Assimilation d'images pour les fluides géophysiques

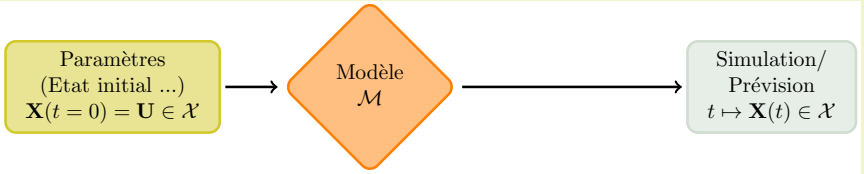
par Innocent Souopgui

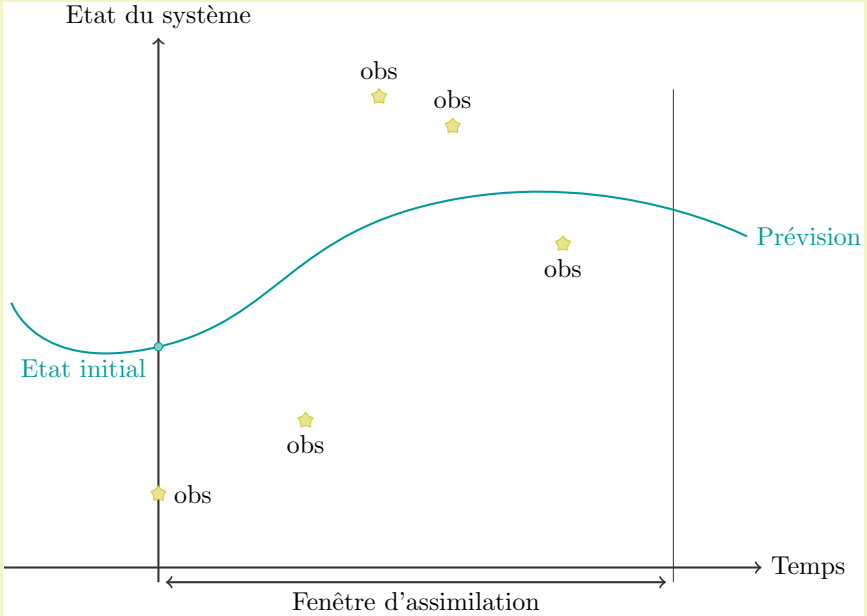
pour l'obtention du grade de Docteur de

l'Université de Grenoble, France

et de l'Université de Yaoundé I, Cameroun

25 octobre 2010, Amphitéâtre, Maison Jean Kuntzmann, Grenoble





Paramètres peu ou mal connus

Sources d'information

- Modèle $\Rightarrow$ état du système
  - Vent
  - Pression
  - Température
  - ...
- Observations
  - Mesures physiques
- Connaissances *a priori*
  - Ébauche;
  - Erreurs d'ébauche
  - Erreurs d'observation
  - ...

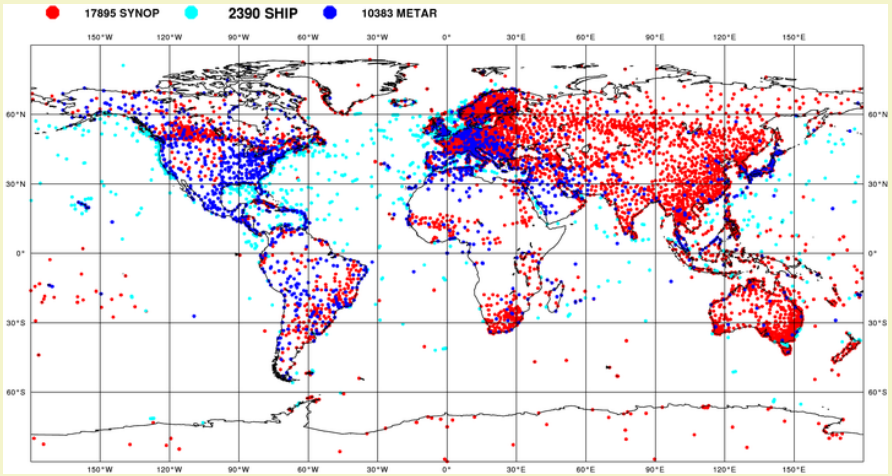
Problème inverse

Une approche optimale de résolution : Assimilation de données.

Champs d'applications : atmosphère, océan, agriculture, médecine, ...

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Les mesures in situ



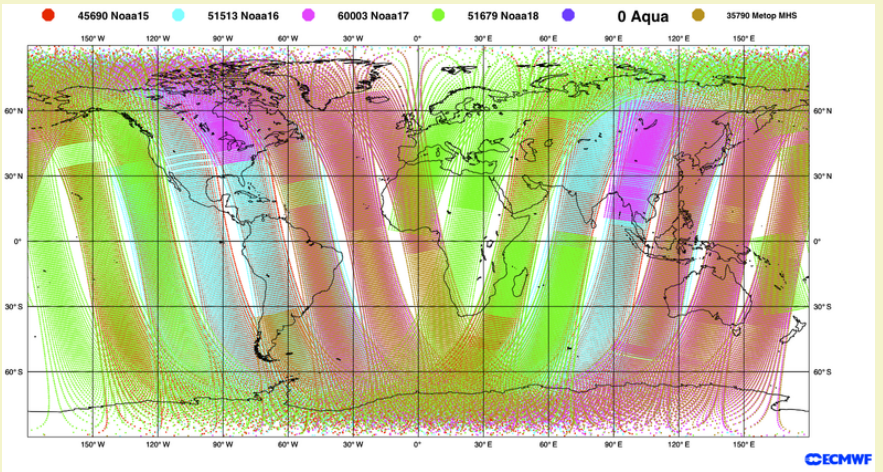
Exemple (image ECMWF)

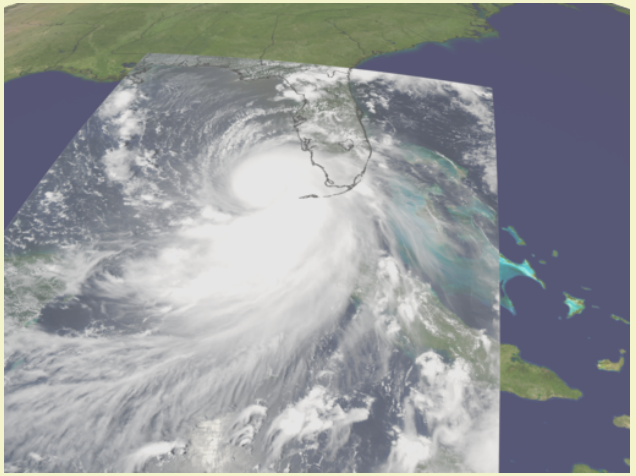
- Stations météorologiques terrestres (rouge)
- Stations embarquées sur les bateaux (cyan)

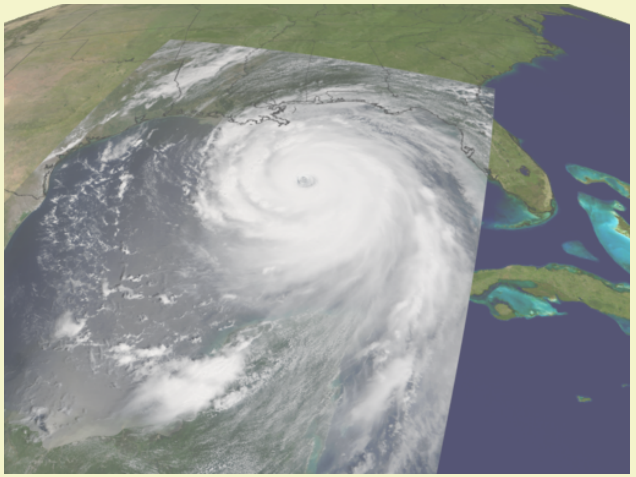
Couverture limitée et répartition très inégale

Télé-mesures par satellite

- Couverture (balayage) quasi-globale
- Complémentaire aux mesures in situ





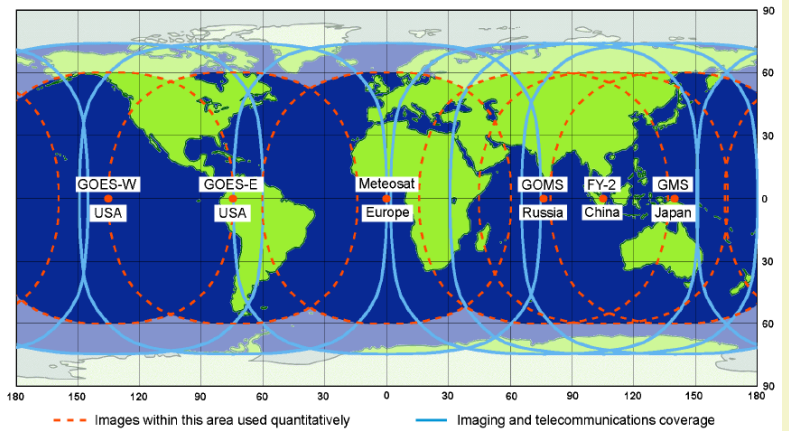


Potentiel des images par satellite

- Observation et suivi d'événements extrêmes
- Observations de haute résolution
- Couverture quasi-globale

Actuellement, sous-utilisées en prévision

- Interprétation qualitative
- Pseudo-observation



Motivation : étudier la possibilité d'intégrer les informations de type séquence d'images dans les schémas d'assimilation de données

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Plan

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Conclusion et perspectives

Assimilation variationnelle de données

Observations de type image et leurs caractéristiques

Régularisation pour les problèmes inverses, cas du traitement d'images

Nouvelle approche d'utilisation de la régularisation

Assimilation directe de séquences d'images

Conclusion et perspectives

Assimilation variationnelle de données
Principe de l'assimilation de données
Assimilation variationnelle de données : processus

Observations de type image et leurs caractéristiques

Régularisation pour les problèmes inverses, cas du traitement d'images

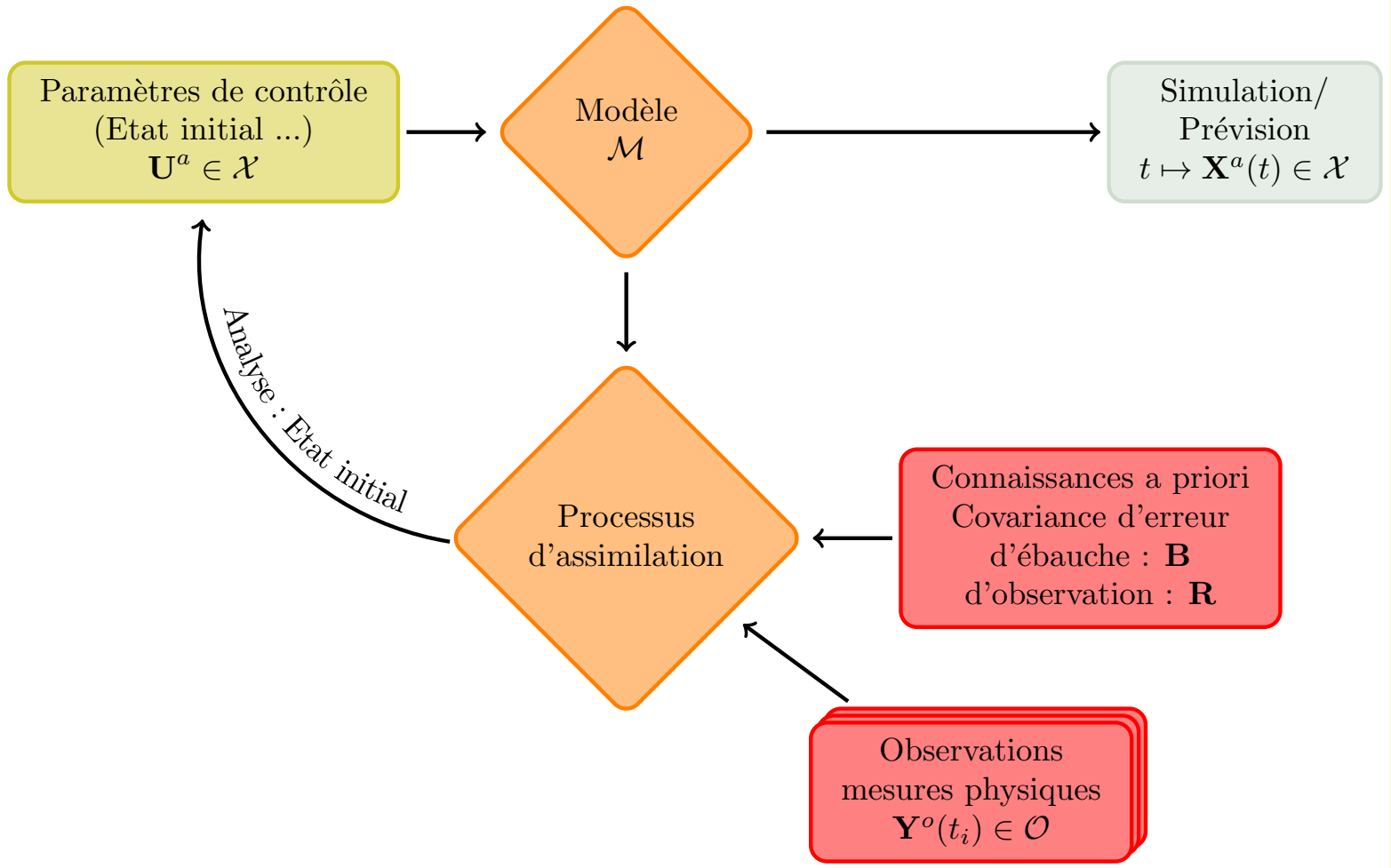
Nouvelle approche d'utilisation de la régularisation

Assimilation directe de séquences d'images

Conclusion et perspectives

Motivations
Assimilation de données
Principe
Processus
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Assimilation de données : une approche optimale de résolution des problèmes inverses



Comment en pratique?

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Principe
Processus
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Principe
Processus
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Modèle

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathcal{M}(\mathbf{X}), \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{X}(0) &= U, \end{cases} \tag{1}$$

Fonction coût

$$J(U) = \frac{1}{2}\int_0^T \| \mathcal{H}[\mathbf{X}(t)] - \mathbf{Y}^o(t) \|^2_{\mathbf{R}(t)^{-1}} \, dt + \frac{1}{2} \| U - U^b \|^2_{\mathbf{B}^{-1}}, \tag{2}$$

Sous les conditions adéquates, la solution satisfait :

$$\nabla J(U) = 0. \tag{3}$$

∇J?

