



HAL
open science

Champs de densité d'énergie pour la vibroacoustique basse et moyenne fréquence des structures complexes utilisant un modèle numérique stochastique: application à la partition structurale des automobiles

Morad Kassem

► **To cite this version:**

Morad Kassem. Champs de densité d'énergie pour la vibroacoustique basse et moyenne fréquence des structures complexes utilisant un modèle numérique stochastique: application à la partition structurale des automobiles. Autre. Université Paris-Est, 2009. Français. NNT: 2009PEST1061 . tel-00539048

HAL Id: tel-00539048

<https://theses.hal.science/tel-00539048>

Submitted on 23 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS-EST

Année 2009

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement

par

Morad KASSEM

le 10 décembre 2009

Titre :

**Champ de densité d'énergie pour la vibroacoustique
basse et moyenne fréquence des structures complexes
utilisant un modèle numérique stochastique.
Application à la partition structurale des automobiles**

Directeur de thèse : Christian SOIZE

Jury

M. Laurent GAGLIARDINI, Docteur	<i>Examineur</i>
M. Mohamed ICHCHOU, Professeur	<i>rapporteur</i>
M. Roger OHAYON, Professeur	<i>rapporteur</i>
M. Goran PAVIC, Professeur	<i>président du Jury</i>
M. Christian SOIZE, Professeur	<i>directeur de thèse</i>

A mes parents...
Pour leur soutien inconditionnel

Remerciements

Je n'ai pas fait corriger le français des paragraphes à suivre intentionnellement pour rendre hommage à tous ceux qui m'ont aidé à corriger mes différents rapports et présentations et qui m'ont aidé à apprendre la langue française et pour également laisser un souvenir qui me rappellera pour toujours que je n'aurai jamais pu y arriver tout seul.

Je commence mes remerciements par ordre semi-antichronologique (Charles n'essaies pas de m'expliquer que ce mot n'est pas français, je l'ai inventé). Je souhaite remercier les gens qui ont eu un impact directe ou indirecte sur mes travaux, avant ou durant ma thèse. Je remercie donc d'abord **ma famille** qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours jusqu'à aujourd'hui et qui étaient toujours là pour moi malgré la distance qui nous séparait assez souvent. C'est à eux que je dois la plus grande partie de ma réussite à chaque étape jusqu'à la fin de cette thèse. Je remercie surtout **mes parents** d'avoir pris des décisions importantes sans lesquelles je ne serai jamais arrivé là.

Je remonte un peu loin dans le temps pour remercier **Dr. Abdullah Al-dwairi**, le directeur du département du génie industriel de la "Jordan University of Science and Technology" et le directeur de mon projet de fin d'études, de m'avoir donné l'occasion de travailler sur un sujet grace auquel j'ai découvert le domaine de la modélisation numérique en mécanique et qui a orienté les choix qui ont suivi mes études d'ingénieur. Il m'a appris plein de choses et il m'a surtout fait découvrir mon intérêt pour la modélisation et la simulation numériques. Je remercie également Monsieur **Bernard Gay** de l'Université Lyon 1 Claude Bernard de m'avoir donné l'occasion de venir en France pour mon master en simulation numérique en mécanique et Madame **Catherine Potel** de l'Université du Maine pour tout l'aide qu'elle m'a apporté durant mon master en matériaux et acoustique.

Je souhaite remercier l'équipe de Valeo Thermique Habitacle avec qui j'ai travaillé durant mon stage de master notamment, le groupe des stagiaires : **Argantael, Ilhame Elaishi, Laëtitia Pilloy** et **Nicolas Roux** pour les moments inoubliables, **Laurence Cornu** pour son soutien et pour sa gentillesse, **José Leborgne** pour son bon humeur, son soutien précieux et son amitié et finalement **Saïd Nagi** pour ces conseils techniques au cours de mon stage et pour son aide dans mes recherches d'un sujet de thèse.

J'arrive alors à ma thèse. J'aimerais remercier toute l'équipe d'ACV de PSA Peugeot Citroën notamment, **Denis Thenail, Benoît Maherault Philippe Vannier, Yves Bosseu, Benoît Guillaume** et **Manuel Etchessahar** pour tout le soutien scientifique

et technique qu'ils m'ont apporté et pour les bons moments que j'ai passé à PSA. J'aimerais également remercier toute l'équipe du laboratoire MSME de l'université Paris-Est dans lequel j'ai passé des moments qui étaient souvent chargés en travail et en stress mais qui étaient également des moments très agréables et inoubliables. Je remercie notamment, **Jeremy** pour son bon humeur et son amitié et également pour les "abdo-fessiers" de mercredi soir, **Evangéline Capiez-Lernout** ("La fille" précédemment et "La maman" récemment) d'abord pour son amitié et sa gentillesse et puis pour son soutien scientifique occasionnel, **Christophe Desceliers** pour son aide précieuse au niveau scientifique qui m'a souvent sortie des grande dilemme, pour toutes les conférences qu'on a pu faire ensemble pendant lesquels nous avons passé des très bons moments et finalement de m'avoir dépanné à 20 :00 à coté du bâtiment "Lavoisier" quand il y avait même pas un chat, **Elie Favier** pour l'ambiance qu'il mets dans les pauses café comme dans les pauses pas café, **Sandra Jerez**, **Thiago Ritto**, **Moustapha M'baye**, **Quoc Bao Nguyen** et **Eric Monteiro** pour leur amitié qui m'est très précieuse, pour les bons moments que nous avons passé ensemble et pour les discussions prolongées et très riches d'ordre scientifique et culturel. Je remercie également **Camille Perrot**, **Anas Batou**, **Thanh Trung DO** (little tchou), **Huy Toan Le**, **David Perez** et **Sulpicio Sanchez** pour les très bons moments partagés au laboratoire et en dehors du laboratoire. Je n'oublie pas de remercier **Isabelle Bressan** pour son bon humeur et pour tout son aide très précieuse qu'elle m'a apporté et qui m'a souvent épargné les complications administratives.

Des remerciements spéciales à **Charles Ferenandez** (Carlito) d'abords pour les orientations, scientifiques et autres, qu'il m'a donnée au début et pendant la thèse et qui m'ont beaucoup aidé, ensuite d'avoir souvent pris le temps pour me fournir des explications aussi complètes que possible au niveau scientifique et finalement pour les échanges culturel intensif souvent remplie des explications exhaustives sur les origines des mots et des plats français et son amitié.

Je souhaite remercier très spécialement **Anneraf** qui m'a toujours soutenue, par son amour et sa patience, tout au long de mon séjour en France et notamment durant ma thèse. Sans elle, il est certain que je ne serai pas arrivé là. Je remercie à la même occasion tous les membre de ma belle famille qui n'ont jamais cessé de m'aider et qui étaient ma deuxième famille depuis que je suis en France. J'ai vraiment eu de la chance de les avoir a mes cotés.

Je pense également à remercier, **Véronique Achille** et **Tarek Karoui** pour tout l'aide qu'ils ont pu m'apporter à mon arrivé en France et **Nacera Harem** qui s'est donné la peine de corriger les fautes d'orthographe et les tournures des phrases d'une bone partie de ce mémoire de thèse.

Je souhaite exprimer mon remerciement, gratitude et reconnaissance aux deux personnes qui m'ont d'abord donné l'occasion de faire cette thèse, qui m'ont fait confiance, qui m'ont donné tout le temps, l'aide et les moyens pour réussir mes travaux dans les meilleures conditions, **Christian Soize** et **Laurent Gagliardini**.

Je remercie **Christian** pour tout ce qu'il m'a appris, aussi bien sur le plan scientifique que sur le plan de la recherche de manière générale. Il m'a appris le sens du mot rigueur. Il m'a également appris comment me remettre en cause, réviser encore et encore mon travail. Je le remercie également, pour son temps qu'il m'a souvent consacré avec beaucoup de patience, et pour sa croyance dans la formation par la recherche. C'est pour tout ceci que je suis très heureux et honoré d'avoir effectué cette thèse sous sa direction qui était la principale raison pour laquelle j'ai réussi un sujet de thèse aussi complexe.

Je remercie **Laurent** pour son aide tout au long de ma thèse, pour toutes les discussions scientifiques, techniques et autres que nous avons pu avoir ensemble, que ça soit au bureau, autour d'un café ou dans le transport. Ces discussions m'ont toujours apporté et appris beaucoup. Bien que je me sentais souvent dépassé par le niveau scientifique et technique de ces discussions, j'y ai toujours trouvé une mine d'informations utiles pour ma thèse et pour la culture générale. Sans les conseils et le suivi de Laurent, qui arrivaient toujours au bon moment, il est évident que mes travaux auraient pu prendre beaucoup plus de temps.

Finalement, je souhaite remercier mes rapporteurs **M. Mohamed ICHCHOU** et **M. Roger OHAYON** d'avoir accepté de rapporter ma thèse, pour l'intérêt qu'ils ont montré vis-à-vis de mon travail et d'avoir soulevé des questions très intéressantes qui ont animé les débats de fin de soutenance. Je remercie **M. Goran PAVIC** d'avoir accepté d'examiner mon travail, d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et d'avoir participé d'une manière très intéressante aux débats au cours de la soutenance de cette thèse.

Avant-propos

Ce travail de recherche s'inscrit dans le domaine de l'analyse vibroacoustique basses et moyennes fréquences. Il a été effectué au sein du Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle FRE3160 CNRS (**MSME**) de l'**Université Paris-Est** sous la direction de Monsieur **Christian Soize** (Professeur des universités) et en collaboration avec le service d'acoustique et vibration de la direction technique et industrielle du constructeur automobile **PSA Peugeot Citroën** sous la tutelle de Monsieur **Laurent Gagliardini**.

Le travail a été effectué dans le cadre d'un contrat de Convention Industrielle de Formation par la Recherche (**CIFRE**) impliquant quatre parties, moi même, le laboratoire MSME, PSA Peugeot Citroën et l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie **ANRT**. La rémunération a été assurée en partie par l'ANRT et en partie par l'entreprise dans le cadre d'un contrat d'embauche à durée déterminée.

Le temps de travail a été répartie entre le laboratoire et l'entreprise de manière à assurer le bon déroulement des travaux.

Plusieurs communications ont été effectuées au cours du travail de thèse sous la forme des publications dans des revues internationales a comité de lectures et a travers plusieurs conférences internationales. Les outils développés issus de ce travail ont été intégrés dans le processus de conception chez le constructeur.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	iii
Avant-propos	vii
Table des matières	ix
Notations	xv
1 Introduction	1
1.1 Contexte de la recherche	2
1.2 Positionnement de la recherche	5
1.3 Objectifs de la recherche	9
1.4 Stratégie de la recherche	10
1.5 Apports de la thèse	11
1.6 Plan de la thèse	12
2 Présentation du problème vibroacoustique	15
2.1 Présentation du modèle moyen	16
2.2 Equations du modèle moyen pour la structure	17
2.2.1 Problème aux limites	17
2.2.2 Formulation faible du problème aux limites	18
2.2.3 Discrétisation des équations du modèle moyen	19
2.3 Equations du modèle moyen pour la cavité acoustique	20

TABLE DES MATIÈRES

2.3.1	Problème aux limites	20
2.3.2	Formulation faible du problème	20
2.3.3	Discrétisation des équations du modèle moyen	22
2.4	Equations du modèle moyen pour le système vibroacoustique couplé	22
2.4.1	Problème aux limites	23
2.4.2	Formulation faible du problème	23
2.4.3	Discrétisation des équations du modèle moyen	23
2.4.4	Réduction du modèle vibroacoustique moyen	23
2.5	Conclusion	26
3	Modèle vibroacoustique réduit stochastique modélisant les incertitudes	27
3.1	Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation et de paramètres du modèle	28
3.2	Construction du modèle vibroacoustique réduit stochastique	29
3.2.1	Normalisation des matrices aléatoires	30
3.2.2	Informations disponibles pour les matrices aléatoires	32
3.2.3	Paramètres de dispersion et loi de probabilité des matrices	33
3.2.4	Représentation algébrique de la matrice aléatoire $[G]$	35
3.3	Conclusion	36
4	Résolution des équations aléatoires	39
4.1	Système d'équations stochastiques à résoudre	40
4.2	Méthode de Monte Carlo	41
4.3	Etude de la convergence de la solution	42
4.4	Statistiques des observations	42

4.4.1	Estimation des régions de confiance par la méthode des quantiles . . .	43
4.4.2	Estimation des régions de confiance par l'inégalité de Tchebychev . . .	43
4.4.3	Indice de dispersion	44
4.5	Conclusion	44
5	Construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié	45
5.1	Introduction	46
5.2	FRF et mobilités du système vibroacoustique incertain	46
5.2.1	Introduction	46
5.2.2	Définition des DDL excités et observés pour construire le modèle vibroacoustique énergétique	47
5.2.3	Définition des excitations pour construire le modèle vibroacoustique énergétique	47
5.2.4	Définition des fonctions aléatoires de réponse en fréquence en vitesse	48
5.2.5	Définition de la matrice aléatoire de mobilité	49
5.3	Construction des grandeurs énergétiques pour le système vibroacoustique . .	49
5.3.1	Calcul des puissances aléatoires injectées dans le modèle vibroacous- tique réduit stochastique	49
5.3.2	Fonctions spectrales de forces d'excitation et de la vitesse de réponse	50
5.3.3	Matrice aléatoire de mobilité des points d'entrée et de sortie	52
5.3.4	Introduction de la fonction de réponse en fréquence de la puis- sance(FRFP)	52
5.4	Calcul des puissances injectées pour le modèle énergétique dans le cas d'ex- citations corrélées	53
5.5	Introduction du système de coordonnées locales définies par les directions principales de la mobilité locale moyenne	55

TABLE DES MATIÈRES

5.5.1	Transformation des équations du modèle vibroacoustique réduit stochastique dans les coordonnées locales définies par les directions principales de la mobilité locale moyenne	57
5.5.2	Moyennage statistique des variables aléatoires	58
5.6	Conclusion	58
6	Validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique	59
6.1	Présentation du modèle éléments finis du système étudié	60
6.2	Résolution du modèle numérique vibroacoustique réduit stochastique	61
6.3	Etude de la convergence de la méthode de Monte Carlo	62
6.4	Utilisation de l'approche énergétique	63
6.4.1	Analyse des résultats dans les coordonnées locales	63
6.4.2	Etude des grandeurs énergétiques du modèle vibroacoustique énergétique simplifié	67
6.5	Comportement spatial et comportement fréquentiel des FRF et FRFP moyennes	78
6.5.1	FRF et FRFP moyennes vibratoires	79
6.5.2	FRF et FRFP moyennes acoustiques	82
6.5.3	FRF et FRFP moyennes vibroacoustique	84
6.5.4	Application de l'approche énergétique à un modèle déterministe	85
6.5.5	Conclusions concernant le comportement spatial et fréquentiel des FRF et FRFP moyennes	87
6.6	Domaines de confiance des FRF et FRFP stochastiques et indices de dispersion	88
6.7	Conclusion	94
7	Modèle vibroacoustique énergétique simplifié	95

7.1	Introduction	96
7.2	Construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié	96
7.3	Critère de construction de la partition par zone	98
7.4	Conclusion	99
8	Validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique simplifié	101
8.1	Introduction	102
8.2	Définition d'une partition initiale par zone du modèle vibroacoustique énergétique simplifié	102
8.3	Evaluation du critère de partition par zone pour la partition initiale	104
8.3.1	Cas vibratoire	105
8.3.2	Cas acoustique	110
8.3.3	Cas vibroacoustique	114
8.4	Conclusion	121
	Conclusion et perspectives	123
A	Démonstration de la positivité de la matrice des FRF pour un sous-ensemble de DDL	125
A.1	Preuve pour la matrice déterministe $Re\{[T(\omega)^p]\}$	125
A.2	Preuve pour la matrice aléatoire $Re\{[\mathbf{T}(\omega)^p]\}$	127
	Bibliographie	131

Notations

Notations générales

c_f	: célérité du son dans le fluide au repos
$d\mathbf{x}$: $= dx_1 dx_2 dx_3$
\mathbf{g}^{surf}	: champ de forces surfaciques sur Γ_s
\mathbf{g}^{vol}	: champ de forces volumiques dans Ω_s
m_f	: nombre de modes de cavité acoustique à parois rigides
m_s	: nombre de modes élastiques de la structure
\mathfrak{n}_f	: nombre de degrés de liberté de la cavité acoustique
\mathbf{n}^f	: normale extérieure au fluide
n_r	: nombre de réalisations aléatoires
\mathfrak{n}_s	: nombre de degrés de liberté de la structure
\mathbf{n}_s	: normale extérieur à la structure
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$: déplacement de la structure
\mathbf{x}	: point de \mathbb{R}^3
$[A]$: matrice élément finis du modèle moyen
$[\mathcal{A}]$: matrice élément finis du modèle moyen réduit
$[\mathbf{A}]$: matrice aléatoire du modèle stochastique réduit
\mathbb{B}	: intervalle de fréquences de l'étude
E	: Espérance mathématique d'une variable aléatoire
δ_{ij}	: symbole de Kronecker, $= 1$ si $i = j$, $= 0$ si $i \neq j$
ε	: tenseur des déformations
ω	: fréquence angulaire
ρ	: masse volumique du fluide au repos
σ	: tenseur des contraintes
Γ_0	: partie de Γ_s où la structure est fixée
Γ_f	: frontière entre la cavité acoustique et la structure
Γ_s	: frontière entre la structure et l'extérieur
Ω_f	: domaine de la cavité acoustique
Ω_s	: domaine de la structure
$\mathbb{1}_B(\mathbf{x})$: fonction indicatrice de B , $= 1$ si $\mathbf{x} \in B$, $= 0$ si $\mathbf{x} \notin B$
$\ [A]\ _F$: Norme de Frobenius, $= (\text{tr}([A][A]^T))^{1/2}$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$: Produit scalaire euclidien pour \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbb{R}^n , $= \sum_{i=1}^n u_i v_i$

1

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte de la recherche	2
1.2	Positionnement de la recherche	5
1.3	Objectifs de la recherche	9
1.4	Stratégie de la recherche	10
1.5	Apports de la thèse	11
1.6	Plan de la thèse	12

L'objectif de ce chapitre est l'introduction du sujet de la thèse. dans un premier temps on aborde le contexte de la recherche, puis le positionnement du problème d'un point de vue scientifique et industriel. Ensuite, on explique les objectifs de la recherche et la stratégie du travail. Dans la quatrième partie du chapitre on expose les apports scientifiques et industriels de la thèse. Finalement, dans la dernière partie du chapitre on donne le plan de la thèse pour les chapitres qui suivent.

1.1 Contexte de la recherche

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'analyse vibroacoustique linéaire des structures complexes.

L'application est effectuée pour des structures automobiles, mais les méthodes proposées sont applicables pour les structures complexes de manière générale. On entend ici par structures complexes des structures mécaniques résultant de l'assemblage de nombreux composants souvent très hétérogènes et géométriquement irréguliers.

Les spécifications acoustiques à l'intérieur de l'habitacle d'un véhicule est devenue un critère de sélection important pour les acheteurs d'automobile. L'importance de ce critère est grandissante et les constructeurs y prêtent de plus en plus d'attention. D'autre part, des critères de conception, tels que la baisse du niveau de consommation de véhicules, et donc la réduction de la masse totale, et la réduction des coûts et du temps de conception, viennent s'ajouter aux critères de dimensionnement vibroacoustique des véhicules en imposant un nombre important de contraintes. En conséquence, les constructeurs automobiles doivent améliorer en permanence le processus de conception vibroacoustique des véhicules dans le but d'atteindre des niveaux sonores de plus en plus bas tout en respectant les autres spécifications qui leur ont imposés.

Dans l'industrie automobile le problème vibroacoustique d'une structure automobile consiste à étudier les réponses vibratoire et acoustique à des excitations extérieures engendrées par des composants en vibration comme le moteur ou la suspension du véhicule. L'un des outils d'analyse du comportement de tels systèmes est l'étude des fonctions de réponse en fréquence (FRF). On s'intéresse en effet généralement à l'étude du niveau sonore par bande de fréquence à l'intérieur de l'habitacle en des positions correspondant aux oreilles du conducteur et des passagers (réponse vibroacoustique) ou bien au spectre de réponse vibratoire en des points sur la structure du véhicule (réponse vibratoire).

Le dimensionnement vibroacoustique dans l'industrie automobile, comme c'est le cas dans beaucoup d'autres industries, s'appuie aujourd'hui de manière intensive sur les simulations numériques. Ces modèles numériques vibroacoustiques pour les bandes basses fréquences (BF) et moyennes fréquences (MF) sont exclusivement des modèles éléments finis (EF) qui sont les seuls permettant de modéliser la complexité des véhicules. L'utilisation des simulations numériques vise, d'une part, à répondre à la contrainte de réduction du temps de conception et d'autre part, à réduire l'utilisation de prototypes, coûteux et dont la représentativité est incertaine. Tenant compte des contraintes expliquées plus haut, les

modèles numériques vibroacoustiques sont devenus très complexes et de grande taille, nécessitant des moyens informatiques conséquents et des méthodes d'analyse adaptées.

L'analyse vibroacoustique d'une structure dont la complexité est celle d'une structure automobile est un problème très difficile non seulement à cause de la complexité de la structure elle-même, - due à sa non homogénéité et au nombre très important des degrés de liberté (DDL) l'existence d'une, mais aussi à cause de la multitude de sources acoustiques et vibratoires à traiter. Cette multitude des sources implique qu'un nombre considérable de fonctions de réponse en fréquence (FRF) doit être étudié. La figure 1.1 montre les modèles EF de la structure et de la structure d'un véhicule couplée avec sa cavité acoustique interne..

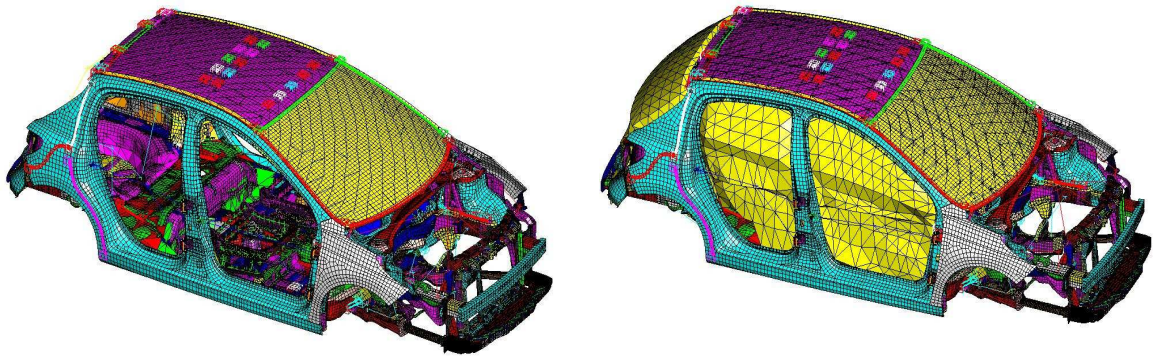


FIGURE 1.1 – Figure de gauche : Modèle éléments finis d'une structure automobile ayant environ un million de DDL. Figure de droite : Modèle éléments finis de la structure couplée avec sa cavité acoustique interne.

Les prévisions résultant des simulations numériques sont encore loin d'être parfaites et présentent souvent des écarts avec les résultats expérimentaux.

Ces écarts proviennent d'une part, de l'existence d'incertitudes, - non seulement dans les modèles numériques eux-mêmes -, mais aussi dans la construction de ces modèles et d'autre part, de la variabilité introduite par le processus industriel de fabrication des véhicules ainsi que par la diversité des définitions associées à un même produit automobile (motorisation, options etc.). Les conditions de fonctionnement (par exemple nombre des passagers) sont associées à un facteur de variabilité des résultats expérimentaux et qui augmentent la difficulté des analyses vibroacoustiques. Enfin cette diversité de configuration et de fonctionnement n'est prise en compte qu'au travers un modèle numérique unique de l'automobile étudiée, afin de limiter le coût de construction des modèles, déjà très élevé.

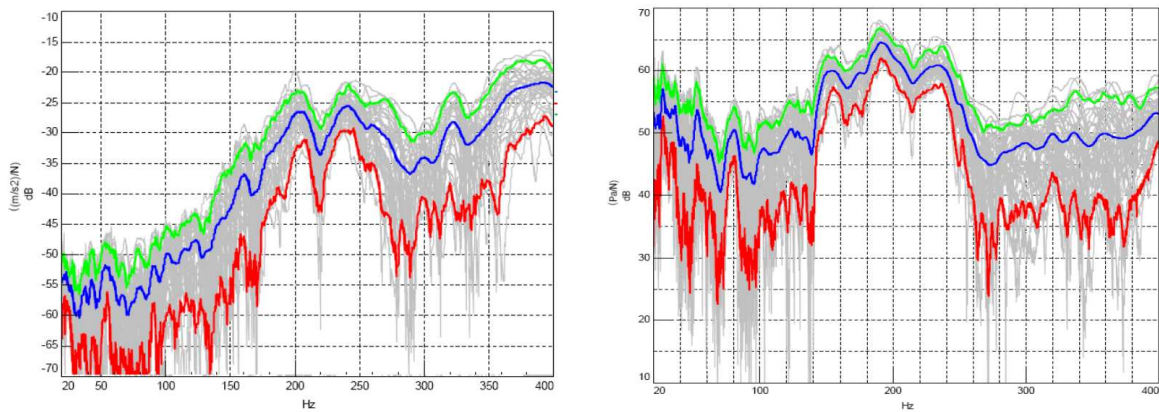


FIGURE 1.2 – Figure de gauche : dispersion des mesures sur 40 véhicules d’un même type pour le module d’une FRF vibratoire entre la cale support moteur droit et la plancher avant gauche. Figure de droite : dispersion des mesures sur le même 40 véhicules pour le module d’une FRF vibroacoustique par réciprocité entre la cale support moteur droit et l’oreille conducteur. Ligne grasse supérieure : 95 % des mesures. Ligne grasse inférieure : 5 % des mesures. Ligne grasse du milieu : La moyenne. Nuage des lignes fines : 40 mesures de la FRF.

Toutes les sources d’incertitudes et de variabilité citées précédemment contribuent à agrandir l’écart entre prévisions numériques et résultats expérimentaux et donc à augmenter la complexité de l’analyse vibroacoustique. Pour mieux comprendre ces écarts, la figure 1.2 montre la dispersion des mesures effectuées sur 40 véhicules d’un même type pour le module d’une FRF vibratoire (Figure de gauche) et d’une FRF vibroacoustique (Figure de droite).

Ainsi, pour faire face à la complexité du problème les industriels souhaitent développer des modèles numériques plus simples tout en conservant un niveau acceptable de précision et en essayant de réduire l’écart entre les simulations numériques et les mesures expérimentales.

Il est pourtant évident qu’il existera toujours un écart entre prévisions et mesures. Aussi, la tendance actuelle est le développement de modèles probabilistes pour prendre en compte les incertitudes dans les modèles et les variabilités du véhicule. L’objectif est de prévoir ces écarts dans un cadre probabiliste et de rendre ainsi plus robuste les prévisions du modèle numérique vis-à-vis des incertitudes .

Le travail présenté dans ce rapport propose de traiter le problème de complexité des modèles numériques vibroacoustiques des véhicules dans le domaine des BF et des MF

aussi bien au niveau de la complexité de l'analyse qu'au niveau de la robustesse vis-à-vis des incertitudes.

1.2 Positionnement de la recherche

Le problème vibroacoustique d'un véhicule tel qu'il est traité aujourd'hui par l'industrie automobile repose sur des méthodes efficaces basées sur la méthode des EF. Cependant, l'évolution des contraintes imposées par le processus de conception ainsi que l'augmentation de l'importance du confort acoustique et vibratoire de véhicules font que la difficulté de l'analyse vibroacoustique ne cesse de grandir. La recherche d'une amélioration de la qualité de prévision des modèles numériques vis-à-vis de la réalité physique (associée à la disparition des essais physiques) augmente la difficulté du problème.

On peut dire de manière générale que les causes de la difficulté associée à l'analyse vibroacoustique des structures automobile sont réunies dans deux catégories majeures, **(1)** la multitude des paramètres d'entrée (sources sonores et vibratoires) et de sortie (nombre important de DDL) ainsi que la complexité des structures étudiées, **(2)** l'écart entre prévisions numériques et mesures expérimentales. Aujourd'hui, il existe plusieurs méthodes pour traiter ensemble ou séparément ces deux catégories de difficultés.

En ce qui concerne l'analyse vibroacoustique des systèmes complexes dans le domaine des BF et du bas des MF, la méthode actuelle la plus performante consiste à résoudre à l'aide des méthodes numériques les problèmes aux limites issus des modélisation vibroacoustique et en utilisant le plus souvent des méthodes de réduction modale (voir [Ohayon et Soize \[85\]](#), [Morand et Ohayon \[84\]](#), [Zienkiewicz et Taylor \[126\]](#), [Lesueur \[71\]](#) et [Morand et Ohayon \[84\]](#)).

Pour prendre en compte les incertitudes, il existe des méthodes dites non probabilistes (comme celle basée sur l'utilisation des ensembles flous ou encore la méthode des intervalles) et les méthodes dites probabilistes. On s'intéresse ici aux méthodes probabilistes dont le cadre est le mieux adapté à la modélisation des incertitude. L'approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les paramètres du modèle a été développée depuis une trentaine d'années. Elle prend en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle vibroacoustique moyen mais ne permet pas de prendre en compte les incertitudes de modélisation. Elle ne traite, donc, qu'une partie du problème des prévisions numériques car, les incertitudes ne sont pas associées qu'aux paramètres du modèle, comme nous

l'avons expliqué plus haut.

Une deuxième approche est l'approche probabiliste dite non paramétrique des incertitudes de modélisation et des paramètres introduite récemment dans le cadre de la dynamique des structures (voir [Soize \[107\] \[108\] \[109\] \[114\] \[112\]](#)). Cette approche considère les matrices du modèle moyen comme des matrices aléatoires et elle prend en compte non seulement les incertitudes sur les paramètres du modèle mais aussi les incertitudes de modélisation. L'approche probabiliste non paramétrique a déjà été appliquée dans le domaine de l'industrie automobile (voir [Durand \[18\]](#), [Durand *et al.* \[23\]](#), [Fernandez \[25\]](#) et [Fernandez *et al.* \[31\]](#)).

La question de la simplification de l'analyse vibroacoustique des structures a été traité d'une manière approfondie. On trouve dans la littérature plusieurs méthodes consacrées à ce sujet. La catégorie de méthodes la plus répondue est celle des méthodes énergétiques ou énergétiques statistiques. Le travail présenté dans ce rapport se situe dans cette catégorie. On trouve parmi ces méthodes, entre autres, les méthodes tournant autour de la diffusion de l'énergie ([Ichchou *et al.* \[46\]](#), [Ichchou et Jezequel \[47\]](#), [Lase *et al.* \[70\]](#), [Mace et Shorter \[75\]](#), [Shankar et Keane \[101\]](#), [Lase *et al.* \[70\]](#) [Bouthier et Bernhard \[4\] \[5\]](#)) et [Wester et Mace \[121\] \[123\] \[122\]](#), une approche modale énergétique ([Ji *et al.* \[50\] \[51\] \[52\]](#)), une méthode de raideur dynamique directe [Langley \[68\]](#), une méthode d'éléments finis énergétiques [Zhao et Vlahopoulos \[125\]](#), une méthode de réduction de modèle basée sur l'utilisation de l'opérateur d'énergie [Soize \[105\] \[104\]\[106\]](#) [Ohayon et Soize \[85\]](#), une méthode d'énergie locale et ses dérivation [Hardy *et al.* \[44\]](#) [Sui *et al.* \[118\]](#) et des méthodes de synthèse modale telles que [Hinke *et al.* \[45\]](#). Néanmoins ces méthodes ne sont pas toutes adaptées à des structures hétérogènes telles que les structures automobiles. Ces méthodes peuvent dans certain cas être couplées avec la méthode des éléments finis pour crée des méthodes hybrides qui sont adaptées pour l'analyse vibroacoustique dans la partie haute des MF, et pour les hautes fréquences. On trouve également des méthodes qui utilise une approche modale et stochastique comme, par exemple, la méthode locale modale/perturbationnelle présentée par [Mace et Shorter \[76\]](#). D'autre méthodes énergétiques peuvent se trouver sous les références [Guyader *et al.* \[43\]](#) et [Girard et Defosse \[40\]](#).

Les méthodes énergétiques couplées avec des approches statistiques sont les méthodes qui ont un lien le plus directe avec le travail présentée dans cette thèse. Elles permettent en particulier de s'affranchir des équations locales de la dynamique des structures et permettent donc d'aborder la question de l'hétérogénéité. La méthodes la plus répandue est la méthode statistique énergétique (SEA) [Lyon et Maidanik \[74\]](#) [Lyon \[72\] \[73\]](#). Depuis

une vingtaine d'années la SEA est utilisée d'une manière assez répandue pour l'analyse vibroacoustique des structures. Plusieurs dérivations, modifications, et extension liées à la "SEA" ont été développés. Parmi les dérivations on trouve, entre autres, l'analyse EF par flux de puissance introduite par [D.J.Nefske et Sung \[16\]](#). Une étude de cette méthode a été effectuée par [Carcattera et Sestieri \[8\]](#). Les méthodes de flux de puissance ont été utilisées par [Gibbs et Gilford \[39\]](#) pour l'évaluation de la transmission acoustique dans les bâtiments. On trouve également d'autres dérivations et méthodes liées à la "SEA" dans [Cotoni *et al.* \[10\]](#), [Langley et Cordioli \[67\]](#), [Langley \[65\]](#), [Maxit et Guyader \[78\] \[79\] \[80\]](#), [Langley et Bremner \[66\]](#), [Langley \[68\]](#), [Langley et Brown \[69\]](#), [Pradlwarter et Schuëller \[94\]](#), [Shorter et Langley dans \[103\]](#). On peut également trouver des applications industrielle de la SEA comme par exemple dans la référence [Gagliardini et Borello \[34\]](#) où la "SEA" est utilisée pour la partition par zone de la structure d'un véhicule. Une autre application de la partition par zone par la "SEA" est introduite par [Totaro et Guyader dans \[119\]](#)

L'efficacité de la "SEA" et de ses dérivations pour le domaine des hautes fréquences est incontestable. Pour les domaines des BF et des MF (domaines concernés par le présent travail), à causes des conditions de validité et de limitations de la "SEA", celle-ci n'est pas applicable. De plus, la "SEA" demande des base de données expérimentales -physiques ou numériques- importantes, ce qui représente un des inconvénients de cette méthode.

Une autre catégorie des méthodes d'analyse vibroacoustique est celle regroupant toutes les méthodes utilisant la mobilité d'entrée pour simplifier l'analyse vibroacoustique des système complexes. Ces méthodes sont pour la plupart des méthodes énergétiques, mais ils convient de les traiter d'une manière indépendante étant donnée leur relation directe avec l'approche énergétique présentée dans ce travail. La référence [Gardonio et Brennan \[37\]](#) présente un historique de l'utilisation des techniques de mobilité dans le domaine de la dynamique de structures. On trouve également un travail portant sur cette catégorie de méthodes dans la référence [Ryu \[99\]](#). Dans ce travail on trouve une étude bibliographique de différents types de mobilités, mécaniques, acoustiques, et énergétiques. On trouve parmi les méthodes de mobilité la méthode de flux de la puissance avec mobilité présentée par [Cuschieri \[13\]](#). [R. S. Ming et Norton \[95\]](#) ont présentée une extension de cette méthode pour calculer la puissance injectée et la puissance transmise entre deux coques couplées.

La notion de mobilité mécanique a été présentée par [Firestone \[33\]](#) dès 1933. Elle a été utilisée dans beaucoup de travaux comme, par exemple dans les années 80, [Petersson et Heckel \[92\]](#), [Petersson \[90\]](#) et [\[91\]](#) sur les mobilités ponctuelles et [Petersson \[89\]](#) et Cu-

schieri [12] sur la mobilité du moment. Petersson et Plunt [88] ont étudié les assemblages et ont défini la mobilité effective totale. Moorhouse et Gibbs [83] ont étudié les mobilités des poutres et des plaques. Mondot et Petersson [81] ont utilisé les mobilités des sources pour étudier le flux de puissance par une approche qui a été poursuivie par Ulford et Gibbs [120] dans le cas du couplage multi points. Dans le cadre de l'étude du flux de puissance on trouve aussi le travail de Koh et White [62] pour le flux de puissance à travers des joints ou des connexions standards multi-dimensionnelles.

En ce qui concerne les méthodes de mobilité acoustique elles ont été présentées par Guyader *et al.* [42] et appliquées au cas d'un double paroi. La mobilité acoustique est définie dans ce travail comme le rapport entre la vitesse moyenne sur un "pavé" et la pression sur un autre "pavé". Cette définition de la mobilité est différente de celle utilisée dans le travail présenté dans ce rapport qui est définie comme le rapport entre la pression en un point et la source acoustique en débit volumique, au même point pour la mobilité du point d'entrée et du point de sortie, et en un autre point pour la mobilité du transfert.

Les mobilités ont été utilisées par Koss pour introduire le concept des Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) pour la puissance et la théorie de connectivité Koss [63] Xu et Koss [124] Koss [64] Orefice [86].

Le concept de la mobilité énergétique introduit dans le travail de thèse de Ryu [99] et présenté dans la référence Orefice *et al.* [87] est très proche du concept de la FRF de la puissance utilisée dans ce travail. On trouve également des concepts similaires dans le travail de Finnveden [32] et dans le travail de Manning [77]. La différence majeure entre ces notions et la notion de la FRF de la puissance est qu'au lieu d'utiliser un moyennage fréquentiel sur une bande étroite de fréquence, on introduit un moyennage statistique pour chaque valeur de la fréquence fixée en bande fine. Un concept similaire, à celle de la mobilité énergétique et de la FRF de la puissance, a été présenté par Moorhouse [82] et a été appelé "matrice de mobilité adimensionnelle". Ce concept utilise une moyenne géométrique en fréquence pour calculer une telle matrice.

On peut citer aussi et d'une manière générale, d'autres travaux concernant l'analyse vibroacoustique qui utilisent les techniques de la mobilité comme ceux de Jianxin *et al.* [53], Su *et al.* [116], Su et Moorhouse [117], Bobrovnitskii et Korotkov [2] [3], Rook et Singh [97] et Kim et Singh [61]. Tous ces travaux visent à améliorer la compréhension et à simplifier l'analyse et la caractérisation vibroacoustique des systèmes complexes.

Finalement on présente dans ce travail une méthode de détermination d'une partition optimale par zone de la structure permettant de définir des , qui n'a jusqu'à présent été abordé que dans [Gagliardini et Borello \[34\]](#) et [Totaro et Guyader \[119\]](#) pour le domain HF et donc pas pour les domaines BF et MF.

Dans ce mémoire, nous aurions pu utiliser la terminologie "sous-structuration" pour dénommer une "partition par zone". Toutefois nous avons préféré conserver cette dernière car la terminologie "sous-structuration" évoque, dans le cadre de la dynamique des structures et de la vibroacoustique, des méthodes spécifiques de formulation et de résolution qui ne sont pas utilisées ici pour la partition par zone.

La méthode de partition par zone est basée sur l'utilisation d'un modèle numérique vibroacoustique du système vibroacoustique entier, enrichi d'un modèle probabiliste pour lui conférer un domaine de validité en BF et en MF. Les solutions aléatoires de ce modèle vibroacoustique stochastique sont traitées dans le cas d'une méthode énergétique statistique pour laquelle le moyennage fréquentiel est remplacée par un moyennage statistique d'ensemble suivant l'axe statistique. La méthode que nous proposons diffère donc de la SEA, des méthodes de flux d'énergie et de transfert de puissance ainsi que des méthodes de sous-structuration existantes comme les méthodes de Craig-Bampton et ces dérivations [Craig et Bampton \[11\]](#) et [Rixen \[96\]](#).

1.3 Objectifs de la recherche

Le travail présenté dans cette thèse a pour but la simplification de l'analyse vibroacoustique des structures complexes, plus spécifiquement, des structures automobiles. On souhaite traiter à la fois la question de la complexité structurale et le problème d'écart entre prévisions numériques et résultats expérimentaux.

Pour cela on propose de construire à partir du modèle numérique stochastique vibroacoustique fin (par exemple pour un modèle de structure ayant plusieurs million de DDL) un modèle stochastique simplifié par zone spatiale de la structure et de la cavité acoustique (par exemple la structure ci-dessus étant représentée par une centaine de zones spatiales et la cavité acoustique par une zone). L'état vibratoire "aléatoire" de chaque zone en une fréquence fixée dans la bande fine est représentée par son énergie aléatoire (mécanique ou acoustique), la zone spatiale étant définie afin que tous les points de la zone aient ce même état. La partition est calculée pour que, pour chaque fréquence fixée dans une bande

fine, la FRF moyenne (moyenne statistique) de la puissance entre deux zones quelconques (incluant la zone cavité acoustique) permettent de calculer la FRF moyenne (moyenne statistique) entre un point quelconque de la première zone et un point quelconque de la seconde zone, toujours pour chaque fréquence fixée de la bande fine.

Cette objectif permet de construire, à partir du modèle complexe complet, un modèle simplifié dont on connaît le degré d'approximation par rapport à la solution du modèle non simplifié, valable pour le domaine de validité du modèle considéré (généralement BF et MF).

A travers ces objectifs, cette recherche propose de participer à la simplification du problème vibroacoustique en proposant un modèle simplifié et robuste vis-à-vis du processus de conception (modèle partitionné par zone) et vis-à-vis des incertitudes (modèle simplifié défini à l'aide de paramètres peu sensibles aux incertitudes).

1.4 Stratégie de la recherche

Pour atteindre les objectifs présentés au paragraphe 1.3 la stratégie suivante a été suivie.

1.4.0.1 Construction du modèle vibroacoustique moyen et réduction de modèle

Pour la construction du modèle vibroacoustique moyen on utilise les méthodes numériques existantes qui sont utilisées par l'industrie. Dans ces méthodes, le problème vibroacoustique est formulé dans le domaine fréquentiel et en terme de champ de déplacement pour la structure et de champ de pression pour la cavité acoustique (Pierce [93] Fahy [24] Junger et Feit [54] Morand et Ohayon [84] Ohayon et Soize [85] Zienkiewicz et Taylor [126]). Une réduction de modèle sera effectuée en utilisant la projection du modèle moyen sur la base modale de la structure (sans les modes de corps rigides, car la structure qui est attachée ne peut pas avoir de déplacement de corps rigide) et sur la base modale de la cavité acoustique interne (avec le mode de pression nulle, car la cavité acoustique est supposée fermée).

1.4.0.2 Utilisation d'un modèle probabiliste

La formulation de la méthode sera établie en se basant sur un modèle probabiliste afin de prendre en compte les incertitudes de paramètres du modèle numérique fin et les incertitude de modélisation. Pour ce faire le modèle probabiliste est construit en utilisant

l'approche non paramétrique mentionnée plus haut en paragraphe 1.2, car cette approche est la seule permettant la prise en compte de tous les types d'incertitudes considérés. Les paramètres de l'approche énergétique seront obtenus à partir des paramètres aléatoires du modèle probabiliste.

1.4.0.3 Moyennage statistique

Pour la construction du modèle vibroacoustique énergétique, on utilisera, pour chaque valeur de la fréquence fixée dans la bande fine, un moyennage statistique sur la famille de modèles numériques stochastiques (grâce à l'utilisation du modèle probabiliste) plutôt que d'utiliser un moyennage fréquentiel par bande étroite comme le font les méthodes énergétiques ou statistiques existantes et présentées en paragraphe 1.2.

1.4.0.4 Utilisation d'une approche énergétique

Comme nous l'avons expliqué, le modèle simplifié est construit dans le cadre d'une approche statistique et énergétique. Une nouvelle représentation du modèle numérique du système vibroacoustique sera établie à l'aide d'une modélisation stochastique énergétique simplifiée pour laquelle nous allons également chercher, à définir des nouveaux paramètres pour la représentation des sources acoustiques et vibratoires.

1.5 Apports de la thèse

Ce travail a été mené en collaboration avec l'industrie automobile (PSA Peugeot Citroën). Il présente outre des apports scientifiques, des apports pour l'industrie.

Apports scientifiques Ce travail propose une nouvelle modélisation simplifiée du problème vibroacoustique pour le domaine BF et MF pour les systèmes vibroacoustiques très complexes. Pour cela une nouvelle classe de modèles vibroacoustiques simplifiés, construite à partir d'un ensemble de modèles éléments finis fin, est proposée. En mettant en avant l'hétérogénéité globale des champs acoustiques et vibratoires et l'homogénéité locale que l'on peut observer sur le système, ces modèles simplifiés permettent d'aborder sous un autre angle le problème de l'analyse vibroacoustique en BF et MF. Ces modèles permettent également de partitionner le système vibroacoustique en sous-domaines ayant un sens pour la conception, l'analyse et l'optimisation. La construction de tels modèles simplifiés permet de disposer d'un ensemble d'outils d'analyse robuste en vibroacoustique,

dont une méthode de partition par zone. Ces outils sont adaptés à l'étude du comportement vibroacoustique d'un ensemble de systèmes industriels complexes. Finalement une caractérisation adaptée des sources acoustiques et vibratoires est associée à la nouvelle modélisation.

Apports pour l'industrie Au niveau industriel, les modèles simplifiés permettent de distinguer le comportement vibroacoustique des différentes zones d'un véhicule, la partition calculée permettant de répondre à la problématique de l'ingénierie simultanée. L'ensemble des modèles construits sont alors robustes, non seulement vis-à-vis du processus de conception (grâce à la partition par zone), mais aussi vis-à-vis des incertitudes de toute sorte (grâce à l'utilisation d'un modèle probabiliste). Une série d'indicateurs, issus de la méthode de partition par zone, permet de guider le processus de conception et donc de participer à l'amélioration de sa robustesse. La simplification des outils d'analyse permettra la réduction du temps et des coûts pour le dimensionnement des véhicules en vibroacoustique.

1.6 Plan de la thèse

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire peuvent être déclinés en trois parties : **(1)** Modélisation vibroacoustique stochastique **(2)** Développement et validation de l'approche énergétique. **(3)** Développement et validation de la méthode de partition par zone. Ces trois parties sont structurées en chapitre de la manière suivante :

1. Modélisation vibroacoustique stochastique.

Chapitre 2 Présentation du problème vibroacoustique.

Dans ce chapitre on introduit le modèle moyen du système vibroacoustique. Le problème est traité pour la structure, pour la cavité acoustique interne séparément, puis pour le système vibroacoustique couplé. Pour chacun des trois problèmes, on introduit le problème aux limites moyen, puis sa formulation faible et finalement sa discrétisation par la méthode des EF afin d'obtenir les équations matricielles du système vibroacoustique moyen. En fin de chapitre, on présente le modèle matriciel réduit moyen.

Chapitre 3 Modèle vibroacoustique réduit stochastique modélisant les incertitudes.

Ce chapitre est dédié à la construction du modèle vibroacoustique stochastique. Ce modèle est construit en utilisant l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation et des incertitudes sur les paramètres du modèle. Après avoir rappelé la méthodologie générale, on développe le modèle probabiliste et on construit les lois de probabilités des matrices aléatoires.

Chapitre 4 Résolution des équations aléatoires.

Dans ce chapitre, on aborde la résolution des équations aléatoires du système vibroacoustique. Les équations sont résolues par la méthode de Monte Carlo. On présente la méthode et sa mise en oeuvre puis les variables observées. La fin du chapitre est consacrée à l'analyse de convergence de la solution et au traitement statistique des résultats.

2. Développement et validation du modèle vibroacoustique énergétique.

Chapitre 5 Construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié.

Dans ce chapitre, on développe l'approche énergétique basé sur le modèle vibroacoustique réduit stochastique. Dans un premier temps, le principe général et l'intérêt de l'approche sont expliqués. Puis on introduit les paramètres propres à la méthode énergétique et le nouveau modèle vibroacoustique énergétique sont présentées.

