



HAL
open science

NOUVELLE APPROCHE DE LA MÉTHODE DE D-BAR POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DE CONDUCTIVITÉ INVERSE

Toufic El Arwadi

► **To cite this version:**

Toufic El Arwadi. NOUVELLE APPROCHE DE LA MÉTHODE DE D-BAR POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DE CONDUCTIVITÉ INVERSE. Mathématiques [math]. Université de Poitiers, 2010. Français. NNT: . tel-00538091

HAL Id: tel-00538091

<https://theses.hal.science/tel-00538091>

Submitted on 21 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE POITIERS

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Poitiers

Spécialité : Mathématiques et applications

préparée au **Laboratoire de Mathématiques et Applications de Poitiers**

dans le cadre de l'École Doctorale **Sciences et Ingénierie pour l'Information**

présentée et soutenue publiquement

par

Toufic EL ARWADI

le 23 juin 2010

Titre :

**NOUVELLE APPROCHE DE LA MÉTHODE DE D-BAR
POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DE
CONDUCTIVITÉ INVERSE**

Directeurs de thèse : **Hassan EMAMIRAD et Serge HUBERSON**

Jury

Habib Ammari	Directeur de Recherche, École Polytechnique	Rapporteur
Marc Dambrine	Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour	Rapporteur
David Dos Santos Ferreira	MCF, Université Paris 13	Examineur
Hassan Emamirad	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
Serge Huberson	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
Juliette Leblond	Directrice de Recherche, INRIA Sophia-Antipolis	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse le Prof. Hassan Emamirad, pour m'avoir proposé le sujet de ma thèse, pour avoir dirigé mes recherches, et de me laisser en même temps la liberté nécessaire à l'accomplissement de mes travaux. Je le remercie aussi pour sa gentillesse, sa patience et sa disponibilité. J'apprécie le temps qu'il m'a consacré et ses remarques, sans elles, je n'aurai pas pu réaliser mon travail.

Je tiens à remercier aussi mon co-directeur de thèse le Prof Serge Heberon. J'apprécie vivement ses encouragements pour que j'apprenne le langage fortran qui était une clé importante de la réussite de mon travail. Je n'oublie pas sa fameuse phrase : "Ne te décourage pas, le jour où tu y arrivera ce sera terminé!", cette phrase était le moteur qui m'a permis d'apprendre le fortran très rapidement.

Je remercie aussi tous les membres du jury de ma thèse qui m'ont fait l'honneur d'accepter. Je remercie tout particulièrement, M. David Dos Santos Ferreira, pour ses remarques, pour sa disponibilité et pour nos discussions scientifiques. Je remercie aussi, le Prof Habib Ammari et Prof Marc Dambrine qui ont accepté de rapporter ma thèse.

Je tiens à remercier aussi le responsable du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Poitiers (LMA) Pol Vanhaecke qui a accepté de m'accueillir au sein du laboratoire pour effectuer mes recherches. Mes remerciements s'adressent aussi à tous les membres du LMA et du LAGA et tous les doctorants, pour les beaux moments que nous avons passé ensemble. Je remercie particulièrement Houssam, Haydi, Brice, Khaoula et Jocelyne pour leur soutien dans les moments délicats.

Finalement mes remerciements s'adressent à ma famille, et tout particulièrement à mes parents, pour leur soutien et leurs encouragements. Je tiens à remercier vivement mon père pour avoir financé le début de mes études jusqu'au Master 2, tous ceux qui m'ont donné la chance de réaliser ce travail.

Table des matières

Table des matières	3
1 Introduction	7
1 La tomographie d'impédance électrique	7
1.1 Origine du problème	8
2 Opérateur de Dirichlet-Neumann	10
3 Problème de conductivité inverse	12
2 Principes des méthodes $\bar{\partial}$ de Nachman et Brown-Uhlmann modifiée	17
1 Motivation et idée de Calderón	17
2 Méthode $\bar{\partial}$ de Nachman	19
2.1 Réduction au cas $\gamma = 1$ au voisinage du bord	19
2.2 Passage à l'équation de Schrödinger	20
2.3 Identités d'Alessandrini	22
2.4 Solutions optique géométrique et transformée scattering	23
2.5 De la transformée scattering à la conductivité	25
3 Méthode $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée	26
3.1 Passage au système $\partial - \bar{\partial}$	26
3.2 Solutions optiques géométriques et transformée scattering	28
3.3 De Dirichlet-Neumann à $S(k)$	29
3.4 De la transformée scattering à la conductivité	31
4 Algorithmes des méthodes $\bar{\partial}$	33
4.1 Algorithme $\bar{\partial}$ de Nachman	33
4.2 Algorithme $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifié	33

3	Analyse numérique de la méthode $\bar{\partial}$ de Nachman	35
1	Approximations de la transformée scattering	36
1.1	Approximation \mathbf{t}^{exp}	36
1.2	L'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$	49
1.3	Cas des conductivités discontinues générales	58
1.4	Cas des conductivités discontinues simples	59
2	Discrétisation de l'équation $\bar{\partial}$	61
4	Analyse numérique de la méthode $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée	67
1	Approximation de la transformée scattering	67
1.1	Approximation S^{exp}	67
1.2	Approximation $S^{\mathbf{b}}(k)$	69
1.3	Approximation $S^{\mathbf{a}}(k)$	70
2	Discrétisation de l'équation $\bar{\partial}$	73
5	Exemples numériques	75
1	Cas des conductivités régulières	75
1.1	Cas des conductivités prochent de 1	75
1.2	Cas des Conductivités qui ne sont pas proche de 1	82
2	Cas des conductivités discontinues	85
3	Cas des conductivités non radiales	90
4	Comparaison entre la méthode Dbar de Nachman et Brown-Uhlmann modifiée	91
A	Espace de Hölder	93
B	Espace de Sobolev et problème elliptique	95
1	Espace de Sobolev	95
2	Régularité élliptique	96
C	Interpolation de Chebychev filtrée	97
	Principales notations	99

Bibliographie

101

Chapitre 1

Introduction

1 La tomographie d'impédance électrique

Plusieurs méthodes d'imagerie médicale sont utilisées pour produire une figure d'une propriété physique d'un organe humain sans rentrer à l'intérieur de l'organe, par exemple la méthode de résonance magnétique, la tomographie par rayon X ou encore l'électro-encéphalogramme (EEG), mais plusieurs de ces méthodes ont des effets négatifs sur le malade.

Récemment, une nouvelle technique en imagerie médicale est apparue : la tomographie d'impédance électrique **EIT** pour "*Electrical Impedance Tomography*". Cette dernière sert à construire une image de la conductivité électrique d'un organe humain dans une section du corps par des mesures superficielles. Cette technique nécessite l'application d'électrodes de façon circonférentielle, sur le thorax par exemple, des sujets expérimentaux.

Un courant de faible fréquence est appliqué et les électrodes sur le bord de l'organe mesurent le flux électrique de ce courant. Cette technique est utilisée pour détecter les problèmes pulmonaires et cardiaques, car le mouvement de l'air et du sang et la présence d'un fluide produisent des changements importants dans la distribution de conductivité du thorax. L' **EIT** est environ un millier de fois moins cher et ne nécessite pas de radiations ionisantes. En outre, l'**EIT** peut, en principe, produire des milliers d'images par seconde. Ses principales limitations sont sa faiblesse dans la résolution spatiale, et la grande variétés des images entre les sujets. Le caractère

non local de l'**EIT** est aussi un problème important ; pour déterminer l'image de la conductivité, on est amené à résoudre le problème mathématique discrétisé associé en chaque point du maillage correspondant, ce qui entraîne un coût en temps de calcul important. Enfin, la nécessité de fixer des électrodes sur le corps humain est un autre problème en **EIT**.

Malgré une résolution relativement difficile du problème mathématique associé, cette technique est extrêmement prometteuse car elle peut théoriquement être utilisée au lit du malade. De plus, grâce à la faiblesse du courant nécessaire à cette technique d'imagerie, la méthode ne cause apparemment pas de dommages à long terme au patient et il est donc possible de l'utiliser pour faire des tests continus. Enfin, l'**EIT** est la seule méthode qui donne les images de la conductivité électrique, même si les méthodes électromagnétiques ont également un certain potentiel pour mesurer celle-ci.

En géophysique, une technique semblable (appelé la tomographie de résistivité électrique) est utilisée en plaçant des électrodes sur la surface de la terre pour localiser des anomalies de résistivité. Dans le domaine industriel les applications typiques sont la détermination des distributions relatives de pétrole et d'eau dans une canalisation ou du mélange de substances dans un navire. À certains égards, les applications industrielles sont plus favorables pour l'**EIT**, car il est généralement possible d'utiliser un faisceau d'électrodes fixes et rigides.

1.1 Origine du problème

Soit Ω une section horizontale de la cage thoracique du malade. On suppose que $\partial\Omega$ est un domaine borné et lipschitzien de \mathbb{R}^2 . On applique un potentiel électrique f sur $\partial\Omega$, cela produit un champ électrique E et un champ magnétique H qui seront vus comme des fonctions vectorielles. Ainsi les champs magnétique et électrique produisent le flux magnétique, que l'on note B et le flux électrique D . Ils sont liés par la formule suivante (dite loi de Maxwell-Faraday) :

$$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (1.1)$$

(où J étant la densité du courant), et par une autre formule (dite loi de Maxwell-Coulomb) :

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1.2)$$

En notant ρ la densité de charge électrique, D et B vérifient :

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (1.4)$$

On note ϵ la permittivité électrique, μ la perméabilité magnétique et γ la conductivité électrique du domaine Ω . L'intensité du courant entrant étant faible, les grandeurs physiques D, E, B, H, J et E sont liés linéairement par les formules suivantes :

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad J = \gamma E. \quad (1.5)$$

On cherche des solutions périodiques ou même sinusoïdales en temps, ie :

$$\begin{cases} E(x, t) = e^{i\omega t} \tilde{E}(x), & H(x, t) = e^{i\omega t} \tilde{H}(x) \\ D(x, t) = e^{i\omega t} \tilde{D}(x), & B(x, t) = e^{i\omega t} \tilde{B}(x) \\ J(x, t) = e^{i\omega t} \tilde{J}(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

où $\tilde{E}(x), \tilde{H}(x), \tilde{D}(x), \tilde{B}(x)$ et $\tilde{J}(x)$ sont des fonctions vectorielles à valeurs complexes. Ensuite on remplace (1.6) dans les équations de Maxwell (1.1) et (1.2) pour déduire :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{E} = -i\omega\mu\tilde{H}, \\ \operatorname{rot} \tilde{H} = (\gamma + i\omega\epsilon)\tilde{E}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Appliquons l'opérateur divergence sur l'égalité vérifiée par \tilde{H} . En remarquant que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$, pour tout f , on a :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \tilde{H}) = \operatorname{div}((\gamma + i\omega\epsilon)\tilde{E}) = 0.$$

On s'intéresse ici au cas d'une fréquence ω suffisamment petite pour être négligeable, c'est à dire $\omega \approx 0$ et le système (1.7) est approché par :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{E} = 0, \\ \operatorname{div}(\gamma\tilde{E}) = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ainsi, comme $\text{rot } \tilde{E} = 0$, on peut dire que le champ électrique \tilde{E} dérive d'un potentiel scalaire u , c'est à dire $\tilde{E} = -\nabla u$. De la deuxième équation de (1.8), on tire que le potentiel scalaire u (qui est une fonction de $x \in \Omega$) vérifie le problème de Dirichlet suivant :

$$(PC) \quad \begin{cases} \text{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ sur } \Omega \\ u = f \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce problème est bien posé et admet une unique solution. Étant donné la conductivité γ et le potentiel sur le bords f , il y a plusieurs façons de résoudre le problème de Dirichlet et donc de construire la densité du courant j sur le bord qui sera donnée par :

$$j = -J.n = n.\gamma \nabla u|_{\partial\Omega} \quad (1.9)$$

où n représente le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$. Le couple

$$(u|_{\partial\Omega}, j) = (u|_{\partial\Omega}, \gamma \partial u / \partial n|_{\partial\Omega})$$

est appelé donnée de Cauchy. En **EIT**, on définit l'opérateur de transconductance, ou opérateur de Dirichlet-Neumann Λ_γ qui envoie une donnée de Dirichlet $u|_{\partial\Omega}$ à la donnée de Neumann j . On étudiera cet opérateur dans la suite. La formulation mathématique de l'**EIT** est due à Alberto Calderón en 1980 : comment construire la conductivité γ à partir de l'opérateur de transconductance Λ_γ ?

2 Opérateur de Dirichlet-Neumann

Soit Ω un domaine borné lipschitzien de \mathbb{R}^2 . On définit la conductivité $\gamma(x) = (\gamma_{ij}(x))$, $1 \leq i, j \leq 2$, comme étant une matrice réelle, symétrique, définie positive, c'est à dire qu'il existe deux constantes positives c_1 et c_2 , telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$c_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq c_2 |\xi|^2. \quad (1.10)$$

S'il existe une fonction positive $\tilde{\gamma}(x)$, tel que $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x) \delta_{ij}$, alors la conductivité $\gamma(x)$ est dite isotrope, sinon, elle sera dite anisotrope. Physiquement, le cas isotrope (respectivement anisotrope) signifie que la conductivité électrique ne change

pas (respectivement change) si le flux électrique change de direction (Exemple : les poumons pour le cas isotrope et les muscles pour le cas anisotrope).

La résolution du problème de conductivité **(PC)** est bien connue ; étant donné $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ du problème de conductivité (voir [Eva]). De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega, \|\gamma\|_{L^\infty(\Omega)}) \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \quad (1.11)$$

Après avoir résolu le problème direct, on va définir et donner les propriétés de l'opérateur Dirichlet-Neumann Λ_γ . Supposons pour le moment $\gamma_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ et $u, v \in H^2(\Omega)$ avec u solution de **(PC)** et v une fonction telle que $v|_{\partial\Omega} = g$, de plus on suppose que $f, g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$. Avec les régularités posées sur γ , u et v , on peut appliquer la formule de Green et écrire :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) v dx = - \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\partial\Omega} \gamma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j v d\sigma(x)$$

où "." désigne le produit scalaire euclidien, dx la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2 , $d\sigma$ la mesure superficielle et n_i la i ème composante du vecteur normal. Comme u est solution de **(PC)** on déduit que

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\partial\Omega} \gamma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j v d\sigma(x) = (\Lambda_\gamma f, g)_{L^2(\partial\Omega)}$$

où

$$(f, g)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} f g d\sigma$$

désigne le produit scalaire dans $L^2(\partial\Omega)$. Ainsi on peut définir $\Lambda_\gamma f = (n \cdot \gamma \nabla u)|_{\partial\Omega}$. Pour les conductivités isotropes, on a simplement : $\Lambda_\gamma f = (\gamma \partial u / \partial n)|_{\partial\Omega}$. Dans ce cas, si $\gamma \in L^\infty(\bar{\Omega})$ et $u, v \in H^1(\Omega)$, on définit l'opérateur de Dirichlet-Neumann $\Lambda_\gamma : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ de la façon suivante :

$$\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle := \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (1.12)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Bien que $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, le terme de droite de l'égalité (1.12) est bien défini. Une question se pose :

g pouvant avoir différentes extensions v , est-ce que le terme de droite de l'égalité (1.12) change ? la réponse est non, l'égalité (1.12) est indépendante de l'extension v . En effet, supposons que g admette deux extensions v_1 et v_2 et notons $\tilde{v} := v_1 - v_2 \in H_0^1(\Omega)$, et $\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle_1$ (respectivement $\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle_2$) le crochet de dualité correspondant à v_1 (respectivement v_2) et $\widetilde{\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle} := \langle \Lambda_\gamma f, g \rangle_1 - \langle \Lambda_\gamma f, g \rangle_2$. Montrons que $\widetilde{\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle} = 0$, on a :

$$\widetilde{\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle} = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \tilde{v} dx.$$

Comme $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ et u solution de **(PC)**, on déduit que $\widetilde{\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle} = 0$.

Avec la définition (1.12), on peut déduire plusieurs propriétés de l'opérateur Dirichlet-Neumann. En fait, il est facile de vérifier que si γ est positive (respectivement elliptique pour le cas anisotropique), alors Λ_γ est un opérateur positif (c'est à dire $\langle \Lambda_\gamma f, f \rangle \geq 0, \forall f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$). Il est aussi facile de vérifier que Λ_γ est autoadjoint (ie $\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle = \langle f, \Lambda_\gamma g \rangle$). En utilisant la définition (1.12) et le théorème de trace, on montre que Λ_γ est un opérateur borné (ie $\| \Lambda_\gamma f \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C \| f \|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$).

3 Problème de conductivité inverse

Posé en 1980 par Alberto Calderón, le problème de conductivité inverse consiste à déterminer la conductivité γ en connaissant l'opérateur Dirichlet à Neumann Λ_γ . C'est un problème non linéaire car, par définition, l'application $\Lambda : \gamma \rightarrow \Lambda_\gamma$ est non linéaire, d'où la difficulté du problème. Plusieurs questions se posent autour de ce problème :

1. Problème d'unicité ou d'identification : si $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ alors est ce que $\gamma_1 = \gamma_2$?
2. Problème de stabilité : si Λ_{γ_1} est "proche" de Λ_{γ_2} pour une certaine topologie, est ce que γ_1 est proche de γ_2 ?
3. Problème de reconstruction : peut on trouver une formule ou une procédure pour reconstruire la conductivité ?
4. Algorithme numérique : Comment discrétiser et mettre en oeuvre la procédure de reconstruction ?

Pour le problème d'unicité, on n'a pas d'unicité pour les conductivités anisotropes. En fait L.Tartar a montré que si $\Phi : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ est un difféomorphisme tel que

$\Phi|_{\partial\Omega} = 1$ et si on définit $\Phi_*\gamma$ de la façon suivante :

$$\Phi_*\gamma(x) := \frac{(D\Phi)^T \gamma(x) (D\Phi)}{|D\Phi|} \circ \Phi^{-1}(x).$$

où $D\Phi$ désigne la matrice jacobienne de Φ , alors $\Lambda_\gamma = \Lambda_{\Phi_*\gamma}$, voir [KV84] pour plus de détails. Pour les conductivités isotropes, Alessandrini [Ale90] montre par un exemple le caractère mal posé du problème de conductivité inverse : Soient $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ et $r_0 \in (0, 1)$, et on définit les deux conductivités γ_1 et γ_2 de la façon suivante :

$$\gamma_1(r) = \begin{cases} A & \text{si } r < r_0, \\ 1 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\gamma_2(r) = 1. \quad (1.14)$$

Par un calcul explicite de Λ_{γ_1} et Λ_{γ_2} (voir [sil99]), Alessandrini montre :

$$\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \leq |1 - A|r_0 \rightarrow 0 \text{ si } r_0 \rightarrow 0$$

tandis que $\lim_{r_0 \rightarrow 0} \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty} \neq 0$. Pour le voir d'une façon plus claire, prenons un exemple concret, soient $A = 3$ et $r_0 = \sqrt{0.05}$. Dans la figure 1.1, la courbe rouge représente $(\Lambda_{\gamma_1}f)(\theta)$, et la courbe verte représente $(\Lambda_{\gamma_2}f)(\theta)$, avec $\theta = 0, \dots, 2\pi$, et $f(x, y) = \sin(x + y)$.

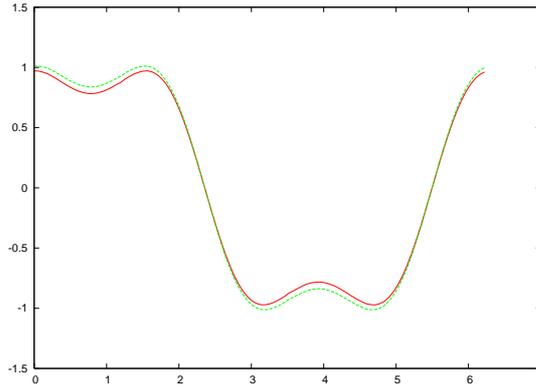


Fig 1.1- $\Lambda_{\gamma_1}f(\theta)$ et $\Lambda_{\gamma_2}f(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Cela montre que le problème de conductivité inverse est mal posé. Autre problème : comment étudier le problème de conductivité inverse en dimension 2 ou 3 ?

Est-ce la même étude ? En fait, on peut écrire Λ_γ sous forme intégrale :

$$(\Lambda_\gamma f)(x) = \int_{\partial\Omega} M_\gamma(x, y) f(x, y) d\sigma(y).$$

$M_\gamma(x, y)$ est dit "noyau de Schwartz" de Λ_γ . Comme $(x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$, $M_\gamma(x, y)$ est une fonction de $(n - 1) + (n - 1) = 2n - 2$ variables tandis que la conductivité γ est une fonction de n variables. Pour $n \geq 3$, on aura un problème sur-déterminé, c'est à-dire que le nombre de variables de la donnée est supérieur à celui de la fonction qu'on cherche, tandis que si $n = 2$, le problème est formellement déterminé. C'est à dire que pour $n = 2$, on doit utiliser toutes les données pour déterminer γ tandis que pour $n = 3$, ce n'est pas nécessaire. Ceci rend le problème en 2D plus difficile.

Historiquement, en 1980 A. Calderón pose le problème de conductivité inverse et, en linéarisant le problème, il propose une méthode de construction pour les conductivités proches de 1, on reviendra sur l'idée de Calderón dans le deuxième chapitre. Le premier résultat sur l'unicité est dû à Kohn et Vogelius [KV84],[KV85] qui montrent que pour $\partial\Omega$ de classe C^∞ et $\gamma \in C^\infty(\Omega)$ alors Λ_γ détermine $\partial^k \gamma / \partial n^k |_{\partial\Omega}$ pour $k > 0$. Ils utilisent ce résultat pour montrer l'unicité du problème de conductivité inverse pour γ analytique.

Un résultat analogue a été montré par Alessandrini[Ale88] pour $\partial\Omega$ lipschitzien. En 1987, Sylvester et Uhlmann montrent l'unicité en dimension $n \geq 3$ pour $\gamma \in C^\infty(\Omega)$ et $\partial\Omega$ de classe C^∞ [SU87], mais le problème reste ouvert pour $n = 2$. Il faut attendre jusqu'en 1996 quand A. Nachman montre l'unicité pour $n = 2$ dans son célèbre article [Nac96]. Il utilise la réduction de l'équation de conductivité à l'équation de Schrödinger introduite par Sylvester-Uhlmann, et la méthode $\bar{\partial}$ introduite par Beals et Coifman et les solutions de l'optique géométrique. Sa méthode ne montre pas seulement l'unicité pour les conductivités $\gamma \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > 2$, mais aussi donne un procédure de reconstruction.

Un an après, Uhlmann et Brown généralisent les idées de Nachman pour les conductivités $W^{1,p}(\Omega)$ par réduction de l'équation de conductivité au système $\bar{\partial}\bar{\partial}$ et en utilisant les solutions de l'optique géométrique [BU97]. Leur méthode est reformulée par Knudsen et Tamasan [KnuTam] en une procédure de reconstruction. En 2003 Astala et Päiväranta montrent l'unicité pour les conductivités $L^\infty(\Omega)$ par

une méthode analogue à celle de Nachman et Brown Uhlmann [AP06]. Ils réduisent l'équation de conductivité à l'équation de Beltrami et utilisent aussi les solutions d'optique géométriques.

En ce qui concerne les applications, en 1999 Siltanen introduit un algorithme numérique pour calculer les solutions fondamentales de Fadeev utilisées dans la preuve de Nachman. En 2000, Siltanen, Mueller et Isaacson calculent numériquement la transformée scattering $\mathbf{t}(k)$ à l'aide du problème direct et des solutions fondamentales de Fadeev. De plus ils introduisent l'approximation \mathbf{t}^{exp} pour le problème inverse [SMI00] et la calculent en utilisant les valeurs propres de l'opérateur de Dirichlet-Neumann. En 2002, Siltanen, Mueller et Isaacson appliquent la méthode de Nachman sur un exemple expérimental. Dans la même année Knudsen arrive à implémenter l'algorithme $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann.

En 2003, Siltanen et Mueller introduisent une nouvelle approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$ et la calculent à l'aide des représentations de Λ_γ dans la base de Fourier. En 2004, Siltanen, Mueller et Knudsen montrent la convergence du schéma de Vainikko modifié pour la résolution des équations intégrales de type Lippmann-Schwinger et l'appliquent à la résolution de l'équation $\bar{\partial}$. En 2007 et 2008, Siltanen, Mueller, Lassas et Knudsen étudient la méthode $\bar{\partial}$ pour les conductivités discontinues. Récemment Siltanen, Mueller, Astala et Päivärinta utilisent des idées de l'algorithme d'Astala-Päivärinta pour calculer la transformée scattering de Nachman.

Dans la littérature, les méthodes $\bar{\partial}$ sont bien étudiées via l'approximation \mathbf{t}^{exp} , mais moins bien via l'approximation \mathbf{t}^{b} : c'est le point de départ de cette thèse. On va revoir les notions de la méthode $\bar{\partial}$ et donner des nouveaux résultats sur cette méthode.

Cette thèse sera divisée en 5 chapitres . Dans le chapitre 2, on décrit l'algorithme $\bar{\partial}$ de Nachman pour les conductivités $W^{2,p}(\Omega)$, ensuite l'algorithme $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifié pour les conductivités $W^{1+\epsilon,p}(\Omega)$. Pour ces deux algorithmes, on commence par décrire la réduction au cas $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$, puis le concept des solutions de l'optique géométrique pour l'équation de Schrödinger dans le cas de

l'algorithme de Nachman, et pour le système $\partial - \bar{\partial}$ dans le cas de l'algorithme de Brown-Uhlmann modifié et des transformées scattering. Après on explique comment passer de la transformée scattering à la conductivité.

Au chapitre 3, l'approche numérique des méthodes $\bar{\partial}$ de Nachman est expliquée. On rappelle l'approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et comment calculer les valeurs propres de l'opérateur Λ_γ pour les conductivités radiales. Ensuite on introduit l'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ et comment la calculer. Puis, on introduit le schéma de point fixe pour la résolution de l'équation $\bar{\partial}$ et on montre sa convergence. On passe ensuite aux cas discontinus, et on montre que si une suite de conductivités régulières converge vers la conductivité discontinue, alors les conductivités reconstruites convergent vers la conductivité discontinue reconstruite. Ce théorème nous permet d'appliquer les méthodes $\bar{\partial}$ pour les conductivités à deux ou plusieurs discontinuités en approchant la conductivité discontinue par les interpolations spectrales de Chebychev filtrées.

Pour les conductivités à une discontinuité, on donne une formule explicite de $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$, avec les fonctions de Bessel. On étudie aussi la stabilité de la méthode $\bar{\partial}$ via l'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$. De plus, on étudiera les conductivités non radiales. Finalement, on donnera quelques tests numériques.

