et plus leurs déplacements relatifs sont importants.

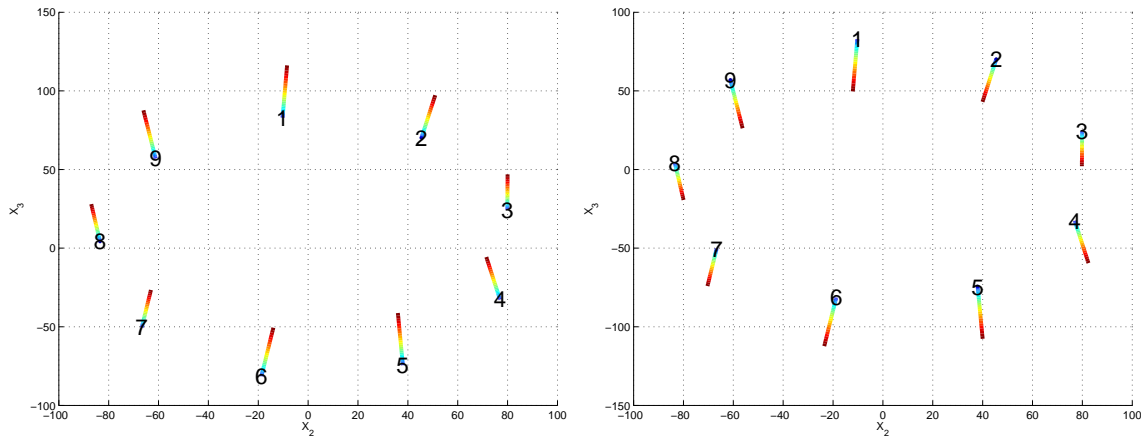


FIGURE 6.2 – Déplacement des doublets (vue de face) dans le plan (X_2, X_3) .
 A gauche : la force est orientée selon X_3 ; à droite : la force est orientée selon $-X_3$.

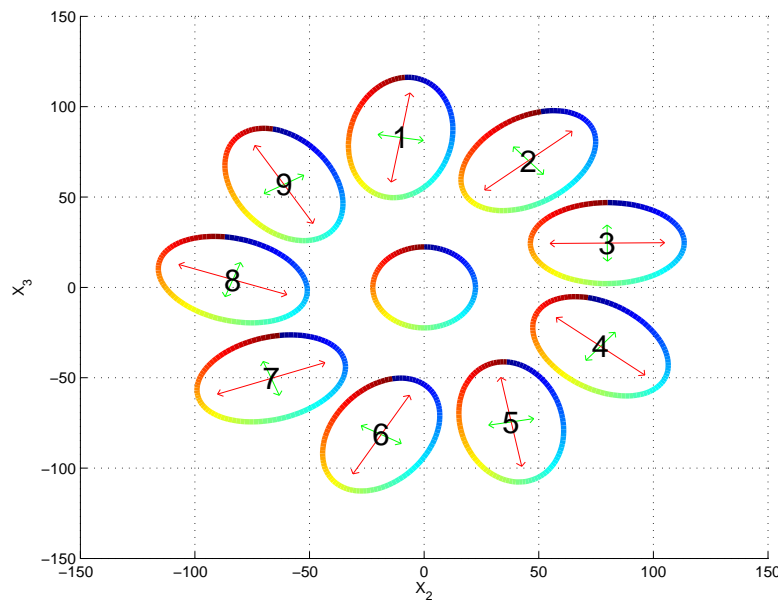


FIGURE 6.3 – Vue de face de la flexion des doublets libres pour une force tournant autour de la section des doublets

6.2 Déformation du modèle complet soumis à des efforts externes

Le modèle complet est constitué de 30 cellules de base ; il représente un segment axonémal de $3 \mu m$ de long. L'une des extrémités du modèle est encastree. Le modèle est soumis à une charge uniformément répartie le long de son grand axe et orientée soit selon $+X_3$ soit selon

6.2. Déformation du modèle complet soumis à des efforts externes

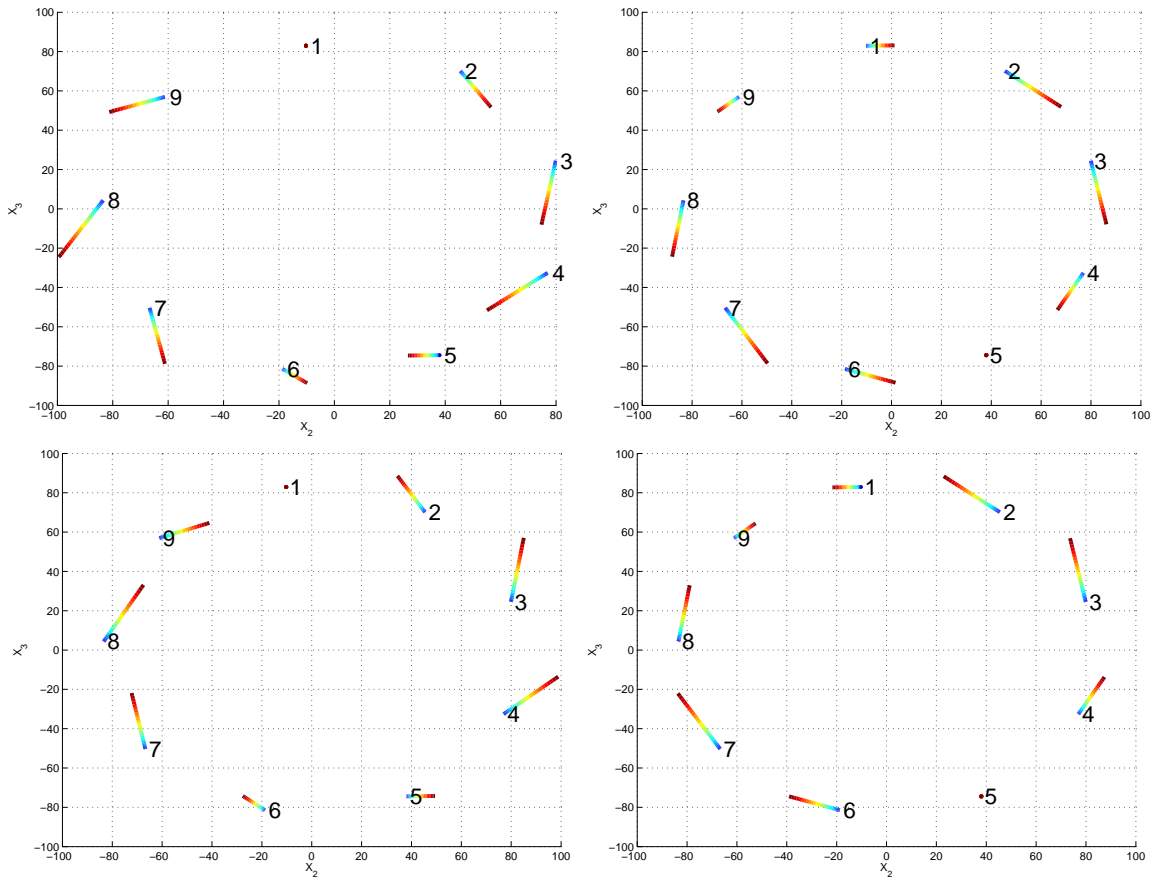


FIGURE 6.4 – Déplacement relatif des doublets par rapport au doublet 1 (à gauche) et par rapport au doublet 5 (à droite) pour une force selon $+X_3$ (en haut) et selon $-X_3$ (en bas)

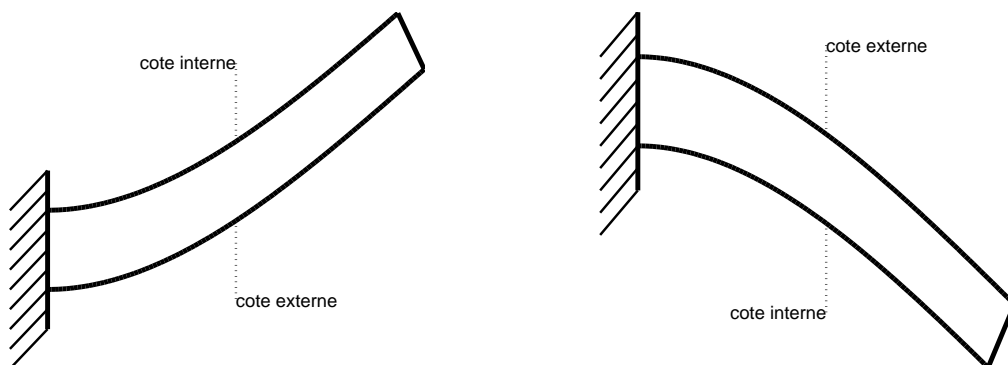


FIGURE 6.5 – Côté externe et côté interne à la courbure

$-X_3$ comme dans le cas précédent. Les calculs sont réalisés par éléments finis en utilisant le logiciel MSC NASTRAN en postulant un comportement élastique du modèle complet et en

considérant l'hypothèse des grands déplacements.

Compte tenu des résultats que nous avons obtenus en considérant que les doublets sont dépourvus d'appendices et donc libres les uns par rapport aux autres et par rapport à la paire centrale, il est intéressant de savoir les rôles que jouent ces appendices lorsque le modèle complet est soumis à une contrainte externe.

Dans le modèle complet que nous avons construit, les bras de dynéine liés en permanence aux deux doublets entre lesquels ils sont établis (position "rigor" définie par Gibbons, 1981) et les supports des liens de nexine jouent des rôles équivalents, puisqu'ils sont mécaniquement assimilables à des ressorts dont les constantes de raideur sont cependant différentes.

Si on supprime les liens de nexine, les bras de dynéine sont les seuls à assurer la cohésion de l'axonème. Sollicité par la contrainte externe (fig. 6.6) orienté selon $+/- X_3$, les doublets externes glissent autour du cylindre axonémal et convergent, de façon presque symétrique sur les deux faces de l'axonème, vers le côté externe de la déformée, jusqu'à s'entrecroiser. Si les doublets externes sont uniquement liés par les liens de nexine, la déformation est évidemment la même que celle que l'on observe si les seuls bras de dynéine sont présent, mais l'amplitude des déplacements est plus grande, puisque les liens de nexine ont des raideurs inférieures à celles des bras de dynéine (fig. 6.7). Ces résultats sont qualitativement identiques à ceux que nous avons obtenus en considérant les doublets libres (fig. 6.4), et démontrent que lorsque l'axonème est soumis à un effort externe les liaisons tangentielles transverses établies entre les doublets externes assurent la cohésion cylindrique de l'axonème, ce qui n'a évidemment rien de surprenant.

Si toutes les liaisons tangentielles sont détruites et que seuls les ponts radiaires subsistent, sous les mêmes contraintes externes que celles utilisées dans les deux cas précédents, on observe des rotations très importantes des doublets autour de l'axe du modèle (fig. 6.8 et 6.9) qui convergent, de façon symétrique sur les deux faces opposées de l'axonème, vers le côté externe de la courbure, comme dans les deux cas précédents.

Du seul point de vue mécanique, les appendices que portent les doublets externes ne servent qu'à maintenir la forme cylindrique de l'axonème et la distribution spatiale des doublets externes.

6.3. Flexion de l'axonème soumis à un effort externe et partition des moteurs sur les deux demi axonèmes des

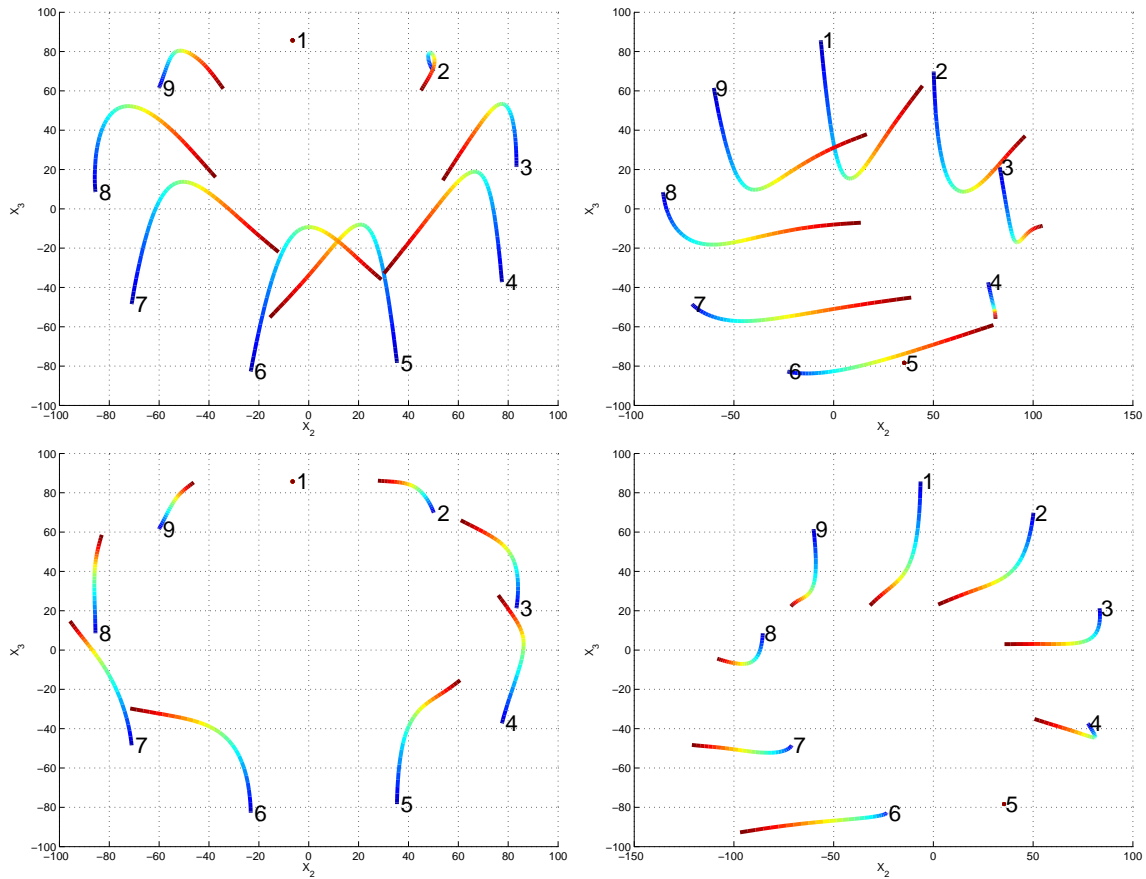


FIGURE 6.6 – Influence des moteurs dynéiques : déplacement relatif des doublets par rapport au doublet 1 (à gauche) et par rapport au doublet 5 (à droite) pour une charge transverse uniformément répartie orientée selon $+X_3$ (en haut) et selon $-X_3$ (en bas).

6.3 Flexion de l'axonème soumis à un effort externe et partition des moteurs sur les deux demi axonèmes délimités par le plan de courbure.

Dans le modèle complet, les liens de nexine et les ponts radiaires sont présents, et 4 modes de courbures seront envisagés en fonction de la présence ou de l'absence des bras de dynéine sur les deux faces opposées de l'axonème (fig. 6.10).

- selon le Mode I_e , l'effort externe est appliqué à l'extrémité libre de tous les doublets externes et induit une courbure dans la direction $+X_3$ du repère global. Les bras de dynéine des doublets 1, 2, 3, 4 et 5 sont supprimés ; ceux des doublets externes 6, 7, 8 et 9 sont passifs.

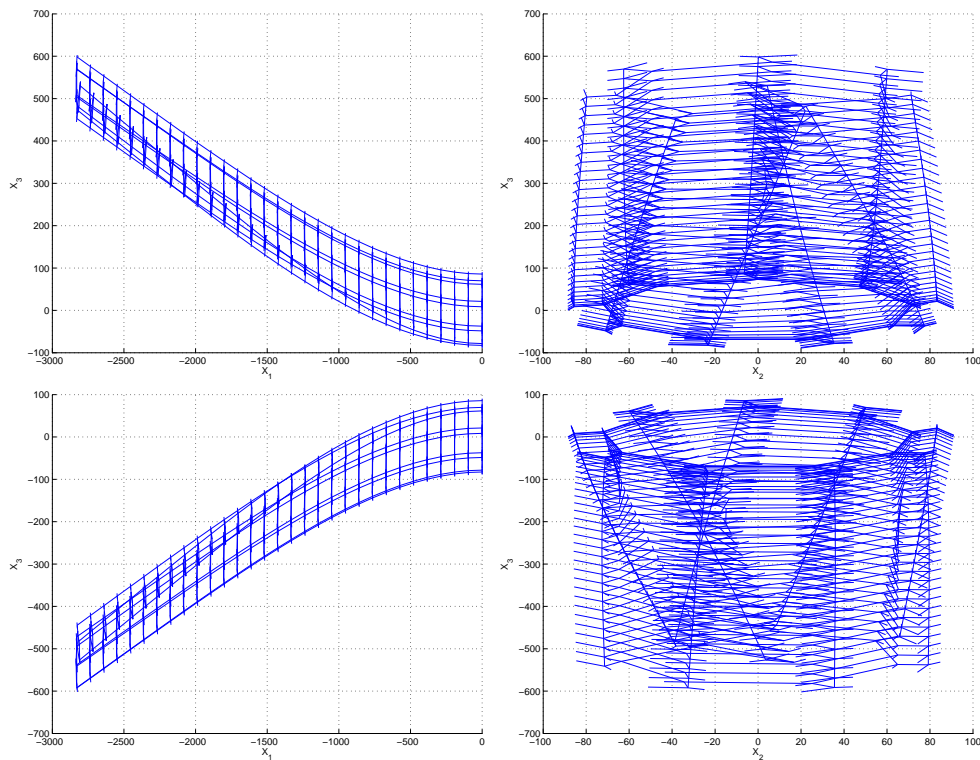


FIGURE 6.7 – Influence des liens de nexine : déformée de l'axonème en présence des liens de nexine uniquement, sollicité par une charge transverse uniformément répartie orientée selon $+X_3$ (en haut) et selon $-X_3$ (en bas).

- selon le Mode II_e , l'effort est appliqué à l'extrémité libre de tous les doublets externes et induit la courbure dans la direction $-X_3$. Les bras de dynéine des doublets externes 1, 2, 3 et 4 sont passifs ; et ceux des doublets externes 5, 6, 7, 8 et 9 sont supprimés.
- selon le Mode III_e , l'effort appliqué est le même que ce qu'il est dans le Mode I_e , mais les bras de dynéine de tous les doublets externes sont tous présents et passifs.
- selon le Mode IV_e , l'effort appliqué est le même que ce qu'il est dans le Mode II_e , mais les bras de dynéine de tous les doublets externes sont présents et passifs.

Le e , accolé au rang du Mode de chargement, indique que c'est en appliquant une charge externe au modèle que la courbure est créée.

Les Modes I_e et II_e ont été envisagés, parce que les distributions des bras de dynéine par demi axonème auxquelles ils correspondent sont compatibles avec le principe selon lequel les bras de dynéine sont capables de produire une force dans une direction donnée, en accord avec les observations de Holwill. Les Modes III_e et IV_e sont, en quelque sorte, deux constructions témoins compte tenu des résultats obtenus précédemment. Les déformées obtenues selon les 4 Modes sont présentés dans la fig. 6.11.