Chapitre 6 Validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique

Dans un premier temps on mène une analyse vibroacoustique complète avec l'approche énergétique pour un véhicule automobile afin de montrer l'existence d'une partition par zone pour laquelle il y a une certaine homogénéité spatiale dans le comportement vibroacoustique pour chaque zone de la partition. De plus, cette analyse menée sur une système vibroacoustique complexe donne une première validation de la méthode énergétique proposée.

3. Construction et validation du modèle vibroacoustique énergétique simplifié.

Chapitre 7 Modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Après avoir montré l'existence d'une partition par zone, ce chapitre est consacré à la construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié. On introduit le

critère qui décrit une partition par zone. La méthodologie de partition par zone et son critère pour l'ingénierie sont alors développés.

Chapitre 8 Validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Le dernier chapitre présente une validation complète de la méthode de partition par zone. L'application numérique est effectuée sur le même modèle que celui utilisé pour la première validation. On valide la méthode de partition par zone pour la structure du véhicule et pour la cavité acoustique interne.

On présente en annexe des compléments de développement et de résultats.

2

Présentation du problème vibroacoustique

Sommaire

2.1	Présentation du modèle moyen	16
2.2	Equations du modèle moyen pour la structure	17
2.3	Equations du modèle moyen pour la cavité acoustique	20
2.4	Equations du modèle moyen pour le système vibroacoustique couplé	22
2.5	Conclusion	26

L'objectif de ce chapitre est de présenter le modèle moyen du système vibroacoustique et de donner les équations discrétisées du problème.

La formulation du problème est abordée en trois parties, pour la structure, pour la cavité acoustique, puis pour le système vibroacoustique couplé.

Pour chaque partie on présente le problème aux limites, sa formulation faible, puis sa discrétisation par la méthode des EF.

La réduction du modèle moyen par projection sur les bases modales, de la cavité et de la structure, est expliquée en fin du chapitre.

2.1 Présentation du modèle moyen

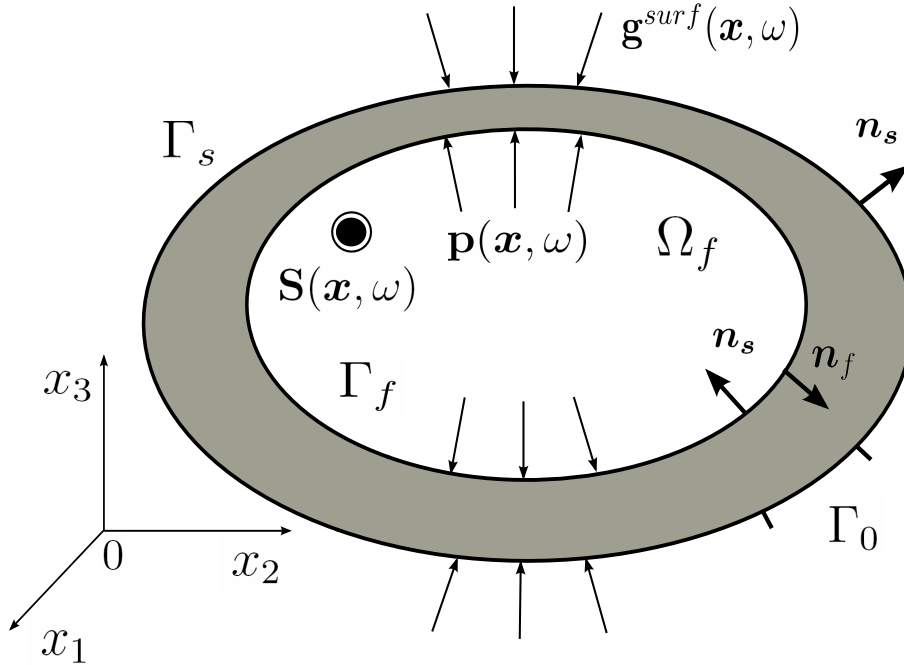


FIGURE 2.1 – Présentation schématique du système vibroacoustique.

Le problème vibroacoustique consiste en une structure tridimensionnelle couplée à une cavité acoustique interne.

Le système est modélisé par un domaine Ω_s représentant la structure constituée d'un matériau viscoélastique à mémoire instantanée et par un domaine Ω_f contenant un milieu acoustique modélisé par un fluide compressible parfait dissipatif homogène (comme l'air par exemple pour le domaine de fréquence et d'amplitude étudié). Le bord du domaine Ω_s est constitué de la frontière Γ_s en contact avec l'extérieur et de la frontière Γ_f constituant l'interface de couplage entre la structure et la cavité acoustique interne.

Le système est décrit dans le repère cartésien (o, x_1, x_2, x_3) . La normale extérieure à Ω_s , est notée $\mathbf{n}_s = (n_{s1}, n_{s2}, n_{s3})$ et extérieure à Ω_f est notée $\mathbf{n}_f = (n_{f1}, n_{f2}, n_{f3})$. La normale à Γ_f extérieure à Ω_s est \mathbf{n}_s .

Le champ de déplacement \mathbf{u} en chaque point dans du domaine Ω_s et à une fréquence ω donnée est $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = (u_1(\mathbf{x}, \omega), u_2(\mathbf{x}, \omega), u_3(\mathbf{x}, \omega))$. La structure est bloquée sur une

partie de la frontière Γ_0 empêchant ainsi les déplacement de corps rigide de la structure (voir figure 2.1).

Afin d'obtenir les équations discrétisées du système vibroacoustique couplée, nous devons dans un premier temps faire la modélisation de chacune des deux partie de ce système, à savoir la structure et la cavité acoustique.

L'étude est menée dans le domaine fréquentiel sur une plage de fréquences \mathbb{B} définie par $\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}]$ avec $0 < \omega_{min} < \omega_{max}$ où la transformée de Fourier d'une fonction u est définie par $u(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(t) dt$ et sa transformée inverse est définie par $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} u(\omega) d\omega$.

2.2 Equations du modèle moyen pour la structure

Le système est sollicité par un champ de force surfacique \mathbf{g}^{surf} et par un champs de force volumique \mathbf{g}^{vol} .

Le problème aux limites de la structure non couplée avec la cavité acoustique est détaillé dans [Ohayon et Soize \[85\]](#) et [Dautray et Lions \[14\]](#).

2.2.1 Problème aux limites

En tenant compte des forces volumiques \mathbf{g}^{vol} et des forces surfaciques \mathbf{g}^{surf} appliquées respectivement dans le domaine Ω_s et sur Γ_s , l'équation linéarisée autour d'une configuration d'équilibre statique supposée non précontrainte, s'écrit, pour tout ω dans \mathbb{B} et pour tout $j = 1, 2, 3$,

$$-\omega^2 \rho_s(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, \omega) - \sigma_{jk,k} = g_j^{vol} \quad \text{dans } \Omega_s \quad . \quad (2-1)$$

où $\rho(\mathbf{x})$ est la masse volumique de la structure et σ_{jk} le tenseur des contraintes.

Les Conditions aux limites s'écrivent

$$u_j = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad , \quad (2-2)$$

$$\sigma_{jk} n_{sk} = g_j^{surf} \quad \text{sur } \Gamma_s \quad . \quad (2-3)$$

$$\sigma_{jk} n_{sk} = -p n_{sj} = p n_{fj} \quad \text{sur } \Gamma_f \quad . \quad (2-4)$$

CHAPITRE 2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME VIBROACOUSTIQUE

La sommation sur les indices muets répétés est utilisée dans les équations précédentes avec $\sigma_{jk,k} = \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}$.

La loi de comportement du matériau viscoélastique linéaire à mémoire instantané s'écrit,

$$\sigma_{jk} = a_{jklm}(\mathbf{x}) \varepsilon_{lm}(\mathbf{x}) + i\omega b_{jklm}(\mathbf{x}) \varepsilon_{lm}(\mathbf{x}) \quad , \quad (2-5)$$

où ε_{lm} est le tenseur de déformations linéarisées défini par $\varepsilon_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)$ dans laquelle les coefficients a_{jklm} et b_{jklm} sont des coefficients indépendants de la fréquence (matériau à mémoire instantanée) et possédant les propriétés habituelles de symétrie et de positivité.

2.2.2 Formulation faible du problème aux limites

Soit $\mathcal{C}_{ad,s}$ l'espace des champs des déplacements admissibles constitué des fonctions définies sur Ω_s à valeurs dans \mathbb{C}^3 , suffisamment différentiables tel que,

$$\mathcal{C}_{ad,s} = \{ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega_s \rightarrow \mathbb{C}^3, \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \} \quad . \quad (2-6)$$

Soit $\delta \mathbf{u}$ une fonction test de l'ensemble $\mathcal{C}_{ad,s}$.

En multipliant l'équation d'équilibre (2-1) par cette fonction test puis en intégrant sur le domaine Ω_s , on obtient,

$$\int_{\Omega_s} -\omega^2 \rho_s(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, \omega) \overline{\delta u_j} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \sigma_{jk,k} \overline{\delta u_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s} g_j^{vol} \overline{\delta u_j} d\mathbf{x} \quad , \quad (2-7)$$

où la barre surlignée désigne la conjugaison des nombres complexes. En appliquant la formule de Green à la deuxième intégrale du terme de gauche de l'équation (2-7), et en tenant compte de la symétrie du tenseur de contraintes $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$, de la valeur nulle de la fonction test sur Γ_0 : $\delta \mathbf{u} = 0$ sur Γ_0 , ainsi que des conditions aux limites sur Γ_s et Γ_f définies par les équations (2-3) et (2-4), l'équation (2-7) s'écrit,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} -\omega^2 \rho_s(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, \omega) \overline{\delta u_j} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}(\overline{\delta \mathbf{u}}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_f} p \overline{\delta u_j} n_{sj} ds(\mathbf{x}) \\ = \int_{\Gamma_s} g_j^{surf} \overline{\delta u_j} ds(\mathbf{x}) + \int_{\Omega_s} g_j^{vol} \overline{\delta u_j} d\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (2-8)$$

On introduit les formes sesquilinéaires de masse, d'amortissement et de raideur de la structure définies sur $\mathcal{C}_{ad,s} \times \mathcal{C}_{ad,s}$, tel que,

$$m_s(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho_s(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \overline{\delta u_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad , \quad (2-9)$$

$$d_s(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} b_{jklm}(\mathbf{x}) \varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) \varepsilon_{jk}(\overline{\delta \mathbf{u}}) d\mathbf{x} \quad , \quad (2-10)$$

$$k_s(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} a_{jklm}(\mathbf{x}) \varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) \varepsilon_{jk}(\overline{\delta \mathbf{u}}) d\mathbf{x} \quad . \quad (2-11)$$

2.2. EQUATIONS DU MODÈLE MOYEN POUR LA STRUCTURE

Ces formes sesquilinéaires vérifient les propriétés de symétrie hermitienne, $o_s(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \overline{o_s(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ et de positivité, $o_s(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ pour $\mathbf{u} \neq 0$ avec $o = m_s, d_s$ ou k_s .

On introduit également la forme antilinéaire $\delta\mathbf{u} \mapsto g_s(\delta\mathbf{u}; \omega)$ dans $\mathcal{C}_{ad,s}$ telle que,

$$g_s(\delta\mathbf{u}; \omega) = \int_{\Gamma_s} g_j^{surf}(\mathbf{x}, \omega) \overline{\delta u_j}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Omega_s} g_j^{vol}(\mathbf{x}, \omega) \overline{\delta u_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad . \quad (2-12)$$

La forme faible du problème aux limites de la structure est telle que : pour tout ω fixé, on cherche $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ dans $\mathcal{C}_{ad,s}$ qui vérifie, pour tout $\mathbf{x} \mapsto \delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ dans $\mathcal{C}_{ad,s}$,

$$-\omega^2 m(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + i\omega d(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + k(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = g_s(\delta\mathbf{u}; \omega) \quad . \quad (2-13)$$

2.2.3 Discrétisation des équations du modèle moyen

La discrétisation par la méthode d'éléments finis (voir [Zienkiewicz et Taylor \[126\]](#) et [Dautray et Lions \[14\]](#)) des formes sesquilinéaires définies par les équations (2-9), (2-10), et (2-11) donne les matrices réelles de masse $[M_s]$, d'amortissement $[D_s]$ et de raideur $[K_s]$, du modèle moyen de la structure.

L'équation matricielle de la raideur dynamique du modèle matriciel moyen de la structure s'écrit alors,

$$[A_s(\omega)] = -\omega^2 [M_s] + i\omega [D_s] + [K_s] \quad . \quad (2-14)$$

Considérons les ensembles de matrices $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$, $\mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, désignant, respectivement, l'ensemble de toutes les matrices rectangulaires réelles, de toutes les matrices carrées et toutes les matrices réelles symétriques, symétriques semi-définies positives et symétriques définies positives, telles que,

$$\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^S(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \quad . \quad (2-15)$$

D'après les hypothèses, les matrices $[M_s]$, $[D_s]$ et $[K_s]$ appartiennent à l'ensemble matriciel $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, où n_s est le nombre de DDL de la structure, et la matrice $[A_s(\omega)]$ est une matrice complexe appartenant à l'ensemble $\mathbb{M}_{n_s}^S(\mathbb{C})$ inversible pour tout $\omega > 0$.

Introduisant le vecteur \mathbf{f}^s qui est le vecteur complexe à valeurs dans \mathbb{C}^{n_s} qui représente les forces mécaniques extérieures agissant sur la structure et qui correspond à la discrétisation de la forme antilinéaire $g_s(\delta\mathbf{u}; \omega)$ définie par l'équation (2-12). La discrétisation de l'équation (2-13) s'écrit alors,

$$[A_s(\omega)] \mathbf{u}_{n_s}(\omega) = \mathbf{f}^s(\omega) \quad , \quad (2-16)$$

dans laquelle $\mathbf{u}_{n_s}(\omega) = (u_1(\omega), \dots, u_{n_s}(\omega))$ est le vecteur complexe dans \mathbb{C}^{n_s} des DDL de la structure.

2.3 Equations du modèle moyen pour la cavité acoustique

Le fluide remplissant la cavité acoustique est un fluide acoustique dissipatif homogène. Les équations sont détaillées dans [Ohayon et Soize \[85\]](#).

Un champ de source acoustique avec une intensité $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)$ (en kg/m^3) est placée dans la cavité acoustique. On suppose que $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)$, $\nabla \mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\nabla^2 \mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)$ sont des fonctions de carrée intégrable par rapport à ω sur \mathbb{R} tel que pour tout x dans Ω_f on ait,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)}{\omega^2} = 0 \quad , \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\nabla \mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)}{\omega^2} = 0 \quad , \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\nabla^2 \mathbf{s}(\mathbf{x}, \omega)}{\omega^2} = 0 \quad . \quad (2-17)$$

2.3.1 Problème aux limites

Le problème aux limites pour les petits mouvements autour de d'une configuration d'équilibre statique prise comme configuration de référence pour la cavité acoustique interne s'écrit,

$$\frac{-\omega^2}{\rho_f c_f^2} p - i\omega \frac{\tau}{\rho_f} \nabla^2 p - \frac{1}{\rho_f} \nabla^2 p = -\frac{\tau c_f^2}{\rho_f} \nabla^2 \mathbf{s} + \frac{i\omega \mathbf{s}}{\rho_f} \quad \text{dans } \Omega_f \quad , \quad (2-18)$$

$$\frac{(1 + i\omega\tau)}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} = \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f + \frac{\tau c_f^2}{\rho_f} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{n}_f} \quad \text{sur } \Gamma_f \quad , \quad (2-19)$$

où ρ_f la masse volumique constante du fluide à l'état d'équilibre et c_f la célérité du son dans le fluide. La constante $\tau > 0$ est une constante qui englobe la dissipation due à la viscosité du fluide ainsi que dans la couche limite viscothermique de la cavité. Cette constante τ qui peut dépendre de la fréquence ω sera supposée ici indépendante.

2.3.2 Formulation faible du problème

Soit $\mathcal{C}_{ad,f}$ l'espace des champs de pression admissibles constitué des fonctions définie sur Ω_f à valeurs dans \mathbb{C} , suffisamment différentiables, telles que,

$$\mathcal{C}_{ad,f} = \{ \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}) : \Omega_f \rightarrow \mathbb{C} \} \quad , \quad (2-20)$$

2.3. EQUATIONS DU MODÈLE MOYEN POUR LA CAVITÉ ACOUSTIQUE

Soit δp une fonction test de l'ensemble $\mathcal{C}_{ad,f}$.

De façon similaire à la formulation faible du problème aux limites de la structure présentée en paragraphe 2.2.2, on obtient la formulation faible du problème aux limites de la cavité acoustiques interne en multipliant l'équation (2-18) par la fonction test $\overline{\delta p}$ dans $\mathcal{C}_{ad,f}$, puis en intégrant le résultat sur le domaine Ω_f , ce qui donne,

$$\begin{aligned} & \frac{-\omega^2}{\rho_f c_f^2} \int_{\Omega_f} p \overline{\delta p} d\mathbf{x} - \frac{(1 + i\omega\tau)}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \nabla^2 p \overline{\delta p} d\mathbf{x} \\ & = -\frac{\tau c_f^2}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \nabla^2 \mathbf{s} \overline{\delta p} d\mathbf{x} + \frac{i\omega}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \mathbf{s} \overline{\delta p} d\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (2-21)$$

En appliquant la formule de Green au deuxième terme du premier membre et au premier terme du deuxième membre de l'équation et en tenant compte des équations (2-18) et (2-19), on peut écrire,

$$\begin{aligned} & \frac{-\omega^2}{\rho_f c_f^2} \int_{\Omega_f} p \overline{\delta p} d\mathbf{x} + \frac{(1 + i\omega\tau)}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla \overline{\delta p} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s \overline{\delta p} ds(\mathbf{x}) \\ & = \frac{\tau c_f^2}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{s} \cdot \nabla \overline{\delta p} d\mathbf{x} + \frac{i\omega}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \mathbf{s} \overline{\delta p} d\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (2-22)$$

Comme lors de l'étude de la structure, on introduit les formes sesquilinéaires de masse, de dissipation et de raideur acoustiques vérifiant ici aussi les propriétés de symétrie hermitienne, $o_f(\delta p, p) = \overline{o_f(p, \delta p)}$ et de positivité $o_f(p, p) > 0$ pour $p \neq 0$ avec $o = m_f, d_f$ ou k_f

$$m_f(p, \delta p) = \frac{1}{\rho_f c_f^2} \int_{\Omega_f} p \overline{\delta p} d\mathbf{x} \quad , \quad (2-23)$$

$$d_f(p, \delta p) = \tau k_f(p, \delta p) \quad , \quad (2-24)$$

$$k_f(p, \delta p) = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla \overline{\delta p} d\mathbf{x} \quad , \quad (2-25)$$

On introduit également la forme antilinéaire $\delta p \mapsto g_f(\delta p; \omega)$ sur $\mathcal{C}_{ad,f}$ telle que,

$$g_f(\delta p; \omega) = \frac{\tau c_f^2}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{s} \cdot \nabla \overline{\delta p} d\mathbf{x} + \frac{i\omega}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \mathbf{s} \overline{\delta p} d\mathbf{x} \quad . \quad (2-26)$$

La forme faible du problème aux limites de la cavité acoustique s'écrit alors : pour tout ω fixé > 0 , trouver $\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, \omega)$ dans $\mathcal{C}_{ad,f}$ telle que, pour tout $\mathbf{x} \mapsto \delta p(\mathbf{x})$ dans $\mathcal{C}_{ad,f}$,

$$-\omega^2 m(p, \delta p) + i\omega d(p, \delta p) + k(p, \delta p) = g_f(\delta p; \omega) \quad . \quad (2-27)$$

2.3.3 Discrétisation des équations du modèle moyen

De façon identique à la démarche adoptée lors de l'étude de la structure, la discrétisation par la méthode d'éléments finis des formes sesquilinéaires définies par les équations (2-23), (2-24) et (2-25) donne les matrices réelles de masse $[M_f]$, d'amortissement $[D_f]$ et de raideur $[K_f]$ du modèle moyen.

L'équation matricielle de la raideur dynamique du modèle moyen de la cavité acoustique s'écrit alors,

$$[A_f(\omega)] = -\omega^2[M_f] + i\omega[D_f] + [K_f] \quad . \quad (2-28)$$

En utilisant les ensembles de matrices introduits au paragraphe 2.2, les hypothèses introduites montrent que la matrice $[M_f]$ appartient à l'ensemble matriciel $\mathbb{M}_{n_f}^+(\mathbb{R})$, les matrices $[D_f]$ et $[K_f]$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{M}_{n_f}^{+0}(\mathbb{R})$ et la matrice $[A_f(\omega)]$ est symétrique complexe de dimension $n_f \times n_f$ où n_f est le nombre de DDL de la cavité acoustique. Il est à noter que la cavité acoustique étant supposée fermée, la matrice de raideur acoustique à un noyau de dimension 1 (les champs de pression constants en espace) et par conséquent n'est pas inversible.

On définit également le vecteur complexe \mathbf{f}^f dans \mathbb{C}^{n_f} correspondant à la discrétisation de la forme bilinéaire $g_f(\delta p; \omega)$, qui représente les sources acoustiques dans la cavité. La discrétisation de l'équation (2-27) donne l'équation matricielle suivante,

$$[A_f(\omega)] \mathbf{p}_{n_f}(\omega) = \mathbf{f}^f(\omega) \quad , \quad (2-29)$$

dans laquelle $\mathbf{p}_{n_f}(\omega) = (p_1(\omega), \dots, p_{n_f}(\omega))$ est le vecteur complexe dans \mathbb{C}^{n_f} des DDL de la cavité acoustique interne. Comme $\omega \in \mathbb{B}$, ω est strictement positif et donc $[A_f(\omega)]$ est inversible.

2.4 Equations du modèle moyen pour le système vibroacoustique couplé

L'objectif est ici de déterminer les équations du problème vibroacoustique de la structure couplée avec sa cavité acoustique interne.

Par commodité, on supposera que les maillages de la structure et de la cavité acoustique sont compatibles sur l'interface de couplage Γ_f . Dans le cas d'un maillage incompatible, la discrétisation de forme sesquilinéaire de couplage peut être trouvée, par exemple, dans la référence [Guerich et Hamdi \[41\]](#)

2.4.1 Problème aux limites

Les équations du problème aux limites du système vibroacoustique couplé regroupent les équations (2-1), (2-2), (2-3) et (2-4) du problème aux limites de la structure présenté en paragraphe 2.2 et celles du problème aux limites de la cavité acoustique présenté en paragraphe 2.3 : équations (2-18) et (2-19) auxquelles il faut ajouter les équation de couplage sur l'interface de couplage Γ_f .

2.4.2 Formulation faible du problème

L'ensemble des éléments nécessaires pour la définition de la forme faible du problème vibroacoustique a été présentés aux paragraphes 2.2 et 2.3. Il reste cependant à définir la forme sesquilinéaire de couplage vibroacoustique entre la structure et la cavité acoustique. On introduit pour cela la forme sesquilinéaire de couplage vibroacoustique $c(p, \delta \mathbf{u})$ définie sur $\mathcal{C}_{ad,s} \times \mathcal{C}_{ad,f}$ telle que,

$$c(p, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_f} p \overline{\delta u_j} n_{sj} ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (2-30)$$

La formulation faible du problème vibroacoustique s'obtient alors en incluant le terme de couplage dans les équations (2-13) et (2-27) et s'écrit,

$$-\omega^2 m(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + i\omega d(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + k(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + c(p, \delta \mathbf{u}) = g_s(\delta \mathbf{u}; \omega) \quad , \quad (2-31)$$

$$-\omega^2 m(p, \delta p) + i\omega d(p, \delta p) + k(p, \delta p) + \overline{c(\delta p, \mathbf{u})} = g_f(\delta p; \omega) \quad . \quad (2-32)$$

2.4.3 Discrétisation des équations du modèle moyen

La discrétisation de la forme sesquilinéaire du couplage vibroacoustique donne la matrice complexe $[C]$ appartenant à l'ensemble matriciel $\mathbb{M}_{n_s, n_f}(\mathbb{R})$.

L'équation discrétisée du système vibroacoustique s'écrit alors,

$$\begin{bmatrix} [A_s(\omega)] & [C] \\ \omega^2 [C]^T & [A_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n_s}(\omega) \\ \mathbf{p}_{n_f}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^s(\omega) \\ \mathbf{f}^f(\omega) \end{bmatrix} \quad . \quad (2-33)$$

2.4.4 Réduction du modèle vibroacoustique moyen

L'analyse des systèmes vibroacoustiques complexes comportant un nombre important de DDL peut s'avérer très coûteuse voir irréalisable dans les coordonnées physiques. On

utilise donc une méthode de réduction de modèle. Dans le cadre de ce travail la méthode de réduction de modèle par projection sur les bases modales de la structure dans le vide d'une part et de la cavité interne à parois rigides découpée d'autre part sont utilisées.

2.4.4.1 Bases modales du système vibroacoustique

Dans cette méthode de réduction de modèle, les équations discrétisées du modèle vibroacoustique moyen sont projetées sur les m_s modes élastiques de la structure ne contenant pas les modes de corps rigides (structure fixée sur Γ_0) et sur les m_f modes acoustiques de la cavité contenant le mode de pression constante à valeur propre nulle. Cette réduction de modèle est décrite dans les paragraphes suivantes.

Modes élastiques de la structure Les modes élastiques de la structure sont obtenus en calculant les solutions $\lambda^s > 0$ et $\boldsymbol{\psi}^s$ dans \mathbb{R}^{n_s} du problème généralisé aux valeurs propres de la structure dans le vide tel que,

$$([K_s] - \lambda^s [M_s])\boldsymbol{\psi}^s = 0 \quad , \quad (2-34)$$

où $0 < \lambda_1^s \leq \lambda_2^s \leq \dots \leq \lambda_{m_s}^s$ sont les valeurs propres associée aux vecteurs propres $\boldsymbol{\psi}_1^s, \dots, \boldsymbol{\psi}_{m_s}^s$ qui vérifient les propriétés habituelles d'orthogonalité $\boldsymbol{\psi}_\alpha^{sT} [M_s] \boldsymbol{\psi}_\beta^s = \delta_{\alpha\beta}$ et $\boldsymbol{\psi}_\alpha^{sT} [K_s] \boldsymbol{\psi}_\beta^s = \lambda_\alpha^s \delta_{\alpha\beta}$ où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$)

Modes acoustiques de la cavité Les modes acoustiques de la cavité sont obtenus en calculant les solutions, $\lambda^f \geq 0$ et $\boldsymbol{\phi}^f$ dans \mathbb{R}^{n_f} , du problème généralisé aux valeurs propres de la cavité à paroi rigide telles que,

$$([K_f] - \lambda^f [M_f])\boldsymbol{\phi}^f = 0 \quad , \quad (2-35)$$

où $0 = \lambda_1^f < \lambda_2^f \leq \dots \leq \lambda_{m_f}^f$ sont les valeurs propres associée aux vecteurs propres $\boldsymbol{\phi}_1^f, \dots, \boldsymbol{\phi}_{m_f}^f$ qui vérifient également les propriétés habituelle d'orthogonalité $\boldsymbol{\phi}_\alpha^{fT} [M_f] \boldsymbol{\phi}_\beta^f = \delta_{\alpha\beta}$ et $\boldsymbol{\phi}_\alpha^{fT} [K_f] \boldsymbol{\phi}_\beta^f = \lambda_\alpha^f \delta_{\alpha\beta}$ où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker. Alors la cavité acoustique possède un premier mode de pression constante associé à la première valeur propre nulle et $m_f - 1$ modes acoustiques de cavité à paroi rigide.

2.4.4.2 Projection des équations du modèle moyen sur les bases modales du système

Soit $m_s \ll n_s$ et $m_f \ll n_f$. Soient $[\Psi^s]$ et $[\Phi^f]$ les matrices rectangulaires telles que,

$$[\Psi^s] = [\boldsymbol{\psi}_1^s, \dots, \boldsymbol{\psi}_{m_s}^s] \quad , \quad [\Phi^f] = [\boldsymbol{\phi}_1^f, \dots, \boldsymbol{\phi}_{m_f}^f] \quad . \quad (2-36)$$

2.4. EQUATIONS DU MODÈLE MOYEN POUR LE SYSTÈME VIBROACOUSTIQUE COUPLÉ

Ainsi pour tout ω dans $\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}]$, la solution de l'équation (2-33) du modèle matriciel vibroacoustique moyen est cherchée sous la forme,

$$\mathbf{u}_{n_s}(\omega) = [\Psi^s] \mathbf{q}^s(\omega) \quad , \quad \mathbf{p}_{n_f}(\omega) = [\Phi^f] \mathbf{q}^f(\omega) \quad , \quad (2-37)$$

où les vecteurs $\mathbf{q}^s(\omega)$ dans \mathbb{C}^{m_s} et $\mathbf{q}^f(\omega)$ dans \mathbb{C}^{m_f} sont les vecteurs de coordonnées généralisées associés respectivement aux m_s premiers modes élastiques de la structure constituant la matrice $[\Psi^s]$ et aux m_f modes acoustiques incluant le mode constant de la cavité constituant la matrice $[\Phi^f]$.

Les coordonnées généralisées vérifient alors l'équation matricielle réduite suivante,

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{A}_s(\omega)] & [\mathcal{C}] \\ \omega^2 [\mathcal{C}]^T & [\mathcal{A}_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^s(\omega) \\ \mathbf{q}^f(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{f}^s(\omega) \\ \mathbb{f}^f(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (2-38)$$

où les vecteurs $\mathbb{f}^s(\omega)$ dans \mathbb{C}^{m_s} et $\mathbb{f}^f(\omega)$ dans \mathbb{C}^{m_f} sont, respectivement, les vecteurs des forces généralisés appliqués à la structure et des sources acoustiques généralisées, définis par

$$\mathbb{f}^s(\omega) = [\Psi^s]^T \mathbf{f}^s(\omega) \quad , \quad (2-39)$$

$$\mathbb{f}^f(\omega) = [\Phi^f] \mathbf{f}^f(\omega) \quad . \quad (2-40)$$

Les matrices $[\mathcal{A}_s(\omega)]$ dans $\mathbb{M}_{m_s}^S(\mathbb{C})$ et $[\mathcal{A}_f(\omega)]$ dans $\mathbb{M}_{m_f}^S(\mathbb{C})$ sont, les matrices de raideur dynamique généralisée, respectivement, de la structure et de la cavité acoustique interne. La matrice $[\mathcal{C}]$ dans $\mathbb{M}_{m_s, m_f}(\mathbb{R})$ est la matrice généralisée du couplage vibroacoustique.

Ces matrices définies par

$$[\mathcal{A}_s(\omega)] = [\Psi^s]^T [A_s(\omega)] [\Psi^s] \quad (2-41)$$

$$[\mathcal{A}_f(\omega)] = [\Phi^f]^T [A_f(\omega)] [\Phi^f] \quad , \quad (2-42)$$

$$[\mathcal{C}] = [\Psi^s]^T [C(\omega)] [\Phi^f] \quad , \quad (2-43)$$

s'écrivent

$$[\mathcal{A}_s(\omega)] = -\omega^2 [\mathcal{M}_s] + i\omega [\mathcal{D}_s] + [\mathcal{K}_s] \quad , \quad (2-44)$$

$$[\mathcal{A}_f(\omega)] = -\omega^2 [\mathcal{M}_f] + i\omega [\mathcal{D}_f] + [\mathcal{K}_f] \quad , \quad (2-45)$$

où $[\mathcal{M}_s]$, $[\mathcal{D}_s]$ et $[\mathcal{K}_s]$ sont des matrices dans $\mathbb{M}_{m_s}^+(\mathbb{R})$ et sont les matrices généralisées de masse, d'amortissement et de raideur de la structure telles que

$$[\mathcal{M}_s]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad [\mathcal{D}_s] = [\Psi^s]^T [D_s] [\Psi^s] \quad , \quad [\mathcal{K}_s] = \lambda_\alpha^s \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (2-46)$$

tandis que la matrice $[\mathcal{M}_f]$ appartient à l'ensemble $\mathbb{M}_{m_f}^+(\mathbb{R})$ et, les matrices $[\mathcal{D}_f]$, et $[\mathcal{K}_f]$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{M}_{m_f}^{+0}(\mathbb{R})$ qui sont les matrices généralisées de masse, d'amortissement et de raideur acoustique de la cavité acoustique et telles que

$$[\mathcal{M}_f]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad [\mathcal{D}_f] = \tau \lambda_{\alpha}^f \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad [\mathcal{K}_f] = \lambda_{\alpha}^f \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (2-47)$$

2.5 Conclusion

Nous avons construit le modèle numérique moyen réduit du système vibroacoustique qui s'écrit

$$\mathbf{u}_{n_s}(\omega) = [\Psi^s] \mathbf{q}^s(\omega) \quad , \quad \mathbf{p}_{n_f}(\omega) = [\Phi^f] \mathbf{q}^f(\omega) \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{A}_s(\omega)] & [\mathcal{C}] \\ \omega^2 [\mathcal{C}]^T & [\mathcal{A}_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^s(\omega) \\ \mathbf{q}^f(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{f}^s(\omega) \\ \mathbb{f}^f(\omega) \end{bmatrix} \quad .$$

où les vecteurs $\mathbb{f}^s(\omega)$ et $\mathbb{f}^f(\omega)$ sont, respectivement, les vecteurs des excitations généralisées appliquée à la structure et des sources acoustiques généralisés situés dans la cavité acoustique. Les matrices $[\mathcal{A}_s(\omega)]$ et $[\mathcal{A}_f(\omega)]$ sont, les matrices de raideur dynamique généralisée, respectivement, de la structure et de la cavité acoustique interne. La matrice $[\mathcal{C}]$ est la matrice du couplage vibroacoustique réduite. Finalement, les vecteurs $\mathbf{q}^s(\omega)$ et $\mathbf{q}^f(\omega)$ sont les vecteurs de coordonnées généralisées de la structure et de la cavité acoustique interne.

3

Modèle vibroacoustique réduit stochastique modélisant les incertitudes

Sommaire

3.1	Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation et de paramètres du modèle	28
3.2	Construction du modèle vibroacoustique réduit stochastique	29
3.3	Conclusion	36

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les incertitudes dans le modèle vibroacoustique réduit moyen construit au chapitre précédent. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1, les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle sont prise en compte par l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes.

3.1 Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation et de paramètres du modèle

Pour prendre en compte les incertitudes associées au modèle vibroacoustique, on utilise une approche probabiliste. Il existe deux approches probabilistes qui traitent le problème d'incertitude. La première approche dite "paramétrique" permet de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle mais ne permet pas de prendre en compte les incertitudes de modélisation. La seconde approche dite "non paramétrique" permet de prendre en compte simultanément les deux types d'incertitudes (voir [Soize \[107\] \[108\] \[114\] \[112\]](#)). Dans ce travail nous avons choisi d'utiliser l'approche non paramétrique des incertitudes de modélisation et de paramètres du modèle. Cette approche a été étendue et validée dans les références [Soize \[110\] \[111\] \[113\] \[114\]](#), [Chebli et Soize \[9\]](#), [Batou et Soize \[1\]](#), [Duchereau et Soize \[17\]](#), [Soize et Chebli \[115\]](#), [Durand *et al.* \[23\]](#) [Fernandez *et al.* \[31\]](#).

L'approche probabiliste non paramétrique consiste à modéliser directement les matrices du modèle vibroacoustique moyen réduit par des matrices aléatoires. Les lois de probabilité de ces matrices aléatoires sont construites par le principe de maximum d'entropie [Jaynes\[48\]](#) [Jaynes\[49\]](#) de la théorie de l'information [Shannon\[102\]](#) sous les contraintes définies par l'information disponible. Les paramètres de la loi de probabilité de chaque matrice aléatoire sont la matrice du modèle moyen et un paramètre de dispersion qui permet de contrôler le niveau de fluctuation statistique de cette matrice qui traduit le niveau d'incertitudes.

De nombreuses applications et validations de cette approche ont été effectuées. On pourra trouver quelques exemples de ces applications et validations dans ([\[15\]](#), [\[6\]](#), [\[7\]](#), [\[9\]](#) et [\[115\]](#)), et notamment des applications dans le domaine de l'industrie automobile (voir [Durand *et al.* \[20\]](#), [\[19\]](#), [\[22\]](#), [\[21\]](#) et [\[23\]](#) et [Durand \[18\]](#)) où l'application de l'approche non paramétrique a été traitée et donne déjà de résultats très acceptables. Une amélioration de ces résultats dans le cadre de la théorie des structures floues (voir [Fernandez *et al.*\[26\] \[27\] \[30\] \[29\] \[28\]\[31\]](#), [Gagliardini *et al.* \[35\]](#) et [Fernandez \[25\]](#)).

Les paragraphes qui suivent présentent la construction du modèle vibroacoustique probabiliste en utilisant l'approche non paramétrique des incertitudes.

3.2 Construction du modèle vibroacoustique réduit stochastique

Le modèle vibroacoustique réduit stochastique est construit en remplaçant les matrices généralisée du modèle vibroacoustique moyen réduit par des matrices aléatoires dont les lois de probabilités sont construites à partir des informations disponibles, comme indiqué au paragraphe 3.1. Le niveau de dispersion de chaque matrice aléatoire est contrôlé à l'aide d'un paramètre de dispersion qui sera introduit au cours de ce chapitre. Dans la présente modélisation, il y a des incertitudes sur la masse, l'amortissement et la raideur de la structure ainsi que sur la cavité acoustique et sur le couplage vibroacoustique.

On introduit donc les sept matrices aléatoires suivantes définies sur l'espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$: les matrices aléatoires de masse $[\mathbf{M}_s]$, d'amortissement $[\mathbf{D}_s]$ et de raideur $[\mathbf{K}_s]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_{m_s}^+(\mathbb{R})$ pour la structure, les matrices aléatoires de masse $[\mathbf{M}_f]$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{M}_{m_f}^+(\mathbb{R})$, d'amortissement $[\mathbf{D}_f]$ et de raideur $[\mathbf{K}_f]$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{M}_{m_f}^{+0}(\mathbb{R})$ pour la cavité acoustique, ainsi que la matrice aléatoire $[\mathbf{C}]$ du couplage vibroacoustique à valeurs dans $\mathbb{M}_{m_s, n_f}(\mathbb{R})$. La moyenne statistique de chaque matrice aléatoire est égale à la matrice déterministe du modèle réduit moyen correspondante,

$$E\{[\mathbf{M}_s]\} = [\mathcal{M}_s] \quad , \quad E\{[\mathbf{D}_s]\} = [\mathcal{D}_s] \quad , \quad E\{[\mathbf{K}_s]\} = [\mathcal{K}_s] \quad , \quad (3-1)$$

$$E\{[\mathbf{M}_f]\} = [\mathcal{M}_f] \quad , \quad E\{[\mathbf{D}_f]\} = [\mathcal{D}_f] \quad , \quad E\{[\mathbf{K}_f]\} = [\mathcal{K}_f] \quad , \quad (3-2)$$

$$E\{[\mathbf{C}]\} = [\mathcal{C}] \quad . \quad (3-3)$$

où E désigne l'espérance mathématique.

Notons $\mathbf{Q}^s(\omega)$ le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées de la structure à valeurs dans \mathbb{C}^{m_s} et $\mathbf{Q}^f(\omega)$ le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées de la cavité acoustique interne à valeurs dans \mathbb{C}^{m_f} . Alors, la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes consiste à remplacer l'équation (2-38) par l'équation à matrices aléatoires définissant le modèle vibroacoustique réduit stochastique,

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_s(\omega)] & [\mathbf{C}] \\ \omega^2 [\mathbf{C}]^T & [\mathbf{A}_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^f(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}^s(\omega) \\ \mathbb{F}^f(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (3-4)$$

où $[\mathbf{A}_s(\omega)]$ et $[\mathbf{A}_f(\omega)]$ sont les matrices aléatoires de raideur dynamique de la structure et de la cavité acoustique interne, définies, par analogie avec les équations (2-44) et (2-45)

par,

$$[\mathbf{A}_s(\omega)] = -\omega^2[\mathbf{M}_s] + i\omega[\mathbf{D}_s] + [\mathbf{K}_s] \quad , \quad (3-5)$$

$$[\mathbf{A}_f(\omega)] = -\omega^2[\mathbf{M}_f] + i\omega[\mathbf{D}_f] + [\mathbf{K}_f] \quad . \quad (3-6)$$

Les réponses du système vibroacoustique, définies par le vecteur aléatoires $\mathbf{U}^s(\omega)$ à valeurs dans \mathbb{C}^{m_s} des déplacements de la structure et par le vecteur aléatoire $\mathbf{P}^f(\omega)$ à valeurs dans \mathbb{C}^{m_f} des pressions dans la cavité acoustique, s'écrivent compte tenu de l'équation (2-37),

$$\mathbf{U}^s(\omega) = [\Psi^s] \mathbf{Q}^s(\omega) \quad , \quad \mathbf{P}^f(\omega) = [\Phi^f] \mathbf{Q}^f(\omega) \quad . \quad (3-7)$$

3.2.1 Normalisation des matrices aléatoires

Dans la méthode non paramétrique, la construction du modèle probabiliste débute par la normalisation des matrices aléatoires introduites précédemment. Pour ce faire, il faut d'abord factoriser les matrices moyennes.

Factorisation des matrices du modèle moyen réduit appartenant à $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ Les matrices du modèle moyen réduit appartenant à $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$, où l'indice m désigne indifféremment m_s ou m_f , sont les matrices de masse $[\mathcal{M}_s]$, d'amortissement $[\mathcal{D}_s]$ et de raideur $[\mathcal{K}_s]$ de la structure ainsi que la matrice de masse $[\mathcal{M}_f]$ de la cavité acoustique interne. Notons $[\mathcal{B}]$ la matrice appartenant à $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ qui représente l'une de ces quatre matrices. La factorisation de Cholesky permet d'écrire,

$$[\mathcal{B}] = [\mathcal{B}]^T [\mathcal{B}] \quad , \quad (3-8)$$

où, de façon générale, $[\mathcal{B}]$ est une matrice triangulaire supérieure dans $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$. Dans le cas des matrices $[\mathcal{M}_s]$, $[\mathcal{M}_f]$ et $[\mathcal{K}_s]$ la matrice $[\mathcal{B}]$ est diagonale.

Factorisation des matrices du modèle moyen réduit appartenant à $\mathbb{M}_m^{+0}(\mathbb{R})$. Les matrices du modèle moyen réduit appartenant à $\mathbb{M}_m^{+0}(\mathbb{R})$ sont les matrices d'amortissement $[\mathcal{D}_f]$ et de raideur $[\mathcal{K}_f]$ de la cavité acoustique interne. Ces matrices sont de rang $m_f - 1$ en raison de la présence du mode acoustique de pression constante à $0Hz$. Les matrices $[\mathcal{D}_f]$ et $[\mathcal{K}_f]$ sont des matrices diagonales ayant le même noyau. La factorisation d'une matrice \mathcal{B} représentant l'une de ces deux matrices s'écrit donc,

$$[\mathcal{B}] = [\mathcal{S}_\mathcal{B}]^T [\mathcal{S}_\mathcal{B}] \quad , \quad (3-9)$$

où $[\mathcal{S}_\mathcal{B}]$ est une matrice réelle $(m_f \times (m_f - 1))$ rectangulaire. Comme la matrice $[\mathcal{B}]$ est diagonale cette factorisation est immédiate.

3.2. CONSTRUCTION DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE RÉDUIT STOCHASTIQUE

Factorisation de la matrice de couplage vibroacoustique du modèle moyen réduit La matrice $[\mathcal{C}]$ du modèle moyen réduit appartient à l'ensemble $\mathbb{M}_{m_s, m_f}(\mathbb{R})$. Habituellement, sur la bande de fréquence étudiée, le nombre m_s de modes de structure est beaucoup plus grand que le nombre m_f de modes de la cavité acoustique interne, la matrice $[\mathcal{C}]$ est donc de rang m_f (il est à noter qu'il suffit de permuter le rôle de m_s et de m_f dans le cas contraire).

La décomposition polaire de la matrice $[\mathcal{C}]$ s'écrit (voir par exemple [Gholub et Van Loan \[38\]](#)),

$$[\mathcal{C}] = [\mathcal{U}][\mathbb{T}] \quad , \quad (3-10)$$

où $[\mathbb{T}]$ est la matrice symétrique carrée réelle dans $\mathbb{M}_{m_f}^+(\mathbb{R})$ et $[\mathcal{U}]$ une matrice rectangulaire dans $\mathbb{M}_{m_s, m_f}(\mathbb{R})$ telle que,

$$[\mathcal{U}]^T[\mathcal{U}] = [I] \quad . \quad (3-11)$$

La construction des matrices $[\mathcal{U}]$ et $[\mathbb{T}]$ nécessite l'utilisation de la décomposition en valeurs singulières de la matrice $[\mathcal{C}]$. On définit d'abord la matrice $[\mathcal{B}]$ dans $\mathbb{M}_{m_f}^+(\mathbb{R})$ telle que,

$$[\mathcal{B}] = [\mathcal{C}]^T[\mathcal{C}] \quad , \quad (3-12)$$

dont sa diagonalisation s'écrit,

$$[\mathcal{B}] = [\Xi][\Sigma][\Xi]^T \quad , \quad (3-13)$$

où $[\Sigma]$ est la matrice diagonale des valeurs propres positives de $[\mathcal{B}]$ et $[\Xi]$ est la matrice des vecteurs propres de $[\mathcal{B}]$ qui vérifie les propriétés d'orthogonalité suivantes,

$$[\Xi][\Xi]^T = [\Xi]^T[\Xi] = [I] \quad . \quad (3-14)$$

La matrice $[\Sigma]^{1/2}$ est donc la matrice de valeurs singulières de $[\mathcal{C}]$ et la matrice $[\mathbb{T}]$ s'écrit donc,

$$[\mathbb{T}] = [\mathcal{B}]^{1/2} = [\Xi][\Sigma]^{1/2}[\Xi]^T \quad . \quad (3-15)$$

La matrice $[\mathcal{U}]$, peut être obtenue à partir de l'équation (3-10) en inversant la matrice $[\mathbb{T}]$ (matrice dans $\mathbb{M}_{m_f}^+(\mathbb{R})$ et donc inversible),

$$[\mathcal{U}] = [\mathcal{C}][\mathbb{T}]^{-1} \quad . \quad (3-16)$$

On note que cette équation vérifie bien la propriété présentée par l'équation (3-11). La matrice $[\mathbb{T}]$ peut maintenant être factorisée en utilisant la factorisation de Cholesky,

$$[\mathbb{T}] = [c]^T[c] \quad . \quad (3-17)$$

En injectant l'équation (3-17) dans l'équation (3-10), la factorisation de la matrice $[\mathcal{C}]$ s'écrit,

$$[\mathcal{C}] = [\mathcal{U}][c]^T[c] \quad . \quad (3-18)$$

CHAPITRE 3. MODÈLE VIBROACOUSTIQUE RÉDUIT STOCHASTIQUE MODÉLISANT LES INCERTITUDES

Expression des matrices aléatoires du modèle vibroacoustique réduit stochastique On introduit les matrices aléatoires germes $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_{m_s}^+(\mathbb{R})$ pour la structure, les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_{m_f-1}^+(\mathbb{R})$ pour la cavité acoustique interne, ainsi que les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]$ dans $\mathbb{M}_{m_f}^+(\mathbb{R})$ pour la cavité acoustique interne et pour le couplage vibroacoustique.