Dans le chapitre 4, on généralise les idées vues au chapitre 3 sur l'algorithme $\bar{\partial}$ de Brown Uhlmann modifié. On rappelle les relations entre les transformées scattering de Nachman et de Brown Uhlmann modifié, ainsi que les approches avec les deux approximations $S^{\text{exp}}(k)$ et $S^{\mathbf{b}}(k)$. On explique aussi comment calculer l'approximation de la transformée scattering $S^{\mathbf{a}}(k)$ et la relation entre $S^{\mathbf{a}}(k)$ et $S^{\mathbf{b}}(k)$. De même on montre la convergence du schéma de point fixe pour la résolution de l'équation $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann pour le cas des conductivités radiales, et on étudie le cas des conductivités discontinues. Finalement, on donne une comparaison entre les algorithmes de Nachman et Brown-Uhlmann modifié.

Au chapitre 5, on donne des exemples et des illustrations numériques justifiant nos résultats.

Chapitre 2

Principes des méthodes $\bar{\partial}$ de Nachman et Brown-Uhlmann modifiée

Dans ce chapitre, on décrit les grandes lignes de la méthode $\bar{\partial}$ proposée par A.Nachman [Nac96] ensuite celle de Brown-Uhlmann modifiée [BU97],[Knu02],[KnuTam]. L'idée principale est de transformer l'équation de conductivité en une autre équation ou système d'équations et d'utiliser la méthode $\bar{\partial}$ de la théorie du scattering inverse. On suppose que la conductivité $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ est isotrope, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $C < \gamma < C^{-1}$.

1 Motivation et idée de Calderón

En pratique, une question importante se pose : pour déterminer la conductivité γ on a le choix de mettre différents potentiels f sur le bord, mais quel potentiel va résoudre le problème ? Calderón fut le premier à réfléchir à cette question. Il étudie le cas des petites perturbations d'une conductivité constante γ_0 , c'est à dire $\gamma = \gamma_0 + \epsilon h$ où ϵ et γ_0 sont des constantes positives. Soit Q_γ la forme quadratique suivante :

$$Q_\gamma(f) := \int_{\Omega} \gamma |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\gamma f d\sigma \quad (2.1)$$

où u est l'unique solution du problème de conductivité. Physiquement, Q_γ représente la puissance nécessaire pour maintenir f sur $\partial\Omega$. Calderón propose l'idée suivante : au lieu de prendre Λ_γ comme donnée du problème inverse, prenons Q_γ . En effet, par la définition (2.1), étant donné Λ_γ , on peut calculer Q_γ et la prendre comme la donnée du problème de conductivité inverse. La solution u du problème de conductivité dépendant de γ , ainsi l'application $\gamma \rightarrow Q_\gamma$ est une application non linéaire. Pour linéariser le problème, on introduit $\tilde{Q}_\gamma(f, g)$ la forme bilinéaire associée à la forme quadratique Q_γ donnée par :

$$\tilde{Q}_\gamma(f, g) = \int_{\Omega} \gamma \nabla u_{f,\gamma} \cdot \nabla v_{g,\gamma} dx. \quad (2.2)$$

où $u_{f,\gamma}$ et $v_{g,\gamma}$ sont solutions du problème de conductivité avec $u_{f,\gamma}|_{\partial\Omega} = f$ et $v_{g,\gamma}|_{\partial\Omega} = g$. On calcule la dérivée de Fréchet :

$$\begin{aligned} d\tilde{Q}_{\gamma_0}(f, g)(h) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{Q}_{\gamma_0 + \varepsilon h}(f, g) - \tilde{Q}_{\gamma_0}(f, g)}{\varepsilon} \\ &= \int_{\Omega} h \nabla u_{f,\gamma_0} \cdot \nabla v_{g,\gamma_0} \end{aligned}$$

où u_{f,γ_0} et v_{g,γ_0} sont solutions du problème de conductivité avec $u_{f,\gamma_0}|_{\partial\Omega} = f$ et $v_{g,\gamma_0}|_{\partial\Omega} = g$. Comme $d\tilde{Q}_{\gamma_0}(f, g)(h)$ est linéaire en h , Calderón propose le problème inverse linéarisé : peut on reconstruire la perturbation h en connaissant $d\tilde{Q}_{\gamma_0}(f, g)(h)$? Alors si on suppose que $d\tilde{Q}_{\gamma_0}(f, g)(h) = 0$, est ce que $h = 0$? Calderón choisit deux fonctions harmoniques $u(x) = e^{x \cdot \rho}$ et $v = e^{-x \cdot \bar{\rho}}$ avec $\rho = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n$, tel que $\rho \cdot \rho = 0$, ce qui est équivalent à $|\xi|^2 = |\eta|^2$ et $\xi \cdot \eta = 0$. En injectant les expressions de v et u dans l'expression de $d\tilde{Q}_{\gamma_0}(f, g)(h)$, on déduit :

$$|\eta|^2 \int_{\Omega} e^{2ix \cdot \eta} h(x) dx = 0.$$

Ce qui donne : $\widehat{\chi_\Omega h}(\eta) = 0$, ainsi $h = 0$.

Cette idée de Calderón motive la recherche des solutions pour l'équation de conductivité ou pour des équations équivalentes dont le comportement asymptotique est une fonction harmonique complexe : ce sont les solutions de l'optique géométrique complexe que nous allons étudier dans les sections suivantes.

2 Méthode $\bar{\partial}$ de Nachman

Dans cette section, on revoit les différentes étapes de la méthode $\bar{\partial}$ de Nachman ; on commence par la réduction au cas $\gamma = 1$ au voisinage du bord, ensuite on vérifie le passage à l'équation de Schrödinger et la relation entre les opérateurs de Dirichlet-Neumann correspondants, ce qui permet d'étudier les solutions de l'optique géométrique et définir la transformée scattering. On rappelle les identités d'Alessandrini et leur utilité dans le calcul de la transformée scattering. On termine cette section en expliquant comment reconstruire la conductivité à partir de la transformée scattering.

2.1 Réduction au cas $\gamma = 1$ au voisinage du bord

Par les lemmes [Nac96, Lemme 5.1] et [Nac96, Lemme 5.2], Nachman montre qu'à partir de Λ_γ , on peut calculer $\gamma|_{\partial\Omega}$ et $(\partial\gamma/\partial n)|_{\partial\Omega}$, ce qui permet de travailler avec des conductivités qui sont égales à 1 au voisinage du bord. En effet, soit $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné lipschitzien tel que $\bar{\Omega} \subset \Omega_2$. Comme $\gamma|_{\partial\Omega}$ est connu, on étend γ par $\tilde{\gamma}$ sur $\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1$ de tel sorte que $\gamma \in W^{2,p}(\Omega_2)$ et $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega_2$. Notons Λ_2 (respectivement Λ_1) l'opérateur de Dirichlet-Neumann correspondant à $\partial\Omega_2$ (respectivement $\partial\Omega_1$). Notons $\Omega_1 := \Omega$ et pour $f_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$, considérons les deux problèmes de Dirichlet :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_1) = 0 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1 \\ u_1 = f_1 \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ u_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \end{cases} . \quad (2.3)$$

et

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_2) = 0 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1 \\ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ u_2 = f_2 \text{ sur } \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Les opérateurs de Dirichlet-Neumann correspondants à (2.3) et (2.4) $\Lambda^{ij} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_j) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$, $i, j = 1, 2$, sont définis par

$$\Lambda^{ij} f_j := \left(\tilde{\gamma} \frac{\partial u_j}{\partial n} \right) |_{\partial\Omega_i}, i, j = 1, 2$$

Par [Nac96, Proposition 6.1], Nachman montre que si $\gamma \in W^{2,p}(\Omega_2)$, $p > 1$ alors $\Lambda_1 - \Lambda^{11} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1)$ est inversible et on peut écrire Λ_2 en fonction de Λ_1 par la formule suivante

$$\Lambda_2 = \Lambda^{22} + \Lambda^{21}(\Lambda_1 - \Lambda^{11})^{-1}\Lambda^{12}. \quad (2.5)$$

Ainsi le problème inverse sera : connaissant Λ_2 tel que $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega_2$, peut on reconstruire γ . On en déduit qu'il suffit de chercher les conductivités qui sont égales à 1 au voisinage du bord.

2.2 Passage à l'équation de Schrödinger

Dans cette sous-section on revoit le passage de l'équation de conductivité à l'équation de Schrödinger stationnaire. Ce passage est central dans la méthode $\bar{\partial}$ de Nachman. Cette réduction nécessite une certaine régularité sur la conductivité. Pour cela, on suppose que $\gamma \in W^{2,\infty}(\Omega)$, ainsi le potentiel $q := \Delta\gamma^{\frac{1}{2}}/\gamma^{\frac{1}{2}} \in L^\infty(\Omega)$.

En effet, supposons que u est le relevé γ -harmonique de f . En posant $v := \gamma^{\frac{1}{2}}u$, on a

$$\begin{aligned} \Delta v &= \operatorname{div}(\nabla(\gamma^{\frac{1}{2}}u)) \\ &= \operatorname{div}(\gamma^{\frac{1}{2}}\nabla u + u\nabla\gamma^{\frac{1}{2}}) \\ &= \operatorname{div}(\gamma^{-\frac{1}{2}}\gamma\nabla u) + \nabla\gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla u + u\Delta\gamma^{\frac{1}{2}} \\ &= \gamma^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}(\gamma\nabla u) + \nabla\gamma^{-\frac{1}{2}} \cdot \gamma\nabla u + \nabla u \cdot \nabla\gamma^{\frac{1}{2}} + u\Delta\gamma^{\frac{1}{2}} \\ &= \gamma^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}(\gamma\nabla u) + \nabla\gamma^{-\frac{1}{2}} \cdot \gamma\nabla u + \nabla u \cdot \nabla\gamma^{\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\gamma^{\frac{1}{2}}u \\ &= \gamma^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}(\gamma\nabla u) - \frac{1}{2}\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla\gamma \cdot \nabla u + \frac{1}{2}\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla\gamma \cdot \nabla u + \frac{\Delta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\gamma^{\frac{1}{2}}u \\ &= \gamma^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}(\gamma\nabla u) + \frac{\Delta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\gamma^{\frac{1}{2}}u \end{aligned}$$

Et comme u est γ -harmonique, on déduit que

$$\begin{cases} -\Delta v + qv = 0 \text{ sur } \Omega \\ v = f \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

avec

$$q = \gamma^{-\frac{1}{2}} \Delta \gamma^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Cela montre que pour tout $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il existe une unique solution $v \in H^1(\Omega)$ de l'équation de Schrödinger (2.6), en d'autre terme 0 n'est pas une valeur propre pour $(-\Delta + q)$.

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger (2.6) avec un potentiel général $q \in L^\infty(\Omega)$. Comme pour l'équation de conductivité, on associe à l'équation de Schrödinger un opérateur de Dirichlet-Neumann $\Lambda_q : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ défini par

$$\Lambda_q f := \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega}.$$

où v est l'unique solution de (2.6). Plus généralement, Λ_q est défini au sens faible par

$$\langle \Lambda_q f, g \rangle := \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w + qvw) dx.$$

avec $w \in H^1(\Omega)$ de trace $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Λ_q a les mêmes propriétés que Λ_γ (positif si $q > 0$, autoadjoint).

Une question utile et importante se pose ici : comme les équations de Schrödinger et de conductivité sont équivalentes, peut on calculer Λ_q à partir de Λ_γ ?

En effet, soit u le relevé γ -harmonique de $(\gamma^{-\frac{1}{2}} f) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, alors $(\gamma^{\frac{1}{2}} u)$ résoud (2.6). On pose $v \in H^1(\Omega)$ de trace $v|_{\partial\Omega} = g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, et en remarquant que $\gamma \nabla \gamma^{-\frac{1}{2}} + \nabla \gamma^{\frac{1}{2}} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_q f, g \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(\gamma^{\frac{1}{2}} u) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \Delta \gamma^{\frac{1}{2}} u v dx \\
&= \int_{\Omega} \gamma^{\frac{1}{2}} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \nabla \gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \Delta \gamma^{\frac{1}{2}} u v dx \\
&= \int_{\Omega} \gamma^{\frac{1}{2}} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \gamma^{-\frac{1}{2}} v dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \nabla \gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla u v dx + \int_{\Omega} \nabla \gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla v u dx \\
&= \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla (\gamma^{-\frac{1}{2}} v) dx + \int_{\Omega} \nabla \gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla (u v) dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \gamma^{\frac{1}{2}}}{\partial n} u v dx - \int_{\Omega} \nabla \gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla (u v) dx \\
&= \left\langle \Lambda_{\gamma} (\gamma^{-\frac{1}{2}} f), \gamma^{-\frac{1}{2}} g \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma^{\frac{1}{2}}}{\partial n} \gamma^{-\frac{1}{2}} f, g \right\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur de Dirichlet-Neumann associé à l'équation de Shrödinger Λ_q peut être calculé à partir de Λ_{γ} en calculant $\gamma|_{\partial\Omega}$ et $(\partial\gamma/\partial n)|_{\partial\Omega}$, puis Λ_q par

$$\Lambda_q f = \gamma^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial n} + \Lambda_{\gamma} \right) (\gamma^{-\frac{1}{2}} f)$$

Notons que si $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$ alors $(\partial\gamma/\partial n)|_{\partial\Omega} = 0$ et $\Lambda_{\gamma} = \Lambda_q$.

Remarque 2.1 Dans la suite, on notera Λ_0 l'opérateur de Dirichlet-Neumann pour $q = 0$ et Λ_1 l'opérateur de Dirichlet-Neumann pour $\gamma = 1$. On suppose que $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$.

2.3 Identités d'Alessandrini

En traitant le problème de conductivité inverse, on a besoin des relations qui lient les données au bord à la solution dans le domaine ; ce sont les identités d'Alessandrini que nous allons rappeler dans ce paragraphe.

En partant de la définition de Λ_q et en utilisant que Λ_q est autoadjoint, on déduit que si les $u_i \in H^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, sont les solutions de l'équation de Schrödinger suivante : $(-\Delta + q_i)u_i = 0$ sur Ω et $u_i = f_i$ sur $\partial\Omega$, alors l'identité suivante est

vérifiée :

$$\langle (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2})f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} (q_1 - q_2)u_1 u_2 dx. \quad (2.8)$$

Une deuxième identité d'Alessandrini sera utile dans la suite. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$, et $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ deux relevés γ -harmoniques de $f_1, f_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ respectivement. Alors en utilisant la définition faible de Λ_γ , on déduit :

$$\langle (\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2})f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_2)\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx. \quad (2.9)$$

2.4 Solutions optique géométrique et transformée scattering

Lorsque $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$, comme $q = \gamma^{-\frac{1}{2}}\Delta\gamma^{\frac{1}{2}}$, q est nul au voisinage de $\partial\Omega$. Prolongeons q par 0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, ainsi l'équation de Schrödinger est posée sur \mathbb{R}^2 .

En notant $x = x_1 + ix_2$ et $k = k_1 + ik_2$ et en remarquant que la fonction $x \rightarrow e^{ikx}$ est une fonction harmonique, on définit les solutions de l'optique géométrique complexe $\psi(x, k)$ comme étant une famille de solutions particulières pour l'équation de Schrödinger sur \mathbb{R}^2 suivante :

$$(-\Delta_x + q)\psi(\cdot, k) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2. \quad (2.10)$$

telle que :

$$(e^{-ikx}\psi(x, k) - 1) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2), \quad 2 < p < \infty.$$

Remarque 2.2 *En utilisant le théorème d'injection de Sobolev ($W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^2)$), on déduit que $e^{-ikx}\psi(x, k)$ est continue et $\psi(x, k) \sim e^{ikx}$ lorsque $x \rightarrow \infty$.*

Notons ∂ et $\bar{\partial}$ les opérateurs de Cauchy-Riemann suivants :

$$\partial := \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}) \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}).$$

On définit $\mu(x, k) := e^{-ikx}\psi(x, k)$, ainsi on a $\mu(x, k) \sim 1$ lorsque $x \rightarrow \infty$. En remplaçant $\psi(x, k)$ par $e^{ikx}\mu(x, k)$ dans l'équation de Schrödinger (2.10), on obtient

$$(-\Delta_x - 4ik\bar{\partial}_x)\mu(x, k) = q(x)\mu(x, k). \quad (2.11)$$

Notons g_k la distribution tempérée vérifiant $(-\Delta - 4ik\bar{\partial})g_k = \delta$. Elle est donnée par :

$$g_k(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ix \cdot \xi}}{|\xi|^2 + 2k\xi} d\xi.$$

En tenant compte du comportement asymptotique de $\mu(\cdot, k)$, on transforme l'équation (2.11) en une équation intégrale dite équation de Lippman Schwinger :

$$\mu(x, k) - 1 = -[g_k(\cdot) * (q(\cdot)\mu(\cdot, k))](x). \quad (2.12)$$

Une fois (2.12) résolue, on note $e_k(x) = \exp(i(kx + \bar{k}x))$ et on définit la transformée scattering $\mathbf{t}(k)$ par

$$\mathbf{t}(k) := \int_{\mathbb{R}^2} e_k(x)q(x)\mu(x, k)dx. \quad (2.13)$$

Dans la littérature, $\mathbf{t}(k)$ est dite aussi transformée de Fourier non linéaire de q . En effet, comme $\psi(x, k)$ dépend de $q(x)$, il est clair que $\mathbf{t}(k)$ est non linéaire en $q(x)$.

Dans la pratique, on ne peut pas calculer $\mathbf{t}(k)$ par la formule (2.13) car q dépend de la conductivité γ qui est l'inconnue du problème de conductivité inverse. Ainsi on est amené à trouver une formule qui nous permet de calculer $\mathbf{t}(k)$ à partir de Λ_γ . Comme $\text{supp}(q) \subset \Omega$, alors $\mathbf{t}(k)$ est donnée par

$$\mathbf{t}(k) = \int_{\Omega} e^{i\bar{k}x} q(x)\psi(x, k)dx.$$

D'autre part, on a $\psi(\cdot, k) \in W^{1,p}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, par conséquent on peut appliquer l'identité d'Alessandrini (2.8) et on déduit :

$$\int_{\Omega} e^{i\bar{k}x} q(x)\psi(x, k)dx = \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}x} (\Lambda_q - \Lambda_0)\psi(x, k)d\sigma(x).$$

Avec cette relation et le fait que $\Lambda_\gamma = \Lambda_q$, la transformée scattering est donnée par :

$$\mathbf{t}(k) = \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}x} (\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi(x, k)d\sigma(x). \quad (2.14)$$

Ainsi, pour calculer $\mathbf{t}(k)$, cela revient à calculer $\psi(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$. Pour cela on définit $G_k(x) := e^{ikx}g_k(x)$. Cette distribution est dite la solution fondamentale de Fadeev

pour le Laplacien. En effet, en écrivant $-\Delta = 4\bar{\partial}\partial$, on a

$$\begin{aligned} -\Delta G_k &= -4\bar{\partial}\partial(e^{ikx}g_k) \\ &= -e^{ikx}4\bar{\partial}(\partial + ik)g_k \\ &= e^{ikx}(-\Delta - 4ik\bar{\partial})g_k \\ &= \delta. \end{aligned}$$

On définit l'opérateur $S_k : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ par

$$S_k f(x) := \int_{\partial\Omega} G_k(x-y)f(y)d\sigma(y). \quad (2.15)$$

En utilisant que $x \rightarrow G_k(x-y)$ (pour y fixé) est harmonique, l'identité d'Alessandrini, et l'équation de Lippman Schwinger, par le théorème [Nac96, theorem 5] Nachman montre que :

1. Pour $k \neq 0$, $\psi(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ vérifie l'équation intégrale suivante :

$$(I + S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1))\psi(x, k) = e^{ikx} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.16)$$

2. $A_k := I + S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)$ est inversible sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Ainsi, pour calculer $\mathbf{t}(k)$, on résout (2.16) et on déduit $\mathbf{t}(k)$ par (2.14).

2.5 De la transformée scattering à la conductivité

Une fois la transformée scattering calculée, Nachman montre ([Nac96, theorem 2.1]) que $\mu(x, \cdot)$ vérifie l'équation $\bar{\partial}$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \mu(x, k) = \frac{1}{4\pi \bar{k}} \mathbf{t}(k) e_{-x}(k) \overline{\mu(x, k)}. \quad (2.17)$$

Avec $e_{-x}(k) := \exp(-i(kx + \bar{k}x))$. En notant que $g(k) = 1/\pi k$ est la fonction de Green de l'opérateur $\partial_{\bar{k}}$, l'équation $\bar{\partial}$ s'écrit sous forme d'une équation intégrale. En effet, en prenant en considération le comportement asymptotique de $\mu(x, \cdot)$ au voisinage de l'infini, et en inversant $\partial_{\bar{k}}$, on obtient :

$$\mu(x, k) = 1 + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbf{t}(k')}{(k-k')\bar{k}'} e_{-x}(k') \overline{\mu(x, k')} dk'. \quad (2.18)$$

On en déduit $\psi(x, k) = e^{ikx} \mu(x, k)$. Pour déduire la conductivité, on peut remplacer $\psi(x, k)$ dans l'équation de Schrödinger (2.10), et en déduire le potentiel $q(x)$. Ensuite, il faut résoudre l'équation $\Delta \gamma^{\frac{1}{2}} = q \gamma^{\frac{1}{2}}$ et déduire la conductivité. Cependant, la façon la plus simple est de faire tendre k vers 0, et on obtient la conductivité γ par :

$$\gamma^{\frac{1}{2}}(x) = \operatorname{Re} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \mu(x, k) \right). \quad (2.19)$$

3 Méthode $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée

Dans cette section, on revoit les différentes étapes de la méthode $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée par Knudsen et Tamasan [KnuTam]; on vérifie le passage au système $\partial - \bar{\partial}$ et on étudie les solutions de l'optique géométrique complexe correspondantes, ce qui nous permet de définir la transformée scattering $S(k)$. On explique comment calculer la transformée scattering $S(k)$ à partir de Λ_γ . On termine cette section en expliquant comment reconstruire la conductivité à partir de la transformée scattering $S(k)$.

Remarque 3.1 Dans [KnuTam], on suppose que $\gamma \in W^{1+\epsilon, p}(\Omega)$ pour $p > 2$, $0 < \epsilon < 1$, et $0 < c^{-1} \leq \gamma \leq c$ pour une certaine constante c . On suppose aussi que $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$.

On expliquera dans la suite pourquoi on a besoin de la régularité $W^{1+\epsilon, p}$ et pas celle de $W^{1, p}$.

3.1 Passage au système $\partial - \bar{\partial}$

Dans cette sous section on revoit le passage de l'équation de conductivité au système $\partial - \bar{\partial}$.

On étend γ par 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, et on considère l'équation de la conductivité sur tout \mathbb{R}^2 . Notons u la solution de l'équation de conductivité sur \mathbb{R}^2 ; c'est à dire

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2. \quad (2.20)$$

On définit la fonction vectorielle (v, w) par :

$$(v, w) = \gamma^{\frac{1}{2}} (\partial u, \bar{\partial} u).$$

En écrivant $\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = \nabla \gamma \cdot \nabla u + \gamma \Delta u$, et en remarquant que $\nabla = (\partial + \bar{\partial}, -i(\partial - \bar{\partial}))$ et $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$, alors l'équation (2.20) est équivalente à

$$\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial\gamma\bar{\partial}u + \gamma^{-\frac{1}{2}}\bar{\partial}\gamma\partial u + 2\gamma^{\frac{1}{2}}\partial\bar{\partial}u = 0.$$

En remarquant que $2\partial\gamma^{\frac{1}{2}} = \gamma^{-\frac{1}{2}}\partial\gamma$ et $2\bar{\partial}\gamma^{\frac{1}{2}} = \gamma^{-\frac{1}{2}}\bar{\partial}\gamma$, on déduit

$$\partial\gamma^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}u + \bar{\partial}\gamma^{\frac{1}{2}}\partial u + \gamma^{\frac{1}{2}}\partial\bar{\partial}u = 0. \quad (2.21)$$

Soient $q := -\partial\gamma^{\frac{1}{2}}/\gamma^{\frac{1}{2}}$, et

$$Q := \begin{bmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} \bar{\partial} & 0 \\ 0 & \partial \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Notons que si f est une fonction à valeurs réelles, alors $\bar{\partial}f = \bar{\partial}f$, en particulier on a $\bar{q} = -\gamma^{-\frac{1}{2}}\bar{\partial}\gamma^{\frac{1}{2}}$.

D'autre part, en utilisant la définition (2.22) de Q et D , on a :

$$\begin{aligned} D \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} - Q \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\partial}v \\ \bar{\partial}w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} qw \\ \bar{q}v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\partial}(\gamma^{\frac{1}{2}}\partial u) \\ \partial(\gamma^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial\gamma^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}u \\ \bar{\partial}\gamma^{\frac{1}{2}}\partial u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}\partial u + \bar{\partial}\gamma^{\frac{1}{2}}\partial u + \partial\gamma^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}u \\ \gamma^{\frac{1}{2}}\partial\bar{\partial}u + \partial\gamma^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}u + \bar{\partial}\gamma^{\frac{1}{2}}\partial u \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.21), on déduit facilement que

$$D \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} - Q \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0. \quad (2.23)$$

Remarque 3.2 *Le système d'équation (2.23) est dit système $\partial - \bar{\partial}$.*

Remarque 3.3 *Notons que $q = -\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial\gamma^{\frac{1}{2}} \in W^{\epsilon,p}(\Omega)$. On n'a pas donc besoin de la régularité $W^{2,p}$ sur la conductivité, ce qui est meilleur. De plus, comme $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$, q est à support compact.*

Remarque 3.4 *Comme $W^{1+\epsilon,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ et en utilisant le théorème d'injection de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \subset C^\beta(\bar{\Omega})$, pour $\beta = 1 - 1/p$, on déduit que $\gamma \in C^\beta(\bar{\Omega})$. Avec*

la régularité Hölderienne sur la conductivité, il est connu que pour $f \in C^{1+\beta}(\partial\Omega)$, alors l'équation de conductivité (1.1) admet une unique solution $u \in C^{1+\beta}(\Omega)$ [GT, Theorem 8.34]. (voir en annexe la définition de $C^\beta(\Omega)$).