6.3. Flexion de l'axonème soumis à un effort externe et partition des moteurs sur les deux demi axonèmes dé

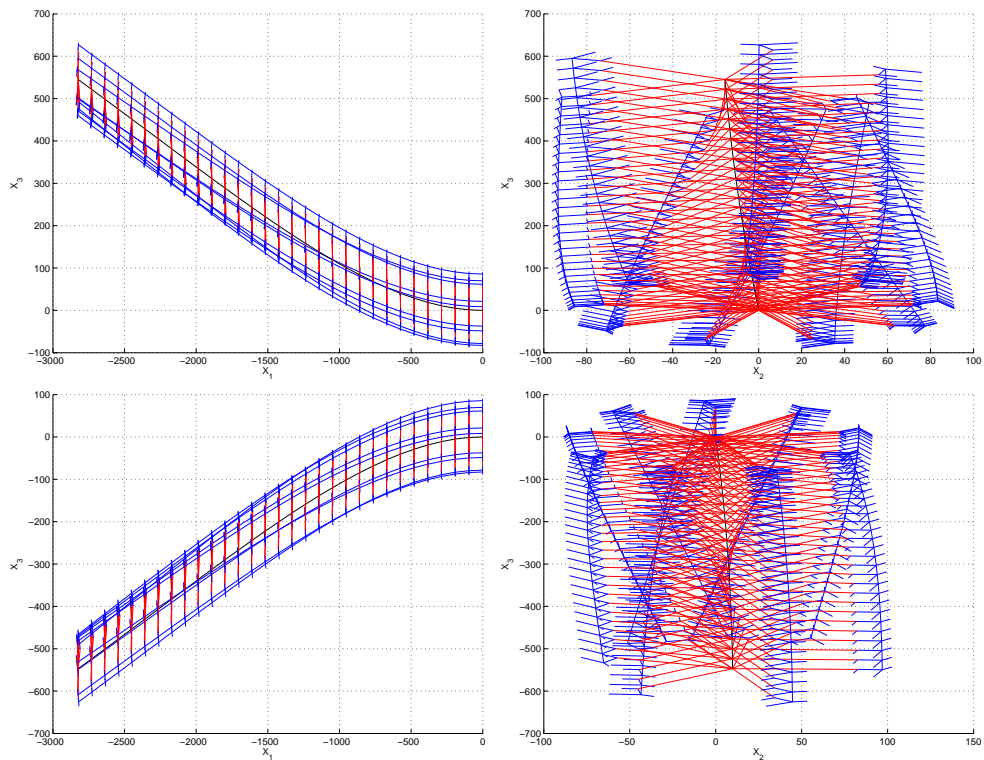


FIGURE 6.8 – Influence des ponts radiaux : déformée de l'axonème en présence uniquement des ponts radiaux sous une charge transverse uniformément répartie orientée selon $+X_3$ (en haut) et selon $-X_3$ (en bas).

Selon les Modes I_e et II_e , les déformées sont tridimensionnelles et non, planes, comme attendu (fig. 6.12) et l'ensemble des doublets externes forme une hélice gauche. Le pas de l'hélice observée est le même, que la déformée ait été obtenue selon les deux Modes I_e et II_e , alors que les courbures sont inversées, parce que nous avons créé une dissymétrie au sein même de l'axonème en inversant la distribution des bras de dynéine.

Selon les Modes III_e et IV_e , les déformées sont comparables à celles que nous avons observées lorsque seuls les bras de dynéine (ou les liens de nexine) sont présents. Les doublets externes convergent de la même façon symétrique sur les deux faces de l'axonème vers la face externe de la courbure, à ceci près, qu'à l'instar de ce que l'on observe pour les Modes I_e et II_e , les déformées sont cette fois nettement tridimensionnelles et non, planes comme attendu en raison de l'orientation de l'effort appliqué au modèle (fig. 6.12).

Ceci signifie, que l'hélicité des déformées de l'axonème est fonction du déséquilibre des contraintes élastiques qui existent entre les doublets externes des deux demi axonèmes délimités par le plan de courbure, et donc de la transmission des efforts au sein du modèle par les appendices portés par les doublets externes, en particulier par les ponts radiaux.

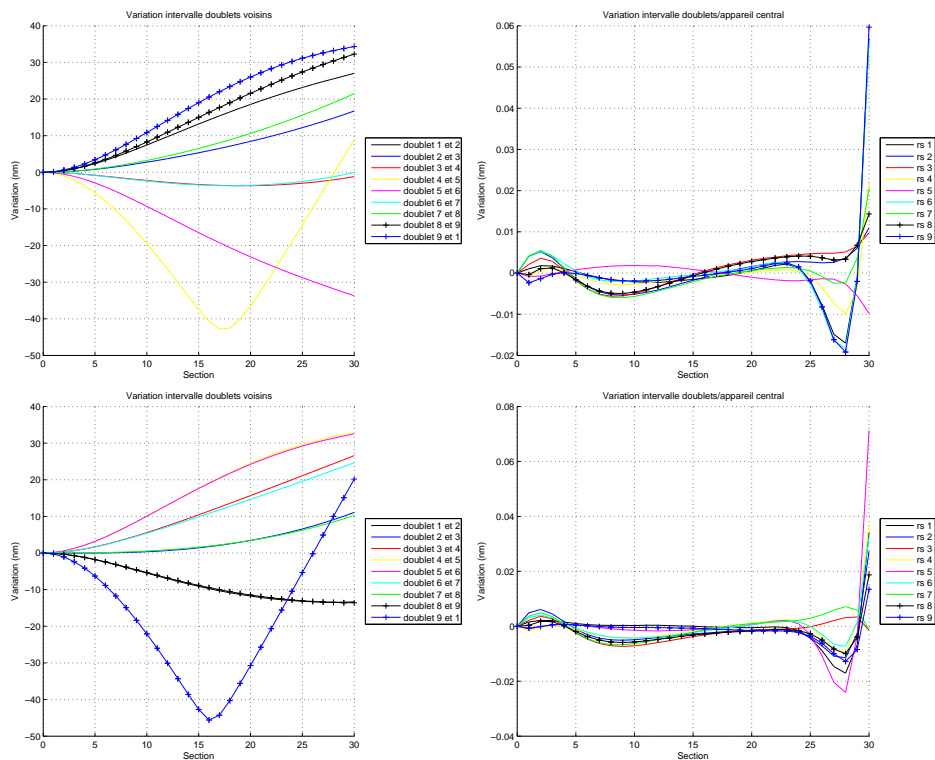


FIGURE 6.9 – Influence des ponts radiaires : Variation des intervalles entre doublets voisins (graphiques de gauche) et entre doublets et appareil central (graphiques de droites) pour une force orientée selon $+X_3$ (en haut) et selon $-X_3$ (en bas)

Les intervalles inter-doublets externes au sein de chaque paire ainsi que ceux qui séparent chaque doublet externe de l'appareil central ont été quantifiés (fig. 6.13). Bien qu'au delà de la 25^{ème} section du modèle, en raison des effets de bord induits par le calcul des déformées, les données soient difficilement exploitables, on note que le long des déformées obtenues selon les quatre modes de chargement, il se produit une variation nette des intervalles qui séparent les doublets externes de l'appareil central le long du segment proximal du modèle (augmentation et diminution des distances) bien que les amplitudes de ces variations soient très faibles (<0.05 nm). Ces distances reprennent peu à peu leur valeur initiale le long du segment distal du modèle en fonction de la diminution de l'importance des efforts auxquels les ponts radiaires sont soumis le long du segment distal.

6.4. Conclusions sur la flexion de l'axonème induite par des efforts externes

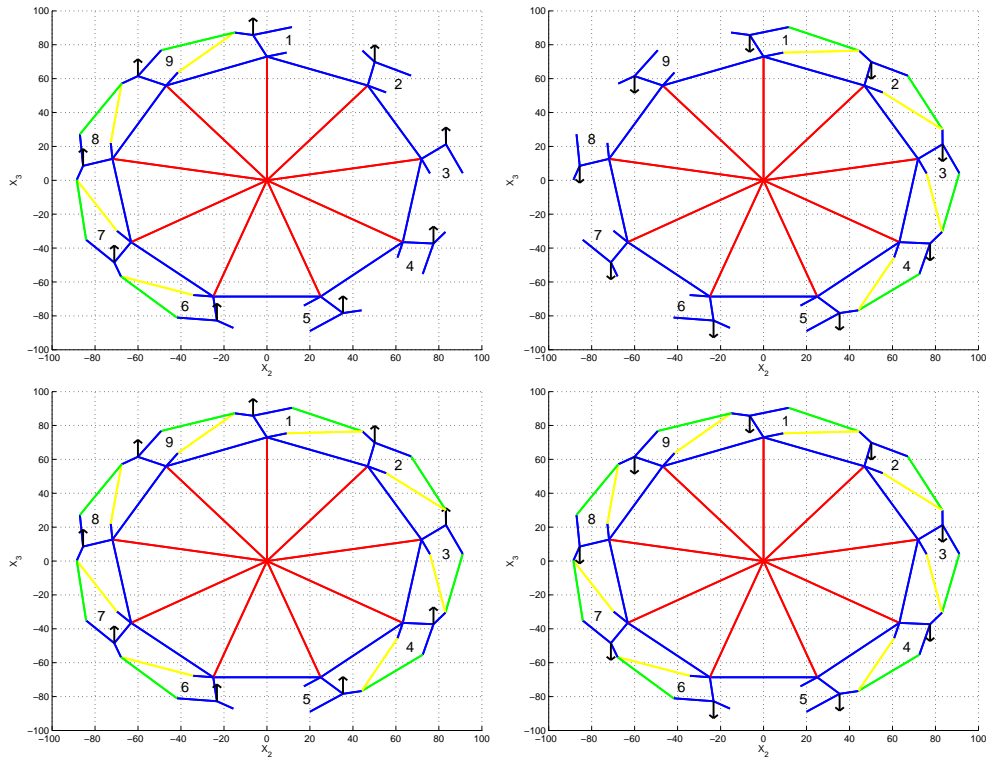


FIGURE 6.10 – Modes de flexion : Mode I_e en haut à gauche ; mode II_e : en haut à droite ; mode III_e : en bas à gauche ; mode IV_e : en bas à droite.

6.4 Conclusions sur la flexion de l'axonème induite par des efforts externes

Ces résultats montrent pour l'essentiel que les courbures déviées des doublets externes entre lesquels les bras de dynéine ont été "supprimés" (Mode I_e et II_e) ont une incidence forte sur la conformation de l'axonème, et que ce sont les ponts radiaires qui jouent un rôle majeur dans la création de l'hélicité des déformées obtenues sous contraintes externes en obligeant les doublets externes à tourner autour du cylindre axonémal. Les bras de dynéine en conformation "rigor" et les liens de nexine assurent quant à eux la cohésion cylindrique des doublets, mais ne peuvent seuls induire la formation des hélices gauches que nous avons observées.

Cependant, ces résultats obtenus sous une charge externe ont une signification limitée sur la connaissance des mécanismes topologiques supposés être incidents sur la régulation de l'activité des moteurs moléculaires de l'axonème "vrai".

En toute première analyse, on pourrait concevoir les efforts externes comme semblables à ceux que subirait l'axonème dans le milieu dans lequel il se déplace. Mais, en raison du nombre de Reynolds des cils et des flagelles extrêmement faible, les cils et les flagelles ont une iner-

Chapitre 6. Etude d'une structure axonémale réduite

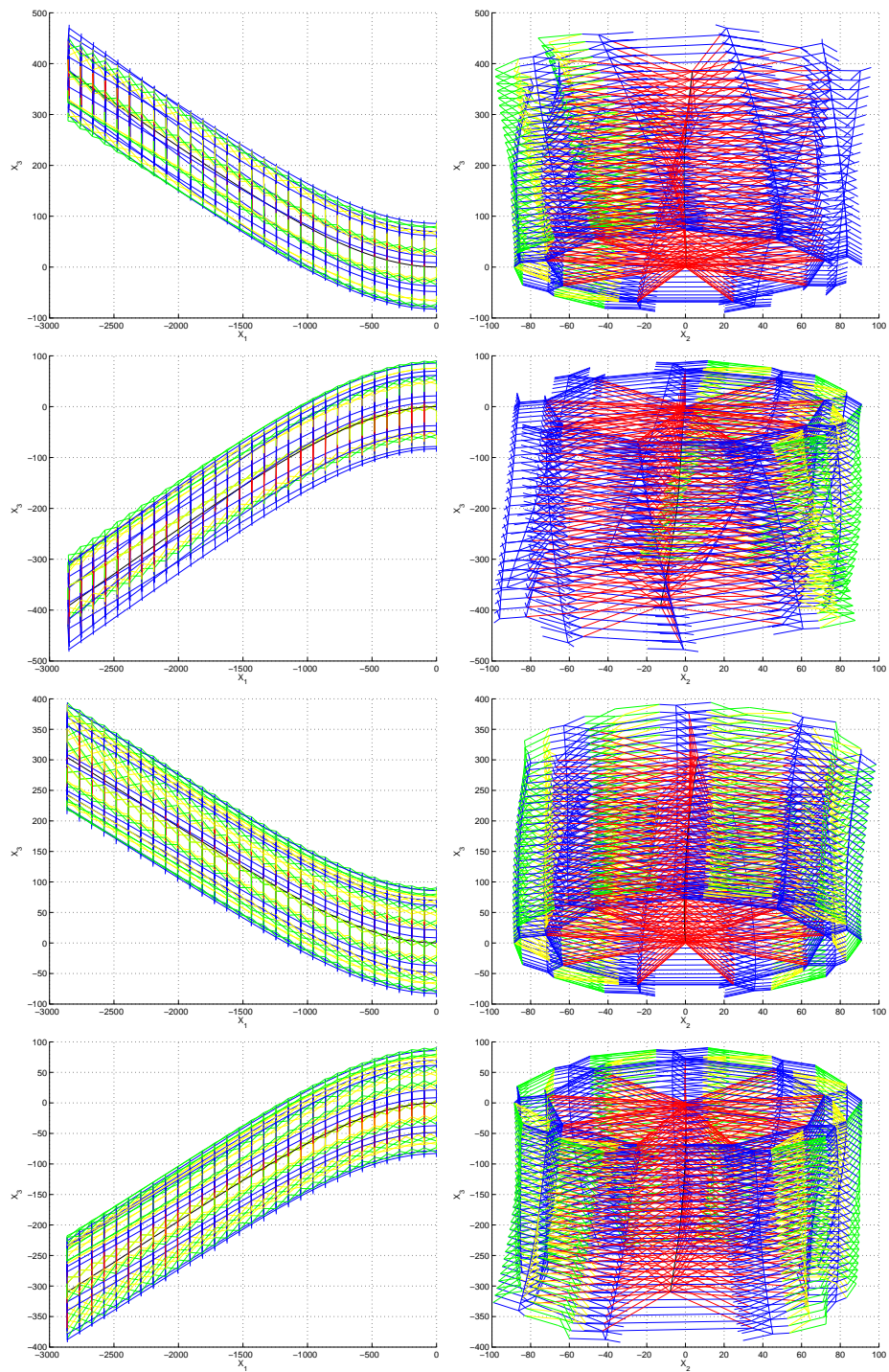


FIGURE 6.11 – Flexion de l'axonème : déformée de l'axonème pour les quatre modes de flexion considérés : mode I_e (en haut), mode I_e (deuxième en partant du haut), mode III_e (deuxième en partant du bas) et mode IV_e (en bas)

6.4. Conclusions sur la flexion de l'axonème induite par des efforts externes

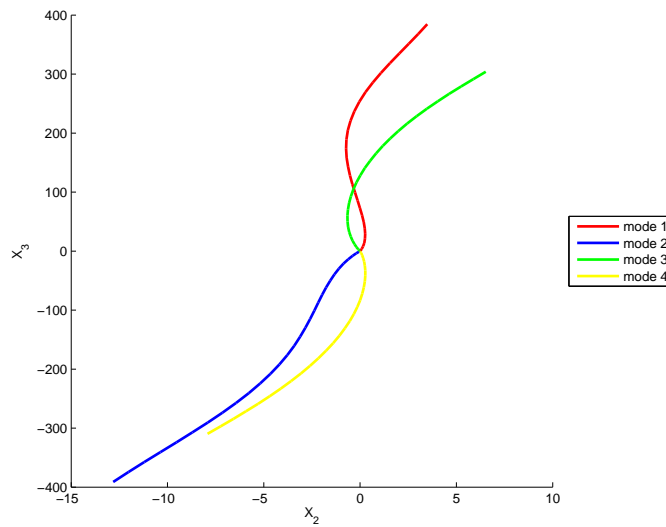


FIGURE 6.12 – Flexion de l'axonomie : déformée de l'appareil central dans le plan (X_2, X_3) .

tie nulle, et les contraintes externes dues au déplacement du milieu de nage cessent dès qu'ils s'arrêtent de battre. Ceci implique qu'il est impossible que les contraintes externes, de nature hydrodynamique, soient appliquées sur un axonème passif comme nous l'avons considéré ici. Par ailleurs, du fait des interactions qui existent entre le flagelle (ou le cil) et son milieu de nage, les contraintes ne peuvent être conçues dans le contexte théorique des écoulements laminaire. Ceci fait que les orientations des contraintes que subit le flagelle (ou le cil) et donc l'axonème, ne peuvent être modélisées comme des efforts perpendiculaires ou parallèles à l'axe du modèle, d'autant qu'il a été décrit qu'au voisinage des flagelles (ou des cils) le milieu de nage était impliqué dans des mouvements tourbillonnaires complexes, et qu'il est donc anisotrope par essence tout le long d'un segment de flagelle (ou de cil). Dans cette conclusion, nous avons considéré les flagelles et les cils comme équivalents bien que la mention des cils soit incluse entre parenthèses. En effet, en raison des organisations très différentes des flagelles et des cils à la surface des cellules qui les différencient, les interactions qui existent entre le flagelle (isolé par définition), les cils (qui forment un tapis) et le milieu dans lequel ils se meuvent sont, de toute évidence, différentes. Il est donc illusoire de penser pouvoir les modéliser d'un même trait ou penser tirer les lois communes qui décriraient leurs incidences mécaniques sur la machinerie axonémale à partir de l'étude, au demeurant sommaire, que nous proposons ici.

Chapitre 6. Etude d'une structure axonémale réduite

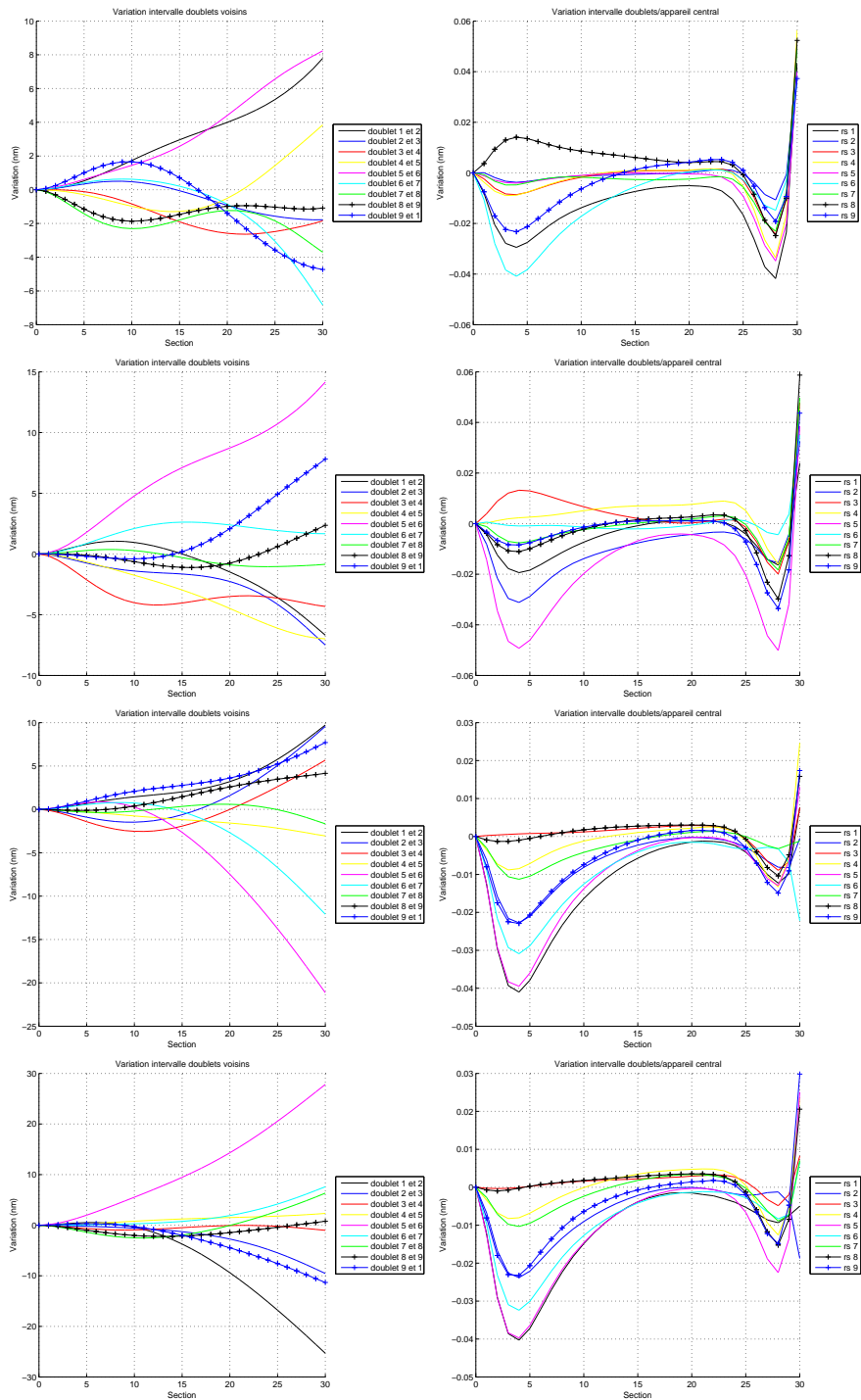


FIGURE 6.13 – Flexion de l'axonème : variation des distances entre doublets voisins (à gauche) et entre doublets et appareil central (à droite) pour un axonème fléchi en mode I_e (première ligne), en mode II_e (deuxième ligne), en mode III_e (troisième ligne) et en mode IV_e (dernière ligne).

