



Adaptation de schémas de subdivision pour la reconstruction d'objet sans artefact

François Destelle

► To cite this version:

François Destelle. Adaptation de schémas de subdivision pour la reconstruction d'objet sans artefact. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2010. Français. NNT: . tel-00534612

HAL Id: tel-00534612

<https://theses.hal.science/tel-00534612>

Submitted on 10 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Monsieur	Pierre-Yves Coulon	Président
Monsieur	Marc Neveu	Rapporteur
Monsieur	Florent Dupont	Rapporteur
Monsieur	Loïc Barthe	Examineur
Madame	Annick Montanvert	Directrice de thèse
Monsieur	Cédric Gérot	Co-directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Annick Montanvert et Cédric Gérot pour avoir encadré cette thèse, rien n'aurait été possible sans eux. Je remercie leur bonne humeur, leur engagement à mon égard, leur écoute et leur soutien tout le long de ces travaux. Compte tenu de leurs autres responsabilités professionnelles, je ne saurais assez les remercier assez pour tout ce temps passé à mes côtés. Ils m'ont initié au métier de chercheur, et je compte bien me souvenir de leurs précieux conseils tout le long de mon parcours.

Je remercie Monsieur Marc Neveu et Monsieur Florent Dupont d'avoir rapporté mon travail, ainsi que pour leurs encouragements quand vient le temps de soutenir publiquement. Je remercie tout autant les autres membres de mon jury : Monsieur Pierre-Yves Coulon, en tant que président, ainsi que Monsieur Loïc Barthe, expert de mon domaine de recherche. Leur bonne humeur et la pertinence de leurs remarques ont rendu cette soutenance très agréable. Les discussions que j'ai tenues avec eux m'ont de plus ouvert de nouveaux horizons sur l'ensemble de ces travaux.

Je remercie par ailleurs l'ensemble des professeurs avec qui j'ai eu le bonheur d'apprendre ce passionnant métier d'enseignant. J'ai eu la grande chance d'en rencontrer beaucoup durant ma thèse, je voue à nombre d'entre eux autant d'admiration que d'affection pour leur dévouement envers leurs élèves. Je remercie les professeurs de l'Ensimag, Matthieu Moy et Franck Hetroy, qui m'ont donné l'occasion de faire mes premiers pas. Je remercie aussi les enseignants de mathématiques et d'informatique de l'IUT-UJF de Grenoble qui m'ont guidé dans mes premières heures d'enseignement. Enfin, je tiens bien sûr à remercier les enseignants d'informatique de l'école Phelma où j'ai effectué ma dernière année à Grenoble en tant que "vrai professeur débutant". Ces expériences furent aussi agréables qu'enrichissantes grâce à eux.

À mon sens, un travail de thèse est avant tout une expérience humaine.

Je n'ai certainement pas la place ici de remercier chacune des personnes qui a donné vie à cette aventure de quatre années. Je pense bien sûr aux membres du laboratoire, thésards comme chercheurs, que j'ai eu le plaisir de côtoyer chaque jour. Je considère une très grande partie d'entre eux comme des amis, et je ne les oublierai pas. Une mention spéciale à Salem, avec qui j'ai pratiquement passé tout mon temps, grand scientifique et philosophe à ses heures. Je considère sa présence et son soutien indéfectible comme l'une des réalisations les plus importantes de mes années de thèse. À Julien, co-bureau grand amateur de musique (ou considérée comme telle), à Nicolas, pour sa bonne humeur et son humour (ou également considéré comme tel), à Cédric et Benjamin, compagnons de soirées devant l'éternel, et à tous les autres : Christian, Alberto, Bertrand, Fabien, Lionel et tous les coincheurs... Et tant d'autres.

Un grand merci à ceux qui ne m'ont pas beaucoup vu durant cette vie à Grenoble loin de chez moi, ils savent bien que ça n'aurait aucun sens de les remercier de leur soutien par une ou deux phrases au début de ce mémoire.

Merci tout de même à Florent pour sa présence constante, tous les jours de cette thèse, dans les bons moments comme dans les moins agréables. Ce travail n'aurait pas été le même sans toi.

Merci à mon père et à mes petites sœurs.

Enfin, merci à celle qui m'a le plus soutenu et le plus entouré, et ce depuis ces dix années où elle a dû me supporter. Sans elle, tout ça n'aurait que peu de sens. Merci de faire de ma vie ce qu'elle est.

A common mistake that people make
when trying to design something
completely foolproof is to
underestimate the ingenuity of
complete fools.

Douglas Adams

Table des matières

1	Introduction	1
	Contexte et problématique	2
	Contributions	3
	Organisation du document	4
2	Modélisation de courbes et surfaces lisses	7
2.1	Courbes et surfaces paramétrées	8
2.1.1	Préambule	8
2.1.2	Courbes paramétrées de Hermite et de Bézier	9
2.1.3	Les courbes B-splines	13
2.1.3.1	Subdivision d'une courbe B-spline uniforme	17
2.1.3.2	Propriétés mathématiques des courbes paramétrées	21
2.1.3.3	Généralisation des courbes à la surface B-spline	23
2.1.4	Les Box-splines	25
2.1.4.1	Définitions	25
2.1.4.2	Subdivision d'une Box-spline	27
2.1.4.3	Construction du masque de subdivision	27
2.1.4.4	Quelques propriétés mathématiques importantes	30
2.2	Surface de subdivision	31
2.2.1	Le schéma de subdivision	33
2.2.2	Analyse et tuning d'un schéma de subdivision	34
2.2.3	Schémas de subdivision fréquemment utilisés	36
2.3	Voisinage topologique d'un sommet du maillage	38
2.4	Conclusion	39
3	Analyse de la géométrie d'une surface subdivisée	41
	Introduction	42
3.1	Analyse de la qualité d'une surface lisse	42
3.1.1	Définition mathématique de la courbure	42
3.1.2	Visualisation de données colorées	45
3.1.3	Visualisation pour l'analyse de surfaces lisses	47
3.1.3.1	La surface focale	47
3.1.3.2	Les lignes de réflexion	48
3.1.3.3	Les isophotes	50
3.2	Applications aux surfaces de subdivision	51
3.2.1	Courbure sur une surface de subdivision	51
3.2.1.1	Définition exacte de la mesure par rapport à la surface limite du modèle	51

3.2.1.2	Approximation de la courbure d'un maillage triangulaire quelconque	53
3.2.2	Visualisation des artefacts sur une surface de subdivision	55
3.2.2.1	Les artefacts en subdivision	55
3.2.2.2	Une mesure adaptée aux fortes variations de courbure	59
3.2.3	Un autre espace de visualisation	60
3.2.3.1	Carte d'analyse polaire au voisinage d'un sommet extraordinaire	60
3.2.3.2	Évaluation par surfaces focales polaires	68
3.2.4	Méthodes de traitement d'images appliquées aux cartes de données polaires	68
3.2.4.1	Comparaison des schémas de subdivision	73
3.2.4.2	La question du filtrage des sommets de la surface	76
	Conclusion et perspectives	77
4	Analyse fréquentielle des artefacts	79
	Introduction	80
4.1	Une analyse spectrale polaire des variations de courbure	81
4.1.1	Analyse spectrale sur un maillage	81
4.1.1.1	Principe des travaux existants	81
4.1.1.2	Notre cadre d'analyse	82
4.1.2	Une base de fonctions polaire	82
4.2	Applications et résultats	84
4.2.1	Validation de l'analyse	85
4.2.1.1	L'échantillonnage des fonctions de base continues	85
4.2.1.2	La question posée par la distorsion géométrique du repère polaire	88
4.2.2	Application de l'analyse fréquentielle à la caractérisation des artefacts	89
4.2.2.1	Apodisation des données pour une analyse à bord contraint	89
4.2.2.2	Évaluation du comportement des schémas de subdivision	91
	Conclusion	99
5	Description de la phase de subdivision topologique d'un schéma	101
	Introduction	102
5.1	Classification des subdivisions topologiques	103
5.1.1	Les formalismes de classification existants	103
5.1.2	Limitations et avantages des deux familles de descripteurs	105
5.2	Structure de notre méta-schéma	106
5.2.1	Descripteur d'insertion $\mathcal{I}$	106
5.2.2	Descripteur de connectivité $\mathcal{C}$	108
5.2.2.1	Les connexions internes intra-éléments	109
5.2.2.2	Les connexions internes inter-éléments	111
5.2.2.3	Les connexions externes	112
5.2.3	Contraintes de topologie sur le maillage subdivisé	114
5.2.4	La subdivision topologique duale	116
5.3	Les possibilités de description de notre système	117
5.3.1	Les subdivisions topologiques couramment utilisées	117
5.3.2	Description des subdivisions topologiques régulières sans rotation	117
5.3.3	Justification des bornes X et Y du secteur d'insertion des sommets v_i	122
5.3.4	Les subdivisions régulières tournantes $Q/TP(n, 1)$ et $Q/TP(1, n)$	124

5.3.5	Concaténation de descripteurs	125
5.3.6	Étude de l'espace des descriptions possibles	129
5.4	Limitations de notre système de description	130
5.5	Application pratique de notre méta-schéma	131
5.5.1	Un modèle d'implémentation	131
5.5.2	Une phase de lissage géométrique générale à tous nos descripteurs	133
5.5.2.1	Coordonnées des sommets insérés v_i dans une face	133
5.5.2.2	Filtrage passe-bas de la géométrie	135
	Conclusion	136
6	Synthèse et perspectives	139
6.1	Résumé et contributions	139
6.2	Perspectives	140

Chapitre 1

Introduction

La modélisation numérique d'un objet consiste à décrire le clone virtuel d'un objet réel, par des équations ou des données chiffrées compréhensibles par une machine. La modélisation d'un objet permet à son concepteur de le visualiser, de le manipuler et de le déformer à sa convenance afin de lui donner la forme souhaitée. Les progrès effectués ces dernières années en informatique graphique ont donné le jour à des modeleurs 3D puissants et ergonomiques, ces outils permettent au concepteur de créer un objet tout aussi rapidement qu'au moyen de techniques plus conventionnelles telles que le dessin ou la sculpture. Une fois conçu, cet objet virtuel peut être rendu réel, par une phase de production industrielle, ou être l'objet de simulations numériques afin d'évaluer ses caractéristiques physiques. Bien souvent, la problématique porte sur la numérisation d'objets réels, par un capteur 3D, stéréovision ou par *IRM*. Le concepteur peut alors interagir avec ces clones numériques plus facilement qu'avec les objets réels.

Les applications industrielles et scientifiques concernées par la modélisation numérique sont très nombreuses. L'origine de ces techniques remonte à l'industrie automobile, navale et aéronautique ; la problématique des ingénieurs de l'époque était axée sur la conception de courbes et de surfaces lisses. Depuis, la conception d'objet numérique s'est étendue à de très nombreux domaines d'études. Il s'agit désormais d'une phase de création incontournable, en particulier dans le cycle de production industrielle, nous parlons alors de *CFAO* : la conception et fabrication assistée par ordinateur. Les domaines très influencés par ces techniques comprennent également l'imagerie médicale, l'éducation, l'architecture, l'exploration archéologique, les films d'animation et plus généralement l'industrie cinématographique, ou encore les jeux vidéos.

Notre problématique est basée sur les moyens de représenter numériquement un objet. De nombreux outils mathématiques sont consacrés à la description de courbes et de surfaces. Par exemple, la définition analytique d'une fonction peut être considérée comme la représentation numérique d'une forme. Il est cependant très difficile pour le concepteur de décrire l'objet qu'il souhaite créer par un ensemble de fonctions mathématiques. C'est pourquoi d'autres techniques de modélisation de forme ont été développées : ces outils ont pour but de se rapprocher conceptuellement de l'idée que le concepteur se fait de l'objet.

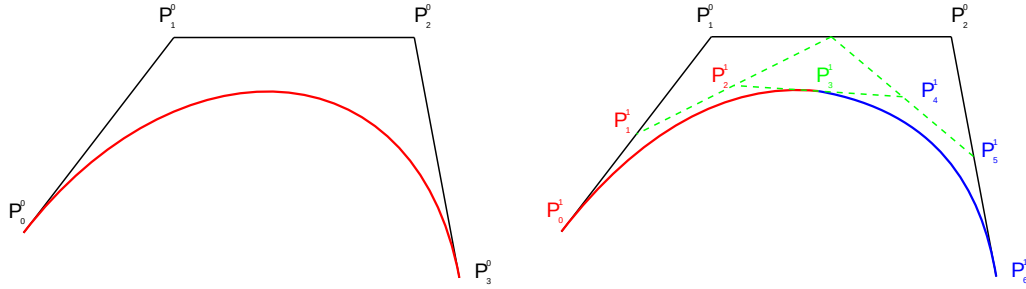


FIG. 1.1 : Principe de l'algorithme de De Casteljau sur une courbe de Bézier cubique : le polyèdre de contrôle P_i^0 d'une courbe est subdivisé de manière à ce que la courbe lisse ne change pas de forme. Les nouveaux sommets de contrôle P_i^1 sont alors plus proches de la spline.

Parmi les outils de modélisation existants, nous nous intéressons particulièrement à ceux basés sur le concept de *contrôle* de la forme. La précision de calcul des machines n'est pas infinie, même si leur puissance s'accroît très rapidement. En conséquence, une courbe ou une surface lisse est représentée en mémoire par un nombre fini d'éléments ; il s'agit d'une approximation de la courbe ou de la surface continue qu'imagine le concepteur. Un objet virtuel est ainsi représenté par un maillage : un ensemble de sommets, liés entre eux par des arêtes, formant ainsi des faces. Ceci nous porte vers la problématique du contrôle de la forme : si la courbe ou la surface lisse est approchée par un maillage de façon satisfaisante, celui-ci contient nécessairement un grand nombre de sommets. Ce maillage devient donc difficile à concevoir et à manipuler par le concepteur. En pratique, il n'est pas rare que certains modèles d'objets numériques dépassent le million de sommets. L'idée de base est ici de décrire le maillage par une forme plus grossière : la déformation d'un maillage grossier contrôle la forme du maillage dense en sommets. Avec ces outils de modélisation, le concepteur peut concevoir un objet complexe et lisse à partir d'un maillage de contrôle simple dont la forme approche celle qu'il imagine. De façon pratique, il s'agit de courbes et de surfaces paramétrées : le maillage de contrôle constitue leur domaine de paramétrisation. Parmi les autres outils couramment utilisés en modélisation, il existe les surfaces implicites — notamment les *metaballs* — et les nuages de points.

Contexte et problématique

Un outil très utilisé en modélisation de surface lisse, basé sur le contrôle de la forme par un maillage contenant peu de sommets, est la surface paramétrée B-spline. Cette appellation est une contraction de *basis spline*, une *spline* étant une courbe polynomiale paramétrée par morceaux : elle est composée de plusieurs courbes (les *patches*) jointes entre elles, chacune étant paramétrée par un petit nombre de sommets du maillage de contrôle. La surface B-spline est définie comme le produit tensoriel de deux fonctions de base B-splines. Le domaine de paramétrisation d'une telle surface est un maillage régulier composé de quadrilatères. Une propriété intéressante de ces surfaces est leur capacité à être décrites de façon récursive. En effet, l'algorithme de De Boor permet de construire une courbe paramétrée B-spline par la subdivision de son polyèdre de contrôle. Au cours d'une itération du procédé de subdivision, chacune de ses arêtes est divisée en deux arêtes plus petites, et les nouveaux sommets du polyèdre sont alors plus proches de la courbe lisse, qui elle ne change pas. Un exemple similaire à cet algorithme pour une courbe de Bézier est présenté en Figure 1.1.

Le défaut majeur de cet outil de modélisation réside dans son domaine de paramétrisation régulier. Les patches B-splines doivent être joints entre eux afin de former une surface lisse, cette phase peut d'ailleurs se révéler difficile. Tous les objets ne peuvent cependant pas être représentés par des quadrilatères : c'est le cas de la sphère, son *genre* ne le permet pas, contrairement au tore par exemple. À noter qu'il existe cependant des définitions de surfaces B-spline aux domaines de paramétrisation triangulaire.

La surface de subdivision est un outil de modélisation dont la base théorique est fondée sur les surfaces B-splines. Relativement récent, cet outil a été mis en avant dans l'industrie par Pixar et la réalisation du film d'animation *Geri's Game*. Une surface de subdivision est en réalité virtuelle, il s'agit du résultat d'un nombre infini d'itérations d'un procédé de subdivision sur le maillage de contrôle, procédé similaire à celui de l'algorithme de De Boor pour les courbes. En pratique, un nombre peu élevé d'itérations génère une surface maillée très dense en sommets et très proche de cette surface, dite *limite*. Les deux avantages majeurs de la surface de subdivision par rapport aux surfaces B-splines sont, d'une part, leur flexibilité et leur grande simplicité algorithmique, et d'autre part leur capacité à décrire des objets de genre quelconque. En effet, une surface de subdivision est définie par des règles de subdivision locales aux sommets du maillage de contrôle, quelque soit sa topologie. Cependant, malgré ses grandes qualités, cet outil présente un certain nombre de défauts. Tout d'abord, la surface en tant que telle ne possède pas de définition analytique, malgré le fait qu'il existe des techniques d'évaluation de cette surface en tout point. Ensuite, le procédé de subdivision présente des singularités. Dans une zone du maillage de même topologie que le domaine de paramétrisation B-spline, une surface de subdivision reproduit généralement une surface B-spline. Dans une zone de topologie irrégulière, certains sommets du maillage possèdent un nombre d'arêtes incidentes, leur *valence*, différent du cas régulier. Ces sommets sont dits *extraordinaires*. L'analyse d'un schéma de subdivision à la limite près d'un sommet extraordinaire est un procédé relativement difficile, et le contrôle de son comportement est un sujet encore d'actualité. Ainsi, les sommets extraordinaires du maillage sont responsables de mauvais comportements géométriques ; ceux-ci sont difficiles à définir, à caractériser et à atténuer. L'objet de nos travaux de recherche est l'étude de ces problèmes, afin d'améliorer cet outil de modélisation.

Nos études se concentreront sur le schéma de subdivision stationnaire à faible support, et non sur les outils plus récents tels que les surfaces de subdivision polaires, le schéma modifié de Levin [Levi 06] ou les schémas non-stationnaires [Cash 09]. Ceci car nous pensons qu'un tel schéma possède le grand avantage d'être très simplement décrit et implémenté ; l'analyse de leur matrice de subdivision est de plus bien connue, contrairement aux schémas non-stationnaires, pour qui une analyse de la surface limite implique de lourds traitements.

Contributions

Nous nous sommes concentrés sur deux aspects distincts de la problématique : d'une part l'analyse de la géométrie des surfaces de subdivision au voisinage d'un sommet extraordinaire, et d'autre part la caractérisation de la phase de transformation topologique d'une itération du procédé de subdivision.

Les mauvais comportements géométriques de ces surfaces étant encore mal connus, nous avons cherché à les mettre en évidence de façon efficace puis à les caractériser. Ainsi, nous avons axé nos analyses des comportements géométriques sur ces trois points :

- Établir une mesure adaptée à la mise en évidence des mauvais comportements géométriques.
- Concevoir un protocole de visualisation pour l'analyse de ces comportements, à travers un codage couleur et un espace de visualisation adapté.
- Caractériser ces comportements, à forte composante radiale et angulaire, à travers une analyse fréquentielle polaire liée à la topologie du maillage, puis comparer le comportement de plusieurs schémas de subdivision.

La phase de transformation topologique d'un schéma décrit la subdivision des faces du maillage de contrôle. Cette transformation peut être effectuée de diverses manières : nous avons cherché à classer les différentes subdivisions topologiques au moyen du descripteur le plus simple et le plus général possible. Le système que nous proposons est un codage compact, flexible et intuitif, nous montrons que celui-ci étend les protocoles de classification existants.

Organisation du document

Ce document est composé de quatre parties. Le chapitre 2 constitue un état de l'art assez général sur la modélisation de courbes et de surfaces lisses paramétrées. Nous exposons les bases théoriques des courbes et des surfaces B-splines, puis les Box-splines et enfin la surface de subdivision. Nous nous servirons de ces notions dans le reste du document.

Le chapitre 3 est consacré à l'évaluation de la qualité d'une surface lisse. Nous décrivons les méthodes existantes en visualisation pour l'analyse des surfaces. Nous adapterons ces méthodes à notre problématique, la mise en évidence des mauvais comportements géométriques provoqués par la présence de sommets extraordinaires sur un maillage de contrôle. Nous fixerons, entre autres, une mesure de qualité : le gradient de courbure absolue. Nous établirons également un protocole de visualisation adapté à la mise en évidence de ces comportements néfastes.

Le chapitre 4 est consacré à la caractérisation spectrale de ces derniers. Une telle analyse nous permet de les décrire plus rigoureusement qu'avec une évaluation visuelle. La comparaison des spectres analysés nous permet de comparer le comportement de différents schémas de subdivision, ce qui était auparavant une tâche peu aisée, faute d'une mesure de qualité pertinente.

Enfin, nous présenterons dans le chapitre 5 notre formalisme de description de la phase de subdivision topologique d'un schéma.

Chapitre 2

Modélisation de courbes et surfaces lisses

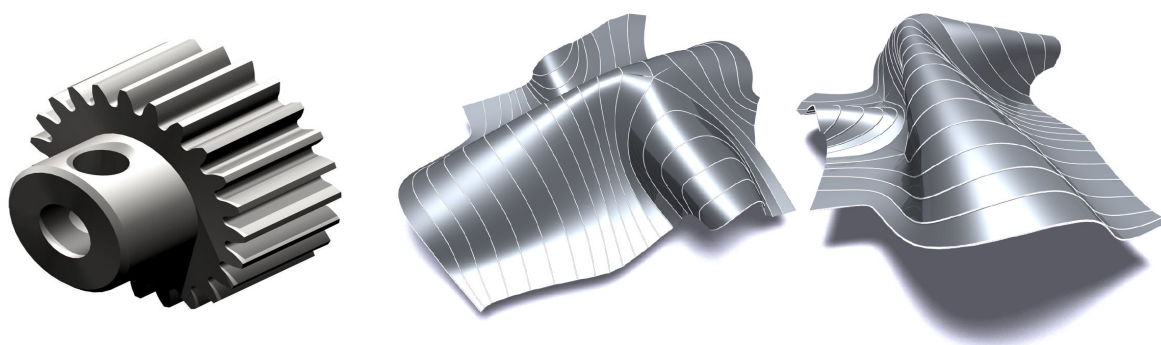


FIG. 2.1 : *La modélisation d'une surface lisse est une problématique très large, les applications industrielles basées sur ces techniques couvrent de nombreux domaines. (gauche : une pièce de CAO. droite : image issue de [Pott 08], une technique développée dans un cadre de conception architecturale)*

Sommaire

2.1	Courbes et surfaces paramétrées	8
2.1.1	Préambule	8
2.1.2	Courbes paramétrées de Hermite et de Bézier	9
2.1.3	Les courbes B-splines	13
2.1.4	Les Box-splines	25
2.2	Surface de subdivision	31
2.2.1	Le schéma de subdivision	33
2.2.2	Analyse et tuning d'un schéma de subdivision	34
2.2.3	Schémas de subdivision fréquemment utilisés	36
2.3	Voisinage topologique d'un sommet du maillage	38
2.4	Conclusion	39

2.1 Courbes et surfaces paramétrées

2.1.1 Préambule

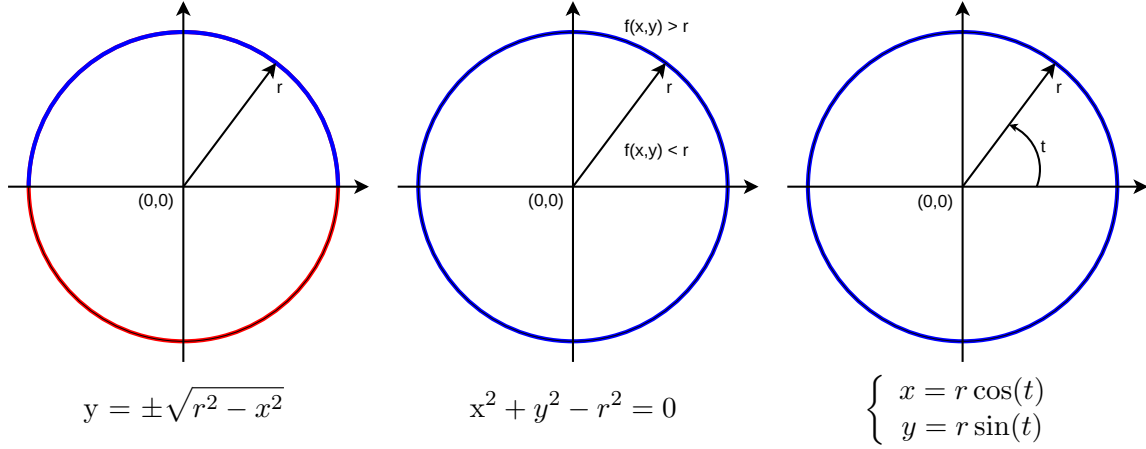


FIG. 2.2 : Trois représentations différentes d'un même cercle, de gauche à droite : définition explicite, implicite et paramétrique.

En informatique graphique, la synthèse de courbes et de surfaces lisses est une préoccupation majeure rencontrée dans de nombreuses applications industrielles. Le concepteur d'un modèle informatique souhaite manipuler, visualiser ou déformer son objet. En pratique, une surface lisse est construite à partir d'un grand nombre de points issus de l'échantillonnage d'une surface imagée continue. Le concepteur du modèle manipule cette surface au moyen d'un petit nombre de sommets d'un graphe qui guident la forme de la surface. Les outils de modélisation ont pour but de synthétiser une courbe ou une surface de façon intuitive vis-à-vis de ces guides.

En général, une courbe ou une surface peut être définie explicitement, implicitement, ou de façon paramétrique. Ces trois définitions possèdent des avantages et des limitations qui leur sont propres. Prenons l'exemple d'un cercle de rayon r centré en zéro, voir Figure 2.2. Une définition explicite de cette courbe est dans ce cas le graphe d'un ensemble de fonctions de la variable x , $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cas général, représenter une courbe comme le graphe d'une fonction polynomiale n'est pas trivial. De plus cette définition ne peut être multivaluée que si l'on introduit plusieurs fonctions. Enfin, les définitions de fonctions explicites sont fortement influencées par les transformées géométriques du plan, telles que les translations et les rotations.

Une définition implicite décrit la courbe comme l'ensemble des points solutions d'une équation telle que $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ dans le cas du cercle de rayon r . Une représentation unique peut-être multivaluée, mais de même que pour la définition explicite, une courbe implicite est difficile à déterminer. De plus, dans notre cadre de modélisation de courbes et de surfaces, cette représentation est difficile à contrôler et à visualiser.

Enfin, la définition paramétrique distingue deux espaces : l'espace paramétrique et l'espace de plongement. Pour une courbe, le paramètre t est une valeur réelle ; par contre, la courbe elle-même peut être représentée dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Cette représentation est bien plus flexible et générale que les précédentes, elle est ainsi très couramment rencontrée en informatique graphique.

Ce chapitre présente une base théorique concernant les courbes et les surfaces paramétrées. L'introduction de ces outils, en particulier les B-splines, est nécessaire à un exposé clair des surfaces de subdivision. Nous exposons le cas des courbes paramétrées dans un premier temps, les surfaces seront abordées par la suite.

2.1.2 Courbes paramétrées de Hermite et de Bézier

Dans notre cadre d'étude, un point $P \in \mathbb{R}^n$ appartenant à une courbe polynomiale paramétrée d'ordre $k + 1$ (degré k) peut être défini de la façon suivante,

$$P(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i . \quad (2.1)$$

La courbe est définie par l'ensemble des valeurs de $P(t)$ lorsque t parcourt l'espace de paramétrisation. Habituellement, le paramètre t appartient à l'intervalle $[0, 1]$. Les coefficients a_i guident le comportement de la courbe. Nous présentons ici des exemples de courbes dans $\mathbb{R}^2$. Cependant, chaque dimension de $\mathbb{R}^2$ peut être traitée indépendamment des autres par cette équation, les coefficients a_i peuvent donc être de dimension quelconque. Il est par contre difficile de créer une courbe de façon intuitive en déterminant directement les coefficients a_i . L'approche envisagée pour la plupart des outils de modélisation est le contrôle des courbes par des sommets que l'on déplace. Dans le cas des splines, ces sommets sont nommés *sommets de contrôle*, ou *sommets de De Boor*, et leur ensemble forme un polygone de contrôle.

Le cas d'une droite Soient P_1 et P_2 deux points du plan. Une paramétrisation du segment P_1P_2 est, pour $t \in [0, 1]$: $P(t) = tP_2 + (1 - t)P_1$, soit $P(t) = (P_2 - P_1)t + P_1$. Nous obtenons ainsi les coefficients a_i qui forment le vecteur $A = [P_2 - P_1, P_1]^T$. Cette courbe paramétrée est d'ordre 2 (donc de degré 1).

Courbe cubique de Hermite Une courbe de Hermite est définie par deux sommets P_1 et P_2 et deux tangentes T_1 et T_2 , voir Figure 2.3. Cette courbe paramétrée est d'ordre 4 (donc de degré 3). Nous pouvons alors écrire les expressions suivantes,

$$\begin{aligned} P(t) &= a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ P(t) &= [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot [a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0]^T \\ P(t) &= T \cdot A . \end{aligned} \quad (2.2)$$

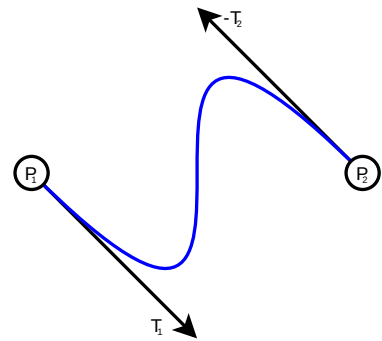


FIG. 2.3 : Une courbe de Hermite.

Nous considérons la dérivée de $P(t)$ pour l'expression des tangentes, $P'(t) = [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0] \cdot A$, et nous regroupons les contraintes géométriques en un vecteur P_h ,

$$P_h = [P(0) \ P(1) \ P'(0) \ P'(1)]^T = B_h \cdot A . \quad (2.3)$$

L'équation (2.2) nous permet d'écrire :

$$B_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Finalement, nous obtenons l'expression paramétrique de la courbe $P(t)$ à partir des contraintes géométriques que nous avons fixé,

$$\begin{aligned} P(t) &= T \cdot A \\ &= T \cdot B_h^{-1} \cdot P_h, \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec,

$$B_h^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

La matrice B_h^{-1} est appelée matrice de base pour la courbe de Hermite. Elle définit les poids d'influence, ou de mélange, des sommets et des tangentes P_h sur la courbe. Le produit $T \cdot B_h^{-1}$ nous donne les fonctions de base des courbes de Hermite cubiques. Nous pouvons alors visualiser l'influence de chaque élément sur la courbe en fonction du paramètre t ,

$$T \cdot B_h^{-1} = \begin{bmatrix} 2t^3 & -3t^2 & +1 \\ -2t^3 & +3t^2 \\ t^3 & -2t^2 & +t \\ t^3 & -t^2 \end{bmatrix}^T \quad (2.7)$$

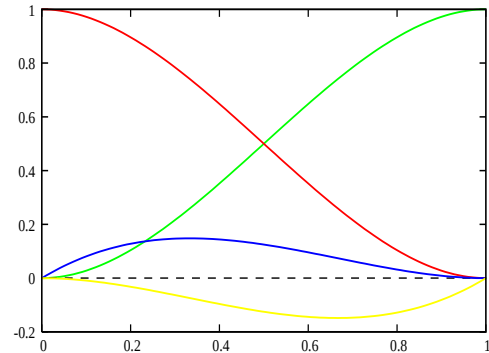


FIG. 2.4 : Les quatre fonctions de base de la courbe de Hermite cubique.

Courbe cubique de Bézier Cette famille de courbes a été introduite en 1962 par Pierre Bézier [Bezi 01] afin de répondre à une problématique de CAO. Leur construction est très similaire aux courbes de Hermite. Ces courbes cubiques sont définies par quatre sommets, voir en Figure 2.5; les tangentes T_1 et T_2 sont déterminées par rapport aux sommets de contrôle. Cette courbe interpole le premier et le dernier sommet, elle approche les autres. Le système de contraintes est ici

$$\begin{aligned} P(0) &= P_0 \\ P(1) &= P_3 \\ P'(0) &= 3T_1 = 3(P_1 - P_0) \\ P'(1) &= 3T_2 = 3(P_3 - P_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le coefficient 3 dans l'expression des tangentes est pertinent dans la mesure où nous finirons par obtenir les fonctions de Bernstein comme fonctions de base. Le vecteur de contraintes géométriques est P_b :

$$P_b = [P(0) \ P(1) \ P(2) \ P(3)]^T. \quad (2.9)$$

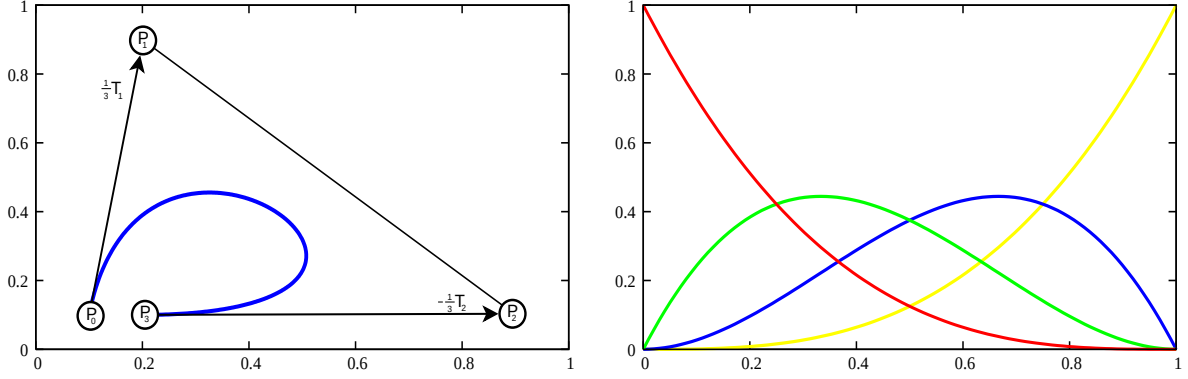


FIG. 2.5 : Une courbe de Bézier et ses fonctions de bases. La courbe de Bézier est très similaire à la courbe de Hermite.

De même que pour l'équation (2.5) nous écrivons :

$$P(t) = T \cdot A = T \cdot B_b^{-1} \cdot P_b, \quad (2.10)$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Les fonctions de base, visualisées en Figure 2.5, peuvent donc être exprimées de la façon suivante,

$$T \cdot B_b^{-1} = \begin{bmatrix} -t^3 & +3t^2 & -3t & +1 \\ 3t^3 & -6t^2 & +3t & \\ -3t^3 & +3t^2 & & \\ t^3 & & & \end{bmatrix}^T \quad (2.12)$$

Les courbes de Bézier cubiques sont très utilisées en CAO, en raison de leur support compact et leur degré de continuité, point sur lequel nous reviendrons par la suite. L'expression des courbes de Bézier d'ordre n utilise comme base les polynômes de Bernstein dans l'intervalle $t \in [0, 1]$,

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{i,n}(t) P_i \quad (2.13)$$

$$\mathcal{B}_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}, \quad (2.14)$$

où les termes P_i sont les sommets de contrôle de la courbe. Nous obtenons bien l'expression (2.12) pour $n = 3$, $\mathcal{B}_{i,3}(t) = T \cdot B_b^{-1}[i]$.

D'autre part, la construction des courbes de Bézier peut être faite de façon récursive au moyen de l'algorithme de De Casteljau [Bohm 99], ce qui est un avantage majeur de cet outil de modélisation. Cette propriété sera exposée en détail dans le cas des courbes B-splines en partie suivante, car il s'agit du fondement théorique des surfaces de subdivision.

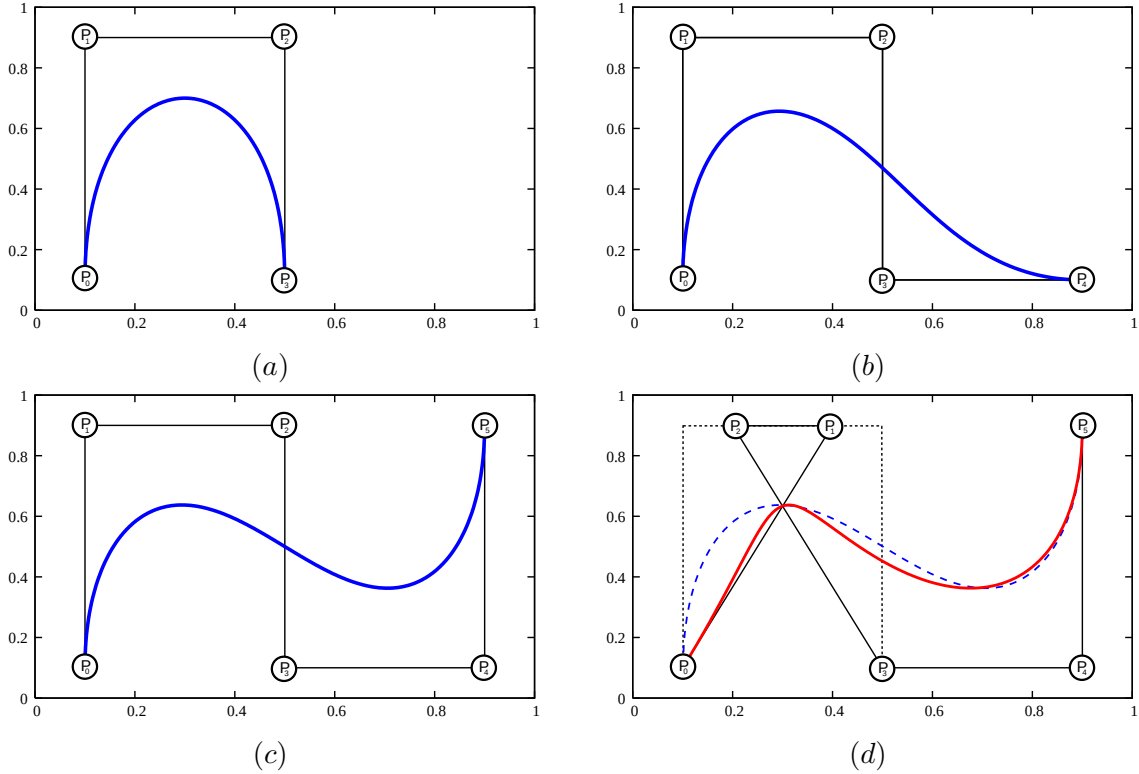


FIG. 2.6 : Courbes de Bézier d'ordre (a) 4, (b) 5 et (c) 6, qui interpolent respectivement 4, 5 et 6 sommets. En (d) nous illustrons le fait que le contrôle est toujours global, le mouvement d'un sommet change la courbe dans son ensemble (ici nous en déplaçons deux).

L'inconvénient des courbes de Bézier d'ordre élevé réside dans leur manque de contrôle local, comme illustré en Figure 2.6. Tous les sommets P_i sont mélangés dans la construction de la courbe, voir (2.13). Une idée serait alors de définir l'interpolation d'un faible nombre de points, puis de joindre entre elles ces interpolations locales, nommées *patches*. Or, nous ne souhaitons pas seulement joindre les points de départ et d'arrivée des courbes lisses, nous souhaitons également faire correspondre leurs dérivées afin de créer une courbe lisse dans sa globalité. Cette propriété est assurée par les splines.

Une spline est une courbe polynomiale définie par morceaux, c'est à dire définie localement. Ce terme est issu du nom des tiges souples utilisées dans le passé comme guide pour le dessin précis de longues courbes, notamment dans la marine. La définition paramétrée de cette courbe nous permet d'obtenir aisément l'expression de ses dérivées, il est ainsi possible de faire correspondre entre elles les courbes locales de façon satisfaisante.

La spline permet donc la synthèse de courbes lisses au moyen de polynômes de degrés faibles, puisque ce degré est indépendant du nombre global de sommets. De plus, le support compact d'une spline permet au concepteur de manipuler localement son modèle car le déplacement d'un sommet de contrôle n'entraîne pas une déformation globale de l'objet. Un exemple de spline construite à partir de courbes cubiques de Bézier est présenté en Figure 2.7.

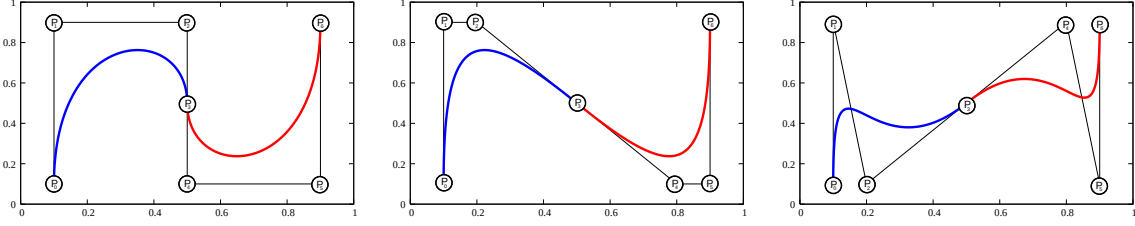


FIG. 2.7 : Construction d'une spline à sept points de contrôle au moyen de courbes de Bézier cubiques. Les sommets de contrôle de la première courbe sont P_0 – P_3 , la deuxième est contrôlée par P_3 – P_6 . Nous imposons que le vecteur $\vec{P_3P_4}$ soit colinéaire à $\vec{P_2P_3}$, il y a donc une continuité des droites tangentes en P_3 . Nous pouvons ainsi construire par morceaux une spline globalement lisse, au moyen de polynômes de faible degré.

2.1.3 Les courbes B-splines

Le terme B-spline a été introduit par Isaac Jacob Schoenberg en 1978 [Boor 78], comme abréviation de *basis spline*. La B-spline utilise des fonctions de base différentes des polynômes de Bernstein pour représenter chaque patch. Une telle courbe construit une approximation de l'ensemble du polygone de contrôle, contrairement à la spline de Bézier qui interpole certains sommets (voir Figure 2.7). L'idée est de considérer pour chaque sommet $P(t)$ un ensemble de poids relatifs aux sommets de contrôle P_i les plus proches, poids déterminés par ces fonctions de base. Donc, si celles-ci possèdent un support compact, chaque sommet de la spline est défini localement par un ensemble réduit de sommets de contrôle. De plus, si ces fonctions possèdent un certain degré de continuité, celui-ci sera conservé dans la représentation géométrique de la spline.

Une courbe B-spline $P(t)$ du plan, de degré k , donc d'ordre $k + 1$, est définie dans le cas général par l'équation

$$P : [t_0, t_{n+k}] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.15)$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \mathcal{N}_{i,k}(t) P_i, \quad (2.16)$$

où $P_i : i \leq n$ sont les sommets de contrôle et $\mathcal{N}_{i,k}$ sont les fonctions de base normalisées. Le vecteur $T : [t_0, t_{n+k}]$ est nommé vecteur de *nœuds*, car il “noe” les différents patches entre eux dans l'espace paramétrique. Il s'agit de valeurs réelles telles que $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k}$. Elles répartissent les intervalles d'influence de chaque sommet de contrôle sur la courbe.

Si les valeurs du vecteur de nœuds T sont réparties de façon uniforme ($t_{j+1} - t_j$ est constant) la B-spline est dite *uniforme*. Dans ce cas, les fonctions de base $\mathcal{N}_{i,k}(t)$ sont des versions décalées en t de la même courbe pour toutes les valeurs de i , et nous écrivons :

$$\mathcal{N}_{i,k}(t) = \mathcal{N}_{0,k}(t - t_i) = \mathcal{N}_k(t - t_i),$$

et donc,

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \mathcal{N}_k(t - t_i) P_i. \quad (2.17)$$

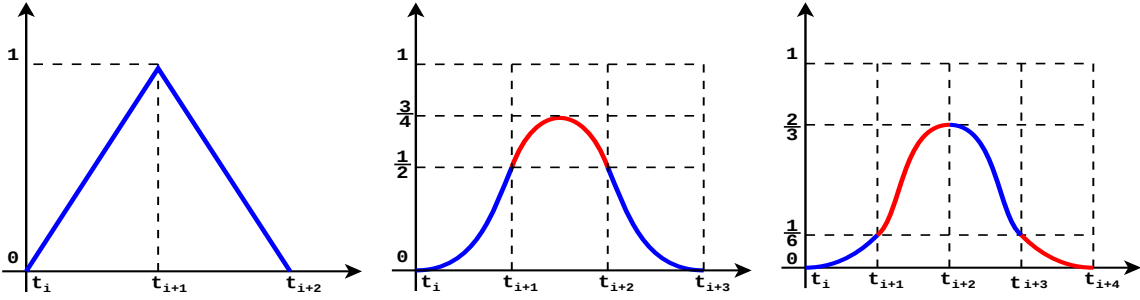


FIG. 2.8 : Fonctions de base non centrées des courbes B-splines de degré 1, 2 et 3. Leur utilisation conduit respectivement à la B-spline linéaire, quadratique et cubique.

Considérons désormais le vecteur de nœuds tel que $t_0 = 0$ et $t_{i+1} - t_i = 1$, soit $T : [0, 1, 2, \dots, n+k-1]$. Ce vecteur est équivalent à n'importe quel autre vecteur de nœuds uniforme, et cela simplifie les expressions suivantes puisque nous avons $t_i = i$.

L'expression des fonctions de base $\mathcal{N}_k(t)$ sont couramment obtenues par récursion. Il est possible d'introduire l'expression des fonctions de base de différentes façons, voir [Bart 87]. Dans [Zori 00], l'approche est avantageusement effectuée au moyen de l'outil de convolution :

$$(f \otimes g)(t) = \int f(x)g(t-x) dx . \quad (2.18)$$

La fonction de degré nul $\mathcal{N}_0(t)$ est la fonction porte dans l'intervalle $[0, 1)$,

$$\mathcal{N}_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases} \quad (2.19)$$

La fonction de base de degré 1 est obtenue par la convolution de la fonction porte $\mathcal{N}_0(t)$ avec elle même. Pour $t \in [0, 2)$ nous avons donc :

$$\mathcal{N}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_0(x)\mathcal{N}_0(t-x) dx = \int_t^{t-1} \mathcal{N}_0(x) dx . \quad (2.20)$$

La Figure 2.8 illustre le résultat de la convolution, c'est une courbe triangulaire. Il s'agit de la fonction de base correspondant à l'interpolation linéaire de deux sommets rencontrée précédemment en section 2.1.2. Dans le domaine paramétrique, nous avons $T : [t_0, t_1, t_2]$, les sommets de contrôle nécessaires à chaque patch sont au nombre de deux. L'expression analytique s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(t) &= \int_t^{t-1} \mathcal{N}_0(x) dx \\ &= \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t < 2 . \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

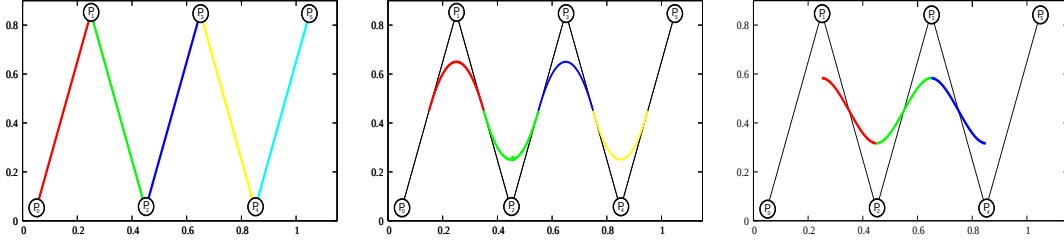


FIG. 2.9 : Exemples de courbes B-splines créées à partir de fonctions de base, de gauche à droite : linéaire, quadratique et cubique. La courbe B-spline cubique est la plus utilisée en informatique graphique.

De même, la fonction de base de degré 2 est obtenue par la convolution de la fonction $\mathcal{N}_1(t)$ avec la fonction porte $\mathcal{N}_0(t)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2(t) &= \int_t^{t-1} \mathcal{N}_1(x) dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(t^2 - 6t + 9) & \text{si } 2 \leq t < 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cette fonction de base est quadratique par morceaux, voir en exemple la Figure 2.8. Les sommets de contrôle nécessaires à la construction d'un patch sont au nombre de trois. De façon plus générale, l'expression de la fonction de base de degré k est le résultat de la convolution de la fonction de degré $k - 1$ par la fonction porte $\mathcal{N}_0(t)$,

$$\mathcal{N}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_{k-1}(s) \mathcal{N}_0(t-s) ds. \quad (2.23)$$

La fonction de base de degré 3 est également illustrée en Figure 2.8. Les courbes B-splines cubiques sont actuellement très connues et très utilisées en informatique graphique ainsi que dans les problématiques d'interpolation de données [Gotc 01]. L'expression analytique de cette fonction de base est :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3(t) &= \int_t^{t-1} \mathcal{N}_2(x) dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{6}(3t^3 + 3t^2 - 15t + 1) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4) & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{6}(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) & \text{si } 3 \leq t < 4. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

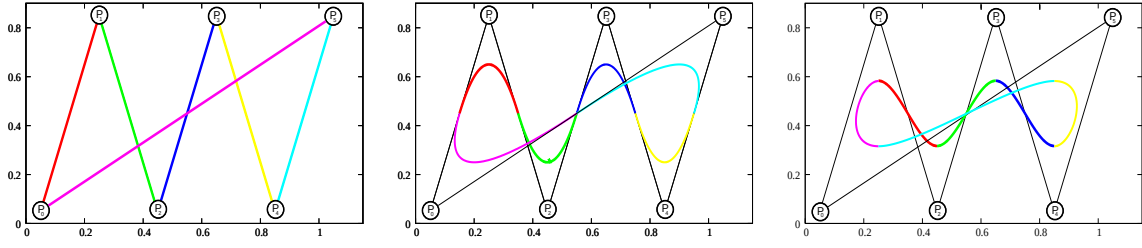


FIG. 2.10 : Exemples de courbes B-splines fermées créées à partir de fonctions de base, de gauche à droite : linéaire, quadratique et cubique.

Nous nous sommes intéressés à l'écriture analytique des fonctions de bases B-splines, nous pouvons également écrire ces expressions sous la forme matricielle utilisée dans la section précédente en recentrant les fonctions de base entre 0 et 1. Introduisons donc les expressions matricielles suivantes, elles décrivent le vecteur de sommets P et la matrice de base des B-splines, notée cette fois B_s^{-1} . La taille de ces vecteurs dépend du nombre de sommets de contrôle de la spline,

$$P = [\cdots P_{-2} P_{-1} P_0 P_1 P_2 \cdots]^T \quad (2.25)$$

$$T \cdot B_s^{-1} = [\cdots \mathcal{N}_k(t+2) \mathcal{N}_k(t+1) \mathcal{N}_k(t) \mathcal{N}_k(t-1) \mathcal{N}_k(t-2) \cdots] \quad , \quad (2.26)$$

Nous obtenons ainsi l'expression matricielle rencontrée précédemment :

$$P(t) = T \cdot B_s^{-1} \cdot P \quad . \quad (2.27)$$

Nous verrons que cette forme est particulièrement bien adaptée à l'utilisation pratique des courbes B-splines. Pour des courbes linéaires, quadratique et cubique, nous obtenons par (2.21), (2.22) et (2.24) pour $t \in [0, 1)$ les formes matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} P_1(t) &= [t \ 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix} \\ P_2(t) &= [t^2 \ t \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \end{bmatrix} \\ P_3(t) &= [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Un exemple de l'utilisation de chaque courbe est présenté en Figure 2.9. La Figure 2.10 présente quant-à-elle des exemples de courbes B-splines fermées. Une telle courbe implique une boucle dans le vecteur de sommets approximés : le dernier patch se connecte au premier. Il suffit donc que les k derniers sommets de contrôle répètent les k premiers. Par exemple, considérons une B-spline quadratique $P_1(t)$ approximant les trois sommets P_0, P_1 et P_2 à travers un vecteur de nœuds quelconque. L'association à la spline des deux patches $P_2(t)$ et $P_3(t)$ approximant respectivement P_1, P_2, P_0 et P_2, P_0, P_1 forme une courbe fermée. Le vecteur de sommets P_i est alors $[P_0, P_1, P_2, P_0, P_1]$.

De même que l'algorithme de De Casteljau pour les courbes de Bézier, l'algorithme de De Boor [Boor 78] permet de tracer ces courbes de façon récursive. La définition récursive des courbes B-splines fait l'objet de la partie suivante.

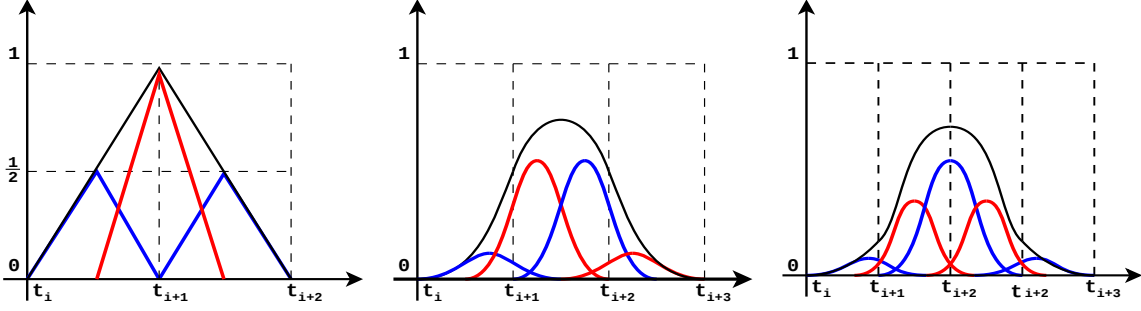


FIG. 2.11 : Les fonctions de base B-splines peuvent être décomposées en une somme de fonctions de même type. Cette propriété représente le fondement théorique de la surface de subdivision.

2.1.3.1 Subdivision d'une courbe B-spline uniforme

Une propriété fondamentale des fonctions de base B-splines est que chacune d'elles peut être écrite comme une combinaison linéaire de copies d'elle-même, copies réduites et translatées :

$$\mathcal{N}_k(t) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \mathcal{N}_k(2t - i) . \quad (2.29)$$

La fonction $\mathcal{N}_k(2t - i)$ est une copie de $\mathcal{N}_k(t)$ réduite d'un facteur 2 et translatée de i sur l'axe paramétrique, voir la Figure 2.11. Cette notion lie directement les fonctions B-splines au principe de la subdivision.

Une démonstration claire et succincte de (2.29) issue de [Zori 00] s'énonce de la façon suivante, au moyen de l'outil de convolution. Tout d'abord, nous partons de l'observation de la fonction porte,

$$\mathcal{N}_0(t) = \mathcal{N}_0(2t) + \mathcal{N}_0(2t - 1) , \quad (2.30)$$

nous développons ensuite l'expression de la fonction de base $\mathcal{N}_k(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k(t) &= \mathcal{N}_{k-1}(t) \otimes \mathcal{N}_0(t) \\ &= \bigotimes_{i=0}^k \mathcal{N}_0(t) \\ &= \bigotimes_{i=0}^k (\mathcal{N}_0(2t) + \mathcal{N}_0(2t - 1)) . \end{aligned} \quad (2.31)$$

À partir d'ici, puisque la convolution est distributive par rapport à l'addition, l'identité binomiale nous permet d'écrire :

$$\mathcal{N}_k(t) = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \bigotimes_{j=1}^{k+1-i} \mathcal{N}_0(2t) \bigotimes_{j=1}^i \mathcal{N}_0(2t - 1) , \quad (2.32)$$

et de cette expression peut être retrouvée l'équation (2.29).

Cette propriété nous permet de réécrire l'expression de la courbe B-spline initiale au moyen de nouvelles fonctions de base. Considérons pour cela l'expression matricielle des fonctions de base B_s^{-1} précédemment introduite (2.27). Celle-ci peut être réécrite en prenant en compte des fonctions de base réduites d'un facteur deux dans le domaine paramétrique. Ajoutons désormais la notation paramétrique t , nous écrivons :

$$B_s^{-1}(t) = B_s^{-1}(2t) \cdot S_k, \quad (2.33)$$

où S_k est la matrice de subdivision des fonctions de base $B_s^{-1}(t)$. Les coefficients $S_k(i, j)$ de cette matrice sont directement obtenus par l'équation (2.29),

$$S_k(i, j) = \frac{1}{2^k} \binom{k+1}{j-2i+k+1}. \quad (2.34)$$

Conformément à nos notations précédentes, les indices i et j désignent respectivement les colonnes et les lignes de la matrice. Pour des B-splines linéaires, quadratiques et cubiques, nous obtenons les matrices de subdivision suivantes, leur taille étant liée au nombre de sommets de contrôle :

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 3 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 3 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$S_3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 6 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 4 & 4 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 6 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 4 & 4 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 6 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la même courbe paramétrée $P(t)$ peut être décrite par ces deux équations,

$$\begin{aligned} P(t) &= T \cdot B_s^{-1}(t) \cdot P \\ &= T \cdot B_s^{-1}(2t) \cdot S_k \cdot P, \end{aligned} \quad (2.36)$$

et de plus, ce procédé peut être itéré :

$$\begin{aligned} P(t) &= T \cdot B_s^{-1}(t) \cdot P \\ &= T \cdot B_s^{-1}(2t) \cdot S_k \cdot P \\ &= T \cdot B_s^{-1}(2^2 t) \cdot S_k^2 \cdot P \\ &= T \cdot B_s^{-1}(2^3 t) \cdot S_k^3 \cdot P \\ &\vdots \\ &= \mathcal{N}_k(2^l t) \cdot S_k^l \cdot P. \end{aligned} \quad (2.37)$$

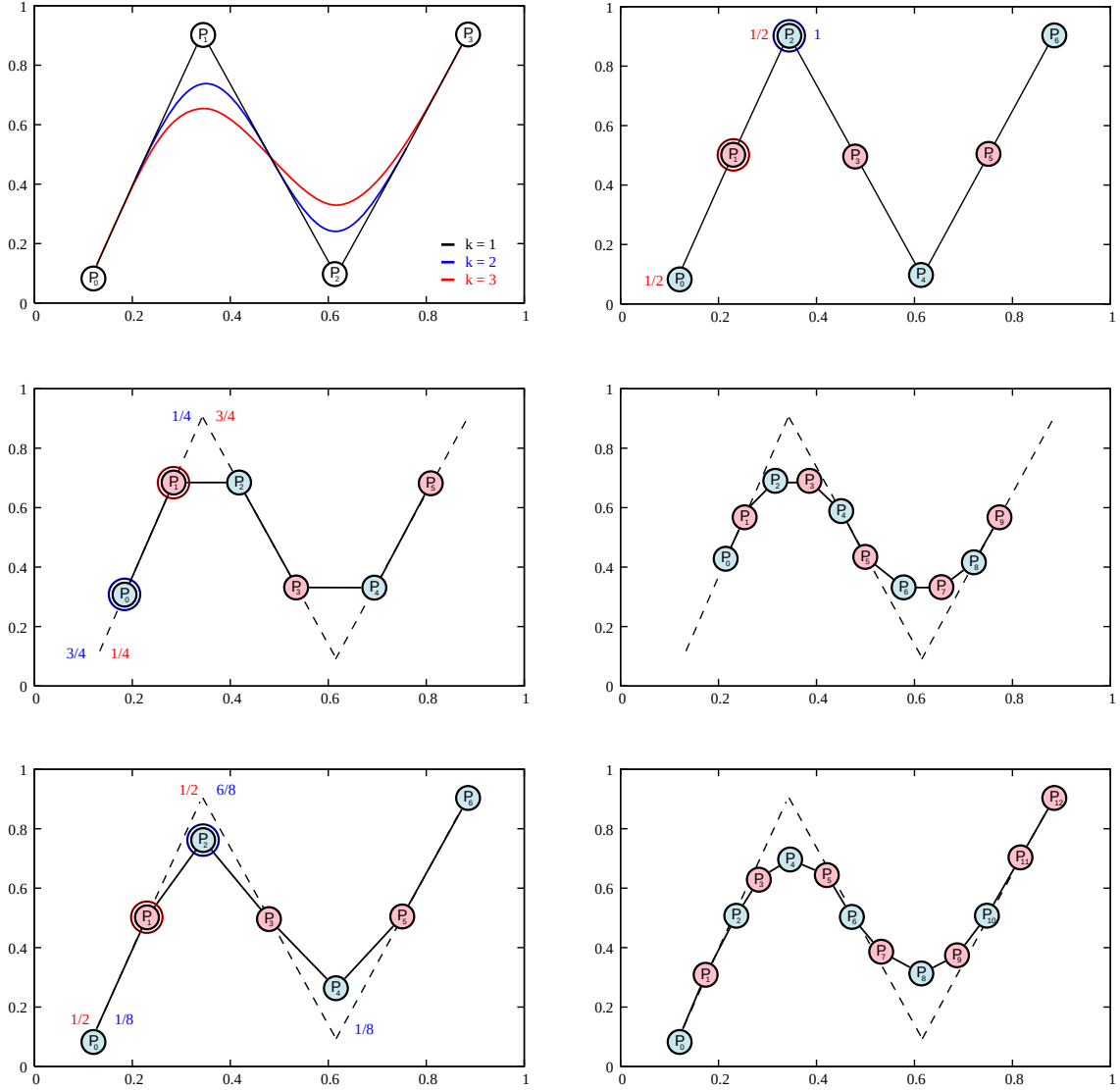


FIG. 2.12 : Subdivision de courbes B-splines de degré 1, 2 et 3 pour respectivement la première, la deuxième et la troisième ligne. Les sommets de contrôle subdivisés génèrent la même courbe continue, et ceux-ci s'en approchent au fur et à mesure des itérations.

Le principe de la construction d'une courbe par subdivision est de considérer de nouveaux vecteurs de sommets de contrôle P à chaque itération. Nous noterons désormais ces nouveaux vecteurs conformément à leur niveau de subdivision, P^0 étant le vecteur initial et $P^l = S_k^l \cdot P^0$. Le facteur de réduction du domaine paramétrique étant de deux, nous aurons nécessairement deux fois plus de sommets de contrôle d'une itération à l'autre (moins un sommet si l'on prend en compte la condition au bord du dernier), voir Figure 2.12. Ce procédé de subdivision uniforme est donc considéré *dyadique*. Une itération du procédé de subdivision génère des sommets de contrôle P^l plus proches de la courbe B-spline continue que ne l'étaient les sommets P^{l-1} .

Degré de la courbe	Masque de subdivision	Règle sommets pairs	Règle sommets impairs
1	$\frac{1}{2} [1 \ 2 \ 1]$	$\frac{1}{2} [1 \ 1]$	$\frac{1}{2} [2]$
2	$\frac{1}{4} [1 \ 3 \ 3 \ 1]$	$\frac{1}{4} [1 \ 3]$	$\frac{1}{4} [3 \ 1]$
3	$\frac{1}{8} [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$	$\frac{1}{8} [1 \ 6 \ 1]$	$\frac{1}{8} [4 \ 4]$
4	$\frac{1}{16} [1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1]$	$\frac{1}{16} [1 \ 10 \ 5]$	$\frac{1}{16} [5 \ 10 \ 1]$
6	$\frac{1}{32} [1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1]$	$\frac{1}{32} [1 \ 15 \ 15 \ 1]$	$\frac{1}{32} [6 \ 20 \ 6]$
...			

TAB. 2.1 : *Construction des règles de subdivision d'une courbe B-spline selon son degré.*

Ainsi, de par la configuration de ces matrices, nous définissons deux types différents de nouveaux sommets, les sommets *pairs* et *impairs* : P_{2i}^l et P_{2i+1}^l .

$$\begin{cases} P_{2i}^{l+1} = \sum_m S_k(m, 2i) \cdot P_m^l \\ P_{2i+1}^{l+1} = \sum_m S_k(m, 2i+1) \cdot P_m^l \end{cases} \quad (2.38)$$

En effet, un rapide examen de ces matrices nous permet de séparer deux types de règles. Nous remarquons également que seul un nombre peu élevé d'anciens sommets influent sur la création d'un nouveau. Pour S_1 , la règle paire est $P_{2i}^{l+1} = \frac{1}{2} P_i^l$, la règle impaire est $P_{2i+1}^{l+1} = \frac{1}{2} (P_i^l + P_{i+1}^l)$, voir l'illustration en Figure 2.12. En d'autres termes, les nouveaux sommets pairs correspondent aux anciens sommets et les nouveaux sommets impairs sont placés entre les anciens sommets.

Le vecteur $\frac{1}{2} [1 \ 2 \ 1]$ est nommé *masque* de subdivision, il est obtenu à partir des colonnes de la matrice S_k . De façon intuitive, les deux règles précédentes sont déterminées à partir du masque en considérant une valeur sur deux : $\frac{1}{2} [1 \ 1]$ et $\frac{1}{2} [2]$, ce qui revient à considérer cette fois les lignes de la matrice S_k . De même pour la courbe B-spline quadratique, la matrice de subdivision des sommets de contrôle S_2 construit le masque $\frac{1}{4} [1 \ 3 \ 3 \ 1]$. Les deux règles sont donc $\frac{1}{4} [1 \ 3]$ et $\frac{1}{4} [3 \ 1]$. Il s'agit du célèbre algorithme de Chaikin [Chai 74] (nommé aussi *corner-cutting*). Enfin, la courbe B-spline cubique, liée à la matrice S_3 , construit le masque $\frac{1}{8} [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$, donc les deux règles $\frac{1}{8} [1 \ 6 \ 1]$ et $\frac{1}{8} [4 \ 4]$. La Table 2.1 récapitule ces règles de subdivision.

La notion clé établissant le lien entre les B-splines et la courbe de subdivision est celle-ci : la subdivision du polygone de contrôle d'une courbe B-spline génère un polyèdre plus dense en sommets et plus proche de la courbe B-spline continue. En réalité, la distance entre ce polygone et la courbe est réduite de façon géométrique au cours des pas de subdivision ([Boor 93], théorème 30 page 169). Ainsi, après un nombre peu élevé d'itérations, le dessin du polygone est presque indiscernable de la courbe continue. C'est exactement le principe d'une surface de subdivision, les courbes et les surfaces continues sont approximées par leur maillage de contrôle subdivisé. La première présentation officielle d'une telle technique a été donnée par G. Chaikin en 1974, voir [Fari 02] à ce sujet, à partir des travaux de Rham [Rham 47].