Remarque 3.5 Le problème de conductivité inverse est reformulé de la façon suivante : étant donné $(v|_{\partial\Omega}, w|_{\partial\Omega})$, peut on reconstruire q ? . Cela nous conduit à définir la donnée de Cauchy C_q de ce problème

$$C_q = \{(v|_{\partial\Omega}, w|_{\partial\Omega}) : (v, w) \in C^\beta(\bar{\Omega}) \times C^\beta(\bar{\Omega}); (D - Q)(v, w)^T = 0\}. \quad (2.24)$$

3.2 Solutions optiques géométriques et transformée scattering

En remarquant que la fonction $x \rightarrow e^{ikx} [1, 0]^T$ résout le système $\partial - \bar{\partial}$ pour $x \notin \text{supp}(q)$, et par analogie avec les travaux de Nachman pour l'équation de Schrödinger, R.Brown et G.Uhlmann ont eu l'idée de chercher des solutions $\bar{\Psi}(x, k) = (\Psi_1, \Psi_2)(x, k)$ du système $\partial - \bar{\partial}$ vérifiant :

$$\Psi(x, k) \sim e^{ikx}(1, 0) \text{ lorsque } |x| \rightarrow +\infty.$$

Pour mieux comprendre ces solutions, notons $m(x, k) := e^{-ikx}\Psi(x, k)$. Il est clair que $m(x, k) \sim (1, 0)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. En injectant l'expression $\Psi(x, k) = e^{ikx}m(x, k)$ dans le système (2.23), on déduit que $m(\cdot, k)$ satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{\partial}m_1(x, k) & = q(x)m_2(x, k) \\ (\partial + ik)m_2(x, k) & = \bar{q}(x)m_1(x, k). \end{cases} \quad (2.25)$$

Une fois le système (2.25) est résolu, on définit la transformée scattering associée par :

$$S(k) := -\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i(kx + \bar{k}x))\bar{q}(x)m_1(x, k)dx \quad (2.26)$$

Remarque 3.6 En pratique il n'est pas facile à résoudre le système (2.25), pour cela on est amené à faire un changement de variables pour avoir deux équations plus faciles à résoudre. En effet, posons

$$m_\pm(x, k) := m_1(x, k) \pm \exp(-i(kx + \bar{k}x))\overline{m_2(x, k)}.$$

alors, en utilisant le système (2.25), on a :

$$\begin{aligned}\bar{\partial}m_{\pm}(x, k) &= \bar{\partial}m_1(x, k) \pm (\bar{\partial} - i\bar{k})\overline{m_2(x, k)}\exp(-i(kx + \bar{k}x)) \\ &= \pm q(x) \left(\pm m_2(x, k) + \overline{m_1(x, k)}\exp(-i(kx + \bar{k}x)) \right) \\ &= \pm q(x)\exp(-i(kx + \bar{k}x)) \left(\overline{m_1(x, k)} \pm \exp(i(kx + \bar{k}x))m_2(x, k) \right).\end{aligned}$$

Finalement on déduit que $m_{\pm}(x, k)$ vérifie l'équation suivante :

$$\bar{\partial}m_{\pm}(x, k) = \pm q(x)\exp(-i(kx + \bar{k}x))\overline{m_{\pm}(x, k)}. \quad (2.27)$$

L'équation (2.27) est de type $\bar{\partial}$, et sa résolution numérique est basée à une version modifiée de la méthode de Vainikko, on reviendra sur ce point dans le chapitre suivant.

Une fois (2.27) résolue, on calcule $m_1(x, k)$ et $S(k)$ par la formule (2.26). Pour l'existence et l'unicité des solutions pour les equations du type $\bar{\partial}$, Knudsen et Tamasan montrent la proposition suivante [KnuTam, proposition II.2] :

Proposition 3.7 Soit $1 < p < 2$, $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ et $a \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, alors l'équation

$$\bar{\partial}m = a\bar{m}$$

admet une unique solution, telle que $m - 1 \in L^{\bar{p}}(\mathbb{R}^2)$.

En utilisant le fait que $q \in W^{\epsilon, p}(\mathbb{R}^2)$ et la proposition 2.3.5, Knudsen et Tamasan [KnuTam, proposition II.3] montrent que l'équation (2.27) admet une unique solution avec $m_{\pm}(\cdot, k) \in W^{\epsilon, r}(\mathbb{R}^2) \cap C^{\alpha}(\mathbb{R}^2)$, $r > 2$, $\alpha = 1 - 1/p$.

Comme pour $\mathbf{t}(k)$, $S(k)$ est dite aussi transformée de Fourier non linéaire de q . Une des propriétés importantes de $S(k)$ est sa régularité ; Knudsen et Tamasan [KnuTam, lemma II.6] montrent que si $q \in W^{\epsilon, p}(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$, $\epsilon > 0$, alors $S \in L^s(\mathbb{R}^2)$ pour tout $s > 2/(\epsilon + 1)$. On remarque que la régularité supplémentaire ϵ intervient, et ceci jouera un rôle important dans la suite.

3.3 De Dirichlet-Neumann à $S(k)$

Comme pour $\mathbf{t}(k)$, on ne peut pas calculer $S(k)$ par la formule (2.26) car on ne connaît pas l'expression de q . Pour cela on est amené à trouver d'autres façons pour

calculer $S(k)$ à partir de Λ_γ .

Notons que $\text{supp}(q) \subset \Omega$, alors on peut écrire

$$S(k) = -\frac{i}{\pi} \int_{\Omega} \exp(i(xk + \bar{x}k)) \bar{q}(x) m_1(x, k) dx.$$

Rappelons la formule d'intégration par parties ; pour $u, v \in C^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \partial u(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \bar{\nu}(x) d\sigma(x) - \int_{\Omega} u(x) \partial v(x) dx, \quad (2.28)$$

avec $\bar{\nu}(x) = \nu_1(x) - i\nu_2(x)$. En utilisant le fait que $\Psi(x, k)$ est la solution du système $\partial - \bar{\partial}$ on déduit :

$$\begin{aligned} S(k) &= -\frac{i}{\pi} \int_{\Omega} \exp(i(kx + \bar{k}x)) \bar{q}(x) m_1(x, k) dx \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{\Omega} e^{i\bar{k}x} \bar{q}(x) \psi_1(x, k) dx \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{\Omega} e^{i\bar{k}x} \partial \psi_2(x, k) dx. \end{aligned}$$

Comme $\partial e^{ikx} = 0$, la formule d'intégration par partie (2.28) permet d'obtenir une nouvelle expression de $S(k)$:

$$S(k) = -\frac{i}{\pi} \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}x} \psi_2(x, k) \bar{\nu}(x) d\sigma(x). \quad (2.29)$$

Cela montre que pour calculer la transformée scattering $S(k)$ à partir des données au bord, il faut calculer la trace des solutions de l'optique géométrique $\Psi(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$. Pour cela, on rappelle la définition de la dérivée tangentielle ∂_τ et son inverse ∂_τ^{-1} .

Definition 3.8 Soit Ω un domaine borné de classe C^∞ , on note $s : [0, |\partial\Omega|] \rightarrow \partial\Omega$ une paramétrisation de $\partial\Omega$. Soit $f \in C^1(\partial\Omega)$, alors on définit la dérivée tangentielle $\partial_\tau f$ par :

$$\partial_\tau f := \frac{d}{dt}(f(s(t))).$$

De même, pour $f \in C_0(\partial\Omega) = \{g \in C(\partial\Omega); \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0\}$, on définit ∂_τ^{-1} par

$$(\partial_\tau^{-1} f)(s(t)) = \int_0^t f(s(t')) dt'. \quad (2.30)$$

La transformée de Hilbert H_γ est définie par $H_\gamma = \Lambda_\gamma \partial_\tau^{-1}$. En utilisant la transformée de Hilbert H_γ , Knudsen et Tamasan montrent une relation entre $\psi_1(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ et $\psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$:

$$iH_\gamma(\nu\psi_1(\cdot, k)|_{\partial\Omega} - \bar{\nu}\psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega}) = \nu\psi_1(\cdot, k)|_{\partial\Omega} + \bar{\nu}\psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega}. \quad (2.31)$$

A partir de la relation (2.31), ils arrivent à donner une nouvelle caractérisation pour la donnée de Cauchy (2.24) :

$$C_q = \{(h_1, h_2) \in C^\beta(\partial\Omega) \times C^\beta(\partial\Omega) : (\nu h_1 - \bar{\nu} h_2) \in C_0^\beta(\partial\Omega), \nu h_1 + \bar{\nu} h_2 = iH_\gamma(\nu h_1 - \bar{\nu} h_2)\}.$$

Par contre la relation (2.31) n'est pas suffisante pour déterminer $\psi_1(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ et $\psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$, ils définissent $g_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-ikx}}{x}$ et les opérateurs à noyau correspondants :

$$S_k f(x) := v.p. \int_{\partial\Omega} f(\xi) g_k(\xi - x) d\xi, \quad \bar{S}_k f(x) = v.p. \int_{\partial\Omega} f(\xi) \overline{g_k(\xi - x)} d\xi$$

et montrent que le $\psi_1(\cdot, k)|_{\partial\Omega}, \psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ vérifient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} (I - iS_k) & 0 \\ 0 & (I + i\bar{S}_k) \\ (iH_\gamma - 1)\nu & -(iH_\gamma + 1)\bar{\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\cdot, k)|_{\partial\Omega} \\ \psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{ikx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Et ils montrent que le système (2.32) admet une unique solution sur C_q (voir [KnuTam, section III] pour plus de détails).

3.4 De la transformée scattering à la conductivité

Notons $\tilde{q}(x) := -\overline{q(x)}$, et $\tilde{m}^+(x, k)$ l'unique solution de l'équation $\bar{\partial}$ associé à \tilde{q} :

$$\bar{\partial}\tilde{m}^+(x, k) = \tilde{q}(x) \exp(-i(kx + \overline{kx})) \overline{\tilde{m}^+(x, k)}. \quad (2.33)$$

Pour $k = 0$, l'équation (2.33) se réduit à

$$\bar{\partial}\tilde{m}^+(x, 0) = \tilde{q}(x) \overline{\tilde{m}(x, 0)}. \quad (2.34)$$

Par définition de q , on remarque que

$$\bar{\partial}\gamma^{\frac{1}{2}}(x) = \tilde{q}(x) \overline{\gamma^{\frac{1}{2}}(x)} \quad (2.35)$$

en retranchant (2.34) de (2.35), on déduit

$$\bar{\partial}(\mu(x, 0) - \gamma^{\frac{1}{2}}(x)) = \tilde{q}(x) \overline{(\mu(x, 0) - \gamma^{\frac{1}{2}}(x))}. \quad (2.36)$$

L'équation (2.36) est de type $\bar{\partial}u = a\bar{u} + bu$, ce type d'équation est dit pseudo-analytique. On rappelle le théorème de Liouville pseudo-analytique [BBR01, Lemme 2.7] :

Lemme 3.9 *Soient $a, b \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $u \in L^r(\mathbb{R}^2) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour $1 \leq r < \infty$, supposons que u est pseudo-analytique*

$$\bar{\partial}u = a\bar{u} + bu,$$

alors $u = 0$.

Comme $q \in W^{\epsilon, p}(\mathbb{R}^2)$, alors $\tilde{q} \in W^{\epsilon, p}(\mathbb{R}^2) \subset L^p(\mathbb{R}^2)$, or \tilde{q} est à support compact K , donc $\tilde{q} \in L^p(K) \subset L^2(K)$, on déduit que $\tilde{q} \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

D'autre part, Knudsen et Tamasan montrent la proposition suivante [KnuTam, Proposition II.3]

Proposition 3.10 *Soit $q \in W^{\epsilon, p}(\mathbb{R}^2)$, $p > 2, \epsilon > 0$, à support compact. Alors pour $k \in \mathbb{C}$ il existe une unique solution $(m_1(x, k), m_2(x, k))$ pour le système (2.25) avec $(m_1(\cdot, k) - 1, m_2(\cdot, k)) \in W^{\epsilon, r}(\mathbb{R}^2) \cap C^\beta(\mathbb{R}^2)$, $r > 2, \beta = 1 - 1/p$.*

En utilisant cette proposition pour \tilde{q} , on déduit que $\tilde{m}^+(x, k) - 1 := \tilde{m}_1(x, k) - 1 + \exp(-i(kx + \bar{k}x)) \overline{\tilde{m}_2(x, \bar{k})} \in W^{\epsilon, r}(\mathbb{R}^2) \subset L^r(\mathbb{R}^2)$.

D'autre part, pour $K \subset\subset \mathbb{R}^2$, on a $(\tilde{m}^+(x, k) - 1)\mathbf{1}_K \in L^r(K) \subset L^2(K)$ donc $\tilde{m}^+(x, k) - 1 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, on déduit $\tilde{m}^+(x, k) - 1 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2)$. De même, on a $\gamma - 1 \in W^{1+\epsilon, p}(\mathbb{R}^2) \subset L^p(\mathbb{R}^2)$, qui est à support compact, donc $\gamma - 1 \in L^p(K) \subset L^2(K)$. En prenant $r = p$, on déduit $\gamma - 1 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2)$. Ainsi $(\tilde{m}^+(x, k) - \gamma) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2)$. On a tout les ingrédients pour utiliser le théorème de Liouville pseudo-analytique sur l'équation (2.36). On en déduit que

$$\gamma^{\frac{1}{2}}(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \tilde{m}^+(x, k). \quad (2.37)$$

Pour calculer $\tilde{m}^+(x, k)$ à partir de la transformée scattering $S(k)$, Knudsen et Tamasan [KnuTam, section IV] montrent que $\tilde{m}^+(x, k)$ vérifie l'équation $\bar{\partial}$ suivante :

$$\bar{\partial}_k \tilde{m}^+(x, k) = \overline{S(-k)} \exp(-i(kx + \bar{k}x)) \overline{\tilde{m}^+(x, k)}. \quad (2.38)$$

Remarque 3.11 En inversant $\bar{\partial}_k$ et en prenant en considération le comportement asymptotique de $\tilde{m}^+(x, k)$, l'équation $\bar{\partial}$ (4.6) est équivalente à l'équation intégrale

$$\tilde{m}^+(x, k) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\overline{S(-k)} \exp(-i(kx + \bar{k}x))}{k - k'} \tilde{m}^+(x, k') dk' \quad (2.39)$$

Remarque 3.12 Pour l'existence et l'unicité de l'équation (4.6), on a $S \in L^s(\mathbb{R}^2)$ pour tout $s > 2/(\epsilon + 1)$, ainsi en utilisant la proposition 2.3.6, on déduit l'existence et l'unicité de $\tilde{m}^+(x, k)$. On remarque que la régularité supplémentaire ϵ est indispensable pour l'algorithme $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifié.

4 Algorithmes des méthodes $\bar{\partial}$

Dans cette section, on résume les algorithmes de reconstructions de Nachman et Brown-Ulmann modifié.

4.1 Algorithme $\bar{\partial}$ de Nachman

- Calcul de $\psi(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ par résolution de l'équation intégrale (2.16).
- Calcul de la transformée scattering $\mathbf{t}(k)$ par la formule (2.14).
- Calcul de $\mu(x, k)$ par résolution de l'équation $\bar{\partial}$ (2.18).
- Calcul de la conductivité par la formule (2.19).

4.2 Algorithme $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifié

- Calcul de la transformée de Hilbert $H_\gamma = \Lambda_\gamma \partial_\tau^{-1}$.
- Calcul de $\Psi(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ par la résolution du système (2.32).
- Calcul de la transformée scattering $S(k)$ par la formule (2.29).

- Calcul de $\tilde{m}^+(x, k)$ par résolution de l'équation $\bar{\partial}$ (4.6).
- Calcul de la conductivité par la formule (2.37).

Chapitre 3

Analyse numérique de la méthode $\bar{\partial}$ de Nachman

Dans la pratique il est indispensable de savoir comment et sous quelles conditions implémenter les méthodes $\bar{\partial}$. Les données fournies par les électrodes ne sont jamais parfaites, en d'autres termes, il y aura une petite erreur ε (le bruit) qui pourra bouleverser toute la procédure de reconstruction. Pour cela, il faut faire attention en calculant la transformée scattering $\mathbf{t}(k)$, d'où l'importance d'introduire des approximations pour la transformée scattering qui renforcent la stabilité de la procédure de reconstruction. On reviendra sur ce point dans la suite. On introduit deux approximations pour la transformée scattering : $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$, on étudie le cas des conductivités radiales, et on explique comment calculer $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$ pour le cas non radial. On étudie l'erreur de l'approximation de la transformée scattering et on montre que cette erreur est liée à plusieurs facteurs comme $\|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}$ et $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}$. On étudie la stabilité de la méthode pour les approximations $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$. Comme application à la stabilité, on étudie le cas des conductivités discontinues et on montre que l'algorithme $\bar{\partial}$ de Nachman est raisonnable pour ce type de conductivité. Ensuite, on introduit le schéma de point fixe pour la résolution de l'équation $\bar{\partial}$, et on étudie sa convergence.

1 Approximations de la transformée scattering

Dans cette section on présente les deux types d'approximation de la transformée scattering : $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$ ainsi que leur calcul pour les conductivités radiales en fonction des valeurs propres de l'opérateur Dirichlet-Neumann.

1.1 Approximation \mathbf{t}^{exp}

Le cas général, estimation d'erreur pour les transformées scattering

On commence par comparer les fonctions de Green-Faddeev $G_k(x)$ et celles de Green usuelle $G_0(x) := -(1/2\pi)\log|x|$. Pour $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on note $H_k(x)$:

$$H_k(x) := G_k(x) - G_0(x)$$

Ainsi, $\Delta H_k = -\delta + \delta = 0$, i.e. H_k est harmonique, et par le lemme de Weyl, on en déduit que $H_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ceci signifie que la solution fondamentale de Faddeev G_k pour $(-\Delta)$ diffère de la solution fondamentale classique G_0 par une fonction lisse H_k . Mueller et Siltanen [SMI00, section III] montrent que $g_k(x) = g_1(kx)$, ainsi, en utilisant la définition de G_k , on déduit

$$H_k(x) = H_1(kx) - \frac{1}{2\pi}\log|k|$$

D'autre part, Siltanen montre que $H_k(0) = -(1/2\pi)(\gamma_0 + \log|k|)$ [sil99, lemme 3.12] où $\gamma_0 \simeq 0.577215665$ est la constante d'Euler. Il définit aussi $\tilde{H}_1(x)$ par $\tilde{H}_1(x) := H_1(x) - H_1(0)$. En remarquant que $\int_{\partial\Omega} H_1(0)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)f(y)d\sigma(y) = 0$ pour tout $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} (I + S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1))f(x) &= f(x) + \int_{\partial\Omega} G_k(x-y)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)f(y)d\sigma(y) \\ &= f(x) + \int_{\partial\Omega} \tilde{H}_1(k(x-y))(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)f(y)d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} G_0(x-y)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)f(y)d\sigma(y) \\ &= (I + S_0(\Lambda_\gamma - \Lambda_1))f(x) + \mathcal{H}_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)f(x) \end{aligned}$$

On déduit que

$$I + S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1) = I + S_0(\Lambda_\gamma - \Lambda_1) + \mathcal{H}_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1) \quad (3.1)$$

Avec $\mathcal{H}_k f(x) := \int_{\partial\Omega} \tilde{H}_1(k(x-y))f(y)d\sigma(y)$. Dans la pratique, il est possible d'implémenter l'opérateur \mathcal{H}_k dans la base de Fourier $\{e^{in\theta}\}$ et de résoudre l'équation (2.16), mais les tests numériques montrent que cette étape est instable (voir [SilMue, page 9]). Pour cela, on est amené à faire des approximations pour rétablir la stabilité. Une première approximation consiste à approcher $\psi(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ par son comportement asymptotique e^{ikx} , c'est à dire approcher $A_k := I + S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)$ par l'identité. Ainsi l'approximation de la transformée scattering, notée $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$, est donnée par

$$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) := \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}x}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)e^{ikx}d\sigma(x) \quad (3.2)$$

La première question qu'on se pose est : $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ est elle proche de $\mathbf{t}(k)$? y a t il une estimation d'erreur? Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1 *Pour $k \in \mathbb{C}$, $x \in \Omega$, il existe deux constantes C et \tilde{C} indépendantes de k et x telle que :*

$$\|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C_1|k|e^{\tilde{C}|k|} \quad (3.3)$$

En particulier pour k au voisinage de 0, on a

$$\|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C|k| \quad (3.4)$$

Preuve. Par définition de la norme $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ on peut écrire

$$\|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^1(\Omega)}, v|_{\partial\Omega} = e^{ikx} - 1\} \leq \|e^{ikx} - 1\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.5)$$

Ainsi il faut estimer $\|e^{ikx} - 1\|_{H^1(\Omega)}$. Il est facile de voir que $\nabla e^{ikx} = (ik, -k)e^{ikx}$, on en déduit que $|\nabla e^{ikx}| \leq \sqrt{2}|k|e^{|kx|}$. Comme $x \in \Omega$, on en déduit qu'il existe une constante \tilde{C} telle que $|\nabla e^{ikx}| \leq C|k|e^{\tilde{C}|k|}$. Donc

$$\|\nabla(e^{ikx} - 1)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1|k|e^{\tilde{C}|k|} \quad (3.6)$$

D'autre part, on peut écrire $e^{ikx} = 1 + ikx \int_0^1 e^{ikxs} ds$, et comme k est au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} |e^{ikx} - 1| &\leq |k||x| \int_0^1 |e^{ikxs}| ds \\ &\leq \tilde{C}|k| \int_0^1 e^{|kx|s} ds \\ &\leq \tilde{C}|k|e^{\tilde{C}|k|} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|e^{ikx} - 1\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2|k|e^{\tilde{C}|k|} \quad (3.7)$$

En combinant (3.5),(3.6) et (3.7), on en déduit (3.3). \square

Remarque 1.2 Pour $\Omega = D(0, 1)$, on a alors $|x| \leq 1$ et $\tilde{C} = 1$.

Remarque 1.3 Notons que $\int_{\partial\Omega} \Lambda_\gamma f(x) d\sigma(x) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) dx = 0$.

Remarque 1.4 Comme $u = 1$ est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ sur } \Omega \\ u = 1 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On déduit que $\Lambda_\gamma 1 = 0$.

Avec ces remarques on peut réécrire (3.2) sous la forme suivante

$$\mathbf{t}^{\exp}(k) = \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(e^{ikx} - 1) d\sigma(x)$$

Pour k au voisinage de 0, Siltanen, Mueller et Isaacson [SMI00, Theorem 3.1]) montrent que

$$\|\psi(\cdot, k) - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C|k|$$

ainsi on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\psi(\cdot, k) - e^{ikx}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} &\leq \|\psi(\cdot, k) - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &\leq C|k| \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (3.4), on en déduit que pour $|k|$ au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^{\exp}(k)| &\leq \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(\psi(x, k) - e^{ikx}) d\sigma(x) \right| \\ &\leq C \|e^{i\bar{k}x} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

Et finalement on tire

$$|\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^{\exp}(k)| \leq C|k|^2 \quad (3.8)$$

Cette estimation n'est bonne que pour k au voisinage de 0, malgré cela, dans les tests numériques, la comparaison des résultats calculés avec la conductivité initiale

est acceptable.

On va généraliser le résultat (3.8) pour k quelconque. Dans la pratique $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ explose à partir de $|k| > R$, alors $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}(k)$ vont être tronquées pour $|k| \leq R$, pour cela on note $\mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k) = \mathbf{1}_{|k| < R} \mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_R(k) = \mathbf{1}_{|k| < R} \mathbf{t}(k)$ où $\mathbf{1}$ désigne la fonction indicatrice. On note ρ le support de $\gamma - 1$. On note aussi $A_k : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ l'opérateur suivant

$$A_k := I + S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)$$

Siltanen, Knudsen, Lassas et Mueller montrent les lemmes suivants ([KLMS, Lemme 2.2] et [KLMS, Lemme 2.3])

Lemme 1.5 *Pour $\Omega = D(0, 1)$, soit $\phi_0 \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, telle que $\int_\Omega \phi_0(y) d\sigma(y) = 0$, alors il existe une constante C_1 indépendante de k telle que*

$$\|S_k \phi_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C_1 e^{2|k|} (1 + |k|) \|\phi_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

Lemme 1.6 *Pour $k \in \mathbb{C}$, il existe une constante $C_2(M, \rho)$ telle que*

$$\|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \|(I + S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1))^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \leq C_2 e^{2|k|} (1 + |k|)$$

Supposons que $\gamma_1, \gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$, telles que $M_1^{-1} < \gamma_1 < M_1$, $M_2^{-1} < \gamma_2 < M_2$, et pour $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, on note $u_\phi^{\gamma_1}$ et $u_\phi^{\gamma_2}$ les relevés γ_1 et γ_2 -harmoniques respectivement, alors

$$\begin{aligned} |\langle (\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2})\phi, \phi \rangle| &= \left| \int_\Omega (\gamma_1 - \gamma_2) \nabla u_\phi^{\gamma_1} \cdot \nabla u_\phi^{\gamma_2} dx \right| \\ &\leq \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\phi^{\gamma_1}\|_{H^1(\Omega)} \|u_\phi^{\gamma_2}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \leq C \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.9)$$

Où la constante C dépend de M_1, M_2 et Ω .

Théorème 1.7 *Pour $\Omega = D(0, 1)$ et $\gamma \in C^2(\Omega)$ avec $\|\gamma\|_{C^2(\Omega)} \leq M$, on a*

$$|\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)| \leq C(R, \rho, M) \|\gamma - 1\|_{L^\infty}^2 \quad (3.10)$$

Preuve. Comme $\Lambda_\gamma 1 = \Lambda_1 1 = 0$ et $\int_{\partial\Omega} \Lambda_\gamma f d\sigma = 0$, on écrit

$$\psi(x, k) - 1 = A_k^{-1}(e^{ikx} - 1)$$

ainsi

$$\mathbf{t}(k) = \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x)$$

donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^{\text{exp}}(k)| &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(A_k^{-1} - I)(e^{ikx} - 1)d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}(A_k - I)(e^{ikx} - 1)d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(e^{ikx} - 1)d\sigma(x) \right| \\ &\leq \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(e^{ikx} - 1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 3.1.5 et 3.1.6 et l'estimation , on déduit

$$|\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)| \leq C(M, \rho)R^2(1 + R)^2 e^{6R} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^2$$

□

On déduit du théorème 3.1.5 que lorsque $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}$ tend vers 0, $\|\mathbf{t}_R - \mathbf{t}_R^{\text{exp}}\|_{L^\infty(|k| \leq R)}$ tend vers 0, en d'autres termes si la conductivité γ est proche de 1, alors l'approximation $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ de $\mathbf{t}(k)$ est bonne.

Estimations d'erreur pour les conductivités reconstruites

Une fois qu'on a étudié l'erreur de l'approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$, on étudie l'erreur de la reconstruction de la conductivité γ_{exp} . On aura besoin de quelques lemmes techniques (voir [KLMS07] pour les preuves).

Lemme 1.8 *Soit $\phi \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$, à support compact. L'équation intégrale :*

$$\mu(x, s) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\phi(k)}{s - k} \exp(-i(kx + \bar{k}x)) \overline{\mu(x, k)} dk \quad (3.11)$$

admet une unique solution $\mu(x, \cdot)$ avec $\mu(x, \cdot) - 1 \in L^r(\mathbb{R}^2) \cap C^\alpha(\mathbb{R}^2)$, $r > 2$, $\alpha < 1 - 2/p$. De plus l'application $x \rightarrow \mu(x, \cdot) - 1$ est C^∞ , en particulier $\mu(x, 0)$ est C^∞

Avec ce lemme, on peut définir l'opérateur solution $\mathcal{S} : L_c^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\overline{\Omega})$ de la façon suivante :

$$\mathcal{S}(\phi) = \mu(x, 0)$$

Ainsi, Siltanen, Knudsen, Lassas et Mueller ont montré le lemme suivant

Lemme 1.9 *L'opérateur \mathcal{S} est borné et l'estimation suivante est vérifiée*

$$\|\mathcal{S}(\phi_1) - \mathcal{S}(\phi_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (3.12)$$

où C dépend de $p, \|\phi_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \|\phi_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \text{supp}(\phi_1), \text{supp}(\phi_2)$.