6.5 Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine

Jusqu'à maintenant, les déformations du modèle complet ont été calculées en fonction de contraintes externes, comme dans le paragraphe précédent. Ces modalités de déformations, pour utiles qu'elles soient dans les contextes dans lesquels elles ont été conçues, ne modélisent pas les mécanismes intimes de l'axonème qui se courbe du fait des glissements relatifs de ses doublets externes, glissements médiés par les bras de dynéines, comme rappelé à plusieurs reprises dans ce mémoire.

Dans ce paragraphe, nous modéliserons l'activité des bras de dynéine en jouant sur la longueur relative des actuateurs tels qu'ils ont été décrits plus haut, en tenant compte de la géométrie cylindrique de l'axonème pour que la courbure générée soit plane par défaut (fig. 5.19 et 5.20). Cette étude a pour objet de déterminer les déplacements des doublets externes, de façon analogue à ce que nous avons fait lorsque les contraintes externes ont été appliquées au modèle. En revanche, la signification de ces déformations libres, parce qu'elles sont produites par des efforts internes, doit être conçue dans le contexte théorique du modèle de l'embrayage géométrique, et nous pourrions vérifier, autant qu'il est possible, s'ils confirment ou infirment les hypothèses formulées par Charles Lindemann.

6.5.1 Modes de chargements

Nous considérons quatre modes de chargements du modèle en fonction de l'activité des bras de dynéine sur chacun des deux demi axonèmes délimités par le plan de courbure. Nous avons arbitrairement défini le plan de courbure comme le plan qui inclut l'axe d'inertie du doublet externe 1, l'axe central de l'axonème et par conséquent le milieu de la paire formée par les deux doublets externes 5 et 6 (fig. 5.19). Dans ces conditions, les deux demi axonèmes seront respectivement formés par les doublets 1, 2, 3 et 4 d'une part, et 6, 7, 8 et 9 d'autre part. Pour des raisons biologiques, liées à la structure de l'axonème des flagelles de spermatozoïdes d'oursin qui a servi de modèle, la paire 5-6 est dépourvue de bras de dynéine et liée par les seuls liens de nexine. Lorsque l'axonème est au repos, l'axe central du modèle se confond avec l'axe X_1 du repère global. Les cellules périodiques du modèle ont des abscisses décomptées négativement à partir de l'encastrement. Les polarités des courbures planes attendues seront définies sur l'axe X_3 du repère global (fig. 6.14).

- selon le Mode I_i , les moteurs de dynéine sont réputés fonctionner selon leur polarité canonique. La courbure plane attendue est orientée dans le sens $+X_3$. Les bras de dynéine

Chapitre 6. Etude d'une structure axonémale réduite

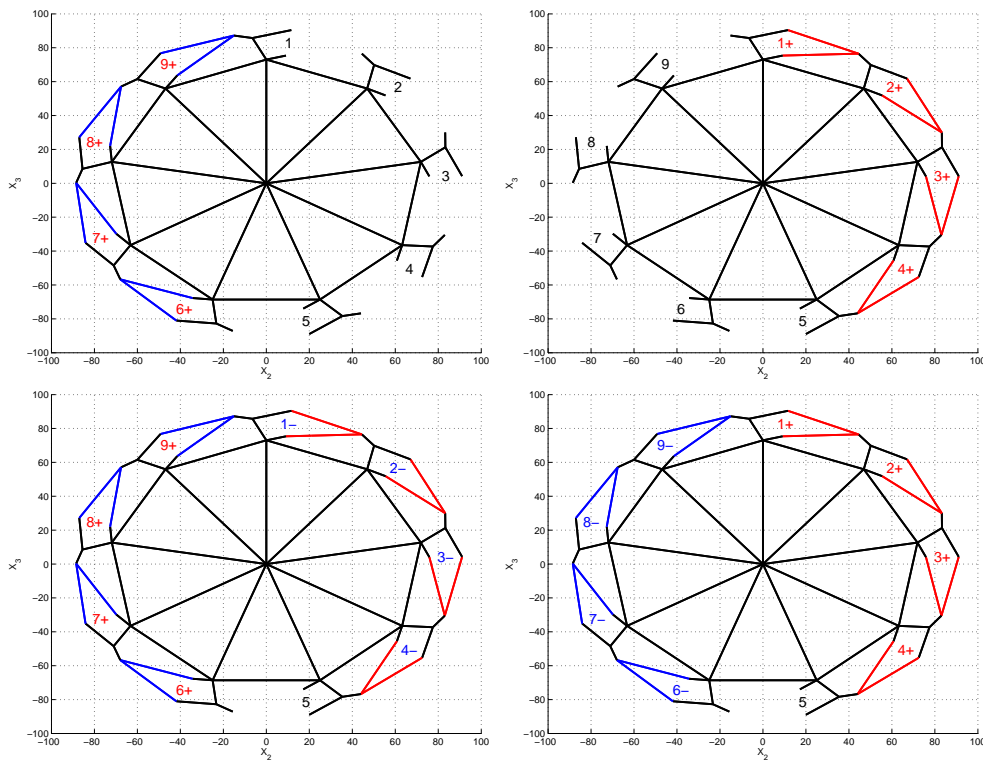


FIGURE 6.14 – Modes de chargement : mode I_i en haut à gauche ; mode II_i en haut à droite ; mode III_i en bas à gauche et mode IV_i en bas à droite.

portés par les doublets externes 6, 7, 8 et 9 sont actifs. Les bras de dynéine portés par les doublets externes de la face opposée sont supprimés.

- selon le Mode II_i , les moteurs de dynéine sont réputés fonctionner selon leur polarité canonique. La courbure plane attendue est orientée dans le sens $-X_3$. Les bras de dynéine portés par les doublets externes 1, 2, 3 et 4 sont actifs. Les bras de dynéine portés par les doublets externes de la face opposée sont supprimés.
- selon le Mode III_i , les moteurs de dynéine sont réputés fonctionner selon les deux polarités opposées. La courbure plane attendue est orientée dans le sens $+X_3$. Les bras de dynéine portés par les doublets externes 6, 7, 8 et 9 sont actifs selon la polarité canonique ; Les bras de dynéine portés par les doublets externes de la face opposée 1, 2, 3 et 4 sont actifs selon la polarité anti-canonique.
- selon le Mode IV_i , les moteurs de dynéine sont réputés fonctionner selon les deux polarités opposées. La courbure plane attendue étant l'opposée de celle générée par le Mode III_i , l'activité de l'axonème est inversée.

Les noms des quatre Modes de chargement sont affectés d'un i pour indiquer qu'ils correspondent à des efforts internes générés par les bras de dynéine.

6.5.2 Déformées de l'axonème

Pour représenter l'allure de la déformée (cf. figure 6.15) obtenue selon chaque Mode de chargement, il suffit de considérer l'allure de la projection de l'appareil central dans le plan (X_2 , X_3) (fig. 6.16); quel que soit le Mode de chargement, les déformées sont tridimensionnelles et non planes, comme ce qu'il était légitime d'attendre, en raison du mécanisme d'activation des bras de dynéine que nous avons calculé. Les déformées obtenues selon les Modes de chargement I_i et II_i sont les plus complexes, et ne sont pas symétriques l'une par rapport à l'autre. Les déformées obtenues selon les Modes III_i et IV_i sont symétriques l'une de l'autre. Ces résultats montrent que le fait de supprimer les bras de dynéine le long des doublets externes "inactifs" selon les modes I_i et II_i , permet à ces doublets de se comporter comme ils le font alors que la charge de l'axonème est externe, ce que nous avons détaillé dans les paragraphes précédents, et de se conformer en hélice du fait de leurs courbures déviées et des contraintes transmises par les appendices transverses que sont les liens de nexine et les ponts radiaires. Comme nous avons créé une asymétrie fonctionnelle dans le modèle en passant du Mode I_i au Mode II_i , les hélices formées par les doublets libres doivent présenter un pas de même signe, et l'ensemble qu'ils forment doit se déplacer à la surface du cylindre axonémal en convergeant vers le côté externe de la courbure.

La figure 6.17 montre l'évolution des distances inter-doublets et des distances entre les doublets externes et l'appareil central en fonction de l'abscisse mesurée à partir de l'encastrement. On observe que les distances inter-doublets évoluent très rapidement le long du segment proximal du modèle; l'amplitude maximale de ces variations est observée au niveau de la 21^{ème} section du modèle. Les résultats sont difficilement exploitables au-delà de la 40^{ème} section, les effets de bord devenant importants.

Les distances entre les doublets externes et l'appareil central varient considérablement sur les cinq cellules proximales puis diminuent. Si cette diminution est raisonnable, mais si les déformations de la partie terminale sont entachées des effets de bord induits par le calcul - comme dans le cas où la déformation de l'axonème est provoquée par des efforts externes -, alors la convergence vers 0 de l'ensemble des variations de distances observée au niveau de la 40^{ème} section, peut être (pour partie) artefactuelle. C'est pour cette raison que l'analyse des déformées repose sur les 40 premières sections du modèle qui en compte 50. En raison des variations des distances inter-doublet et de celles qui séparent chaque doublet de l'axe du modèle, l'analyse portera sur la 21^{ème} et la 40^{ème} section du modèle qui intègre chacune les transformations qui se sont produites en amont de leur abscisse curviligne (fig. 6.18 à 6.25). Ces figures contiennent deux panneaux.

Chapitre 6. Etude d'une structure axonémale réduite

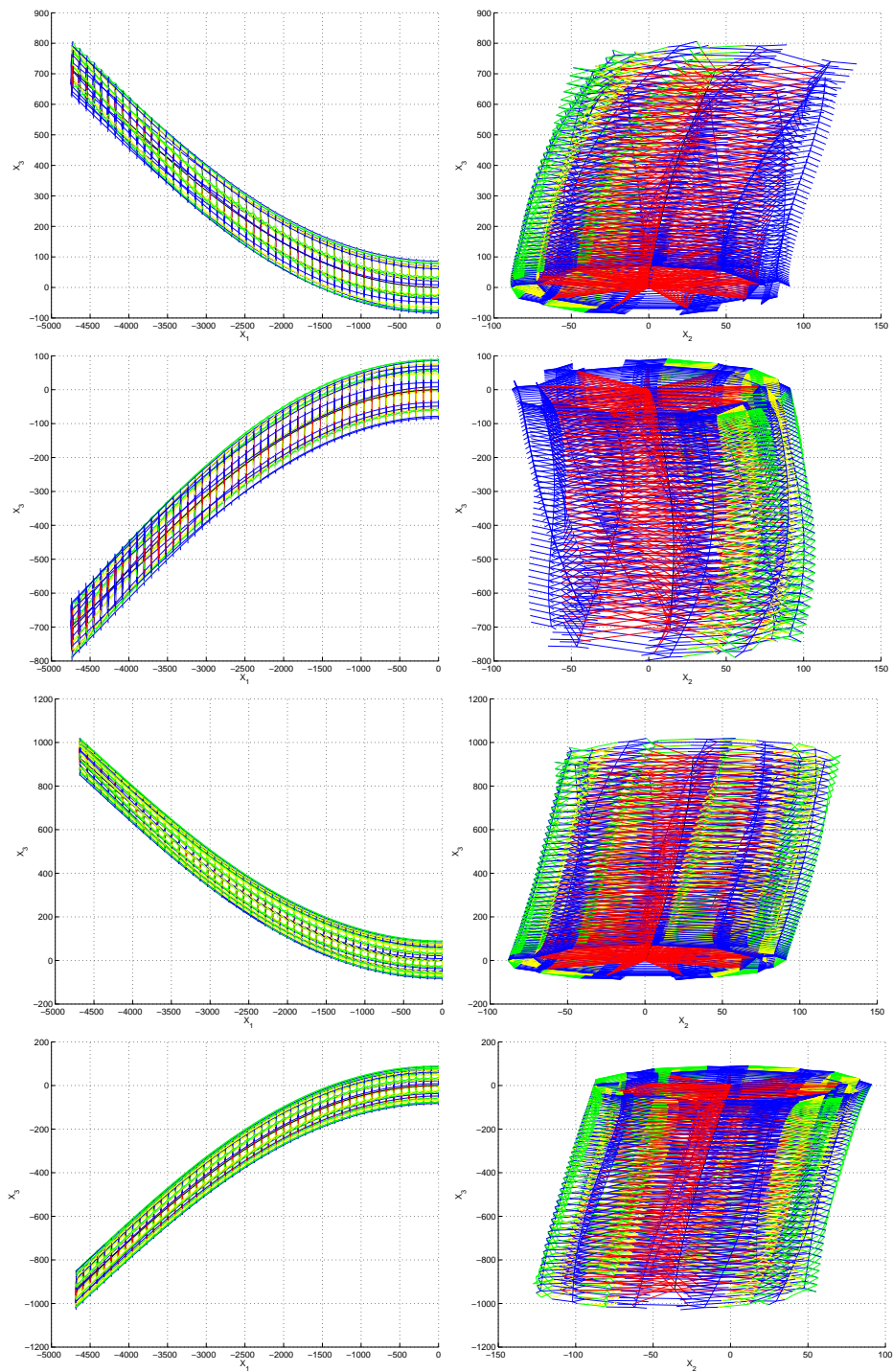


FIGURE 6.15 – Flexion de l'axonème : déformée de l'axonème pour les quatre modes de flexion considérés : mode I_i (en haut), mode I_i (deuxième en partant du haut), mode III_i (deuxième en partant du bas) et mode IV_i (en bas)

6.5. Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine

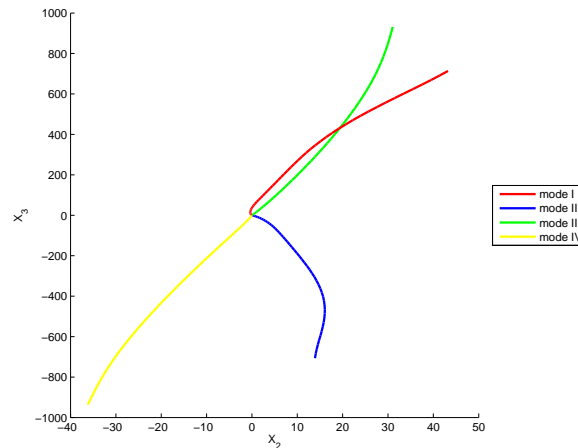


FIGURE 6.16 – Déformée de l'appareil central pour les quatre modes de chargement.

Dans le panneau de gauche de ces figures, la coupe transversale de l'axonème est orientée comme indiqué dans la figure 5.19. Les doublets externes sont présentés de deux façons. Les enveloppes des deux microtubules dessinent les positions des doublets externes dans la section courante, alors que les fonds bleus représentent leurs positions au niveau de la section encastree. Les rangs des doublets externes sont indiqués dans le sens horaire, puisque l'axonème est observé selon son axe principal, orienté de la base vers l'extrémité libre du modèle. Dans le tubule A de chaque doublet externe, les chiffres écrits en blanc et en bleu définissent respectivement les doublets externes actifs et inactifs. Les signes dont sont affectés ces rangs représentent les polarités de la force produite par les bras de dynéine qui, comme rapporté plus haut, peut être orientée dans le sens canonique (signe "-") ou anti-canonique (signe "+"). Entre deux doublets externes voisins, les bras de dynéine sont représentés par des traits pleins et les liens de nexine par des traits fins. Les ponts radiaires qui relient les doublets externes à l'axe central du modèle sont dessinés en traits fins. Les couleurs de tous les appendices portés par les doublets externes représentent leur extension, proportionnelle aux efforts normaux qu'ils subissent. Ces couleurs sont représentées par l'échelle portée à droite de la coupe transversale de l'axonème. Plus l'appendice est allongé, plus sa couleur tire sur le violet ; plus il est comprimé, plus sa couleur tire sur le blanc. Les rangs des liens de nexine et des ponts radiaires sont indiqués de part et d'autre de cette échelle, et leurs positions sont fonctions de leurs contraintes. Les couleurs attribuées aux bras de dynéine obéissent au même code. Les segments bleus et blancs incrustés respectivement sur les fantômes des doublets externes et les enveloppes de doublets externes de la coupe courante matérialisent leurs orientations au sein du cylindre.

Les panneaux de droite, représentent les vues de profil des mêmes coupes à la même abscisse.