Les matrices aléatoires du modèle vibroacoustique réduit stochastique sont écrites dans le cadre de l'approche probabiliste non paramétrique,

$$[\mathcal{M}_s] = [\mathcal{M}_s]^T [\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}] [\mathcal{M}_s] \quad , \quad [\mathcal{D}_s] = [\mathcal{D}_s]^T [\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}] [\mathcal{D}_s] \quad , \quad (3-19)$$

$$[\mathcal{K}_s] = [\mathcal{K}_s]^T [\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}] [\mathcal{K}_s] \quad , \quad [\mathcal{M}_f] = [\mathcal{M}_f]^T [\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}] [\mathcal{M}_f] \quad , \quad (3-20)$$

$$[\mathcal{D}_f] = [\mathcal{S}_{\mathcal{D}_f}]^T [\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}] [\mathcal{S}_{\mathcal{D}_f}] \quad , \quad [\mathcal{K}_f] = [\mathcal{S}_{\mathcal{K}_f}]^T [\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}] [\mathcal{S}_{\mathcal{K}_f}] \quad , \quad (3-21)$$

$$[\mathcal{C}] = [\mathcal{U}] [\mathcal{C}]^T [\mathbf{G}_{\mathcal{C}}] [\mathcal{C}] \quad . \quad (3-22)$$

Par la suite, si nécessaire, les matrices germes seront représentées par la matrice $[\mathbf{G}]$ dans $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ de taille m égale à m_s ou m_f ou $m_f - 1$.

3.2.2 Informations disponibles pour les matrices aléatoires

Comme énoncé au paragraphe 3.1, l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes utilise la méthode de maximum d'entropie issue de la théorie de l'information pour construire les lois de probabilité des matrices aléatoires germes. Cette méthode nécessite la connaissance de l'information objective disponible.

Matrices définies positives Les matrices aléatoires $[\mathbf{G}]$ sont des matrices pleines et définies positives presque sûrement, telles que $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]$ soient à valeurs dans $\mathbb{M}_{m_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]$ soient à valeurs dans $\mathbb{M}_{m_f}^+(\mathbb{R})$ et, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]$ soient à valeurs dans $\mathbb{M}_{m_f-1}^+(\mathbb{R})$.

Moyennes statistiques Compte tenu des équations (3-1), (3-2), (3-3), (3-8), (3-9) et (3-17), présentées dans le paragraphe 3.2.1, les moyennes statistiques des matrices aléatoires $[\mathbf{G}]$ sont égales à la matrice identité,

$$E\{[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]\} = [I_{m_s}] \quad , \quad E\{[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]\} = [I_{m_s}] \quad , \quad (3-23)$$

$$E\{[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]\} = [I_{m_s}] \quad , \quad E\{[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]\} = [I_{m_f}] \quad , \quad (3-24)$$

$$E\{[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]\} = [I_{m_f}] \quad , \quad E\{[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]\} = [I_{m_f}] \quad , \quad (3-25)$$

$$E\{[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]\} = [I_{m_f}] \quad . \quad (3-26)$$

3.2. CONSTRUCTION DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE RÉDUIT STOCHASTIQUE

Inversibilité en moyenne d'ordre deux Pour que la solution du modèle vibroacoustique réduit stochastique soit du second ordre, il faut que

$$E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (3-27)$$

$$E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (3-28)$$

$$E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (3-29)$$

$$E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad . \quad (3-30)$$

3.2.3 Paramètres de dispersion et loi de probabilité des matrices

A ce stade de la méthode probabiliste non paramétrique, il reste à définir le niveau de dispersion des matrices aléatoires afin de construire les lois de probabilité de ces matrices.

On introduit donc les paramètres $\delta_{\mathcal{M}_s}$, $\delta_{\mathcal{D}_s}$, $\delta_{\mathcal{K}_s}$, $\delta_{\mathcal{M}_f}$, $\delta_{\mathcal{D}_f}$, $\delta_{\mathcal{K}_f}$ et $\delta_{\mathcal{C}}$ qui contrôlent le niveau de dispersion des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]$, telles que,

$$\delta_{\mathcal{M}_s} = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}] - [\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{M}_s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{M}_s}]\|_F^2}} \quad , \quad \delta_{\mathcal{K}_s} = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}] - [\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{K}_s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{K}_s}]\|_F^2}} \quad , \quad (3-31)$$

$$\delta_{\mathcal{D}_s} = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}] - [\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{D}_s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{D}_s}]\|_F^2}} \quad , \quad \delta_{\mathcal{M}_f} = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}] - [\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{M}_f}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{M}_f}]\|_F^2}} \quad , \quad (3-32)$$

$$\delta_{\mathcal{D}_f} = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}] - [\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{D}_f}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{D}_f}]\|_F^2}} \quad , \quad \delta_{\mathcal{K}_f} = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}] - [\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{K}_f}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{K}_f}]\|_F^2}} \quad , \quad (3-33)$$

$$\delta_{\mathcal{C}} = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}] - [\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{C}}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{\mathcal{C}}]\|_F^2}} \quad . \quad (3-34)$$

Il est important de noter que pour assurer la convergence du problème aux limites stochastique continu, quand m_s et m_f tendent vers l'infini, les paramètres de dispersion doivent être indépendants de la dimension des matrices aléatoires.

A partir de ces paramètres de dispersion et des informations disponibles introduites au paragraphe 3.2.2 on peut à présent construire la loi de probabilité des matrices aléatoires en utilisant le principe de maximum d'entropie. Dans le développement suivant on note δ le paramètre de dispersion représentant l'un des paramètres $\delta_{\mathcal{M}_s}$, $\delta_{\mathcal{D}_s}$, $\delta_{\mathcal{K}_s}$, $\delta_{\mathcal{M}_f}$, $\delta_{\mathcal{D}_f}$, $\delta_{\mathcal{K}_f}$, $\delta_{\mathcal{C}}$, et permettant de contrôler la dispersion de la matrice $[\mathbf{G}]$. La loi de probabilité

CHAPITRE 3. MODÈLE VIBROACOUSTIQUE RÉDUIT STOCHASTIQUE MODÉLISANT LES INCERTITUDES

de la matrice $[\mathbf{G}]$ s'écrit alors,

$$P_{[\mathbf{G}]} = p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])\tilde{d}G \quad , \quad (3-35)$$

où $[\mathbf{G}] \mapsto p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$ est la fonction de densité de probabilité de $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ associée à la mesure $\tilde{d}G$ sur $\mathbb{M}_m^S(\mathbb{R})$. La mesure $\tilde{d}G$ est définie par,

$$\tilde{d}G = 2^{m(m-1)/4} \times \prod_{1 \leq j < k \leq m} d[G]_{jk} \quad . \quad (3-36)$$

L'entropie associée à la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$ s'écrit,

$$\mathcal{S}(P_{[\mathbf{G}]}) = - \int_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})} p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}]) \ln(p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])) \tilde{d}G \quad . \quad (3-37)$$

Les contraintes associées à l'information disponible et vérifiées par la densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$ sont :

(a) La fonction de densité de probabilité vérifie la condition de normalisation suivante,

$$\int_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})} p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}]) \tilde{d}G = 1 \quad . \quad (3-38)$$

En tenant compte de l'information disponible sur la matrice \mathbf{G} introduite au paragraphe 3.2.2 concernant la moyenne statistique ($E\{[\mathbf{G}]\} = [\mathbf{I}]$), l'équation (3-38) devient,

$$\int_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})} [\mathbf{G}] p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}]) \tilde{d}G = [\mathbf{I}] \quad . \quad (3-39)$$

(b) La fonction de densité de probabilité vérifie l'équation,

$$\int_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})} \log(\det[\mathbf{G}]) p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}]) \tilde{d}G = \nu \quad , \quad \text{avec } |\nu| < +\infty \quad . \quad (3-40)$$

Cette dernière équation implique que $E\{\|[\mathbf{G}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$.

On définit l'espace des fonctions $[\mathbf{G}] \mapsto p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$ de $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ ici noté \mathcal{G} satisfaisant les équations (3-38) à (3-40). Le principe de maximum d'entropie appliqué à la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$ de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ satisfaisant les contraintes définies par les équations (3-38) à (3-40) s'énonce comme suit telle que,

$$p_{[\mathbf{G}]} = \arg \max_{p_{[\mathbf{G}]} \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(p_{[\mathbf{G}]}) \quad , \quad (3-41)$$

3.2. CONSTRUCTION DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE RÉDUIT STOCHASTIQUE

En utilisant la méthode de multiplicateur de Lagrange pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes, la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ par rapport à la mesure $\tilde{d}G$ s'écrit alors,

$$p_{[\mathbf{G}]}([G]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})}([G]) \times C_G \times (\det([G]))^{(m+1)\frac{(1-\delta^2)}{2\delta^2}} \times e^{-\frac{(m+1)}{2\delta^2}tr([G])} \quad , \quad (3-42)$$

dans laquelle la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})}$ est la fonction indicatrice égale à 1 si $[G]$ est dans $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ et à 0 dans le cas contraire. La constante C_G est une constante positive de normalisation telle que,

$$C_G = \frac{(2\pi)^{-m(m-1)/4} \left(\frac{m+1}{2\delta^2}\right)^{m(m+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\prod_{j=1}^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)} \quad , \quad (3-43)$$

où la fonction $\Gamma(z)$ est définie par,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad . \quad (3-44)$$

Sur la base des équations (3-42) à (3-44), on constate d'une part, que les éléments de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ sont statistiquement dépendants et d'autre part, que la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ dépend uniquement du paramètre de dispersion δ définie par les équations (3-31) à (3-34). Ce paramètre, comme indiqué précédemment, est indépendant de la dimension m et doit vérifier la condition suivante,

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{m+1}{m+5}} \quad . \quad (3-45)$$

Finalement, le tenseur de covariance de la matrice $[\mathbf{G}]$ défini par $C_{jk,j'k'}^G = E\{([G]_{jk} - [G]_{jk})([G]_{j'k'} - [G]_{j'k'})\}$ s'écrit,

$$C_{jk,j'k'}^G = \frac{\delta^2}{m+1} \delta_{j'k} \delta_{jk'} + \delta_{jj'} \delta_{kk'} \quad , \quad (3-46)$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker.

La variance de la variable aléatoire $[\mathbf{G}]_{jk}$ est alors donnée par,

$$V_{jk}^G = \frac{\delta^2}{m+1} (1 + \delta_{jk}) \quad . \quad (3-47)$$

3.2.4 Représentation algébrique de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$

Afin de permettre la génération de réalisations indépendantes de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$, la factorisation de Cholesky est utilisée pour obtenir la forme algébrique suivante,

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{L}_G]^T [\mathbf{L}_G] \quad , \quad (3-48)$$

où $[\mathbf{L}_G]$ est la matrice aléatoire triangulaire supérieure à valeurs dans $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ telle que,

CHAPITRE 3. MODÈLE VIBROACOUSTIQUE RÉDUIT STOCHASTIQUE MODÉLISANT LES INCERTITUDES

a. les variables aléatoires $\{[\mathbf{L}]_{jj'}, j \leq j'\}$ sont indépendantes ;

b. pour $j < j'$ la variable aléatoire à valeurs réelles $[\mathbf{L}]_{jj'}$ s'écrit,

$$[\mathbf{L}]_{jj'} = \sigma_m U_{jj'} \quad \text{avec} \quad \sigma_m = \delta(m+1)^{-1/2} \quad , \quad (3-49)$$

avec $U_{jj'}$ une variable aléatoire Gaussienne à valeur réelle centrée à variance unité.

c. Pour $j = j'$, la variable aléatoire $[\mathbf{L}]_{jj}$ à valeurs réelles positives s'écrit,

$$[\mathbf{L}]_{jj} = \sigma_m \sqrt{2V_j} \quad , \quad (3-50)$$

avec σ_m défini dans l'équation (3-49) et où V_j est une variable aléatoire Gamma dont la fonction de densité de probabilité $p_{V_j}(v)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dv sur \mathbb{R} s'écrit,

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma(\alpha_{m,j})} v^{\alpha_{m,j}-1} e^{-v} \quad \text{avec} \quad \alpha_{m,j} = \frac{m+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2} \quad . \quad (3-51)$$

Pour un ensemble de ν matrices aléatoires $\{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]\}$ à valeurs dans $M_m^+(\mathbb{R})$, pour lequel l'information disponible est définie par les équations (3-38) à (3-40) pour chacune de ces matrices, alors le principe de maximum d'entropie montre que la densité de probabilité conjointe $\{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]\} \mapsto$

$p_{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]}([\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu])$ de $M_m^+(\mathbb{R}) \times \dots \times M_m^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ par rapport à la mesure $\tilde{d}G_1 \times \dots \times \tilde{d}G_\nu$ sur $M_m^+(\mathbb{R}) \times \dots \times M_m^+(\mathbb{R})$ s'écrit,

$$p_{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]}([\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]) = \prod_{j=1}^{\nu} p_{[\mathbf{G}^j]}([\mathbf{G}^j]) \quad . \quad (3-52)$$

Cette équation implique que les matrices $[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]$ sont des variables aléatoires indépendantes.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes a été présentée et appliquée à la construction du modèle vibroacoustique réduit stochastique,

$$\mathbf{U}^s(\omega) = [\Psi^s] \mathbf{Q}^s(\omega) \quad , \quad \mathbf{P}^f(\omega) = [\Phi^f] \mathbf{Q}^f(\omega) \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_s(\omega)] & [\mathbf{C}] \\ \omega^2 [\mathbf{C}]^T & [\mathbf{A}_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^f(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}^s(\omega) \\ \mathbb{F}^f(\omega) \end{bmatrix} \quad .$$

Dans cette équation, $[\mathbf{A}_s(\omega)]$ et $[\mathbf{A}_f(\omega)]$ sont les matrices de raideur dynamique aléatoires de la structure et de la cavité acoustique, $\mathbf{Q}^s(\omega)$ et $\mathbf{Q}^f(\omega)$ sont les vecteurs aléatoires des coordonnées généralisées de la structure et de la cavité acoustique, $\mathbb{f}^s(\omega)$ et $\mathbb{f}^f(\omega)$ sont les vecteurs déterministes des efforts généralisés et des sources acoustiques, et finalement $[\mathbf{C}]$ est la matrice aléatoire du couplage vibroacoustique.

La dispersion de chaque matrice aléatoire (masse, amortissement et raideur de la structure et de la cavité acoustique) est contrôlée par un paramètre de dispersion $\delta > 0$ défini par,

$$\delta = \sqrt{\frac{E\{\|[\mathbf{G}] - [\underline{\mathbf{G}}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}]\|_F^2}},$$

où $[\mathbf{G}]$ désigne la matrice aléatoire dite "matrice germe". La représentation algébrique de chaque matrice germe permet la génération des réalisations indépendantes dans le cadre de la résolution de l'équation du système système vibroacoustique réduit stochastique par la méthode de Monte Carlo.

4

Résolution des équations aléatoires

Sommaire

4.1	Système d'équations stochastiques à résoudre	40
4.2	Méthode de Monte Carlo	41
4.3	Etude de la convergence de la solution	42
4.4	Statistiques des observations	42
4.5	Conclusion	44

Ce chapitre est consacré à la résolution des équations aléatoires qui régissent le modèle vibroacoustique réduit stochastique (la construction de ces équations fait l'objet du chapitre 3). Ces équations sont résolues à l'aide de la méthode de Monte Carlo.

Après avoir rappelé les équations du modèle vibroacoustique réduit stochastique dans le premier paragraphe, la présentation de la méthode de Monte Carlo et l'introduction des observables aléatoires sont traitées dans le deuxième paragraphe. Le troisième paragraphe traite de l'analyse de convergence de la solution aléatoire des équations vibroacoustiques réduite stochastique. Enfin, le dernier paragraphe expliquera le traitement statistique des réalisations aléatoires.

4.1 Système d'équations stochastiques à résoudre

Dans ce paragraphe on rappelle les équations du modèle vibroacoustique réduit stochastique dont l'obtention est détaillée dans les chapitres précédents.

Le modèle vibroacoustique réduit stochastique, construit à l'aide de l'approche non paramétrique des incertitudes, est régi par l'équation matricielle aléatoire suivante,

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_s(\omega)] & [\mathbf{C}] \\ \omega^2 [\mathbf{C}]^T & [\mathbf{A}_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^f(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{f}^s(\omega) \\ \mathbb{f}^f(\omega) \end{bmatrix} . \quad (4-1)$$

Dans cette équation les matrices $[\mathbf{A}_s(\omega)]$ et $[\mathbf{A}_f(\omega)]$ représentent les matrices de raideur dynamique aléatoires, de la structure et de la cavité acoustique interne définie par les équations (3-5) et (3-6). Les vecteurs $\mathbf{Q}^s(\omega)$ et $\mathbf{Q}^f(\omega)$ sont, quant à eux, les vecteurs aléatoires de coordonnées généralisées de la structure et de la cavité acoustique interne. Les vecteurs aléatoires de réponses en déplacement pour la structure et en pression pour la cavité acoustique interne sont définis, pour tout ω dans \mathbb{B} , par les équations suivantes,

$$\mathbf{U}^s(\omega) = [\Psi^s] \mathbf{Q}^s(\omega) \quad , \quad \mathbf{P}^f(\omega) = [\Phi^f] \mathbf{Q}^f(\omega) \quad . \quad (4-2)$$

L'équation (4-1) est l'équation que l'on souhaite résoudre. On peut l'écrire sous la forme globale,

$$[\mathbf{A}(\omega)] \mathbf{Q}(\omega) = \mathbb{f}(\omega) \quad , \quad (4-3)$$

dans laquelle $[\mathbf{A}(\omega)]$ est la matrice de raideur dynamique du système vibroacoustique couplé, $\mathbf{Q}(\omega)$ est le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées du système et $\mathbb{f}(\omega)$ le vecteur déterministe des forces généralisées du modèle moyen réduit.

Compte tenu des propriétés introduites dans le modèle probabiliste des incertitudes, on démontre que, pour tout ω fixée dans \mathbb{B} , la solution aléatoire de l'équation stochastique 4-3 est unique, du second ordre $E\{\|\mathbf{Q}(\omega)\|^2\} < +\infty$ et s'écrit,

$$\mathbf{Q}(\omega) = [\mathbf{A}(\omega)]^{-1} \mathbb{f}(\omega) \quad . \quad (4-4)$$

Comme on peut le constater à partir des équations (4-1), (3-5) et (3-19) à (3-22), la matrice $[\mathbf{A}(\omega)]$ dépend des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]$ présentées en paragraphe 3.2.1. Pour chaque ω , la matrice $[\mathbf{A}(\omega)]^{-1}$ résulte d'une transformation non linéaire des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]$, et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]$.

4.2 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo (voir par exemple [Rubinstein \[98\]](#)) permet de résoudre l'équation (4-4) du modèle vibroacoustique réduit stochastique.

Cette méthode présente l'avantage d'une part, d'être une méthode non intrusive qui peut être utilisée avec les codes commerciaux d'éléments finis et d'autre part, de contrôler la convergence à tout moment du calcul. Elle peut être facilement mise en oeuvre pour le calcul parallèle afin de permettre de réduire le temps de calcul.

La méthode de Monte Carlo utilise des tirages aléatoires indépendants des matrices germes représentées par la matrice $[\mathbf{G}]$ (voir paragraphe 3.2.1) pour résoudre l'équation (4-1). Soit, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}(\theta_j)]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}(\theta_j)]$ avec $j = 1, \dots, n_r$ la $j^{\text{ième}}$ réalisation indépendante des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}]$. La construction des réalisations de ces matrices aléatoires est faite en utilisant la représentation algébrique introduite au paragraphe 3.2.4.

Les matrices déterministes de masse, d'amortissement et de raideur du modèle moyen réduit ainsi que le chargement et la restriction de la base modale aux points d'observation et aux points d'excitation peuvent être construits à partir d'un code de calcul éléments finis commercial. Les matrices du modèle moyen réduit sont factorisées, comme il a été expliqué au paragraphe 3.2.1. Pour chaque réalisation θ_j , les réalisations $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_s}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_s}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_s}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{M}_f}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{D}_f}(\theta_j)]$, $[\mathbf{G}_{\mathcal{K}_f}(\theta_j)]$ et $[\mathbf{G}_{\mathcal{C}}(\theta_j)]$ sont d'abord générées. Puis les réalisations $[\mathbf{M}_s(\theta_j)]$, $[\mathbf{D}_s(\theta_j)]$, $[\mathbf{K}_s(\theta_j)]$, $[\mathbf{M}_f(\theta_j)]$, $[\mathbf{D}_f(\theta_j)]$ et $[\mathbf{K}_f(\theta_j)]$ sont ensuite construites en utilisant les équations (3-19) à (3-22). Enfin la matrice $[\mathbf{A}(\omega)]$ est construite et le système linéaire (4-3) est résolu.

Les réponses du système vibroacoustique sont étudiées, en vitesse pour les réponses vibratoires de la structure et en pression pour les réponses acoustiques dans la cavité. Toutes les deux sont mesurées en décibel (dB).

On définit donc la fonction $f \mapsto dB_{vitesse}^j(f)$ qui est la fonction de réponse en vitesse exprimée en dB pour un degré de liberté j de la structure telle que,

$$dB_{vitesse}^j(f) = 20 \log_{10}(|i(2\pi f) U_j^s(2\pi f)|) \quad , \quad (4-5)$$

où f est la fréquence en Hertz (Hz) définie par $f = \omega/2\pi$ et $U_j^s(\omega)$ est la composante j du vecteur aléatoire $\mathbf{U}^s(\omega)$.

De même, on définit la fonction $f \mapsto dB_{pression}^j(f)$ comme étant la fonction de la réponse en

pression exprimée en dB pour un degré de liberté j de la cavité acoustique telle que,

$$dB_{press}^j(f) = 20 \log_{10} \left(\frac{|P_j^f(2\pi f)|}{P_{ref}} \right) , \quad (4-6)$$

où $P_j^f(\omega)$ est la $j^{ième}$ composante du vecteur aléatoire $\mathbf{P}^f(\omega)$ et P_{ref} est la pression de référence définie par $P_{ref} = 2 \times 10^{-5} Pa$.

4.3 Etude de la convergence de la solution

La convergence de la solution stochastique devrait être étudiée en fonction du nombre de réalisations, du nombre de modes élastiques et du nombre de modes acoustiques.

Dans le cadre d'un travail antérieur portant sur un modèle similaire ([Durand et al. \[18\]](#) [23]), l'étude de la convergence en fonction du nombre de modes du système a été menée. On connaît donc *a priori* le nombre de modes élastiques et acoustiques nécessaire pour atteindre une convergence en moyenne d'ordre deux. En conséquence, l'analyse de convergence en fonction du nombre de modes n'a pas été menée; nous avons pris un nombre de modes légèrement supérieur à celui identifié dans cette étude, mais nous avons mené l'analyse de convergence en moyenne d'ordre deux vis-à-vis du nombre n_r de réalisations. Pour h désignant s ou f , on introduit donc la norme $|||\mathbf{Q}^h|||_{\mathbb{B}}$ telle que,

$$|||\mathbf{Q}^h|||_{\mathbb{B}}^2 = E \left\{ \int_{\mathbb{B}} \|\mathbf{Q}(\omega)^h\|^2 d\omega \right\} , \quad (4-7)$$

avec $\|\mathbf{Q}^h(\omega)\|^2 = \sum_{k=1}^{m_h} |Q_k^h(\omega)|^2$ et $\mathbf{Q}^h(\omega) = (Q_1^h(\omega), \dots, Q_{m_h}^h(\omega))$. On peut donc étudier la convergence en moyenne d'ordre deux de la solution stochastique en introduisant l'estimateur de $|||\mathbf{Q}^h(\omega)|||_{\mathbb{B}}^2$ tel que,

$$n_r \mapsto Conv^h(n_r) = \frac{1}{n_r} \int_{\mathbb{B}} \sum_{j=1}^{n_r} \|\mathbf{Q}^h(\omega, \theta_j)\|^2 d\omega . \quad (4-8)$$

En conclusion, l'étude de la convergence de la solution stochastique en fonction du nombre de réalisations, nous amène à étudier le comportement de la fonction $n_r \mapsto Conv^h(n_r)$ pour un nombre m_s fixé de modes élastiques et un nombre m_f fixé de modes acoustiques.

4.4 Statistiques des observations

On présente la construction des régions de confiance pour les observables. Il existe deux méthodes permettant de construire les régions de confiance : la méthode des quantiles (voir

Serfling [100]) et une méthode alternative utilisant l'inégalité de Tchebychev (voir Soize [107]). Les deux méthodes sont rappelées brièvement dans les paragraphes qui suivent. La méthode des quantiles est celle utilisée dans l'application numérique présentée dans ce rapport. Nous présenterons également un indicateur de dispersion défini comme un coefficient de variation et que nous utiliserons dans l'application.

Soit $W(\omega)$ représentant $dB_{vitess}^j(\omega/(2\pi))$ ou $dB_{press}^j(\omega/(2\pi))$ définies par les équations (4-5) et (4-6). On s'intéresse à la construction du domaine de confiance associée à un certain niveau de probabilité P_c de $\{W(\omega), \omega \in \mathbb{B}\}$ tel que

$$\mathcal{P}\{w^-(\omega) < W(\omega) < w^+(\omega)\} = P_c \quad , \quad \forall \omega \in \mathbb{B} \quad , \quad (4-9)$$

où $w^-(\omega)$ et $w^+(\omega)$ sont les enveloppes inférieures et supérieures du domaine que l'on doit estimer pour P_c fixé.

4.4.1 Estimation des régions de confiance par la méthode des quantiles

Pour estimer la région de confiance par la méthode des quantiles, on introduit $F_{W(\omega)}(w) = P(W(\omega) \leq w)$. Pour $0 < p < 1$, on définit le $p^{ième}$ quantile ou fractile de $F_{W(\omega)}(w)$ tel que,

$$\zeta(p) = \inf\{w : F_{W(\omega)}(w) \geq p\} \quad . \quad (4-10)$$

Alors, on définit l'enveloppe supérieure $w^+(\omega)$ et l'enveloppe inférieure $w^-(\omega)$ de la région de confiance, telles que

$$w^+(\omega) = \zeta((1 + P_c)/2) \quad , \quad w^-(\omega) = \zeta((1 - P_c)/2) \quad . \quad (4-11)$$

L'estimation des enveloppes est effectuée en utilisant toutes les réalisations indépendantes $w_1(\omega) = W(\omega, \theta_1), \dots, w_{n_r}(\omega) = W(\omega, \theta_{n_r})$.

Soit $\tilde{w}_1(\omega) < \dots < \tilde{w}_{n_r}(\omega)$ la statistique ordonnée de $w_1(\omega), \dots, w_{n_r}(\omega)$. En notant $fix(z)$ la partie entière d'un nombre réel z , on peut donc écrire que,

$$w^+(\omega) \simeq \tilde{w}_{j^+}(\omega), \quad j^+ = fix(n_r(1 + P_c)/2) \quad , \quad (4-12)$$

$$w^-(\omega) \simeq \tilde{w}_{j^-}(\omega), \quad j^- = fix(n_r(1 - P_c)/2) \quad . \quad (4-13)$$

4.4.2 Estimation des régions de confiance par l'inégalité de Tchebychev

La région de confiance est à présent estimée à partir de l'inégalité de Tchebychev,

$$\mathcal{P}\{|W(\omega) - E\{W(\omega)\}| \geq a(\omega)\} \leq \frac{\sigma_{W(\omega)}^2(\omega)}{a^2(\omega)} \quad , \quad (4-14)$$

où $\sigma_W^2(\omega)$ est la variance de la variable aléatoire $W(\omega)$ et $a(\omega) = \sqrt{\sigma_W^2(\omega)/(1 - P_c)}$. En utilisant cette inégalité, on déduit les envelopes supérieures w^+ et inférieure w^- qui majorent la probabilité,

$$w^+ = E\{W(\omega)\} + a(\omega) \quad , \quad (4-15)$$

$$w^- = E\{W(\omega)\} - a(\omega) \quad . \quad (4-16)$$

4.4.3 Indice de dispersion

Nous allons à présent introduire l'indice de dispersion pour les observables. Pour tout ω l'écart type $\sigma(\omega)$ de $W(\omega)$ s'écrit,

$$\sigma(\omega) = \sqrt{E\{W(\omega)^2\} - m(\omega)^2} \quad , \quad (4-17)$$

avec $m(\omega)$ la moyenne,

$$m(\omega) = E\{W(\omega)\} \quad . \quad (4-18)$$

L'indice de dispersion $\gamma(\omega)$ de $W(\omega)$ est définie comme le coefficient de variation de la variable aléatoire $W(\omega)$,

$$\gamma(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{m(\omega)} \quad . \quad (4-19)$$

Cette indice de dispersion est une mesure quantitative de la dispersion de la fonction aléatoire $W(\omega)$ autour de la moyenne.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre la méthode de Monte Carlo de résolution des équations aléatoires a été présentée. La méthodologie générale appliquée lors de la résolution a été détaillée, la méthode d'analyse de convergence de la solution stochastique en fonction du nombre de réalisations n_r a été faite et la construction des régions de confiance des observations par la méthode des quantiles et par la méthode de Tchebychev a été donnée. Nous avons également donné l'expression de l'indice de dispersion en fin de chapitre.

5

Construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Sommaire

5.1	Introduction	46
5.2	FRF et mobilités du système vibroacoustique incertain	46
5.3	Construction des grandeurs énergétiques pour le système vibroacoustique	49
5.4	Calcul des puissances injectées pour le modèle énergétique dans le cas d'excitations corrélées	53
5.5	Introduction du système de coordonnées locales définies par les directions principales de la mobilité locale moyenne	55
5.6	Conclusion	58

Dans ce chapitre on introduit l'approche énergétique pour l'analyse vibroacoustique des structures complexes. Cette approche est construite en utilisant le modèle vibroacoustique réduit stochastique introduit au chapitre 3. Cette méthode permet de simplifier l'analyse des structures complexes en proposant une formulation simplifiée de la réponse vibratoire et acoustique du système.

On introduit le système vibroacoustique énergétique ainsi que la formulation des expressions des différentes grandeurs énergétiques intervenant dans la méthode. Un changement de repère, permettant de passer des coordonnées globales à des coordonnées locales, qui seront appelées "les coordonnées locales définies par la mobilité locale moyenne", sera introduit. Puis, on présente le moyennage statistique des grandeurs énergétiques du système vibroacoustique utilisé pour la construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié.

5.1 Introduction

L'approche énergétique d'analyse vibroacoustique proposée est une approche basée sur un modèle stochastique permettant de simplifier l'analyse des systèmes vibroacoustiques complexes et d'obtenir une formulation simplifiée de la réponse. Cette simplification est rendue possible, tout en gardant une description dans le domaine fréquentiel en bande fine, grâce au moyennage statistique qui sera fait sur la famille de systèmes vibroacoustiques associée à la prise en compte des incertitudes. Cette approche énergétique que nous avons développée au cours de ce travail de recherche à déjà fait l'objet des publications [Kassem *et al.* \[58\] \[55\] \[56\] \[57\]\[60\] \[59\] et \[36\]](#).

Cette nouvelle approche énergétique introduit une représentation du système vibroacoustique, ayant pour chaque valeur de la fréquence en bande fine, la densité de puissance moyenne injectée en entrée et la densité de puissance moyenne de la réponse en sortie. Cette fonction dans le domaine des fréquences, liant les puissances moyennes d'entrée et de sortie, sera appelée Fonction de Réponse en Fréquence de la Puissance (FRFP). Les FRFP sont définies comme la moyenne statistique en chaque fréquence, de la normalisation des carrés des modules des FRF habituelles par rapport aux mobilités d'entrée et de sortie du système. L'existence d'une représentation du système par un modèle vibroacoustique énergétique simplifié provient du fait que les FRFP permettent de construire une partition par zone du système vibroacoustique pour laquelle, en chaque fréquence ω , la FRFP est constante en espace sur chaque zone partitionnée.

Il est à noter que la méthode proposée est également applicable au cas déterministe qui n'est pas bien adapté à la situation des systèmes vibroacoustiques complexes incertains.

5.2 FRF et mobilités du système vibroacoustique incertain

5.2.1 Introduction

La réponse du système vibroacoustique incertain, obtenue en résolvant l'équation du modèle vibroacoustique réduit stochastique par la méthode de Monte Carlo présentée en chapitre 4, est calculée pour tous les DDL physiques de la modélisation du système. Or,

dans le cas des systèmes complexes, le nombre de DDL peut être très élevé (plusieurs millions voire dizaines de millions). Donc, afin de simplifier l'analyse pour l'ingénierie de tels systèmes, il est utile de disposer de modèles "plus légers" tout en restant représentatifs. De tels modèles simplifiés sont plus manipulables pour les projets dans les phase d'analyse et d'optimisation de la conception.

On s'intéresse, pour ce type de modèle à un nombre limité de DDL observés (une centaine voire quelque centaines).

5.2.2 Définition des DDL excités et observés pour construire le modèle vibroacoustique énergétique

Soit $n = n_s + n_f$ le nombre total de DDL du système vibroacoustique. On définit l'ensemble $\{j_1, \dots, j_\alpha, \dots, j_r\}$ constituant les $r \ll n$ DDL qui sont excités et observés pour la construction du modèle vibroacoustique énergétique. Chaque DDL observé est donc aussi un DDL d'excitation. Concernant la structure on ne choisit que des DDL de translation.

5.2.3 Définition des excitations pour construire le modèle vibroacoustique énergétique

Les forces extérieures appliquées aux DDL excités pour la construction du modèle vibroacoustique énergétique sont supposées déterministes et sont constituées d'une famille de r vecteurs d'excitation, chaque vecteur correspondant à l'excitation d'un unique DDL. Soit donc α fixé dans $\{1, \dots, r\}$. Alors la fonction $t \mapsto \mathbf{f}^\alpha(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^r (donc ses composantes sont à valeurs réelles) représente le vecteur lié à l'excitation du seul DDL j_α et s'écrit

$$\mathbf{f}^\alpha(t) = \{0, \dots, f_\alpha^\alpha(t), \dots, 0\} \quad . \quad (5-1)$$

La fonction \mathbf{f}^α est supposée être de carré intégrable sur \mathbb{R} et telle que $\mathbf{f}^\alpha(-t) = \mathbf{f}^\alpha(t)$. Cette dernière hypothèse implique que la transformée de Fourier définie par $\mathbf{f}^\alpha(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \mathbf{f}^\alpha(t) dt$ est, d'une part une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^r (donc ses composantes sont réelles) et d'autre part, est telle que $\mathbf{f}^\alpha(-\omega) = \mathbf{f}^\alpha(\omega)$. Cette fonction s'écrit

$$\mathbf{f}^\alpha(\omega) = \{0, \dots, f_\alpha^\alpha(\omega), \dots, 0\} \quad . \quad (5-2)$$

Par construction et par hypothèse, le support de $\omega \mapsto \mathbf{f}^\alpha(\omega)$ est l'intervalle borné $\overline{\mathbb{B}} \cup \mathbb{B}$ avec $\overline{\mathbb{B}} = [-\omega_{max}, -\omega_{min}]$. La famille des vecteurs d'excitation considérés est donc la famille $\{\mathbf{f}^\alpha(\omega), \alpha = 1, \dots, r\}$.

5.2.4 Définition des fonctions aléatoires de réponse en fréquence en vitesse

La matrice aléatoire de raideur dynamique du système vibroacoustique étant inversible presque sûrement pour tout ω fixée dans $\overline{\mathbb{B}} \cup \mathbb{B}$, on introduit la matrice aléatoire $[\mathbf{Z}(\omega)]$ à valeurs complexes ($n \times n$) qui s'écrit, compte tenu des équations (3-4) et (3-7),

$$[\mathbf{Z}(\omega)] = \begin{bmatrix} [\Psi^s] & 0 \\ 0 & [\Phi^f] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{A}^s(\omega)] & \mathbf{C} \\ \omega^2[\mathbf{C}]^T & [\mathbf{A}^f(\omega)] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [\Psi^s]^T & 0 \\ 0 & [\Phi^f]^T \end{bmatrix} , \quad (5-3)$$

où les matrices $[\mathbf{A}^s(\omega)]$ et $[\mathbf{A}^f(\omega)]$ sont, les matrices aléatoires de raideur dynamique de la structure et de la cavité acoustique interne définies par les équations (3-5) et (3-6). Les matrices $[\Psi^s]$ et $[\Phi^f]$ sont les matrices de modes élastiques et de modes acoustiques (voir équation (2-35) et (2-34),

On définit la matrice aléatoire $[\mathbf{Z}(\omega)]$ à valeurs complexes ($r \times r$) liée aux DDL excités et observés, telle que, pour tout α et β dans $\{1, \dots, r\}$, on ait

$$[\mathbf{Z}(\omega)]_{\alpha\beta} = [\mathbf{Z}(\omega)]_{j_\alpha j_\beta} . \quad (5-4)$$

On introduit la matrice aléatoire $[\mathbf{T}(\omega)]$ à valeurs complexes des FRF associées à une réponse en vitesse, associée aux r DDL d'observations et aux r DDL d'excitation, telle que pour tout ω dans \mathbb{B} ,

$$[\mathbf{T}(\omega)] = i\omega[\mathbf{Z}(\omega)] . \quad (5-5)$$

Il est à noter que $[\mathbf{T}(-\omega)] = \overline{[\mathbf{T}(\omega)]}$.

Pour tout α fixé dans $\{1, \dots, r\}$, en notant $\mathbf{V}^\alpha(\omega)$ la réponse aléatoire en vitesse induite par l'excitation déterministe $\mathbf{f}^\alpha(\omega)$, on a

$$\mathbf{V}^\alpha(\omega) = [\mathbf{T}(\omega)]\mathbf{f}^\alpha(\omega) . \quad (5-6)$$

Cette équation caractérise la réponse stochastique en vitesse pour une excitation déterministe, du système vibroacoustique incertain et pour les DDL excités et observés (voir figure 5.1).

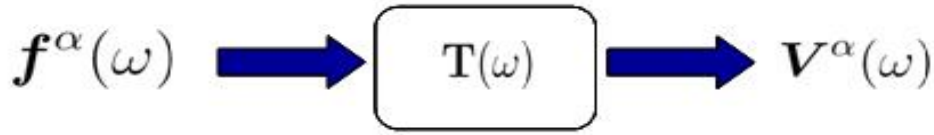


FIGURE 5.1 – Représentation schématique du système vibroacoustique classique avec comme entrée les forces appliquées au système et en sortie la vitesse aux points d'observation

5.2.5 Définition de la matrice aléatoire de mobilité

La mobilité est définie comme le rapport entre la réponse en vitesse et la force d'excitation. On introduit donc la matrice aléatoire de mobilité $[\mathcal{Y}(\omega)]$ de dimension $(r \times r)$, relative aux r DDL d'observation et d'excitation, du système vibroacoustique. La matrice aléatoire $[\mathcal{Y}(\omega)]$ est définie comme la partie réelle de la matrice aléatoire des FRF telle que,

$$[\mathcal{Y}(\omega)] = \text{Re}\{[\mathbf{T}(\omega)]\} \quad . \quad (5-7)$$

5.3 Construction des grandeurs énergétiques pour le système vibroacoustique

Pour la construction des grandeurs énergétiques du système vibroacoustique on utilise les grandeurs aléatoires introduites au paragraphe 5.2.

5.3.1 Calcul des puissances aléatoires injectées dans le modèle vibroacoustique réduit stochastique

La puissance aléatoire injectée induite par l'excitation $\mathbf{f}^\alpha(t)$ définie au paragraphe 5.2.3, est définie par

$$\mathbf{\Pi}_{in}^\alpha = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}^\alpha(t)^T \mathbf{V}^\alpha(t) dt \quad . \quad (5-8)$$

En utilisant le théorème de Plancherel, l'équation (5-8) s'écrit dans le domaine fréquentiel,

$$\mathbf{\Pi}_{in}^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T \overline{\mathbf{V}^\alpha(\omega)} d\omega \quad . \quad (5-9)$$

L'équation (5-9) peut être réécrite sous la forme,

$$\mathbf{\Pi}_{in}^\alpha = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T \overline{\mathbf{V}^\alpha}(\omega) d\omega + \int_0^\infty \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T \overline{\mathbf{V}^\alpha}(\omega) d\omega \right\} . \quad (5-10)$$

Comme $\mathbf{V}^\alpha(t)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^r , sa transformée de Fourier vérifie $\mathbf{V}^\alpha(-\omega) = \overline{\mathbf{V}^\alpha}(\omega)$ et comme nous l'avons vu, on a aussi $\mathbf{f}^\alpha(-\omega) = \mathbf{f}^\alpha(\omega)$. L'équation (5-10) s'écrit alors

$$\mathbf{\Pi}_{in}^\alpha = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T \mathbf{V}^\alpha(\omega) d\omega + \int_0^\infty \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T \overline{\mathbf{V}^\alpha}(\omega) d\omega \right\} , \quad (5-11)$$

ce qui nous donne l'expression suivante de la puissance aléatoire injectée dans le système,

$$\mathbf{\Pi}_{in}^\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{B}} \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T Re\{\mathbf{V}^\alpha(\omega)\} d\omega . \quad (5-12)$$

En substituant $\mathbf{V}^\alpha(\omega)$ dans l'équation (5-12) par son expression donnée par l'équation (5-6) et en tenant compte que $\mathbf{f}^\alpha(\omega)$ est un vecteur réel on obtient l'équation suivante,

$$\mathbf{\Pi}_{in}^\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{B}} \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T Re\{[\mathbf{T}(\omega)]\} \mathbf{f}^\alpha(\omega) d\omega , \quad (5-13)$$

qui peut être réécrite de la manière suivante

$$\mathbf{\Pi}_{in}^\alpha = \int_{\mathbb{B}} \pi_{in}^\alpha(\omega) d\omega , \quad (5-14)$$

avec $\pi_{in}^\alpha(\omega)$ la densité (fréquentielle) de puissance aléatoire injectée induite par l'excitation $\mathbf{f}^\alpha(\omega)$, telle que,

$$\pi_{in}^\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{f}^\alpha(\omega)^T Re\{[\mathbf{T}(\omega)]\} \mathbf{f}^\alpha(\omega) . \quad (5-15)$$

5.3.2 Fonctions spectrales de forces d'excitation et de la vitesse de réponse

Dans ce paragraphe on introduit deux grandeurs importantes dans le cadre de la construction de l'approche énergétique proposée, à savoir la fonction spectrale déterministe des forces d'excitation déterministes et la fonction spectrale aléatoire de la vitesse aléatoire de la réponse. Sur le plan de la terminologie, nous avons utilisé "fonction spectrale" et non pas "fonction de densité spectrale" ou "fonction de densité spectrale de puissance", ces deux dernière terminologies étant réservées au cadre de la théorie spectrale des processus stochastiques stationnaires, ce qui n'est pas le cadre ici.

Comme le vecteur des forces d'excitation défini par l'équation (5-2) s'écrit $\mathbf{f}^\alpha(\omega) = \{0, \dots, f_\alpha^\alpha(\omega), \dots, 0\}$, et comme les composantes sont réelles, l'expression de $\pi_{in}^\alpha(\omega)$ donnée dans l'équation (5-15) devient,

$$\pi_{in}^\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} Re\{[\mathbf{T}_{\alpha\alpha}(\omega)]\} f_\alpha^\alpha(\omega)^2 . \quad (5-16)$$

5.3. CONSTRUCTION DES GRANDEURS ÉNERGÉTIQUES POUR LE SYSTÈME VIBROACOUSTIQUE

On définit le vecteur aléatoire de la densité de puissance injectée $\boldsymbol{\pi}_{in}$ par

$$\boldsymbol{\pi}_{in} = (\pi_{in}^1, \dots, \pi_{in}^\alpha, \dots, \pi_{in}^r) \quad , \quad (5-17)$$

ainsi que la fonction spectrale vectorielle $\mathbf{s}^f(\omega)$ des forces d'excitation déterministes par

$$\mathbf{s}^f(\omega) = (s_1^f(\omega), \dots, s_r^f(\omega)) \quad , \quad (5-18)$$

tel que

$$s_\alpha^f(\omega) = (1/2\pi) f_\alpha^\alpha(\omega)^2 \quad . \quad (5-19)$$

Soit \mathcal{E}_{tot}^α l'énergie totale (au sens de l'énergie d'un signal) aléatoire de la fonction aléatoire vectorielle $\mathbf{V}^\alpha = (V_1^\alpha, \dots, V_r^\alpha)$, telle que

$$\mathcal{E}_{tot}^\alpha = \int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{V}^\alpha(t)\|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \|\mathbf{V}^\alpha(\omega)\|^2 d\omega \quad . \quad (5-20)$$

Etant donnée que le produit scalaire hermitien des vecteurs complexes \mathbf{u} et \mathbf{v} a été défini par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{v}}$ ce qui implique $\|\mathbf{V}^\alpha(\omega)\|^2 = \sum_{\beta=1}^r |V_\beta^\alpha(\omega)|^2$, alors l'équation (5-20) donne

$$\mathcal{E}_{tot}^\alpha = \sum_{\beta=1}^r \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} |V_\beta^\alpha(\omega)|^2 d\omega \quad . \quad (5-21)$$

On définit la fonction spectrale vectorielle $\mathcal{S}^\alpha(\omega)$ de réponse aléatoire en vitesse induite par l'excitation \mathbf{f}^α

$$\mathcal{S}^\alpha(\omega) = (\mathcal{S}_1^\alpha(\omega), \dots, \mathcal{S}_r^\alpha(\omega)) \quad , \quad (5-22)$$

telle que, pour tout ω fixée,

$$\mathcal{S}_\beta^\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} |V_\beta^\alpha(\omega)|^2 \quad . \quad (5-23)$$

D'après l'équation (5-6) qui permet d'écrire que $V_\beta^\alpha(\omega) = [\mathbf{T}(\omega)]_{\beta\alpha} f_\alpha^\alpha(\omega)$ (sans sommation sur α) et comme $f_\alpha^\alpha(\omega)$ est réelle, on a

$$\mathcal{S}_\beta^\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} |[T(\omega)]_{\beta\alpha}|^2 f_\alpha^\alpha(\omega)^2 \quad . \quad (5-24)$$

Soit $[\mathbf{H}(\omega)]$ la matrice aléatoire \mathbb{R}^r telle que $[\mathbf{H}(\omega)]_{\beta\alpha} = |[T(\omega)]_{\beta\alpha}|^2$. En injectant l'équation (5-19) dans l'équation (5-24) et en sommant sur α de 1 à r , on obtient,

$$\sum_{\alpha=1}^r \mathcal{S}_\beta^\alpha(\omega) = 2 \sum_{\alpha=1}^r |[T(\omega)]_{\beta\alpha}|^2 s_\alpha^f(\omega) = \{2[\mathbf{H}(\omega)] \mathbf{s}^f(\omega)\}_\beta \quad (5-25)$$

Soit $S_\alpha^v(\omega)$ tel que,

$$S_\beta^v(\omega) = \sum_{\alpha=1}^r \mathcal{S}_\beta^\alpha(\omega) \quad . \quad (5-26)$$

En introduisant le vecteur aléatoire $\mathbf{S}^v(\omega)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^r$, tel que,

$$\mathbf{S}^v(\omega) = (S_1^v(\omega), \dots, S_r^v(\omega)) \quad . \quad (5-27)$$

il s'écrit

$$\mathbf{S}^v(\omega) = 2[\mathbf{H}(\omega)] \mathbf{s}^f(\omega) \quad . \quad (5-28)$$

5.3.3 Matrice aléatoire de mobilité des points d'entrée et de sortie

La matrice aléatoire de mobilité a été définie par l'équation 5-7. Dans ce paragraphe on définit une autre matrice aléatoire appelée la matrice aléatoire de mobilité des points d'entrée et de sortie que l'on note $[\mathbf{Y}(\omega)]$.

La matrice aléatoire $[\mathbf{Y}(\omega)]$ est une matrice diagonale définie à partir de la partie réelle de la diagonale de la matrice aléatoire $[\mathbf{T}(\omega)]$ qui est donc telle que

$$[\mathbf{Y}(\omega)]_{\alpha\beta} = \begin{cases} \operatorname{Re}\{[\mathbf{T}(\omega)]_{\alpha\alpha}\} & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} . \quad (5-29)$$

Cette matrice est donc une matrice diagonale dont la diagonale est la diagonale de la matrice $[\mathcal{Y}(\omega)]$. On note que pour tout ω fixé dans \mathbb{B} , $[\mathbf{Y}(\omega)]_{\alpha\alpha}$ est une variable aléatoire à valeur positive telle que $[\mathbf{Y}(-\omega)]_{\alpha\alpha} = [\mathbf{Y}(\omega)]_{\alpha\alpha}$ (voir démonstration en Annexe).