On est prêt à montrer le théorème suivant :

Théorème 1.10 *Notons $\bar{\gamma}(x) := \mu_R(x, 0)^2$ et $\gamma_{\text{exp}}(x) := \mu_R^{\text{exp}}(x, 0)^2$, alors*

$$\|\bar{\gamma} - \gamma_{\text{exp}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(M, R, \rho) \|\gamma - 1\|_{L^\infty}^2. \quad (3.13)$$

Preuve. En appliquant le lemme 3.1.9 avec $\phi_1(k) = 0, \phi_2(k) = \frac{\mathbf{t}_R(k)}{k}$, on a

$$\begin{aligned} \|\mu_R(\cdot, 0) - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &= \|\mathcal{S}(0) - \mathcal{S}\left(\frac{\mathbf{t}_R(k)}{k}\right)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \left\| \frac{\mathbf{t}_R(k)}{k} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant les lemmes 3.1.6 et 3.1.4, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{t}_R(k)|}{|k|} &= \chi_{|k| \leq R} \frac{|\mathbf{t}(k)|}{|k|} \\ &= \chi_{|k| \leq R} \frac{|\int_{\partial\Omega} (e^{ikx} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1) A_k^{-1} (e^{ikx} - 1) d\sigma(x)|}{|k|} \\ &\leq \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{|k|} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ &\leq CR(1+R)e^{4R} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\mu_R(\cdot, 0) - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C \left\| \frac{\mathbf{t}_R(k)}{k} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \left(\int_{|k| \leq R} \left| \frac{\mathbf{t}_R(k)}{k} \right|^p dk \right)^{1/p} \\ &\leq CR(1+R)e^{4R} R^{2/p} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C_1(R) \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\mu_R(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1 + C_1(R)\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.14)$$

De même, on applique le lemme 3.1.9 pour $\phi_1(k) = 0$, $\phi_2(k) = \frac{\mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)}{\bar{k}}$, on a

$$\begin{aligned} \|\mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0) - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &= \|\mathcal{S}(0) - \mathcal{S}(\mathbf{t}_R^{\text{exp}})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C\left\|\frac{\mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)}{\bar{k}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)|}{|\bar{k}|} &= \chi_{|k| \leq R} \frac{|\mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)|}{|\bar{k}|} \\ &= \chi_{|k| \leq R} \frac{|\int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(e^{ikx} - 1)d\sigma(x)|}{|k|} \\ &\leq \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{|k|} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \\ &\leq CR e^{2R} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0) - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C\left\|\frac{\mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)}{\bar{k}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C\left(\int_{|k| \leq R} \left|\frac{\mathbf{t}_R^{\text{exp}}(k)}{\bar{k}}\right|^p dk\right)^{1/p} \\ &\leq CR e^{2R} R^{2/p} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C_2(R)\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1 + C_2(R)\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.15)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma} - \gamma_{\text{exp}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &= \|\mu_R(\cdot, 0)^2 - \mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0)^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \|\mu_R(\cdot, 0) + \mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\mu_R(\cdot, 0) - \mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq (\|\mu_R(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}) \|\mu_R(\cdot, 0) - \mu_R^{\text{exp}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.14) et (3.15), on tire

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma} - \gamma_{\mathbf{exp}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq (2 + C_1(R) + C_2(R)) \|\mu_R(\cdot, 0) - \mu_R^{\mathbf{exp}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_3(R) \left\| \mathcal{S}\left(\frac{\mathbf{t}_R(k)}{\bar{k}}\right) - \mathcal{S}\left(\frac{\mathbf{t}_R^{\mathbf{exp}}(k)}{\bar{k}}\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

De nouveau, on utilise le lemme 3.1.9 pour déduire

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma} - \gamma_{\mathbf{exp}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C \left\| \frac{1}{\bar{k}} (\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^{\mathbf{exp}}(k)) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \left(\int_{|k| \leq R} \left| \frac{\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^{\mathbf{exp}}(k)}{\bar{k}} \right|^p dk \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Dans la preuve du théorème 3.1.7 on a obtenu l'estimation suivante :

$$|\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^{\mathbf{exp}}(k)| \leq \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(e^{ikx} - 1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

En utilisant les lemmes 3.1.5, 3.1.6, et l'estimation (3.9), on en déduit

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^{\mathbf{exp}}(k)}{\bar{k}} \right| &\leq C(M, \rho) \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{|k|} e^{4k} (1 + |k|)^2 \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\leq C(M, \rho) e^{6R} R (1 + R)^2 \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\| \frac{1}{\bar{k}} (\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^{\mathbf{exp}}(k)) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C(M, \rho) e^{6R} R (1 + R)^2 R^{2/p} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2.$$

On déduit

$$\|\bar{\gamma} - \gamma_{\mathbf{exp}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(M, R, \rho) \|\gamma - 1\|_{L^\infty}^2.$$

□

De ce théorème, on déduit une conséquence importante : plus la conductivité est proche de 1 en norme L^∞ , meilleure est la reconstruction via l'approximation \mathbf{exp} . D'autres facteurs jouent un rôle important dans l'étude de l'erreur comme $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.11 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de classe C^1 , et soit $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, pour $p > 2$, tel que $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$. Alors il existe une constante C indépendante de γ tel que*

$$\|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \leq C \|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.16)$$

Preuve. Soit $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, notons $u^\gamma, u^1 \in H^1(\Omega)$ les relevés γ -harmonique et 1-harmonique de ϕ respectivement et $\rho = \text{supp}(\gamma - 1) \subset \Omega$. Comme ρ est fermé et borné dans Ω , donc ρ est compact.

Partant de la définition faible de Λ_γ 1.12, en utilisant le fait que cette définition est indépendante de l'extension H^1 de ϕ , et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} | \langle (\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\phi, \phi \rangle | &= \left| \int_{\Omega} \gamma \nabla u^\gamma \cdot \nabla u^1 dx - \int_{\Omega} \nabla u^\gamma \cdot \nabla u^1 dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |(\gamma - 1) \nabla u^\gamma \cdot \nabla u^1| dx \\ &\leq \int_{\rho} |(\gamma - 1) \nabla u^\gamma \cdot \nabla u^1| dx \\ &\leq \left(\int_{\rho} (\gamma - 1)^2 |\nabla u^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\rho} |\nabla u^\gamma|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer l'inégalité de Hölder sur le terme suivant $\int_{\rho} (\gamma - 1)^2 |\nabla u^1|^2 dx$, il faut montrer que $\int_{\rho} |\nabla u^1|^{2q} dx < \infty$ pour $q > 1$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi > 0$ et $\chi(x) = 1$ pour $x \in \rho$. Posons $v := \chi u^1$. Comme $\Delta u^1 = 0$ sur Ω alors

$$\begin{aligned} \Delta(\chi u^1) &= u^1 \Delta \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u^1 + \chi \Delta u^1 \\ &= u^1 \Delta \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u^1. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\chi|_{\partial\Omega} = 0$, on en déduit que v vérifie le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \Delta v = u^1 \Delta \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u^1 & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Montrons que $u^1 \Delta \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u^1 \in L^2(\Omega)$. Comme $\chi \in C^\infty(\Omega)$ et $u^1 \in H^1(\Omega)$ alors

$$\begin{aligned} \|u^1 \Delta \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u^1\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\Delta \chi\|_{L^\infty(\Omega)} \|u^1\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u^1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \text{sup}(\|\Delta \chi\|_{L^\infty(\Omega)}, 2 \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u^1\|_{H^1(\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi $(u^1 \Delta \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u^1) \in L^2(\Omega)$. En utilisant le théorème de régularité élliptique (voir Appendice) on en déduit que $\chi u^1 \in H^2(\Omega)$ donc $\nabla(\chi u^1) \in H^1(\Omega)$. D'autre part, on peut écrire

$$\nabla(\chi u^1) = u^1 \nabla \chi + \chi \nabla u^1. \quad (3.18)$$

Ainsi $\chi \nabla u^1 \in H^1(\Omega)$ et en utilisant le théorème d'injections de Sobolev (voir Appendice) $H^1(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ pour $r \in [1, \infty[$, en particulier pour $r = 2q$, on déduit

$$\begin{aligned} \left(\int_{\rho} |\nabla u^1|^{2q} dx \right)^{\frac{1}{2q}} &\leq C(\chi) \left(\int_{\Omega} |\chi \nabla u^1|^{2q} dx \right)^{\frac{1}{2q}} \\ &\leq C(\chi) \|\chi \nabla u^1\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Comme $\chi \nabla u^1 \in H^1(\Omega)$, on déduit que $\int_{\rho} |\nabla u^1|^{2q} dx < \infty$.

On choisit p et q telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $q \in]1, \infty[$, en appliquant l'inégalité de Hölder, on tire

$$\begin{aligned} |\langle (\Lambda_{\gamma} - \Lambda_1)\phi, \phi \rangle| &\leq \left(\int_{\rho} (\gamma - 1)^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_{\rho} |\nabla u^1|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \|u^{\gamma}\|_{H^1(\rho)} \\ &\leq \left(\int_{\rho} (\gamma - 1)^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_{\rho} |\nabla u^1|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \|u^{\gamma}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Reste à contrôler $\int_{\rho} |\nabla u^1|^{2q} dx$ par $\|u^1\|_{H^1(\Omega)}$. En remarquant que la norme $\|\Delta f\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à la norme $\|f\|_{H^2(\Omega)}$ pour $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on déduit de l'égalité (3.18)

$$\begin{aligned} \|\chi \nabla u^1\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|\nabla(\chi u^1)\|_{H^1(\Omega)} + \|u^1 \nabla \chi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|\chi u^1\|_{H^2(\Omega)} + \|\chi\|_{C^2(\Omega)} \|u^1\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|\Delta(\chi u^1)\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi\|_{C^2(\Omega)} \|u^1\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|u^1 \Delta \chi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \chi \cdot \nabla u^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi\|_{C^2(\Omega)} \|u^1\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|\chi\|_{C^2(\Omega)} \|u^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi\|_{C^1(\Omega)} \|\nabla u^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi\|_{C^2(\Omega)} \|u^1\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante C_2 qui dépend de χ telle que

$$\|\chi \nabla u^1\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2(\chi) \|u^1\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi,

$$\left(\int_{\rho} |\nabla u^1|^{2q} dx \right)^{\frac{1}{2q}} \leq C_3(\chi) \|u^1\|_{H^1(\Omega)},$$

et par conséquent,

$$|\langle (\Lambda_{\gamma} - \Lambda_1)\phi, \phi \rangle| \leq C_4 \|\gamma - 1\|_{L^{2p}(\rho)} \|u^1\|_{H^1(\Omega)} \|u^{\gamma}\|_{H^1(\Omega)}$$

En utilisant l'estimation (1.11) pour contrôler $\|u^\gamma\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|u^1\|_{H^1(\Omega)}$ par $\|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$, on déduit que

$$|\langle (\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\phi, \phi \rangle| \leq C_5 \|\gamma - 1\|_{L^{2p}(\Omega)}.$$

ou encore

$$\|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \leq C_5 \|\gamma - 1\|_{L^{2p}(\Omega)}. \quad (3.19)$$

□

Remarque 1.12 Pour $0 < p \leq 2$, et $q > 2$ on peut écrire

$$\|\gamma - 1\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{q}{p}} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{q-p}{q}}$$

Ainsi, on en déduit qu'il existe $C(p, q, \gamma, \Omega)$ telle que

$$\|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \leq C(p, q, \gamma, \Omega) \|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}. \quad (3.20)$$

Avec ce lemme, on est capable de montrer une estimation d'erreur de la méthode $\bar{\partial}$ via l'approximation **exp**, en prenant en considération $\|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}$.

Théorème 1.13 Pour $0 < p < \infty$, il existe une constante $C_1(M, R, \rho)$ telle que

$$\|\bar{\gamma} - \gamma_{\mathbf{exp}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_2(M, R, \rho) \|\gamma - 1\|_{L^p}^2. \quad (3.21)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est obtenue exactement comme celle du théorème 3.1.10 en utilisant l'estimation (3.19) à la place de l'estimation (3.9) □

Remarque 1.14 Ce théorème nous permet de conclure que l'erreur de reconstruction dépend de $\|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}$, en particulier du diamètre du support de $\gamma - 1$. Plus ils sont petits, meilleure est la reconstruction de la conductivité.

Stabilité via l'approximation **exp**

Comme la donnée de Cauchy $(f, \Lambda_\gamma f)$ n'est jamais exacte en pratique, il est important d'étudier la stabilité de la méthode $\bar{\partial}$ via les approximations des transformées scattering. Pour l'approximation **exp**, l'étude de la stabilité a été faite par

Siltanen, Knudsen, Lassas et Mueller dans [KLMS07]. L'idée principale est d'écrire la procédure de reconstruction sous la forme suivante :

$$\gamma_{\text{exp}}^{1/2} = \mathcal{M}_R^{\text{exp}}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)$$

où $\mathcal{M}_R^{\text{exp}} : \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \rightarrow C^\infty(\overline{\Omega})$ est défini par $\mathcal{M}_R^{\text{exp}} = \mathcal{S} \circ T_R^{\text{exp}}$ et où $T_R^{\text{exp}} : \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \rightarrow L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ est un opérateur linéaire défini par

$$(T_R^{\text{exp}}L)(k) = \chi_{|k| < R} \frac{1}{4\pi k} \int_{\partial\Omega} (e^{ik\bar{x}} - 1)L(e^{ikx} - 1)d\sigma(x)$$

Étudier la stabilité revient à montrer la continuité de $\mathcal{M}_R^{\text{exp}}$, Siltanen, Knudsen, Lassas et Mueller ont montré le lemme suivant [KLMS07, Lemme 4.1] :

Lemme 1.15 *L'opérateur $T_R^{\text{exp}} : \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \rightarrow L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ est borné, de plus l'estimation suivante est vérifiée*

$$\|T_R^{\text{exp}}L\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq Ce^{2R}\|L\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$$

Par l'estimation (3.12), on tire que \mathcal{S} est continue, ainsi $\mathcal{M}_R^{\text{exp}}$ est continue (comme étant la composée de deux opérateurs continus).

Cas des conductivités radiales

Comme le calcul des approximations des transformées scattering est explicite pour les conductivités radiales - c'est à dire $\gamma(x) = \gamma(|x|)$, il est important de les étudier. Dans son article [Sylv92], John Sylvester a montré que la suite $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une suite de fonctions propres pour Λ_γ sur $D(0, 1)$. On notera λ_n^γ les valeurs propres correspondantes c'est à dire :

$$\Lambda_\gamma e^{in\theta} = \lambda_n^\gamma e^{in\theta}$$

Il est important de savoir comment calculer ou approcher les valeurs propres λ_n^γ car elles représentent l'opérateur de Dirichlet-Neumann dans la base de Fourier $(e^{in\theta})_n$. On a deux méthodes pour cet objectif. Premièrement, en écrivant la solution de l'équation de conductivité (avec comme données au bord $u_n(1, \theta) = e^{in\theta}$) de la

façon suivante : $u_n(r, \theta) = a_n(r)e^{in\theta}$ et en écrivant l'équation de conductivité en coordonnées radiales, on en déduit que $a_n(r)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\gamma(r)\frac{d}{dr}a_n(r)) - n^2\frac{\gamma(r)}{r}a_n(r) = 0 \\ a_n(1) = 1 \\ a_n(0) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

D'autre part, $\Lambda_\gamma e^{in\theta} = (\partial u / \partial r)(1, \theta) = (d/dr)a_n(r)|_{r=1}e^{in\theta}$, on en déduit que $\lambda_n^\gamma = a_n'(1)$, ainsi pour calculer λ_n^γ , on est amené à résoudre l'équation différentielle (3.22) par une méthode numérique (différence finie par exemple).

Remarque 1.16 Pour $\gamma = 1$, on a une solution triviale : $a_n(r) = r^{|n|}$, ainsi on en déduit facilement que $\lambda_n^1 = |n|$.

Comme $\gamma > 0$, alors Λ_γ est un opérateur positif et $\lambda_n^\gamma > 0$, ainsi les valeurs propres de Λ_1 sont $|n|$ et non pas n . (Notons que $n \in \mathbb{Z}$).

La deuxième méthode pour le calcul des valeurs propres est introduite par Siltanen, Mueller et Isaacson [SMI00, Lemma 4.1]. l'idée est d'approcher la conductivité (en haut et en bas) par des conductivités constantes par morceaux γ^{inf} et γ^{sup} et ensuite de calculer explicitement les valeurs propres de $\Lambda_{\gamma^{inf}}$ et $\Lambda_{\gamma^{sup}}$. Finalement, λ_n^γ est approchée par $0.5(\lambda_n^{\gamma^{inf}} + \lambda_n^{\gamma^{sup}})$. On rappelle juste le lemme d'approximation

Lemme 1.17 Soit $D(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité et $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_N = 1$ pour $N \geq 2$. Soit $\gamma_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, \dots, N$ une suite positive telle que $\gamma_j \neq \gamma_{j+1}$, et on suppose que $\gamma_N = 1$. Soit $\gamma(r) := \gamma_j$ pour $r_{j-1} \leq r < r_j$, $j = 1, \dots, N$. Alors les valeurs propres de Λ_γ sont données par

$$\lambda_n^\gamma = |n| - 2|n|(1 + C_{N-1})^{-1} \quad (3.23)$$

avec C_j défini de la façon suivante : $C_1 = \rho_1 r_1^{-2|n|}$ et $C_j = (\rho_j C_{j-1} + r_j^{-2|n|}) / (\rho_j + C_{j-1} r_j^{2|n|})$ pour $j = 2, \dots, N-1$ où $\rho_j = (\gamma_{j+1} + \gamma_j) / (\gamma_{j+1} - \gamma_j)$.

Remarque 1.18 Dans la suite, l'algorithme décrit par le lemme 3.1.5 est dit algorithme SMI, et dans les tests numériques on utilisera cet algorithme pour calculer les valeurs propres.

Avec les méthodes de calcul des valeurs propres λ_n^γ , on est capable de calculer $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ pour les conductivités radiales. En effet, pour $x \in \partial D(0, 1)$, on peut écrire $x = x_1 + ix_2$ sous la forme polaire $x = e^{i\theta}$, $\theta = 0, \dots, 2\pi$, ainsi il est facile de voir que

$$e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} e^{in\theta}, \quad e^{i\bar{k}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^n}{n!} e^{-in\theta}$$

En injectant les expressions de e^{ikx} et $e^{i\bar{k}x}$ dans (3.2), on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{\text{exp}}(k) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^n}{n!} \frac{(ik)^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} (\Lambda_\gamma - \Lambda_1) e^{im\theta} d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^n}{n!} \frac{(ik)^m}{m!} (\lambda_m^\gamma - n) \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta. \end{aligned}$$

En remarquant que $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = 2\pi\delta_{nm}$, et après simplification, on en déduit l'expression suivante de $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ en fonction de λ_n^γ :

$$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\gamma - n) \frac{(-1)^n |k|^{2n}}{(n!)^2}. \quad (3.24)$$

Notons que pour $n = 0$, $\lambda_0^\gamma = a_0'(1)$. Or, dans ce cas, l'unique solution de l'équation différentielle (3.22) est $a_0(r) = 1$. On en déduit que $\lambda_0^\gamma = 0$; c'est pour cela que la somme commence à 1 dans l'expression de $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ (3.24).

1.2 L'approximation \mathbf{t}^{b}

Cas général, estimation d'erreur

Un autre type d'approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}(k)$ a été introduit par Siltanen-Mueller dans [SilMue], c'est l'approximation $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$. L'idée principale est d'approcher A_k par A_0 . Ainsi, au lieu de résoudre (2.16), on résout l'équation suivante :

$$\psi^{\text{b}}(x, k) = e^{ikx} + [S_0(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi^{\text{b}}(\cdot, k)](x) \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.25)$$

Notons que cette équation peut s'écrire sous la forme $\psi^{\text{b}}(x, k) = A_0^{-1}e^{ikx}$ ou encore $\psi^{\text{b}}(x, k) - 1 = A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)$. Comme A_0 est inversible sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, l'équation (3.25)

admet une unique solution.

Avec ces notations, $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k) = \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}x} [(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi^{\mathbf{b}}(\cdot, k)](x) d\sigma(x), \quad k \in \mathbb{C}. \quad (3.26)$$

Comme pour $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$, la première question que l'on se pose est : $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ est elle suffisamment proche de $\mathbf{t}(k)$? Premièrement, on traite cette question pour k au voisinage de 0. Comme $\psi(x, k) - 1 = A_k^{-1}(e^{ikx} - 1)$ et $\psi^{\mathbf{b}}(x, k) - 1 = A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)| &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(A_k^{-1} - A_0^{-1})(e^{ikx} - 1) d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}(A_k - A_0)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1) d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}\mathcal{H}_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1) d\sigma(x) \right|. \end{aligned}$$

Siltanen, Mueller et Isaacson considèrent $\Lambda_\gamma - \Lambda_1$ comme un opérateur régularisant et comme un élément de $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ et ils montrent que pour k au voisinage de 0, alors $\|\mathcal{H}_k\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \leq C|k|$ (voir [SMIerr] pour plus de détails). De plus, pour k suffisamment petit, on a $\|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \leq C\|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$. En utilisant ces résultats, on a

$$|\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)| \leq C\|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|\mathcal{H}_k\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.$$

En utilisant le lemme 3.1.1, on conclut par l'estimation suivante :

$$|\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)| \leq C|k|^3.$$

Avec cette estimation, on remarque que $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ approche $\mathbf{t}(k)$ mieux que $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$. Comme pour $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$, on va généraliser ce résultat.

Remarque 1.19 Comme pour $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$, $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ explose à partir de $|k| > R$, pour cela on tronque $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$, et on note $\mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}(k) := \mathbf{1}_{|k| < R} \mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$.

Théorème 1.20 Pour $\Omega = D(0, 1)$ et $\gamma \in C^2(\Omega)$, avec $\|\gamma\|_{C^2(\Omega)} \leq M$, on a

$$|\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}(k)| \leq C^{\mathbf{b}}(R, \rho, M) \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^2. \quad (3.27)$$

Preuve. En écrivant $\mathbf{t}(k)$ et \mathbf{t}^b sous les formes suivantes

$$\mathbf{t}(k) = \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x).$$

et

$$\mathbf{t}^b(k) = \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x).$$

on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^b(k)| &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)(A_k^{-1} - A_0^{-1})(e^{ikx} - 1)d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}(A_k - A_0)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}(S_k - S_0)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_k^{-1}\mathcal{H}_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x) \right| \end{aligned}$$

Dans la preuve du [KLMS, Lemme 2.2] Siltanen, Mueller, Knudsen et Lassas montrent que pour tout $\phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, tel que $\int_{\partial\Omega} \phi(y)d\sigma(y) = 0$, on a :

$$\|\mathcal{H}_k\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C|k|^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(k) - \mathbf{t}^b(k)| &\leq C|k|^{\frac{1}{2}}\|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\|(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &\leq C|k|^{\frac{1}{2}}\|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2\|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2\|A_k^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Des lemmes 3.1.4, 3.1.6, et de l'estimation (3.9), on déduit

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_R(k) - \mathbf{t}_R^b(k)| &\leq CR^{\frac{5}{2}}e^{4R}(1+R)\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\leq C^b(M, R, \rho)\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.21 En comparant $C^b(M, R, \rho)$ et $C(M, R, \rho)$, il est clair que l'approximation \mathbf{t}^b est meilleure que \mathbf{t}^{exp} .

Remarque 1.22 On déduit du théorème 3.1.14 que plus la conductivité γ est proche de 1, meilleure est l'approximation \mathbf{t}^b .

Après avoir étudié l'erreur de l'approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$, on passe à l'étude de l'erreur de la construction de la conductivité $\gamma_{\mathbf{b}}$.

Théorème 1.23 Soit $\bar{\gamma}(x) := \mu_R(x, 0)^2$ et $\gamma_{\mathbf{b}}(x) := \mu_R^{\mathbf{b}}(x, 0)^2$, alors

$$\|\bar{\gamma} - \gamma_{\mathbf{b}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C^{\mathbf{b}}(M, R, \rho) \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (3.28)$$

Preuve. En utilisant le lemme 3.1.4 et l'estimation (3.4), on a

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}(k)|}{|\bar{k}|} &= \chi_{|k| \leq R} \frac{|\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)|}{|\bar{k}|} \\ &= \chi_{|k| \leq R} \frac{|\int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x)|}{|k|} \\ &\leq \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{|k|} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ &\leq CR e^R \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

On applique le lemme 3.1.9 pour $\phi_1(k) = 0$ et $\phi_2(k) = \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)}{\bar{k}}$, on a

$$\begin{aligned} \|\mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0) - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C \left\| \frac{\mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}(k)}{\bar{k}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \left(\int_{|k| \leq R} \left| \frac{\mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}(k)}{\bar{k}} \right|^p dk \right)^{1/p} \\ &\leq CR e^{2R} R^{2/p} \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C_3(R, M, \rho, p) \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_3(R, M, \rho) \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)} + 1. \quad (3.29)$$

Des estimations (3.14) et (3.29), on déduit :

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma} - \gamma_{\mathbf{b}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &= \|\mu_R(\cdot, 0)^2 - \mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0)^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \|\mu_R(\cdot, 0) + \mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\mu_R(\cdot, 0) - \mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq (\|\mu_R(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}) \|\mu_R(\cdot, 0) - \mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_4(M, R, \rho) \|\mu_R(\cdot, 0) - \mu_R^{\mathbf{b}}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_4(M, R, \rho) \left\| \mathcal{S} \left(\frac{\mathbf{t}_R(k)}{\bar{k}} \right) - \mathcal{S} \left(\frac{\mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}(k)}{\bar{k}} \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_4(M, R, \rho) \left\| \frac{\mathbf{t}_R(k)}{\bar{k}} - \frac{\mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}(k)}{\bar{k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

Du théorème 3.1.18 on déduit (3.28). \square

Comme pour l'approximation **exp**, $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ joue un rôle important dans l'étude de l'erreur de la conductivité reconstruite via l'approximation **b**.