Modèle

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathcal{M}(\mathbf{X}), \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{X}(0) &= U, \end{cases} \tag{1}$$

Fonction coût

$$J(U) = \frac{1}{2}\int_0^T \| \mathcal{H}[\mathbf{X}(t)] - \mathbf{Y}^o(t) \|^2_{\mathbf{R}(t)^{-1}} \, dt \; + \frac{1}{2} \| U - U^b \|^2_{\mathbf{B}^{-1}}, \tag{2}$$

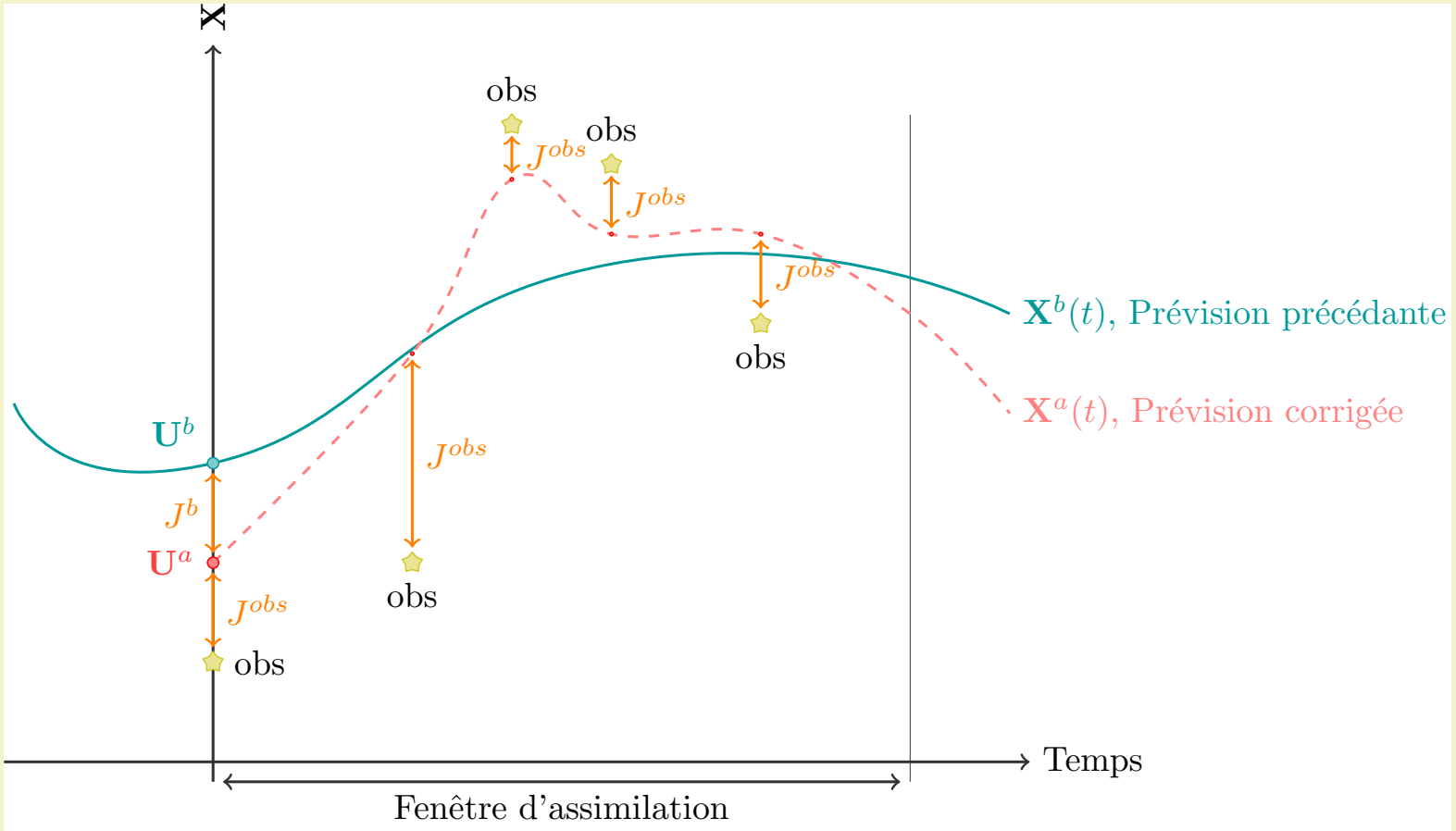
Modèle adjoint

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} + \left[\dfrac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{X}}\right]^T \cdot \mathbf{p} = \left[\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}}\right]^T .\mathbf{R}(t)^{-1}(\mathcal{H}(\mathbf{X}) - \mathbf{Y}), \quad t \in [T, 0], \\ \mathbf{P}(T) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

Gradient de la fonction coût → algorithmes de descente

$$\nabla J(U) = -\mathbf{P}(0) + \mathbf{B}^{-1}(U - U^b). \tag{4}$$

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Principe
Processus
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives



Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Principe
Processus
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Assimilation variationnelle de données

Observations de type image et leurs caractéristiques
- Images et information contenue dans les images
- Représentation mathématique des images 2D
- Interprétation des images
- Utilisation des images en assimilation de données

Régularisation pour les problèmes inverses, cas du traitement d'images

Nouvelle approche d'utilisation de la régularisation

Assimilation directe de séquences d'images

Conclusion et perspectives

Motivations

Assimilation de données

Images

Potentiel des images

Représentation et interprétation

Interprétation

Pseudo observation

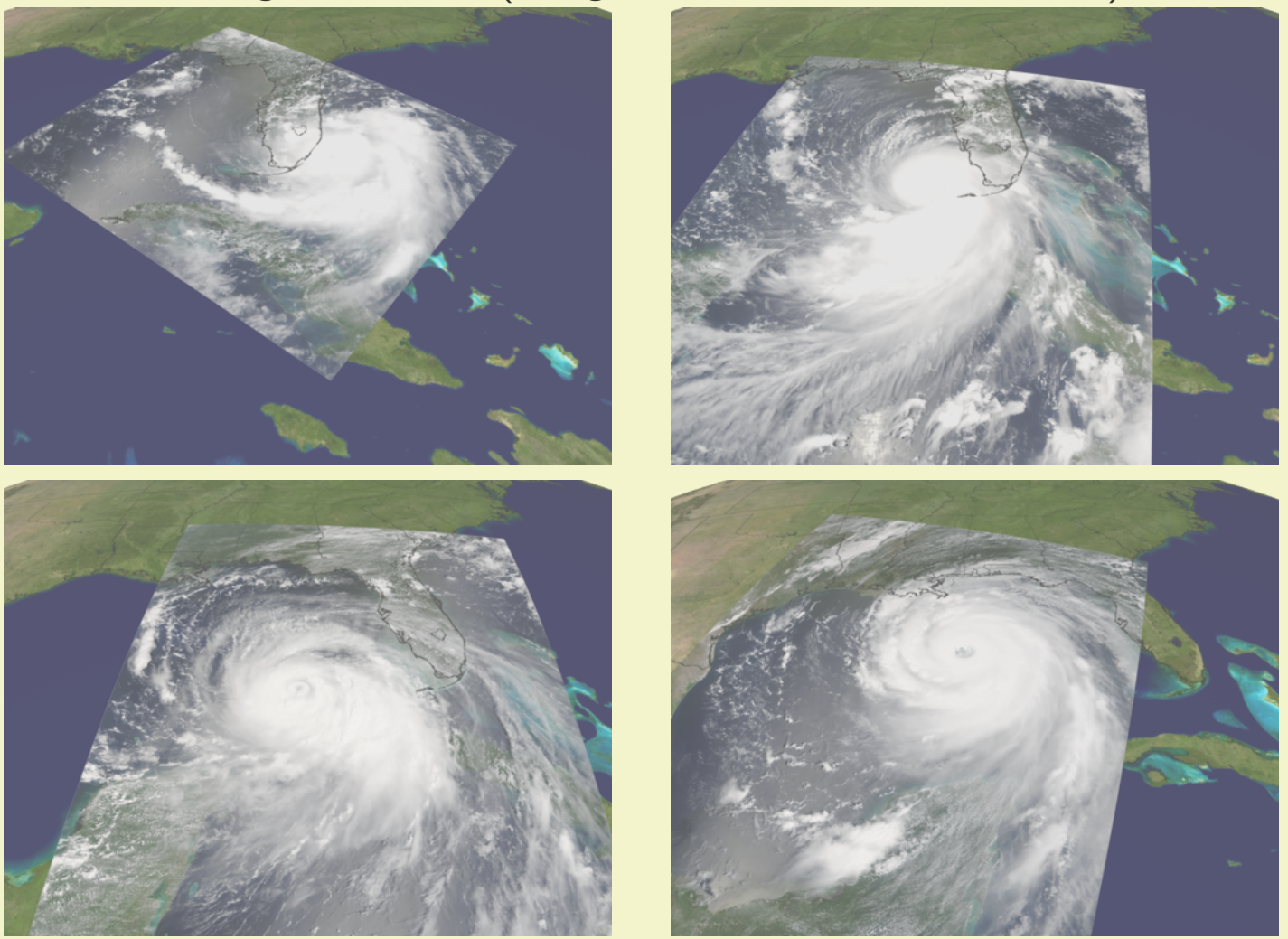
Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Conclusion et perspectives

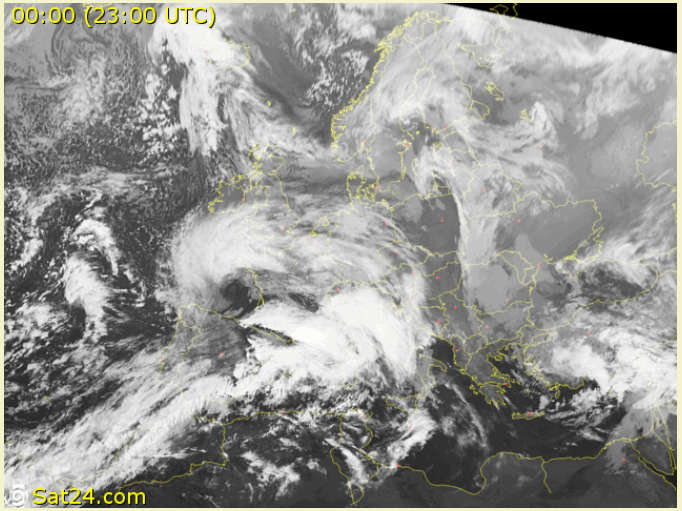
Ouragan Katrina (images du 25 au 28 Août 2005)

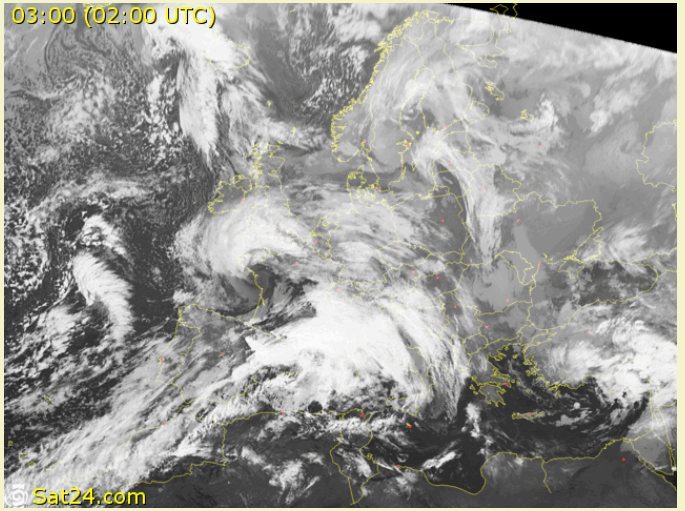


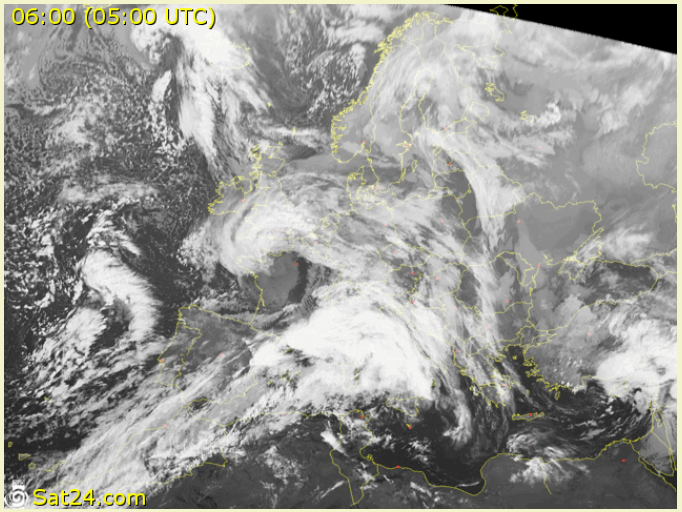
credit : NASA/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio

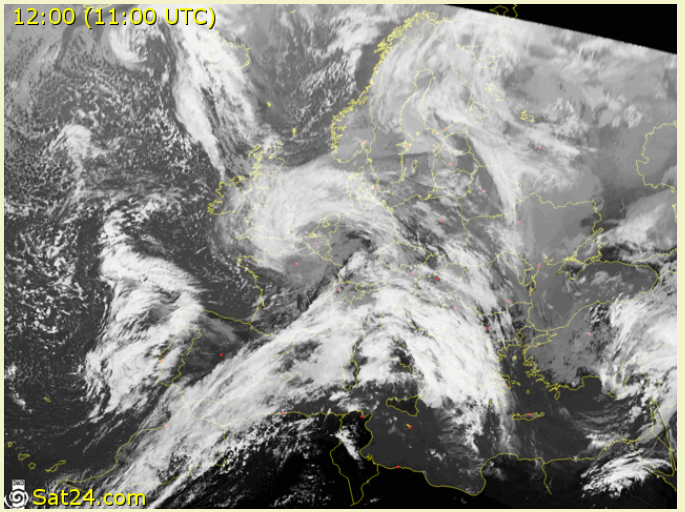
Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Potentiel des images
Représentation et interprétation
Interprétation
Pseudo observation
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Tempête Xynthia (images du 28 Février 2010)









Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Potentiel des images
Représentation et interprétation
Interprétation
Pseudo observation
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

- Résolution horizontale
  de $\sim 1km$ à $\sim 4km$ en s'éloignant de l'équateur (METEOSAT HRV),
  $20km$ pour la grille gaussienne ECMWF
- Couverture globale
- Comparaison aux observations classiques
  une image METEOSAT-HRV correspond à $\sim 12000 \times 6000$ mesures sur $1/4$ de la surface de la terre,
  L'ensemble de toute les observations du réseau synoptique est de ~ 30000 mesures
- Fréquence dans le temps
  toutes les 15 minutes, 7 minutes en cas d'évènement extrême

Quelle considération mathématique?

image = fonction à deux variables

$$\begin{array}{rccc} f & : & \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array} \tag{5}$$

Représentation numérique de l'image

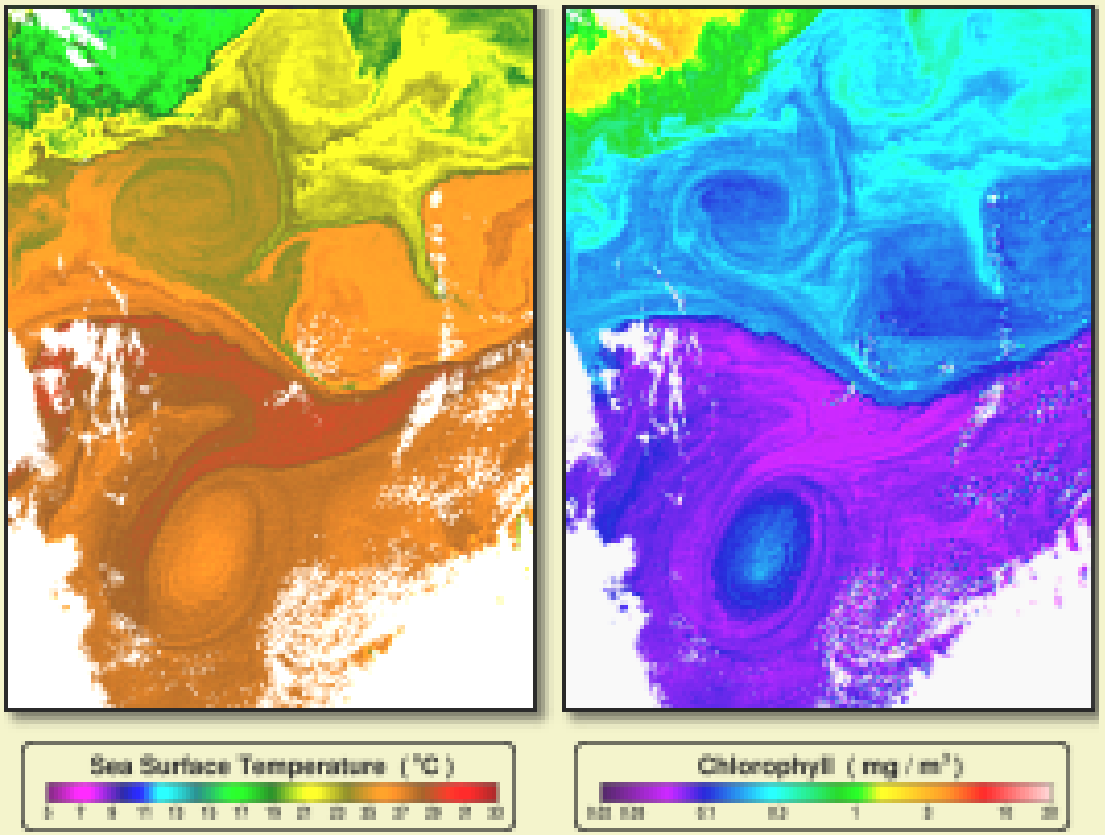
- Discrétisation spatiale $\Rightarrow$ tableau de pixels
- Discrétisation fréquentielle $\Rightarrow$ série de Fourier (base de Fourier)
- Discrétisation espace fréquence, atomes isotropiques $\Rightarrow$ ondelettes (base d'ondelettes)
- Discrétisation espace fréquence, atomes anisotropiques $\Rightarrow$ curvelets (frame de curvelets)

Plus ou moins adaptée en fonction de l'interprétation des images

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Potentiel des images
Représentation et interprétation
Interprétation
Pseudo observation
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

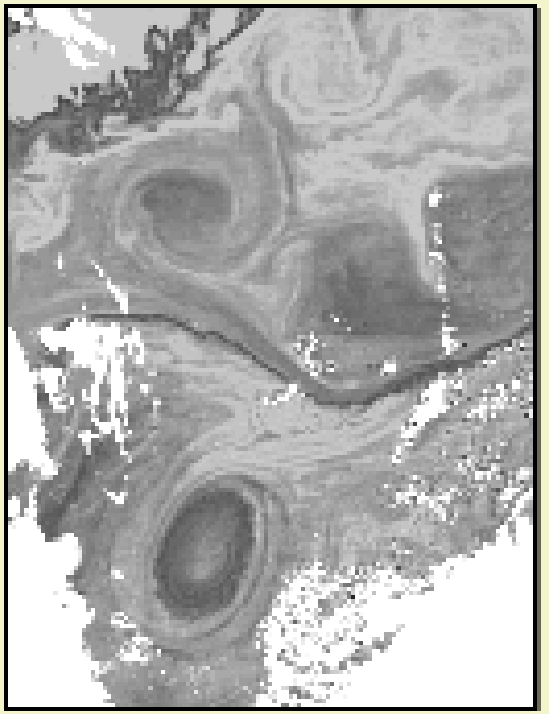
Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Potentiel des images
Représentation et interprétation
Interprétation
Pseudo observation
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