Dans toute la suite nous utiliserons la terminologie "matrice de mobilité locale" pour désigner la "matrice de mobilité des DDL d'entrée et de sortie" $[\mathbf{Y}(\omega)]$.

5.3.4 Introduction de la fonction de réponse en fréquence de la puissance(FRFP)

La notion d'une telle fonction a été introduite dans le paragraphe 5.1. Nous la définissons ci-après. En considérant les expressions du vecteur aléatoire de densité de puissance injectée $\boldsymbol{\pi}_{in}(\omega)$ et du vecteur aléatoire de la fonction spectrale vectorielle de forces d'excitation $\boldsymbol{s}^f(\omega)$, définies par les équations (5-16) à (5-19), on peut écrire,

$$\boldsymbol{\pi}_{in}(\omega) = 2[\mathbf{Y}(\omega)]\boldsymbol{s}^f(\omega) . \quad (5-30)$$

Soit $\boldsymbol{\pi}^R(\omega)$ le vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^r$ tel que $\boldsymbol{S}^v(\omega) = [\mathbf{Y}(\omega)]\boldsymbol{\pi}^R(\omega)$. Comme la matrice $[\mathbf{Y}(\omega)]$ est inversible pour tout ω dans \mathbb{B} , le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\pi}^R(\omega)$ s'écrit donc

$$\boldsymbol{\pi}^R(\omega) = [\mathbf{Y}(\omega)]^{-1}\boldsymbol{S}^v(\omega) . \quad (5-31)$$

En injectant les équations (5-28) et (5-30) dans l'équation (5-31) on obtient,

$$\boldsymbol{\pi}^R(\omega) = [\mathbf{Y}(\omega)]^{-1}[\mathbf{H}(\omega)][\mathbf{Y}(\omega)]^{-1}\boldsymbol{\pi}_{in}(\omega) . \quad (5-32)$$

La fonction aléatoire $\boldsymbol{\pi}^R$ sera appelée la densité de puissance locale aléatoire de la réponse. On utilise ici le vocable "locale" pour indiquer que cette grandeur vectorielle est liée aux points d'entrée et de sortie. L'équation (5-32) reliant $[\mathbf{H}(\omega)]$, $[\mathbf{Y}(\omega)]$, $\boldsymbol{\pi}_{in}(\omega)$ et $\boldsymbol{\pi}^R(\omega)$ est

5.4. CALCUL DES PUISSANCES INJECTÉES POUR LE MODÈLE ÉNERGÉTIQUE DANS LE CAS D'EXCITATIONS CORRÉLÉES

une équation nouvelle. On trouve dans la littérature des équations similaires (voir [Orefice et al. \[87\]](#), [Ji et al. \[50\]](#), [Finnveden \[32\]](#), [Gagliardini et Borello \[34\]](#)) pour des moyennes par bande de fréquence.

Etant donnée que, chaque DDL d'excitation est considéré comme un DDL d'observation (voir paragraphe 5.2.1), la matrice de mobilité relative aux DDL d'entrée est la même que la matrice de mobilité relative aux DDL de sortie. Le terme $[\mathbf{Y}(\omega)]^{-1}[\mathbf{H}(\omega)][\mathbf{Y}(\omega)]^{-1}$ de l'équation (5-32) est alors une grandeur adimensionnelle résultant de la normalisation de la matrice des FRF par rapport aux matrices de mobilités d'entrée et de sortie. On note alors $\mathcal{E}(\omega)$ la matrice aléatoire des FRFP telle que,

$$[\mathcal{E}(\omega)] = [\mathbf{Y}(\omega)]^{-1}[\mathbf{H}(\omega)][\mathbf{Y}(\omega)]^{-1} \quad . \quad (5-33)$$

Dans l'équation (5-33), $[\mathcal{E}(\omega)]$ est une matrice aléatoire réelle pleine de dimension $(r \times r)$ dont les éléments sont des variables aléatoires à valeurs positives.

En tenant compte de l'équation (5-33), l'équation (5-32) peut être réécrite en fonction de la matrice des FRFP comme suit

$$\boldsymbol{\pi}^R(\omega) = [\mathcal{E}(\omega)]\boldsymbol{\pi}_{in}(\omega) \quad . \quad (5-34)$$

L'équation (5-34) met en évidence le fait que la matrice aléatoire $[\mathcal{E}(\omega)]$ peut être considérée comme une matrice de FRF liant le vecteur de densité de puissance injectée $\boldsymbol{\pi}_{in}(\omega)$ au vecteur de densité de puissance locale de la réponse $\boldsymbol{\pi}^R(\omega)$.

Les équations (5-30), (5-31) et (5-34) permettent de obtenir une expression liant, le vecteur aléatoire de la fonction de spectre des réponses aléatoires en vitesse $\mathbf{s}^v(\omega)$ et la fonction de spectre de forces d'excitations $\mathbf{s}^f(\omega)$. Cette expression s'écrit,

$$\mathbf{S}^v(\omega) = 2[\mathbf{Y}(\omega)][\mathcal{E}(\omega)][\mathbf{Y}(\omega)]\mathbf{s}^f(\omega) \quad . \quad (5-35)$$

Cette expression est une expression fondamentale pour la construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié développée au Chapitre 7

5.4 Calcul des puissances injectées pour le modèle énergétique dans le cas d'excitations corrélées

Jusqu'à présent, les développements menées ont été formulés dans le repère physique global pour des excitations isolées (décorrélées). Dans ce paragraphe on explique pourquoi il est important d'introduire un changement de base relatif à l'ensemble des DDL excités

CHAPITRE 5. CONSTRUCTION DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

par les forces d'excitation. La méthode énergétique vibroacoustique proposée s'applique directement lorsqu'il n'y a pas de relations de phase (décorrélation) entre les différentes composantes des forces appliquées. L'objectif est d'étendre le domaine d'applicabilité de la méthode lorsqu'il y a des relations de phase entre les forces appliquées à la structure. Il est alors nécessaire d'introduire un changement de base relatif à l'ensemble des DDL excités afin que dans cette nouvelle base, les composantes des forces appliquées n'aient plus de relation de phase (décorrélation) et donc de calculer correctement la puissance injectée. Un tel changement de base peut être construit à partir des vecteurs propres de la matrice de mobilité moyenne associée à l'ensemble des DDL excités.

Se pose aussi le problème de l'utilisation de la présente théorie lorsque l'excitation physique du système vibroacoustique est représentée par un processus stochastique stationnaire à valeurs vectorielles dont les composantes sont relatives à l'ensemble des DDL excités. Si la fonction de densité spectrale matricielle de ce processus stochastique à valeurs vectorielles est diagonale, cela signifie que les composantes du processus sont non corrélées, et alors la théorie proposée s'applique directement, sans difficulté et sans introduire aucune approximation pour le calcul de la puissance introduite. Dans le cas contraire, les termes extra-diagonaux de la densité spectrale matricielle sont liés à la corrélation des composantes du processus stochastique vectorielle. Dans la mesure où ce processus vectoriel correspond à des forces aléatoires appliquées en plusieurs points de la structure. Comme pour le cas déterministe introduit ci-dessus, le changement de base relatif à la mobilité moyenne pour l'ensemble des DDL excités permet de calculer sans erreur la puissance injectée.

Dans l'approche énergétique proposée la densité de puissance aléatoire injectée est définie par l'équation (5-30) qui est aussi écrite sous la forme donnée par l'équation (5-16). Cette définition est obtenue à partir de l'expression montrée par l'équation (5-15) pour des forces décorrélées et réelles comme nous l'avons expliqué en paragraphe 5.3.2. Soit $[\mathbf{T}^{in}(\omega)]$ la matrice des FRF moyenne associée aux DDL excités. La matrice réelle symétrique $[\mathbf{T}_R^{in}(\omega)]$ correspondant à la partie réelle de la matrice $[\mathbf{T}^{in}(\omega)]$ peut être écrite sous la forme

$$[\mathbf{T}_R^{in}(\omega)] = [\phi^{in}(\omega)][\mathcal{T}_R^{in}(\omega)][\phi^{in}(\omega)]^T, \quad (5-36)$$

avec $[\mathcal{T}_R^{in}(\omega)]$ la matrice réelle diagonale des valeurs propres et avec $[\phi^{in}(\omega)]$ la matrice des vecteurs propres de $[\mathbf{T}_R^{in}(\omega)]$. Ces vecteurs propres constituent une base qui diagonalise $[\mathbf{T}_R^{in}(\omega)]$. En introduisant le produit scalaire hermitien tel que $\ll x, y \gg = \sum_j x_j \bar{y}_j$, la

5.5. INTRODUCTION DU SYSTÈME DE COORDONNÉES LOCALES DÉFINIES PAR LES DIRECTIONS PRINCIPALES DE LA MOBILITÉ LOCALE MOYENNE

densité de puissance injectée peut s'écrire

$$\pi_{in}^{\alpha}(\omega) = \frac{1}{\pi} Re\{ \ll \mathbf{f}^{\alpha}(\omega), [\phi^{in}(\omega)][\mathcal{T}_R^{in}(\omega)][\phi^{in}(\omega)]^T \mathbf{f}^{\alpha}(\omega) \gg - i \ll \mathbf{f}^{\alpha}(\omega), [\mathcal{T}_I^{in}(\omega)] \mathbf{f}^{\alpha}(\omega) \gg \} \quad , \quad (5-37)$$

avec $[\mathcal{T}_I^{in}(\omega)]$ la partie imaginaire de la matrice $[\mathcal{T}^{in}(\omega)]$. On peut démontrer que l'équation (5-37) s'écrit sous la forme

$$\pi_{in}^{\alpha}(\omega) = \frac{1}{\pi} Re\{ \sum_{\beta} [\mathcal{T}_R^{in}(\omega)]_{\beta\beta} |\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha}(\omega)|^2 + Im \ll [\mathcal{T}_I^{in}(\omega)] \mathbf{f}^{\alpha}(\omega), \mathbf{f}^{\alpha}(\omega) \gg \} \quad , \quad (5-38)$$

avec $\mathcal{F}^{\alpha}(\omega) = [\phi^{in}(\omega)]^T \mathbf{f}^{\alpha}(\omega)$. Etant donné que $\ll [\mathcal{T}_I^{in}(\omega)] \mathbf{f}^{\alpha}(\omega), \mathbf{f}^{\alpha}(\omega) \gg$ est une forme hermitienne, $\ll [\mathcal{T}_I^{in}(\omega)] \mathbf{f}^{\alpha}(\omega), \mathbf{f}^{\alpha}(\omega) \gg$ est un nombre réel et donc sa partie imaginaire est nulle. On en déduit donc que la densité de puissance injectée s'écrit

$$\pi_{in}^{\alpha}(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{\beta} [\mathcal{T}_R^{in}(\omega)]_{\beta\beta} |\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha}(\omega)|^2 \quad . \quad (5-39)$$

On peut alors voir que dans la base qui diagonalise la matrice $[\mathcal{T}_R^{in}(\omega)]$ on peut calculer $\pi_{in}^{\alpha}(\omega)$ de manière exacte à l'aide de l'équation (5-39), qui est la même que l'équation (5-30), quelque soient les forces appliquées.

5.5 Introduction du système de coordonnées locales définies par les directions principales de la mobilité locale moyenne

L'introduction des repères locaux dans les parties minces de la structure sépare dans l'analyse des réponses la partie flexion de la partie membrane. On propose d'utiliser comme repère local les directions principales de la mobilité locale moyenne (au sens statistique) afin d'analyser les vitesses dominantes par rapport à la géométrie. Prenons par exemple un point situé sur une partie mince de la structure. Si la direction principale la plus importante est perpendiculaire au plan moyen en ce point de la structure mince, la partie la plus grande de l'énergie sera associée aux vitesses des déformations de flexion, tandis que, si la direction principale la plus importante est dans le plan moyen en ce point de la structure mince, la partie la plus grande de l'énergie sera associée aux vitesses des déformations de membrane. On peut donc distinguer ces deux types de déformations dans les coordonnées locales ce qui n'est pas possible dans les coordonnées globales. Cet aspect est illustré à la figure 5.2 qui montre deux exemples relatifs aux mobilités moyennes du

CHAPITRE 5. CONSTRUCTION DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

système vibroacoustique dans les trois directions principales définies par la mobilité locale moyenne (en échelle semi-log). On peut remarquer que pour une structure mince (figure de gauche), la valeur de la mobilité moyenne dans la première direction principale définie par la mobilité moyenne locale est beaucoup plus grande que celle dans les deux autres directions sur toute la bande d'analyse. Pour une partie de la structure qui n'est pas mince (figure de droite), les valeurs de la mobilité moyenne dans les trois directions principales de mobilité locale moyenne sont du même ordre.

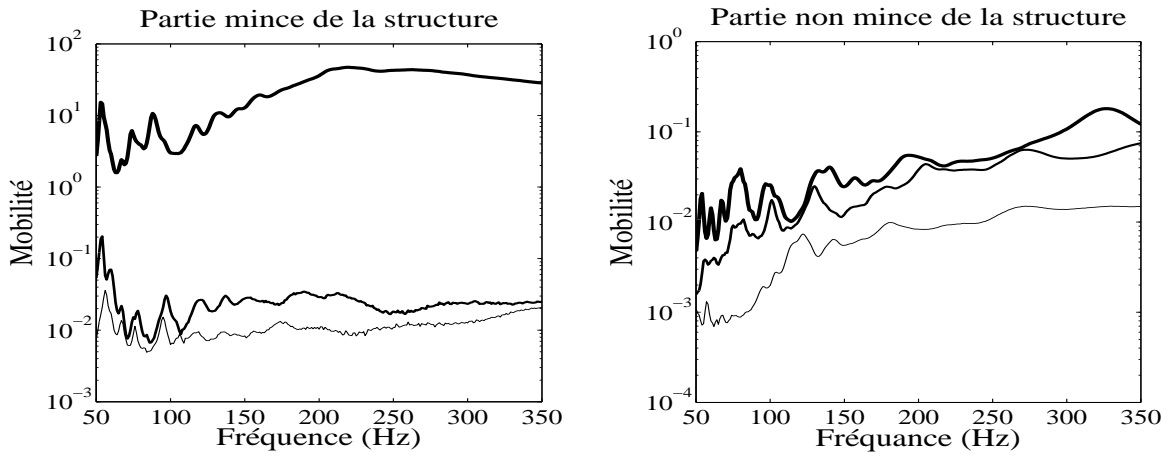


FIGURE 5.2 – Valeurs moyennes des mobilités dans les trois directions principales définies par la mobilité locale moyenne en un point situé sur une partie mince de la structure (figure de gauche) et sur une partie non mince de cette même structure (figure de droite).

Soit $[\mathbf{T}_p(\omega)]$ la matrice aléatoire (3×3) correspondant au bloc diagonal de $[\mathbf{T}(\omega)]$ correspondant aux 3 DDL du noeud p du maillage. D'autre part, la structure étant dissipative, il est démontré en annexe que la partie réelle de la matrice aléatoire $[\mathbf{T}_p(\omega)]$ est une matrice réelle symétrique définie positive presque sûrement. De plus, d'après l'équation (5-7), la matrice $Re\{[\mathbf{T}_p(\omega)]\}$ coïncide avec la matrice de mobilité au point p notée $[\mathcal{Y}_p(\omega)]$.

Soit $E\{[\mathbf{T}_p(\omega)]\}$ la valeur moyenne de la matrice aléatoire $[\mathbf{T}_p(\omega)]$ où E désigne l'espérance mathématique. On définit alors la matrice $[\mathcal{Y}_p(\omega)]$ réelle symétrique (3×3) telle que

$$[\mathcal{Y}_p(\omega)] = Re\{E\{[\mathbf{T}_p(\omega)]\}\} \quad . \quad (5-40)$$

Comme $[\mathcal{Y}_p(\omega)]$ est définie positive pour chaque ω , elle peut s'écrire

$$[\mathcal{Y}_p(\omega)] = [\mathcal{X}_p(\omega)][\Lambda(\omega)][\mathcal{X}_p(\omega)]^T \quad , \quad (5-41)$$

5.5. INTRODUCTION DU SYSTÈME DE COORDONNÉES LOCALES DÉFINIES PAR LES DIRECTIONS PRINCIPALES DE LA MOBILITÉ LOCALE MOYENNE

avec $[\mathbb{X}_p(\omega)]$ une matrice réelle orthogonale (3×3) constituée des vecteurs propres de $[\mathbb{Y}_p(\omega)]$ et où $[\Lambda(\omega)]$ est la matrice diagonale des valeurs propres positives. Les coordonnées locales au point p , définies par les directions principales de mobilité locale moyenne sont telles que $[\mathbb{X}_p(\omega)]$ est la matrice de passage des coordonnées locales dans les coordonnées globales.

5.5.1 Transformation des équations du modèle vibroacoustique réduit stochastique dans les coordonnées locales définies par les directions principales de la mobilité locale moyenne

Soit $[\mathbb{X}(\omega)]$ la matrice bloc diagonale dont chaque bloc (3×3) est la matrice de passage $[\mathbb{X}_p(\omega)]$ du repère local au repère global en chacun des noeuds p dont les DDL sont observés. La matrice $[\mathbf{T}(\omega)]$ relative aux coordonnées globales s'écrit dans les repères locaux

$$[\mathbf{T}^{loc}(\omega)] = [\mathbb{X}(\omega)]^T [\mathbf{T}(\omega)] [\mathbb{X}(\omega)] \quad . \quad (5-42)$$

On introduit donc la matrice $[\mathbf{H}^{loc}(\omega)]$ telle que,

$$[\mathbf{H}^{loc}(\omega)]_{ij} = |[\mathbf{T}^{loc}(\omega)]_{ij}|^2 \quad . \quad (5-43)$$

Afin de rester cohérent avec la construction du modèle la matrice de mobilité locale $[\mathbf{Y}(\omega)]$ définie par l'équation (5-29) exprimée dans les coordonnées locales s'écrit,

$$[\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]_{\alpha\beta} = \begin{cases} Re\{[\mathbf{T}^{loc}(\omega)]_{\alpha\alpha}\} & \text{if } \alpha = \beta \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad . \quad (5-44)$$

La matrice $[\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]$ est alors une matrice diagonale permettant de définir une relation simple entre $\mathbf{S}_{loc}^v(\omega)$ et $\boldsymbol{\pi}_{loc}^R(\omega)$. En conservant la notation *loc* pour désigner les variables dans les coordonnées locales, on peut alors réécrire les équations du modèle vibroacoustique énergétique présentées en paragraphe 5.3 dans les coordonnées locales.

Dans les coordonnées locales, les équations (5-33), (5-31), (5-34), (5-30) et (5-35) deviennent

$$[\mathcal{E}^{loc}(\omega)] = [\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]^{-1} [\mathbf{H}^{loc}(\omega)] [\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]^{-1} \quad . \quad (5-45)$$

$$\boldsymbol{\pi}_R^{loc}(\omega) = [\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]^{-1} \mathbf{S}_v^{loc}(\omega) \quad , \quad (5-46)$$

$$\boldsymbol{\pi}_{loc}^R(\omega) = [\mathcal{E}^{loc}(\omega)] \boldsymbol{\pi}_{in}^{loc}(\omega) \quad , \quad (5-47)$$

$$\boldsymbol{\pi}_{in}^{loc}(\omega) = 2[\mathbf{Y}^{loc}(\omega)] \mathbf{s}_f^{loc}(\omega) \quad , \quad (5-48)$$

$$\mathbf{S}_v^{loc}(\omega) = 2[\mathbf{Y}^{loc}(\omega)] [\mathcal{E}^{loc}(\omega)] [\mathbf{Y}^{loc}(\omega)] \mathbf{s}_f^{loc}(\omega) \quad . \quad (5-49)$$

5.5.2 Moyennage statistique des variables aléatoires

On introduit d'abord la matrice moyenne des FRF $[\underline{T}^{loc}(\omega)]$ qui représente la moyenne statistique de la matrice aléatoire des FRF $[\mathbf{T}^{loc}(\omega)]$ telle que,

$$[\underline{T}^{loc}(\omega)] = E\{[\mathbf{T}^{loc}(\omega)]\} \quad . \quad (5-50)$$

De même, on introduit la matrice moyenne $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ représentant la moyenne statistique de la matrice aléatoire des FRFP $[\mathcal{E}^{loc}(\omega)]$ telle que,

$$[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)] = E\{[\mathcal{E}^{loc}(\omega)]\} = E\{[\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]^{-1}[\mathbf{H}^{loc}(\omega)][\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]^{-1}\} \quad . \quad (5-51)$$

Ainsi la moyenne statistique de la matrice de mobilité locale $[\underline{Y}^{loc}(\omega)]$ est définie par,

$$[\underline{Y}^{loc}(\omega)]_{\alpha\beta} = \begin{cases} Re\{[\underline{T}^{loc}(\omega)]_{\alpha\alpha}\} & \text{if } \alpha = \beta \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad . \quad (5-52)$$

On peut alors définir la moyenne statistique de $\mathbf{S}_{loc}^v(\omega)$ défini par l'équation (5-49), que l'on note $(\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega))^{ref}$ tel que,

$$\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)^{ref} = 2 E\{[\mathbf{Y}^{loc}(\omega)][\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)][\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]\mathbf{s}_{loc}^f(\omega)\} \quad . \quad (5-53)$$

On a introduit l'exposant "ref" (pour "référence") pour indiquer que cette grandeur sera calculée sans approximation et afin de pouvoir la comparer une approximation proposée plus loin.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit une nouvelle approche énergétique. Cette approche est basée sur le modèle vibroacoustique réduit stochastique introduit dans le chapitre 3. On établit l'équation fondamentale

$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_{loc}^R(\omega) = [\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]\underline{\boldsymbol{\pi}}_{in}^{loc}(\omega) \quad .$$

où la matrice des FRFP moyenne $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ s'écrit

$$[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)] = E\{[\mathcal{E}^{loc}(\omega)]\} = E\{[\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]^{-1}[\mathbf{H}^{loc}(\omega)][\mathbf{Y}^{loc}(\omega)]^{-1}\} \quad ,$$

avec $[\mathbf{Y}(\omega)]$ la matrice aléatoire diagonale de mobilité et avec $[\mathbf{H}^{loc}(\omega)]$ la matrice des modules carrés terme à terme de la matrice des FRF considérée.

Cette relation traduit le fait qu'en moyenne, il existe une relation linéaire entre le vecteur de la densité de puissance injectée dans la structure et le vecteur aléatoire de la densité de puissance des réponses aléatoires en vitesse. Cette relation est valable quelque soit l'excitation appliquée, à condition de se placer dans une base adaptée.

6

Validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique

Sommaire

6.1	Présentation du modèle éléments finis du système étudié . .	60
6.2	Résolution du modèle numérique vibroacoustique réduit sto- chastique	61
6.3	Etude de la convergence de la méthode de Monte Carlo . . .	62
6.4	Utilisation de l'approche énergétique	63
6.5	Comportement spatial et comportement fréquentiel des FRF et FRFP moyennes	78
6.6	Domaines de confiance des FRF et FRFP stochastiques et indices de dispersion	88
6.7	Conclusion	94

Ce chapitre est consacré à la validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique. La validation est faite sur le modèle d'un véhicule automobile constitué d'une structure couplée avec une cavité acoustique interne. On montre l'apport de la méthode énergétique proposée par rapport à l'utilisation classique des FRF en bande fine. L'approche proposée s'appuie sur un modèle numérique fin incluant le modèle d'incertitudes.

6.1 Présentation du modèle éléments finis du système étudié

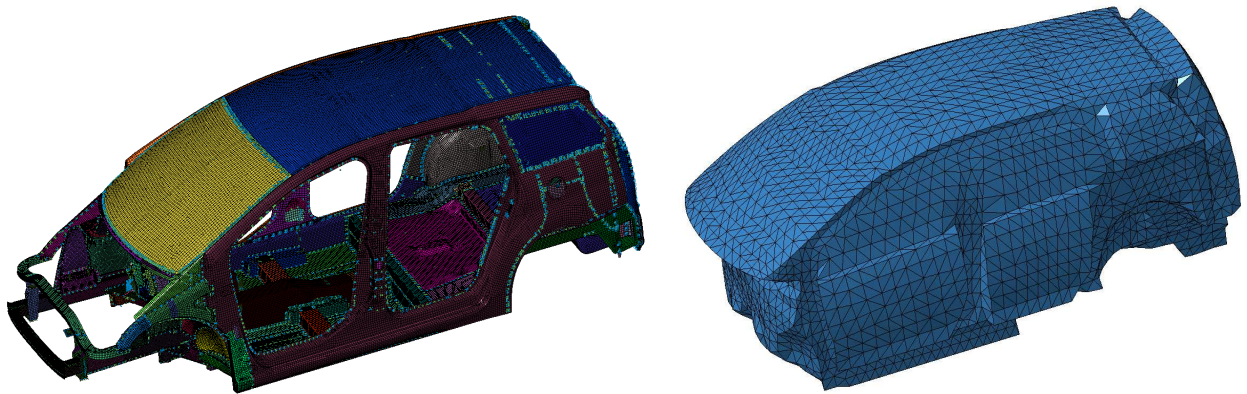


FIGURE 6.1 – Figure de gauche : Maillage éléments finis de la structure ayant 1 042 851 DDL. Figure de droite : Maillage éléments finis de la cavité acoustique interne ayant 9157 DDL

Le modèle éléments finis est construit pour la structure d'une carrosserie automobile et pour la cavité acoustique interne couplée à la structure. Le maillage de la structure comporte $n_s = 1\,042\,851$ DDL et le maillage de la cavité acoustique interne $n_f = 9157$ DDL. Les deux maillages sont montrés à la figure 6.1. Les deux maillages sont compatibles sur l'interface de couplage vibroacoustique. Des chargements mécaniques de type force unitaire sont appliqués sur vingt huit points (soient 84 DDL) situés sur la structure. Des sources acoustiques de type débit volumique unitaire sont appliquées à douze points (soient 12 DDL) à l'intérieur de la cavité acoustique comme le montre la figure 6.2. Pour le modèle énergétique il y a donc $r = 96$ DDL observés et excités conformément aux hypothèses introduites au paragraphe 5.2.2. Les vingt huit points structuraux sont constitués de six points sur le pavillon, de six points sur le par-brise, de six points sur le plancher d'assise, de six points sur le train avant et de quatre points sur les supports du moteur. Les douze points acoustiques sont placés d'une manière homogène dans la cavité acoustique afin d'avoir des points sur les places avant, sur les places arrière et dans le coffre. Pour les points structuraux seuls les DDL de translation sont pris en compte. La figure 6.2 montre la position de tous ces points.

6.2. RÉOLUTION DU MODÈLE NUMÉRIQUE VIBROACOUSTIQUE RÉDUIT STOCHASTIQUE

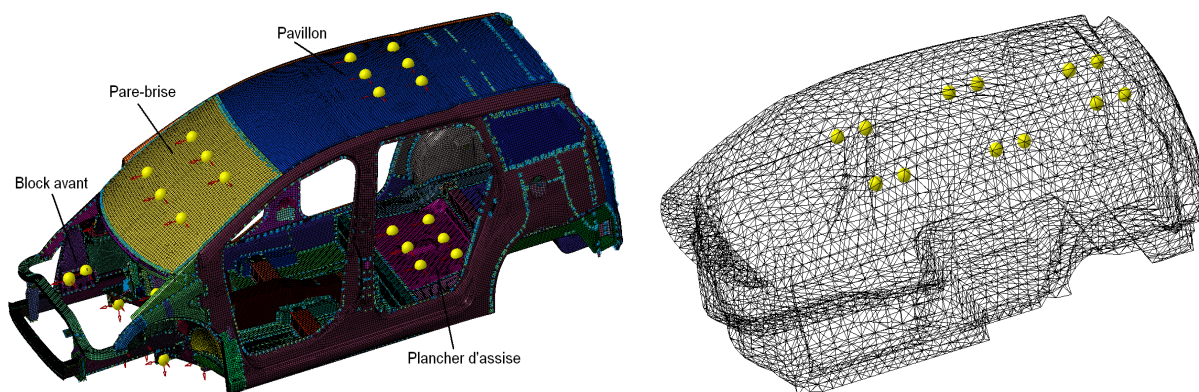


FIGURE 6.2 – Figure de gauche : points d’excitation et d’observation situés sur la structure. Figure de droite : points d’excitation et d’observation situés dans la cavité acoustique

La réponse est observée en terme de vitesse sur les DDL structuraux et en terme de pression acoustique sur les DDL acoustiques. Les taux d’amortissement modaux sont pris constants sur toute la bande des fréquences \mathbb{B} . Le taux d’amortissement de la structure est 0.04 pour tous les modes élastiques et celui de la cavité acoustique est 0.1 pour tous les modes acoustiques. La bande de fréquence d’analyse est $\mathbb{B} = [50, 350]Hz$ et est située dans la domaine des BF et MF.

L’analyse modale est faite avec le logiciel Nastran pour la structure *in vacuo* et donne 1958 modes élastiques comprenant les trois modes de corps rigide entre 0 Hz et 550 Hz, et pour la cavité acoustique avec *paroi rigide* et donne 160 modes acoustique comprenant le mode à pression constante entre 0 Hz et 550 Hz.

6.2 Résolution du modèle numérique vibroacoustique réduit stochastique

Le modèle vibroacoustique réduit stochastique est celui présenté au chapitre 3. Les paramètres δ_{M_s} , δ_{D_s} , δ_{K_s} , δ_{M_F} , δ_{D_f} , δ_{K_f} et δ_C ont été choisis selon une identification, par le moyen du problème inverse, menée dans une étude précédente effectuée sur des modèles similaires (voir Durand [18] Durand *et al.*[23]).

Les valeurs de ces paramètres sont données dans le tableau 6.3.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

δ_{M_s}	δ_{D_s}	δ_{K_s}	δ_{M_f}	δ_{D_f}	δ_{K_f}	δ_C
×	×	×	×	×	×	×

FIGURE 6.3 – Tableau donnant les valeurs des paramètres de dispersion δ pour les matrices de masse, d’amortissement et de raideur, de la structure et de la cavité acoustique interne, et pour la matrice de couplage vibroacoustique

La bande de fréquence \mathbb{B} est échantillonnée en 302 points de fréquence. Le modèle réduit est construit avec $m_s = 1955$ et $m_f = 160$. Il est à noter que ces valeurs correspondent à une bonne convergence vis-à-vis des paramètres m_s et m_f comme il a été montré dans Durand [18] Durand *et al.*[23], le système vibroacoustique étudié et la finesse de son maillage étant similaires.

La résolution des équations stochastiques est alors menée suivant l’approche présentée au chapitre 4. Le calcul numérique est fait avec un logiciel dédié qui récupère du logiciel Nastran les données et résultats nécessaires à la mise en oeuvre des calculs.

6.3 Etude de la convergence de la méthode de Monte Carlo

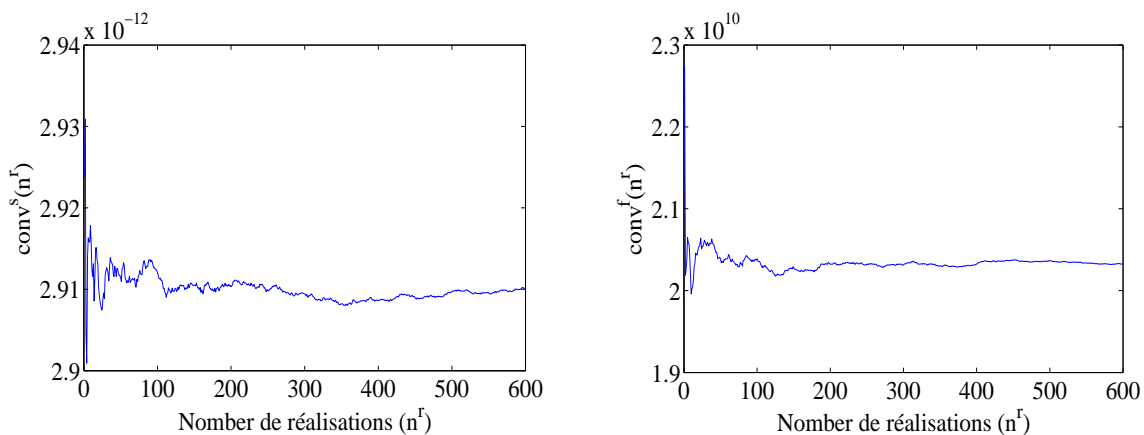


FIGURE 6.4 – Analyse de convergence vis-à-vis du nombre de réalisations. Graphe de la fonction $n_r \mapsto Conv^s(n_r)$ pour la structure (figure de gauche). Graphe de la fonction $n_r \mapsto Conv^f(n_r)$ pour la cavité acoustique (figure de droite)

La convergence de la solution des équations stochastiques vis-à-vis du nombre n_r de réalisations indépendantes est analysé à l'aide de la fonction définie par l'équation (4-8), c'est-à-dire par la fonction $n_r \mapsto Conv^s(n_r)$ pour la structure (voir figure 6.4 de gauche) et par la fonction $n_r \mapsto Conv^f(n_r)$ pour la cavité acoustique (voir figure 6.4 de droite).

Ces deux figures montrent que la convergence est atteinte pour $n_r \geq 500$ pour la structure et pour $n_r \geq 300$ pour la cavité acoustique. Tous les résultats que nous présenterons vis-à-vis de cette application ont été obtenus avec $n_r = 600$.

6.4 Utilisation de l'approche énergétique

L'approche énergétique présentée au chapitre 5 est utilisée pour cette application.

Les sources vibratoires qui proviennent des vibrations du moteur sont transmises à la structure à travers les supports moteurs et celles qui proviennent du train avant sont transmises à travers les points d'accroche de ce train.

6.4.1 Analyse des résultats dans les coordonnées locales

Les coordonnées locales sont construites suivant les développements présentés au paragraphe 5.5

La figure 6.5 montre les valeurs de la mobilité moyenne dans les trois directions locales pour les points structuraux. On remarque que pour certains points, il existe une direction dominante de l'énergie cette dernière étant faible dans les deux autres directions. De tels points se trouvent sur le pavillon, sur le pare-brise et sur le plancher d'assise qui sont donc localisés sur des parties minces de la structure. Par contre, il n'y a pas de direction dominante pour des points positionnés sur des parties non minces telles que les points de liaison train avant ou les supports moteurs.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

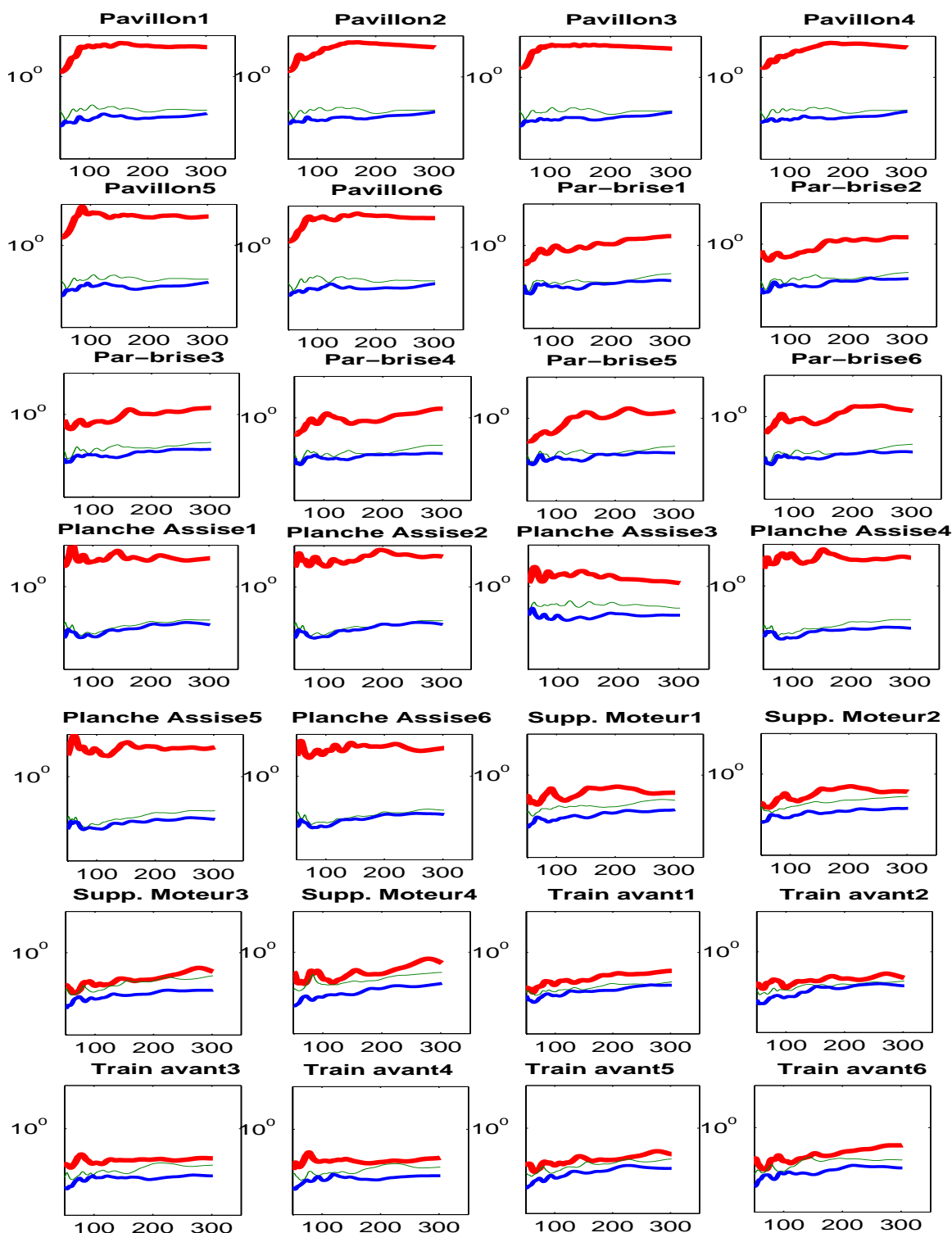


FIGURE 6.5 – Graphes de la mobilité moyenne en échelle logarithmique pour les trois directions principales aux différents points structuraux en fonction de la fréquence en Hertz.

6.4. UTILISATION DE L'APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

On remarque également sur la figure 6.5 que, pour les points situés sur le pavillon et sur le plancher d'assise, la différence entre la valeur maximale de la mobilité moyenne et les deux autres valeurs de la mobilité, est plus importante que pour le pare-brise. Ceci est dû au fait que le pavillon et le plancher d'assise sont des éléments plans tandis que le pare-brise est un élément courbe, ce qui rapproche les valeurs de la mobilité dans les directions tangentielles, de celles dans la direction principale normale.

Puisque les coordonnées locales sont définies par les directions principales de la mobilité locale moyenne qui dépend de la fréquence, les coordonnées locales dépendent donc de la fréquence. Nous avons donc analysé l'évolution des coordonnées locales en fonction de la fréquence en les comparant à des coordonnées locales géométriques fixes définies par la normale à la surface moyenne des parties minces et par deux vecteurs fixes du plan tangent tels que les trois vecteurs forment une base locale orthonormée et indépendante de la fréquence. Les figures 6.6 et 6.7 montrent les trois valeurs de la mobilité suivant les trois axes des coordonnées locales construites comme les directions principales de la mobilité locale moyenne (qui dépendent de la fréquence) et montrent aussi les trois axes des repères locaux géométriques orthonormés (qui ne dépendent pas de la fréquence). Ces figures sont relatives aux points structuraux localisés sur le pavillon et sur le support moteur pour quatre fréquences différentes.

Pour le point situé sur le pavillon qui constitue une partie mince (Figure 6.6), on observe que la direction pour laquelle la mobilité est maximum est très proche de la normale à toutes les fréquences. Les mobilités dans les deux autres directions sont très faibles. C'est sur la base de ces résultats qu'on donne l'interprétation selon laquelle la méthode sépare les effets de membrane des effets de flexion.

Pour le point situé sur le support moteur qui ne constitue pas une partie mince (Figure 6.7), la situation est différente. On peut observer des valeurs plus significatives de la mobilité suivant les deux directions dans le plan. La direction du maximum de mobilité n'est pas forcément proche de la normale géométrique. On notera qu'il existe plus de variations en fonction de la fréquence que dans le cas des parties minces. Cependant, ces variations semblent être modérées.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

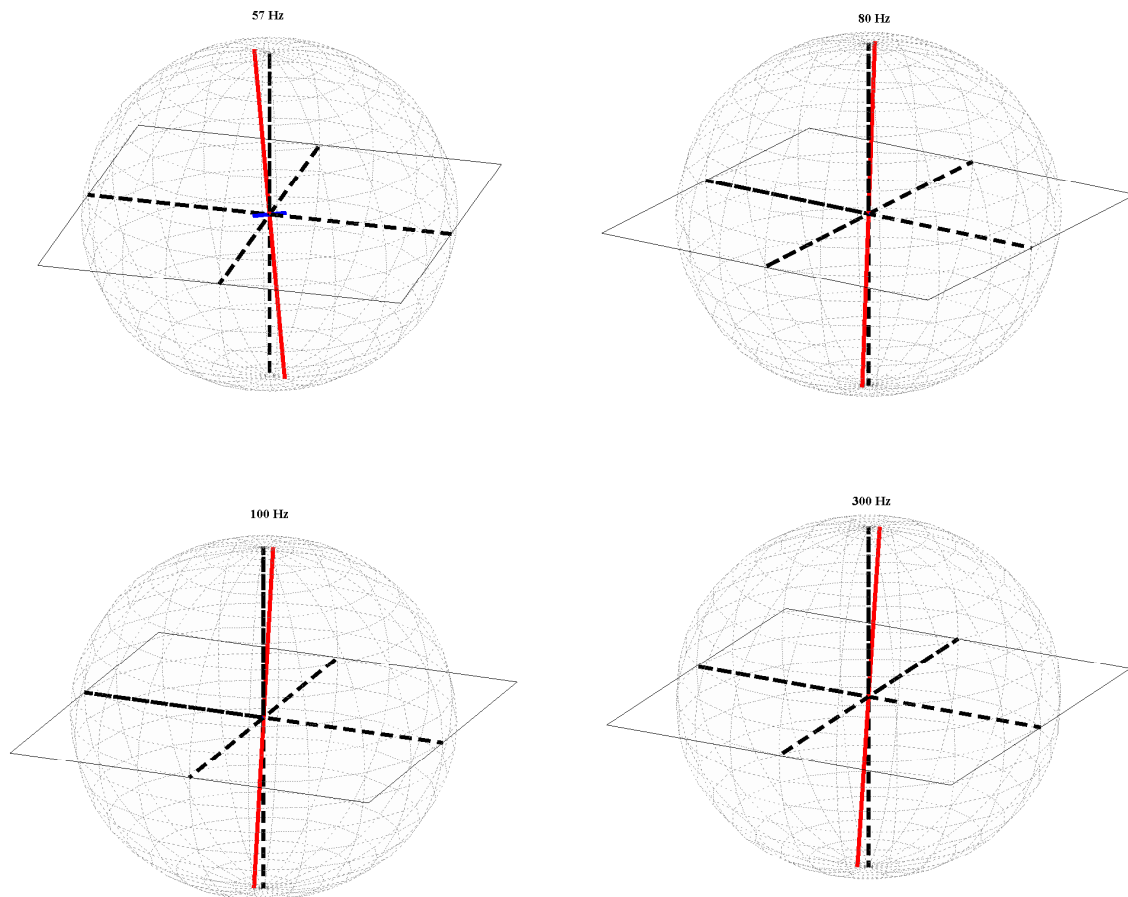


FIGURE 6.6 – Valeurs de la mobilité moyenne dans les trois directions des coordonnées locales définie par les directions principales de la mobilité locale moyenne pour un point situé sur le pavillon. Ligne pointillée : coordonnées locales géométriques indépendantes de la fréquence. Ligne continue : valeurs de la mobilité dans les coordonnées locales dépendantes de la fréquence.

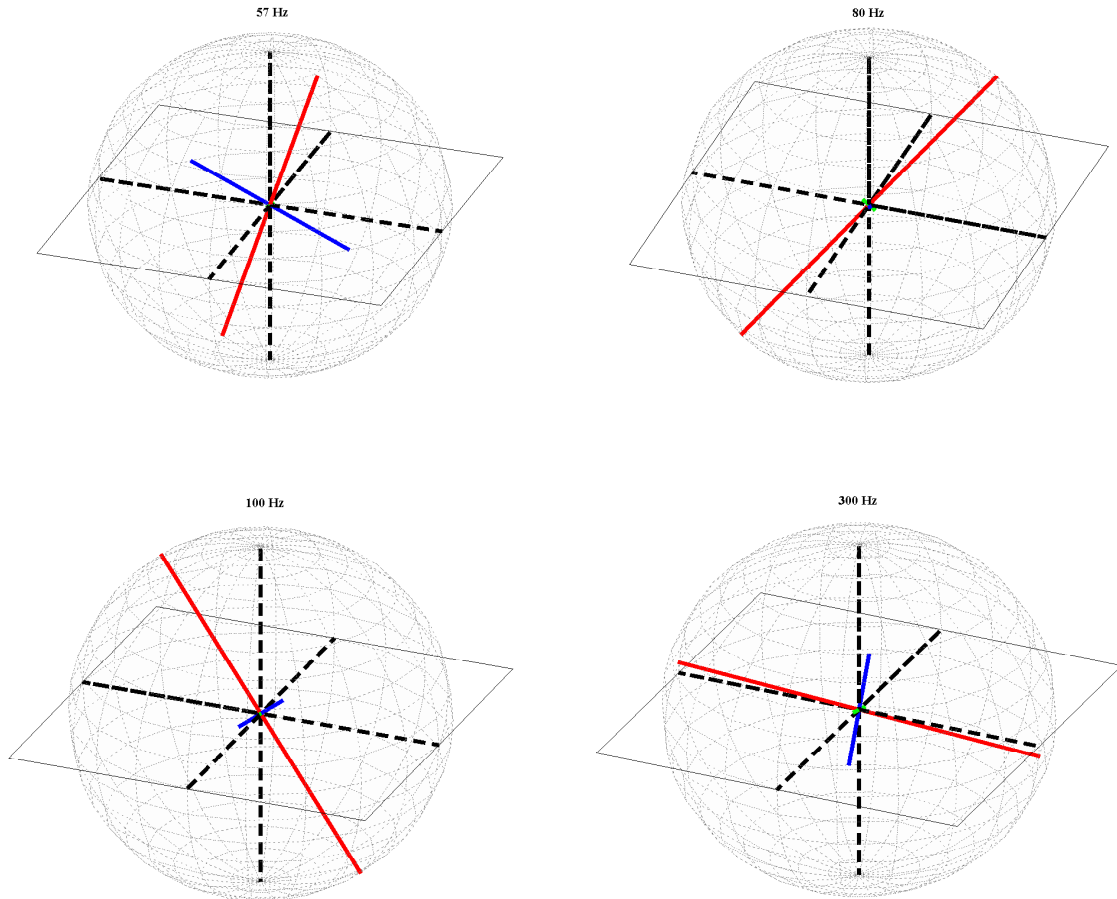


FIGURE 6.7 – Valeurs de la mobilité moyenne dans les trois directions des coordonnées locales définie par les directions principales de la mobilité locale moyenne pour un point situé sur le support moteur. Ligne pointillée : coordonnées locales géométriques indépendantes de la fréquence. Ligne continue : valeurs de la mobilité dans les coordonnées locales dépendantes de la fréquence.

6.4.2 Etude des grandeurs énergétiques du modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Le modèle énergétique simplifié est construit suivant la méthode présentée au chapitre refch-approche. On rappelle ici que l'un des objectifs de cette recherche est la simplification de l'analyse vibroacoustique des systèmes complexes au travers l'introduction d'un modèle énergétique simplifié. Dans ce paragraphe, on montre l'intérêt d'une telle approche.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

Tous les résultats présentés pour les points structuraux sont exprimés dans les coordonnées locales.