Théorème 1.24 *Pour $2 < p < \infty$, il existe une constante $C_b(M, R, \rho)$ telle que*

$$\|\bar{\gamma} - \gamma_{\mathbf{b}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_b(M, R, \rho) \|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Preuve. La preuve de ce théorème est obtenue exactement comme celle du théorème 3.1.10 en utilisant l'estimation (3.19) à la place de (3.9). \square

Remarque 1.25 *De ce théorème on déduit que plus $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ est petit meilleure est la reconstruction de la conductivité.*

Remarque 1.26 *Des théorèmes 3.1.7, 3.1.10, 3.1.12, 3.1.18, on déduit que si la conductivité γ satisfait $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \epsilon$ et/ou $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \epsilon$ pour ϵ suffisamment petit, alors $\|\mathbf{t}_R^{\mathbf{exp}} - \mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ et $\|\gamma_{\mathbf{exp}} - \gamma_{\mathbf{b}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ sont suffisamment proche de 0. Ceci nous entaine à dire que dans la pratique, et pour ce type de conductivité, l'utilisation de l'approximation **exp** ou **b** donne presque la même construction. Il est préférable dans ce cas, d'utiliser l'approximation **exp** car elle est plus facile à l'implémenter surtout pour le cas non radial.*

Stabilité via l'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$

Dans cette section, on étudie la stabilité de la méthode $\bar{\partial}$ via l'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ de la transformée scattering $\mathbf{t}(k)$.

on procède de la même façon que pour l'étude de stabilité via l'approximation **exp**. On commence par écrire le procédé $\bar{\partial}$ comme un opérateur solution. Comme $\Lambda_\gamma \mathbf{1} = \Lambda_1 \mathbf{1} = 0$, on réécrit l'équation (3.25) de la façon suivante :

$$[I + S_0(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)](\psi^{\mathbf{b}}(x, k) - 1) = e^{ikx} - 1$$

ou encore $\psi^{\mathbf{b}}(x, k) - 1 = A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)$ pour $x \in \partial\Omega$. Comme

$$\int_{\partial\Omega} \Lambda_\gamma f d\sigma = \int_{\partial\Omega} \Lambda_1 f d\sigma = 0$$

alors, pour tout $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, on a

$$\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k) = \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)A_0^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x).$$

Notons \mathcal{M} l'ensemble des opérateurs $L \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, tels que $L1 = 0$ et $A_{0,L} := I + S_0L$ est inversible sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Pour $k \in \mathbb{C}$ et $p > 2$, on définit l'opérateur $\mathbf{T}_{R,L} : \mathcal{M} \rightarrow L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ par

$$(\mathbf{T}_{R,L}L)(k) := \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{4\pi\bar{k}} \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)L(\psi_L^{\mathbf{b}}(x, k) - 1)d\sigma(x)$$

où $\psi_L^{\mathbf{b}}(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ vérifie l'équation suivante

$$(A_{0,L}\psi_L^{\mathbf{b}}(\cdot, k))(x) = e^{ikx} \text{ pour } x \in \partial\Omega.$$

Remarquons que $\psi_L(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ dépend de L , ainsi, et contrairement à l'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}(k)$; $\mathbf{T}_{R,L}^{\mathbf{b}}$ est non linéaire en L . Notons $\mathbf{M}_{R,L}^{\mathbf{b}} : \mathcal{M} \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ l'opérateur solution définit par

$$\mathbf{M}_{R,L}^{\mathbf{b}} := S \circ \mathbf{T}_{R,L}^{\mathbf{b}}.$$

Ainsi, pour $\tilde{L} = \Lambda_\gamma - \Lambda_1$, on remarque que :

$$(\gamma_R^{\mathbf{b}}(x))^{\frac{1}{2}} = \mu_R^{\mathbf{b}}(x, 0) = \mathbf{M}_{R,\tilde{L}}^{\mathbf{b}}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1) = S(\mathbf{t}_R^{\mathbf{b}}).$$

Cette formule lie la conductivité reconstruite $\gamma^{\mathbf{b}}$ à la donnée de Cauchy, ainsi l'étude de la stabilité revient à montrer la continuité de l'opérateur $\mathbf{M}_{R,L}^{\mathbf{b}}$.

Théorème 1.27 *L'opérateur $\mathbf{M}_{R,L}^{\mathbf{b}}$ est continu de \mathcal{M} dans $C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Preuve. Comme $L \in \mathcal{M}$, $A_{0,L}1 = (I + S_0L)1 = 1$, ainsi $A_{0,L}1 = 1$, on en déduit que $LA_{0,L}^{-1} = L1 = 0$. Ceci nous permet d'écrire $\mathbf{T}_{R,L}^{\mathbf{b}}$ de la façon suivante :

$$(\mathbf{T}_{R,L}^{\mathbf{b}}L)(k) = \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{4\pi\bar{k}} \int_{\partial\Omega} (e^{i\bar{k}x} - 1)LA_{0,L}^{-1}(e^{ikx} - 1)d\sigma(x).$$

Notons $D_{0,L,\tilde{L}} := S_0(\tilde{L} - L)A_{0,L}^{-1}$, ainsi,

$$\begin{aligned} (I + D_{0,L,\tilde{L}})A_{0,L} &= (I + S_0(\tilde{L} - L)A_{0,L}^{-1})A_{0,L} \\ &= A_{0,L} + S_0(\tilde{L} - L) \\ &= I + S_0L + S_0(\tilde{L} - L). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$A_{0,\tilde{L}} = (I + D_{0,L,\tilde{L}})A_{0,L}. \quad (3.30)$$

Supposons que $\|L - \tilde{L}\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$, on écrit

$$\|D_{0,L,\tilde{L}}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq \|S_0\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|L - \tilde{L}\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \|A_{0,L}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C(L)\varepsilon.$$

Pour ε suffisamment petit, on tire $\|D_{0,L,\tilde{L}}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$, on en déduit que $D_{0,L,\tilde{L}}$ est inversible, et en écrivant $(1 + D_{0,L,\tilde{L}})^{-1}$ en série de Neumann, on tire $\|(I + D_{0,L,\tilde{L}})^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq 2$ et

$$\|A_{0,\tilde{L}}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq 2\|A_{0,L}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \quad (3.31)$$

En remarquant que $(I + D_{0,L,\tilde{L}})^{-1} - I = -D_{0,L,\tilde{L}}(I + D_{0,L,\tilde{L}})^{-1}$, et en utilisant (3.30), on a

$$\begin{aligned} \|A_{0,\tilde{L}}^{-1} - A_{0,L}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \|A_{0,L}^{-1}((I + D_{0,L,\tilde{L}})^{-1} - I)\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ &\leq \|A_{0,L}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|D_{0,L,\tilde{L}}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|(I + D_{0,L,\tilde{L}})^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\|A_{0,L}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^2 \|S_0\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|L - \tilde{L}\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ce qui implique l'existence d'une constante $C_2(L)$ telle que

$$\|A_{0,\tilde{L}}^{-1} - A_{0,L}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C_2(L) \|\tilde{L} - L\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

Par la définition de $\mathbf{T}_{R,L}^b L$ on a

$$\begin{aligned} |(\mathbf{T}_{R,L}^b L - \mathbf{T}_{R,\tilde{L}}^b \tilde{L})(k)| &\leq \left| \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{4\pi k} \int_{\partial\Omega} (e^{ik\bar{x}} - 1)(LA_{0,L}^{-1} - \tilde{L}A_{0,\tilde{L}}^{-1})(e^{ikx} - 1) d\sigma(x) \right| \\ &\leq C \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{|k|} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|LA_{0,L}^{-1} - \tilde{L}A_{0,\tilde{L}}^{-1}\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \\ &\leq C \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{|k|} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|L(A_{0,L}^{-1} - A_{0,\tilde{L}}^{-1}) - (\tilde{L} - L)A_{0,\tilde{L}}^{-1}\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \\ &\leq C \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{|k|} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \left(\|L\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \|A_{0,L}^{-1} - A_{0,\tilde{L}}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \|\tilde{L} - L\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \|A_{0,\tilde{L}}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

De (3.32) et du lemme 3.1.1, on déduit

$$\|\mathbf{T}_{R,L}^b L - \mathbf{T}_{R,\tilde{L}}^b \tilde{L}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_3(L, R) \|L - \tilde{L}\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

avec $C_3(L, R) = C \left(C_2(L) \|L\|_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + 2\|A_{0,L}^{-1}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right) Re^{2R}$.

De l'estimation (3.33), on déduit que $\mathbf{T}_{R,L}^b$ est continu. Avec la continuité de \mathcal{S} on en déduit la continuité de $\mathbf{M}_{R,L}^b$. \square

Cas des conductivités radiales

Comme pour l'approximation $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$, on étudie l'approximation $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$ pour les conductivités radiales. Avant cela, on rappelle la définition de l'opérateur Neumann-Dirichlet.

Definition 1.28 Soit $H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \{f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega); \int_{\partial\Omega} f d\sigma = 0\}$ et $H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega); \langle g, 1 \rangle_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 0\}$. Soit $g \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, et $v \in H^1(\Omega)$ l'unique solution du problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla v) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \gamma \frac{\partial v}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.34)$$

Alors on définit l'opérateur Neumann-Dirichlet $R_\gamma : H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ par :

$$R_\gamma g := v|_{\partial\Omega} - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v d\sigma \quad (3.35)$$

Par la définition de R_γ , on a

$$R_\gamma(\Lambda_\gamma f) = w|_{\partial\Omega} - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} w d\sigma$$

avec

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla w) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \gamma \frac{\partial w}{\partial n} = \Lambda_\gamma f = \gamma \frac{\partial u}{\partial n} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma \frac{\partial w}{\partial n} \text{ sur } \partial\Omega \\ u = f \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On soustrait les deux systèmes et on en déduit que $u = w$, en particulier $u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = f$. On conclut que

$$R_\gamma \Lambda_\gamma = I - P \quad (3.36)$$

Avec $Pf := (1/|\partial\Omega|) \int_{\partial\Omega} f d\sigma$. En particulier, si on suppose que $\gamma = 1$ et en utilisant le fait que $(e^{in\theta})_n$ est une familles de fonction propres pour Λ_γ , on en déduit

$$R_1 \Lambda_1 e^{in\theta} = |n| R_1 e^{in\theta}$$

D'autre part, en utilisant (3.36), on a

$$R_1 \Lambda_1 e^{in\theta} = e^{in\theta} - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = e^{in\theta}$$

Finalement

$$R_1 e^{in\theta} = \frac{1}{|n|} e^{in\theta}$$

Dans [SMIerr], Siltanen, Mueller et Isaacson montre une relation entre S_0 et R_1 par le lemme suivant :

Lemme 1.29 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité, et soit $f \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Alors

$$S_0 f = \frac{1}{2} R_1 f \quad (3.37)$$

Avec ce lemme, on est prêt à construire une formule explicite de $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ pour les conductivités radiales.

Théorème 1.30 Pour $\Omega = D(0,1)$ et γ une conductivité radiale, l'approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |k|^{2n} (\lambda_n^\gamma - n)}{n!(n-1)!(\lambda_n^\gamma + n)} \quad (3.38)$$

Preuve. Pour $x \in \partial\Omega$, on peut écrire $x = e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi $\psi^{\mathbf{b}}(x, k)|_{\partial\Omega}$ est une fonction développable sur la base des $e^{in\theta}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\psi^{\mathbf{b}}(x, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(k) e^{in\theta} \quad k \in \mathbb{C} \quad (3.39)$$

Comme $\langle 1, 1 \rangle_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \int_{\partial\Omega} 1 d\sigma \neq 0$, $1 \notin H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, donc $R_1 1$ n'est pas défini. En injectant l'expression de $\psi^{\mathbf{b}}(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ (3.39) dans l'équation (3.25), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(k) e^{in\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} e^{in\theta} - \frac{1}{2} R_1 (\Lambda_\gamma - \Lambda_1) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(k) e^{in\theta} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} e^{in\theta} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^\gamma - |n|) a_n(k) R_1 e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} e^{in\theta} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(\lambda_n^\gamma - |n|)}{|n|} a_n(k) e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_0(k) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2|n|} (\lambda_n^\gamma - |n|) \right] a_n(k) e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} e^{in\theta}. \quad (3.40)$$

En comparant les coefficients de Fourier dans (3.40), on en déduit :

$$a_n(k) = \begin{cases} \frac{2(ik)^n}{(n-1)!(n+\lambda_n^\gamma)} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On va montrer dans la suite qu'on n'a pas besoin de la valeurs de $a_0(k)$ pour calculer $\mathbf{t}^b(k)$. Après avoir calculé les coefficients de Fourier de $\psi^b(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$, on revient au calcul de $\mathbf{t}^b(k)$. En remarquant que $\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)1d\theta = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^b(k) &= \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}x}((\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi^b(\cdot, k))(x)d\sigma(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(I\bar{k})^n}{n!} a_m(k) \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)e^{im\theta}d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^n}{n!} a_m(k)(\lambda_m^\gamma - m) \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta. \end{aligned}$$

On remarque que la somme sur m commence à 1, donc on n'a pas besoin de la valeur de $a_0(k)$ pour calculer $\mathbf{t}^b(k)$. Comme $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = \delta_{nm}$, on conclut

$$\mathbf{t}^b(k) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |k|^{2n} (\lambda_n^\gamma - n)}{n!(n-1)!(\lambda_n^\gamma + n)}.$$

□

1.3 Cas des conductivités discontinues générales

Dans la pratique, la plupart des conductivités à rechercher sont des conductivités discontinues, pour cela il est important d'étudier la méthode $\bar{\partial}$ pour les conductivités discontinues. Bien qu'elles ne vérifient pas la régularité $W^{2,p}$, on montre dans cette section que la méthode $\bar{\partial}$ est aussi convenable pour les conductivités discontinues.

La méthode D-bar via l'approximation $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$

Pour $\Omega = D(0, 1)$, $c > 0$, et $0 < R < 1$, on définit $X \subset L^\infty(\Omega)$ par :

$$X := \{\gamma \in L^\infty(\Omega) | c^{-1} < \gamma < c, \text{supp}(\gamma - 1) \subset B(0, 1)\}$$

Knudsen, Mueller, Lassas et Siltanen, montrent le lemme suivant [KLMS07, lemme 5.1] :

Lemme 1.31 *Soit $\gamma, \gamma_j \in X$ telle que γ_j converge vers γ pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, Λ_{γ_j} converge vers Λ_γ pour la topologie forte de $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^s(\partial\Omega))$.*

En utilisant le lemme 3.1.29 et la continuité de $\mathcal{M}_R^{\text{exp}}$, Knudsen, Mueller, Lassas et Siltanen, montrent le théorème suivant [KLMS07, lemme 5.4] :

Théorème 1.32 *Supposons $\gamma, \gamma_n \in X$, telle que γ_n converge vers γ pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$. Alors $\gamma_n^{\text{exp}} := \mathcal{M}_R^{\text{exp}}(\Lambda_{\gamma_n} - \Lambda_1)$ converge vers $\gamma^{\text{exp}} := \mathcal{M}_R^{\text{exp}}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)$ dans $L^\infty(\Omega)$.*

La méthode D-bar via l'approximation $\mathbf{t}^b(k)$

On montre un théorème analogue au théorème 3.1.30 avec l'approximation $\mathbf{t}^b(k)$.

Théorème 1.33 *Supposons $\gamma, \gamma_n \in X$, telle que γ_n converge vers γ presque partout dans X . Alors $\gamma_n^b := \mathcal{M}_R^b(\Lambda_{\gamma_n} - \Lambda_1)$ converge vers $\bar{\gamma}^b := \mathcal{M}_R^b(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)$ dans L^∞ .*

Preuve. En utilisant la continuité de \mathcal{M}_R^b , on a :

$$\|\mathcal{M}_R^b(\Lambda_{\gamma_n} - \Lambda_1) - \mathcal{M}_R^b(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|\Lambda_{\gamma_n} - \Lambda_\gamma\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}.$$

Avec le lemme 3.1.29, on en déduit le résultat. \square

Remarque 1.34 *Dans la pratique, l'algorithme SMI pour le calcul des valeurs propres de Λ_γ cause des problèmes pour certaines conductivités (surtout discontinues). Pour cela, on est amené à construire la conductivité $\bar{\gamma}_N$ (pour N suffisamment grand) à la place de $\bar{\gamma}$, et grâce aux théorèmes 3.1.30 et 3.1.31, on sait que l'erreur $|\bar{\gamma}_N - \bar{\gamma}|$ est petite.*

1.4 Cas des conductivités discontinues simples

Dans cette section on étudie un type spécifique de conductivités radiales discontinues définies sur le disque unité de la façon suivante :

$$\gamma(x) = \begin{cases} \sigma & \text{si } |x| \leq r \\ 1 & \text{si } |x| > r \end{cases} \quad (3.41)$$

où $0 < r < 1$ et $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$. On définit

$$\alpha := \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}.$$

Gisser, Isaacson et Newell montrent que les valeurs propres de Λ_γ pour ce type de conductivité sont données par :

$$\lambda_n^\gamma = n \left(1 + \frac{2\alpha r^{2n}}{1 - \alpha r^{2n}} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.42)$$

En injectant l'expression de λ_n^γ (3.42) dans l'expression de $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$, Siltanen, Mueller Knudsen et Lassas montrent que

$$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) = -4\pi\alpha|k|r \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha r)^m J_1(2r^{m+1}|k|), \quad (3.43)$$

où les $J_1(t)$ désignent les fonctions de Bessel données par :

$$J_1(t) = -\frac{2}{t} \sum_{j=1}^{\infty} j(-1)^j (j!)^{-2} (t/2)^{2j}$$

De même ils montrent que pour k au voisinage de 0

$$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) = O(|k|^2)$$

et pour k assez grand

$$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) = O(\sqrt{|k|})$$

On va généraliser ces résultats pour l'approximation $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$. En injectant (3.42) dans l'expression de \mathbf{t}^{b} (3.38), on en déduit

$$\mathbf{t}^{\text{b}}(k) = 4\pi\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |rk|^{2n} n}{(n!)^2} \quad (3.44)$$

En comparant (3.44) avec le développement des fonctions de Bessel J_1 , on en déduit une expression simple de $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$:

$$\mathbf{t}^{\text{b}}(k) = -4\pi\alpha r|k|J_1(2r|k|) \quad (3.45)$$

Notons que pour x au voisinage de 0, on a $J_1(x) \sim \frac{x}{2}$, ainsi, pour k au voisinage de 0, $\mathbf{t}^{\text{b}}(k) = O(|k|^2)$. D'autre part, pour x réel assez grand, $J_1(x) \sim$

$\sqrt{(2/\pi x)}\cos(x-3\pi/4)$, ainsi avec (3.45) on tire $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k) \sim -4\alpha\sqrt{\pi r|k|}\cos(2r|k|-3\pi/4)$ et par conséquent, $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k) = O(\sqrt{|k|})$ pour $|k|$ assez grand.

Remarque 1.35 *On remarque que les deux approximations $\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ et $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$, ont le même comportement asymptotique au voisinage de l'infini, d'où l'importance de la troncature de $\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$.*

2 Discrétisation de l'équation $\bar{\partial}$

Après avoir traité le calcul des approximations de la transformée scattering $\mathbf{t}(k)$, on passe à l'étude et à la discrétisation numérique de l'équation $\bar{\partial}$ (2.18). Cette équation est une équation intégrale sur \mathbb{R}^2 , mais la troncature de la transformée scattering la transforme en une intégrale sur un domaine borné qui est le support de la transformée scattering tronquée. En d'autre terme, l'équation $\bar{\partial}$ s'écrit :

$$\mu_R^{\mathbf{eb}}(x, k) = 1 + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\text{supp}(\mathbf{t}_R^{\mathbf{eb}})} \frac{\mathbf{t}_R^{\mathbf{eb}}(k')}{(k-k')k'} e_{-x}(k') \overline{\mu_R^{\mathbf{eb}}(x, k')} dk'.$$

où $\mathbf{t}^{\mathbf{eb}}$ désigne indifféremment l'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ ou $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$. La variable sera k et x est un paramètre. Pour simplifier les notations, on écrit $T_R^{\mathbf{eb}}(k) := (\mathbf{t}_R^{\mathbf{eb}}(k)/4\pi k) e_{-k}(x)$ et $v^{\mathbf{eb}}(k) = \mu_R^{\mathbf{eb}}(x, k)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ fixé et $g(k) = 1/\pi k$. On choisit $\rho > 0$ de telle sorte que $\text{supp}(T_R^{\mathbf{eb}}) \subset B(0, \rho)$, ainsi

$$v^{\mathbf{eb}}(k) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{B(0, \rho)} g(k-k') T_R^{\mathbf{eb}}(k') \overline{v^{\mathbf{eb}}(k')} dk'. \quad (3.46)$$

Par l'équation (3.46), on remarque que si on connaît les valeurs de $v(k)$ seulement pour $k \in B(0, \rho)$, alors on connaît $v(k)$ pour tout $k \in \mathbb{C}$. Donc il est suffisant de chercher les valeurs de $v^{\mathbf{eb}}(k)$ pour $k \in B(0, \rho)$ seulement. Pour $|k| \leq \rho$ et $|k'| \leq \rho$ alors $|k-k'| \leq 2\rho$. Ainsi, pour calculer les valeurs de $v^{\mathbf{eb}}(k)$ pour $|k| \leq \rho$, on a besoin des valeurs de $g(k)$ pour $|k| \leq 2\rho$ (voir la figure ci dessous). Pour cela, on choisit $s \geq 2\rho$, on note $S := [-s, s]^2$ et on considère l'équation $\bar{\partial}$ $2s$ -périodique suivante :

$$w(k) = 1 - \int_{-s}^s \int_{-s}^s g(k-k') T_R^{\mathbf{eb}}(k') \overline{w(k')} dk'. \quad (3.47)$$

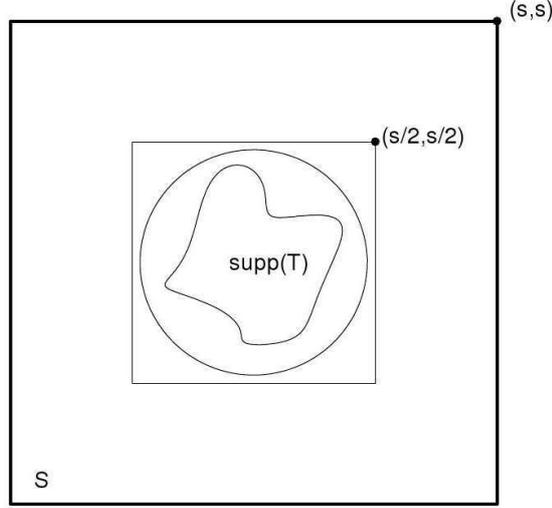


Fig 3.1-Schéma indiquant la situation de la discrétisation.

Avec ce choix de s , il est clair que $v^{\text{eb}}(k) = w(k)$ pour $k \in B(0, \rho)$. On va maintenant discrétiser l'équation (3.47); on choisit $m > 0$, et on note $M = 2^m$ et $h = \frac{2s}{M}$. On définit l'ensemble $\mathbb{Z}_m^2 \subset \mathbb{Z}^2$ par :

$$\mathbb{Z}_m^2 := \{j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid -2^{m-1} \leq j_\ell < 2^{m-1}, \ell = 1, 2\}. \quad (3.48)$$

On note $G_m \subset \bar{S}$ une grille définie sur S de la façon suivante :

$$G_m := h\mathbb{Z}_m^2 = \{jh \mid j \in \mathbb{Z}_m^2\}.$$

Notons que G_m contient M^2 points. Pour chaque point $x \in G_m$ on attache une cellule $B_{j,h}$, $j \in \mathbb{Z}_m^2$, contenant x et définie par

$$B_{j,h} := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (j_\ell - \frac{1}{2})h < y_\ell < (j_\ell + \frac{1}{2})h, \ell = 1, 2\}.$$

On définit sur la grille G_m l'approximation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, notée $f_h : G_m \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$f_h(j) := f(jh)$$

Par contre la fonction de Green $g(k) = (1/\pi)(1/(k_1 + ik_2))$ est singulière en 0. On est ainsi amené à étudier son intégrabilité en 0. On peut écrire

$$\int_{-s}^s \int_{-s}^s \frac{1}{\pi} \frac{1}{|k_1 + ik_2|} dk_1 dk_2 \leq \int_{B(0,s)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{|k_1 + ik_2|} dx_1 dx_2 + \int_{S \setminus B(0,s)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{|k_1 + ik_2|} dx_1 dx_2.$$

Or $g(k)$ est continue sur $S \setminus B(0, s)$, donc $\int_{S \setminus B(0, s)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{|k_1 + ik_2|} dx_1 dx_2 < \infty$. D'autre part, en passant en coordonnée polaire, on tire

$$\int_{B(0, s)} \frac{1}{|k_1 + ik_2|} dk_1 dk_2 = 2\pi \cdot s$$

ainsi $\int_{-s}^s \int_{-s}^s \frac{1}{\pi} \frac{1}{|k_1 + ik_2|} dx_1 dx_2 < \infty$ et $g(k)$ est absolument intégrable donc intégrable. Ceci nous conduit à introduire

$$g_j = \begin{cases} g((j_1 + ij_2)h) & \text{si } j \neq 0 \\ 0 & \text{si } j = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Comme $g(k)$ est intégrable en 0, alors l'erreur commise par $g_0 = 0$ devient petite lorsque la grille devient plus raffinée.

On passe à la discrétisation de l'opérateur de convolution défini par :

$$(A\phi)(k) := \int_{-s}^s \int_{-s}^s g(k - k') \phi(k') dk'$$

On introduit l'espace discret $E_h := \mathcal{M}_{2^m \times 2^m}(\mathbb{C})$ muni de la norme $\|A\|_{E_h} = \max_{j \in \mathbb{Z}_m^2} |A_j|$. En utilisant la méthode des rectangles pour l'approximation des intégrales sur des domaines bornés, on introduit l'opérateur discret A_h donné par

$$(A_h\phi)_j := h^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}_m^2} g_{j-k} \phi_k \quad j \in \mathbb{Z}_m^2 \quad (3.50)$$

A partir de la formule (3.50), on remarque que la structure de convolution est conservée. Ceci nous permet d'écrire A_h de la façon suivante

$$A_h\phi = h^2 \mathcal{F}_h^{-1}(\mathcal{F}_h(g_h) \bullet \mathcal{F}_h(\phi)), \quad (3.51)$$

où \mathcal{F}_h^{-1} et \mathcal{F}_h désignent les transformées de Fourier discrete inverse et directe respectivement (voir l'appendice). La multiplication notée \bullet est définie par :

$$(A \bullet B)_{ij} := A_{ij} B_{ij}, \quad \text{pour tout } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

En pratique le calcul de A_h via la formule (3.50) demande $O(M^4)$ opérations. En utilisant l'algorithme de transformée de Fourier rapide, le calcul de A_h via la formule

(3.51) demande $O(M^2 \log(M))$ opérations, ce qui est plus rapide.