Chapitre 6. Etude d'une structure axonémale réduite

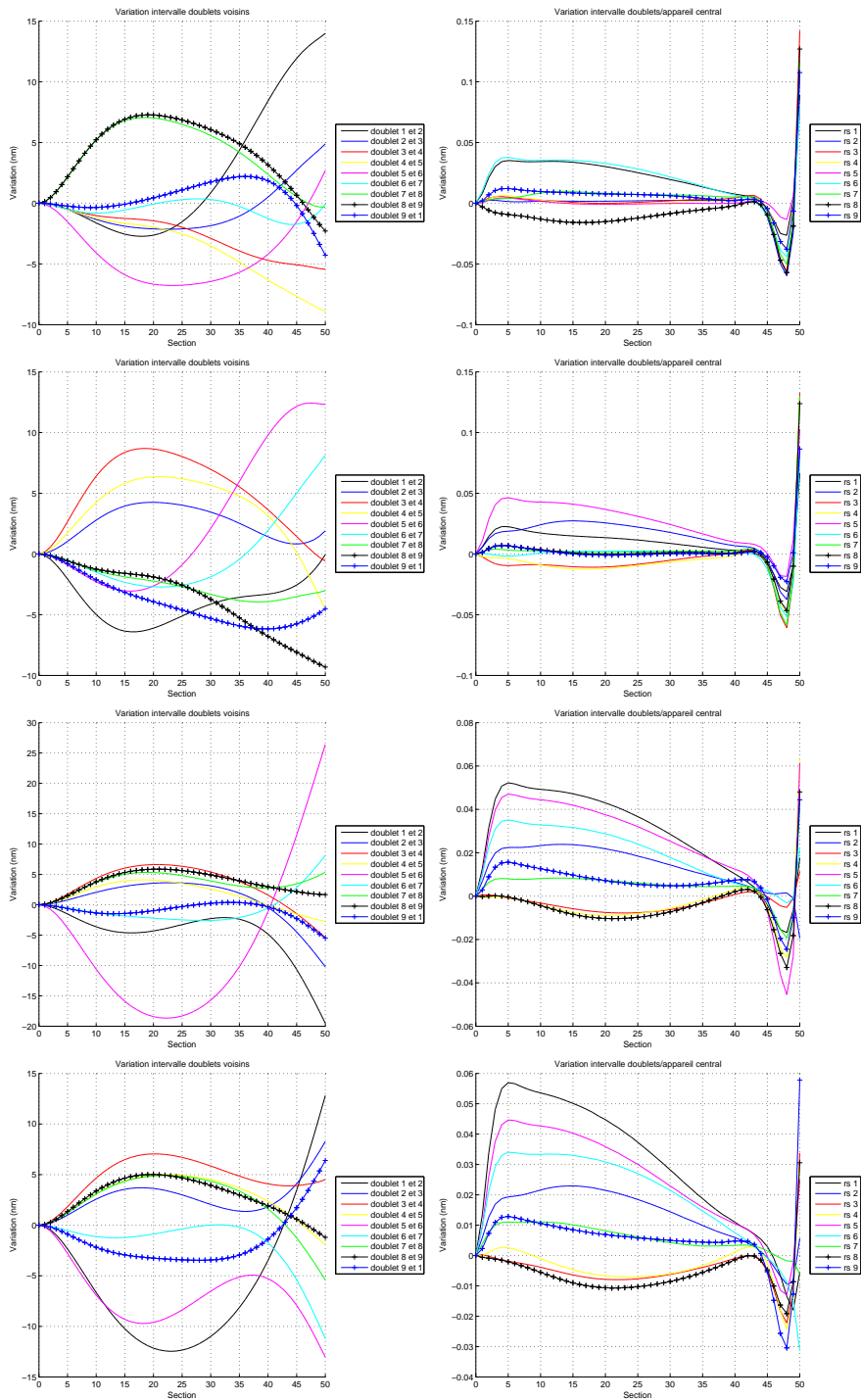


FIGURE 6.17 – Variation des distances entre doublets voisins (à gauche) et entre doublets et appareil central (à droite) pour un axonème déformé en mode I_i (première ligne), en mode II_i (deuxième ligne), en mode III_i (troisième ligne) et en mode IV_i (dernière ligne)

6.5. Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine

Comme, par convention, les abscisses des cellules qui se succèdent le long du modèle sont négatives, l'ancrage du modèle est situé à droite sur le schéma. Les points reportés sur les segments sont (en partant du centre du modèle) les noeuds 4 et les noeuds 1 du système de poutres inclus dans l'enveloppe convexe des doublets externes (fig. 5.15). Les couleurs, dont sont affectés les 9 segments représentés, sont fonctions de leur éloignement par rapport au premier plan. Ainsi, le doublet externe N°8 est représenté en blanc, et le doublet externe N°3 est représenté en violet. Bien que les bras de dynéine ne soient pas actifs entre les doublets externes N°5 et 6, ils sont représentés. Ces deux panneaux donnent une vue d'ensemble des déformations subies par les cellules périodiques dans les trois directions de l'espace local qui leur est à chacune associé. Les panneaux de gauche des figures 6.18 et 6.19 sont relatives aux déformées obtenues selon

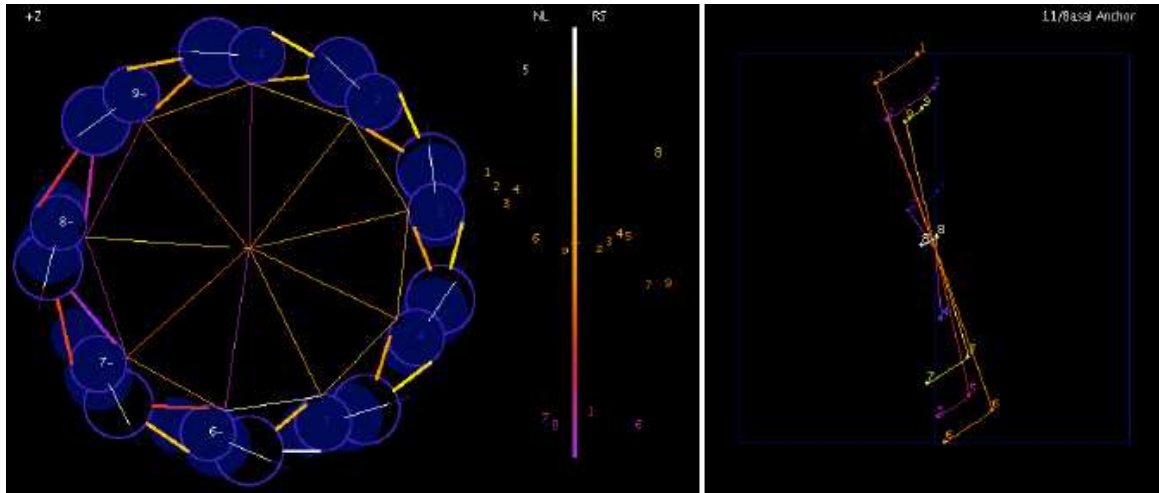


FIGURE 6.18 – Mode de chargement I_i (section #21)

les Modes I_i et II_i au niveau de la 21^{ème} section. Le résultat essentiel que les planches illustrent, est que les doublets externes dont les bras de dynéine sont actifs s'écartent et inversement se rapprochent lorsque les bras de dynéine sont inactifs. Ces mouvements cylindriques sont accompagnés d'un allongement - toutefois minime, compte tenu des conditions que nous avons définies - des cylindres axonémaux dans le plan de courbure du modèle, et d'un aplatissement dans la direction perpendiculaire. Ces résultats corroborent partiellement les hypothèses proposées par le modèle de l'embrayage géométrique, dans la mesure où, les doublets externes se déplacent effectivement dans le cylindre axonémal, et où ces mouvements sont opposés à ceux qu'il prédit. Dans les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, nous n'avons jamais observé de rotation des doublets autour de leur axe longitudinal, les segments blancs et bleus étant toujours parallèles.

Les panneaux homologues des figures 6.20 et 6.21 confirment que les mouvements des dou-

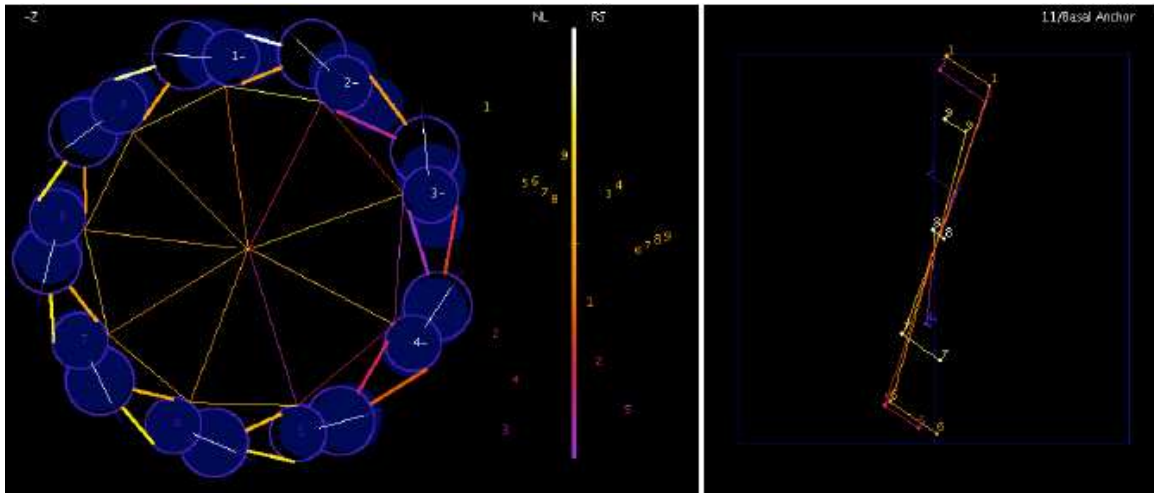


FIGURE 6.19 – Mode de chargement II_i (section #21)

blets externes observés ci-dessus sont bien relatifs à l'activité de leurs bras de dynéine, puisque selon les Modes III_i et IV_i , les doublets externes des deux faces s'éloignent les uns des autres. Les panneaux de droites de ces quatre planchent montrent que les doublets externes subissent

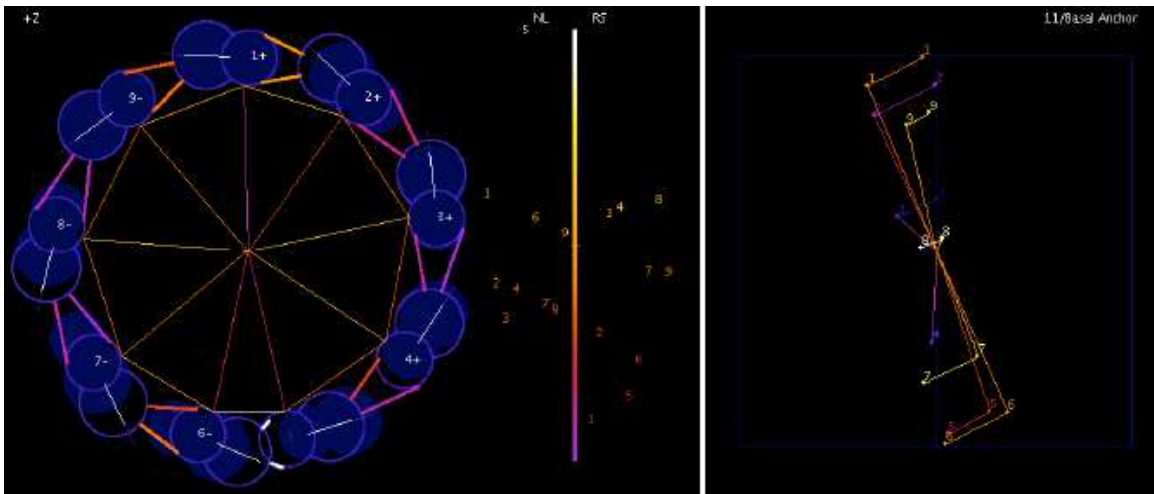


FIGURE 6.20 – Mode de chargement III_i (section #21)

des contraintes longitudinales dirigées vers l'extrémité libre du modèle et vers la base du modèle sur les deux faces opposées de l'axonème délimitées par le plan perpendiculaire au plan de battement. Ces contraintes longitudinales, qualitativement comparables à cette abscisse entre les quatre modes de chargement, sont inversées quand la polarité de la courbure est inversée et jouent nécessairement un rôle majeur vis-à-vis de la conformation locale des doublets externes eux-mêmes, c'est-à-dire sur les interactions tubuline/tubuline incluses dans les "murs" des microtubules et dont on sait qu'elles sont impliquées dans l'activité de complexes moléculaires

6.5. Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine

associés aux bras de dynéine.

Le long de la deuxième partie du segment d'intérêt que nous avons défini, les observations sont

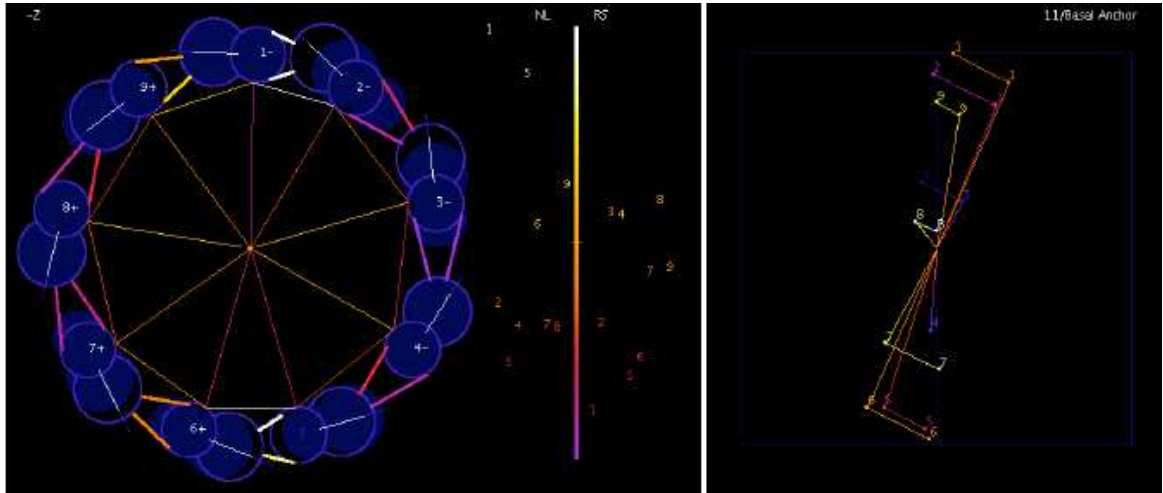


FIGURE 6.21 – Mode de chargement IV_i (section #21)

différentes selon les deux types de Modes de chargements considérés (fig. 6.22-6.25).

Comme le montrent les coupes transversales du modèle, selon les Modes I_i et II_i , l'ensemble des doublets forme une hélice droite quel que soit la polarité de la courbure. Cette donnée est à rapprocher de notre analyse précédente, puisqu'en échangeant les activités des deux faces opposées de l'axonème, nous introduisons une dissymétrie. Cette dissymétrie a une incidence sur la réponse des doublets externes, fonction de l'ensemble des contraintes qui se propagent le long et autour de l'axonème.

Cette hélicité n'est pas observée dans les déformées obtenues selon les Modes III_i et IV_i , pour lesquels la conformation de la section proximale encastrée est, à très peu près, recouverte. Quoiqu'il en soit, le résultat essentiel que nous avons décrit plus haut, à savoir que les doublets externes dont les bras de dynéine sont actifs s'éloignent, est également observé le long de la partie distale du segment d'intérêt que nous avons considéré.

Contrairement à ce qui est observé le long de la partie proximale du segment d'intérêt, les déformations longitudinales observées selon les deux types de contraintes internes correspondant aux 4 modes de chargement sont cette fois différentes. Selon les Modes I_i et II_i les noeuds 1 et 4 relatifs aux noeuds des doublets externes actifs et inactifs sont respectivement déportés vers le pôle proximal et le pôle distal du modèle ; selon les Modes III_i et IV_i , ces déplacements sont symétriques. Dans tous les cas de figure cependant, les doublets externes, présents sur la surface interne de l'arc obtenu, sont projetés vers la partie distale du modèle ; ceux situés sur la surface externe de l'arc subissent une déformation opposée.

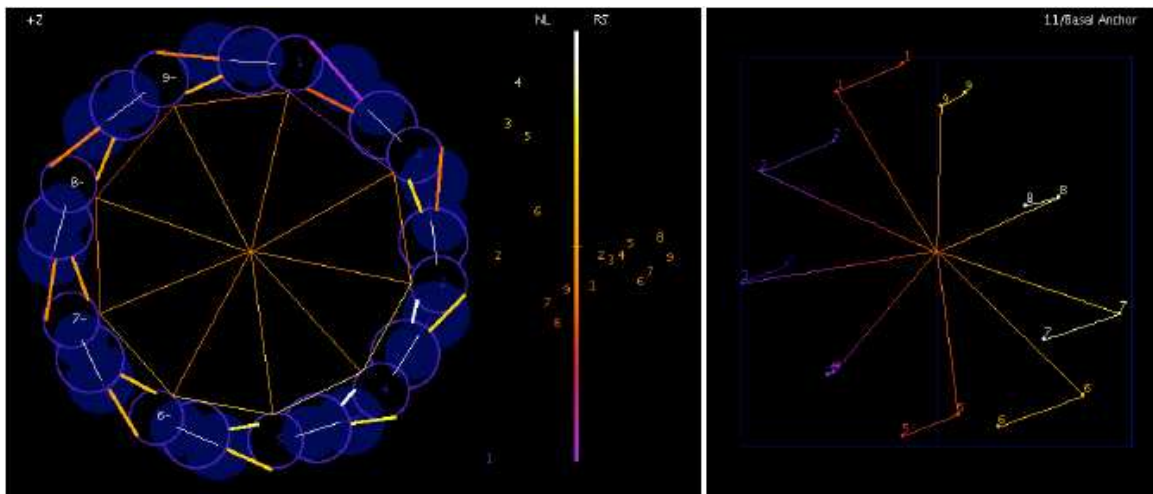


FIGURE 6.22 – Mode de chargement I_i (section #41)

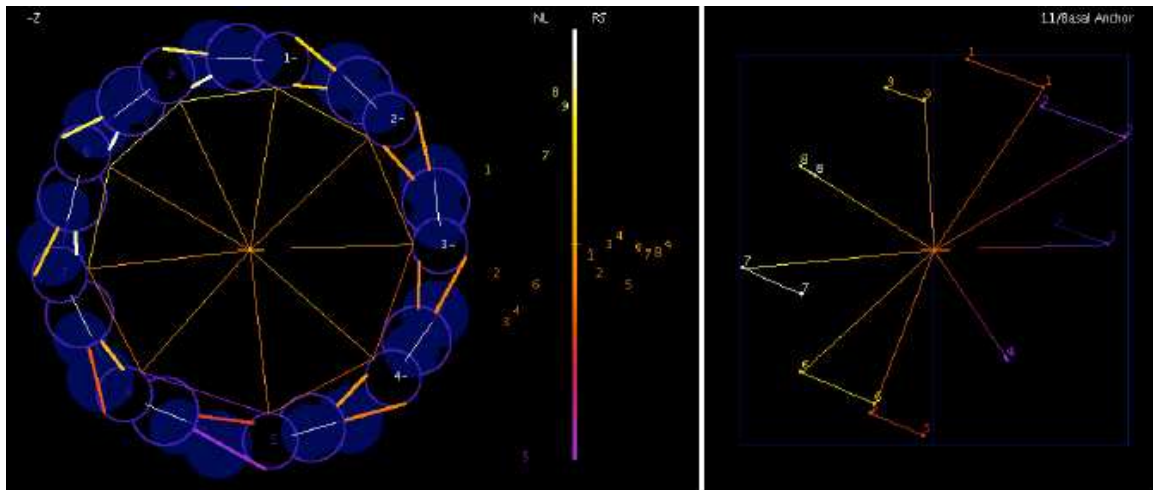


FIGURE 6.23 – Mode de chargement II_i (section #41)

6.5.3 Interprétation dynamique des déformées obtenues selon des efforts internes

Si nous interprétons notre analyse des déformées obtenues selon les quatre modes de chargement à l'aune des prédictions du modèle de l'embrayage géométrique, nous pouvons proposer un cycle logique de succession des allumages des moteurs de dynéine sur les deux faces de l'axonème au cours d'un cycle de battement (figure 6.26).

