



**HAL**  
open science

# Espace de modules de $G_2$ -fibrés principaux sur une courbe algébrique

Chloé Gregoire

► **To cite this version:**

Chloé Gregoire. Espace de modules de  $G_2$ -fibrés principaux sur une courbe algébrique. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2010. Français. NNT : . tel-00539858

**HAL Id: tel-00539858**

**<https://theses.hal.science/tel-00539858>**

Submitted on 25 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**  
pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**  
de l'Université Montpellier II

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par  
**Chloé GRÉGOIRE**

**ESPACE DE MODULES DES  $G_2$ -FIBRÉS PRINCIPAUX  
SUR UNE COURBE ALGÈBRIQUE**

Thèse dirigée par **Christian PAULY**  
soutenue le 1er octobre 2010

Membres du jury :

|                  |  |            |
|------------------|--|------------|
| Jochen HEINLOTH  | Professeur à l'Université d'Amsterdam                              | Rapporteur |
| Yves LASZLO      | Professeur à l'Université Paris-Sud XI                             | Rapporteur |
| Laurent MANIVEL  | Directeur de Recherche<br>à l'Université Joseph Fourier-Grenoble I | Examineur  |
| Boris PASQUIER   | Maître de conférences à l'Université Montpellier II                | Examineur  |
| Christian PAULY  | Professeur à l'Université Montpellier II                           | Directeur  |
| Nicolas RESSAYRE | Maître de conférences à l'Université Montpellier II                | Examineur  |
| Olivier SERMAN   | Maître de conférences à l'Université Lille I                       | Examineur  |
| Christoph SORGER | Professeur à l'Université Nantes                                   | Examineur  |

Université Montpellier II  
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier  
Place Eugène Bataillon, 34095 MONTPELLIER Cedex, France



**THÈSE**  
pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**  
de l'Université Montpellier II

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par  
**Chloé GRÉGOIRE**

**ESPACE DE MODULES DES  $G_2$ -FIBRÉS PRINCIPAUX  
SUR UNE COURBE ALGÈBRIQUE**

Thèse dirigée par **Christian PAULY**  
soutenue le 1er octobre 2010

Membres du jury :

|                  |  |            |
|------------------|--|------------|
| Jochen HEINLOTH  | Professeur à l'Université d'Amsterdam                              | Rapporteur |
| Yves LASZLO      | Professeur à l'Université Paris-Sud XI                             | Rapporteur |
| Laurent MANIVEL  | Directeur de Recherche<br>à l'Université Joseph Fourier-Grenoble I | Examineur  |
| Boris PASQUIER   | Maître de conférences à l'Université Montpellier II                | Examineur  |
| Christian PAULY  | Professeur à l'Université Montpellier II                           | Directeur  |
| Nicolas RESSAYRE | Maître de conférences à l'Université Montpellier II                | Examineur  |
| Olivier SERMAN   | Maître de conférences à l'Université Lille I                       | Examineur  |
| Christoph SORGER | Professeur à l'Université Nantes                                   | Examineur  |

Université Montpellier II  
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier  
Place Eugène Bataillon, 34095 MONTPELLIER Cedex, France



ESPACE DE MODULES DES  $G_2$ -FIBRÉS PRINCIPAUX SUR  
UNE COURBE ALGÈBRIQUE

Chloé GRÉGOIRE



À Steph et Anabel



## REMERCIEMENTS

Après plus de 250 trajets en train, me voici arrivée à la fin de ces trois années de thèse que j'ai beaucoup appréciées et qui me laisseront un souvenir agréable autant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

L'approche avec laquelle mon directeur, Christian Pauly, m'a présenté la géométrie algébrique et la façon qu'il a d'aborder un problème mathématique m'a séduite et je tiens à le remercier, notamment pour la patience qu'il a eu envers moi.

Je remercie également chacun des membres de mon jury pour leur présence, particulièrement Y. Laszlo et J. Heinloth qui ont rapporté mon manuscrit, O. Serman pour les discussions autour du lieu lisse d'espace de modules et B. Pasquier pour ses conseils.

Merci aussi à J. Lafontaine, pour sa relecture et son attention, et à B. Toën qui m'a permis de bénéficier d'un bureau au laboratoire Paul Sabatier de Toulouse. Par ailleurs, je voudrais souligner l'ambiance vraiment agréable qui règne au labo I3M, aussi bien avec les permanents qu'avec le personnel administratif. Je garde notamment un très bon souvenir des conversations avec Étienne.

Cette thèse est, pour moi, l'aboutissement d'un chemin non linéaire dans lequel beaucoup de personnes ont joué un rôle important. Parmi elles, je tiens à citer M. Técourt, pour sa manière de transmettre les mathématiques, Messieurs J-L. Basdevant et L. Bonnavero pour leur appui et leur sollicitude et également Odile et Jean qui m'ont entourée avec beaucoup d'affection à la reprise de mes études.

Au cours de mon cursus, j'ai partagé de nombreux moments avec Steph puis avec Anabel, adeptes de la rigueur mathématique, du travail partagé et des longues discussions tardives. J'ai retrouvé ces échanges avec Guillaume, mon co-bureau pendant ces trois années de thèse. Il m'a énormément appris sur la théorie des représentations (et la typographie) et, avec lui, j'ai franchement passé de bons moments en 007 et ailleurs.

Durant ces années, j'ai aussi eu plaisir à rencontrer diverses personnes : le groupe de doctorants du labo, Gwladys, Justine, James et Cécile... Je tiens aussi à remercier ceux avec qui j'ai partagé des moments sportifs variés : les nageurs, les coureurs, les baigneurs en mer de décembre, les gymnastes et, bien sûr, l'équipe de la HRP (dont je tairai les surnoms). Je remercie aussi les différentes personnes qui m'ont hébergée, en particulier J.C & J.C Gonneaud, Julien, mon coloc, avec qui j'ai partagé de très bonnes soirées remplies d'astronomie, de descriptions de kayak et d'envies de croziflette, et le quatrième "pyrénéen" qui m'a accompagnée tout au long de ce dernier trimestre.

J'ajoute un affectueuse pensée pour Mandarine, Benj, Yunaï et Alain qui ont tous, certains par leur bienveillance et leur affection et un autre par son absence, été très présents pendant ces années de thèse et les années précédentes.

Ma dernière pensée revient à Denis, pour sa présence et sa tendresse d'hier, d'aujourd'hui et de demain.



## TABLE DES MATIÈRES

|   |       |
|---|-------|
| <b>Introduction</b> .....   | xiii  |
| <b>Notations</b> .....  | xxiii |
| <b>1. Notations et résultats préliminaires</b> .....  | 1     |
| 1.1. L'algèbre des octaves de Cayley .....  | 1     |
| 1.2. Le groupe de Lie $G_2$ .....   | 3     |
| 1.3. Description explicite de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$ du groupe $G_2$ .....   | 15    |
| 1.4. Description des sous-groupes paraboliques maximaux de $SO_7$ et $G_2$ .....  | 25    |
| 1.5. Description des sous-groupes connexes de rang maximal et maximaux pour<br>l'ordre donné par l'inclusion, du groupe de Lie $G_2$ .....                              | 38    |
| <b>2. Étude des formes trilinéaires alternées sur <math>\mathbb{C}^7</math> dégénérées</b> .....  | 45    |
| 2.1. Grassmanniennes, plongement de Plücker et variétés des sécantes .....  | 45    |
| 2.2. Application rationnelle $\Phi$ et propriétés .....   | 46    |
| <b>3. Étude des <math>G_2</math>-fibrés principaux et de la notion de (semi)-stabilité</b> ....   | 65    |
| 3.1. Définitions générales relatives aux $G$ -fibrés principaux .....   | 65    |
| 3.2. Notion de (semi)-stabilité pour les $G$ -fibrés principaux .....   | 70    |
| 3.3. Étude de réductions de $G_2$ -fibrés principaux .....  | 76    |
| 3.4. Propriétés relatives à l'espace de modules $M_C(G_2)$ .....  | 117   |
| <b>4. Utilisation des formules de Verlinde</b> .....  | 141   |
| 4.1. Utilisation de la formule de Verlinde pour le calcul de $h^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}_G^i)$ pour<br>$G = G_2, SL_2$ ou $SL_3$ et différents entiers $i$ ..... | 141   |
| 4.2. Surjectivités et isomorphismes entre différents $H^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}_G^i)$ .....   | 151   |
| <b>A. Tables de multiplication dans <math>\mathcal{V}</math> dans différentes bases</b> .....   | 165   |
| <b>B. Inclusion de l'algèbre de Lie <math>\mathfrak{g}_2</math> dans l'algèbre de Lie <math>\mathfrak{so}_7</math></b> .....  | 169   |
| <b>Bibliographie</b> .....  | 173   |
| <b>Index</b> .....  | 177   |



## INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est l'étude des  $G$ -fibrés principaux au-dessus d'une courbe complexe projective connexe lisse  $C$  et de leur espace de modules  $M_C(G)$ , où  $G$  est un groupe algébrique. Une attention toute particulière est portée au cas où le groupe  $G$  est le groupe de Lie exceptionnel  $G_2$ .

Les espaces de modules - où le terme « module » est, ici, synonyme de « paramètre » - peuvent être pensés comme des solutions géométriques à des problèmes de classification géométrique. Ce sont des ensembles d'objets définis par des conditions géométriques particulières. Dans le cas des fibrés vectoriels, on fixe par exemple les données suivantes : le rang, le degré ou le déterminant des fibrés. Une illustration d'espace de modules est la Grassmannienne  $\text{Gr}(r, n)$  des sous-espaces vectoriels de dimension  $r$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Les espaces de modules interviennent dans différentes branches des mathématiques : en géométrie algébrique (dont les idées-clefs ont été introduites par D. MUMFORD [MS72]), dans la théorie de jauge, dans celle de Teichmüller, dans le programme de Langlands géométrique et en physique théorique. Par l'intermédiaire des espaces de modules, ces domaines ont beaucoup à apprendre les uns des autres, comme le montre l'impact de la théorie conforme des champs en géométrie algébrique. L'établissement récent de la formule de Verlinde pour les  $G$ -fibrés principaux sur les courbes algébriques en est une illustration concrète.

Un problème souvent difficile est de munir les espaces de modules d'une structure de variété algébrique et de les « compactifier ». Ici, nous étudions un espace de modules bien précis : celui des  $G_2$ -fibrés principaux sur une courbe complexe projective connexe lisse, munis de la relation d'équivalence de Seshadri, appelée S-équivalence. De plus, afin d'avoir un espace de modules complet, nous nous restreignons aux  $G$ -fibrés principaux semistables.

Afin de justifier l'utilisation de cette notion de semistabilité, introduisons tout d'abord les espaces de modules de fibrés vectoriels, dont l'étude a, chronologiquement, précédé celle des  $G$ -fibrés principaux. Dans tout ce qui suit, la lettre  $C$  désigne une courbe complexe projective connexe lisse de genre au moins 2.

Lors de l'étude et de la classification des fibrés vectoriels, le rang et le degré se sont révélés être des invariants topologiques. Néanmoins, il s'est avéré que la famille des fibrés vectoriels de rang et de degré fixés ne peut être paramétrée par une variété algébrique. En revanche, la sous-famille des fibrés vectoriels de rang et de degré fixés, quotients d'un fibré vectoriel donné, l'est. Quelle caractéristique pertinente doit-on imposer à un ensemble de fibrés vectoriels pour aboutir à une famille bornée? D. MUMFORD et C.S. SESHADRI ont répondu à cette question dans les années 1960. Afin de paramétrer les fibrés vectoriels, ils ont introduit les notions de semistabilité et de stabilité [Ses67], provenant de la théorie des invariants topologiques de D. MUMFORD. Ces notions sont définies comme suit. On appelle pente d'un fibré le nombre rationnel égal au quotient de son degré par son rang. Un fibré vectoriel sur une courbe  $C$  est dit semistable si sa pente est supérieure ou égale à celle de chacun de ses sous-fibrés vectoriels propres. La stabilité, quant à elle, n'est autre que la réplique de cette propriété avec une inégalité stricte.

Leur but était de donner une structure de variété algébrique à l'espace de modules  $M(r, d)$  des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels semistables de rang et de degré fixés. Par là, ils ont considérablement clarifié l'étude des fibrés vectoriels. Par ailleurs, l'étude des fibrés vectoriels non semistables peut être ramenée à celle des fibrés vectoriels semistables via la filtration de Harder-Narasimhan, constituée de quotients successifs de fibrés vectoriels semistables. Cela a d'autant plus motivé l'attention portée à la notion de semistabilité. En outre, en considérant la notion de semistabilité, C.S. SESHADRI a, le premier, observé que la catégorie des fibrés vectoriels semistables de même pente est abélienne.

En 1976, A. RAMANATHAN s'est intéressé dans sa thèse, non pas aux fibrés vectoriels, mais aux  $G$ -fibrés principaux et à la construction de l'espace de modules de  $G$ -fibrés principaux semistables. De récents articles comme ceux de A. KAPUSTIN et E. WITTEN [KW07], R. DONAGI et T. PANTEV [DP06] et N. HITCHIN [Hit06] illustrent la richesse de la géométrie des  $G$ -fibrés principaux et de la notion de semistabilité.

Pour les  $G$ -fibrés principaux, la semistabilité se définit de la façon suivante :

**Définition.** — Un  $G$ -fibré principal  $E$  est dit semistable (resp. stable) si le degré  $\deg(\sigma^*T_{E/P})$  est positif ou nul (resp. strictement positif) pour tout sous-groupe parabolique maximal  $P$  de  $G$  et toute réduction  $\sigma$  à  $E/P$ , où  $T_{E/P}$  est le fibré tangent le long des fibres de la projection naturelle  $E/P \rightarrow C$ .

La notion de semistabilité est alors équivalente pour un  $GL_n$ -fibré principal et son fibré vectoriel associé.

Au sein des algèbres de Lie complexes, de dimension finie et simples, on dénote les algèbres classiques et les algèbres exceptionnelles. Les premières sont  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$  et  $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$  (respectivement associées aux systèmes de racines  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$ ) et les algèbres exceptionnelles  $\mathfrak{g}_2$ ,  $\mathfrak{f}_4$ ,  $\mathfrak{e}_6$ ,  $\mathfrak{e}_7$  et  $\mathfrak{e}_8$ , les indices signalant le rang des algèbres de Lie. Cette classification remonte à celle des algèbres de Lie simples complexes par W. KILLING et É. CARTAN de 1884. Le groupe de Lie exceptionnel  $G_2$  est le groupe connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$ . Parmi les groupes de Lie exceptionnels, ce dernier apparaît remarquable pour plusieurs raisons. Évoquons-en deux. D'une part, le groupe de Lie  $G_2$  est suffisamment petit pour être étudié avec précision, ce qui est bien plus délicat pour les groupes de Lie  $E_7$  ou  $E_8$  par exemple. En effet, la dimension du groupe  $G_2$  est 14, alors que celles des groupes  $E_7$  et  $E_8$  sont respectivement 133 et 248 ! D'autre part, le groupe  $G_2$  peut être construit via différentes approches ; cette diversité de points de vue lui confère une grande richesse.

À l'époque de W. KILLING et de É. CARTAN, l'existence des algèbres de Lie exceptionnelles était enveloppée de mystère, puisqu'elles n'apparaissaient pas reliées à des groupes connus comme l'étaient les algèbres de Lie classiques, correspondantes aux groupes  $SO_n(\mathbb{C})$ ,  $Sp_n(\mathbb{C})$  et  $SL_n(\mathbb{C})$ . Cependant, en 1914, É. CARTAN fit le lien entre l'algèbre des octaves de Cayley et le groupe  $G_2$  : ce groupe se révèle être le groupe des automorphismes des octaves de Cayley.

Notre travail débute par la description des octaves de Cayley et la définition du groupe  $G_2$ . Nous examinons ensuite la notion de semistabilité dans le cadre de  $G_2$ -fibrés principaux ainsi que celle de leur espace de modules. En dernier lieu, une application de la formule de Verlinde à l'espace de Verlinde de niveau 1 pour le groupe  $G_2$  est proposée.

Le Chapitre 1 porte un intérêt particulier à l'algèbre des octaves de Cayley  $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$  et au groupe de Lie  $G_2$ . Une étude approfondie de cette algèbre est menée afin de pouvoir établir un éventail de propriétés sur le groupe  $G_2$  qui est défini à partir de  $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ . Ces propriétés étaient connues dans la littérature mais sans forcément de lien entre elles, que ce soit par leur approche (définition du groupe  $G_2$ ) ou bien leurs notations, d'où l'intérêt de cette synthèse.

L'algèbre  $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$  est l'algèbre de division normée complexe de plus grande dimension parmi les quatre existantes :

$$\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{O}_{\mathbb{C}}.$$

Alors que l'algèbre des quaternions  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  a suscité un grand intérêt dès sa découverte (W.R. HAMILTON lui a consacré la plus grande partie de ses recherches),

les octaves de Cayley, elles, sont bien moins connues. Cela est certainement dû au fait que cette algèbre, non commutative, n'est pas non plus associative. Découvertes séparément par J. GRAVES et A. CAYLEY dans les années 1840, les octaves de Cayley sont demeurées dans l'ombre jusqu'au moment où É. CARTAN a décrit la trialité (symétrie entre vecteurs et spineurs dans un espace euclidien de dimension 8). Ces octaves interviennent aussi en mécanique quantique avec les travaux de C. JORDAN, C. NEUMANN et E.P. WIGNER, avec un succès toutefois restreint. Récemment, on a réalisé qu'elles expliquent quelques curieuses caractéristiques en théorie des cordes.

Le point de départ de ce chapitre est la définition du groupe  $G_2$  proposée par É. CARTAN. Le groupe  $G_2$  est décrit comme l'ensemble des automorphismes de  $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ , c'est-à-dire comme l'ensemble des applications linéaires inversibles définies sur les octaves de Cayley qui commutent avec la multiplication. Or, il s'avère que tout automorphisme des octaves de Cayley est entièrement déterminé par son action sur l'hyperplan  $\mathcal{V}$  des octaves de Cayley imaginaires pures. Le groupe  $G_2$  peut donc être traité comme un sous-groupe du groupe linéaire de dimension 7, et il ressort que le groupe  $G_2$  est un sous-groupe du groupe spécial orthogonal  $SO_7$ .

Par ailleurs, en vue de discuter de la notion de semistabilité des  $G_2$ -fibrés principaux, nous mettons en exergue les deux sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$ , ainsi que leur sous-groupe de Levi. Cette analyse est menée conjointement à celle du groupe  $SO_7$  afin d'étudier les extensions de  $G_2$ -fibrés principaux au groupe de structure  $SO_7$  dans le Chapitre 3.

Être le groupe des automorphismes des octaves de Cayley n'est pas la seule définition utilisée pour définir le groupe  $G_2$ , et le lien entre les différentes définitions équivalentes n'est pas élémentaire. Le groupe  $G_2$  peut aussi être déterminé à partir d'une forme trilinéaire alternée non-dégénérée sur l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$ . D'autre part, le système de racines de l'algèbre de Lie exceptionnelle simple de plus petite dimension présentée par W. KILLING, É. CARTAN et F. ENGEL au début du XIX<sup>e</sup> siècle n'est autre que l'algèbre de Lie associée au groupe connexe  $G_2$ . L'équivalence de ces trois points de vue est effectuée au cours de ce premier chapitre.

Enfin, dans la classification de A. BOREL et J. DE SIEBENTHAL [BDS49], les deux sous-groupes de  $G_2$ , maximaux pour l'ordre donné par l'inclusion, parmi ceux connexes et de rang maximal, sont le groupe spécial linéaire  $SL_3$  et le groupe spécial orthogonal  $SO_4$ . Une inclusion de chacun de ces deux groupes dans  $G_2$  est proposée et utilisée au Chapitre 3

Au Chapitre 2, le groupe  $G_2$  est étudié via des formes trilinéaires alternées sur l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  des octaves de Cayley imaginaires pures. Alors que l'étude des 2-formes non-dégénérées donnait lieu à la géométrie symplectique, F. ENGEL s'est intéressé à l'étude de la géométrie résultant des formes trilinéaires alternées

et publia, en 1900, deux articles reliant une forme quadratique à une forme trilinéaire alternée. Cela a permis de définir la notion de non-dégénérescence pour une forme trilinéaire alternée : une forme trilinéaire alternée est dite non-dégénérée si la forme quadratique qui lui est associée par ce biais est non-dégénérée. Ce travail a abouti à la définition de  $G_2$  traitée dans ce chapitre : à conjugaison près, ce groupe est la composante connexe de l'identité du stabilisateur d'une forme trilinéaire alternée non-dégénérée. Le groupe  $G_2$  peut donc être défini, à conjugaison près, par n'importe quelle forme non-dégénérée. Cela explique les diverses définitions que l'on peut rencontrer dans la littérature.