- Niveau **élémentaire** : valeur de chaque pixel
  - Grande quantité d'information
  - Forte dépendance des **conditions d'acquisition** et des **incertitudes** de l'instrument d'acquisition



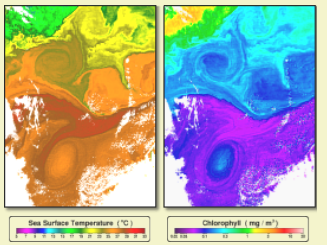
- Niveau **élémentaire** : valeur de chaque pixel

- Niveau **structuré (global)** : organisation spatiale des pixels
  - Faible dépendance des **conditions d'acquisition** et des **incertitudes** de l'instrument d'acquisition
  - Dominé par la dynamique globale

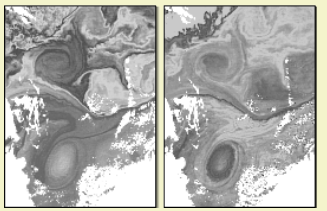


Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Potentiel des images
Représentation et interprétation
Interprétation
Pseudo observation
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

- Niveau **élémentaire** : valeur de chaque pixel
  - Grande quantité d'information
  - Forte dépendance des **conditions d'acquisition** et des **incertitudes** de l'instrument d'acquisition



- Niveau **structuré (global)** : organisation spatiale des pixels
  - Faible dépendance des **conditions d'acquisition** et des **incertitudes** de l'instrument d'acquisition
  - Dominé par la dynamique globale



$\Rightarrow$ Deux interprétations possibles pour les images

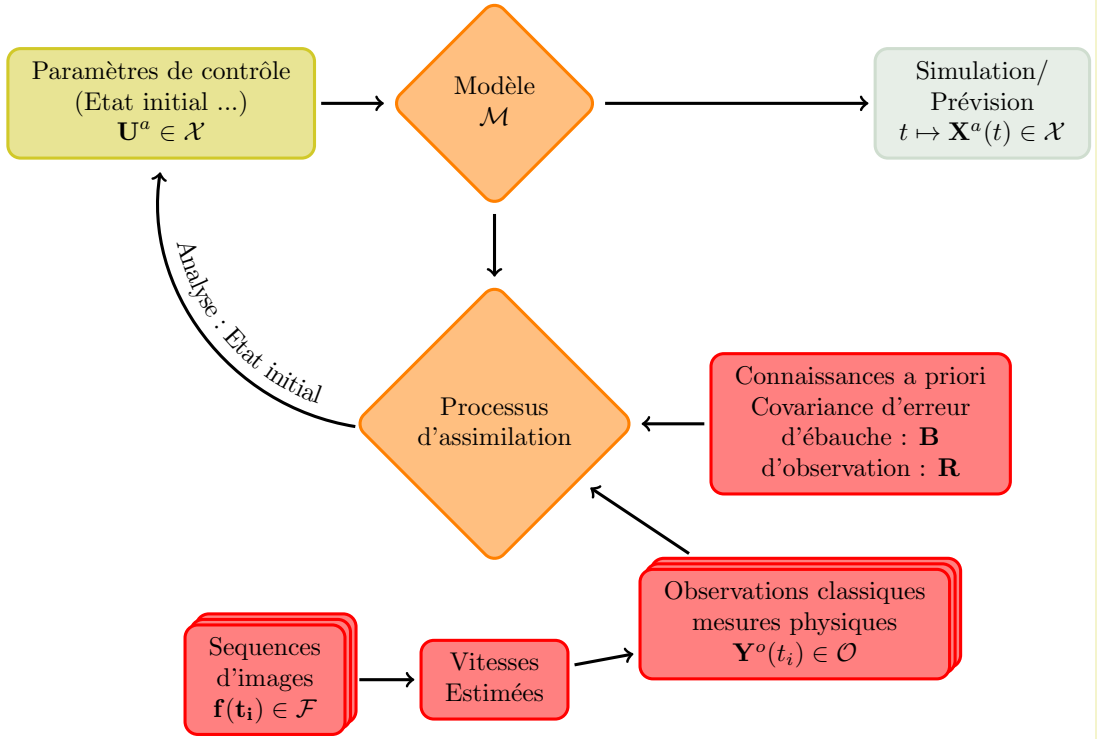
L'image = peut être interprété comme

- **Fonction** (directe) des variables du modèle
  - Assimilation de données classique;
  - problèmes :
    - différentiabilité (non linéarité et phénomènes à seuil)
    - limite des techniques de mesure (ex : SST limitée à une fine couche de la surface non représentable avec la précision des modèles du moment)
  - Discrétisation : au choix (adaptée à la discrétisation du modèle)
- **Traceur** (passif) advecté par la dynamique du système
  - Information localisée sur les contours : problème d'ouverture
    $\Rightarrow$ Régularisation
  - Discrétisation : discrétisation espace fréquence

Comment utilise-t-on les images en AD?

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Potentiel des images
Représentation et interprétation
Interprétation
Pseudo observation
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Séquence d'images $\xrightarrow[\text{(flot optique, modèle image, ...)}]{\text{Estimation du mouvement}}$ Champs de vitesse (pseudo-observation)



- Corrélation des erreurs d'ébauche et des erreurs d'observation (pseudo) [Derber et Bouttier(1999), Lorenc et al.(2000)]
- Corrélation des erreurs d'observation (pseudo) dans le temps [Rohn et al(2001), Bormann et al.(2003a et b)]

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Potentiel des images
Représentation et interprétation
Interprétation
Pseudo observation
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Assimilation variationnelle de données

Observations de type image et leurs caractéristiques

Régularisation pour les problèmes inverses, cas du traitement d'images
- Problèmes inverses : utilisation des connaissances à priori
- Régularisation par pénalisation : état de l'art
- Etude expérimentale de la régularisation par pénalisation

Nouvelle approche d'utilisation de la régularisation

Assimilation directe de séquences d'images

Conclusion et perspectives

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Connaissances à priori
Régularisation par pénalisation
Etude expérimentale
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Problèmes inverses mal posés : utilisation des connaissances *a priori*

Pour la connaissance *a priori* $\mathcal{A}$, poser $J = J_o + J_{\mathcal{A}}$
où $J_{\mathcal{A}}$ est défini pour forcer la solution à satisfaire $\mathcal{A}$

Principales connaissances *a priori*

- Ebauche $\mathbf{U}^b$ et covariance d'erreur d'ébauche $\mathbf{B}$

$$J_b = \frac{1}{2}\alpha_b \|\mathbf{U} - \mathbf{U}^b\|^2_{\mathbf{B}^{-1}} \tag{6}$$

- Regularité de la solution : Φ-régulier (minimisation du gradient)

$$J_r = \frac{1}{2}\alpha_r \|\Phi(\mathbf{U})\|^2 \tag{7}$$

Φ fonction des dérivées de $\mathbf{U}$ = fonction de régularisation

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Connaissances à priori
Régularisation par pénalisation
Etude expérimentale
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Conservation de la luminance [Horn et Shunck] - conservation de la masse (fluide) [Fitzpatrick (1985)]

$$\frac{df}{dt} + f(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0 \tag{8}$$

Permet de définir l'image $f(T)$ comme :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{U} & \rightarrow & \mathcal{F} \\ & \mathbf{U} & \mapsto & f(T) = \mathcal{M}(\mathbf{U}), f(t=0) \text{ donné} \end{array} \tag{9}$$

Estimation du mouvement : $\mathbf{U}^* = \text{ArgMin}(J(\mathbf{U}))$ avec

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\|\mathcal{M}(\mathbf{U}) - f^{obs}(T)\|^2_{\mathcal{F}} + \frac{1}{2}\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^b\|_{\mathcal{U}^2} \tag{10}$$

Problème d'ouverture :

Seul le déplacement suivant les normales aux iso-contours du gradient de l'image peut ainsi être déterminé $\Rightarrow$ Utiliser la régularisation

Régularisation du premier ordre : dérivées premières de $\mathbf{U}$

$$\Phi^{(1)}\left(\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n,}\right)$$

- pénalisation du gradient : $J_\nabla(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\alpha_\nabla \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \|\nabla U_i\|^2 d\mathbf{x}$

Régularisation du second ordre : dérivées secondes de $\mathbf{U}$

$$\Phi^{(2)}\left(\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{1\leq i,j,k\leq n,}\right)$$

- Régularisation de Suter :

$$J_{suter}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha_{\nabla div}\|\nabla div(\mathbf{U})\|^2 + \alpha_{\nabla curl}\|\nabla curl(\mathbf{U})\|^2 d\mathbf{x}$$

Problème : détermination du(des) paramètre(s) de pondération.

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Connaissances à priori
Régularisation par pénalisation
Etude expérimentale
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Connaissances à priori
Régularisation par pénalisation
Etude expérimentale
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Régularisation isotropique basée sur l'image [Alvarez et al.(1999)]

$$J_r(\mathbf{U}, f) = \int_\Omega g(\|\nabla f\|^2) \sum_{i=1}^{n} \|\nabla U_i\|^2 d\mathbf{x}$$

Régularisation isotropique basée sur le champs [Schnorr(1994)]

$$J_r(\mathbf{U}, f) = \int_\Omega \Psi(\sum_{i=1}^{n} \|\nabla U_i\|^2) d\mathbf{x}$$

Régularisation div-curl avec *a priori* [Corpetti et al.(2002)]

$$J_r(\mathbf{U}) = \int_\Omega \|div(\mathbf{U}) - \xi\|^2 + \lambda g_2(\|\nabla \xi\|) d\mathbf{x} + \|curl(\mathbf{U}) - \zeta\|^2 + \lambda g_2(\|\nabla \zeta\|) d\mathbf{x}$$

f, fonction image au temps initial; Ψ, g et g_2 : fonctions *robustes*.

$\Rightarrow$ ne résolvent pas le problème du choix du paramètre de pondération.

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Connaissances à priori

Régularisation par pénalisation

Etude expérimentale

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

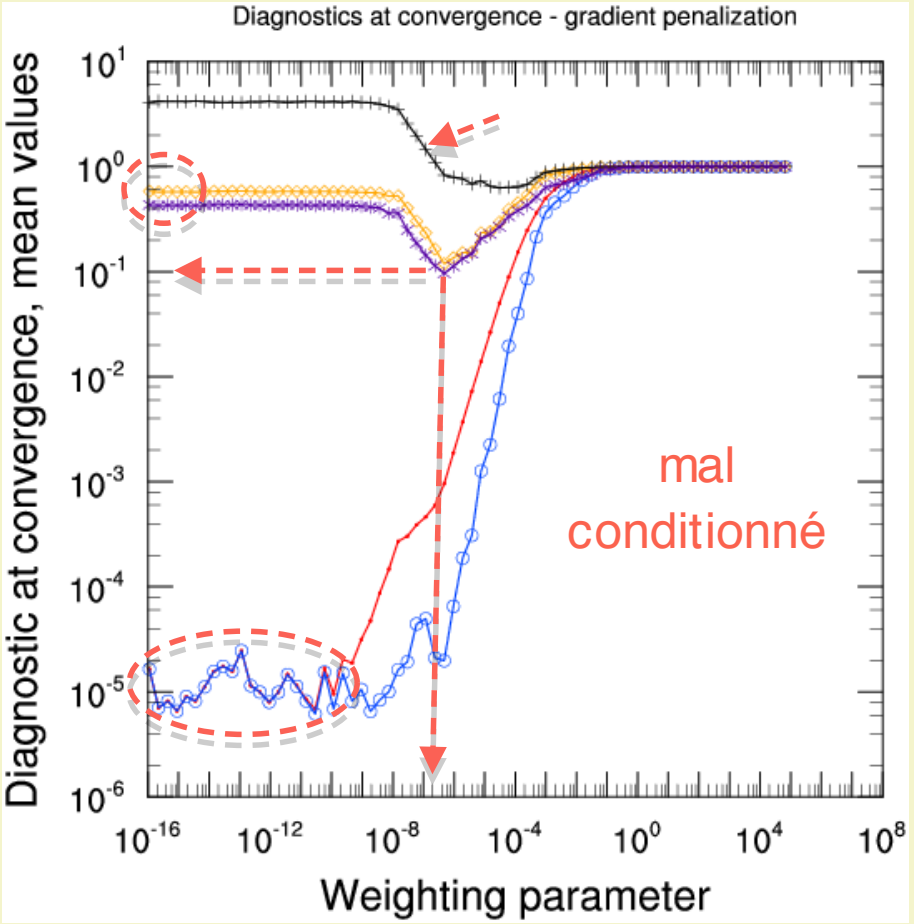
Conclusion et perspectives

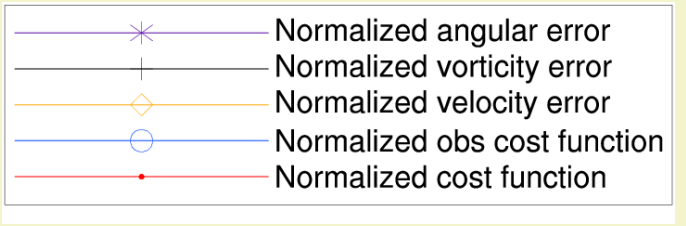
Fonctions de diagnostic

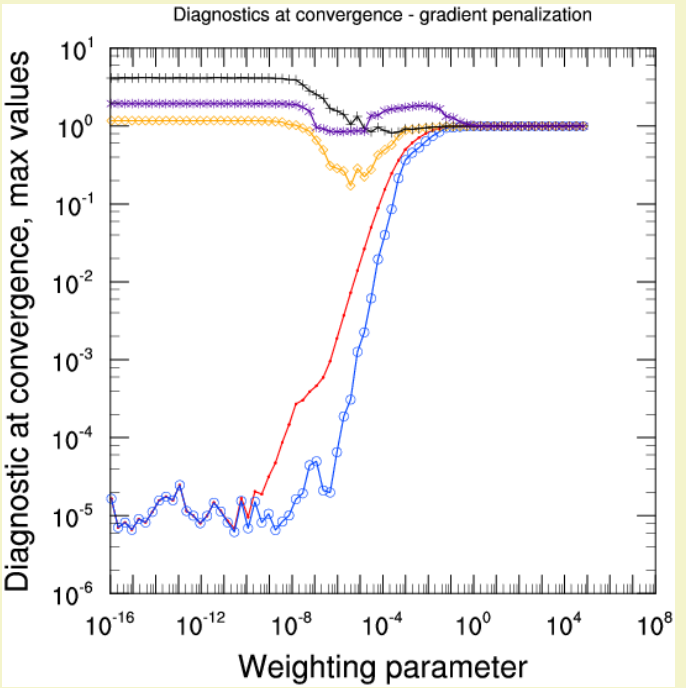
- Terme d'écart aux observations de la fonction coût
- Fonction coût globale
- Erreur sur le champ de vitesse estimé (NRMSE)
- Erreur sur la vorticité (NRMSE)
- Erreur angulaire (NRMSE)

Interprétation des fonctions de diagnostic normalisées (par rapport à l'ébauche nulle)

- $NRMSE < 1 \Rightarrow$ amélioration (globalement)
- $NRMSE = 1 \Rightarrow$ pas d'amélioration (globalement)
- $NRMSE > 1 \Rightarrow$ détérioration (globalement)







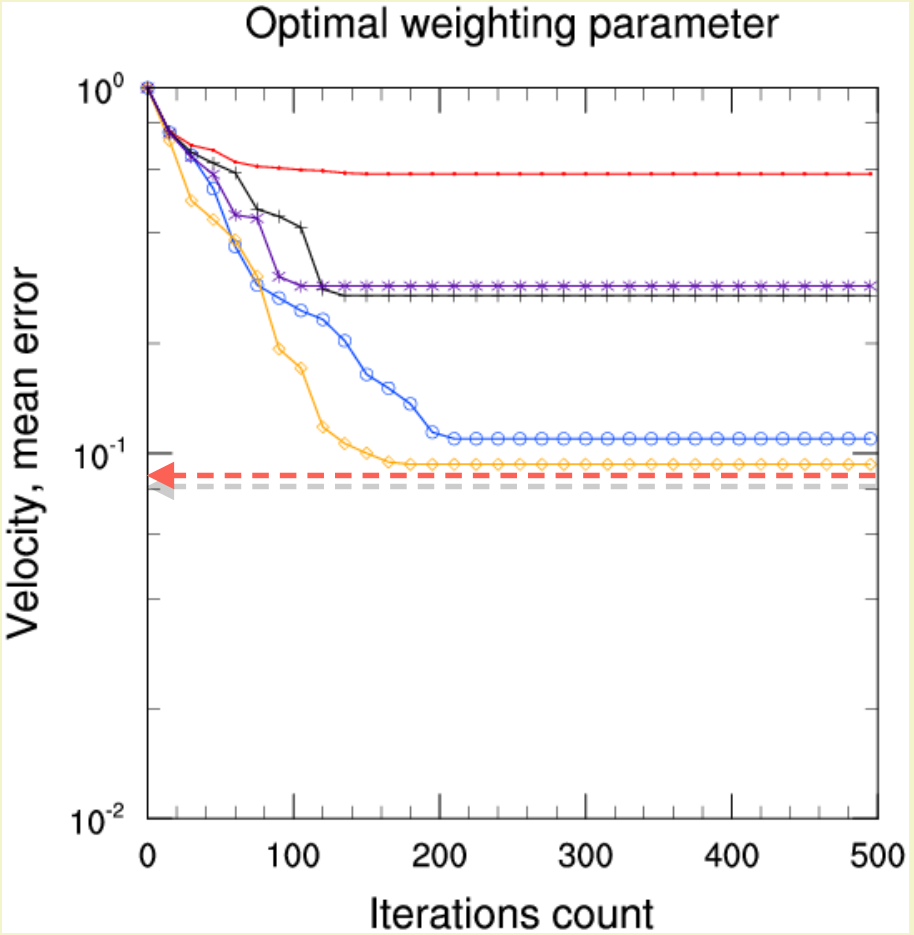
Valeurs moyennes

Valeurs maximales

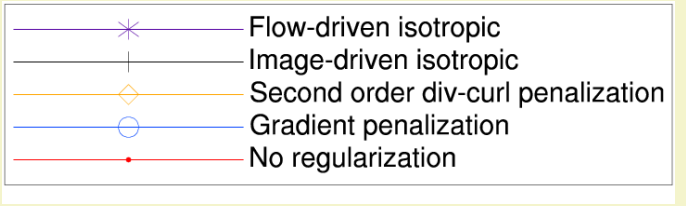
Difficulté du choix du(des) paramètre(s) de pondération.