En supposant que le rapprochement des doublets externes préside à l'allumage des moteurs

6.5. Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine

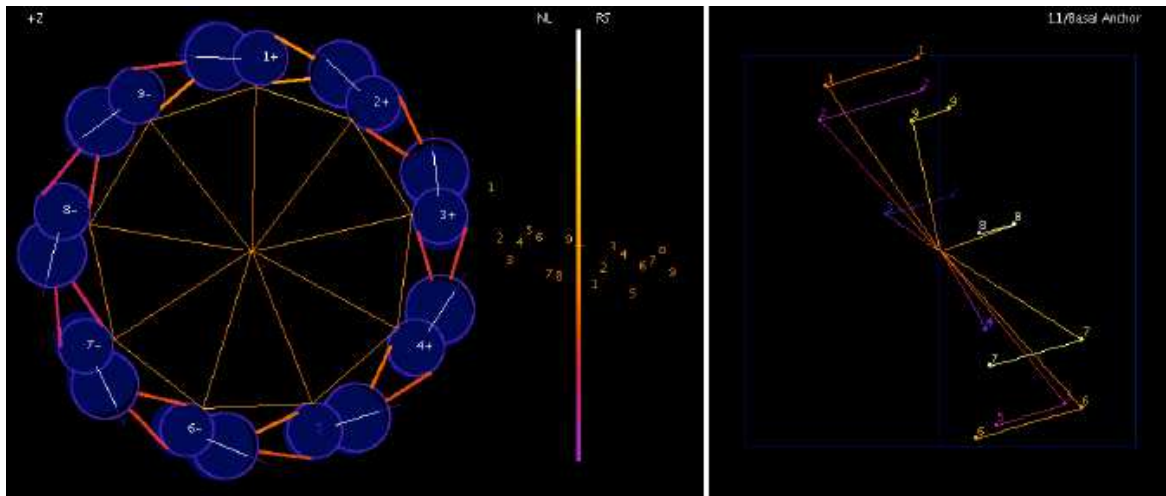


FIGURE 6.24 – Mode de chargement III_i (section #41)

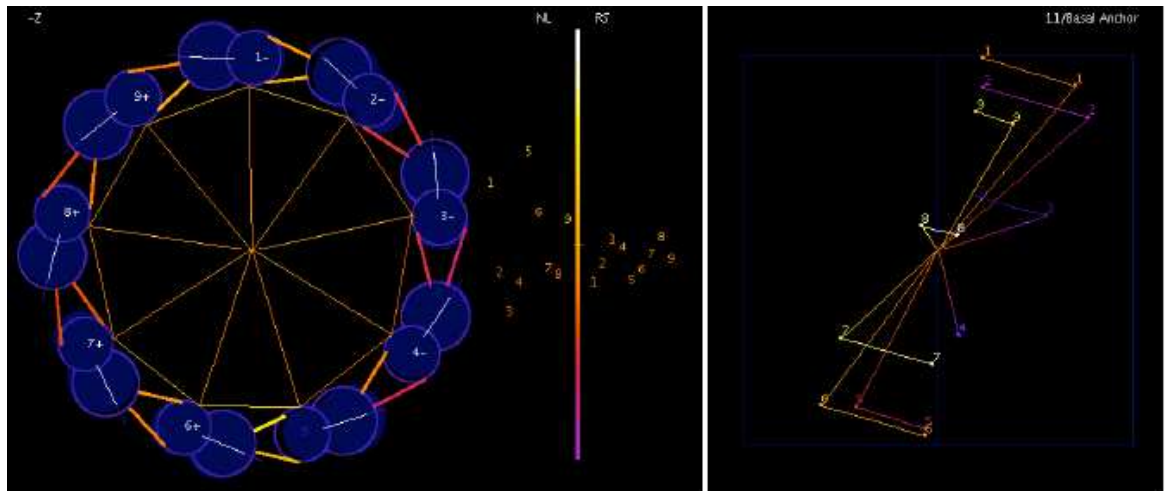


FIGURE 6.25 – Mode de chargement IV_i (section #41)

comme le prédit le modèle de l'embrayage géométrique, c'est-à-dire, compte tenu des données de biologie cellulaire et de biochimie, à leur liaison chacun à l'une des molécules de tubuline β qui leur font face, on peut proposer un cycle en 4 phases.

- Par simplification, nous commençons par la courbure induite par le Mode I_i dans le sens $+X_3$: selon le Mode I_i , l'axonème se courbe dans le sens $+X_3$, les doublets externes "actifs" s'éloignent et les doublets externes "inactifs" se rapprochent,
- au dessus d'un certain seuil de tension, les doublets inactifs qui se rapprochent deviennent actifs, amplifient la courbure dans la même polarité tout en produisant une force dans le sens anti-canonique. Le Mode de chargement est alors le Mode III_i ,
- au dessus d'un autre seuil de tension, la polarité de la courbure doit être inversée. Les bras

Chapitre 6. Etude d'une structure axonémale réduite

de dynéine qui étaient actifs dans le sens canonique deviennent inactifs et ceux qui étaient actifs dans le sens anti-canonique changent de polarité de fonctionnement. Le mode de chargement est alors le Mode II_i .

– Le cycle reprend de façon symétrique, Mode II_i , puis IV_i , puis I_i , et ainsi de suite.

Dans ce schéma, les "seuils de tensions" sont des notions vagues qu'il faut évidemment préciser et qui dépendent inéluctablement de la forme du train d'onde qui se propage le long des flagelles et/ou des cils, et donc de l'ensemble des contraintes auxquelles ces organelles sont soumis, y compris celles qui sont dues au milieu de nage dans lequel ils se meuvent. On peut concevoir des étapes intermédiaires lors des transitions $[III_i \rightarrow II_i]$ d'une part, et $[IV_i \rightarrow I_i]$ d'autre part, et selon lesquelles le passage de l'état "anti-canonique" à l'état "canonique" de l'activité des bras de dynéine est moins abrupt que celui que nous avons envisagé ici.

Ce modèle à l'avantage de proposer une solution simple de l'échange de l'activité entre les deux faces de l'axonème, ce que le modèle original de l'embrayage géométrique de Charles Lindemann ne permet pas.

Il n'en reste pas moins que l'ensemble des résultats que nous avons obtenus l'ont été sur un segment court de l'axonème soumis à des courbures de faibles amplitudes, et qu'ils doivent être perfectionnés ; c'est à cette tâche que la suite de ce travail de thèse s'attellera.

6.5. Déformations de l'axonème induites par l'activité des bras de dynéine

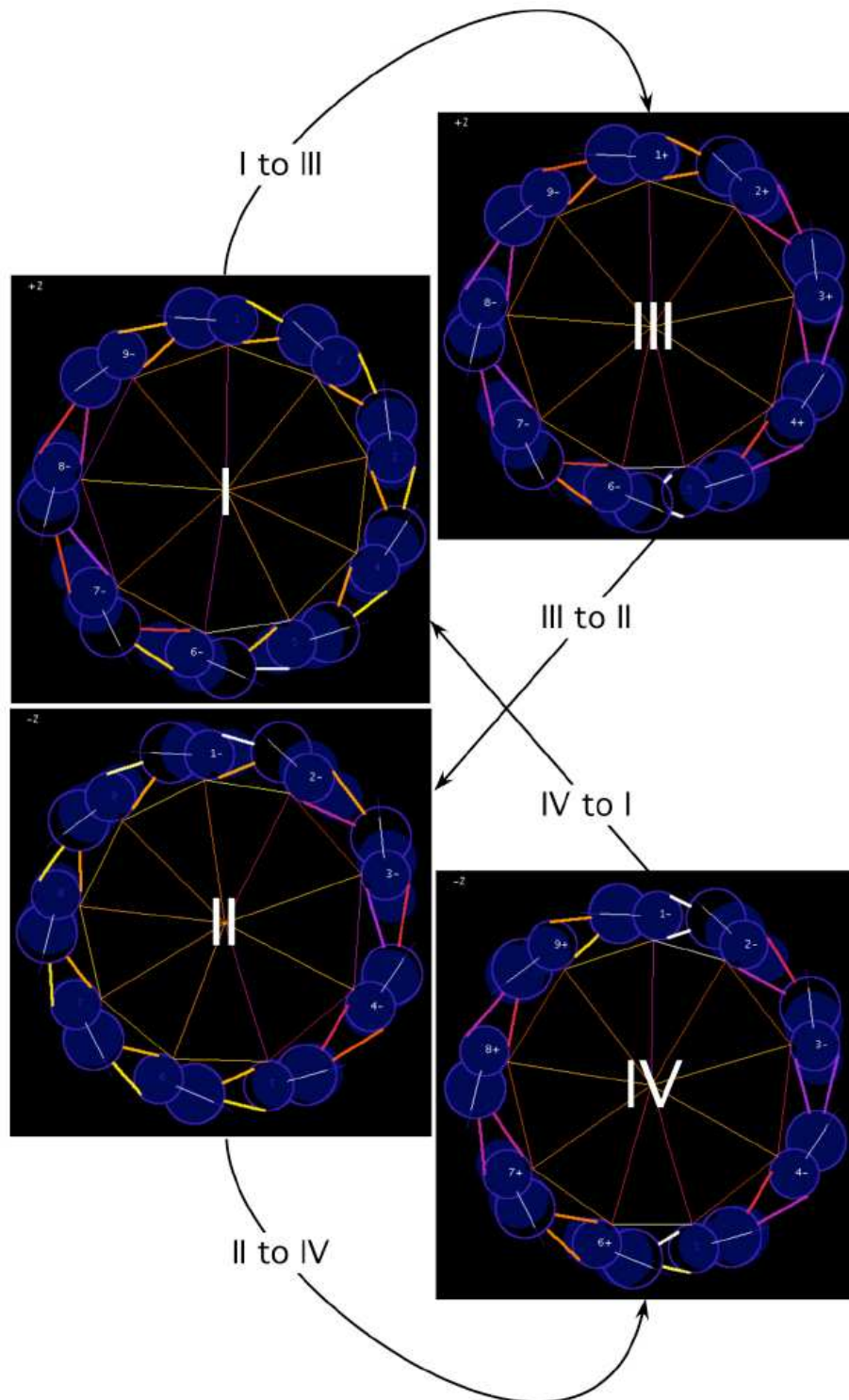


FIGURE 6.26 – Cycle proposé de succession des allumages des moteurs de dynéine sur les deux faces de l'axonème au cours d'un cycle de battement

Chapitre 6. Etude d'une structure axonémale réduite

Chapitre 7

Application des techniques d'homogénéisation sur la structure de l'axonème.

Dans ce chapitre, nous appliquons la procédure d'homogénéisation proposée au chapitre 2 à la structure simplifiée de l'axonème décrite dans le chapitre 5. Dans un premier temps, les propriétés mécaniques sont obtenues et dans un deuxième temps, l'homogénéisation porte sur les déformations libres.

7.1 Homogénéisation des propriétés mécaniques de l'axonème

Dans le chapitre 5 la cellule périodique a été décrite et une structure comprenant un nombre limité de cellules a été étudiée. Dans ce qui suit, les propriétés d'une structure présentant un grand nombre de cellules sont déterminées par la technique d'homogénéisation du chapitre 2. La cellule périodique étudiée dans le présent chapitre est géométriquement identique à celle du chapitre 5. Par contre, il a été constaté que la stabilité de la structure étudiée au chapitre 6 tient principalement aux conditions d'encastrement des doublets et que la cellule périodique du chapitre 5 est hypostatique. Il a donc été choisi de remplacer les barres par des poutres afin d'obtenir une structure au moins isostatique. Cette structure présente une périodicité unidimensionnelle ; la cellule de base est représentée à la figure 7.1. L'application de la procédure d'homogénéisation conduit aux raideurs explicitées dans le tableau 7.1. On constate que seules les raideurs diagonales sont non nulles et que la structure de l'axonème ne présente pas de couplage. Ce résultat est *a priori* étonnant car la cellule est complexe et ne présente pas de plans de symétrie.

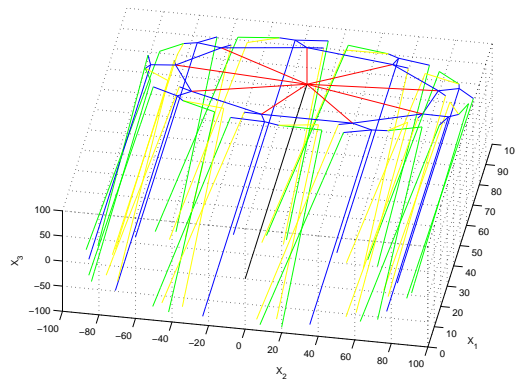


FIGURE 7.1 – Période élémentaire représentative de l'axonème

Homogénéisation	
K_{11}	$= 6,89.10^6\text{N}$
K_{22}	$= 3,73.10^2\text{N}$
K_{33}	$= 3,41.10^2\text{N}$
K_{44}	$= 6,21.10^8\text{N.m}^2$
K_{55}	$= 2,62.10^{10}\text{N.m}^2$
K_{66}	$= 2,62.10^{10}\text{N.m}^2$

TABLE 7.1 – Valeurs des raideurs équivalentes de l'axonème

Cependant, ce résultat peut toutefois se démontrer partiellement en prenant en compte la périodicité angulaire de la disposition des doublets, d'angle 40° . Considérons en effet les termes de la matrice de raideur dans deux bases déduites l'une de l'autre par rotation de 40° autour de l'axe de l'axonème. La structure dans son ensemble est invariante par une telle rotation. On en déduit que les termes de couplage K_{23} et K_{56} sont nuls et que les termes diagonaux K_{22} et K_{33} sont identiques, ainsi que K_{55} et K_{66} .

Pour tester la validité des raideurs obtenues, nous considérons la structure constituée de 100 périodes élémentaires, encadrée à une extrémité et sollicitée par un effort à l'extrémité libre. Les différents doublets sont connectés par un plan rigide au niveau de l'extrémité libre.

Remarque 7.1 On notera que les calculs sont ici réalisés dans l'hypothèse des petits déplacements.

7.1. Homogénéisation des propriétés mécaniques de l'axonème

ments contrairement à ceux du chapitre 6. Ceci permet de prendre en compte ici un nombre de cellules plus important.

Les graphiques de la figure 7.2 permettent de comparer les résultats obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente. Trois sollicitations sont considérées :

- sollicitation de traction obtenue en imposant un effort longitudinal à l'extrémité libre,
- sollicitation de flexion pure due à un couple imposé autour de X_3 à l'extrémité libre,
- sollicitation de torsion induite par un couple autour de X_1 imposé à l'extrémité libre.

On notera le bon accord entre les résultats numériques obtenus sur la structure complète et les résultats calculés sur la poutre équivalente. Ceci valide indirectement la détermination des raideurs K_{11} , K_{55} , K_{66} et K_{44} .

La figure 7.3 illustre les résultats obtenus pour une sollicitation de flexion simple induite par un effort transversal imposé à l'extrémité libre. La figure montre que les résultats obtenus sur la structure complète ne correspondent pas à ceux obtenus sur la structure homogénéisée. Compte tenu des résultats du chapitre 3, ce nouveau calcul montre à nouveau que la technique d'homogénéisation tend à sous-estimer la raideur en cisaillement, spécialement dans le cas de structures très souples en cisaillement. Nous allons montrer que l'écart entre les résultats d'homogénéisation et ceux obtenus sur la structure complète se réduit lorsque la raideur en cisaillement est plus élevée. Ceci peut être obtenue en rigidifiant les éléments transverses.

A cet effet, la comparaison est effectuée à nouveau entre les deux calculs en augmentant certains modules élastiques constitutifs. Ainsi, le module d'Young des liens de nexine et des ponts radiaires est fixé à 159pN.m^{-2} ; ceci revient à multiplier par 10000 le module d'Young des liens de nexine et par 10 celui des ponts radiaires. Les raideurs obtenues pour la poutre équivalente sont données dans le tableau 7.2. On pourra observer que les raideurs équivalentes de cisaillement ont été multipliées environ par 7, alors que les autres termes de raideur gardent des valeurs comparables aux résultats du calcul antérieur

La comparaison des déplacements transverses obtenus sur la structure complète et sur la structure homogénéisée est illustrée par la figure 7.4. On note que les résultats obtenus par les deux méthodes de calcul sont maintenant quasiment identiques. En résumé, le domaine de validité de la technique d'homogénéisation semble conditionné par le contraste entre les différents termes de raideur de la poutre équivalente, la technique d'homogénéisation n'étant apparemment plus applicable lorsque le rapport entre la raideur en cisaillement et les autres raideurs devient trop faible.

Chapitre 7. Application des techniques d'homogénéisation sur la structure de l'axonème.

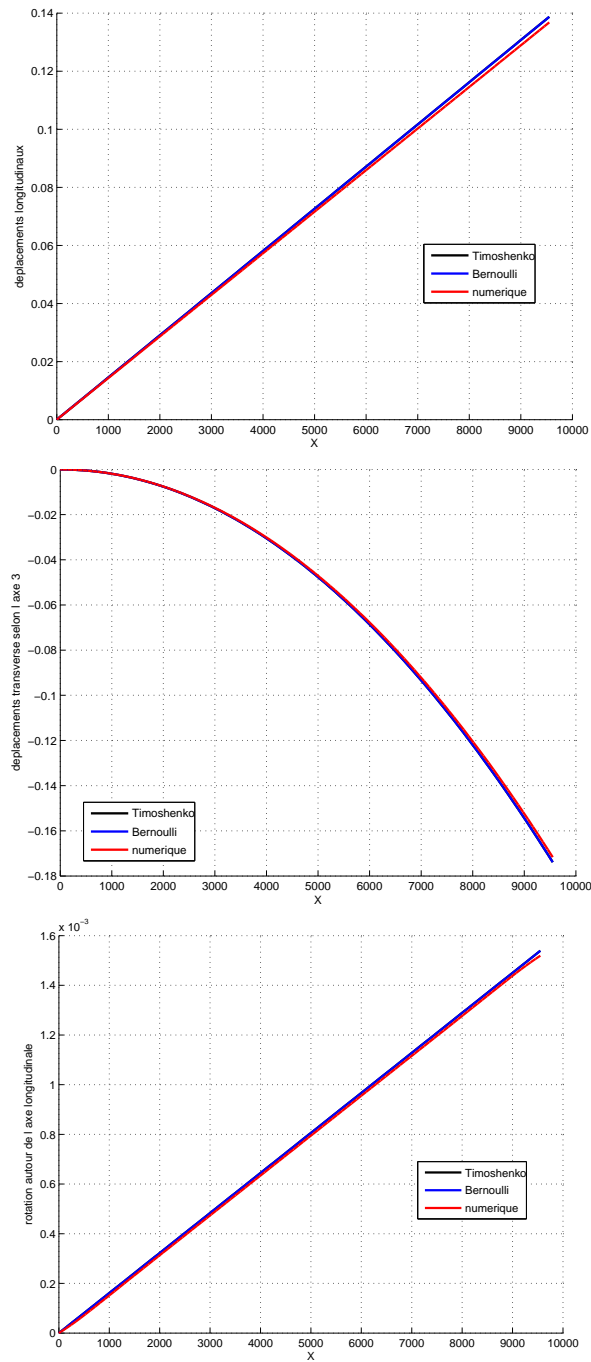


FIGURE 7.2 – Comparaison des déplacements obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente : déplacement longitudinal sous sollicitation de traction (en haut), déplacement transversal du au couple de flexion (deuxième ligne) ; rotation longitudinale sous l'effet du couple de torsion (troisième ligne)

7.2. Homogénéisation des déformations libres appliquées sur l'axonomie

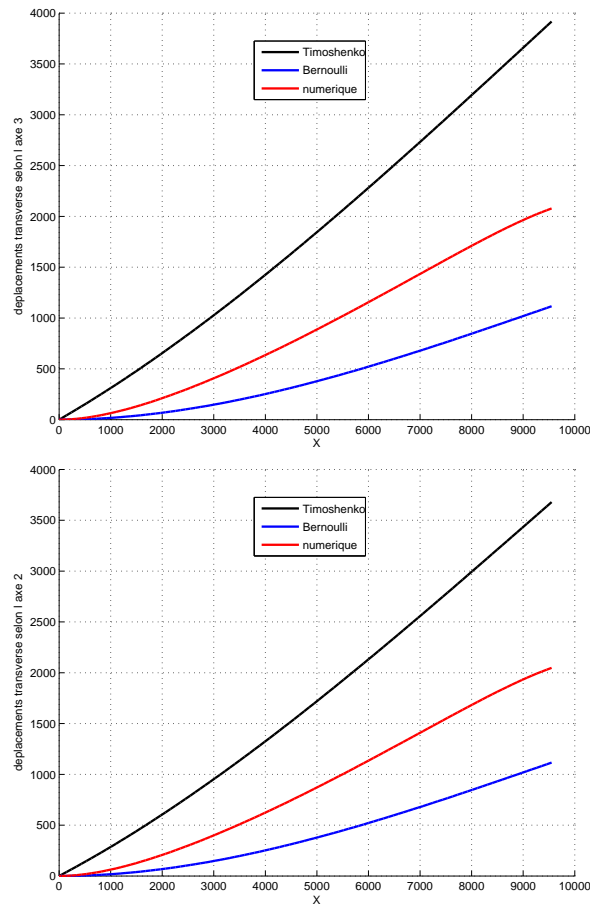


FIGURE 7.3 – Comparaison des déplacements obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente : déplacement transversal dû à un effort orienté selon X_3 (en haut) ; déplacement transversal dû à un effort orienté selon X_2 (en bas)

7.2 Homogénéisation des déformations libres appliquées sur l'axonomie

Dans un second temps, la méthode d'homogénéisation porte sur la détermination des déformations libres macroscopiques. La méthode est testée sur la structure étudiée au paragraphe précédent.