6.4.2.1 FRF et FRFP moyennes vibratoires

Les figures 6.8 à 6.14 montrent les valeurs moyennes des FRF classiques $[\underline{T}^{loc}(\omega)]$ (figures de gauche) comparées à celles des FRFP $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ (figures de droite), correspondant aux excitations dans une ou trois directions principales en un point de la structure, et une observation dans une ou trois directions principales d'un autre point de la structure. Le point d'excitation et la direction d'excitation de la structure sont, un point sur le train avant et les trois directions principales pour les figures 6.8 à 6.10, un point du support moteur et une seule direction principale d'excitation pour la figure 6.11, un point du support moteur et une direction principale d'excitation pour la figure 6.12, un point du train avant et une direction principale d'excitation pour la figure 6.13, un point du train avant et les trois directions principales d'excitation pour la figure 6.14 et un point du support moteur et une direction principale d'excitation pour la figure 6.15.

Le point d'observation et la direction d'observation sont, un point du plancher d'assise et la direction principale normale pour la figure 6.8, un point du pavillon et une direction principale normale pour la figure 6.9, un point du plancher d'assise et une direction tangentielle pour la figure 6.10, un point du plancher d'assise et les trois directions principales pour la figure 6.11, un point du pavillon et les trois directions principales pour la figure 6.12, un point du pare brise et les trois directions principales pour la figure 6.13, un point du pare-brise et la direction principale normale pour la figure 6.14 et enfin et un point du train avant et les trois directions principales pour la figure 6.15.

Ces figures montrent que les valeurs des FRFP moyennes (figures de droite) sont assez proches en particulier lorsque la direction d'observation est la direction dominante. On note une faible dépendance fréquentielle par rapport à la dépendance des FRF moyennes. On peut voir aussi que cette dépendance fréquentielle des FRFP moyennes est plus marquée pour les directions tangentielles. On notera aussi qu'on ne peut pas distinguer de différences significatives entre les trois directions d'excitation lorsque le point d'excitation est sur une partie non mince de la structure ce qui n'est pas le cas pour les observations sur les parties minces. On note également que dans les figures 6.14 et 6.15, les FRFP dépendent plus de la fréquence. De plus les valeurs des FRFP montrées dans ces figures sont moins proches l'une de l'autre que dans les autres cas. Ceci est vrai jusqu'à 200 Hz pour la figure 6.14 et cela est vrai sur toute a gamme de fréquence pour la figure 6.15. Ceci s'explique par l'existence des interactions locales entre le support moteur et le train avant sur toute la bande de fréquence d'une part, et entre le support moteur et le pare brise

6.4. UTILISATION DE L'APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

jusqu'à 200 Hz d'autre part. Nous donnerons des explications complémentaires concernant ce point au chapitre 8.

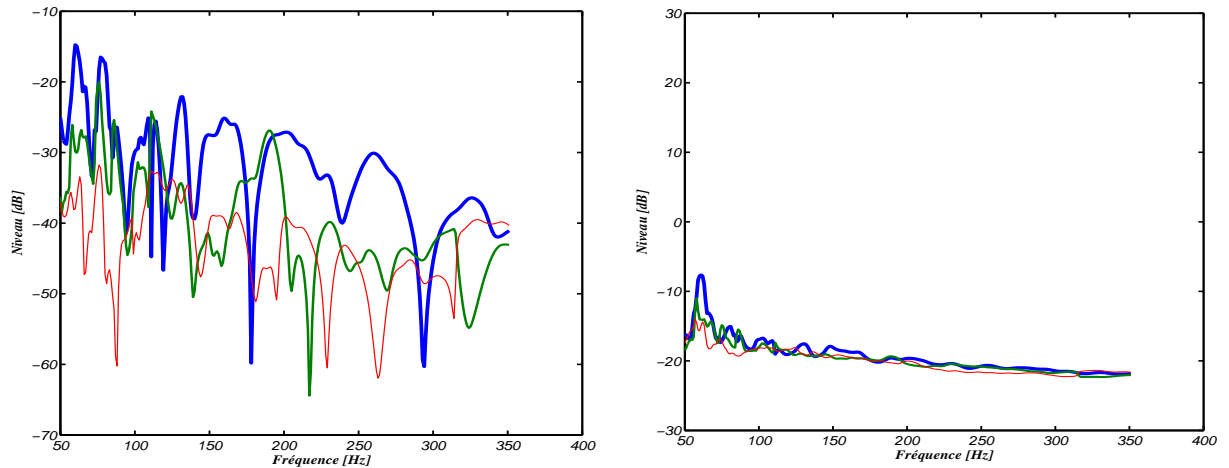


FIGURE 6.8 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans les trois directions principales. Observation en un point du plancher d'assise et dans la direction principale normale.

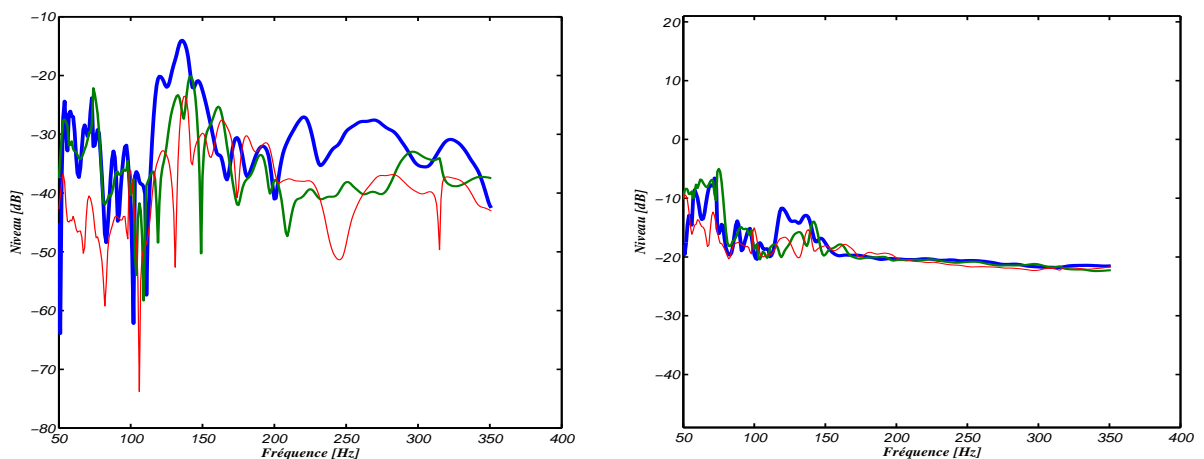


FIGURE 6.9 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans les trois directions principales. Observation en un point du pavillon et dans la direction principale normale.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

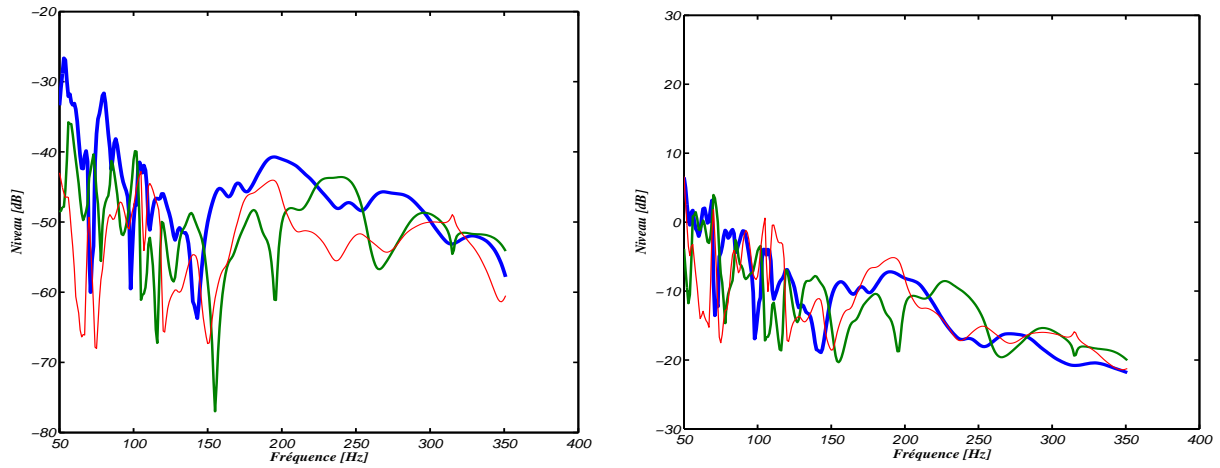


FIGURE 6.10 – $20\log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10\log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans les trois directions principales. Observation en un point du plancher d'assise et dans une direction tangentielle.

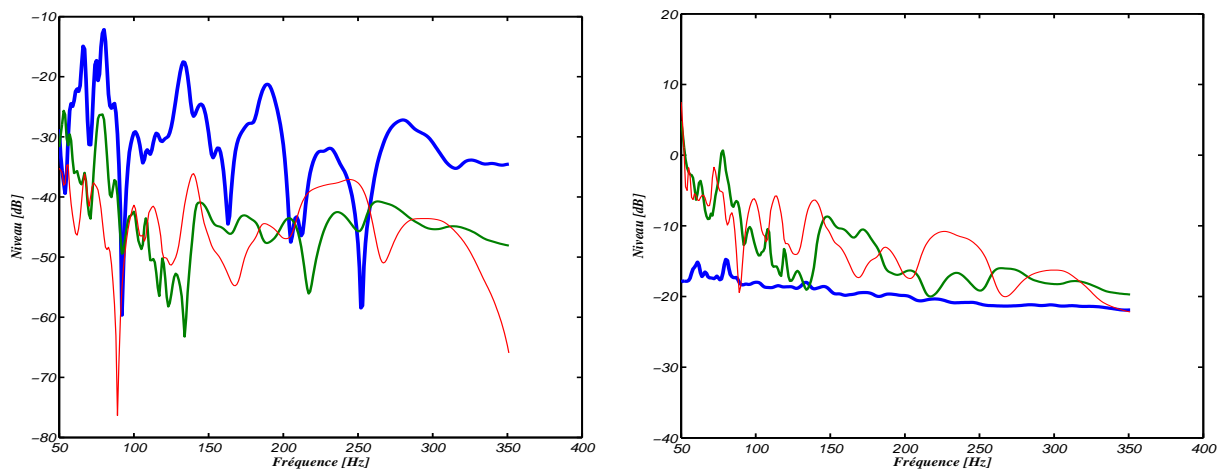


FIGURE 6.11 – $20\log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10\log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans une direction principale. Observation en un point du plancher d'assise et dans les trois directions principales.

6.4. UTILISATION DE L'APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

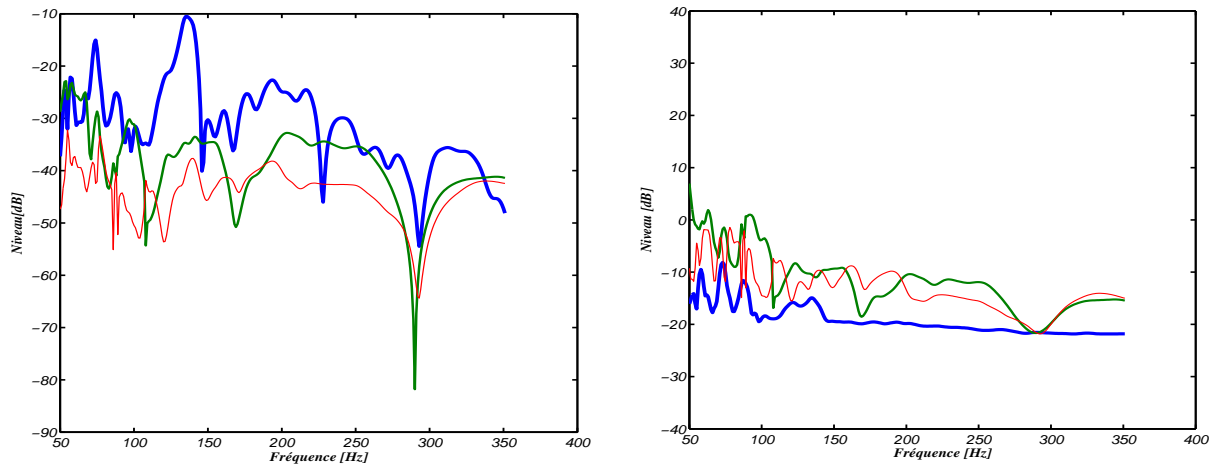


FIGURE 6.12 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans une direction principale. Observation en un point du pavillon et dans les trois directions principales.

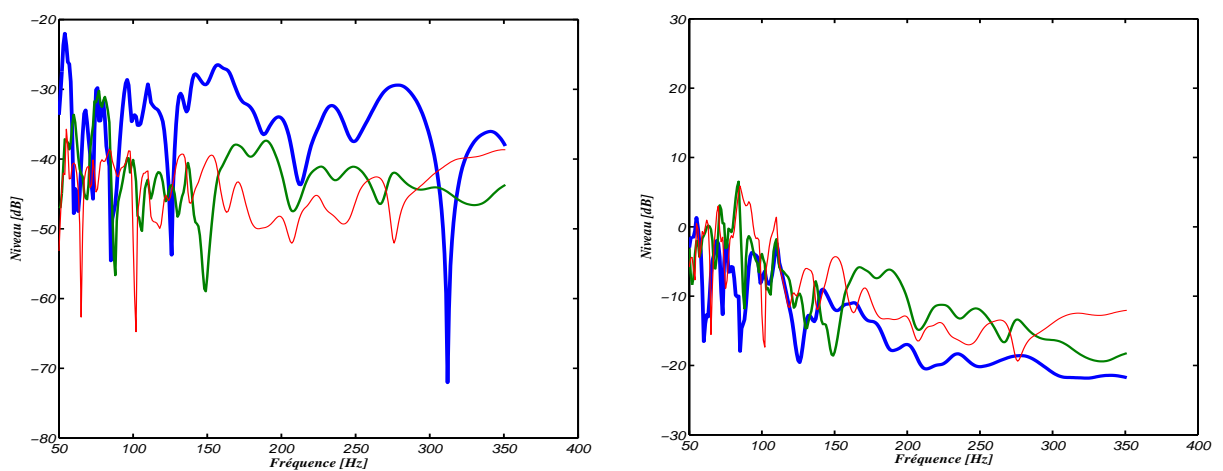


FIGURE 6.13 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans une direction principale. Observation en un point du pare brise et dans les trois directions principales.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

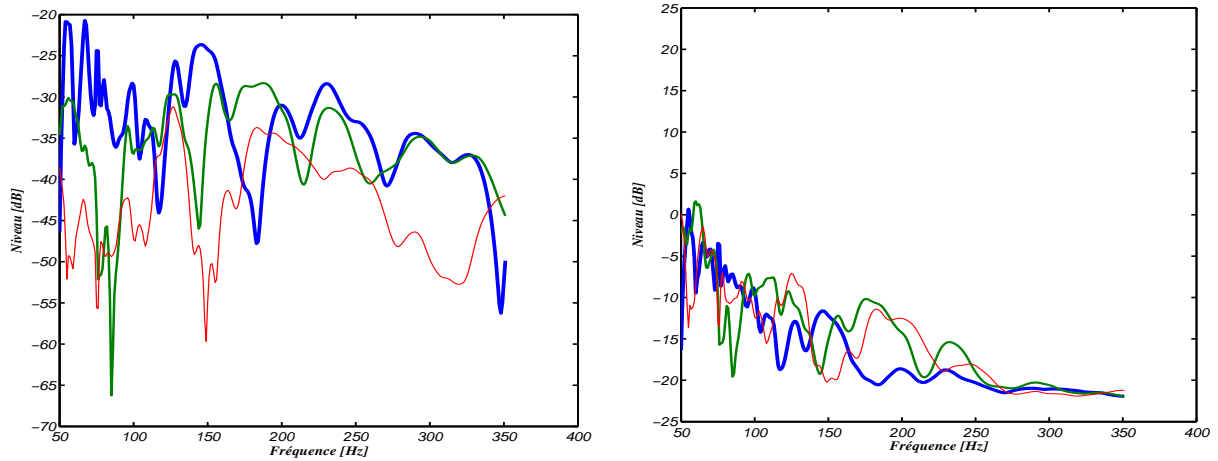


FIGURE 6.14 – $20\log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10\log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans les trois directions principales. Observation en un point du pare brise et dans la direction principale normale.

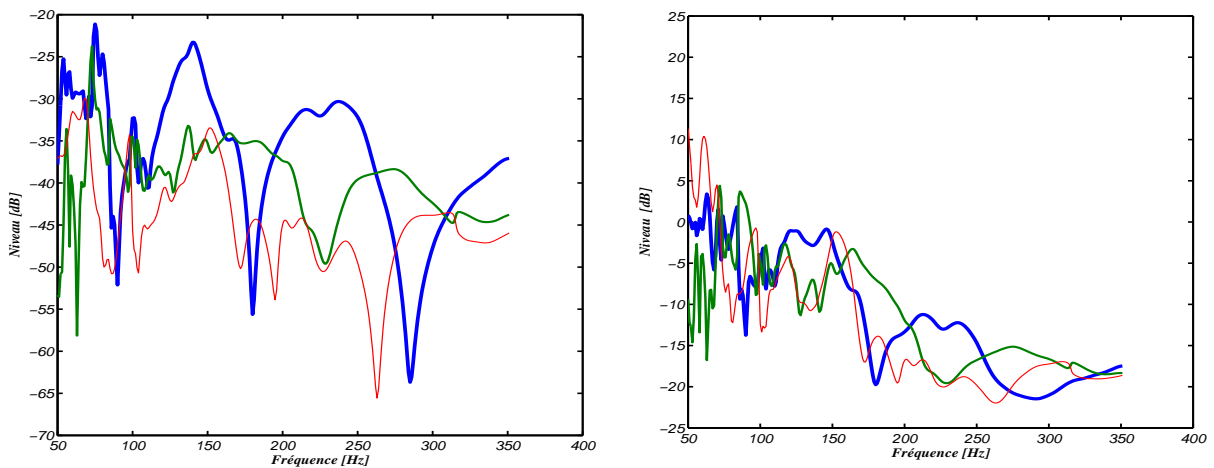


FIGURE 6.15 – $20\log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10\log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans une direction principale. Observation en un point du train avant et dans les trois directions principales.

Etant donné les remarques précédentes sur les FRFP moyennes, l'analyse vibroacoustique d'un système complexe tel que celui d'un véhicule automobile peut être simplifiée. Grâce

6.4. UTILISATION DE L'APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

à la faible dépendance des FRFP vis-à-vis de la direction d'excitation ou de la direction d'observation, le nombre de FRF définissant le système entre les points d'entrée et les points de sortie peut être divisé par neuf (3 directions d'excitation et 3 directions d'observation). La plus grande dépendance pour les DDL dans les directions tangentielles des parties minces s'explique par la faible quantité d'énergie associée à ces directions comme nous avons pu le constater en analysant les valeurs des mobilités moyennes dans ces directions. Ce problème n'existe pas pour les parties non minces de la structure pour lesquelles les valeurs de la mobilité moyenne dans les trois directions sont équivalentes.

6.4.2.2 FRF et FRFP moyennes acoustiques

Pour la cavité acoustique on compare d'abord les FRFP acoustiques moyennes aux FRF acoustiques moyennes pour une excitation en un point de la cavité et pour une observation en un autre point de cette même cavité.

Afin de faciliter les explications qui suivent, la cavité acoustique est divisée en trois zones : la zone avant, la zone centrale et la zone arrière avec quatre points dans chaque zone (voir figure 6.16).

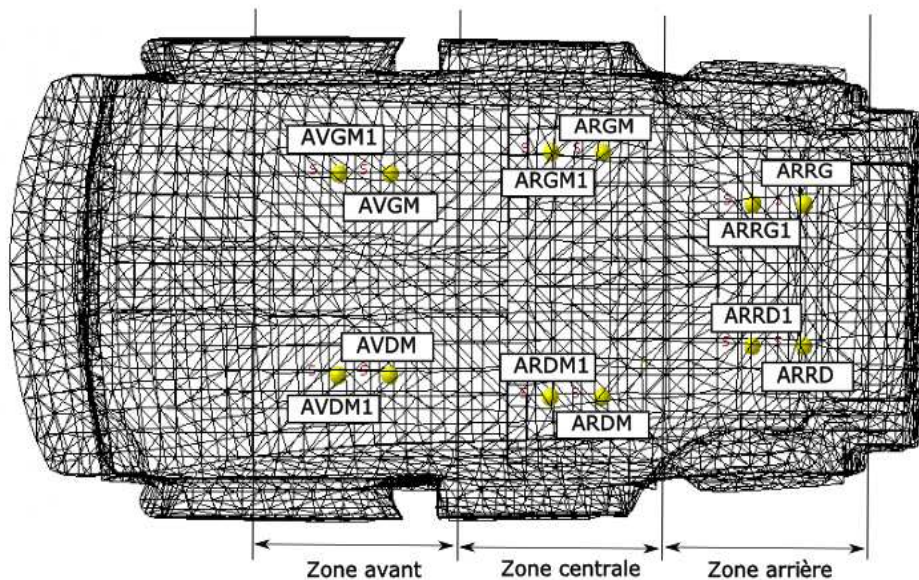


FIGURE 6.16 – Vue du dessous du maillage de la cavité acoustique avec les positions des points d'excitation et des points d'observation.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

Les figures 6.17 à 6.19 montrent les valeurs moyennes $[T^{loc}(\omega)]$ des FRF classiques (figures de gauche) comparées à celles des FRFP moyennes $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ (figures de droite) pour une excitation en un point de la cavité acoustique et pour une observation en un autre point de cette même cavité. Le point d'excitation est le point ARRG pour la figure 6.17, le point AVDM pour la figure 6.18 et le point AVGM pour la figure 6.19.

Le point d'observation est le point ARGM1 pour la figure 6.17, le point ARDM1 pour la figure 6.18 et le point AVDM1 pour la figure 6.19.

On peut remarquer qu'il y a une réduction importante de la dynamique générale des graphes de FRFP sur toute la bande pour la figure 6.17, sur la bande supérieure à 150 Hz pour la figure 6.18 et sur la bande supérieure à 300 Hz pour la figure 6.19. Ceci confirme que la dynamique des FRFP dépend de la fréquence et de la distance entre les points d'excitation et d'observation.

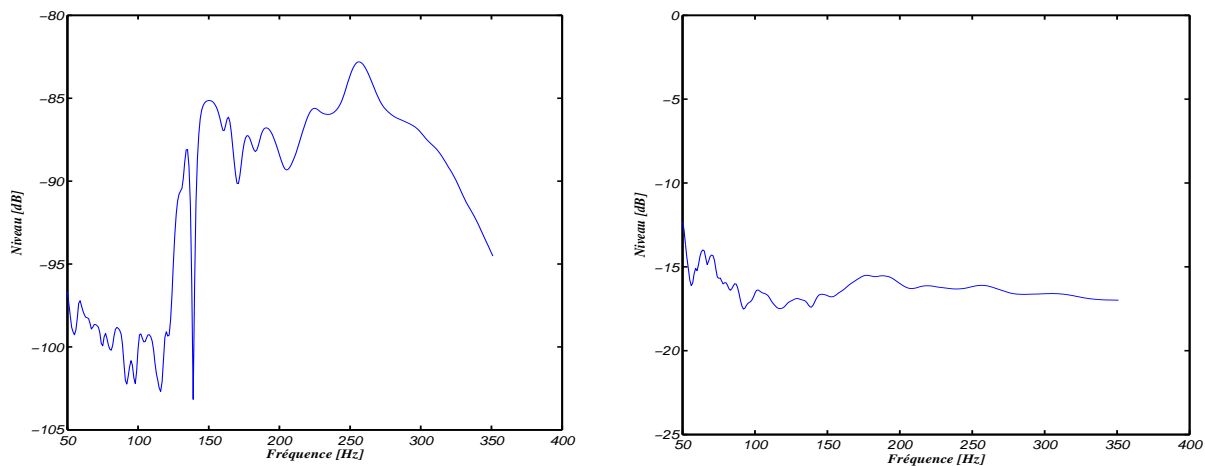


FIGURE 6.17 – $20 \log_{10}$ de la FRF moyenne (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ de la FRFP moyenne (figure de droite). Excitation au point ARRG et observation au point ARGM1 situés dans la cavité acoustique.

6.4. UTILISATION DE L'APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

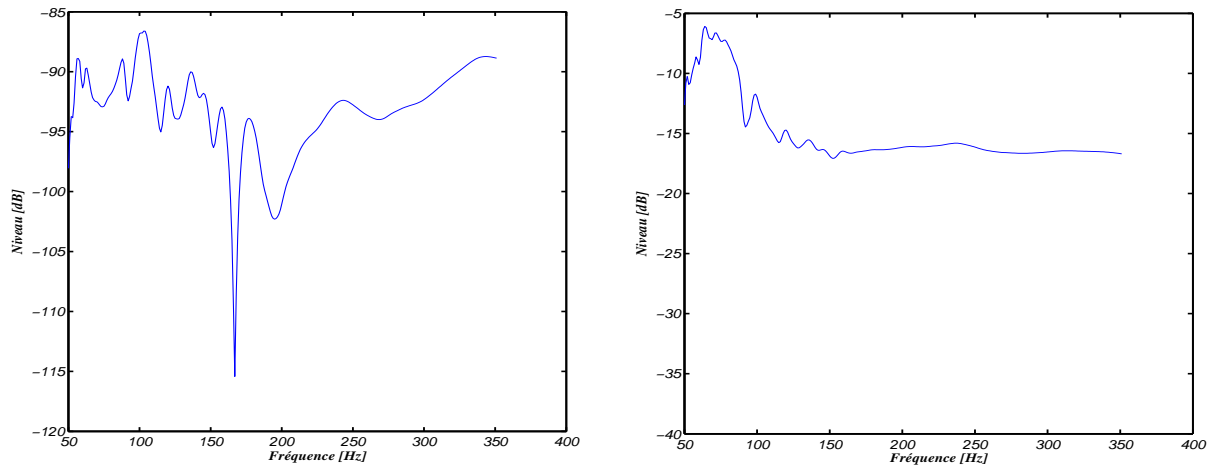


FIGURE 6.18 – $20 \log_{10}$ de la FRF moyenne (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ de la FRFP moyenne (figure de droite). Excitation au point AVGM et observation au point ARDM1 situés dans la cavité acoustique.

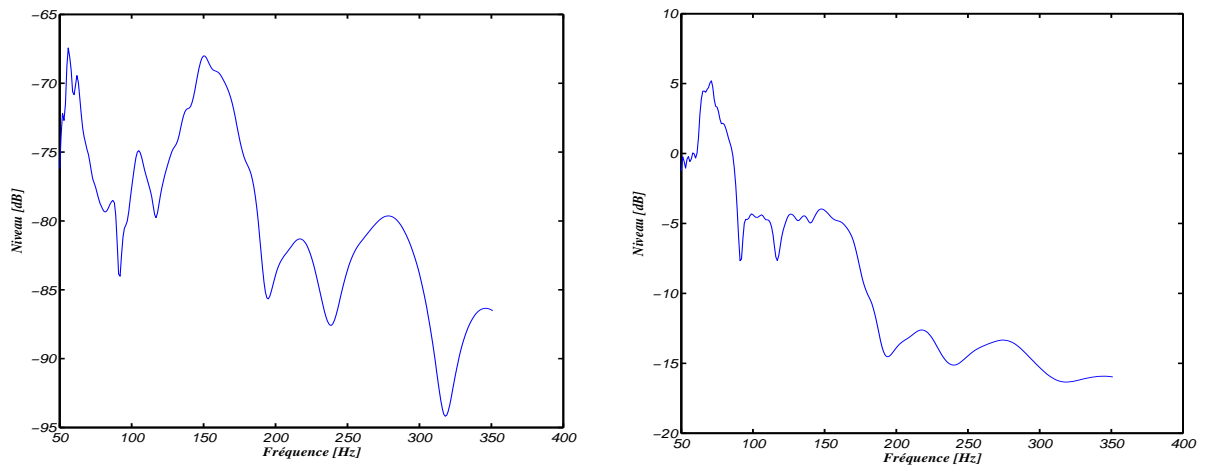


FIGURE 6.19 – $20 \log_{10}$ de la FRF moyenne (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ de la FRFP moyenne (figure de droite). Excitation au point AVDM et observation au point AVDM1 situés dans la cavité acoustique.

6.4.2.3 FRF et FRFP moyennes vibroacoustiques

On s'intéresse à présent aux résultats du cas vibroacoustique pour lequel l'excitation est située en un point de la structure et l'observation en un point de la cavité acoustique.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

Les figures 6.20 à 6.23 montrent les valeurs moyennes $[T^{loc}(\omega)]$ des FRF classiques (figures de gauche) comparées à celles des FRFP $[\underline{\xi}^{loc}(\omega)]$ (figures de droite) pour des excitations suivant les trois directions principales en un point de la structure, et pour une observation en un point de la cavité acoustique. Le point d'excitation de la structure est un point du train avant pour les figures 6.20 et 6.21, un point du support moteur pour la figure 6.22 et un point du pavillon pour la figure 6.23.

Le point d'observation est le point ARDM pour la figure 6.20, le point ARRG pour la figure 6.21 et 6.23 et le point ARRD pour la figure 6.22.

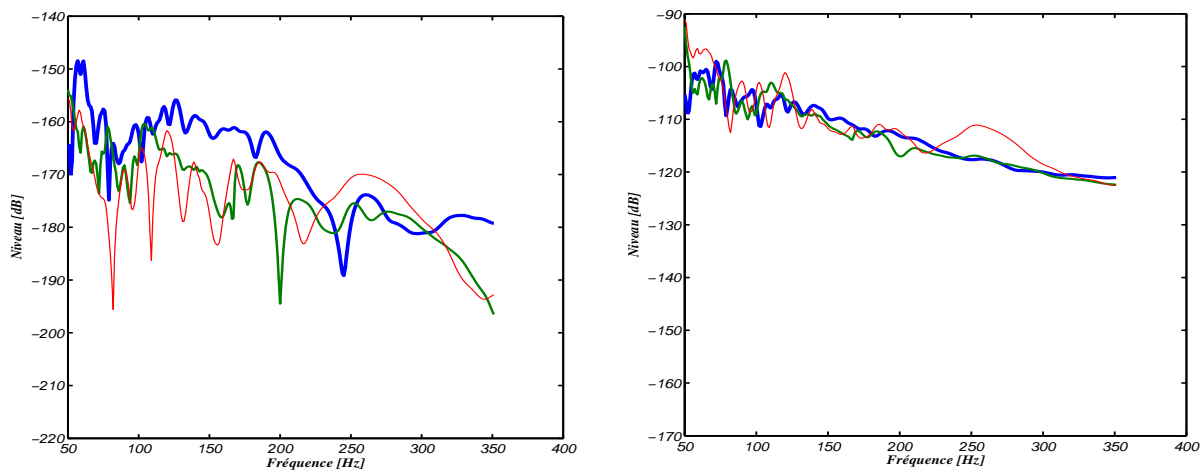


FIGURE 6.20 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation au point du train avant et dans les trois directions principales. Observation au point ARDM de la cavité acoustique.

6.4. UTILISATION DE L'APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

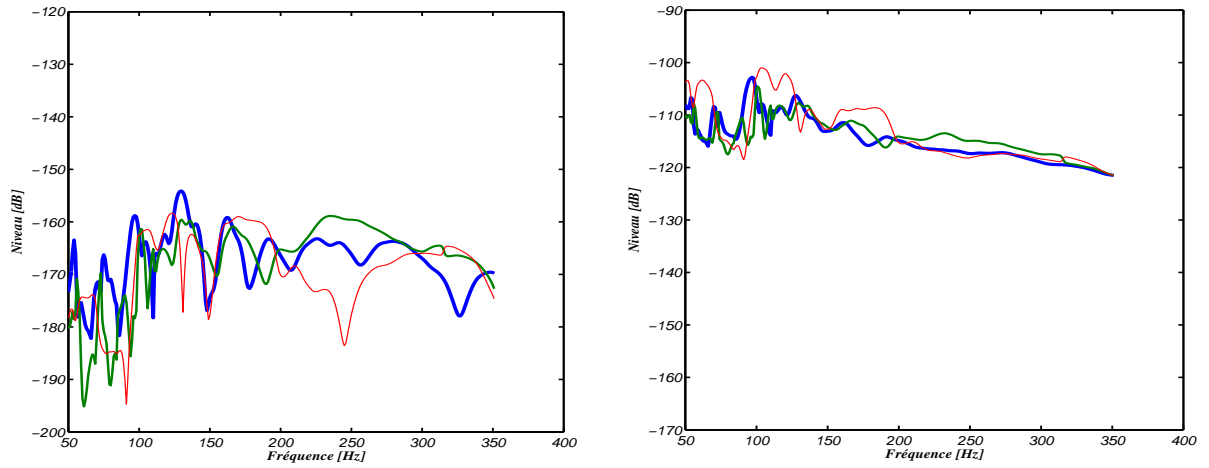


FIGURE 6.21 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans les trois directions principales. Observation au point ARRГ de la cavité acoustique.

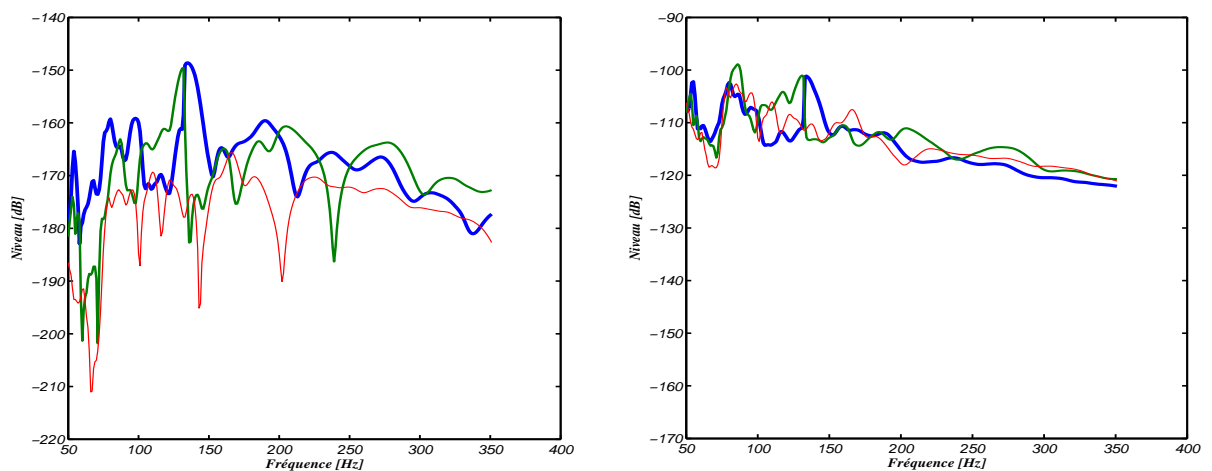


FIGURE 6.22 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans les trois directions principales. Observation au point ARRД de la cavité acoustique.

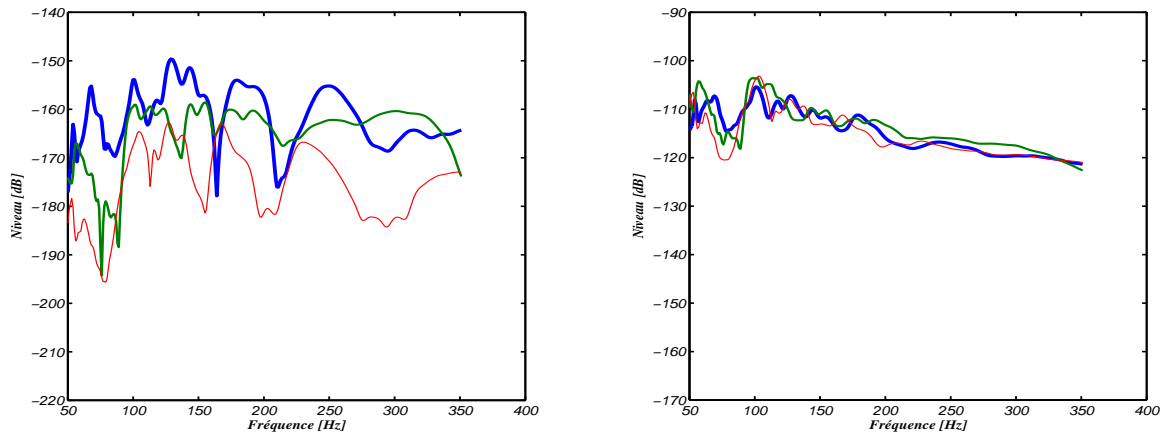


FIGURE 6.23 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans les trois directions principales. Observation au point ARRГ de la cavité acoustique.

Nous pouvons remarquer sur ces quatre figures que si une excitation est appliquée dans les trois directions principales du point situé sur la structure, alors les graphes des FRFP moyennes ont des valeurs très proches et donc, les FRFP vibroacoustiques moyennes, également, indépendantes de la direction d'excitation. Il est toutefois à noter que les FRFP vibroacoustiques dépendent plus de la fréquence que les FRFP vibratoires ou acoustiques mais elles restent moins dépendantes de la fréquence que les FRF vibroacoustiques correspondantes. On note également que les FRFP dans les quatre figures sont très proches. Ceci s'explique non seulement par l'existence des interactions locales entre les points d'excitation (le train avant et les supports moteur) mais aussi par le fait que les points de la cavité ont un comportement similaire vis-à-vis de l'excitation appliquée à la structure.

6.5 Comportement spatial et comportement fréquentiel des FRF et FRFP moyennes

Après avoir observé le comportement des FRFP moyennes comparées aux FRF moyennes, pour les cas vibratoire, acoustique, et vibroacoustique, on souhaite à présent observer le comportement de celles-ci pour une excitation en un DDL et des observations en des point situés géométriquement dans une zone spatiale définie dite zone fonctionnelle (exemple pare-brise, pavillon, cavité, etc).

6.5.1 FRF et FRFP moyennes vibratoires

Les figures 6.24 à 6.27 montrent les valeurs moyennes $[\underline{T}^{loc}(\omega)]$ des FRF classiques (figures de gauche) comparées à celles des FRFP moyennes $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ (figures de droite) pour des excitations dans une direction principale en un point de la structure situé dans une zone fonctionnelle donnée et pour des observations en tous les points de la structure dans une autre zone fonctionnelle et pour une ou trois directions principales. Le point d'excitation et la direction d'excitation de la structure sont, un point sur le support moteur et une seule direction principale pour les figures 6.24 et 6.26 et un point du train avant et une seule direction principale pour la figure 6.25 et 6.27.

La zone d'observation et les directions d'observations sont, le pavillon et les trois directions principales pour la figure 6.24, le plancher d'assise et les trois directions principales pour la figure 6.25, le pavillon et la direction principale normale pour la figure 6.26 et le plancher d'assise et la direction principale normale pour la figure 6.27.

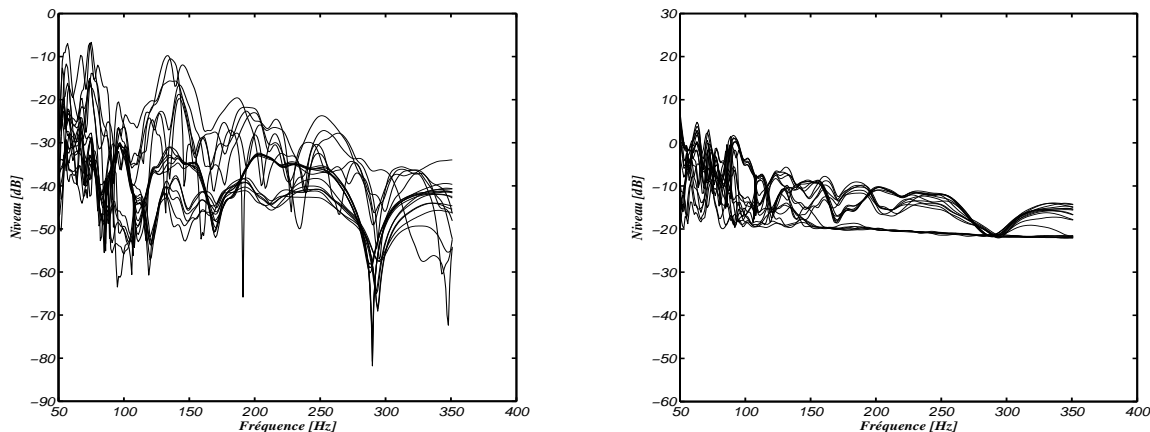


FIGURE 6.24 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans une direction principale. Observation en 6 points du pavillon et dans les 3 directions principales.

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

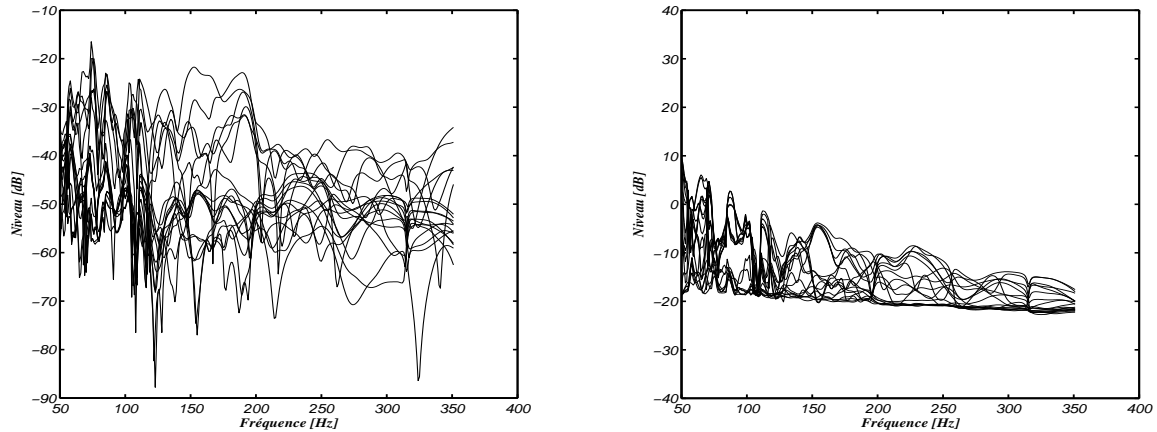


FIGURE 6.25 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans une direction principale. Observation en 6 points du plancher d'assise et dans les 3 directions principales.

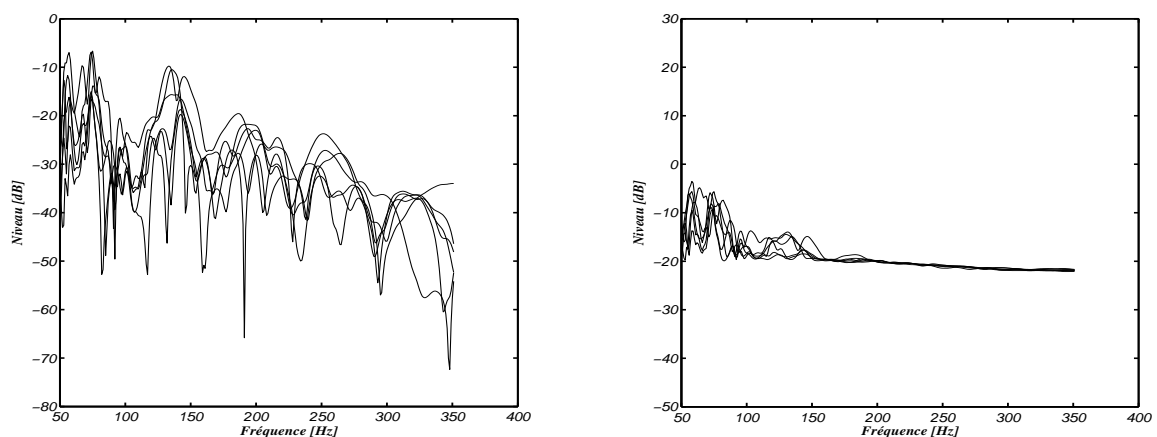


FIGURE 6.26 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans une direction principale. Observation en tous les points du pavillon et dans la direction principale normale.

6.5. COMPORTEMENT SPATIAL ET COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL DES FRF ET FRFP MOYENNES

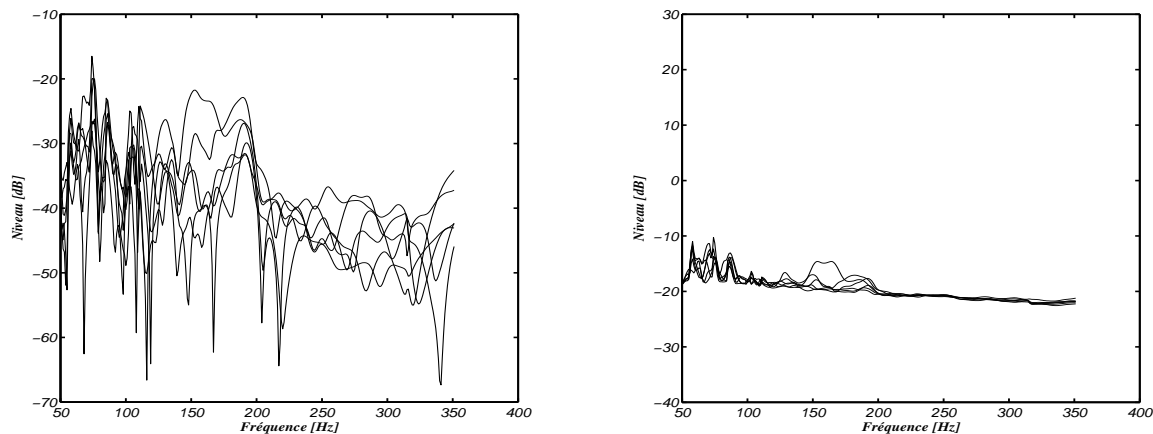


FIGURE 6.27 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans une direction principale. Observation en tous les points du plancher d’assise et dans la direction principale normale.

L’analyse des quatre figures de droite relatives aux FRFP moyennes montre que les réponses prennent des valeurs voisines constantes en fréquence pour toutes les observations qui sont suivant la direction principale normale aux parties minces considérées de la structure, ce qui n’est pas le cas des FRF moyennes. Ces résultats montrent en outre qu’il y a bien un comportement spatialement homogène par zone fonctionnelle.

La figure 6.28 confirme que lorsque l’excitation et l’observation sont dans la même zone fonctionnelle le regroupement des FRFP est moindre dans la bande de fréquence analysée mais il est à noter que la tendance de regroupement apparaît au voisinage de 350 Hz et se confirmerait en plus hautes fréquences.

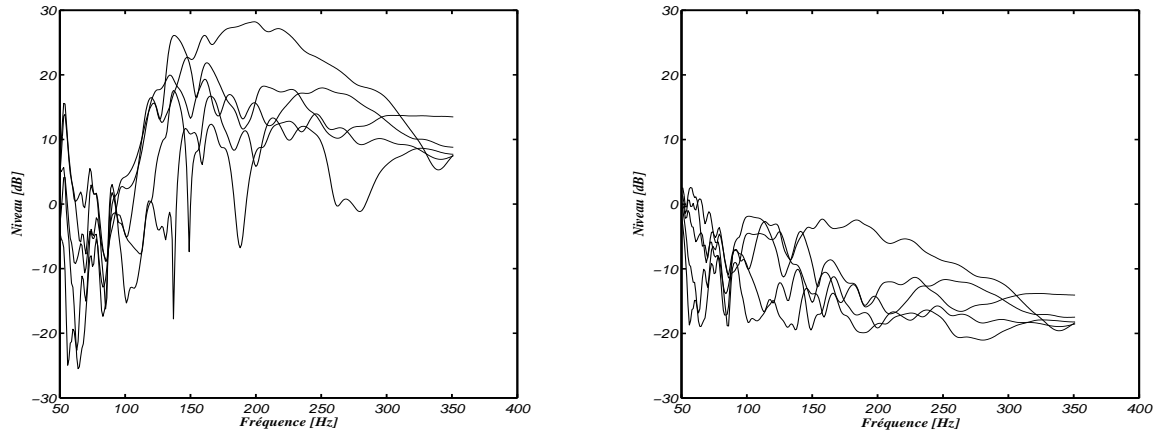


FIGURE 6.28 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du pavillon et dans la direction principale normale. Observation en 5 points du pavillon et dans la direction principale normale.