L'essentiel du chapitre est consacré à la caractérisation de l'application  $\Phi$  qui relie une forme quadratique à une forme trilinéaire alternée, puis à l'étude des formes trilinéaires non-dégénérées. Ceci nous permet d'aboutir au résultat suivant :

**Théorème A.** — *L'ensemble des formes trilinéaires alternées dégénérées définies sur l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  des octaves de Cayley imaginaires pures coïncide avec la troisième variété des sécantes  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  de la Grassmannienne  $\text{Gr}(3, 7)$ .*

*L'équation définissant le premier ensemble est, à un scalaire près, le cube de celle définissant le second.*

L'hypersurface  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  a été abordée dans l'article de H. ABO, G. OTTAVIANI et C. PETERSON [AOP09]. Par ailleurs, dans l'article de M. SATO et T. KIMURA [SK77], le degré du polynôme invariant relatif est déterminé, ainsi que le fait que les équations des hypersurfaces irréductibles du lieu singulier de l'espace  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  sont, à un scalaire près, multiples de ce polynôme homogène. Cependant, le lieu des zéros de cet invariant relatif n'y est pas identifié. Nous affinons ces résultats en prouvant que l'invariant relatif n'est autre que le polynôme décrivant la troisième variété des sécantes  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  (à un scalaire près). Enfin, suite à ce théorème, nous retrouvons deux résultats connus, regroupés dans les corollaires suivants. Le premier caractérise les orbites des formes trilinéaires non-dégénérées et le second relie leurs stabilisateurs.

**Corollaire B.** — *L'orbite d'une forme trilinéaire alternée sur  $\mathcal{V}$ , sous l'action du groupe  $GL_7$ , est dense dans l'espace  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  si et seulement si la forme trilinéaire est non-dégénérée.*

**Corollaire C.** — *Les formes trilinéaires alternées non-dégénérées définies sur  $\mathcal{V}$  ont des stabilisateurs, sous l'action de  $SL_7$ , conjugués :*

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^3\mathcal{V}^*, \text{ non-dégénérées }, \quad \exists g_0 \in SL_7 \text{ tel que} \\ \text{Stab}(\omega_1) \cap SL_7 = g_0 \cdot [\text{Stab}(\omega_2) \cap SL_7] \cdot g_0^{-1}.$$

D'après le Corollaire C, le groupe  $G_2$  peut donc être défini, à conjugaison près, par n'importe quelle forme trilinéaire alternée non-dégénérée

Après cette mise en place de propriétés sur le groupe  $G_2$ , le Chapitre 3 est consacré à l'analyse des  $G_2$ -fibrés principaux et de l'espace de modules des  $G_2$ -fibrés principaux semistables. Via le Corollaire C, les  $G_2$ -fibrés principaux sont décrits par la donnée d'un fibré vectoriel, de rang 7 et de déterminant trivial, muni d'une forme trilinéaire alternée non-dégénérée.

Dans cette partie, nous rappelons les définitions de réduction et d'extension de groupe de structure de  $G$ -fibrés principaux, consistant à relier deux  $G$ -fibrés principaux associés à deux groupes de structure différents. On peut aussi associer à un  $G$ -fibré principal un fibré vectoriel, en considérant une extension de groupe de structure au groupe  $GL_n$ . Dans le cas du groupe  $G_2$ , nous évoquons les réductions de  $G_2$ -fibrés principaux aux deux sous-groupes cités précédemment :  $SL_3$  et  $SO_4$ . Si l'on considère un  $SL_3$ -fibré principal  $E$ , son extension au groupe de structure  $G_2$  et le fibré vectoriel  $V$  associé qui est de rang 7, alors il vient :

$$V = W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C$$

où  $W$  est le fibré vectoriel de rang 3 associé à  $E$  et où  $\mathcal{O}_C$  est le fibré en droites trivial sur  $C$ . Concernant le sous-groupe  $SO_4$ , nous associons à deux  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  un  $SO_4$ -fibré principal, un  $G_2$ -fibré principal et un fibré vectoriel  $V$  de rang 7. La relation entre fibrés vectoriels est alors la suivante :

$$V = M \otimes N \oplus \text{End}_0(N)$$

lorsque  $M$  et  $N$  désignent les fibrés vectoriels de rang 2 associés respectivement à  $E$  et à  $F$ . Ces deux descriptions sont utilisées pour l'analyse de la stabilité d'un  $G_2$ -fibré principal.

Pour certains groupes algébriques  $G$ , un  $G$ -fibré principal est semistable si et seulement si son fibré vectoriel associé l'est. Pour le groupe spécial linéaire  $SL_n$ , ce résultat est trivial. Par ailleurs, cette équivalence est valide pour le groupe orthogonal  $O_n$  et le groupe  $G_2$ . S. RAMANATHAN [Ram96] l'a prouvée pour le premier groupe et la démonstration concernant le second groupe est le sujet de l'article de S. SUBRAMANIAN [Sub99]. Une question naturelle se pose : cette propriété est-elle maintenue si l'on remplace la condition de semistabilité par celle de stabilité ? Nous examinons ce point dans le cadre des  $G_2$ -fibrés principaux. Cette étude est en partie réalisée grâce à l'analyse des  $SL_3$ -réductions et des  $SO_4$ -réductions que peut admettre un  $G_2$ -fibré principal. Alors que la stabilité d'un fibré vectoriel associé à un  $G_2$ -fibré principal implique celle du  $G_2$ -fibré principal, l'implication réciproque n'est pas automatique. En effet, nous exhibons un fibré vectoriel strictement semistable, c'est-à-dire semistable mais non stable, associé à un  $G_2$ -fibré principal stable. Nous établissons les deux théorèmes suivants :

**Théorème D.** — *Soit  $P$  un  $G_2$ -fibré principal sur une courbe  $C$ . Si  $P$  est stable et s'il n'admet pas de réduction de groupe de structure au groupe  $SL_3$ , alors le fibré vectoriel de rang 7 qui lui est associé est stable.*

**Théorème E.** — Soit  $P$  un  $G_2$ -fibré principal sur une courbe  $C$ . Si  $P$  est un  $G_2$ -fibré principal régulièrement stable, alors le fibré vectoriel de rang 7 qui lui est associé est stable.

On rappelle qu'un  $G$ -fibré principal est dit régulièrement stable s'il est stable et que son groupe d'automorphismes est le plus petit possible, c'est-à-dire s'il est isomorphe au centre du groupe  $G$ . Il serait intéressant de savoir si le  $SO_7$ -fibré principal obtenu par extension de groupe de structure d'un  $G_2$ -fibré principal régulièrement stable est aussi régulièrement stable.

L'intérêt de la notion de stabilité régulière dans le théorème précédent nous amène à étudier le lieu régulièrement stable de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  :

**Théorème F.** — Le lieu régulièrement stable de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  coïncide avec son lieu lisse.

Cette propriété est un cas particulier du récent résultat théorique de I. BISWAS et N. HOFFMANN [BH10] valable pour tout groupe algébrique réductif complexe connexe. Cependant, nous affinons ce résultat dans le cas de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  et obtenons une description détaillée de son lieu singulier :

**Théorème G.** — Le lieu singulier  $M_{C,\text{sing}}(G_2)$  de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  est :

$$M_{C,\text{sing}}(G_2) = i(M_C(SL_3)) \cup j(M_C(SO_4))$$

où les morphismes  $i$  et  $j$  sont donnés par extension de groupe de structure :

$$\begin{aligned} i : M_C(SL_3) &\rightarrow M_C(G_2), \\ j : M_C(SL_2) \times M_C(SL_2) &\rightarrow M_C(G_2). \end{aligned}$$

Ce lieu singulier possède ainsi trois composantes connexes :

$$i(M_C(SL_3)), j(M_C^+(SO_4)) \text{ et } j(M_C^-(SO_4)).$$

Enfin, alors que l'on s'est fondé sur les octaves de Cayley pour définir le groupe  $G_2$ , il s'avère que l'analyse de la stabilité des  $G_2$ -fibrés principaux révèle une propriété sur cette algèbre. À la suite de la démonstration du théorème précédent, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème H.** — Notons  $\omega_0$  la forme trilinéaire alternée non-dégénérée sur l'espace  $\mathcal{V}$ , définie en 1.2.4, et  $H$  l'hyperplan de la Grassmannienne isotrope  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, 7)$  constitué des 3-plans isotropes engendrés par trois vecteurs  $x, y$  et  $z$  de  $\mathcal{V}$  tels que  $\omega_0(x, y, z)$  s'annule.

L'hyperplan  $H$  est contenu dans le lieu d'associativité de l'algèbre des octaves de Cayley :

$$\text{si } [x \wedge y \wedge z] \in H \text{ alors } (xy)z = x(yz).$$

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'application de la formule de Verlinde aux champs de modules des  $G_2$ -fibrés principaux et aux espaces de Verlinde de niveau 1 pour le groupe  $G_2$ , c'est-à-dire les espaces des sections

globales  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  sur une courbe  $C$ , où  $\mathcal{L}_{G_2}$  est le fibré en droites ample générateur du groupe de Picard du champ de modules  $\mathcal{M}_C(G_2)$ . Le théorème suivant est établi :

**Théorème I.** — *Soit une courbe  $C$  de genre au moins 2. Le morphisme donné par extension de groupe de structure*

$$i : \mathcal{M}_C(SL_3) \rightarrow \mathcal{M}_C(G_2)$$

*induit, par image inverse, une application linéaire  $\Upsilon$  entre les espaces de Verlinde suivants :*

$$\Upsilon : H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$$

*où  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$  désigne le sous-espace propre de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})$ , associé à la valeur propre 1, pour l'involution naturelle dont il est muni.*

*L'application linéaire  $\Upsilon$  possède les propriétés suivantes :*

(1) *l'application  $\Upsilon$  est surjective lorsque la courbe  $C$  est sans thêta-constante effective.*

(2) *l'application  $\Upsilon$  est un isomorphisme lorsque la courbe  $C$  est de genre 2.*

En dernier lieu, nous étudions l'application linéaire  $\Psi$  définie comme suit. Le morphisme donné par extension de groupe de structure entre espaces de Verlinde

$$j : \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2) \rightarrow \mathcal{M}_C(G_2)$$

induit, par image inverse, l'application linéaire

$$\Psi : H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) \rightarrow [H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$$

où  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$  désigne l'ensemble des sections invariantes sous le groupe  $JC[2]$  constitué des éléments de la Jacobienne  $\text{Pic}^0(C)$  dits de 2-torsion.

Pour des courbes générales de petit genre, nous montrons le théorème suivant :

**Théorème J.** — *Sur une courbe  $C$  de genre 2 ou non-hyperelliptique de genre 3, ou bien de genre 4 sans thêta-constante effective, l'application  $\Psi$  est un isomorphisme.*

Il est naturel de penser que ce résultat peut être généralisé en genre supérieur. Ceci est par ailleurs corroboré par une étude dimensionnelle des espaces vectoriels  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$  en genre élevé. Pour le moment, nous ne pouvons faire sans la conjecture de normalité cubique. On dit qu'une courbe  $C$  vérifie la normalité cubique lorsque l'application naturelle suivante est surjective :

$$\text{Sym}^3 H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}).$$

Nous énonçons le résultat :

***Théorème K.*** — *Pour une courbe  $C$  de genre au moins 2, sans thêta-constante effective et vérifiant la normalité cubique, l'application  $\Psi$  est un isomorphisme.*

Une page de notations, récapitulant les conventions utilisées dans toute la suite de ce texte, précède le Chapitre 1. Le lecteur trouvera en fin de manuscrit deux annexes, dont une reprenant l'ensemble des bases de l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  utilisées avec les tables de multiplication correspondantes, une table des figures, un index et une bibliographie.



## NOTATIONS

Dans toute cette thèse,  $\mathbb{C}$  désigne le corps des nombres complexes et  $\mathbb{O}$  l'algèbre de octaves de Cayley.

La lettre  $G$  désigne un groupe algébrique connexe et réductif sur  $\mathbb{C}$  et la lettre  $C$  une courbe complexe projective, connexe et lisse, de genre au moins 2.

Afin de dissocier un espace vectoriel d'un fibré vectoriel ou principal, on a pris garde à utiliser des notations en caractères dits calligraphiques pour les espaces vectoriels et simplement le mode mathématique pour les fibrés. Par exemple, alors que  $\mathcal{V}$  indique l'espace vectoriel des octaves de Cayley imaginaires pures,  $E$  indique un  $G$ -fibré principal.

Enfin,  $M_C(G)$  est l'espace de modules des classes d'équivalence  $G$ -fibrés principaux semistables sur  $C$  (à isomorphisme près) et  $\mathcal{M}_C(G)$  le champ de modules des  $G$ -fibrés principaux. Là encore, on différencie espace de modules et champ de modules par les caractères romans d'une part et calligraphiques d'autre part.



# CHAPITRE 1

## NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Nous allons ici présenter le groupe de Lie exceptionnel  $G_2$ , plusieurs de ses définitions équivalentes ainsi que son algèbre de Lie. Ce chapitre est une synthèse (non exhaustive) de connaissances déjà établies au sujet du groupe  $G_2$ .

La première définition que nous utilisons est celle proposée par É. CARTAN où le groupe  $G_2$  apparaît comme le groupe des automorphismes de l'algèbre des octaves de Cayley. C'est pourquoi nous consacrons le début de ce chapitre aux octaves de Cayley puis nous présentons différentes approches du groupe  $G_2$  avec, entre autres, une description de ses sous-groupes paraboliques maximaux utiles au chapitre 3.

### 1.1. L'algèbre des octaves de Cayley

Pour tout ce paragraphe, nous renvoyons le lecteur aux deux références suivantes : [Bae02] et [Ada96]. Les démonstrations des différentes propriétés proposées ici diffèrent, la plupart du temps, de celles indiquées dans les deux références précédentes mais la majorité des résultats s'y trouve.

Soient  $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre des octaves de Cayley et  $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathbb{O}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$  la  **$\mathbb{C}$ -algèbre des octaves de Cayley** obtenue en complexifiant  $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ . Ces deux algèbres sont respectivement isomorphes à  $\mathbb{R}^8$  et  $\mathbb{C}^8$ .

L'algèbre de octaves de Cayley complexe est parfois désignée par le symbole  $\mathfrak{C}$  ou notée tout simplement  $\mathbb{O}$ . Cette dernière convention d'écriture sera celle utilisée dans toute la suite de cet écrit.

Notons  $(1, e_1, \dots, e_7)$  la base canonique de  $\mathbb{O}$  en temps que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{V}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{O}$  engendré par  $e_1, \dots, e_7$ . Toute octave de Cayley est somme de sa « partie scalaire » et de sa « partie imaginaire pure », selon la décomposition suivante :

$$\mathbb{O} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{V}.$$

Par la suite et par analogie au langage associé aux nombres complexes, on appellera « partie réelle » et sa « partie imaginaire » ces deux parties. Les octaves de Cayley appartenant à  $\mathcal{V}$  sont dites imaginaires purs.

La loi de multiplication de l'algèbre  $\mathbb{O}$  est donnée par le diagramme de Fano (voir Figure FIG. 1), moyen mnémotechnique pour connaître la table de multiplication dans  $\mathbb{O}$ . Les règles de calcul sont les suivantes :

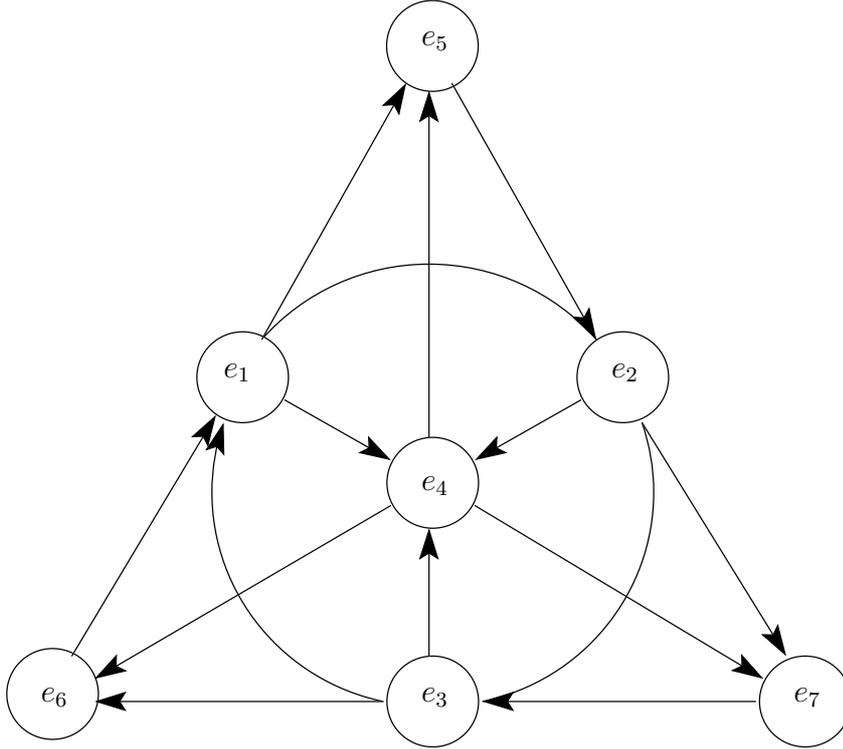


FIG. 1. Diagramme de Fano

(1) 1 est l'élément neutre pour la multiplication,

(2)  $\forall i \in \{1, \dots, 7\}, e_i^2 = -1$ ,

(3) si le triplet  $(e_i, e_j, e_k)$  est constitué de trois éléments situés sur une même ligne du diagramme ci-dessus (cercle, médiane ou côté), ordonné selon le sens de la flèche, alors on a  $e_i e_j = e_k$  et toutes les équations qui en découlent par permutation, en tenant compte de la signature de la permutation.

Par exemple, pour le triplet  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $e_1 e_2 = e_3$  et  $e_2 e_1 = -e_3, e_2 e_3 = e_1$ ; pour le triplet  $(e_1, e_4, e_7)$ ,  $e_1 e_4 = e_7$ . Ainsi, pour chaque  $i, j \in \{1, \dots, 7\}$ ,  $e_i e_j = -e_j e_i$ . L'algèbre  $\mathbb{O}$  se révèle alors être ni commutative, ni associative. La non-commutativité se traduit par le fait que  $e_i e_j = -e_j e_i$  pour deux vecteurs imaginaires purs distincts de la base canonique. Par ailleurs, si l'on considère trois

vecteurs de la base canonique  $e_i, e_j, e_k$ , imaginaires purs, deux à deux distincts et n'étant pas reliés sur le diagramme de Fano, alors on a la relation suivante :  $(e_i e_j) e_k = -e_i (e_j e_k)$ , ce qui montre la non-associativité de  $\mathbb{O}$ .

L'algèbre  $\mathbb{O}$  est munie d'une application trace  $Tr$  :

$$\forall z \in \mathbb{O}, Tr(z) := \frac{1}{2}(z + \bar{z}) := \text{Re}(z)$$

où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$  défini par  $\bar{z} = x - y$  si  $z = x + y$  est la décomposition de  $z$  selon  $\mathbb{O} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{V}$ .

**Remarque 1.1.1.** — Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{V}$  n'est autre que l'ensemble des éléments de  $\mathbb{O}$  de trace nulle, ce qui justifie la notation parfois employée  $\mathcal{V} = \mathfrak{C}_0$ .

**Remarque 1.1.2.** —  $\forall y \in \mathcal{V}, \bar{y} = -y$ .

L'algèbre  $\mathbb{O}$  est aussi une algèbre normée, c'est-à-dire munie d'une « norme » multiplicative :

$$\forall z \in \mathbb{O}, \|z\| := z\bar{z}$$

À cette norme, on associe le produit scalaire canonique  $B$  :

$$\forall x, y \in \mathbb{O}, B(x, y) = \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = Tr(x\bar{y}) = \text{Re}(x\bar{y}),$$

correspondant à la forme quadratique  $Q = I$  :

$$\forall x = x_0 + \sum_{i=1}^7 x_i e_i, Q(x) = B(x, x) = \text{Re}(x\bar{x}) = \sum_{i=0}^7 x_i^2. \quad (1)$$

Dans la suite, on désignera par la lettre  $Q$  la forme quadratique canonique sur  $\mathbb{O}$  ou bien sa restriction à  $\mathcal{V}$ , selon le contexte.

## 1.2. Le groupe de Lie $G_2$

Ce paragraphe a pour visée la définition et la description du groupe de Lie  $G_2$ , introduit notamment par C. CHEVALLEY dans son traité en trois volumes sur les groupes de Lie [Che55].

**Définition 1.2.1.** — Le groupe de Lie exceptionnel  $\mathbf{G}_2$  est défini comme étant le groupe des automorphismes de  $\mathbb{O}$ , noté  $\text{Aut}(\mathbb{O})$ .

Ce groupe de Lie est simple. Il s'agit du groupe de Lie de plus petite dimension parmi les cinq groupes de Lie simples exceptionnels :  $G_2, F_4, E_6, E_7$  et  $E_8$ <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup>Le chiffre en indice indique le rang du groupe.

Les dimensions de ces groupes exceptionnels sont respectivement 14, 52, 78, 133 et 248.