Enfin, ces courbes possèdent un certain nombre de propriétés mathématiques pertinentes, dont beaucoup sont partagées par les surfaces de subdivision. La partie suivante est consacrée à leur présentation.

2.1.3.2 Propriétés mathématiques des courbes paramétrées

Nous exposons dans cette partie un ensemble de propriétés et définitions liées aux formes générées par une courbe paramétrée. Ces caractéristiques mathématiques permettent de justifier l'utilisation pratique de ces outils de modélisation. Cet ensemble n'est pas exhaustif, mais la plupart de ces propositions seront évoquées dans la présentation des surfaces de subdivision.

Invariance affine Contrairement au modèle de représentation explicite, la définition d'une courbe paramétrée est invariante par transformation affine de l'ensemble des sommets de contrôle. Autrement dit, si une transformation affine φ est appliquée sur le polygone de contrôle alors la courbe subit cette même transformation,

$$\sum_{i=0}^n \mathcal{N}_{i,k}(t) \varphi(P_i) = \varphi \left(\sum_{i=0}^n \mathcal{N}_{i,k}(t) P_i \right) . \quad (2.39)$$

Propriété de l'enveloppe convexe Si la courbe paramétrée est approximante, celle-ci est souhaitée contenue dans l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses sommets de contrôle. Ceci assure un certain degré de prédiction de l'objet modélisé, cette notion est de plus importante pour l'étude de la convergence d'un schéma de subdivision. Les conditions suffisantes de cette propriété sont les suivantes, $\forall t \in [t_i, t_{i+1})$,

$$\mathcal{N}_{i,k}(t) \geq 0 \quad (2.40)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{N}_{i,k}(t) dt = 1 \quad (2.41)$$

$$\sum_{i=0}^n \mathcal{N}_{i,k}(t) = 1 . \quad (2.42)$$

Cette dernière équation est connue sous le nom de partition de l'unité. Les polynômes de Bernstein et les fonctions de base B-spline répondent à ces critères.

Contrôle local Tout point d'une courbe paramétrée B-spline n'est déterminé qu'à partir d'un nombre fini de sommets de contrôle. Ce nombre de sommets est égal à $k + 1$, donc un sommet de contrôle influence au plus $k + 1$ patches. En d'autres termes, la translation d'un sommet de contrôle ne modifie pas la spline dans sa globalité. Cette propriété est due au support compact des fonctions de base.

Degré de continuité Une fonction $P(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en un point t_0 est différentiable si l'expression suivante est définie :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0} . \quad (2.43)$$

Concernant nos outils de modélisation, cette définition correspond à la continuité *paramétrique* C^0 ; est considérée de classe C^0 une courbe continue en tout point. Une courbe est de classe C^1 si l'expression de sa dérivée en t existe et est continue. Par extension, une courbe est de classe C^k si sa $k^{ième}$ dérivée est continue en tout point.

Par ailleurs, nous distinguons cette notion de la continuité dite *géométrique*. La continuité géométrique G^k est une version relaxée des conditions de continuité paramétrique C^k , car une courbe paramétrée peut être lisse sans pour autant remplir ces conditions. En particulier, deux paramétrisations distinctes d'une même courbe peuvent donner lieu à deux degrés de continuité paramétrique différents [Bars 84].

Une courbe de Bézier ou une B-spline possède un degré de continuité lié à celui de la fonction de base utilisée : la courbe générée est C^{k-1} pour une fonction de base de degré k . En conséquence de (2.23), dans le cas des fonctions de base B-spline nous pouvons écrire [Zori 00] :

Théorème 2.1.1 Si $f(t)$ est de classe C^k , $(\mathcal{N}_{0,i} \otimes f)(t)$ est de classe C^{k+1} .

Les splines quadratiques sont C^∞ partout mais seulement C^1 aux points de jonction entre deux patches, points où les splines cubiques sont C^2 . Pour ces deux exemples, ceci correspond respectivement à la continuité des tangentes et à la continuité de courbure. Les applications pratiques de CAO utilisent principalement les courbes cubiques. Si une courbe C^1 est visuellement lisse, de nombreux usages requièrent un degré de continuité plus élevé. Par exemple, le reflet d'un objet modélisé sur une surface est continu si la surface est au moins C^2 .

Nous récapitulons ici les principaux degrés de continuité rencontrés pour ces courbes et leur signification selon [Fole 90],

Continuité paramétrique,

- C^0 : Les patches sont joints.
- C^1 : De classe C^0 et les deux dérivées premières au point de jonction de deux patches sont les mêmes.
- C^2 : De classe C^1 et les deux dérivées secondes au point de jonction de deux patches sont les mêmes.
- C^k : De classe C^{k-1} et les deux dérivées d'ordre k au point de jonction de deux patches sont les mêmes.

Continuité géométrique,

- G^0 : Les patches sont joints.
- G^1 : De classe G^0 et les deux dérivées premières sont proportionnelles au point de jonction de deux patches ; donc les deux vecteurs tangents sont colinéaires.
- G^2 : De classe G^1 et les deux dérivées secondes sont proportionnelles au point de jonction de deux patches.

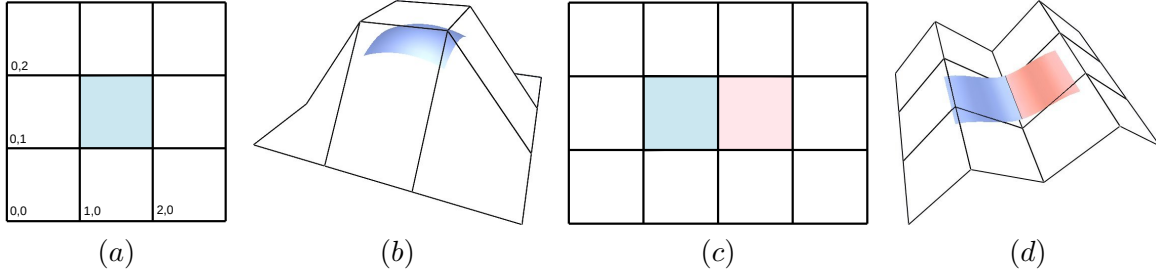


FIG. 2.13 : Exemples de surfaces B-splines bicubiques uniformes. À droite, nous construisons deux patches de la même façon que pour les courbes : la paramétrisation des deux parties partagent un certain nombre de sommets de contrôle. En (a) et (c) sont représentés les domaines paramétriques respectifs des deux surfaces lisses (b) et (d).

2.1.3.3 Généralisation des courbes à la surface B-spline

Les surfaces B-splines se définissent comme des produits tensoriels. Leur définition est directe si nous avons l'expression des courbes correspondantes. Nous considérons pour cela une paramétrisation de dimension deux, donc un couple de paramètres (u, v) , associé à deux vecteurs de nœuds U et V . Nous parlons alors de deux *directions*. Les sommets de contrôle $P_{i,j}$, où $i \leq n$ et $j \leq m$ forment un maillage de contrôle. Nous définissons l'expression de la surface paramétrée $S(u, v)$ de degré k de la façon suivante,

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathcal{N}_{i,k}(u) \mathcal{N}_{j,k}(v) P_{i,j} . \quad (2.44)$$

Cette expression peut être écrite sous la forme matricielle suivante,

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} u^k & u^{k-1} & \cdots & u & 1 \end{bmatrix} \cdot B_s^{-1} P B_s^{-1T} \cdot \begin{bmatrix} v^k \\ v^{k-1} \\ \vdots \\ v \\ 1 \end{bmatrix} , \quad (2.45)$$

où B_s^{-1} est l'expression matricielle des fonctions de base, donnée pour les fonctions linéaire, quadratique et cubique en (2.28).

La surface de Bézier est définie de façon très similaire, les polynômes de Bernstein remplaçant les fonctions de base B-splines. Les patches de Coons, de Steven Anson Coons en 1964, utilisent comme base les courbes de Hermite. Notons par ailleurs qu'il est possible de définir une surface B-spline où les deux fonctions de base, liées à chacun des paramètres, ne sont pas de même degré.

De même que pour le cas des courbes B-splines, le polyèdre de contrôle d'une telle surface peut être subdivisé. La surface générée est alors la même, tout en étant définie par un ensemble plus grand et plus dense de sommets de contrôle. En Figure 2.14 est présenté un exemple de polyèdre subdivisé, la surface générée est la même qu'en Figure 2.13.b et les nouveaux sommets s'approchent de la surface continue. Les nouveaux sommets de contrôle issus de la subdivision s'obtiennent directement en subdivisant le domaine paramétrique (u, v) de l'expression

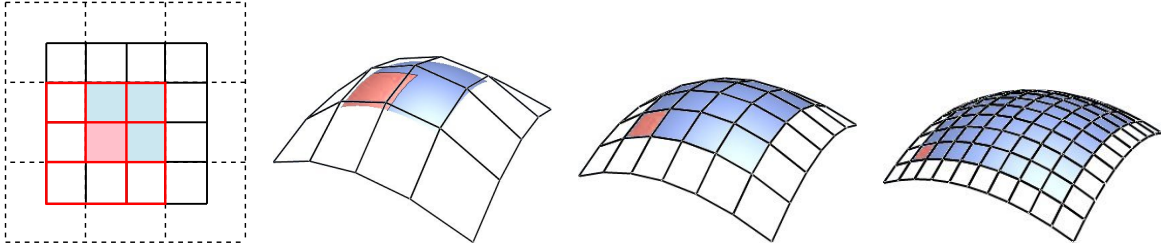


FIG. 2.14 : Tout comme le polygone de contrôle des courbes, le polyèdre de contrôle des surfaces B-spline peut être subdivisé. À gauche nous subdivisons le domaine paramétrique de façon uniforme. À droite, nous visualisons le polyèdre subdivisé et les patches B-splines correspondants.

précédente (2.45). Dans le cas de la subdivision uniforme dyadique, les nouveaux patches sont déterminés en remplaçant (u, v) par $(\frac{u}{2}, v)$, puis par $(\frac{1}{2} + \frac{u}{2}, v)$ etc. voir [Inst]. De même qu'en section précédente, ceci conduit à la définition d'une matrice de subdivision S_k , donnée pour les cas linéaire, quadratique et cubique en (2.35). Son utilisation dans le cas d'une surface est la suivante,

$$P^{l+1} = S_k \cdot P^l \cdot S_k^T. \quad (2.46)$$

De même que précédemment, ces matrices de subdivision définissent un masque, que nous notons $\mathcal{M}_k$. Pour les trois premiers degrés nous avons :

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_3 = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Ces masques permettent de déterminer directement les règles de création des sommets du polyèdre subdivisé, elles sont repérées en couleur dans l'expression (2.47). Le maillage de contrôle subdivisé génère la même surface B-spline continue, et de même que pour les courbes, le dessin de celui-ci s'approche de la surface au cours des itérations, voir un exemple en Figure 2.14.

Ainsi, une surface B-spline construit un ensemble de patches rectangulaires pouvant être joints de façon lisse. L'expression du produit tensoriel implique une organisation régulière des sommets de contrôle $P_{i,j}$, toute autre organisation rendrait la paramétrisation impossible. Ceci est une limitation inhérente aux surfaces B-splines, car cette organisation limite le *genre* des objets ainsi modélisés. En particulier, la sphère est d'une topologie globale impossible à reproduire avec un ensemble de patches rectangulaires, contrairement à un tore. À noter que les surfaces de Bézier peuvent être triangulaires [Boeh 82]. Par contre, nous perdons alors l'expression du produit tensoriel, même s'il est possible de le déterminer sous certaines conditions [Lass 08].

La Box-spline est l'outil de modélisation qui généralise la B-spline, la section suivante lui est consacrée. En effet, les fonctions de base Box-splines peuvent être définies sur des maillages non-rectangulaires : triangulaire et hexagonal en particulier. La conception d'une surface de subdivision se base naturellement sur cet outil.

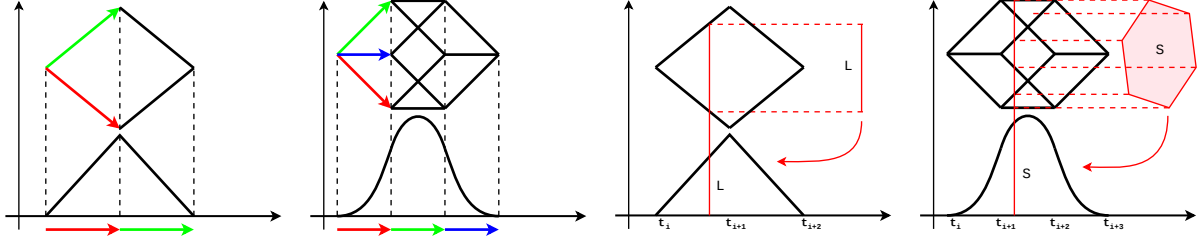


FIG. 2.15 : Une fonction de base Box-spline est définie comme l'ombre projetée d'une boîte. Cette boîte est construite à partir de directions, formant une base. Le cas de la droite correspond exactement aux fonctions de base B-splines, nous illustrons ici les fonctions de base linéaire et quadratique uniformes.

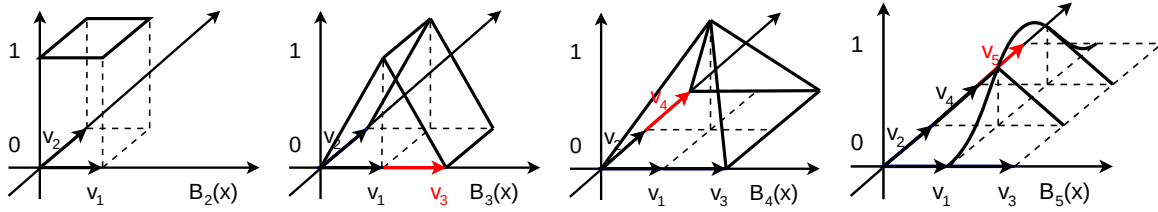


FIG. 2.16 : Les fonctions de base Box-splines peuvent se définir par convolutions successives selon plusieurs directions.

2.1.4 Les Box-splines

2.1.4.1 Définitions

La définition d'une Box-spline généralise celle de la B-spline. Une Box-spline est une spline définie comme la "densité d'ombre" générée par une boîte. Dans le cas particulier d'une boîte de dimension k projetée sur une droite, voir Figure 2.15, cette densité correspond exactement à la fonction de base B-spline d'ordre k (degré $k - 1$). Son vecteur de nœuds est uniforme ou non selon l'orientation de la boîte. Le livre de De Boor, Höllig et Riemenschneider [Boor 93] constitue une solide base théorique des Box-splines, nous en introduisons ici un aperçu destiné à introduire les mécanismes de construction de la surface de subdivision.

Comme illustré également en Figure 2.15, une boîte est définie par un ensemble de *directions*, formant une base. Nous pouvons donc décrire une fonction de base Box-spline par cet ensemble de directions. La Box-spline généralise la définition de la B-spline en établissant un produit de convolution selon ces directions. Soit donc la fonction de base Box-spline $\mathcal{B}(x|v_1 \cdots v_k) = \mathcal{B}_k(x)$ définie par $k > l$ directions v_i , l étant la dimension du domaine de paramétrisation, telle que

$$\mathcal{B}_s(t) = \begin{cases} 1/\det[v_1 \cdots v_l] & \text{si } x \in [v_1 \cdots v_l][0, 1)^s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\mathcal{B}_k(x) = \int_0^1 \mathcal{B}_{k-1}(x - tv_k) dt .$$

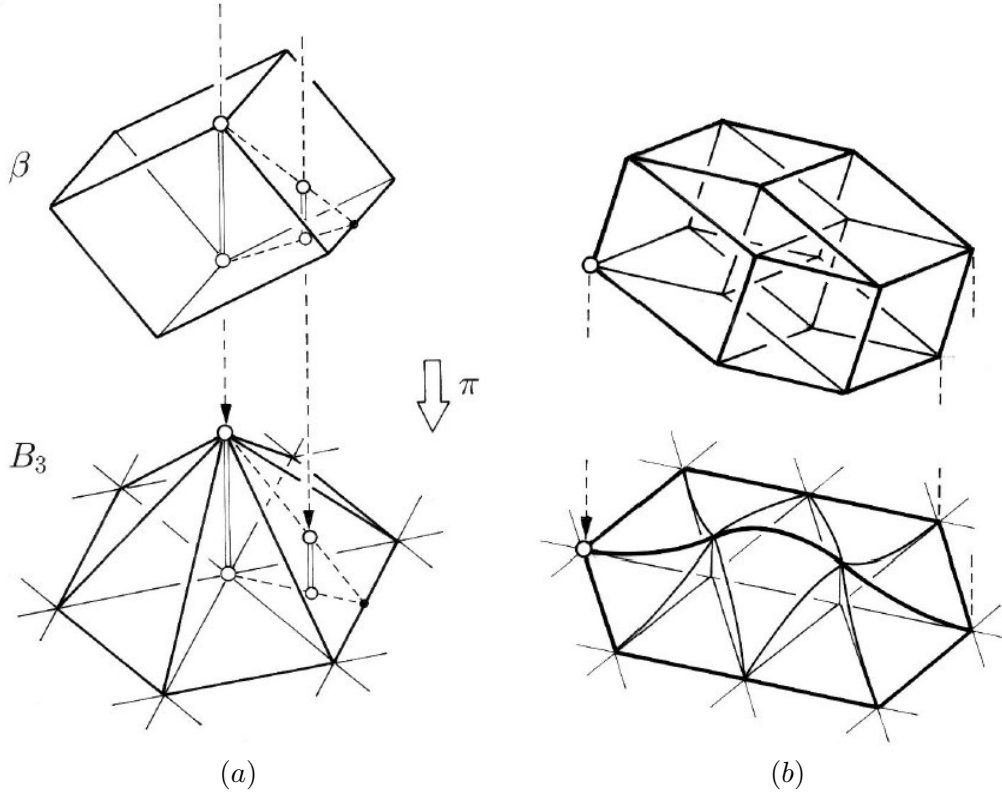


FIG. 2.17 : Un maillage triangulaire régulier (a) peut être défini comme la projection d'un cube. En (b), construction d'une Box-spline triangulaire de plus haut degré grâce à une boîte de dimension supérieure (images issues de [Prau 02]). En (b), le vecteur de directions peut être noté $[\rightarrow \rightarrow \nearrow]$.

Nous illustrons ces convolutions directionnelles en Figure 2.16. L'avantage de la définition d'une Box-spline selon ses directions permet de généraliser le produit tensoriel vu précédemment. Par exemple, en utilisant une direction diagonale nous pouvons construire une fonction de base Box-spline sur un maillage triangulaire. L'expression de la projection d'une boîte peut aussi être établie de façon géométrique en calculant la *densité d'ombre* de la boîte sur le plan de projection, voir [Prau 02] et l'illustration en Figure 2.17.

Cette expression géométrique peut être écrite de la façon suivante, soit π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}^l$:

$$\pi : [t_1 \cdots t_k]^T \mapsto [t_1 \cdots t_l]^T, \quad (2.49)$$

et soit

$$\beta_k = [u_1 \cdots u_k][0, 1)^k \quad (2.50)$$

un parallélépipède tel que $\beta_i = \pi u_i$. Alors, $\mathcal{B}_k(x)$ représente la densité de l'*ombre* de β_k ,

$$\mathcal{B}_k(x) = \frac{\text{vol}_{k-l}\beta_k(x)}{\text{vol}_k\beta_k}, \quad (2.51)$$

où

$$\beta_k(x) = \pi^{-1}x \cap \beta_k. \quad (2.52)$$

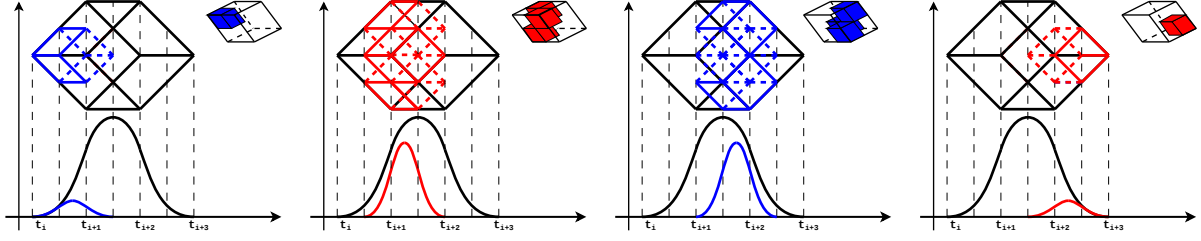


FIG. 2.18 : La projection d'une boîte subdivisée induit directement la création de fonctions de bases Box-splines subdivisées. Ici l'exemple particulier de la fonction de base B-spline quadratique uniforme, la boîte est subdivisée en 8 cubes de même volume.

2.1.4.2 Subdivision d'une Box-spline

Tout comme la fonction de base B-spline, la fonction de base Box-spline peut être subdivisée. En conséquence, il est possible de construire un maillage de contrôle subdivisé décrivant la même surface lisse.

Une boîte $\beta = [u_1 \cdots u_k][0, 1)^k$ de $\mathbb{R}^k$ peut être partitionnée uniformément en 2^k boîtes plus petites $\hat{\beta} = \beta/2^k$, chacune étant définie par rapport aux directions $\hat{u}_i = u_i/2^k$. Il est possible de décrire l'ombre d'une boîte β sous une projection π comme une combinaison linéaire des ombres des boîtes $\hat{\beta}_i$. Nous notons $v_i = \pi u_i$, $v_i \in \mathbb{Z}^l$ dans le cas uniforme, voir Figure 2.18. Il en va donc de même pour l'expression des fonctions de base Box-splines. Dans le cas de la courbe Box-spline uniforme, où $\mathcal{B}_{i,k}(t) = \mathcal{B}_k(t - i)$,

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{i,k}(t) \cdot P_i^0 \\ &= \sum_{i=0}^{2n-1} \mathcal{B}_{i,k}(2t) \cdot P_i^1, \end{aligned} \quad (2.53)$$

où $P^1 = \mathcal{S}_k \cdot P^0$ sont les nouveaux sommets de contrôle construits par subdivision de P^0 .

Une définition analytique générale de la subdivision des fonctions de base Box-splines est présentée dans [Prau 02]. Il est cependant possible de déterminer aisément les masques de subdivision associés à une Box-spline uniforme sans en connaître les expressions. La subdivision étant notre cadre d'analyse principal, nous nous concentrerons sur ces derniers dans la partie suivante.

2.1.4.3 Construction du masque de subdivision

Comme exposé précédemment pour les courbes et surfaces B-splines, les matrices $\mathcal{S}_k$ permettent d'obtenir de nouveaux sommets de contrôle à partir des anciens (2.47) au moyen des masques de subdivision $\mathcal{M}_k$. La définition de la Box-spline par un ensemble de directions a l'avantage de pouvoir déterminer ces masques de façon très simple. Cette construction est bien sûr applicable dans le cas régulier que représente la B-spline. Dans ce cas, seules les directions $\rightarrow$ et $\uparrow$ étaient utilisées, elles correspondaient alors aux vecteurs de nœuds u et v .

Le principe est de considérer une direction de la Box-spline comme étant liée à un polynôme de Laurent,

$$A(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i. \quad (2.54)$$

$A(z)$ est la transformée en z de la séquence a_i cette transformée est très proche de celle de Fourier [Jury 64]. Le polynôme $A(z) = 1 + z$ peut être représenté par la séquence de coefficients $a = [1 \ 1]$ sur un axe des puissances de z ; z^0 est son origine et cet axe est gradué par chaque puissance de z , voir Figure 2.19. Ce même vecteur peut être vu comme une direction partant de z^0 vers z^1 . Nous pouvons donc à l'inverse faire correspondre les directions de la Box-spline à un polynôme de Laurent.

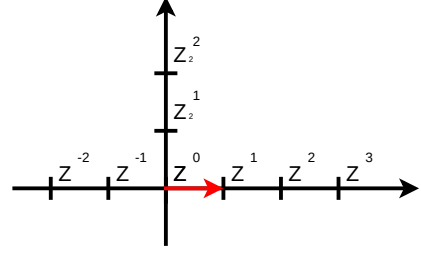


FIG. 2.19 : Les axes des deux variables z et z_2 gradués selon leur puissance.

La direction $\rightarrow$ associée à la séquence $[1 \ 1]$ correspond à la fonction de base B-spline $\mathcal{N}_0(t)$. La propriété faisant le lien entre la transformée en z et les fonctions de base concerne la convolution, car nous avons :

$$c_i = (a \otimes b)_i = \sum_{j=0}^n a_{i-j} b_j \quad (2.55)$$

$$C(z) = A(z).B(z) ,$$

où $C(z)$ est la transformée de la série c_k .

Les fonctions de base Box-splines étant définies par convolutions successives, tout comme les fonctions de base B-splines, leur transformée résultera en un produit. En effet, si nous avons deux fonctions pouvant être décomposées en fonctions de même type réduites et translatées comme suit,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^n a_i f(2t - i) \\ g(t) &= \sum_{i=0}^n b_i g(2t - i) , \end{aligned} \quad (2.56)$$

alors la fonction $h = f \otimes g$ pourra également être définie comme une somme de fonctions de même type :

$$h(t) = \sum_{i=0}^n c_i h(2t - i) . \quad (2.57)$$

Les coefficients c_i résultent de la convolution des coefficients a_i et b_i :

$$c_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n a_{i-j} b_j , \quad (2.58)$$

le facteur $\frac{1}{2}$ provenant du facteur de dilatation de la variable t , il s'agit d'une propriété de l'opérateur de convolution. À partir de ces observations, nous pouvons déterminer la transformée en z de la fonction de base B-spline $\mathcal{N}_k(t)$, notée $\tilde{\mathcal{N}}_k(z)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k(t) &= \bigotimes_{i=0}^k \mathcal{N}_0(t) \\ \tilde{\mathcal{N}}_k(z) &= \frac{1}{2^k} (1 + z)^{k+1} \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} z^i . \end{aligned} \quad (2.59)$$

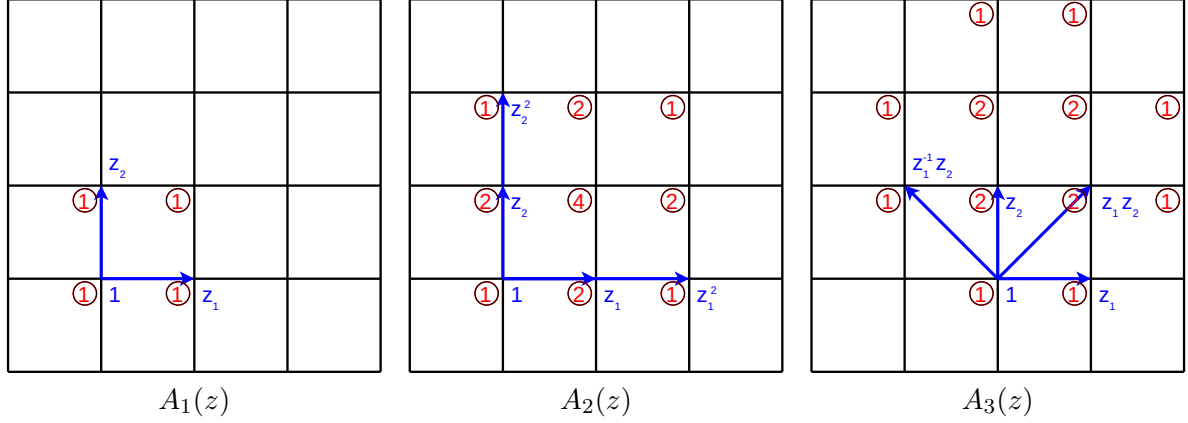


FIG. 2.20 : Exemples de construction de masques de subdivision de Box-splines par la convolution successive de directions. Nous utilisons pour cela la transformée en z en deux dimensions. Le résultat de la convolution est un ensemble de coefficients non nuls, inscrits ici dans un cercle à gauche des puissances de z .

Or, les coefficients du masque de subdivision d'une B-spline correspondent justement aux coefficients non-nuls du polynôme $\tilde{\mathcal{N}}_k(z)$ [Zori 00]. Par exemple, la fonction de base B-spline quadratique correspond à la convolution successive de trois fonctions de base $\mathcal{N}_0(t)$, son polynôme associé est :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}}_0(t) &= \frac{1}{4}(z+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(z^3 + 3z^2 + 3z + 1). \end{aligned} \quad (2.60)$$

En mettant ces coefficients non nuls sous la forme d'un vecteur des puissances de z nous obtenons bien le masque de subdivision $\frac{1}{4}[1 \ 3 \ 3 \ 1]$. Le principe est le même pour les surfaces si l'on considère deux variables z_1 et z_2 , voir Figure 2.20. Ainsi, pour les trois exemples de cette figure, la convolution des directions nous permet d'obtenir les équations suivantes,

$$\begin{aligned} A_1(z) &= (1+z_1)(1+z_2) = 1 + z_1 + z_2 + z_1z_2 \\ A_2(z) &= \frac{1}{4}(1+z_1)^2(1+z_2)^2 = 1 + 2z_1 + z_1^2 + 2z_2 + 4z_1z_2 + 2z_1^2z_2 + z_2^2 + 2z_1z_2^2 + z_1^2z_2^2 \\ A_3(z) &= \frac{1}{4}(1+z_1)(1+z_2)(1+z_1z_2)(1+z_2/z_1) = \\ &= \frac{1}{4}(1 + z_1 + z_2/z_1 + 2z_2 + 2z_1z_2 + z_1^2z_2 + z_2^2/z_1 + 2z_2^2 + 2z_1z_2^2 + z_1^2z_2^2 + \\ &\quad z_2^3 + z_1z_2^3). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Desquelles nous obtenons ces masques de subdivision :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & & \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

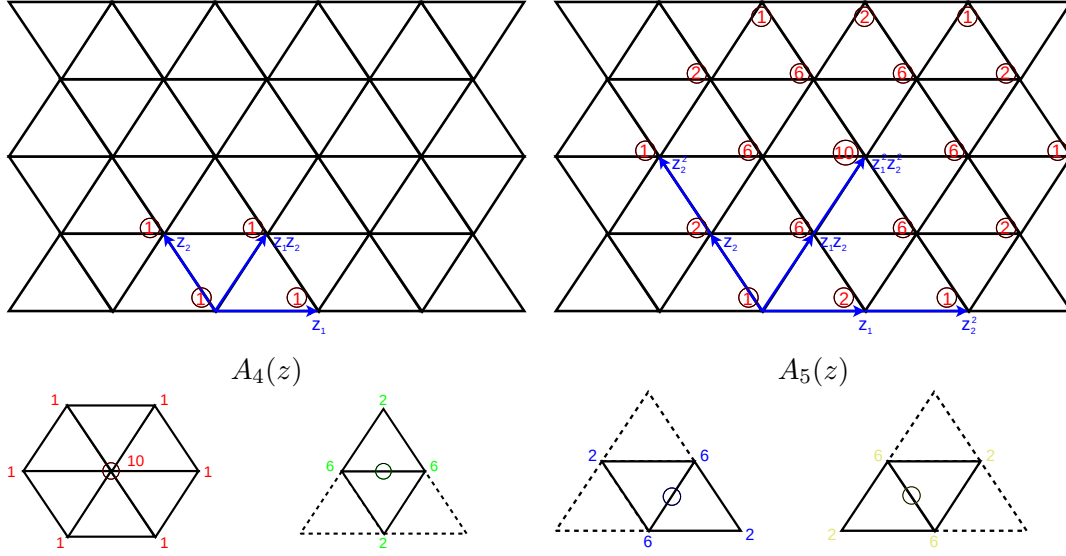


FIG. 2.21 : Les directions peuvent aussi bien correspondre à un maillage triangulaire régulier, sur lequel nous pouvons définir trois directions possibles. Sur la deuxième ligne nous illustrons les règles de subdivision correspondantes au masque de $\mathcal{M}_5$ (2.63).

Les Box-splines étant définies par des directions, nous pouvons leur faire correspondre un maillage de l'espace des puissances de z différent du pavage régulier quadrangulaire auquel les B-splines sont liées. Donc notre maillage de contrôle pourra également posséder une topologie différente, ce qui est l'avantage majeur des Box-splines sur les B-splines. Un exemple de pavage triangulaire est présenté en Figure 2.21. Nous définissons trois directions possibles sur celui-ci, z_1 , z_2 et z_1z_2 . La convolution de ces directions nous permet de construire les masques suivants,

$$\mathcal{M}_4 = \begin{bmatrix} & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_5 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 1 & & \\ & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ 1 & 6 & 10 & 6 & 1 & \\ & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ & 1 & 2 & 1 & & \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

De ces masques, nous pouvons construire les règles de subdivision dyadique de Box-splines définies sur un maillage triangulaire, nous les illustrons sur la deuxième ligne de la Figure 2.21.

2.1.4.4 Quelques propriétés mathématiques importantes

Certaines propriétés mathématiques sont spécifiques aux surfaces Box-splines, voir [Boor 93]. Les fonctions de bases Box-splines possèdent notamment les caractéristiques suivantes :

- Elles ne dépendent pas de l'ordre des directions v_i , la convolution est commutative.
- Elles sont positives sur l'ensemble convexe $[v_1 \cdots v_k][0, 1)^k$ et sont nulles ailleurs, leur support est donc compact.
- Elles sont symétriques par rapport au centre de leur support.
- Chaque patch Box-spline est polynomial. Soit k' le cardinal du plus grand ensemble de directions de même type, la Box-spline $\mathcal{B}_k(t)$ est alors globalement de degré $k - k' - s$ (donc de classe $C^{k-k'-s-1}$). Dans le cas d'une surface, $s = 2$.
- Le procédé de subdivision converge vers $\mathcal{B}_k(t)$ de façon quadratique [Boor 93], théorème 30 page 169.

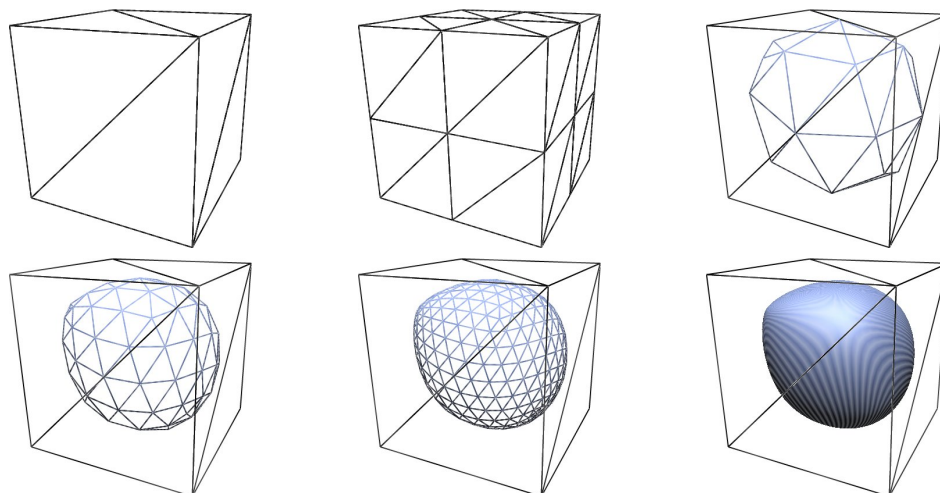


FIG. 2.22 : Le principe d'une surface de subdivision est composé de deux phases : de nouveaux sommets sont insérés, puis la géométrie est lissée. Le procédé est récursif, le maillage devient plus dense et plus lisse au cours des itérations.

Ainsi, les Box-splines permettent la construction d'une surface paramétrée sur un domaine différent du cas rectangulaire régulier. Cependant, leur limitation majeure reste liée à l'impossibilité de paramétrer une surface sur un polyèdre de contrôle quelconque, l'absence de direction sur un tel maillage empêche l'utilisation d'un domaine paramétrique global.

Plusieurs études se sont néanmoins consacrées à cette problématique car les surfaces Box-splines sont encore très utilisées en CAO : leur degré peut être quelconque et leurs vecteurs de nœuds peuvent être non-uniformes — on parle alors de *NURBS* —. Certains travaux proposent en outre de construire la surface Box-spline au voisinage d'un sommet irrégulier en utilisant une Box-spline généralisée, puis de combler le *trou* central en utilisant des patches polynomiaux, voir par exemple [Loop 92, Prau 02, Pete 93] à ce sujet. La surface de subdivision, quant-à-elle, a été conçue dès son origine pour surmonter ce problème de topologie.

2.2 Surface de subdivision

La surface de subdivision permet la synthèse d'une surface lisse à partir d'un maillage de contrôle quelconque. Donc la *valence* des sommets, soit le nombre de leurs arêtes incidentes, peut-être irrégulière. Les sommets ordinaires sont de valence 4 dans un maillage quadrangulaire régulier, ils sont de valence 6 dans un maillage triangulaire ; pour ces deux exemples, toute autre valence est irrégulière, les sommets sont alors *extraordinaires*. Ainsi, contrairement aux Box-splines, une surface de subdivision peut représenter un objet possédant n'importe quelle topologie. Tout comme exposé précédemment, le maillage de contrôle constitue l'approximation d'une surface lisse continue. Au cours des itérations, le maillage subdivisé par le processus récursif de subdivision converge rapidement vers cette surface. À ce propos, nous parlerons couramment de maillages subdivisés, la surface lisse sous-jacente est nommée surface de subdivision ou surface *limite*, elle est le résultat d'un nombre infini d'itérations du procédé de subdivision.

La modélisation de surface lisse par subdivision de maillage propose de nombreuses solutions élégantes aux problématiques que rencontre un utilisateur d'application graphique. Les principaux avantages de cet outil sont les suivants,

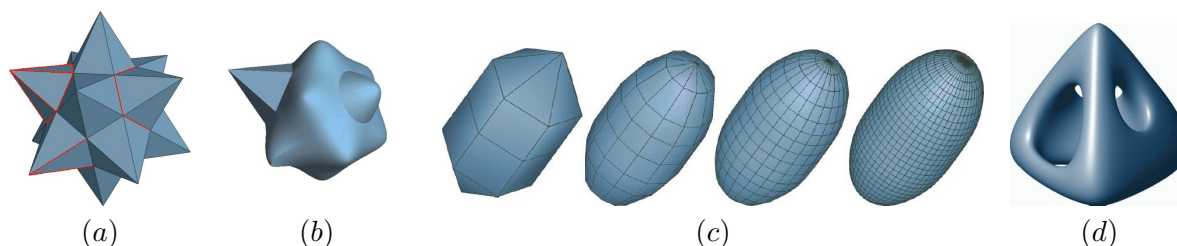


FIG. 2.23 : Plusieurs exemples de schémas de subdivision modifiés, de gauche à droite : (a) et (b) le marquage d'arêtes vives pour la synthèse de surface lisse par morceaux [Hopp 94]. (c) La subdivision polaire [Myle 09] permet la création d'une surface de classe C^2 . En (d) un schéma de subdivision capable de reproduire une surface B-spline non-uniforme de degré arbitraire [Cash 09].

- La surface de subdivision étend la représentation de surface lisse par les Box-splines aux maillages de topologie quelconque. Il n'est plus question de conditions de raccord entre les patches, ni de construction d'un patch spécial au voisinage d'un sommet extraordinaire.
- Le procédé est récursif et adaptatif. L'utilisateur décide du niveau de l'approximation de la surface lisse par la surface de subdivision. De plus, un schéma peut être appliqué localement sur le maillage, d'où la possibilité pour l'utilisateur de régler le niveau de détail de sa surface. Ceci est très utile pour les problématiques liées à l'optimisation d'un calcul ou d'un rendu.
- La surface de subdivision généralise les outils manipulés dans un modelleur graphique : elle fait le lien entre la représentation polygonale et la représentation par patches.
- Au niveau de la stabilité numérique des calculs, la surface de subdivision est bien adaptée aux contraintes des solveurs de type éléments finis. Cette problématique est couramment rencontrée en ingénierie (CAO) et dans l'animation de maillage.
- Le concept de cette représentation est intuitif, la conception d'une surface de subdivision est souvent proposée en tant que travaux pratiques dans l'enseignement supérieur. La mise en œuvre de cet outil est très simple, et une fois les contraintes mathématiques établies, la représentation de surface lisse est rendue très performante en terme de puissance de calcul.

En pratique, la surface B-spline non-uniforme (*NURBS*) est à l'heure actuelle toujours très utilisée en CAO. La surface de subdivision n'a que tout récemment intégré la modélisation des *NURBS* de degré quelconque [Cash 09]. D'importantes avancées techniques ont vu le jour ces dernières années, en voici une courte liste : la plupart des schémas de subdivision étendent leurs possibilités de modélisation en intégrant les arêtes vives, ou semi-vives [Hopp 94]. Certains schémas sont adaptés aux sommets de valence élevée, éliminant ainsi un type de distorsion géométrique très important [Karc 07]. Enfin, un schéma de support compact est désormais capable de reproduire des surfaces de classe C^2 à partir de n'importe quel maillage [Myle 09], ce qui demeurerait une grande limitation de l'outil. Une illustration de ces diverses techniques est présentée en Figure 2.23.

Nous introduirons la surface de subdivision en nous référant aux notions exposées précédemment pour les surfaces Box-splines. Afin de présenter ces surfaces de façon claire, nous nous concentrerons sur un schéma de subdivision en particulier, le schéma de Catmull et Clark [Catm 78]. Nous aborderons ensuite la question de l'analyse du processus de subdivision, les conditions de convergence et celles liées au degré de continuité de la surface. Enfin, la dernière partie présente un ensemble caractéristique des différents schémas de subdivision couramment rencontrés, tels que le schéma de Doo et Sabin [Doo 78a] et celui de Loop [Loop 87].

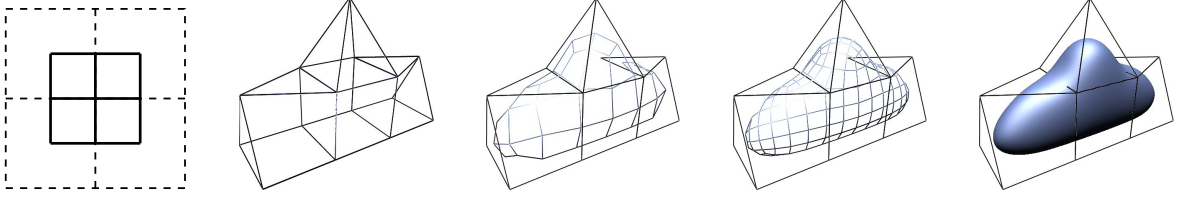


FIG. 2.24 : *Subdivision d'un maillage composé de triangles et de quadrangles par le schéma de Catmull et Clark.*

2.2.1 Le schéma de subdivision

La particularité des surfaces de subdivision par rapport aux surfaces Box-splines est l'introduction de règles de subdivision pour les zones irrégulières du maillage de contrôle. Un *schéma* est constitué d'un ensemble de règles de subdivision telles que celles que nous avons abordées, couplé à un ensemble de règles pour les sommets extraordinaires. En subdivision, les règles sont définies par des dessins nommés *stencils*. Un stencil, en plus des coefficients de lissage des sommets, porte une information de topologie : son but est de définir les nouvelles faces du maillage subdivisé. Il établit également une correspondance entre deux maillages successifs. Nous y reviendrons en détail dans le chapitre 5, où nous proposons un formalisme de description de la phase topologique de subdivision. Les stencils sont déterminés par rapport au masque de subdivision du schéma, tout comme les règles vues précédemment dans le cas des Box-splines. En outre, la plupart des schémas de subdivision sont développés sur la base des Box-splines. Dans les zones régulières du maillage, où il est possible d'établir une paramétrisation, un tel schéma reproduit exactement les règles de subdivision des Box-splines uniformes. Ainsi, dans ces zones, le maillage subdivisé tend vers une surface de ce type.

Afin d'illustrer ces notions, nous présentons ici le schéma de Catmull et Clark. Ce schéma, présenté pour la première fois en 1978, est basé sur la Box-spline bi-cubique uniforme à deux directions ; le masque de subdivision associé est $\mathcal{M}_3$ (2.47). Les sommets du maillage sont directement mis en correspondance avec ceux du maillage subdivisé, le schéma est dit *primal*. Celui-ci est applicable sur un maillage quelconque, voir Figure 2.24. Les stencils réguliers de ce schéma sont directement donnés par le masque $\mathcal{M}_3$,

$$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} 16 & \text{---} & 16 \\ | & & | \\ & \bullet & \\ | & & | \\ 16 & \text{---} & 16 \end{array} & \begin{array}{ccc} 4 & \text{---} & 4 \\ | & & | \\ 24 & \text{---} \bullet \text{---} & 24 \\ | & & | \\ 4 & \text{---} & 4 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & \text{---} & 6 & \text{---} & 1 \\ | & & | & & | \\ & & \text{36} & & \\ | & & | & & | \\ 1 & \text{---} & 6 & \text{---} & 1 \end{array} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} \frac{\beta}{n} & \bullet & \frac{\alpha}{n} \\ | & \diagdown & | \\ \frac{\alpha}{n} & \bullet & \\ | & \diagup & | \\ & \text{---} & \bullet & \text{---} & 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} \end{array} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

où n est la valence du sommet, $\alpha = 3/(2n)$ et $\beta = 1/(4n)$.

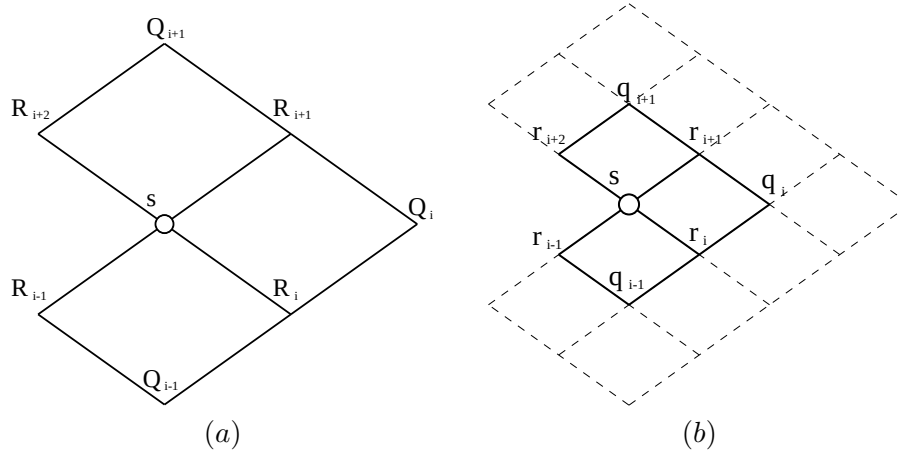


FIG. 2.25 : Mise en correspondance entre un maillage (a) et son maillage subdivisé par le schéma de Catmull et Clark (b).

Tout comme vu précédemment pour les règles de subdivision dyadiques des courbes, nous distinguons plusieurs types de règles. Le premier stencil (2.64) établit la règle d'insertion de nouveaux sommets au milieu de chaque face du maillage. Le deuxième concerne les sommets insérés dans chaque arête. Enfin, le troisième stencil définit la nouvelle position des anciens sommets ordinaires. Le stencil (2.65), quant-à-lui, définit la nouvelle position d'un sommet extraordinaire en fonction de ses sommets voisins. Cette expression garantit un ensemble de propriétés mathématiques que nous exposerons en partie suivante, il s'agit d'un *tuning* du schéma. En particulier, ces propriétés assurent la continuité C^1 de la surface limite à l'endroit des sommets extraordinaires. Ce dernier stencil généralise donc la position des nouveaux sommets aux valences n quelconques, permettant ainsi la synthèse de surfaces lisses à partir d'un maillage de contrôle de topologie globale arbitraire.

Ainsi, les règles géométriques de placement des nouveaux sommets sont composées d'une surface aux propriétés connues — ici la B-spline bi-cubique uniforme — construite dans les zones régulières du maillage, associée à des règles spéciales liées aux sommets extraordinaires. L'analyse du comportement de la surface au cours des itérations permet de déterminer un ensemble de coefficients de lissage adapté à ces sommets.

2.2.2 Analyse et tuning d'un schéma de subdivision

En 1978, David Doo et Malcolm Sabin ont proposé une analyse du comportement du schéma de subdivision de Catmull et Clark [Doo 78b]. Cette méthode analyse la surface limite générée par le schéma à travers les valeurs propres d'un ensemble de matrices, nous reprenons ici leurs notations.

Tout d'abord, considérons pour l'analyse le voisinage d'un sommet extraordinaire, ce voisinage est composé de sommets réguliers, Figure 2.25. Nous reviendrons plus en détails en section 2.3 sur les différents voisinages pouvant être considérés sur un maillage. Les nouveaux sommets (notés en minuscule) sont obtenus par la combinaison linéaire des anciens (notés en majuscule). Il y a ainsi une correspondance directe entre l'ancien maillage et le maillage subdivisé.

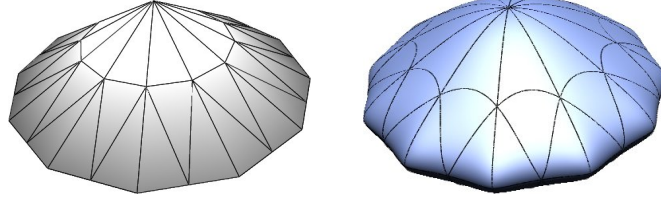


FIG. 2.26 : Un exemple d'artefact : on observe de légères oscillations de la géométrie sur la ligne de crête du maillage de contrôle, ce comportement n'est en général pas souhaité par son concepteur.

Les règles d'obtention des nouveaux sommets q_i , r_i et s à partir des anciens sommets Q_i , R_i et S (2.64) peuvent être réécrites comme suit,

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{1}{4} (Q_i + R_i + R_{i+1} + S) \\ r_i &= \frac{1}{4} (q_i + q_{i-1} + R_i + S) \\ s &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n} + 2S \right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ce même procédé peut être écrit de façon matricielle :

$$\begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n & r_1 & \cdots & r_n & s \end{bmatrix}^T = S \cdot \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & Q_n & R_1 & \cdots & R_n & S \end{bmatrix}^T, \quad (2.67)$$

où S est la matrice de subdivision du schéma ; dans le cas du schéma de Catmull et Clark, celle-ci ne change pas au cours des itérations, le schéma est dit *stationnaire*.

Un résultat bien connu en algèbre linéaire est que la multiplication répétée d'un vecteur par une matrice converge vers le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice. Ainsi, l'analyse de la surface limite du schéma est effectuée par rapport aux propriétés des éléments propres de la matrice de subdivision S .

De nombreux travaux ont fixé les conditions suffisantes sur la régularité de la surface limite, régularité liée à l'existence d'une paramétrisation lisse autour du sommet extraordinaire [Reif 95]. Doo et Sabin ont à l'origine fixé des conditions nécessaires de convergence d'un schéma vers une surface limite de classe C^2 en estimant les deux premières dérivées de celle-ci autour d'un sommet extraordinaire. En 1986 puis en 1988, Ball et Storry [Ball 88] ont fixé les conditions suffisantes à la continuité des tangentes à l'endroit du sommet extraordinaire. Reif [Reif 95] a déterminé en 1995 les conditions nécessaires et suffisantes de la continuité C^1 d'une surface limite. Cette étude utilise alors le lien entre la classe C^p de la surface limite et l'existence de sa description par une paramétrisation de classe C^p . En 1997 et 1998, Prautzsch [Prau 98] et Zorin [Zori 98] fixent les conditions nécessaires et suffisantes pour la continuité C^p . Plus récemment, Gérot et al. [Gero 05] établissent un ensemble de conditions nécessaires à la convergence C^2 d'un schéma dans l'optique d'assurer également un bon comportement de la surface limite. Malcolm Sabin propose une référence globale des travaux concernant le tuning des schémas dans [Sabi 04a].

Malgré une amélioration du comportement des schémas par ces différentes analyses, un schéma de subdivision stationnaire reste limité. Parallèlement à la recherche des conditions de continuité, nous reviendrons sur ces limitations en section 3.2.2.1, où nous effectuons un récapitulatif des travaux concernant la caractérisation des perturbations géométriques dues aux sommets extraordinaires, les *artefacts* (voir un exemple en Figure 2.26).

2.2.3 Schémas de subdivision fréquemment utilisés

Nous proposons ici d'effectuer un rapide classement des différents schémas de subdivision connus et analysés. Dans un premier temps, nous définirons une méthodologie de classement basée sur un ensemble de critères. Puis nous présenterons une table de classification où ces schémas seront situés selon ces critères.

Nous effectuons ici un classement par type des différents schémas de subdivisions stationnaires existants. Ceux-ci étant très nombreux, ce classement n'est pas exhaustif; certains schémas ne peuvent être décrits de cette façon, tel par exemple le schéma semi-régulier pentagonal [Akle 04]. Nous pouvons cependant aisément classer la plupart d'entre eux selon ces cinq critères :

- Le type de maillage pour lequel le schéma est applicable.
- Le type de maillage généré par l'application du schéma.
- Le type de transformation topologique : primale ou duale (également nommée *face-split* et *vertex-split*)
- Le schéma de subdivision est approximant ou interpolant.
- Le degré de lissage de la surface limite générée par le schéma.

À cette liste, il est possible d'ajouter un classement des différentes transformations topologiques liées à l'application du schéma de subdivision. Par exemple, le schéma de Catmull et Clark est désigné ici de même type que le schéma ternaire présenté en Figure 2.27. La problématique du classement de ces transformations topologiques est traitée en détail au chapitre 5.

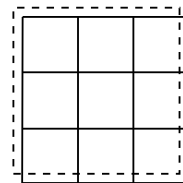


FIG. 2.27 : Un schéma primal ternaire.

Type de maillage associé au schéma Un critère parmi les plus discriminants est le type de maillage auquel peut s'appliquer un schéma de subdivision. Ceci car tous les schémas ne peuvent s'appliquer à tous les types de faces, certains sont uniquement triangulaires. Ensuite, outre les éventuelles faces extraordinaires, un schéma de subdivision construit un maillage de type particulier : triangulaire, quadrangulaire ou hexagonal.

Schéma de subdivision de type primal ou de type dual Un schéma de subdivision est dit de type primal si le maillage subdivisé hérite des sommets de l'ancien maillage, donc si ces derniers ont une correspondance directe avec certains des nouveaux sommets. On parle alors d'insertion de sommet ou de *face-split*, voir la Figure 2.28 à gauche. Un schéma de subdivision de type dual ne possède pas cette caractéristique, voir la même figure à droite. Chaque ancienne face est par contre directement mise en correspondance avec une nouvelle. C'est le cas des schémas de type *corner cutting*, où comme le nom l'indique, on supprime les anciens sommets du maillage. Bien souvent, un ancien sommet de valence n est *divisé* en n nouveaux sommets, un dans chaque face incidente. On parle alors de *vertex-split*.

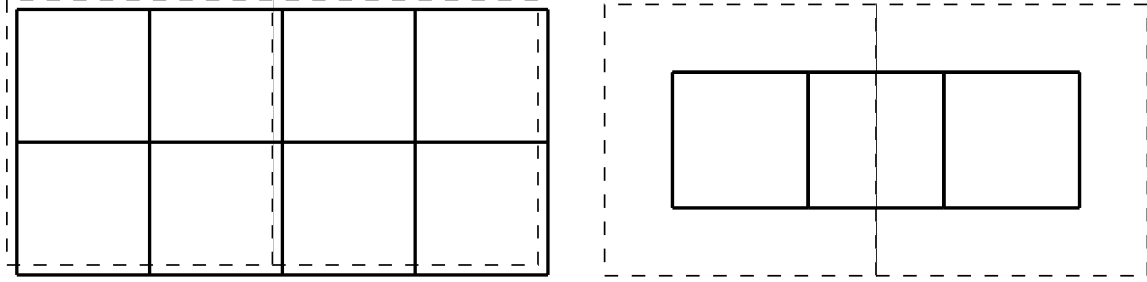


FIG. 2.28 : À gauche une subdivision de type primal, à droite de type dual.

Schéma approximant ou interpolant Ce critère-ci est géométrique. De façon simple, un schéma approximant lisse les anciens sommets, la surface limite ne passe par aucun d'entre eux. Pour un schéma interpolant, chaque sommet du maillage de départ est situé sur la surface limite. De fait, seul un schéma primal peut être interpolant. Ces derniers sont attrayants, d'une part car ils permettent un contrôle plus intuitif de la surface, d'autre part parce que de nombreux calculs et algorithmes peuvent alors s'appliquer directement sur la surface. Cependant, les schémas approximants produisent des surfaces de meilleur qualité et leur convergence vers la surface limite est plus rapide.

Le degré de lissage de la surface limite Cet autre critère géométrique diffère selon les schémas. Le choix d'un schéma de subdivision prend en compte de façon très importante le degré de lissage de la surface construite. Ce facteur détermine la qualité de la surface. D'un autre côté, le choix d'un degré de continuité élevé induit pour la surface limite une définition polynomiale de degré également plus élevé, donc une augmentation de la complexité des algorithmes qu'on lui applique.

Schéma	Faces				Résultat			Type	Degré
	3	4	6	n	3	4	6		
Midedge [Pete 97]				✓	✓			Dual Approximant	C^1
Doo-Sabin [Doo 78a]				✓	✓			Dual Approximant	C^1
Honeycomb [Akle 02]				✓		✓		Dual Approximant	C^1
Catmull-Clark [Catm 78]				✓	✓			Primal Approximant	C^2
4-8 [Velh 01]				✓	✓			Primal Approximant	C^4
Loop [Loop 87]	✓				✓			Primal Approximant	C^2
$\sqrt{3}$ [Kobb 00b]	✓				✓			Primal Approximant	C^2
Butterfly [Zori 96]	✓				✓			Primal Interpolant	C^1
Kobbelt [Kobb 96]		✓			✓			Primal Interpolant	C^1

TAB. 2.2 : Classement non-exhaustif des schémas de subdivision connus. Les types de faces 3, 4, 6 et n correspondent respectivement aux triangles, aux quadrangles, aux hexagones et aux faces quelconques.

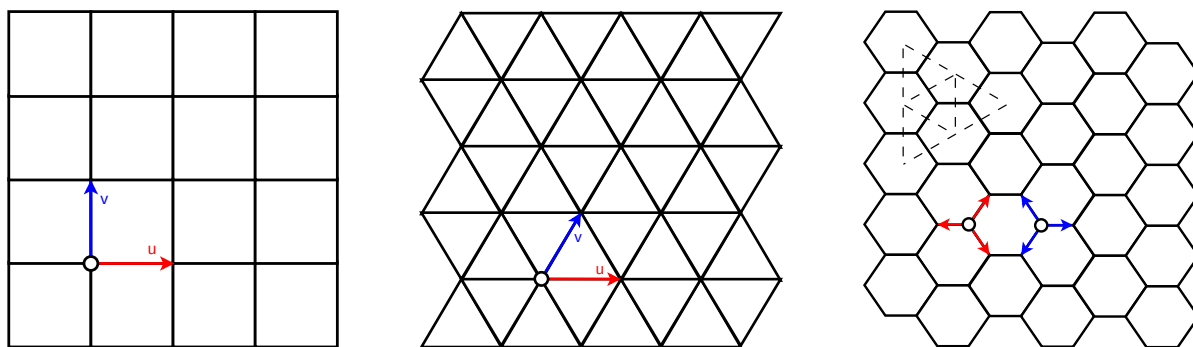


FIG. 2.29 : Les trois pavages réguliers du plan. De gauche à droite, les sommets sont de valence 4, 6 et 3.

2.3 Voisinage topologique d'un sommet du maillage

Une notion particulièrement utile dans la compréhension des parties suivantes concerne les différents voisinages topologiques que nous pouvons considérer sur un maillage. À ce propos, nous considérons tout maillage comme un graphe dont les nœuds sont des vecteurs de l'espace de réalisation (des points de $\mathbb{R}^3$ dans le cas des surfaces). Un tel voisinage permet donc la création de chemins sur le maillage. Nous distinguons ici trois types de maillage au sens de ce voisinage topologique : les maillages *régulier*, *semi-régulier* et *irrégulier*.

Le maillage régulier Nous parlons de maillage à connectivité régulière lorsqu'il est homéomorphe à un pavage régulier du plan euclidien. Il en existe trois : les pavages quadrangulaire, triangulaire et hexagonal, voir Figure 2.29. Pour chacun de ces trois maillages, la valence des sommet est constante : 6, 4 et 3 (sans prendre en compte la question des bords). Pour les maillages quadrangulaire et triangulaire, il est possible d'établir une base vectorielle (u, v) qui repère les éléments du treillis. Pour le maillage hexagonal, on distingue par contre deux types de sommet. Nous ne pouvons donc pas parler, de façon directe, de sommets repérés par un vecteur de coordonnées. Par ailleurs, ce maillage hexagonal est le dual du maillage triangulaire. Si l'on construit un maillage en considérant des arêtes liant le milieu de chaque face adjacente, nous obtenons un maillage régulier triangulaire, voir l'exemple en pointillé à droite de la Figure 2.29.

Le maillage semi-régulier Un voisinage semi-régulier a pour ainsi dire une topologie régulière par morceaux, voir Figure 2.30. Un tel maillage possède un ou plusieurs sommets extraordinaires, au voisinage desquels les sommets sont réguliers. Ainsi, pour un sommet de valence n , nous pouvons considérer le sommet extraordinaire comme étant entouré de n sous-maillages réguliers. Nous pouvons donc construire un repère métrique polaire (r, φ) autour de celui-ci, voir Figure 2.30 à droite. Les surfaces de subdivision construisent ce type de topologie au voisinage des sommets extraordinaires, et comme vu précédemment en partie 2.2.2, leur analyse se base sur ces anneaux de splines. Il est également possible de considérer un voisinage polaire lorsque les sous-maillages réguliers voisins ne sont pas de même type, comme exposé en Figure 2.30.b. Cette configuration particulière a été étudiée pour le schéma de subdivision Quad/Triangle [Stam 02].

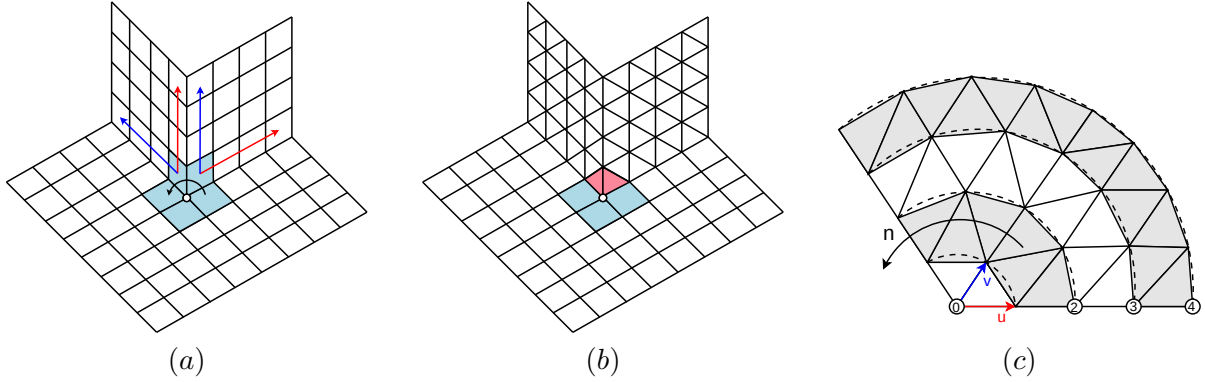


FIG. 2.30 : Nous pouvons considérer un repère métrique polaire de sommets réguliers autour de chaque sommet extraordinaire d'un maillage semi-régulier (a). En (b) nous considérons un maillage semi-régulier composé de plusieurs types de faces. Il est alors possible de considérer la notion d'anneaux d'équidistance topologique (c).

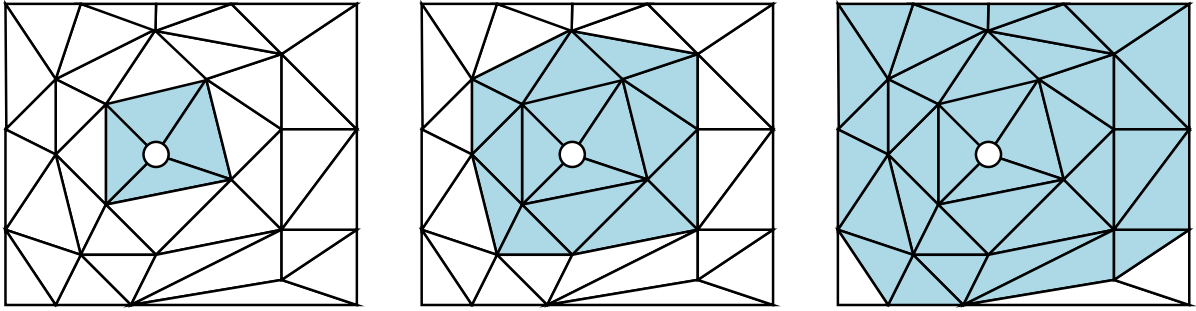


FIG. 2.31 : Nous pouvons prendre en compte un voisinage topologique sur un maillage irrégulier. De gauche à droite, trois niveaux de voisinage au sommet repéré par un cercle.

Le maillage irrégulier Lorsque le maillage ne possède pas de caractéristique topologique régulière, il n'est pas direct de considérer le voisinage d'un sommet. Nous pouvons néanmoins considérer que le k -voisinage d'un sommet P est composé de tous les sommets accessibles par k déplacements sur les arêtes du maillage à partir de P , voir en Figure 2.31. Une version légèrement différente de ce voisinage est utilisée dans [Chen 06], il est nommé *XMR* (*eXtended Multi-Ring*). Cependant, cette méthode ne permet pas la construction d'un repère où placer et ordonner les sommets.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des outils existants en modélisation de courbes et de surfaces paramétrées, ainsi que la notion de voisinage d'un sommet du maillage. Nous avons introduit la surface de subdivision, outil constituant notre sujet d'étude. Le chapitre suivant se consacre à l'analyse de la qualité d'une surface subdivisée. En particulier, nous mettrons en évidence les artefacts survenant au cours du processus de subdivision.