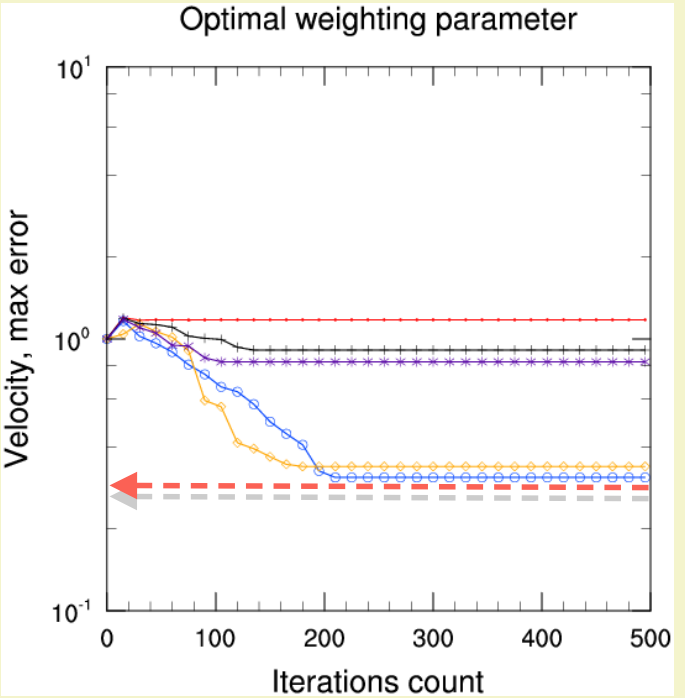
Comportement identique avec les fonctions de régularisation testées (div, curl premier et second ordre, isotropique basée sur l'image ou le champs).

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Connaissances à priori
Régularisation par pénalisation
Etude expérimentale
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives



Valeurs moyennes





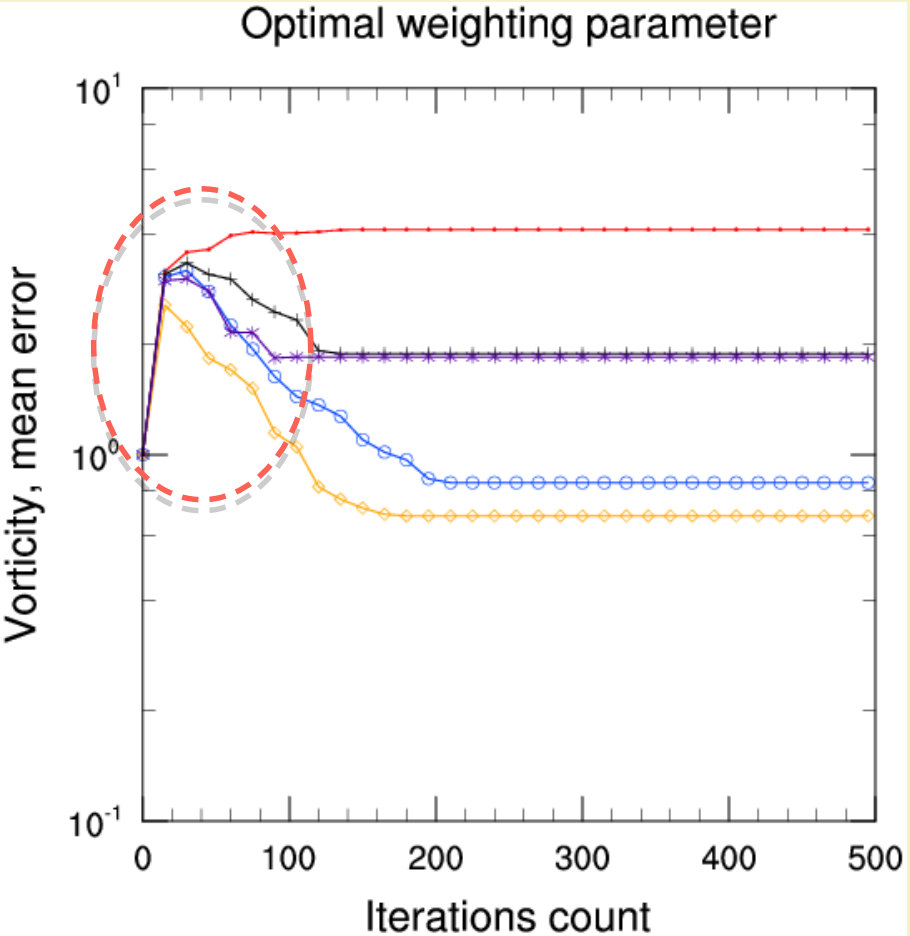
Valeurs maximales

Amélioration minime sur les valeurs maximales.

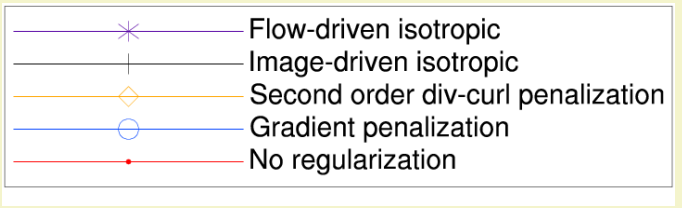
Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Connaissances à priori
Régularisation par pénalisation
Etude expérimentale
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

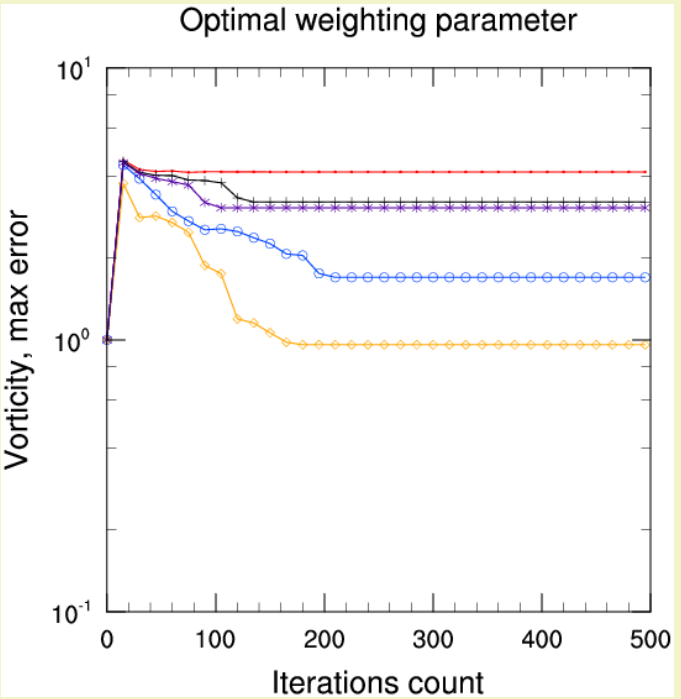
Etude expérimentale de la régularisation par pénalisation

Evolution au cours des itérations : erreur sur la vorticité



Valeurs moyennes





Valeurs maximales

Pas d'amélioration notable; quand arrêter les itérations?

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Connaissances à priori

Régularisation par pénalisation

Etude expérimentale

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Conclusion et perspectives

Limite de la régularisation par pénalisation

Problèmes liés à l'utilisation de la régularisation par pénalisation

- Difficulté (impossibilité) de déterminer le paramètre de pondération optimal
- Amélioration limitée à certains diagnostics, négligeable (négative) en terme de valeurs maximales
- Difficulté de choisir le critère d'arrêt de la minimisation
- Restriction (artificielle) de l'espace de recherche des solutions

Comment utiliser efficacement l'information de régularisation pour la résolution des problèmes inverses?

Assimilation variationnelle de données

Observations de type image et leurs caractéristiques

Régularisation pour les problèmes inverses, cas du traitement d'images

Nouvelle approche d'utilisation de la régularisation
- Formulation de la nouvelle approche
- Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
- Etude expérimentale : estimation du mouvement

Assimilation directe de séquences d'images

Conclusion et perspectives

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Formulation

Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient

Etude expérimentale

Assimilation d'images

Conclusion et perspectives

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Soient :

- $\mathcal{U}_\Phi = \{\mathbf{U} \in D_\Phi / \Phi(\mathbf{U}) = 0\}$ le sous-espace des éléments Φ-réguliers de l'espace de contrôle $\mathcal{U}$ où Φ est une fonction de régularisation et D_Φ son domaine de définition;
- $\mathcal{P}$ un projecteur sur $\mathcal{U}_\Phi$ ($\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$ et $Im\mathcal{P} = \mathcal{U}_\Phi$) défini comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}: & \mathcal{U} & \rightarrow & \mathcal{U}_\Phi, \\ & \mathbf{U} & \mapsto & \mathcal{P}(\mathbf{U}). \end{array} \tag{11}$$

Nous proposons de formuler la régularisation par :

$$J_r(v) = \frac{1}{2}\|\mathbf{U} - \mathcal{P}(\mathbf{U})\|^2_{\mathcal{U}}. \tag{12}$$

L'espace de recherche n'est plus restreint au domaine de définition de la fonction de régularisation.

Soient :

- $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^n$ l'espace de contrôle
- Φ une fonction de régularisation
- $\varphi(\mathbf{x})$ une fonction scalaire positive décrivant les caractéristiques de la variable d'état $\mathbf{U}$ au point $\mathbf{x}$ (fonction de confiance)

Nous définissons la fonction de projection associée Φ ($\Phi-$projection) en $\mathbf{U}$ comme le minimum de la fonctionnelle :

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \|\Phi(\mathbf{V}(\mathbf{x}))\|^2 + \varphi(\mathbf{x})\|\mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}. \qquad (13)$$

Sous les conditions adéquates, la solution de ce problème satisfait l'équation d'Euler-Lagrange : $\nabla_{\mathbf{V}}\varepsilon(\mathbf{V}) = 0$

Les développements basés sur la dérivée de Gateaux permettent d'exprimer

$$\nabla_{\mathbf{V}}\varepsilon(\mathbf{V}) = \mathbf{\Phi}^* \circ \mathbf{\Phi}(\mathbf{V}(\mathbf{x})) + \varphi(\mathbf{x})(\mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x})) \qquad (14)$$

Cas usuels

Régularisation	terme de régularisation	$\nabla\varepsilon$
gradient	$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \|\nabla_{\mathbf{x}} U_i(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}$	$-\Delta V_i(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})(V_i(\mathbf{x}) - U_i(\mathbf{x}))$ $1 < i < n$
divergence	$\int_{\Omega} \|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}$	$-\nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x})) + \varphi(\mathbf{x})(\mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x}))$
Rotationnel	$\int_{\Omega} \|\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}$	$-\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}))$ $+\varphi(\mathbf{x})(\mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x}))$

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

implémentation Classique : étant donné $\nabla\varepsilon$, utiliser un algorithme de type descente.

Problème : Résoudre l'équation d'Euler-Lagrange

$$\Delta V_i - \varphi(\mathbf{x})(V_i(\mathbf{x}) - U_i(\mathbf{x})) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \tag{15}$$

considérer V_i comme une fonction du temps et résoudre le problème équivalent :

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i(\mathbf{x}, t) = \Delta V_i(\mathbf{x}, t) - \varphi(\mathbf{x})(V_i(\mathbf{x}, t) - U_i(\mathbf{x}))), \quad 1 \leq i \leq n \tag{16}$$

Equations de diffusion généralisée.

Cette formulation permet de l'intégrer directement dans l'opérateur de covariance d'erreur d'ébauche [Weaver et al.]. L'information de régularisation est ainsi utilisée pour le **préconditionnement** du problème.

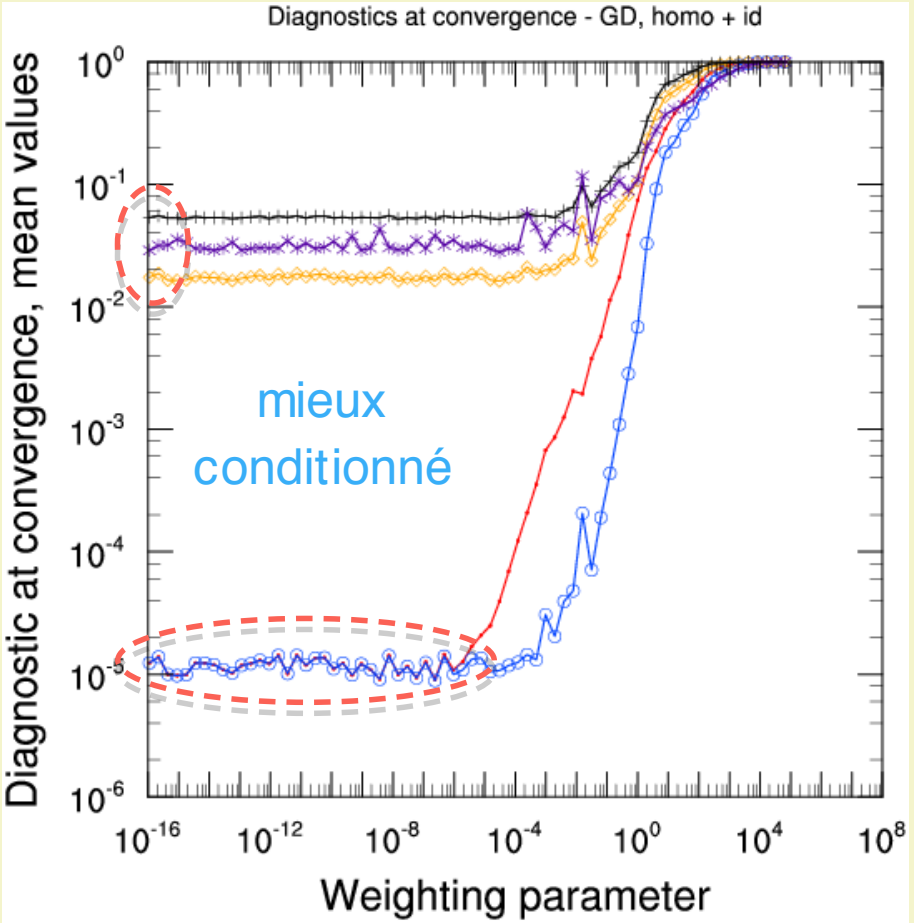
Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

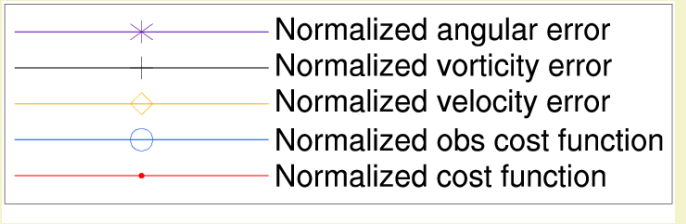
Proposition: définir la fonction de confiance φ