Commençons par faire quatre remarques consécutives à la définition précédente :

**Remarque 1.2.2.** — (1) Tout élément de  $G_2$  envoie un scalaire (c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{C}$ , où  $\mathbb{O} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{V}$ ) sur lui-même et une octave imaginaire pure sur un élément imaginaire pure. D'où l'égalité :

$$\forall g \in G_2, \quad g(\mathcal{V}) = \mathcal{V}.$$

(2) Tout élément du groupe  $G_2$  commute à la conjugaison.

(3) Tout élément du groupe  $G_2$  préserve le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{O}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{\Psi} \in G_2$ .

(1) Comme  $\tilde{\Psi}$  est un automorphisme,  $\tilde{\Psi}(1) = \tilde{\Psi}(1 \cdot 1) = \tilde{\Psi}(1)^2$  donc  $\tilde{\Psi}(1) = 1$ .

Soit  $e_i$  un vecteur de la base canonique pour  $i \in \{1, \dots, 7\}$ . Notons  $\tilde{\Psi}(e_i) = z$  et  $z = x + y$  sa décomposition en partie réelle et imaginaire. Alors, d'une part,  $z^2 = \tilde{\Psi}(e_i)\tilde{\Psi}(e_i) = \tilde{\Psi}(e_i^2) = -1 \in \mathbb{C}$  et, d'autre part,  $z^2 = (x^2 + y^2) + 2xy$ , qui est la décomposition en partie réelle et imaginaire de  $z^2$  vu que  $y^2 = -\|y\|^2 \in \mathbb{C}$ . Donc  $xy = 0$ . Si  $y = 0$ , on aurait  $\tilde{\Psi}(e_i) = x = \tilde{\Psi}(x)$ , ce qui contredirait l'injectivité de  $\tilde{\Psi}$ . D'où  $x = 0$  et  $\tilde{\Psi}(e_i) \in \mathcal{V}$ .

Les éléments de  $G_2$  étant des isomorphismes, on a bien l'égalité annoncée.

(2) Soit  $z = x + y \in \mathbb{C} \oplus \mathcal{V}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\bar{z}) &= \tilde{\Psi}(x - y) = x - \tilde{\Psi}(y), \\ \text{et } \tilde{\Psi}(z) &= x + \tilde{\Psi}(y) = x - \tilde{\Psi}(y) \end{aligned}$$

car  $\tilde{\Psi}(y)$  appartient à  $\mathcal{V}$  d'après (1) de la Remarque 1.2.2. Ainsi,  $\tilde{\Psi}(\bar{z}) = \overline{\tilde{\Psi}(z)}$ .

(3) Soit  $z \in \mathbb{O}$ .

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Psi}(z)\|^2 &= \tilde{\Psi}(z)\overline{\tilde{\Psi}(z)}, \\ &= \tilde{\Psi}(z)\tilde{\Psi}(\bar{z}) \quad \text{d'après (2) de la Remarque 1.2.2,} \\ &= \tilde{\Psi}(z\bar{z}) = z\bar{z} = \|z\|^2 \quad \text{car } z\bar{z} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

□

Ainsi, lorsqu'on prendra en considération un certain  $\tilde{\Psi} \in G_2$ , on regardera indifféremment  $\tilde{\Psi} \in GL_8$  ou sa restriction à  $\mathcal{V}$  :  $\tilde{\Psi}|_{\mathcal{V}} \in GL_7$ , qui, par abus de notation, seront souvent notés identiquement.

On cherche à donner divers points de vue de ce groupe  $G_2$  et donc d'en expliciter d'autres définitions équivalentes. Pour cela, introduisons la forme trilinéaire suivante.

**Définition 1.2.3.** — Définissons la forme trilinéaire  $\omega_0$  sur  $\mathbb{O}$  suivante :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{O}, \quad \omega_0(x, y, z) = \operatorname{Re}((xy)\bar{z}),$$

D'après la Remarque 1.1.2, la restriction de la forme trilinéaire  $\omega_0$  à l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  des octaves de Cayley vérifie :

$$\forall x, y, z \in \mathcal{V}, \quad \omega_0(x, y, z) = -\operatorname{Re}((xy)z).$$

La restriction de  $\omega_0$  à  $\mathcal{V}$  est une forme trilinéaire alternée. En effet, si l'on considère  $x, y$  et  $z$  trois éléments de  $\mathcal{V}$  et si l'on note  $xy = s + t$  la décomposition en partie réelle et imaginaire du produit  $xy$ , alors  $yx = s - t$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((xy)z) &= \operatorname{Re}((s+t)z) = \operatorname{Re}(tz), \\ \text{et } \operatorname{Re}((yx)z) &= \operatorname{Re}((s-t)z) = -\operatorname{Re}(tz), \\ \text{donc } \omega_0(x, y, z) &= -\omega_0(y, x, z). \end{aligned}$$

On peut montrer pareillement que pour trois éléments  $x, y, z$  de  $\mathcal{V}$ , on a

$$\omega_0(x, y, z) = -\omega_0(x, z, y).$$

Ainsi, sur  $\mathcal{V}$ ,  $\omega_0$  est une forme trilinéaire alternée ; elle appartient donc à  $\Lambda^3\mathcal{V}$ .

**Définition 1.2.4.** — Définissons  $\omega_0$ , appartenant à  $\Lambda^3\mathcal{V}$ , la forme trilinéaire alternée définie par :

$$\forall x, y, z \in \mathcal{V}, \quad \omega_0(x, y, z) = -\operatorname{Re}((xy)z).$$

**Remarque 1.2.5.** — La forme trilinéaire  $\omega_0$  sur  $\mathbb{O}$  n'est pas alternée à cause des octaves de Cayley réelles qui commutent avec toute autre octave. Cependant, la forme trilinéaire  $\omega_0$  sur  $\mathcal{V}$ , elle, est bien alternée.

Au Chapitre 2, on associe à une forme trilinéaire alternée sur  $\mathcal{V}$  une forme quadratique de la manière suivante :

**Définition 1.2.6.** — Soit l'application rationnelle  $\Phi$  suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}(\Lambda^3\mathcal{V}^*) &\dashrightarrow \mathbb{P}(\operatorname{Sym}^2\mathcal{V}^*) \\ [\omega] &\longmapsto [Q_\omega] \end{aligned}$$

où  $B_\omega$ , la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique  $Q_\omega$ , est définie par :

$$\forall x, y \in \mathcal{V}, \quad B_\omega(x, y) = \omega(x, \cdot, \cdot) \wedge \omega(y, \cdot, \cdot) \wedge \omega(\cdot, \cdot, \cdot).$$

Le fait que  $Q_\omega$  est bien une forme quadratique quel que soit  $\omega \in \Lambda^3\mathcal{V}^*$  est justifié au paragraphe 2.2. D'après le Lemme 2.2.5, la forme quadratique  $Q_0$  qui

est associée à la forme trilinéaire alternée  $\omega_0$  définie sur  $\mathcal{V}$  est proportionnelle à la forme quadratique canonique sur  $\mathcal{V}$ . Plus précisément, on a  $Q_0 = 6Q$ .

**Remarque 1.2.7.** — La forme trilinéaire  $\omega_0$  sur  $\mathcal{V}$  est alors dite non-dégénérée selon la définition 2.2.3 puisque la forme quadratique  $Q_0$  qui lui est associée est non-dégénérée. La notion de forme trilinéaire alternée non-dégénérée sur  $\mathcal{V}$  est l'objet du Chapitre 2 et y sera donc développée en conséquence.

Le groupe linéaire  $GL_7$  agit sur  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  et sur  $\text{Sym}^2\mathcal{V}^*$  de la manière suivante :  
 $\forall g \in GL_7, \forall \omega \in \Lambda^3\mathcal{V}^*, \forall \beta \in \text{Sym}^2\mathcal{V}^*, \forall x, y, z \in \mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned} g \cdot \omega(x, y, z) &= \omega(g^{-1}(x), g^{-1}(y), g^{-1}(z)), \\ \text{et } g \cdot \beta(x, y) &= \beta(g^{-1}(x), g^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Notons  $\text{Stab}(\omega_0)$  le stabilisateur de  $\omega_0$  sous l'action de  $GL_7$  :

$$\text{Stab}(\omega_0) = \{g \in GL_7 \mid g \cdot \omega_0 = \omega_0\}.$$

Lorsque  $g$  appartient à ce stabilisateur, on dit que  $g$  préserve  $\omega_0$ .

**Lemme 1.2.8.** — Pour tout  $g \in GL_7$ , et pour tout  $\omega \in \Lambda^3V^*$ ,

$$g \cdot B_\omega = \det(g) B_{g \cdot \omega}$$

*Démonstration.* — Notons

$$f_{i_1, \dots, i_k} := f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k}.$$

Soient  $g \in GL_7$ ,  $\omega \in \Lambda^3V^*$  et  $x, y \in V$ . Le calcul de  $B_{g \cdot \omega}(x, y)$  fait intervenir des produits extérieurs de la forme suivante :

$$g \cdot f_{1,2,3}(x, \cdot, \cdot) \wedge g \cdot f_{4,5,6}(y, \cdot, \cdot) \wedge g \cdot f_{7,8,9}$$

où les  $f_i \in V^*$ . Cependant,

$$\begin{aligned} &g \cdot f_{1,2,3}(x, \cdot, \cdot) \wedge g \cdot f_{4,5,6}(y, \cdot, \cdot) \wedge g \cdot f_{7,8,9} \\ &= [f_1(g^{-1}(x)) g \cdot f_{2,3} - f_2(g^{-1}(x)) g \cdot f_{1,3} + f_3(g^{-1}(x)) g \cdot f_{1,2}] \\ &\quad \wedge [f_4(g^{-1}(y)) g \cdot f_{5,6} - f_5(g^{-1}(y)) g \cdot f_{4,6} + f_6(g^{-1}(y)) g \cdot f_{4,5}] \\ &\quad \wedge g \cdot f_{7,8,9}. \end{aligned}$$

Or, le premier terme est :

$$\begin{aligned} &f_1(g^{-1}(x)) g \cdot f_{2,3} \wedge f_4(g^{-1}(y)) g \cdot f_{5,6} \wedge g \cdot f_{7,8,9} \\ &= f_1(g^{-1}(x)) f_4(g^{-1}(y)) g \cdot f_{2,3} \wedge g \cdot f_{5,6} \wedge g \cdot f_{7,8,9}, \\ &= f_1(g^{-1}(x)) f_4(g^{-1}(y)) g \cdot f_{2,3,5,6,7,8,9}, \\ &= \det(g^{-1}) f_1(g^{-1}(x)) f_4(g^{-1}(y)) f_{2,3,5,6,7,8,9}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & g \cdot f_{1,2,3}(x, \cdot, \cdot) \wedge g \cdot f_{4,5,6}(y, \cdot, \cdot) \wedge g \cdot f_{7,8,9} \\ = & \det(g^{-1}) [f_1(g^{-1}(x)) f_{2,3} - f_2(g^{-1}(x)) f_{1,3} + f_3(g^{-1}(x)) f_{1,2}] \\ & \wedge [f_4(g^{-1}(y)) f_{5,6} - f_5(g^{-1}(y)) f_{4,6} + f_6(g^{-1}(y)) f_{4,5}] \\ & \wedge f_{7,8,9}. \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} B_{g \cdot \omega}(x, y) &= \det(g^{-1}) B_\omega[g^{-1}(x), g^{-1}(y)], \\ B_{g \cdot \omega}(x, y) &= \det(g^{-1}) g \cdot B_\omega(x, y), \\ \text{soit } g \cdot B_\omega(x, y) &= \det(g) B_{g \cdot \omega}(x, y). \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.2.9.** — Si  $g \in \text{Stab}(\omega_0) \cap SL_7$ , alors  $g$  préserve  $B$ .

*Démonstration.* — Soit  $g \in SL_7$  tel que  $g \cdot \omega_0 = \omega_0$ . D'après le Lemme 1.2.8,

$$g \cdot B_{\omega_0} = (\det g) B_{g \cdot \omega_0} = B_{g \cdot \omega_0} = B_{\omega_0}$$

et comme  $B_{\omega_0} = 6B$ , on a

$$g \cdot B = B$$

donc  $g$  préserve  $B$ . □

Le théorème suivant montre que le groupe  $G_2$  peut être considéré comme l'intersection du stabilisateur de la forme trilinéaire alternée  $\omega_0$  avec  $SL_7$ .

**Théorème 1.2.10.** — L'image du groupe  $G_2$  dans  $GL_7(\mathbb{C})$ , par l'application de restriction à  $\mathcal{V}$ , coïncide avec  $\text{Stab}(\omega_0) \cap SL_7$  :

$$G_2 \simeq \text{Stab}(\omega_0) \cap SL_7. \quad (2)$$

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{\Psi} \in G_2$ . D'après (1) de la Remarque 1.2.2,  $\tilde{\Psi} \in G_2$  est entièrement déterminée par sa restriction à  $\mathcal{V}$ . Considérons donc

$$\Psi := \tilde{\Psi}|_{\mathcal{V}}$$

la restriction de  $\tilde{\Psi}$  à  $\mathcal{V}$ . Montrons que  $\Psi \in \text{Stab}(\omega_0) \cap SL_7$ .

Comme  $G_2$  est un groupe, l'inverse  $\tilde{\Psi}^{-1}$  de  $\tilde{\Psi}$  appartient aussi à  $G_2$ . Soient  $x, y, z \in \mathcal{V}$ .

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \omega_0(x, y, z) &= -\text{Re}((\Psi^{-1}(x)\Psi^{-1}(y))\Psi^{-1}(z)), \\ &= -\text{Re}\left(\left(\tilde{\Psi}^{-1}(xy)\right)\Psi^{-1}(z)\right), \\ &= -\text{Re}\left(\left(\tilde{\Psi}^{-1}((xy)z)\right)\right), \\ &= -\text{Re}((xy)z) \quad \text{d'après (1) de la Remarque 1.2.2,} \\ \Psi \cdot \omega_0(x, y, z) &= \omega_0(x, y, z). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Psi \text{ préserve } \omega_0. \quad (3)$$

Or, par (3) de la Remarque 1.2.2,  $\Psi$  préserve  $B$  :

$$\Psi \cdot B = B. \quad (4)$$

Mais, d'après le Lemme 1.2.8,  $\Psi \cdot B = (\det \Psi)B$ , ce qui impose  $\det \Psi = 1$ . Ainsi :

$$G_2 \subset \text{Stab}(\omega_0) \cap SL_7.$$

Inversement, il suffit de montrer que le prolongement par l'identité sur  $\mathbb{C}$  de chaque  $g \in \text{Stab}(\omega_0) \cap SL_7$  est un automorphisme de  $\mathbb{O}$ . Soit  $g \in SL_7$  vérifiant  $g \cdot \omega_0 = \omega_0$ . On note  $\tilde{g}$  son prolongement à  $\mathbb{O}$  vérifiant  $\tilde{g}|_{\mathbb{C}} = id$ . D'après le Lemme 1.2.9,  $\tilde{g}^{-1}$  préserve  $\omega_0$ . En effet, pour tous  $x, y, z$  appartenant à  $\mathcal{V}$ ,

$$g^{-1} \cdot \omega_0(x, y, z) = \omega_0(x, y, z),$$

et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et pour tous  $x, y \in \mathcal{V}$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1} \cdot \omega_0(\lambda, x, y) &= \omega_0[\tilde{g}(\lambda), \tilde{g}(x), \tilde{g}(y)] = \omega_0[\lambda, \tilde{g}(x), \tilde{g}(y)], \\ &= -\text{Re} [[\lambda \tilde{g}(x)] \tilde{g}(y)] = -\text{Re} [[\tilde{g}(\lambda x)] \tilde{g}(y)] = B(g(\lambda x), g(y)), \\ &= B(\lambda x, y) = -\text{Re}[(\lambda x)(y)] \quad \text{d'après le Lemme 1.2.9,} \\ &= \omega_0(\lambda, x, y). \end{aligned}$$

Enfin, pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et pour tout  $x \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1} \cdot \omega_0(\lambda, \mu, x) &= \omega_0[\lambda, \mu, \tilde{g}(x)] = -\text{Re} [(\lambda \mu) \tilde{g}(x)] = -\lambda \mu \text{Re} [\tilde{g}(x)], \\ &= 0 = \omega_0(\lambda, \mu, x) \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\tilde{g}^{-1} \cdot \omega_0 = \omega_0.$$

Pour montrer que  $\tilde{g}$  est un automorphisme de  $\mathbb{O}$ , il suffit de montrer que pour tous  $i, j \in \{1, \dots, 7\}$ , on a :

$$\tilde{g}(e_i e_j) = \tilde{g}(e_i) \tilde{g}(e_j). \quad (5)$$

Nous allons utiliser les deux propriétés suivantes vérifiées par  $g$  :

(1)  $\tilde{g}^{-1}$  préserve  $B$  donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{O}, \quad \text{Re} [\tilde{g}(x) \tilde{g}(y)] = \text{Re}(xy),$$

(2)  $\tilde{g}^{-1}$  préserve  $\omega_0$  donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{O}, \quad \text{Re} [[\tilde{g}(x) \tilde{g}(y)] \tilde{g}(z)] = \text{Re} [(xy) z].$$

Soit  $z \in \mathcal{V}$  et soient deux éléments distincts  $i, j \in \{1, \dots, 7\}$ . Comme  $i \neq j$ ,  $e_i e_j$  appartient à  $\mathcal{V}$ . On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [[g(e_i)g(e_j)]g(z)] &= \operatorname{Re} [(e_i e_j)z] && \text{d'après (2),} \\ &= \operatorname{Re} [(g(e_i e_j))g(z)] && \text{d'après (1),} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \operatorname{Re} [[g(e_i)g(e_j) - g(e_i e_j)]g(z)] = 0.$$

Comme  $g(z)$  parcourt tous les éléments de  $\mathcal{V}$  lorsque  $z$  varie, on a :

$$\operatorname{Im} [g(e_i)g(e_j) - g(e_i e_j)] = 0.$$

Pour montrer l'égalité (5), il reste à comparer les parties réelles de  $g(e_i)g(e_j)$  et de  $g(e_i e_j)$ . D'après (1) de la Remarque 1.2.2,  $g(e_i e_j) \in \mathcal{V}$ , donc sa partie réelle est nulle. Étudions la partie réelle  $\operatorname{Re} [g(e_i)g(e_j)]$ . D'après (1),

$$\operatorname{Re} [g(e_i)g(e_j)] = \operatorname{Re}(e_i e_j) = 0,$$

donc  $g(e_i)g(e_j)$  et  $g(e_i e_j)$  ayant même parties réelles et même parties imaginaires, sont égaux.

Dans le cas où  $i = j$ ,  $e_i^2 = -1$  et  $\tilde{g}(e_i^2) = -1$ . D'après (1) et (2),  $\forall z \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(\tilde{g}(e_i)^2)\tilde{g}(z)] &= \operatorname{Re} [(e_i^2)z] = \operatorname{Re}(-z) = 0, \\ \text{et} \quad \operatorname{Re} [\tilde{g}(e_i^2)\tilde{g}(z)] &= \operatorname{Re}[-\tilde{g}(z)] = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\operatorname{Im} [\tilde{g}(e_i)^2] = 0 = \operatorname{Im} [\tilde{g}(e_i^2)]$ . Regardons les parties réelles : d'après (1),  $\operatorname{Re} [\tilde{g}(e_i)^2] = \operatorname{Re}(e_i^2) = -1 = \operatorname{Re} [\tilde{g}(e_i^2)]$ . Donc,  $\tilde{g}(e_i)^2 = \tilde{g}(e_i^2)$ .

Ainsi,  $\forall g \in \operatorname{Stab}(\omega_0) \cap SL_7, \forall x, y \in \mathbb{O}, \tilde{g}(xy) = \tilde{g}(x)\tilde{g}(y)$ , soit :

$$\forall g \in \operatorname{Stab}(\omega_0) \cap SL_7, \tilde{g} \in G_2$$

où  $\tilde{g}$  est le prolongement de  $g$  par l'identité sur  $\mathbb{C}$ . Donc  $\operatorname{Stab}(\omega_0) \cap SL_7 \subset G_2$  et, donc :

$$G_2 \simeq \operatorname{Stab}(\omega_0) \cap SL_7.$$

□

Affinons le lien entre  $\operatorname{Stab}(\omega_0)$  et  $G_2$ . Pour cela, nous allons établir les lemmes suivants :

**Lemme 1.2.11.** — *Soit  $G$  un groupe de Lie semisimple connexe et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Considérons la représentation adjointe :*

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto d(C_g) \end{aligned}$$

où  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  désigne les automorphismes de  $\mathfrak{g}$  et  $d(C_g)$  la différentielle de l'application  $C_g$  de conjugaison par  $g$  :

$$\begin{aligned} C_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Alors

- (1)  $Z(G) \simeq \ker(\Psi)$ ,
- (2)  $\text{Im}(\Psi) \simeq \text{Aut}^\circ(\mathfrak{g})$ , où  $\text{Aut}^\circ(\mathfrak{g})$  est la composante connexe de l'identité de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ ,
- (3)  $\text{coker}(\Psi)$  est isomorphe au groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de  $\mathfrak{g}$ , noté  $\text{Aut}(\text{Dynkin}(\mathfrak{g}))$ .