6.5.2 FRF et FRFP moyennes acoustiques

L'analyse conduite précédemment pour les FRFP vibratoires est maintenant présentée pour les FRFP acoustiques. Les douze points d'excitation et d'observation de la cavité acoustique sont définis à la figure 6.2 de droite et à la figure 6.16. Les douze points sont regroupés en trois zones de la cavité acoustique.

Les figures 6.29 et 6.30 montrent les valeurs moyennes $[\underline{T}^{loc}(\omega)]$ des FRF classiques (figures de gauche) comparées à celles des FRFP $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ (figures de droite) pour une excitation en un point de la cavité acoustique et pour des observations aux onze autres points de la cavité. Le point d'excitation est le point ARRG pour la figure 6.29 et le point AVDM1 pour la figure 6.30.

6.5. COMPORTEMENT SPATIAL ET COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL DES FRF ET FRFP MOYENNES

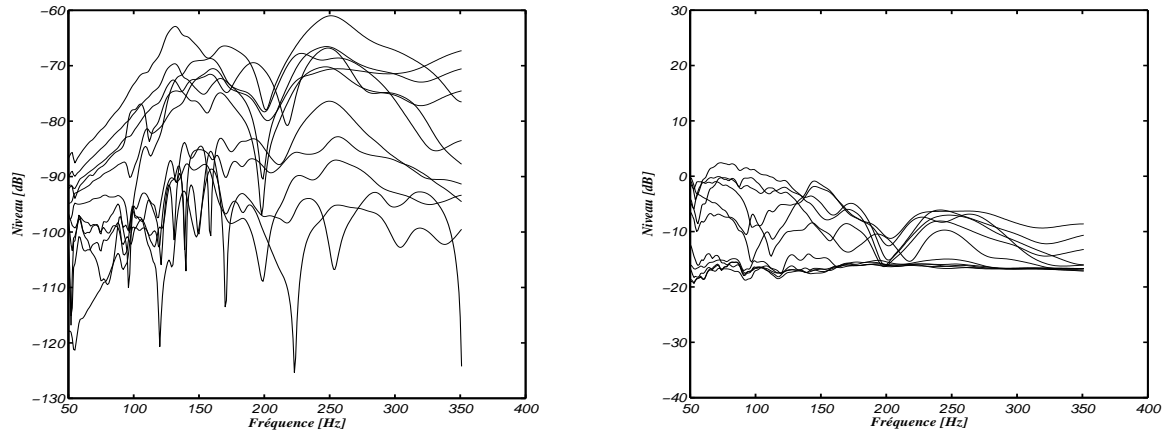


FIGURE 6.29 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation au point ARRГ de la cavité acoustique. Observations aux onze autres points de la cavité acoustique.

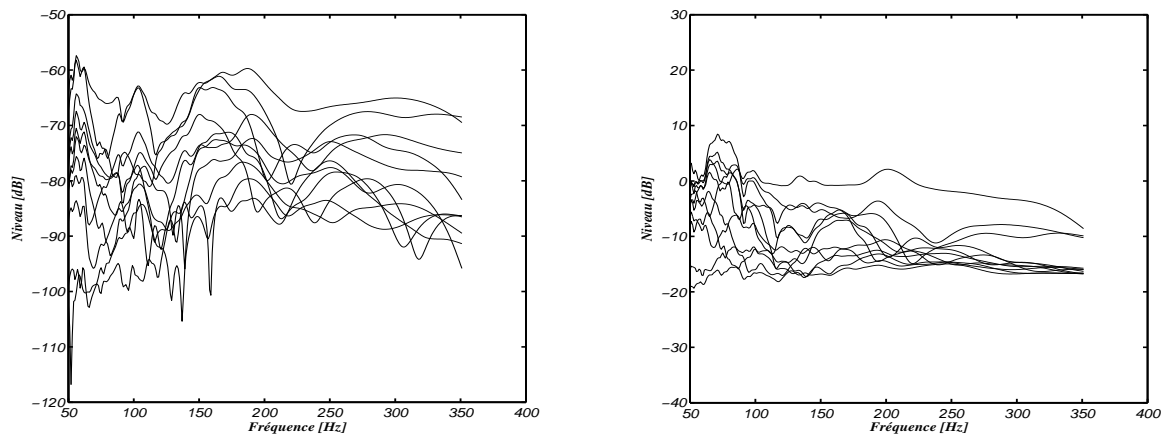


FIGURE 6.30 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation au point AVDM1 de la cavité acoustique. Observations aux onze autres points de la cavité acoustique.

On observe au travers de ces deux figures qu'il n'y a pas "regroupement" des FRFP acoustiques lorsque l'excitation est une source acoustique dans la cavité dans la bande fréquentielle analysée. Toutefois on peut voir une tendance de regroupement par zone

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

fonctionnelle apparaît lorsque la fréquence croît. En fait cette tendance se confirme en plus haute fréquence. On rappelle que le phénomène de regroupement dépend de la distance entre excitation et observation et de la fréquence.

6.5.3 FRF et FRFP moyennes vibroacoustique

On s'intéresse dans ce paragraphe aux FRFP moyennes pour une excitation appliquée en un point de la structure et pour les douze points d'observation dans la cavité acoustique. On évalue ici le comportement pour les trois zones de la cavité.

Les figures 6.31 et 6.32 montrent les valeurs moyennes $[\underline{T}^{loc}(\omega)]$ des FRF classiques (figures de gauche) comparées à celles des FRFP $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ (figures de droite) pour une excitation dans une direction principale en un point de la structure et pour des observation aux douze points de la cavité acoustique. Le point d'excitation de la structure est un point du support moteur pour la figure 6.31 et un point du train avant pour la figure 6.32.

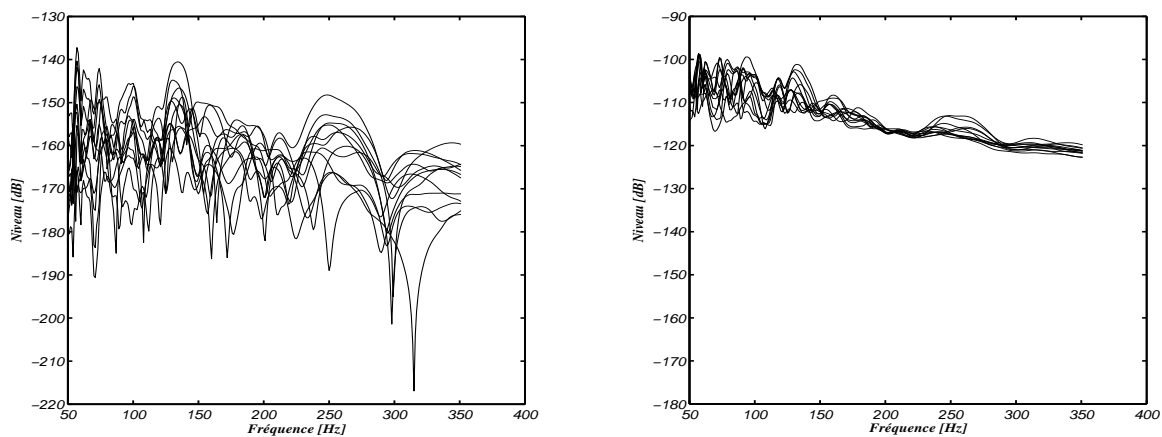


FIGURE 6.31 – $20\log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10\log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans une direction principale. Observation aux 12 points de la cavité acoustique.

6.5. COMPORTEMENT SPATIAL ET COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL DES FRF ET FRFP MOYENNES

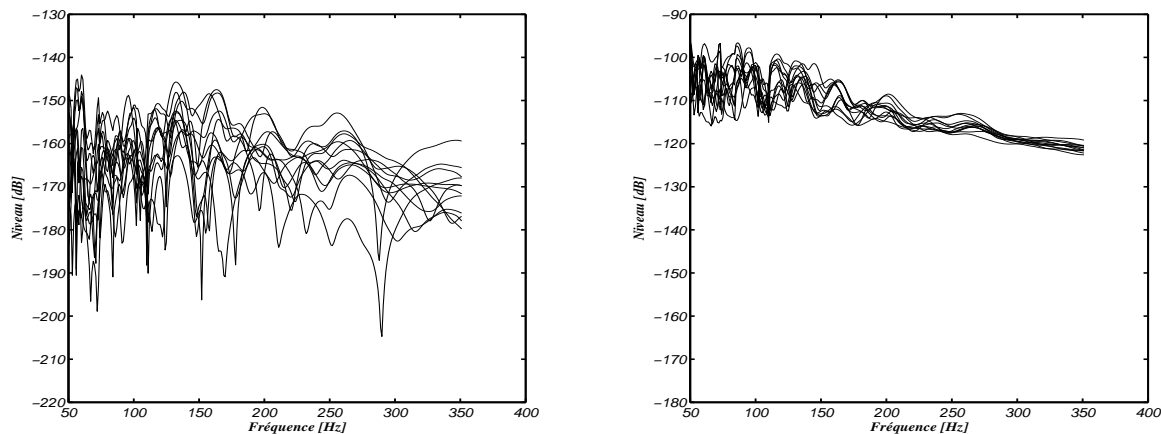


FIGURE 6.32 – $20 \log_{10}$ des FRF moyennes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP moyennes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans une direction principale. Observation aux 12 points de la cavité acoustique.

Ces deux figures montrent clairement que pour les FRFP vibroacoustiques, c'est-à-dire pour une excitation structure et une observation acoustique, on ne peut pas distinguer, pour la bande de fréquence analysée, les trois zones de la cavité, cette dernière ayant une réponse homogène.

6.5.4 Application de l'approche énergétique à un modèle déterministe

Les équations de la méthode énergétique introduite au chapitre 5 sont valables aussi bien pour un modèle sans incertitudes (donc déterministe) que pour un modèle avec incertitudes (qui est ici stochastique). L'utilisation d'un modèle stochastique a permis le moyennage statistique pour la construction du modèle vibroacoustique énergétique. Afin d'évaluer quantitativement dans le cadre de cette application le rôle joué par ce moyennage statistique, nous montrons quelques résultats sans ce moyennage statistique c'est-à-dire pour le modèle déterministe sans incertitudes. La figure 6.33 montre les FRF déterministes (figure de gauche) et les FRFP déterministes (figure de droite) pour la configuration de la figure 6.9, c'est-à-dire pour des excitations dans les trois directions principales en un point situé sur le train avant et pour une observation dans la direction principale normale en un point du pavillon. La figure 6.34 montre les FRF déterministes (figure de gauche) et les FRFP déterministes (figure de droite) pour la configuration de

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

la figure 6.19, c'est-à-dire pour des excitations dans les trois directions principales en un point situé sur le support moteur et pour une observation au point ARR-D de la cavité acoustique. En comparant ces figures on constate que le moyennage statistique joue un rôle important dans les propriétés observées des FRFP.

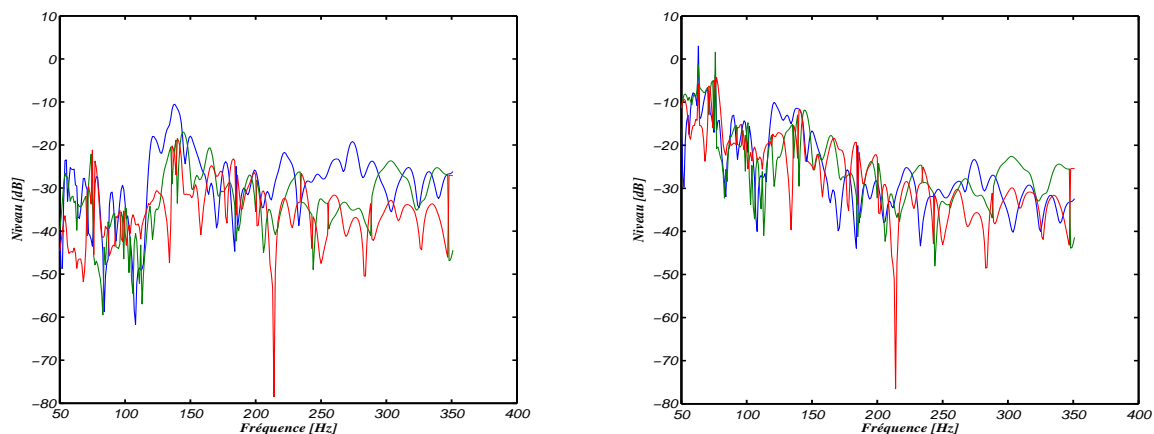


FIGURE 6.33 – $20 \log_{10}$ des FRF déterministes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP déterministes (figure de droite). Excitation en un point du train avant et dans les trois directions principales. Observation en un point du pavillon et dans la direction principale normale.

6.5. COMPORTEMENT SPATIAL ET COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL DES FRF ET FRFP MOYENNES

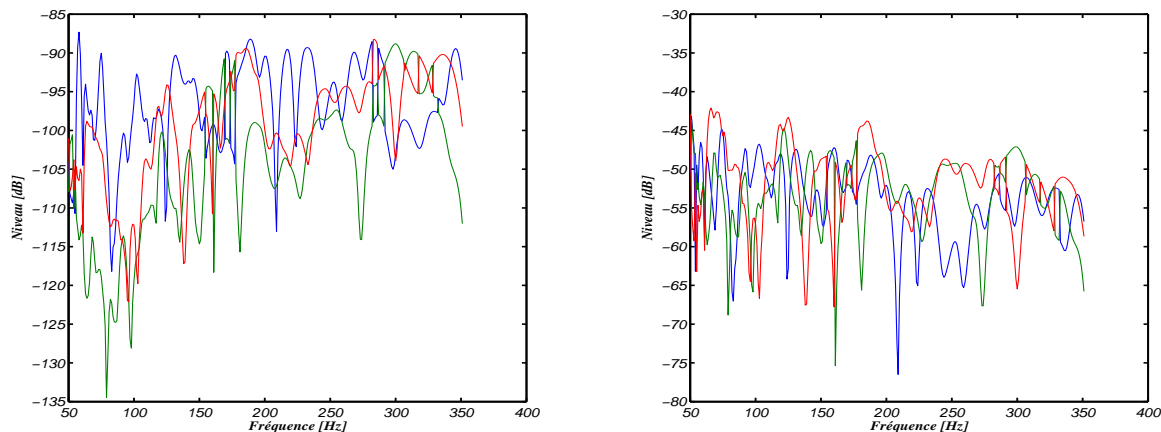


FIGURE 6.34 – $20 \log_{10}$ des FRF déterministes (figure de gauche) et $10 \log_{10}$ des FRFP déterministes (figure de droite). Excitation en un point du support moteur et dans les trois directions principales. Observation au point ARRD de la cavité acoustique.

6.5.5 Conclusions concernant le comportement spatial et fréquentiel des FRF et FRFP moyennes

Sur le plan général du comportement des FRF moyennes des systèmes vibroacoustiques constitués d'un milieu élastique occupant un domain borné de l'espace est couplé à une cavité acoustique bornée, cette application montre que l'on obtient les résultats attendus et connus pour un tel système vibroacoustique sachant que la bande de fréquence analysée recouvre la bande *BF* et une partie de la bande *MF*. Par contre l'utilisation des FRFP moyennes fournit des tendances très intéressantes puisque le moyennage statistique, la double normalisation entrée-sortie par les mobilités et l'utilisation des coordonnées locales construites à partir des directions principales des mobilités moyennes, permettent dans la majorité des cas d'une part de diminuer la dynamique des FRF et d'autre part de diminuer le taux de variation de ces FRF en fonction de la fréquence. Ces propriétés vont permettre de définir une partition par zone du système vibroacoustique, les FRFP moyennes étant approximativement constantes spatialement par zone. (voir chapitres 7 et 8).

6.6 Domaines de confiance des FRF et FRFP stochastiques et indices de dispersion

Dans ce paragraphe les domaines de confiance des FRF et des FRFP sont construites en utilisant la méthode des quantiles suivant la formulation décrite au paragraphe 4.4.

La figure 6.35 montre les domaines de confiance des FRF et FRFP pour une excitation dans une direction principale en un point situé sur le train avant et pour une observation dans la direction principale normale en un point situé sur le pavillon. La figure 6.36 montre les zones de confiance des FRF et FRFP pour une excitation au point ARGM de la cavité acoustique et pour une observation au point AVDM1 de la cavité. Finalement, la figure 6.37 montre les zones de confiance des FRF et FRFP pour une excitations dans la direction principale normale en un point situé sur le train avant et pour une observation au point ARRG de la cavité. Nous pouvons remarquer sur ces trois figures que l'amplitude de la domaine de confiance de la FRFP est du même ordre de grandeur que celle de la FRF pour tout le domaine de fréquence analysée. La sensibilité aux incertitudes est similaire sur toute la bande de fréquence pour les vibrations et l'acoustique mais est plus faible dans la bande 50 à 130 Hz pour la vibroacoustique. En fait la bande basse fréquence correspond à $[0, 130]$ Hz alors que la bande moyenne fréquence commence à 130 Hz

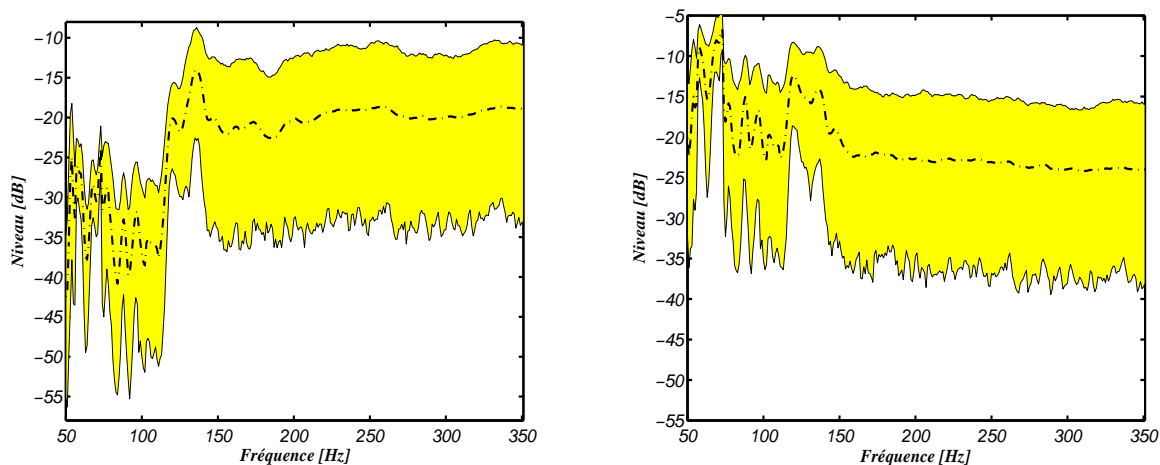


FIGURE 6.35 – Zone de confiance en $20 \log_{10}$ de la FRF (figure de gauche) et en $10 \log_{10}$ de la FRFP (figure de droite) pour une excitation dans une direction principale en un point situé sur le train avant et pour une observation dans la direction principale normale en un point situé sur le pavillon. Domaine de confiance (zone grisée ou zone jaune pour la version couleur). Moyenne statistique de la réponse (trait pointillé).

6.6. DOMAINES DE CONFIANCE DES FRF ET FRFP STOCHASTIQUES ET INDICES DE DISPERSION

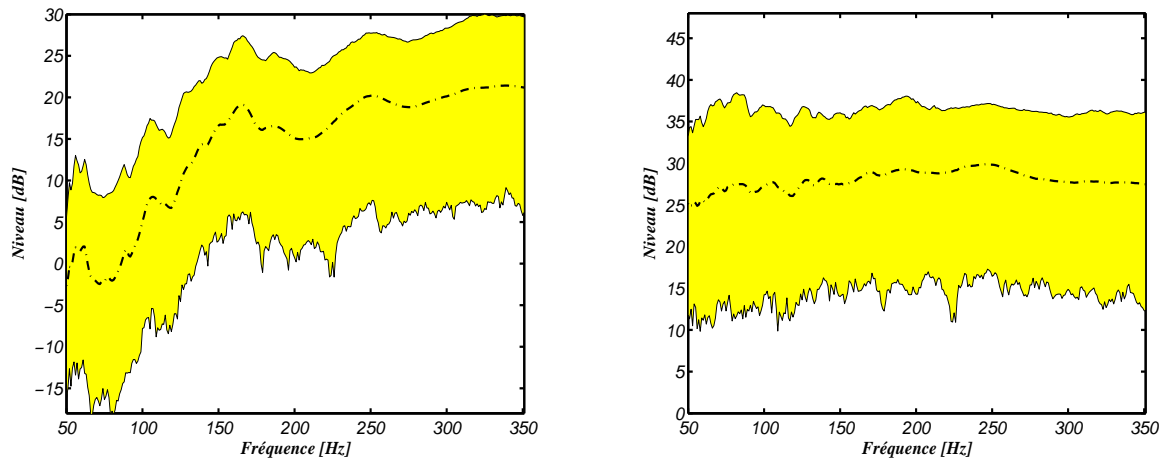


FIGURE 6.36 – Zone de confiance en $20 \log_{10}$ de la FRF (figure de gauche) et en $10 \log_{10}$ de la FRFP (figure de droite) pour une excitation au point ARRГ de la cavité et pour une observation au point AVDM1 de la cavité. Domaine de confiance (zone grisée ou zone jaune pour la version couleur). Moyenne statistique de la réponse (trait pointillé)

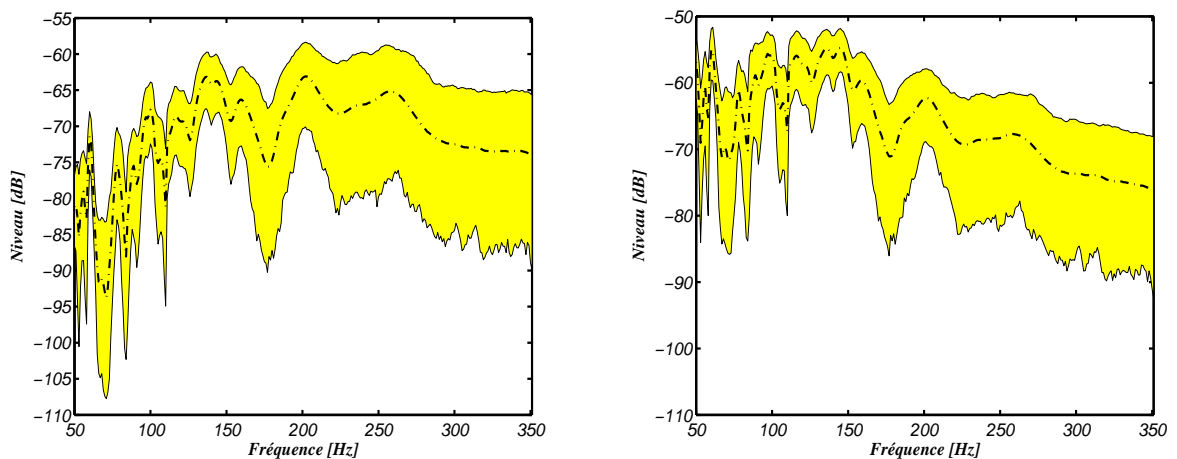


FIGURE 6.37 – Zone de confiance en $20 \log_{10}$ de la FRF (figure de gauche) et en $10 \log_{10}$ de la FRFP (figure de droite) pour une excitation dans la direction principale normale en un point situé sur le train avant et pour une observation au point ARGМ de la cavité. Domaine de confiance (zone grisée ou zone jaune pour la version couleur). Moyenne statistique de la réponse (trait pointillé).

CHAPITRE 6. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE

Les figures des domaines de confiance ne permettent pas une comparaison suffisamment précise de la dispersion. Nous proposons donc de comparer les indices de dispersion $\gamma(\omega)$ introduits au paragraphe 4.4.3 pour les FRF et FRFP. Les figures 6.38 à 6.40 montrent les graphes des indices de dispersion $\gamma(\omega)$ des FRFP et des FRF correspondant aux configurations des figures 6.35 à 6.37. Nous pouvons remarquer au travers des valeurs des indices de dispersion des FRFP que pour le cas vibratoire et le cas vibroacoustique, les grandeurs énergétiques sont moins robustes aux incertitudes pour la bande inférieure à 130 Hz (bande basse fréquence pour la structure) et sont comparables pour la bande supérieure à 130 Hz (bande moyenne fréquence pour la structure). Par contre pour le cas acoustique les grandeurs énergétiques sont plus robustes sur toute la bande de fréquence analysée qui correspond en fait à une bande basse fréquence pour l'acoustique.

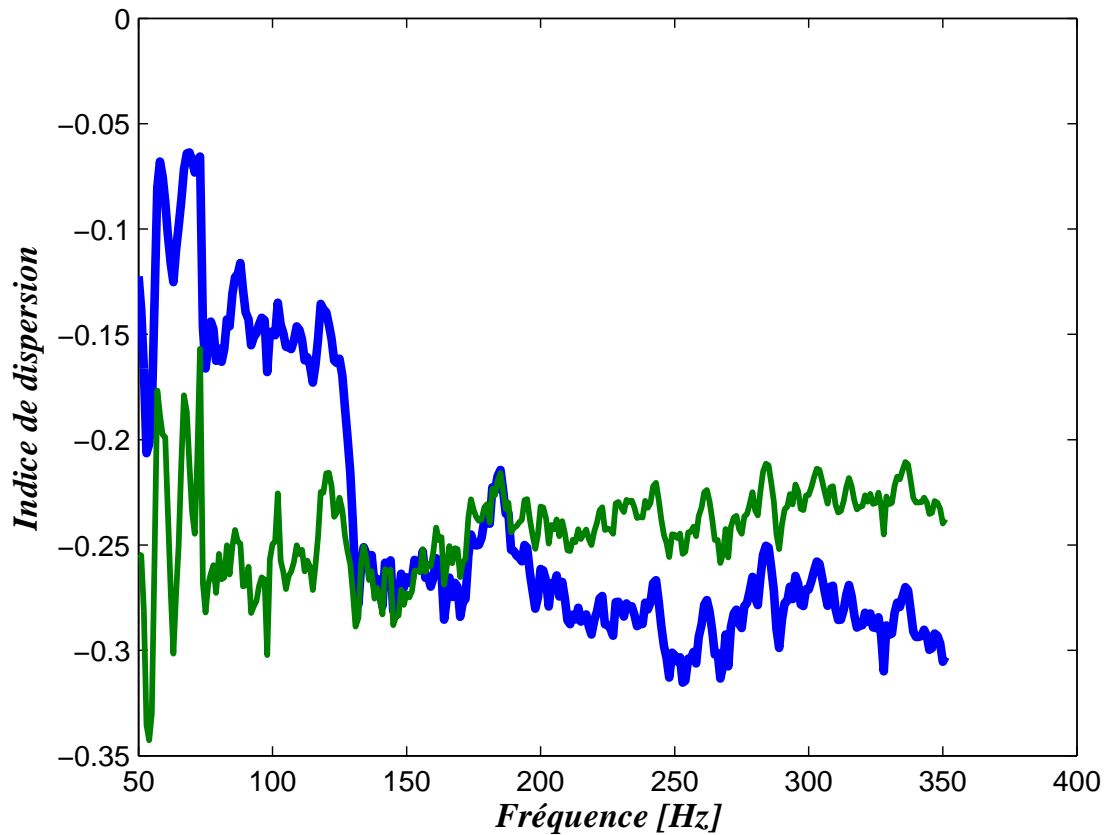


FIGURE 6.38 – Indice de dispersion $\gamma(\omega)$ associé à la figure 6.35 pour la FRF (ligne épaisse) et pour la FRFP (Ligne mince).

6.6. DOMAINES DE CONFIANCE DES FRF ET FRFP STOCHASTIQUES ET INDICES DE DISPERSION

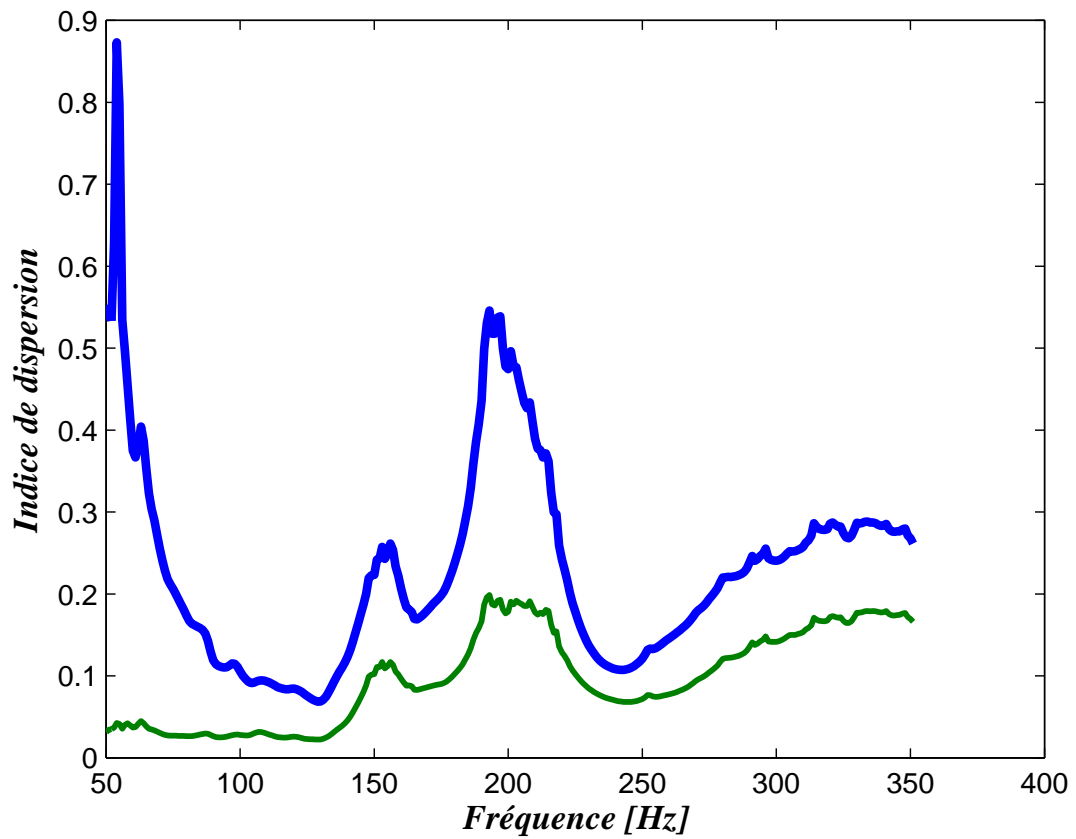


FIGURE 6.39 – Indice de dispersion $\gamma(\omega)$ associé à la figure 6.36 pour la FRF (ligne épaisse) et pour la FRFP (ligne mince).

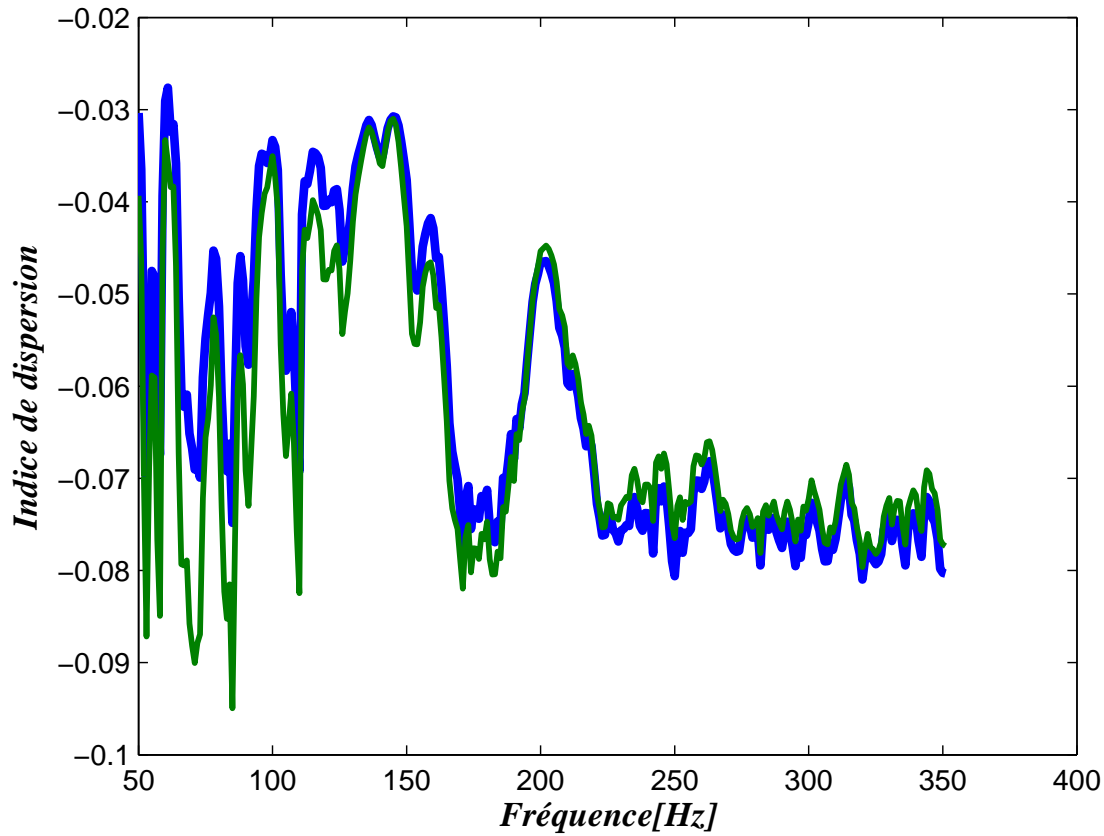


FIGURE 6.40 – Indice de dispersion $\gamma(\omega)$ associé à la figure 6.37 pour la FRF (ligne épaisse) et pour la FRFP (ligne mince).

La figure 6.41 montre le domaine de confiance de la mobilité en un point du support moteur dans une direction principale. On note que cette mobilité, ainsi que toutes les mobilités comme nous avons pu le vérifier pour cette application est relativement robuste aux incertitudes avec un accroissement de la sensibilité aux incertitudes avec la fréquence. Cette faible sensibilité aux incertitudes est liée au fait que la mobilité est une grandeur essentiellement locale. Cette analyse est confirmée par le graphe de l'indice de dispersion montré à la figure 6.42.

6.6. DOMAINES DE CONFIANCE DES FRF ET FRFP STOCHASTIQUES ET INDICES DE DISPERSION

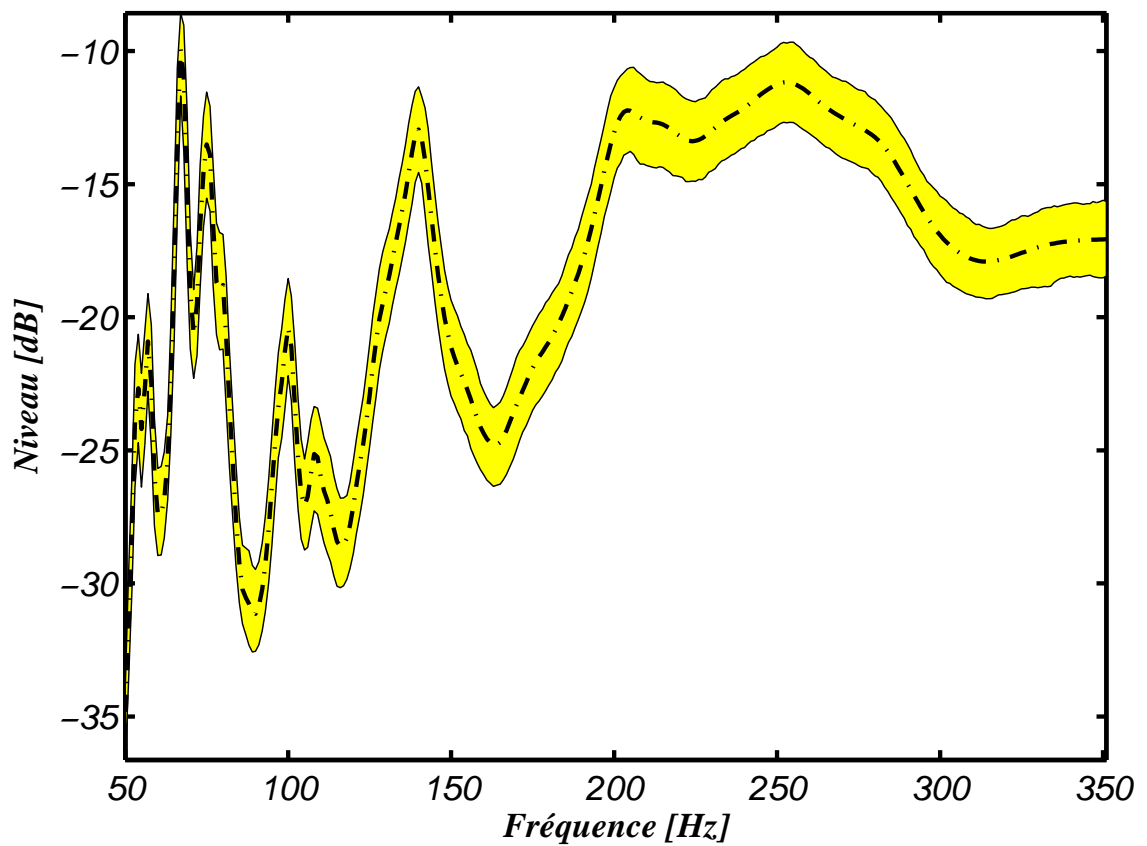


FIGURE 6.41 – Domaine de confiance de la mobilité dans la direction principale en un point du support moteur. Domaine de confiance (zone grisée ou zone jaune pour la version couleur). Moyenne statistique de la réponse (trait pointillé).

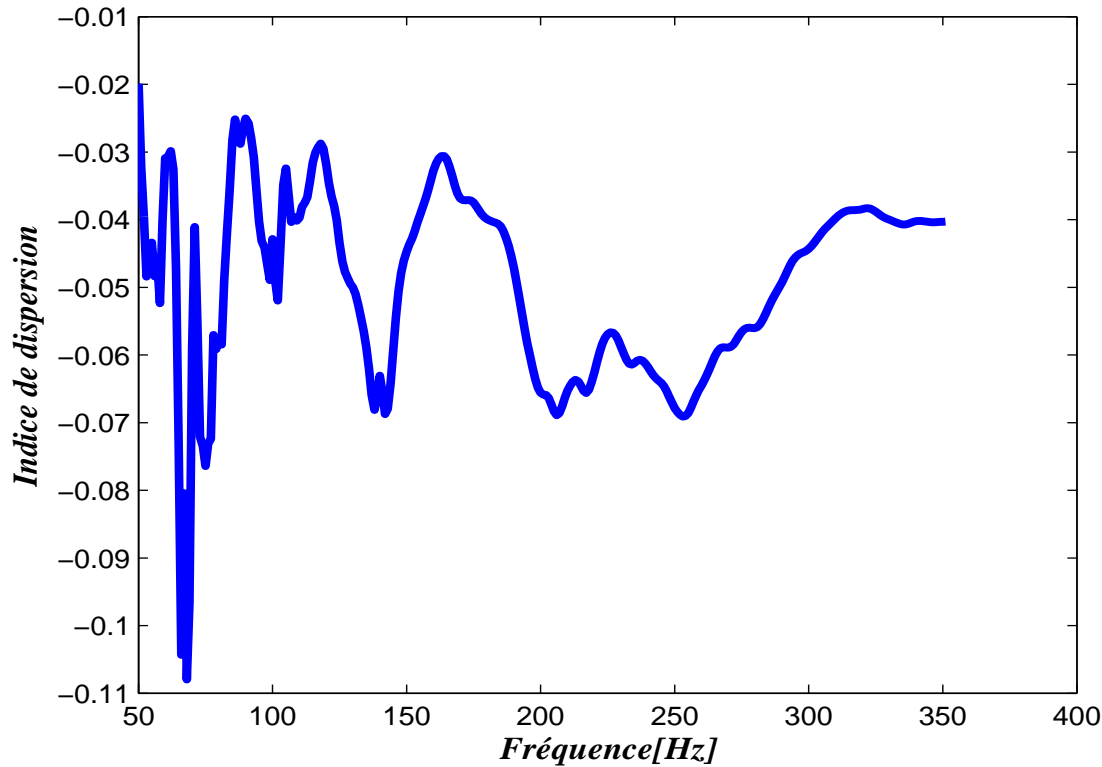


FIGURE 6.42 – Indice de dispersion $\gamma(\omega)$ associé à la figure 6.41 pour la mobilité.

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une validation numérique de l'approche énergétique pour un véhicule automobile.

Nous avons montré que les FRFP moyennes tendent à être indépendantes de la fréquence et de la direction d'excitation ou d'observation à partir d'une certaine fréquence. Nous avons également montré que les FRFP moyennes sont indépendantes de la position exacte de l'observation ou de l'excitation, ce qui implique un comportement spatialement homogène par zone (la dimension de chaque zone restant à définir, ce qui sera fait dans le chapitre 7 consacré au développement de la méthode de partition par zone).

Nous avons montré l'intérêt de la séparation des DDL dans le plan et hors plan pour les parties minces de la structure en introduisant des coordonnées locales. Enfin nous avons montré l'apport du moyennage statistique sur le comportement des FRFP moyennes.

7

Modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Sommaire

7.1	Introduction	96
7.2	Construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié	96
7.3	Critère de construction de la partition par zone	98
7.4	Conclusion	99

Ce Chapitre est consacré à la construction des critères qui permettent de définir une partition par zone du modèle énergétique simplifié. Une telle partition sera telle que les FRFP moyennes soient approximativement constantes spatialement par zone.

La partition par zone du modèle vibroacoustique énergétique simplifié ajoute à la robustesse du processus de conception et simplifie l'analyse du système vibroacoustique étudié.

7.1 Introduction

Dans le chapitre 5, une formulation énergétique pour l'analyse vibroacoustique des structures complexes a été introduite à partir du modèle vibroacoustique réduit stochastique introduit au Chapitre 3. Une première validation de cette approche a été présentée en chapitre 6.

Grâce à l'introduction de la notion de FRFP (grandeur énergétique adimensionnelle), définie comme une normalisation des FRF usuelles par rapport aux mobilités d'entrée et de sortie, et grâce au moyennage statistique rendu possible par l'utilisation d'un modèle stochastique résultant de la prise en compte des incertitudes, nous avons pu voir dans l'application des propriétés intéressantes, comme l'indépendance des FRFP moyennes de la position exacte de l'excitation ou de l'observation, pour définir des critères qui permettent de construire une partition par zone.

Afin de parvenir à la partition par zone du modèle nous avons établi des critères, appelés critères de partition par zone. Ces critères seront utilisés pour l'identification des différentes zones.

7.2 Construction du modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Pour faciliter la compréhension du développement présenté, on considère la distribution spatiale des points d'excitation et des points d'observation qui est schématisée à la figure 7.1.

Soit J et O les ensembles des DDL d'excitation et des DDL d'observation, tels que $J = \{k_q, q = 1, \dots, \mu\}$ et $O = \{j_p, p = 1, \dots, \nu\}$, où μ et ν sont les nombres de DDL d'excitation et d'observation.

Nous avons vu dans le chapitre 6 qu'il existait un comportement spatial homogène des FRFP sous certaines hypothèses. Ce comportement laisse à penser qu'il existe une partition par zone telle que les valeurs des FRFP moyennes aient approximativement les mêmes valeurs (valeurs constantes) par zone. Cela signifie que si la zone d'excitation J et la zone d'observation O sont assez éloignées, et si les FRFP moyennes entre ces deux zones sont approximativement spatialement constantes, alors on peut remplacer la ma-

7.2. CONSTRUCTION DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

trice des FRFP moyennes entre les deux zones par une valeur scalaire. On est alors amené pour construire la partition par zone, à introduire le paramètre scalaire réel positif $\underline{e}_{OJ}(\omega)$ tel que, pour tout ω dans la bande de fréquence \mathbb{B} , pour tout $p = 1, \dots, \nu$ et pour tout $q = 1, \dots, \mu$, on ait

$$[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]_{j_p k_q} \simeq \underline{e}_{OJ}(\omega) \quad . \quad (7-1)$$

On cherche donc à voir si il existe une partition pour laquelle l'équation (7-1) est valable. On souhaite d'abord trouver l'expression du scalaire $\underline{e}_{OJ}(\omega)$, homogène aux éléments de la matrice $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$. Pour J fixé, le système vibroacoustique étant excité aux μ DDL appartenant à l'ensemble J , on définit le scalaire $\underline{e}_{OJ}(\omega)$ tel que,

$$\underline{e}_{OJ}(\omega) = \frac{\sum_{p=1}^{\nu} \underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)_{j_p}^{ref}}{\underline{\pi}_{in,J}^{loc} \sum_{p=1}^{\nu} [\underline{\mathbf{Y}}^{loc}(\omega)]_{j_p j_p}} \quad . \quad (7-2)$$

Ce scalaire est positif et adimensionnelle. Il est à noter que l'équation (7-2) permet de calculer la valeur numérique de $\underline{e}_{OJ}(\omega)$ en fonction de $\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)^{ref}$ défini par l'équation (5-53), $\underline{\pi}_{in,J}^{loc}$ et $[\underline{\mathbf{Y}}^{loc}(\omega)]$ qui sont calculés sans aucune approximation à partir des FRF stochastiques par la méthode énergétique. On construit alors l'approximation suivante du vecteur aléatoire de la fonction de spectre des réponses aléatoires en vitesse

$$\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)_{j_p}^{part} = \underline{e}_{OJ}(\omega) [\underline{\mathbf{Y}}^{loc}(\omega)]_{j_p j_p} \underline{\pi}_{in,J}^{loc} \quad , \quad (7-3)$$

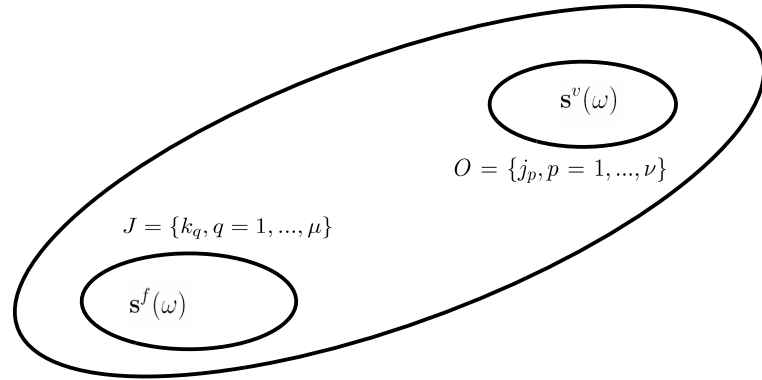


FIGURE 7.1 – Représentation schématique des DDL d'excitation et d'observation

où l'exposant *part* indique que la valeur est associée à une partition donnée et où $\underline{\pi}_{in,J}^{loc}$ est la valeur moyenne de la densité de puissance aléatoire injectée dans le système aux DDL d'excitation de l'ensemble J et est définie par

$$\underline{\pi}_{in,J}^{loc} = \sum_{q=1}^{\mu} \underline{\pi}_{in}^{loc,q} \quad , \quad (7-4)$$

CHAPITRE 7. MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

dans laquelle $\underline{\pi}_{in}^{loc,q}$ est déterminée à l'aide de l'équation (5-48) exprimée dans les coordonnées locales définies par les directions principales de mobilité locale moyenne.

L'erreur associée au remplacement de la matrice $[\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]$ par le scalaire $\underline{e}_{OJ}(\omega)$ pour les ensemble J et O d'une partition peut être évaluée en calculant deux types d'erreur. Pour les DDL d'observation j_p appartenant à l'ensemble O et pour tout ω appartenant à la bande d'analyse \mathbb{B} , on introduit la mesure $\Delta(\omega)_{j_p,J}$ de l'erreur définie par

$$\Delta(\omega)_{j_p,J} = |\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)_{j_p}^{ref} - \underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)_{j_p}^{part}| \quad . \quad (7-5)$$

L'équation (7-5) permet de mesurer l'erreur d'approximation introduite en calculant $\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)$ par $\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)^{part}$ donnée par l'équation (7-3) au lieu d'utiliser la vraie valeur $\underline{\mathbf{s}}_{loc}^v(\omega)_{j_p}^{ref}$.