Pour x fixé, on note $M_{x,h}^{\text{eb}}(j_1, j_2) := \mu_R^{\text{eb}}(x, (j_1 + ij_2)h)$, $j_1, j_2 = -M, \dots, M-1$, ainsi la forme discrète de l'équation $\bar{\partial}$ est

$$M_{x,h}^{\text{eb}} + A_h(T_{R,h}^{\text{eb}} \bullet \overline{M_{x,h}^{\text{eb}}}) = 1_h, \quad (3.52)$$

avec $(1_h)_{i,j} = 1$ et $T_{R,h}^{\text{eb}}$ est donnée par la formule $(T_{R,h}^{\text{eb}})_j = T_R^{\text{eb}}(jh)$. Siltanen, Mueller et Knudsen montrent le théorème suivant .

Théorème 2.1 *Il existe $m_0 > 0$ tel que, si $m > m_0$ alors (3.52) admet une unique solution. De plus on a l'estimation suivante :*

$$\max_{j \in \mathbb{Z}_m^2} |M_{x,h}^{\text{eb}} - w(jh)| \leq Ch, \quad (3.53)$$

où w est la solution de (3.47)

On remarque que l'application $M \rightarrow A_h(T_{R,h}^{\text{eb}} \bullet \overline{M})$ est \mathbb{R} -linéaire mais pas \mathbb{C} -linéaire, d'où la difficulté de résoudre (3.52). Dans [SMK], Siltanen, Mueller et Knudsen introduisent une méthode pour résoudre ce problème; ils écrivent $M_{x,h}^{\text{eb}}$ sous la forme d'un vecteur X en séparant les parties réelles et imaginaires de $M_{x,h}^{\text{eb}}$ et forment un système linéaire qui est résolu par l'algorithme GMRES. L'implémentation de cette méthode est difficile. A la place, on va introduire un schéma de point fixe pour la résolution de l'équation (3.52) :

$$(\mathbf{A}\bar{\partial}) \quad \begin{cases} M_{x,h}^{\text{eb},n+1} = 1_h - A_h(T_{R,h}^{\text{eb}} \bullet \overline{M_{x,h}^{\text{eb},n}}) \\ M_{x,h}^{\text{eb},0} = I \end{cases}$$

où I désigne la matrice identité. Notons qu'avec le schéma $(\mathbf{A}\bar{\partial})$, $M_{x,h}$ reste une matrice : on n'a pas besoin de séparer sa partie réelle et sa partie imaginaire et on n'utilise plus l'algorithme GMRES, ce qui est avantageux. Reste à montrer la convergence du schéma $(\mathbf{A}\bar{\partial})$.

Théorème 2.2 *Si $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ ou $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ est suffisamment petit, $M_{x,h}^{\text{eb},n}$ converge vers $M_{x,h}^{\text{eb}}$ pour la norme $\|\cdot\|_{E_h}$.*

Preuve. Pour montrer la convergence de $M_{x,h}^{\text{eb},n}$, on montre que l'application $F : E_h \rightarrow E_h$ définit par

$$F(M) := 1_h - A_h(T_{R,h}^{\text{eb}} \bullet \overline{M}).$$

est contractante sur E_h . Soient $M_1, M_2 \in E_h$, partant de la définition de $\|\cdot\|_{E_h}$, A_h et $T_{R,h}^{\text{eb}}$, on a :

$$\begin{aligned} |(F(M_1) - F(M_2))(j)| &= |(A_h(T_{R,h}^{\text{eb}} \bullet \overline{M_1}) - A_h(T_{R,h}^{\text{eb}} \bullet \overline{M_2}))(j)| \\ &= |h^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} g_{j-\ell} T_{R,h,\ell}^{\text{eb}} \overline{M_{1,\ell}} - h^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} g_{j-\ell} T_{R,h,\ell}^{\text{eb}} \overline{M_{2,\ell}}| \\ &= |h^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} g_{j-\ell} T_{R,h,\ell}^{\text{eb}} (\overline{M_{1,\ell}} - \overline{M_{2,\ell}})|. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|F(M_1) - F(M_2)\|_{E_h} &\leq \max_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |T_{R,h,\ell}^{\text{eb}}| \max_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |M_{1,\ell} - M_{2,\ell}| \max_{j \in \mathbb{Z}_m^2} h^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |g_{j-\ell}| \\ &\leq \max_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |T_{R,h,\ell}^{\text{eb}}| \|M_1 - M_2\|_{E_h} \max_{j \in \mathbb{Z}_m^2} \int_S |g(k' - hj)| dk' \\ &\leq \max_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |T_{R,h,\ell}^{\text{eb}}| \|M_1 - M_2\|_{E_h} \max_{k \in S} \int_S |g(k' - k)| dk'. \end{aligned}$$

Commençons par contrôler $\max_{k \in S} \int_S |g(k' - k)| dk'$. En faisant le changement de variable $p = k - k'$, on obtient

$$\frac{1}{\pi} \int_S \left| \frac{1}{k - k'} \right| dk'_1 dk'_2 = \int_{S+k} \frac{1}{|p|} dp_1 dp_2.$$

Or $S + k \subset S + S = [-2s, 2s]^2 \subset D(0, 2\sqrt{2}s)$, en passant en coordonnées polaires on en déduit

$$\int_{D(0, 2\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} dp = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}s} \frac{1}{r} r dr d\theta = 4\pi\sqrt{2}s.$$

Finalement

$$\max_{k \in S} \int_S |g(k - k')| dk' \leq 4\sqrt{2}s < \infty.$$

Reste à contrôler $\max_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |T_{R,h,\ell}^{\text{eb}}|$. Par la définition de $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$, on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}^{\text{eb}}(k)| &\leq \frac{1}{4\pi|k|} \|e^{ikx} - 1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \\ &\leq C|k| e^{2|k|} \|\Lambda_\gamma - \Lambda_1\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (3.19) et (3.9), on en déduit

$$|\mathbf{T}^{\text{eb}}(k)| \leq CR e^{2R} \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

et

$$|\mathbf{T}^{\text{eb}}(k)| \leq CRe^{2R} \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

On en déduit que pour $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ ou $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ suffisamment petit, il existe une constante $0 < \epsilon < 1$ telle que

$$\|F(M_1) - F(M_2)\|_{E_h} \leq \epsilon \|M_1 - M_2\|_{E_h}.$$

C'est à dire que l'application F est une contraction et le schéma de point fixe est convergent. \square

Remarque 2.3 *Dans la pratique, et bien que les conductivités ne soient pas proches de 1, le schéma de point fixe reste convergent, cela nous conduit à poser la question suivante : Pourquoi le schéma du point fixe reste-t'il convergent pour toutes les conductivités ?*

La conséquence immédiate du théorème 3.2.1 est la vitesse de convergence du schéma du point fixe ($A\bar{\partial}$). Cette conséquence est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.4 *Soient $M_{x,h}^{\text{eb}} \in E_h$ la solution de l'équation $\bar{\partial}$ discrète (3.52) et $M_{x,h}^{\text{eb},N} \in E_h$ donnée par le schéma du point fixe ($\mathbf{A}\bar{\partial}$), alors*

$$\|M_{x,h}^{\text{eb},N} - M_{x,h}^{\text{eb}}\|_{E_h} \leq C\epsilon^N \|I - M_{x,h}^{\text{eb}}\|_{E_h} \quad (3.54)$$

Preuve. On montre (3.54) par récurrence : supposons que (3.54) est vérifiée pour l'ordre N et montrons (3.54) pour l'ordre $N + 1$; En utilisant (4.10), on a

$$\begin{aligned} \|M_{x,h}^{\text{eb},N+1} - M_{x,h}^{\text{eb}}\|_{E_h} &= \|F(M_{x,h}^{\text{eb},N}) - F(M_{x,h}^{\text{eb}})\|_{E_h} \\ &\leq C\epsilon \|M_{x,h}^{\text{eb},N} - M_{x,h}^{\text{eb}}\|_{E_h} \\ &\leq C\epsilon^{N+1} \|I - M_{x,h}^{\text{eb}}\|_{E_h}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Remarque 2.5 *Avec les estimations (3.54) et (3.53), On peut choisir N de telle sorte que l'estimation suivante soit valable :*

$$\|M_{x,h}^{\text{eb},N} - w(jh)\|_{E_h} \leq C\epsilon.$$

Chapitre 4

Analyse numérique de la méthode $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée

Dans ce chapitre on étudie la modélisation numérique de la méthode $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée. Comme pour la méthode $\bar{\partial}$ de Nachman, on étudie d'abord les approximations de la transformée scattering $S(k)$. On introduit trois approximations : $S^{\text{exp}}(k)$, $S^{\text{b}}(k)$ et $S^{\text{a}}(k)$ et on donne des formules explicites pour chaque approximation dans le cas des conductivités radiales. Les erreurs des approximations S^{exp} et S^{b} découlent du chapitre précédent. Par contre une étude similaire pour l'approximation $S^{\text{a}}(k)$ reste une question ouverte. On introduit ensuite le schéma de point fixe pour la résolution numérique de l'équation $\bar{\partial}$ et on montre sa convergence.

1 Approximation de la transformée scattering

Dans cette section on présente les trois approximations de la transformée scattering $S(k)$ ($S^{\text{exp}}(k)$, $S^{\text{b}}(k)$ et $S^{\text{a}}(k)$), ainsi que leurs propriétés et comment les calculer.

1.1 Approximation S^{exp}

Dans la pratique il est possible de discrétiser les opérateurs S_k et \bar{S}_k , résoudre numériquement les équations aux bord (2.32) et ensuite calculer $S(k)$ par intégra-

tion numérique. Par contre cette idée cause des problèmes dans l'implémentation numérique. En effet, les valeurs prises par $\psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ sont très petites et peuvent disparaître avec les erreurs de l'intégration numérique (voir [Knu02] pour plus de détails). Une première solution était présentée par Knudsen ; il montre le théorème suivant [Knu02, Theorem 3.2.5] :

Théorème 1.1 *Soit $\gamma \in C^{1+\epsilon}(\bar{\Omega}) \cap W^{2,p}(\Omega)$ pour $\epsilon > 0$ et $p > 1$, de plus $\gamma = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$. Alors*

$$\mathbf{t}(k) = -2kS(k), \quad (4.1)$$

où $\mathbf{t}(k)$ est la transformée scattering de l'algorithme $\bar{\partial}$ de Nachman.

Avec la régularité imposée sur la conductivité γ dans ce théorème et la relation (4.1) qui lie les transformées scattering de Nachman et Brown-Uhlmann, on peut introduire l'approximation $S^{\text{exp}}(k)$ défini par :

$$S^{\text{exp}}(k) := -\frac{\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)}{2k}. \quad (4.2)$$

On note dans la suite $S_R^{\text{exp}}(k) := \chi_{|k| \leq R} S^{\text{exp}}(k)$ et $S_R(k) := \chi_{|k| \leq R} S(k)$. Il est clair que les propriétés de $S^{\text{exp}}(k)$ découlent de celles de $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$. Premièrement, et par le théorème 2.5.7, on déduit facilement qu'il existe une constante $D_1(M, \rho, R)$, tel que

$$|S_R(k) - S_R^{\text{exp}}(k)| \leq D_1(M, \rho, R) \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^2.$$

De même, en utilisant l'estimation (3.19), on déduit qu'il existe une constante $D_2(M, \rho, M)$ tel que

$$|S_R(k) - S_R^{\text{exp}}(k)| \leq D_2(M, \rho, R) \|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}^2.$$

On en déduit que plus $\|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}$ est petite, l'approximation $S^{\text{exp}}(k)$ est meilleure. Notons que comme $|\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)| \leq C|k|^2$ pour k au voisinage de 0, alors $|S^{\text{exp}}(k)| \leq C|k|$ au voisinage de 0.

Pour les conductivités radiales, on déduit de (4.2) et (3.24) l'expression de $S^{\text{exp}}(k)$:

$$S^{\text{exp}}(k) = -\frac{\pi}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |k|^{2n}}{(n!)^2} (\lambda_n^\gamma - n).$$

Stabilité via l'approximation S^{exp}

On va procéder comme dans le chapitre 3, on écrit la procédure $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée comme un opérateur solution. On note

$$\gamma_{\text{exp}}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_R^{\text{exp}}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1),$$

avec $\mathcal{N}_R^{\text{exp}} : \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$, donné par :

$$\mathcal{N}_R^{\text{exp}} := S \circ \tilde{\mathbf{T}}_R^{\text{exp}}.$$

et

$$(\tilde{\mathbf{T}}_R^{\text{exp}} L)(k) := \chi_{|k| \leq R} \frac{1}{2k} \int_{\partial\Omega} (e^{ikx} - 1) L(e^{i\bar{k}x} - 1) d\sigma(x).$$

En utilisant le lemme 3.1.4, il est trivial que

$$\|\tilde{\mathbf{T}}_R^{\text{exp}} L\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C e^{2R} \|L\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}.$$

Ainsi $\tilde{\mathbf{T}}_R^{\text{exp}} : \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \rightarrow L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ est borné, et par le lemme 3.1.9, \mathcal{S} est continue, on déduit que $\mathcal{N}_R^{\text{exp}}$ est continue.

1.2 Approximation $S^{\mathbf{b}}(k)$

Avec la formule (4.1), une deuxième approximation pour la transformée scattering $S(k)$ est possible, c' est l'approximation (k) définie par

$$S^{\mathbf{b}}(k) := \frac{-\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)}{2k},$$

$\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ étant l'approximation de la transformée scattering de Nachman. Les propriétés de $S^{\mathbf{b}}(k)$ découlent de celles de $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$. Premièrement, et par le théorème 2.5.7, on déduit facilement qu'il existe une constante $D_3(M, \rho, R)$ telle que

$$|S_R(k) - S_R^{\mathbf{b}}(k)| \leq D_3(M, \rho, R) \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}^2.$$

De même, on déduit de l'estimation (3.19) qu'il existe une constante $D_4(M, \rho, M)$ tel que

$$|S_R(k) - S_R^{\mathbf{b}}(k)| \leq D_4(M, \rho, R) \|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}^2.$$

On en déduit que plus $\|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}$ est petite, l'approximation $S^{\mathbf{b}}(k)$ est meilleure. Notons que comme $|\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)| \leq C|k|^3$ pour k au voisinage de 0, alors $|S^{\mathbf{b}}(k)| \leq C|k|^2$ au voisinage de 0.

Pour les conductivités radiales, on déduit de (3.38) l'expression de $S^{\mathbf{b}}(k)$ que :

$$S^{\mathbf{b}}(k) = -\frac{2\pi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |k|^{2n} (\lambda_n^\gamma - n)}{n!(n-1)!(\lambda_n^\gamma + n)}$$

Stabilité via l'approximation $S^{\mathbf{b}}(k)$

On écrit la conductivité reconstruite via l'approximation $S^{\mathbf{b}}(k)$ de la façon suivante :

$$\gamma_{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_R^{\mathbf{b}}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1),$$

où $\mathcal{N}_R^{\mathbf{b}} : \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ est défini par

$$\mathcal{N}_R^{\mathbf{b}} := S \circ \tilde{\mathbf{T}}_R^{\mathbf{b}}$$

et

$$(\tilde{\mathbf{T}}_R^{\mathbf{b}}L)(k) := \int_{\partial\Omega} (e^{ikx} - 1)LA_{0,L}^{-1}(e^{i\bar{k}x} - 1)d\sigma(x).$$

Par une preuve similaire au théorème 3.1.25, on montre que pour $L \in \mathcal{M}$, il existe une constante $C(L, R)$ telle que

$$\|\tilde{\mathbf{T}}_{R,L}^{\mathbf{b}}L - \tilde{\mathbf{T}}_{R,\tilde{L}}^{\mathbf{b}}\tilde{L}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(L, R)\|L - \tilde{L}\|_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}.$$

Ce qui montre que $\tilde{\mathbf{T}}_{R,L}^{\mathbf{b}}$ est continue en L . Ainsi $\mathcal{N}_R^{\mathbf{b}}$ est continue et la méthode $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée est stable via l'approximation $S^{\mathbf{b}}$.

1.3 Approximation $S^{\mathbf{a}}(k)$

Dans cette section, on suppose que $\gamma \in C^{1+\epsilon}(\bar{\Omega})$. Une troisième solution a été introduite par K.Knudsen. L'idée est d'approcher $\psi_1(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ par son comportement asymptotique e^{ikx} . Ainsi l'approximation de $\psi_2(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ (notée $\psi_2^{\mathbf{a}}(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$) est la solution de l'équation suivante :

$$(iH_\gamma + I)\bar{\nu}\psi_2^{\mathbf{a}}(\cdot, k) = (iH_\gamma - I)\nu e^{ikx}. \quad (4.3)$$

Une fois qu'on a trouvé $\psi_2^{\mathbf{a}}(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$, on calcule l'approximation de la transformée scattering $S^{\mathbf{a}}(k)$ donnée par

$$S^{\mathbf{a}}(k) = -i \int_{\partial\Omega} e^{ik\bar{x}} \psi_2^{\mathbf{a}}(x, k) \bar{\nu}(x) d\sigma(x). \quad (4.4)$$

Théorème 1.2 *Pour γ radiale, et $\Omega = D(0, 1)$, l'approximation de la transformée scattering $S^{\mathbf{a}}(k)$ est donnée par la formule suivante :*

$$S^{\mathbf{a}}(k) = -\frac{2\pi}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda_m^\gamma - m)}{m!(m-1)!(\lambda_m^\gamma + m)} |k|^{2m}.$$

En particulier

$$S^{\mathbf{a}}(k) = S^{\mathbf{b}}(k). \quad (4.5)$$

Preuve. Par définition de ∂_τ^{-1} , on a

$$\begin{aligned} \partial_\tau^{-1} e^{in\theta} &= \int_0^\theta e^{in\theta'} d\theta' \\ &= \frac{1}{in} (e^{in\theta} - 1) \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\Lambda_\gamma 1 = 0$ et $e^{in\theta}$ est fonction propre pour Λ_γ , on tire

$$\begin{aligned} H_\gamma e^{in\theta} &= \Lambda_\gamma \partial_\tau^{-1} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{in} \Lambda_\gamma e^{in\theta} \\ &= \frac{\lambda_n^\gamma}{in} e^{in\theta}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $n \neq 0$, $e^{in\theta}$ est aussi fonction propre pour H_γ de valeur propre (λ_n^γ/in) où λ_n^γ est la valeur propre de Λ_γ . D'autre part, pour $\Omega = D(0, 1)$, et pour $x \in \partial\Omega$, $x = e^{i\theta}$, $\nu(x) = e^{i\theta}$ et $\bar{\nu}(x) = e^{-i\theta}$. En écrivant $\psi_2^{\mathbf{a}}(\cdot, k)|_{\partial\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(k) e^{in\theta}$,

on écrit l'équation (4.3) sous la forme suivante

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(k) (iH_\gamma + I) e^{i(n-1)\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} (iH_\gamma - I) e^{i(n+1)\theta}.$$

Donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(k) \left(\frac{\lambda_{n-1}^\gamma}{n-1} + 1 \right) e^{i(n-1)\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \left(\frac{\lambda_{n+1}^\gamma}{n+1} - 1 \right) e^{i(n+1)\theta}.$$

En faisant le changement d'indice $m + 2 = n$, on conclut

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{m+2}(k) \left(\frac{\lambda_{m+1}^\gamma}{m+1} + 1 \right) e^{i(m+1)\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \left(\frac{\lambda_{n+1}^\gamma}{n+1} - 1 \right) e^{(n+1)\theta},$$

on déduit de la comparaison des coefficients de Fourier que, pour $m = 0, \dots, \infty$, on a

$$a_{m+2}(k) = \frac{(ik)^m}{m!} \frac{\lambda_{m+1}^\gamma - m - 1}{\lambda_{m+1}^\gamma + m + 1}.$$

Lorsqu'on injecte l'expression de $\psi_2^{\mathbf{a}}(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$ dans l'expression de $S^{\mathbf{a}}(k)$ (4.4), on obtient :

$$\begin{aligned} S^{\mathbf{a}}(k) &= -i \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^m}{m!} e^{-i(m+1)\theta} \sum_{n=2}^{\infty} a_n(k) e^{in\theta} d\theta \\ &= -i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^m}{m!} a_n(k) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m-1)\theta} d\theta \\ &= -2\pi i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^{n-1}}{(n-1)!} a_n(k) \\ &= -2\pi i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i\bar{k})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(ik)^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\lambda_{n-1}^\gamma - n + 1}{\lambda_{n-1}^\gamma + n - 1} \\ &= -\frac{2\pi}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} |k|^{2n-2}}{(n-1)!(n-2)!} \frac{\lambda_{n-1}^\gamma - n + 1}{\lambda_{n-1}^\gamma + n - 1} \end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $m = n - 1$, on obtient finalement l'expression de $S^{\mathbf{a}}(k)$:

$$S^{\mathbf{a}}(k) = -\frac{2\pi}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda_m^\gamma - m)}{m!(m-1)!(\lambda_m^\gamma + m)} |k|^{2m}.$$

En comparant avec la formule de $S^{\mathbf{b}}(k)$, on voit que $S^{\mathbf{a}}(k) = S^{\mathbf{b}}(k)$. \square

Remarque 1.3 Bien qu'on n'ait pas la régularité $W^{2,p}$ sur la conductivité, on peut calculer $S^{\mathbf{a}}(k)$ à partir des l'approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ de Nachman, ceci pose une question ouverte importante : l'identité (4.5) est elle valable pour les conductivités non radiales même si on n'a pas la régularité $W^{2,p}$ sur celles-ci ?

2 Discrétisation de l'équation $\bar{\partial}$

Comme pour l'équation $\bar{\partial}$ de Nachman, on va résoudre l'équation $\bar{\partial}$ de Brown-Uhlmann modifiée (4.6) en utilisant la méthode de Vainniko. On commence par tronquer l'approximation de la transformée scattering $S^{\mathbf{a}}$. Une fois tronquée, l'équation $\bar{\partial}$ devient :

$$\tilde{m}_R^+(x, k) = 1 + \int_{\text{supp}(S_R^{\mathbf{a}})} \frac{\overline{S_R^{\mathbf{a}}(-k')} e_x(-k')}{k - k'} \overline{\tilde{m}_R^+(x, k')} dk'. \quad (4.6)$$

Supposons que $\text{supp}(S_R^{\mathbf{a}}) \subset B(0, R) \subset [-s, s]^2$, pour $s > 2R$, ainsi, pour x fixé, on considère $v(k)$ des fonction $2s$ -périodique vérifiant l'équation intégrale :

$$v(k) = 1 + \int_{-s}^s \int_{-s}^s \frac{\overline{S_R^{\mathbf{a}}(-k')} e_x(-k')}{k - k'} v(k') dk'. \quad (4.7)$$

Comme dans la section 3.2, $\tilde{m}_R^+(x, k)|_{B(0, R)} = v(k)|_{B(0, R)}$. Ainsi pour calculer $\tilde{m}_R^+(x, 0)$, il est suffisant de résoudre (4.7). On utilise les notations A_h, g_i, \mathbb{Z}_m^2 de la section 3 du chapitre précédent. Pour x fixé, on note $N_{x, h}^{\mathbf{a}}(j_1, j_2)$ l'approximation de $\tilde{m}^+(x, (j_1 + ij_2)h)$, $j_1, j_2 = -M, \dots, M - 1$, on note aussi $(S_{R, h}^{\mathbf{a}})(j) := \overline{S_R^{\mathbf{a}}(-(j_1 + ij_2)h)}$. Ainsi la forme discète de l'équation (4.7) est

$$N_{x, h}^{\mathbf{a}} + A_h(S_{R, h}^{\mathbf{a}} \bullet \overline{N_{x, h}^{\mathbf{a}}}) = 1_h. \quad (4.8)$$

Pour résoudre (4.8), on introduit le schéma de point fixe :

$$N_{x, h}^{\mathbf{a}, n+1} = 1_h - A_h(S_{R, h}^{\mathbf{a}} \bullet \overline{N_{x, h}^{\mathbf{a}, n}}). \quad (4.9)$$

On est prêt à montrer la convergence du schéma du point fixe. On procède comme dans le théorème 3.2.2.

Théorème 2.1 *Pour $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ et/ou $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ suffisamment petit, $N_{x, h}^{\mathbf{a}, n}$ converge vers $N_{x, h}^{\mathbf{a}}$ pour la norme $\|\cdot\|_{E_h}$.*

Preuve. Pour $M \in E_h$, on définit $G(M) := 1_h - A_h(S_{R, h}^{\mathbf{a}} \bullet \overline{M})$, montrons que G est contractante sur E_h . Soient $M_1, M_2 \in E_h$, on a

$$\begin{aligned} |(G(M_1) - G(M_2))(j)| &= |h^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} g_{j-\ell} S_{R, h, \ell}^{\mathbf{a}} \overline{M_{1, \ell}} - h^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} g_{j-\ell} S_{R, h, \ell}^{\mathbf{a}} \overline{M_{2, \ell}}| \\ &= |h^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} g_{j-\ell} S_{R, h, \ell}^{\mathbf{a}} (\overline{M_{1, \ell}} - \overline{M_{2, \ell}})|. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\|G(M_1) - G(M_2)\|_{E_h} \leq \max_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |S_{R,h,\ell}^{\mathbf{a}}| \|M_1 - M_2\|_{E_h} \max_{k \in S} \int_S |g(k' - k)| dk'.$$

On a montré dans le théorème 3.2. que

$$\max_{k \in S} \int_S |g(k - k')| dk' \leq 4\sqrt{2}s < \infty.$$

Il reste à contrôler $\max_{\ell \in \mathbb{Z}_m^2} |S_{R,h,\ell}^{\mathbf{a}}|$. On a $|\mathbf{T}^{\mathbf{b}}(k)| \leq C \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ et $|\mathbf{T}^{\mathbf{b}}(k)| \leq C \|A_0^{-1}\|_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. Comme $S^{\mathbf{a}}(k) = S^{\mathbf{b}}(k)$, on en déduit que $|S^{\mathbf{b}}(k)| \leq C \|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ et $|S^{\mathbf{b}}(k)| \leq C \|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. Ainsi pour $\|\gamma - 1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ et $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ suffisamment petit, on obtient

$$\|F(M_1) - F(M_2)\|_{E_h} \leq C\epsilon \|M_1 - M_2\|_{E_h}, \quad (4.10)$$

pour $0 < \epsilon < 1$ suffisamment petit, F est contractante sur E_h et le schéma de point fixe $(\mathbf{A}\bar{\partial})$ est convergent. \square

Chapitre 5

Exemples numériques

Dans ce chapitre on donne des exemples numériques sur la reconstruction des conductivités via les méthodes D-bar de Nachman et Brown-Uhlmann modifiée. On étudie dans un premier temps des exemples sur les conductivités radiales régulières. Ensuite on étudie des exemples sur des conductivités radiales moins régulières et on justifie les résultats théoriques précédemment obtenus. Finalement on donne des exemples sur les conductivités non radiales. Le calcul de l'approximations de la transformée scattering pour les conductivités non radiales est implémenté en utilisant la méthode des éléments finis avec le logiciel Freefem++. Le calcul des approximations des transformées scattering (pour les conductivités radiales) ainsi que la résolution numérique de l'équation D-bar sont implémentés grâce à un code écrit en Fortran 77.