Ainsi la suite suivante est exacte :

$$1 \rightarrow Z(G) \rightarrow G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Aut}(\text{Dynkin}(\mathfrak{g})) \rightarrow 1$$

et  $G/Z(G) \simeq \text{Aut}^\circ(\mathfrak{g})$

*Démonstration.* — La preuve complète fait l'objet de la Proposition D.40 de l'appendice D de [FH91]. Nous ne montrons ici que le point (1) du lemme. Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et  $\Psi$  l'application définie dans le lemme. Si  $g \in Z(G)$  alors  $C_g = \text{id}$  donc  $d(C_g) = \text{id}$ ; par conséquent  $g \in \ker(\Psi)$ . Inversement, soit  $g \in \ker(\Psi)$ . Explicitons le centralisateur de  $\{g\}$  :  $Z_G(\{g\}) = \{h \in G \mid ghg^{-1} = h\}$ . On a  $Z_G(\{g\}) = \{h \in G \mid C_g(h) = h\}$  donc  $T_0(Z_G(\{g\})) = \{X \in \mathfrak{g} \mid d(C_g)X = X\} = \mathfrak{g}$  puisque  $d(C_g) = \text{id}$ . Ainsi,  $Z_G(\{g\})$  est un sous-groupe fermé de  $G$  qui a même algèbre de Lie que  $G$ . Comme  $G$  est connexe,  $Z_G(\{g\}) = G$  (voir le premier Théorème du chapitre 5, §13.1 de [Hum75]); ce qui montre que  $\forall h \in G, hg = gh$ , donc que  $g \in Z(G)$ .  $\square$

Nous allons utiliser ce lemme appliqué au groupe de Lie simple  $G_2$ . Pour cela, nous avons besoin de prouver sa connexité et d'étudier son centre  $Z(G_2)$ .

Retournons donc un moment à l'étude des octaves de Cayley, décrite dans [Bae02].

Si l'on considère  $b_1 \in \mathcal{V}$  tel que  $b_1^2 = -1$ , alors  $b_1$  engendre une sous-algèbre de  $\mathbb{O}$  isomorphe à  $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ . Si l'on considère deux éléments de  $\mathcal{V}$  de carré  $(-1)$  qui anti-commutent, alors ils engendrent une sous-algèbre de  $\mathbb{O}$  isomorphe au complexifié des quaternions  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ . Enfin, si l'on considère  $b_1, b_2$  et  $b_3$  trois éléments de  $\mathcal{V}$  de carré  $(-1)$  qui sont tels que, pris deux à deux, ils anti-commutent et tels que  $(b_1 b_2) b_3 = -b_3 (b_1 b_2)$ , alors ils engendrent l'algèbre  $\mathbb{O}$ .

Un tel triplet est dit triplet basique. Par exemple,  $(e_1, e_2, e_4)$  est un triplet basique et chaque triplet  $(e_i, e_j, e_k)$  constitué de trois vecteurs de la base canonique de  $\mathcal{V}$ , non alignés sur le diagramme de Fano, est un triplet basique.

Interprétons géométriquement cette notion de triplet basique. Soient  $b_1, b_2 \in \mathcal{V}$  tels que  $b_i^2 = -1$  et  $b_1 b_2 = -b_2 b_1$ .

Notons  $S^6 := \{x \in \mathcal{V} \mid \|x\|^2 = 1\}$ . Alors

$$\langle b_1, b_2 \rangle = -\operatorname{Re}(b_1 b_2) = -\frac{1}{2}(b_1 b_2 + b_2 b_1) = 0$$

$$\text{et } \|b_1\|^2 = -\operatorname{Re}(b_1^2) = 1 = \|b_2\|^2.$$

Donc  $b_1, b_2 \in S^6$  et  $b_1$  et  $b_2$  sont orthogonaux.

D'où la définition suivante :

**Définition 1.2.12.** — Un triplet  $(b_1, b_2, b_3) \in \mathcal{V}^3$  est appelé **triplet basique** si et seulement si

- (1)  $\forall i \in \{1, 2, 3\}, b_i \in S^6$ ,
- (2) les vecteurs  $b_i$  sont deux à deux orthogonaux,
- (3) les deux vecteurs  $b_1 b_2$  et  $b_3$  sont orthogonaux.

L'algèbre engendrée par un triplet basique est l'algèbre  $\mathbb{O}$  tout entière.

Par exemple, le triplet  $(e_1, e_2, e_4)$  est un triplet basique mais le triplet  $(e_1, e_2, e_3)$  ne l'est pas. En effet,  $e_1 e_2 = e_3$  ce qui contredit la troisième assertion de la définition.

À tout triplet basique  $(x, y, z)$ , on peut associer la base de  $\mathbb{O}$  suivante :

$$(1, x, y, xy, z, (xy)z, yz, xz)$$

qui suit les mêmes règles de multiplications (à un ordre près) que celles indiquées par le diagramme de Fano pour la base :

$$(1, e_1, \dots, e_7).$$

Le produit de deux éléments parmi  $\{x, y, xy, z, (xy)z, yz, xz\}$  est donc un élément de  $\{x, y, xy, z, zx, zy, z(xy)\}$ .

Le groupe  $G_2$  des automorphismes de  $\mathbb{O}$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathbb{T}$  des triplets basiques. Par voir cela, on fixe un triplet basique, par exemple  $(e_1, e_2, e_4)$ . À un élément  $g$  de  $G_2$ , on associe l'image, notée  $(x, y, z)$  du triplet basique  $(e_1, e_2, e_4)$ . Ce nouveau triplet est aussi un triplet basique. En effet, on a par exemple

$$\begin{aligned} x^2 &= (g(e_1))^2 = g(e_1^2) = g(-1) = -1 \\ \text{et } \langle x, y \rangle &= -\operatorname{Re}(xy) = -\frac{1}{2}(xy + yx) = -\frac{1}{2}(g(e_1)g(e_2) + g(e_2)g(e_1)), \\ &= -\frac{1}{2}(g(e_1 e_2 + e_2 e_1)) = 0 \end{aligned}$$

et toutes les autres relations s'obtiennent de la même manière. Ainsi, à un automorphisme de  $\mathbb{O}$ , on associe un triplet basique. Inversement, soit un triplet

basique  $(x, y, z)$ . On définit l'application linéaire  $g$  suivante. La base  $(1, e_1, \dots, e_7)$  s'écrit comme suit :  $(1, e_1, e_2, e_1e_2, e_4, (e_1e_2)e_4), e_2e_4, e_1e_4)$  en fonction de  $(e_1, e_2, e_4)$ .

Posons

$$\begin{cases} g(e_1) = x, \\ g(e_2) = y, \\ g(e_4) = z, \\ g(e_ie_j) = g(e_i)g(e_j) \text{ pour } e_1e_2, e_1e_4 \text{ et } e_2e_4, \\ g[(e_1e_2)e_4] = (xy)z. \end{cases}$$

L'application linéaire  $g$  est un isomorphisme de  $\mathbb{O}$  puisque  $\langle x, y, z \rangle = \mathbb{O}$ . De plus,  $g$  est un automorphisme de  $\mathbb{O}$  car, pour tout choix  $a, b$  de deux éléments parmi  $\{e_1, e_2, e_1e_2, e_4, (e_1e_2)e_4, e_2e_4, e_1e_4\}$ , on a  $g(ab) = g(a)g(b)$  d'après la similarité des tables de multiplication des algèbres engendrées par  $e_1, e_2$  et  $e_4$  et  $x, y$  et  $z$ .

Par cette correspondance, il existe un et un seul automorphisme associé à un triplet basique.

**Lemme 1.2.13.** — *Le groupe  $G_2$  est connexe.*

*Démonstration.* — Ici, et ce sera l'unique occurrence du groupe réel  $(G_2)_{\mathbb{R}} := \text{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ , nous allons montrer que  $\mathbb{T}$  et donc  $(G_2)_{\mathbb{R}}$  (étant isomorphe à  $\mathbb{T}$ ), est un groupe (compact) et connexe. Le groupe complexe  $G_2$  sera donc lui-aussi connexe.

L'ensemble  $S^6$  est connexe<sup>(2)</sup>.

Soit  $A := \{(x, y) \in (S^6)^2 \mid \langle x, y \rangle = 0\}$  muni de la projection sur la première coordonnée. L'ensemble  $A$  est une filtration sur la base  $S^6$  de fibre  $F_{x_0} = \{y \in S^6 \mid \langle x_0, y \rangle = 0\}$  en  $x_0$ . Pour tout  $x_0 \in S^6$ ,  $F_{x_0}$ , étant l'intersection de  $S^6$  avec un hyperplan, est isomorphe à  $S^5$ , donc connexe. La base  $S^6$  et chaque fibre étant connexe, l'ensemble  $A$  est lui-même connexe.

On considère

$$\mathbb{T} = \{(x, y, z) \in (S^6)^3 \mid (x, y) \in A \text{ et } xz = -zx, yz = -zy \text{ et } (xy)z = -z(xy)\},$$

muni de la projection sur les deux premières coordonnées. Alors,  $\mathbb{T}$  est une filtration sur la base  $A$ , de fibre  $F_{(x_0, y_0)} := \{z \in S^6 \mid x_0z = -zx_0, y_0z =$

<sup>(2)</sup>En effet, on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} f: SO_7 & \longrightarrow & S^6 \\ & & M \longmapsto M(e_1). \end{array}$$

L'application  $f$  est continue;  $SO_7$  étant connexe,  $\text{Im}(f)$  est connexe. Or,  $f$  est surjective. En effet, pour tout  $x \in S^6$ , on peut trouver sept vecteurs  $u_i$  tels que  $(u_1, \dots, u_7) = (x, u_2, \dots, u_7)$  soit une base orthonormée de  $\mathcal{V}$ . Notons  $P$  l'application linéaire vérifiant  $\forall i \in \{1, \dots, 7\}, P(e_i) = u_i$ . En ce cas,  $P \in O_7$  et, quitte à remplacer  $u_7$  en  $-u_7$ , on peut supposer que  $P \in SO_7$ . On a alors  $f(P) = P(e_1) = x$ , d'où la surjectivité de  $f$ . Ceci montre la connexité de  $S^6$ . Par le même raisonnement, étant donné que tous les ensembles  $SO(n, \mathbb{C})$  sont connexes pour  $n \geq 1$ , toutes les sphères  $S^n$  sont connexes pour  $n \geq 1$ .

$-zy_0$  et  $(x_0y_0)z = -z(x_0y_0)$  en  $(x_0, y_0)$ . Pour tout  $(x_0, y_0) \in A$ , les trois équations définissant  $F_{(x_0, y_0)}$  décrivent chacune un hyperplan distinct. Vu que l'intersection d'une sphère  $S^n$  avec un hyperplan est isomorphe à une sphère de type  $S^{n-1}$ , chaque fibre  $F_{(x_0, y_0)}$  est isomorphe à  $S^3$ . Chaque fibre  $F_{(x_0, y_0)}$  est donc connexe, la base  $A$  étant connexe,  $\mathbb{T}$  est aussi connexe.

Ainsi,  $G_2$  est connexe.  $\square$

Regardons à présent le centre de  $G_2$ .

**Lemme 1.2.14.** — *Le centre  $Z(G_2)$  est réduit à l'identité.*

*Démonstration.* — <sup>(3)</sup> Soit  $g \in Z(G_2)$ . Par définition,  $g$  commute avec tout élément de  $G_2$ . Considérons en particulier  $h \in G_2$  tel que  $h(e_1) = e_1$ . On a  $g(e_1) = g(h(e_1)) = h(g(e_1))$  donc  $g(e_1) \in \ker(h - I)$ . Ainsi,

$$g(e_1) \in \bigcap_{h \in G_2 \mid h(e_1)=e_1} \ker(h - I).$$

Prenons deux tels éléments  $h_1, h_2 \in G_2$  définis comme suit :  $h_1$  laisse stable  $e_1$  et permute  $e_2$  et  $e_4$  ; il s'agit donc de l'automorphisme qui envoie le triplet basique  $(e_1, e_2, e_4)$  sur le triplet basique  $(e_1, e_4, e_2)$  ;  $h_2$  laisse stable  $e_1$  et permute  $e_2$  et  $e_5$  ; il s'agit donc de l'automorphisme qui envoie le triplet basique  $(e_1, e_2, e_5)$  sur le triplet basique  $(e_1, e_5, e_2)$ . Ainsi, d'une part  $(h_1(e_1), \dots, h_1(e_7)) = (e_1, e_4, e_7, e_2, -e_5, -e_6, e_3)$  et d'autre part  $(h_2(e_1), \dots, h_2(e_7)) = (e_1, e_5, e_6, -e_4, e_2, e_3, -e_7)$ . Leurs sous-espaces propres associés à la valeur propre 1 sont

$$\begin{aligned} \ker(h_1 - I) &= \langle e_1, e_2 + e_4, e_3 + e_7 \rangle \\ \text{et } \ker(h_2 - I) &= \langle e_1, e_2 + e_5, e_3 + e_6 \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $\ker(h_1 - I) \cap \ker(h_2 - I) = \text{vect}\{e_1\}$ ,  $g(e_1) \in \text{vect}\{e_1\}$ . Donc,  $\exists \lambda_1 \in \mathbb{C} / g(e_1) = \lambda_1 e_1$ . D'après l'équation (4) de la démonstration du Théorème 1.2.10,  $g$  préserve la norme, donc  $\lambda_1 = \pm 1$ . Il en est de même pour tous les autres vecteurs  $e_i$  de  $\mathcal{V}$  :

$$\forall i \in \{1, \dots, 7\}, \exists \lambda_i \in \{\pm 1\} / g(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Fixons  $i \in \{2, \dots, 7\}$ . On peut trouver  $j \in \{1, \dots, 7\} / (e_1, e_i, e_j)$  soit un triplet basique. Pour cela, il suffit de prendre  $e_j$  tel que les trois vecteurs  $e_1, e_i, e_j$  ne soient pas alignés sur le diagramme de Fano. Soit l'automorphisme  $h$  qui envoie le triplet basique  $(e_1, e_i, e_j)$  sur le triplet basique  $(e_i, e_1, e_j)$ . On a :

$$\lambda_1 e_1 = g(e_1) = g(h(e_i)) = h(g(e_i)) = h(\lambda_i e_i) = \lambda_i h(e_i) = \lambda_i e_1,$$

ce qui prouve que  $\lambda_1 = \lambda_i$ . Ainsi, l'automorphisme  $g$  n'est autre qu'une homothétie de rapport 1 ou  $-1$ . Enfin, d'après le Théorème 1.2.10, le déterminant de

<sup>(3)</sup>Une autre démonstration directe est proposée dans [Yok09].

la restriction  $\tilde{g}$  de  $g$  à  $\mathcal{V}$  est égal à 1. Si  $g = \lambda I$  avec  $\lambda^2 = 1$ ,  $\det(\tilde{g}) = \lambda^7 = \lambda = 1$ , donc  $g = I$ . De cette façon,  $Z(G_2) = \{id\}$ .  $\square$

Nous sommes en mesure d'établir le lemme suivant :

**Lemme 1.2.15.** — *Le groupe  $\text{Stab}(\omega_0)$  est isomorphe à  $G_2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* — L'idée de cette preuve provient de l'article [SK77].

Soit  $G := \text{Stab}(\omega_0)$  et  $G^\circ$  la composante connexe de l'identité de  $G$ . Les trois groupes  $G$ ,  $G^\circ$  et  $G_2$  ont pour algèbre de Lie l'algèbre  $\mathfrak{g}_2$  (cette algèbre est décrite au paragraphe 1.3). Le groupe  $G_2$  est un sous-groupe fermé et connexe de  $G$ , donc  $G_2$  est un sous-groupe fermé de  $G^\circ$ . Comme  $G^\circ$  est connexe et que  $G_2$  et  $G^\circ$  ont même algèbre de Lie, on a

$$G_2 = G^\circ.$$

Étudions l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}_2) \\ g &\longmapsto d(C_g), \end{aligned}$$

où  $C_g$  est la conjugaison par  $g$  :

$$\begin{aligned} C_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

On note  $\Psi_0$  la restriction de  $\Psi$  à  $G^\circ$ . D'après le Lemme 1.2.11 appliqué à  $G^\circ$ , comme  $Z(G^\circ) = Z(G_2) = \{id\}$ , on a :

$$1 \longrightarrow G^\circ \xrightarrow{\Psi_0} \text{Aut}(\mathfrak{g}_2) \longrightarrow \text{Aut}(\text{Dynkin}(\mathfrak{g}_2)) \longrightarrow 1.$$

Or,  $\text{Aut}(\text{Dynkin}(\mathfrak{g}_2)) = \{id\}$  puisque que  $\mathfrak{g}_2$  possède deux racines simples : une courte  $\alpha_1$  et une longue  $\alpha_2$  (voir paragraphe 4.1.1 au chapitre 4) et que les automorphismes du diagramme de Dynkin permutent les racines simples en conservant leur norme. Donc,

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}_2) \simeq \text{Aut}^\circ(\mathfrak{g}_2).$$

Par conséquent,  $\Psi_0$  réalise un isomorphisme entre  $G^\circ$  et  $\text{Aut}^\circ(\mathfrak{g}_2)$  et  $\Psi : G \rightarrow \text{Aut}^\circ(\mathfrak{g}_2)$  est surjective. La suite exacte

$$1 \longrightarrow G^\circ \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/G^\circ \longrightarrow 1$$

est scindée. On a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} f : G &\simeq G^\circ \times G/G^\circ \\ g &\longmapsto (\Psi(g), \pi(g)). \end{aligned}$$

Effectivement, si  $g \in \ker(f)$  alors  $\pi(g) = id$ , donc  $g \in G^\circ$ . Mais alors  $\Psi(g) = \Psi_0(g) = id$  et comme  $\Psi_0$  est un isomorphisme, on a bien que  $g = id$ . Par ailleurs,

soit  $(g_0, hG^\circ) \in G^\circ \times G/G^\circ$ . On considère  $g_1 \in G^\circ$  tel que  $\Psi_0(g_1) = \Psi^{-1}(h)g_0$  (un tel  $g_1 \in G^\circ$  existe puisque  $\Psi_0$  est surjective). Alors,

$$f(hg_1) = (\Psi(hg_1), hg_1G^\circ) = (\Psi(h)\Psi_0(g_1), hG^\circ) = (\Psi(h)\Psi^{-1}(h)g_0, hG^\circ) = (g_0, hG^\circ).$$

Ainsi,  $f$  est bien surjective.

Décrivons  $G/G^\circ$ . L'application

$$\begin{aligned} \ker(\Psi) &\longrightarrow G/G^\circ \\ g &\longmapsto gG^\circ \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En effet,  $\ker(\Psi) \cap G^\circ = \{id\}$ , ce qui prouve l'injectivité ; en ce qui concerne la surjectivité, il suffit de voir que quelque soit l'élément  $gG^\circ$  de  $G/G^\circ$ ,  $gG^\circ$  est l'image de  $gg_0 \in \ker(\Psi)$  où  $g_0$  est l'élément de  $G^\circ$  vérifiant  $\Psi(g_0) = \Psi(g)^{-1}$ . Montrons que tout élément de  $\ker(\Psi)$  commute avec chaque élément de  $G^\circ$ . Soit  $k \in \ker(\Psi)$  et  $g_0 \in G^\circ$ . Comme  $G^\circ$  est un sous-groupe distingué de  $G$ ,  $kg_0k^{-1} \in G^\circ$ .

$$\Psi_0(kg_0k^{-1}) = \Psi(k)\Psi_0(g_0)\Psi(k^{-1}) = \Psi_0(g_0).$$

Les deux éléments de  $G^\circ$ ,  $g_0$  et  $kg_0k^{-1}$ , ayant la même image par l'isomorphisme  $\Psi_0$ , sont égaux. Par suite,  $\ker(\Psi)$  est inclus dans le centralisateur de  $G^\circ$ . Considérons la représentation irréductible  $G_2 \rightarrow GL(7)$  et  $k \in \ker(\Psi)$ . D'après ce qu'on vient de voir,  $k$  est une application linéaire non nulle qui commute avec tous les éléments de  $G^\circ = G_2$ . En appliquant le Lemme de Schur (voir le Corollaire 4.9 de [Kna02]), on obtient que  $k$  est une homothétie. Soit  $h$  une homothétie de  $G$  de rapport  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} h \in G = \text{Stab}(\omega_0) &\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{O}, & h \cdot \omega_0(x, y, z) &= \omega_0(x, y, z), \\ &\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{O}, & \omega_0(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y, \lambda^{-1}z) &= \lambda^{-3}\omega_0(x, y, z), \\ &\Leftrightarrow & \lambda^3 &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $G/G^\circ \simeq \ker(\Psi) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . En regroupant les résultats précédents, il vient :

$$G \simeq G_2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

□

### 1.3. Description explicite de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$ du groupe $G_2$

**1.3.1. Description de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  via  $\omega_0$ .** — Dans la classification des algèbres de Lie complexes simples, réalisée par W.Killing et E.Cartan à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, deux catégories d'algèbres de Lie simples apparaissent : d'une part, les algèbres de Lie dites de type classique :  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$ , d'autre part les cinq algèbres de Lie dites exceptionnelles :  $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7$  et  $\mathfrak{e}_8$ .