Chapitre 3

Analyse de la géométrie d'une surface subdivisée

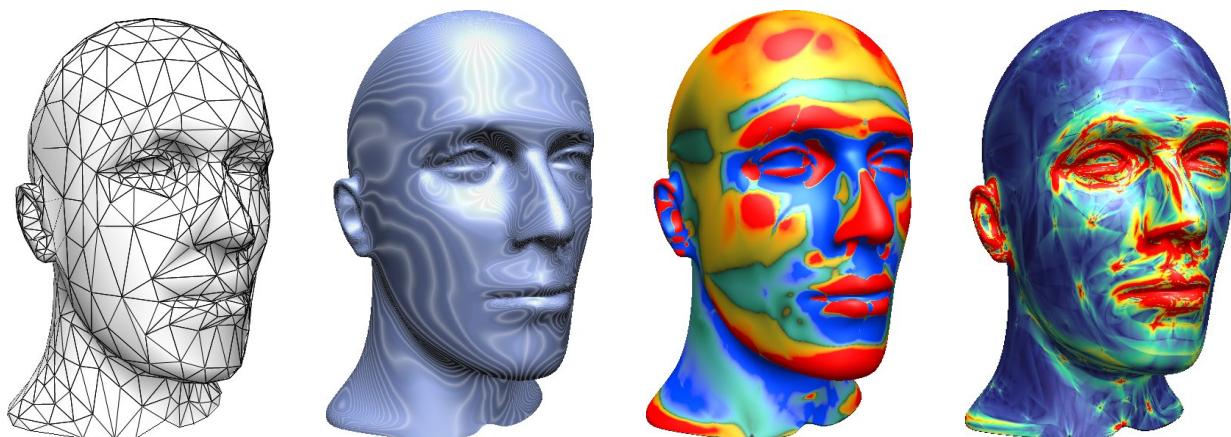


FIG. 3.1 : Différents relevés de mesures sur une surface subdivisée mettent en évidence différentes caractéristiques géométriques. Ici, de gauche à droite, les lignes de réflexion, la courbure gaussienne et le gradient de courbure absolue.

Sommaire

Introduction	42
3.1 Analyse de la qualité d'une surface lisse	42
3.1.1 Définition mathématique de la courbure	42
3.1.2 Visualisation de données colorées	45
3.1.3 Visualisation pour l'analyse de surfaces lisses	47
3.2 Applications aux surfaces de subdivision	51
3.2.1 Courbure sur une surface de subdivision	51
3.2.2 Visualisation des artefacts sur une surface de subdivision	55
3.2.3 Un autre espace de visualisation	60
3.2.4 Méthodes de traitement d'images appliquées aux cartes de données polaires	68
Conclusion et perspectives	77

Introduction

Ce chapitre est consacré à la visualisation pour l'analyse des caractéristiques géométriques d'une surface lisse. La qualité d'une surface lisse est difficile à déterminer ; elle dépend par ailleurs fortement de l'application considérée. Les caractéristiques mathématiques abordées précédemment permettent d'établir une mesure de lissage de la surface à travers sa continuité géométrique G^k . Certaines applications, notamment de CAO ou de rendu, nécessitent une qualité de surface très élevée, à savoir un degré de continuité géométrique élevé. Cependant, une surface jugée lisse par rapport à ce critère n'est pas forcément agréable à l'œil de son concepteur. Cette mesure est insuffisante à la notion de qualité d'une surface car une surface bosselée ou bruitée peut appartenir à la classe G^∞ [Bots 08]. Ainsi, une surface lisse de grande qualité doit convenir aux exigences esthétiques de son concepteur tout en possédant les propriétés mathématiques requises. De façon simple, une surface de grande qualité ne doit pas seulement convenir à son concepteur au niveau de sa forme ; sa courbure (liée aux propriétés la classe G^2) doit également être *régulière*. Dans l'industrie automobile, les surfaces de cette qualité sont dites de classe *A*.

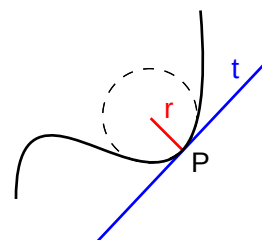
De nombreux travaux sont consacrés aux outils d'analyse de surfaces. Nous proposons ici de les adapter aux surfaces de subdivision, en particulier dans le but de caractériser les perturbations néfastes induites par les sommets extraordinaires introduites précédemment en partie 2.2.2, les artefacts. Les schémas de subdivision classiques génèrent des surfaces de classe G^2 presque partout, elles sont discontinues en courbure à l'endroit d'un sommet extraordinaire. Cette discontinuité de courbure est de plus associée à des perturbations *autour* du sommet [Sabi 04a], celles-ci sont très néfastes à la qualité des surfaces générées. Ainsi, dans le cas des surfaces de subdivision, nous nous intéresserons à la régularité des relevés de courbure de la surface autour des sommets extraordinaires.

Nous établirons dans un premier temps un exposé des outils généraux de visualisation pour l'analyse de surface : la courbure, la visualisation de données colorées et les autres outils couramment utilisés pour l'évaluation de la qualité d'une surface. Nous exposerons ensuite la provenance des artefacts en subdivision et nous illustrerons leurs effets néfastes. La partie suivante sera consacrée à la visualisation d'une surface de subdivision dans le but de caractériser ces artefacts. Enfin, nous proposons un espace de visualisation centré sur notre problématique, qui nous permettra par la suite de proposer un ensemble d'outils adaptés aux données géométriques que nous étudions.

3.1 Analyse de la qualité d'une surface lisse

3.1.1 Définition mathématique de la courbure

La courbure est une mesure ponctuelle de forme souvent abordée en géométrie riemannienne. Considérons une courbe du plan euclidien : la tangente en un point P est la meilleure approximation locale de la courbe par une droite t . De même, la courbure est liée au rayon r du cercle qui constitue la meilleure approximation de la courbe en un point ; on parle alors de rayon de courbure et de cercle osculateur. La mesure de courbure est l'inverse de ce rayon. Ainsi, une droite possède une courbure nulle, tandis qu'un cercle possède une courbure constante en tout point.



Ces illustrations se rapportent à la courbure *extrinsèque* de la courbe, car nous la mesurons par rapport à son espace de plongement, le plan. La courbure dite *intrinsèque* se mesure au moyen d'expressions différentielles, sans avoir besoin de cet espace de plongement. Nous développerons dans cette partie une approche extrinsèque de la théorie. L'immense volume de travail concernant la courbure d'une surface ne peut être abordé ici. Nous nous concentrerons sur la compréhension des notions de base concernant la courbure d'une surface régulière et orientable plongée dans $\mathbb{R}^3$. Ces notions comprennent les courbures principales et l'expression des courbures gaussienne et moyenne. Parmi les nombreuses références utiles à la compréhension de l'ensemble de ces notions, nous conseillons les ouvrages [Koba 69, Doub 82, Gray 96, Chav 96].

Considérons le cas d'une surface paramétrée S continue que nous définissons par :

$$\begin{aligned} U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto P = P(u, v) . \end{aligned} \quad (3.1)$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Nous utiliserons par la suite la notation de dérivée partielle $P_u = \partial P / \partial u$. La surface S est orientée en tout point P par la normale $N = P_u \wedge P_v$.

Afin d'établir la courbure en un point de la surface, nous exprimons ses deux premières *formes fondamentales*. La première est la métrique de la surface,

$$\begin{aligned} I &= P_u \cdot P_u du^2 + 2P_u \cdot P_v dudv + P_v \cdot P_v dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 . \end{aligned} \quad (3.2)$$

La deuxième forme fondamentale II , à l'origine introduite et étudiée par Gauss, est définie comme une forme quadratique sur le plan tangent à la surface en un point. De façon intuitive, elle est l'expression du déplacement infinitésimal d'une courbe sur la surface par rapport au vecteur normal unitaire N en chaque point de cette courbe,

$$\begin{aligned} II &= -N_u \cdot P_u du^2 - 2N_u \cdot P_v dudv - N_v \cdot P_v dv^2 \\ &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nous pouvons reformuler cette expression en considérant la matrice (a_{ij}) de dN dans la base (P_u, P_v) . Celle-ci n'étant pas nécessairement orthonormée, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -N_u &= a_{11}P_u + a_{21}P_v \\ -N_v &= a_{12}P_u + a_{22}P_v . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le produit scalaire de ces deux équations par P_u puis par P_v nous permet d'obtenir quatre égalités, que nous pouvons écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} . \quad (3.5)$$

La matrice (a_{ij}) solution constitue l'opérateur de forme $\mathcal{W}$ de la surface :

$$\mathcal{W} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{pmatrix} . \quad (3.6)$$

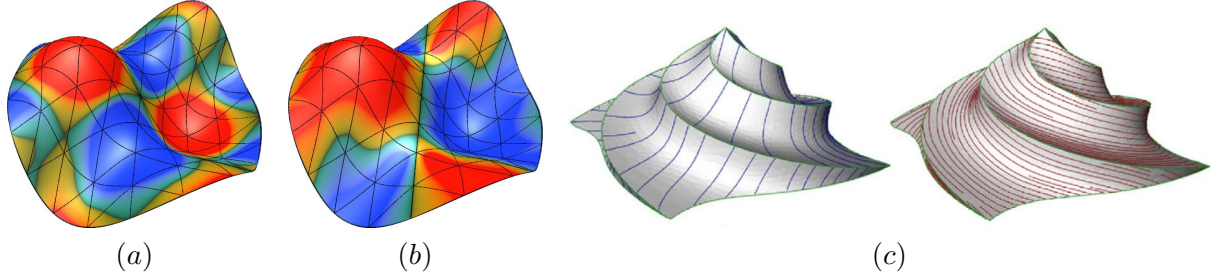


FIG. 3.2 : La courbure gaussienne (a) illustre les configurations elliptique et hyperbolique ; la courbure moyenne (b) les formes convexes et concaves. En (c) nous visualisons les deux champs de directions principales de courbure (image issue de [Alli 03]).

Cet opérateur, également nommé carte de Weingarten ou tenseur de la seconde forme fondamentale, correspond donc à la dérivée négative du champ de normales unitaires à la surface. Les valeurs propres de cet opérateur correspondent aux deux courbures principales k_1 et k_2 . Celles-ci sont solutions de l'équation :

$$(EG - F^2)k^2 - (gE + eG - 2fF)k + (eg - f^2) = 0 . \quad (3.7)$$

Par ailleurs, la courbure gaussienne K est le déterminant de $\mathcal{W}$, tandis que la courbure moyenne H correspond à la moitié de sa trace,

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{eG - 2gF + gE}{2(EG - F^2)} , \end{aligned} \quad (3.8)$$

et donc :

$$\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Entre autres propriétés, la surface est dite elliptique si la courbure gaussienne est positive, elle est dite hyperbolique (en selle de cheval) lorsque cette courbure est négative, voir Figure 3.2. Lorsque K est nulle, la surface est dite développable : elle peut être *aplatie* sans étirement ni déformation. Concernant la courbure moyenne, la surface est concave si celle-ci est positive, elle est convexe sinon. Une surface est dite minimale si la mesure de sa courbure moyenne est nulle en tout point. D'autre part, les vecteurs propres de $\mathcal{W}$ sont les deux directions principales de courbure, e_1 et e_2 , voir Figure 3.2.c. Si ces directions définissent les tangentes d'une courbe sur la surface, celle-ci aura une courbure maximale selon e_1 et minimale selon e_2 . De nombreux travaux se basent sur ces champs de directions, notamment pour le remaillage [Alli 03], le lissage de surface [Hong 01] ou encore la reconnaissance de forme [Tana 98].

Ainsi, ces différentes mesures définissent le concept de courbure en tout point d'une surface lisse continue. Nous devons par la suite les estimer sur une surface polygonale, puisque notre cadre d'analyse est un maillage subdivisé. La partie suivante est consacrée à l'utilisation de ces données, ainsi que d'autres mesures, dans le but d'évaluer concrètement la qualité d'une surface.

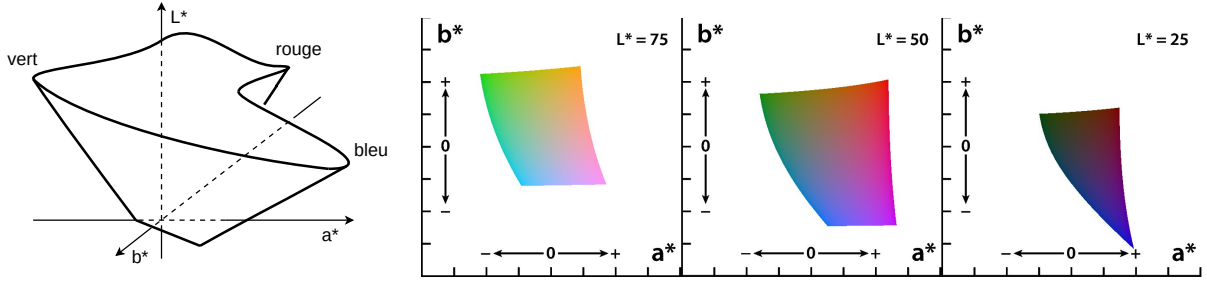


FIG. 3.3 : À gauche, la forme approximative de l'espace de codage $L^*a^*b^*$. À droite, trois coupes de cet espace pour des valeurs de L (Lightness) décroissantes, pour des valeurs de a^* et b^* comprises entre -128 et 128 .

3.1.2 Visualisation de données colorées

Dans la plupart des cas d'analyse présentés dans ce document, les données sont des maillages dont les sommets portent une information de couleur. Nous introduisons ici un protocole de visualisation de ces données colorées, étant donné qu'il n'existe pas de système clairement défini dans l'ensemble des travaux existants. Nous le choisirons en rapport aux différentes problématiques abordées par la suite. En particulier, nous chercherons à mettre clairement en évidence les artefacts propres aux surfaces de subdivision au voisinage d'un sommet extraordinaire. La visualisation de données colorées n'a pas seulement pour objet la qualité esthétique des images ; une colorisation adaptée permet à l'utilisateur d'obtenir une idée rapide et précise du relevé de données [Ware 04]. Tout comme exposé dans l'étude [Seid 92], nous considérons pour un procédé de colorisation ces quatre caractéristiques :

1. Les variations des données doivent induire un changement semblable dans la perception des couleurs.
2. Nous avons besoin d'un spectre composé d'autant de couleurs qu'il y a de comportements à mettre en évidence.
3. La première et la dernière couleur du spectre sont différentes, tout comme la couleur située en leur centre.
4. Pour une donnée visualisée sur plusieurs modèles, l'échelle de couleur demeure constante.

Il existe de nombreux protocoles de codages numériques destinés à la modélisation des couleurs. Cette diversité est moins due à leurs différentes caractéristiques qu'à une forte concurrence industrielle [Fole 82]. Parmi ces protocoles, nous retenons le codage psychovisuel dit $L^*a^*b^*$, conçu par la Commission Internationale de l'Éclairage (CIELAB) en 1976. Le grand avantage de ce codage réside dans son lien avec notre perception : une variation dans l'espace de couleur est sensé correspondre à la même variation au niveau de notre perception visuelle. Il est par exemple admis que nous ne percevons pas aussi bien les variations de teintes bleues que celles des teintes rouges, donc l'espace de couleur psychovisuel correspondant au bleu est contracté par rapport à la zone liée au rouge. De plus, ce codage est conseillé pour la visualisation de teintes sombres, et nous utilisons justement ces teintes afin de mettre en évidence certains comportements géométriques précis. Nous utilisons par ailleurs la couleur blanche de référence normalisée.

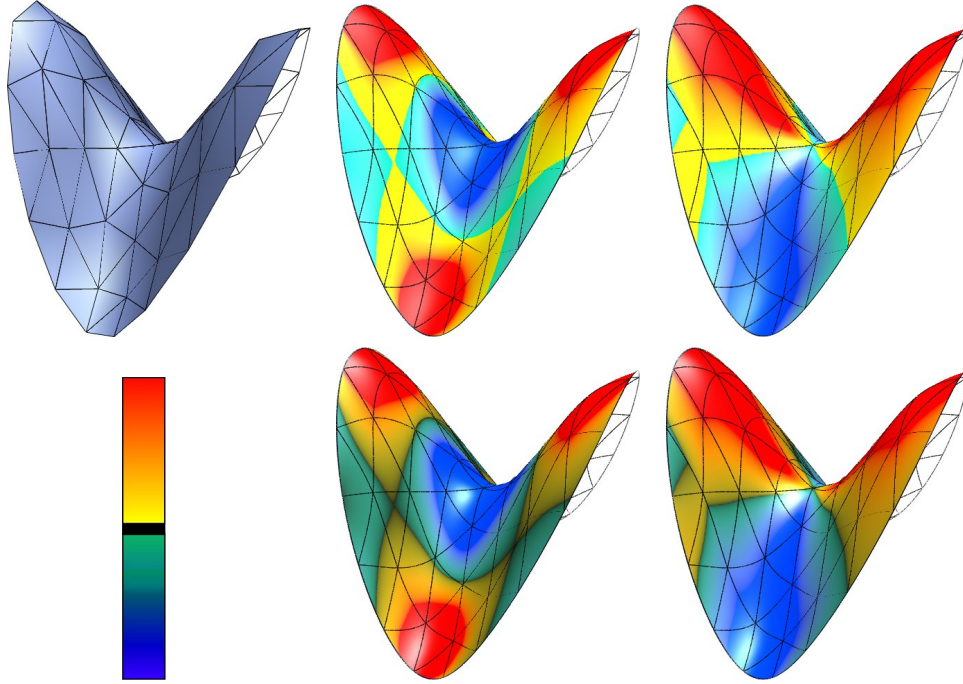


FIG. 3.4 : Exemple de modèle en selle de cheval subdivisé par le schéma de Loop. Nous visualisons les données de courbure gaussienne (milieu) et moyenne (droite) avec une interpolation de couleurs de l'espace $L^*a^*b^*$. Sur la deuxième ligne, nous ajoutons le facteur d'importance lié au changement de signe de la courbure car cette information est utile dans le cadre de notre analyse.

L'espace $L^*a^*b^*$ n'est pas d'utilisation aussi intuitive que les codages RGB ou HSV (voir Figure 3.3), il n'existe pas de *chemin* direct entre une couleur et une autre. Ainsi, nous suivons la même procédure que dans l'étude [Seid 92]. Notre choix est de faire évoluer les valeurs positives du jaune au rouge et les valeurs négatives du cyan au bleu, ces deux plages de teintes sont de même taille dans l'espace HSV . Nous choisissons donc dans l'espace HSV les couleurs pures rouge, verte et bleue, puis nous les convertissons dans l'espace $L^*a^*b^*$. Enfin, nous interpolons entre les points de cet espace de façon linéaire afin d'obtenir la totalité des couleurs de notre spectre, voir un exemple de résultat en Figure 3.4.

De plus, dans notre cadre de visualisation de la courbure d'un modèle, il est pertinent d'établir un facteur d'importance des données [McDo 08]. Les changements de signe de la courbure montrent particulièrement bien les comportements géométriques néfastes, nous reviendrons sur ce point en partie 3.2.2.1. Ainsi, nous ajoutons de l'ombre dans les zones où la courbure est très faible : dans l'espace $L^*a^*b^*$, nous faisons une interpolation linéaire entre la couleur choisie C et la couleur noire C_0 à mesure que la norme de la courbure mesurée est faible :

$$\tilde{C} = \alpha C + (1 - \alpha)C_0, \quad \alpha = |c|^{\frac{1}{5}}, \quad (3.10)$$

où c est la mesure de courbure étudiée. Sauf mention contraire, les données c sont seuillées dans l'intervalle $[-1, 1]$. La puissance $\frac{1}{5}$ nous est apparue dans de nombreux tests comme étant visuellement adaptée à notre problématique. Dans le cas de mesures uniquement positives, nous appliquerons un spectre allant du bleu au rouge dans l'intervalle $[0, 1]$.

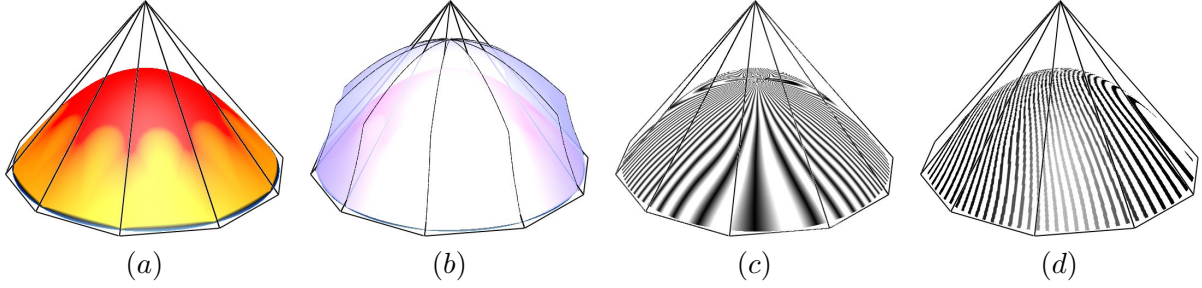


FIG. 3.5 : Les différentes techniques de visualisation ont pour but de mettre en évidence les irrégularités géométriques des surfaces lisses, en particulier celles que l'on ne peut déceler à l'œil nu. Le sommet central du cône est de valence 12 et nous utilisons le schéma de Loop pour le subdiviser. De gauche à droite : (a) un relevé de courbure gaussienne, (b) la surface focale associée, (c) les lignes de réflexion et (d) des isophotes.

3.1.3 Visualisation pour l'analyse de surfaces lisses

Comme exposé précédemment, l'analyse de la qualité d'une surface lisse prend en compte différents critères, tels que l'évaluation visuelle de la surface ou son degré de continuité géométrique G^k . Les travaux de Hagen et Hahmann [Hage 90, Hage 92b, Hage 95, Hahm 96] constituent un très bon récapitulatif des différentes techniques de visualisation existantes : les relevés de courbure, la surface focale, les lignes de réflexion et les isophotes, voir Figure 3.5. Nous proposons ici de les illustrer puis de les étendre à l'analyse des surfaces de subdivision en partie 3.2.2.

3.1.3.1 La surface focale

La surface focale est à l'origine liée aux lignes de congruence, introduite en 1990 par Hagen et ses co-auteurs [Hage 90]. Elle fut utilisée pour l'analyse de surface lisse par Hagen et Hahmann [Hage 92a]. Cet outil est très lié à la courbure de la surface : les points $\mathcal{F}(u, v)$ d'une surface focale sont définis par rapport à la surface $P(u, v)$ de la manière suivante,

$$\mathcal{F}(u, v) = P(u, v) + af(k_1, k_2) \cdot N, \quad (3.11)$$

où $a \in \mathbb{R}$, et (k_1, k_2) sont les courbures principales estimées au point $P(u, v)$ de normale N . Le scalaire a est utilisé comme facteur d'échelle.

La fonction $f(k_1, k_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ peut prendre plusieurs formes suivant les données étudiées. La surface visualisée en Figure 3.5.b correspond à la courbure gaussienne : $f_1(k_1, k_2) = k_1 k_2 = K$. Cette configuration permet de visualiser les changements de signe de la courbure gaussienne, donc les frontières entre la convexité et la concavité de la surface, voir Figure 3.6.a. Les autres mesures de $f(k_1, k_2)$ introduites par [Hage 92a] comprennent :

$$\begin{aligned} f_2(k_1, k_2) &= k_1^2 + k_2^2 \\ f_3(k_1, k_2) &= \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} = \frac{f_2(k_1, k_2)}{2K}, \quad K \neq 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La mesure f_2 met en évidence les zones de courbure nulle. La mesure f_3 est quant à elle liée au degré de continuité géométrique de la surface : la distance entre une surface réellement lisse et cette surface focale est minimale, ce qui est le résultat principal de l'étude précédemment citée.

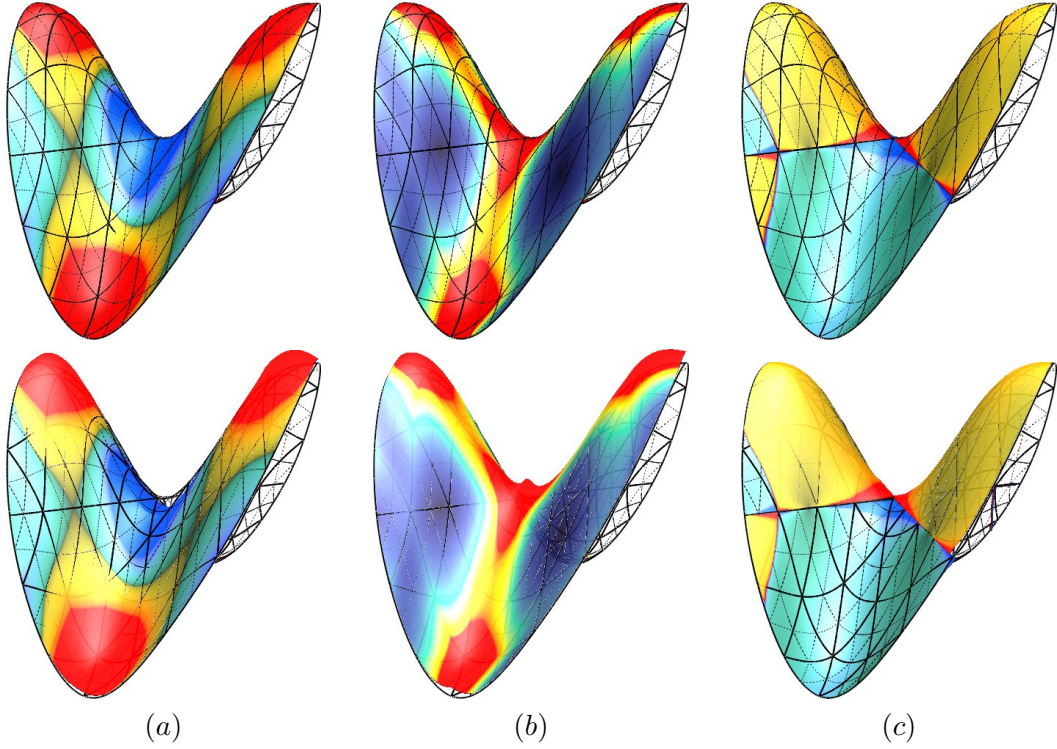


FIG. 3.6 : Comparaison de plusieurs surfaces focales selon des fonctions de k_1 et k_2 différentes. La première ligne présente les données sans utiliser de surface focale. De gauche à droite : (a) $f_1(k_1, k_2) = k_1 k_2 = K$, (b) $f_2(k_1, k_2) = k_1^2 + k_2^2$ et (c) $f_3(k_1, k_2) = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2}$.

3.1.3.2 Les lignes de réflexion

Les lignes de réflexion sont basées sur la réflexion de lumière sur la surface par rapport à un observateur. Il s'agit d'un réseau de lignes permettant de détecter les irrégularités géométriques de la surface, en particulier les éventuelles discontinuités au niveau des tangentes. Leur utilisation remonte traditionnellement au design industriel de la carrosserie d'une voiture : des tubes parallèles fluorescents étaient placés au dessus de la pièce examinée afin de vérifier ses propriétés de réflexion, et donc ses éventuels défauts.

Considérons, comme illustré en Figure 3.7, une surface S , une ligne d'illumination $L(t) = L_0 + t \cdot \vec{s}$, où le paramètre t est un scalaire réel, et le point d'observation fixe A . La réflexion de $L(t)$ sur S selon A est estimée en un point $P(u, v)$. Soient la normale unitaire N mesurée en $P(u, v)$, les vecteurs $\vec{a} = A - P(u, v)$, $\vec{b} = L(t) - P(u, v)$ ainsi que l'angle α formé entre N et $\vec{a}$. Un point $L(t)$ de la ligne est réfléchi par la surface si l'angle formé entre N et $\vec{b}$ est également α . En considérant le cosinus de cet angle nous pouvons donc écrire la contrainte de réflexion :

$$\frac{\vec{a} \cdot N}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{b} \cdot N}{\|\vec{b}\|} . \quad (3.13)$$

Puisque les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et N sont coplanaires nous avons également la relation suivante,

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \lambda N , \quad (3.14)$$

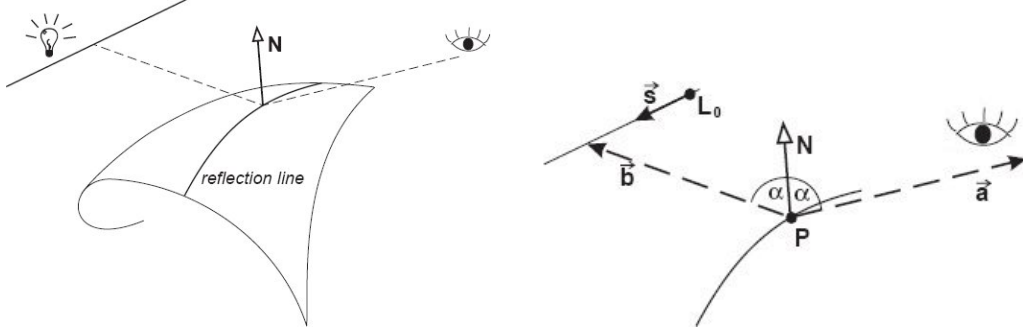


FIG. 3.7 : Illustrations du principe de construction des lignes de réflexion (images issues de [Hahm 96]). Elles sont le reflet de lignes d'illumination sur la surface analysée.

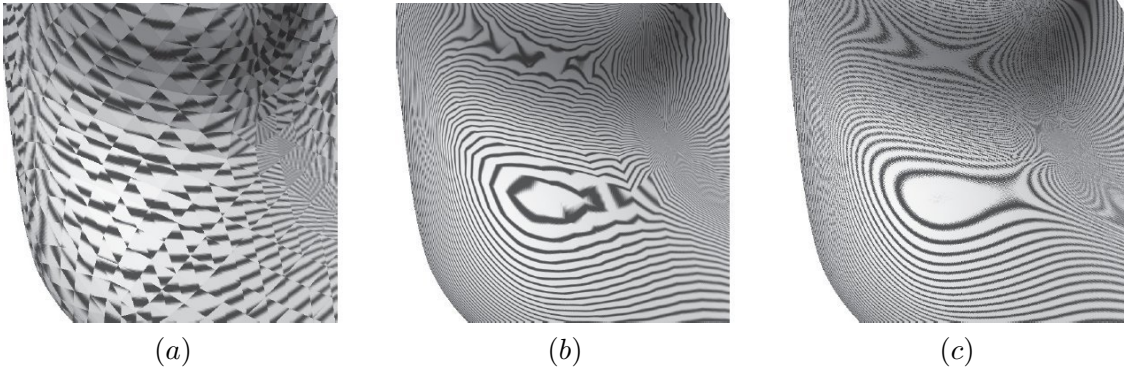


FIG. 3.8 : Le degré de continuité des lignes de réflexion calculée sur une surface de classe G^k est G^{k-1} . En (b), (c) et (d) sont montrées des lignes de réflexion calculées sur une surface respectivement de classe G^0 , G^1 et G^2 (images issues de [Bots 08]).

où λ est un réel déterminé par la relation (3.13),

$$\lambda = 2 \frac{\vec{a} \cdot N}{\|\vec{a}\|} = 2 \frac{\vec{b} \cdot N}{\|\vec{b}\|} . \quad (3.15)$$

Nous obtenons ainsi l'équation de réflexion :

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = 2 \frac{\vec{a} \cdot N}{\|\vec{a}\|} N . \quad (3.16)$$

Cette équation non-linéaire peut être résolue par des techniques d'optimisation numérique. Il est cependant très simple en pratique de visualiser de telles lignes en utilisant le matériel graphique standard : une texture environnementale de lignes projetée sur la surface simule des lignes de réflexion, voir Figure 3.8. Ce système permet la visualisation en temps réel des lignes de réflexion, mais dans ce cas la largeur des lignes n'est pas constante.

Il existe un lien entre le degré de continuité géométrique G^k de la surface et celui des lignes de réflexion [Bots 08], voir Figure 3.8. En plus d'être sensibles aux petites variations de la géométrie de la surface, ces lignes renseignent donc également l'observateur sur les discontinuités d'ordre supérieur. En particulier, une surface doit être au moins de classe G^2 pour être en mesure de simuler sur celle-ci une image réfléchie de bonne qualité.

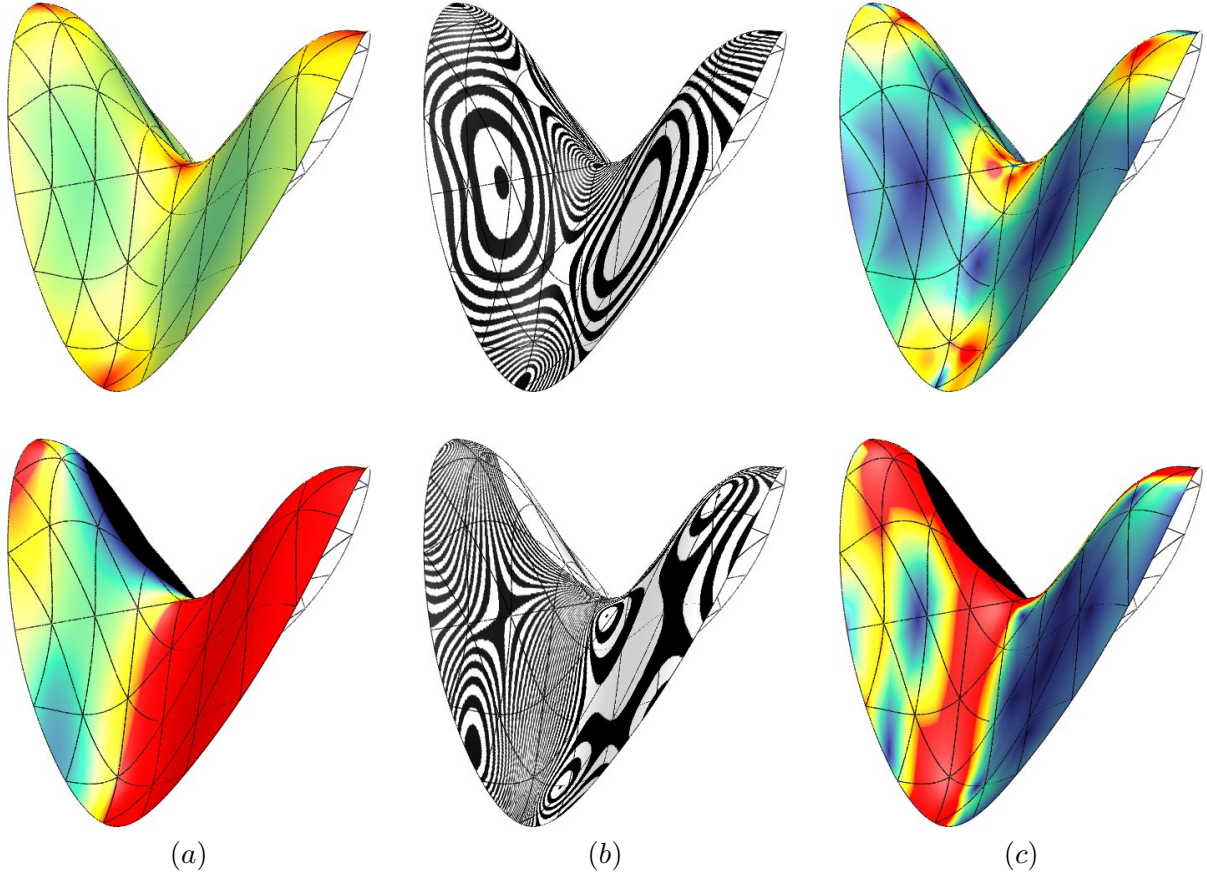


FIG. 3.9 : Visualisation d'isophotes selon deux orientations lumineuses. En (a) le champ d'intensité lumineuse, en (b) nous construisons des lignes de niveau et nous visualisons en (c) leur quantité de variation selon une mesure de gradient classique.

3.1.3.3 Les isophotes

Les isophotes sont des lignes de niveau de l'intensité lumineuse sur la surface. Elles mettent en évidence les mêmes caractéristiques que les lignes de réflexion.

À partir d'une source lumineuse directionnelle L , l'intensité I en un point $P(u, v)$ de la surface S de normale N est définie comme le produit scalaire :

$$I = L \cdot N . \quad (3.17)$$

Nous visualisons cette intensité lumineuse en Figure 3.9, et nous obtenons directement les lignes d'iso-valeurs en faisant varier un paramètre de seuil. Par ailleurs, un modèle d'implémentation simple du rendu de ces lignes, tirant parti du matériel graphique standard, est présenté dans [Bots 08].

Les deux ensembles de courbes que forment sur la surface les lignes de réflexion et les isophotes ne sont pas disjoints, une étude de ce problème est présentée dans [Thei 01]. En pratique, les lignes de réflexion sont les plus utilisées car elles permettent de contrôler directement le motif que l'on projette sur la surface.

3.2 Applications aux surfaces de subdivision

Telle qu'introduite précédemment, la mesure de la qualité d'une surface dépend à la fois des attentes de son concepteur et de ses caractéristiques mathématiques. Cette mesure de qualité est à l'origine liée à l'énergie des plaques minces, énergie pouvant être associée à la variation de courbure totale d'une surface. Ceci est particulièrement vrai dans le cadre de notre problématique, car il est bien connu qu'un sommet extraordinaire provoque, entre autres effets néfastes, de fortes variations de courbure sur son voisinage. Nous proposons donc d'axer la visualisation de la géométrie d'une surface de subdivision sur des relevés de courbure mesurés au voisinage des sommets extraordinaires.

3.2.1 Courbure sur une surface de subdivision

Une surface de subdivision est définie comme une suite de maillages, nous travaillons donc concrètement avec une surface polygonale. Or, si la courbure d'une surface analytique est connue, l'estimation de celle-ci sur une surface polygonale pose un certain nombre de problèmes. En particulier, une telle méthode d'estimation est souhaitée robuste au bruit ainsi qu'aux différences de densité des sommets du maillage. Il n'existe pas de méthode d'estimation optimale de la courbure ou des normales aux sommets d'un maillage, car nous pouvons considérer celui-ci comme l'échantillonnage d'un continuum de surfaces lisses continues [Mey02].

Nous proposons de définir l'estimation de la mesure de courbure sur deux configurations de maillage. Dans un premier temps, nous définirons la mesure de courbure exacte estimée en un sommet du maillage subdivisé, que nous considérerons comme un sommet de la surface limite. Nous définirons ensuite une approximation de la mesure de courbure en tout sommet d'un maillage triangulaire quelconque, donc dans le cas où nous ne possédons pas de définition analytique continue.

3.2.1.1 Définition exacte de la mesure par rapport à la surface limite du modèle

Dans le cas des schémas de subdivision classiques, dérivés des Box-Splines (exposées en partie 2.1.4), nous possédons une définition analytique de la surface limite dans les zones régulières du maillage. Celle-ci étant polynomiale, nous possédons l'expression de leurs formes fondamentales, donc une mesure exacte de la courbure peut être définie en tout point de cette surface. Le principe de cette évaluation est de considérer chaque sommet d'une zone régulière du maillage subdivisé comme faisant partie de la surface limite. Ainsi, l'estimation de la courbure en ce sommet est exacte, même si le maillage lui-même est une approximation de cette surface.

Une surface limite est construite par la convergence d'un nombre infini d'itérations du procédé de subdivision des sommets du maillage. Ainsi, le point central de cette évaluation est la prise en compte de la "structure propre" du schéma (*eigenstructure*), structure composée des vecteurs et des valeurs propres de sa matrice de subdivision. Jos Stam fut le premier à proposer l'évaluation exacte des propriétés géométriques en tout point des zones régulières subdivisées [Stam 98b, Stam 98a] ; Il présente une évaluation de la position des sommets réguliers à la limite ainsi que des relevés de courbure très précis autour d'un sommet extraordinaire. La prise en compte de la structure propre de la matrice de subdivision du schéma permet de déterminer les formes fondamentales I (3.2) et II (3.3) en chaque point d'une zone régulière de la surface limite. Ceci nous permet alors de déterminer en ces points l'opérateur de forme $\mathcal{W}$ (3.6).

La structure propre d'une matrice de subdivision inversible $\mathcal{S}$ est notée $(\wedge, \vee)$, où $\wedge$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de $\mathcal{S}$, et $\vee$ est une matrice inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres associés. Celle-ci est définie comme solution de l'équation :

$$\mathcal{S}\vee = \vee\wedge, \quad (3.18)$$

cette même équation pouvant être écrite de la façon suivante,

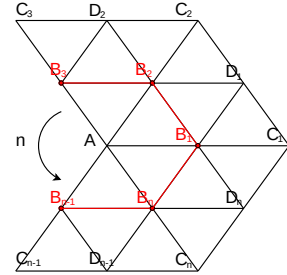
$$\mathcal{S} = \vee \wedge \vee^{-1}. \quad (3.19)$$

À noter que bien souvent, l'analyse de cette matrice est effectuée de façon fréquentielle au moyen d'une transformée de Fourier discrète : puisqu'elle est bloc-circulante, elle devient bloc-diagonale dans l'espace fréquentiel et les calculs s'en trouvent simplifiés [Bart 05]. À partir de ce formalisme, le vecteur de nouveaux sommets de niveau k , noté P^k , est exprimé comme une expansion locale de Taylor par la relation suivante :

$$\begin{aligned} P^k &= \vee \wedge^k \vee^{-1} P^0 \\ &= \vee \wedge^k L \\ &= \sum_j m_j \lambda_j^k l_j. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les variables m_j correspondent aux coefficients du polynôme issu du développement de Taylor d'ordre j . La diagonale de $\wedge$ contient les valeurs propres λ_j du schéma. Enfin, les valeurs l_j correspondent à la projection des sommets sur la base des vecteurs propres gauches de $\mathcal{S}$: $L = \vee^{-1} P^0$. Elles identifient les dérivées partielles successives au voisinage du sommet : l_0 est la position, l_1 et l_2 forment le plan tangent au sommet, l_3 , l_4 et l_5 définissent les formes quadratiques (le paraboloides et les deux hyperboloïdes). Voir [Bart 05, Géro 05] pour un exposé détaillé de l'origine de cette expression et de son utilisation dans l'analyse d'un schéma à la limite.

Ainsi de façon pratique, la projection des sommets du maillage dans la base des vecteurs propres du schéma de subdivision nous permet d'obtenir l'expression des dérivées partielles en u et v de la surface polygonale en un sommet régulier P du maillage. Dans le cas du schéma de Loop, l'application de (3.20) permet d'obtenir les relations suivantes, pour un sommet régulier A entouré de 6 sommets B_i et en reprenant les notations de la section 3.1.1,



$$\begin{aligned} P_u &= \frac{1}{12} (4B_1 + 2B_2 - 2B_3 - 4B_4 - 2B_5 + 2B_6) \\ P_v &= \frac{1}{12} (2B_1 + 4B_2 + 2B_3 - 2B_4 - 4B_5 - 2B_6) \\ P_{uv} &= \frac{1}{12} (-12A + 6B_1 + 6B_2 - 6B_3 + 6B_4 + 6B_5 - 6B_6) \\ P_{uu} &= \frac{1}{12} (12B_1 - 24A + 12B_4) \\ P_{vv} &= \frac{1}{12} (12B_2 - 24A + 12B_5). \end{aligned} \quad (3.21)$$

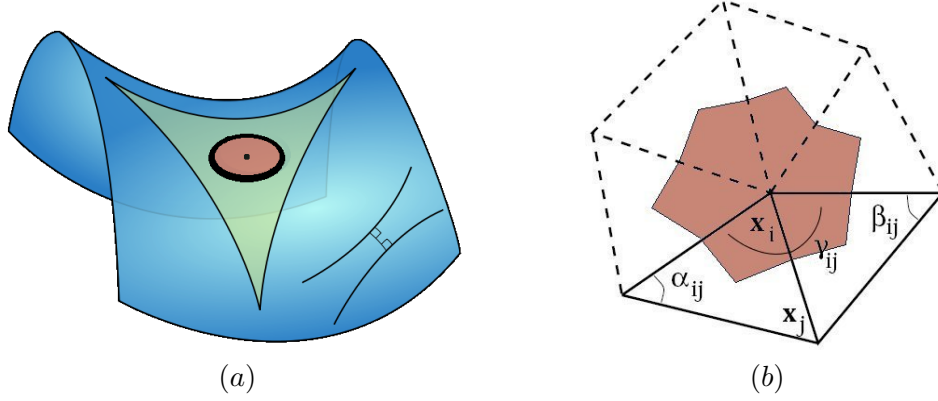


FIG. 3.10 : La courbure mesurée en un point d'une surface est dépendante du périmètre d'un cercle géodésique, ou l'aire d'un cercle géodésique (a) centré sur ce point. L'approximation de cette mesure sur un maillage (b) se base généralement sur ce principe.

Comme précédemment, la normale N en ce sommet est définie comme le produit vectoriel des deux dérivées partielles : $N = P_u \wedge P_v$, et nous la considérons unitaire. Donc nous avons :

$$\begin{aligned}
 E &= P_u \cdot P_u = \frac{1}{36} \|2B_1 + B_2 - B_3 - 2B_4 - B_5 + B_6\|^2 \\
 F &= P_u \cdot P_v = \frac{1}{36} (B_1 + 2B_2 + B_3 - B_4 - 2B_5 - B_6) \cdot (2B_1 + B_2 - B_3 - 2B_4 - B_5 + B_6) \\
 G &= P_v \cdot P_v = \frac{1}{36} \|B_1 + 2B_2 + B_3 - B_4 - 2B_5 - B_6\|^2 \\
 e &= P_{uu} \cdot N = (-2A + B_1 + B_4) \cdot N \\
 f &= P_{uv} \cdot N = \frac{1}{2} (-2A + B_1 + B_2 - B_3 + B_4 + B_5 - B_6) \cdot N \\
 g &= P_{vv} \cdot N = (-2A + B_2 + B_5) \cdot N,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

et l'expression de l'opérateur de forme $\mathcal{W}$ correspond à la définition continue (3.6). Ces mesures exactes nous permettent d'établir des relevés de courbure très précis dans les zones régulières du maillage, voir en Figure 2.1, elles seront utilisées par la suite dans l'ensemble de ce document.

3.2.1.2 Approximation de la courbure d'un maillage triangulaire quelconque

Nous nous intéresserons par la suite uniquement aux maillages subdivisés dont la surface limite possède une définition analytique connue, en l'occurrence la surface Box-spline. Néanmoins, pour certains schémas de subdivision ou dans le cas d'une problématique d'analyse de courbure sur un maillage quelconque, il est utile de s'intéresser à une approximation de cette mesure. Nous présentons ici un bref rappel du principe des méthodes couramment utilisées dans ce but.

Parmi les nombreux travaux consacrés à cette problématique, un bon récapitulatif est présenté dans [Kalo 07]. Nous citerons également l'ensemble des travaux suivants [Morv 01, Gatz 06, Magi 07, Desb 08, Bots 08], qui exposent certaines approches originales concernant l'estimation de cette mesure sur les maillages quelconques.

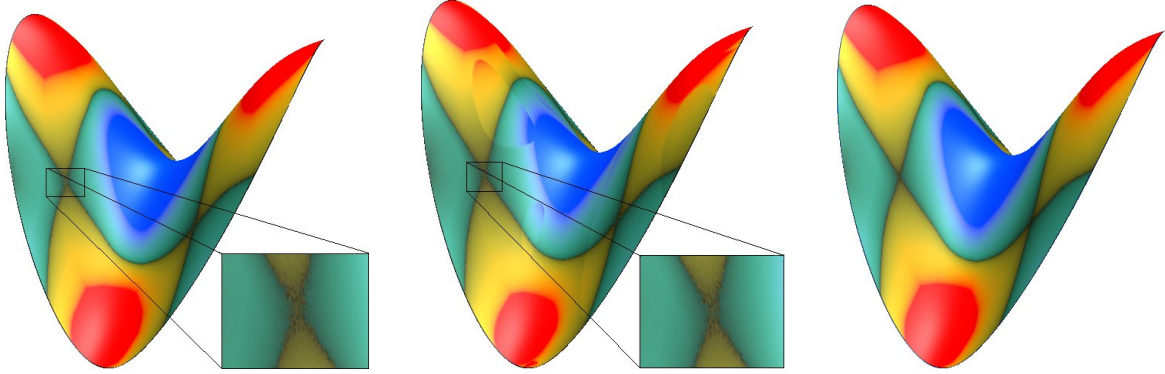


FIG. 3.11 : Comparaison de différents relevés de courbure gaussienne mettant en évidence un manque de stabilité numérique pour deux d'entre eux, de gauche à droite : évaluation simple (3.24), estimation de [Meyer 02] et la mesure de courbure exacte.

De façon générale, la courbure mesurée en un point d'une surface lisse est très liée au périmètre d'un cercle géodésique centré sur ce point. En 1827, Gauss définit la courbure gaussienne K de la manière suivante,

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi r^3} (2\pi r - \mathcal{C}(r)) , \quad (3.23)$$

où $\mathcal{C}(r)$ est le périmètre du cercle géodésique de rayon r centré sur le sommet d'intérêt. Le périmètre de ce cercle varie selon la courbure de la surface, il est égal à $2\pi r$ sur un plan. Cette approche est par ailleurs similaire dans le cas de l'aire d'un disque géodésique. Une autre approche de réflexion est celle-ci : la somme des angles d'un triangle tracé sur une surface de courbure non nulle diffère de π , voir l'exemple en Figure 3.10. La plupart des techniques d'estimation de la courbure sur des maillages quelconques reprennent cette approche géométrique du problème.

Ainsi, l'approximation de l'équation continue (3.23) est couramment exprimée de la façon suivante, par rapport à l'aire des triangles $\mathcal{A}(x_i)$ dont un des sommets est le sommet d'intérêt x_i :

$$K_{x_i} = \frac{3}{\mathcal{A}(x_i)} \left(2\pi - \sum_{j: x_j \in \mathcal{N}_1(x_i)} \gamma_{ij} \right) , \quad (3.24)$$

où $\mathcal{N}_1(x_i)$ est le 1-voisinage du sommet x_i et γ_{ij} est l'angle d'ouverture des sommets à la fois adjacents de x_i et de x_j , voir Figure 3.10. Une illustration de cette mesure est présentée en Figure 3.11.

Outre cette approche géométrique, de nombreuses techniques se basent quant à elles sur l'interpolation des sommets par une forme analytique dont la définition, donc la courbure, est connue [Chen 92, Hama 93, Stok 92, Taub 95a, Gold 04].

Un point central concernant la comparaison des différentes techniques d'estimation est la stabilité des mesures. En effet, certains estimateurs sont perturbés par des données bruitées ou par une densité de sommets hétérogène sur le maillage. Nous illustrons en Figure 3.11 le comportement instable de deux mesures de courbure estimées sur une surface de subdivision par rapport à la mesure exacte exposée précédemment.

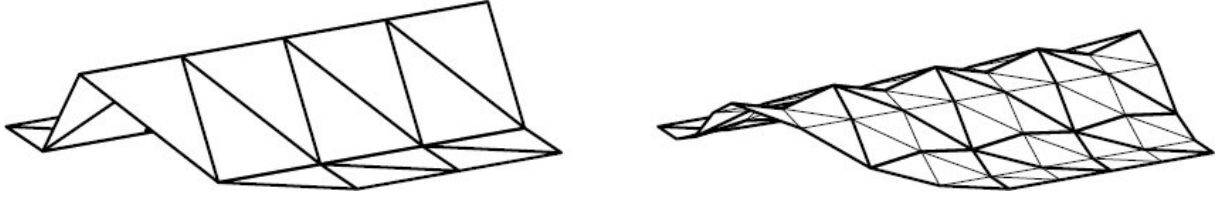


FIG. 3.12 : Application du schéma de Loop altéré afin que la direction du schéma correspondant à la crête ne soit plus adéquate : un artefact latéral se forme dès la première itération. Celui-ci est dû au sous-échantillonnage des données géométriques, il induit une oscillation de la géométrie perpendiculaire à la ligne de crête (image issue de [Sabi 03]).

3.2.2 Visualisation des artefacts sur une surface de subdivision

Une partie essentielle de l'analyse d'une surface de subdivision est l'évaluation des artefacts provoqués par le schéma. Un artefact est concrètement la différence entre ce qui est attendu d'une surface de subdivision et ce qui est effectivement produit [Sabi 03]. Parmi tous les artefacts possibles, rappelés en section 3.2.2.1, nous nous penchons plus particulièrement sur celui qui se caractérise par de fortes variations de courbure autour d'un sommet extraordinaire. Nous en proposons une mesure adaptée en section 3.2.2.2.

3.2.2.1 Les artefacts en subdivision

Chaque artefact possède une origine propre, il peut de plus être mis en évidence d'une façon particulière. Certains sont dus à la présence d'un sommet extraordinaire, d'autres non. Nous proposons ici de les présenter de façon succincte, nous clarifierons leur origine puis nous montrerons visuellement leurs effets. Les artefacts des surfaces de subdivision peuvent être classés en plusieurs groupes, notamment référencés dans [Sabi 03, Sabi 04b] : l'artefact *latéral*, le *radial* et le *rotationnel*. Un artefact particulier, nommé le *saddle-effect*, induit une surface en selle de cheval (la courbure gaussienne est donc négative) à partir d'un maillage convexe [Pete 04]. Enfin, les schémas de subdivision à support étendu génèrent des conflits entre les coefficients de subdivision réguliers et les coefficients spécifiques à un sommet extraordinaire [Pete 03, Karc 04, Géro 10], ce qui provoque des oscillations de la géométrie au voisinage de ces sommets.

L'artefact latéral Cet artefact bien connu est lié aux *directions* du schéma de subdivision. Nous explicitons cette notion de directions, liées aux Box-Splines, en partie 2.1.4. Il est également nommé artefact *longitudinal* [Sabi 03]. Celui-ci est présent dans les zones régulières du maillage de contrôle, il est par conséquent commun aux surfaces de subdivision et aux patches B-Splines. Lorsqu'une ligne de crête ne correspond pas aux directions du schéma, ou aux directions (u, v) du patch B-Spline, un sous-échantillonnage provoque des oscillations de la géométrie, voir Figure 3.12. Certains schémas ne présentent pas ce genre de problème : Loop, le *simplest scheme*, Velho 4 – 8, et Kobbelt $\sqrt{3}$ par exemple. Plus précisément, celui-ci se produit lorsque le masque du schéma ne possède pas de coefficient $1 + z$ dans une direction donnée, voir la partie 2.1.4.3 à ce sujet. Ce comportement néfaste peut être mis en évidence par un relevé de courbure, des changements de signe de la courbure gaussienne apparaissent sur la ligne de crête. Il est toutefois très visible à l'œil nu sur le profil des crêtes du modèle concerné.

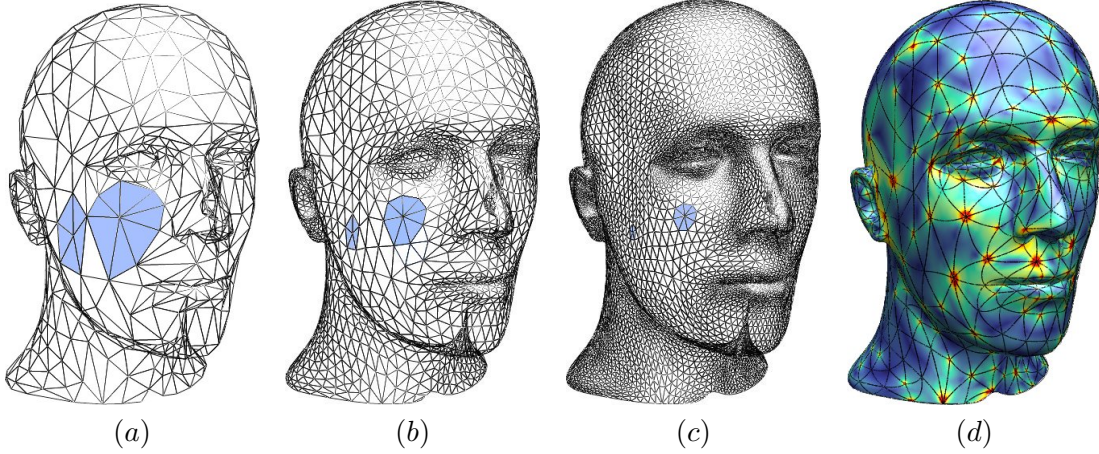


FIG. 3.13 : Un sommet extraordinaire induit le plus souvent des distorsions de forme aux faces subdivisées de leur voisinage. En (a), (b) et (c) trois niveaux de subdivision du modèle de mannequin. En (d) nous visualisons ces distorsions sur une échelle de couleur : la donnée mesurée est le rapport maximal de la taille des faces du 2-voisinage régulier de chaque sommet.

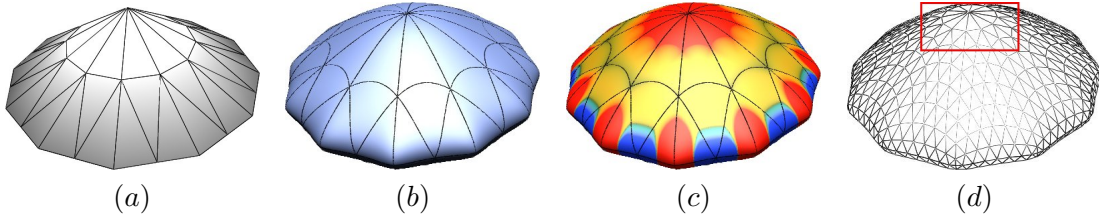


FIG. 3.14 : Illustration des artefacts radial et rotationnel, le sommet extraordinaire du dessus est de valence 12 (a). En (b) le modèle subdivisé, un artefact rotationnel se forme sur l'équateur : des oscillations sont présentes, et confirmées en (c) par le relevé de courbure gaussienne. En (d) nous mettons en évidence l'artefact radial, la taille des faces est plus grande au voisinage du sommet extraordinaire car la valence du sommet est supérieure à 6.

Les artefacts radial et rotationnel Ces artefacts particuliers apparaissent au voisinage d'un sommet extraordinaire. La prise en compte de ce voisinage est polaire, les sommets ordinaires se répartissent en anneaux autour de ce dernier. Un artefact dit radial est relatif aux rayons du repère polaire, le rotationnel est relatif aux anneaux. Nous illustrons en Figure 3.13 l'effet de l'artefact radial, ou artefact *polaire*. Il est dû à la deuxième valeur propre λ_1 du schéma. Dans le cas ordinaire, celle-ci est égale à $\frac{1}{2}$, il n'y a pas de distorsion. Cependant, les conditions utiles au tuning des schémas impliquent que celle-ci soit différente pour les valences extraordinaires. Certaines techniques permettent de surmonter ce problème [Augs 07] : l'utilisation de schémas de subdivision polaires tels que [Karc 07] et [Myle 09], ou l'utilisation de schémas pour lesquels $\lambda_1 \approx \frac{1}{2}$ tel que [Géro 10]. Ce comportement n'est pas révélé par une étude de courbure, il peut cependant devenir visible sous certaines conditions d'éclairage de la surface ou par un système du même genre que celui présenté en Figure 3.13.d. Ces distorsions nuisent en outre à la stabilité de nombreuses approches de calcul numérique sur un maillage, notamment aux méthodes basées sur les éléments finis.

En Figure 3.14 est présenté un exemple de modèle en forme de prisme : les deux artefacts y sont présents. L'artefact rotationnel est beaucoup plus difficile à cerner que l'artefact radial, il est vraisemblablement dû à l'interaction entre la valence élevée du sommet central et la valence faible des autres sommets, ainsi qu'aux vecteurs propres du schéma. L'artefact rotationnel est mis en évidence de la même façon que l'artefact latéral, par la visualisation des lignes de crête.

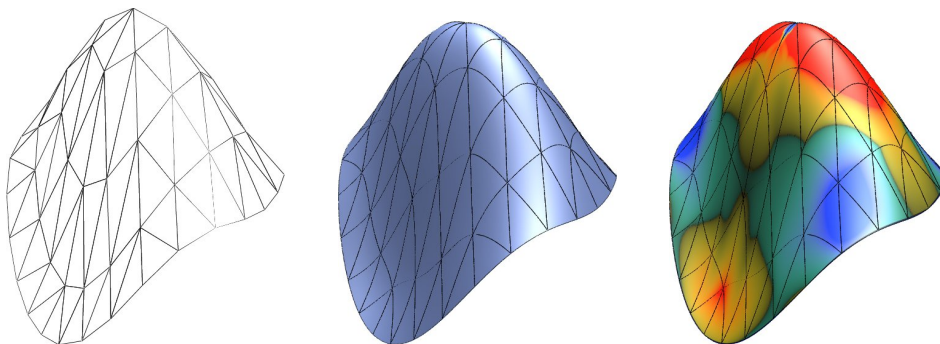


FIG. 3.15 : Illustration du saddle effect sur un paraboloïde de valence 8 que nous subdivisons avec le schéma de Loop. La courbure gaussienne (droite) devient négative à la pointe du modèle, la surface n'est donc plus convexe à cet endroit.

Le saddle-effect Cet artefact implique un comportement géométrique en selle de cheval dans une région du maillage où tout porte à croire que la surface devrait être convexe, voir les Figures 3.15 et 3.16. Ceci est fortement lié à la structure propre du schéma. Pour le schéma de Catmull et Clark, il est prouvé que pour une géométrie quelconque, la surface devient hyperbolique à la limite [Karc 04], bien qu'il soit possible de modifier ce comportement. De même que pour l'artefact radial, les schémas de subdivision polaires ne présentent pas ce problème. Ce comportement est visible à l'œil nu, il peut également être mis en évidence par un relevé de courbure gaussienne.

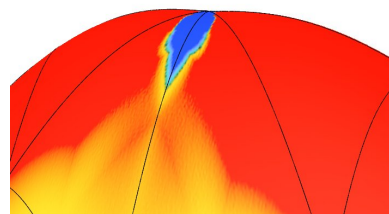


FIG. 3.16 : Zoom sur un artefact de type saddle-effect sur un paraboloïde.

Le conflit entre deux règles de subdivision Les tunings des schémas de subdivision, de Loop et de Catmull et Clark entre autres, établissent des coefficients de lissage pour un sommet extraordinaire par rapport à son voisinage direct. Nous parlons alors de schémas au support très compact, relativement à la petite taille des stencils. Le schéma interpolant *Butterfly* [Zori 96] possède un support un peu plus grand. Il existe des schémas pour lesquels des règles de subdivision spéciales sont proposées pour les sommets du voisinage direct d'un sommet extraordinaire, nous parlons alors d'un schéma à support étendu, voir les schémas de Prautzsch et Umlauf [Prau 00], Barthe et Kobbelt [Bart 04], et Gérot et al. [Géro 10] par exemple. Le fait de proposer ces règles implique une adéquation entre d'une part, le comportement géométrique des sommets ordinaires, et d'autre part le comportement des sommets influencés par le sommet extraordinaire. Ce conflit entre règles provoque des oscillations de courbure au voisinage d'un sommet extraordinaire, voir les exemples présentés en Figure 3.17.

Autres conséquences néfastes de la présence d'un sommet extraordinaire Les précédentes catégories identifient les effets néfastes dont nous connaissons l'origine. Cependant, un sommet extraordinaire est potentiellement capable de perturber la surface de subdivision de différentes façons. Les relevés de courbure de la Figure 3.18 illustrent des exemples de perturbations que nous ne pouvons pas classer dans les catégories d'artefacts précédentes. Ces perturbations sont difficiles à caractériser, elles sont de plus très différentes selon le schéma de subdivision utilisé. Cependant, une forte variation de courbure est toujours présente au voisinage d'un sommet extraordinaire, nous en proposons donc une mesure adaptée en section suivante.

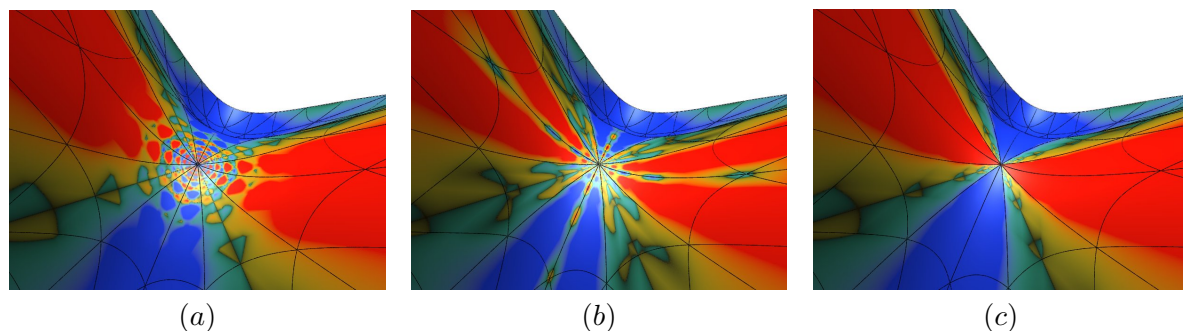


FIG. 3.17 : Exemples de perturbations dues à un conflit entre les règles de subdivision régulières et les règles appliquées au sommet extraordinaire. Il s'agit de relevés de courbure moyenne sur un modèle subdivisé dont le sommet central est de valence 12. À gauche (a) le schéma de Barthe et Kobbelt [Bart 04], à droite (b) celui de Gérot et al. [Géro 10] dont nous avons altéré les coefficients de mélange des règles. Un mélange adapté des deux règles de subdivision (c) [Géro 10] conduit à une surface de meilleure qualité.