1 Cas des conductivités régulières

1.1 Cas des conductivités prochent de 1

On considère les conductivités radiales γ_1, γ_2 données par :

$$\gamma_1(r) = \begin{cases} 10(r^2 - 0.75^2)^2 |r^2 - 0.75^2/4| \cos(\frac{\pi r}{0.75}) + 1 & \text{pour } r \in [-0.75, 0.75] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\gamma_2(r) = \begin{cases} 20(4r^4 - 0.3r^2)(r^2 - 0.75^2) + 1 & \text{pour } r \in [-0.75, 0.75] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la figure ci-dessous on voit les profils des conductivités γ_1 et γ_2 .

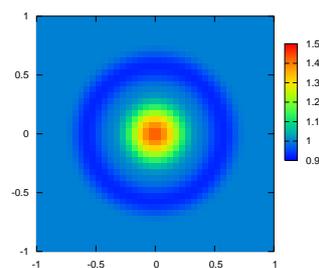
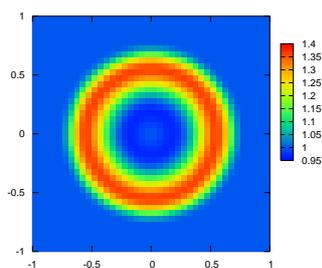
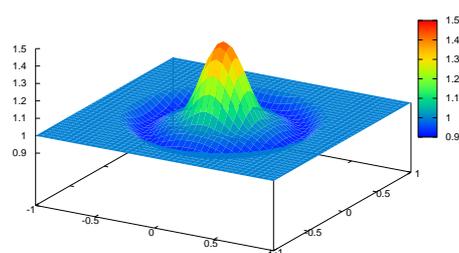
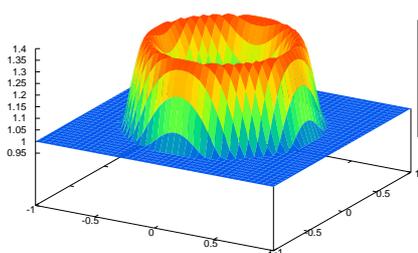


Figure 1.

Figure 2.

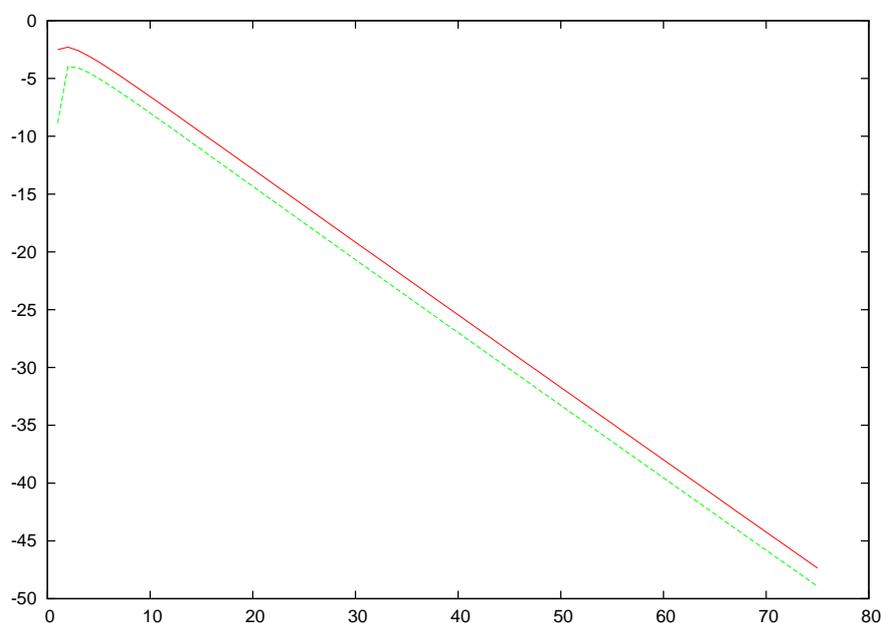
Les conductivités γ_1 et γ_2 .

Le calcul des valeurs propres est implémenté en utilisant la méthode SMI. On désigne par $\lambda_n^{\gamma_1}$ et $\lambda_n^{\gamma_2}$ les valeurs propres de Λ_{γ_1} et Λ_{γ_2} . Dans le tableau ci dessous on donne les valeurs numériques approximatives de $\lambda_n^{\gamma_i}$, $i = 1, 2$, et $n = 1, \dots, 10$.

n	$\lambda_n^{\gamma_1} - n$	$\lambda_n^{\gamma_2} - n$
1	0.000141097034990910744	0.0817485321532080145
2	-0.0192443918672167355	0.10109318521099889
3	-0.0168585306792873764	0.0752553556360809617
4	-0.0112589880661856431	0.0476333427291016562
5	-0.00678162866516757602	0.0280536213754186275
6	-0.00387827963290174414	0.0159071466662674098
7	-0.00215380746487503234	0.00882260353579644371
8	-0.00117517949627710594	0.00482645645743828497
9	-0.000634162391496718037	0.00261681363720160133
10	-0.000339794971877782170	0.00141028262029539112

valeurs numériques approximatives de $\lambda_n^{\gamma_i} - n$, $i = 1, 2$.

Pour mieux voir le comportement asymptotique des valeurs propres, on trace $\ln(|\lambda_n^{\gamma_i} - n|)$, $i = 1, 2$. Le profil est représenté dans la figure ci dessous, la courbe verte represente $\ln(|\lambda_n^{\gamma_1} - n|)$ et la courbe rouge represente $\ln(|\lambda_n^{\gamma_2} - n|)$.



$\ln(|\lambda_n^{\gamma_i} - n|)$, $i = 1, 2$.

On remarque que les valeurs propres de $\Lambda_\gamma - \Lambda_1$, représentées par $\lambda_n^\gamma - n$ tend

vers 0 d'une façon exponentielle lorsque n tend vers l'infini.

Ceci nous permet de calculer les séries (3.38) et (3.24) qui définissent $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$ avec quelques valeurs propres. Dans tout les exemples, on calcul ces séries avec 75 valeurs propres.

Comme les approximations des transformées scattering pour les conductivités radiales sont à valeur réelles ($\mathbf{t}^{\text{eb}}(k) = \mathbf{t}^{\text{eb}}(|k|)$), la partie imaginaire est nulle, et on considère ces approximations comme une fonction à une seule variable $s = |k|$. On donne le profil des approximations des transformées scattering $\mathbf{t}_1^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_2^{\text{exp}}(k)$:

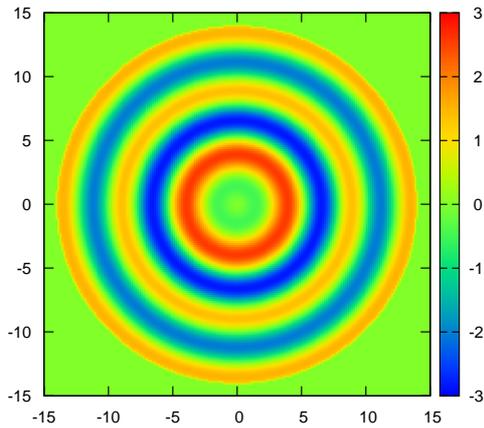


Figure 3

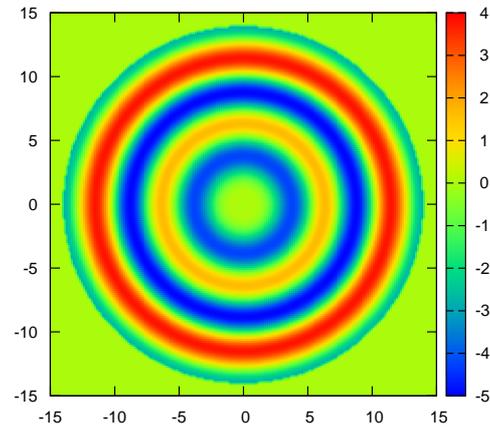


Figure 4

Les approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}_1^{\text{exp}}(k)$, $\mathbf{t}_2^{\text{exp}}(k)$.

Le choix de la tronquature des approximations des transformées scattering est important, si on tronque pour des petites valeurs de k , les conductivités reconstruites ne recupèrent pas les détails de la conductivité originale. Quand le rayon de tronquature augmente, les détails de la conductivité originale apparaissent, mais si le rayon de tronquature dépasse une valeur critique, provoquant l'explosion -au sens numérique- de l'approximations de la transformée scattering, la reconstruction n'est pas bonne.

$\mathbf{t}_1^{\text{exp}}(k)$ est tronquée en $|k| = 12$ et $\mathbf{t}_2^{\text{exp}}(k)$ en $|k| = 14$. On résoud l'équation D-bar

sur une grille de taille $s = 30$ par le schéma de Vainnikko et en utilisant le schéma de point fixe décrit dans la section précédente. On arrête les itérations à $n = 3$, on considère $M = 2^7$. Le profil des conductivités reconstruites sont présentés sur les figures 3 et 4 :

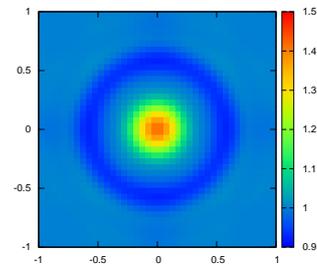
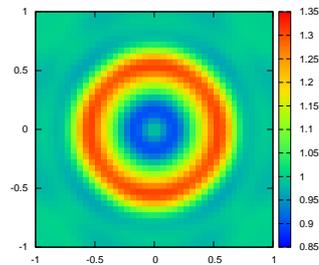
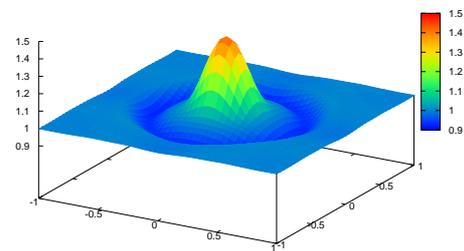
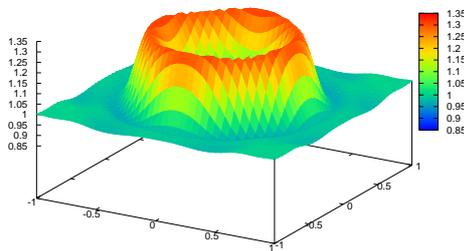


Figure 4.

Figure 5.

Conductivités reconstruites γ_1^{exp} et γ_2^{exp} .

On considère maintenant les approximations $\mathbf{t}_1^{\mathbf{b}}(k)$ et $\mathbf{t}_2^{\mathbf{b}}(k)$. Grâce à la formule (3.38) on calcul $\mathbf{t}_1^{\mathbf{b}}(k)$ et $\mathbf{t}_2^{\mathbf{b}}(k)$. Le profil correspondant est donné sur les figures 6 et 7.

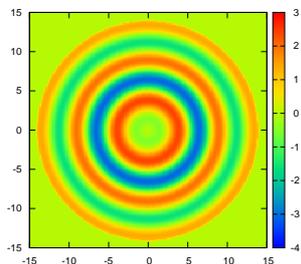


Figure 6

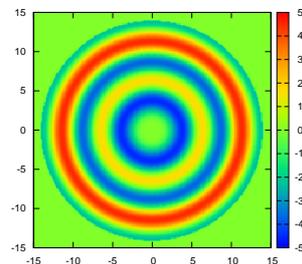


Figure 7.

Approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}_1^b(k)$, $\mathbf{t}_2^b(k)$.

En comparant les figures 6-7 et 3-4, on remarque qu'il n'y a pas une grande différence entre l'approximation \mathbf{t}^{exp} et \mathbf{t}^b , ceci n'est pas une surprise car les conductivités γ_1 et γ_2 sont proches de 1.

De même on résout l'équation Dbar sur une grille de taille $s = 30$, on considère $M = 2^7$. Le profil des conductivités reconstruites sont présentés sur les figures 8 et 9 :

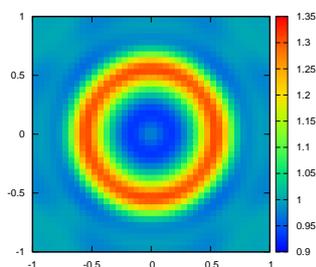
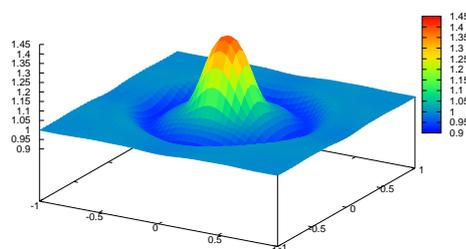
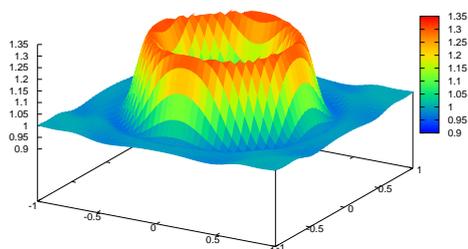


Figure 8

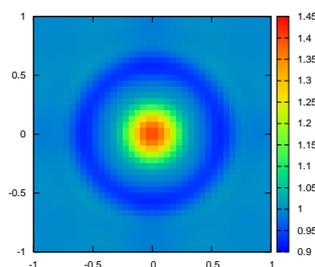


Figure 9.

Pour les conductivités proche de 1, il est difficile de distinguer entre les conductivités reconstruites via les approximations **exp** et **b** à partir des erreurs relatifs, car les approximations des transformées scattering sont bien proches. Pour mieux voir la différence entre la construction de la conductivité via l'approximation \mathbf{t}^{exp} et $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$, on prend une section verticale de γ_1 , γ_1^{exp} et $\gamma_1^{\mathbf{b}}$ et on les traces sur un même profil, la courbe bleu représente la conductivité initiale γ_1 , la courbe verte respresente $\gamma_1^{\mathbf{b}}$ et la courbe rouge représente γ_1^{exp} .

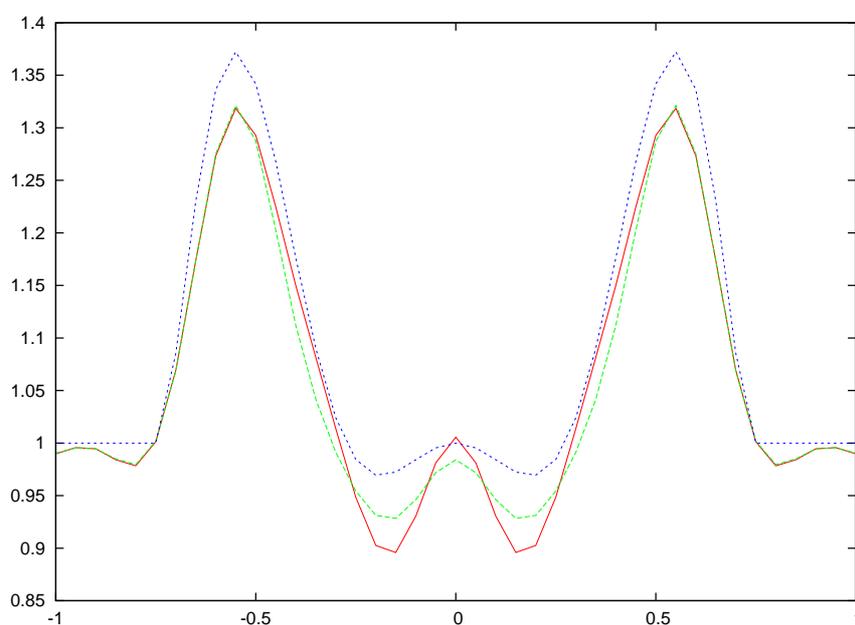


Figure 10

$$\gamma_1, \gamma_1^{\text{exp}}, \gamma_1^{\mathbf{b}}$$

Il est clair que sur l'intervalle $[0.5, 1]$ γ^{exp} et $\gamma^{\mathbf{b}}$ sont presque égaux. Sur l'intervalle $[0.25, 0.5]$, l'erreur absolue $|\gamma - \gamma^{\text{exp}}|$ est meilleure que $|\gamma - \gamma^{\mathbf{b}}|$. Par contre, la direction de $\gamma^{\mathbf{b}}$, représentée par $d\gamma^{\mathbf{b}}/dr$, est meilleure que celle de γ^{exp} . En conclusion, même si l'erreur absolue $|\gamma - \gamma^{\text{exp}}|$ est meilleure que $|\gamma - \gamma^{\mathbf{b}}|$ en certains endroits, la reconstruction $\gamma^{\mathbf{b}}$ reste meilleure car elle conduit à une meilleure reproduction des détails de la conductivité que γ^{exp} .

1.2 Cas des Conductivités qui ne sont pas proche de 1

On considère maintenant deux conductivités qui ne sont pas proche de 1, γ_3 et γ_4 sont données par :

$$\gamma_3(r) = \begin{cases} 20(4r^4 - 0.3r^2)(r^2 - 0.75^2)^2 + 1 & \text{pour } r \in [-0.75, 0.75] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\gamma_4(r) = \begin{cases} (5(r^2 + 0.75^2)^4(1.5 - \cos(r)) + 1)^2 & \text{pour } r \in [-0.75, 0.75] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Leurs profils sont les suivants :

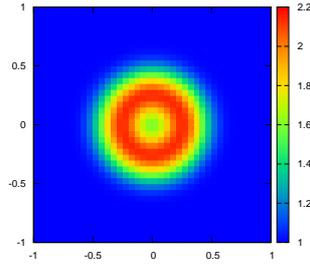
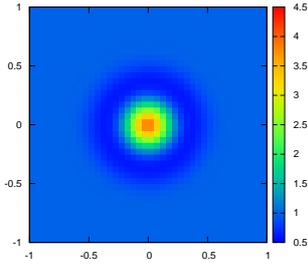
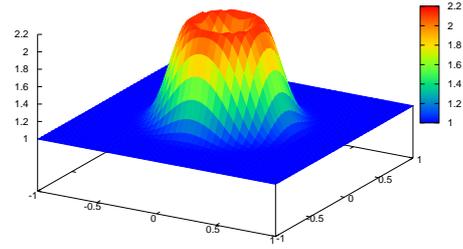
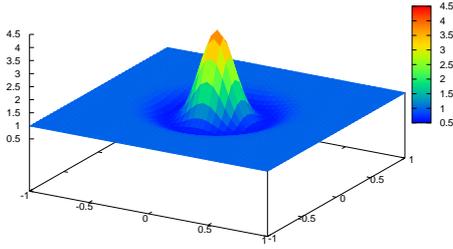


Figure 11

Figure 12

Conductivités γ_3 et γ_4

On note $\mathbf{t}_3^{\text{exp}}(k)$, $\mathbf{t}_3^{\text{b}}(k)$, $\mathbf{t}_4^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_4^{\text{b}}(k)$ les approximations de la transformée scattering associées à γ_3 et γ_4 . Pour justifier pratiquement les résultats sur les estimations d'erreur, on compare $\mathbf{t}_3^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_3^{\text{b}}(k)$ à $\mathbf{t}_2^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_2^{\text{b}}(k)$. On trace une section verticale de $\mathbf{t}_i^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_i^{\text{b}}(k)$, $i = 2, 3$. La courbe verte représente \mathbf{t}_i^{b} et la

courbe rouge représente $\mathbf{t}_i^{\text{exp}}(k)$.

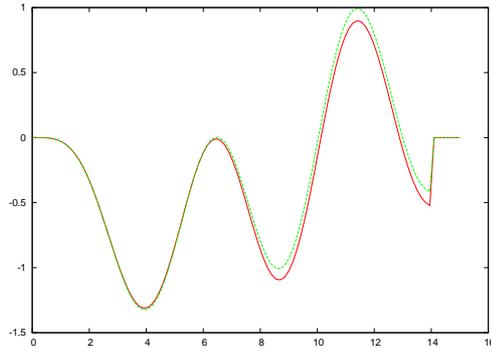


Figure 13

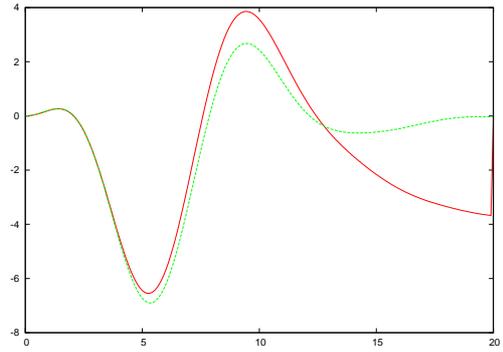
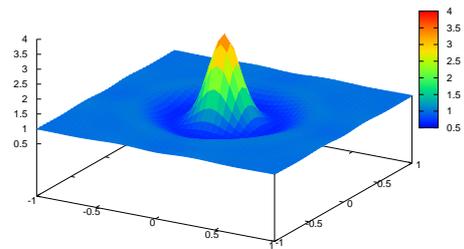
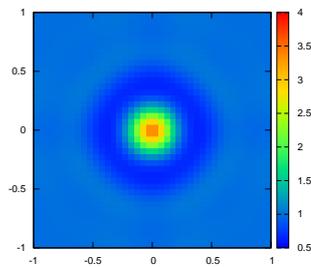


Figure 14

Comparaisons des approximations de la transformée scattering.

Ceci justifie le fait que lorsque $\|\gamma - 1\|_{L^\infty(\Omega)}$ et ou $\|\gamma - 1\|_{L^p(\Omega)}$ tend vers 0, $|\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) - \mathbf{t}^{\text{b}}(k)|$ tend vers 0 également.

On trace la construction via l'approximation $\mathbf{t}_3^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_3^{\text{b}}(k)$, on tronque $\mathbf{t}_3^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_3^{\text{b}}(k)$ à $|k| = 8.866$ et on résoud l'équation $\bar{\partial}$ sur le carré $[-30, 30]^2$. Le profil de la conductivité reconstruite est donné sur les figures 15 et 16.



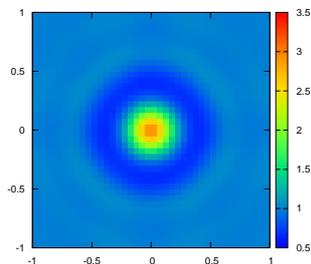


Figure 15

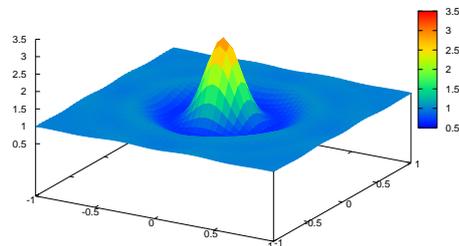


Figure 16

Reconstruction de la conductivité γ_3 via l'approximation $\mathbf{t}^b(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$.

Finalement, on tronque $\mathbf{t}_4^{\text{exp}}(k)$ et $\mathbf{t}_4^b(k)$ à $|k| = 14$, et le profil des conductivités reconstruites sont données sur les figures ci dessous

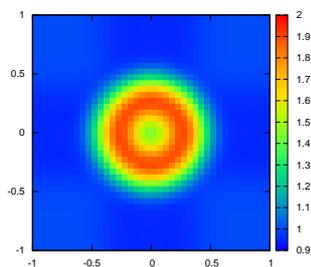


Figure 17

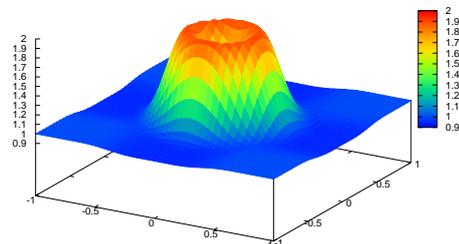
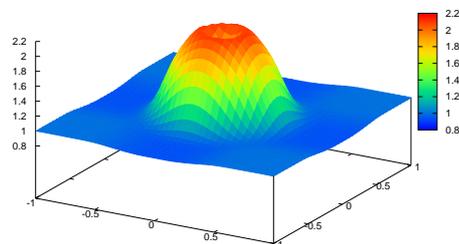
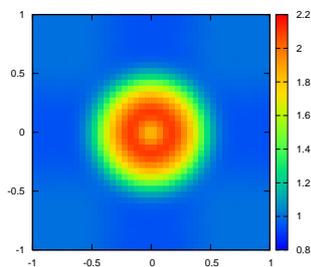


Figure 18

Reconstruction de la conductivité γ_3 via l'approximation $\mathbf{t}^b(k)$ et $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$.



2 Cas des conductivités discontinues

Pour les conductivités radiales discontinues, on considère dans un premier temps les conductivités avec une discontinuité donnée par la formule (3.41). Le calcul de l'approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ est fait en utilisant la formule (3.45). L'approximation $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ est calculée avec la formule (3.24) les valeurs propres sont données explicitement par la formule (3.42). Dans tout les calculs on arrête la série qui définit $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ ou $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ à 75 (on a besoin de 75 valeurs propres).

On considère deux conductivités de type (3.41), $\gamma_4(r) = 2$ pour $r \in [-0.2, 0.2]$ et 1 ailleurs, et $\gamma_5(r) = 2$ pour $r \in [-0.5, 0.5]$ et 1 ailleurs. On trace les approximations de la transformée scattering $\mathbf{t}_4^{\mathbf{b}}(k)$ et $\mathbf{t}_5^{\mathbf{b}}(k)$:

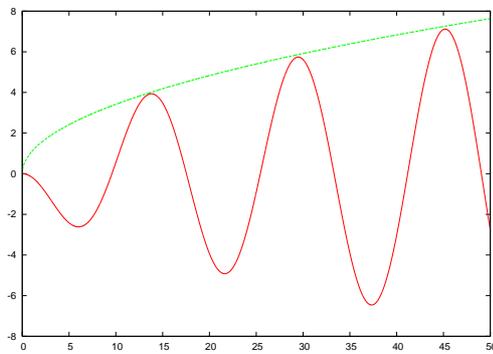


Figure 19

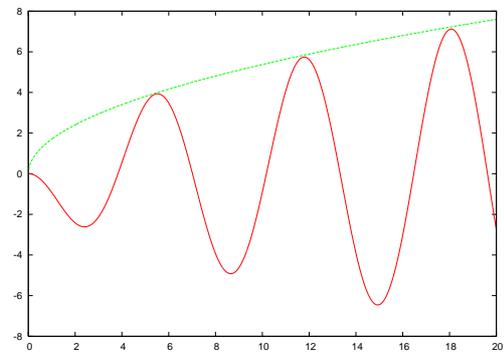


Figure 20

$\mathbf{t}_4^{\mathbf{b}}(k)$ et $\mathbf{t}_5^{\mathbf{b}}(k)$.

On remarque que $\mathbf{t}_4^{\mathbf{b}}(k)$ et $\mathbf{t}_5^{\mathbf{b}}(k)$ se comportent sous la forme d'un $O(\sqrt{|k|})$ comme on l'a démontré dans le chapitre 3. Ces transformées scattering sont tronquées à $|k| = 14$ et on résout l'équation $\bar{\partial}$ sur un carré de taille $[-s, s]$, avec $s = 30$, et une grille qui contient M^2 points avec $M = 2^8$.