Nous allons ici analyser l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  du groupe  $G_2$ , dont la simplicité est démontrée, en autres, dans [Yok09].

Par définition,  $\mathfrak{g}_2 = T_{id}(G_2)$ . Comme nous avons établi l'inclusion  $G_2 \subset SO_7$ , l'étude de  $\mathfrak{g}_2$  sera faite en relation avec celle de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7$  de  $SO_7$ .

D'après le Lemme 2.2.5, la forme quadratique associée à  $\omega_0$  par l'application  $\Phi$  est  $Q_0 = 6Q = 6I$ . Le groupe  $SO_7(Q_0)$  est :

$$SO_7(Q_0) = \{g \in SL_7 \mid {}^t g Q_0 g = Q_0\} = \{g \in SL_7 \mid {}^t g g = I\} = SO_7.$$

Son algèbre de Lie est :

$$\mathfrak{so}_7(Q_0) = \{X \in \text{End}_7 \mid {}^t X Q_0 + Q_0 X = 0\} = \{X \in \text{End}_7 \mid {}^t X + X = 0\} = \mathfrak{so}_7.$$

Il s'agit des matrices antisymétriques.

Via  $Q_0$  (et  $B_0$  la forme bilinéaire associée), les deux espaces vectoriels  $\Lambda^2 \mathcal{V}$  et  $\mathfrak{so}_7$  sont isomorphes ; c'est ce qui est explicité dans le lemme suivant.

**Lemme 1.3.1.** — *L'application suivante, définie par linéarité, est un isomorphisme<sup>(4)</sup> :*

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \mathcal{V} &\longrightarrow \mathfrak{so}_7 \\ a \wedge b &\longmapsto B_0(b, \cdot)a - B_0(a, \cdot)b. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Considérons l'élément  $e_i \wedge e_j$  ( $i < j$ ) de la base canonique de  $\Lambda^2 \mathcal{V}$ . Son image par l'application précédente est  $E_{i,j} - E_{j,i}$  (où  $E_{i,j}$  est un élément de la base canonique des matrices). Ainsi, l'image de l'application précédente est bien contenue dans  $\mathfrak{so}_7$  et est, de plus, surjective. Cette application est donc bien un isomorphisme puisque  $\dim(\Lambda^2 \mathcal{V}) = \binom{7}{2} = 21 = \dim(\mathfrak{so}_7)$ .  $\square$

Notons  $(\phi_1, \dots, \phi_7)$  la base canonique duale de  $\mathcal{V}^*$ .

**Définition 1.3.2.** — Notons  $L_{\omega_0}$  l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} L_{\omega_0} : \Lambda^2 \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}^* \\ a \wedge b &\longmapsto \omega_0(a, b, \cdot) = -\text{Re}[(ab)\cdot]. \end{aligned} \tag{6}$$

Soient  $e_i, e_j$  deux vecteurs distincts de  $\{e_1, \dots, e_7\}$ .

$$L_{\omega_0}(e_i \wedge e_j) = -\text{Re}[(e_i e_j)\cdot].$$

Or,  $\exists k \in \{1, \dots, 7\} / e_i e_j = e_k$  ou  $-e_k$ . Ainsi,

$$L_{\omega_0}(e_i \wedge e_j) = \begin{cases} \phi_k & \text{si } e_i e_j = e_k \\ -\phi_k & \text{si } e_i e_j = -e_k. \end{cases}$$

<sup>(4)</sup>Cette construction est standard et vraie en toute dimension.

D'où si  $A = \sum_{i < j} \lambda_{ij} e_i \wedge e_j$  :

$$\begin{aligned} L_{\omega_0}(A) &= (\lambda_{2,3} + \lambda_{4,7} + \lambda_{5,6}) \phi_1 \\ &+ (-\lambda_{1,3} + \lambda_{4,6} - \lambda_{5,7}) \phi_2 \\ &+ (\lambda_{1,2} + \lambda_{4,5} + \lambda_{6,7}) \phi_3 \\ &+ (-\lambda_{1,7} - \lambda_{2,6} - \lambda_{3,5}) \phi_4 \\ &+ (-\lambda_{1,6} + \lambda_{2,7} + \lambda_{3,4}) \phi_5 \\ &+ (\lambda_{1,5} + \lambda_{2,4} - \lambda_{3,7}) \phi_6 \\ &+ (\lambda_{1,4} - \lambda_{2,5} + \lambda_{3,6}) \phi_7, \end{aligned}$$

soit

$$L_{\omega_0}(A) = \sum_{k=1}^7 \Lambda_k(A) \phi_k$$

où  $\forall k \in \{1, \dots, 7\}$ ,  $\Lambda_k(A) = \sum_{a < b / e_a e_b = e_k} \lambda_{ij} - \sum_{a < b / e_a e_b = -e_k} \lambda_{ij}$ .

Considérons  $X = (x_{ij})$  un élément de  $\mathfrak{so}_7$ . D'après le Lemme 1.3.1,  $\mathfrak{so}_7$  et  $\Lambda^2 \mathcal{V}$  sont isomorphes. On a alors :

$$L_{\omega_0}(X) = \sum_{k=1}^7 \Lambda_k(X) \phi_k \quad \text{où} \quad \Lambda_k(X) = \sum_{a, b / e_a e_b = e_k} x_{ab} \quad (7)$$

Relions  $X \cdot \omega_0$  et  $L_{\omega_0}(X)$ .

**Lemme 1.3.3.** — Soient  $e_i, e_j, e_k$  trois vecteurs deux à deux distincts parmi  $\{e_1, \dots, e_7\}$ .

(1) si  $e_i, e_j, e_k$  sont reliés sur le diagramme de Fano, alors

$$X \cdot \omega_0(e_i, e_j, e_k) = 0,$$

(2) si  $e_i, e_j, e_k$  ne sont pas reliés sur le diagramme de Fano, notons  $e_m$  le seul vecteur de  $\{e_1, \dots, e_7\}$  non aligné à deux vecteurs de  $\{e_i, e_j, e_k\}$  sur le diagramme de Fano. Alors

$$X \cdot \omega_0(e_i, e_j, e_k) = \pm \Lambda_m(X).$$

*Démonstration.* — Montrons le point (1). Considérons une combinaison de trois vecteurs  $\{e_i, e_j, e_k\}$  constituée de trois vecteurs alignés sur le diagramme de Fano. On peut supposer que  $e_i e_j = e_k$ .

$$\begin{aligned} X \cdot \omega_0(e_i, e_j, e_k) &= \omega_0(X e_i, e_j, e_k) + \omega_0(e_i, X e_j, e_k) + \omega_0(e_i, e_j, X e_k), \\ &= -\operatorname{Re} [[(X e_i) e_j] e_k] - \operatorname{Re} [[e_i (X e_j)] e_k] - \operatorname{Re} [(e_i e_j) (X e_k)] \end{aligned}$$

Or,  $-\operatorname{Re} [[(X e_i) e_j] e_k]$  est égal à la  $k$ -ième coordonnée du produit  $(X e_i) e_j$ .

$$\begin{aligned} (X e_i) e_j &= (\sum_{n=1}^7 x_{ni} e_n) e_j = (x_{ii} e_i + \sum_{n \neq i} x_{ni} e_n) e_j, \\ &= x_{ii} e_k + v \quad \text{où} \quad \phi_k(v) = 0 \end{aligned}$$

car  $e_i e_j = e_k$ . D'où :

$$-\operatorname{Re} [(X e_i) e_j] e_k = x_{ii}.$$

Mais puisque  $X$  est antisymétrique,  $x_{ii} = 0$ . Il en va de même pour les deux autres termes de  $X \cdot \omega_0(e_i, e_j, e_k)$ . Ainsi,

$$X \cdot \omega_0(e_i, e_j, e_k) = 0.$$

Montrons le point (2). On considère désormais une combinaison  $\{e_i, e_j, e_k\}$  constituée de trois vecteurs non alignés sur le diagramme de Fano. Il existe un seul vecteur de  $\{e_1, \dots, e_7\}$  non obtenu comme produit de deux éléments de  $\{e_i, e_j, e_k\}$ . C'est le seul vecteur qui n'est pas relié à deux éléments de  $\{e_i, e_j, e_k\}$  sur le diagramme de Fano. Notons  $e_m$  ce vecteur. Or, le produit de deux vecteurs distincts de la base canonique de  $\mathcal{V}$  est égal, au signe près, à un autre vecteur de la base de  $\mathcal{V}$ . Traitons le cas suivant :

$$\begin{aligned} \exists \{p, q, r\} \subset \{1, \dots, 7\} \setminus \{i, j, k, m\} \quad \text{tel que} \quad & e_i e_j = e_p, \\ & e_i e_k = e_q, \\ & e_j e_k = e_r. \end{aligned}$$

Les vecteurs  $e_p, e_q, e_r$  sont distincts de  $\pm e_m$  par définition de  $e_m$ . On a alors  $e_i e_r \in \{\pm e_m\}$ . En effet,  $e_m \notin \{e_i e_j, e_i e_k, e_i e_p, e_i e_q, e_i e_m\}$  ou leurs opposés et puisque la multiplication à gauche par  $e_i$  sur l'ensemble  $\{e_j, e_k, e_p, e_q, e_r, e_m\}$  est, au signe près, une permutation des termes,  $e_m$  ou  $-e_m$  doit être égal à  $e_i e_r$ .

Si  $e_i e_r = e_m$ , alors  $e_p e_k = (e_i e_j) e_k = -(e_j e_k) e_i$  car  $e_i, e_j, e_k$  ne sont pas alignés (cf point (3) des règles de calculs dans les octaves de Cayley du paragraphe 1.1). D'où  $e_p e_k = e_r e_i = e_m$ . De même,  $e_j e_q = e_m$ . D'après (7),  $L_{\omega_0}(X) = \sum_{k=1}^7 \Lambda_k(X) \phi_k$  où  $\Lambda_m(X) = \sum_{a,b/e_a e_b = e_m} x_{ab}$ . Or, il n'existe que trois couples de vecteurs de la base canonique tels que leur produit soit  $e_m$ . Ce sont les couples  $(e_a, e_b)$  tels que  $e_a, e_b, e_m$  sont alignés et bien ordonnés sur le diagramme de Fano. Les calculs précédents ont exhibés ces trois couples puisque :

$$e_r e_i = e_p e_k = e_j e_q = e_m.$$

Donc

$$\Lambda_m(X) = x_{ir} + x_{kp} + x_{qj}.$$

Si  $e_r e_i = -e_m$ , on obtient  $\Lambda_m = x_{ri} + x_{pk} + x_{jq} = -(x_{ir} + x_{kp} + x_{qj})$ . Par ailleurs, calculons  $X \cdot \omega_0(e_i, e_j, e_k)$ . Le premier terme  $-\operatorname{Re} [(X e_i) e_j] e_k$  est égal à la  $k$ -ième coordonnée de  $(X e_i) e_j$ . Puisque  $e_r e_j = e_k$ , on a

$$\begin{aligned} (X e_i) e_j &= \left( \sum_{n=1}^7 x_{ni} e_n \right) e_j, \\ &= x_{ri} e_k + v \quad \text{où } \phi_k(v) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } -\operatorname{Re} [(X e_i) e_j] e_k = x_{ri}.$$

De même, on obtient  $-\operatorname{Re} [[e_i(Xe_j)]e_k] = x_{jq}$  et  $-\operatorname{Re} [(e_i e_j)(Xe_k)] = x_{pk}$ . D'où

$$\begin{aligned} X \cdot \omega_0(e_i, e_j e_k) &= -\operatorname{Re} [[(Xe_i)e_j]e_k] - \operatorname{Re} [[e_i(Xe_j)]e_k] - \operatorname{Re} [(e_i e_j)(Xe_k)], \\ &= x_{ri} + x_{pk} + x_{jq}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$X \cdot \omega_0(e_i, e_j e_k) = \pm \Lambda_m(X).$$

□

D'après l'équation (4) du Théorème 1.2.10,  $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{so}_7$  et par le Théorème 1.2.10,  $\mathfrak{g}_2 = \operatorname{Lie}(G_2) = \operatorname{Lie}(\operatorname{Stab}(\omega_0) \cap SL_7) = \operatorname{Lie}(\operatorname{Stab}(\omega_0)) = \{X \in \mathfrak{so}_7 \mid X \cdot \omega_0 = 0\}$  où  $X \cdot \omega_0(x, y, z) = \omega_0(Xx, y, z) + \omega_0(x, Xy, z) + \omega_0(x, y, Xz)$  pour  $x, y, z \in \mathcal{V}$ .

Montrons le résultat suivant :

**Théorème 1.3.4.** —

$$\ker(L_{\omega_0}) = \mathfrak{g}_2.$$

*Démonstration.* — Soit  $X \in \mathfrak{so}_7$ ,  $L_{\omega_0}(X) = \sum_{k=1}^7 \Lambda_k(X) \phi_k$ .

$$\begin{aligned} &X \in \ker(L_{\omega_0}) \\ \Leftrightarrow &\Lambda_1(X) = \dots = \Lambda_7(X) = 0, \\ \Leftrightarrow &\forall \{e_i, e_j, e_k\} \subset \{e_1, \dots, e_7\}, X \cdot \omega_0(e_i, e_j, e_k) = 0 \quad \text{d'après le Lemme 1.3.3,} \\ \Leftrightarrow &X \cdot \omega_0 = 0, \\ \Leftrightarrow &X \in \mathfrak{g}_2. \end{aligned}$$

□

Ainsi, nous avons deux descriptions de l'algèbre de Lie de  $G_2$ . Premièrement, comme  $G_2 = \operatorname{Aut}(\mathbb{O})$ ,

$$G_2 = \{g \in GL_8 \mid \forall x, y \in \mathbb{O}, g(xy) = g(x)g(y)\}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 = \operatorname{Lie}(G_2) &= \{X \in \operatorname{End}_8 \mid \forall x, y \in \mathbb{O}, X(xy) = xX(y) + X(x)y\}, \\ \mathfrak{g}_2 &= \operatorname{Der}(\mathbb{O}), \end{aligned}$$

où  $\operatorname{Der}(\mathbb{O})$  est l'algèbre de Lie des dérivations<sup>(5)</sup> de  $\mathbb{O}$ .

Par ailleurs,

$$\mathfrak{g}_2 = \{X \in \operatorname{End}_7 \mid X \cdot \omega_0 = 0\}.$$

<sup>(5)</sup>En effet, si  $X \in \operatorname{End}_8$  vérifie  $(\exp tX)(xy) = ((\exp tD)x)((\exp tX)y), \forall t \in \mathbb{R}$ , alors, en différenciant par rapport à  $t$  et en faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient  $X(xy) = (Xx)y + x(Xy)$ . Inversement, si  $X \in \operatorname{End}_8$  vérifie  $X(xy) = (Xx)y + x(Xy)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{O}$ , alors il n'est pas difficile de vérifier que  $\alpha = \exp(tX)$  satisfait  $\alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{O}$  (voir [Yok09]).

Ainsi,

$$\mathfrak{g}_2 = \text{Der}(\mathbb{O}) = \{X \in \text{End}_7 \mid X \cdot \omega_0 = 0\}.$$

Notons  $(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 7}$  la base de  $\mathfrak{so}_7$  où  $A_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$ . D'après le Théorème 1.3.4, on peut maintenant donner un exemple d'une base explicite de  $\mathfrak{g}_2$  :  $((BX)_i)_{i \in \{1, \dots, 14\}}$  avec :

$$\begin{array}{ll} (BX)_1 = A_{1,2} - A_{6,7}, & \text{et} \quad (BX)_8 = A_{2,5} + A_{3,6}, \\ (BX)_2 = A_{1,3} - A_{5,7}, & (BX)_9 = A_{2,6} - A_{1,7}, \\ (BX)_3 = A_{1,4} - A_{3,6}, & (BX)_{10} = A_{3,4} - A_{2,7}, \\ (BX)_4 = A_{1,5} + A_{3,7}, & (BX)_{11} = A_{3,5} - A_{1,7}, \\ (BX)_5 = A_{1,6} + A_{2,7}, & (BX)_{12} = A_{4,5} - A_{6,7}, \\ (BX)_6 = A_{2,3} - A_{4,7}, & (BX)_{13} = A_{4,6} + A_{5,7}, \\ (BX)_7 = A_{2,4} + A_{3,7}, & (BX)_{14} = A_{5,6} - A_{4,7}. \end{array}$$

**1.3.2. Description du système des racines de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7$  du groupe  $SO_7$  et de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  du groupe  $G_2$ .** — Lors de la démonstration du Théorème 1.2.10 (équation (4)), nous avons établi que  $G_2 \subset SO_7$  et donc qu'il en est de même de leurs algèbres de Lie.

Nous allons faire l'étude des algèbres de Lie  $\mathfrak{so}_7$  et  $\mathfrak{g}_2$  conjointement. Après avoir étudié une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7}$  de  $\mathfrak{so}_7$ , nous rechercherons une algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7}$  de  $\mathfrak{g}_2$ . Puis, nous établirons les racines de  $\mathfrak{so}_7$  (et des vecteurs propres associés) en choisissant un ordre sur ces racines à l'aide d'un élément de  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$ . Ce choix aura l'intérêt suivant : la restriction d'une racine positive (resp. simple) de  $\mathfrak{so}_7$  à  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  sera une racine positive (resp. simple) de  $\mathfrak{g}_2$ . L'étude des sous-groupes paraboliques maximaux qui suit s'en trouvera facilitée.

Soit  $\tilde{Q}$  la matrice suivante :

$$\tilde{Q} = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & I_3 & 0 \\ \hline I_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{ où } I_3 \text{ désigne la matrice identité d'ordre 3.}$$

L'algèbre de Lie de  $SO_7(\tilde{Q})$  est

$$\mathfrak{so}_7(\tilde{Q}) = \{Y \in \text{End}_7 \mid {}^t Y \tilde{Q} + \tilde{Q} Y = 0\}$$

et celle de  $SO_7$  est

$$\mathfrak{so}_7 = \{X \in \text{End}_7 \mid {}^t X + X = 0\}.$$

Ces deux algèbres sont conjuguées :

$$Y \in \mathfrak{so}_7(\tilde{Q}) \Leftrightarrow X := P_{0,1} Y P_{0,1}^{-1} \in \mathfrak{so}_7$$

$$\text{où } P_{0,1} := \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -i & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array} \right) \text{ vérifiant } {}^t P_{0,1} P_{0,1} = \tilde{Q}. \text{ Notons } y_i$$

le vecteur ayant pour coordonnées la  $i$ -ème colonne de la matrice inversible  $P_{0,1}$ . La famille  $(y_1, \dots, y_7)$  est alors une base de  $\mathcal{V}$ . Appelons  $\mathfrak{B}_0$  et  $\mathfrak{B}_1$  les deux bases de  $\mathcal{V}$  suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0 &:= (e_1, \dots, e_7) \\ \mathfrak{B}_1 &:= (y_1, \dots, y_7). \end{aligned}$$

La matrice  $P_{0,1}$  est la matrice de changement de base de la base  $\mathfrak{B}_0$  à la base  $\mathfrak{B}_1$ . Si un endomorphisme s'exprime dans la base de  $\mathfrak{B}_0$  par la matrice  $X$  appartenant à  $\mathfrak{so}_7$ , alors il s'exprime par la matrice  $Y$  dans la base  $\mathfrak{B}_1$  avec  $Y = P_{0,1}^{-1} X P_{0,1}$  appartenant à  $\mathfrak{so}_7(\tilde{Q})$ .

La base  $\mathfrak{B}_1$  est telle que la forme quadratique canonique s'y exprime via la matrice  $\tilde{Q}$ . Ainsi,  $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle$  et  $\langle y_4, y_5, y_6 \rangle$  sont deux sous-espaces vectoriels isotropes et le vecteur  $y_7$  est unitaire et orthogonal à chacun des autres vecteurs  $y_i$ . Le choix de la base  $\mathfrak{B}_1$  a été fait dans le but d'obtenir la matrice  $\tilde{Q}$  dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7(\tilde{Q})$  est plus simple à traiter que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7$ .

L'étude de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7(\tilde{Q})$  est détaillée dans les chapitres 18 et 19 de [FH91]. Il en ressort que  $\mathfrak{so}_7(\tilde{Q})$  possède neuf racines positives dont trois simples et que la dimension de ses sous-algèbres de Cartan est trois.