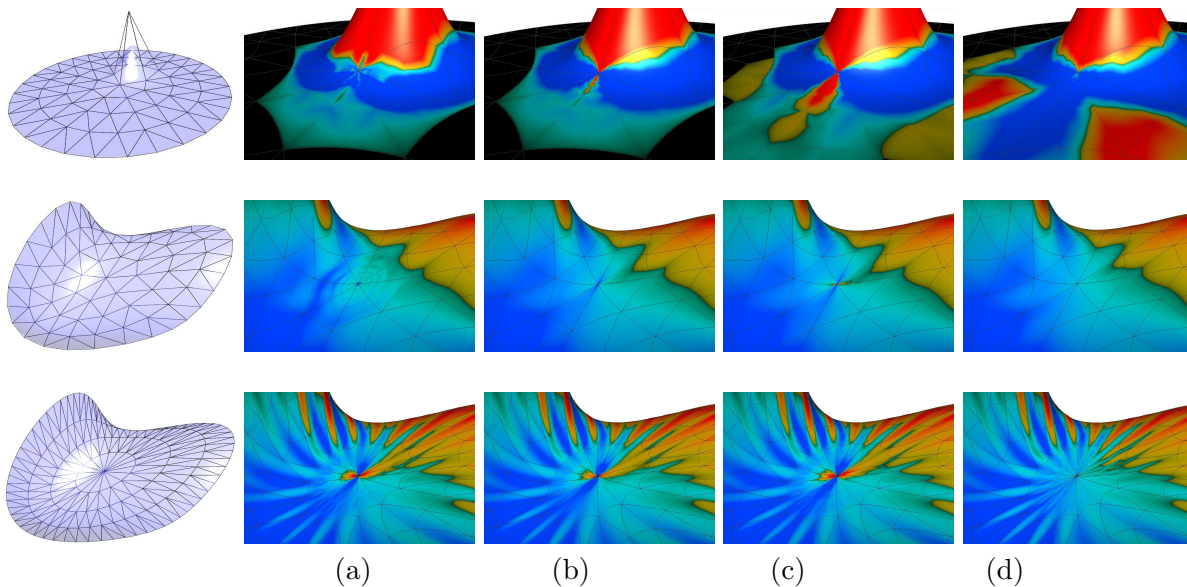


FIG. 3.18 : Exemples de comportements néfastes de la géométrie qui ne sauraient être classée dans une catégorie répertoriée d'artefact. Les comportements des schémas de subdivision sont très différents selon la géométrie du modèle initial. Nous visualisons ici la courbure moyenne et nous utilisons de gauche à droite le schéma de (a) Barthe et Kobbelt [Bart 04], (b) Karčiauskas, Peters and Reif [Karc 04], (c) Prautzsch et Umlauf [Prau 00] et (d) Gérot et al. [Géro 10]. Ce dernier présente globalement un meilleur comportement que les autres.

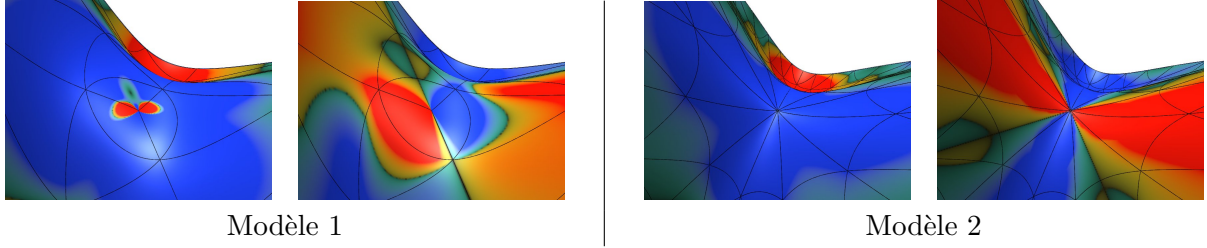


FIG. 3.19 : Les courbures gaussienne K (gauche) et moyenne H (droite) ne mettent pas en évidence les perturbations géométriques de la même façon. Sur certains modèles, l'une ou l'autre met plus ou moins bien en évidence la présence d'un sommet extraordinaire (sommet de valence 3 pour le modèle 1, 12 pour le modèle 2).

3.2.2.2 Une mesure adaptée aux fortes variations de courbure

Comme exposé précédemment, dans le cas d'une surface de subdivision, la distribution homogène de courbure est notre principale mesure de qualité. Nous considérons qu'il existe toujours une perturbation géométrique au voisinage d'un sommet extraordinaire, ne serait-ce que la discontinuité ponctuelle de courbure dans le cas d'un schéma usuel C^1 à cet endroit. Nous nous intéressons donc ici la mesure de variation de courbure sur la surface, ce qui correspond à des mesures différentielles d'ordre supérieur, que nous pouvons déterminer exactement dans les zones régulières du maillage.

Cependant, les différentes mesures dérivées de la courbure sont nombreuses, nous pouvons par exemple considérer l'une ou l'autre des courbures principales k_1 et k_2 , leur somme, le gradient de leur somme, etc. De nombreux travaux sont consacrés à la mesure de la qualité d'une surface à travers diverses mesures de courbure. La plupart d'entre eux considère la mesure d'énergie des plaques minces, liée à la somme des carrés des courbures principales [Desb 99, Kobb 00a, Zori 05]. Farin et Gerald [Fari 96], ainsi que Seidenberg et ses co-auteurs [Seid 92], pensent que la mesure de courbure absolue $|k_1| + |k_2|$ est la plus apte à mettre en évidence les irrégularités non triviales d'une surface lisse. Fayard [Faya 88] souligne le fait qu'une des directions peut masquer l'autre si leur rapport d'amplitude est élevé. Cette même étude propose également deux mesures de courbure sur les lignes iso-paramétrées selon (u, v) : k_u et k_v . Gravesen et Ungstrup [Grav 02] évaluent la mesure de qualité d'une surface par l'évaluation d'invariants du troisième ordre d'une famille de courbes supposées lisses.

Concernant les surfaces de subdivision, Augsdörfer et ses co-auteurs [Augs 06] ont proposé une évaluation de la variation maximale de courbure gaussienne. Ginkel et Umlauf [Gink 06] ont quant à eux étudié le changement de signe de cette même courbure au fur et à mesure des pas de subdivision ; ces deux travaux ont trait au tuning d'un schéma.

La problématique abordée ici est de déterminer une mesure géométrique de qualité de la surface adaptée à l'évaluation des artefacts. La courbure gaussienne K et la courbure moyenne H ne mettent pas toujours en évidence cette perturbation, voir Figure 3.19. Cette mesure est souhaitée élevée au voisinage d'un sommet extraordinaire et faible partout ailleurs. Nous en proposons ainsi une évaluation basée sur les travaux existants. Comme précédemment, nous considérons ici le schéma de subdivision de Loop, bien que l'analyse puisse être aisément étendue à tout autre schéma.

Différentes mesures de courbure sont illustrées en Figure 3.20. De manière pratique, la courbure gaussienne indique la nature de la géométrie du modèle : hyperbolique ou elliptique. Un changement brusque de cette mesure sur la surface indique une irrégularité difficile à caractériser. Dans [Gink 06], les zones du maillage où cette mesure change au fur et à mesure des itérations sont nommées zones *hybrides*, elles sont supposées non souhaitables. La courbure moyenne indique la concavité ou la convexité de la surface. Une forte variation de celle-ci peut caractériser des oscillations ou une sorte de granularité sur la surface. Ces deux mesures sont fonction des courbures principales k_1 et k_2 , dont la visualisation conjointe est instructive. La mesure de courbure absolue $|k_1| + |k_2|$ nous semble la plus à même de mettre en évidence les perturbations géométriques néfastes au voisinage d'un sommet extraordinaire, car il s'agit d'une mesure d'intensité globale : la somme des normes des deux courbures principales. Nous visualisons en Figure 3.21 le gradient des relevés de données précédents, puisque le point pertinent est l'homogénéité en courbure de la surface. Le gradient est ici déterminé de la même façon qu'en traitement d'image classique, nous utilisons un filtre gradient sur le 1-voisinage de chaque sommet régulier du maillage triangulaire.

Le gradient de courbure absolue, ainsi que la variation de courbure moyenne, de définitions très proches, nous sont apparus dans de très nombreux tests comme étant les seules mesures à toujours détecter un comportement perturbé de la surface près d'un sommet extraordinaire. Nous estimons que le gradient de courbure absolue mesuré autour d'un sommet extraordinaire contient plus d'information sur la forme de l'artefact que la variation de courbure moyenne, même si la géométrie en selle de cheval présentée ici constitue un exemple particulier.

3.2.3 Un autre espace de visualisation

Les méthodes exposées en partie 3.1.3 sont les plus utilisées en visualisation pour l'analyse de surface. Comme exposé précédemment, dans le cas classique, nous possédons une définition analytique de la surface de subdivision, mis à part à l'endroit d'un sommet extraordinaire. Nous pouvons par conséquent établir une mesure différentielle exacte de nos données dans les zones régulières du maillage. Notre cadre d'analyse étant l'étude du voisinage d'un sommet extraordinaire, nous pouvons également profiter de la symétrie radiale des données. En effet, le voisinage d'un sommet extraordinaire est un maillage semi-régulier constitué de sommets ordinaires, voir la section 2.3 à ce sujet. En conséquence, nous proposons d'établir un protocole d'analyse polaire spécifique à la caractérisation des artefacts au voisinage d'un sommet extraordinaire.

Dans un premier temps, nous définirons une carte polaire des sommets ordinaires au voisinage d'un sommet extraordinaire. Nous appliquerons ensuite un certain nombre de filtres utilisés en traitement d'images classique, afin de mettre en évidence et caractériser efficacement les mauvais comportements de la géométrie.

3.2.3.1 Carte d'analyse polaire au voisinage d'un sommet extraordinaire

Nous considérons donc ici, pour un modèle géométrique donné, une surface constituée d'un sommet extraordinaire central et de plusieurs anneaux topologiques de sommets ordinaires. Nous rappelons qu'une surface subdivisée par un schéma classique possède un nombre de sommets extraordinaires constant, le procédé de subdivision insère des sommets ordinaires autour de ceux-ci. Nous pouvons donc considérer un repère polaire de sommets ordinaires $P(r, \varphi)$ centré sur un sommet extraordinaire $P(0, 0)$ de valence n .

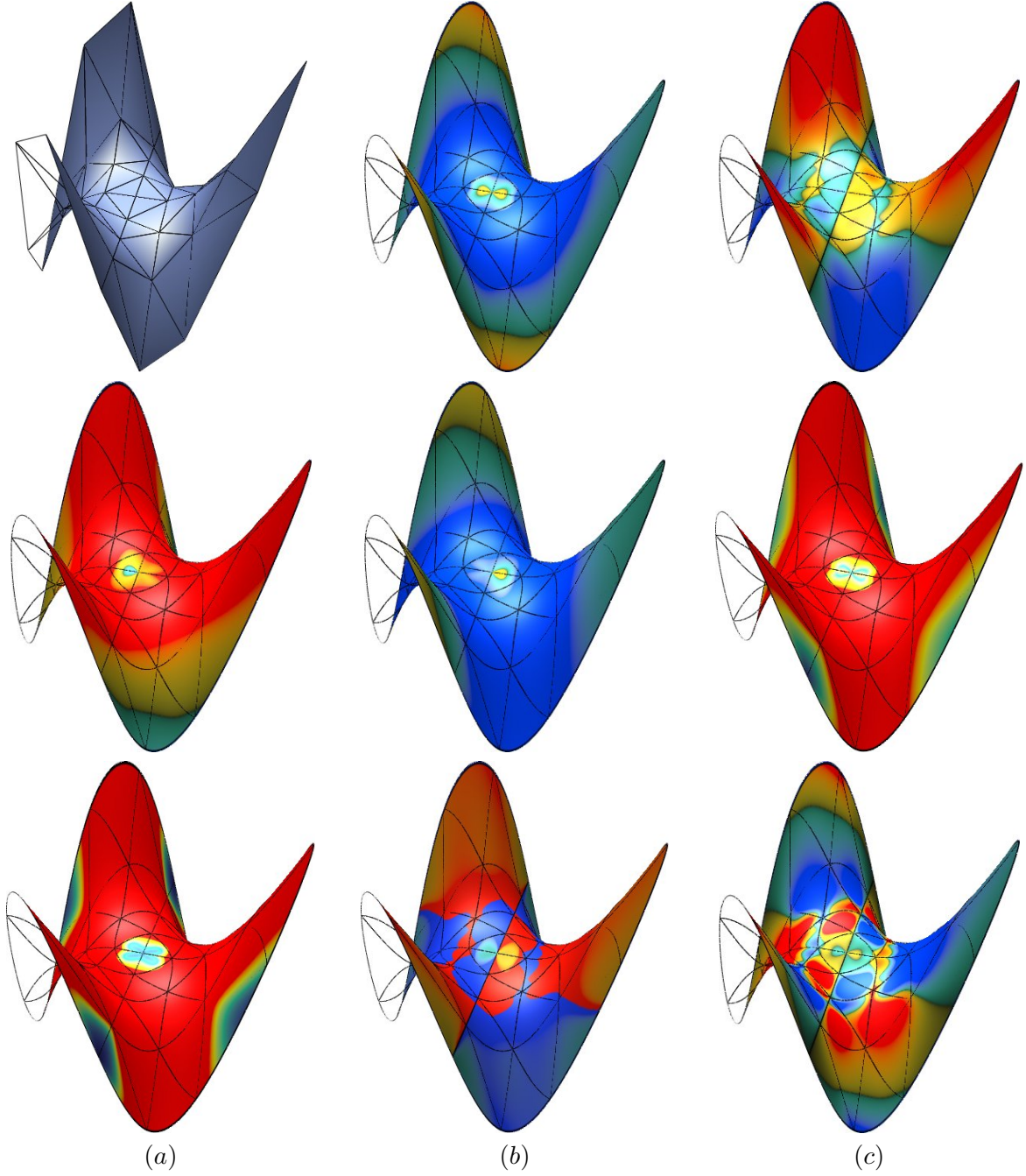


FIG. 3.20 : Différentes mesures de courbure sur un modèle de selle (monkey saddle) de valence 4. Sur la première ligne, en (a) le maillage de contrôle, en (b) la courbure gaussienne K et en (c) la courbure moyenne H . Sur la deuxième ligne, les courbures principales (a) k_1 et (b) k_2 , en (c) la courbure absolue $|k_1| + |k_2|$. Sur la troisième ligne, en (a) la somme des carrés des courbures principales $k_1^2 + k_2^2$, en (b) la mesure proposée par Hagen et Hahmann [Hage 92a] $\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2}$, et en (c) le produit KH . Toutes ces mesures ne sont pas à même de mettre en évidence la perturbation due au sommet extraordinaire central.

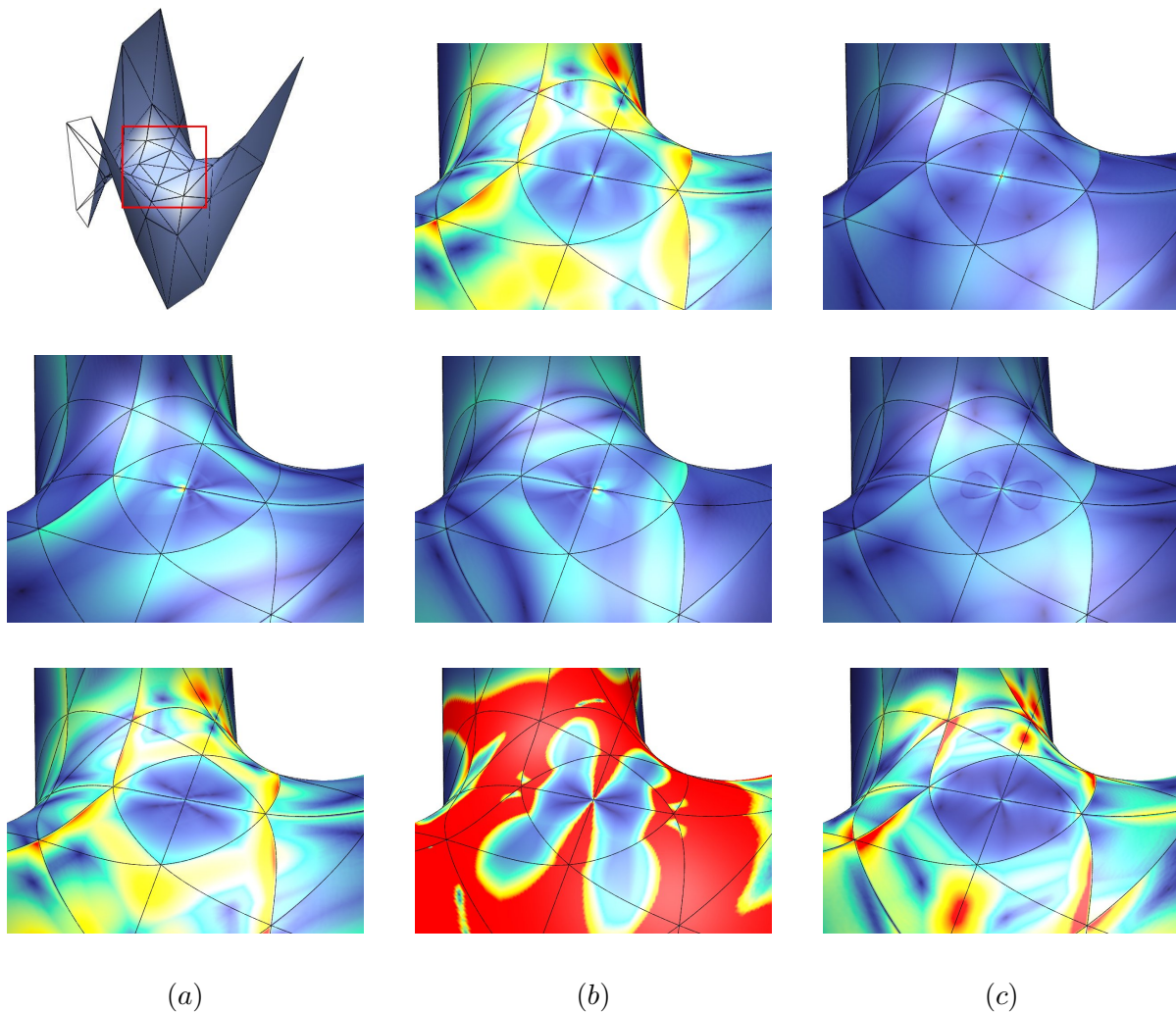


FIG. 3.21 : Mesure du gradient de données des relevés de la Figure 3.20. Les fortes variations du gradient de courbure survenant entre les patches réguliers provient du fait que la surface limite est de classe G^2 . Nous remarquons que le relevé de variation de courbure absolue (deuxième ligne en (c)) dessine un motif caractéristique de la perturbation, en forme de 8, et reste faible loin du sommet extraordinaire. Sur cet exemple, le gradient de courbure moyenne (première ligne en (c)) ne met en évidence qu'un pic de perturbation très près du sommet extraordinaire.

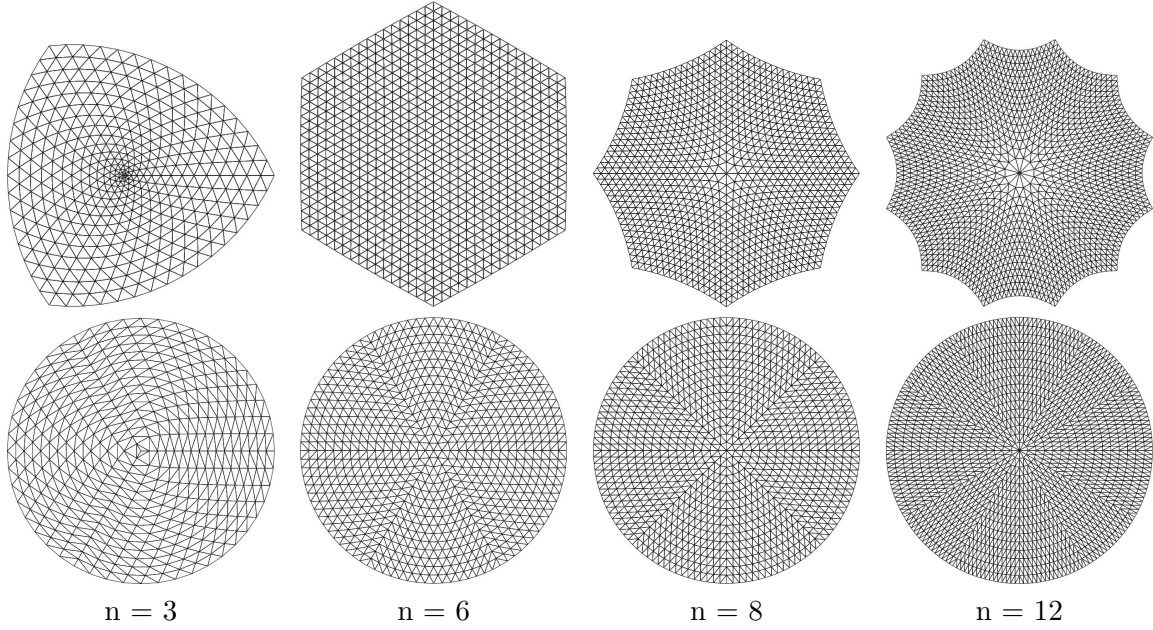


FIG. 3.22 : Nous visualisons la carte polaire d'un sommet de valence n . La première ligne correspond aux cartes caractéristiques du schéma de Loop. La deuxième ligne présente la carte d'analyse normalisée. Nous considérons ici 16 anneaux de sommets ordinaires.

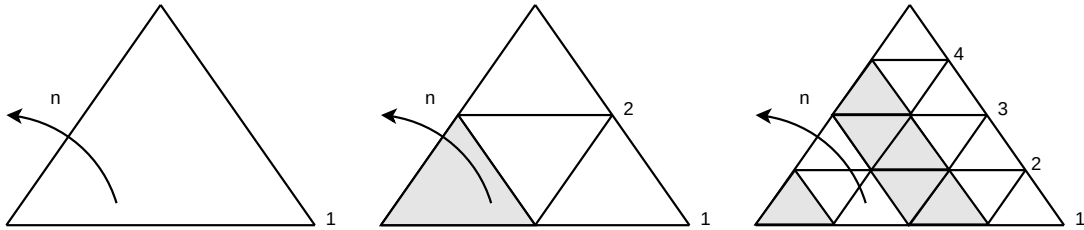


FIG. 3.23 : Comportement du schéma de Loop appliqué sur le voisinage d'un sommet de valence n . Chaque anneau topologique régulier contient n sommets de plus que le précédent, le repère polaire (r, φ) est donc irrégulier.

Dans le cas d'un schéma de subdivision particulier, par exemple celui de Loop, il est possible de construire une méthode d'attribution des coordonnées polaires de chaque sommet de ce voisinage. Nous proposons de construire la carte de donnée polaire de façon intuitive : chaque anneau r_i de cette carte est situé à une distance i du sommet central — de valence n —, et les sommets de chaque anneau sont répartis de façon uniforme. La position des sommets est ainsi définie comme suit,

$$\begin{cases} r_i = i \\ \varphi_{ij} = \frac{2\pi j}{ni} \end{cases}, \quad (3.25)$$

où $i \in \llbracket 0, R \rrbracket$, $j \in \llbracket 0, n(i-1) \rrbracket$ et R est le nombre d'anneaux du disque d'analyse. Cette carte polaire uniforme nous permet de comparer visuellement des données sur un support d'analyse à la fois indépendant de la valence du sommet extraordinaire, indépendant de la géométrie du modèle et indépendant de la carte caractéristique du schéma de subdivision, voir Figure 3.22.

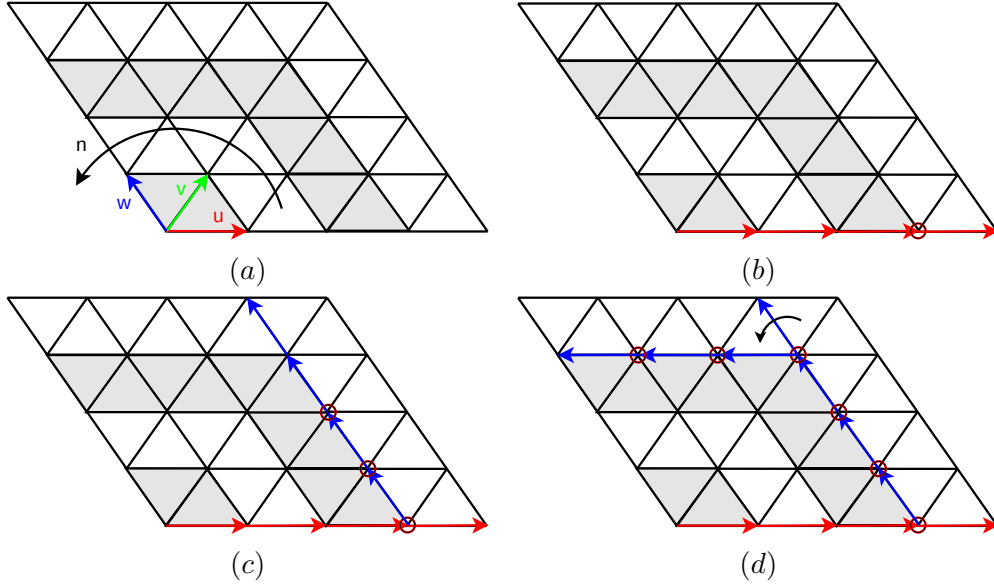


FIG. 3.24 : (a) Nous considérons les trois directions du maillage triangulaire : u , v et w . L'algorithme d'attribution des coordonnées polaires s'effectue anneau par anneau : (b) l'arête se positionne à l'anneau suivant (ici $r_i = 3$) par un parcours selon u . (c) Ensuite, nous affectons les coordonnées $(r_i, \varphi_{i,j})$ aux sommets sources des arêtes en suivant un parcours selon w . (d) Enfin, à chaque j multiple de i , nous effectuons une rotation de l'arête afin prendre en compte un nombre suffisant de sommets par anneau.

Considérons toujours le schéma dyadique triangulaire de Loop. Le nombre de sommets composant un anneau de rayon i est égal à ni , ce repère polaire est donc irrégulier, voir Figure 3.24. Ainsi, la construction d'un algorithme d'attribution des coordonnées polaires de chaque sommet de la carte peut être avantageusement décrit en considérant celle-ci comme un maillage de type *demi-arête* (*half-edge*). Ce type de maillage prend en compte des sommets portés par des arêtes orientées. Nous utilisons les trois directions du maillage triangulaire u , v et w , voir Figure 3.24.a. Nous définissons donc les trois opérations de parcours du maillage selon ces directions pour une arête E : $u(E)$, $v(E)$ et $w(E)$. De plus, nous considérons les opérations de parcours $Oppose(E)$ et $Precedent(E)$; la première désigne la demi-arête opposée de E , la deuxième celle dont le sommet d'arrivée est le sommet source de E . L'algorithme affecte les coordonnées polaires de chaque sommet de la carte — chacun étant la source d'une arête du maillage — de la manière illustrée en Figure 3.24 : anneau par anneau. Ainsi, en considérant l'arête A comme une arête dont la source est $P(0,0)$,

Algorithme 1 : Obtention du couple de coordonnées (r, φ) de chaque sommet régulier, $r \in \llbracket 0, R \rrbracket$. Nous considérons ici les arêtes d'un maillage de type *half-edge*. Le couple de coordonnées d'un sommet source d'une arête E est noté (r_E, φ_E) .

```
Entier  $r_{\text{compteur}}$ 
Entier  $\varphi_{\text{compteur}}$ 
Arête  $E \leftarrow A$ 
Arête  $E_\varphi$ 
```

```

— Le sommet central  $P(0,0)$ 
 $r_A \leftarrow 0$ 
 $\varphi_A \leftarrow 0$ 

— Pour chaque anneau
for  $r_{\text{compteur}} = 1$  to  $R$  do
   $E_\varphi \leftarrow E$ 
  for  $\varphi_{\text{compteur}} = 0$  to  $\varphi_{\text{compteur}} < n \cdot r_{\text{compteur}}$  do
    — Coordonnées
     $r_{E_\varphi} \leftarrow r_{\text{compteur}}$ 
     $\varphi_{E_\varphi} \leftarrow 2\pi \cdot \varphi_{\text{compteur}} / n \cdot r_{\text{compteur}}$ 

    — La rotation du repère revient à considérer l'opposé de l'arête précédente
    if  $(\varphi_{\text{compteur}} \bmod r_{\text{compteur}} = 0)$  then
       $E_\varphi \leftarrow \text{Oppose}(\text{Precedent}(E_\varphi))$ 
    end if

    — Prochaine arête du même anneau, déplacement selon la direction  $w$  du maillage
     $E_\varphi \leftarrow w(E_\varphi)$ 
  end for

  — Prochain anneau, déplacement selon la direction  $u$  du maillage
   $E \leftarrow u(E)$ 
end for

```

L'algorithme inverse, qui à partir du sommet $P(0,0)$ et des coordonnées (r, φ) détermine le sommet $P(r_i, \varphi_{ij})$, est direct car très similaire à celui-ci. La même méthode s'applique aux maillages semi-réguliers quadrangulaires.

Par ailleurs, en prenant en compte le fait que le sommet extraordinaire influe localement sur son voisinage, nous pouvons établir avec précision l'étendue de son influence pour un schéma donné. Dans notre cas, à chaque itération, chaque sommet voisin d'un sommet perturbé est considéré comme affecté par la règle de subdivision du sommet extraordinaire, de par la compacité du stencil. Les anneaux topologiques réguliers prennent ici leur sens, car les sommets de chaque anneau sont affectés par le sommet extraordinaire à une itération donnée du procédé de subdivision. À noter que cette méthode est également applicable à d'autres schémas que celui de Loop. Nous montrerons par la suite que des perturbations en forme de cercles seront mises en évidence. Ainsi, l'étendue de l'influence du sommet extraordinaire, considérée comme néfaste, peut être définie comme un nombre d'anneaux topologiques R_s , fonction d'un niveau de subdivision s ,

$$R_s = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 2 \\ 2 & \text{si } s = 2 \\ 2R_{s-1} + 2 & \text{si } s > 2, \end{cases} \quad (3.26)$$

ce qui revient à écrire :

$$R_s = \sum_{i=1}^{s-1} 2^i. \quad (3.27)$$

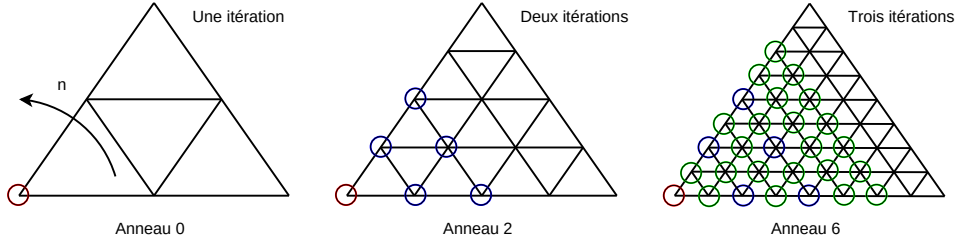


FIG. 3.25 : Illustration de la justification des anneaux topologiques réguliers de notre carte d'analyse polaire : à chaque itération de subdivision de Loop, deux nouveaux anneaux réguliers de sommets sont influencés par le sommet extraordinaire. Nous pouvons, grâce à cette métrique, établir une mesure de distance au-delà de laquelle celui-ci n'influe plus sur la géométrie de son voisinage. Les nouveaux sommets influencés par le sommet extraordinaire sont marqués ici d'une couleur différente.

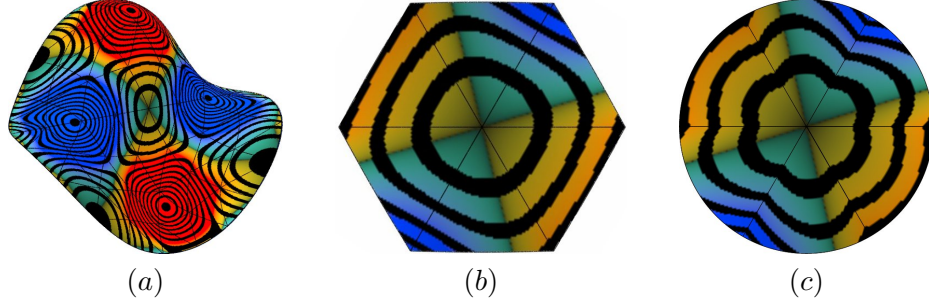


FIG. 3.26 : (a) Un modèle de valence 6 subdivisé par 6 itérations du schéma de Loop. (b) Visualisation du 1-voisinage au maillage de contrôle du sommet extraordinaire selon les vecteurs propres du schéma. (c) La carte polaire de courbure correspondante comprenant 64 anneaux.

Cette expression est bornée par 2^s de façon très proche pour un niveau s peu élevé, ce qui est généralement le cas. Autrement dit, au-delà de cette *distance topologique*, les variations de courbure ne seront pas considérées comme des perturbations néfastes liées à un sommet extraordinaire. Notre carte d'analyse possèdera donc 2^s anneaux, cet ensemble de sommets est issu de la subdivision du 1-voisinage du sommet extraordinaire sur le maillage de contrôle, voir Figure 3.25.

À noter que la carte d'analyse ne représente plus la géométrie réelle des sommets du maillage, étant donné que nous l'avons modifiée, voir Figure 3.26. Cette géométrie est donc uniquement relative à la topologie du maillage.

Nous mettons en évidence deux artefacts en Figure 3.27 au moyen de la mesure de gradient de courbure absolue ; sur ces exemples comme pour la plupart d'entre eux, celle-ci est bien plus révélatrice que, par exemple, la mesure de courbure gaussienne. Nous comparons le comportement du schéma de Loop avec celui de deux schémas tunés, tous deux ayant un support étendu. Les relevés de la carte d'analyse polaire révèlent des cercles concentriques, justifiant ainsi l'utilité de cette construction. Le premier schéma de subdivision réduit l'artefact (en rouge) au prix de fortes oscillations radiales, tout comme le second dans une moindre mesure. Ces relevés de données permettent donc l'évaluation qualitative du comportement de la surface autour d'un sommet.

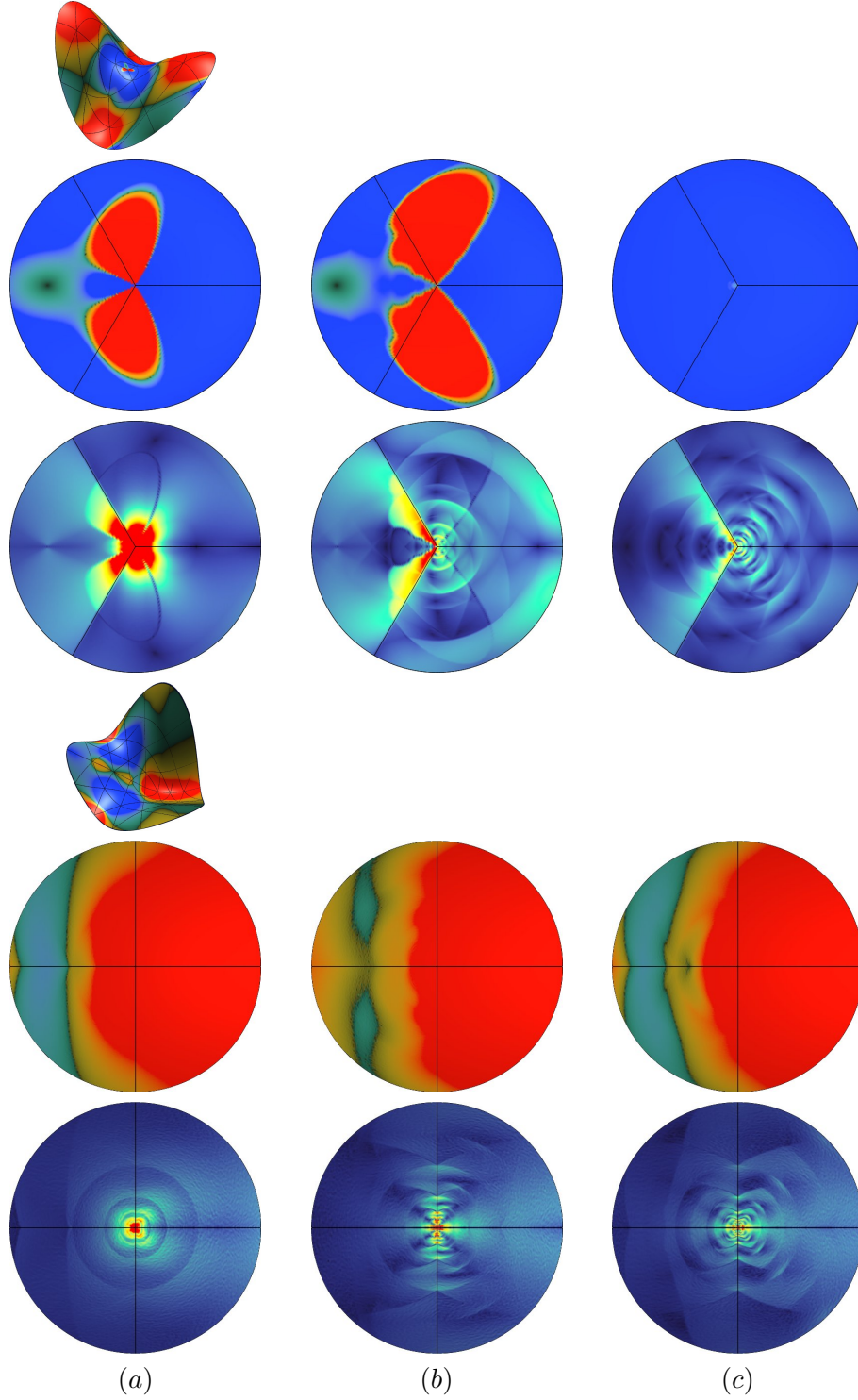


FIG. 3.27 : Exemples d'artefacts sur un modèle de valence 3 (haut) puis sur un autre de valence 4 (bas), mis en évidence par un relevé de courbure gaussienne (première ligne) puis par le gradient de courbure absolue (deuxième ligne). Les schémas de subdivision analysés sont (a) Loop, (b) le tuning de Loop de Barthe et Kobbelt [Bart 04] et (c) le tuning de Loop de Géro et al. [Géro 10] (niveau de subdivision 7, donc étude de 128 anneaux).

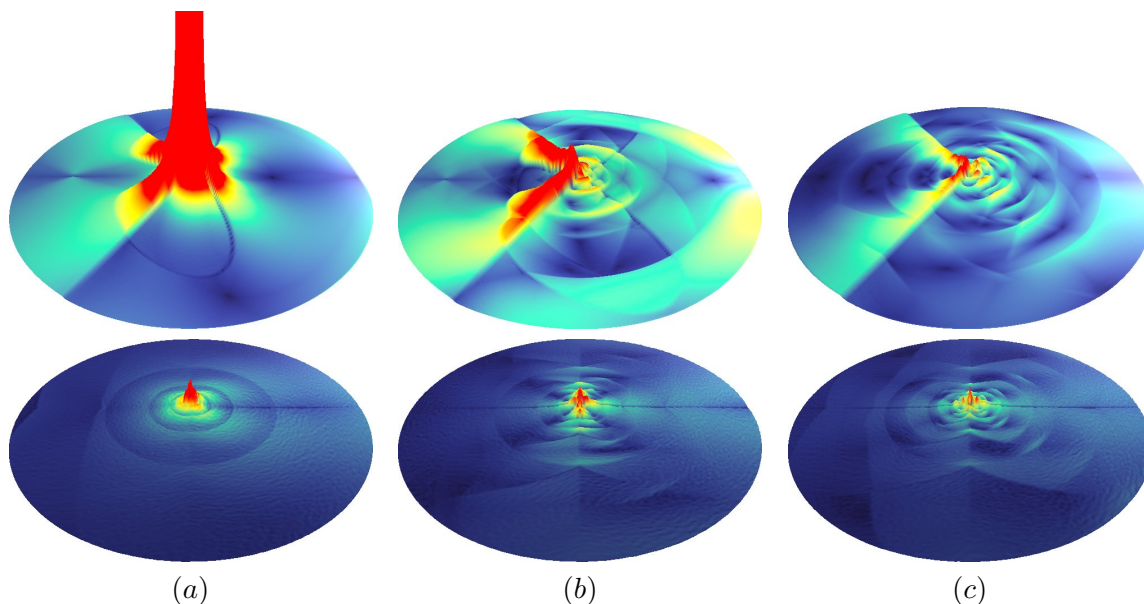


FIG. 3.28 : Analyse des résultats précédents sous forme de surface focale, de gauche à droite les schémas de (a) Loop, (b) Barthe et Kobbelt et (c) Gérot et al. Nous y voyons clairement les différences d'amplitude du gradient de courbure absolue. En haut à gauche, celle-ci est très élevée.

3.2.3.2 Évaluation par surfaces focales polaires

Il est également possible, dans le but de mettre en évidence un artefact, d'appliquer la surface focale généralisée aux cartes d'analyse polaires, voir Figure 3.28. Le procédé est identique excepté le fait que dans ce cas, la surface analysée est la carte polaire et le facteur d'élévation est le gradient de courbure absolue. Cette méthode permet d'améliorer la perception de l'amplitude du gradient par rapport à la couleur seule. Si ∇c est ce gradient alors les sommets de la surface focale $\mathcal{F}(r, \varphi, z)$ sont définis par rapport aux sommets du maillage $P(r, \varphi, 0)$ de la façon suivante,

$$\mathcal{F}(r, \varphi, z) = P(r, \varphi, 0) + a \nabla c \cdot Z, \quad (3.28)$$

où Z est le vecteur unitaire directeur de l'axe d'élévation et a est une constante de visualisation.

3.2.4 Méthodes de traitement d'images appliquées aux cartes de données polaires

L'approche prise en compte ici est le traitement d'images classique des données, rendu possible par la semi-régularité du repère polaire (r, φ) des cartes de données. Le but de cette approche est l'application de filtres sur nos données polaires, afin d'améliorer la visualisation des données et de filtrer la géométrie.

Les approches classiques en traitement d'images tirent parti de la métrique régulière (u, v) de l'image. Chaque pixel possède alors un certain nombre de pixels connexes ; nous considérons en général la connexité 4 ou 8, voir Figure 3.29. Dans le cas des hexagones, nous pouvons considérer la connexité 6.

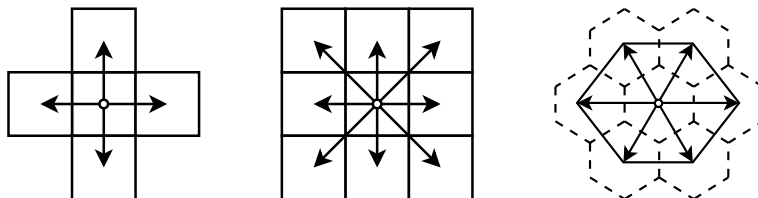


FIG. 3.29 : De gauche à droite : connexités 4 et 8 sur un maillage régulier quadrangulaire, connexité 6 pour un maillage hexagonal, donc autant pour les sommets d'un maillage triangulaire (maillage dual).

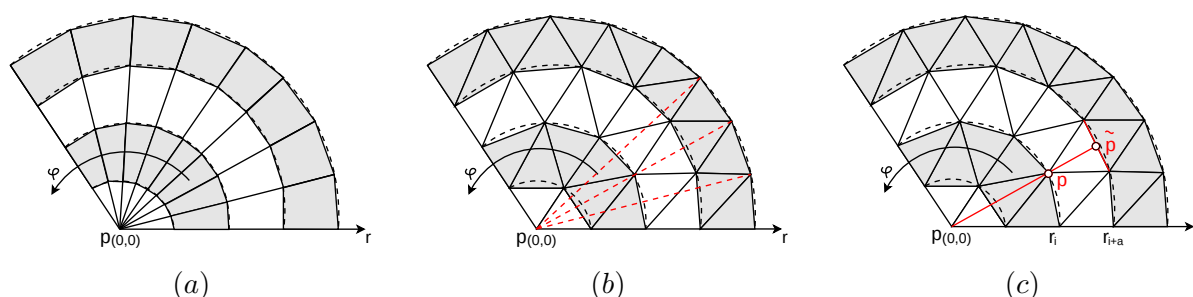


FIG. 3.30 : À gauche (a) un repère polaire régulier (r, φ) où nous pouvons établir la même notion de connexité que sur une image de pixels. Au milieu, (b) la carte polaire d'un maillage semi-régulier triangulaire, la topologie des sommets est différente : la notion de connexité polaire n'est pas la même. En (c) une illustration de la méthode d'interpolation du sommet $\tilde{P}(r_i, \varphi_{ij})$ sur le rayon r_{i+a} .

Le traitement d'images classique est relativement peu concerné par la notion de repère polaire régulier, voir Figure 3.30.a. Holden et ses co-auteurs [Hold 03] proposent l'analyse polaire de la région d'intérêt d'une image, afin de reconnaître et de suivre une forme. D'autre part, l'ART [Rica 05], pour *Angular Radial Transform*, est une technique de plongement d'images dans une base fréquentielle de fonctions radiales. Mais cette technique ne prend pas en compte une image en coordonnées polaires, les fonctions de base radiales sont déterminées sur une grille de pixels classique. Enfin, l'algorithme de Larson-Sekanina considère la mesure d'un gradient polaire sur une grille (u, v) régulière.

Dans le cas des maillages subdivisés par des schémas usuels, notamment les schémas dyadiques (Loop, Catmull et Clark, etc.), la carte polaire exposée précédemment n'est pas régulière topologiquement parlant (voir Figure 3.30). Nous ne pouvons donc pas directement établir de métrique (r, φ) sur ce treillis : les voisins d'un sommet $P(r_i, \varphi_{ij})$ de la carte selon r ne sont pas toujours définis comme étant des sommets du maillage. Nous proposons donc de définir une approximation de cette notion de voisinage polaire des données.

Soit donc la donnée $c(r_i, \varphi_{ij})$ portée par un sommet $P(r_i, \varphi_{ij})$ d'une carte polaire. L'approximation du voisinage de ce sommet consiste à estimer la valeur portée par un sommet $\tilde{P}(r_{i+a}, \varphi_{ij+b})$, éventuellement fictif, où a et $b \in \mathbb{Z}$ représentent le déplacement de P vers $\tilde{P}$. Ce sommet porte la donnée $\tilde{c}(r_{i+a}, \varphi_{ij+b})$ que nous cherchons à estimer. La donnée $\tilde{c}(r_{i+a}, \varphi_{ij+b})$, donc lorsque P et $\tilde{P}$ partagent le même anneau, est connue puisque nous connaissons les données portées par chaque sommet d'un anneau, la connexité selon φ ne pose donc pas de problème.

La donnée $\tilde{c}(r_{i+a}, \varphi_{ij})$ peut être estimée par interpolation linéaire de deux données du rayon $r + a$, en projetant le sommet P sur l'anneau r_{i+a} , voir Figure 3.30.c. Comme évoqué précédemment, pour un maillage triangulaire, un anneau de la carte de rayon r_i contient nr_i sommets, $r_i : \{P(r_i, \varphi_{ij}), j \in \llbracket 0, nr_i - 1 \rrbracket\}$. Dans le cas d'un maillage quadrangulaire semi-régulier, un anneau de rayon r_i contient cette fois $2nr_i$ sommets. Ainsi, si nous considérons le sommet $\tilde{P}(r_{i+a}, \varphi_{ij+b})$ comme le projeté du sommet $P(r_i, \varphi_{ij})$ sur le rayon r_{i+a} , nous pouvons estimer $\tilde{c}(r_{i+a}, \varphi_{ij})$ de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \tilde{c}(r_{i+a}, \varphi_{ij}) = & c(r_{i+a}, E(\alpha) + 1)(\alpha - E(\alpha)) + \\ & c(r_{i+a}, E(\alpha))(1 - (\alpha - E(\alpha))) , \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $E(\alpha)$ est la partie entière de α , donc $(\alpha - E(\alpha))$ est sa partie fractionnaire, et nous considérons les valeurs d'indices angulaires modulo le nombre de sommets de l'anneau. Le sommet fictif $\tilde{P}(r_{i+a}, \varphi_{ij})$ est donc interpolé ici entre deux sommets du rayon r_{i+a} d'indices angulaires $E(\alpha)$ et $E(\alpha) + 1$. Le coefficient α détermine la position de $n.r_i$ sommets projetés sur le rayon r_{i+a} :

$$\alpha = \frac{2\pi\varphi_{ij}}{n.r_i} \left(\frac{2\pi}{n(r_{i+a})} \right)^{-1} = \frac{(r_{i+a})\varphi_{ij}}{r_i} . \quad (3.30)$$

À noter que cette estimation est la même pour un maillage quadrangulaire semi-régulier. Cette interpolation linéaire peut également être étendue à des interpolations d'ordres supérieurs en considérant davantage de sommets sur l'anneau r_{i+a} , cependant nous constaterons que l'erreur de précision est négligeable, et décroissante proportionnellement à r_{i+a} . Enfin, par extension, la donnée portée par le sommet voisin estimé $\tilde{c}(r_{i+a}, \varphi_{j+b})$ est obtenue par cette méthode à partir du sommet connu $P(r_i, \varphi_{j+b})$.

Cette définition de voisinage polaire, donc de connexité, nous permet de construire un filtre. En considérant non plus le repère classique (u, v) d'une image mais le repère (r, φ) , les filtres polaires moyennent 3×3 de connexité 4 et 8 peuvent respectivement être notés de la façon usuelle suivante :

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} , \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.31)$$

Ces filtres, ainsi que les filtres gradients et laplaciens selon r et φ sont illustrés en Figure 3.33. Cette technique de filtrage des cartes de données ouvre de nombreuses perspectives concernant l'analyse du comportement d'un schéma de subdivision au voisinage d'un sommet extraordinaire, puisque comme dit précédemment, ce repère polaire lui est très souvent adapté. Par exemple, nous pouvons lisser les données plus ou moins fortement selon leur rayon, ou mettre en évidence les cercles d'amplitude élevée observés précédemment. Enfin, concernant la comparaison de deux cartes de données polaires, cette notion de voisinage permet de mettre en œuvre l'ensemble des outils existants en traitement d'images utile à la comparaison de deux formes : évaluation de leur taille, de leurs similitudes etc.

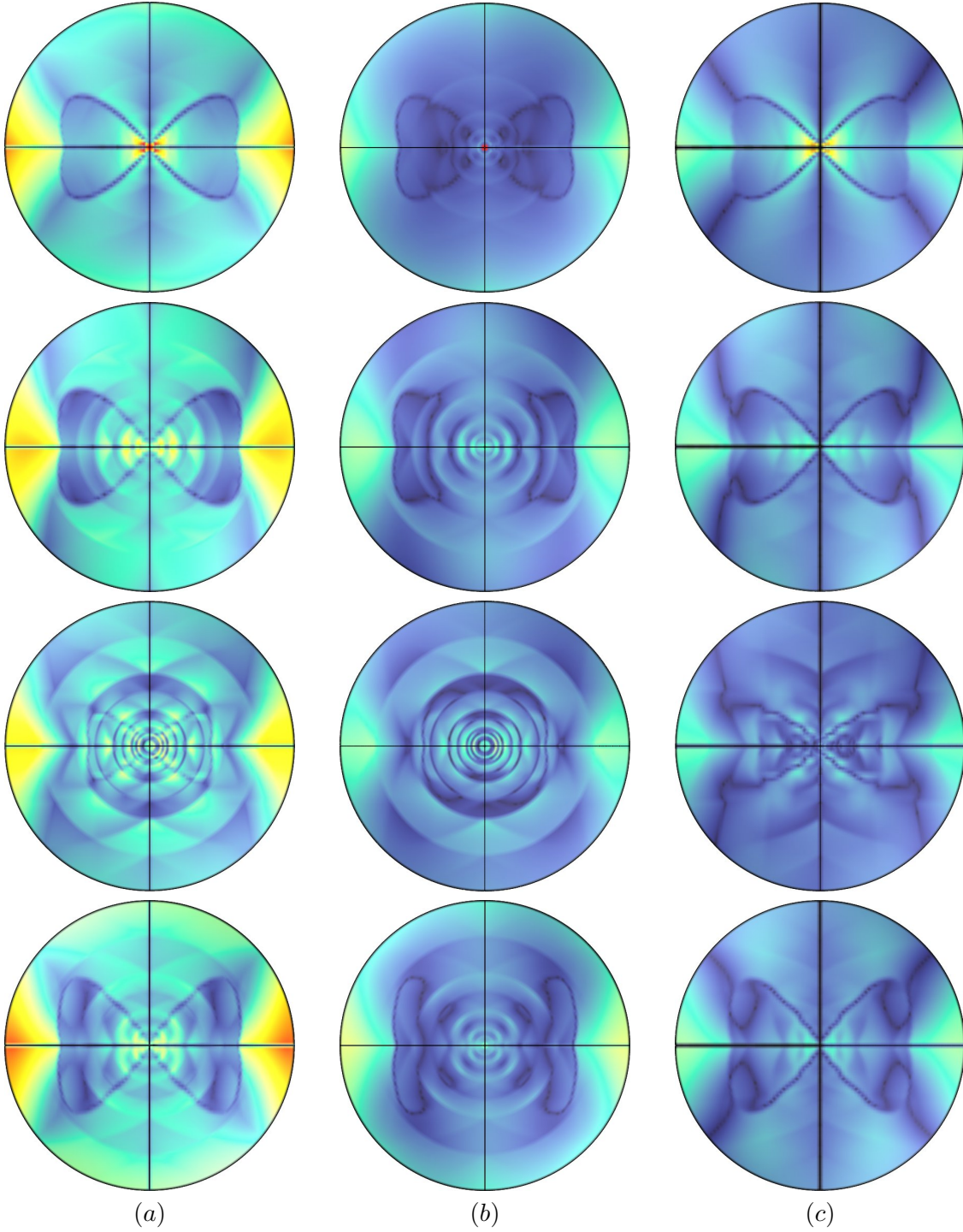


FIG. 3.31 : Application du filtrage des données sur un exemple de géométrie en selle de cheval de valence 4 pour plusieurs schémas de subdivision. La colonne de gauche (a) représente le gradient de courbure absolue. Celle du milieu (b) représente le gradient radial de courbure absolue et celle de droite (c) le gradient angulaire. De haut en bas, nous analysons le schéma de Loop, le tuning de Barthe et Kobbelt, celui de Karčiauskas et al. et celui de Géro et al. Nous distinguons en particulier clairement les perturbations radiales concentriques.

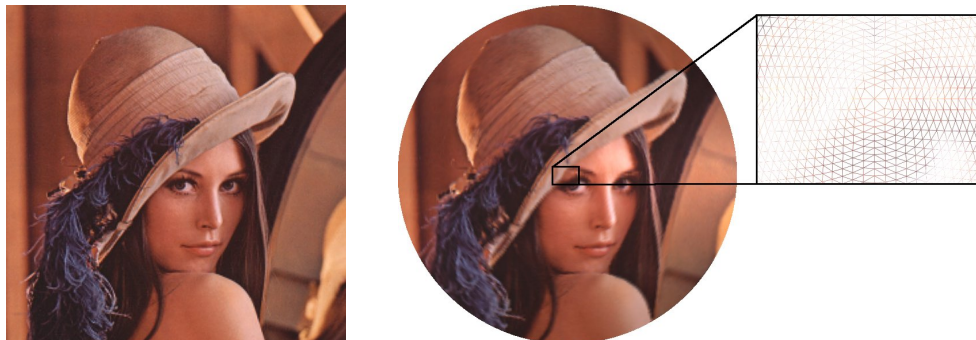


FIG. 3.32 : Nous projetons l'image de Lena sur une carte de données polaire afin de pouvoir tester différents filtres; elle est ici de valence centrale 8 et possède 128 anneaux.



FIG. 3.33 : Différents filtres polaires, de gauche à droite : trois filtrages gaussiens de variance 4, 8 et de variance croissante selon le rayon du disque (taille 20×20). Sur la deuxième ligne, filtres gradient radial, angulaire puis omnidirectionnel de taille 3×3 . Sur la troisième, filtres laplacien radial, angulaire puis omnidirectionnel de taille 3×3 .

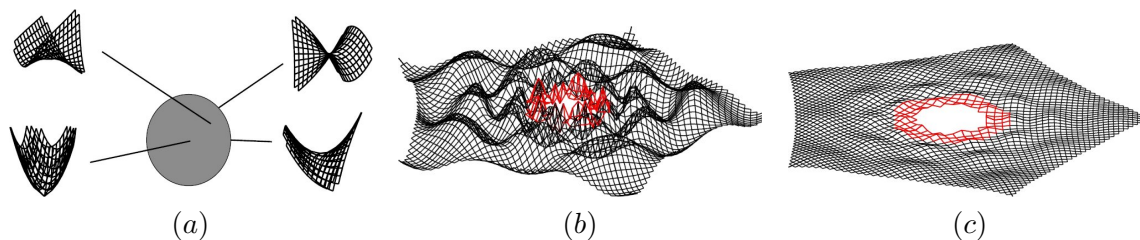


FIG. 3.34 : Le tuning de schéma proposé dans [Augs 06] se propose d'évaluer les coefficients tunés sur un espace de formes (a). Leur but est de minimiser la variation de courbure gaussienne au voisinage d'un sommet extraordinaire (b) et (c).

En guise d'exemple, nous analysons le gradient des données d'un disque d'analyse en Figures 3.35 et 3.36. La visualisation du gradient de ces données permet de rehausser les différents comportements géométriques des schémas de subdivision. En particulier, nous observons le fait que les schémas améliorant le tuning original de Loop (b), (c) et (d) réduisent ces artefacts mais le diffusent sur un voisinage plus étendu autour du sommet extraordinaire. Nous mettons également en évidence la tendance des schémas de Barthe et Kobbelt (c) et Gérot et al. (d) à créer de fortes perturbations radiales : voir le gradient radial sur la dernière ligne des images 3.35 et 3.36.

Ainsi, cette technique de visualisation permet l'évaluation et la caractérisation des artefacts au voisinage d'un sommet extraordinaire, ceci au niveau de leur amplitude, de leur étendue, ainsi que par rapport à leurs comportements radial et angulaire. Il permet donc, pour une géométrie donnée, une comparaison qualitative originale de différents schémas de subdivision.

3.2.4.1 Comparaison des schémas de subdivision

La méthode exposée précédemment est visuelle et ne concerne qu'une géométrie donnée : une forme et une valence particulière. La comparaison de deux schémas de subdivision pour une valence de sommet donnée est plus complexe, car les géométries de test (le *benchmark*) doivent idéalement décrire l'ensemble des formes possibles. De plus, une mesure numérique de qualité doit être déterminée pour chaque surface. Dans [Augs 06], les auteurs évaluent la somme de la variation de courbure gaussienne sur le voisinage d'un sommet extraordinaire, voir Figure 3.34. Leur espace de test m_i est composé d'un mélange de formes :

$$m_i = (1 - r)m_c + r \cos(\varphi)m_{s1} + r \sin(\varphi)m_{s2} , \quad (3.32)$$

où m_c , m_{s1} et m_{s2} sont les formes caractéristiques du second ordre du schéma : le parabolôïde (*cup*) et les deux selles de cheval (*saddle*). Dans leur cas, $r \in [0, 1]$ avec un pas de 0.005 et $\varphi \in [0, 2\pi]$ avec un pas de $\pi/48$; leur espace contient donc 19.201 maillages m_i différents, une représentation est illustrée en Figure 3.34.a.

Un protocole de comparaison adapté à la minimisation de notre mesure de perturbation géométrique constitue un objectif de nos futurs travaux. Nous pouvons néanmoins définir une mesure de qualité q sur nos disques d'analyse de la même façon, en considérant la somme du gradient de courbure absolue c évalué en chaque sommet du disque :

$$q = \sum_{r=1}^R \sum_{\varphi=0}^{n.r} c(r, \varphi) ds . \quad (3.33)$$

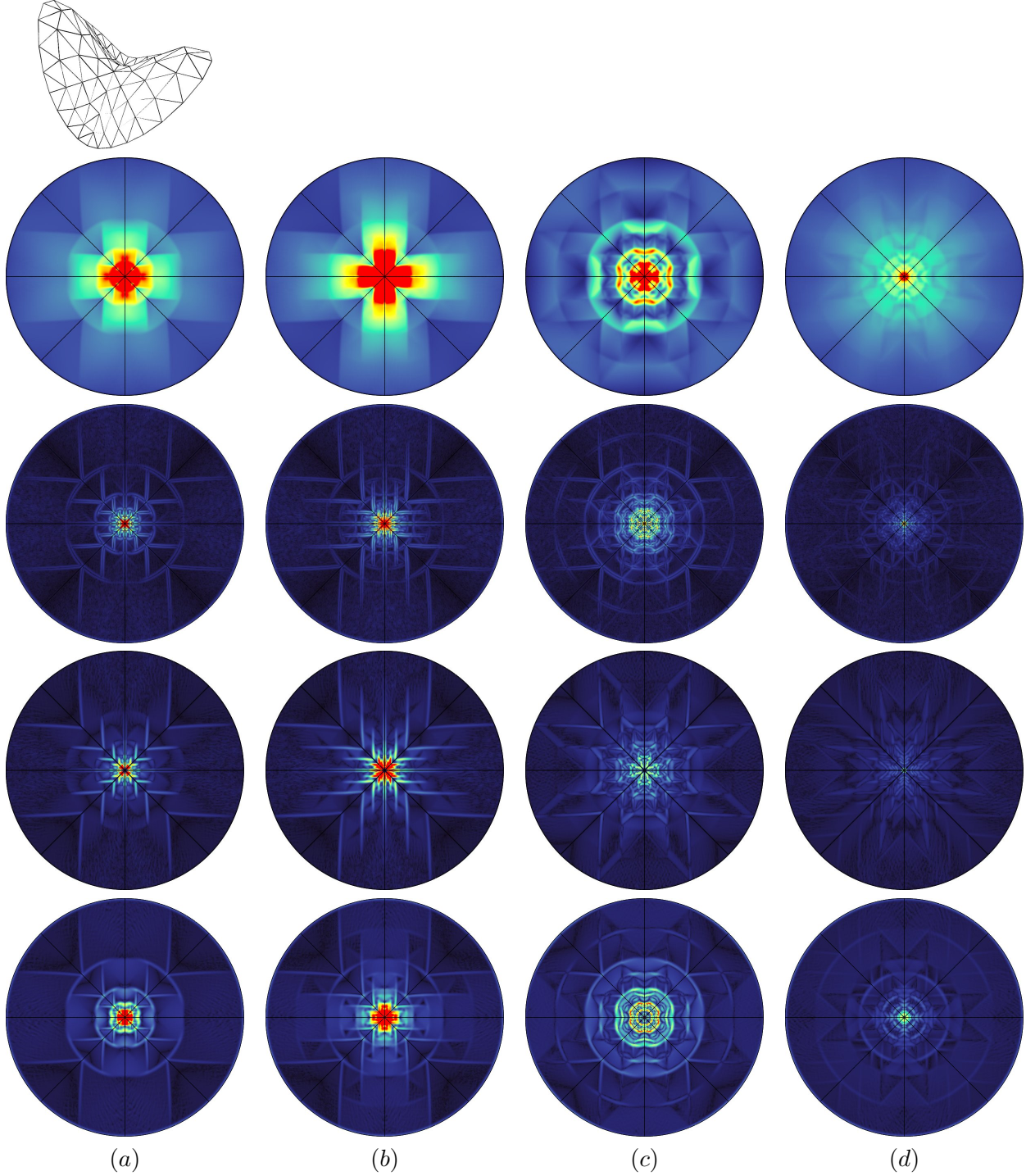


FIG. 3.35 : Analyse du comportement de plusieurs schémas au moyen du gradient des mesures de variation de courbure absolue, sur un modèle en selle de cheval de valence 8. De haut en bas : variation de courbure absolue, gradient des données (au moyen d'un filtre 3×3 de connexité 4), gradient circulaire selon φ et gradient radial selon r . Les différents tuning de Loop analysés sont (a) Loop original, (b) Prautzsch et Umlauf [Prau 00], (c) Barthe et Kobbelt [Bart 04] et (d) Géro et al. [Géro 10].

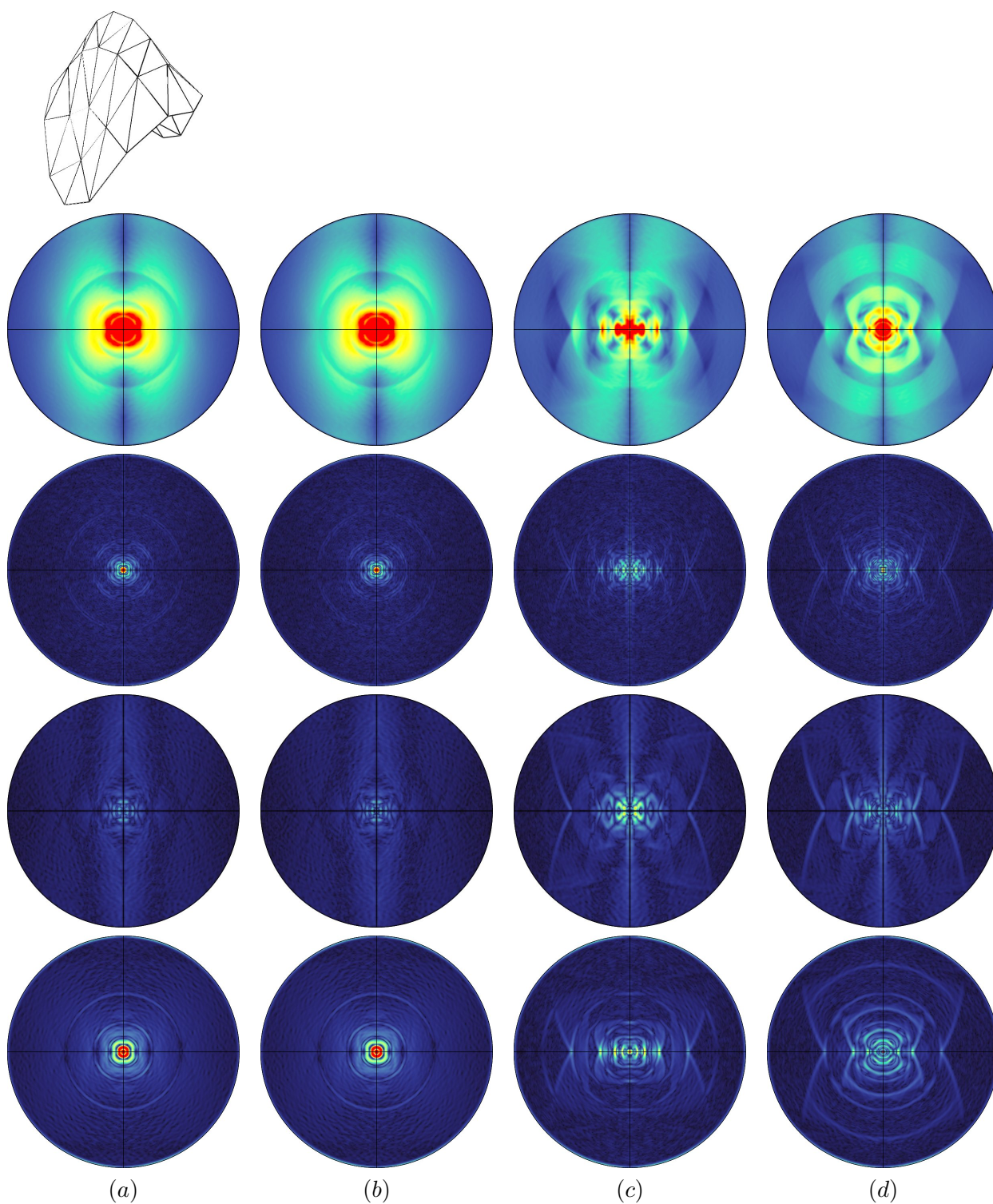


FIG. 3.36 : Les mêmes mesures sur un modèle de paraboloïde de valence 4. Cette fois, le comportement géométrique du tuning de Prautzsch et Umlauf (b) est très similaire au tuning original de Loop (a).