La seconde mesure de l'erreur que nous considérons pour juger du niveau de l'approximation introduite est définie comme suit. Pour tout DDL d'observation j_p appartenant à l'ensemble O , pour tout DDL d'excitation k_q appartenant à l'ensemble J et pour tout ω dans la bande d'analyse \mathbb{B} on a

$$\varepsilon_{\mathcal{E}}(\omega)_{j_p k_q} = |[dB(\omega)^{ref}]_{j_p k_q} - [dB(\omega)^{part}]_{j_p k_q}| \quad , \quad (7-6)$$

où

$$[dB(\omega)^{ref}]_{j_p k_q} = 10 \log_{10} [\underline{\mathcal{E}}^{loc}(\omega)]_{j_p k_q} \quad , \quad (7-7)$$

et où

$$[dB(\omega)^{part}]_{j_p k_q} = 10 \log_{10} [E_{OJ}(\omega)^{part}]_{j_p k_q} \quad , \quad (7-8)$$

avec $[E_{OJ}(\omega)^{part}]_{j_p k_q} = \underline{e}_{OJ}(\omega)$.

L'équation (7-6) mesure la précision avec laquelle l'approximation $[dB(\omega)^{part}]$ de la matrice des FRFP est calculée par rapport à la vraie valeur $[dB(\omega)^{ref}]$.

7.3 Critère de construction de la partition par zone

Le critère de construction de la partition par zone va être défini par une grandeur scalaire liée à un couple O et J et basée sur la mesure de l'erreur $\Delta(\omega)_{j_p,J}$. Ce critère scalaire $cmqc(\omega)$ est appelé critère en moyenne quadratique centré, dépend de la fréquence et représente, pour J fixé, la moyenne quadratique centrée des composantes $\Delta(\omega)_{j_p,J}$ du vecteur $(\Delta(\omega)_{j_1,J}, \dots, \Delta(\omega)_{j_\nu,J})$, c'est-à-dire s'écrit

$$cmqc(\omega) = \frac{1}{\nu} \sum_{p=1}^{\nu} \{\Delta(\omega)_{j_p,J}\}^2 - \left\{ \frac{1}{\nu} \sum_{p=1}^{\nu} \Delta(\omega)_{j_p,J} \right\}^2 \quad . \quad (7-9)$$

On notera qu'il s'agit bien d'une grandeur scalaire alors que $\Delta(\omega)_{j_p, J}$ est une grandeur vectorielle. C'est pour éviter la manipulation d'un critère vectoriel que nous avons introduit un critère scalaire. On a vérifié au travers des applications que ce critère cmqc est très sensible aux modifications de la partition. La construction effective de la partition est menée de la manière suivante :

- (1) On se donne comme partition initiale par zone, le découpage en composants fonctionnels du système vibroacoustique (par exemple pour un véhicule automobile on distinguera le pare brise, le pavillon, le plancher d'assise etc.).
- (2) On trace le graphe $\omega \mapsto \text{cmqc}(\omega)$ pour la partition par zone ce qui permet de trouver la valeur ω^* telle que pour $\omega \geq \omega^*$, l'approximation est déclarée comme correcte. S'il n'existe pas un ω^* dans \mathbb{B} ou si ω^* est jugé trop grand il est nécessaire de définir une nouvelle partition par zone.
- (3) Pour définir la nouvelle partition par zone, pour tout ω dans \mathbb{B} , on visualise l'erreur en dessinant le graphe de la fonction $(p, q) \mapsto \varepsilon \mathcal{G}(\omega)_{j_p k_q}$. On peut alors déterminer les DDL qu'il faut changer de zone pour améliorer la partition par zone. Ce processus étant mené on retourne à l'étape (2) ci-dessus. Il est à noter que, si cette étape peut être effectuée "manuellement", il serait préférable d'utiliser un algorithme automatique. Cet algorithme n'a pas été développé dans le cadre de ce travail.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un nouveau modèle vibroacoustique énergétique simplifié qui s'appuie sur une partition par zone. Le calcul du vecteur des spectres aléatoires de la vitesse aléatoire de la réponse sépare clairement trois facteurs :

- La densité de puissance injectée qui permet de représenter globalement les effets de l'excitation.
- Une seule FRFP scalaire associée à une partition qui permet de décrire l'interaction entre deux zones.
- La matrice de mobilité locale moyenne en chaque point de la zone d'observation.

8

Validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Sommaire

8.1	Introduction	102
8.2	Définition d'une partition initiale par zone du modèle vibroacoustique énergétique simplifié	102
8.3	Evaluation du critère de partition par zone pour la partition initiale	104
8.4	Conclusion	121

Dans ce chapitre on présente une validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique simplifié, c'est-à-dire une validation de la méthode de partition par zone et une validation de la qualité de l'approximation construite dans le cadre de la méthode énergétique simplifiée.

8.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente une validation numérique de la théorie développée au chapitre 7. Le système vibroacoustique utilisé pour cette validation est le système présenté en paragraphe 6.1 et dont le modèle numérique est illustré à la figure 6.1.

8.2 Définition d'une partition initiale par zone du modèle vibroacoustique énergétique simplifié

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 6, il y a 84 DDL d'excitation et d'observation dans la structure et 12 DDL d'excitation et d'observation dans la cavité acoustique. La matrice $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ est alors une matrice, (84×84) pour le cas vibratoire, (12×12) pour le cas acoustique, et (84×12) pour le cas vibroacoustique.

Les résultats présentés au chapitre 6 ont montré que les parties minces de la structure ont une direction principale de mobilité privilégiée. Nous allons donc traiter séparément cette direction principale privilégiée et les deux autres directions principales pour ces parties minces, c'est-à-dire le pavillon, le pare-brise et le plancher d'assise. Les résultats ont également montré que pour étudier le comportement par zone (comportement spatialement homogène dans chaque zone) des FRFP, la zone d'excitation et la zone d'observation doivent être assez éloignées. Nous allons valider ces hypothèses dans cette application.

On étudie ici le système vibroacoustique pour les excitations et les observations définies ci-dessus. La figure 8.1 montre les quatre images de la matrice d'erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations et des observations aux 96 DDL choisis du système vibroacoustique, à 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz et 300 Hz. On peut remarquer que la structure de la matrice est une structure diagonale par blocs. Chaque bloc sur la diagonale représente des valeurs quasi-uniformes de l'erreur. Il a été noté que chaque bloc sur la diagonale correspond aux DDL situés sur l'un des composants fonctionnels du système vibroacoustique (cavité acoustique, pare brise, pavillon, train avant, etc.). Les blocs qui ne sont pas sur la diagonale représentent le niveau d'erreur sur les termes de couplage entre les différents composants. Sur les images de la figure 8.1 nous pouvons noter que l'erreur sur les termes de couplage entre la cavité acoustique et les composants de la structure est faible dans toute la bande de fréquence. La première conséquence de cette propriété est que la cavité acoustique peut être considérée comme une zone unique qu'il n'y a pas lieu de découper en sous-zones pour la bande de fréquence analysée.

8.2. DÉFINITION D'UNE PARTITION INITIALE PAR ZONE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

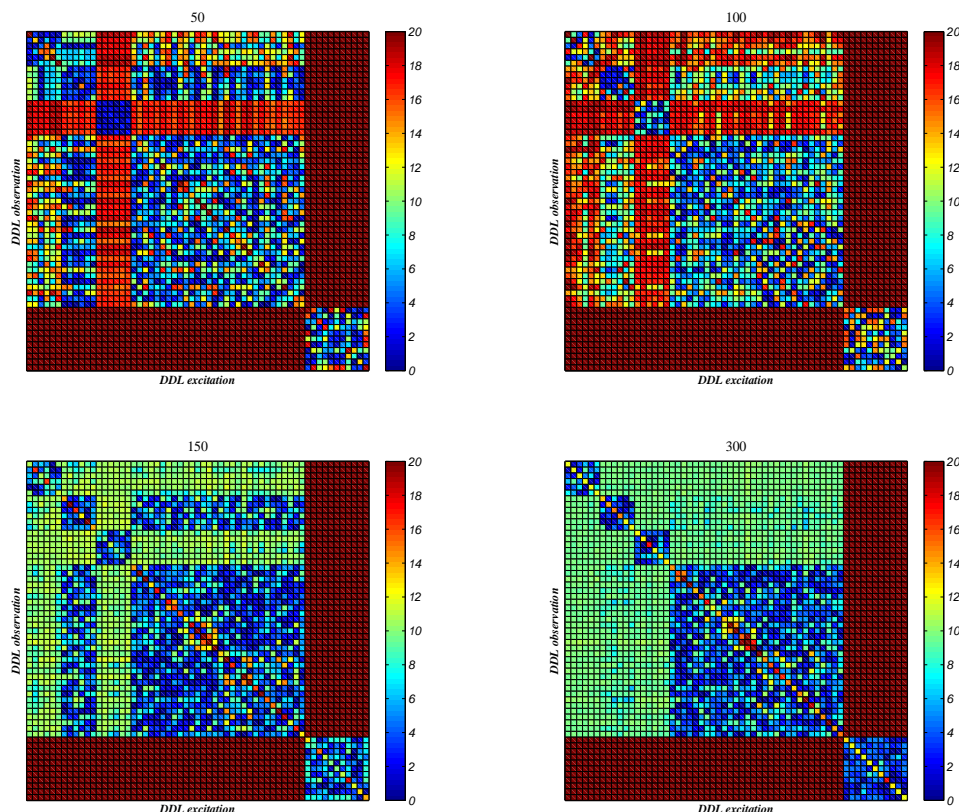


FIGURE 8.1 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations et des observations en tous les DDL choisis du système vibroacoustique, à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

Pour analyser le niveau d’erreur entre les termes couplés de la structure, nous considérons maintenant le bloc des 84 DDL de la structure et nous réévaluons la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour ces DDL.

La figure 8.2 montre les quatre images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations et des observations aux 84 DDL choisis de la structure à 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz et 300 Hz. Comme pour la figure 8.1, les blocs sur la diagonale correspondent aux composants fonctionnels de la structure. On peut voir une valeur élevée de l’erreur sur la diagonale ce qui est cohérent. Le train avant et le support moteur forment donc une seule zone que nous appellerons la zone du block avant (grand bloc diagonale en bas de la matrice). Jusqu’à environ de 200 Hz, les trois images concernées montrent des blocs extra-diagonaux (bandes horizontale et verticale) ayant un niveau d’erreur similaire à celui du bloc diagonal correspondant à la zone du block avant indiquant ainsi que le pare brise fait partie de la zone bloc avant.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

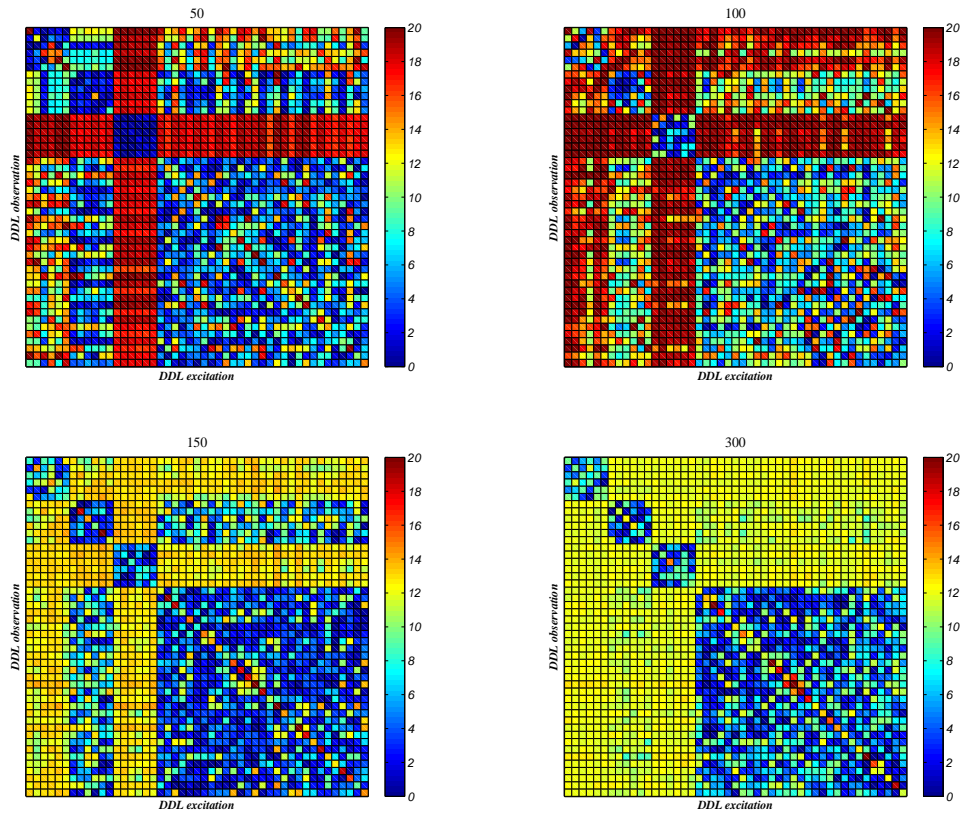


FIGURE 8.2 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon \mathcal{G}(\omega)$ pour des excitations et des observations en tous les DDL choisis de la structure à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

Pour résumer, la partition initiale en zones est constituée d’une zone bloc avant (train avant, supports moteur et pare brise jusqu’à 200 Hz), d’une zone planche assise, d’une zone pavillon, et d’une zone cavité. Il est important de noter que l’analyse des erreurs menée ci-dessus permet de définir une partition initiale par zone mais ne permet pas de définir encore le périmètre précis de chaque zone.

8.3 Evaluation du critère de partition par zone pour la partition initiale

Nous avons défini au paragraphe précédent une partition initiale par zone. Nous allons à présent évaluer le critère $cqmc$ défini par l’équation (7-9).

8.3.1 Cas vibratoire

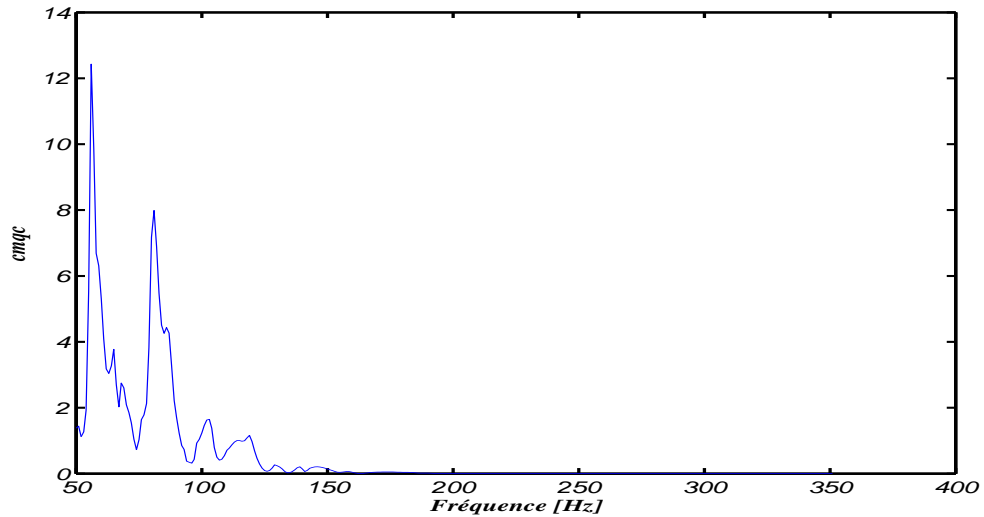


FIGURE 8.3 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations en tous les points de la zone du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points du pavillon.

Ce cas correspond à des excitations et des observations dans la structure. la figure 8.3 montre le graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations en tous les points du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points du pavillon. On note que la valeur de cqmc descend en dessous de la valeur 3 pour laquelle on peut distinguer deux zones différentes sur la figure 8.4 montrant les images correspondantes de la matrice d'erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

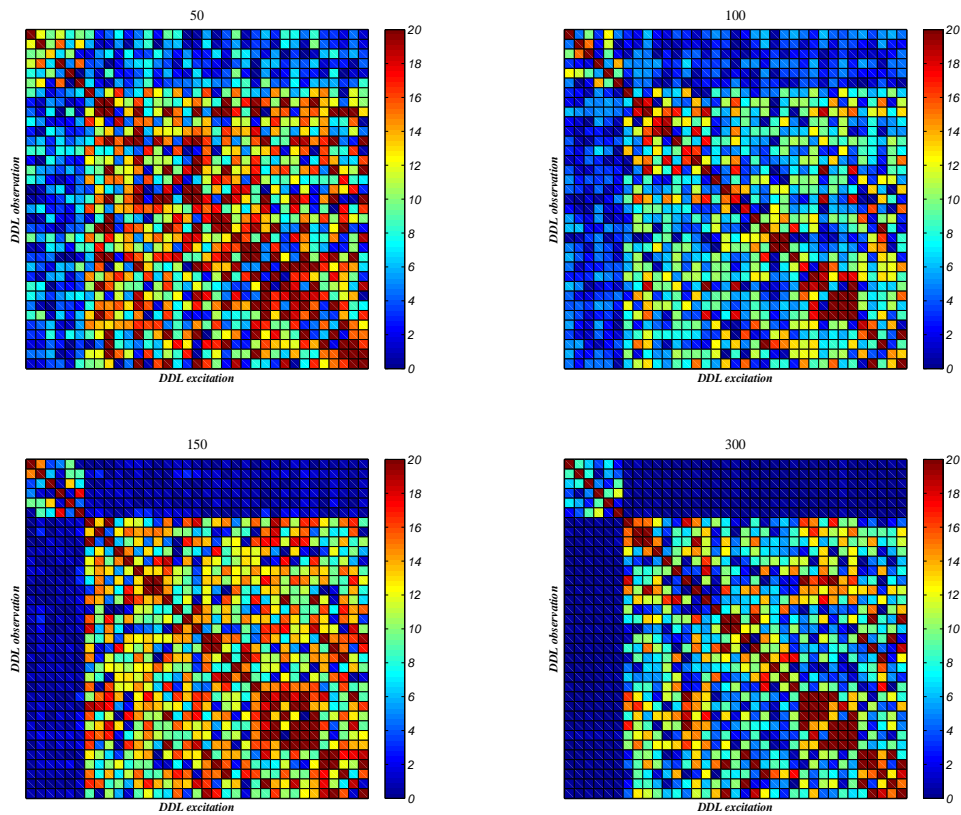


FIGURE 8.4 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations en tous les points de la zone du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points du pavillon à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

On souhaite étudier la capacité du critère de partition par zone à séparer effectivement différentes zones. Ci-après on la démontre en prenant la zone du pare brise et la zone du pavillon comme une seule zone de la partition. Nous évaluons le critère de partition par zone pour une excitation dans la zone du bloc avant sans le pare brise et pour une observation dans la zone regroupant la zone pavillon et la zone pare brise. La figure 8.5 montre le graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cmqc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour cette configuration. On remarque que les valeurs de la fonction cmqc sont élevées par rapport à celles montrées à la figure 8.3 et ne descendent en dessous de la valeur 3 qu’à partir de 200 Hz, fréquence à partir de laquelle le pare-brise ne peut plus être considéré dans la zone du block avant. On peut également remarquer ceci sur les images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ montrées à la figure 8.6 sur laquelle on distingue deux zones jusqu’à 200 Hz puis trois zones.

8.3. EVALUATION DU CRITÈRE DE PARTITION PAR ZONE POUR LA PARTITION INITIALE

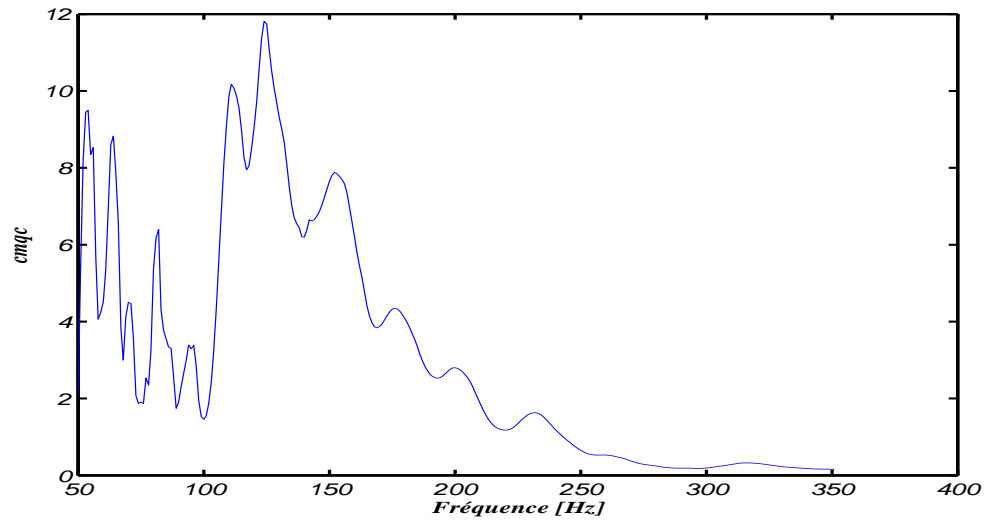


FIGURE 8.5 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations en tous les points de la zone du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points du pavillon et du pare brise.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

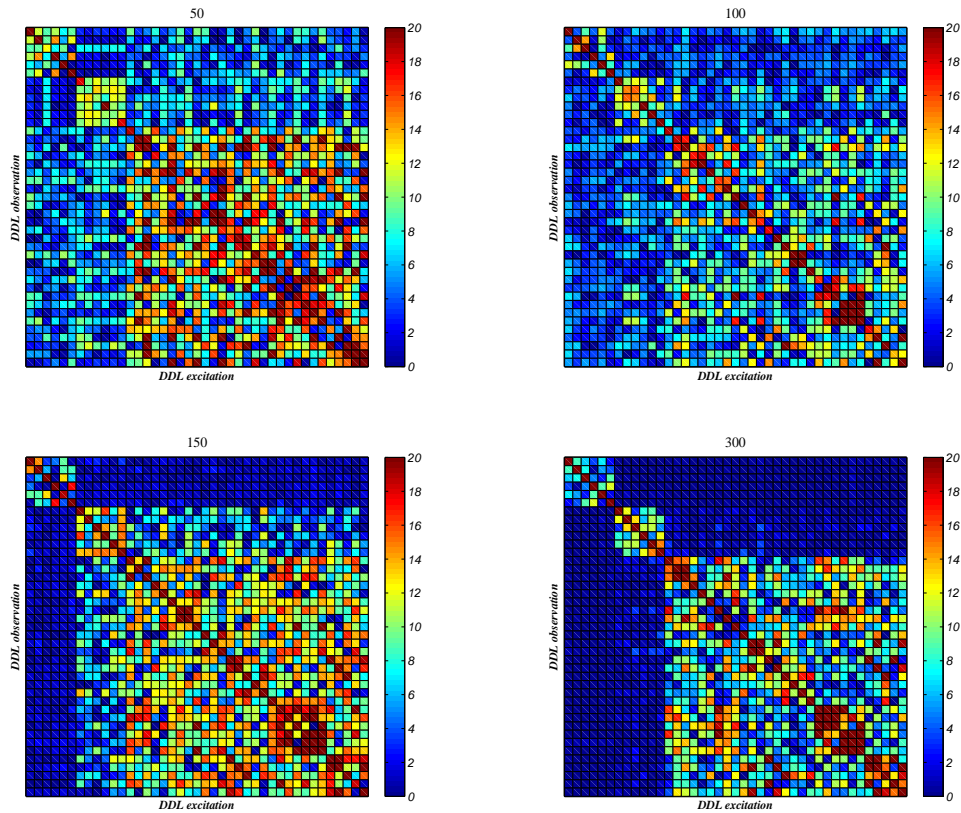


FIGURE 8.6 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations en tous les points de la zone du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points du pavillon et du pare brise à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

Nous allons maintenant remplacer la zone du pare-brise dans le cas précédent par la zone du plancher d’assise. Le graphe de la fonction $\omega \mapsto cqmc(\omega)$ en $10\log_{10}$ est montré à la figure 8.7 pour des excitations en tous les points de la zone du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points de la zone du pavillon et du plancher d’assise. On peut remarquer que les valeurs de la fonction $cqmc$ descendent en dessous de la valeur 3 à partir de 90 Hz. Dans ce cas, le critère n’indique pas la séparation entre les deux zones d’observation, mais indique plutôt la séparation entre la zone d’observation et la zone d’excitation. Nous pouvons remarquer sur la figure 8.8 que les graphes des matrices d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ permettent d’identifier trois zones distinctes.

8.3. EVALUATION DU CRITÈRE DE PARTITION PAR ZONE POUR LA PARTITION INITIALE

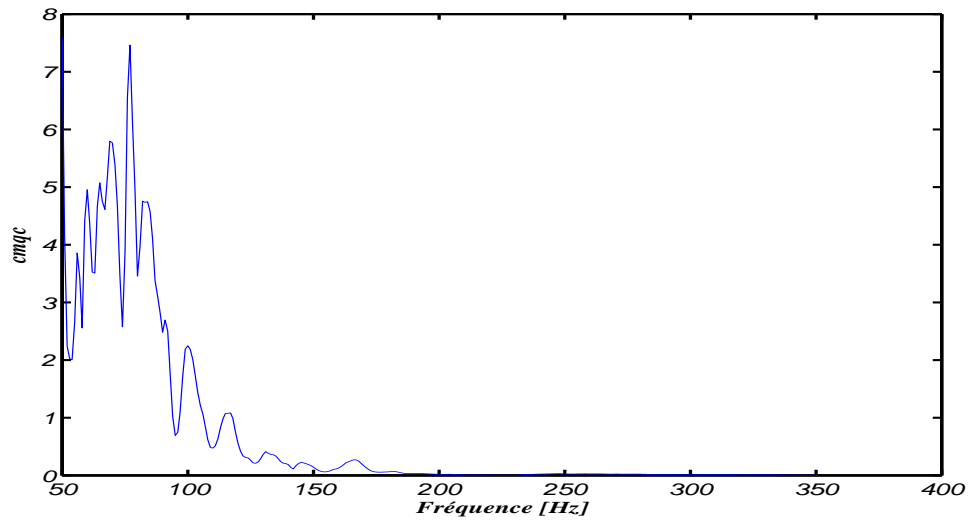


FIGURE 8.7 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations en tous les points de la zone du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points de la zone du pavillon et du plancher d'assise.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

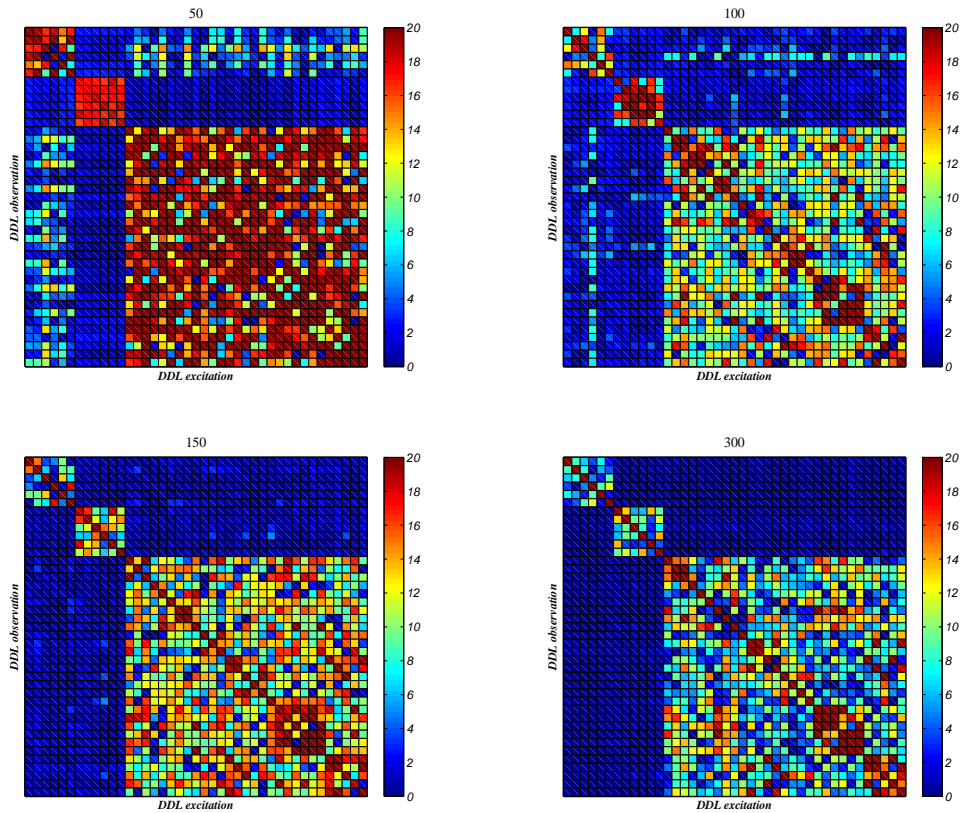


FIGURE 8.8 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations en tous les points de la zone du block avant sans le pare brise et pour des observations dans la direction principale normale en tous les points de la zone du pavillon et du plancher d’assise à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

8.3.2 Cas acoustique

Ce cas correspond à des excitations et des observations dans la cavité acoustique. La figure 8.9 montre la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitation aux quatre points situés dans la partie arrière de la zone de la cavité acoustique et pour des observations en tous les autres points de la zone de la cavité. On peut observer une valeur très élevée de celle-ci jusqu’à 180 Hz. La figure 8.10 montre les images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour ce cas. On note que la valeur de l’erreur est élevée et non homogène sur l’ensemble des termes de la matrice et jusqu’à environ 180 Hz. A partir de 180 Hz cette valeur diminue pour atteindre un niveau assez bas. On peut alors conclure que pour une excitation dans la zone arrière de la cavité et à partir de 180 Hz, la zone arrière de cette cavité forme une zone séparée du reste de la cavité.

8.3. EVALUATION DU CRITÈRE DE PARTITION PAR ZONE POUR LA PARTITION INITIALE

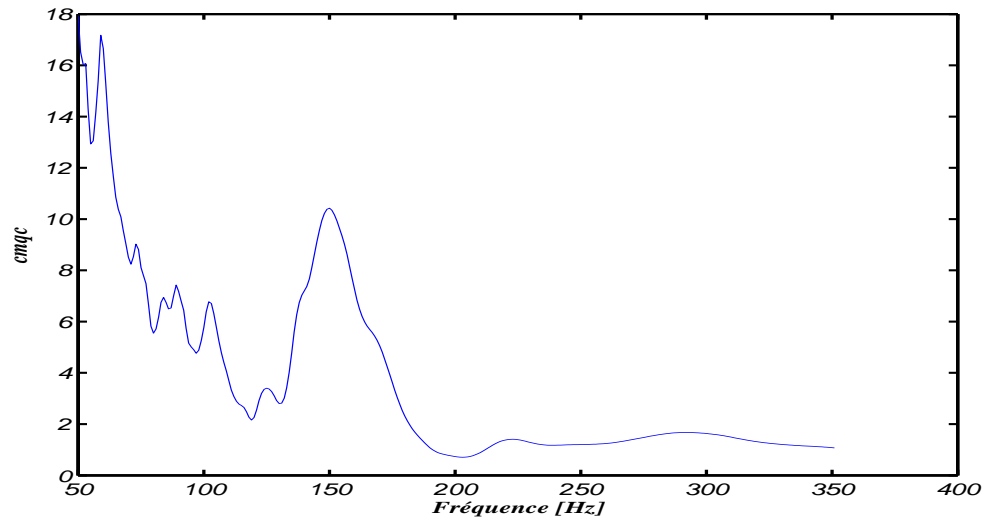


FIGURE 8.9 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto cqmc(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations aux quatre points situés dans la partie arrière de la zone de la cavité acoustique et pour des observations en tous les autres points de la zone de la cavité.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

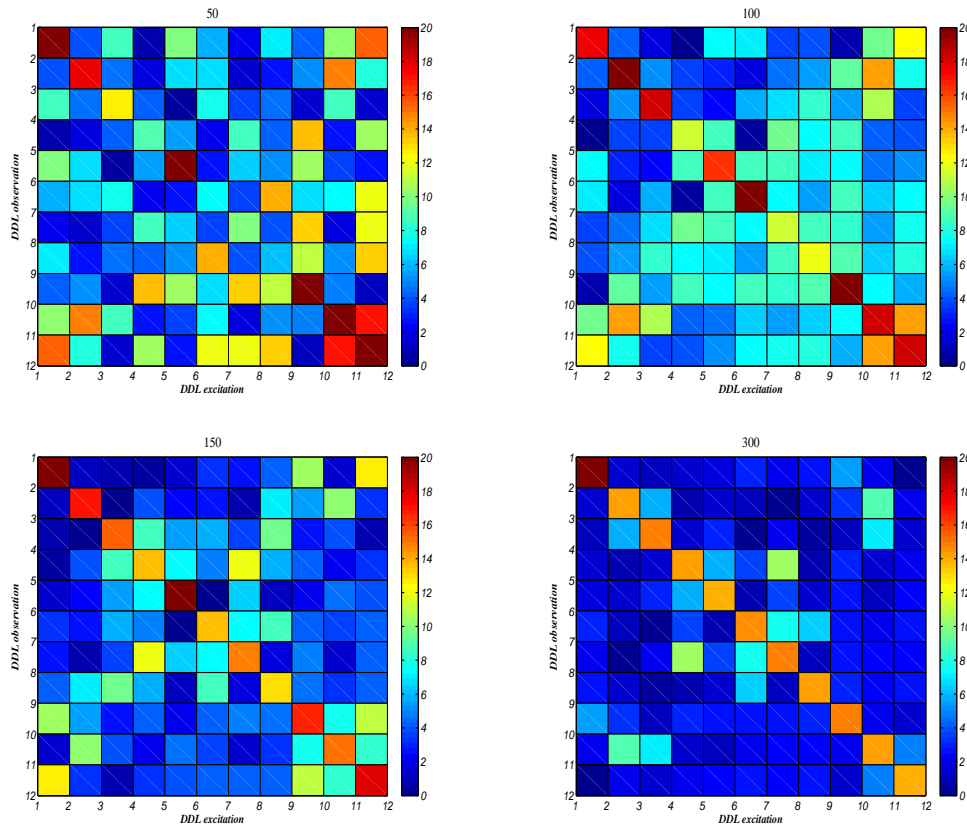


FIGURE 8.10 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{E}}(\omega)$ pour des excitations aux points situés dans la zone arrière de la cavité acoustique et pour des observations en tous les points de la cavité à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

Pour confirmer cette conclusion on étudie le critère de partition par zone pour des excitations aux quatre points de la partie avant de la zone de la cavité acoustique et pour des observation dans la partie centrale de cette même zone. Les résultats sont montrés aux figures 8.12 et 8.11. On peut voir sur ces figures que les valeurs de la fonction $cqmc$ restent assez élevées jusqu’à autour de 300 Hz. En ce qui concerne la matrice d’erreur on ne distingue aucun block diagonale. On peut alors conclure que les zones avant et centrale forment une seule zone jusqu’à environ 280 Hz.

8.3. EVALUATION DU CRITÈRE DE PARTITION PAR ZONE POUR LA PARTITION INITIALE

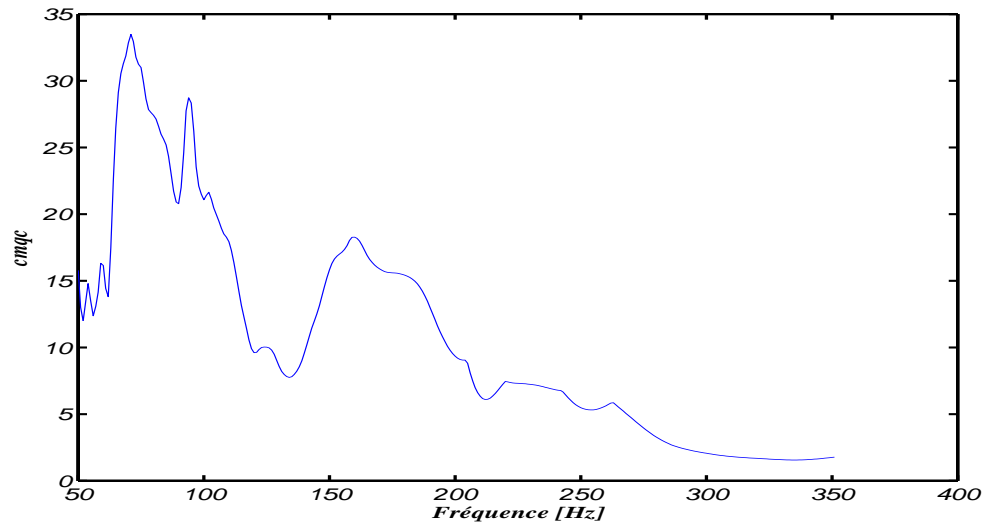


FIGURE 8.11 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations aux quatre points situés dans la partie avant de la zone de la cavité acoustique et pour des observations aux quatre points situés dans la partie avant de la zone de la cavité acoustique.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

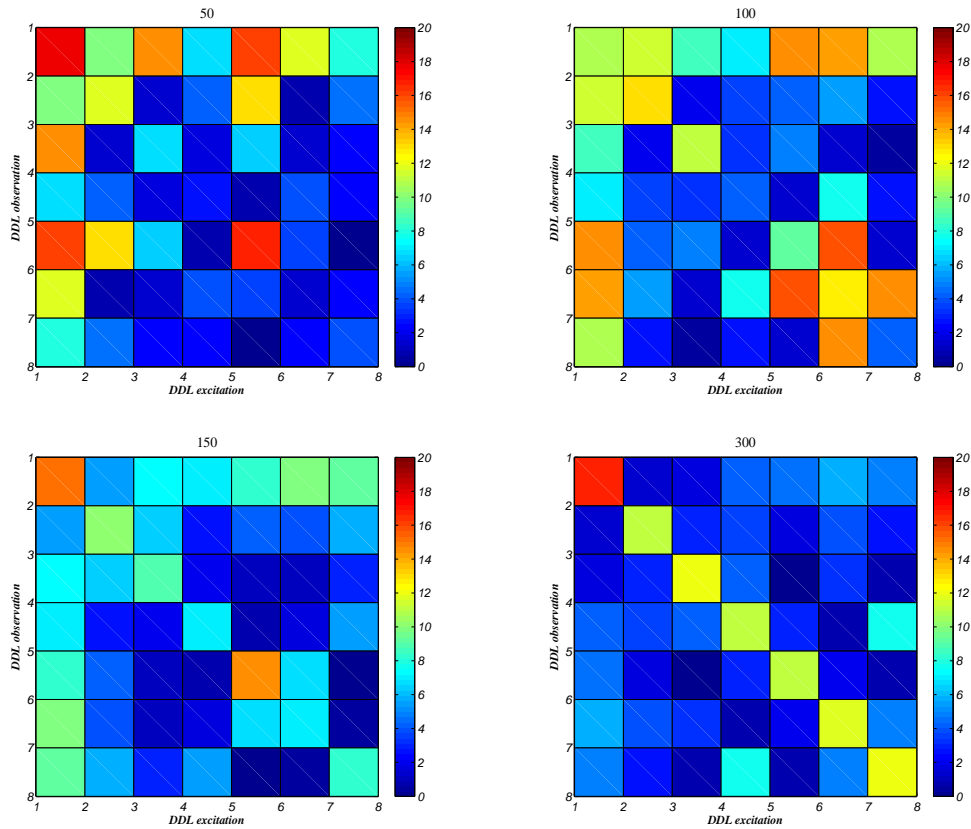


FIGURE 8.12 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations aux point situés dans la zone avant de la cavité acoustique et pour des observations en tous les points de la cavité à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

Nous pouvons conclure que la cavité, vue par une excitation à l’intérieur de celle-ci, peut alors être partitionnée en deux zones entre 180 Hz et 280 Hz et en trois zones au delà de cette dernière fréquence, au moins jusqu’au 350 Hz qui est la limite supérieur de la bande de fréquence analysée.

8.3.3 Cas vibroacoustique

Ce cas correspond à des excitations dans la structure et des observations dans la cavité acoustique. Le but est d’étudier ici la partition par zone de la cavité en appliquant une excitation dans la structure.

La figure 8.13 montre le graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations aux points du train avant et pour des observations aux points de la cavité acoustique. On peut noter que les valeurs de la fonction cqmc sont plus basses que 3 à partir de 85 Hz.

8.3. EVALUATION DU CRITÈRE DE PARTITION PAR ZONE POUR LA PARTITION INITIALE

En observant les images de la matrice $\varepsilon_{\mathcal{E}}(\omega)$ montrées à la figure 8.14 pour le même cas, on note que c'est autour de 85 Hz qu'on commence à obtenir une valeur de l'erreur assez basse et homogène. On peut donc estimer que la cavité, vue par une excitation dans la structure, forme une seule zone à partir de 90 Hz.

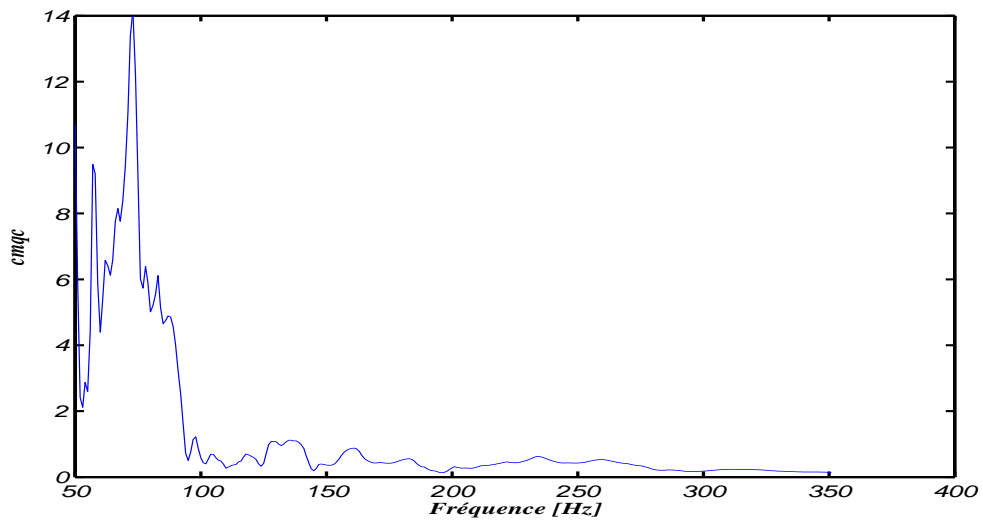


FIGURE 8.13 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto cqmc(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations aux points du train avant et pour des observations aux points de la cavité acoustique.

Les figures 8.16 et 8.15 montrent les images de la matrice d'erreur $\varepsilon_{\mathcal{E}}(\omega)$ et le graphe de la fonction $cqmc$ pour des excitations aux points du bloc avant et pour des observations aux points de la cavité acoustique.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

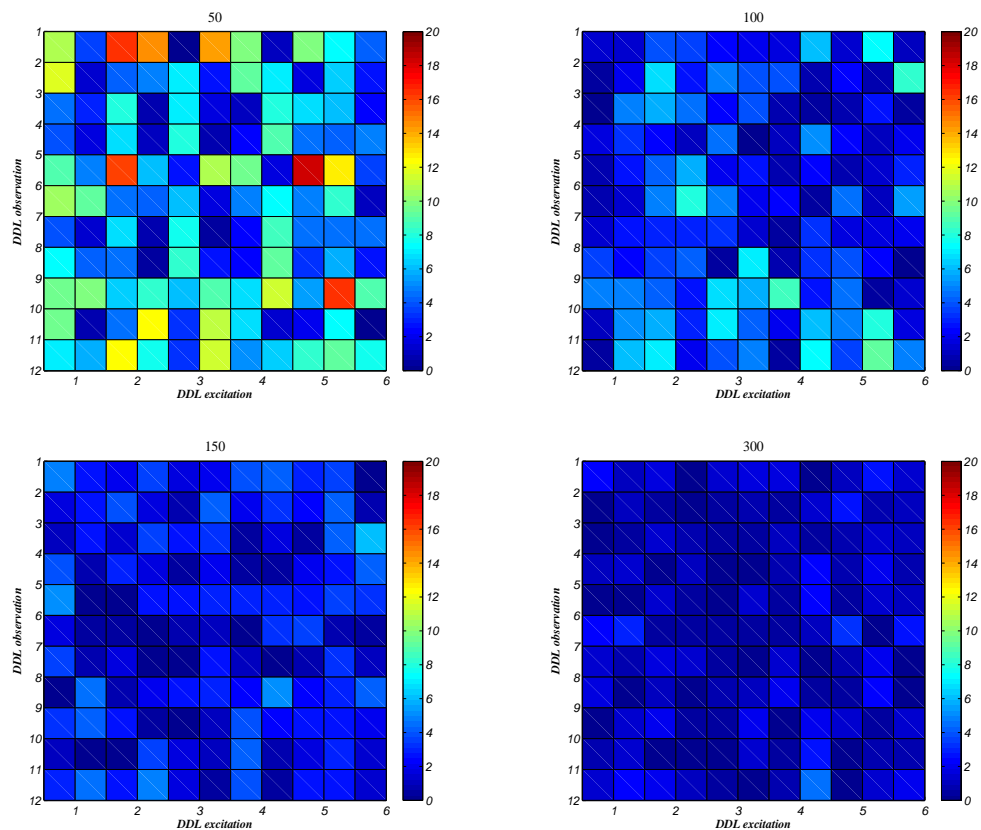


FIGURE 8.14 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations aux points du train avant et pour des observations aux points de la cavité acoustique pour la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

8.3. EVALUATION DU CRITÈRE DE PARTITION PAR ZONE POUR LA PARTITION INITIALE

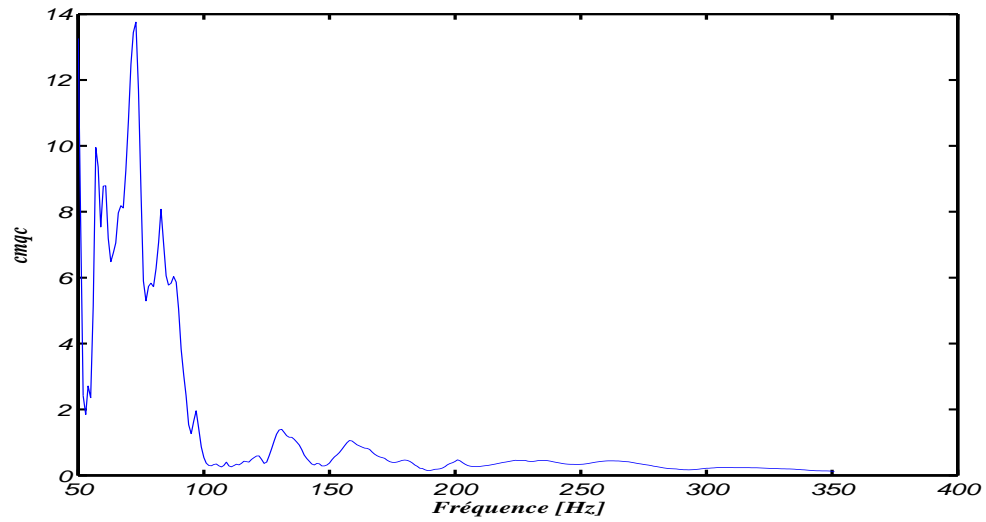


FIGURE 8.15 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations aux points du bloc avant et pour des observations aux points de la cavité acoustique.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

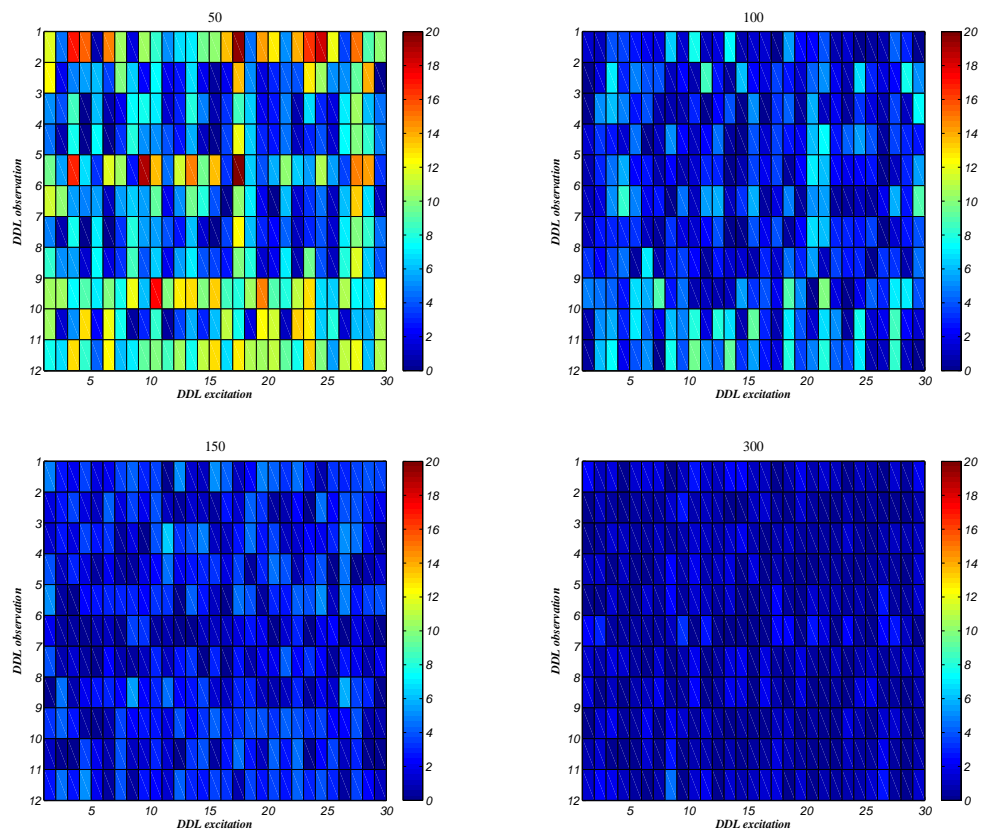


FIGURE 8.16 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations aux points du block avant et pour des observations aux points de la cavité acoustique à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

Les figures 8.18 et 8.17 montrent les images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ et de la fonction pour des excitations aux points du bloc avant et dans la direction principale normale de tous les points du pavillon, et pour des observations aux points de la cavité acoustique.