Suivant les notations de [FH91], posons

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7(\tilde{Q})} := \langle H_1, H_2, H_3 \rangle \quad \text{où } H_i = E_{i,i} - E_{3+i,3+i}$$

avec  $E_{i,j}$  désignant la matrice (de taille  $7 \times 7$  ici) avec des coefficients nuls partout, sauf à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ , où le coefficient vaut 1. C'est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{so}_7(\tilde{Q})$ . Notons

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \quad N_k := P_{0,1} H_k P_{0,1}^{-1}.$$

Les trois éléments  $N_1 = iA_{2,5}$ ,  $N_2 = iA_{1,4}$  et  $N_3 = iA_{3,6}$  appartiennent à  $\mathfrak{so}_7$  et engendrent une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{so}_7$ , notée  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7}$ . Étudions l'intersection  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2$ . D'après le Théorème 1.3.4,

$$\begin{aligned} &x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2 \\ \Leftrightarrow &x_1 A_{2,5} + x_2 A_{1,4} + x_3 A_{3,6} \in \mathfrak{g}_2 \\ \Leftrightarrow &-x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} A &:= N_1 + N_2 = i(A_{1,4} + A_{2,5}) = i(BX_3 + BX_8), \\ \text{et } B &:= N_1 + N_3 = i(A_{2,5} + A_{3,6}) = iBX_8. \end{aligned}$$

Alors,  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2 = \langle A, B \rangle$ . Examinons  $\{X \in \mathfrak{g}_2 \mid \forall H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2, \text{ad}(H)(X) = [H, X] = HX - XH = 0\}$ . Cet ensemble est égal à l'intersection des noyaux de  $\text{ad}(A)$  et de  $\text{ad}(B)$ . Or,

$$\begin{aligned} \ker(\text{ad}(A)) &= \langle BX_3, BX_8, BX_1 + BX_1 + BX_{12} \rangle, \\ \ker(\text{ad}(B)) &= \langle BX_3, BX_8, BX_6 + BX_{14}, BX_9 + BX_{11} \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\ker(\text{ad}(A)) \cap \ker(\text{ad}(B)) = \langle BX_3, BX_8 \rangle = \langle A, B \rangle = \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2$ . Donc

$$\{X \in \mathfrak{g}_2 \mid \forall H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2, \text{ad}(H)(X) = 0\} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2.$$

Ceci montre que  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_2$ , qui sera notée  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  par la suite. Toutes les sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}_2$  sont donc de dimension deux.

**Remarque 1.3.5.** — L'intersection de  $\mathfrak{g}_2$  avec une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{so}_7$  n'est pas forcément une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_2$ . Il faut que cette intersection soit de dimension égale à 2 pour obtenir ce résultat.

Maintenant que nous avons identifié l'algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  de  $\mathfrak{g}_2$  avec laquelle nous allons travailler, nous allons décrire l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7$ . Cette algèbre possède 18 racines au total, 9 positives et leurs opposés. Parmi les racines positives, il y en a 3 simples. Nous allons ordonner les racines de  $\mathfrak{so}_7$  en racines positives et en racines négatives à l'aide de l'élément

$$N_0 := 2A + B = 3N_1 + 2N_2 + N_3 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7}.$$

Une racine  $\beta$  de  $\mathfrak{so}_7$  sera dite positive (resp. négative) si  $\beta(N_0) > 0$  (resp.  $\beta(N_0) < 0$ ).

Les vecteurs propres de  $\mathfrak{so}_7$  que nous étudierons sont les 18 vecteurs suivants :  $X := P_{01}YP_{01}^{-1}$  où  $Y$  est l'un des vecteurs suivants :  $X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}, U_{i,j}$  et  $V_i$  avec

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= E_{i,j} - E_{3+j,3+i} & \forall i \neq j \in \{1, 2, 3\}, \\ Y_{i,j} &= E_{i,3+j} - E_{j,3+i}, & Z_{i,j} &= E_{3+i,j} - E_{3+j,i} \quad \forall i < j \in \{1, 2, 3\}, \\ U_i &= E_{i,7} - E_{7,3+i}, & V_i &= E_{3+i,7} - E_{7,i} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

conformément aux notations du Chapitre 18 de [FH91]. On les notera  $XX_{i,j} := P_{01}X_{i,j}P_{01}^{-1}, YY_{i,j} := P_{01}Y_{i,j}P_{01}^{-1}, ZZ_{i,j} := P_{01}Z_{i,j}P_{01}^{-1}, UU_i := P_{01}U_iP_{01}^{-1}$  et  $VV_i := P_{01}V_iP_{01}^{-1}$ .

L'évaluation en  $N_0$  donne la classification suivante :  $XX_{1,2}, XX_{2,3}, UU_3, UU_2, XX_{1,3}, YY_{2,3}, UU_1, YY_{1,3}, YY_{1,2}$  sont associés à des racines positives,  $XX_{2,1},$

$XX_{3,2}$ ,  $VV_3$ ,  $VV_2$ ,  $XX_{3,1}$ ,  $ZZ_{2,3}$ ,  $VV_1$ ,  $ZZ_{1,3}$ ,  $ZZ_{1,2}$  sont associés à des racines négatives. Afin de simplifier les notations, nous écrirons respectivement  $Y_1, \dots, Y_9$  les précédents vecteurs propres associés à une racine positive et  $Y_{-1}, \dots, Y_{-9}$  ceux associés à une racine négative (suivant l'ordre où ils ont été écrits ci-dessus).

En notant

$$C := N_1,$$

les vecteurs  $A, B$  et  $C$  forment une base de l'algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7}$ . Pour tout  $j$  appartenant à  $\{\pm 1, \dots, \pm 9\}$ , on associe au vecteur propre  $Y_j$  associé à une racine  $\beta_j$  de  $\mathfrak{so}_7$  le triplet  $(\beta_j(A), \beta_j(B), \beta_j(C))$ . Ainsi,

$$\begin{array}{llll} (\beta_1, Y_1 = XX_{1,2}) & \rightarrow & (0, 1, 1), & (\beta_{-1}, Y_{-1} = XX_{2,1}) & \rightarrow & (0, -1, -1), \\ (\beta_2, Y_2 = XX_{2,3}) & \rightarrow & (1, -1, 0), & (\beta_{-2}, Y_{-2} = XX_{3,2}) & \rightarrow & (-1, 1, 0), \\ (\beta_3, Y_3 = UU_3) & \rightarrow & (0, 1, 0), & (\beta_{-3}, Y_{-3} = VV_3) & \rightarrow & (0, -1, 0), \\ (\beta_4, Y_4 = UU_2) & \rightarrow & (1, 0, 0), & (\beta_{-4}, Y_{-4} = VV_2) & \rightarrow & (-1, 0, 0), \\ (\beta_5, Y_5 = XX_{1,3}) & \rightarrow & (1, 0, 1), & (\beta_{-5}, Y_{-5} = XX_{3,1}) & \rightarrow & (-1, 0, -1), \\ (\beta_6, Y_6 = YY_{2,3}) & \rightarrow & (1, 1, 0), & (\beta_{-6}, Y_{-6} = ZZ_{2,3}) & \rightarrow & (-1, -1, 0), \\ (\beta_7, Y_7 = UU_1) & \rightarrow & (1, 1, 1), & (\beta_{-7}, Y_{-7} = VV_1) & \rightarrow & (-1, -1, -1), \\ (\beta_8, Y_8 = YY_{1,3}) & \rightarrow & (1, 2, 1), & (\beta_{-8}, Y_{-8} = ZZ_{1,3}) & \rightarrow & (-1, -2, -1), \\ (\beta_9, Y_9 = YY_{1,2}) & \rightarrow & (2, 1, 0), & (\beta_{-9}, Y_{-9} = ZZ_{1,2}) & \rightarrow & (-2, -1, 0). \end{array} \tag{8}$$

On remarque les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \beta_2 + \beta_3, \\ \beta_5 &= \beta_1 + \beta_2, \\ \beta_6 &= \beta_2 + 2\beta_3, \\ \beta_7 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ \beta_8 &= \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3, \\ \beta_9 &= \beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3. \end{aligned}$$

Donc, chacune des racines positives s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients positifs de  $\beta_1, \beta_2$  et  $\beta_3$ . Ces dernières sont donc les trois racines simples de  $\mathfrak{so}_7$  (pour l'ordre qui a été choisi sur les racines). En notant  $R^+ := \{\beta_1, \dots, \beta_9\}$  l'ensemble des racines positives et  $(\mathfrak{so}_7)_\beta$  le sous-espace propre de  $\mathfrak{so}_7$  de dimension 1 associé à une racine  $\beta$ , on a, pour tout  $j \in \{1, \dots, 9\}$ ,  $(\mathfrak{so}_7)_{\beta_j} = \mathbb{C}Y_j$ ,  $(\mathfrak{so}_7)_{\beta_{-j}} = \mathbb{C}Y_{-j}$  et

$$\mathfrak{so}_7 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \oplus \left( \bigoplus_{\beta \in R^+} (\mathfrak{so}_7)_\beta \right) \oplus \left( \bigoplus_{\beta \in R^+} (\mathfrak{so}_7)_{-\beta} \right).$$

Pour étudier maintenant l'algèbre  $\mathfrak{g}_2$ , sous-algèbre de  $\mathfrak{so}_7$ , nous allons étudier la restriction  $\overline{\beta}$  de chaque racine positive  $\beta$  de  $\mathfrak{so}_7$  à  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} = \langle A, B \rangle$ . On a

$$\begin{aligned}\alpha_1 &:= \overline{\beta_1} = \overline{\beta_3} = (0, 1) \quad (\text{expression dans la base duale de } (A, B)), \\ \alpha_2 &:= \overline{\beta_2} = (1, -1), \\ \alpha_3 &:= \overline{\beta_4} = \overline{\beta_5} = (1, 0), \\ \alpha_4 &:= \overline{\beta_6} = \overline{\beta_7} = (1, 1), \\ \alpha_5 &:= \overline{\beta_8} = (1, 2), \\ \alpha_6 &:= \overline{\beta_9} = (2, 1).\end{aligned}$$

Ces six éléments sont des racines de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$ . Comme la dimension de  $\mathfrak{g}_2$  est 14 et que celle de  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  est 2, le système de racines de  $\mathfrak{g}_2$  possède 6 racines positives et 6 racines négatives. En utilisant toujours le même élément  $N_0 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  pour ordonner les racines de  $\mathfrak{g}_2$ , il ressort que  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  sont les six racines positives de  $\mathfrak{g}_2$ ; leurs opposés sont les racines négatives de  $\mathfrak{g}_2$ .

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ \alpha_4 &= 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ \alpha_5 &= 3\alpha_1 + \alpha_2, \\ \alpha_6 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2.\end{aligned}$$

Donc, comme les racines  $\alpha_3, \dots, \alpha_6$  s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients positifs des racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et que, par ailleurs, ces deux dernières racines ne peuvent s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients positifs des autres racines positives, les racines simples de  $\mathfrak{g}_2$  sont  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Le système de racines de  $\mathfrak{g}_2$  est représenté sur la Figure 4.1.1.1 au chapitre 4.

Les relations exprimées dans les équations ci-dessus peuvent être synthétisées dans le tableau suivant : sur la première ligne, apparaissent les racines positives de  $\mathfrak{g}_2$  et sur la seconde, les racines positives de  $\mathfrak{so}_7$ ; on inscrit une racine  $\beta$  de  $\mathfrak{so}_7$  dans la case en-dessous de la racine  $\alpha$  de  $\mathfrak{g}_2$  si  $\beta|_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}} = \overline{\beta} = \alpha$ .

|  |                    |            |                    |                    |            |            |
|--|--------------------|------------|--------------------|--------------------|------------|------------|
| Racines positives de $\mathfrak{g}_2$  | $\alpha_1$         | $\alpha_2$ | $\alpha_3$         | $\alpha_4$         | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
| Racines positives de $\mathfrak{so}_7$ | $\beta_1, \beta_3$ | $\beta_2$  | $\beta_4, \beta_5$ | $\beta_6, \beta_7$ | $\beta_8$  | $\beta_9$  |

De la sorte, chaque racine positive de  $\mathfrak{so}_7$  a pour restriction à  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  une racine positive de  $\mathfrak{g}_2$  et chaque racine simple  $\beta_1, \beta_2$  et  $\beta_3$  de  $\mathfrak{so}_7$  a pour restriction à  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  une racine simple  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $\mathfrak{g}_2$ .

**Remarque 1.3.6.** — Cette correspondance entre les racines positives des deux algèbres de Lie (et celle entre leurs racines simples) n'est ni constamment établie ni fortuite : elle vient du choix de l'élément  $N_0$  appartenant à  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2$ .

Pour trouver explicitement des vecteurs propres associés aux racines de  $\mathfrak{g}_2$ , on procède de la manière suivante : pour tout  $i \in \{\pm 1, \dots, \pm 6\}$ , on cherche un vecteur  $X_i$  appartenant à  $\mathfrak{g}_2$  sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de  $\mathfrak{so}_7$  associés aux valeurs propres  $\beta$  telles que la restriction de  $\beta$  à  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2}$  soit égale à  $\alpha_i$ . Chaque vecteur  $X_i$  ainsi obtenu sera un vecteur propre de  $\mathfrak{g}_2$  associé à la racine  $\alpha_i$ . Définissons ainsi les vecteurs suivants satisfaisant les conditions précédentes :

$$\begin{aligned}
 X_1 &:= Y_1 + i\sqrt{2}Y_3, & \text{et} & & X_{-1} &:= Y_{-1} + i\sqrt{2}Y_{-3}, \\
 X_2 &:= Y_2, & & & X_{-2} &:= Y_{-2}, \\
 X_3 &:= Y_5 - i\sqrt{2}Y_4, & & & X_{-3} &:= Y_{-5} - i\sqrt{2}Y_{-4}, \\
 X_4 &:= Y_6 - i\sqrt{2}Y_7, & & & X_{-4} &:= Y_{-6} + i\sqrt{2}Y_{-7}, \\
 X_5 &:= Y_8, & & & X_{-5} &:= Y_{-8}, \\
 X_6 &:= Y_9, & & & X_{-6} &:= Y_{-9}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

En notant  $\Delta^+ := \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$  l'ensemble des racines positives de  $\mathfrak{g}_2$  et  $(\mathfrak{g}_2)_\alpha$  le sous-espace propre de  $\mathfrak{g}_2$  de dimension 1 associé à la racine  $\alpha$ , on a, pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $(\mathfrak{g}_2)_{\alpha_i} = \mathbb{C}X_i$ ,  $(\mathfrak{g}_2)_{\alpha_{-i}} = \mathbb{C}X_{-i}$  et donc

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} (\mathfrak{g}_2)_\alpha \right) \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} (\mathfrak{g}_2)_{-\alpha} \right) \tag{10}$$

avec  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} = \langle A, B \rangle$ .

#### 1.4. Description des sous-groupes paraboliques maximaux de $SO_7$ et $G_2$

**1.4.1.** Nous sommes maintenant en mesure d'explicitement les sous-groupes paraboliques maximaux de  $SO_7$  et de  $G_2$  ainsi que leurs sous-algèbres paraboliques maximales associées. Commençons par expliciter les sous-algèbres paraboliques maximales de  $\mathfrak{so}_7$ . Notons  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{so}_7} := \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \oplus \bigoplus_{\beta \in R^+} (\mathfrak{so}_7)_\beta$  la sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{so}_7$  associée au système de racines que nous venons d'établir. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7$  possède 3 sous-algèbres paraboliques maximales. Chaque sous-algèbre parabolique maximale  $\tilde{\mathfrak{p}}$  correspond à une racine simple  $\beta$  et est définie par :

$$\tilde{\mathfrak{p}}_j := \mathfrak{b}_{\mathfrak{so}_7} \oplus \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{so}_7)_{-\gamma}$$

où  $\Gamma$  est l'ensemble des racines positivement engendrées par les racines simples de  $\mathfrak{so}_7$  différentes de  $\beta$ . Notons  $\tilde{\mathfrak{p}}_i$  la sous-algèbre parabolique maximale de  $\mathfrak{so}_7$  correspondant à la racine simple  $\beta_i$ . Les racines positives de  $\mathfrak{so}_7$  qui ne font pas intervenir  $\beta_1$  sont  $\{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6\}$ , celles qui ne font pas intervenir  $\beta_2$  sont  $\{\beta_1, \beta_3\}$

et, enfin, celles qui ne font pas intervenir  $\beta_3$  sont  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_5\}$ . On a donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{p}}_1 &= \mathfrak{b}_{\mathfrak{so}_7} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_2} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_3} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_4} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_6}, \\ \tilde{\mathfrak{p}}_2 &= \mathfrak{b}_{\mathfrak{so}_7} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_1} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_3}, \\ \tilde{\mathfrak{p}}_3 &= \mathfrak{b}_{\mathfrak{so}_7} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_1} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_2} \oplus (\mathfrak{so}_7)_{-\beta_5}.\end{aligned}$$

Ainsi, la dimension de  $\tilde{\mathfrak{p}}_1$  est  $12 + 4 = 16$ , celle de  $\tilde{\mathfrak{p}}_2$  est  $12 + 2 = 14$  et celle de  $\tilde{\mathfrak{p}}_3$  est  $12 + 3 = 15$  et

$$Y \in \tilde{\mathfrak{p}}_1 \Leftrightarrow Y \in \mathfrak{so}_7$$

$$\text{et } P_{0,1}^{-1}YP_{0,1} \text{ est de la forme } \left( \begin{array}{c|cccccc} * & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & * & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array} \right),$$

$$Y \in \tilde{\mathfrak{p}}_2 \Leftrightarrow Y \in \mathfrak{so}_7$$

$$\text{et } P_{0,1}^{-1}YP_{0,1} \text{ est de la forme } \left( \begin{array}{cc|cccc} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & * & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{array} \right),$$

$$Y \in \tilde{\mathfrak{p}}_3 \Leftrightarrow Y \in \mathfrak{so}_7$$

$$\text{et } P_{0,1}^{-1}YP_{0,1} \text{ est de la forme } \left( \begin{array}{ccc|cccc} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \end{array} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{p}}_1 &= \mathfrak{so}_7 \cap \text{Stab}(\langle y_1 \rangle), \\ \tilde{\mathfrak{p}}_2 &= \mathfrak{so}_7 \cap \text{Stab}(\langle y_1, y_2 \rangle), \\ \tilde{\mathfrak{p}}_3 &= \mathfrak{so}_7 \cap \text{Stab}(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle)\end{aligned}$$

où les vecteurs  $y_1, y_2$  et  $y_3$  sont les trois premiers vecteurs de la base  $\mathfrak{B}_1$  définie au début du paragraphe précédent.

Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , notons  $\widetilde{P}_i$  le sous-groupe parabolique maximal de  $SO_7$  d'algèbre de Lie  $\widetilde{\mathfrak{p}}_i$ .

De même, on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_1 &= SO_7 \cap \text{Stab}(\langle y_1 \rangle), \\ \widetilde{P}_2 &= SO_7 \cap \text{Stab}(\langle y_1, y_2 \rangle), \\ \widetilde{P}_3 &= SO_7 \cap \text{Stab}(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle).\end{aligned}$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  possède, elle, deux sous-algèbres paraboliques maximales :  $\mathfrak{p}_1$  correspondant à  $\alpha_1$  et  $\mathfrak{p}_2$  correspondant à  $\alpha_2$ . Posons  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{g}_2} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} (\mathfrak{g}_2)_\alpha$  la sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}_2$  associée au système de racines de  $\mathfrak{g}_2$  établi au paragraphe précédent.

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{b}_{\mathfrak{g}_2} \oplus (\mathfrak{g}_2)_{-\alpha_2}, \quad (11)$$

$$\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{b}_{\mathfrak{g}_2} \oplus (\mathfrak{g}_2)_{-\alpha_1}. \quad (12)$$

Ces deux sous-algèbres paraboliques maximales sont de dimension 9.