Les graphiques des figures 7.5, 7.6 et 7.7 permettent de comparer les résultats obtenus sur la structure complète (S.C.) et sur la poutre équivalente de Timoshenko et de Bernoulli. Trois sollicitations sont considérées :

- dilatation de tous les doublets,
- dilatation (respectivement rétractation) des doublets 1 à 4 (6 à 9 respectivement),

Homogénéisation	
K_{11}	$= 6,89.10^6\text{N}$
K_{22}	$= 2,90.10^3\text{N}$
K_{33}	$= 2,83.10^3\text{N}$
K_{44}	$= 6,28.10^8\text{N.m}^2$
K_{55}	$= 2,62.10^{10}\text{N.m}^2$
K_{66}	$= 2,62.10^{10}\text{N.m}^2$

TABLE 7.2 – Valeurs des raideurs équivalentes de l'axonème

- dilatation des doublets 1 à 4.

Les déformations macroscopiques équivalentes obtenues à partir de ces déformations libres sont :

- une extension Δ_f pour la première sollicitation,
- une courbure χ_{2_f} et χ_{3_f} (avec $\chi_{3_f} > \chi_{2_f}$) pour la deuxième,
- une extension Δ_f ainsi que les courbures χ_{2_f} et χ_{3_f} (avec $\chi_{3_f} > \chi_{2_f}$) pour la troisième.

Les résultats obtenus sur les poutres équivalentes concordent bien avec ceux de la structure complète. Notons que pour ces trois sollicitations, la structure ne fonctionne pas en cisaillement d'où l'obtention de résultats identiques pour la poutre de Timoshenko et de Bernoulli.

Pour terminer notre étude, nous calculons les déformations macroscopiques équivalentes à l'activation des actuateurs décrits dans les chapitres précédents. Pour ce faire, nous restons dans un cas simple c'est-à-dire que nous travaillons sur le cas 4-4 du chapitre précédent où les actuateurs des doublets 1 à 4 fonctionnent dans le sens inverse de ceux des doublets 6 à 9. Tous les actuateurs sont excités uniformément le long de la structure.

La figure 7.8 représente la comparaison des déplacements des poutres équivalentes à ceux obtenus sur la structure complète. Les déformations macroscopiques résultantes relatives à cette sollicitation correspondent principalement aux distorsions γ_{2_f} et γ_{3_f} (où $\gamma_{3_f} > \gamma_{2_f}$ dans ce cas), mais aussi secondairement à deux courbures χ_{2_f} et χ_{3_f} . On note tout d'abord que le comportement global de la poutre apparaît comme principalement gouverné par la distorsion, ce qui correspond bien aux déformations libres observées. Le comportement de la poutre de Ber-

7.2. Homogénéisation des déformations libres appliquées sur l'axonomie

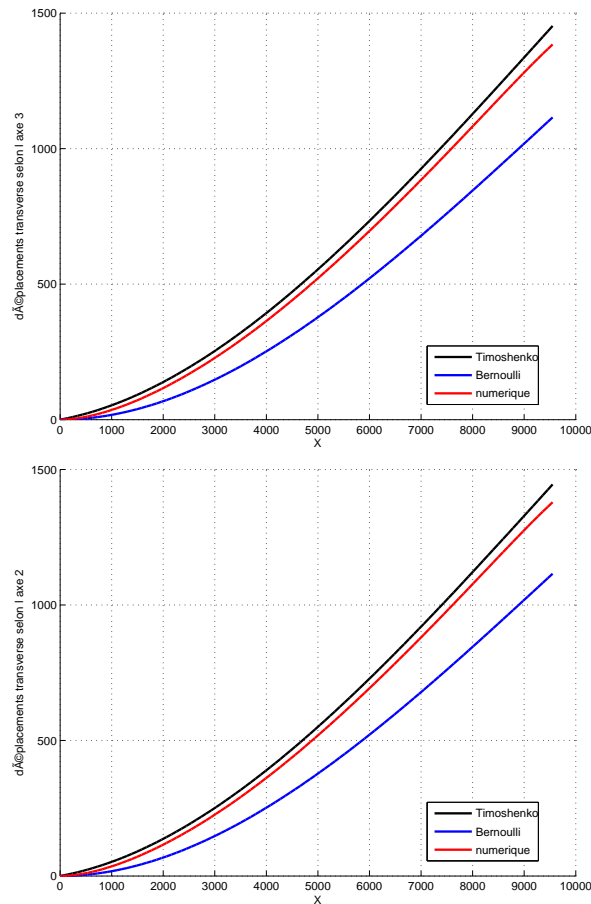


FIGURE 7.4 – Comparaison des déplacements obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente dans le cas de la structure rigidifiée :
déplacement transversal dû à un effort orienté selon X_3 (en haut) ;
déplacement transversal dû à un effort orienté selon X_2 (en bas).

noëlli présente donc une réponse très largement sous-estimée. La tendance globale observée sur les déplacements obtenus par homogénéisation est bien comparable à celle observée sur la poutre complète, mais les composantes les plus importantes de déplacement (suivant x_3) sont inférieures (d'un facteur de l'ordre de 70%) à celles observées sur la poutre complète.

En conclusion, le comportement élastique de la structure obtenu par homogénéisation est bien comparable à celui observé sur la structure complète, à condition toutefois que le contraste entre les différents termes de raideur de la structure équivalente ne soit pas trop important. Les déformations libres macroscopiques induisant la flexion et l'élongation longitudinale produisent des déformations libres macroscopiques obtenues par homogénéisation qui reproduisent bien les déformations induites dans la structure complète. Par contre, la comparaison entre structure homogénéisée et structure complète montre que les déformations libres macroscopiques

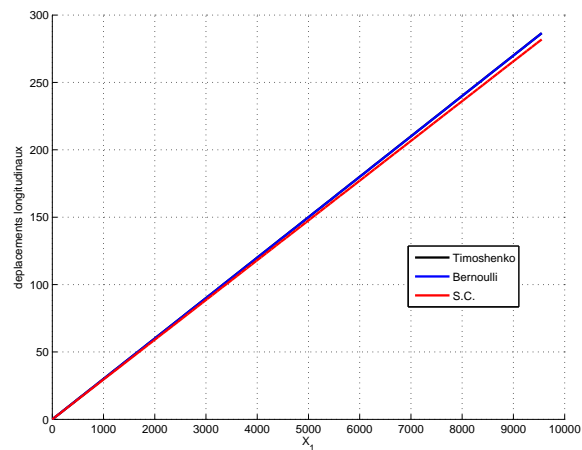


FIGURE 7.5 – Comparaison des déplacements induits par les déformations libres obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente : déplacements longitudinaux dus au premier type de déformation libre .

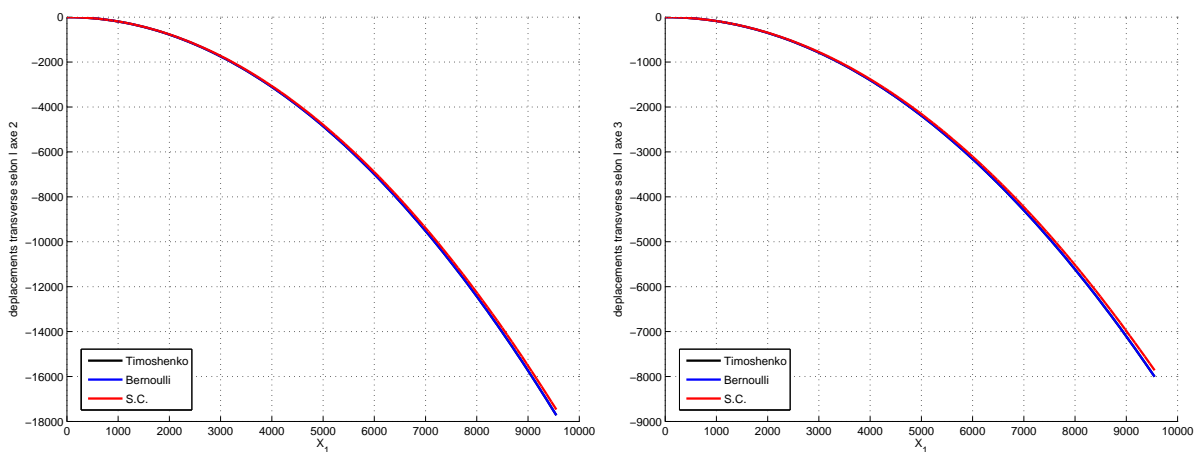


FIGURE 7.6 – Comparaison des déplacements induits par les déformations libres obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente : déplacements transversaux dus au deuxième type de déformation libre.

destinées à reproduire l'effet des actionneurs restent sous-estimées.

7.2. Homogénéisation des déformations libres appliquées sur l'axonomie

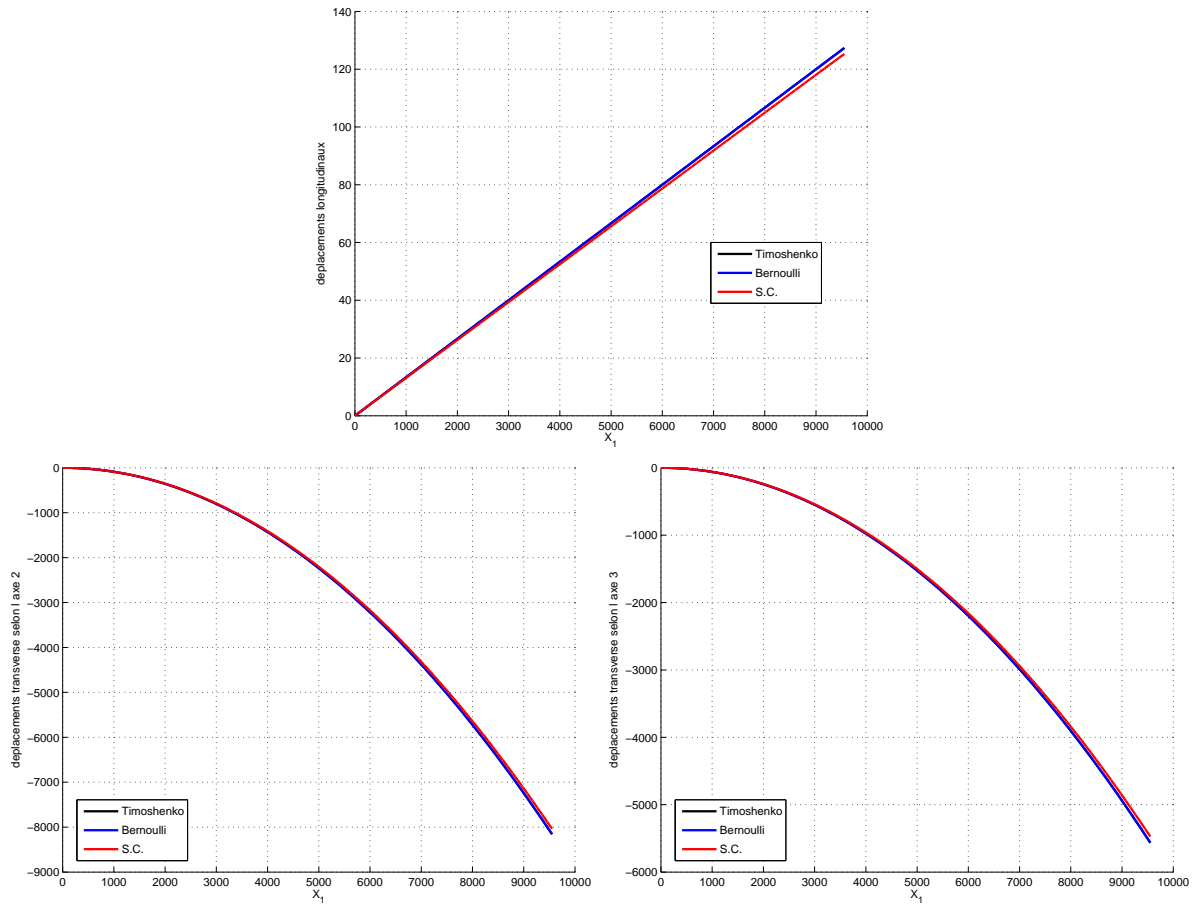


FIGURE 7.7 – Comparaison des déplacements induits par les déformations libres obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente : déplacements longitudinaux (en haut) et transversaux (en bas) dus au troisième type de déformation libre (en bas).

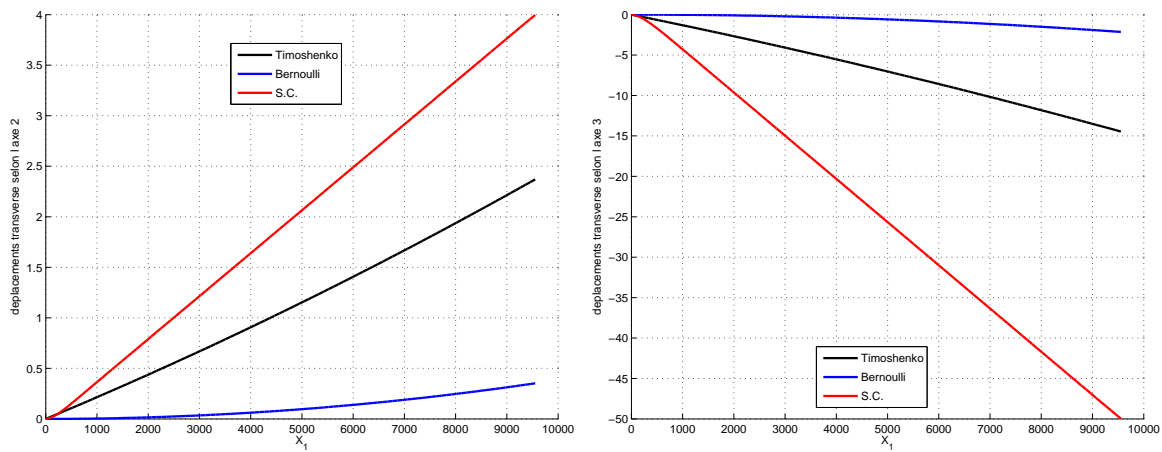


FIGURE 7.8 – Comparaison des déplacements obtenus sur la structure complète et sur la poutre équivalente : déplacements transversaux dus à l'activation des actuateurs. A droite, déplacement suivant x_3 et à gauche, déplacement suivant x_2

Conclusion générale

Ce travail de thèse a été consacré à l'homogénéisation des structures périodiques de type "poutre en treillis" et à l'application de la méthode à une structure biologique constituée par l'axonème du flagelle et des cils vibratiles.

La première partie de ce travail a porté sur la mise en oeuvre de la méthode d'homogénéisation. Dans la lignée des travaux de Laudarin [69], la méthode proposée repose sur une modélisation par éléments finis en trois étapes, qu'il est possible de mettre en oeuvre sans intervenir dans le code de calcul par éléments finis. Tous les traitements propres à l'homogénéisation sont extérieurs au code, ce qui conduit à une méthode non intrusive. Les apports résident :

- dans la prise en compte des non symétries de la microstructure qui induisent des couplages entre sollicitations élémentaires ;
- dans l'extension de la méthode d'homogénéisation permettant d'intégrer des déformations libres appliquées à la microstructure.

Nous avons tout d'abord détaillé le contexte de la théorie des poutres de Timoshenko dans laquelle la matrice des raideurs équivalentes est pleine. Les calculs analytiques sont effectués dans le cas de poutres isostatiques et hyperstatiques.

La procédure d'homogénéisation proposée a ensuite été développée. Cette méthode est non intrusive et utilise les éléments finis. Cette procédure permet de prédire le comportement statique d'une structure périodique à périodicité unidirectionnelle soumise à des efforts externes ou à des déformations libres microscopiques (comme des dilatations thermiques par exemple). L'application de cette procédure a été réalisée sur des structures test plus ou moins complexes. Les résultats obtenus sont satisfaisants sauf lorsque les déformations libres microscopiques induisent du cisaillement pur. Notons également que cette procédure ne prend pas en compte les effets de bord.

La seconde partie concerne l'application à un problème de biomécanique. Les apports sont de deux types :

- le premier apport a trait à un modèle de structure périodique pour l'axonème et l'étude d'un segment de celui-ci par éléments finis ;
- le deuxième apport concerne l'application de la méthode d'homogénéisation à la structure complexe de l'axonème qui laisse entrevoir la possibilité de modéliser la structure complète et d'aborder d'autres problèmes présents en situation réelle tels que l'interaction fluide-structure

Nous avons modélisé par la méthode des éléments finis les variations de la distribution cylindrique des doublets externes du modèle complet pour les comparer à ce que prédit le modèle de l'embrayage géométrique proposé par Charles Lindemann. Nous avons montré que, si les

doublets externes sont effectivement impliqués dans des mouvements cylindriques lorsque le modèle se courbe, lesdits mouvements se produisent dans le sens opposé de celui prédit dans le modèle de l'embrayage géométrique, à tout le moins, le long du segment proximal de l'axonème. Ces calculs nous ont permis de proposer un cycle d'allumage des moteurs moléculaires portés par les doublets externes de deux demi-axonèmes délimités par le plan de courbure. Ce cycle respecte l'idée avancée par Charles Lindemann selon laquelle le rapprochement des doublets externes augmente la probabilité d'activation de ces moteurs. Ce travail qui fait l'objet d'une publication est le premier de ce type qui soit proposé dans la littérature.

Le dernier chapitre porte sur l'application de la méthode d'homogénéisation à la modélisation de l'axonème. Les résultats montrent que des contrastes trop importants entre les différents termes de raideur de la poutre équivalente sont mal représentés au cours du processus d'homogénéisation. De plus, la modélisation des déformations libres induites par les actionneurs biologiques reste largement sous-estimée par la méthode d'homogénéisation.

Les perspectives qui se dégagent à la suite de ce travail sont nombreuses. On peut citer :

- la prise en compte des effets de bord, qui apparaissent principalement dans le cas de structures présentant une faible raideur en cisaillement, en intégrant une méthode de régularisation telle que celles évoquées en partie 1 chapitre 3 ;
- l'application de la méthode à des structures dont la cellule comporte des éléments tridimensionnels conjointement avec des éléments de plaques et de poutres, à des structures de plaques comportant des raideurs en cisaillement faibles,...
- l'étude de la mécanique de la poutre de Timoshenko avec tous les couplages (exemples : études dynamique, calculs en grands déplacements,...) ;
- l'application d'une procédure similaire sur d'autres structures périodiques (exemples : plaques, structures 3D,...).

En ce qui concerne les perspectives liées à la biomécanique de la structure axonémale, on peut citer :

- la prise en compte des propriétés de l'appareil central ;
- la prise en compte de la cinématique complexe des liaisons (exemple : décrochement des moteurs,...) ;
- l'utilisation des résultats d'homogénéisations et des déformations libres pour modéliser l'axonème dans son milieu.

Annexe A

Cinématiques de la poutre 2D isostatique

L'objectif de cette annexe est d'établir les expressions du champ de déplacement dans une poutre bidimensionnelle sur laquelle des efforts sont imposés.