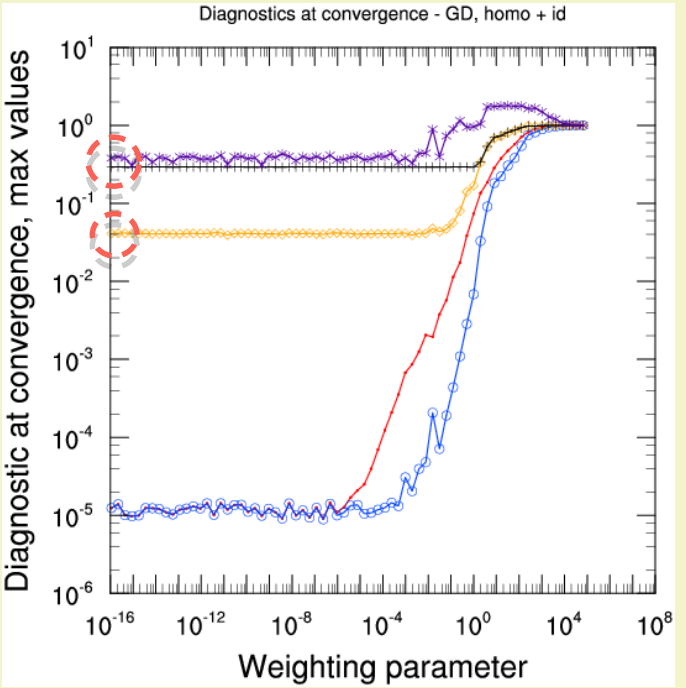
de sorte qu'elle ait de grandes valeurs selon les normales aux discontinuités (contours) et de faibles valeurs ailleurs

Exemple : choisir φ comme la carte de contours de l'image c^1 or c^2 définie par :

$$\begin{aligned} c^1(\mathbf{x}, f) &= \|\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\|^2 \\ c^2(\mathbf{x}, f) &= \|\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{G}_\sigma(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x}))\|^2 \end{aligned}$$





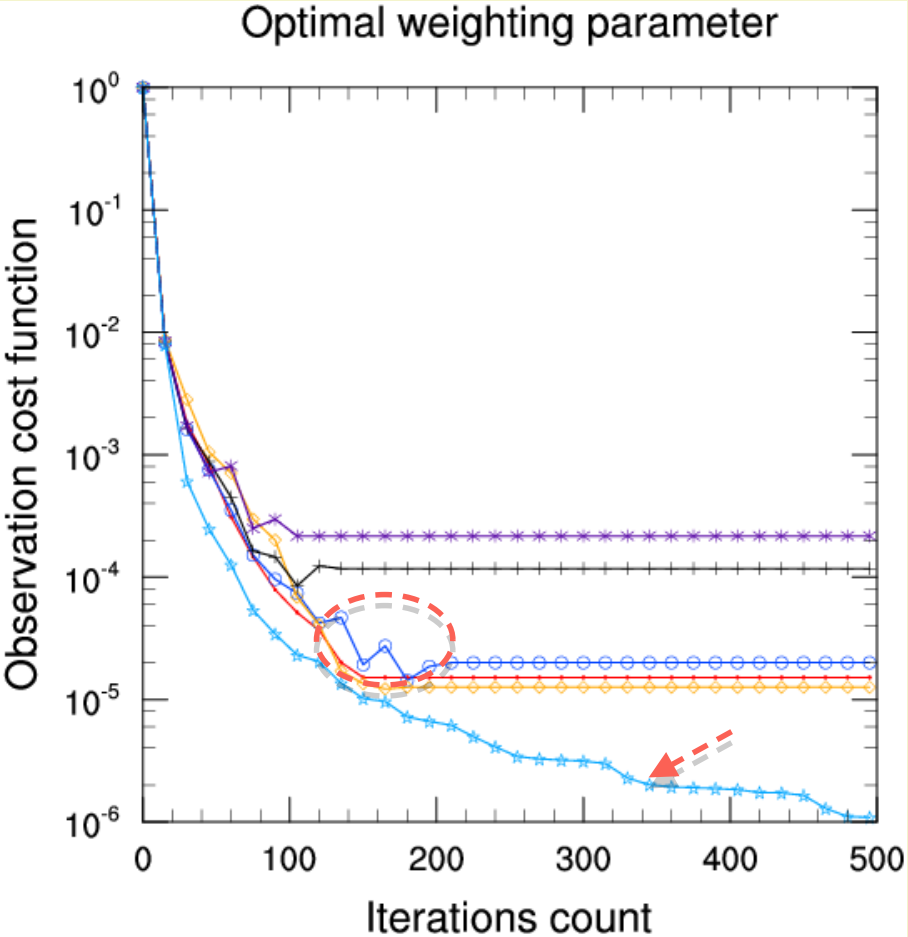


Valeurs moyennes

Valeurs maximales

Plus besoin d'un paramètre de pondération.

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives



Décroissance comparable du terme d'écart aux observations.

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

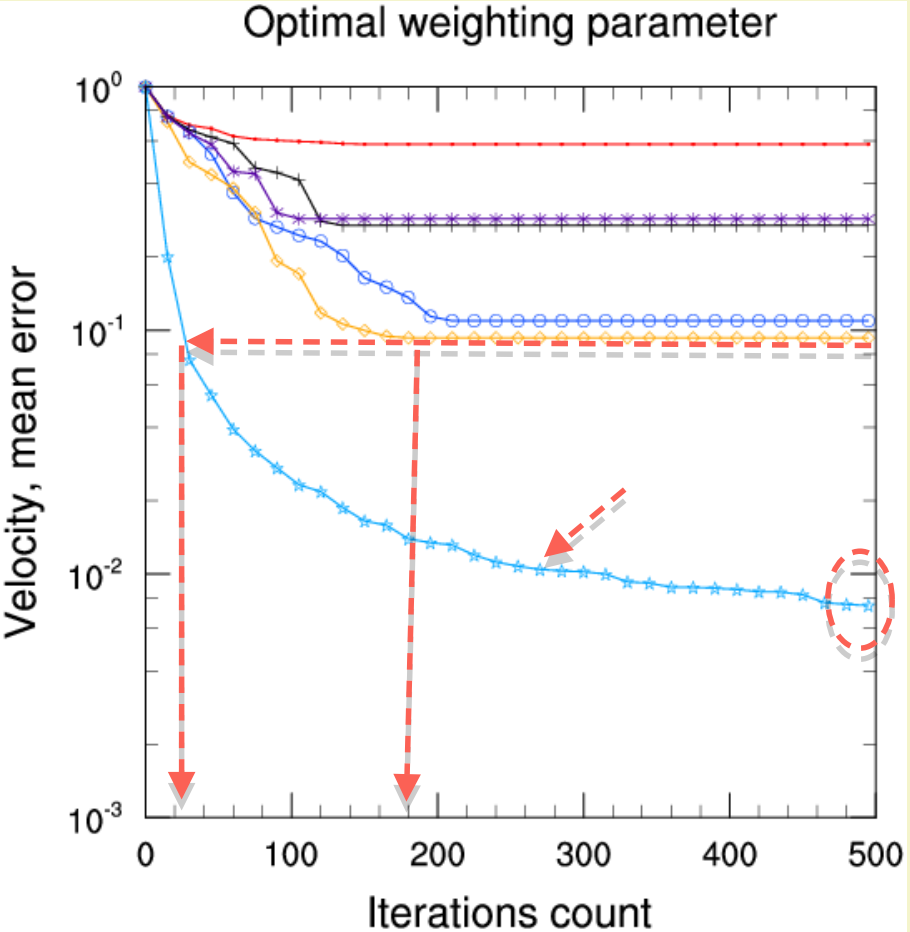
Formulation

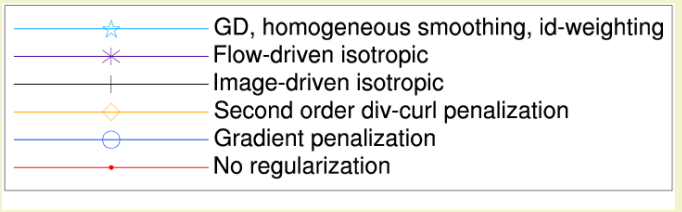
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient

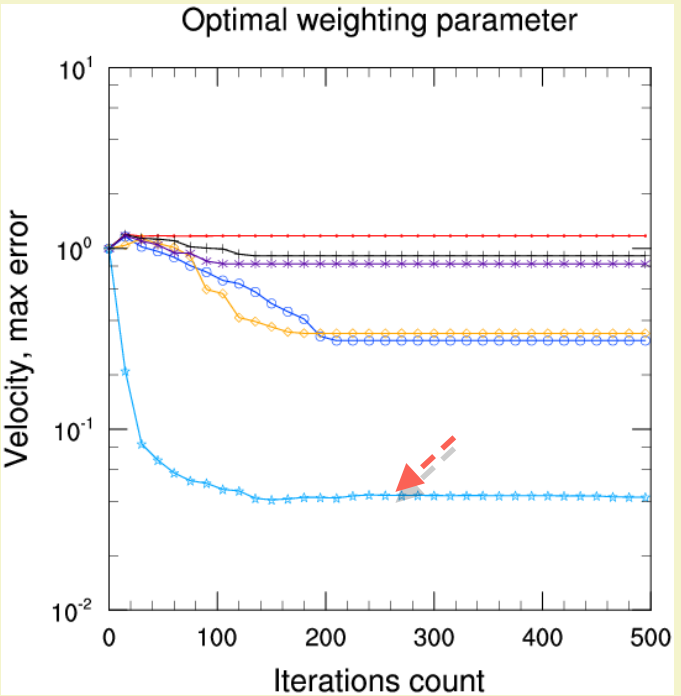
Etude expérimentale

Assimilation d'images

Conclusion et perspectives







Valeurs moyennes

Valeurs maximales

Amélioration de la moyenne et du maximum.

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

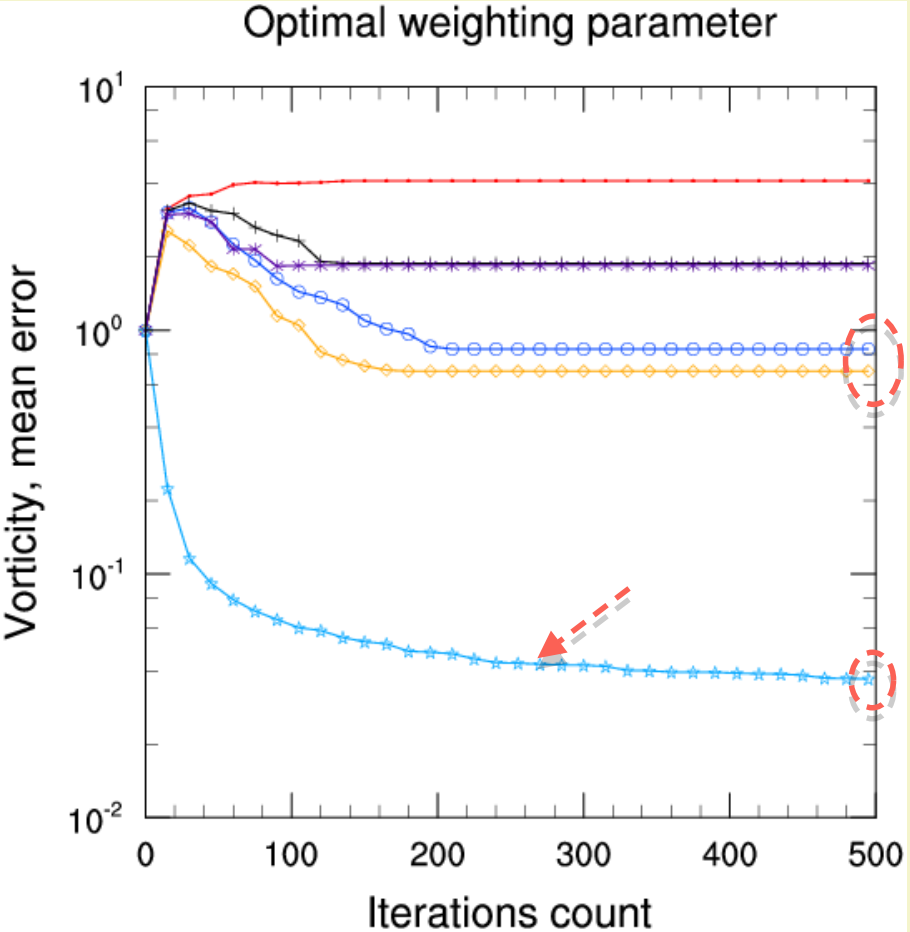
Formulation

Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient

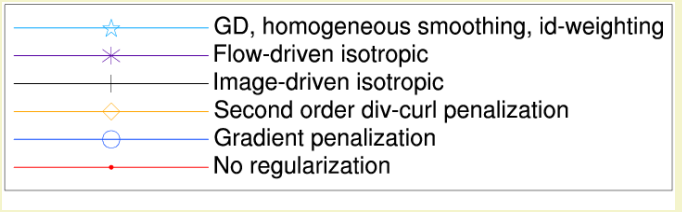
Etude expérimentale

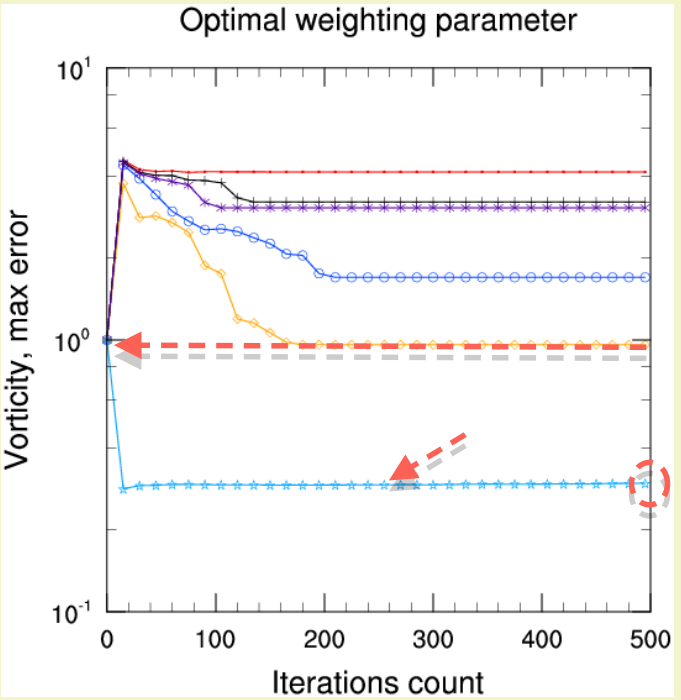
Assimilation d'images

Conclusion et perspectives



Valeurs moyennes

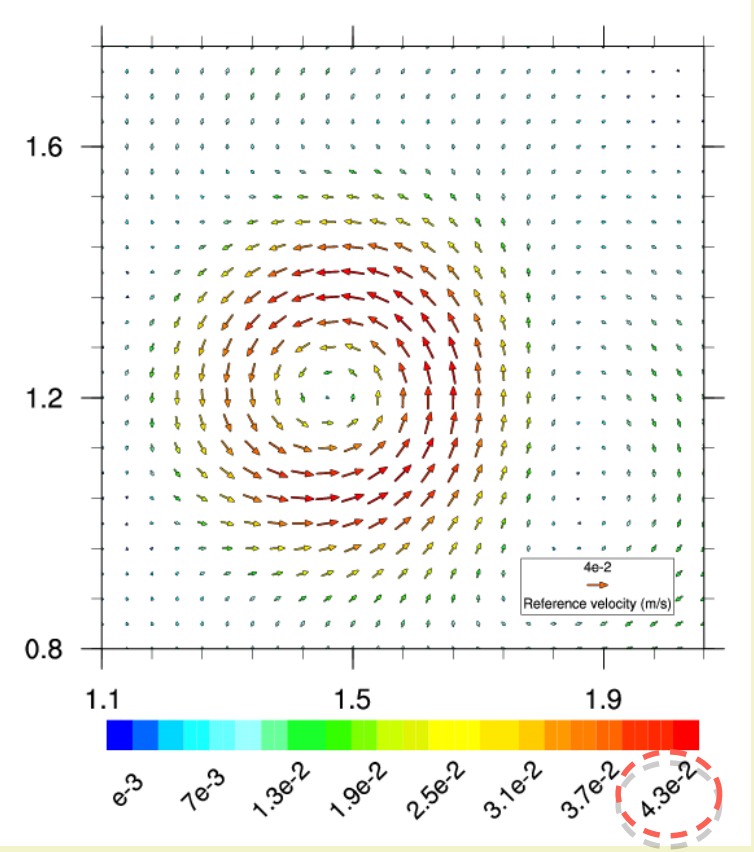




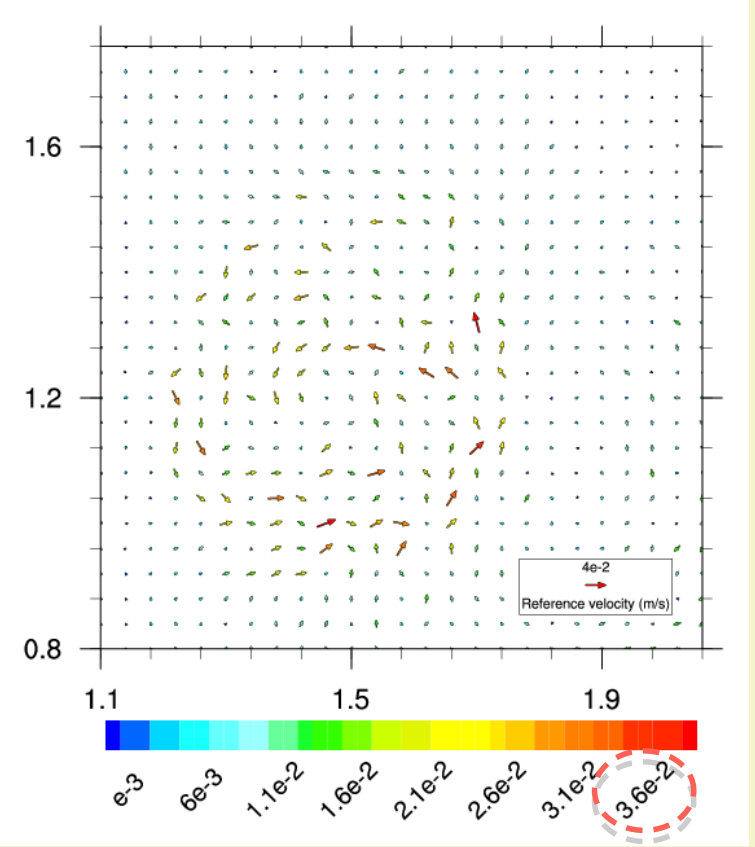
Valeurs maximales

Amélioration significative de tous les diagnostics.