Recherchons les intersections des sous-algèbres paraboliques maximales  $\widetilde{\mathfrak{p}}_i$  de  $\mathfrak{so}_7$  avec  $\mathfrak{g}_2$ . Notons  $P_1$  et  $P_2$  les deux sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_1$ , respectivement  $\mathfrak{p}_2$ . D'après le choix des algèbres de Cartan  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7}$  et  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2$  et la correspondance entre racines positives de  $\mathfrak{so}_7$  et de  $\mathfrak{g}_2$ , nous avons  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{g}_2} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{so}_7} \cap \mathfrak{g}_2$ .

$$\begin{aligned}X_{-2} &\in \widetilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \widetilde{\mathfrak{p}}_3, \\ X_{-1} &\in \widetilde{\mathfrak{p}}_2.\end{aligned}$$

La sous-algèbre  $\mathfrak{p}_1$  étant égale à  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{g}_2} \oplus (\mathfrak{g}_2)_{-\alpha_2}$ , nous avons  $\mathfrak{p}_1 \subset (\widetilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \widetilde{\mathfrak{p}}_3 \cap \mathfrak{g}_2)$  et la sous-algèbre  $\mathfrak{p}_2$  étant égale à  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{g}_2} \oplus (\mathfrak{g}_2)_{-\alpha_1}$ , nous avons  $\mathfrak{p}_2 \subset \widetilde{\mathfrak{p}}_2 \cap \mathfrak{g}_2$ . Ces dernières inclusions s'avèrent être des égalités puisque si

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \sum_{i=1}^6 p_i X_i + \sum_{j=1}^6 q_j X_{-j} \in \mathfrak{g}_2,$$

alors

$$\begin{aligned}X &= \lambda_1 A + \lambda_2 B + p_1(Y_1 + i\sqrt{2}Y_3) + q_1(Y_{-1} + i\sqrt{2}Y_{-3}) \\ &\quad + p_2 Y_2 + q_2 Y_{-2} \\ &\quad + p_3(Y_5 - i\sqrt{2}Y_4) + q_3(Y_{-5} - i\sqrt{2}Y_{-4}) \\ &\quad + p_4(Y_6 - i\sqrt{2}Y_7) + q_4(Y_{-6} + i\sqrt{2}Y_{-7}) \\ &\quad + p_5 Y_8 + q_5 Y_{-8} \\ &\quad + p_6 Y_9 + q_6 Y_{-9}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_1 &\Rightarrow q_1 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0, \\ X \in \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_3 &\Rightarrow q_1 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0, \\ X \in \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_2 &\Rightarrow q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_1 &\Rightarrow X \in \mathfrak{p}_1, \\ X \in \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_3 &\Rightarrow X \in \mathfrak{p}_1, \\ X \in \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_2 &\Rightarrow X \in \mathfrak{p}_2. \end{aligned}$$

En résumé,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_1 &= \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_3 = \mathfrak{p}_1, \\ \mathfrak{g}_2 \cap \tilde{\mathfrak{p}}_2 &= \mathfrak{p}_2. \end{aligned}$$

Au niveau des sous-groupes paraboliques correspondants, nous avons :

$$\begin{aligned} P_1 &= G_2 \cap \text{Stab}(\langle y_1 \rangle) = G_2 \cap \text{Stab}(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle), \\ P_2 &= G_2 \cap \text{Stab}(\langle y_1, y_2 \rangle). \end{aligned}$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont les deux sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_1$ , respectivement  $\mathfrak{p}_2$ .

**1.4.2. Sous-groupe de Levi des sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$ .** — Nous allons aborder à présent la description des sous-groupes de Levi des sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$ . Suite à l'identification des deux sous-algèbres  $\mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_2$ , réalisée précédemment, nous allons décrire deux plongements

$$GL_2 \cong L_i \hookrightarrow G_2 \quad \text{pour } i \in \{1, 2\},$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les deux sous-groupes de Levi de  $G_2$ .

*1.4.2.1. Sous-groupe de Levi  $L_1$  du sous-groupe parabolique maximal  $P_1$  de  $G_2$ .*

— Considérons la base  $\mathfrak{B}_2$  de  $\mathcal{V}$  qui suit :

$$\mathfrak{B}_2 := (y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_1, y_7). \quad (13)$$

Notons

$$W := \langle y_2, y_3, y_4 \rangle. \quad (14)$$

Ce sous-espace  $W$  est un sous-espace isotrope de dimension 3 de  $\mathcal{V}$ . Notons  $P_{0,2}$  la matrice de passage de la base  $\mathfrak{B}_0$  à la base  $\mathfrak{B}_2$ .

Utilisons la forme quadratique non-dégénérée  $Q$  pour mettre en évidence un isomorphisme entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^*$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\cong \mathcal{V}^* \\ x &\mapsto x_* = B(x, \cdot) = -\text{Re}(x \cdot). \end{aligned} \quad (15)$$

Comme

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(y_5y_2) &= 1 & \text{et} & -\operatorname{Re}(y_5y_3) = -\operatorname{Re}(y_5y_4) = 0, \\ -\operatorname{Re}(y_6y_3) &= 1 & \text{et} & -\operatorname{Re}(y_6y_2) = -\operatorname{Re}(y_6y_4) = 0, \\ -\operatorname{Re}(y_1y_2) &= -\operatorname{Re}(y_1y_3) = 0, \end{aligned}$$

le triplet  $(y_{5*}, y_{6*}, y_{1*})$  peut être considéré comme la base duale de  $(y_2, y_3, y_4)$ . On notera

$$W^* = \langle y_5, y_6, y_1 \rangle.$$

Par ailleurs,  $\forall i \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $-\operatorname{Re}(y_7y_i) = 0$ . Une décomposition de  $\mathcal{V}$  suivant la base  $\mathfrak{B}_2$  est donc la suivante :

$$\mathcal{V} = W \oplus W^* \oplus \mathbb{C}y_7. \quad (16)$$

Nous allons, à présent, établir l'inclusion  $SL_3 \hookrightarrow G_2$  en vue de montrer par la suite l'inclusion recherchée au niveau du sous-groupe de Levi.

Pour cela, nous allons étudier la table de multiplication de deux éléments de  $\mathcal{V}$  (selon la décomposition précédente) puisque nous allons devoir vérifier si les matrices que nous allons construire sont bien des éléments de  $G_2$ , soit des automorphismes de  $\mathbb{O}$ .

La table de multiplication dans  $\mathcal{V}$ , exprimée à l'aide des vecteurs de la base  $\mathfrak{B}_2$ , est la suivante :

| ↗     | $y_2$          | $y_3$          | $y_4$          | $y_5$          | $y_6$          | $y_1$          | $y_7$   |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| $y_2$ | 0              | $-\sqrt{2}y_1$ | $\sqrt{2}y_6$  | $-1 + iy_7$    | 0              | 0              | $-iy_2$ |
| $y_3$ | $\sqrt{2}y_1$  | 0              | $-\sqrt{2}y_5$ | 0              | $-1 + iy_7$    | 0              | $-iy_3$ |
| $y_4$ | $-\sqrt{2}y_6$ | $\sqrt{2}y_5$  | 0              | 0              | 0              | $-1 + iy_7$    | $-iy_4$ |
| $y_5$ | $-1 - iy_7$    | 0              | 0              | 0              | $-\sqrt{2}y_4$ | $\sqrt{2}y_3$  | $iy_5$  |
| $y_6$ | 0              | $-1 - iy_7$    | 0              | $\sqrt{2}y_4$  | 0              | $-\sqrt{2}y_2$ | $iy_6$  |
| $y_1$ | 0              | 0              | $-1 - iy_7$    | $-\sqrt{2}y_3$ | $\sqrt{2}y_2$  | 0              | $iy_1$  |
| $y_7$ | $iy_2$         | $iy_3$         | $iy_4$         | $-iy_5$        | $-iy_6$        | $-iy_1$        | -1      |

(17)

**Remarque 1.4.1.** — La table du produit scalaire dans la base  $\mathfrak{B}_2$  est la suivante :

| $\langle x, y \rangle$ | $W$   | $W^*$ | $\mathbb{C}y_7$ |
|------------------------|-------|-------|-----------------|
| $W$                    | 0     | $I_3$ | 0               |
| $W^*$                  | $I_3$ | 0     | 0               |
| $\mathbb{C}y_7$        | 0     | 0     | 1               |

(18)

|                        |       |       |                 |
|------------------------|-------|-------|-----------------|
| $\langle x, y \rangle$ | $W$   | $W^*$ | $\mathbb{C}y_7$ |
| $W$                    | 0     | $I_3$ | 0               |
| $W^*$                  | $I_3$ | 0     | 0               |
| $\mathbb{C}y_7$        | 0     | 0     | 1               |

Ainsi, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{V}$  sous la forme  $x = u + u_* + \lambda y_7$  et  $y = v + v_* + \mu y_7$  avec  $u, v \in W$ ,  $u^*, v^* \in W^*$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle u_*, v \rangle + \langle v_*, u \rangle + \lambda\mu, \\ \text{et } \langle x, x \rangle &= 2 \langle u_*, u \rangle + \lambda^2. \end{aligned}$$

Soient  $x = u + u_* + \lambda y_7$  et  $y = v + v_* + \mu y_7$  deux éléments de  $\mathcal{V}$  décomposés selon l'écriture précédente :  $u, v \in W$ ,  $u^*, v^* \in W^*$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Leur produit s'écrit alors de la manière suivante :

|               |                     |                     |               |
|---------------|---------------------|---------------------|---------------|
| $xy$          | $v$                 | $v_*$               | $\mu y_7$     |
| $u$           | $u \cdot v$         | $(-1 + iy_7)v_*(u)$ | $-i\mu u$     |
| $u_*$         | $(-1 - iy_7)u_*(v)$ | $u_* \cdot v_*$     | $i\mu u_*$    |
| $\lambda y_7$ | $i\lambda v$        | $-i\lambda v_*$     | $-\lambda\mu$ |

Le lieu d'appartenance du produit des deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{V}$  est le suivant :

|               |                              |                              |                         |
|---------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| $xy$          | $v$                          | $v_*$                        | $\mu y_7$               |
| $u$           | $\in W^*$                    | $\in \langle 1, y_7 \rangle$ | $\in W$                 |
| $u_*$         | $\in \langle 1, y_7 \rangle$ | $\in W$                      | $\in W^*$               |
| $\lambda y_7$ | $\in W$                      | $\in W^*$                    | $\in \langle 1 \rangle$ |

Définissons l'application suivante de  $SL_3$  dans  $G_2$  :

$$\begin{aligned} i : SL_3 &\hookrightarrow G_2 \\ B &\mapsto P_{0,2} R_B P_{0,2}^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

avec

$$R_B := \left( \begin{array}{c|cc} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^t B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et où  ${}^t B^{-1} = \text{Com}(B)$  puisque  $\det(B) = 1$ .

Vérifions que l'image du morphisme  $i$  est bien incluse dans  $G_2$ . Soit  $B = (b_{i,j}) \in SL_3$  et considérons les deux éléments de  $\mathcal{V}$  suivants :  $u = y_2$  et  $v = y_3$ .

$$\begin{aligned} R_B(uv) &= -\sqrt{2} R_B(y_1), \\ &= -\sqrt{2} [(b_{2,1}b_{3,2} - b_{3,1}b_{2,2})y_5 + (b_{3,1}b_{1,2} - b_{1,1}b_{3,2})y_6 + (b_{1,1}b_{2,2} - b_{2,1}b_{1,2})y_1]. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} R_B(y_2) &= b_{1,1}y_2 + b_{2,1}y_3 + b_{3,1}y_4 \\ R_B(y_3) &= b_{1,2}y_2 + b_{2,2}y_3 + b_{3,2}y_4 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
R_B(y_2)R_B(y_3) &= b_{1,1}b_{1,2}y_2y_2 + b_{1,1}b_{2,2}y_2y_3 + b_{1,1}b_{3,2}y_2y_4 \\
&\quad + b_{2,1}b_{1,2}y_3y_2 + b_{2,1}b_{2,2}y_3y_3 + b_{2,1}b_{3,2}y_3y_4 \\
&\quad + b_{3,1}b_{1,2}y_4y_2 + b_{3,1}b_{2,2}y_4y_3 + b_{3,1}b_{3,2}y_4y_4, \\
&= b_{1,1}b_{2,2}(-\sqrt{2}y_1) + b_{1,1}b_{3,2}(\sqrt{2}y_6) \\
&\quad + b_{2,1}b_{1,2}(\sqrt{2}y_1) + b_{2,1}b_{3,2}(-\sqrt{2}y_5) \\
&\quad + b_{3,1}b_{1,2}(-\sqrt{2}y_6) + b_{3,1}b_{2,2}(\sqrt{2}y_5), \\
&= -\sqrt{2}[(b_{2,1}b_{3,2} - b_{3,1}b_{2,2})y_5 + (b_{3,1}b_{1,2} - b_{1,1}b_{3,2})y_6 \\
&\quad + (b_{1,1}b_{2,2} - b_{2,1}b_{1,2})y_1].
\end{aligned}$$

Ainsi

$$R_B(y_2y_3) = R_B(y_2)R_B(y_3).$$

Et l'on peut vérifier de la même manière ce résultat pour tous  $u, v \in W$  :

$$\forall u, v \in W, R_B(uv) = R_B(u)R_B(v).$$

Pareillement,

$$\forall u_*, v_* \in W^*, R_B(u_*v_*) = R_B(u_*)R_B(v_*).$$

En outre, pour tout  $u \in W$ , on a

$$\begin{aligned}
R_B(uy_7) &= R_B(-iu) = -iR_B(u) \\
\text{et } R_B(u)R_B(y_7) &= R_B(u)y_7 = -iR_B(u)
\end{aligned}$$

d'après le tableau d'appartenance ci-dessus. D'où

$$\begin{aligned}
R_B(uy_7) &= R_B(u)R_B(y_7) \quad \forall u \in W, \\
\text{et, de même, } R_B(y_7u) &= R_B(y_7)R_B(u) \quad \forall u \in W.
\end{aligned}$$

Nous avons les deux résultats analogues pour tout  $v_* \in W^*$ . Il ne reste plus qu'à étudier le produit de deux éléments de  $W$  et de  $W^*$  pour voir que la matrice  $R_B$  représente bien un automorphisme de  $\mathcal{V}$ . Prenons le cas de  $u \in W$  et  $v_* \in W^*$ .

$$\begin{aligned}
R_B(uv_*) &= R_B[v_*(u)(-1 + iy_7)], \\
&= v_*(u)(-1 + iy_7), \\
R_B(u)R_B(v_*) &= B(u) {}^tB^{-1}(v_*) = (-1 + iy_7) {}^tB^{-1}(v_*)[B(u)], \\
&= (-1 + iy_7)v_*(u),
\end{aligned}$$

puisque  $B^{-1}$ , en tant que matrice inversible peut être considérée comme matrice de changement de base dans  $W$  et  ${}^tB^{-1}$  le changement de base correspondant sur  $W^*$ . Par ce changement de base, le vecteur  $u$  est transformé en  $Bu$  et la forme linéaire  $v_*$  est transformée en  ${}^tB^{-1}v_*$ , ce qui donne  ${}^tB^{-1}(v_*)(Bu) = v_*(u)$  (évaluation d'une même forme linéaire sur un même vecteur, exprimés dans deux bases différentes). Ainsi,

$$R_B(uv_*) = R_B(u)R_B(v_*) \quad \forall (u, v_*) \in W \times W^*$$

et, par des arguments similaires,

$$R_B(v_*u) = R_B(v_*)R_B(u) \quad \forall (u, v_*) \in W \times W^*.$$

La matrice  $R_B$  représente bien un automorphisme de  $\mathcal{V}$  et ceci pour tout  $B \in SL_3$ . Ainsi, le morphisme  $i$  est bien une inclusion de  $SL_3$  dans  $G_2$ .

Maintenant que cette inclusion  $i$  est établie, considérons l'application suivante de  $GL_2$  dans  $G_2$  :

$$\begin{aligned} GL_2 &\hookrightarrow SL_3 && \xrightarrow{i} G_2 \\ A &\mapsto S_A := \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta^{-1} \end{array} \right) && \mapsto M_A := P_{0,2}R_{S_A}P_{0,2}^{-1} \end{aligned}$$

avec

$$R_{S_A} = \left( \begin{array}{c|c|c} S_A & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^t S_A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et où  $\delta$  est le déterminant de la matrice  $A$ . La matrice  $R_{S_A}$  est exprimée dans la base  $\mathfrak{B}_2$ ; la matrice  $M_A$  représente un isomorphisme de  $\mathcal{V}$ , noté  $\varphi_A$ , que l'on peut prolonger par l'identité sur  $\mathbb{C}$  pour obtenir un isomorphisme des octaves de Cayley. D'après ce qui précède, comme  $S_A$  appartient bien à  $SL_3$ , la matrice  $M_A$  est bien un élément de  $G_2$ , pour tout  $A \in GL_2$ .

Notons  $L_1 := \{M_A \mid A \in GL_2\}$  le sous-groupe de  $G_2$  ainsi obtenu. D'après la sixième colonne de chaque matrice  $R_{S_A}$ , on voit que  $R_{S_A}(y_1)$  est colinéaire au vecteur  $y_1$ . Ainsi, il en est de même pour chaque matrice  $M_A \in L_1$  : le sous-groupe  $L_1$  est donc inclus dans le stabilisateur de  $\langle y_1 \rangle$ . Il est aussi inclus dans le stabilisateur du plan  $\langle y_2, y_3 \rangle$  de part la forme des matrices  $S_A$ , donc  $L_1$  est inclus dans le stabilisateur du 3-plan  $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle$  :

$$L_1 \subset P_1 \subset \widetilde{P}_1 \cap \widetilde{P}_3.$$

Tout comme  $GL_2$ , auquel il est isomorphe, le sous-groupe  $L_1$  est réductif et de dimension 4.

Or, tout sous-groupe de Levi de  $P_1$  est de dimension 4, puisque son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{l}_1 := \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} \oplus \mathfrak{g}_{2(\alpha_2)} \oplus \mathfrak{g}_{2(-\alpha_2)}.$$

Ainsi, on peut en déduire que le sous-groupe  $L_1$  est un sous-groupe de Levi du sous-groupe parabolique maximal  $P_1$  de  $G_2$ .

**Remarque 1.4.2.** — Cette étude peut se faire à l'aide de n'importe quel sous-espace  $W_1$  de dimension 3, isotrope, vérifiant le fait que l'application  $\omega_0$  restreinte à  $\Lambda^3 W_1$  soit un isomorphisme avec  $\mathbb{C}$  et non l'application nulle, ce qui est le cas

pour  $W = \langle y_2, y_3, y_4 \rangle$  vu que  $\omega_0(y_2, y_3, y_4) = -\operatorname{Re}[(y_2 y_3) y_4] = -\operatorname{Re}(-\sqrt{2} y_1 y_4) = -\sqrt{2} \neq 0$ .

En effet, de tels sous-espaces sont tous conjugués dans  $G_2$ .

*Démonstration.* — Commençons par lemme suivant :

**Lemme 1.4.3.** — Soit  $\omega_0 : \Lambda^3 \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$  la forme trilinéaire alternée sur l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  définie en 1.2.4. Soit  $\operatorname{Gr}^{iso}(3, \mathcal{V})$  la Grassmannienne isotrope paramétrant les sous-espaces isotropes de dimension 3 de  $\mathcal{V}$  et  $\Omega$  l'ouvert  $\operatorname{Gr}^{iso}(3, \mathcal{V}) \setminus H$ , où  $H$  désigne le lieu des éléments  $W'$  de  $\operatorname{Gr}^{iso}(3, \mathcal{V})$  pour lesquels  $\omega_0|_{\Lambda^3 W'} : \Lambda^3 W' \rightarrow \mathbb{C}$  est l'application nulle. Alors

$$\Omega \simeq G_2 / SL_3$$

et, quelque soit  $W'$  appartenant à  $\Omega$ , on a

$$\operatorname{Ob}_{G_2}(W') = \Omega,$$

où  $\operatorname{Ob}_{G_2}(W')$  désigne l'orbite de  $W'$  sous l'action de  $G_2$ .

*Démonstration.* — Soit  $W'$  un 3-plan isotrope de  $\Omega$  et notons  $(a, b, c)$  une base de  $W'$ . Montrons que l'intersection  $G_2 \cap \operatorname{Stab}(W')$  est isomorphe à  $SL_3(W')$ .

Via  $\omega_0$ , il existe une décomposition canonique de l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{V} \simeq W' \oplus (W')^* \oplus \mathbb{C} y_7.$$

En effet,  $\Lambda^2 W'$  et  $(W')^*$  sont isomorphes via l'application  $L_1$  définie ci-après et  $W'$  et  $(W')^*$  sont alors des sous-espaces de  $\mathcal{V}$  en somme directe. Pour définir  $L_1$ , on considère l'application

$$\begin{aligned} L_{\omega_0} : \Lambda^2 \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}^* \\ a \wedge b &\mapsto \omega_0(a, b, \cdot) = -\operatorname{Re}[(ab) \cdot]. \end{aligned}$$

définie en (6) du paragraphe 1.3.1 puis  $L_1$  la composition de  $L_{\omega_0}$  avec la restriction à  $(W')^*$ . L'image  $L_1(\Lambda^2 W')$  est alors isomorphe à  $(W')^*$ , puisque  $\Lambda^2 W'$  et  $(W')^*$  sont de même dimension et que l'application  $L_1$  est injective<sup>(6)</sup>.