3.2.4.2 La question du filtrage des sommets de la surface

Il est difficile de définir la géométrie des sommets d'une surface par rapport à des données de courbure. Dans notre cadre d'analyse, il serait néanmoins intéressant de lisser la variation de courbure absolue afin d'améliorer l'aspect de la surface, puisqu'il s'agit de notre mesure de qualité. Une méthode d'optimisation très élaborée est présentée dans [Eige 08] ; leur but est de modéliser une forme en définissant son relevé de courbure gaussienne. Nous ne nous sommes cependant pas préoccupés de l'adaptation de cette méthode au gradient de courbure absolue. Notre intuition est que la surface est perturbée d'une façon ou d'une autre à l'endroit où cette mesure est d'amplitude élevée. Aussi, nous proposons de discuter ici d'un moyen de filtrer la géométrie des sommets de la surface de manière adaptative, par rapport à cette mesure, dans le but de réduire la perturbation.

Étant donné que nous ne possédons pas de fondement mathématique bien défini entre nos données de courbure et la géométrie des sommets, nous proposons d'identifier les variations brusques de courbure à des oscillations de la géométrie des sommets. De façon intuitive, réduire ces oscillations peut être effectué au moyen d'un filtre passe-bas. Malheureusement, malgré de nombreuses explorations, nous ne sommes pas parvenus à déterminer un moyen réellement efficace d'améliorer la géométrie des sommets du maillage par rapport à cette donnée de courbure.

Si un système de filtrage gaussien adaptatif présente dans certains cas de bons résultats, nous avons pu constater du caractère instable de celui-ci vis-à-vis de la forme du modèle, sa fiabilité est donc discutable. Soit donc le filtre gaussien polaire $\mathcal{G}$ dont la variance est liée à la donnée de courbure c . Nous fixons sa taille à 3×3 afin de pouvoir l'appliquer à tout sommet régulier de rayon $r \in [1, R - 1]$. Nous le définissons comme suit,

$$\mathcal{G}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma_c^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_c^2}(r^2 + \varphi^2)}, \quad \sigma_c > 0. \quad (3.34)$$

le paramètre σ_c est déterminé en fonction de c . Nous le définissons, de façon empirique pour les raisons exposées précédemment, de la façon suivante :

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{max}}{c_{max}} c, \quad (3.35)$$

de manière à obtenir une combinaison linéaire de σ_c entre 0 et σ_{max} , c_{max} étant la valeur à laquelle nous bornons c . Nous avons mis en place ce filtrage de deux manières différentes. Tout d'abord nous appliquons simplement ce filtre à un niveau de subdivision donné. Une perturbation due à un artefact apparaît dès les premiers pas de subdivision [Sabi 04b], en conséquence, un autre protocole consiste à filtrer la surface à chaque pas de subdivision. Nous assurons par ailleurs le respect des propriétés mathématiques du schéma en stoppant le processus de filtrage à un certain niveau de subdivision ; une analyse de schéma non-uniforme et non-stationnaire dépasse le cadre de notre analyse, voir [Cash 09] à ce sujet. Il est cependant difficile de comparer les résultats de ces deux protocoles étant donnée l'instabilité de ce système.

Ainsi, le lien entre les données de gradient de courbure absolue et la géométrie des sommets est contre-intuitif à établir autrement que par une analyse mathématique de linéarisation et d'intégration des données. Cette analyse, tout comme dans [Eige 08], peut être conduite à travers un procédé d'optimisation numérique à la fois coûteux en terme de calcul et potentiellement instable au même titre que la méthode présentée ici.

Conclusion et perspectives

Ainsi, nous avons présenté dans ce chapitre les principales méthodes de visualisation pour l'analyse de surface, destinées à évaluer la qualité d'une surface lisse. Nous avons étendu ces méthodes au cadre de notre étude, la surface de subdivision. Nous avons discuté de l'adaptation des méthodes usuelles, destinées aux surfaces lisses continues, en considérant la surface limite générée par un schéma de subdivision. Nous avons tout d'abord choisi une mesure de qualité adaptée aux artefacts liés à un sommet extraordinaire, principale source de problèmes limitant l'utilisation de cet outil de modélisation. Nous définissons ensuite un protocole de visualisation des données colorées adapté à notre mesure de qualité. Nous avons enfin établi un espace d'évaluation de ces artefacts en considérant un repère polaire centré sur un sommet extraordinaire. Cet espace nous permet d'établir un examen qualitatif original ainsi qu'une mesure numérique de la qualité de la surface au voisinage d'un sommet extraordinaire. Nous avons également étendu la notion de surface focale sur cet espace. Nous avons étendu les méthodes de filtrage classiques en traitement d'images à l'espace semi-régulier que constitue le voisinage d'un sommet extraordinaire; l'application de filtres radial et angulaire nous permet de mettre en évidence plus efficacement différents comportements géométriques, tels que les oscillations de courbure dont nous avons l'intuition.

L'objet du chapitre suivant est l'adaptation de l'analyse spectrale, utilisée classiquement en traitement d'images, à notre espace de données polaire semi-régulier. Le but de cette analyse spectrale sera d'améliorer la caractérisation des artefacts au voisinage d'un sommet extraordinaire. Une telle caractérisation nous permettra de les identifier plus finement, et à terme de les réduire plus efficacement.

Chapitre 4

Analyse fréquentielle des artefacts

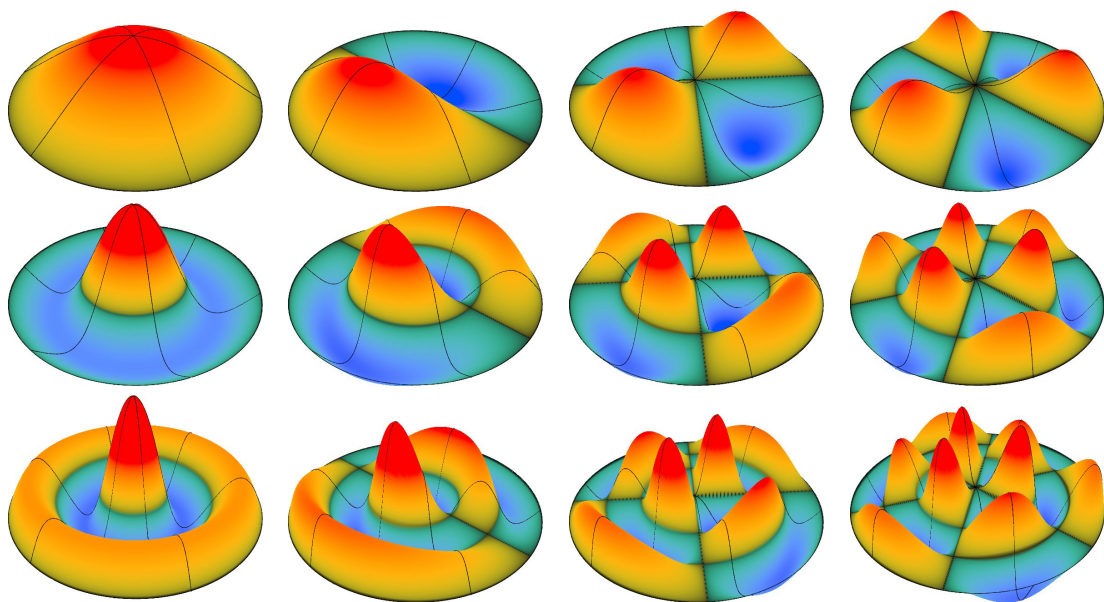


FIG. 4.1 : Nous proposons l'analyse de la courbure d'une surface au voisinage d'un sommet extraordinaire dans la base des modes propres de vibration d'une membrane circulaire élastique, dont voici une l'illustration. Cette base nous permet de caractériser de façon fréquentielle les perturbations observées sur les relevés de courbure au voisinage d'un sommet extraordinaire.

Sommaire

Introduction	80
4.1 Une analyse spectrale polaire des variations de courbure	81
4.1.1 Analyse spectrale sur un maillage	81
4.1.2 Une base de fonctions polaire	82
4.2 Applications et résultats	84
4.2.1 Validation de l'analyse	85
4.2.2 Application de l'analyse fréquentielle à la caractérisation des artefacts .	89
Conclusion	99

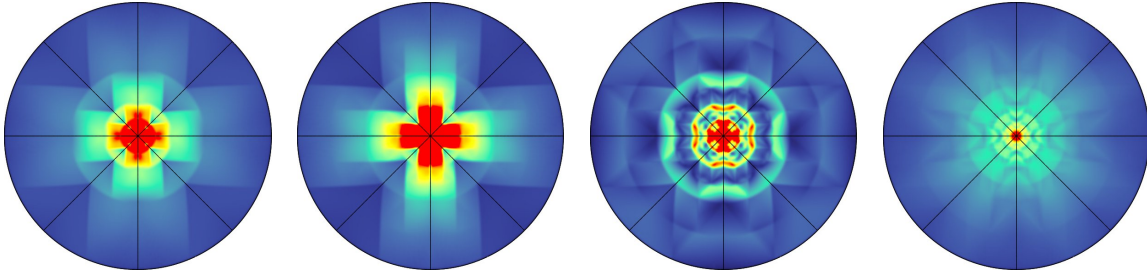


FIG. 4.2 : Quatre exemples de cartes de données de courbure prises au voisinage d'un sommet extraordinaire de valence 8. Ces quatre exemples correspondent aux différents comportements de quatre schémas de subdivision : les différentes formes de la perturbation montrent des motifs périodiques radiaux et angulaires.

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une méthode originale d'analyse des distorsions géométriques induites par un sommet extraordinaire sur une surface de subdivision. Comme exposé en partie 3.2.2.1, ces sommets induisent de fortes variations de courbure aux sommets ordinaires de leur voisinage. L'objectif est ici de caractériser ces distorsions de manière radiale et angulaire par rapport au sommet extraordinaire d'intérêt, conformément au point de vue adopté au chapitre précédent. Cette analyse polaire est fréquentielle, nous étudierons le spectre des fréquences radiale et angulaire des données de courbure mesurées sur ce voisinage. En effet, le comportement des relevés de courbure observés précédemment sur les cartes de mesures polaires — exposées en partie 3.2.3.1 — présente des motifs périodiques selon le rayon et la phase d'un sommet de la carte, voir Figure 4.2. La donnée de courbure prise en compte étant, tout comme précédemment, le gradient de courbure absolue introduit en partie 3.2.2.2. Quelle que soit la géométrie du maillage de contrôle et le schéma utilisé, ces comportements géométriques néfastes dus au sommet extraordinaire montrent très fréquemment cette forme de périodicité radiale et angulaire autour du sommet extraordinaire. Une analyse fréquentielle polaire s'y applique ainsi naturellement : une forte perturbation des données se traduit par la présence de hautes fréquences dans le spectre analysé.

De plus, le même maillage de contrôle subdivisé par différents schémas met en évidence des comportements géométriques souvent très différents, ce sujet a été abordé en partie 3.2.4.1. L'analyse fréquentielle polaire de ces surfaces nous permettra de caractériser la forme de ces comportements géométriques particuliers, et donc de définir une mesure de comparaison qualitative des surfaces autre que la simple évaluation visuelle des données de courbure.

Nous présenterons tout d'abord brièvement les principaux travaux existants en analyse fréquentielle de la géométrie d'un maillage. Nous exposerons ensuite une base polaire orthonormale de fonctions, les modes propres de vibration d'une membrane élastique, voir Figure 4.1. Notre but est de projeter les données de courbure mesurées autour d'un sommet extraordinaire dans cette base polaire. Comme exposé précédemment, ces données sont mises sous la forme d'une carte polaire prenant la forme d'un disque. Le résultat de cette projection est un spectre radial et angulaire, il nous permet donc l'analyse des fréquences radiales et angulaires présentes dans le relevé de données. Nous montrerons dans une deuxième partie de quelle façon nos données de courbure sont projetées dans cette base, en vue de leur analyse fréquentielle. Enfin, nous discuterons des résultats de cette analyse pour la caractérisation de la forme des perturbations géométriques dues à un sommet extraordinaire.



FIG. 4.3 : *Exemple de débruitage de surface par une analyse fréquentielle du maillage (images issues de [Flei 03]), le bruit est essentiellement décrit par les hautes fréquences du spectre.*

4.1 Une analyse spectrale polaire des variations de courbure

De façon générale, la projection d'un signal dans une base fréquentielle permet de l'observer selon plusieurs résolutions : les basses fréquences correspondent aux variations lentes du signal, tandis que les hautes fréquences décrivent les variations plus rapides. La présence de hautes fréquences est généralement caractéristique du bruit présent dans un signal ou des contours d'une image. C'est pourquoi l'emploi d'une telle analyse est toute indiquée dans le domaine de la compression de données. Cependant, si l'analyse spectrale est couramment utilisée en traitement du signal et de l'image, sa mise en œuvre dans le cas d'un maillage quelconque est rendue difficile par la connectivité irrégulière des sommets.

4.1.1 Analyse spectrale sur un maillage

4.1.1.1 Principe des travaux existants

Un grand nombre de travaux ont été entrepris dans le but de rendre possible une analyse spectrale sur un maillage de connectivité quelconque. Outre l'informatique graphique, les principaux domaines concernés par l'analyse fréquentielle de la géométrie d'un maillage comprennent entre autres la théorie des graphes, la vision par ordinateur, l'intelligence artificielle et le calcul de haute performance. Dans notre domaine, les analyses spectrales existantes sur les maillages sont appliquées à la compression, la paramétrisation, la segmentation, le remaillage, le lissage, l'indexation et la reconnaissance de forme, la reconstruction, l'application de texture ou encore le tatouage numérique. Parmi les travaux récapitulatifs de toutes ces applications, nous citerons notamment [Taub 00, Gots 03, Levy 06] et la très bonne vue d'ensemble proposée dans [Zhan 07].

Dans le cas de l'analyse d'un graphe, les méthodes classiques se heurtent à l'irrégularité de la connectivité de ses éléments. L'analyse spectrale d'un graphe est basée sur l'observation ou la manipulation des valeurs et des vecteurs propres de sa matrice d'adjacence, à savoir la matrice décrivant la connectivité des sommets du graphe. Celle-ci peut par ailleurs prendre différentes formes, voir [Zhan 07]. Cette matrice est souvent étroitement liée au laplacien du graphe, qui peut être vu comme une version combinatoire de l'opérateur de Laplace-Beltrami en géométrie riemannienne [Chav 96]. Partant de ce point de vue, Taubin a pu adapter la transformée de Fourier classique aux maillages triangulaires [Taub 95b, Taub 00], il applique sa méthode au débruitage des surfaces par le filtrage des hautes fréquences ; voir un exemple de débruitage en Figure 4.3. Beaucoup de travaux se sont développés ensuite à partir de ce plongement des données dans l'espace propre du laplacien des maillages, un état de l'art en est présenté dans [Sork 06]. Cependant, l'ensemble de ces travaux considère le 1-voisinage de chaque sommet du maillage, nous ne pouvons donc pas les appliquer à l'analyse globale des comportements géométriques des sommets du voisinage d'un sommet extraordinaire.

4.1.1.2 Notre cadre d'analyse

Notre but est d'analyser de manière fréquentielle l'ensemble de sommets réguliers constituant le voisinage d'un sommet extraordinaire d'intérêt. Ces sommets sont répartis sur une carte d'analyse polaire formée d'anneaux concentriques. Chacun d'eux porte une information : le gradient de courbure absolue estimé en ce sommet, puisque nous définissons cette mesure en partie 3.2.2.2 comme étant révélatrice des perturbations géométriques dues à un sommet extraordinaire.

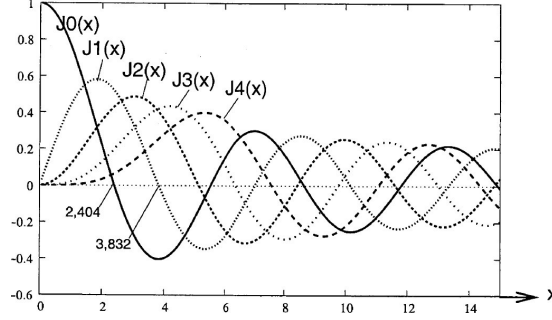
Contrairement aux approches précédemment citées, nous profitons de la configuration semi-régulière de notre support — voir la partie 2.3 à ce sujet — pour projeter directement nos données dans une base de fonctions polaires. Dans la plupart des cas, la forme des perturbations de courbure que nous étudions présente des symétries et des oscillations. Ce phénomène est bien connu pour certains artefacts [Pete 04]. Ainsi, notre intuition est de plonger nos données dans une base de fonctions polaires oscillantes, telles que sont les sinusoides dans la transformée de Fourier classique. Nous effectuons donc une analogie entre le comportement des données de courbure de la surface autour du sommet extraordinaire et celui des modes de vibration d'une membrane circulaire élastique, voir Figure 4.1. Le point de vue physique de ces membranes est détaillé dans l'ouvrage [Cour 89]. En effet, ces modes forment la base naturelle d'une analyse spectrale de Fourier en coordonnées polaires. Elle permet de caractériser à la fois les oscillations radiales et angulaires d'une membrane.

Il nous est offert deux choix distincts concernant le plongement des données dans la base de fonctions polaires. Le premier est de construire une base de fonctions discrètes adaptées à la topologie de nos données, le deuxième est d'échantillonner directement ces fonctions continues de la base par rapport à cette topologie particulière. Ces deux approches sont différentes mais elles produisent en théorie les mêmes résultats si le nombre d'échantillons est suffisamment élevé. La première approche est en fait basée sur la projection des données sur les vecteurs propres de leur laplacien, tout comme les travaux de Taubin cités précédemment ; nous nous éloignons alors des modes de vibration des membranes. La deuxième approche, par contre, peut conduire à de mauvais résultats si les fonctions continues de la base sont sous-échantillonnées, elle offre cependant plus de flexibilité et est plus proche de notre intuition de départ. Nous choisissons de retenir la deuxième possibilité, les fonctions discrètes que nous choisissons d'utiliser constituent donc un échantillonnage des fonctions continues de la base selon la topologie particulière de notre carte d'analyse.

4.1.2 Une base de fonctions polaire

La base de fonctions polaire que nous avons choisi, à savoir les modes propres de vibration d'une membrane circulaire élastique, est l'expression directe de la base de fonctions sinusoidales de l'analyse de Fourier en coordonnées polaires. Les fonctions de Bessel, sur lesquelles est basée leur expression, sont très utilisées en physique des ondes : électromagnétisme, communications numériques etc. Une autre base de fonctions polaire aurait constitué un choix difficile à justifier, et se serait de plus éloigné de la modélisation physique concrète que constituent les modes de vibration d'une membrane élastique.

Ainsi, les modes propres d'une membrane circulaire élastique sont exprimés au moyen des fonctions de Bessel de première espèce. Les fonctions de Bessel discrètes — ou fonctions de Hankel — ne sont pas directement applicables ici en conséquence de la topologie particulière de nos données. À noter que ces modes possèdent un bord contraint, les fonctions de la base y sont nulles.

FIG. 4.4 : Les premières fonctions de Bessel $\mathcal{J}_m(r)$.

Soit donc une base de fonctions continues correspondant aux modes propres de la membrane, $\mathcal{G}_{mn} : [0, \mathcal{R}] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{C}$, où les entiers $m \geq 0$ et $n > 0$ repèrent respectivement les modes angulaires et radiaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{mn}(r, \varphi) &= \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) e^{-jm\varphi} , \\ \text{avec } \lambda_{mn} &= \left(\frac{s_{mn}}{\mathcal{R}} \right)^2 , \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $\mathcal{J}_m$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m , voir Figure 4.4 :

$$\mathcal{J}_m(r) = \left(\frac{r}{2} \right)^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! (m+p)!} r^{2p} , \quad (4.2)$$

et s_{mn} est son n -ième zéro, $\mathcal{R}$ étant le rayon de la membrane.

Ces fonctions forment une base orthonormée selon le produit scalaire suivant,

$$\mathcal{G}_{mo}(r, \varphi) \cdot \mathcal{G}_{mp}(r, \varphi) = \sum_{r, \varphi} \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mo}}r) \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mp}}r) \cos(m\varphi)^2 = \delta_{o,p} . \quad (4.3)$$

Les données de courbure portées par les sommets sont notées tout comme précédemment $c(r, \varphi)$, où $r \leq \mathcal{R}$. La projection de celles-ci dans la base fréquentielle génère un spectre complexe angulaire en m et radial en n . Nous notons la partie réelle du spectre $\mathcal{A}_{mn}$ et sa partie imaginaire $\mathcal{B}_{mn}$. Les fonctions de base continues sont donc échantillonnées selon les coordonnées (r, φ) de notre disque d'analyse. Nous discrétisons le calcul de cette projection comme suit,

$$\mathcal{A}_{mn} = \sum_{r, \varphi} c(r, \varphi) \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos(m\varphi) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{B}_{mn} = \sum_{r, \varphi} c(r, \varphi) \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin(m\varphi) \quad (4.5)$$

$$\mathcal{M}_{mn} = \sqrt{\mathcal{A}_{mn}^2 + \mathcal{B}_{mn}^2} . \quad (4.6)$$

La projection dans cette base des données de courbure portées par les sommets de la carte d'analyse polaire nous permet d'analyser les comportements de la courbure de façon fréquentielle. Dans notre cadre d'analyse, nous étudierons en particulier le module du spectre $\mathcal{M}_{mn}$.

Une reconstruction des données à partir du spectre serait décrite par l'équation suivante,

$$c(r, \varphi) = \sum_{m, n} \mathcal{A}_{mn} \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos(m\varphi) + \mathcal{B}_{mn} \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin(m\varphi) . \quad (4.7)$$

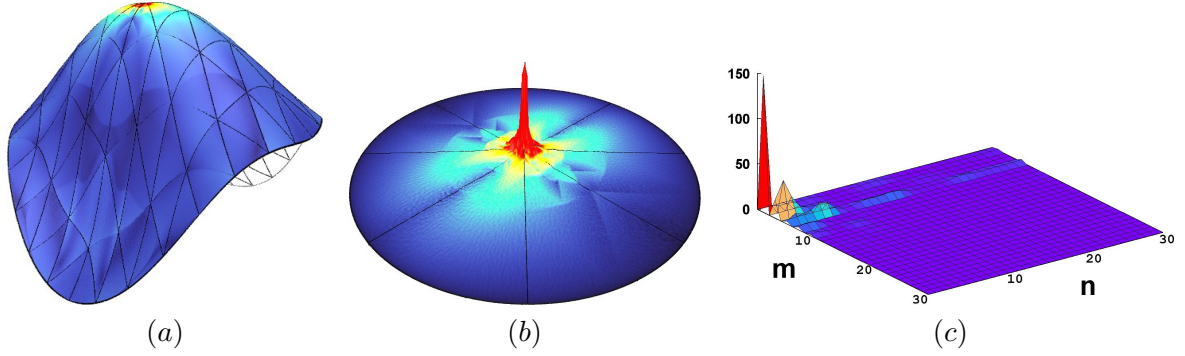


FIG. 4.5 : Les trois étapes de notre chaîne de traitements : (a) le relevé de gradient de courbure absolue sur un modèle de valence 8. Nous visualisons ces données en (b) sur une carte de données polaire par surface focale. En (c) nous analysons le module du spectre $\mathcal{M}_{mn}$ obtenu par le plongement des données de la carte dans la base de fonctions polaire.

4.2 Applications et résultats

La Figure 4.5 illustre notre chaîne de traitements pour l'analyse des artefacts : nous adaptons tout d'abord nos relevés de gradient de courbure absolue sur une carte de données polaire normalisée, voir en partie 3.2.3. Son rayon $\mathcal{R}$ est relatif au 1-voisinage subdivisé du sommet extraordinaire du maillage de contrôle, dans cet exemple nous utilisons 7 itérations du schéma dyadique de Loop, donc $R = 2^7$ (voir en partie 3.2.3.1). Ces données $c(r, \varphi)$ sont ensuite projetées dans la base de fonctions polaire (4.4), nous obtenons alors un spectre angulaire m et radial n dont nous évaluons le module $\mathcal{M}_{mn}$.

D'un point de vue pratique, nous utilisons l'échantillonnage des fonctions de Bessel proposé par la librairie *GNU Scientific Library* [Goug 03], ceci afin de garantir un haut degré de précision des applications numériques.

Nos fonctions sont donc discrétisées selon la topologie d'une carte de données polaire. De façon tout à fait classique, nous rendons la base de fonctions orthonormée — selon le produit scalaire (4.3) — en normalisant les données par le facteur adapté, facteur dépendant du nombre de nos échantillons. L'échantillonnage des modes de vibration de la membrane donne lieu à un ensemble de valeurs $\mathcal{G}_{mn}(r, \varphi)$ que nous précalculons. L'analyse fréquentielle des données de la carte polaire revient à projeter ces données dans la base des fonctions de mode. La projection des données sur un mode $\mathcal{G}_{mn}$ prend donc la forme d'une somme où chaque terme est le produit d'une des données de la carte polaire $c(r, \varphi)$ avec la valeur de la fonction de mode $\mathcal{G}_{mn}$ en (r, φ) précalculée précédemment. Le tout étant modulé par une exponentielle complexe (4.1), la construction des données fréquentielles réelles $\mathcal{A}_{mn}$ et imaginaires $\mathcal{B}_{mn}$ prend en compte une modulation sinusoïdale déphasée, voir (4.4) et (4.5).

Dans un premier temps, nous proposons d'évaluer la robustesse et la précision des mesures obtenues sur l'analyse d'exemples particuliers. Ceci car la méthode implique une somme sur un grand nombre d'échantillons, le risque du report d'erreur est donc important pour nos applications numériques. Nous aborderons ensuite l'objet de cette analyse spectrale, à savoir la caractérisation d'un artefact mis en évidence par un relevé du gradient de courbure absolue sur une carte de donnée polaire.

À noter que, dans nos exemples d'application, nous séparons les fréquences radiales pures $m = 0$ des autres, car leur ordre de grandeur est généralement bien supérieur.

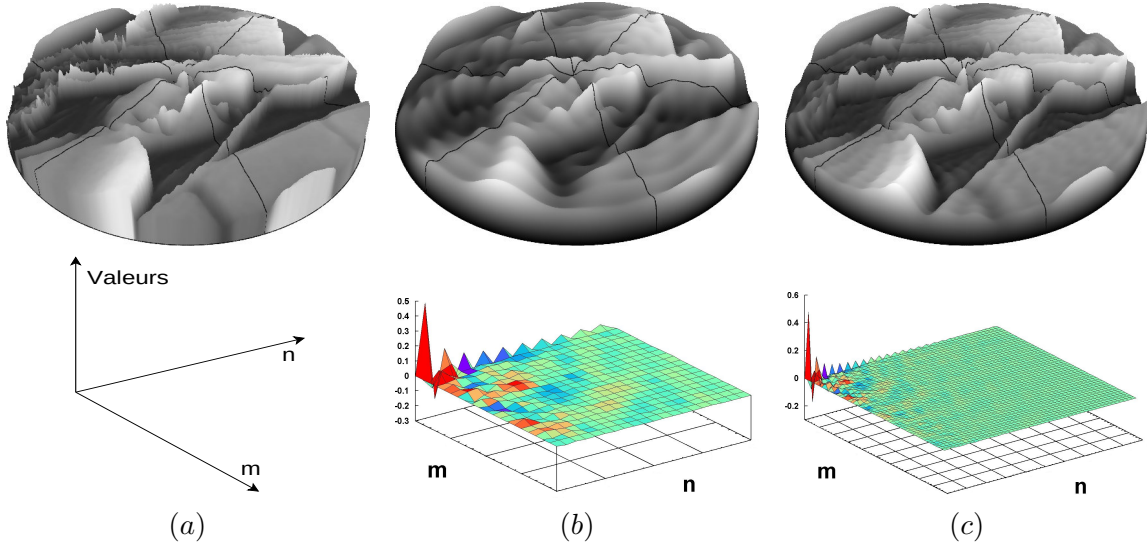


FIG. 4.6 : Sur cet exemple nous reprenons la géométrie d'une image de Lena, où aucune symétrie polaire n'est apparente. En conséquence, les spectres analysés contiennent un grand nombre de hautes fréquences. Nous visualisons sur la deuxième ligne en (a) le repère de visualisation du spectre (m, n) , en (b) le spectre réel contenant 20 bandes de fréquences et en (c) 50. Sur la première ligne, nous visualisons la reconstruction de l'image à partir des modes obtenus, 20 bandes en (b) et 50 en (c). La reconstruction est plus proche de l'image originale lorsque que le nombre de modes pris en compte augmente (environ $\pm 5\%$ d'erreur pour 50 bandes).

4.2.1 Validation de l'analyse

4.2.1.1 L'échantillonnage des fonctions de base continues

Comme exposé précédemment, l'analyse spectrale d'une carte de données polaire est fondée sur le plongement de données discrètes dans une base de fonctions continues. Ceci pose donc un problème au niveau de leur échantillonnage : les mesures fréquentielles seront nécessairement imprécises. En plus de cela, le plongement (4.4) implique une somme des données. Leur nombre est élevé dans notre cadre d'analyse, nous faisons donc face à une somme d'imprécisions numériques importante. Afin d'évaluer l'impact de ces deux problèmes, nous proposons d'analyser de façon fréquentielle un ensemble de formes simples.

L'analyse d'une forme quelconque, sans symétrie polaire apparente, produit un spectre contenant beaucoup de hautes fréquences, voir Figure 4.6. Sur ce même exemple, nous vérifions également la qualité de la reconstruction des données par rapport au nombre de bandes de fréquences (m, n) prises en compte.

En Figure 4.7, nous analysons le spectre de plusieurs formes différentes. Comme prévu, l'analyse des modes purs montre que notre base de fonctions est correctement normalisée. L'analyse de formes simples ayant certaines symétries radiales et angulaires est également concluante : les modes purs sont parfaitement analysés et le sinus cardinal, ressemblant beaucoup au mode pur $(0, 4)$, présente en effet cette fréquence dominante dans le spectre que nous obtenons. Dans ces exemples, les formes sont analysées à travers 20 bandes de fréquence radiales et angulaires.

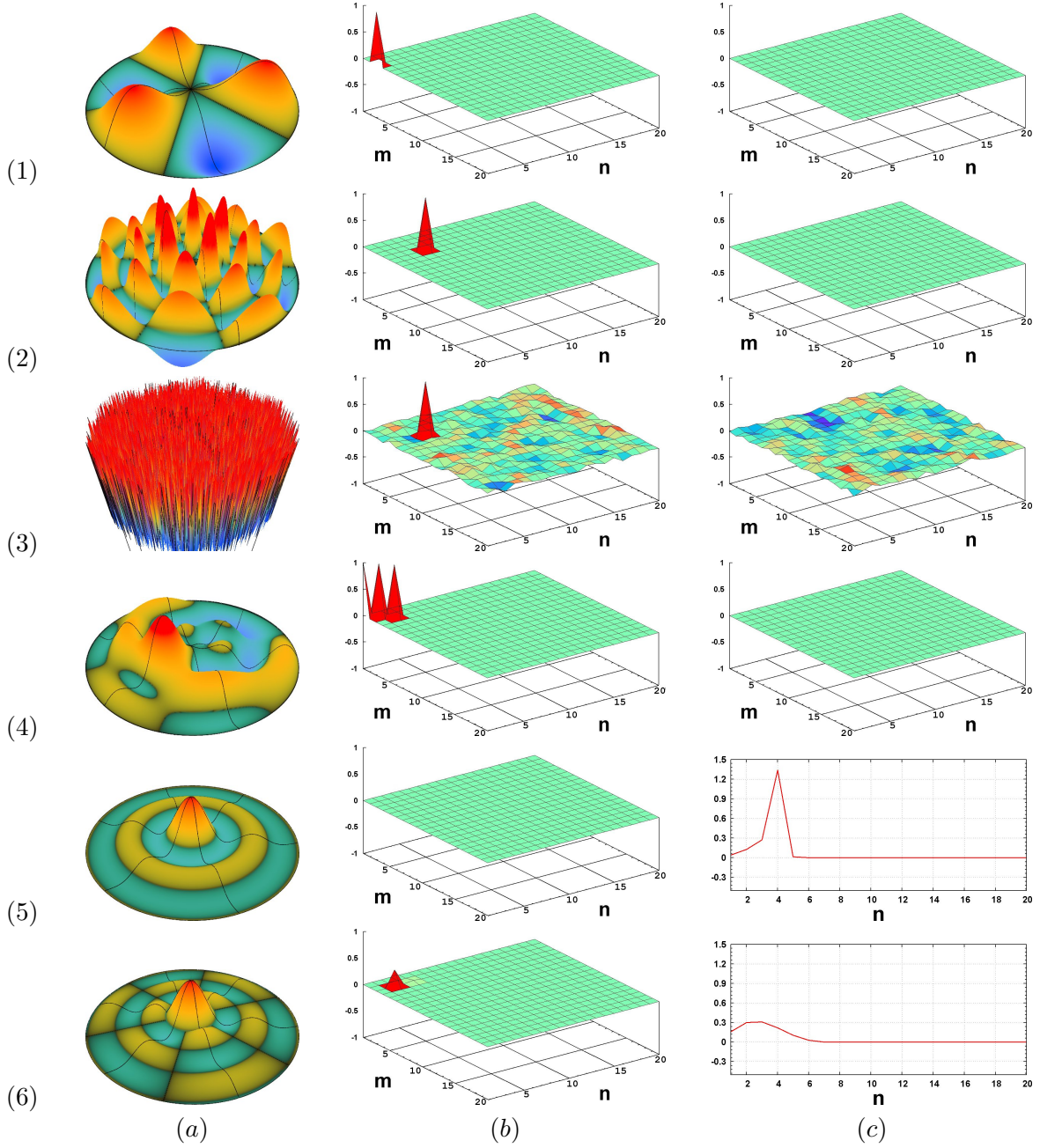


FIG. 4.7 : Nous évaluons ici l'application de l'analyse spectrale polaire sur différents exemples. De haut en bas : (1.a) le mode réel pur (3,1), (1.b) son spectre réel et (1.c) imaginaire : le spectre correspond bien aux données analysées. (2) De même pour le mode réel pur (5,5) et (3) ce même mode très bruité. En (4) le mélange des modes réels (1,1), (2,2) et (3,3) est également correctement analysé. Sur les deux dernières lignes, nous traitons des formes possédant une certaine symétrie polaire : (5) un sinus cardinal puis en (6) la même fonction modulée de façon angulaire. Pour ces deux lignes, nous visualisons en (b) le module du signal et en (c) la valeur des modes $(0,n)$ — mesure peu pertinente concernant (1) à (4) —. Une fois encore, les spectres obtenus correspondent bien aux formes analysées : les modes purs $(0,4)$ et $(3,3)$.

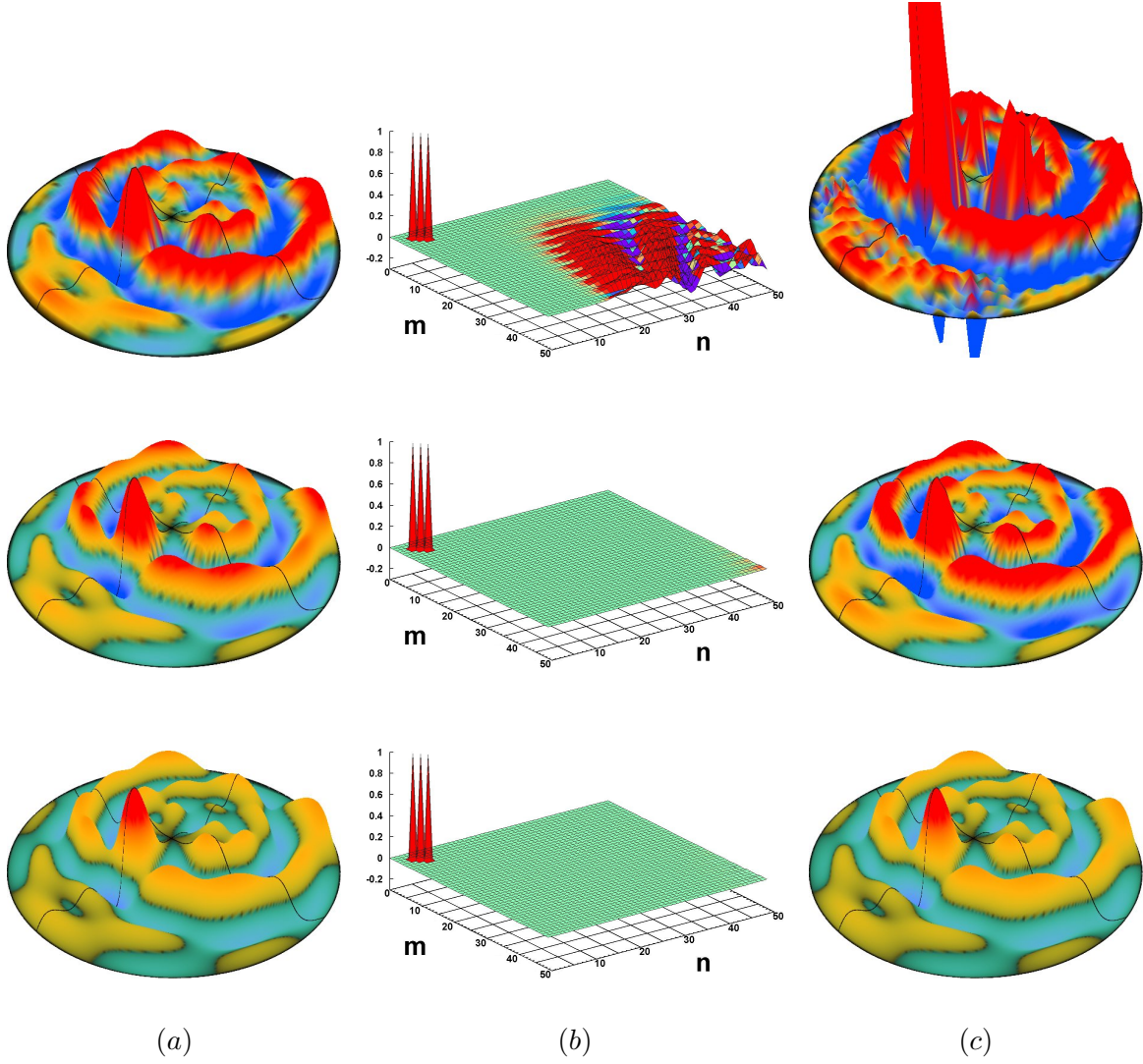


FIG. 4.8 : Nous illustrons ici le phénomène de recouvrement des fonctions de modes lors de leur sous-échantillonnage. Nous considérons en (a) une forme correspondante à la somme des trois modes purs réels $(3, 3)$, $(4, 4)$ et $(5, 5)$. De haut en bas, notre carte polaire est composée de 32, 64 et 128 anneaux, elle est centrée sur un sommet de valence 4. Nous considérons la carte de 128 anneaux comme étant un bon support d'échantillonnage de cette base de fonctions. L'erreur de reconstruction est ici de l'ordre de 20% pour 32 anneaux, 5% pour 64 et $< 1\%$ pour 128. Nous visualisons en (b) le spectre analysé et en (c) le résultat du procédé de reconstruction.

La reconstruction présentée en Figure 4.6.c, effectuée selon (4.7), est imprécise pour cette raison : une analyse parfaite prendrait en compte une infinité de modes. Nous montrons qu'une analyse sur 50 bandes de fréquences permet, pour nos exemples, une meilleure analyse. Outre cette question, les fonctions de modes discrétisées se recouvrent lorsque les échantillons sont en nombre insuffisant, voir une étude comparative en Figure 4.8. Dans notre cadre d'étude, nous estimons que 128 anneaux de sommets constituent un échantillonnage relativement bon (128 anneaux correspondent à sept itérations d'un processus de subdivision dyadique sur le 1-voisinage d'un sommet).

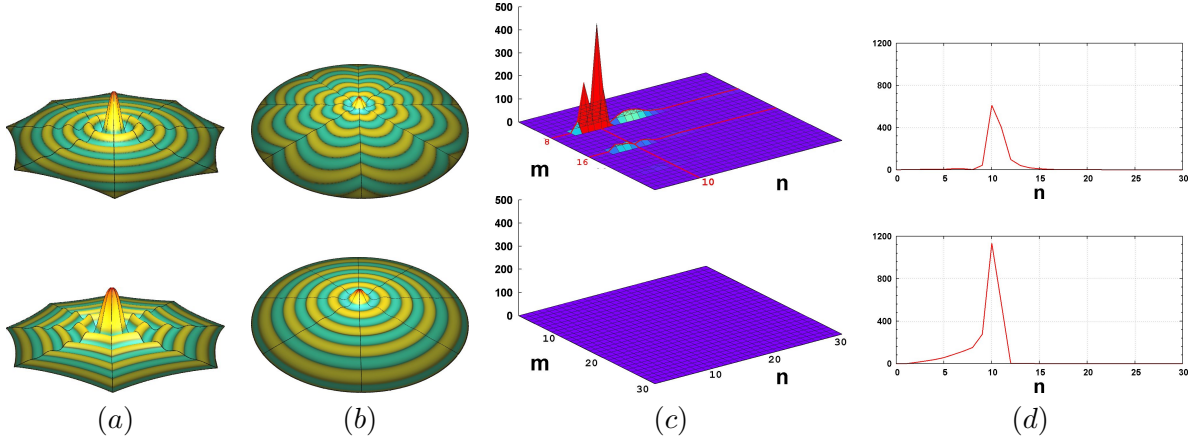


FIG. 4.9 : Nous illustrons ici, sur la première ligne, les conséquences de la déformation géométrique de la carte caractéristique du schéma vers la carte polaire uniforme. En (a) nous illustrons des données reproduisant un phénomène relatif à la géométrie du modèle : un sinus cardinal (10 oscillations radiales) relatif à la distance géométrique des sommets par rapport au sommet central (de valence 8). En (b), nous visualisons sa carte de données. Le spectre M_{mn} en (c) présente des oscillations angulaires créées par la transformation du repère. Nous nous attendions à mesurer un spectre proche de la fréquence pure radiale (0,10), la transformation ajoute de hautes fréquences proportionnelles à la valence du sommet, c'est-à-dire pour $m = 8, 16$ etc. Sur la deuxième ligne, nous illustrons le fait que notre analyse est basée sur des phénomènes liés à la distance topologique au sommet extraordinaire.

4.2.1.2 La question posée par la distorsion géométrique du repère polaire

Comme exposé en partie 3.2.3.1, la carte de données polaire est construite par rapport aux arêtes du maillage subdivisé. Nous prenons en compte une distance “topologique” des sommets du voisinage par rapport au sommet extraordinaire, non leur distance “géométrique” sur la carte caractéristique, voir Figure 4.9. Le fait de prendre en compte ce repère topologique normalisé nous apporte l’avantage de la comparaison immédiate du comportement des schémas, puisque la forme des cartes de données ne dépendent que de la valence du sommet extraordinaire (voir la figure 3.22 à ce sujet). De fait, les résultats d’une analyse fréquentielle sur ce support sont directement comparables d’un schéma de subdivision à l’autre. De plus, comme exposé en parties 3.2.3 et 3.2.4.2, nous pensons que les artefacts tendent à suivre les arêtes du maillage, nous considérons donc que leur forme est peu influencée par la notion de distance géométrique avec le sommet extraordinaire. Ainsi, notre base de fonctions est conçue pour l’analyse de motifs tels que présenté en Figure 4.9.a sur la deuxième ligne.

Une question se pose alors pour l’analyse fréquentielle : si la prise en compte topologique d’une perturbation ne correspond pas à son aspect géométrique réel sur le maillage subdivisé, la mise en forme des données sur une carte de données polaire peut-elle être à l’origine de fréquences non pertinentes dans les spectres mesurés ? Nous illustrons en Figure 4.9 le fait que, si un relevé de données présente une perturbation purement géométrique, sa prise en compte topologique peut induire de nouvelles fréquences angulaires relatives à la valence du sommet extraordinaire (première ligne de la Figure 4.9). Dans la plupart des tests que nous avons menés, les spectres analysés ne présentent pas particulièrement de hautes fréquences angulaire pour les valeurs de m proportionnelles à la valence du sommet d’intérêt. Nous illustrerons cependant par la suite en Figure 4.17 un cas de maillage de contrôle particulier où ce phénomène se produit.

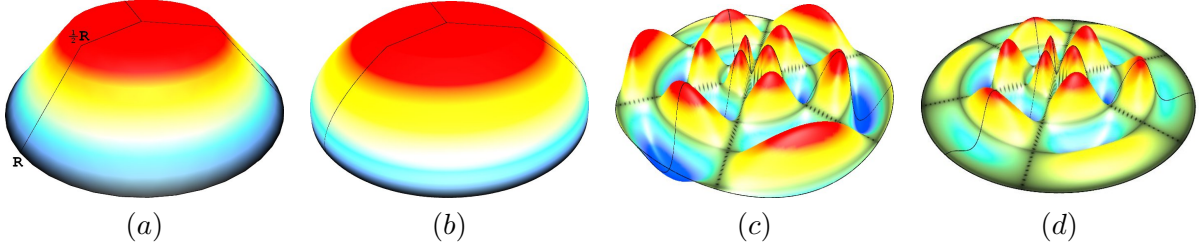


FIG. 4.10 : La fonction d'apodisation choisie (a) est unitaire puis linéairement décroissante vers zéro à partir de $\frac{1}{2}R$. Son spectre est très proche de celui du mode propre $(0,1)$. La fonction d'apodisation d'ordre 2, $k = \frac{1}{2}$, ne présente pas de réelle différence dans les résultats. En (c) un mélange de sinusoïdes que nous multiplions en (d) avec cette fonction.

4.2.2 Application de l'analyse fréquentielle à la caractérisation des artefacts

Comme exposé en partie 3.2.3, l'intérêt de mesurer le gradient de courbure absolue permet de mettre en évidence un artefact provoqué par la présence d'un sommet extraordinaire. Cette mesure est donc faible au bord des cartes de données polaires, où les sommets en sont éloignés. Cependant, ce gradient n'est généralement pas nul en dehors du voisinage d'un sommet extraordinaire, c'est-à-dire dans les zones régulières du maillage subdivisé. Ce facteur est par ailleurs très dépendant de la géométrie analysée. Or, notre base de fonctions décrit les modes propres de vibration d'une membrane élastique à bord contraint ; l'analyse par cette méthode d'une membrane à bord quelconque n'a donc pas de sens. Nous proposons donc d'apodiser nos données avant de leur appliquer notre analyse fréquentielle.

4.2.2.1 Apodisation des données pour une analyse à bord contraint

Ainsi, nous souhaitons une fonction d'apodisation $\mathcal{A}(r, \varphi)$ nulle au bord du disque d'analyse, de sorte que la multiplication de celle-ci avec nos données $c(r, \varphi)$ produise un résultat que nous pourrions analyser par une base de fonctions à bord contraint. Cette fonction, une fois appliquée aux données, ne doit pas induire de forte perturbation fréquentielle. Le cas particulier d'une fonction porte unitaire partout et nulle au bord est un mauvais exemple de fonction d'apodisation, son utilisation conduirait à l'introduction de hautes fréquences sans relation avec le relevé de données que nous souhaitons analyser. Conformément à notre cadre d'étude, nous souhaitons évaluer le spectre d'un relevé de courbure polaire présentant une perturbation en son centre et très peu d'information en périphérie. De fait, nous souhaitons conserver la totalité de l'information du signal proche de ce centre — ce qui exclut les fenêtres d'apodisation classiques telles que la fenêtre gaussienne ou celle de Hamming. Aussi, soit la fonction d'apodisation polaire $\mathcal{A}(r, \varphi)$ telle que :

$$\mathcal{A}(r, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in \llbracket 0, \frac{1}{2}\mathcal{R} \rrbracket \\ \frac{(\mathcal{R} - r)^k}{(\frac{1}{2}\mathcal{R})^k} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.8)$$

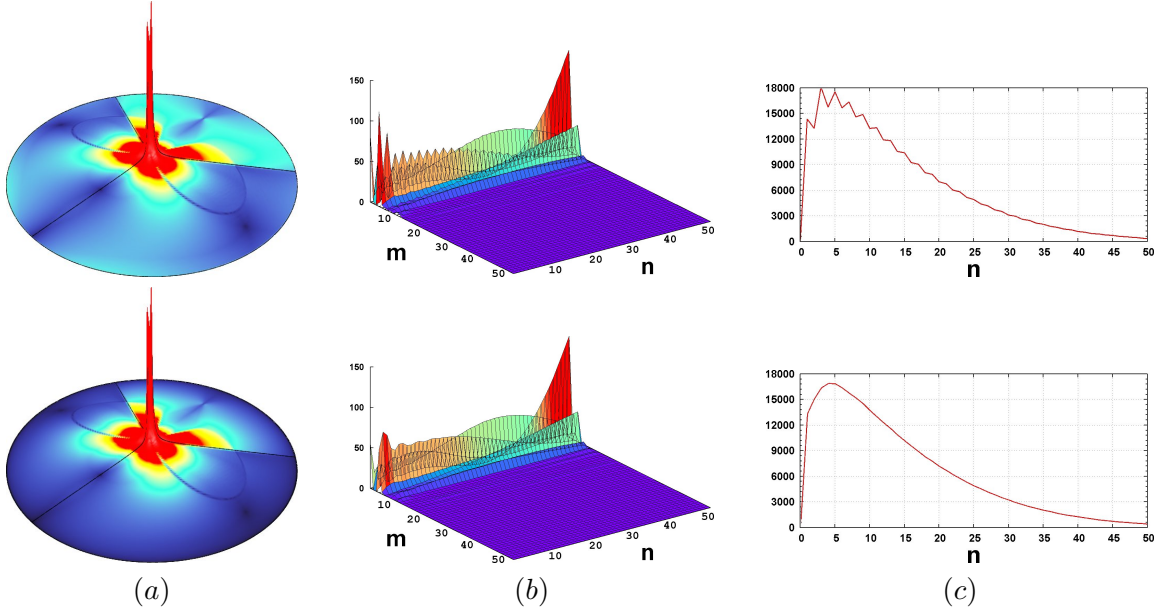


FIG. 4.11 : Nous évaluons ici la géométrie en selle de cheval à valence 3 rencontrée précédemment, subdivisée avec le schéma de Loop (les sommets ordinaires sont donc de valence 6). Nous visualisons en (a) sa carte de données polaire que nous apodisons sur la deuxième ligne afin de pouvoir effectuer une analyse fréquentielle cohérente, en (b). En (c) sont visualisées les fréquences radiales pures ($m = 0$), dont l'amplitude est bien plus élevée que les autres. Nous constatons que sans apodisation, les mesures sont perturbées.

où k est la puissance de la fonction polynomiale décroissante vers zéro. En pratique, les résultats ne sont que peu influencés par ce facteur, nous choisissons donc une fonction décroissante linéaire : $k = 1$, voir Figure 4.10. Cette fonction est choisie de telle manière à ne pas perturber l'information du relevé de données proche du centre, elle n'affecte pas la première moitié des anneaux du disque, c'est-à-dire pour $r \leq \frac{1}{2}\mathcal{R}$.

Nous évaluons la perturbation fréquentielle induite par cette fonction d'apodisation en Figure 4.11. La forme globale du spectre est conservée, aucune autre fréquence n'est ajoutée, ce qui était notre objectif. Nous constatons également que le spectre d'une carte sans apodisation est très perturbé, les valeurs semblent osciller pour les fréquences angulaires faibles : $m = 0, 1$. Ce comportement est provoqué par la difficulté de décrire une forme non contrainte au bord par la base de fonctions que nous avons choisie. En effet, les valeurs du bord de la carte n'ont pas d'influence directe sur le spectre puisque leur plongement conduit à des valeurs nulles. Par contre, les valeurs des rayons précédents en ont une, ce qui revient à décrire une forme présentant une marche abrupte des valeurs au bord (selon le rayon de l'anneau). Le problème est le même en analyse de Fourier, l'analyse d'une fonction porte carrée donne lieu à de fortes oscillations. La phase d'apodisation conduit à un spectre bien plus homogène — sur la deuxième ligne de la Figure 4.11 —, puisque les données sont désormais cohérentes avec l'analyse fréquentielle.

Comme exposé précédemment, nous choisirons de représenter les fréquences radiales pures $m = 0$ à part, car leurs valeurs sont bien plus importantes que celles des autres fréquences. En effet, elles décrivent essentiellement la zone de valeurs très élevées localisées au centre de la carte, très proche de la discontinuité de courbure provoquée par le sommet extraordinaire, voir la Figure 4.12. Ceci car il s'agit des seuls modes propres non nuls au centre du repère.

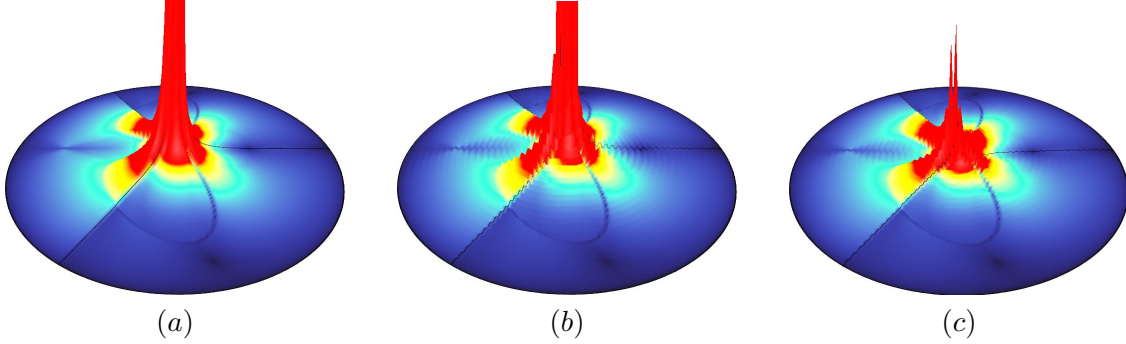


FIG. 4.12 : Nous illustrons ici le rôle prédominant des fréquences radiales pures $m = 0$. Elle sont principalement responsables de la caractérisation des fortes perturbations de courbures présentes au voisinage direct d'un sommet extraordinaire. En (a) un exemple d'artefact, nous le reconstruisons en (b) d'après son spectre — le modèle présente alors de faibles oscillations — , et en (c) d'après ce même spectre sans les fréquences radiales pures.

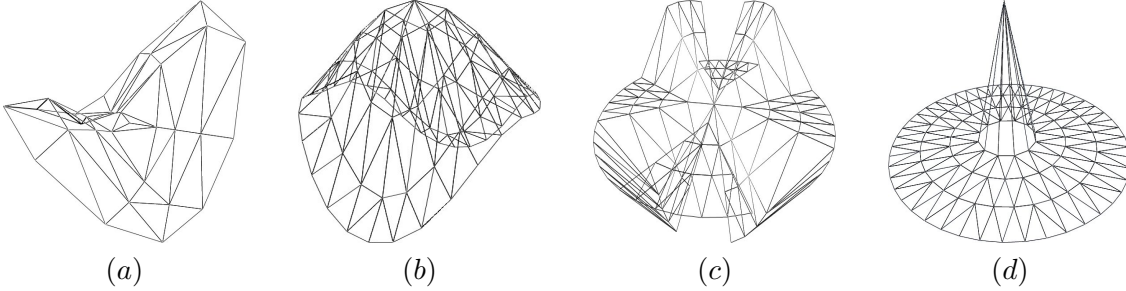


FIG. 4.13 : Quatre maillages de contrôle que nous utilisons pour nos tests : (a) un paraboloïde hyperbolique où le sommet extraordinaire est de valence 3, (b) un paraboloïde à valence 8, (c) une forme un peu plus complexe à valence 12 et en (d) un pic à valence 12.

4.2.2.2 Évaluation du comportement des schémas de subdivision

Cette analyse fréquentielle permet d'établir une mesure de la forme de la perturbation de courbure observée au voisinage d'un sommet extraordinaire : le spectre complexe de module $\mathcal{M}_{mn}$. Contrairement à l'analyse qualitative visuelle, ce spectre constitue un ensemble de données que nous pouvons évaluer numériquement, tout comme la mesure d'énergie (3.33) proposée dans la partie dédiée à la comparaison du comportement de plusieurs schémas de subdivision 3.2.4.1. Nous pouvons donc comparer rigoureusement deux cartes de données polaires à travers leur spectre, quelles que soient les géométries étudiées ou les schémas utilisés.

Nous présentons quatre exemples de comparaison de schéma en Figure 4.14, Figure 4.15, Figure 4.16 et Figure 4.17, chacun pour une valence de sommet extraordinaire et une forme donnée, voir Figure 4.13. Ces formes sont très différentes les unes des autres, c'est pourquoi nous les avons choisies pour les tests que nous présentons ici. Les schémas de Loop tunés par Karčiauskas et al. [Karc 04], Barthe et Kobbelt [Bart 04] ainsi que Gérot et al. [Géro 10] présentent généralement un comportement différent du tuning original de Loop. Nous proposons ici de caractériser leur comportement au moyen de l'analyse fréquentielle des cartes polaires. Étant donné que la forme d'un artefact dépend de la géométrie du maillage de contrôle du modèle, une analyse exhaustive devrait prendre en compte un ensemble représentatif de toutes les formes possibles que peut prendre ce maillage. De la même façon, le comportement des schémas est influencé par la valence du sommet extraordinaire étudié. Nous pouvons cependant déterminer certains comportements représentatifs de chaque schéma.

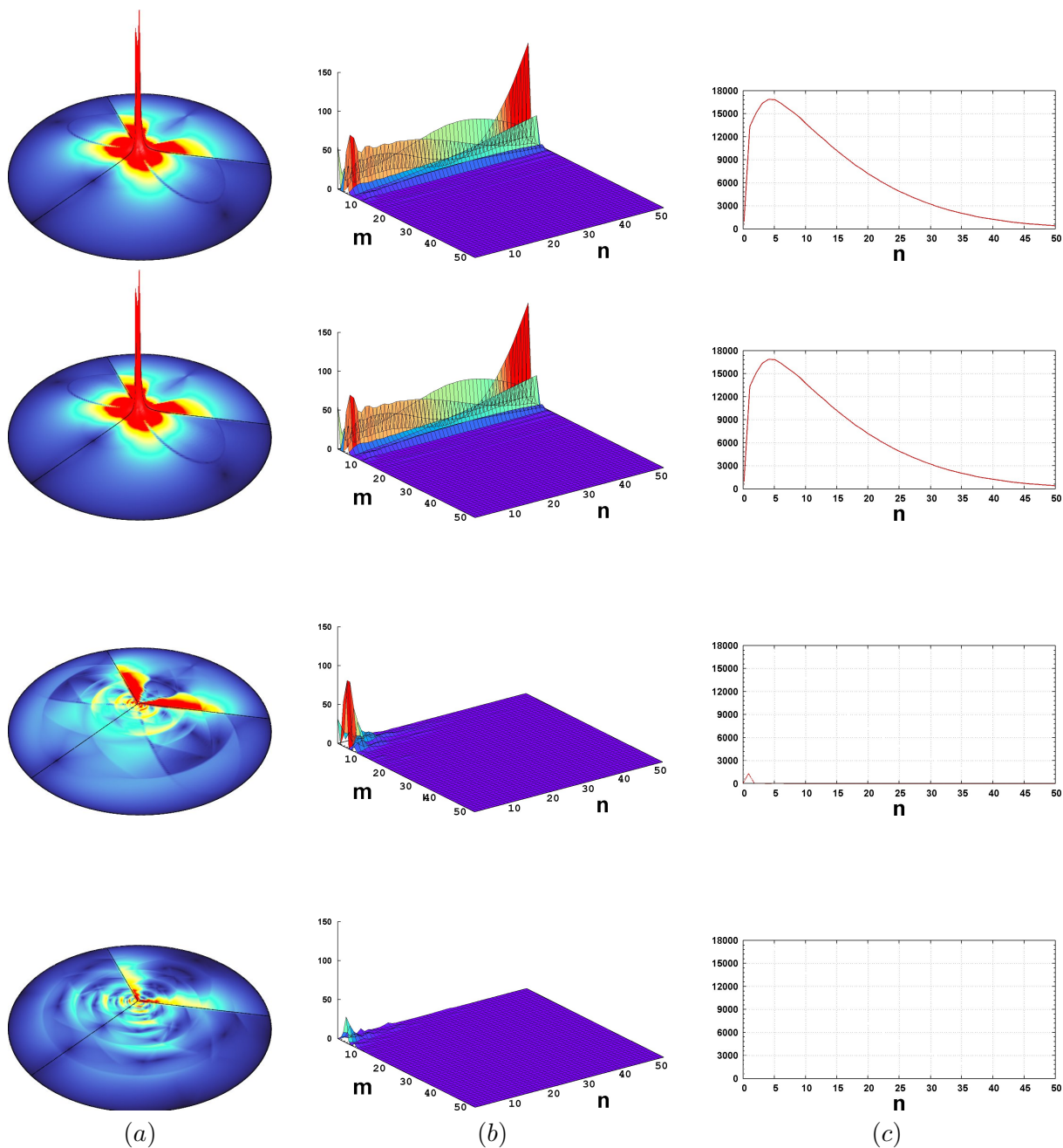


FIG. 4.14 : Nous comparons le comportement de quatre schémas de subdivision sur le paraboloïde hyperbolique — le sommet extraordinaire central est de valence 3 —. Nous visualisons en (a) la carte polaire, en (b) le spectre M_{mn} et en (c) les fréquences radiales pures $(0, n)$. De haut en bas, nous évaluons les tuning de Loop original, de Karčiauskas et al. [Karc 04], de Barthe et Kobbelt [Bart 04] et de Gérot et al. [Géro 10] Les deux premiers sont difficilement discernables, tandis que les deux derniers réduisent fortement l'artefact : leur spectre contient beaucoup moins de hautes fréquences.

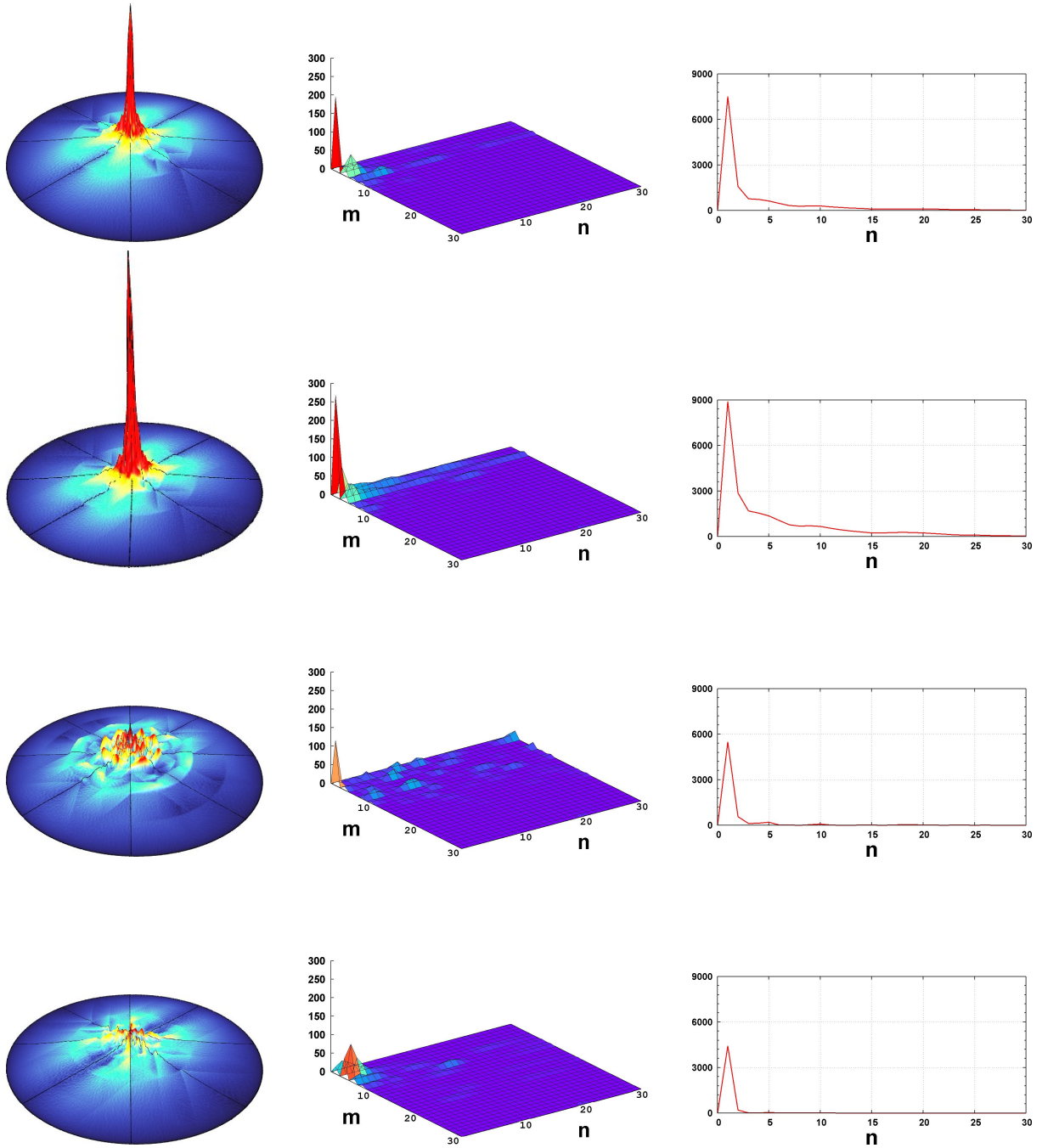


FIG. 4.15 : Nous analysons ici un modèle de paraboloïde de valence 8, montrant un artefact de type saddle effect (présenté en partie 3.2.2.1). Cette fois, le modèle subdivisé par le schéma de Karčiauskas et al. [Karc 04], sur la deuxième ligne, présente une perturbation plus importante que pour le schéma de Loop. Comme précédemment, les deux derniers schémas réduisent fortement l'artefact. Nous visualisons ici 30 bandes de fréquences par souci de clarté.