On considère un problème posé sur une poutre console bidimensionnelle (A.1) dans le plan

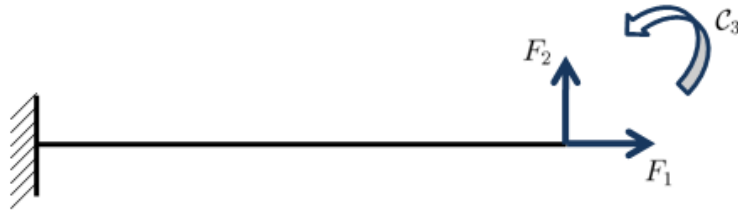


FIGURE A.1 – Poutre console soumise à une statique

x_1, x_2 . La loi de comportement est donnée par (A.1) en supposant la matrice de raideur pleine :

$$\begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

La résolution de ce problème nécessite de faire au préalable le bilan des efforts de la poutre afin d'obtenir les efforts internes. La méthode usuelle de la coupure (cf. figure A.2) conduit à :

$$\begin{cases} N(x_1) = F_1 \\ T_2(x_1) = F_2 \\ M_3(x_1) = C_3 + F_2(l - x_1) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

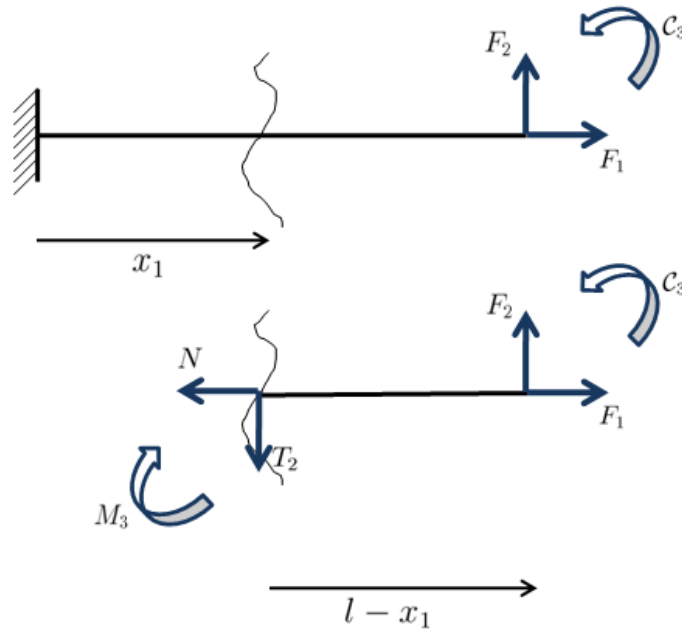


FIGURE A.2 – Effort interne d'une poutre console soumise à une statique

Déterminons maintenant les variables cinématiques pour déterminer les champs de déplacement et de rotation, ceux-ci sont obtenus :

- en inversant la loi de comportement

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

- Les variables cinématiques sont obtenues en injectant les efforts internes (A.2) dans la loi de comportement inversée (A.3).
- Enfin, l'intégration des définitions (1.4), (1.5) et (1.7) des variables cinématiques permet d'obtenir les champs de déplacement et de rotation. On a :

$$\begin{cases} u_1(x_1) = (H_{11}F_1 + H_{12}F_2 + H_{16}C_3)x_1 + H_{16}F_2(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + a \\ u_2(x_1) = (H_{12}F_1 + H_{22}F_2 + H_{26}C_3)x_1 + H_{26}F_2(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + \\ \quad (H_{16}F_1 + H_{26}F_2 + H_{66}C_3)\frac{x_1^2}{2} + H_{66}F_2(l\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6}) + cx_1 + b \\ \theta_3(x_1) = (H_{16}F_1 + H_{26}F_2 + H_{66}C_3)x_1 + H_{66}F_2(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}) + c \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La poutre étant console (cf. figure [A.1](#)) alors l'extrémité $x_1 = 0$ est encastree. On en déduit la nullité des constante a , b et c .

Annexe A. Cinématiques de la poutre 2D isostatique

Annexe B

Cinématiques de la poutre 2D hyperstatique

L'objectif de cette annexe est d'établir les expressions du champ de déplacement et des efforts internes dans une poutre bidimensionnelle sur laquelle une cinématique est imposée, ce qui rend la poutre hyperstatique.

On considère un problème posé sur une poutre bidimensionnelle dans le plan x_1x_2 . La loi de comportement est donnée par :

$$\begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

On suppose que la matrice de raideur est pleine. Les équations d'équilibre à résoudre sont données par les équations (1.15), (1.16) et (1.21) où l'on posera $p_2 = 0$.

A partir des équations d'équilibre, nous exprimons les dérivées des variables cinématiques en fonction de χ'_3 .

Commençons par (1.16), en injectant la loi de comportement (B.1), il vient :

$$\gamma'_2 = -\frac{K_{12}}{K_{22}}\Delta' - \frac{K_{26}}{K_{22}}\chi'_3 \quad (\text{B.2})$$

La première équation d'équilibre (1.15), en utilisant la loi de comportement (B.1) et le résultat (B.2), conduit à :

$$\Delta' = -\frac{K_{16} - \frac{K_{26}K_{12}}{K_{22}}}{K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}}}\chi'_3 \quad (\text{B.3})$$

Annexe B. Cinématiques de la poutre 2D hyperstatique

Au final, de (B.3) et (B.2), les dérivé des variables cinématiques sont exprimées uniquement en fonction de χ_3' . Dérivons (1.21), en tenant compte de (1.16), on obtient :

$$\frac{d^2 M_3}{dx_1^2} = 0 \quad (\text{B.4})$$

ce qui, en injectant les expressions (B.3) et (B.2), s'écrit

$$A\chi_3'' = 0 \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$A = K_{66} - \frac{K_{26}^2}{K_{22}} - \frac{\left(K_{16} - \frac{K_{12}K_{26}}{K_{22}}\right)^2}{K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}}}$$

La seule solution de cette équation est :

$$\chi_3'' = 0 \quad (\text{B.6})$$

Par ailleurs, (1.21) permet de déduire :

$$\gamma_2 = -\frac{A}{K_{22}}\chi_3' - \frac{K_{12}}{K_{22}}\Delta - \frac{K_{26}}{K_{22}}\chi_3 \quad (\text{B.7})$$

Intégrons maintenant les variables cinématiques pour déterminer les champs de déplacement et de rotation, ceux-ci sont obtenus :

- en utilisant (B.6), on tire $\chi_3' = a$ où a est une constante. En intégrant une nouvelle fois, on obtient χ_3 .
- l'équation (B.3) permet d'exprimer Δ' en fonction de a . D'où l'on déduit, en intégrant Δ .
- Il s'ensuit l'expression de γ_2 en utilisant (B.7).
- Enfin l'intégration des définitions Δ (1.4), χ_3 (1.7) et de γ_2 (1.5) des variables cinématiques permet d'obtenir les champs de déplacement et de rotation. On a :

$$\begin{cases} u_1 = -aB\frac{x_1^2}{2} + dx_1 + e \\ u_2 = a\frac{x_1^3}{6} + (b - aC + aD)\frac{x_1^2}{2} + \left(c - bC - dE - a\frac{A}{K_{22}}\right)x_1 + f \\ \theta_3 = a\frac{x_1^2}{2} + bx_1 + c \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

où l'on a posé :

$$B = \frac{K_{16} - \frac{K_{26}K_{12}}{K_{22}}}{K_{11} - \frac{K_{12}^2}{K_{22}}};$$

$$C = \frac{K_{26}}{K_{22}};$$

$$D = \frac{K_{12}}{K_{22}}B ;$$

$$E = \frac{K_{12}}{K_{22}} ;$$

On s'intéresse désormais à une poutre console de longueur l telle que l'extrémité $x_1 = 0$ est encadrée et l'extrémité $x_1 = l$ est soumise à trois conditions qui peuvent être cinématiques, statiques ou mixtes. On déduit la nullité des constantes c , e et f . Par ailleurs, de par leurs définitions (1.4), (1.5) et (1.7) les variables cinématiques sont données par :

$$\begin{cases} \Delta = -aBx_1 + d \\ \gamma_2 = a(D - C)x_1 + \left(-bC - dE - a\frac{A}{K_{22}}\right) \\ \chi_3 = ax_1 + b \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Enfin, l'injection de (B.9) dans le loi de comportement permet de déduire l'expression des efforts internes :

$$\begin{cases} N = -K_{11}aBx_1 + dK_{11} - K_{12}a(C - D)x_1 + K_{12} \left(-bC - dE - a\frac{A}{K_{22}}\right) x_1 + K_{16}ax_1 + K_{16}b \\ T_2 = -K_{12}aBx_1 + dK_{12} - K_{22}a(C - D)x_1 + K_{22} \left(-bC - dE - a\frac{A}{K_{22}}\right) x_1 + K_{26}ax_1 + K_{26}b \\ M_3 = -K_{16}aBx_1 + dK_{16} - K_{26}a(C - D)x_1 + K_{26} \left(-bC - dE - a\frac{A}{K_{22}}\right) x_1 + K_{66}ax_1 + K_{66}b \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

La résolution du problème général utilise l'expression matricielle

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_3 \\ N \\ T_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -B\frac{x_1^2}{2} & 0 & x_1 \\ \frac{x_1^3}{6} - (C - D)\frac{x_1^2}{2} - \frac{A}{K_{22}}x_1 & \frac{x_1^2}{2} - Cx_1 & -Ex_1 \\ \frac{x_1^2}{2} & x_1 & 0 \\ -K_{11}Bx_1 - K_{12}(C - D)x_1 - K_{12}\frac{A}{K_{22}} + K_{16}x_1 & -K_{12}C + K_{16} & K_{11} - K_{12}E \\ -K_{12}Bx_1 - K_{22}(C - D)x_1 - A + K_{26}x_1 & -K_{22}C + K_{26} & K_{12} - K_{22}E \\ -K_{16}Bx_1 - K_{26}(C - D)x_1 - K_{26}\frac{A}{K_{22}} + K_{66}x_1 & -K_{26}C + K_{66} & K_{16} - K_{26}E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

où il s'agit de choisir 3 lignes pertinentes en fonction des conditions aux limites imposées.

Prenons l'exemple de la poutre console soumise à un déplacement longitudinal u_0 à l'extrémité $x_1 = l$ qui est par ailleurs libre d'effort.

Annexe B. Cinématiques de la poutre 2D hyperstatique

Les trois constantes sont déterminées par la résolution du système :

$$\begin{pmatrix} u_1 = u_0 \\ T_2 = 0 \\ M_3 = 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -B\frac{l^2}{2} & 0 & l \\ -K_{12}Bl - K_{22}(C - D)l - A + K_{26}l & -K_{22}C + K_{26} & K_{12} - K_{22}E \\ -K_{16}Bl - K_{26}(C - D)l - K_{26}\frac{A}{K_{22}} + K_{66}l & -K_{26}C + K_{66} & K_{16} - K_{26}E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Annexe C

Caractéristiques homogénéisées des différentes structures 2D

Toutes les valeurs ont été calculées pour les structures suivantes où pour chacune d'entre elle la longueur l est égale à la hauteur h avec $l = h = 10$ les éléments poutre des bords sont discrétisés en 20 éléments uniformes. Par contre, les barres diagonales ne sont pas discrétisées. Les valeurs sont dans les tableaux suivants :



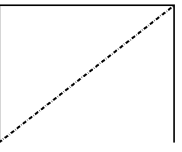
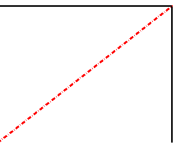
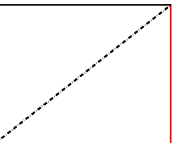
					
K_{11}	$9,4248 \cdot 10^{10}$	$7,8540 \cdot 10^{10}$	$1,0656 \cdot 10^{11}$	$1,0324 \cdot 10^{11}$	$9,0849 \cdot 10^{10}$
K_{12}	126,3691	-79,5968	$1,2683 \cdot 10^{10}$	$9,1992 \cdot 10^9$	$1,3305 \cdot 10^{10}$
K_{16}	0	$7,8540 \cdot 10^{10}$	0,0018	0,0015	$7,8540 \cdot 10^{10}$
K_{22}	$8,8693 \cdot 10^8$	$8,9052 \cdot 10^9$	$1,3367 \cdot 10^{10}$	$9,9749 \cdot 10^9$	$1,4446 \cdot 10^{10}$
K_{26}	-0,0280	0,0456	-0,0282	-0,0277	-0,0296
K_{66}	$2,3798 \cdot 10^{12}$	$1,9831 \cdot 10^{12}$	$2,3798 \cdot 10^{12}$	$2,3798 \cdot 10^{12}$	$1,9831 \cdot 10^{12}$

TABLE C.1 – tableau 1 des propriétés homogénéisées des structures 2D

Les caractéristiques mécaniques de ces structures sont les suivantes :

Annexe C. Caractéristiques homogénéisées des différentes structures 2D

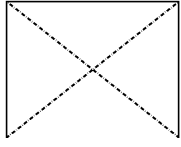
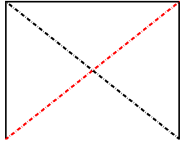
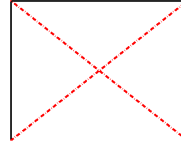
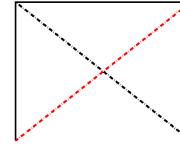
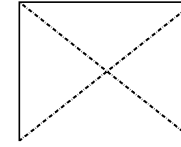
					
K_{11}	$1,1377.10^{11}$	$1,1172.10^{11}$	$1,0935.10^{11}$	$9,6012.10^{10}$	$9,8059.10^{10}$
K_{12}	$-3,4213.10^3$	$-3,7101.10^9$	$-6,2060.10^3$	$-3,8722.10^9$	$1,2550.10^8$
K_{16}	0,0029	0,0030	0,0026	$7,8540.10^{10}$	$7,8540.10^{10}$
K_{22}	$3,5762.10^{10}$	$2,8906.10^{10}$	$2,3447.10^{10}$	$3,1829.10^{10}$	$3,9175.10^{10}$
K_{26}	-0,0348	-0,0338	-0,0318	-0,0363	-0,0378
K_{66}	$2,3798.10^{12}$	$2,3798.10^{12}$	$2,3798.10^{12}$	$1,9831.10^{12}$	$1,9831.10^{12}$

TABLE C.2 – tableau 2 des propriétés homogénéisées des structures 2D

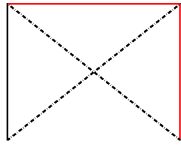
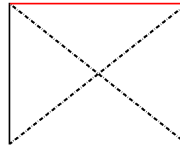
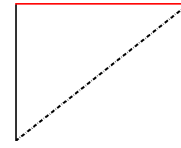
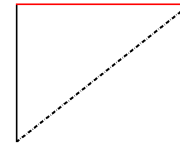

					
K_{11}	$9,4710.10^{10}$	$1,1042.10^{11}$	$8,9427.10^{10}$	$1,0513.10^{11}$	$9,4248.10^{10}$
K_{12}	$1,3318.10^8$	$-1,8737.10^3$	$1,1735.10^{10}$	$1,1199.10^{10}$	53,8997
K_{16}	$7,8540.10^{10}$	0,0037	$7,8540.10^{10}$	0,0025	0
K_{22}	$3,9003.10^{10}$	$3,5181.10^{10}$	$1,2689.10^{10}$	$1,1731.10^{10}$	$6,6579.10^8$
K_{26}	-0,0379	-0,0349	-0,0287	-0,0273	-0,0280
K_{66}	$1,9831.10^{12}$	$2,3798.10^{12}$	$1,9831.10^{12}$	$2,3798.10^{12}$	$2,3798.10^{12}$

TABLE C.3 – tableau 3 des propriétés homogénéisées des structures 2D

	poutre noire	poutre rouge
$S (m^2)$	3,1416	3,1416
$I_y (m^4)$	0,7854	3,7854
$I_z (m^4)$	0,7854	3,7854
$J (m^4)$	1,5708	1,5708
k_y	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}$
k_z	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}$
ν	0,3	0,3
$E (N.m^{-2})$	15.10^9	10.10^9

TABLE C.4 – caractéristiques mécaniques des poutres

	barre noire	barre rouge
$S (m^2)$	3,1416	3,1416
$J (m^4)$	1,5708	1,5708
ν	0,3	0,3
$E (N.m^{-2})$	15.10^9	10.10^9

TABLE C.5 – caractéristiques mécaniques des barres

Annexe C. Caractéristiques homogénéisées des différentes structures 2D

Bibliographie

- [1] **L.A. Amos, A. Klug.**
Arrangement of subunits in flagellar microtubules. *J. Cell Sci*, 14 : 523-549, 1974.
- [2] **L.A. Amos.**
Focusing-in on microtubule. *Curr Opin Struct Biol*, 10 : 236-241, 2000.
- [3] **L.A. Amos.**
Microtubule structure and its stabilisation. *Org Biomol chem*, 2 : 2153-2160, 2004.
- [4] **A. Anthoine.**
Derivation of the in plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International journal of solids structures*, 32(2) : 137-163, 1995.
- [5] **J.L. Auriault, G. Bonnet.**
Surface effects in composite materials : two simple examples. *International Journal of Engineering Science*, 29(7) : 307-323 ,1987.
- [6] **J.L. Auriault.**
Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible ? *International Journal of Engineering Science*, 29(7) : 785-195, 1991 .
- [7] **H. Ben Dhia.**
Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *C.R. Acad. Sci. Ser. HB.*, 326 : 899-904, 1998.
- [8] **H. Ben Dhia, C. Durand et G. Rateau.**
Partition 3d/coque par la méthode Arlequin. *Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structure-Giens*, III : 307-314, 2003.
- [9] **A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou.**
Asymptotic analysis for periodic structures. *North-Holland*, 1978.
- [10] **M. Bornert, T. Bretheau, P. Gilormini.**
Homogénéisation en mécanique des matériaux. *Hermes Science, Paris*, 2001.

Bibliographie

- [11] **S. Bourgeois.**
Modélisation numérique des panneaux structuraux légers. *Thèse Aix Univ.Marseille II, Marseille*, 1997.
- [12] **C. Boutin, S. Hans.**
Homogenization of periodic discrete medium : Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, 30(4) : 303-320, 2003.
- [13] **C.J. Brokaw.**
Flagellar movement : a sliding filament model. *Science*, 178 : 455-462, 1972.
- [14] **C. Brokaw.**
Computer simulation of flagellar movement : I Demonstration of stable bend propagation and bend initiation by the sliding filament model. *Biophys.*, 12 : 564-586, 1972.
- [15] **C. Brokaw, D. Rintala.**
Computer simulation of flagellar movement : III Models incorporating cross-bridge kinematics. *J. Mechanochem Cell Motility*, 3 : 77-86, 1975.
- [16] **C. Brokaw.**
Computer simulation of flagellar movement : IV Properties of an oscillatory two-states cross-bridge model. *Biophys.*, 16 : 1029-1041, 1976.
- [17] **C. Brokaw.**
Computer simulation of movement-generating cross-bridges. *Biophys.*, 16 : 1013-1027, 1976.
- [18] **C. Brokaw, D. Rintala.**
Computer simulation of flagellar movement : V Oscillation of cross-bridge models with an ATP-concentration-dependent rate function. *J. Mechanochem Cell Motility*, 4 : 205-232, 1977.
- [19] **C. Brokaw.**
Models for oscillation and bend propagation by flagella. *Symp. Soc. Exp. Biol.*, 35 : 313-338, 1982.
- [20] **C. Brokaw.**
Computer simulation of flagellar movement : VI Simple curvature controlled models are incompletely specified. *Biophys. J.*, 48 : 633-642, 1985.
- [21] **C.J. Brokaw.**
Direct measurements of sliding between outer doublet microtubules in swimming sperm flagella. *Science*, 243 : 1593-1596, 1989.