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives



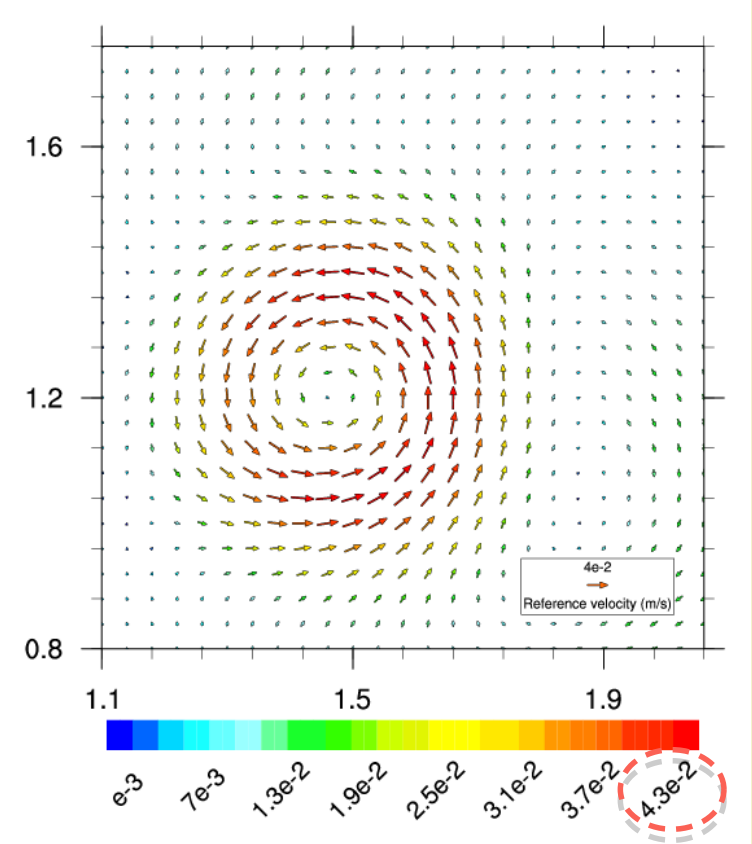
Vérité



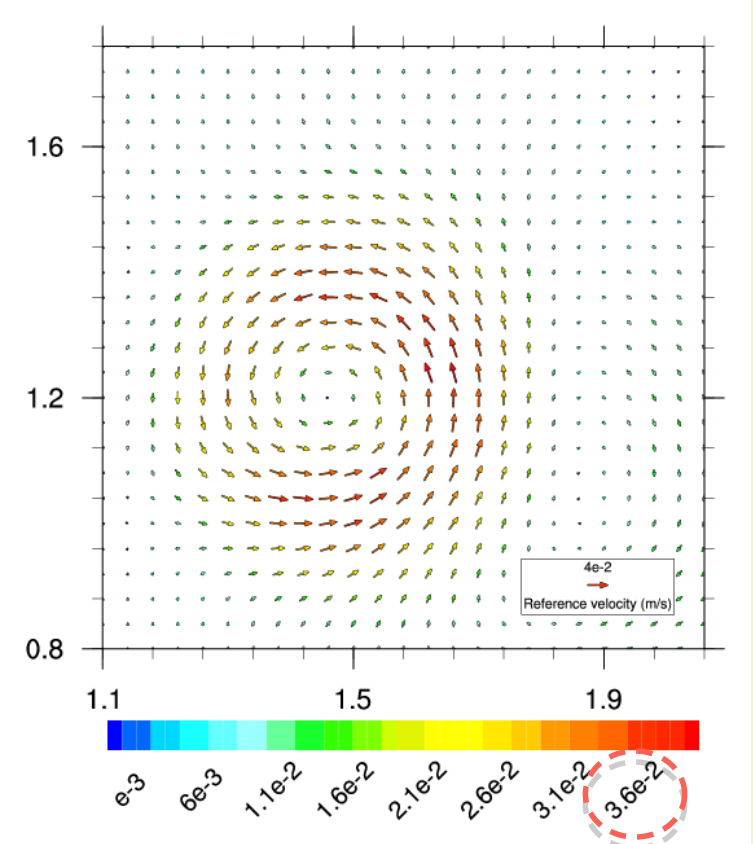
Pas de régularisation

Un champs imparfait qui transporte très bien : nécessité de régulariser.

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives



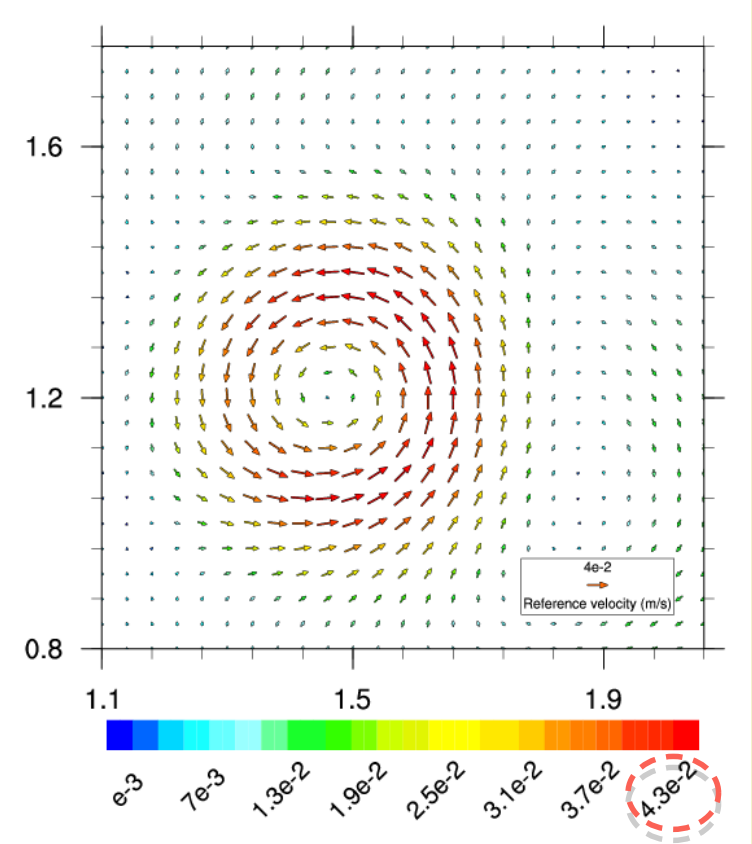
Vérité



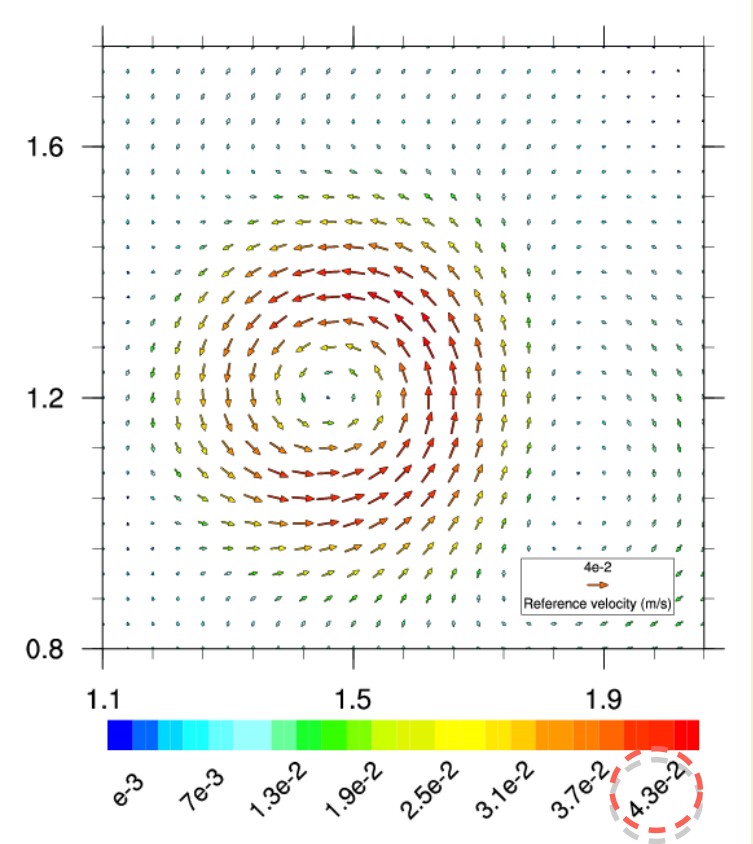
Pénalisation du gradient

Ordre de grandeur sous-estimé.

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives



Vérité



Diffusion generalisée

Champ de vitesse estimé presque parfait.

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Formulation
Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient
Etude expérimentale
Assimilation d'images
Conclusion et perspectives

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Formulation

Mise en oeuvre : cas de la pénalisation du gradient

Etude expérimentale

Assimilation d'images

Conclusion et perspectives

Résout efficacement la plupart des

problèmes rencontrés avec l'approche classique :

- ~~Difficulté (impossibilité) de déterminer le paramètre de pondération optimal~~
- ~~Amélioration limitée à certains diagnostics, négligeable (négative) en terme de valeurs maximales~~
- ~~Difficulté de choisir le critère d'arrêt de la minimisation~~
- ~~Restriction (artificielle) de l'espace de recherche des solution~~

Permet de faire du préconditionnement

Assimilation variationnelle de données

Observations de type image et leurs caractéristiques

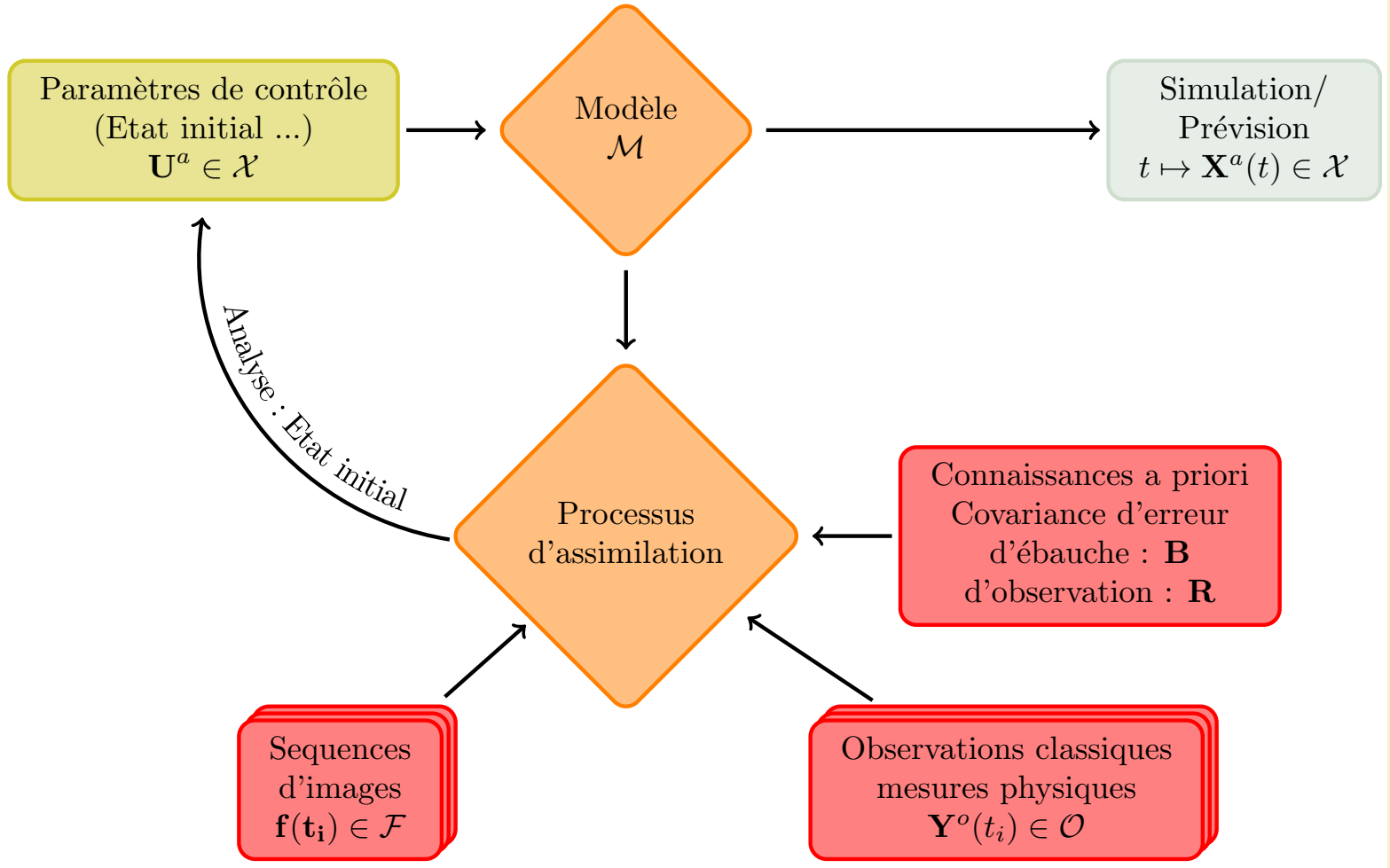
Régularisation pour les problèmes inverses, cas du traitement d'images

Nouvelle approche d'utilisation de la régularisation

Assimilation directe de séquences d'images

- Cadre général de l'assimilation directe de séquences d'images
- Application : écoulement en eaux peu profondes
- Expériences numériques

Conclusion et perspectives



Comment en pratique?

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Cadre général
Application
Résultats
Conclusion et perspectives

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Cadre général
Application
Résultats
Conclusion et perspectives

Fonction coût

$$J(U) = \frac{1}{2} \| U - U^b \|^2_{\mathbf{B}^{-1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \| \mathcal{H}[\mathbf{X}(t)] - \mathbf{Y}^o(t) \|^2_{\mathbf{R}(t)^{-1}} \, dt}_{\text{écart aux observations conventionnelles}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \| \mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{S}}[\mathbf{X}(t)] - \mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}[f(t)] \|^2_{\mathbf{R}_{\mathcal{S}}^{-1}} \, dt}_{\text{écart aux observations images}} \quad (17)$$

Opérateurs d'images :

- $\mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{S}}$: opérateur d'observation pour les images
- $\mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}$: opérateur de structures
- $\mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{F}}$: opérateur d'image synthétique

exemple de construction : $\mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{S}} = \mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}} \circ \mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{F}}$

Et l'adjoint?