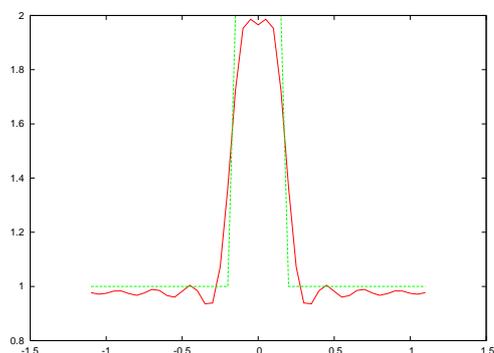


Figure 21

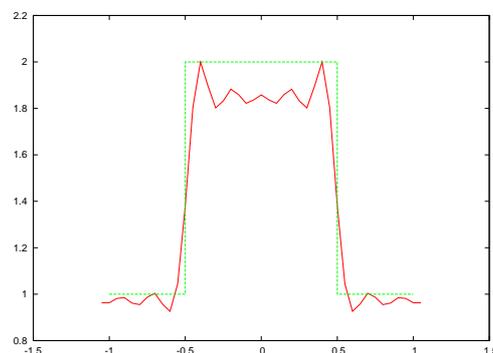
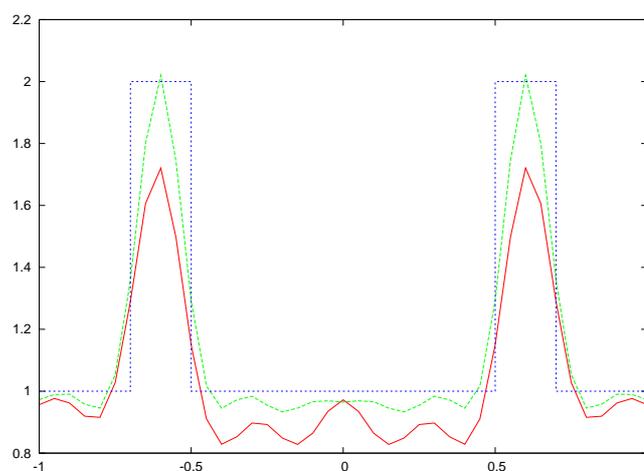


Figure 22.

Conductivités reconstruites via les approximations $\mathbf{t}_4^b(k)$ et $\mathbf{t}_5^b(k)$

On remarque que les conductivités reconstruites donnent une bonne précision sur les lieux des discontinuités, et ces conductivités sont des fonctions lisses. On remarque aussi qu'un phénomène de Gibbs apparaît.

Pour les conductivités discontinues radiales et constantes par morceaux qui ne sont pas de type (3.41), les valeurs propres associées à l'opérateur de Dirichlet-Neumann sont données explicitement par l'algorithme SMI (3.23). On donne un exemple de ce type de conductivités ; soit $\gamma_6(r) = 2$ pour $r \in [0.5, 0.7]$ et 1 ailleurs. L'approximation $\mathbf{t}^b(k)$ est tronqué pour $|k| = 14.9$ et l'équation $\bar{\partial}$ est résolue sur deux grilles, une contenant $2^6 \times 2^6$ points et la deuxième contenant $2^7 \times 2^7$ points. La courbe verte (respectivement rouge) représente la conductivité reconstruite sur la deuxième grille (respectivement la première).



Conductivité reconstruite via l'approximation \mathbf{t}_6^b .

On remarque très bien que la conductivité reconstruite sur une grille plus fine est meilleure.

Pour les conductivités radiales discontinues (mais pas constantes par morceaux), le calcul des valeurs propres est plus difficile. Pour cela, on propose une méthode pour approcher ces valeurs propres. Dans une première étape, on approche la conductivité initiale γ par une conductivité régulière $\tilde{\gamma}_N$, ensuite on utilise la méthode *SMI* pour calculer les valeurs propres de $\Lambda_{\tilde{\gamma}_N}$ et on utilise ces valeurs propres pour calculer les approximations des transformées scattering $\tilde{\mathbf{t}}^{\text{eb}}(k)$. Pour voir ceci d'une façon plus claire, on régularise γ_4 en utilisant l'interpolation de Chebychev filtrée avec $\alpha = 36.04$ et $p = 5$ (voir l'Appendice). On calcule l'approximation de la transformée scattering exacte $\mathbf{t}_3^{\text{b}}(k)$ à partir les valeurs propres par la formule (3.42). Ensuite, on fait varier $N = 50, 100, 300, 500$, on calcule pour chaque N la transformée scattering correspondante (par la méthode SMI) $\mathbf{t}_3^{\text{b},N}(k)$ et l'erreur $e_N(k) := |\mathbf{t}_3^{\text{b}}(k) - \mathbf{t}_3^{\text{b},N}(k)|$.

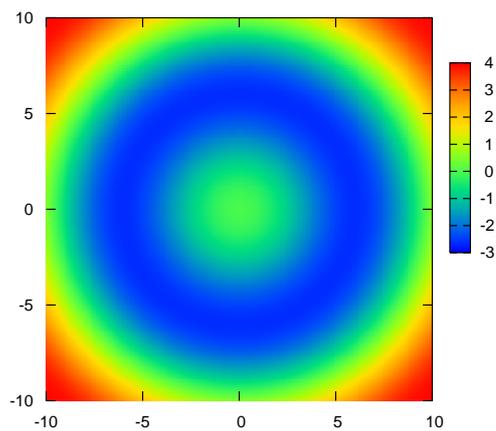


Figure 24 Approximation de la transformée scattering $\mathbf{t}_3^{\text{b}}(k)$.

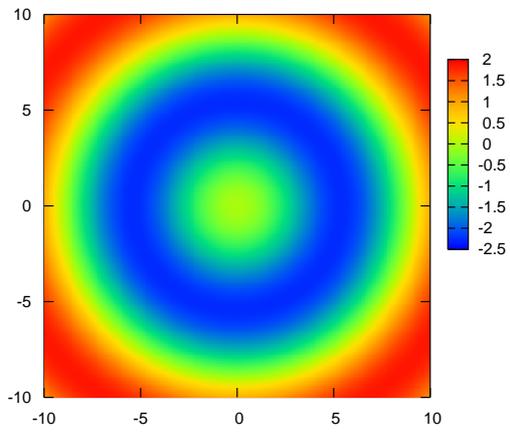


Figure 25

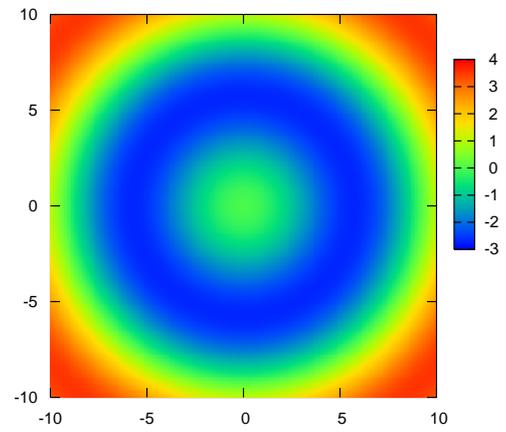


Figure 26

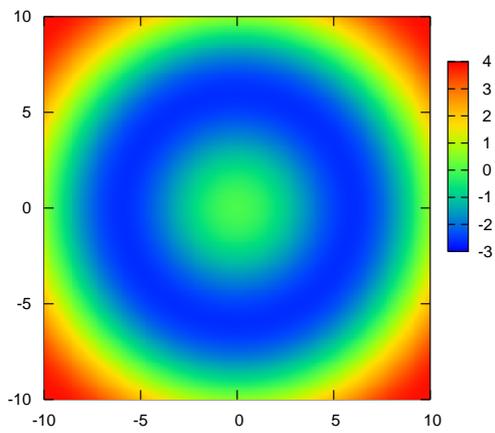


Figure 27

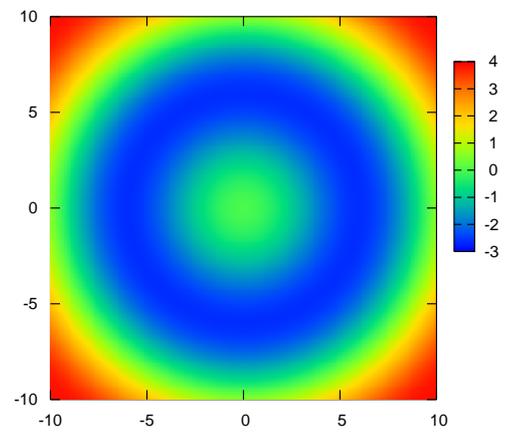


Figure 28

Approximations $\mathbf{t}_3^{\mathbf{b},50}(k), \mathbf{t}_3^{\mathbf{b},100}(k), \mathbf{t}_3^{\mathbf{b},300}(k), \mathbf{t}_3^{\mathbf{b},500}(k)$.

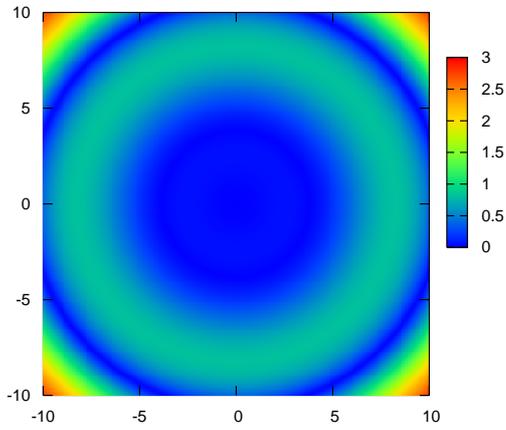


Figure 29

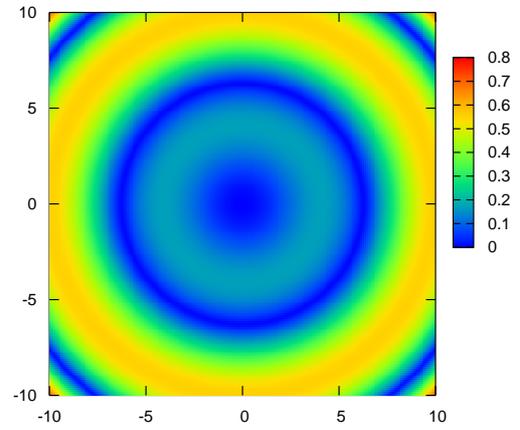


Figure 30

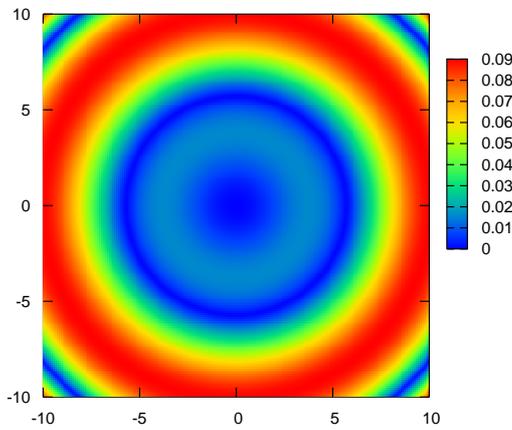


Figure 31

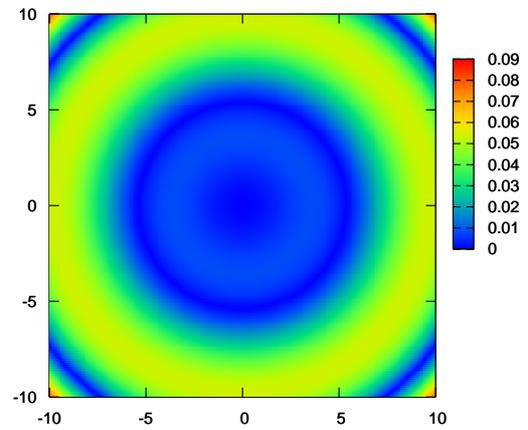


Figure 32

Erreurs $e_{50}(k)$, $e_{100}(k)$, $e_{300}(k)$, $e_{500}(k)$.

On remarque que lorsque N augmente, l'erreur diminue, mais elle ne sera jamais nulle car le calcul des valeurs propres dans $\mathbf{t}_3^b(k)$ est explicite tandis que le calcul

des valeurs propres dans $\mathbf{t}_3^{\mathbf{b},N}(k)$ est approximatif. Cela ne causera cependant pas de problèmes dans la reconstruction, car la méthode D-bar via l'approximation $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}(k)$ est stable.

3 Cas des conductivités non radiales

Pour les conductivités non radiales, et pour les domaines circulaires, on a deux façons pour calculer l'approximation $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$; premièrement on calcule la matrice associée à l'opérateur de Dirichlet-Neuman notée L et définie par :

$$L_{nm}^\gamma := \langle \Lambda_\gamma e^{in\theta}, e^{im\theta} \rangle = \int_{\Omega} \gamma \nabla u_{e^{in\theta}}^\gamma \cdot \nabla e^{im\theta} dx, \quad n, m = -M, \dots, M,$$

ensuite $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ sera donnée par :

$$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) = \sum_{n,m=0}^M \frac{(i\bar{k})^n}{n!} \frac{(i\bar{k})^m}{m!} (L_{-n,m}^\gamma - L_{-n,m}^1).$$

Ou bien on calcule $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ tout de suite par la formule suivante :

$$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k) = \int_{\Omega} \gamma \nabla u_{e^{ikx}}^\gamma \cdot \nabla e^{i\bar{k}x} dx - \int_{\Omega} \nabla u_{e^{ikx}}^1 \cdot \nabla e^{i\bar{k}x} dx.$$

Pour les domaines non circulaires, on utilise la deuxième formule. Tout ces calculs sont fait en utilisant la méthode des éléments finis, et $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ est implémentée avec le logiciel FreeFem++. Notons que pour les conductivités non radiales on calcule les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$. On tronque $\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$ à $|k| = 5$ et on résoud l'équation $\bar{\partial}$ sur une grille de taille $2^7 \times 2^7$.

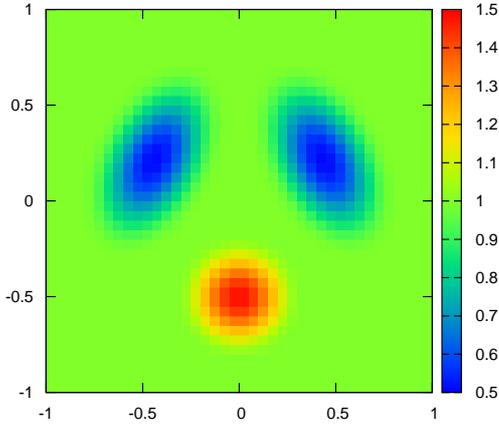


Figure 33

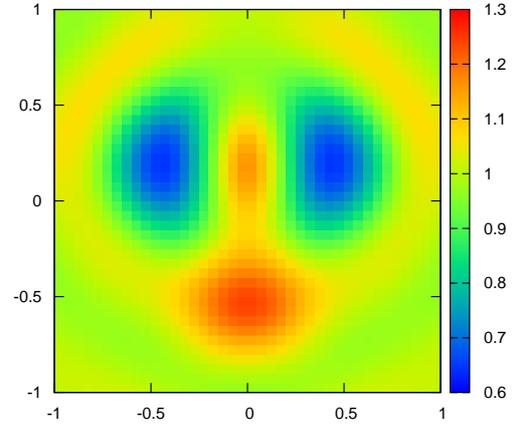


Figure 34

A gauche la conductivité exacte, à droite la conductivité reconstruite via l'approximation \mathbf{t}^{exp} .

Notons que les formes ellipsoïdales qui définissent la conductivités ne sont pas reconstruites d'une façon exacte. Par contre la forme géométrique de la conductivité non radiale est presque conservé ; on voit bien que les éllipsoïdes reconstruites sont bien séparées et le cercle au milieu est bien positionné.

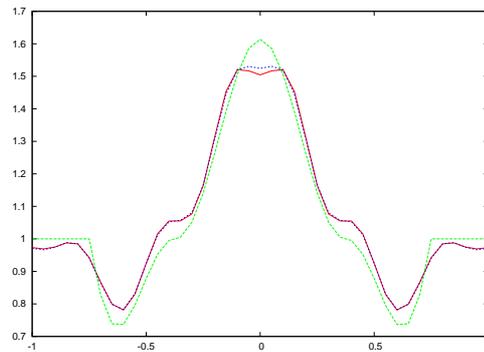
4 Comparaison entre la méthode Dbar de Nachman et Brown-Uhlmann modifiée

Pour comparer les méthodes Dbar de Nachman et Brown-Uhlmann modifiée, on considère la conductivité $\gamma_7(r)$ définie comme suit :

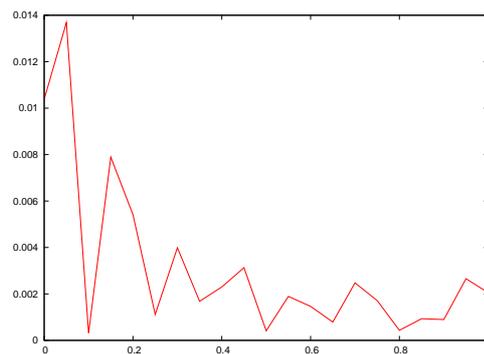
$$\gamma_7(r) = \begin{cases} 10(r^2 - 0.75^2)^{1.1}(r^2 - 0.75^2/4)^{1.1} + 1 & \text{pour } r \in [-0.75, 0.75] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

γ_7 admet une singularité en 0.75. Bien qu'on n'ait pas la régularité $W^{2,p}$, on teste les méthodes $\bar{\partial}$ de Nachman et Brown-Uhlmann modifiées simultanément. Les approximations des transformées scattering $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$ et $S^{\mathbf{a}}$ sont tronquées à $|k| = 12$. La

courbe bleu (respectivement la courbe rouge) représente la conductivité reconstruite via la méthode de Nachman (respectivement via la méthode de Brown-Uhlmann modifiée). On trace aussi la différence entre les deux conductivités reconstruites.



Reconstruction avec la méthode Dbar de Nachman et Brown-Uhlmann modifiée



Différence entre les deux reconstructions

On remarque très bien que les deux méthodes donnent presque la même reconstruction, ceci est une conséquence des relations entre $S^a(k)$ et $t^b(k)$.

Annexe A

Espace de Hölder

Definition 0.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \Omega, 0 < \alpha < 1$ et f une fonction définie sur Ω . f est dite Hölder continue en x_0 si :

$$\sup_{\Omega} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty$$

Definition 0.2 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1$ et f une fonction définie sur Ω . f est dite Hölder continue sur Ω si :

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

On note $C^\alpha(\Omega)$ l'ensemble des fonctions Hölder continues sur Ω . Pour k entier positif, on définit $C^{k+\alpha}(\Omega)$ par

$$C^{k+\alpha}(\Omega) := \{f \in C^\alpha(\Omega); D^\beta f \in C^\alpha(\Omega); 0 \leq |\beta| \leq k\}$$

L'espace $C^{k+\alpha}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} = \sum_{j=0}^k \|D^j u\|_{C(\Omega)} + \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^k u(x) - D^k u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Annexe B

Espace de Sobolev et problème elliptique

1 Espace de Sobolev

Definition 1.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \Omega, 0 < \alpha < 1$ et f une fonction définie sur Ω . On définit

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

On note $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Théorème 1.2 pour $1 \leq p < \infty, \Omega$ ouvert de classe C^1 , alors il existe un opérateur borné et linéaire

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tel que $Tu = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(p, \Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Definition 1.3 On définit $W_0^{1,p}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) | Tu = 0\}$, en particulier $H_0^m(\Omega) := \{u \in H^m(\Omega); u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Proposition 1.4 Pour $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, la norme $\|\Delta f\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à la norme $\|f\|_{H^2(\Omega)}$.

Definition 1.5 Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit $H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := T(H^m(\Omega))$ et $H^{-m+\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := (H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))'$

Théorème 1.6 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné de classe C^1 , on a :

1. Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

2. Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, \infty[$.

3. Si $p > n$, alors $W^{1,p} \subset C(\overline{\Omega})$.

2 Régularité elliptique

Théorème 2.1 Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 . Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ et il existe une constante C qui dépend de Ω tel que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Annexe C

Interpolation de Chebychev filtrée

Definition 0.2 On appelle *p*-polynômes de Chebychev la suite de fonctions notées $T_n(x)$ définies par

$$T_n(x) := \cos(n * \arccos(x))$$

Definition 0.3 On appelle *p*-filtre spectral σ une fonction suffisamment régulière vérifiant :

$$\begin{cases} \sigma(0) = 1 \\ \sigma^{(m)}(0) = 0, \quad m = 1, \dots, p-1 \\ \sigma^{(m)}(1) = 0, \quad m = 1, \dots, p-1 \end{cases}$$

Exemple 0.4 Un exemple sur les filtres spectraux est le filtre gaussien défini par :

$$\sigma(x) = \exp(-\alpha x^{2p}) \quad \alpha = 36.0437$$

Pour $f(x)$ donnée, on pose $a_n := (2/\pi) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) T_n(x) dx$

Definition 0.5 On note $F_n(x)$ l'interpolation de Chebychev filtrée définie par

$$F_n(x) = \sum_{n=0}^N \sigma\left(\frac{n}{N}\right) a_n T_n(x)$$

Proposition 0.6 Supposons qu'une fonction $f(x)$ admet une discontinuité au point x_0 , notons $d(x) = x - x_0$, alors il existe une constante K telle que

$$|f(x) - F_N(x)| \leq \frac{K}{d(x)^{p-1} N^{p-1}}$$

Principales notations

Ω	ouvert borné de \mathbb{R}^2
$D(0, 1)$	Disque unité de \mathbb{R}^2
$\partial\Omega$	frontière du domaine
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	crochet de dualité $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) - H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$
∇	opérateur gradient
rot	opérateur rotationnel
div	opérateur divergence
Δ	opérateur de Laplace
Λ_γ	opérateur de Dirichlet-Neumann de conductivité
Λ_q	opérateur de Dirichlet-Neumann de Schrödinger
R_γ	opérateur Neumann-Dirichlet
H_γ	opérateur de transformée de Hilbert
$\partial, \bar{\partial}$	opérateur de Cauchy-Riemann
∂_τ	opérateur de dérivée tangentielle
∂_τ^{-1}	opérateur de dérivée tangentielle inverse
G_k	fonction de Green-Fadeev
G_0	fonction de Green usuelle
J_1	fonction de Bessel
$\mathbf{t}(k)$	transformée scattering de Nachman
$\mathbf{t}^{\text{exp}}(k)$	approximation de la transformée scattering de Nachman
$\mathbf{t}^{\text{b}}(k)$	approximation de la transformée scattering de Nachman
$S(k)$	transformée scattering de Brown-Uhlmann
$S^{\text{exp}}(k)$	approximation de la transformée scattering de Brown-Uhlmann
$S^{\text{b}}(k)$	approximation de la transformée scattering de Brown-Uhlmann
$S^{\text{a}}(k)$	approximation de la transformée scattering de Brown-Uhlmann
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$	
$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$	
$W^{1,p}(\Omega), W^{2,p}(\Omega)$	Espaces de Sobolev

$C^{k+\alpha}(\Omega), C^\alpha(\Omega)$	Espaces de Hölder
γ	conductivité
ρ	support de $\gamma - 1$
u^γ	solution de l'équation de conductivité
λ_n^γ	valeurs propres de Λ_γ

Bibliographie

- [Ale88] Giovanni Alessandrini. Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Appl. Anal.*, 27(1-3) :153–172, 1988.
- [Ale90] Giovanni Alessandrini. Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements. *J. Differential Equations*, 84(2) :252–272, 1990.
- [AP06] Kari Astala and Lassi Päiväranta. Calderón’s inverse conductivity problem in the plane. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :265–299, 2006.
- [BR] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications.* - Dunod
- [BU97] Russell M. Brown and Gunther A. Uhlmann. Uniqueness in the inverse conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, 22(5-6) :1009–1027, 1997.
- [Eva] Lawrence Evans *Partial Differential Equations.* - Springer
- [GT] David Gilbarg, Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* - Springer
- [KV84] Robert V. Kohn and Michael Vogelius. Identification of an unknown conductivity by means of measurements at the boundary. In *Inverse problems (New York, 1983)*, volume 14 of *SIAM-AMS Proc.*, pages 113–123. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [KV85] Robert V. Kohn and Michael Vogelius. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II. A convergence proof. *Quart. Appl. Math.*, 43(1) :1–22, 1985.
- [Nac96] Adrian I. Nachman. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. *Ann. of Math. (2)*, 143(1) :71–96, 1996.

- [sil99] Samuli Siltanen PHD :Electrical impedance tomography and Fadeev Green function Helsinki University of Technology, 1999.
- [Knu02] Kim Knudsen PHD :On the inverse conductivity problem Aalborg university, 2002.
- [Sylv92] John Sylvester A convergent layer stripping algorithm for the radially symmetric impedance tomography problem. *Comm. Partial Differential Equations*,17 pp. 1955-1994, 1992.
- [SMI00] Samuli Siltanen, Jennifer Mueller, and David Isaacson. An implementation of the reconstruction algorithm of A. Nachman for the 2D inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, 16(3) :681–699, 2000.
- [SMIerr] Samuli Siltanen, Jennifer Mueller, and David Isaacson. Erratum :An implementation of the reconstruction algorithm of A. Nachman for the 2D inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, 17 pp.1561-1563.
- [SilMue] Samuli Siltanen, Jennifer Mueller. Direct reconstructions of conductivities from boundary measurements. *SIAM Journal of Scientific Computation*, 24(4), pp. 1232-1266..
- [SMK] Kim Knudsen, Samuli Siltanen, Jennifer Mueller. Numerical solution method for the dbar-equation in the plane, *Journal of Computational Physics*, 198(2), pp. 500-517.
- [KnuTam] Knudsen, Kim and Tamasan, Alexandru Reconstruction of less regular conductivities in the plane. *Comm. Partial Differential Equations*, 29 , no. 3-4, 361–381. 2004
- [SU87] John Sylvester and Gunther Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math. (2)*, 125(1) :153–169, 1987.
- [BBR01] Barceló, Juan Antonio and Barceló, Tomeu and Ruiz, Alberto. Uniqueness and stability for the inverse conductivity problem. *Margarita mathematica*, 401–413, Univ. La Rioja, Logroño, 2001
- [CKS] Horia Cornean, Kim Knudsen and Samuli Siltanen Towards a d-bar reconstruction method for three-dimensional EIT. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems* , pp. 111-134, 2006

-
- [KLMS] Kim knudsen, Matti Lassas, Jennifer Mueller and Samuli Siltanen Regularized D-bar method for the inverse conductivity problem. . *Inverse Problems and Imaging*, 3(4), pp. 599-624. 2009
- [KLMS07] Kim knudsen, Matti Lassas, Jennifer Mueller and Samuli Siltanen D-bar method for electrical impedance tomography with discontinuous conductivities. *SIAM journal of applied mathematics*, 67(3), pp. 893-913. 2007