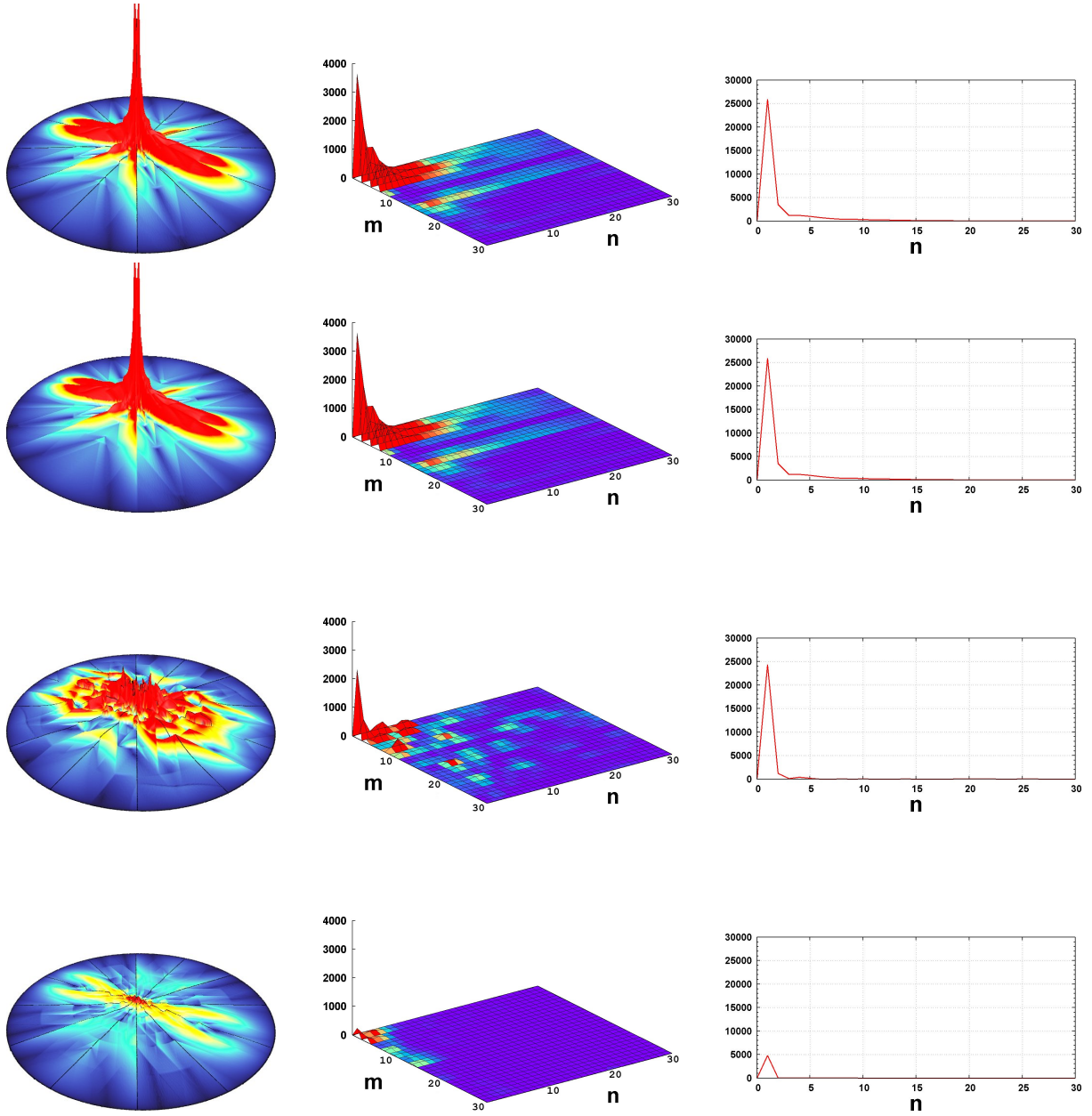


FIG. 4.16 : Analyse du modèle de géométrie complexe à valence 12 présenté précédemment à travers 30 bandes de fréquences. Les comportements des schémas de Loop, sur la première ligne, et de Karčiauskas et al. [Karc 04], sur la deuxième ligne, sont similaires. Le schéma de Barthe et Kobbelt [Bart 04] génère beaucoup de hautes fréquences angulaires tandis que celui de Gérot et al. [Géro 10] réduit fortement l'artefact.

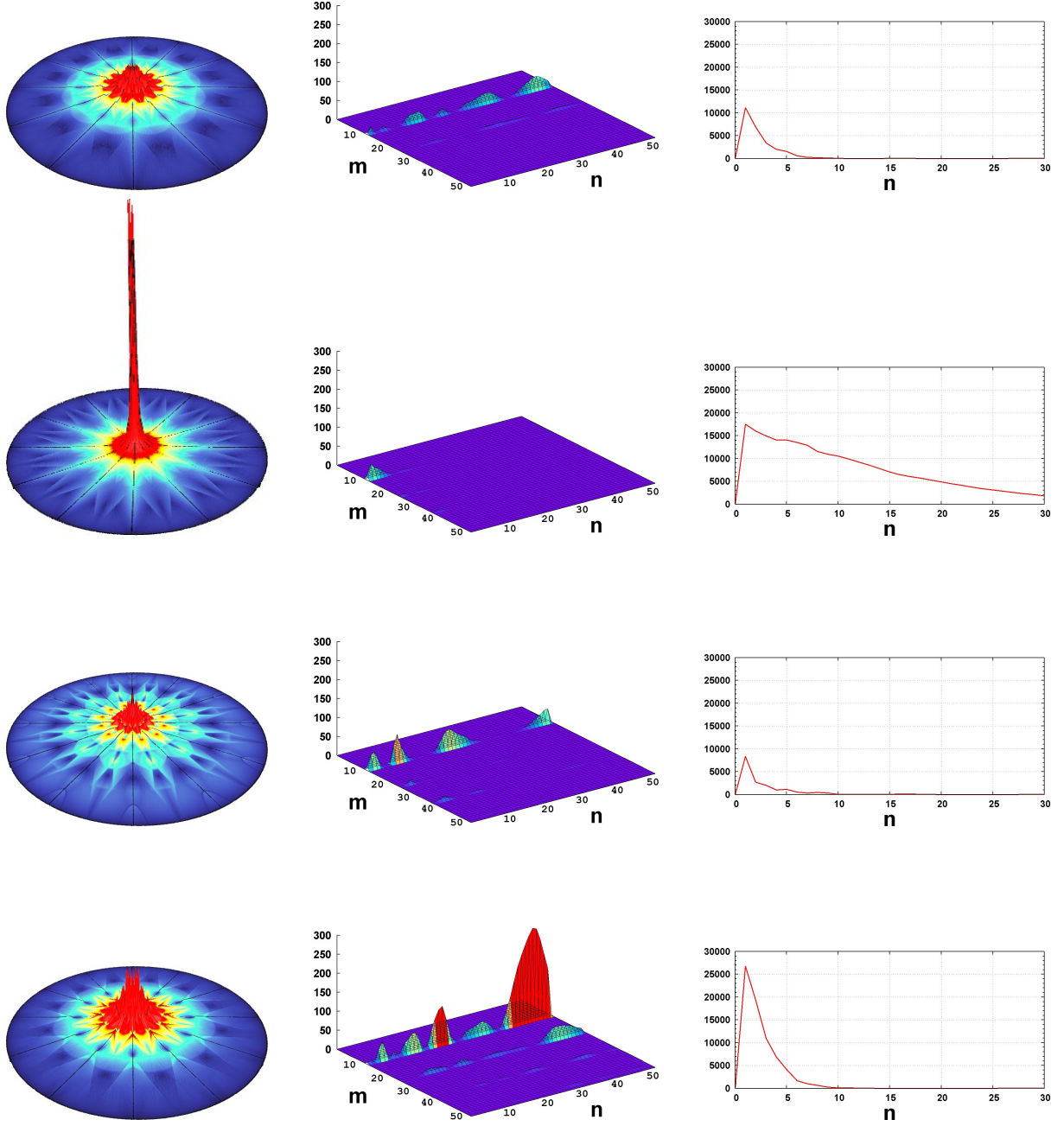


FIG. 4.17 : Analyse d'un modèle de pic à valence 12 à travers 50 bandes de fréquence. Le comportement des schémas est très différent, nous mettons en évidence de fortes fréquences angulaires correspondantes à la valence du sommet : $m = 12$. Cette fois, le schéma de Gérot et al. [Géro 10] (dernière ligne) génère le spectre contenant le plus de hautes fréquences. Le schéma de Karčiauskas et al. [Karc 04] (deuxième ligne) présente quant à lui un comportement très différent de celui de Loop (première ligne), son spectre contient moins de hautes fréquences pour $m = 12$ mais beaucoup plus pour la fréquence radiale pure $m = 0$.

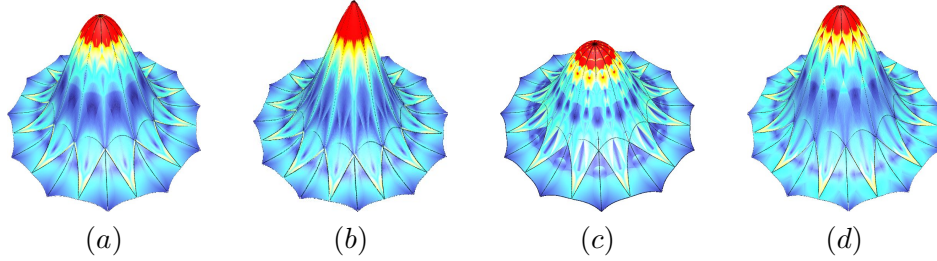


FIG. 4.18 : Le modèle du pic subdivisé par les schémas de Loop en (a), Karčiauskas et al. [Karc 04] en (b), Barthe et Kobbelt [Bart 04] en (c) et de Gérot et al. [Géro 10] en (d), la prise de vue est la même et nous visualisons les deux premiers anneaux du maillage de contrôle subdivisé. Les géométries se révèlent être très différentes.

En Figure 4.14.a est présenté un artefact généré par le schéma de Loop original sur un modèle de paraboloïde hyperbolique. Son spectre contient beaucoup de hautes fréquences radiales (n élevé) pour les bandes de fréquences angulaires m faibles. Comme exposé précédemment, ceci caractérise une forte perturbation de courbure localisée près du centre de la carte. Le schéma de Karčiauskas et al. [Karc 04] présente en général le même comportement global que celui de Loop : une forte perturbation très localisée près du centre de la carte. Les données fréquentielles sont alors localisées dans des bandes de fréquences angulaires faibles ($m \leq 2$). Les schémas de Barthe et Kobbelt [Bart 04] ainsi que Gérot et al. [Géro 10] se comportent globalement de la même façon : l'artefact central est réduit par rapport aux relevés des schémas précédents, mais la perturbation est plus étendue topologiquement parlant. En effet, dans le cas du schéma de Gérot et al., à chaque itération de subdivision, trois anneaux de sommets sont influencés par le sommet extraordinaire. Deux anneaux sont influencés pour les schémas de Barthe et Kobbelt et celui de Karčiauskas et al. et seulement un pour le tuning de Loop original. Il est ainsi logique que la perturbation soit parfois plus étendue à mesure que l'influence du sommet extraordinaire augmente en distance, ce comportement est bien visible en Figure 4.14.a pour les deux derniers schémas. Il ne s'agit pourtant pas d'un état de fait clairement établi, certains exemples de géométrie contredisent cette intuition, voir par exemple la Figure 4.15. Le schéma de Gérot et al., dont nous avons défini certains paramètres par rapport aux outils d'analyse présentés dans le chapitre précédent, présente la plupart du temps des artefacts très réduits en comparaison des autres schémas.

L'exemple présenté en Figure 4.17 est particulier, il s'agit d'une géométrie pour laquelle tous les schémas testés génèrent un comportement différent. Nous mettons en évidence de hautes fréquences angulaires pour des valeurs de m multiple de 12, qui est la valence du sommet. Il s'agit donc d'une distorsion géométrique périodique autour du sommet extraordinaire, voir les relevés des géométries en Figure 4.18. Cette fois, le schéma de Gérot et al. présente un spectre contenant plus d'énergie que ceux des autres schémas, ce cas ne nous est que rarement apparu dans nos tests. Le schéma de Karčiauskas et al. génère de fortes valeurs localisées près du centre de la carte, son spectre est très différent des autres : les fréquences sont presque exclusivement contenues dans la bande de fréquences radiales pures $m = 0$.

Nous retenons qu'une mesure pertinente de la qualité d'une géométrie subdivisée est contenue dans la première fréquence radiale pure $(0, 1)$. En effet, il est apparu dans tous nos tests que l'amplitude de cette valeur était révélatrice du reste du spectre, plus elle est élevée, plus le spectre contient d'énergie et donc plus l'artefact est marqué. Elle est souvent la valeur la plus élevée du spectre, l'ordre de grandeur de cette bande de fréquences est bien supérieur aux autres. Nous proposons donc un récapitulatif de ces valeurs particulières pour les quatre exemples précédents en Table 4.1.

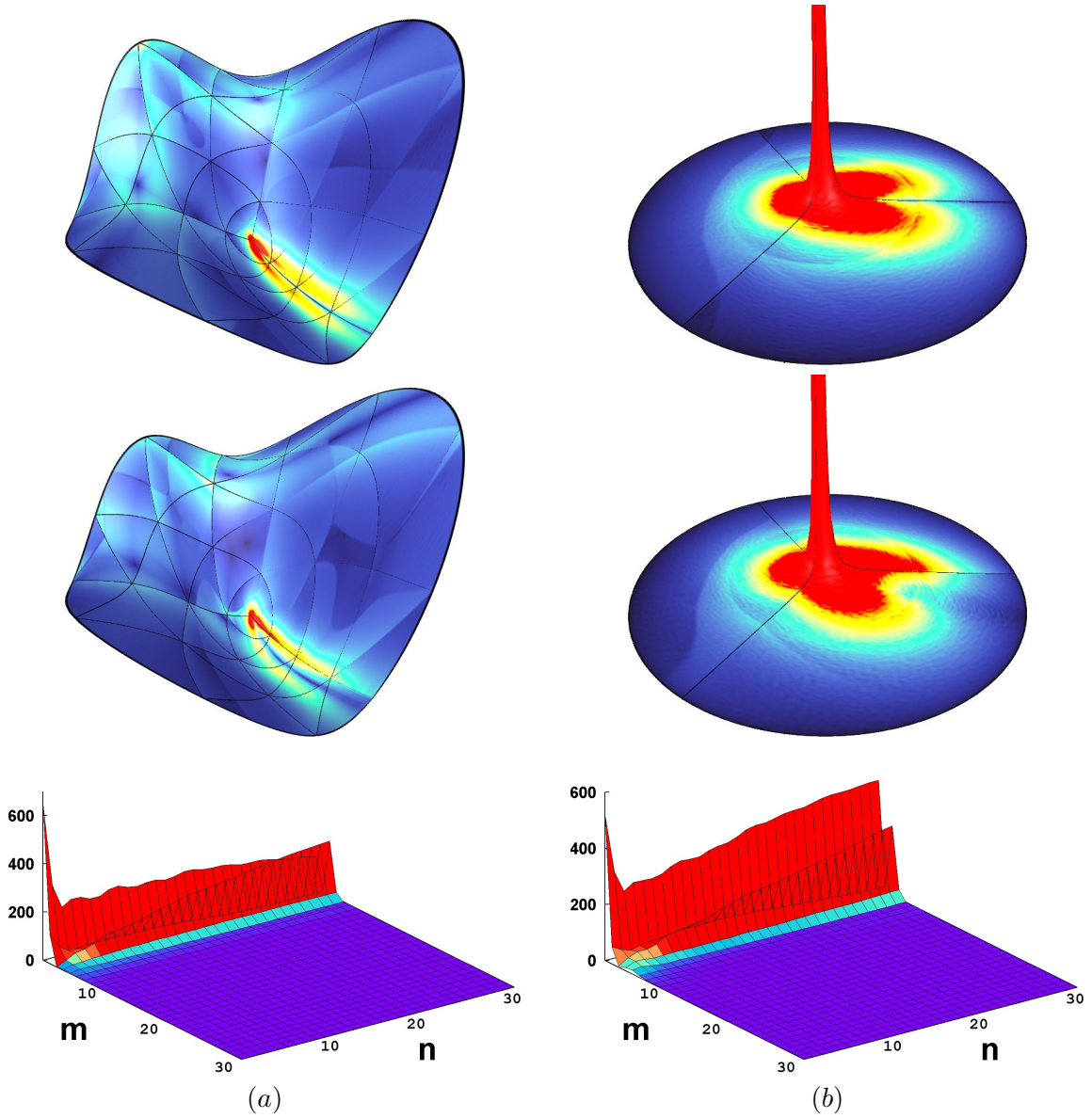


FIG. 4.19 : Exemple d'un mélange de sinusoides à valence 3 subdivisé par le schéma de Loop. Un léger changement dans la géométrie du maillage de contrôle peut provoquer d'importants changements au niveau du comportement des schémas de subdivision. Sur la première ligne, en (a) la surface subdivisée, en (b) sa carte de données polaire. Sur la deuxième, en (a) nous avons très légèrement déplacé le sommet extraordinaire du maillage de contrôle, en (b) sa carte de données polaire. Nous visualisons sur la troisième ligne en (a) le spectre du modèle original et en (b) celui du modèle légèrement perturbé.

	Selle 3	Paraboloïde 8	Modèle complexe 12	Pic 12
Tuning de Loop original	13350	7514	25934	11127
Karčiauskas et al. [Karc 04]	13350	8903	25934	17516
Barthe et Kobbelt [Bart 04]	1451	5493	24353	8354
Gérot et al. [Géro 10]	524	4427	4824	26807

TAB. 4.1 : La valeur du premier mode radial pur $(0, 1)$ est révélatrice de la quantité d'énergie présente dans le spectre d'une géométrie analysée. Nous présentons ici sa valeur pour les quatre exemples précédents.

L'étude illustrée en Figure 4.19 porte sur la forme de la perturbation par rapport à celle du maillage de contrôle. Ces résultats mettent en évidence de grandes variations au niveau du comportement des schémas de subdivision selon la géométrie du modèle subdivisé.

Nous analysons un exemple de résultats, pour une géométrie donnée ainsi que pour la même géométrie très légèrement modifiée. Le comportement du schéma de subdivision varie pourtant de façon importante. En effet, sur cet exemple, la géométrie initiale provoque un artefact dont le spectre est principalement caractérisé par la fréquence angulaire $(1, 1)$ ainsi que par des fréquences angulaires relatives à la valence du sommet : $m = 3$. La géométrie légèrement modifiée présente quant à elle une fréquence $(1, 1)$ un peu atténuée mais de très hautes fréquences radiales $(1, n)$, les fréquences $(3, n)$ étant également plus importantes. Notons de plus que ces comportements sont très différents de ceux du modèle de paraboloïde hyperbolique à valence 3 présenté en Figure 4.14, pourtant ces formes sont à première vue très proches. Pour ce dernier, l'artefact semble suivre les arêtes incidentes au sommet extraordinaire, contrairement au modèle de la Figure 4.19. Par contre, la mesure du mode radial pur $(0, 1)$ varie très peu entre le modèle original et le modèle légèrement modifié. Celle-ci se montre robuste aux légers changements de géométrie, ce qui la rend pertinente pour la quantification des perturbations : l'artefact change de forme mais la mesure globale de qualité reste concrètement la même.

Le comportement instable des artefacts par rapport à la géométrie du maillage de contrôle est, de fait, difficile à caractériser. Les résultats issus d'une géométrie donnée sont donc très insuffisants pour juger du comportement d'un schéma de subdivision, tel que nous l'avons mis en évidence pour le schéma de Gérot et al. : celui-ci présente la plupart du temps un très bon comportement, mais certaines géométries (telle que celle présentée en Figure 4.17) contredisent cette tendance générale. La solution serait d'étendre l'analyse d'une géométrie à un espace de formes. Une telle analyse a été introduite pour le tuning de Loop dans [Augs 06]. Il nous faudrait pour cela fixer une mesure numérique de qualité des surfaces, telle que la mesure du mode radial pur $(0, 1)$, et sommer ces valeurs pour toutes les géométries de l'espace.

Cette méthode de caractérisation des artefacts ne permet pas, par contre, de déterminer leur type (exposé en partie 3.2.2.1 du document). L'artefact radial n'est plus visible puisque la carte de données polaire est normalisée, ce qui est une de ses principales caractéristiques. La mesure de gradient de courbure absolue détecte les fortes variations de celle-ci au voisinage de chaque sommet extraordinaire. Étant donné que ces fortes variations sont présentes de la même façon pour chacun des différents types d'artefacts, il nous est impossible de déterminer un type d'artefact particulier par cette étude fréquentielle. Comme exposé précédemment, la mesure de courbure gaussienne est plus à même de remplir cette tâche.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode d'analyse fréquentielle du comportement de la courbure d'un maillage subdivisé au voisinage d'un sommet extraordinaire. Nous nous sommes servi du gradient de courbure absolue comme principale mesure des perturbations néfastes dues à un sommet extraordinaire du maillage. Notre analyse construit un spectre complexe angulaire m et radial n à partir d'une carte de données polaire normalisée, d'après l'intuition d'une certaine symétrie polaire des données et surtout d'un rapport direct avec la notion de voisinage topologique polaire autour du sommet extraordinaire. Cette méthode spectrale nous permet donc d'analyser une carte de données polaire à travers le module de son spectre $\mathcal{M}_{mn}$. Celui-ci mesure les différentes fréquences radiales et angulaires présentes sur la carte polaire ; elles mettent ainsi en évidence les symétries et les oscillations des mesures au voisinage du sommet extraordinaire. Nous pouvons donc établir, d'après nos critères d'étude, une mesure de qualité de la surface sur ce voisinage. Ceci diffère des analyses précédentes concernant les propriétés de la surface au sommet extraordinaire lui-même, et étend la mesure de variation de courbure gaussienne proposée par Augsdörfer et al. [Augs 06]. L'approche fréquentielle que nous proposons étend en outre les analyses proposées jusqu'à présent, basées sur le laplacien des graphes [Taub 00], pour notre cadre d'étude. En effet, notre support fréquentiel possède une taille arbitraire, contrairement à ces précédentes analyses qui se basent sur le 1-voisinage des sommets.

Ainsi, la qualité de la surface est jugée d'autant meilleure que le spectre analysé contient moins d'énergie. Elle est en outre jugée perturbée si ce spectre contient beaucoup de hautes fréquences. Cette mesure de qualité nous permet de comparer qualitativement le comportement de plusieurs schémas de subdivision pour une géométrie de maillage et une valence de sommet extraordinaire données. Nous avons également proposé une mesure numérique de l'importance de l'artefact, en la valeur du premier mode radial pur $(0, 1)$. Elle s'est révélée pertinente dans l'ensemble de nos tests : pour deux schémas de subdivision donnés, l'analyse globale des deux spectres est directement liée à la différence de ces mesures.

En étendant l'analyse d'une géométrie particulière à un espace de formes, cette méthode permettrait l'évaluation du comportement global d'un schéma de subdivision. Ceci constitue donc une base d'étude sur le tuning des schémas stationnaires, schémas constituant notre domaine d'étude. Le critère de minimisation porterait sur l'énergie — ou la mesure du mode $(0, 1)$ — présente dans les spectres mesurés, tel que nous l'avions déjà évoqué en partie 3.2.4.1.

Chapitre 5

Description de la phase de subdivision topologique d'un schéma

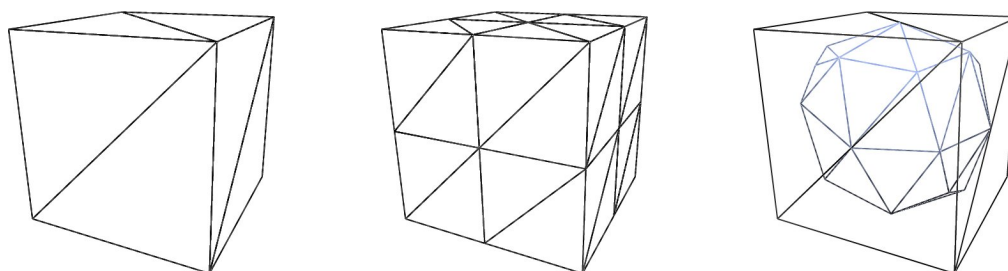


FIG. 5.1 : Le principe d'un schéma de subdivision est composé de deux phases : de nouveaux sommets sont insérés et de nouvelles faces sont créées, il s'agit de la phase de subdivision topologique du maillage. Puis, la géométrie des nouveaux sommets est lissée.

Sommaire

Introduction	102
5.1 Classification des subdivisions topologiques	103
5.1.1 Les formalismes de classification existants	103
5.1.2 Limitations et avantages des deux familles de descripteurs	105
5.2 Structure de notre méta-schéma	106
5.2.1 Descripteur d'insertion $\mathcal{I}$	106
5.2.2 Descripteur de connectivité $\mathcal{C}$	108
5.2.3 Contraintes de topologie sur le maillage subdivisé	114
5.2.4 La subdivision topologique duale	116
5.3 Les possibilités de description de notre système	117
5.3.1 Les subdivisions topologiques couramment utilisées	117
5.3.2 Description des subdivisions topologiques régulières sans rotation	117
5.3.3 Justification des bornes X et Y du secteur d'insertion des sommets v_i	122
5.3.4 Les subdivisions régulières tournantes $Q/TP(n, 1)$ et $Q/TP(1, n)$	124
5.3.5 Concaténation de descripteurs	125
5.3.6 Étude de l'espace des descriptions possibles	129
5.4 Limitations de notre système de description	130
5.5 Application pratique de notre méta-schéma	131
5.5.1 Un modèle d'implémentation	131
5.5.2 Une phase de lissage géométrique générale à tous nos descripteurs	133
Conclusion	136

Introduction

Un schéma de subdivision est défini par une description de la configuration topologique du maillage subdivisé ainsi que par un ensemble de règles de lissage de la nouvelle géométrie. Nous parlons ici de topologie dans le sens du graphe que constitue un maillage, il s'agit de la connectivité des sommets entre eux, voir la partie 2.3 à ce sujet. La géométrie du maillage est quant-à-elle concernée par la position de ses sommets. Cette nouvelle topologie est habituellement décrite par les schémas usuels au moyen de stencils, dont nous décrivons la nature en partie 2.2.1. Nous introduisons dans ce chapitre un descripteur général de subdivision topologique de maillage. Celui-ci généralise la description d'un procédé de subdivision par un ensemble de stencils. Par contre, l'objet de ce système n'est pas de définir les coefficients de lissage de la nouvelle géométrie, nous ne parlerons ici que de l'aspect topologique de la subdivision, bien que nous proposons également une phase de lissage géométrique en partie 5.5.

Notre formalisme permet un codage simple et intuitif de toutes les transformations topologiques des schémas de subdivision usuels, il est de plus capable d'en décrire beaucoup d'autres. La caractéristique principale de ce descripteur est sa généralité : les faces du maillage de contrôle à subdiviser peuvent être de n'importe quel type (triangles, quadrangles, hexangles ou autres). Nous ne nous limitons donc pas à la subdivision d'un pavage régulier du plan, transformation topologique la plus souvent utilisée dans ce domaine du fait de la correspondance directe entre les sommets de deux maillages consécutifs. À ce sujet, un descripteur compact et général des subdivisions topologiques régulières est présenté dans [Ivri 04a]. Le terme *méta-schéma* a été introduit dans [Kohl 98] et [Mull 03] (*meta-scheme*) afin de désigner un descripteur de subdivision topologique potentiellement irrégulière. Nous proposons ici une généralisation des méta-schémas existants.

Notre descripteur de subdivision est basé sur l'insertion de sommets dans les faces du maillage de contrôle. Ces sommets sont ensuite connectés entre eux par des arêtes afin de décrire les nouvelles faces du maillage subdivisé. Le codage d'une subdivision topologique est ainsi composé d'un descripteur d'insertion de sommets couplé à un descripteur de connectivité. La description est *locale* à une face du maillage de contrôle et à son voisinage immédiat. Chaque face du maillage peut être subdivisée par le même descripteur, quel que soit son type (triangle, quadrangle, etc.), et sous certaines conditions, chaque face peut être subdivisée indépendamment des autres. Ce choix permet au maillage de contrôle d'être composé de plusieurs types de faces. En outre, la flexibilité du système nous permet d'aborder certaines idées intéressantes, comme le modèle d'implémentation présenté en partie 5.5.1.

Nous présenterons tout d'abord les travaux existant en classification des subdivisions topologiques de maillage. Nous décrivons notre méta-schéma en partie 5.2, le descripteur d'insertion de sommets suivi par le descripteur de connectivité. Nous soulèverons la question des contraintes topologiques locales du maillage subdivisé en partie 5.2.3, elle assurent la préservation de la topologie globale du maillage initial. En partie 5.3, nous montrerons comment notre système peut décrire les schémas de subdivision usuels, ainsi que les schémas irréguliers introduits dans [Kohl 98] et [Mull 03]. La partie 5.3.5 est consacrée à la concaténation de plusieurs descripteurs, qui permet la description de subdivisions topologiques plus complexes. Nous présenterons ensuite les limites de notre système en partie 5.4. Enfin, nous proposerons en partie 5.5 une phase de lissage géométrique générale à l'ensemble des descriptions possibles.

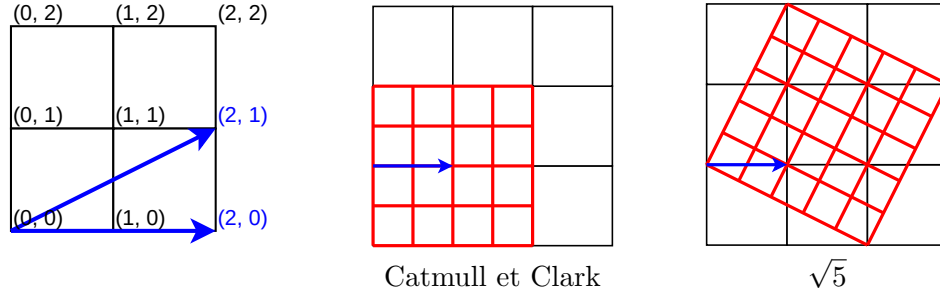


FIG. 5.2 : Deux exemples de descriptions topologiques issues de [Ivri 04a] : $QP(2, 0)$ et $QP(2, 1)$ décrivent respectivement la topologie de la subdivision de Catmull et Clark et celle du schéma $\sqrt{5}$.

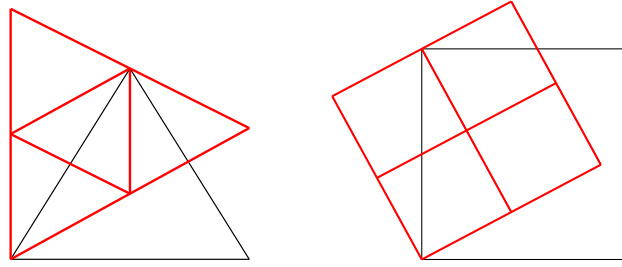


FIG. 5.3 : Illustration des subdivisions topologiques tournantes des schémas de Kobbelt $\sqrt{3}$ [Kobb 00b] (à gauche) et de Ivriissimtzis et al. [Ivri 04b] (à droite).

5.1 Classification des subdivisions topologiques

Plusieurs travaux ont été menés sur la classification systématique des subdivisions topologiques que l'on peut appliquer à un maillage. Ils n'adoptent pas le même cadre d'analyse et n'ont pas les mêmes limitations. Nous proposons de les scinder en deux catégories : d'une part les classifications de pavages réguliers, d'autre part celles qui peuvent décrire un pavage irrégulier.

5.1.1 Les formalismes de classification existants

En premier lieu, le terme *régularité* vient de la réduction en mosaïque — en anglais *tessellation* — du plan euclidien en triangles, rectangles ou en hexagones. La valence des sommets de la mosaïque est alors régulière, elle est respectivement de 6, 4 et 3. En pratique, ce genre de subdivision topologique implique une restriction : le maillage de contrôle et le maillage subdivisé sont composés d'un seul et même type de face. En contrepartie, la mise en correspondance des deux maillages est directe. Dans [Alex 02], l'auteur considère la subdivision régulière de triangles, il introduit le principal concept que nous utilisons ici : une subdivision topologique est une insertion de sommets suivie d'une phase de triangulation. Un codage intuitif et complet des subdivisions régulières est présenté dans [Ivri 04a], il est basé sur un vecteur de déplacement entre les deux maillages : ce descripteur est défini par une arête du maillage de contrôle projetée sur le maillage subdivisé, voir Figure 5.2. L'*arité* d'une subdivision est le rapport d'échelle de la similarité entre les deux pavages réguliers, elle est représentée par la norme du vecteur. L'orientation de ce vecteur permet quant-à-elle l'introduction de schémas de topologie tournante, tels que le schéma $\sqrt{5}$ [Ivri 04b] du même auteur ou le schéma $\sqrt{3}$ de Kobbelt [Kobb 00b], voir en Figure 5.3.

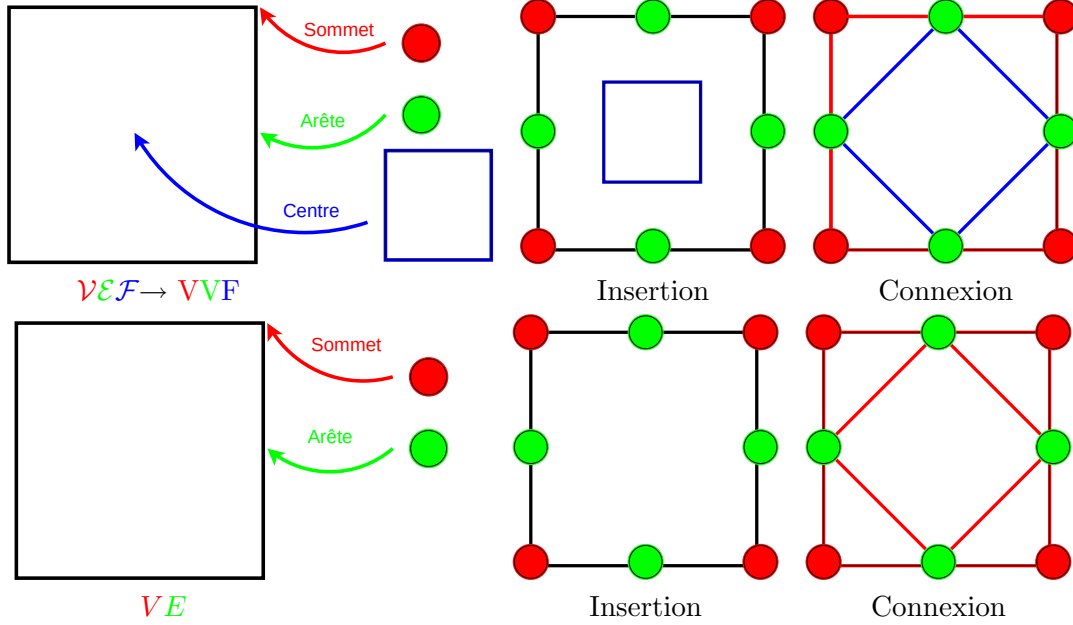


FIG. 5.4 : Exemple d'application des méta-schémas de [Kohl 98] (première ligne) et de [Mull 03] (deuxième ligne). La subdivision est locale à une face du maillage, le principe du descripteur est basé sur l'insertion d'éléments. Pour le premier, trois types d'éléments peuvent être insérés, ici la description est $\mathcal{VEF} \rightarrow \mathcal{VVF}$. Le deuxième ne considère que l'insertion de sommets, ici le descripteur est VE associé la connectivité énumérée 2.

Ce vecteur de déplacement est symbolisé par les coordonnées (x, y) définies dans un repère lié au pavage régulier, voir Figure 5.2. La description est complétée par deux lettres, une pour le type de face du maillage et une deuxième pour la primalité de la subdivision (un schéma est primal si certains des nouveaux sommets coïncident avec les anciens). Par exemple, $QP(2, 0)$ décrit la subdivision primale de quadrangle d'arité 2, il s'agit de la topologie du schéma de Catmull et Clark ; $TP(1, 1)$ décrit la topologie du schéma $\sqrt{3}$ et $QP(2, 1)$ celle du schéma $\sqrt{5}$. À noter, par ailleurs, que les subdivisions topologiques tournantes peuvent tourner dans un sens où dans l'autre, par exemple le sens de $QP(2, 1)$ est opposé à $QP(1, 2)$.

Un ensemble de critères pertinents concernant l'utilité potentielle de chaque subdivision topologique régulière est présenté par Dodgson [Dodg 05]. Son étude se consacre à trouver l'ensemble des configurations topologiques potentiellement utiles en subdivision.

D'autre part, les méta-schémas introduits par Kohler [Kohl 98] et Müller et Rips [Mull 03] proposent une approche locale de la subdivision topologique. Ceux-ci ne s'intéressent pas à la mise en correspondance de deux pavages réguliers de taille infinie, mais à une face du maillage de contrôle et aux nouvelles faces issues de celle-ci par subdivision. Ces deux travaux sont basés sur l'insertion de nouveaux éléments en lieu des sommets, des arêtes et du centre de la face concernée. Le premier [Kohl 98] considère l'insertion de trois types d'éléments : le sommet, l'arête et la face. Par exemple, le descripteur $\mathcal{VEF} \rightarrow \mathcal{VVF}$ définit le remplacement de chaque sommet de la face par un nouveau sommet, de chaque arête par un nouveau sommet et du centre de la face par une nouvelle face, voir la première ligne de la Figure 5.4. Ils complètent leur descripteur par

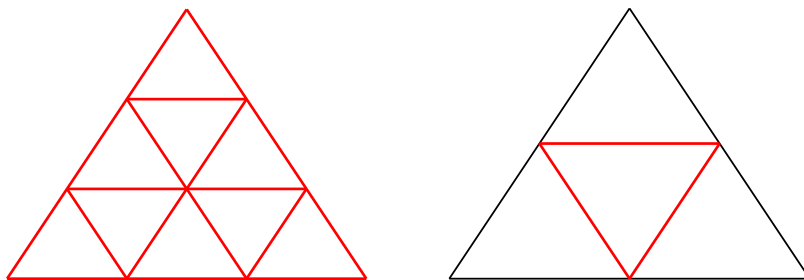


FIG. 5.5 : À gauche la subdivision topologique d'un triangle par un schéma de type Loop ternaire primal $TP(3,0)$ (donc d'arité 3). Celle-ci ne peut être décrite par un méta-schéma existant. À droite une subdivision irrégulière duale, un nouveau triangle est créé au centre de l'ancien : son application sur un pavage triangulaire régulier conduirait à introduire à la fois des triangles et des hexagones. Les méta-schémas sont par contre capables de la décrire.

une définition de la connectivité de ces nouveaux éléments entre eux.

Le deuxième [Mull 03] ne considère que l'insertion de sommets à la place des anciens éléments, tandis que les connectivités possibles sont énumérées. Par exemple, le descripteur VE décrit l'insertion de sommets en lieu des anciens sommets et des anciennes arêtes, voir la deuxième ligne de la Figure 5.4. Ce dernier généralise le premier méta-schéma, il est capable de décrire tous les schémas de subdivision topologique introduit par [Kohl 98] et en propose d'autres. Les auteurs proposent également une phase de lissage géométrique des nouveaux sommets, une analyse de l'inversion du procédé de subdivision ainsi qu'une étude portant sur la concaténation de plusieurs descripteurs.

5.1.2 Limitations et avantages des deux familles de descripteurs

Les descripteurs de subdivision régulière ne peuvent décrire la plupart des subdivisions topologiques introduites par les méta-schémas, leur cadre est contraint par le type des faces du maillage de contrôle. Cependant, la subdivision topologique régulière est la plus couramment rencontrée en subdivision. Une exception notable est le schéma pentagonal de Akleman [Akle 04].

Les méta-schémas, quand à eux, ne peuvent décrire certains schémas réguliers d'arité supérieure à 2. Par exemple, le schéma de Loop ternaire $TP(3,0)$ ne peut être décrit dans leur formalisme, même par la concaténation de plusieurs descripteurs, voir la Figure 5.5. Ils ne peuvent pas non plus décrire la plupart des pavages tournants. Par contre, leur approche locale permet de s'abstraire du type des faces du maillage de contrôle ainsi que du type des faces créées par la subdivision.

À noter que le schéma de subdivision usuel de Catmull et Clark semble correspondre à une subdivision topologique quadrangulaire régulière. Or, ce schéma peut être appliqué à n'importe quel type de face du maillage de contrôle. Dans le cas d'une face non quadrangulaire, sa subdivision topologique ne peut plus être décrite par le formalisme régulier. Le fait est qu'un schéma de subdivision possède un comportement local à chaque face du maillage, sa phase de subdivision topologique agit en réalité comme un méta-schéma. Dans le cas des schémas de Loop, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{5}$ entre autres, le maillage de contrôle est contraint par le type de ses faces, respectivement des triangles pour Loop et $\sqrt{3}$ et des quadrangles pour $\sqrt{5}$. Dans le cas de ces schémas, nous pouvons en effet parler de correspondance topologique entre leur phase de subdivision et une description régulière.

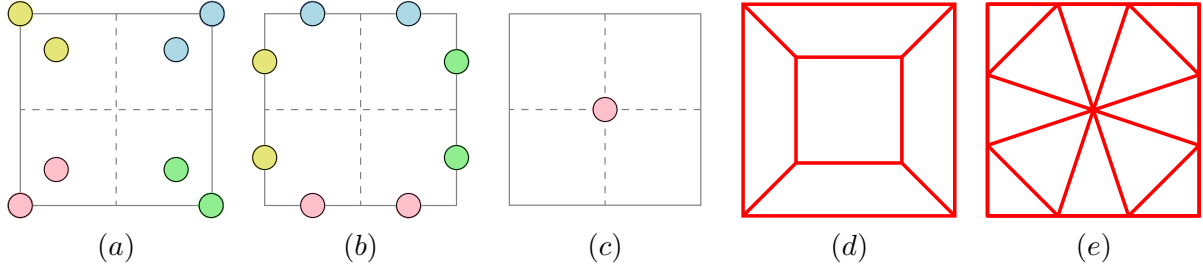


FIG. 5.6 : Insertion des trois types de sommets : en (a) les sommets v_i , $n_v = 2$, en (b) les sommets d'arête e_i , $n_e = 2$ et en (c) le sommet de face f , $n_f = 1$. Nous illustrons deux exemples de connectivités possibles pour les triplets d'insertion $(2, 0, 0)$ en (d) et $(1, 2, 1)$ en (e).

Notre descripteur de subdivision topologique est une généralisation du méta-schéma [Mull 03]. Nous nous sommes intéressés à l'insertion de plusieurs sommets pour chaque élément d'une face du maillage de contrôle. Nous proposons également un descripteur de connectivité flexible et indépendant des sommets insérés. Parmi les possibilités de ce descripteur, nous intégrons en plus des descriptions irrégulières existantes un grand nombre de subdivisions régulières, en particulier toutes celles vérifiant les critères d'utilité de Dodgson [Dodg 05] pour les surfaces de subdivision.

5.2 Structure de notre méta-schéma

Notre descripteur d'insertion $\mathcal{I}$ est un triplet d'entiers (n_v, n_e, n_f) . Ils définissent le nombre de nouveaux sommets à insérer relativement aux sommets de l'ancienne face, à ses arêtes et à son centre, voir Figure 5.6. Le descripteur de connectivité $\mathcal{C}$ définit quant-à-lui les nouvelles arêtes de la face subdivisée, il est basé sur des relations d'adjacences entre les nouveaux sommets. À partir de cette description, une nouvelle face est considérée comme étant un cycle minimal du graphe associé au maillage subdivisé. Le couple de descripteurs $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ définit sans ambiguïté la subdivision topologique d'une face du maillage de contrôle. Nous introduisons en partie 5.2.3 un ensemble de règles assurant la préservation de la topologie du maillage de contrôle après sa subdivision.

Afin de pouvoir rendre le système indépendant du type de la face subdivisée, nous définissons toutes les opérations d'insertion de la même façon pour chaque arête de la face. Par exemple, le fait d'insérer un nouveau sommet par rapport aux arêtes d'une face provoque l'insertion d'autant de sommets que la face possède d'arêtes. Ainsi, l'algorithme d'insertion décrit les nouveaux sommets insérés par rapport à une seule arête de la face. Nous parlons alors du maillage de contrôle comme d'une structure de type *demi-arête*, tout comme pour la mise en œuvre des cartes de données polaires en partie 3.2.3.1. Une face de ce maillage est constituée de demi-arêtes orientées, nous pouvons ainsi introduire une notion d'ordre entre les éléments insérés. Par la suite, nous considérerons toutes les faces comme étant orientées dans le sens trigonométrique.

5.2.1 Descripteur d'insertion $\mathcal{I}$

Comme exposé précédemment, les trois entiers n_v , n_e et n_f représentent le nombre de nouveaux sommets insérés v_i , e_i et f par rapport aux éléments d'une face $\mathcal{F}$, à savoir respectivement : ses sommets, ses arêtes et son centre. Cette notion est très proche du méta-schéma [Mull 03] si l'on considère $(n_v, n_e, n_f) \in \{0, 1\}^3$.

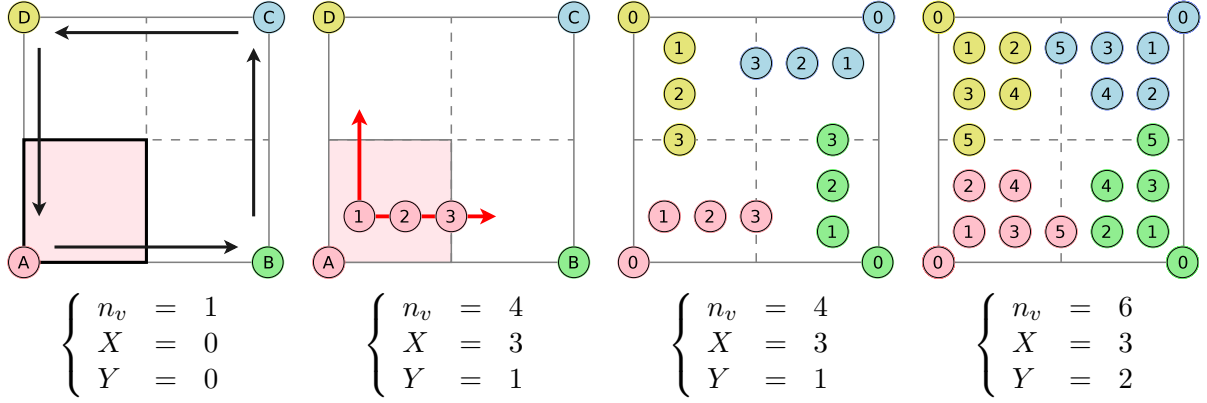


FIG. 5.7 : Les sommets v_i sont insérés et ordonnés dans une zone d'insertion liée à une demi-arête de la face à subdiviser. Le procédé est le même pour chacune des arêtes de la face, il est donc indépendant de leur nombre. Nous désignons ces zones par le terme secteur d'insertion lié à la demi-arête.

Insertion des sommets v_i

Nous insérons n_v sommets par rapport à chaque ancien sommet de la face, $n_v \in \mathbb{N}^+$. Si $n_v = 1$, nous insérons un nouveau sommet à la place de chaque ancien. Si $n_v > 1$, nous insérons et ordonnons $n_v - 1$ nouveaux sommets supplémentaires pour chaque demi-arête.

Pour chaque sommet de la face $\mathcal{F}$, nous considérons un secteur d'insertion, voir Figure 5.7. Celui-ci prend la forme d'un tableau à deux dimensions. Chaque sommet v_i , $i \in \llbracket 1, n_v - 1 \rrbracket$ est localisé dans ce tableau au moyen de ses coordonnées (x_i, y_i) . Les secteurs d'insertion sont relatifs à chaque demi-arête de $\mathcal{F}$ et sont quadrilatéraux quel que soit son type. Nous considérons pour cela le milieu de chaque arête et le centre de $\mathcal{F}$. Nous fixons ensuite les bornes (X, Y) de ces tableaux, $x_i \in \llbracket 0, X - 1 \rrbracket$ et $y_i \in \llbracket 0, Y - 1 \rrbracket$. Enfin, nous les remplissons colonne par colonne par les nouveaux sommets v_i . La dernière colonne n'est d'ailleurs pas forcément remplie, voir la Figure 5.7 à droite.

Nos choix concernant le calcul des bornes (X, Y) sont relatifs à la planarité locale du nouveau graphe et à la configurations des subdivisions topologiques régulières, voir un exemple en Figure 5.8.d. Nous discuterons de la planarité locale des graphes en partie 5.2.3 et nous exposerons la justification du calcul des bornes en partie 5.3.3. Considérons pour les équations suivantes l'entier inférieur comme résultat de la division entière et l'opérateur modulo % :

$$\begin{cases} Y = \lfloor \frac{\sqrt{n_v - 1}}{2} \rfloor \\ X = \lceil \frac{n_v - 1}{Y} \rceil \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_i = i // Y \\ y_i = i \% Y \end{cases} \quad (5.1)$$

Le descripteur de connectivité est basé sur ces secteurs d'insertion ainsi que sur l'ordre de remplissage des sommets v_i , comme nous le présenterons dans la partie suivante. Cette représentation spatiale des sommets v_i n'est pas géométrique, seules les relations d'adjacences induites par les coordonnées (x_i, y_i) sont importantes. Nous en proposons néanmoins une représentation graphique pour nos exemples en considérant les tableaux à deux dimensions relatifs aux secteurs.

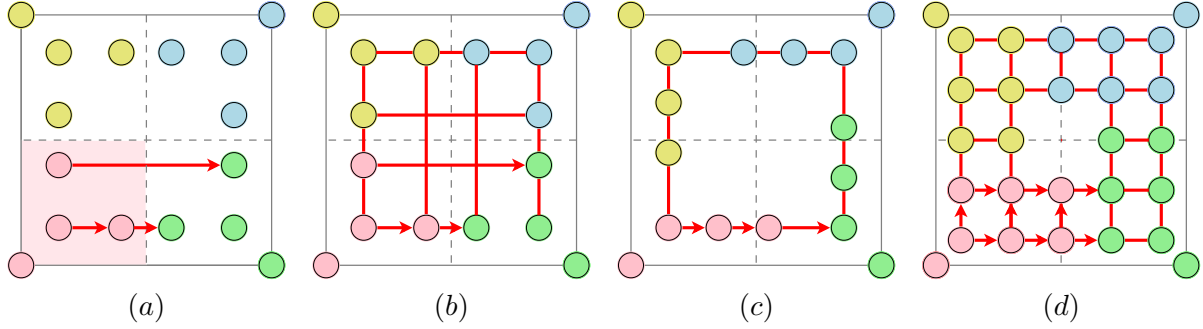


FIG. 5.8 : En (a) le descripteur d'insertion $\mathcal{I} : (4, 0, 0)$ couplé avec le descripteur de connectivité $\mathcal{C} : v \rightarrow$. En (b), les bornes du secteur d'insertion $(2, 2)$ sont alors responsables de croisements d'arêtes, le graphe n'est donc pas planaire. (c) Notre calcul de bornes pour ce nombre de sommets v_i est $(3, 1)$, cette configuration évite le problème des croisements quel que soit le descripteur $\mathcal{C}$. En (d) nous illustrons un exemple de subdivision topologique proche d'un cas régulier quadrangulaire pour $n_v = 7$ et les bornes $(3, 2)$ (il s'agit de $QP(6, 0)$ dans la notation de [Ivri 04a]).

Insertion des sommets e_i

Nous avons besoin d'insérer et d'ordonner, par rapport à chaque arête de $\mathcal{F}$, n_e sommets e_i où $n_e \in \mathbb{N}^+$ et $i \in \llbracket 0, n_e - 1 \rrbracket$. Nous les ordonnons donc dans le sens de chaque demi-arête, le premier étant le plus proche de son sommet source. Nous les visualisons en les répartissant de façon uniforme, voir Figure 5.6.b. Nous avons choisi de séparer les deux types de sommets insérés v_i et e_i car ce choix augmente grandement les possibilités de notre descripteur. En guise d'exemple, toutes les subdivisions topologiques triangulaires régulières abordées de notre point de vue impliquent l'insertion d'un sommet e_i de plus que le nombre de sommets v_i dont nous avons besoin. De plus, toutes les subdivisions tournantes décrites dans notre formalisme requièrent l'insertion de sommets v_i mais pas de sommet e_i ; nous reviendrons sur ces cas de figure en partie 5.3.

Insertion du sommet f

Nous fixons $n_f \in \{0, 1\}$. S'il est spécifié, le sommet f est situé au centre de $\mathcal{F}$, voir Figure 5.6.c. Il n'y a aucune ambiguïté entre le sommet f et les sommets v_i , également insérés à l'intérieur de la face, puisque ce sommet est indépendant des arêtes et donc des secteurs d'insertion.

5.2.2 Descripteur de connectivité $\mathcal{C}$

Le descripteur de connectivité est séparé du descripteur d'insertion des nouveaux sommets. Il a pour but de décrire les nouvelles arêtes liant les sommets insérés afin de créer les nouvelles faces du maillage subdivisé. Ce descripteur est défini par un ensemble de symboles lié à un ensemble de *directions* représentées par des flèches. Nous nous intéressons à la création de liens entre les différents types de sommets insérés : les sommets v_i sont insérés à l'intérieur de la face, les sommets e_i sont ordonnés par rapport à chaque arête et le sommet f est défini par rapport au centre de la face. Nous choisissons de traiter à part le cas des anciens sommets préservés v_0 .

Une arête créée entre deux éléments de même type sera décrite comme une connexion *intra-élément*, voir les Figures 5.9.a et 5.9.b. Une arête créée entre deux éléments de types différents sera considérée comme une connexion *inter-élément*, voir Figure 5.9.c. Ces deux types de connexions sont dites *internes* car les liens sont alors créés à l'intérieur de la face à subdiviser.

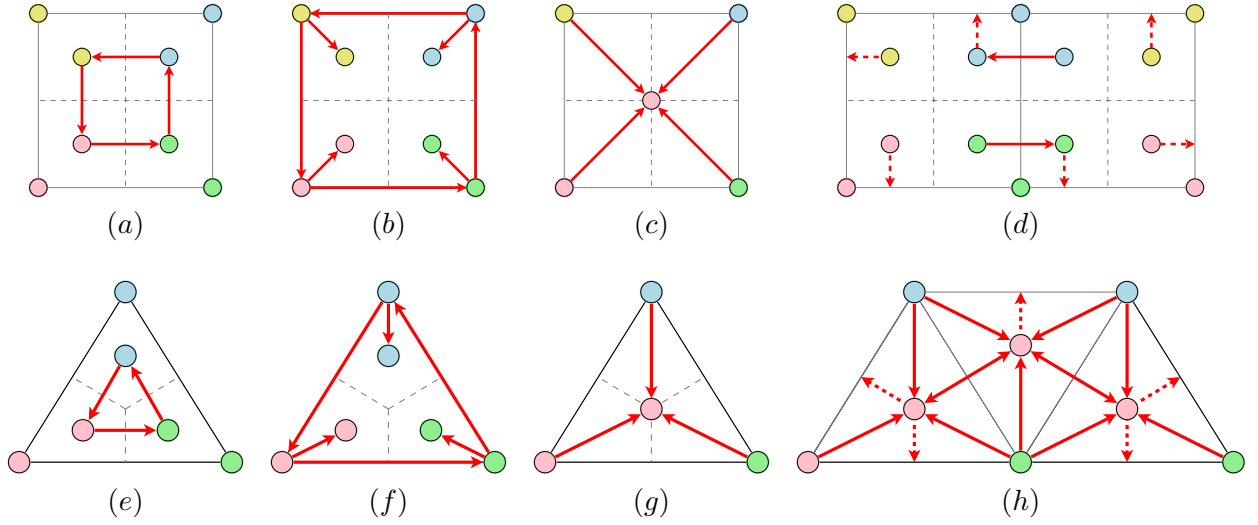


FIG. 5.9 : Nous considérons dans cet exemple l'application d'un méta-schéma pour des faces quadrangulaires (première ligne) et triangulaires (deuxième ligne). En (a) et (e) la connectivité interne intra-élément $v \rightarrow$ pour $\mathcal{I} : (2,0,0)$. En (b) et (f) le sommet v_0 possède ses propres possibilités de connexion : $v_0 \rightarrow$ et $v_0 \nearrow$. En (c) et (g) un exemple de connexion inter-élément, ici $v f \uparrow$ pour $\mathcal{I} : (1,0,1)$. La connexion externe (d) créer des liens entre des éléments de faces différentes, ici $v \downarrow$ pour $\mathcal{I} : (2,0,0)$. En (h) nous modélisons la subdivision topologique du schéma de Kobbelt $\sqrt{3}$ au moyen des connectivités $v f \uparrow$ et $f \downarrow$ pour $\mathcal{I} : (1,0,1)$.

Les liens entre deux éléments de faces différentes sont dits *externes*, voir Figure 5.9.d. Par exemple, le schéma $\sqrt{3}$ [Kobb 00b] décrit une subdivision topologique où les sommets insérés dans chaque face sont liés entre eux. Nous pouvons décrire ce procédé en liant le sommet f d'une face avec les sommets f de ses faces voisines, ceci au moyen d'une connexion externe, voir Figure 5.9.h.

Par souci de clarté, nous proposons de présenter explicitement par l'exemple les différentes connexions possibles, à travers leurs symboles et leurs directions. Les nouveaux sommets de même type sont ordonnés les uns par rapport aux autres, nous pouvons donc considérer des relations d'adjacence de façon intuitive au moyen des directions. Tous les sommets de même type sont traités de la même façon. Par exemple, le descripteur $\mathcal{C} : v \rightarrow$ définit la création d'un lien entre chaque sommet v_i et son voisin de droite, au regard de leur adjacence dans le secteur d'insertion, voir Figure 5.8. Par contre, la connexion d'éléments de types différents nécessite la définition de règles particulières. Le descripteur $\mathcal{C} : e v \uparrow$, par exemple, définit la création de liens entre chaque sommet e_i et son voisin v_i du dessus, ce qui implique la définition d'une relation d'adjacence entre ces deux ensembles d'éléments. Dans la suite du document, nous définirons chacune des différentes connexions existantes dans notre formalisme, la Table 5.1 en présentera un récapitulatif.

5.2.2.1 Les connexions internes intra-éléments

Les connexions de cette nature décrivent les liens entre des éléments de même type, v_0 , v_i ou e_i . Elles sont décrites par une lettre $\mathcal{C} : v_0$, v , et e et un ensemble de directions.

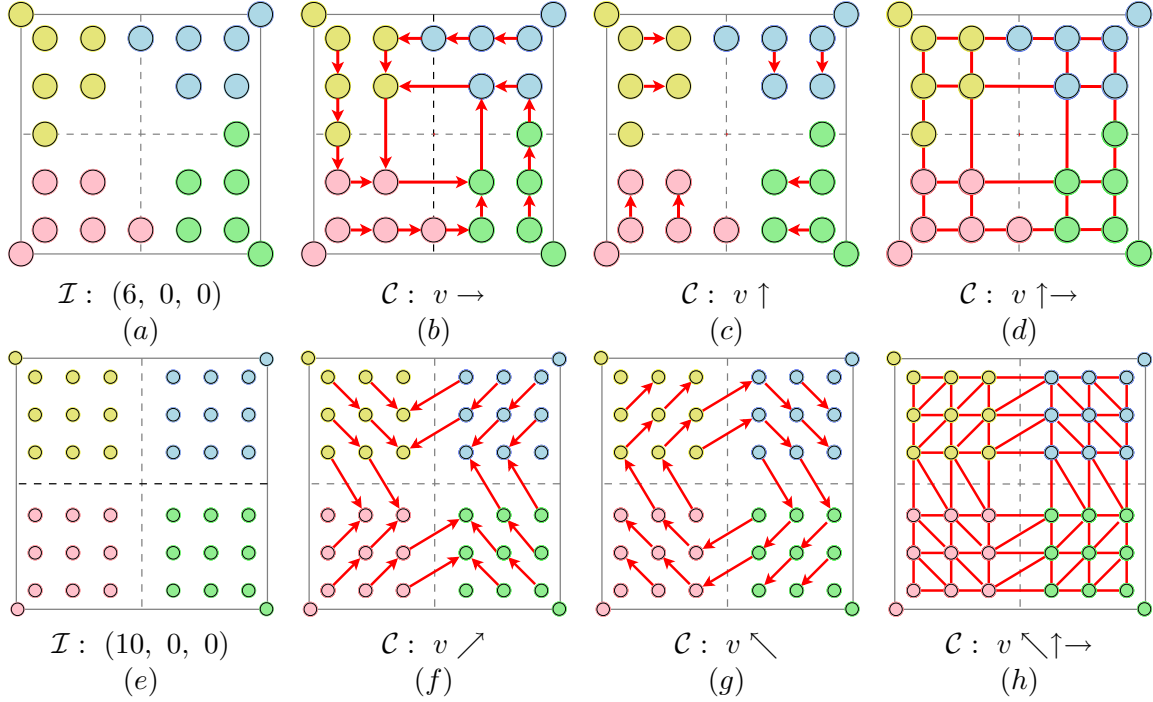


FIG. 5.10 : Illustration de la connectivité interne intra-élément pour les sommets v_i . Nous décrivons deux connectivités en même temps en (d) et trois en (h). À noter que la connexion $v \uparrow$ ne prend pas en compte le voisinage de plusieurs secteurs d'insertion car ces liens seraient redondants avec ceux décrits par la connexion $v \rightarrow$.

La connexion v

Tout d'abord, le voisinage des sommets v_i est relatif au tableau bi-dimensionnel introduit dans chaque secteur d'insertion. Nous considérons la connexité de chaque case de ce tableau. Ainsi, nous définissons les deux voisinages immédiats *haut* et *droite* : $\uparrow$ et $\rightarrow$, ainsi que les deux voisinages diagonaux : $\searrow$ et $\nearrow$, voir Figure 5.10. Concrètement, le voisin d'un sommet v_i par rapport à une direction est le premier atteint par un déplacement de ce sommet v_i le long de celle-ci. Ce voisinage est étendu aux secteurs d'insertions précédent et suivant, au sens trigonométrique des demi-arêtes de la face, voir Figure 5.10.b. Notons à présent $|\mathcal{F}|$ le nombre d'arêtes de la face $\mathcal{F}$. Un secteur d'insertion $s \in \llbracket 1, |\mathcal{F}| \rrbracket$ est adjacent aux deux secteurs $s_{\text{precedent}}$ et s_{suivant} , où $s_{\text{precedent}} = (s - 1) \% |\mathcal{F}|$ et $s_{\text{suivant}} = (s + 1) \% |\mathcal{F}|$. Nous considérons donc ici la mise en correspondance de deux tableaux adjacents de sommets de dimensions différentes : $[X \times Y]$ et $[Y \times X]$, car étant donnée la symétrie centrale des demi-arêtes de la face par rapport à son centre, le secteur suivant s_{suivant} est tourné de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au secteur s . Ainsi, pour une demi-arête, la première ligne de sommets v_i adjacents par la direction $\rightarrow$ est composée de $X + Y$ éléments, la première ligne X du secteur s et la première colonne Y du secteur s_{suivant} .

La connexion v_0

Comme exposé précédemment, les premiers sommets v_0^s — relatifs au secteur s — sont traités différemment des autres sommets v_i^s . Le sommet v_0^s peut être lié au premier sommet du secteur suivant $v_0^{s_{\text{suivant}}}$ par la connexion $v_0 \rightarrow$. Il peut aussi être lié au sommet suivant du même secteur v_1^s par la connexion $v_0 \nearrow$, voir un exemple en Figure 5.9.b.

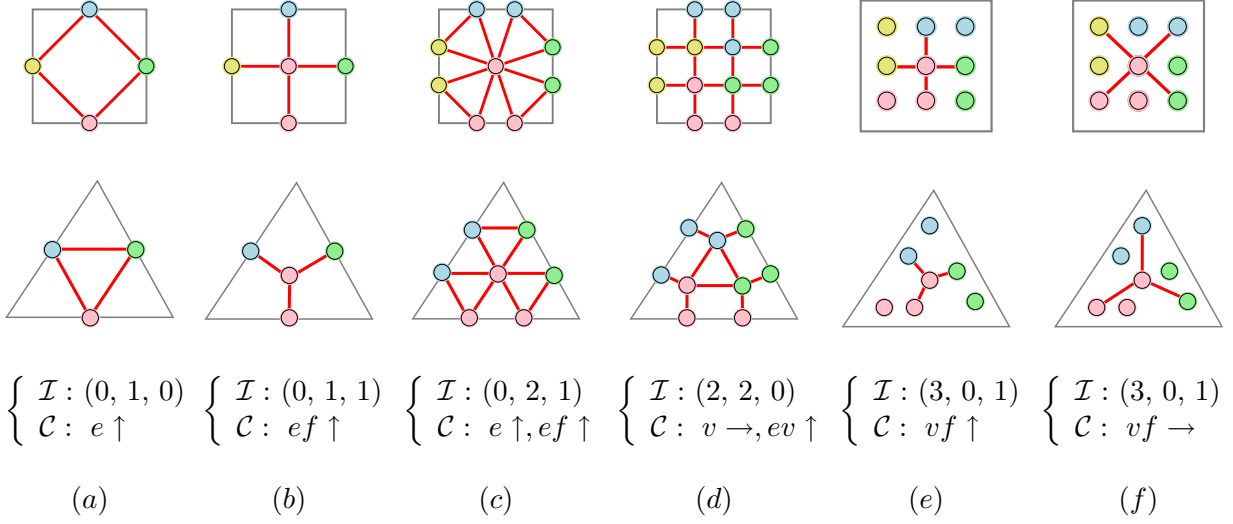


FIG. 5.11 : Illustration de la connectivité intra-élément $e \uparrow$ (a) et plusieurs connectivités de type inter-élément appliquées sur un quadrangle et sur un triangle : en (b) et (c) $ef \uparrow$, en (d) $ev \uparrow$, en (e) $vf \uparrow$ et en (f) $vf \rightarrow$. Les sommets v_0 ne sont pas visualisés en (d), (e) et (f).