Fonction coût

$$J(U) = \frac{1}{2} \| U - U^b \|^2_{\mathbf{B}^{-1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \| \mathcal{H}[\mathbf{X}(t)] - \mathbf{Y}^o(t) \|^2_{\mathbf{R}(t)^{-1}} \, dt}_{\text{écart aux observations conventionnelles}}$$

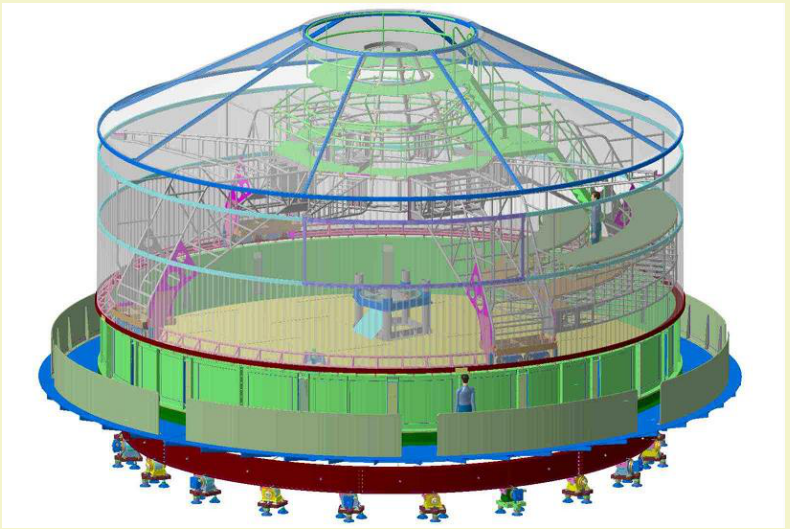
$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \| \mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{S}}[\mathbf{X}(t)] - \mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}[f(t)] \|^2_{\mathbf{R}_\mathcal{S}^{-1}} \, dt}_{\text{écart aux observations images}} \quad (17)$$

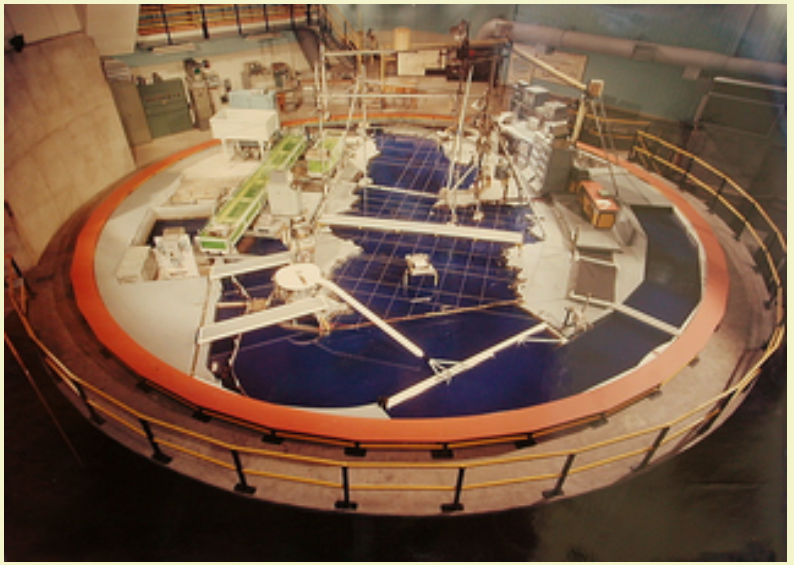
Modèle adjoint

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} + \left[\dfrac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{X}}\right]^T \mathbf{P} = \left[\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}}\right]^T \mathbf{R}^{-1} (\mathcal{H}(\mathbf{X}) - \mathbf{Y}^o) \\ \qquad\qquad + \left[\dfrac{\partial \mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{S}}}{\partial \mathbf{X}}\right]^T \mathbf{R}_\mathcal{S}^{-1} (\mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{S}}(\mathbf{X}) - \mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}(f)) \\ \mathbf{P}(T) = 0. \end{cases}$$

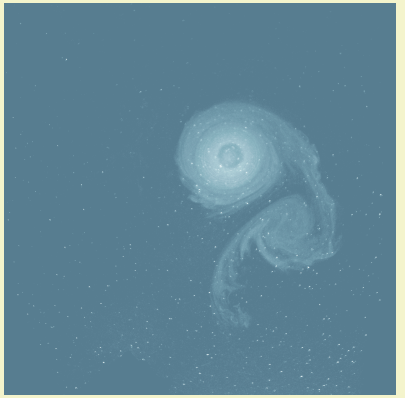
Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Cadre général
Application
Résultats
Conclusion et perspectives

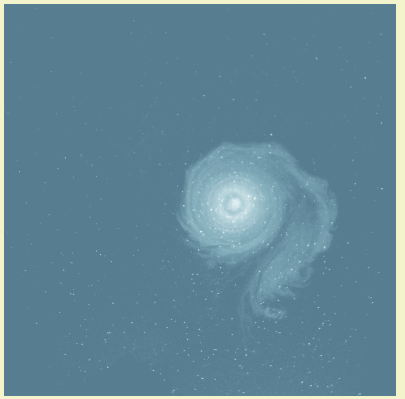
Plateforme Coriolis - LEGI, Grenoble

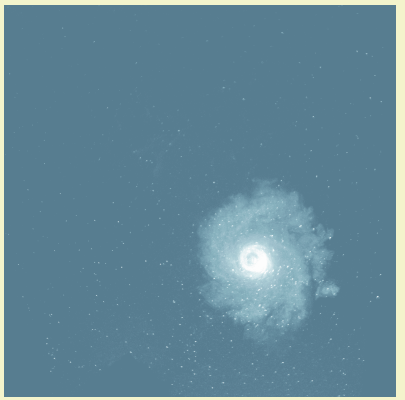




Simulation d'un vortex isolé $\Rightarrow$







Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Cadre général

Application

Résultats

Conclusion et perspectives

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Cadre général
Application
Résultats
Conclusion et perspectives

Modèle : Saint-Venant 2D

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - (f+\zeta)v + \frac{\partial}{\partial x}B &= -ru + \nu\Delta u, \\ \frac{\partial}{\partial t}v + (f+\zeta)u + \frac{\partial}{\partial y}B &= -rv + \nu\Delta v, \\ \frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) &= 0. \end{cases} \tag{18}$$

- $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$, vorticité relative
- $B = gh + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, potentiel de Bernoulli
- $f = f_0 + \beta y$, le paramètre de Coriolis
- r, la constante de friction au fond

Variable d'état

$\mathbf{X}(t) = (u(t), v(t), h(t))$

Opérateur d'image synthétique

$\mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{F}}[\mathbf{X} = (u, v, h)] = q$, avec

$$\frac{\partial}{\partial t}q + u\frac{\partial}{\partial x}q + v\frac{\partial}{\partial y}q = 0, \quad q(t = 0) \text{ donné} \tag{19}$$

Opérateur de structures ($\Rightarrow$ espace d'images)

$\mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}[f] = \mathcal{T}(\mathrm{DCT}(f))$,

avec τ l'opérateur de seuillage et DCT = Discrete Curvelet transform [Candès et al(2004, 2005, 2006)] donné pour une fonction f par

$$f = \sum_{j,l,\mathbf{k}} \langle \varphi_{j,l,\mathbf{k}}, f \rangle \varphi_{j,l,\mathbf{k}} \tag{20}$$

Seuillage brut

$$\tau_1(c_{j,l,\mathbf{k}}) = \begin{cases} c_{j,l,\mathbf{k}} & \text{si } |c_{j,l,\mathbf{k}}| \geq \sigma, \\ 0 & \text{si } |c_{j,l,\mathbf{k}}| < \sigma, \end{cases}$$

Seuillage échelle par échelle

$$\tau_2(c_{j,l,\mathbf{k}}) = \begin{cases} c_{j,l,\mathbf{k}} & \text{si } |c_{j,l,\mathbf{k}}| \geq \sigma_j, \\ 0 & \text{si } |c_{j,l,\mathbf{k}}| < \sigma_j, \end{cases}$$

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Cadre général
Application
Résultats
Conclusion et perspectives

Opérateur d'image synthétique

$\mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{F}}[\mathbf{X} = (u, v, h)] = q$, avec

$$\frac{\partial}{\partial t}q + u\frac{\partial}{\partial x}q + v\frac{\partial}{\partial y}q = 0, \quad q(t = 0) \text{ donné} \tag{19}$$

Opérateur de structures ($\Rightarrow$ espace d'images)

$\mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}[f] = \mathcal{T}(\mathrm{DCT}(f))$,

avec τ l'opérateur de seuillage et DCT = Discrete Curvelet transform [Candès et al(2004, 2005, 2006)] donné pour une fonction f par

$$f = \sum_{j,l,\mathbf{k}} \langle \varphi_{j,l,\mathbf{k}}, f \rangle \varphi_{j,l,\mathbf{k}} \tag{20}$$

Opérateur d'observation pour image

$\mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{S}} = \mathcal{H}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}} \circ \mathcal{H}_{\mathcal{X}\to\mathcal{F}}$

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Cadre général
Application
Résultats
Conclusion et perspectives

Fonction coût

$$J(U) = \frac{1}{2} \| U - U^b \|^2_{\mathbf{B}^{-1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \| \mathcal{H}_{\mathcal{X} \to \mathcal{S}}[\mathbf{X}(t)] - \mathcal{H}_{\mathcal{F} \to \mathcal{S}}[f(t)] \|^2_{\mathbf{R}_{\mathcal{S}}^{-1}} \, dt}_{\text{écart aux observations images}}$$

Opérateur **B** (norme et préconditionnement)

- Adimensionalisation
- *Inversion* de l'équilibre géostrophique
- Diffusion généralisée [Souopgui et al.(2009, 2010a,b)]

Optimisation

- Principe : minimisation incrémentale en temps [Luong et al.(1998)]
- Algorithme :M1QN3 (bibliothèque LIBOPT [Gilbert et Jonsson(2007)]

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Cadre général

Application

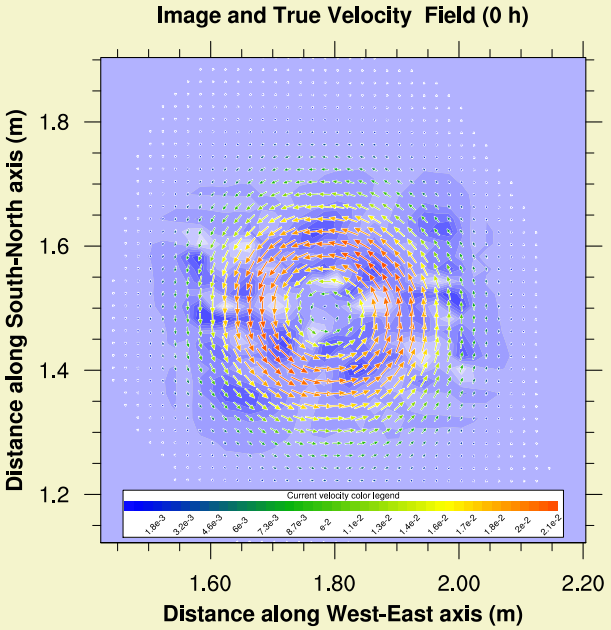
Résultats

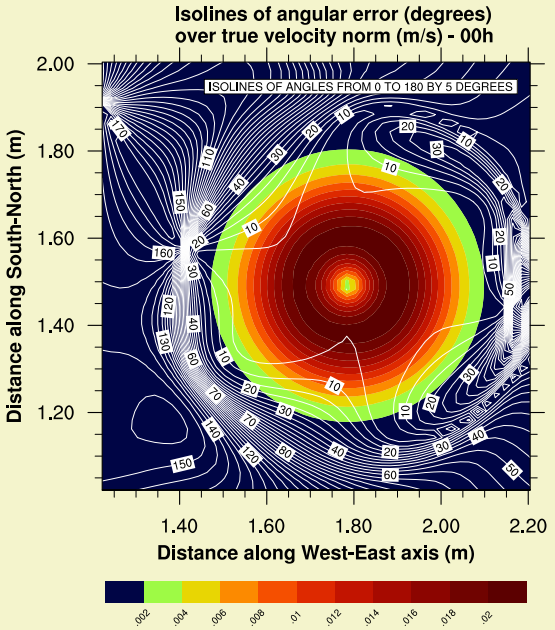
Conclusion et perspectives

Expériences jumelles : tout est connu

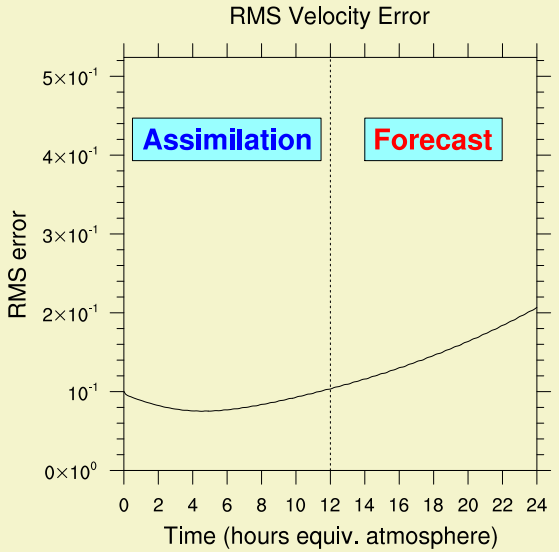
Expériences jumelles : tout est connu
Analyse d'erreurs (validation de la méthode)

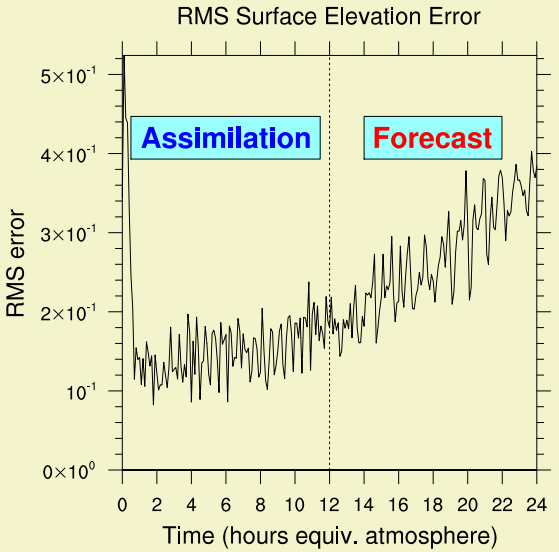
Temps initial





Evolution





Validation du formalisme

Assimilation d'images
I. Souopgui
Motivations
Assimilation de données
Images
Régularisation
Diffusion généralisée
Assimilation d'images
Cadre général
Application
Résultats
Conclusion et perspectives

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Cadre général

Application

Résultats

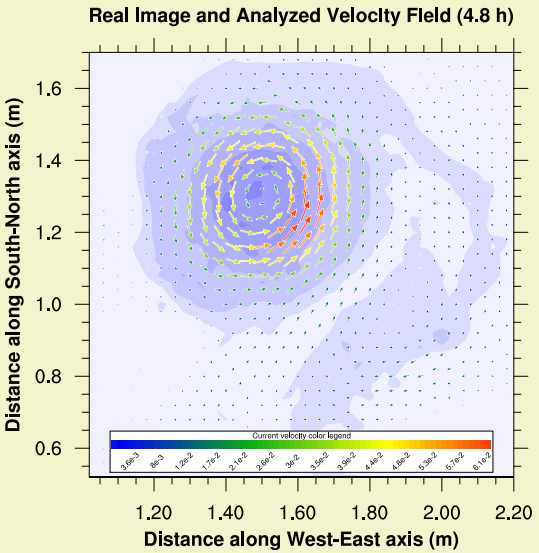
Conclusion et perspectives

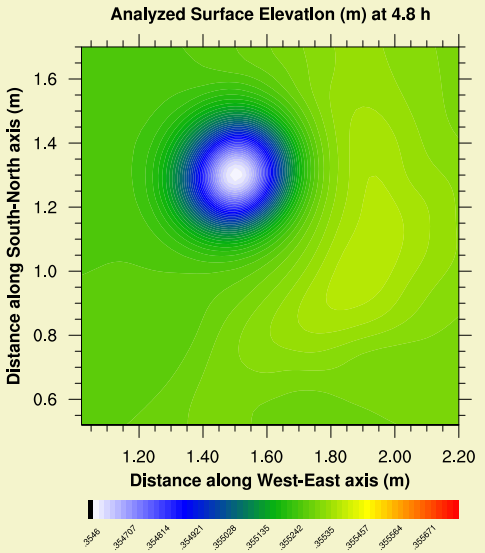
Expériences avec images réelles : état vrai inconnu

Expérience réelle : images Coriolis

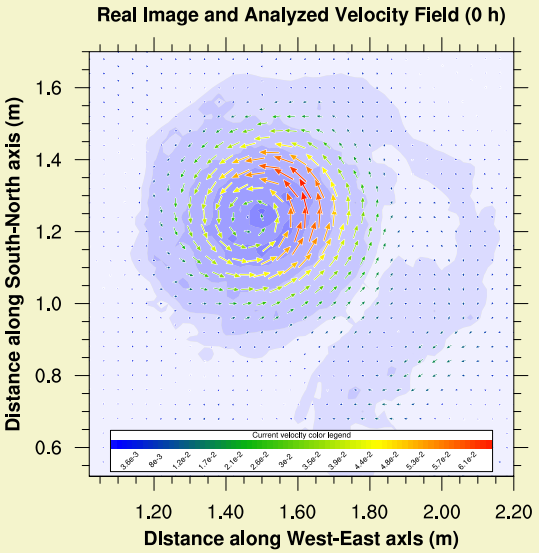
Opérateur de structure : curvelet + seuillage échelle par échelle

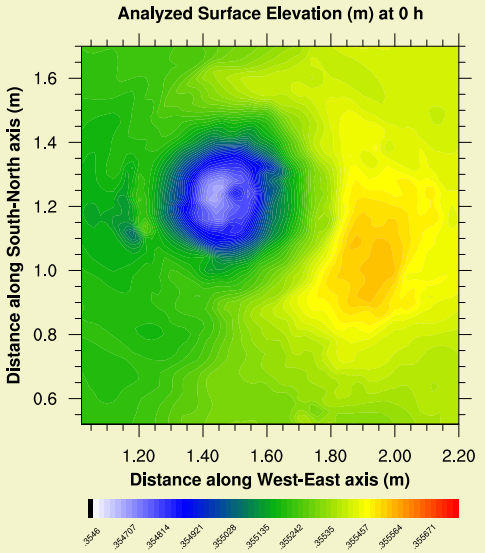
Prévision (état à $2T$)





Etat initial estimé





Résultats validés par les expérimentateurs.