- [22] **C. Brokaw.**
Are motor enzymes bidirectional ? *Cell Motility and the Cytoskeleton*, 38 : 115-119, 1997.
- [23] **C. Brokaw.**
Computer simulation of flagellar movement : VII Conventional but functionally different cross-bridge models for inner and outer arm dynein can explain the effects of outer arm dynein removal. *Cell Motility and the Cytoskeleton.*, 42 : 134-148, 1999.
- [24] **C. Brokaw.**
Stochastic simulation of processive and oscillatory sliding using a two-headed model for axonemal dynein. *Cell Motility and the Cytoskeleton.*, 47 : 108-119, 2000.
- [25] **C. Brokaw.**
Protein-protein ratchets : stochastic simulation and application to processive enzymes. *Biophys.*, 81 : 1333-1344, 2001.
- [26] **C. Brokaw.**
Computer simulation of flagellar movement : VIII coordination of dynein by local curvature control can generate helical bending waves. *Cell Motility and the Cytoskeleton.*, 53 : 103-124, 2002.
- [27] **C. Brokaw.**
Computer simulation of flagellar movement : IX Oscillation and symmetry breaking in a model for short flagella and nodal cilia. *Cell Motility and the Cytoskeleton.*, 60 : 35-47, 2005.
- [28] **N. Buannic.**
Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes. *Thèse. Ecole Centrale Nantes*, 2000.
- [29] **N. Buannic, P. Cartraud.**
Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. Asymptotic expansion method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40-41) : 7139-7161, 2001
.
- [30] **B. Burgardt, P. Cartraud.**
Continuum modeling of beam-like trusses using averaging methods. *Computers and Structures*, 73 : 267-279, 1999.

Bibliographie

- [31] **S. Burgess, D. Carter, S. Dover, D. Woolley.**
The inner dynein arm complex : compatible images from freeze-etch and thin section methods of microscopy. *J.Cell Science*, 100 : 319-328, 1991.
- [32] **S. Burgess.**
Rigor and relaxed outer dynein arms in replicas of cryofixed motile flagella. *J. Mol. Biol.*, 252 : 52-63, 1995.
- [33] **S. Burgess, M. Walker, H. Sakakibara, K. Oiwa.**
Dynein structure and power stroke. *Nature*, 421 : 715-718, 2003.
- [34] **S. Burgess, P. Knight.**
Is the dynein motor a winch ? *Curr. Opin. Struct. Biol*, 14 : 138-146, 2004.
- [35] **D. Caillerie.**
Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 6(2) : 159-191, 1984 .
- [36] **D. Caillerie, P. Trompette, P. Verna.**
Homogenization of periodic trusses. *Congrès IASS, Madrid*, 1989 .
- [37] **P. Cartraud.**
Contribution à l'Analyse Asymptotique et à l'Homogénéisation de Structures Périodiques. *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Ecole Centrale Nantes*, 2003.
- [38] **P. Cartraud, T. Messenger.**
Computational homogenization of periodic beam like structure. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3-4) : 686-696, 2006 .
- [39] **A. Cecchi, K. Sab.**
Out of plane model dor heterogeneous periodic materials : the case of masonry. *European journal of mechanics A) solids*, 21 : 715-746, 2002.
- [40] **A. Cecchi, K. Sab.**
A comparison between a 3D discrete model and two homogenized plate models for periodic elastic brickwork. *International journal of solids and structures*, 41 : 2259-2276, 2004.
- [41] **C. Cibert.**
Elastic extension and jump of the flagellar nexin links : a theoretical mechanical cycle. *Cell Motility Cytoskeleton*, 49 : 161-175, 2001.

- [42] **C. Cibert.**
Axonemal activity relative to the 2D/3D-waveform conversion of the flagellum. *Cell Motility Cytoskeleton*, 51 : 89-111, 2002.
- [43] **C. Cibert.**
Entropy and information in flagellar axoneme cybernetics : a radial spokes integrative function. *Cell Motility Cytoskeleton*, 54 : 296-316, 2003.
- [44] **C. Cibert, J.V. Heck.**
Geometry drives the "deviated-bending" of the bitubular structures of the 9+2 axoneme in the flagellum. *Cell Motility Cytoskeleton*, 59 : 153-168, 2004.
- [45] **C. Cibert.**
Communication privée , 2006.
- [46] **C. Cibert.**
Are the local adjustments of the relative spatial frequencies of the dynein arms and the β -tubulin monomers involved in the regulation on the "9+2" axoneme ? *Journal of Theoretical Biology*, 253 : 74-89, 2008.
- [47] **C. Cibert, J. Toscano, V. Pensée and G. Bonnet.**
Bending of the "9+2" axoneme analyzed by the finite element method. *The Journal of Theoretical Biology*, (Submitted).
- [48] **M. Coster, J.L. Chermant.**
Précis d'analyse d'images. *Les presses du CNRS*, 1989.
- [49] **A. Dasgupta, R.K. Argaval, S.M. Bhandarkar.**
Three-dimensional modeling of woven-fabric composites for effective thermo-mechanical and thermal properties. *Composites science and technology*, 56 : 209-223, 1996.
- [50] **M. Dauge, L. Gruais et A. Rössle.**
The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. *SIAM J. Math. Anal.*, 31 : 305-345, 1999.
- [51] **P. Destuynder.**
Une théorie asymptotique des plaques minces en Elasticité linéaire. *Masson*, 1986.
- [52] **M. Dumontet.**
Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites. *Thèse d'Etat. Université Paris 6*, 1990.

Bibliographie

- [53] **J. Duva, J. Simmonds.**
The usefulness of elementary theory for the linear vibrations of layered, orthotropic elastic beams and corrections due to two-dimensional end effects. *J. Appl. Mech.*, 58 : 175-180, 1991.
- [54] **J.D. Eshelby.**
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem. *Proc R. Soc Lond, A* 421 : 376-396, 1957.
- [55] **H. Fan.**
On the Foundations of Beam Theory. *Ph.D. Thesis. University of Illinois at Chicago*, 1989.
- [56] **H. Felgner, R. Frank and M. Schliwa.**
Flexural rigidity of microtubule measured with the use of optical tweezers. *J. Cell Sci*, 109 : 509-516, 1996.
- [57] **M. Fujirama, M. Okuno.**
Requirement on the fixed end for spontaneous beating in flagella. *J Exp Biol*, 209 : 1336-1343, 2006.
- [58] **C. Gadelha, B. Wickstead, P.G. McKean, K. Gull.**
Basal body and flagellum mutants reveal a rotational constraint of the central pair microtubules in the axonemes of trypanosomes. *J. Cell Sci.*, 2006.
- [59] **I. Gibbon.**
Cilia and flagella of eukaryotes. *J. Cell Biol*, 91 : 107s-124s, 1981.
- [60] **F. Gittes, B. Mickey, J. Nettleton, and J. Howard.**
Flexural rigidity of microtubules and actin filaments measured from thermal fluctuation in shape. *J. Cell Biol*, 120 : 923-934, 1993.
- [61] **U. Goodenough, J. Heuser.**
Substructure of outer dynein arms. *J. Cell Biol.*, 95 : 798-815, 1982.
- [62] **U. Goodenough, J. Heuser.**
Substructure of inner dynein arms, radials spokes, and central pair/projection complex of cilia and flagella. *J. Cell Biol.*, 100 : 2008-2018, 1985.
- [63] **U. Goodenough, J. Heuser.**
Substructure of soluble and in situ ciliary dynein visualized by quick freeze deep etch microscopy. in *Cell movement : the dynein ATPases* : F.D Warner, Satir, P. Gibbons, I.R. editor Alan R Liss, New York 121-140

- [64] **R. Gregory, Y. Wan.**
Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity*, 14 : 37-64 ,1984.
- [65] **S. Gueron, K. Levit-Gurevich.**
Energetic consideration of ciliary beating and the advantage of metachronal coordination. *Proc. Natl. Acad. Sci USA*, 96 : 11240-12245, 1999.
- [66] **S. Hans.**
*Auscultation des bâtiments existants.*Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Travaux Publiques de l'Etat, Lyon, 2002.
- [67] **Z. Hashin, S. Shtrikman.**
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech Phys. Solids*, 11 : 127-140, 1963.
- [68] **M.E.J. Holwill, P. Satir.**
A physical model of microtubule sliding in ciliary axonemes. *Biophys. J.*, 58 : 905-917, 1990.
- [69] **F. Laudarin.**
Réduction de modèle, techniques d'homogénéisation et méthode probabiliste. Application à l'effet de l'interaction sol-structure sur la réponse dynamique des bâtiments. Thèse de doctorat, Université Paris-Est,2007.
- [70] **M. Lefik, B. Schrefler.**
FE modelling of a boundary layer corrector for composites using the homogenization theory. *Engineering Computations*, 13(6) : 31-42 ,1996.
- [71] **S. Li.**
Introduction to micromechanics and nanomechanics. *Lecture notes (CE236/C214)*.
- [72] **C. Li, C.Q. Ru, A. Mioduchowski.**
Torsion of the central pair microtubules in eukaryotic flagella due to bending-driven lateral buckling. *Biochemical and Biophysical research Communications*, 351 : 159-164, 2006.
- [73] **C.B. Lindemann.**
A model of flagellar and ciliary functioning which uses the forces transverses to the axoneme as the regulator of dynein activation. *Cell Motility Cytoskeleton*, 29 : 141-154, 1994.

Bibliographie

- [74] **C.B. Lindemann.**
A "geometric clutch" hypothesis to explain oscillations of the axoneme of cilia and flagella. *Journal of Theoretical Biology*, 168 : 175-189, 1994.
- [75] **C. Lindemann, K. Kanous.**
A model for flagellar motility. *Int. Review of Cytology*, 173 : 1-72, 1997.
- [76] **C. Lindemann, A. Hunt.**
Does axonemal dynein push, pull or oscillate ? *Cell Motility and the Cytoskeleton*, 56 : 237-244, 2003.
- [77] **C.B. Lindemann.**
Structural-Functional Relationships of the dynein, Spokes, and Central-Pair Projections Predicted from an Analysis of the Forces Acting within a Flagellum. *Biophysical Journal*, 84 : 4115-4126, 2003.
- [78] **C.B. Lindemann.**
Testing the geometric clutch hypothesis. *Biol Cell*, 96 : 681-690, 2004.
- [79] **C.B. Lindemann, L.J. Macauley and K.A. Lesich.**
The counter-bend phenomenon in dynein-disabled rat sperm flagella and what it reveals about the interdoublet elasticity. *Biophys J.*, 2005.
- [80] **C.B. Lindemann.**
The Geometric Clutch as a working hypothesis for future research on cilia and flagella. *Ann N Y Acad Sci*, 2007.
- [81] **C.B. Lindemann, D.R. Mitchell.**
Evidence for axonemal distortion during the flagellar beat of *Chlamydomonas*. *Cell Motility and the Cytoskeleton.*, 64 : 580-589, 2007.
- [82] **J.C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet.**
Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172 : 109-143, 1999.
- [83] **G.W. Milton.**
The theory of composites, Cambridge University Press, 2001.
- [84] **D.R. Mitchell.**
Orientation of the central pair complex during flagellar bend formation in *Chlamydomonas*. *Cell Motility Cytoskeleton*, 56 : 120-129, 2003.

- [85] **D.R. Mitchell.**
Reconstruction of the projection periodicity and surface architecture of the flagellar central pair complex. *Cell Motility Cytoskeleton*, 55 : 188-199, 2003.
- [86] **D.R. Mitchell, M. Nakatsugawa.**
Bend propagation drives central pair rotation in *Chlamydomonas reinhardtii* flagella. *J. Cell Biol*, 166 : 709-715, 2004.
- [87] **H. Moulinec, P. Suquet.**
A fast numerical method for computing the linear and non linear properties of composites. *C.R. Acad. Sci Paris II*, 318 : 1417-1423, 1994.
- [88] **A. Needleman.**
Void growth in an elastic plastic medium. *J. Appl. Mech.*, 39 : 964-970, 1972.
- [89] **S. Nemat-Nasser and M. Hori.**
Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1993.
- [90] **A.K. Noor.**
Continuum modeling for repetitive lattice structures. *Appl Mech Rev*, 41(7), 1988.
- [91] **A.K. Noor, C.M. Andersen.**
Analysis of beam-like lattice trusses. *Computers methods in Applied mechanics and engineering*, 20 : 53-70, 1979.
- [92] **A.K. Noor, M.P. Nemeth.**
Analysis of spatial beam-like lattices with rigid joint. *Computers methods in Applied mechanics and engineering*, 24 : 35-59, 1980.
- [93] **A.K. Noor, W.C. Russel.**
Anisotropic continuum models for beam-like lattice trusses. *Computers methods in Applied mechanics and engineering*, 57 : 257-277, 1986.
- [94] **K. Oiwa, H. Sakakibara.**
Recent progress in dynein structures and mechanism. *Curr Opin Cell Biol*, 17 : 98-103, 2005.
- [95] **L. Ostrowski, K. Blackburn, K. Radde, M. Moyer, D. Schlutzer, A. Moseley, and R. Boucher.**
A proteomic analysis of human cilia : identification of novel components. *Mol. Cell Proteomics*, 1 : 451-465, 2002.

Bibliographie

- [96] **G. Panasenko.**
Asymptotic partial decomposition of variational problems. *C.R. Acad. Sci. Ser. HB.*, 327 : 1185-1190, 1999.
- [97] **G. Panasenko.**
Method of asymptotic partial decomposition of rod structures. *Int. J. of Comput. Civil and Structural Eng.*, 1 : 57-70, 2000.
- [98] **G. Piperno, K. Mead and W. Shestak.**
The inner dynein arms I2 interact with a "Dynein Regulatory Complex" in Chlamydomonas flagella. *J. Cell Biol.*, 118 : 1455-1463, 1992.
- [99] **G. Rupp, M. Porter.**
A subunit of the dynein regulatory complex in Chlamydomonas is a homologue of a growth arrest-specific gene product. *J. Cell Biol.*, 162 : 47-57, 2003.
- [100] **H. Sakakibara, Y. Kunioka, T. Yamada, S. Kamimura.**
Diameter oscillation of axonemes in sea-urchin sperm flagella. *Biophysical Journal*, 86 : 346-352, 2004.
- [101] **M. Sakato, S. King.**
Design and regulation of AAA+ microtubule motor dynein. *J. Struct Biol*, 146 : 58-71, 2004.
- [102] **E. Sanchez-Palencia.**
Non homogeneous media and vibration theory, volume 127 of lecture notes in physics. *Springer, Berlin.*, 127, 1980.
- [103] **E. Sanchez Palencia.**
Boundary layers and edge effects in composite. *E. Sanchez Palencia et A. Zaoui. éditeurs. Homogenization Techniques for composite Media. volume 272 de Lecture Notes in Physics*, 1987.
- [104] **B.V. Sankar, R.V. Marrey.**
A unit-cell model of textile composite beams for predicting stiffness properties. *Composites Science and Technology*, 49 : 61-69, 1993.
- [105] **B.V. Sankar, R.V. Marrey.**
Analytical method for micromechanics of textile composite. *Composites Science and Technology*, 57 : 703-713, 1997.

- [106] **J. Schoutens.**
Prediction of elastic properties of sperm flagella. *Journal of theoretical biology*, 171 : 163-177, 1994.
- [107] **C. Shingyoji, J. Katada, K. Takahashi.**
Rotating the plane of imposed vibration can rotate the plane of flagellar beating in sea-urchin sperm without twisting the axoneme. *J. Cell Science*, 98 : 175-181, 1991.
- [108] **C. Shingyoji, H. Higuchi, M. Yoshimura, R. Katayama, T. Yanagida.**
Dynein arms oscillating force generators. *Nature*, 293 : 711-714, 1998.
- [109] **S. Sidoroff.**
Mécanique des solides , Tome 2, Résistance des matériaux. *Ecole Centrale de Lyon*, 1981.
- [110] **E. Smith, P. Yang.**
The radial spokes and central apparatus : Mechanochemical transducers that regulate flagellar motility. *Cell Motility Cytoskeleton*, 57 : 8-17, 2004.
- [111] **H. Sui, K.H. Downing.**
Molecular architecture of axonemal microtubule doublets revealed by cryo-electron tomography. *Nature*, 2006.
- [112] **S. Timoshenko.**
Résistance des matériaux. *Paris et Liège, librairie polytechnique ch. Béranger*, 1954.
- [113] **S. Timoshenko, J.N. Goodier.**
Théorie de l'élasticité. *Paris et Liège, librairie polytechnique ch. Béranger*, 1961.
- [114] **J.A. Tuszynski, T. Luchko, S. Portet, J.M. Dixon.**
Anisotropic elastic properties of microtubules. *The European Physical Journal E*, 17 : 29-35, 2005.
- [115] **G. Vernon, D. Woolley.**
Microtubule displacements at the tips of living flagella. *Cell Motility and the Cytoskeleton*, 52 : 151-160, 2002.
- [116] **L.J. Walpole.**
On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems : I. *J. Mech. Phys. Solids*, 14 : 151-162, 1966.
- [117] **F. Wan.**
On Saint-Venant's principle in pin-jointed frameworks. *Int. J. Solids Structures*, 33 : 79-97, 2003.

- [118] **W.X. Wang et al.**
New solution method for homogenization analysis and its application to the prediction of macroscopic elastic constants of materials with periodic microstructures. *Computers and Structure*, 84 : 991-1001 ,2006.
- [119] **M.J. Wargo, E. Smith.**
Asymmetry of the central apparatus defines the location of active microtubule sliding in Chlamidomonas flagella. *P. N. A. S.*, 100 : 137-142, 2003.
- [120] **F.D. Warner.**
Cross-bridge Mechanisms in ciliary Motility : The sliding-Bending Conversion. *Cold Spring Harbor Conf. Cell Proliferation.*, 3 : 891-914, 1976.
- [121] **F.D. Warner, D.R. Mitchell.**
Structural conformation of ciliary dynein arms and the generation of sliding forces in tetrahymena cilia. *The Journal of Cell Biology*, 76 : 261-277, 1978.
- [122] **P. Yang, D.R Diener, C. Yang, T. Kohno, G.J. Pazour, J.M. Dienes, N.S. Agrin, S.M. King, W.S. Sale, R. Kamiya, J.L. Rosenbaum, G.B. Witman.**
Radial spokes proteins of Chlamydomonas flagella. *J. Cell Sci.*, 119 : 1165-1174, 2006.
- [123] **N. Zanetti, D. Mitchell, F. Warner.**
Effect of divalent cations on dynein cross bridging and ciliary microtubule sliding. *J. Cell Biol*, 80 : 573-588, 1979.
- [124] **O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu.**
The finite element method. *Elsevier Butterworth Heinemann*, 2005.

Résumé : Les structures treillis constituées d'un nombre important de barres sont largement utilisées, notamment en génie civil. L'étude par éléments finis de telles structures se révèle très coûteuse dès que la maille répétitive du treillis est complexe. Il s'avère intéressant de réduire la taille du problème en définissant un milieu continu équivalent. L'objectif de la première partie de ce travail est de proposer, en se plaçant dans le cadre des méthodes d'homogénéisation des milieux périodiques, une poutre de Timoshenko équivalente à une structure périodique dont l'une des dimension est grande par rapport aux deux autres. Une des originalités réside dans l'étude de cellules de base non symétriques. Par ailleurs, on s'intéresse à la prise en compte de déformations libres (par exemple, d'origine thermique) apparaissant à l'échelle microscopique. La seconde partie est consacrée à l'étude de la structure axonemale du flagelle et des cils vibratiles. Il s'agit de proposer et valider un modèle pour cette structure biomécanique complexe et d'appliquer ensuite la méthode d'homogénéisation proposée.

MOTS-CLEFS : Homogénéisation périodique, poutre de Timoshenko, période non symétrique, déformations libres, axonème.

Abstract : Lattice structures are widely used, especially in civil engineering. The finite element analysis of such structures might require a consequent amount of computational time when the periodical mesh of this lattice is complex. Defining an equivalent continuous medium in order to reduce the size of the problem appears to be interesting. The aim of the first part of this document is to apply a homogenization method in order to find a Timoshenko beam model macroscopically equivalent to a slender structure which is periodical in the longitudinal direction. One of the unusual aspects tackled reside in the study of structures with periodical cells having a longitudinal asymmetry. In addition, the case of periodical structures with free deformation (e.g. thermal dilatation) at microscopic scale is dealt. The second part is consecrated to the study of the axonemal structure of the biological cell flagella and Cilia. A shorten version of the axonemal structure is studied at first and homogenized afterward.

KEYWORDS : Damage, Homogenization, Timoshenko beam, non-symmetrical cell, free deformations, axoneme.