La connexion e

Deux sommets e_i sont voisins s'ils sont adjacents par rapport à la demi-arête où nous les insérons. Nous considérons la connexité droite par la direction $e \rightarrow$ ($e \leftarrow$ est redondante). La connexion $e \uparrow$ permet de lier le dernier sommet e_i^s d'un secteur s avec le premier sommet e du secteur suivant, $e_i^{s_{\text{suivant}}}$. Cette possibilité de connexion nous permet par exemple de décrire la phase topologique du schéma de Loop, voir Figure 5.11.a.

Enfin, il n'y a pas de connexion intra-élément concernant l'éventuel sommet f , puisque il est unique dans la face.

5.2.2.2 Les connexions internes inter-éléments

Ce type de connectivité décrit les liens entre des éléments de types différents, voir Figure 5.9.c. Nous proposons de les décrire par un couple de lettres ev , vf et ef associé à un ensemble de directions. Plusieurs exemples sont illustrés en Figure 5.11.

La connexion ev

Le premier sommet e_0^s peut être lié au premier sommet v_0^s par la connexion $ev \leftarrow$. De façon symétrique, le dernier sommet $e_{n_e-1}^s$ peut être lié au premier sommet v_i du secteur suivant $v_0^{s_{\text{suivant}}}$ par la connexion $ev \rightarrow$.

Les sommets e_i sont liés aux sommets v_i de la première ligne par les trois connexions $ev \uparrow$, $ev \searrow$ et $ev \nearrow$. Comme dit précédemment, cette première ligne de sommets est associée à une demi-arête, elle contient $X + Y$ sommets v_i . L'exemple de la Figure 5.10.d montre cinq sommets sur la première ligne de chaque demi-arête. Nous considérons alors deux cas distincts, de façon intuitive, si $i < X$, un sommet e_i^s peut être lié au sommet $v^s(i, 0)$ par la connexion $ev \uparrow$. Si $i \geq X$, alors e_i^s est lié au sommet $v^{s_{\text{suivant}}}(0, X + Y - (i + 1))$, voir Figure 5.11.d. S'il y a plus de sommets e_i que de sommets v_i sur cette ligne, nous choisissons de lier les sommets e_i restant au dernier sommet v_i . Les directions diagonales sont définies par la composition des directions verticales et des directions horizontales.

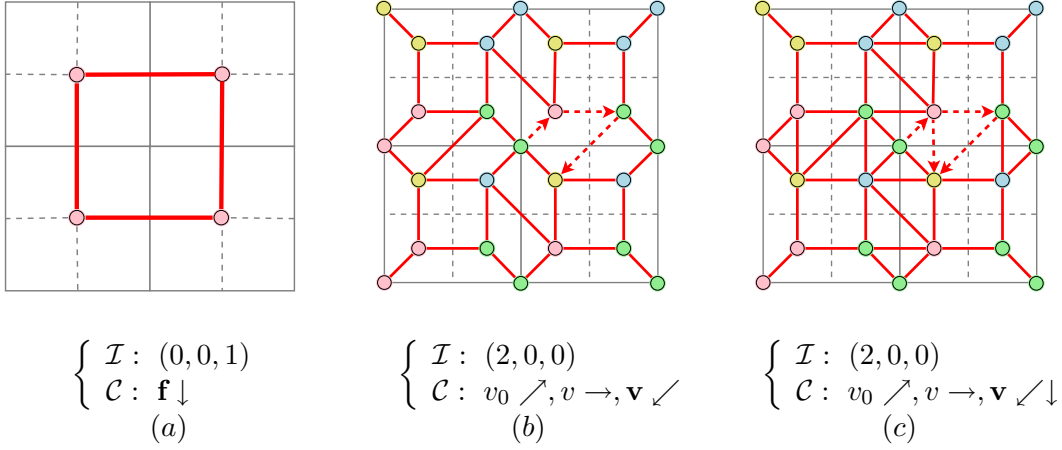


FIG. 5.12 : Les connexions externes nous permettent de décrire certaines subdivisions topologiques duales (a) ainsi qu'un grand nombre de subdivisions topologiques régulières tournantes. En (b) nous reproduisons la phase topologique du schéma $\sqrt{5}$ (noté $QP(2,1)$ avec la description de [Ivri 04a]), en (c) il s'agit de la transformation topologique du schéma régulier triangulaire tournant $\sqrt{7}$ — $TP(2,1)$ — appliquée à des quadrangles.

La connexion ef

La connexion $ef \uparrow$ lie tous les sommets e_i au sommet central f , voir par exemple la topologie du schéma de Catmull et Clark et celle du schéma de Loop ternaire en Figures 5.11.b et 5.11.c.

La connexion vf

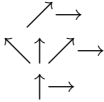
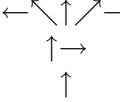
Les deux connexions $vf \uparrow$ et $vf \rightarrow$ sont moins intuitives que les précédentes. La connexion $vf \uparrow$ permet de lier le sommet f avec le dernier sommet v_{n_v-1} , ou avec le sommet v_0 si $n_v = 1$, voir en Figure 5.11.e. La connexion $vf \rightarrow$ permet de lier le sommet f au sommet $v(X-2, Y-1)$, celui-ci est situé sur la dernière ligne et l'avant-dernière colonne du secteur d'insertion, voir Figure 5.11.f. Cette direction nous sera utile à la triangulation du domaine central de la face, dans le but de décrire un grand nombre de subdivisions topologiques régulières triangulaires que nous présenterons en partie 5.3.2. Ces deux connexions nous permettent de joindre les secteurs d'insertion des sommets v_i .

5.2.2.3 Les connexions externes

Une connexion est dite externe si elle implique un lien entre des éléments appartenant à deux faces adjacentes. Les sommets e_i et v_0 ne sont pas concernés par ces connexions puisqu'ils sont toujours partagés par deux faces adjacentes, ils appartiennent à la même arête. Nous notons la connexion externe par une lettre en caractère gras suivie d'un ensemble de directions. Il n'y a cependant aucune ambiguïté concernant ce type de connexion et les connexions internes car les directions sont différentes ; nous choisissons cette notation par souci de clarté.

La connexion externe $\mathbf{f} \downarrow$

Le sommet f , au centre de la face, peut être lié aux sommets f des faces adjacentes par la connexion $\mathbf{f} \downarrow$, voir en Figure 5.12.a. Cette connexion peut servir à modéliser le maillage dual, qui par définition remplace chaque face du maillage de contrôle par un sommet, d'où la description $(\mathcal{I} : (0, 0, 1), \mathcal{C} : \mathbf{f} \downarrow)$.

Connexions internes intra-éléments	Possibilités
v_0 v e	
Connexions internes inter-éléments	Possibilités
ev vf ef	
Connexions externes	Possibilités
$\mathbf{v}$ $\mathbf{f}$	

TAB. 5.1 : *Récapitulatif des différentes directions possibles pour chaque symbole utilisé par notre descripteur de connectivité. Un lien est interne intra-élément, interne inter-élément ou externe. Nous notons ces dernières avec un symbole en caractère gras, bien qu'elles ne présentent aucune ambiguïté avec les autres connexions.*

La connexion externe $\mathbf{v}$

Les sommets v_i d'un secteur d'insertion peuvent être liés aux sommets du secteur opposé, au sens des demi-arêtes, par la connexion $\mathbf{v} \downarrow$ (Figure 5.12.c). Ce repère opposé est tourné de π radians par rapport au repère en question, le procédé d'adjacence reste néanmoins le même. Enfin, nous définissons les deux directions diagonales $\mathbf{v} \swarrow$ et $\mathbf{v} \searrow$; elles sont comme précédemment définies par la composition de deux déplacements, un déplacement externe puis un déplacement interne dans le secteur atteint. Deux exemples de ces connexions externes sont présentés en Figure 5.12. À noter que ces connexions ne concernent que les sommets v_i situés sur la première ligne ou la première colonne du secteur d'insertion, elles sont ignorées pour les sommets v_i qui n'appartiennent pas à un bord de leur secteur (soit $v_i(x, y)$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$). Par ailleurs, ces connexions n'ont de sens que si deux faces adjacentes sont subdivisées de la même façon par le méta-schéma.

La Table 5.1 reprend l'ensemble des possibilités de notre descripteur de connectivité $\mathcal{C}$. De par l'orientation des demi-arêtes de la face, les différentes connexions sont soit toujours internes, soit toujours externes. En effet, la direction *droite*, par exemple, est définie selon l'orientation de ces arêtes. Ainsi, quel que soit le type de sommet lié à une demi-arête, son voisin éventuel est toujours contenu, soit dans son propre secteur, soit dans le secteur suivant de la face, tel qu'il est illustré en Figure 5.10.b. Il en est de même pour la direction *haut* dans le sens inverse de la demi-arête.

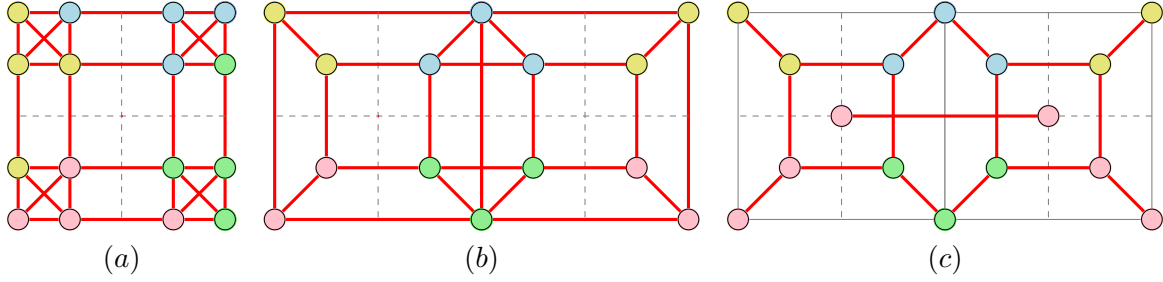


FIG. 5.13 : Plusieurs exemples de connectivités qui ne génèrent pas un graphe planaire.

5.2.3 Contraintes de topologie sur le maillage subdivisé

Durant le procédé de subdivision d'une face, nous cherchons à préserver la topologie globale du maillage. Une face décrit une deux-variété, son graphe associé est planaire et il ne contient qu'une seule composante connexe. Un graphe non-planaire ne peut être dessiné sur un plan sans intersection d'arêtes. Dans cette section, nous présentons un ensemble de règles à suivre afin qu'un ensemble de faces, créées par la subdivision d'une face et de son voisinage direct, reste la description d'une deux-variété. Ces règles sont nécessaires à la préservation de la topologie globale du maillage de contrôle. Nous scindons cette analyse entre la planarité du graphe créé par subdivision et le nombre de composantes connexes introduites. À noter que notre système de description, comme les autres méta-schémas, peut être appliqué sans changement à des maillages qui ne décrivent pas une deux-variété.

Planarité locale

Afin d'assurer la propriété de planarité du graphe localement créé par subdivision, les conditions suivantes doivent être respectées. En pratique, celles-ci sont intégrées dans nos algorithmes.

Nous fixons quatre restrictions sur la connectivité interne intra-élément :

- Si deux faces $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ partagent une arête, donc deux demi-arêtes opposées, le méta-schéma doit décrire le même comportement concernant cette arête. Donc, n_e est le même pour les deux descripteurs $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$, de même que pour les deux descripteurs de connectivité intra-élément e .
- La connexion $v \rightarrow$ lie le premier sommet v_0^s d'un secteur s au premier du secteur suivant $v_0^{s_{\text{suivant}}}$ seulement s'il n'y a pas de sommet e_i , soit $n_e = 0$, et si le descripteur de connectivité ne décrit aucune connexion externe.
- Les connexions internes $v \nwarrow$ et $v \nearrow$ ne peuvent être spécifiées en même temps (voir Figure 5.10.h).
- Les connexions internes $v_0 \nearrow$ et $e \uparrow$ ne peuvent être spécifiées en même temps (voir Figure 5.13.a).

Nous fixons une restriction sur la connectivité interne inter-élément :

- La connexion $vf \rightarrow$ n'est possible conjointement avec la connexion $v \rightarrow$ que si les bornes du secteur d'insertion des sommets v_i respectent l'inégalité : $X > Y$. Donc si les lignes du secteur d'insertion sont plus grandes que ses colonnes. Par exemple, cette connexion est possible pour la configuration présentée en Figure 5.10.d ($X = 3$ et $Y = 2$) mais pas pour celle de la Figure 5.10.d ($X = Y = 3$).

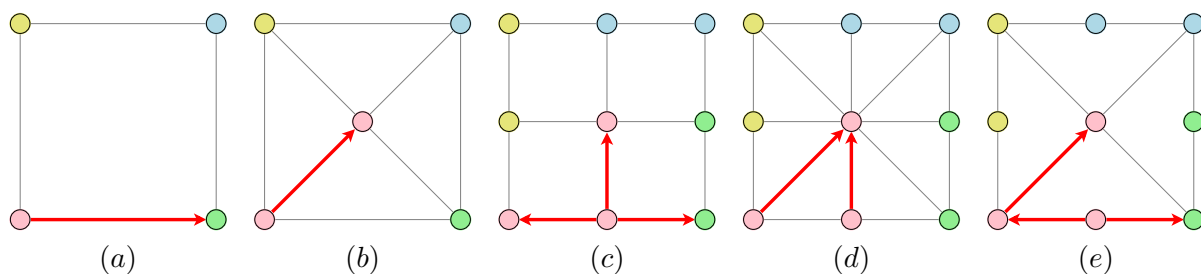


FIG. 5.14 : Quatre exemples de connectivités minimales. Pour ces descripteurs d'insertion, au moins l'une d'elle est requise afin de remplir les contraintes de topologie locale que nous fixons. En (a) la description $\mathcal{I} : (1, 0, 0)$, $\mathcal{C} : v_0 \rightarrow$, en (b) $\mathcal{I} : (1, 0, 1)$, $\mathcal{C} : v f \uparrow$ (topologie du schéma 4–8 de Velho et Zorin [Velh 01]). Les exemples en (b) et en (c) sont décrits par le même descripteur d'insertion $\mathcal{I} : (1, 1, 1)$ avec trois connectivités possibles, $\mathcal{C} : ev \leftrightarrow, ef \uparrow$, $\mathcal{C} : v f \uparrow, ef \uparrow$ et $\mathcal{C} : ev \leftrightarrow, v f \uparrow$.

Enfin, nous fixons trois restrictions sur la connectivité externe :

- Aucune connexion externe ne peut être spécifiée si $\mathcal{C}$ contient l'une de ces connexions : $v_0 \rightarrow$, $e \rightarrow$, $ev \rightarrow$ ou $ev \leftarrow$, voir un exemple en Figure 5.13.b.
- De même que les connexions internes diagonales, les connexions $\mathbf{v} \nearrow$ et $\mathbf{v} \searrow$ ne peuvent être spécifiées en même temps.
- Les connexions $\mathbf{v} \nearrow$ et $\mathbf{v} \searrow$ ne peuvent être spécifiées en même temps que l'une des connexions $v \rightarrow$ et $v_0 \rightarrow$, de même que pour la connexion $\mathbf{f} \downarrow$, voir un exemple en Figure 5.13.c.

Unicité de la composante connexe

De prime abord, afin d'assurer l'unicité de la composante connexe du graphe issu du procédé de subdivision, nous ne pouvons pas laisser un nouveau sommet sans une connexion qui lui est liée. Ainsi, chaque type de sommet v , e ou f doit être associé à une connectivité qui lui est propre. Nous illustrons en Figure 5.14 plusieurs exemples de connectivités, le nombre de ces connexions est minimal et nécessaire à la construction des faces du maillage subdivisé.

Ensuite, outre la question des sommets isolés, un sous-graphe du résultat de la subdivision ne doit pas représenter une composante connexe séparée de l'ensemble. Nous avons précédemment illustré un exemple de ce cas de figure problématique en Figure 5.10.d : en prenant en compte la connexion $v_0 \rightarrow$, un sous-graphe du résultat est présent à l'intérieur de la face, le résultat compte donc deux composantes connexes (celui-ci et les quatre anciennes arêtes qui forment une face identique). Pour ce cas très particulier, une connexion $v_0 \nearrow$ doit être spécifiée. Plus généralement, une de ces quatre connexions doit être spécifiée — si $n_v > 1$ — afin de respecter la contrainte de l'unicité de la composante connexe : $v_0 \nearrow, ev \nwarrow \uparrow \nearrow$. Il s'agit donc d'une contrainte globale sur l'ensemble des connexions spécifiées par le descripteur de connectivité $\mathcal{C}$.

Le respect de ces contraintes assure la planarité locale du graphe représenté par le maillage subdivisé quel que soit le descripteur de connectivité $\mathcal{C}$. La topologie globale du maillage de contrôle est alors préservée. Nous parlons alors de connectivité valide. Le calcul des bornes (X, Y) des secteurs d'insertion des sommets v_i est également motivé par ces considérations de planarité, nous le justifierons en partie 5.3.3, il concerne quant-à-lui le descripteur d'insertion $\mathcal{I}$.

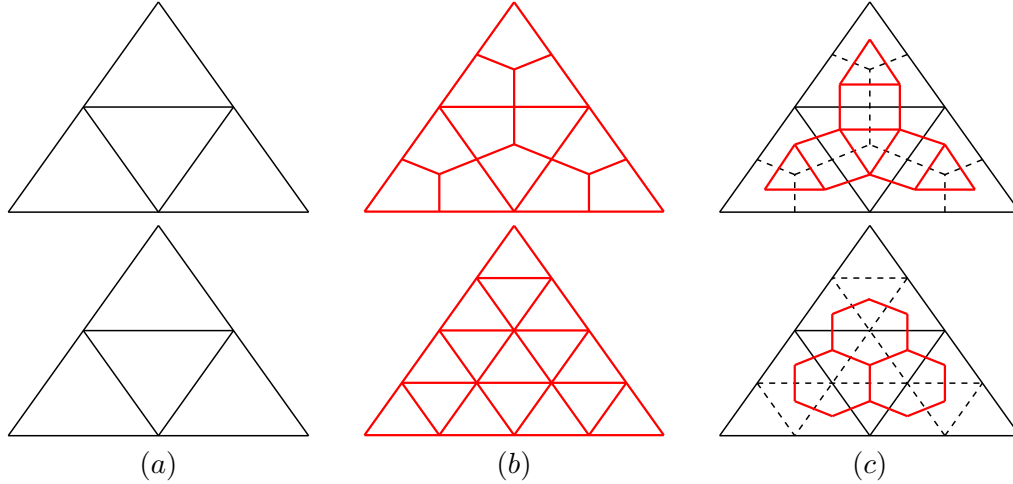


FIG. 5.15 : Le résultat d'une subdivision topologique duale peut être vu comme le maillage dual d'une subdivision primale, c'est le point de vue que nous adoptons. En (a) un maillage de contrôle composé de triangles. Sur la première ligne : en (b) le résultat topologique du schéma de Catmull et Clark et en (c) son maillage dual, qui correspond au résultat topologique du schéma de Doo et Sabin [Doo 78a]. Sur la deuxième ligne le même principe pour (b) le schéma de Loop et (c) le schéma hexagonal de Dyn et al. [Dyn 92].

5.2.4 La subdivision topologique duale

Dans ce document, une subdivision topologique est dite *duale* si les anciens sommets de la face ne sont pas conservés, donc si $n_v = 0$. Ce terme est opposé à la subdivision topologique *primale*. Cependant, notons bien que le fait de spécifier $n_v = 0$ ne transforme pas un maillage subdivisé en son dual. Notre descripteur de subdivision topologique décrit le procédé de construction du dual d'un maillage par : $(\mathcal{I} : (0, 0, 1), \mathcal{C} : \mathbf{f} \downarrow)$. En considérant la subdivision de toutes les faces du maillage par le même descripteur, chaque face du maillage est remplacée par un sommet en son centre, et ces sommets sont reliés si les faces sont adjacentes.

Nous choisissons de traiter le cas de ces subdivisions duales comme étant le maillage dual du résultat d'une subdivision primale du maillage de contrôle. Le fait est que, par construction, notre descripteur n'est pas capable d'insérer des sommets v_i à l'intérieur de la face puisqu'une subdivision duale implique $n_v = 0$. Cette solution nous permet de lever cette limitation. Ceci implique la concaténation de deux descripteurs : la subdivision primale du maillage de contrôle puis le descripteur de maillage dual. Nous reviendrons sur la notion de concaténation de plusieurs descripteurs en partie 5.3.5. Par ailleurs, le dual du maillage issu d'une subdivision primale effectuée sur le maillage de contrôle est similaire au résultat de cette même subdivision primale effectuée sur le dual du maillage de contrôle, sauf éventuellement aux bords. En notant $\mathcal{M}$ le maillage de contrôle, $\mathcal{M}^*$ la transformation duale et $\mathcal{M}'$ la transformation primale, ceci se traduit par : $\mathcal{M}'^*$ est similaire à $\mathcal{M}^{*'}.$ Par exemple, la subdivision topologique du schéma de Doo et Sabin [Doo 78a] est le dual de la subdivision topologique du schéma de Catmull et Clark. De même, le résultat topologique du schéma hexagonal proposé par Dyn et al. [Dyn 92] est le dual du résultat topologique du schéma de Loop, voir Figure 5.15.

Ce formalisme de composition est différent du descripteur régulier proposé dans [Ivri 04a]. Les auteurs proposent d'ajouter une lettre au descripteur : P pour primal et D pour dual. Dans notre formalisme, cette solution aurait pu être appliquée en séparant le sommet v_0 de la description des sommets v_i , nous aurions alors un descripteur d'insertion de cette forme : $\mathcal{I} : (n_{v_0}, n_v, n_e, n_f)$. Nous nous intéresserons par la suite à la concaténation de plusieurs descripteurs, c'est une des raisons pour lesquelles nous avons fait ce choix concernant la subdivision topologique duale.

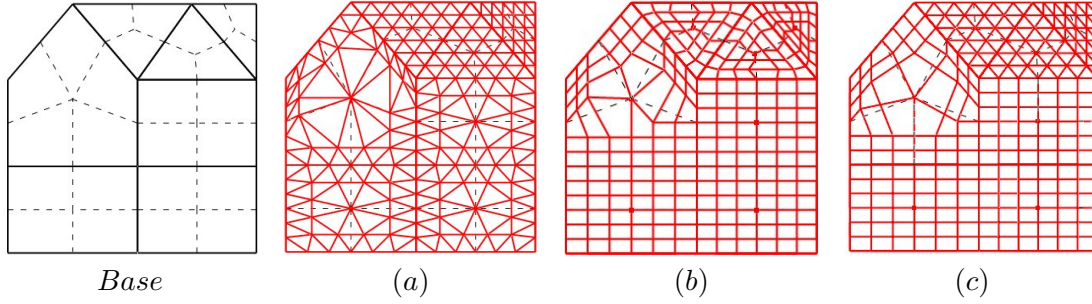


FIG. 5.16 : Exemples de subdivisions topologiques régulières avec $n_e = 5$ pour un comportement (a) triangulaire et (b) quadrangulaire. Les descripteurs d'insertions sont respectivement $\mathcal{I} : (4, 5, 1)$ et $\mathcal{I} : (7, 5, 1)$. Nous adaptons en (c) le comportement de notre descripteur au type des faces du maillage.

5.3 Les possibilités de description de notre système

Nous pouvons décrire un large ensemble de transformations qui n'entrent pas dans le cadre des classifications existantes. Tout d'abord, nous proposons de baser la présentation de notre descripteur sur les subdivisions topologiques régulières, couramment rencontrées dans notre domaine d'étude. Nous aborderons par la suite les subdivisions topologiques irrégulières, existantes ou non. À propos des descriptions régulières, tout comme évoqué précédemment pour le schéma de Catmull et Clark, leur application sur un maillage constitué de faces différentes de celles du pavage régulier concerné est une subdivision topologique irrégulière. Ainsi, notre descripteur de subdivision régulière triangulaire illustré en Figure 5.16.b décrit une subdivision irrégulière si nous l'appliquons sur un maillage constitué de quadrangles ou de pentagones. Par ailleurs, nous pouvons définir un ensemble de subdivisions topologiques *proches* des descriptions régulières, topologiquement parlant. À travers les exemples présentés en Figure 5.17, nous pouvons considérer des chemins dans l'espace de nos descripteurs d'une subdivision topologique régulière vers une autre. Une faible variation dans la description du résultat implique un maillage subdivisé topologiquement proche. Nous discuterons de l'espace des maillages subdivisés pouvant être décrit par notre formalisme en partie 5.3.6.

5.3.1 Les subdivisions topologiques couramment utilisées

Nous présentons ici les possibilités de description de notre méta-schéma à travers l'étude des subdivisions topologiques régulières. La Table 5.2 présente la transcription des descriptions issues de [Ivri 04a] qui remplissent les conditions d'utilité de [Dodg 05]. Nous y ajoutons les descriptions d'arité supérieure TP(4,0) et QP(4,0), car notre descripteur de connectivité ne change pas, sa complexité n'augmente pas avec l'arité d'une description régulière. Nous illustrons ces subdivisions topologiques en Figures 5.18 et 5.19. Nous proposons dans la partie suivante une méthode générale de description des cas réguliers Q/TP($m, 0$) pour m quelconque, puis des cas réguliers tournants Q/TP($m, 1$). Enfin, nous transcrivons les subdivisions topologiques irrégulières existantes introduites dans [Kohl 98] et [Mull 03], voir la Table 5.3.

5.3.2 Description des subdivisions topologiques régulières sans rotation

Nous clarifions ici comment configurer notre méta-schéma afin de construire une subdivision topologique régulière sans rotation. Soient les fonctions $\mathcal{R}_Q$ et $\mathcal{R}_T$ définissant le triplet d'insertion $\mathcal{I} : (n_v, n_e, n_f)$ de notre descripteur en fonction d'une arité n , pour le cas quadrangulaire et triangulaire. Nous définissons également les descripteurs de connectivité associés $\mathcal{C}_Q$ et $\mathcal{C}_T$.

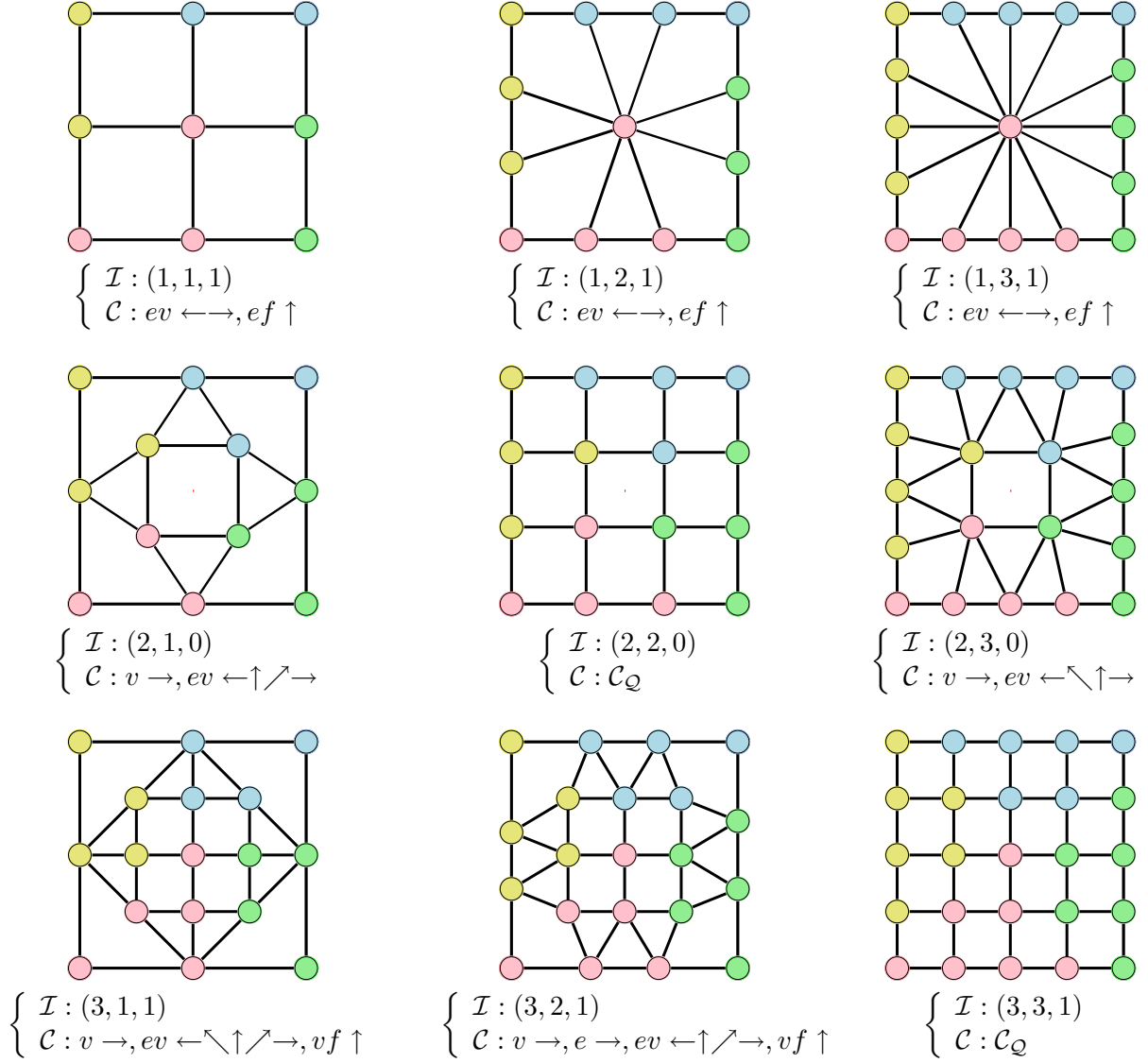


FIG. 5.17 : Notre descripteur peut construire un ensemble varié de subdivisions topologiques irrégulières. Nous illustrons ici plusieurs d'entre elles, de descriptions très proches : nous pouvons alors considérer des chemins de transitions topologiques entre ces trois subdivisions régulières.

$$\mathcal{R}_Q(n) : \begin{cases} n_e = n - 1 \\ n_v = 1 + n_e^2/4 \\ n_f = n_e^2 - 4(n_v - 1) \end{cases} \quad \mathcal{R}_T(n) : \begin{cases} n_e = n - 1 \\ n_v = 1 + (n_e(n_e - 1))/6 \\ n_f = n_e(n_e - 1)/2 - 3(n_v - 1) \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{C}_Q = v \rightarrow, & e \rightarrow, & ev \leftarrow \uparrow \rightarrow, & vf \uparrow \\ \mathcal{C}_T = v \nwarrow \rightarrow, & e \uparrow \rightarrow, & ev \leftarrow \nwarrow \uparrow \rightarrow, & vf \uparrow \rightarrow \end{cases} \quad (5.3)$$

Nous lions l'arité n de la subdivision avec le nombre de sommets d'arêtes n_e , les autres nombres de sommets insérés n_v et n_f sont exprimés naturellement à partir de celui-ci.

Un exemple de ce type de subdivision est illustré en Figure 5.16. En (c) nous adaptons notre descripteur au type de la face à subdiviser, il s'agit d'une subdivision topologique adaptative qui peut être mise en parallèle avec la topologie du schéma de subdivision *Quad-Triangle* [Stam 02].

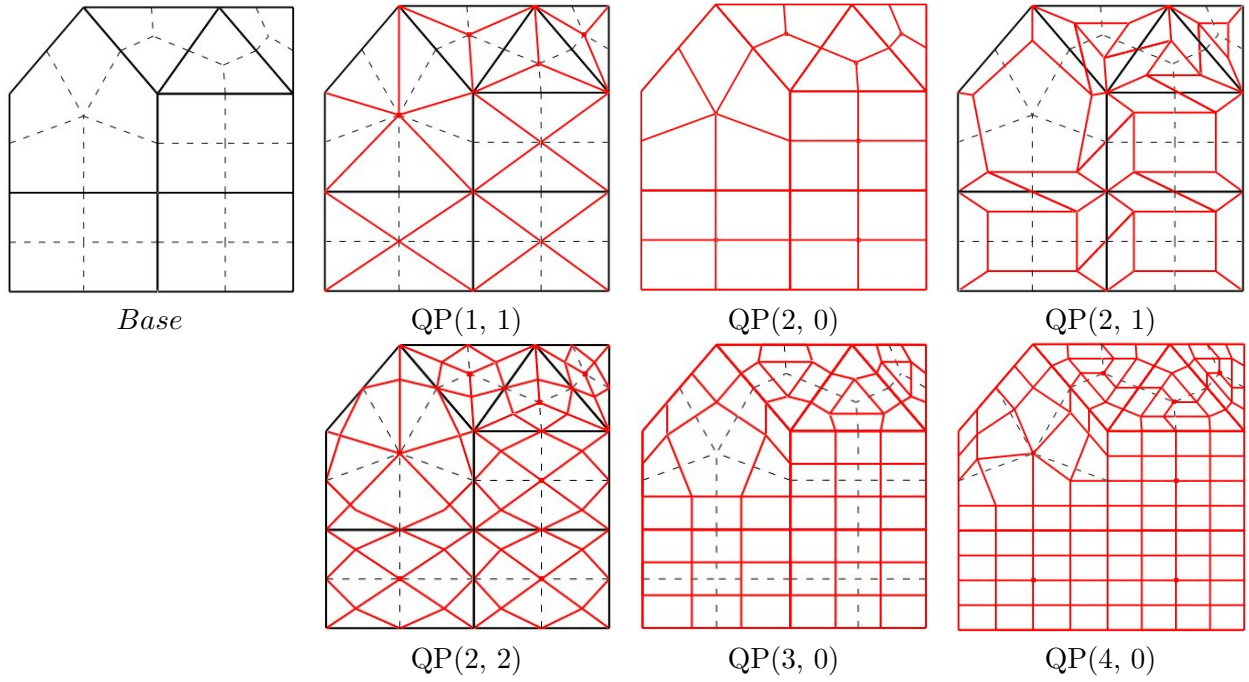


FIG. 5.18 : *Subdivisions topologiques régulières quadrangulaires classées dans [Dodg 05] en utilisant la classification de [Ivri 04a]. Le maillage de contrôle est composé d'un pentagone, de triangles et de quadrangles.*

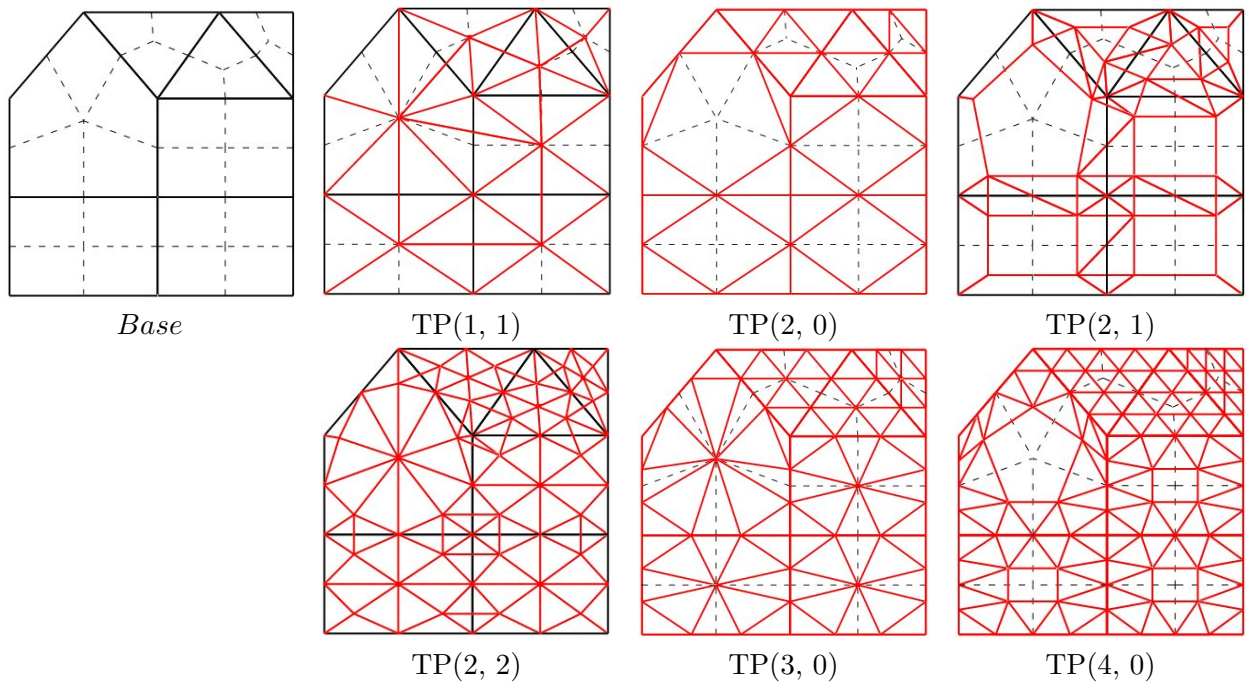


FIG. 5.19 : *Subdivisions topologiques régulières triangulaires classées dans [Dodg 05] en utilisant la classification de [Ivri 04a].*

Descripteur régulier [Ivri 04a]	Nom du schéma	Insertion $\mathcal{I}$	Connexion $\mathcal{C}$
QP(1, 1)	4 – 8	(1, 0, 1)	$vf \uparrow$
QP(2, 0)	Catmull-Clark	(1, 1, 1)	$ve \longleftrightarrow, ef \uparrow$
QP(2, 1)	$\sqrt{5}$	(2, 0, 0)	$v_0 \nearrow, v \uparrow, \mathbf{v} \swarrow$
QP(2, 2)	$\sqrt{8}$	(2, 1, 1)	$v_0 \nearrow, ev \uparrow \nearrow, vf \uparrow$
QP(3, 0)	ternaire	(2, 2, 0)	$\mathcal{C}_Q$
QP(4, 0)	quaternaire	(3, 3, 1)	$\mathcal{C}_Q$
TP(1, 1)	$\sqrt{3}$	(1, 0, 1)	$vf \uparrow, \mathbf{f} \downarrow$
TP(2, 0)	Loop	(1, 1, 0)	$ev \longleftrightarrow, e \uparrow$
TP(2, 1)	$\sqrt{7}$	(2, 0, 0)	$v_0 \nearrow, v \uparrow, \mathbf{v} \swarrow \downarrow$
TP(2, 2)	$\sqrt{12}$	(2, 1, 1)	$v_0 \nearrow, ev \uparrow \nearrow, vf \uparrow, ef \uparrow, \mathbf{v} \downarrow$
TP(3, 0)	Loop ternaire	(1, 2, 1)	$\mathcal{C}_T$
TP(4, 0)	Loop quaternaire	(2, 3, 0)	$\mathcal{C}_T$
Non décrit	–	(2, 3, 1)	n'importe quel $\mathcal{C}$

TAB. 5.2 : Description de la phase topologiques des schémas de subdivision couramment rencontrés, par la classification [Ivri 04a] et notre méta-schéma.

Méta-schéma [Kohl 98]	Méta-schéma [Mull 03]		Insertion $\mathcal{I}$	Connexion $\mathcal{C}$
9	V	VV	(1, 0, 0)	$v_0 \rightarrow$
8	E	EE	(0, 1, 0)	$e \uparrow$
7	VE	VE	(1, 1, 0)	$ev \longleftrightarrow$
7	VE	VE, EE	(1, 1, 0)	$ev \longleftrightarrow, e \uparrow$
5	VF	VF	(1, 0, 1)	$vf \uparrow$
3	VF	VF, VV	(1, 0, 1)	$v_0 \rightarrow, vf \uparrow$
2	EF	EF	(0, 1, 1)	$ef \uparrow$
2	EF	EF, EE	(0, 1, 1)	$e \uparrow, ef \uparrow$
1	VEF	VE, EF	(1, 1, 1)	$ev \longleftrightarrow, ef \uparrow$
1	VEF	VF, EF	(1, 1, 1)	$vf \uparrow, ef \uparrow$
1	VEF	VE, VF	(1, 1, 1)	$ev \longleftrightarrow, vf \uparrow$
1	VEF	VE, EF, VF	(1, 1, 1)	$ev \longleftrightarrow, vf \uparrow, ef \uparrow$
Non décrit	Non décrit		(1, 2, 1)	n'importe quel $\mathcal{C}$

TAB. 5.3 : Description des subdivisions topologiques introduites dans [Kohl 98] et [Mull 03] par notre méta-schéma.

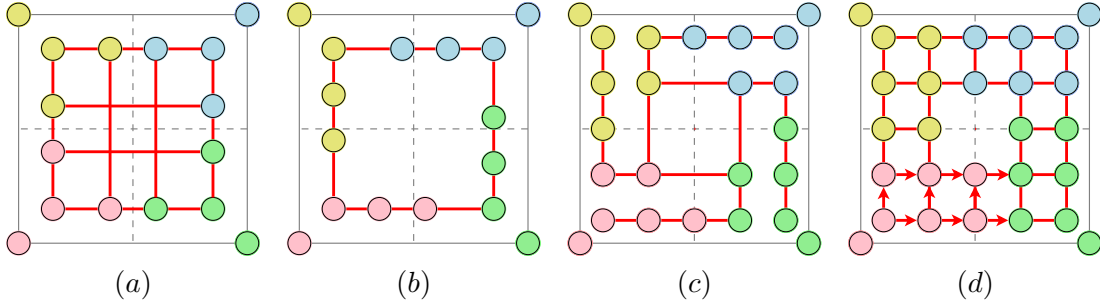


FIG. 5.20 : En (a) la répartition des sommets v_i ($n_v = 4$) donne lieu à des croisements d'arêtes pour certaines descriptions de connectivité valide, ici $\mathcal{C} : v \rightarrow$. Ceci est dû à un mauvais calcul des bornes (X, Y) du tableau, ici $X = Y = 2$. En (b) nous effectuons le calcul correct : $X = 3$, $Y = 1$. En (c) et (d), deux autres exemples de répartition correctes, pour respectivement $n_v = 6$ et $n_v = 7$: $X = 3$, $Y = 2$.

5.3.3 Justification des bornes X et Y du secteur d'insertion des sommets v_i

Maintenant que nous avons présenté le cas des maillages réguliers existants, nous pouvons justifier le calcul des bornes (X, Y) des zones d'insertion donné en (5.1).

L'ordonnancement des sommets v_i , $i \in \llbracket 1, n_v - 1 \rrbracket$ dans le tableau situé dans leur secteur d'insertion dépend de leur mode de remplissage, ici colonne par colonne, et de la taille de ce tableau, les bornes (X, Y) . Le premier sommet v_1 est situé aux coordonnées $(0, 0)$ du tableau ; si $Y > 1$, le second sommet v_2 se situe aux coordonnées $(0, 1)$, sinon en $(1, 0)$ et ainsi de suite. Ces bornes dépendent du nombre de sommets v_i à insérer dans la face, soit $n_v - 1$. Parmi toutes les bornes différentes que nous pourrions prendre, certaines ne sont pas utilisables en pratique. En effet, certaines bornes donnent lieu à des graphes non planaires même si le descripteur de connectivité $\mathcal{C}$ est valide, voir en Figure 5.20.a : certaines arêtes se croisent. Nous définissons ici ces bornes de façon à garantir la planarité locale du graphe résultat pour tout descripteur d'insertion $\mathcal{I}$ couplé à toute connectivité $\mathcal{C}$ valide. D'autre part, notre but est aussi de faciliter la description des subdivisions topologiques régulières à travers notre formalisme, puisqu'il s'agit des subdivisions topologiques les plus utilisées en pratique.

Tout d'abord, afin d'éviter le cas de figure non souhaité du croisement de certaines arêtes, la condition nécessaire est celle-ci : la dernière ligne du tableau, soit les $v_i(x_i, y_i)$ tels que $y_i = Y - 1$, ne doit pas contenir moins de sommets qu'il y en a dans une colonne remplie, soit Y sommets. Ce cas est illustré en Figure 5.20.a, la connexion valide est ici $v \rightarrow$.

Ensuite, parmi les bornes qui respectent cette contrainte, nous choisissons de baser notre analyse sur la description facilitée des subdivisions topologiques régulières non tournantes, décrites par $QP(n, 0)$ et $TP(n, 0)$ [Ivri 04a]. Dans le cas quadrangulaire, nous avons de façon pratique à définir autant de nouveaux sommets e_i qu'il y a de sommets v_i dans une ligne liée à la demi-arête, soit $n_e = X + Y$ sommets. Dans le cas triangulaire, nous avons par contre à définir $n_e = X + Y + 1$. Nous avons donné la définition du nombre de sommets n_v , n_e et n_f à insérer selon la subdivision topologique régulière que nous cherchons à décrire par les équations (5.2). Nous avons donc à choisir entre faciliter l'une de ces deux configurations, la quadrangulaire ou la triangulaire. Nous proposons de retenir le cas quadrangulaire, nous verrons que la contrainte du cas triangulaire est cependant respectée pour de nombreuses descriptions $TP(n, 0)$, jusqu'à la subdivision topologique d'arité $n = 8$, ce qui est une arité très élevée en pratique pour un schéma de subdivision — trop élevée selon les critères définis dans [Dodg 05] —.

Nous cherchons donc une définition minimale des bornes (X, Y) respectant ces différents critères, nous séparons les arités n paires et impaires.

Le cas régulier quadrangulaire $\mathbf{QP}(n, 0)$ avec n impair

Par (5.2) nous avons $n_e = \sqrt{4(n_v - 1)} = 2\sqrt{n_v - 1}$. Notons que $\sqrt{n_v - 1} = \frac{n_e}{2}$ est un entier puisque si n est impair, n_e est pair. Posons le système suivant,

$$\begin{cases} X + Y = 2\sqrt{n_v - 1} \\ X \cdot Y \geq n_v - 1, \end{cases} \quad (5.4)$$

Les valeurs minimales de X et Y solutions sont :

$$\begin{cases} Y = \sqrt{n_v - 1} \\ X = \sqrt{n_v - 1} \end{cases} \quad (5.5)$$

Le cas régulier quadrangulaire $\mathbf{QP}(n, 0)$ avec n pair

Nous avons $n_e = \sqrt{4(n_v - 1) + 1}$. Par ailleurs,

$$\begin{cases} \sqrt{4(n_v - 1) + 1} \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \lfloor \sqrt{4(n_v - 1)} \rfloor = \sqrt{4(n_v - 1) + 1} - 1 \\ \Rightarrow \lfloor \sqrt{4(n_v - 1)} \rfloor = n_e - 1 \\ \Rightarrow n_e = 2\lfloor \sqrt{n_v - 1} \rfloor + 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} X + Y = 2\lfloor \sqrt{n_v - 1} \rfloor + 1 \\ X \cdot Y \geq n_v - 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Le couple (X, Y) solution de valeur minimale de ces deux ensembles est, pour tout n :

$$\begin{cases} Y = \lfloor \sqrt{n_v - 1} \rfloor \\ X = \lceil \frac{n_v - 1}{Y} \rceil \end{cases} \quad (5.8)$$

Cette expression implique également notre première contrainte de planarité locale : la dernière ligne du tableau contient au moins autant d'éléments qu'il y en a dans une colonne remplie. En effet, cette dernière contient $\lfloor \frac{n_v - 1}{Y} \rfloor$ sommets, et nous avons $\forall n_v \geq 1 : Y \leq \lfloor \sqrt{n_v - 1} \rfloor$, donc notre contrainte $\lfloor \frac{n_v - 1}{Y} \rfloor \geq Y$.

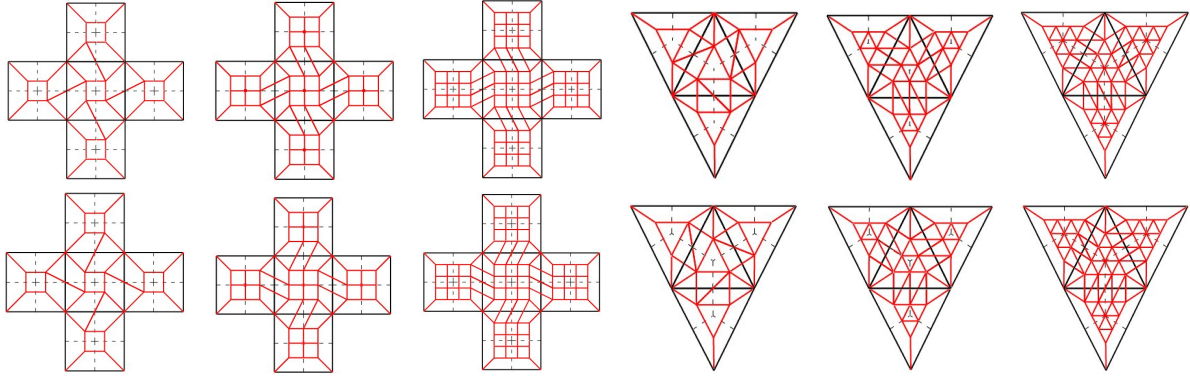


FIG. 5.21 : Subdivisions régulières tournantes $Q/TP(n,1)$ et $Q/TP(1,n)$ pour, de gauche à droite : $n = 2, 3, 4$. En haut la rotation du pavage est trigonométrique, réalisée grâce à la connexion externe $v \searrow$, en bas elle est anti-trigonométrique et correspond à la direction $v \swarrow$. Le procédé reste indépendant du type de la face à subdiviser.

5.3.4 Les subdivisions régulières tournantes $Q/TP(n,1)$ et $Q/TP(1,n)$

Outre les subdivisions topologiques régulières sans rotation analysées précédemment, certains schémas de subdivision existants utilisent une description tournante, tels que les schémas $\sqrt{3}$, $4 - 8$, $\sqrt{5}$ par exemple. Tous ceux-ci correspondent aux descriptions régulières de type $Q/TP(n,1)$, n étant généralement peu élevé. En nous basant sur la simple observation de ressemblance entre ces subdivisions topologiques et les subdivisions topologiques sans rotation, nous en proposons ici une description exhaustive. À noter que le pavage peut avoir deux sens de rotation, trigonométrique ou non, voir Figure 5.21. Le schéma de subdivision $\sqrt{5}$ utilise une rotation anti-trigonométrique.

Ainsi, à travers notre formalisme, la description de ces subdivisions régulières est similaire aux cas réguliers sans rotation mis à part trois choses : il n'y a pas de sommet inséré par rapport aux arêtes des faces, donc $n_e = 0$. Les sommets v_0 sont liés au sommet suivant v_1 . Enfin nous avons besoin des connexions externes $\mathbf{v} \swarrow$ ou $\mathbf{v} \searrow$ (ainsi que $\mathbf{v} \downarrow$ dans le cas triangulaire). Le choix de l'une d'elle influe sur le sens de rotation du pavage, voir Figure 5.21. Ainsi, les subdivisions régulières tournantes de type $Q/TP(n,1)$ sont décrites par notre méta-schéma par les descripteurs d'insertion $\mathcal{R}'_{Q/T}$ et de description $\mathcal{C}'_{Q/T}$ suivants,

$$\mathcal{R}'_{Q(n)} : \begin{cases} n_v = 1 + (n-1)^2/4 \\ n_e = 0 \\ n_f = (n-1)^2 - 4(n_v - 1) \end{cases} \quad \mathcal{R}'_{T(n)} : \begin{cases} n_v = 1 + ((n-1)(n-2))/6 \\ n_e = 0 \\ n_f = (n-1)(n-2)/2 - 3(n_v - 1) \end{cases} . \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} \mathcal{C}'_Q &= v_0 \swarrow, \quad v \uparrow \rightarrow, \quad vf \uparrow, \quad \mathbf{v} \swarrow - \searrow \\ \mathcal{C}'_T &= v_0 \swarrow, \quad v \searrow \uparrow \rightarrow, \quad vf \uparrow \rightarrow, \quad \mathbf{v} \downarrow \swarrow - \searrow \end{cases} . \quad (5.10)$$

Ainsi, un grand nombre de subdivisions topologiques régulières peuvent être décrites par notre méta-schéma. Elles ne constituent néanmoins que des cas particuliers parmi les subdivisions topologiques que nous pouvons décrire. Cependant, toutes les subdivisions régulières ne peuvent être décrites par un simple descripteur $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$; en particulier, il nous est impossible de décrire les subdivisions régulières $Q/TP(m,n)$ pour $m, n \geq 2$ mis à part $Q/TP(2,2)$, nous reviendrons sur ces limitations en partie 5.4. Il est alors possible de considérer une subdivision topologique comme étant le résultat de plusieurs descriptions successives. La partie suivante analyse ce point de vue, qui étend grandement les possibilités de description de notre méta-schéma.

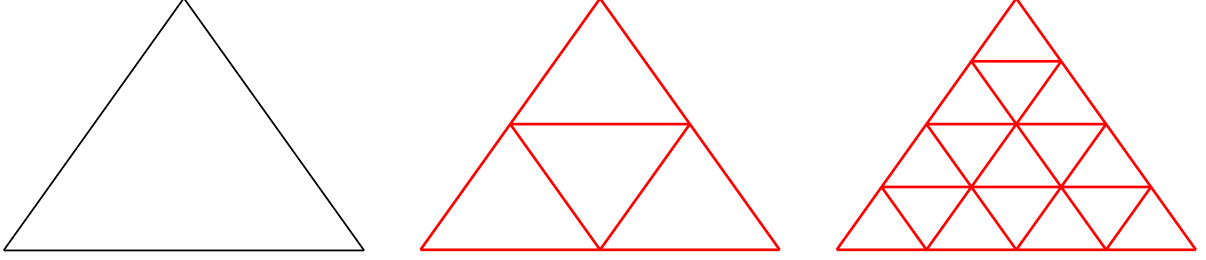


FIG. 5.22 : Le résultat de deux subdivisions topologiques successives du schéma de Loop conduit à un résultat correspondant à la topologie du schéma de Loop quaternaire.

5.3.5 Concaténation de descripteurs

Il est possible de concaténer les descripteurs de subdivisions topologiques et ainsi modéliser de nombreux cas plus complexes : de très nombreux cas irréguliers ainsi qu'un grand nombre de subdivisions régulières non abordées jusqu'à présent. Cette concaténation de descripteurs revient à considérer une subdivision topologique comme le résultat de plusieurs subdivisions successives du maillage de contrôle. Dans [Mull 03], le nombre de subdivisions successives est nommé *ordre* de la description. La concaténation de tous les descripteurs possibles mène à un ensemble de résultats très vaste, nous donnerons les bases d'une analyse de cet ensemble en partie 5.3.6.

Comme exposé en partie 5.2.4, nous pouvons décrire la subdivision topologique duale par la concaténation d'un descripteur primal avec le descripteur dual $(\mathcal{I} : (0, 0, 1), \mathcal{C} : \mathbf{f} \downarrow)$. Nous noterons cette concaténation de la façon suivante : $(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \oplus (\mathcal{I} : (0, 0, 1), \mathcal{C} : \mathbf{f} \downarrow)$, $\oplus$ étant notre opérateur de concaténation. Cette concaténation nous permet de décrire les subdivisions topologiques duales existantes. Par ailleurs, de par la symétrie centrale des sommets que nous insérons, la composition de deux subdivisions duales revient à considérer une subdivision primale. De plus, la composition de cet opérateur avec une subdivision topologique irrégulière peut conduire à une subdivision régulière, voir Figure 5.23.

Comme précédemment, nous nous intéressons tout d'abord au cas des subdivisions régulières, en utilisant les notations de la classification [Ivri 04a] $\mathbf{Q}/\mathbf{TP}(m, n)$ que nous traduirons dans notre formalisme de description. Par exemple, la subdivision successive d'ordre 2 d'un maillage par le schéma de Loop conduit à un résultat topologique pouvant être décrit par le schéma de Loop quaternaire, voir Figure 5.22. Ce que nous pouvons noter, dans ce formalisme puis dans le nôtre :

$$\begin{aligned} \mathbf{TP}(2, 0) &\oplus \mathbf{TP}(2, 0) = \mathbf{TP}(4, 0) \\ (\mathcal{I} : (1, 1, 0), \mathcal{C}_{\mathcal{T}}) &\oplus (\mathcal{I} : (1, 1, 0), \mathcal{C}_{\mathcal{T}}) = (\mathcal{I} : (2, 3, 0), \mathcal{C}_{\mathcal{T}}) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pour un descripteur régulier $\mathbf{Q}/\mathbf{TP}(m, n)$, avec $m, n \in \mathbb{N}^{*+}$, nous pouvons déterminer l'arité $a_{\mathbf{Q}/\mathcal{T}}$ et l'angle de la rotation du pavage $\varphi_{\mathbf{Q}/\mathcal{T}}$,

$$\begin{cases} a_{\mathbf{Q}} = \sqrt{m^2 + n^2} & a_{\mathcal{T}} = \sqrt{(m + n/2)^2 + (\sqrt{3}n/2)^2} \\ \varphi_{\mathbf{Q}} = \arctan(n/m) & \varphi_{\mathcal{T}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}n/2}{m + \frac{n}{2}}\right) . \end{cases} \quad (5.12)$$

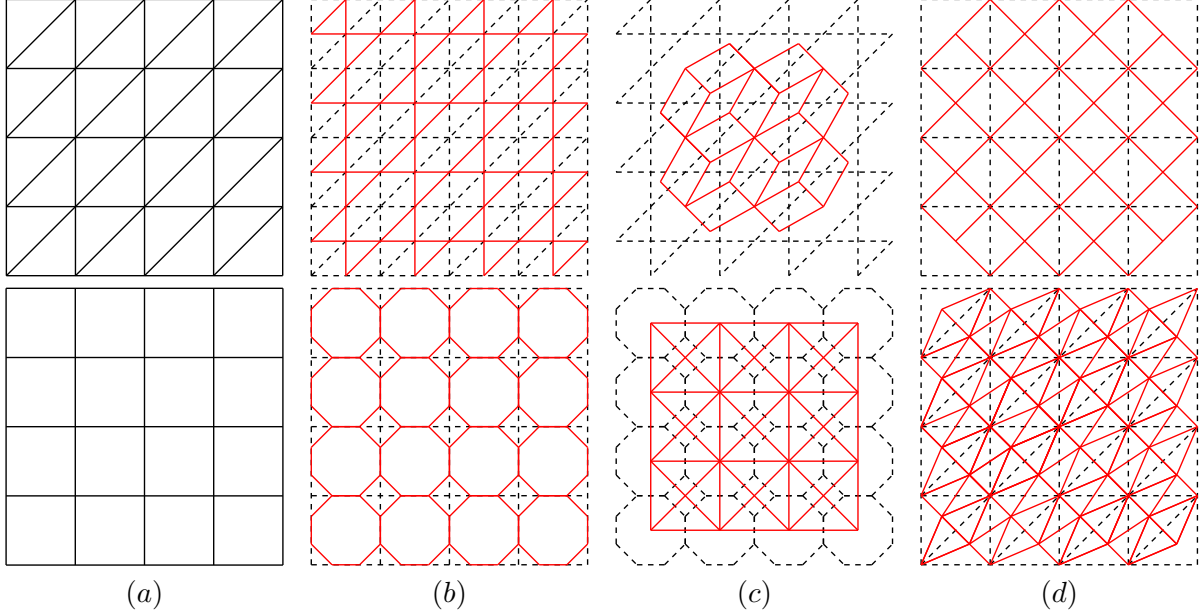


FIG. 5.23 : La concaténation de deux descripteurs irréguliers peut conduire à une description de subdivision régulière. Sur la première ligne en (a) un maillage régulier triangulaire (les triangles ne sont pas équilatéraux). Nous le subdivisons en (b) par le descripteur irrégulier ($\mathcal{I} : (0, 1, 0), \mathcal{C} : e \uparrow$). Nous concaténons ce descripteur avec le dual en (c) : nous obtenons alors un maillage uniquement composé de quadrangles correspondant au descripteur ($\mathcal{I} : (1, 0, 1), \mathcal{C} : vf \uparrow$), qui n'est autre que le descripteur régulier quadrangulaire $QP(1, 1)$ (d) (le schéma 4 – 8). Sur la deuxième ligne, à l'inverse, la composition du descripteur ($\mathcal{I} : (0, 2, 0), \mathcal{C} : e \uparrow \rightarrow$) en (b) et de l'opérateur dual en (c) génère un maillage triangulaire à partir d'un maillage quadrangulaire régulier. Ce descripteur est ($\mathcal{I} : (1, 0, 1), \mathcal{C} : vf \uparrow \mathbf{f} \downarrow$), il s'agit du descripteur régulier triangulaire $TP(1, 1)$ (d) (le schéma $\sqrt{3}$).

Le résultat d'une concaténation de descripteurs de subdivisions topologiques régulières peut être considéré du point de vue de ces caractéristiques. Nous pouvons écrire, par un rapide examen géométrique, voir Figure 5.24, pour la concaténation des deux descripteurs D_1 et D_2 :

$$D_1(a_1, \varphi_1) \oplus D_2(a_2, \varphi_2) = D_3(a_1 a_2, \varphi_1 + \varphi_2) . \quad (5.13)$$

Plus généralement, en considérant le descripteur régulier quadrangulaire $QP(m, n)$ tel que $QP(m, n) = QP(o, p) \oplus QP(q, r)$ nous obtenons :

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = (o^2 + p^2)(q^2 + r^2) \\ n/m = \left| \frac{or + pq}{pr - oq} \right| \text{ si } pr \neq oq \\ m = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = |pr - oq| \\ n = or + pq \end{cases} . \quad (5.14)$$

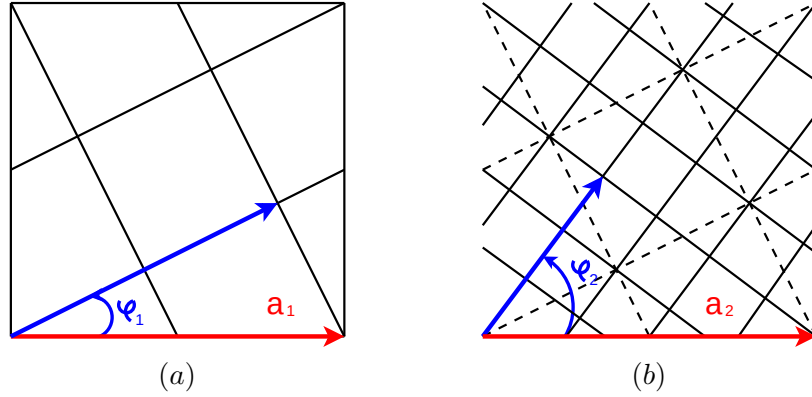


FIG. 5.24 : Subdivision topologique d'une face quadrangulaire de description (a) $QP(1, 2)$. En (b), nous concaténons deux de ces descripteurs afin d'obtenir la description $QP(3, 4)$.

La relation n/m nous est donnée par la formule de trigonométrie $\tan(x + y) = (\tan(x) + \tan(y))/(1 - \tan(x)\tan(y))$. La concaténation de deux descripteurs triangulaires réguliers suit le même raisonnement.

Dans notre formalisme de description la relation précédente se traduit par :

$$(\mathcal{I} : (n_{v1}, n_{e1}, n_{f1}), \mathcal{C}_Q) \oplus (\mathcal{I} : (n_{v2}, n_{e2}, n_{f2}), \mathcal{C}_Q) = (\mathcal{I} : (n_v, (n_{e1} + 1)(n_{e2} + 1) - 1, n_f), \mathcal{C}_Q), \quad (5.15)$$

où, d'après (5.2), n_f et n_v peuvent être déterminés à partir de n_e . Notons par ailleurs que deux subdivisions primales régulières sont commutatives. La Table 5.4 présente quelques exemples de concaténations de descripteurs réguliers quadrangulaires $QP(m, n)$; rappelons que ces descriptions régulières ne représentent que des cas particuliers de subdivisions topologiques descriptibles par notre méta-schéma. Puisque notre formalisme de description étend les méta-schémas existants, nous pouvons également intégrer les descriptions de [Mull 03] construites par concaténation, voir le récapitulatif présenté en Table 5.5.

Nos descripteurs ne peuvent représenter la subdivision topologique régulière $QP(4, 2)$, le descripteur d'insertion correspondrait à $\mathcal{I} : (5, 1, 1)$, mais nous ne pouvons pas déterminer de descripteur de connectivité satisfaisant. Celle-ci est cependant accessible dans notre formalisme par concaténation : $QP(4, 2) = QP(2, 0) \oplus QP(2, 1)$, ce qui se traduit par :

$$(\mathcal{I} : (1, 1, 1), \mathcal{C} : ev \longleftrightarrow, ef \uparrow) \oplus (\mathcal{I} : (2, 0, 0), \mathcal{C} : v_0 \nearrow \rightarrow, v \rightarrow, \mathbf{v} \swarrow).$$

Ainsi, la concaténation de plusieurs descripteurs enrichit les possibilités de description de notre méta-schéma. Toutes les subdivisions topologiques régulières ne peuvent être décrites par concaténation, celles dont les paramètres (m, n) ne permettent pas la décomposition (5.14). Cependant, les subdivisions topologiques irrégulières descriptibles par ce moyen sont très nombreuses. La partie suivante traite de l'exploration de l'espace des maillages accessibles à notre formalisme de description.