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Cadre général

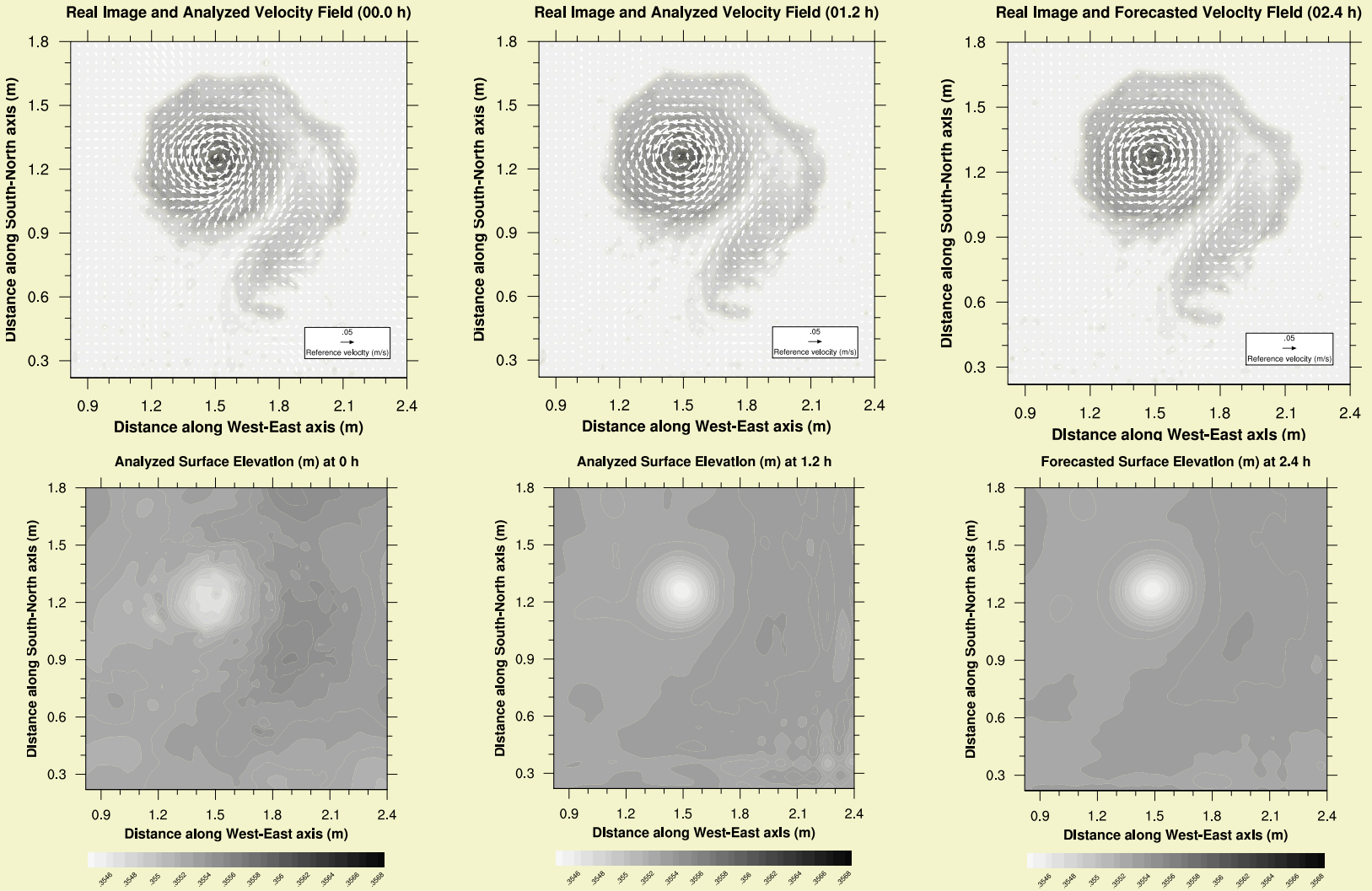
Application

Résultats

Conclusion et perspectives

Expériences avec images réelles : état vrai inconnu

Opérateur de structure : identité



Taille de la fenêtre d'assimilation limitée - trop de bruit dans l'état estimé - minimisation très lente

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Cadre général

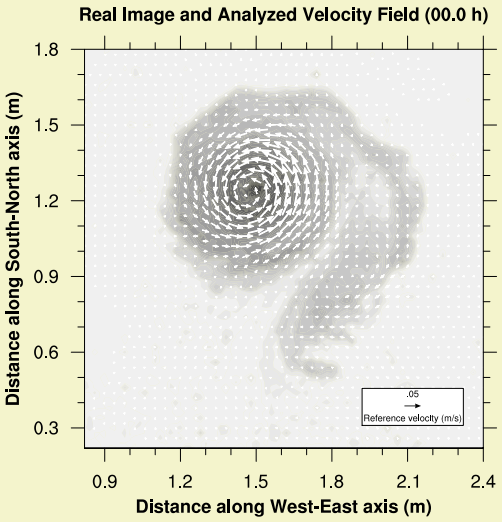
Application

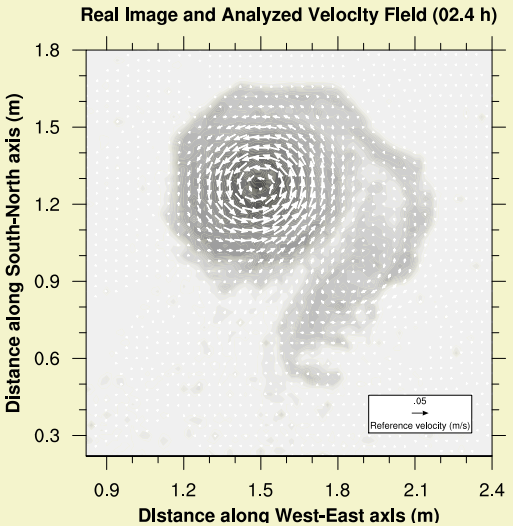
Résultats

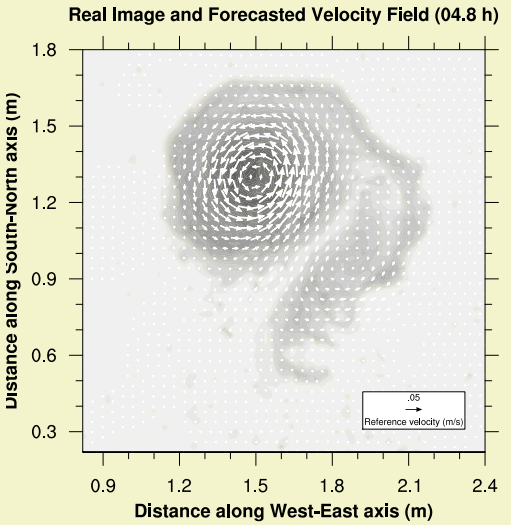
Conclusion et perspectives

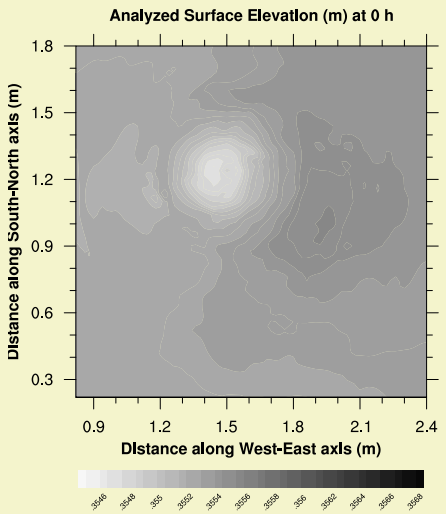
Expériences avec images réelles : état vrai inconnu

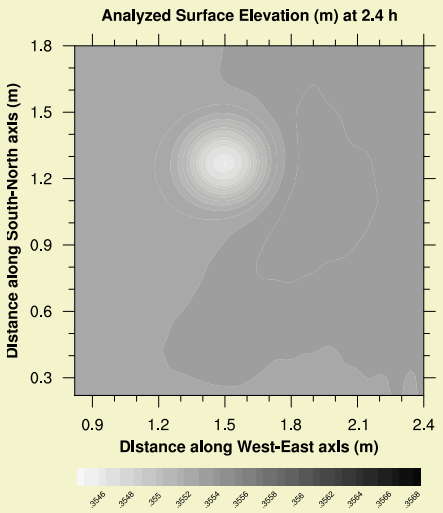
Opérateur de structure : curvelet + seuillage échelle par échelle

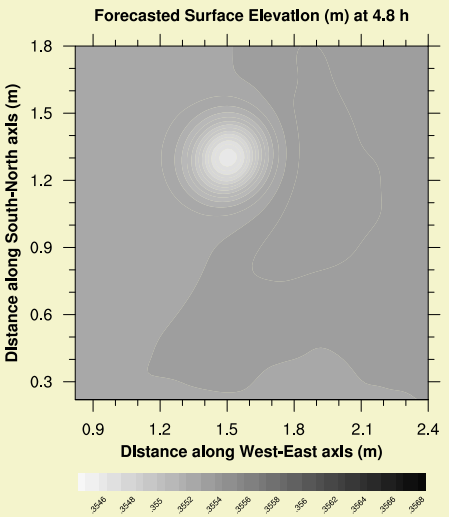












~~Taille de la fenêtre d'assimilation très limitée~~ - ~~trop de bruit dans l'état estimé~~ - ~~minimisation très lente~~

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

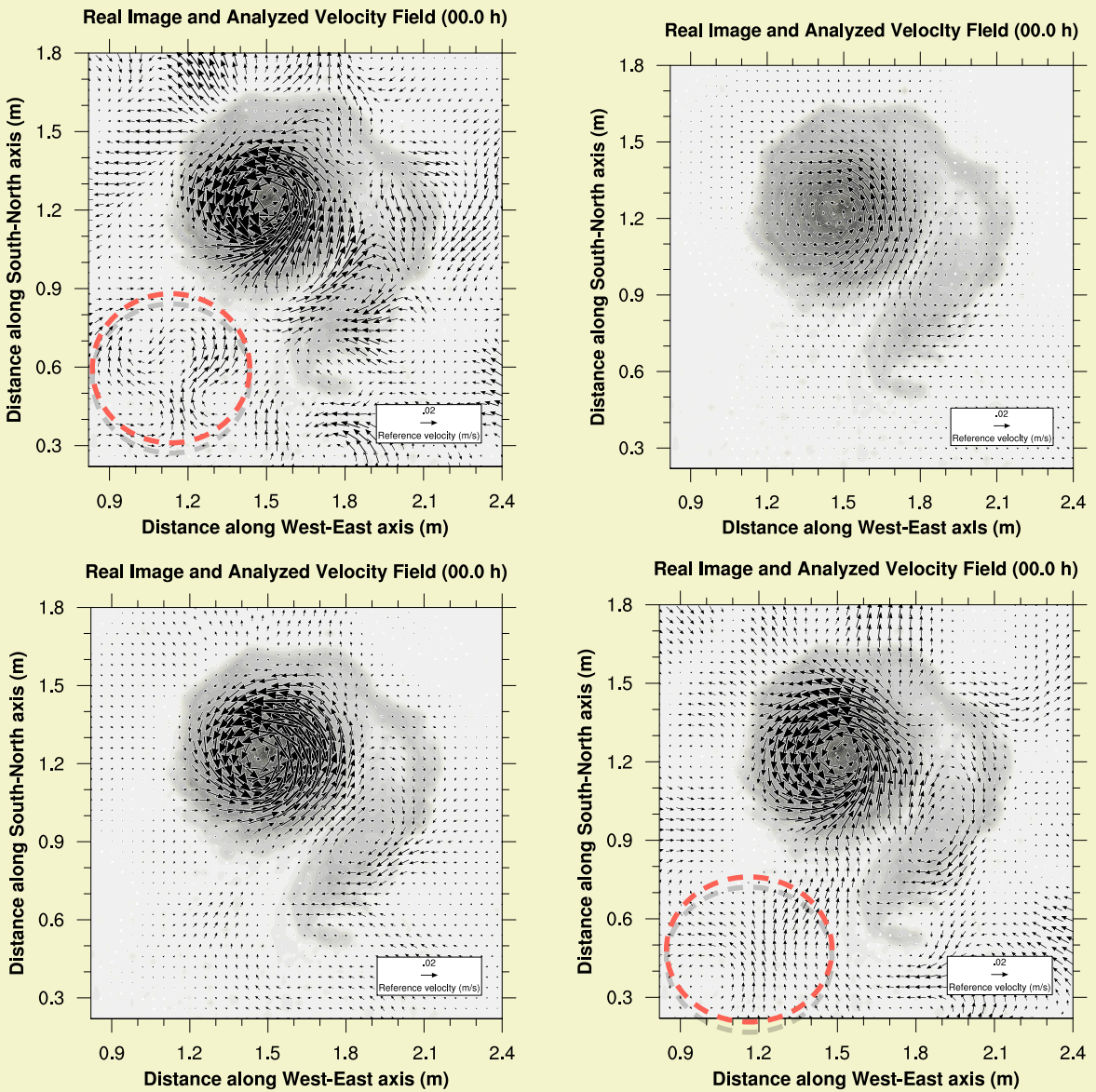
Assimilation d'images

Cadre général

Application

Résultats

Conclusion et perspectives



Importance des opérateurs d'images : espace d'images

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Cadre général

Application

Résultats

Conclusion et perspectives

Assimilation variationnelle de données

Observations de type image et leurs caractéristiques

Régularisation pour les problèmes inverses, cas du traitement d'images

Nouvelle approche d'utilisation de la régularisation

Assimilation directe de séquences d'images

Conclusion et perspectives

- La prévision du comportement d'un système physique nécessite l'utilisation de toutes les sources d'information disponibles sur ce système (Modèles, observations, connaissances *a priori*, ...)
- L'assimilation de donnée permet de combiner ces sources d'information de façon optimale pour obtenir la meilleure prévision
- Les images représentent une importante source d'observation de haute résolution, sous-utilisée en assimilation de données. C'est la seule source d'observation dans certains domaines
- L'utilisation quantitative des images est sujet au problème d'ouverture $\Rightarrow$ Régularisation
- Les techniques de régularisation actuelles ont plusieurs limites

Assimilation d'images

I. Souopgui

Motivations

Assimilation de données

Images

Régularisation

Diffusion généralisée

Assimilation d'images

Conclusion et perspectives

Proposé :

- Une nouvelle approche d'utilisation d'information de régularisation
  - résout la plupart des problèmes de l'approche classique
  - sert au préconditionnement
- Un formalisme d'assimilation directe de séquences d'images qui combine l'information image avec la physique du phénomène de façon cohérente via le système d'optimalité (espace, opérateur images et régularisation appropriés)
  - Définition d'un cadre général
  - Démonstration de la faisabilité de l'approche
  - Démonstration de l'utilité des opérateurs proposés
  - Premiers résultats encourageants
- Les champs d'applications sont variés : atmosphère, océan, glaciologie, agriculture, astrophysique, médecine, ...

Perpectives

- Explorer d'autres décompositions de l'image (ondelettes moins gourmandes en calcul)
- Explorer les décompositions 3D (travail déjà commencé avec les curvelets)
- Explorer d'autres opérateurs de distance pour le calcul de l'écart aux observations de type image
- Eppliquer les techniques développées aux modèles réalistes
  - gestion des occlusions dues aux nuages dans les images satellites
  - gestion des régions côtières dans les modèles océanographiques
  - gestion de l'altitude des phénomènes observés dans le cas des modèles atmosphériques

Merci de votre aimable attention