8.3. EVALUATION DU CRITÈRE DE PARTITION PAR ZONE POUR LA PARTITION INITIALE

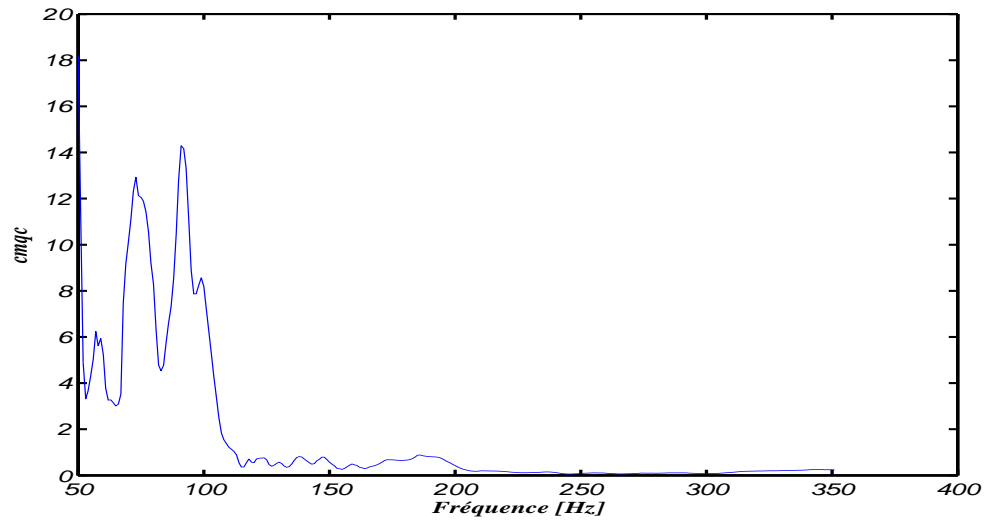


FIGURE 8.17 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \text{cqmc}(\omega)$ en $10\log_{10}$ pour des excitations aux points du bloc avant et dans la direction principale normale de tous les points du pavillon, et pour des observations aux points de la cavité acoustique.

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

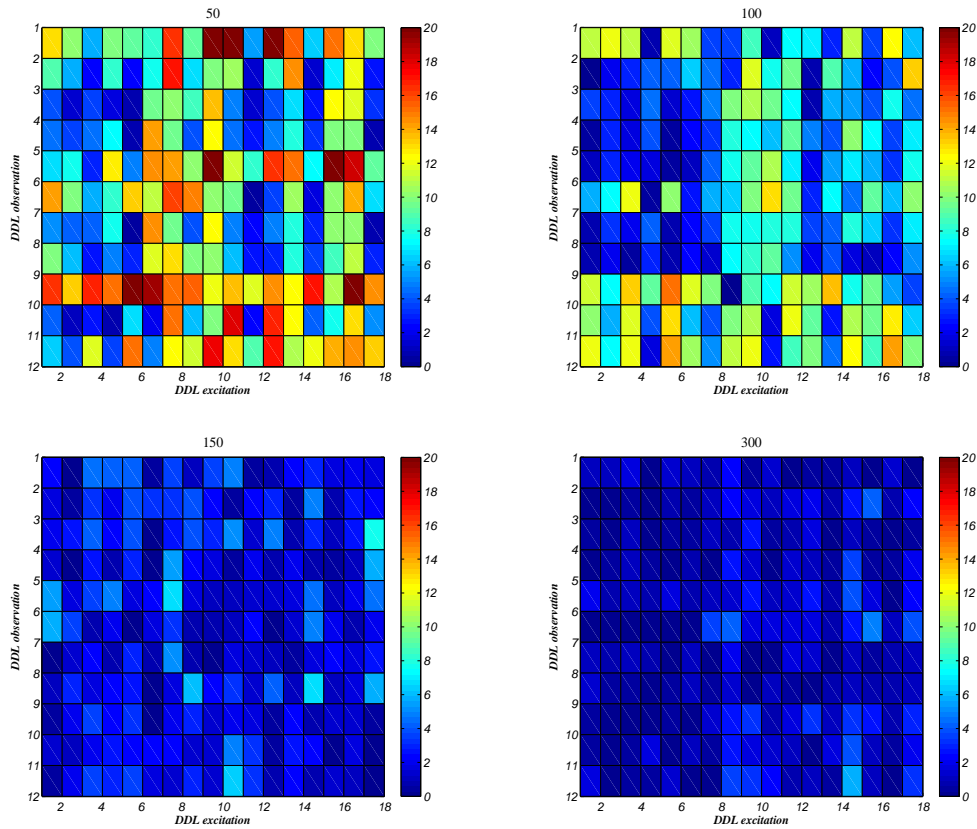


FIGURE 8.18 – Images de la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ pour des excitations aux points du bloc avant et dans la direction principale normale de tous les points du pavillon, et pour des observations aux points de la cavité acoustique à la fréquence 50 Hz (haut gauche), 100 Hz (haut droit), 150 Hz (bas gauche) et 300 Hz (bas droit).

On remarque que les valeurs de la fonction $cqmc$ ne descendent en dessous de la valeur 3 qu’à partir de 110 Hz, c’est-à-dire 20 Hz plus haut que dans le cas de la figure 8.15 qui n’inclut pas les DDL du pavillon. De même l’erreur de la matrice $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ reste élevée jusqu’à environ 110 Hz.

On peut donc en conclure que le nombre de DDL d’excitation influence la fréquence à partir de laquelle les valeurs de la fonction $cqmc$ descendent en dessous de la valeur 3. Dans le cas où on augmente le nombre de DDL à l’intérieur d’une même zone, cette fréquence devient plus basse. Dans le cas où on augmente le nombre de DDL à l’extérieur d’une même zone, cette fréquence devient plus élevée. Nous pouvons observer la même chose pour la matrice d’erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$.

8.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une validation numérique du modèle vibroacoustique énergétique simplifié. Nous avons validé, sur un modèle de véhicule automobile, la méthodologie de partition par zone ainsi que le critère de partition en zones présenté au chapitre 7.

Nous avons montré que le critère de construction d'une partition par zone est efficace, que pour une application représentative d'un véhicule automobile une telle partition existe effectivement et que pour la partition ainsi construite, le modèle vibroacoustique énergétique simplifié peut être utilisé.

Conclusion et Perspective

Cette thèse a pour objectif principal le développement d'un outil numérique pour simplifier le processus de conception vibroacoustique des systèmes complexes. Le travail a été réalisé en collaboration avec le constructeur d'automobiles PSA Peugeot Citroën. La problématique qui a conduit au sujet de recherche et l'application pour la validation des modèles et des méthodes développés, sont issus de ce constructeur.

Pour les systèmes vibroacoustiques complexes tels qu'une automobile l'analyse des résultats fournis par le modèle nécessite l'exploitation d'un très grand nombre de FRF à cause d'un nombre important de sources acoustiques et vibratoires, et de points d'observation. La taille des modèles numériques ne cesse d'augmenter. Les incertitudes de modélisation, les incertitudes sur les paramètres du modèle et la variabilité des systèmes de même type construits, doivent être prises en compte dans le processus de conception en vibroacoustique. Afin de traiter le problème induit par la complexité de l'analyse vibroacoustique, tout en prenant en compte les incertitudes, nous avons proposé une approche énergétique simplifiée basée sur l'utilisation du modèle numérique fin dans lequel est implémenté un modèle probabiliste d'incertitudes.

Nous avons d'abord modélisé le système vibroacoustique par un modèle numérique déterministe fin appelé modèle moyen. Ce modèle numérique moyen est réduit classiquement par projection modale pour obtenir le modèle moyen réduit. Ensuite nous avons effectué la modélisation probabiliste des incertitudes en utilisant l'approche probabiliste non paramétrique. Cette approche prend en compte les deux sources d'incertitudes, les incertitudes de modélisation et les incertitudes sur les paramètres du modèle.

Le système vibroacoustique est classiquement modélisé par des FRF ayant des forces ou des sources acoustiques en entrée et la vitesse de la structure et la pression acoustique dans la cavité en sortie. L'approche énergétique proposée consiste à modéliser ce système vibroacoustique par des fonctions de réponse en fréquence aléatoires de la puissance (FRFP) dont l'entrée est une densité de puissance injectée aléatoire et dont la sortie est une densité de puissance de réponse aléatoire (vitesse ou pression). Nous avons ensuite effectué un moyennage statistique afin de construire la FRFP moyenne du modèle vibroacoustique énergétique stochastique. L'approche énergétique proposée permet non seulement de traiter des cas de forces décorréelées mais aussi le cas d'un vecteur force dont les composantes sont corrélées. Des coordonnées locales définies par les directions princi-

CHAPITRE 8. VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE VIBROACOUSTIQUE ÉNERGÉTIQUE SIMPLIFIÉ

pales de la moyenne des mobilités locales stochastiques ont été introduites permettant la séparation des DDL dans le plan et les DDL hors plan et permettant ainsi d'analyser la réponse dans les directions dominantes de l'énergie de la réponse.

L'application de l'approche énergétique stochastique à un modèle de véhicule automobile a montré que les FRFP moyennes qui caractérisent le modèle énergétique vibroacoustique sont : **(1)** moins dépendantes de la fréquence que les FRF moyennes classiques **(2)** peu dépendantes de la direction d'excitation ou de la direction d'observation à partir d'une certaine fréquence **(3)** indépendantes de la localisation précise de l'excitation ou de l'observation dans les limites d'une zone définie. Ces propriétés des FRFP moyennes montrent que le modèle énergétique vibroacoustique peut être partitionné en zones ayant un comportement spatialement constant par zone pour chaque valeur de la fréquence.

En se basant sur ces observations, un modèle vibroacoustique énergétique simplifié a été construit. Une méthodologie ainsi qu'un critère de partition par zone ont été présentés et validés pour un véhicule automobile. Cette validation a montré l'efficacité du critère de partition par zone.

Nous avons montré que pour le modèle de véhicule choisi, la cavité acoustique se comporte comme une zone séparée de la structure à partir de 50 Hz (basses fréquences). La structure est partitionnée en zones fonctionnelles de telle manière que chacune d'entre elles présente un comportement homogène à partir de 90 Hz environ. La cavité acoustique se comporte, pour une excitation appliquée à la structure, comme une seule zone à partir de 90 Hz environ. Cependant, pour une source acoustique placée à l'intérieur de la cavité acoustique, celle-ci est partitionnée en deux zones à partir de 180 Hz et en trois zones à partir de 280 Hz et jusqu'à 350 Hz.

Concernant les perspectives de ce travail, la première pourrait être l'automatisation du processus de construction de la partition par zone à partir de la fonction d'erreur $\varepsilon_{\mathcal{G}}(\omega)$ et de l'algorithme numérique que nous avons présentés. Ceci permettrait d'accroître la robustesse de la méthodologie de partition par zone. La deuxième est l'utilisation des outils développés dans le cadre d'un processus d'optimisation lié au processus de conception avec des spécifications en vibroacoustique.

A

Démonstration de la positivité de la matrice des FRF pour un sous-ensemble de DDL

Dans cette annexe, on démontre que la partie réelle $Re\{[T(\omega)]\}$ de la matrice de FRF déterministe $[T(\omega)]$ et la partie réelle $Re\{[\mathbf{T}(\omega)]\}$ de la matrice aléatoire de FRF $[\mathbf{T}(\omega)]$ sont définies positives. Ces propriétés ne sont pas triviales car ces deux matrices sont construites pour un sous-ensemble de DDL choisis parmi tous les DDL du modèle vibroacoustique. Les deux démonstrations sont faites avec les hypothèses suivantes : pour le cas déterministe, la matrice d'amortissement $[\mathcal{D}]$ est supposée diagonale et pour le cas aléatoire, la matrice aléatoire d'amortissement $[\mathbf{D}]$ est supposée pleine.

Il est important de noter que la matrice de mobilité locale aléatoire $[\mathbf{Y}(\omega)]$ est définie comme la diagonale de la matrice $Re\{[\mathbf{T}(\omega)]\}$ dont on montrera qu'elle est définie positive. Dans ce qui suit, on utilise les notations $Re\{[T(\omega)^p]\}$ et $Re\{[\mathbf{T}(\omega)^p]\}$ pour les matrices de FRF déterministe et aléatoires construites pour un sous-ensemble de DDL dont le nombre est p .

A.1 Preuve pour la matrice déterministe $Re\{[T(\omega)^p]\}$

On rappelle que la matrice de raideur dynamique réduite $[\mathcal{A}(\omega)]$ dans les coordonnées généralisées s'écrit en fonction de la matrice de raideur dynamique $[A(\omega)]$,

$$[\mathcal{A}(\omega)] = [\Phi]^T [A(\omega)] [\Phi] \quad , \quad (\text{A-1})$$

ANNEXE A. DÉMONSTRATION DE LA POSITIVITÉ DE LA MATRICE DES FRF POUR UN SOUS-ENSEMBLE DE DDL

avec $[\Phi]$ la matrice des vecteurs propres calculés par

$$[\mathcal{K}][\Phi] = [\mathcal{M}][\Phi]\lambda \quad . \quad (\text{A-2})$$

La matrice de raideur dynamique est définie par l'équation,

$$[A(\omega)] = (-\omega^2[M] + i\omega[D] + [K]) \quad . \quad (\text{A-3})$$

Nous pouvons alors écrire

$$[\mathcal{A}(\omega)] = (-\omega^2[\mathcal{M}] + i\omega[\mathcal{D}] + [\mathcal{K}]) \quad , \quad (\text{A-4})$$

avec $[\mathcal{M}] = [\Phi]^T[M][\Phi]$, $[\mathcal{D}] = [\Phi]^T[D][\Phi]$ et $[\mathcal{K}] = [\Phi]^T[K][\Phi]$. La matrice d'amortissement $[\mathcal{D}]$ est une matrice diagonale définie par

$$\omega[\mathcal{D}] = \eta[\mathcal{K}] \quad , \quad (\text{A-5})$$

avec η le facteur de perte par dissipation (ce modèle correspond à celui d'un modèle hystérétique). La matrice $[\mathcal{A}(\omega)]$ est alors une matrice diagonale. La matrice de FRF pour une sortie en vitesse est définie par

$$[T(\omega)] = i\omega[A(\omega)]^{-1} \simeq i\omega[\Phi][h(\omega)][\Phi]^T \quad , \quad (\text{A-6})$$

où $[h(\omega)] = (-\omega^2[\mathcal{M}] + i\omega[\mathcal{D}] + [\mathcal{K}])^{-1}$ est une matrice diagonale telle que

$$i\omega[h(\omega)]_{jj}(\omega) = \frac{i\omega[\mathcal{M}]_{jj}(\omega_j^2 - 1)}{([\mathcal{M}]_{jj}\omega_j^2 - [\mathcal{M}]_{jj})^2 + \omega^2[\mathcal{D}]_{jj}^2} + \frac{\omega^2[\mathcal{D}]_{jj}}{([\mathcal{M}]_{jj}\omega_j^2 - [\mathcal{M}]_{jj})^2 + \omega^2[\mathcal{D}]_{jj}^2} \quad . \quad (\text{A-7})$$

Comme $[\Phi]$ est une matrice réelle, la partie réelle de la matrice $[T(\omega)]$ s'écrit

$$Re\{[T(\omega)]\} = [\Phi]Re\{i\omega[h(\omega)]\}[\Phi]^T \quad , \quad (\text{A-8})$$

avec

$$Re\{i\omega[h(\omega)]_{jk}\} = \delta_{jk} \frac{\omega^2[\mathcal{D}]_{jj}}{([\mathcal{M}]_{jj}\omega_j^2 - [\mathcal{M}]_{jj})^2 + \omega^2[\mathcal{D}]_{jj}^2} > 0 \quad . \quad (\text{A-9})$$

A.2. PREUVE POUR LA MATRICE ALÉATOIRE $Re\{\mathbf{T}(\omega)^p\}$

En en déduit que pour tout vecteur réel \mathbf{u} non nul,

$$\langle Re\{[T(\omega)]\}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle [\Phi]Re\{i\omega[h(\omega)]\}[\Phi]^T\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle Re\{i\omega[h(\omega)]\}[\Phi]^T\mathbf{u}, [\Phi]^T\mathbf{u} \rangle > 0 \quad . \quad (\text{A-10})$$

Soit $[P]$ la matrice d'extraction d'un sous-ensemble de p DDL des DDL de la matrice $[T(\omega)]$ constituée de 1 et de 0. On défini la matrice $[T(\omega)^p]$ telle que

$$[T(\omega)^p] = [P]^T[T(\omega)][P] \quad . \quad (\text{A-11})$$

Nous avons donc

$$Re\{[T(\omega)^p]\} = [P]^T Re\{[T(\omega)]\}[P] \quad , \quad (\text{A-12})$$

et en tenant compte des équations (A-10) et (A-12), on a

$$\langle Re\{[T(\omega)^p]\}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle [P]^T Re\{[T(\omega)]\}[P]\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \quad , \quad (\text{A-13})$$

ce qui donne pour tout \mathbf{u} tel que $[P]\mathbf{u}$ non nul,

$$\langle Re\{[T(\omega)]^p\}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle Re\{[T(\omega)]\}[P]\mathbf{u}, [P]\mathbf{u} \rangle > 0 \quad . \quad (\text{A-14})$$

Ainsi la partie réelle $Re\{[T(\omega)^p]\}$ de la matrice de FRF $[T(\omega)^p]$ est une matrice définie positive dans le sous-espace engendré par tous les \mathbf{u} tel que $[P]\mathbf{u}$ non nul.

Il est à noter que l'hypothèse d'une matrice d'amortissement généralisée diagonale peut être supprimée pour considérer une matrice d'amortissement généralisée pleine en utilisant une démonstration similaire à celle donnée dans la preuve qui suit pour la matrice aléatoire $[\mathbf{T}(\omega)]$.

A.2 Preuve pour la matrice aléatoire $Re\{\mathbf{T}(\omega)^p\}$

Les matrices déterministes du modèle moyen réduit sont définies par les équations (A-1) et (A-4) pour la matrice de raideur dynamique, par l'équation (A-5) pour la matrice

ANNEXE A. DÉMONSTRATION DE LA POSITIVITÉ DE LA MATRICE DES FRF POUR UN SOUS-ENSEMBLE DE DDL

d'amortissement et par l'équation (A-11) pour la matrice de FRF correspondant aux p DDL choisis. En tenant compte les équations (A-1), (A-6) et (A-11), la matrice de FRF pour les p DDL choisis s'écrit

$$[T(\omega)^p] = i\omega[\mathcal{W}(\omega)][\mathcal{A}(\omega)]^{-1}[\mathcal{W}(\omega)]^T, \quad (\text{A-15})$$

avec $[\mathcal{W}(\omega)] = [P]^T[\Phi]$.

Les matrices aléatoires de masse $[\mathbf{M}]$, d'amortissement $[\mathbf{D}]$ et de raideur $[\mathbf{K}]$ dans les coordonnées généralisées sont telle que

$$[\mathbf{M}] = [\mathcal{M}]^{1/2}[\mathbf{G}_M][\mathcal{M}]^{1/2}, \quad (\text{A-16})$$

$$[\mathbf{D}] = [\mathcal{D}]^{1/2}[\mathbf{G}_D][\mathcal{D}]^{1/2}, \quad (\text{A-17})$$

$$[\mathbf{K}] = [\mathcal{K}]^{1/2}[\mathbf{G}_K][\mathcal{K}]^{1/2}. \quad (\text{A-18})$$

Ces matrices sont des matrices pleines. L'équation (A-15) s'écrit dans le cas stochastique telle que

$$[\mathbf{T}(\omega)^p] = i\omega[\mathcal{W}][\mathbf{A}(\omega)]^{-1}[\mathcal{W}]^T, \quad (\text{A-19})$$

avec $[\mathbf{A}(\omega)]$ la matrice aléatoire de raideur dynamique définie par

$$[\mathbf{A}(\omega)] = -\omega^2[\mathbf{M}] + i\omega[\mathbf{D}] + [\mathbf{K}]. \quad (\text{A-20})$$

Pour toute réalisation θ , on introduit le problème aux valeurs propres suivant

$$[\mathbf{K}(\theta)][\Psi(\theta)] = [\mathbf{M}(\theta)][\Psi(\theta)][\Lambda(\theta)], \quad (\text{A-21})$$

où $[\Lambda(\theta)]$ est la matrice des valeurs propres et $[\Psi(\theta)]$ est la matrice des vecteurs propres vérifiant la propriété d'orthogonalité

$$[\Psi(\theta)]^T[\mathbf{M}(\theta)][\Psi(\theta)] = [I]. \quad (\text{A-22})$$

Comme la matrice $[\Psi(\theta)]$ est une matrice carrée inversible, on vérifie facilement que

$$[\mathbf{A}(\omega, \theta)]^{-1} = [\Psi(\theta)]([\Psi(\theta)]^T[\mathbf{A}(\omega, \theta)][\Psi(\theta)]^{-1}[\Psi(\theta)]^T)^{-1}[\Psi(\theta)]^T. \quad (\text{A-23})$$

Vu les équations (A-21) et (A-22), on a

$$[\Psi(\theta)]^T[\mathbf{A}(\omega)][\Psi(\theta)] = -\omega^2[I] + i\omega[\mathbb{D}(\theta)] + [\Lambda(\theta)] \quad , \quad (\text{A-24})$$

avec

$$[\mathbb{D}(\theta)] = [\Psi(\theta)]^T[\mathbf{D}(\theta)][\Psi(\theta)] \quad . \quad (\text{A-25})$$

La matrice $[\mathbb{D}(\theta)]$ est une matrice pleine symétrique définie positive et $[\Lambda(\theta)]$ une matrice diagonale. En substituant la valeur de $[\mathbf{A}(\omega, \theta)]^{-1}$ donnée par l'équation (A-23) dans l'équation (A-19) on obtient

$$Re\{\mathbf{T}(\omega, \theta)^p\} = i\omega[\mathbb{W}(\theta)]Re\{([\Psi(\theta)]^T[\mathbf{A}(\omega, \theta)][\Psi(\theta)])^{-1}\}[\mathbb{W}(\theta)]^T \quad . \quad (\text{A-26})$$

avec $[\mathbb{W}(\theta)] = [\mathcal{W}][\Psi(\theta)]$ une matrice réelle. Une condition nécessaire et suffisante pour que $Re\{\mathbf{T}(\omega, \theta)^p\}$ soit une matrice symétrique définie positive est que $Re\{[\Psi(\theta)]^T[\mathbf{A}(\omega, \theta)][\Psi(\theta)]\}$ soit une matrice symétrique définie positive.

Soit $[B(\omega, \theta)]^{-1} = ([\Psi(\theta)]^T[\mathbf{A}(\omega, \theta)][\Psi(\theta)])$. On a donc

$$([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I] + i\omega[\mathbb{D}(\theta)])(Re\{[B(\omega, \theta)]\} + iIm\{[B(\omega, \theta)]\}) = [I] \quad , \quad (\text{A-27})$$

ce qui montre que

$$([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])Re\{[B(\omega, \theta)]\} - \omega[\mathbb{D}(\theta)]Im\{[B(\omega, \theta)]\} = [I] \quad , \quad (\text{A-28})$$

et que

$$([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])Im\{[B(\omega, \theta)]\} + \omega[\mathbb{D}(\theta)]Re\{[B(\omega, \theta)]\} = 0 \quad . \quad (\text{A-29})$$

La partie imaginaire de la matrice $[B(\omega, \theta)]$ s'écrit donc

$$Im\{[B(\omega, \theta)]\} = -\omega [\omega^2[\mathbb{D}(\theta)] + ([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])[\mathbb{D}(\theta)]^{-1}([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])]^{-1} \quad . \quad (\text{A-30})$$

et la partie réelle s'écrit

$$\begin{aligned} Re\{i\omega[B(\omega, \theta)]\} \\ = \omega^2 [\omega^2[\mathbb{D}(\theta)] + ([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])[\mathbb{D}(\theta)]^{-1}([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])]^{-1} \quad . \quad (\text{A-31}) \end{aligned}$$

ANNEXE A. DÉMONSTRATION DE LA POSITIVITÉ DE LA MATRICE DES FRF POUR UN SOUS-ENSEMBLE DE DDL

Soit $[\mathbb{H}(\omega, \theta)]$ la matrice réelle symétrique telle que

$$[\mathbb{H}(\omega, \theta)] = \omega^2[\mathbb{D}(\theta)] + ([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])[\mathbb{D}(\theta)]^{-1}([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I]) \quad . \quad (\text{A-32})$$

Si $[\mathbb{H}(\omega, \theta)]$ est définie positive alors $[\mathbb{H}(\omega, \theta)]^{-1}$ est réelle symétrique définie positive. pour tout vecteur \mathbf{u} non nul, on a

$$\langle [\mathbb{H}(\omega, \theta)]\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \omega^2[\mathbb{D}(\theta)]\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle ([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])[\mathbb{D}(\theta)]^{-1}([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \quad . \quad (\text{A-33})$$

Soit $\mathbf{v} = ([\Lambda(\theta)] - \omega^2[I])\mathbf{u}$ l'équation (A-33)

$$\langle [\mathbb{H}(\omega, \theta)]\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \omega^2[\mathbb{D}(\theta)]\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle [\mathbb{D}(\theta)]^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0 \quad , \quad (\text{A-34})$$

Nous pouvons alors en conclure que les matrices $Re\{\mathbf{T}(\omega)^p\}$ et $[\mathbf{Y}(\omega)^p]$ sont définies positives presque sûrement.

Bibliographie

- [1] A. BATOU et C. SOIZE : Experimental identification of turbulent fluid forces applied to fuel assemblies using an uncertain model and fretting-wear estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 (7):2141 – 2153, 2009.
 - [2] Y. I. BOBROVNITSKII : Estimating the vibrational energy characteristics of an elastic structure via the input impedance and mobility. *Journal of Sound and Vibration*, 217(2):351 – 386, 1998.
 - [3] Y. I. BOBROVNITSKII et M. P. KOROTKOV : Improved estimates for the energy characteristics of a vibrating elastic structure via the input impedance and mobility : experimental verification. *Journal of Sound and Vibration*, 247(4):683 – 702, 2001.
 - [4] O. M. BOUTHIER et R. J. BERNHARD : Simple models of energy flow in vibrating membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):129–147, 1995.
 - [5] O. M. BOUTHIER et R. J. BERNHARD : Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):149 – 186, 1995.
 - [6] E. Capiez LERNOUT et C. SOIZE : Nonparametric Modeling of Random Uncertainties for Dynamic Response of Mistuned Bladed Disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126:610–618, 2004.
 - [7] E. Capiez LERNOUT, C. SOIZE, J.-P. LOMBARD, C. DUPONT et E. SEINTURIER : Blade Manufacturing Tolerances Definition for a Mistuned Industrial Bladed Disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127:621–628, 2005.
 - [8] A. CARCATERRA et A. SESTIERI : Energy density equations and power flow in structures. *Journal of Sound and Vibration*, 188(2):269–282, 1995.
 - [9] H. CHEBLI et C. SOIZE : Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of nonhomogeneous uncertainties for dynamical systems. *JASA*, 115(2):697–705, 2004.
 - [10] V. COTONI, R. LANGLEY et P. SHORTER : A statistical energy analysis subsystem formulation using finite element and periodic structure theory. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5):1077 – 1108, 2008.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [11] R. CRAIG et M. BAMPTON : Coupling of substructures for dynamic analysis. *Amer. Inst. Aero. Astro. J.*, 6(7):1313 – 1319, 1968. Selected Papers from the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2002).
- [12] J. CUSCHIERI : Structural power-flow analysis using a mobility approach of an l-shaped plate. *Journal of Sound and Vibration*, 87(3):1159 – 1165, 1990.
- [13] J. CUSCHIERI : Vibration transmission through periodic structures using a mobility power flow approach. *Journal of Sound and Vibration*, 143(1):65 – 74, 1990.
- [14] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS : *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992.
- [15] C. DESCELIERS, C. SOIZE et S. CAMBIER : Non-parametric model for random uncertainties in non-linear structural dynamics : application to earthquake engineering. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33(3):315 – 327, 2003.
- [16] D.J.NEFSKE et S. SUNG : Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and application to beams. *ASME Publication NCA-3 : Statistical Energy Analysis*, NCA-3 : Statistical Energy Analysis:47 – 54, 1987.
- [17] J. DUCHEREAU et C. SOIZE : Transient dynamics in structures with non-homogeneous uncertainties induced by complex joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20:854–867, 2006.
- [18] J.-F. DURAND : *Modélisation de Véhicules en Vibroacoustique Numérique avec Incertitudes de Modélisation et Validation Expérimentale*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2007.
- [19] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Nonparametric modeling of the variability of vehicle vibroacoustic behavior. In *SAE05*, Traverse City, Michigan, USA, 2004.
- [20] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Random uncertainties modelling for vibroacoustic frequency response of cars. In *ISMA04*, Leuven, Belgium, 2004.
- [21] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Nonparametric modeling of vibroacoustic coupling interface uncertainties. In *EURODYN05*, Paris, France, 2005.
- [22] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Robustesse des modèles numériques du comportement vibroacoustique des véhicules vis-à-vis des incertitudes de modélisation. In *CFM05*, Troyes, Aube, France, 2005.

- [23] J.-F. DURAND, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation. *JASA*, 124(3):1513–1525, 2008.
- [24] F. J. FAHY : *Sound and Structural Vibration Radiation, Transmission and Response*. Academic Press, London, United Kingdom, 1987.
- [25] C. FERNANDEZ : *Modélisation et validation expérimentale des complexes insonorisants pour la prévision vibroacoustique numérique basse et moyenne fréquences des automobiles*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2008.
- [26] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Modeling sound-insulation layers in vibroacoustics systems. In G. MANSON AND K. WORDEN, éd. : *USD07*, Sheffield, United Kingdom, 2007.
- [27] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Probabilistic modeling sound-insulation layers in vibroacoustic systems with a non parametric model of uncertainties. In *USNCCM09, US National Congress on Computational Mechanics*, San Francisco, USA, 2007.
- [28] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Experimental identification of a stochastic computational model for an uncertain vibroacoustic system. In *WCCM8*, Venice, Italy, 2008.
- [29] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Identification of a sound-insulation layer modelled by fuzzy structure theory - experimental validation. In *ISMA08*, Leuven, Belgium, 2008.
- [30] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Stochastic computational dynamical model of uncertain structure coupled with an insulation layer modelled by a fuzzy structure - theory and experimental validation. In *EURODYN08*, Southampton, United Kingdom, 2008.
- [31] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Fuzzy structure theory modeling of sound-insulation layers in complex vibroacoustic uncertain systems - theory and experimental validation. *JASA*, 125(1):138–153, 2009.
- [32] S. FINNVEDEN : A symmetric formulation for experimental statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 223(1):161 – 169, 1999.
- [33] F. FIRESTONE : A new analogy between analog and electrical systems. *The Journal of the Acoustic Society of America*, 4(1):249 – 267, 1933.

BIBLIOGRAPHIE

- [34] L. GAGLIARDINI et G. BORELLO : Virtual SEA : Towards an industrial process. Num. 2007-01-2302, 2007.
- [35] L. GAGLIARDINI, C. FERNANDEZ et C. SOIZE : Sound-insulation layers low-frequency modeling using the fuzzy structure theory. *In SAE*, Detroit, Michigan, USA, 2009.
- [36] L. GAGLIARDINI, M. KASSEM et C. SOIZE : Energy density field approach for low- and medium-frequency vibroacoustic analysis of a car body using a probabilistic computational model. *In SAE*, Detroit, Michigan, USA, 2009.
- [37] P. GARDONIO et M. J. BRENNAN : On the origins and development of mobility and impedance methods in structural dynamics. *Journal of Sound and vibration*, 249(3):557–573, 2002.
- [38] G. GHOLUB et C. Van LOAN : *Matrix Computations, second edition*. The John Hopkins University Press, 1989.
- [39] B. M. GIBBS et C. L. S. GILFORD : The use of power flow methods for the assessment of sound transmission in building structures. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2):267 – 286, 1976.
- [40] A. GIRARD et H. DEFOSSE : Frequency response smoothing, matrix assembly and structural paths : A new approach for structural dynamics up to high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 137(1):53–68, 1990.
- [41] M. GUERICH et M. HAMDY : A numerical method for vibro-acoustic problems with incompatible finite element meshes using b-spline functions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(1):1682–1694, 1999.
- [42] J.-L. GUYADER, C. CACCIOLATI et H. NELISSE : Acoustical mobility for vibroacoustic prediction - application to double wall transission loss. *In Proceedings of internoise 97, Budapest, Hungary*, p. 715 – 720, Budapest, August 1997. OPAKFI.
- [43] J. GUYADER, C. BOISSON et C. LESUEUR : Energy transmission in finite coupled plates, part i : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 81(1):81 – 92, 1982.
- [44] P. HARDY, M. ICHCHOU, L. JÉZÉQUEL et D. TRENTIN : A hybrid local energy formulation for plates mid-frequency flexural vibrations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28(1):121 – 130, 2009.

- [45] L. HINKE, F. DOHNAL, B. MACE, T. WATERS et N. FERGUSON : Component mode synthesis as a framework for uncertainty analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2):161 – 178, 2009.
- [46] M. N. ICHCHOU, A. L. BOT et L. JEZEQUEL : Energy models of one-dimensional, multi-propagative systems. *Journal of Sound and Vibration*, 201(5):535 – 554, 1997.
- [47] M. N. ICHCHOU et L. JEZEQUEL : Letter to the editor : Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and on simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4):679 – 685, 1996.
- [48] E. T. JAYNES : Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4):620–630, 1957.
- [49] E. T. JAYNES : Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 108(2):171–190, 1957.
- [50] L. JI, B. MACE et R. PINNINGTON : Estimation of power transmission to a flexible receiver from a stiff source using a power mode approach. *Journal of Sound and Vibration*, 268(1):525 – 542, 2003.
- [51] L. JI, B. MACE et R. PINNINGTON : A power mode approach to estimating vibrational power transmitted by multiple sources. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1):387 – 399, 2003.
- [52] L. JI, B. MACE et R. PINNINGTON : A mode-based approach for the mid-frequency vibration analysis of coupled long- and short-wavelength structures. *Journal of Sound and Vibration*, 289(1):148–170, 2006.
- [53] S. JIANXIN, A. T. MOORHOUSE et B. M. GIBBS : Towards a practical characterization for structure-borne sound sources based on mobility techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 185(4):737 – 741, 1995.
- [54] M. C. JUNGER et D. FEIT : *Sound, Structures, and Their Interaction*. originally published in 1972, Acoustical Society of America, New York, USA, 1993.
- [55] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : An energy-based method for vibroacoustic analysis of complex structures in the low- and medium-frequency ranges, a computational model with uncertainties. In *WCCM8-ECCOMAS*, Venice, Italy, 2008.

BIBLIOGRAPHIE

- [56] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Low- and medium-frequency vibroacoustic analysis of complex structures using a statistical computational model and an energy density field formulation. *In ISMA*, Leuven, Belgium, 2008.
- [57] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : An energy-based automatic sub-structuring method in low-and medium-frequency ranges for uncertain computational vibroacoustic model. *In NOVEM*, Oxford, UK, 2009.
- [58] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Energy density field approach for low- and medium-frequency vibroacoustic analysis of complex structures using a statistical computational model. *Journal of sound and vibration*, 323(1):849 – 863, 2009.
- [59] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : A sub-structuring method in low-and medium-frequency ranges based on an energy formulation and on astochastic vibroacoustic computational model. *In USD*, Sheffield, UK, 2009.
- [60] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : A vibroacoustic energy density field approach for an automatic sub-structuring method of complex structures in low-and medium-frequency ranges. *In ICSV16*, Krakow, Poland, 2009.
- [61] S. KIM et R. SINGH : Alternate methods for characterizing spectral energy inputs based only on driving point mobilities or impedances. *Journal of Sound and vibration*, 291(1):604–629, 2006.
- [62] Y. K. KOH et R. G. WHITE : Analysis and control of vibrational power transmission to machinery supporting structures subjected to a multi-excitation system, part i : Driving point mobility matrix of beams and rectangular plates. *Journal of Sound and vibration*, 196(4):469–493, 1996.
- [63] L. L. KOSS : Correlation power variables - frequency domain. *Journal of Sound and Vibration*, 125(3):511 – 522, 1988.
- [64] L. L. KOSS : Frequency response functions for power and connectivity. *Journal of Sound and Vibration*, 181(4):709–725, 1995.
- [65] R. S. LANGLEY : Spatially averaged frequency response envelopes for one- and tow-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 178(4):483–500, 1994.
- [66] R. S. LANGLEY et P. BREMNER : A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(3):1657 – 1671, 1999.

-
- [67] R. S. LANGLEY et J. A. CORDIOLI : Hybrid deterministic-statistical analysis of vibro-acoustic systems with domain couplings on statistical components. *Journal of Sound and Vibration*, 321(3-5):893 – 912, 2009.
- [68] R. LANGLEY : Analysis of power flow in beams and frameworks using the direct-dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 136(3):439 – 452, 1990.
- [69] R. LANGLEY et A. BROWN : The ensemble statistics of the band-averaged energy of a random system. *Journal of Sound and Vibration*, 275(1):847 – 857, 2004.
- [70] Y. LASE, M. N. ICHCHOU et L. JEZEQUEL : Energy flow analysis of bars and beams : theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):281 – 305, 1996.
- [71] C. LESUEUR : *Rayonnement acoustique des structures, vibroacoustique, interactions fluide-structures*. Eyrolles, Paris, 1988.
- [72] R. LYON : *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems*. San Diego, 1975.
- [73] R. LYON : *Statistical Theory and application of statistical energy analysis*. Boston, MA, 2nd edition édn, 1975.
- [74] R. LYON et G. MAIDANIK : Statistical methods in vibration analysis. *AIAA Journal*, 2(6):1015 – 1024, 1964.
- [75] B. R. MACE et P. J. SHORTER : Energy flow models from finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 233(3):369–389, 2000.
- [76] B. R. MACE et P. J. SHORTER : A local modal/perturbational method for estimating frequency response statistics of built-up structures with uncertain properties. *Journal of Sound and Vibration*, 242(5):793–811, 2001.
- [77] J. E. MANNING : Formulation of SEA parameters using mobility functions. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 346(1):477 – 488, 1994.
- [78] L. MAXIT et J. L. GUYADER : Estimation of the SEA coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information part i : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):907 – 930, 2001.
- [79] L. MAXIT et J. L. GUYADER : Estimation of the SEA coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information part ii : Numerical application. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):931 – 948, 2001.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [80] L. MAXIT et J.-L. GUYADER : Extension of SEA model to subsystems with non-uniform modal energy distribution. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1):337–358, 2003.
- [81] J. M. MONDOT et B. PETERSSON : Characterization of structure-borne sound sources :the source descriptor and the coupling, function. *Journal of Sound and Vibration*, 14(2):507–518, 1987.
- [82] A. T. MOORHOUSE : A dimensionless mobility formulation for evaluation of force and moment excitation of structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(3):972–980, 2002.
- [83] A. T. MOORHOUSE et B. M. GIBBS : Calculation of the mean and maximum mobility for concrete floors. *Applied acoustics*, 94(1):227 – 245, 1995.
- [84] H. J.-P. MORAND et R. OHAYON : *Fluid-Structure Interaction : applied numerical methods*. John Wiley and Son Ltd, 1995.
- [85] R. OHAYON et C. SOIZE : *Structural Acoustics and Vibration*. Mechanical Models Variational Formulations and Discretization. Academic press, San Diego, USA, 1998.
- [86] G. OREFICE : *Description par mobilités énergétiques des échanges vibratoires dans les systèmes couplés*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 97 ISAL 0109, 1997.
- [87] G. OREFICE, C. CACCIOLATI et J. L. GUYADER : The energy mobility. *Journal of Sound and vibration*, 254(2):269–295, 2002.
- [88] B. PETERSSON et J. PLUNT : On effective mobilities in the prediction of structure-borne sound transmission between a source structure and a receiving structure, part i : Theoretical background and basic experimental studies. *Journal of Sound and Vibration*, 82(4):517 – 529, 1982.
- [89] B. A. T. PETERSSON : A thin-plate model for the moment mobility at the intersection of two perpendicular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 108(3):471 – 485, 1986.
- [90] B. A. T. PETERSSON : Geometrical and spatial effects on effective mobilities of annular interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 202(4):511 – 537, 1997.
- [91] B. A. T. PETERSSON : Concentrated excitations of deep beams. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2):243 – 266, 1999.

-
- [92] B. A. T. PETERSSON et M. HECKEL : Concentrated excitations of structures. *Journal of Sound and Vibration*, 196(3):295 – 321, 1996.
- [93] A. D. PIERCE : *Acoustics : An Introduction to its Physical Principles and Applications*. originally published in 1981, McGraw-Hill Acoust. Soc. Am., Publications on Acoustics, Woodbury, USA, 1989.
- [94] H. PRADLWARTER et G. SCHUËLLER : A consistent concept for high-and low-frequency dynamics based on stochastic modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 288(1):653–667, 2005.
- [95] J. P. R. S. MING et M. P. NORTON : The mobility functions and their application in calculating power flow in coupled cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(3):1702–1713, 1999.
- [96] D. J. RIXEN : A dual craig-bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2):383 – 391, 2004. Selected Papers from the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2002).
- [97] T. E. ROOK et R. SINGH : Power flow through multidimensional compliant joints using mobility and modal approaches. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(5):2882–2891, 1995.
- [98] R. Y. RUBINSTEIN : *Simulation and the Monte Carlo Methods*. John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [99] M.-S. RYU : *Application des mobilités énergétiques au couplage fluide-structure*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale des Sciences pour l'ingénieur de Lyon : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA) ECL - INSA - UCBL, 2002.
- [100] R. SERFLING : *Approximations Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, New York, USA, 1980.
- [101] K. SHANKAR et A. KEANE : Energy flow predictions in a structure of rigidly joined beams using receptance theory. *Journal of Sound and Vibration*, 185(1):867–890, 1995.
- [102] C. SHANNON : A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, p. 379–423 and 623–659, 1948.
- [103] P. SHORTER et R. LANGLEY : Vibro-acoustic analysis of complex systems. *Journal of Sound and Vibration*, 288(1):669–699, 2005.

BIBLIOGRAPHIE

- [104] C. SOIZE : Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(4):657 – 685, 1998.
- [105] C. SOIZE : Reduced models in the medium frequency range for general external structural-acoustic systems. *J. Acoust.S oc. Am.*, 103(6):3393 – 3406, 1998.
- [106] C. SOIZE : Reduced models for structures in the medium-frequency coupled with internal acoustic cavitiesrange for general external structural-acoustic systems. *J. Acoust.S oc. Am.*, 106(6):3362 – 3374, 1999.
- [107] C. SOIZE : A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15:277–294, 2000.
- [108] C. SOIZE : Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of Acoustic Society of America*, 109(5):1979–1996, 2001.
- [109] C. SOIZE : Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncertainties. *Uncertainties in Engineering Mechanics*, 1(1):1–38, 2001.
- [110] C. SOIZE : Random matrix theory and nonparametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 263:893–916, 2003.
- [111] C. SOIZE : Uncertain Dynamical Systems in the Medium-Frequency Range. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(9):1017–1027, 2003.
- [112] C. SOIZE : A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288:623–652, 2005.
- [113] C. SOIZE : Probabilistic Models for Computational Stochastic Mechanics and Applications. *In the 9th International Conference of Structural Safety and Reliability ICOSSAR'05*, Rotterdam, Netherlands, 2005. Millpress.
- [114] C. SOIZE : Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *CMAME*, 194:1333–1366, 2005.
- [115] C. SOIZE et H. CHEBLI : Random Uncertainties Model in Dynamic Substructuring Using a Nonparametric Probabilistic Model. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(4):449–457, 2003.

-
- [116] J. SU, A. T. MOORHOUSE et B. M. GIBBS : Towards a practical characterization for structure-borne sound sources based on mobility techniques. *Journal of Sound and vibration*, 185(4):737–741, 1995.
- [117] J. X. SU et A. T. MOORHOUSE : A closed form solution for the mobility of an edge-excited, semi-infinite plate. *J.Acousst. Soc. Am.*, 115(5):2075–2082, 2004.
- [118] F. S. SUI, M. N. ICHCHOU et L. JEZEQUEL : Prediction of vibroacoustics energy using a discretized transient local energy approach and comparison with the SEA. *Journal of Sound and Vibration*, 251(1):163 – 180, 2002.
- [119] N. TOTARO et J. GUYADER : SEA substructuring using cluster analysis : The MIR index. *Journal of Sound and Vibration*, 290(1):264–289, 2006.
- [120] R. A. F. ULFORD et B. M. GIBBS : Structure-borne sound power and source characterization in multi-point-connected systems, part 2 : About mobility functions and free velocities. *J. Acoust. Soc. Am.*, 220(2):203 – 224, 1999.
- [121] E. WESTER et B. MACE : Wave component analysis of energy flow in complex structures - part i : a deterministic model. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1-2):209 – 227, 2005.
- [122] E. WESTER et B. MACE : Wave component analysis of energy flow in complex structures - part iii : two coupled plates. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1-2):251 – 265, 2005.
- [123] E. WESTER et B. MACE : Wave component analysis of energy flow in complex structures-part ii : ensemble statistics. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1-2):229 – 250, 2005.
- [124] W. XU et L. L. KOSS : Frequency response functions for power, power transfer ration and coherence. *Journal of Sound and Vibration*, 155(1):55–73, 1992.
- [125] X. ZHAO et N. VLAHOPOULOS : A hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of systems with excitation applied on short members. *Journal of Sound and Vibration*, 237(2):181–202, 2000.
- [126] O. ZIENCKIEWICZ et R. TAYLOR : *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 4th edition édn, 1989.