Premier	Second	$\oplus$	Premier	Second	$\oplus$
QP(o, p)	QP(q, r)	QP(pr-oq , or+pq)	QP(2, 1)	QP(1, 1)	QP(1, 3)
QP(o, p)	QP(p, o)	QP(0, $o^2 + p^2$)	QP(3, 1)	QP(1, 1)	QP(3, 4)
QP(o, p)	QP(x, 0)	QP(x.o, x.p)	QP(2, 1)	QP(2, 1)	QP(3, 4)
QP(o, 0)	QP(1, 1)	QP(o, o)	QP(2, 2)	QP(2, 2)	QP(0, 8)
QP(o, 0)	QP(2, 1)	QP(2o, o)	QP(3, 3)	QP(3, 3)	QP(0, 18)

TAB. 5.4 : *Exemples de concaténation de deux descriptions régulières quadrangulaires primales. La troisième colonne est le résultat de la concaténation des deux premières.*

Descripteur [Kohl 98]	Descripteur [Mull 03]		Insertion $\mathcal{I}$	Connexion $\mathcal{C}$
12	VEF1/F	VE, EF	$(1, 1, 1) \oplus (0, 0, 1)$	$ev \longleftrightarrow, ef \uparrow$
11	EF2/F	EF, EE	$(2, 0, 0)$	$v_0 \nearrow, v \rightarrow$
10	VF2/F	VF, VV	$(1, 0, 1) \oplus (0, 0, 1)$	$v_0 \rightarrow, v \rightarrow, vf \uparrow$
5	E/EF2	EF, EE	$(2, 0, 1)$	$v \rightarrow, vf \uparrow, \mathbf{v} \downarrow$
6	VE2/F	VE, EE	$(1, 1, 0) \oplus (0, 0, 1)$	$e \uparrow, ev \longleftrightarrow$
3	F/VF2	VF, VV	$(1, 0, 1)$	$vf \uparrow, \mathbf{f} \downarrow$
-	-	-	$(2, 0, 1)$	$vf \uparrow, \mathbf{f} \downarrow$

TAB. 5.5 : *Description par notre méta-schéma des subdivisions topologiques irrégulières complexes introduites par [Kohl 98] et [Mull 03].*

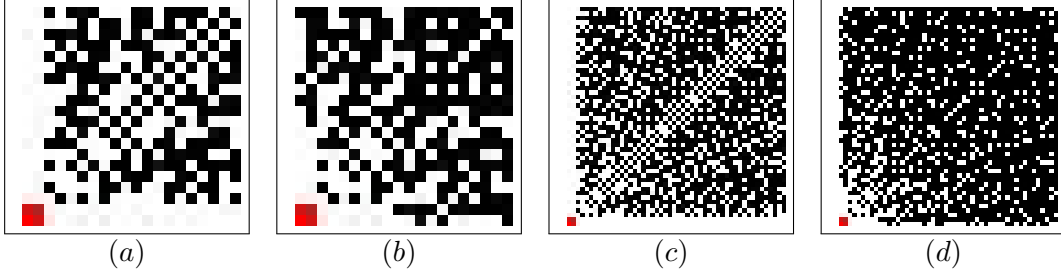
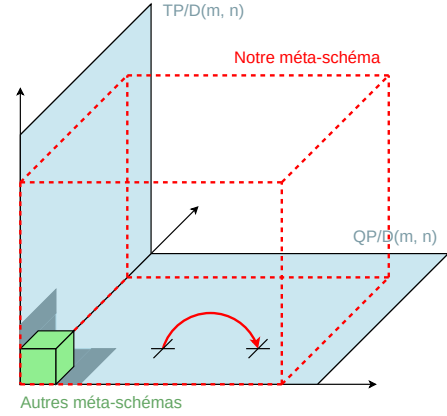


FIG. 5.25 : Espace des modélisations régulières quadrangulaires $QP(m, n)$ en (a) et (c), et triangulaires $TP(m, n)$ en (b) et (d), m en abscisse et n en ordonnée. Les points blancs représentent les subdivisions topologiques que nous pouvons décrire dans notre formalisme. La visualisation est limitée à 20 valeurs pour (a) et (b) et à 50 en (c) et (d). Nous repérons en rouge les subdivisions régulières descriptibles par les méta-schémas existants sans concaténation.

5.3.6 Étude de l'espace des descriptions possibles

Nous considérons ici le moyen de représenter l'espace des maillages que nous pouvons générer par une subdivision topologique décrite par notre méta-schéma. Celui-ci généralise les méta-schémas existants et est capable de décrire un grand nombre de subdivisions topologiques régulières, voir Figure 5.25. Il ne peut cependant pas les décrire toutes. Ainsi, de façon conceptuelle, nous pouvons représenter cet ensemble des descriptions possibles par la figure ci-contre : deux plans infinis (m, n) correspondent aux descriptions régulières quadrangulaires et triangulaire $Q/T(m, n)$, primales ou duales. Nous laissons ici de côté les subdivisions hexagonales, duales topologiques des subdivisions triangulaires.



L'espace de description de notre méta-schéma (représenté en rouge sur la figure) comprend un certain nombre de subdivisions topologiques régulières, cet espace et les deux plans (m, n) sont donc connexes. Les méta-schémas, potentiellement à l'origine de subdivisions topologiques irrégulières, possèdent cependant une capacité de description extérieure à ces plans. Notre espace de description englobe celui des méta-schémas existants (représenté en vert). À noter que, toujours de façon conceptuelle, si la Figure 5.17 suggérait précédemment des chemins de transformations topologiques irrégulières entre les subdivisions régulières, ces chemins seraient ici représentés en dehors des deux plans, tel que nous l'avons illustré par une flèche rouge entre deux descriptions régulières $QP/D(m, n)$. Cette description est bien sûr très schématique, il faudrait, entre autres considérations, ajouter à cela une dimension supplémentaire concernant les types de faces auxquelles les descripteurs peuvent s'appliquer.

Parmi les subdivisions régulières décrites par [Ivri 04a] non abordées jusqu'à présent figurent les subdivisions mixtes : $Q/TM(m, n)$, où m et n peuvent prendre des valeurs non-entières. Cette fois, nous sommes incapables de décrire une seule de ces subdivisions topologiques. Par construction, nous ne pouvons décrire que les subdivisions possédant une symétrie centrale par rapport au centre de la face. Or, ces subdivisions régulières mixtes sont potentiellement asymétriques. Cependant, aucun schéma connu n'utilise ce type de subdivision topologique et elles ne font pas partie des critères d'utilité de [Dodg 05] (espace représenté en bleu foncé sur la figure, sur les deux plans des descriptions de subdivisions régulières (m, n)).

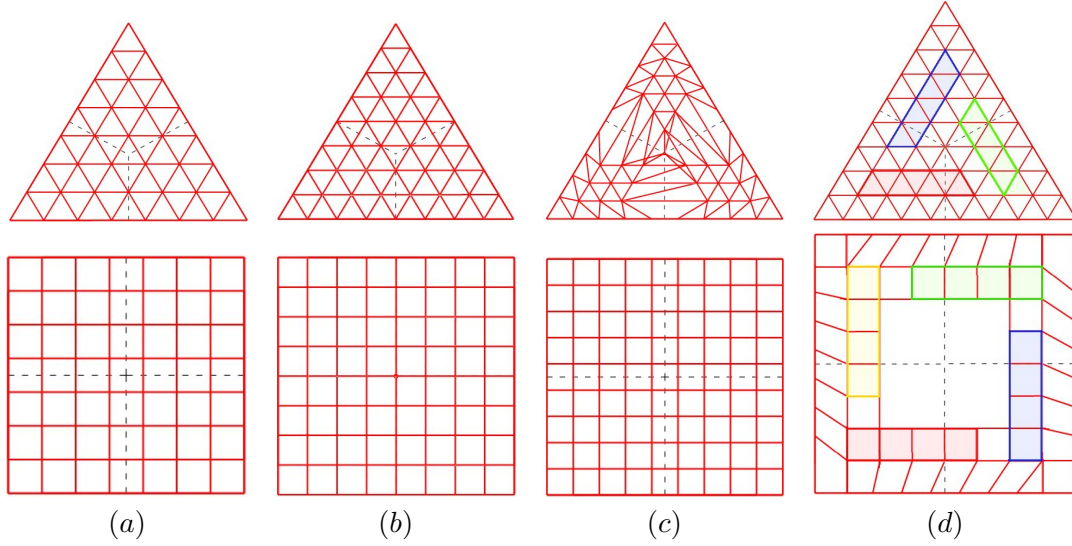


FIG. 5.26 : Subdivisions régulières correspondant au descripteur d'insertion : (a) $\mathcal{I} : (6, 6, 0)$, (b) $\mathcal{I} : (8, 7, 0)$ et (c) $\mathcal{I} : (10, 8, 1)$ en haut, (a) $\mathcal{I} : (10, 6, 0)$, (b) $\mathcal{I} : (13, 7, 1)$ et (c) $\mathcal{I} : (17, 8, 0)$ en bas, pour respectivement le cas triangulaire et quadrangulaire. Nous remarquons que la répartition proposée des sommets v_i dans le secteur d'insertion n'est pas adaptée pour le cas triangulaire à partir de l'arité 9 (c). La connexion problématique est d'ailleurs interdite par l'une de nos contraintes de planarité. Certains sont cependant accessibles par composition d'opérateurs. Un calcul des bornes correctes pour le cas triangulaire ne règle pas le problème : en (d) le cas quadrangulaire est alors inadapté.

5.4 Limitations de notre système de description

Le secteur d'insertion des sommets v_i

Comme exposé en partie 5.2.1, notre protocole d'insertion des sommets v_i dans la face est basé sur les bornes (X, Y) du tableau bi-dimensionnel lié à leur secteur d'insertion, lui-même lié à une demi-arête de la face. Ces bornes sont influencées par le comportement des subdivisions régulières quadrangulaires $QP(m, 0)$, où dans notre formalisme, nous avons à faire correspondre n_e sommets e_i avec $X + Y$ sommets v_i . Or, le comportement régulier triangulaire implique la mise en correspondance de n_e sommets e_i avec $X + Y - 1$ sommets v_i . En conséquence, nous ne pouvons pas décrire la subdivision $TP(m, 0)$ lorsque $m > 8$ sans la concaténation de plusieurs descripteurs, voir Figure 5.26. Nous pouvons par contre imaginer, du point de vue de l'implémentation, une répartition automatique des sommets selon le type de face rencontrée.

Subdivisions topologiques régulières que nous ne pouvons pas décrire

De par l'équation (5.14), nous ne pouvons pas décrire les subdivisions régulières $Q/TP(n, m)$ avec $n, m > 2$, exceptée la description $Q/TP(2, 2)$, autrement que par la concaténation de plusieurs descripteurs. Dans le cas quadrangulaire, nous pouvons décrire une subdivision $QP(m, n)$ seulement s'il existe un couple valide $(o, p), (q, r)$ tel que $n = |pr - oq|$ et $m = or + pq$. Les descriptions $T/QP(3, 2)$ et $T/QP(2, 3)$ sont des exemples de subdivisions que nous ne pouvons pas décrire par notre méta-schéma. Enfin, comme exposé précédemment, nous ne pouvons pas décrire les subdivisions régulières mixtes $Q/TM(m, n)$ car elles sont potentiellement asymétriques, et nous ne pouvons construire que des configurations à symétrie centrale par rapport au centre de la face, de par notre prise en compte unifiée des demi-arêtes.

5.5 Application pratique de notre méta-schéma

Nous abordons dans cette partie certaines considérations pratiques sur l'utilisation de notre méta-schéma. Tout d'abord, nous en proposons un modèle d'implémentation. Le point de vue local du système vis-à-vis d'une face du maillage et à son voisinage direct nous permet d'introduire un algorithme de construction relativement intuitif. Ensuite, nous introduisons une méthode de lissage automatique de la géométrie générée par un couple de descripteurs $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Celle-ci est basée sur une répartition uniforme des sommets v_i dans la face, puis sur un filtrage passe-bas de la géométrie des sommets insérés.

5.5.1 Un modèle d'implémentation

Nous proposons ici un modèle d'implémentation de notre méta-schéma en vue de son application sur un maillage dont la structure est basée sur des demi-arêtes. Cet algorithme construit les nouvelles faces $\mathcal{F}'_i \in \mathcal{M}'$ définies par la subdivision de $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$ décrite par un couple de description $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Nous admettrons que les relations d'adjacence entre les différents sommets sont connues, nous les avons définies en partie 5.2.2. De plus, nous admettrons que les contraintes de planarité définies en partie 5.2.3 sont respectées, donc nous ne prenons en compte ici que les couples de descripteurs $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ valides : la connectivité est au moins minimale et elle décrit un graphe localement planaire ; ce qui implique que chaque cycle de ce graphe, c'est-à-dire chaque face du maillage subdivisé, est minimal. Nous séparons naturellement notre algorithme en trois phases de création : l'insertion des nouveaux sommets, la création des nouvelles arêtes et la définition des nouvelles faces du maillage subdivisé $\mathcal{F}'_i$.

Algorithme 5.1 : Création des nouvelles faces $\mathcal{F}'_i$ décrites par $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$

Require: $(\mathcal{I} : (n_v, n_e, n_f), \mathcal{C})$ est valide

— *Initialisation*

$\mathcal{F}'_i \leftarrow \{\emptyset\}$

liste_sommets $\leftarrow \{\emptyset\}$

liste_demi-arêtes $\leftarrow \{\emptyset, \emptyset\}$ — *Sommet source et sommet suivant*

liste_faces $\leftarrow \{\emptyset\}$

$Y \leftarrow \lfloor \sqrt{n_v - 1} \rfloor$

$X \leftarrow \lceil \frac{n_v - 1}{Y} \rceil$

compteur $\leftarrow 0$

— *Création des nouveaux sommets décrits par $\mathcal{I}$*

if $n_f > 0$ **then**

 liste_sommets $\leftarrow f$

end if

for all demi-arêtes $i \in \mathcal{F}$ **do**

if $n_v > 0$ **then**

 liste_sommets $\leftarrow v_0^i$

```

    for  $j = 1$  to  $n_v - 1$  do
        liste_sommets  $\leftarrow v_j^i(j/Y, j \% Y)$ 
    end for
end if
if  $n_e > 0$  then
    for  $j = 0$  to  $n_e - 1$  do
        liste_sommets  $\leftarrow e_j^i$ 
    end for
end if
end for

— Création des nouvelles arêtes décrites par  $\mathcal{C}$ 
for all sommets  $s_i \in \text{liste\_sommets}$  do
    for all connectivité  $c \in \mathcal{C}$  do
        — Structure en demi-arête : procédures Création et Suivantvoisin  $\leftarrow \text{Adjacence}(s_i, c)$ 
        if voisin  $\neq \{\emptyset\}$  then
            demi-arête[2compteur+0]  $\leftarrow \text{Création}(s_i, \text{voisin})$ 
            demi-arête[2compteur+1]  $\leftarrow \text{Création}(\text{voisin}, s_i)$ 
            liste_demi-arêtes  $\leftarrow \text{demi-arête}_{[2compteur+0]}, \text{demi-arête}_{[2compteur+1]}$ 

            — Mise à jour du chaînage des demi-arêtes
            précédent  $\leftarrow \text{Trouver}(\text{liste\_demi-arêtes}, v_i)$ 
            Suivant(précédent)  $\leftarrow \text{demi-arête}_{[2compteur+0]}$ 
            précédent  $\leftarrow \text{Trouver}(\text{liste\_demi-arêtes}, \text{voisin})$ 
            Suivant(précédent)  $\leftarrow \text{demi-arête}_{[2compteur+1]}$ 

            — Demi-arête suivante
            compteur  $\leftarrow \text{compteur} + 2$ 
        end if
    end for
end for

— Création des nouvelles faces, cycles minimaux du nouveau graphe
compteur  $\leftarrow 0$ 
for all nouvelles demi-arêtes[i] do
    if demi-arêtes[i]  $\notin \text{liste\_faces}$  then
        face  $\leftarrow \{\emptyset\}$ 
        suivant  $\leftarrow \text{Suivant}(\text{demi-arêtes}_{[i]})$ 
        while suivant  $\neq \text{demi-arêtes}_{[i]}$  do
            face  $\leftarrow \text{suivant}$ 
            suivant  $\leftarrow \text{Suivant}(\text{suivant})$ 
        end while
        liste_faces  $\leftarrow \text{face}$ 
    end if
end for

```

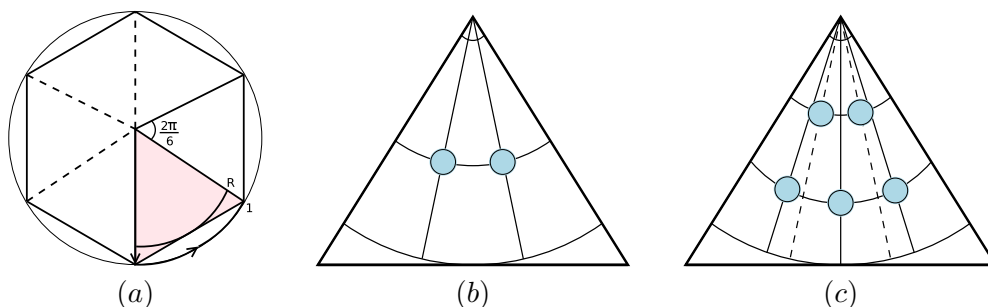


FIG. 5.27 : Tout d'abord, nous construisons une face de référence sur le cercle unitaire (a). Nous considérons ensuite les zones inscrites dans le cercle de rayon $R = \cos(\pi/|\mathcal{F}|)$. Enfin, nous ordonnons dans ces secteurs les sommets v_i de façon uniforme en coordonnées polaires. En (b) nous insérons deux sommets : $n_v = 3$ et en (c) cinq sommets : $n_v = 6$.

5.5.2 Une phase de lissage géométrique générale à tous nos descripteurs

En tant que phase finale de notre système de description, nous proposons une méthode générale de lissage géométrique des maillages subdivisés, résultats de l'application d'un couple de descripteurs $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. La question de la définition d'un masque de subdivision général, au sens du masque d'un schéma de subdivision, est très complexe de par la diversité des configurations topologiques que nous pouvons décrire. Nous proposons donc une méthode indépendante, d'une part de la valence des nouveaux sommets insérés, et d'autre part du type des faces du maillage subdivisé. Notre méthode se compose de deux phases successives : nous déterminons tout d'abord la position des sommets insérés par rapport aux faces du maillage de contrôle, puis nous lissons chacun de ces sommets par rapport à leur 1-voisinage.

5.5.2.1 Coordonnées des sommets insérés v_i dans une face

Tout d'abord, nous avons besoin de fixer la géométrie des sommets insérés dans une face du maillage de contrôle. Comme exposé précédemment pour la visualisation des données, les sommets e_i sont répartis uniformément sur chacune des arêtes de la face et le sommet f est situé au barycentre de ses sommets. Nous proposons d'exprimer chaque sommet v_i comme une combinaison convexe des sommets de cette face,

Définition Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel, et $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$, on appelle combinaison convexe des a_i tout point y de $\mathcal{E}$ de la forme :

$$y = \sum_{i=1}^n a_i t_i ,$$

où les t_i sont des réels positifs de somme 1.

Cette problématique, relativement courante en géométrie, a été étudiée dans notre cadre d'analyse dans [Wach 75], où la position d'un sommet dans un polygone planaire est exprimée comme la combinaison convexe de ses sommets. Ces coordonnées sont connues sous le terme de coordonnées de *Wachspress*. Les coordonnées de valeur moyenne [Floa 03] — *mean value* —, introduites plus récemment, dépendent quant-à-elles de façon continue et (infiniment) lisse des sommets du polygone, les coefficients barycentriques t_i sont en outre strictement positifs. Cette méthode est liée au théorème de la valeur moyenne appliqué aux fonctions harmoniques. Ainsi, nous proposons d'appliquer la solution des coordonnées moyennes [Floa 03] aux sommets v_i afin de les situer par rapport aux anciens sommets insérés dans une face $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$.

Afin de pouvoir appliquer cette méthode, nous avons besoin de coordonnées de référence relatives à la face où sont insérés les sommets v_i . Une fois ces coordonnées fixées, nous pourrions déterminer la position réelle de chaque sommet dans la face du maillage de contrôle. Ainsi, pour une de ces faces, nous construisons tout d'abord une face de référence, voir Figure 5.27.a. Il s'agit d'une face composée du même nombre de sommets, noté $|\mathcal{F}|$, et ceux-ci sont répartis uniformément sur le cercle unitaire. Ensuite, nous répartissons les sommets v_i dans chaque secteur d'insertion, secteur relatif à une arête de la face (voir en partie 5.2.1). Nous les répartissons de manière uniforme en utilisant des coordonnées polaires (r, φ) , voir Figure 5.27.b et Figure 5.27.c. Pour un sommet donné $v_i(x_i, y_i)$ appartenant à un secteur s de la face, nous posons :

$$\begin{cases} r_i = \frac{\cos(\pi/|\mathcal{F}|)}{Y+2}(2+y_i) \\ \varphi_i = \frac{2\pi}{|\mathcal{F}|} \left(s + \frac{1+x_i}{X+1} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_i = r_i \sin \varphi_i \\ \beta_i = r_i \cos \varphi_i \end{cases}, \quad (5.16)$$

où, comme précédemment, les valeurs (X, Y) sont les bornes du secteur d'insertion. La dernière ligne du secteur peut ne pas être remplie, dans ce cas celle-ci contient $X-1$ sommets v_i , valeur que nous remplaçons alors dans nos formules, voir Figure 5.27.c. La méthode des coordonnées moyennes est alors appliquée sur les coordonnées cartésiennes correspondantes (α_i, β_i) du sommet. Ce qui nous donne l'ensemble des coefficients barycentriques dont nous avons besoin pour situer ce sommet dans la face du maillage de contrôle concernée, qui est une version déformée dans $\mathbb{R}^3$ de la face de référence. Cette méthode nous permet donc de déterminer les coefficients barycentriques de chaque sommet inséré v_i quel que soit le type de la face du maillage de contrôle. Une technique similaire a d'ailleurs été étudiée dans la conception du schéma $\sqrt{5}$ dans [Ivri 04b].

Nous rappelons ici l'expression de ces coefficients, issue de [Floa 03], que nous notons λ_i :

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{k=1}^{|\mathcal{F}|} w_k}, \quad w_i = \frac{\tan(\alpha_{(i-1) \% |\mathcal{F}|/2}) + \tan(\alpha_i/2)}{\|v_i - v_0\|}. \quad (5.17)$$

Concernant les deux autres types de sommets, e_i et f , nous avons pour une face du maillage de contrôle composée de $|\mathcal{F}|$ sommets V_i :

$$\begin{aligned} e_i^s &= \frac{1}{n_e + 1} ((1+i)V_s + (n_e - i)V_{(s+1) \% |\mathcal{F}|}) \\ f &= \frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_{i=1}^{|\mathcal{F}|} V_i. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Les coefficients issus de la méthode des valeurs moyennes pour les sommets v_i ainsi que la distribution uniforme des sommets e_i et f impliquent une configuration planaire du graphe constituant les nouvelles faces du maillage, ce qui nous assure la continuité C^0 de notre surface après un nombre arbitraire d'itérations de n'importe quel procédé de subdivision décrit par notre méta-schéma.

5.5.2.2 Filtrage passe-bas de la géométrie

Dans le but de modéliser une surface lisse en prenant pour base une des subdivisions topologiques que nous pouvons décrire, nous proposons d'appliquer un filtre géométrique passe-bas sur chacun des nouveaux sommets du maillage subdivisé. Ceci car la construction d'un masque de subdivision basé sur les Box-splines à partir d'un couple de descripteurs $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ est très complexe, de par la diversité des configurations topologiques potentiellement descriptibles. Ce filtre géométrique local est très proche du concept des stencils d'un schéma de subdivision classique : un stencil définit, la plupart du temps, des coefficients relatifs à un ancien sommet et à son 1-voisinage. Nous proposons de définir notre filtre exactement de la même façon. Ces coefficients ont donc une définition très flexible, que nous pourrions ajuster par la suite, notamment par rapport à un critère de qualité de la surface. Nous présentons ici l'exemple d'un filtre géométrique moyenneur. Par ailleurs, nous considérerons par la suite le maillage subdivisé $\mathcal{M}'$ lors de la prise en compte du 1-voisinage d'un nouveau sommet : le 1-voisinage d'un sommet de $\mathcal{M}'$ est composé des sommets $\mathcal{M}'$ qui partagent une même arête incidente.

Ainsi, la position des sommets insérés v_i , $i > 0$, est obtenue par l'ensemble des coefficients barycentriques issus de la valeur moyenne exposée précédemment. Les nouveaux sommets v_0 , identifiés aux anciens sommets de la face $\mathcal{F}$, sont quant-à-eux lissés : le résultat $\tilde{v}_0$ est donné par la relation suivante, fonction du sommet v_0 et de son 1-voisinage direct, sommets notés N_i , $i \in \llbracket 1, |N| \rrbracket$:

$$\tilde{v}_0 = \frac{1}{2} \left(v_0 + \frac{1}{|N|} \sum_{k=1}^{k=|N|} N_k \right) . \quad (5.19)$$

Pour les sommets lissés $\tilde{e}_i$, nous considérons leur ancienne position e_i sur l'arête de $\mathcal{F}$ et les sommets de leur 1-voisinage qui n'appartiennent pas à l'arête, c'est-à-dire les sommets de leur 1-voisinage qui ne sont pas de type e_i ou v_0 — ils sont donc de type v_i ou f —. Ceci car un sommet de ce type est déjà situé par défaut entre deux sommets présents sur une arête de la face. Ainsi, une nouvelle position $\tilde{e}_i$ est fonction de l'ancienne position e_i et de son 1-voisinage, hors les sommets déjà présents sur l'arête, que nous notons N_i^e , $i \in \llbracket 1, |N^e| \rrbracket$:

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{2} \left(e_i + \frac{1}{|N^e|} \sum_{k=1}^{k=|N^e|} N_k^e \right) . \quad (5.20)$$

Les surfaces construites par cette méthode sont visuellement lisses après plusieurs itérations du procédé de subdivision, voir un exemple d'application en Figure 5.29. Cependant, étant donné que nous ne possédons pas de définition analytique des matrices de subdivision associées, nous ne possédons aucune information concernant le degré de continuité de ces surfaces à la limite ; celles-ci ne sont assurément pas de classe C^2 .

Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre un formalisme de description de la phase de subdivision topologique d'un schéma de subdivision, sous la forme d'un encodage compact composé d'un couple de descripteurs indépendants : $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Celui-ci étend les méta-schémas existants en se basant sur un principe similaire. En effet, la subdivision d'une face peut être décrite par l'insertion d'éléments topologiques suivie de leur connexion par des arêtes. Tout comme pour le méta-schéma [Mull 03], notre descripteur d'insertion $\mathcal{I}$ décrit l'insertion de nouveaux sommets dans la face que nous souhaitons subdiviser. Nous les connectons ensuite au moyen du descripteur de connectivité $\mathcal{C}$, afin de former les nouvelles arêtes du maillage subdivisé. Une des caractéristiques principales de notre formalisme de description est sa généralité vis-à-vis du type des faces du maillage de contrôle. En effet, un descripteur peut être appliqué de la même façon sur les faces du maillage de contrôle, quel que soit leur type.

Notre méta-schéma permet la description d'un grand nombre de subdivisions topologiques régulières. Ce type de transformation topologique concerne pratiquement la totalité des travaux existants en subdivision. En particulier, contrairement aux autres méta-schémas, nous pouvons décrire l'ensemble des subdivisions topologiques jugées potentiellement utiles par les travaux de Dodgson [Dodg 05]. Ces subdivisions régulières ne constituent néanmoins que des cas particuliers parmi l'ensemble des transformations que nous pouvons décrire, ensemble composé d'un très grand nombre de subdivisions topologiques irrégulières.

Nous avons exploré la question de la subdivision topologique adaptative, ainsi que la concaténation de deux descripteurs, qui étend grandement les possibilités de notre système. Nous nous sommes intéressés à la description de l'espace des maillages subdivisés que nous pouvons décrire, relativement à l'ensemble des travaux existants. Nous avons en outre proposé une méthode générale de lissage géométrique des sommets d'un maillage subdivisé par nos descripteurs, les coefficients du filtre que nous proposons peuvent être modifiés de manière très simple.

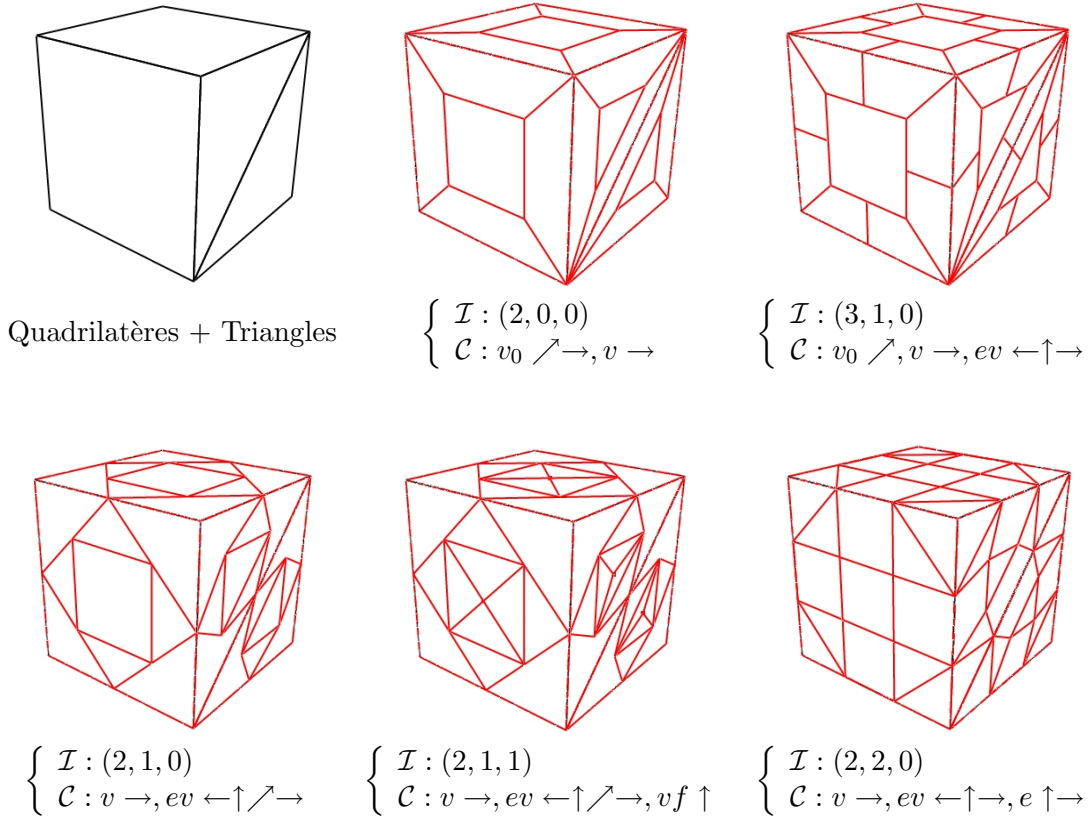


FIG. 5.28 : Exemples de subdivisions topologiques que nous introduisons, elles ne peuvent être décrites par les formalismes existants.

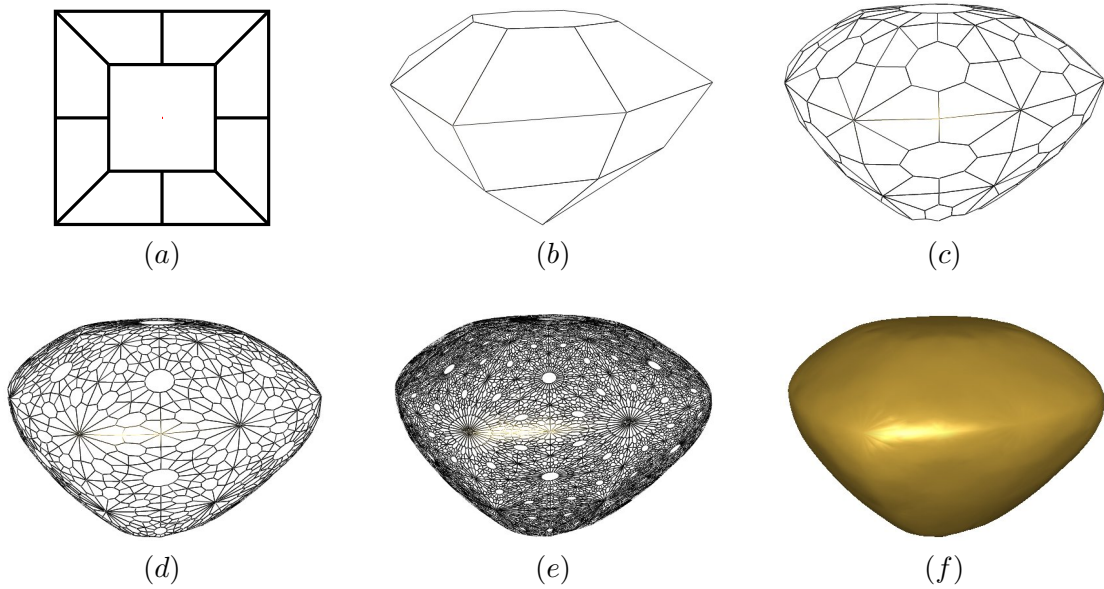


FIG. 5.29 : (a) Notre descripteur $\mathcal{I} : (3, 1, 0)$, $\mathcal{C} : v_0 \nearrow, v \rightarrow, ev \leftarrow \uparrow \rightarrow$ appliqué à une face carrée. En (b) un maillage de contrôle composé d'un octogone, plusieurs quadrangles et plusieurs triangles. En (c) Une itération de subdivision, en (d) deux itérations et en (e) trois. (f) Visualisation de la surface après cinq itérations du procédé de subdivision.

Chapitre 6

Synthèse et perspectives

6.1 Résumé et contributions

Dans ce manuscrit, nous avons étudié le comportement géométrique des surfaces de subdivision au voisinage de leurs sommets extraordinaires. Nos analyses ont porté sur les schémas de subdivision stationnaires, outils d'une très grande flexibilité et d'une simplicité de description très intéressante. La motivation d'approfondir nos connaissances de ces comportements géométriques complexes se comprend comme une volonté de perfectionner cet outil de synthèse et de modélisation de surfaces lisses.

Dans un premier temps, nous nous sommes consacrés à la mise en évidence des artefacts, que nous avons définis comme étant liés aux fortes variations de la norme des deux vecteurs de courbure principale. Nous avons adapté à cet effet les méthodes existantes en visualisation pour l'analyse de surface, en établissant un protocole de visualisation adapté à la configuration topologique du voisinage d'un sommet extraordinaire. Celui-ci est constitué d'une représentation colorée adaptée à nos données ainsi que d'un espace d'évaluation des artefacts construit à partir d'un repère polaire centré sur le sommet d'intérêt. Cet espace nous permet d'établir une évaluation qualitative originale de la géométrie au voisinage d'un sommet extraordinaire. Nous avons de plus adapté la notion de surface focale à cet espace. Afin d'améliorer cette évaluation, nous avons proposé l'application de techniques couramment utilisées en traitement d'images en les adaptant au repère polaire semi-régulier. Enfin, nous avons exploré la possibilité du lissage de la surface en tant que post-traitement guidé par nos relevés de données.

Dans un second temps, afin d'étendre les applications rencontrées en traitement d'images classique à notre espace d'évaluation, nous avons proposé une méthode originale de caractérisation fréquentielle des artefacts. Cette technique, basée sur les fonctions de modes de vibration d'une membrane élastique, nous permet de mesurer les fréquences radiales et angulaires présentes dans un relevé de données polaire. Ces données nous ont permis de comparer numériquement le comportement de plusieurs schémas de subdivision pour une géométrie donnée, ce qui est une problématique majeure pour le tuning des schémas. Ces techniques sont par ailleurs tout à fait applicables, sans changement majeur, à l'ensemble des schémas de subdivision dont nous possédons une information de courbure pour chaque sommet. En particulier, l'analyse fréquentielle du comportement géométrique d'un schéma de subdivision quadrangulaire — tel que celui de Catmull et Clark — impliquerait simplement une légère adaptation au niveau des anneaux de distance topologique du repère.

Nous nous sommes servis de ces outils d'analyse afin de prendre certaines décisions concernant la mise au point d'un schéma de Loop modifié [Géro 10]. Celui-ci, bien que faisant partie de la famille des schémas modifiés et bien que son support soit plus important que les autres, reste stationnaire et bien plus simple à implémenter que ces derniers. Nous avons constaté, tout le long de nos travaux, la grande qualité des surfaces générées par ce schéma. De très nombreux tests nous ont démontré sa supériorité face aux autres schémas stationnaires à faible support, bien que cette question soit complexe à appréhender pour l'ensemble des configurations géométriques que peut prendre un maillage de contrôle.

Enfin, nous nous sommes consacrés à la caractérisation du processus de subdivision topologique d'un maillage par un schéma. Nous avons cherché à décrire ce procédé par un code compact et général. La problématique de cette partie de nos travaux s'inscrit dans une logique de généralisation des structures de données aux schémas topologiquement irréguliers, très peu étudiés dans notre domaine. Nous avons proposé un codage intuitif basé sur un couple de descripteurs de transformation topologique $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Celui-ci permet la description d'un grand nombre de subdivisions topologiques, dont beaucoup sont régulières, en particulier toutes celles utilisées actuellement en pratique. Nous avons également proposé et mis en œuvre une phase de lissage de la géométrie des maillages subdivisés, générale à toutes nos descriptions.

6.2 Perspectives

L'analyse concrète des artefacts en subdivision ouvre de nombreuses perspectives concernant l'utilisation pratique des schémas. Les schémas de subdivision modifiés, ou non-stationnaires, sont certainement plus à même de réduire les comportements néfastes reprochés à cet outil de modélisation. Cependant, leur grande complexité par rapport aux schémas stationnaires à faible support est à notre sens un problème important, puisque deux des principaux avantages de la surface de subdivision sont sa simplicité et sa flexibilité : modélisation d'arêtes vives ou semi-vives, subdivision adaptative, ajout de détails [Lee 00], implémentation sur GPU [Shiu 05] etc. Nous pensons donc que l'amélioration des schémas à faible support est une perspective de recherche pertinente. La caractérisation et l'atténuation des artefacts produits par ces schémas, ou plus vraisemblablement une partie d'entre eux car leurs possibilités sont limitées, s'inscrivent dans cette logique.

Concernant la continuité de nos travaux, nous nous intéresserons tout d'abord à l'analyse exhaustive des méthodes de visualisation adaptées à chaque type d'artefact géométrique. Cette analyse étendrait la description comparative proposée en partie 3.2.2.1, elle nous permettrait de proposer un *benchmark* du comportement géométrique de chaque schéma de subdivision par rapport aux différents types d'artefact.

Ensuite, nous nous intéresserons à la conception d'un schéma de subdivision guidée par les données fréquentielles recueillies sur un espace de formes. Nous pensons que l'atténuation globale d'une mesure liée à ces spectres est très pertinente pour l'amélioration de l'aspect des surfaces subdivisées au voisinage proche du sommet extraordinaire. Ces travaux de différentiel des tunings de schémas existants car ils se consacrent à l'analyse de la forme globale des surfaces subdivisées, et non au comportement d'une zone très locale de la surface limite. Cependant, les fortes variations de courbure que nous analysons de manière fréquentielle ne représentent pas l'ensemble des comportements géométriques néfastes induits par un sommet extraordinaire [Sabi 04b]. Il serait alors intéressant de proposer une analyse similaire basée sur d'autres critères géométriques,

par exemple la variation locale des normales mesurées en chaque sommet du maillage, ou une mesure de variation de la direction des courbures principales. Par ailleurs, une perspective différente serait la conception d'un pré-traitement du maillage afin de limiter les formes susceptibles de provoquer de mauvais résultats, à la manière des travaux récents de Ginkel et Umlauf [Gink 07], basés sur les zones de courbure gaussienne positives, négatives et hybrides.

D'autre part, la base fréquentielle choisie s'identifie aux comportements polaires des fortes variations de courbure au voisinage d'un sommet extraordinaire : les modes propres de vibration d'une membrane circulaire élastique. Une voie d'étude visant à améliorer cette méthode considère l'analyse spectrale par ondelettes, domaine largement étudié en traitement d'images classique. En effet, une telle analyse permet une localisation du signal à la fois fréquentielle et temporelle. Dans notre contexte, il s'agirait d'une localisation fréquentielle et *topologique*, car notre signal géométrique est mesuré par rapport aux anneaux d'équidistance topologique centrés sur le sommet extraordinaire d'intérêt. Une localisation topologique des caractéristiques fréquentielle constituerait un important apport d'informations, nous pourrions par exemple mettre en évidence plus efficacement les différents comportements observés précédemment : le comportement "en pic" des données proches du sommet extraordinaire, souvent observé dans le cas du tuning original de Loop, opposé au comportement plus "étendu" des données relatives aux autres tunings. Une telle analyse nécessiterait notamment un changement au niveau de la base de fonctions dans laquelle nous plongeons nos données.

Dans la continuation des travaux sur la modélisation d'une phase de transformation topologique d'un schéma de subdivision, nous nous intéresserons aux classifications classiques des pavages du plan [Grun 86, Frie 00]. Nous chercherons à lier les différentes subdivisions topologiques possibles aux critères existants tels que les symétries, les similitudes etc. Nous chercherons également à améliorer notre système de lissage automatique des maillages subdivisés en nous intéressant au problème délicat de l'analyse du comportement de ces surfaces à la limite. Cette approche est difficile car nous devons repenser la définition même de ce qu'est un sommet extraordinaire, étant donné que nous ne nous basons pas sur les surfaces Box-splines. Une méthode serait alors de tenter de lier ces surfaces bien connues à l'échantillonnage très irrégulier des sommets de nos maillages.

Bibliographie

- [Akle 02] E. Akleman. “Honeycomb subdivision”. In *Proceedings of ISCIS’02, 17th International Symposium on Computer and Information Sciences*, 2002.
- [Akle 04] E. Akleman and V. Srinivasan. “Semi-regular pentagonal subdivision”. In : *In Proceedings of Shape Modeling International*, pp. 110–118, 2004.
- [Alex 02] M. Alexa. “Refinement operators for triangle meshes”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 19(3), pp. 169–172, 2002.
- [Alli 03] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, O. Devillers, B. Lévy, and M. Desbrun. “Anisotropic Polygonal Remeshing”. *ACM Transactions on Graphics*, 2003. SIGGRAPH ’2003 Conference Proceedings.
- [Augs 06] U. H. Augsdörfer, N. A. Dodgson, and M. A. Sabin. “Tuning subdivision by minimising the Gaussian curvature variation near extraordinary vertices”. In : E. Gröller and L. Szirmay-Kalos, Eds., *Computer Graphics Forum*, Comp, 2006.
- [Augs 07] U. Augsdorfer, N. A. Dodgson, and M. A. Sabin. “Removing polar rendering artifacts in subdivision surfaces”. Tech. Rep., 2007.
- [Ball 88] A. A. Ball and D. J. T. Storry. “Conditions for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces”. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 7, No. 2, pp. 83–102, 1988.
- [Bars 84] B. A. Barsky and A. D. DeRose. “Geometric Continuity of Parametric Curves”. Tech. Rep., Berkeley, CA, USA, Oct 1984.
- [Bart 04] L. Barthe and L. Kobbelt. “Subdivision scheme tuning around extraordinary vertices”. *Computer Geometric Aided Design*, Vol. 21, No. 6, pp. 561–583, 2004.
- [Bart 05] L. Barthe, C. Gérot, M. Sabin, and L. Kobbelt. “Simple computation of the eigencomponents of a subdivision matrix in the Fourier domain”. In : N. Dodgson, M. Floater, and M. Sabin, Eds., *Advances in Multiresolution for Geometric Modeling*, pp. 245–257, Springer-Verlag, 2005.
- [Bart 87] R. H. Bartels, J. C. Beatty, and B. A. Barsky. *An introduction to splines for use in computer graphics & geometric modeling*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1987.
- [Bezi 01] P. Bezier. “Pierre Bézier : an engineer and a mathematician”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 18, No. 7, pp. 609–617, 2001.

- [Boeh 82] W. Boehm. “Generating the Bézier Points of Triangular Splines”. In : *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pp. 77–91, 1982.
- [Bohm 99] W. Böhm and A. Müller. “On de Casteljau’s algorithm”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 16, No. 7, pp. 587–605, 1999.
- [Boor 78] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.
- [Boor 93] C. de Boor, K. Höllig, and S. Riemenschneider. *Box Splines*. Springer Verlag, 1993.
- [Bots 08] M. Botsch, M. Pauly, L. Kobbelt, P. Alliez, and B. Lévy. “Geometric Modeling Based on Polygonal Meshes”. In : *Eurographics Tutorial*, 2008.
- [Cash 09] T. J. Cashman, U. H. Augsdörfer, N. A. Dodgson, and M. A. Sabin. “NURBS with Extraordinary Points : High-degree, Non-uniform, Rational Subdivision Schemes”. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 28, No. 3, 2009.
- [Catm 78] E. Catmull and J. Clark. “Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes”. *Computer Aided Design*, Vol. 10, No. 6, pp. 350–355, 1978.
- [Chai 74] G. M. Chaikin. “An Algorithm for High Speed Curve Generation”. *Computer Graphics Image Processing 3(12)*, pp. 346–349, 1974.
- [Chav 96] I. Chavel. *Riemannian Geometry - A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 1996.
- [Chen 06] L. Chen and N. D. Georganas. “An efficient and robust algorithm for 3D mesh segmentation”. *Multimedia Tools Applications*, Vol. 29, No. 2, pp. 109–125, 2006.
- [Chen 92] X. Chen and F. Schmitt. “Intrinsic Surface Properties from Surface Triangulation”. In : *ECCV ’92 : Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision*, pp. 739–743, Springer-Verlag, London, UK, 1992.
- [Cour 89] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley-Interscience, 1989.
- [Desb 08] M. Desbrun, E. Kanso, and Y. Tong. “Discrete differential forms for computational modeling”. In : *ACM SIGGRAPH ASIA ’2008 courses*, pp. 1–17, ACM, New York, NY, USA, 2008.
- [Desb 99] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A. H. Baar. “Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow”. *ACM SIGGRAPH ’1999*, pp. 317–324, 1999.
- [Dodg 05] N. A. Dodgson. “An Heuristic Analysis of the Classification of Bivariate Subdivision Schemes”. In : *IMA Conference on the Mathematics of Surfaces*, pp. 161–183, 2005.
- [Doo 78a] D. Doo. “A subdivision algorithm for smoothing down irregularly shaped polyhedrons”. In : *Proceedings on Interactive Techniques in Computer Aided Design*, pp. 157–165, 1978.
- [Doo 78b] D. Doo and M. Sabin. “Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points”. *Seminal graphics : pioneering efforts that shaped the field*, pp. 177–181, 1978.

-
- [Doub 82] B. Doubrovine, S. Novikov, and F. A. *Géométrie contemporaine : méthodes et applications*. Mir, 1982.
 - [Dyn 92] N. Dyn, D. Levin, , and D. Liu. “Interpolating convexity-preserving subdivision schemes for curves and surfaces”. In : *Computer-Aided Design*, pp. 211–216, 1992.
 - [Eige 08] M. Eigensatz, R. W. Sumner, and M. Pauly. “Curvature-Domain Shape Processing.”. *Computer Graphics Forum*, Vol. 27, No. 2, pp. 241–250, 2008.
 - [Fari 02] G. E. Farin, J. Hoschek, and M.-S. Kim. *Handbook of computer aided geometric design*. Elsevier, 2002.
 - [Fari 96] G. E. Farin. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design : A Practical Code*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1996.
 - [Faya 88] J. Fayard, L. *Curvature for Surface Interrogation*. Master’s thesis, Arizona State, May 1988.
 - [Flei 03] S. Fleishman, I. Drori, and D. Cohen-Or. “Bilateral Mesh Denoising”. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH ’2003)*, Vol. 22, No. 3, pp. 950–953, 2003.
 - [Floa 03] M. S. Floater. “Mean value coordinates”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 20, No. 1, pp. 19–27, 2003.
 - [Fole 82] J. D. Foley and A. Van Dam. *Fundamentals of interactive computer graphics*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1982.
 - [Fole 90] J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, and J. Hughes. *Computer Graphics : Principles and Practice, second edition*. Addison-Wesley Professional, 1990.
 - [Frie 00] O. D. Friedrichs. *An Encyclopedia of Tiling Patterns*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Cordon Art BV - Baarn - the Netherlands, 2000.
 - [Gatz 06] T. Gatzke and C. Grimm. “Estimating Curvature on Triangular Meshes”. *International Journal of Shape Modeling*, Vol. 12, No. 1, pp. 1–29, June 2006. How best to compare curvature metrics on meshes.
 - [Gero 05] C. G erot, L. Barthe, N. Dodgson, and M. Sabin. “Subdivision as a sequence of sampled C^p surfaces.”. In : N. Dodgson, M. Floater, and M. Sabin, Eds., *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, pp. 259–270, Springer, 2005.
 - [Gink 06] I. Ginkel and G. Umlauf. “Loop subdivision with curvature control”. In : *SGP ’06 : Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing*, pp. 163–171, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2006.
 - [Gink 07] I. Ginkel and G. Umlauf. “Controlling a subdivision tuning method”. In : A. Cohen, J.-L. Merrien, and L. L. Schumaker, Eds., *Curve and Surface Fitting : Avignon 2006*, pp. 170–179, Nashboro Press, 2007.
 - [Gold 04] J. Goldfeather and V. Interrante. “A novel cubic-order algorithm for approximating principal direction vectors”. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 23, No. 1, pp. 45–63, 2004.

- [Gotc 01] A. Gotchev, K. Egiazarian, J. Vesma, and T. Saramäki. “Edge-Preserving Image Resizing Using Modified B-Splines”. in *Proceedings IEEE International Conference Acoustics Speech Signal Processing*, pp. 1865–1868, 2001.
- [Gots 03] C. Gotsman. “On Graph Partitioning, Spectral Analysis, and Digital Mesh Processing”. In : *SMI '03 : Proceedings of the Shape Modeling International 2003*, p. 165, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2003.
- [Goug 03] B. Gough. *GNU Scientific Library Reference Manual - 2nd Edition*. Network Theory Ltd., 2003.
- [Grav 02] J. Gravesen and M. Ungstrup. “Constructing Invariant Fairness Measures for Surfaces”. *Advanced Computer Mathematics*, Vol. 17, No. 1-2, pp. 67–88, 2002.
- [Gray 96] A. Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1996.
- [Grun 86] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1986.
- [Géro 05] C. Géro, L. Barthe, N. Dodgson, and M. Sabin. “Subdivision as a sequence of sampled C^p surfaces”. In : N. Dodgson, M. Floater, and M. Sabin, Eds., *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, pp. 259–270, Springer-Verlag, 2005.
- [Géro 10] C. Géro, F. Destelle, and A. Montanvert. “Smoothing the Antagonism Between Extraordinary Vertex and Ordinary Neighbourhood on Subdivision Surfaces”. In : *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pp. 242–260, Lecture Notes in Computer Science 8562, Springer Berlin / Heidelberg, 2010.
- [Hage 90] H. Hagen, T. Schreiber, and E. Gschwind. “Methods for surface interrogation”. In : *VIS '90 : Proceedings of the 1st conference on Visualization '90*, pp. 187–193, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1990.
- [Hage 92a] H. Hagen and S. Hahmann. “Generalized focal surfaces : a new method for surface interrogation”. In : *VIS '92 : Proceedings of the 3rd conference on Visualization '92*, pp. 70–76, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1992.
- [Hage 92b] H. Hagen, S. Hahmann, T. Schreiber, Y. Nakajima, B. Wordenweber, and P. Hollemann-Grundstedt. “Surface Interrogation Algorithms”. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 12, No. 5, pp. 53–60, 1992.
- [Hage 95] H. Hagen, S. Hahmann, and T. Schreiber. “Visualization and Computation of Curvature Behaviour of Free-Form Curves and Surfaces”. *Computer-Aided Design*, Vol. 27, No. 7, pp. 545–552, july 1995.
- [Hahm 96] S. Hahmann. “Surface Interrogation : Visualization techniques for surface analysis”. In : C. Bajaj and B. Krishnamurthy, Eds., *Data Visualization Techniques*, pp. 49–74, John Wiley, Nov. 1996.
- [Hama 93] B. Hamann. “Curvature approximation for triangulated surfaces”. *Geometric modelling*, pp. 139–153, 1993.

-
- [Hold 03] E.-J. Holden and R. Owens. “Recognising Moving Hand Shapes”. In : *ICIAP '03 : Proceedings of the 12th International Conference on Image Analysis and Processing*, p. 14, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2003.
 - [Hong 01] S.-Y. Hong, C.-S. Hong, H.-C. Lee, and K. Park. “Discrete Local Fairing of B-Spline Surfaces”. In : *ICCS '01 : Proceedings of the International Conference on Computational Sciences-Part I*, pp. 693–697, Springer-Verlag, London, UK, 2001.
 - [Hopp 94] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, M. Halstead, H. Jin, J. McDonald, J. Schweitzer, and W. Stuetzle. “Piecewise smooth surface reconstruction”. In : *SIGGRAPH '94 : Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 295–302, ACM, New York, NY, USA, 1994.
 - [Inst] “Institute for Data Analysis and Visualization,
<http://graphics.cs.ucdavis.edu/education/CAGDNotes>”.
 - [Ivri 04a] I. Ivriissimtzis, N. A. Dodgson, and M. A. Sabin. “A generative classification of mesh refinement rules with lattice transformations”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 21, No. 1, pp. 99–109, 2004.
 - [Ivri 04b] I. Ivriissimtzis, N. Dodgson, and M. Sabin. “ $\sqrt{5}$ -subdivision”. In : N. Dodgson, M. Floater, and M. Sabin, Eds., *Advances in Multiresolution for Geometric Modeling*, pp. 285–300, Srpinge, Berlin, Germany, 2004.
 - [Jury 64] E. Jury. *Theory and application of the z-transform method*. Robert E. Krieger, 1964.
 - [Kalo 07] E. Kalogerakis, P. Simari, D. Nowrouzezahrai, and K. Singh. “Robust statistical estimation of curvature on discretized surfaces”. In : *SGP '07 : Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing*, pp. 13–22, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007.
 - [Karc 04] K. Karčiauskas, J. Peters, and U. Reif. “Shape characterization of subdivision surfaces—case studies”. *Computer Geometric Aided Design*, Vol. 21, No. 6, pp. 601–614, 2004.
 - [Karc 07] K. Karčiauskas and J. Peters. “Surfaces with polar structure”. *Computing*, Vol. 79, No. 2, pp. 309–315, 2007.
 - [Koba 69] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Publishers, New York, 1969.
 - [Kobb 00a] L. Kobbelt. “Discrete fairing and variational subdivision for freeform surface design”. *The Visual Computer*, Vol. 16, No. 3-4, pp. 142–158, 2000.
 - [Kobb 00b] L. Kobbelt. “ $\sqrt{3}$ -subdivision”. In : *SIGGRAPH '2000 Conference Proceddings*, pp. 103–112, 2000.
 - [Kobb 96] L. Kobbelt. “Interpolatory Subdivision on Open Quadrilateral Nets with Arbitrary Topology”. In : *Computer Graphics Forum*, pp. 409–420, 1996.
 - [Kohl 98] M. Kohler. “A Meta Scheme for Iterative Refinement of Meshes”. In : H.-C. Hege and K. Polthier, Eds., *Mathematical Visualization*, pp. 45–59, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

- [Lass 08] D. Lasser. “Triangular subpatches of rectangular Bézier surfaces”. *Computer Mathematics Applications*, Vol. 55, No. 8, pp. 1706–1719, 2008.
- [Lee 00] A. Lee, H. Moreton, and H. Hoppe. “Displaced subdivision surfaces”. In : *SIGGRAPH '00 : Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 85–94, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, NY, USA, 2000.
- [Levi 06] A. Levin. “Modified subdivision surfaces with continuous curvature”. *ACM Computer Graphics Forum*, Vol. 25, No. 3, pp. 1035–1040, 2006. SIGGRAPH '06.
- [Levy 06] B. Levy. “Laplace-Beltrami Eigenfunctions Towards an Algorithm That ”Understands” Geometry”. In : *SMI '06 : Proceedings of the IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications 2006*, p. 13, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2006.
- [Loop 87] C. T. Loop. *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. Master’s thesis, University of Utah, 1987.
- [Loop 92] C. T. Loop. *Generalized B-spline surfaces of arbitrary topological type*. PhD thesis, Seattle, WA, USA, 1992.
- [Magi 07] E. Magid, O. Soldea, and E. Rivlin. “A comparison of Gaussian and mean curvature estimation methods on triangular meshes of range image data”. *Computer Vision Image Understanding*, Vol. 107, No. 3, pp. 139–159, 2007.
- [McDo 08] K. T. McDonnell and K. Mueller. “Illustrative Parallel Coordinates.”. *Computer Graphics Forum*, Vol. 27, No. 3, pp. 1031–1038, 2008.
- [Meye 02] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. H. Barr. “Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds”. In : *VisMath*, pp. 35–57, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2002.
- [Morv 01] J. Morvan. “On Generalized Curvatures”. 2001.
- [Mull 03] H. Müller and M. Rips. “Another Metascheme of Subdivision Surfaces”. In : H.-C. Hege and K. Polthier, Eds., *Visualization and Mathematics III*, pp. 201–220, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [Myle 09] A. Myles and J. Peters. “Bi-3 C^2 Polar Subdivision”. *ACM Transactions on Graphics, SIGGRAPH '2009*, 2009.
- [Pete 03] J. Peters. “Smoothness, Fairness and the need for better multi-sided patches”. In : R. Goldman and R. Krasauskas, Eds., *Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, pp. 55–64, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 2003.
- [Pete 04] J. Peters and U. Reif. “Shape characterization of subdivision surfaces : basic principles”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 21, No. 6, pp. 585–599, 2004.
- [Pete 93] J. Peters. “Smooth free-form surfaces over irregular meshes generalizing quadratic splines”. In : *Selected papers of the international symposium on Free-form curves and free-form surfaces*, pp. 347–361, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1993.

-
- [Pete 97] J. Peters and U. Reif. “The simplest subdivision scheme for smoothing polyhedra”. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 16, No. 4, pp. 420–431, 1997.
 - [Pott 08] H. Pottmann, A. Schiffner, P. Bo, H. Schmiedhofer, W. Wang, N. Baldassini, and J. Wallner. “Freeform surfaces from single curved panels”. *SIGGRAPH '2008, ACM Transactions on Graphics*, Vol. 27, No. 3, pp. 1–10, 2008.
 - [Prau 00] H. Prautzsch and G. Umlauf. “A G^1 and G^2 subdivision scheme for triangular nets”. *International Journal on Shape Modelling*, Vol. 6, No. 1, pp. 21–35, 2000.
 - [Prau 02] H. Prautzsch and W. Boehm. “Box Splines”. 2002.
 - [Prau 98] H. Prautzsch. “Smoothness of subdivision surfaces at extraordinary points.”. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, pp. 377–389, 1998.
 - [Reif 95] U. Reif. “A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, No. 2, pp. 153–174, 1995.
 - [Rham 47] G. de Rham. “Un peu de mathématiques à propos d’une courbe plane”. *Elemente der Mathematik*, Vol. 4, No. 2, pp. 73–76, 1947.
 - [Rica 05] J. Ricard, D. Coeurjolly, and A. Baskurt. “Generalizations of angular radial transform for 2D and 3D shape retrieval”. *Pattern Recognition Letter*, Vol. 26, No. 14, pp. 2174–2186, 2005.
 - [Sabi 03] M. A. Sabin and L. Barthe. “Artifacts in Recursive Subdivision Surfaces”. In : A. Cohen, J.-L. Merrien, and L. L. Schumaker, Eds., *Curve and Surface Fitting : Saint-Malo 2002*, pp. 353–362, Nashboro Press, 2003.
 - [Sabi 04a] M. Sabin. “Recent progress in subdivision - a survey”. *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, Vol. 9, pp. 203–230, 2004.
 - [Sabi 04b] M. Sabin. “What is wrong with subdivision surfaces?”. In : *Workshop on Industry Challenges in Geometric Modeling in CAD, Darmstadt University of Technology*, March 2004.
 - [Seid 92] L. R. Seidenberg, R. B. Jerard, and J. Magewick. “Surface curvature analysis using color”. In : *VIS '92 : Proceedings of the 3rd conference on Visualization '92*, pp. 260–267, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1992.
 - [Shiu 05] L.-J. Shiue, I. Jones, and J. Peters. “A realtime GPU subdivision kernel”. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 24, No. 3, pp. 1010–1015, 2005.
 - [Sork 06] O. Sorkine. *Laplacian Mesh Processing*. PhD thesis, School of Computer Science, Tel Aviv University, 2006.
 - [Stam 02] J. Stam and C. T. Loop. “Quad/Triangle subdivision”. *Graphics Forum.*, Vol. 22, No. 1, pp. 79–85, 2002.
 - [Stam 98a] J. Stam. “Evaluation of Loop Subdivision Surfaces”. In : *SIGGRAPH '98 CDROM Proceedings*, 1998.

- [Stam 98b] J. Stam. “Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values”. In : *SIGGRAPH '98 : Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 395–404, ACM, New York, NY, USA, 1998.
- [Stok 92] E. M. Stokely and S. Y. Wu. “Surface Parametrization and Curvature Measurement of Arbitrary 3-D Objects : Five Practical Methods”. *IEEE Transaction on Pattern Analysis Mach. Intell.*, Vol. 14, No. 8, pp. 833–840, 1992.
- [Tana 98] H. T. Tanaka, M. Ikeda, and H. Chiaki. “Curvature-Based Face Surface Recognition Using Spherical Correlation - Principal Directions for Curved Object Recognition”. In : *FG '98 : Proceedings of the 3rd. International Conference on Face & Gesture Recognition*, p. 372, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 1998.
- [Taub 00] G. Taubin. “Geometric Signal Processing on Polygonal Meshes”. In : *Proceedings of Eurographics State-of-the-art Report*, 2000.
- [Taub 95a] G. Taubin. “Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation”. In : *ICCV '95 : Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision*, p. 902, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 1995.
- [Taub 95b] G. Taubin. “A Signal Processing Approach to Fair Surface Design”. *Computer Graphics*, Vol. 29, No. Annual Conference Series, pp. 351–358, 1995.
- [Thei 01] H. Theisel. “Are isophotes and reflection lines the same?”. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 18, No. 7, pp. 711–722, 2001.
- [Velh 01] L. Velho and D. Zorin. “4-8 subdivision”. *Computer Geometric Aided Design*, Vol. 18, No. 5, pp. 397–428, 2001.
- [Wach 75] E. Wachspress. “A rational finite element basis”. 1975.
- [Ware 04] C. Ware. *Information Visualization : Perception for Design (Morgan Kaufmann Interactive Technologies Series)*. Morgan Kaufmann Publishers, 2nd Ed., 2004.
- [Zhan 07] H. Zhang, O. van Kaick, and R. Dyer. “Spectral Methods for Mesh Processing and Analysis”. In : *Proceedings of Eurographics State-of-the-art Report*, pp. 1–22, 2007.
- [Zori 00] D. Zorin and P. Schröder. “Subdivision for modeling and animation”. In : *SIGGRAPH '2000 course notes*, 2000.
- [Zori 05] D. Zorin. “Curvature-based Energy for Simulation and Variational Modeling”. In : *SMI '05 : Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications 2005 (SMI' 05)*, pp. 198–206, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2005.
- [Zori 96] D. Zorin, P. Schröder, and W. Sweldens. “Interpolating Subdivision for meshes with arbitrary topology”. In : *SIGGRAPH '96 : Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 189–192, ACM, New York, NY, USA, 1996.
- [Zori 98] D. Zorin. *Stationary subdivision and multiresolution surface representations*. PhD thesis, Pasadena, CA, USA, 1998.

Adaptation de schémas de subdivision pour la reconstruction d'objet sans artefact

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'analyse des schémas de subdivision, outil de modélisation de surface lisse multi-résolution. Nos travaux se sont tout d'abord consacrés à l'étude du comportement géométrique de ces surfaces au voisinage des sommets extraordinaires du maillage de contrôle. La géométrie d'une surface de subdivision présente un comportement complexe au voisinage de ces sommets, et ces effets parfois néfastes sont pour certains encore mal connus. Nous avons proposé un cadre d'évaluation du comportement géométrique d'une surface de subdivision à travers une mesure de qualité adaptée : le gradient de courbure absolue. Nous avons ensuite proposé un espace de visualisation adapté à l'analyse du voisinage d'un sommet extraordinaire. Celui-ci étant indépendant du schéma de subdivision utilisé, ce cadre d'analyse nous permet de les comparer. Nos travaux se sont alors portés sur une analyse fréquentielle polaire des comportements géométriques, en tenant compte de leurs caractéristiques radiales et angulaires par rapport à la topologie du voisinage d'un sommet extraordinaire. Notre analyse étend les études existantes pour l'évaluation des comportements géométriques de cet outil de modélisation. De plus, nous avons proposé un système de description de la phase de subdivision topologique d'un schéma de subdivision. Notre système prend la forme d'un codage compact et flexible, il généralise les descriptions existantes. Ce codage permet la description des phases topologiques de tous les schémas de subdivision connus, ainsi que de nombreuses autres.

Mot-clés : Modélisation de surfaces, artefacts de surface, schéma de subdivision, modélisation géométrique, informatique graphique, traitement du signal et de l'image.

Adaptation of subdivision schemes for object reconstruction without artefact

Abstract

In this thesis we analyse the behaviour of subdivision schemes, tool used to modelise smooth and multi-resolution surfaces. Firstly, our work aimed to study the geometric behaviour of these surfaces on the neighbourhood of the extraordinary vertices in the control mesh. The geometry of a subdivision surface is complex on the neighborhood of an extraordinary vertex, some of the unpleasant behaviours are obscure. We have proposed an evaluation framework for subdivision surfaces throughout an suitable measure : the absolute curvature gradient. Then we have proposed an interrogation span suitable to the analysis of an extraordinary vertex neighborhood. It is independent of the subdivision scheme used to synthesize the surface, thus we can compared several schemes. Then our work engaged in the polar spectral analysis of these geometric behaviours, taking into account there radial and angular characteristics regarding the topology of an extraordinary vertex neighbourhood. Our analysis extends the existing works for the interrogation of this modelisation tool.

Secondly, we have proposed a description framework for the topological step of a subdivision scheme. Our system takes the form of a compact and flexible coding, it generalizes the existent descriptions. This coding allows the description of the topological step of all the known subdivision schemes, and many others.

Keywords : Surfaces synthesis, surface artifacts, subdivision scheme, computer graphics, signal and image processing.