Montrons que  $W'$  et  $(W')^*$  sont en somme directe. En utilisant  $L_{\omega_0}$  et l'isomorphisme canonique entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^*$  (donné par la forme quadratique non-dégénérée), on peut voir les éléments de  $\Lambda^2 \mathcal{V}$  comme des éléments de  $\mathcal{V}$ . Considérons alors le sous-espace  $W' + \Lambda^2 W'$ , noté  $W' + (W')^*$ . Les deux espaces  $W'$  et  $\Lambda^2 W'$  sont alors en somme directe. En effet, tout élément  $x$  de  $\Lambda^2 W' \cap W'$  est orthogonal à

<sup>(6)</sup>L'injectivité résultant de l'hypothèse : «  $\omega_0|_{\Lambda^3 W'}$  est un isomorphisme ». Si  $\alpha b \wedge c + \beta a \wedge c + \gamma a \wedge b$  est un élément de  $\Lambda^2 W'$  tel que son image par  $L_1$  est nulle, alors  $\alpha \omega_0(b, c, x) + \beta \omega_0(a, c, x) + \gamma \omega_0(a, b, x) = 0$  pour tout  $x$  de  $W$ ; ce qui impose  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  via les évaluations en  $x = a, x = b$  et  $x = c$  car  $\omega_0(a, b, c) \neq 0$ .

chaque élément de  $W'$  puisque  $W'$  est isotrope. En évaluant la forme quadratique entre  $x$  et chacun des trois vecteurs  $a, b$  et  $c$  formant une base de  $W'$ , on aboutit à  $x = 0$  (toujours en utilisant le fait que  $\omega_0|_{\Lambda^3 W'}$  est un isomorphisme). Ainsi, on notera la somme d'espaces vectoriels  $W' + (W')^*$  comme une somme directe :  $W' \oplus (W')^*$ <sup>(7)</sup>.

La restriction de la forme quadratique à  $W' \oplus (W')^*$  est non-dégénérée. En effet, une base de  $W^*$  est  $(bc, ac, ab)$ . Notons  $\lambda := \omega_0(y_2, y_3, y_4)$ . Le calcul de la forme bilinéaire en  $a$  et  $bc$  vaut  $\langle a, bc \rangle = -\operatorname{Re}[a(bc)] = \pm\omega_0(a, b, c) = \pm\lambda$  et  $\langle b, bc \rangle = -\pm\omega_0(b, b, c) = 0$ . Ainsi, la forme quadratique restreinte à  $W \oplus W^* = \langle a, b, c, bc, ac, ab \rangle$  est de la forme :

$$Q|_{W \oplus W^*} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A & 0 \end{array} \right) \text{ où } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \omega_0(a, b, c) \neq 0$$

Ainsi, cette forme quadratique est bien non-dégénérée sur  $W \oplus W^*$

On peut donc considérer la droite vectorielle orthogonale à  $W' \oplus (W')^*$  et obtenir une décomposition de  $\mathcal{V}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{V} = W' \oplus (W')^* \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}.$$

Grâce à cette décomposition explicite de  $\mathcal{V}$ , montrons que  $G_2 \cap \operatorname{Stab}(W')$  est isomorphe à  $SL_3(W')$ . Soit  $g$  un élément de  $G_2$  appartenant au stabilisateur  $\operatorname{Stab}(W')$ . La matrice de  $g$  dans la décomposition de  $\mathcal{V}$  indiquée ci-dessus est de la forme :

$$M(g) = \left( \begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array} \right)$$

puisque  $W' \oplus (W')^*$  et  $\mathbb{C}d$  sont orthogonaux et que  $g$  préserve  $\Lambda^2 W'$  donc  $(W')^*$ . Par ailleurs, comme  $g$  est un élément de  $G_2$ ,  $g$  préserve  $\omega_0$ . Or la restriction de  $\omega_0$  à  $\Lambda^3 W'$  est un isomorphisme puisque  $W'$  appartient à  $\Omega$ . Donc la restriction de  $g$  à  $W'$  est de déterminant trivial :  $\det(A) = 1$ <sup>(8)</sup>. On a bien

$$\operatorname{Stab}(W') \cap G_2 \subset SL(W'). \quad (20)$$

Pour prouver l'isomorphisme entre  $\operatorname{Stab}(W') \cap G_2$  et  $SL(W')$ , regardons leurs dimensions. L'ensemble  $\operatorname{Gr}^{iso}(3, \mathcal{V}) \simeq SO_7/\tilde{P}_3$  est lisse et connexe (car  $SO_7$  l'est). Ainsi, il est irréductible et de dimension 6. L'ouvert  $\Omega$  l'est donc aussi. Puisque  $G_2$  est connexe, l'orbite  $\operatorname{Ob}_{G_2}(W)$  l'est donc aussi et est donc incluse dans  $\Omega$ .

<sup>(7)</sup>Cette somme n'est pas une somme orthogonale.

<sup>(8)</sup>Par ailleurs, la matrice  $B$  est entièrement déterminée par les coefficients de la matrice  $A$ ; le coefficient  $\lambda$  est aussi déterminé par le fait que  $M(g)$  est de déterminant trivial.

L'orbite  $\text{Ob}_{G_2}(W)$  est de dimension au plus 6 et le stabilisateur  $\text{Stab}(W') \cap G_2$  est de dimension 8 au minimum. Comme il est inclus dans  $SL(W')$ , sa dimension est en fait égale à 8, comme  $SL(W')$ . D'après (20) et d'après la connexité de  $SL(W')$ , on en déduit

$$\text{Stab}(W') \cap G_2 = SL(W').$$

De ce fait,

$$G_2/SL(W') = G_2/\text{Stab}(W') = \text{Ob}_{G_2}(W'). \quad (21)$$

L'orbite  $\text{Ob}_{G_2}(W')$  est dense dans  $\Omega$  (puisqu'il ne peut être contenu dans un fermé propre de par sa dimension) et est d'intérieur non vide.

Ces deux derniers résultats sont vrais pour n'importe quel 3-plan de  $\Omega$ . Par conséquent, deux orbites  $\text{Ob}_{G_2}(W_1)$  et  $\text{Ob}_{G_2}(W_2)$  de deux éléments  $W_1$  et  $W_2$  de  $\Omega$  se rencontrent ; elles sont, dès lors, égales. Ceci montre que

$$\forall W' \in \Omega, \quad \text{Ob}_{G_2}(W') = \Omega. \quad (22)$$

En regroupant les résultats (21) et (22), il vient : quel que soit  $W'$  appartenant à  $\Omega$ ,

$$\Omega = G_2/SL_3 = \text{Ob}_{G_2}(W').$$

□

□

*1.4.2.2. Sous-groupe de Levi  $L_2$  du sous-groupe parabolique maximal  $P_2$  de  $G_2$ .*

— On considère cette fois la base de  $\mathcal{V}$  suivante :

$$\mathfrak{B}_3 := (y_1, y_2, y_4, y_5, y_3, y_6, y_7) \quad (23)$$

et le plan  $W_2$  :

$$W_2 := \langle y_1, y_2 \rangle.$$

Via l'isomorphisme entre  $\mathcal{V}$  et son dual donné par  $Q$  (voir (15)),  $(y_{4*}, y_{5*})$  peut être considéré comme la base duale de  $(y_1, y_2)$ . Notons

$$W_2^* = \langle y_4, y_5 \rangle.$$

Nous allons caractériser la table de multiplication de  $\mathcal{V}$  après avoir interprété le sous-espace engendré par  $y_3, y_6$  et  $y_7$ .

$$\begin{aligned} y_1 y_3 &= 0, & y_1 y_6 &= \sqrt{2} y_2, & y_1 y_7 &= i y_1, \\ y_2 y_3 &= -\sqrt{2} y_1, & y_2 y_6 &= 0, & y_2 y_7 &= -i y_2. \end{aligned}$$

La multiplication à droite par  $y_3$  (resp.  $y_6, y_7$ ) peut être vue comme un endomorphisme de trace nulle sur  $W_2$ . Nous avons l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \langle y_3, y_6, y_7 \rangle &\cong \text{End}_0(W_2) \\ y_3 &\mapsto -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ y_6 &\mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ y_7 &\mapsto i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où les matrices des endomorphismes sont exprimées dans la base  $\langle y_1, y_2 \rangle$  de  $W_2$ . Ainsi,

$$\mathcal{V} = W_2 \oplus W_2^* \oplus \text{End}_0(W_2). \quad (24)$$

La table de multiplication, exprimée selon la base  $\mathfrak{B}_3$ , est la suivante :

| $\nearrow$ | $y_1$          | $y_2$          | $y_4$          | $y_5$          | $y_3$          | $y_6$          | $y_7$   |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| $y_1$      | 0              | 0              | $-1 - iy_7$    | $-\sqrt{2}y_3$ | 0              | $\sqrt{2}y_2$  | $iy_1$  |
| $y_2$      | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_6$  | $-1 + iy_7$    | $-\sqrt{2}y_1$ | 0              | $-iy_2$ |
| $y_4$      | $-1 + iy_7$    | $-\sqrt{2}y_6$ | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_5$  | 0              | $-iy_4$ |
| $y_5$      | $\sqrt{2}y_3$  | $-1 - iy_7$    | 0              | 0              | 0              | $-\sqrt{2}y_4$ | $iy_5$  |
| $y_3$      | 0              | $\sqrt{2}y_1$  | $-\sqrt{2}y_5$ | 0              | 0              | $-1 + iy_7$    | $-iy_3$ |
| $y_6$      | $-\sqrt{2}y_2$ | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_4$  | $-1 - iy_7$    | 0              | $iy_6$  |
| $y_7$      | $-iy_1$        | $iy_2$         | $iy_4$         | $-iy_5$        | $iy_3$         | $-iy_6$        | -1      |

La table de multiplication peut être alors interprétée de la suivante : soient  $x = u + u^* + \Phi_u$  et  $y = v + v^* + \Phi_v$  deux éléments de  $\mathcal{V}$  décomposés selon l'écriture ci-dessus, leur produit  $xy$  est égal à

| $\nearrow$ | $v$               | $v_*$                       | $\Phi_v$              |
|------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------|
| $u$        | 0                 | $2B(u) \otimes B^{-1}(v^*)$ | $\Phi_v(u)$           |
| $u_*$      | $-2u_* \otimes v$ | 0                           | $-u_* \circ \Phi_v$   |
| $\Phi_u$   | $-\Phi_u(v)$      | $v_* \circ \Phi_u$          | $\Phi_u \circ \Phi_v$ |

où

$$\begin{aligned} B : W_2 &\rightarrow W_2^* \\ y_1 &\mapsto y_5 \\ y_2 &\mapsto -y_4. \end{aligned}$$

D'où le tableau d'appartenance selon la décomposition (24) de  $\mathcal{V}$  :

| $\nearrow$ | $v$                                       | $v_*$                                     | $\Phi_v$                                  |
|------------|---|---|---|
| $u$        | 0   | $\in \mathbb{C} \oplus \text{End}_0(W_2)$ | $\in W_2$                                 |
| $u_*$      | $\in \mathbb{C} \oplus \text{End}_0(W_2)$ | 0   | $\in W_2^*$                               |
| $\Phi_u$   | $\in W_2$                                 | $\in W_2^*$                               | $\in \mathbb{C} \oplus \text{End}_0(W_2)$ |

On considère l'application suivante :

$$GL_2 \hookrightarrow G_2$$

$$A \mapsto N_A := P_{0,3} T_A P_{0,3}^{-1} \quad \text{avec } T_A := \left( \begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^t A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & r_A \end{array} \right)$$

où  $r_A$  est la matrice de l'endomorphisme induit par l'isomorphisme entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^*$  et l'application qui a un élément  $\Phi$  de  $\text{End}_0(W_2)$  associe l'élément  $A\Phi A^{-1}$  de  $\text{End}_0(W_2)$ . La matrice  $T_A$  est exprimée dans la base  $\mathfrak{B}_3$ . La matrice  $N_A$  représente un isomorphisme de  $\mathcal{V}$ , noté  $\phi_A$ , que l'on peut prolonger par l'identité sur  $\mathbb{C}$  pour obtenir un isomorphisme des octaves de Cayley. Vérifions que  $\phi_A$  est bien un automorphisme de  $\mathcal{V}$ . Soient  $x = u + u_* + \Phi_u$  et  $y = v + v_* + \Phi_v$  deux éléments de  $\mathcal{V}$  décomposé selon (24).

$$\begin{aligned} xy &= (\Phi_v(u) - \Phi_u(v)) + (v_* \circ \Phi_u - u_* \circ (v)) \\ &\quad + (2B(u) \otimes B^{-1}(v_*) - 2u_* \otimes v + \Phi_u \circ \Phi_v), \\ \phi_A(xy) &= A[\Phi_v(u) - \Phi_u(v)] + {}^t A^{-1}[v_* \circ \Phi_u - u_* \circ (v)] \\ &\quad + A[2B(u) \otimes B^{-1}(v_*) - 2u_* \otimes v + \Phi_u \circ \Phi_v]A^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \phi_A(x)\phi_A(y) &= (Au + {}^t A^{-1}u_* + A\Phi_u A^{-1})(Av + {}^t A^{-1}v_* + A\Phi_v A^{-1}), \\ &= (A\Phi_v A^{-1}(Au) - A\Phi_u A^{-1}(Av)) \\ &\quad + ({}^t A^{-1}v_* \circ A\Phi_u A^{-1} - {}^t A^{-1}u_* \circ A\Phi_v A^{-1}) \\ &\quad + (2B(Au) \otimes B^{-1}({}^t A^{-1}v_*) - 2 {}^t A^{-1}u_* \otimes Av + A\Phi_u A^{-1}A\Phi_v A^{-1}), \\ &= (A\Phi_v(u) - A\Phi_u(v)) + ({}^t A^{-1}v_* \circ A\Phi_u A^{-1} - {}^t A^{-1}u_* \circ A\Phi_v A^{-1}) \\ &\quad + (2B(Au) \otimes B^{-1}({}^t A^{-1}v_*) - 2 {}^t A^{-1}u_* \otimes Av + A\Phi_u \Phi_v A^{-1}). \end{aligned}$$

Pour montrer l'égalité  $\phi_A(xy) = \phi_A(x)\phi_A(y)$ , il suffit donc de voir que

$$A[2B(u) \otimes B^{-1}(v_*) - 2u_* \otimes v]A^{-1} = 2B(Au) \otimes B^{-1}({}^t A^{-1}v_*) - 2 {}^t A^{-1}u_* \otimes Av.$$

Tout d'abord, on peut voir que  $A(u_* \otimes v)A^{-1}$  est l'expression de l'application linéaire  $u_* \otimes v$  de  $W_2$ , après le changement de base de matrice de passage  $A^{-1}$ . Ce changement de base transforme un vecteur  $v$  en  $Av$  et une forme linéaire  $u_*$  en  ${}^t A^{-1}u_*$ . L'application linéaire  $u_* \otimes v$  est donc transformée en  ${}^t A^{-1}u_* \otimes Av$ . Ainsi,  $A(u_* \otimes v)A^{-1} = {}^t A^{-1}u_* \otimes Av$ .

Ensuite, en utilisant toujours le changement de base lié à la matrice de passage  $A^{-1}$ , on a

$$\begin{aligned} A(B(u) \otimes B^{-1}(v_*))A^{-1} &= {}^tA^{-1}B(u) \otimes AB^{-1}(v_*), \\ &= {}^tA^{-1}BA^{-1}(Au) \otimes AB^{-1} {}^tA({}^tA^{-1}v_*). \end{aligned}$$

Or,

$$\forall M \in GL_2, {}^tMBM = \det(M)B, \quad (25)$$

d'où

$$\begin{aligned} A(B(u) \otimes B^{-1}(v_*))A^{-1} &= \det(A^{-1})B(Au) \otimes \det(A)B^{-1}({}^tA^{-1}v_*), \\ &= B(Au) \otimes B^{-1}({}^tA^{-1}v_*). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration :

$$\forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \phi_A(xy) = \phi_A(x)\phi_A(y).$$

De même que précédemment, l'endomorphisme  $\phi_A$  est bien un automorphisme de  $\mathcal{V}$ ; il correspond donc à un élément de  $G_2$ .

Notons  $L_2 := \{N_A \mid A \in GL_2\}$  le sous-groupe de  $G_2$  ainsi obtenu. Ce sous-groupe étant inclus dans le stabilisateur de  $\langle y_1, y_2 \rangle$ , nous avons

$$L_2 \subset P_2 \subset \widetilde{P}_2.$$

Tout comme  $GL_2$ , auquel il est isomorphe, le sous-groupe  $L_2$  est réductif et de dimension 4.

Or, tout sous-groupe de Levi de  $P_2$  est de dimension 4, puisque son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{l}_2 := \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}_2} \oplus \mathfrak{g}_{2(\alpha_1)} \oplus \mathfrak{g}_{2(-\alpha_1)}.$$

Ainsi, on peut en déduire que le sous-groupe  $L_2$  est un sous-groupe de Levi du sous-groupe parabolique maximal  $P_2$  de  $G_2$ .

### 1.5. Description des sous-groupes connexes de rang maximal et maximaux pour l'ordre donné par l'inclusion, du groupe de Lie $G_2$

D'après la classification faite dans [BDS49], le groupe de Lie  $G_2$  possède, à conjugaison près, 2 sous-groupes connexes de rang maximal et maximaux pour l'ordre donné par l'inclusion :  $SL_3$  et  $SO_4$ , ayant respectivement pour diagrammes de Dynkin  $A_2$  et  $A_1 \times A_1$ . Nous allons expliciter ci-dessous deux inclusions :

$$\begin{aligned} i : SL_3 &\hookrightarrow G_2, \\ j : SO_4 &\hookrightarrow G_2. \end{aligned}$$

**1.5.1. Inclusion de  $SL_3$  dans le groupe de Lie  $G_2$ .** — Via l'inclusion suivante définie au paragraphe 1.4.2.1, le groupe  $SL_3$  apparaît comme un sous-groupe de  $G_2$  :

$$\begin{aligned} i : SL_3 &\hookrightarrow G_2 \\ B &\mapsto P_{0,2} R_B P_{0,2}^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

avec

$$R_B := \left( \begin{array}{c|cc} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^t B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et où  $P_{0,2}$  est la matrice de changement de base de la base  $\mathfrak{B}_0$  à la base  $\mathfrak{B}_2$ .

**1.5.2. Inclusion de  $SO_4$  dans le groupe de Lie  $G_2$ .** — Considérons la base  $\mathfrak{B}_3$  introduite en (23). L'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  constitué des octaves de Cayley imaginaires pures peut être vu comme la somme directe orthogonale suivante :

$$\mathcal{V} = \mathbb{C}^4 \oplus^\perp \mathbb{C}^3$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 &= M^* \otimes N, \\ \mathbb{C}^3 &= \text{End}_0(N) \end{aligned}$$

où  $M$  et  $N$  sont des espaces vectoriels de dimension 2. La correspondance<sup>(9)</sup> est la suivante :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}^4 \longrightarrow M^* \otimes N & \text{et} \quad \mathbb{C}^3 \longrightarrow \text{End}_0(N) \\ y_1 \mapsto K_1 = \sqrt{2} m_1^* \otimes n_1 & y_3 \mapsto T_3 = -\sqrt{2} n_2^* \otimes n_1 \\ y_2 \mapsto K_2 = \sqrt{2} m_1^* \otimes n_2 & y_6 \mapsto T_6 = \sqrt{2} n_1^* \otimes n_2 \\ y_4 \mapsto K_4 = \sqrt{2} m_2^* \otimes n_2 & y_7 \mapsto T_7 = i n_1^* \otimes n_1 - i n_2^* \otimes n_2 \\ y_5 \mapsto K_5 = -\sqrt{2} m_2^* \otimes n_1 & \end{array} \quad (27)$$

où  $(m_1^*, m_2^*)$  et  $(n_1, n_2)$  sont des bases de  $M^*$  et de  $N$ .

La table de multiplication, exprimée selon la base  $\mathfrak{B}_3$ , est la suivante :

| $\nearrow$ | $y_1$          | $y_2$          | $y_4$          | $y_5$          | $y_3$          | $y_6$          | $y_7$   |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| $y_1$      | 0              | 0              | $-1 - iy_7$    | $-\sqrt{2}y_3$ | 0              | $\sqrt{2}y_2$  | $iy_1$  |
| $y_2$      | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_6$  | $-1 + iy_7$    | $-\sqrt{2}y_1$ | 0              | $-iy_2$ |
| $y_4$      | $-1 + iy_7$    | $-\sqrt{2}y_6$ | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_5$  | 0              | $-iy_4$ |
| $y_5$      | $\sqrt{2}y_3$  | $-1 - iy_7$    | 0              | 0              | 0              | $-\sqrt{2}y_4$ | $iy_5$  |
| $y_3$      | 0              | $\sqrt{2}y_1$  | $-\sqrt{2}y_5$ | 0              | 0              | $-1 + iy_7$    | $-iy_3$ |
| $y_6$      | $-\sqrt{2}y_2$ | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_4$  | $-1 - iy_7$    | 0              | $iy_6$  |
| $y_7$      | $-iy_1$        | $iy_2$         | $iy_4$         | $-iy_5$        | $iy_3$         | $-iy_6$        | -1      |

<sup>(9)</sup>la correspondance entre  $\mathbb{C}^3$  et  $\text{End}_0(N)$  est celle utilisée au paragraphe 1.4.2.2.

Le produit scalaire de deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{V}$  étant

$$\langle x, y \rangle = -\operatorname{Re}(xy),$$

il suffit de considérer l'opposé de la partie réelle du tableau précédent pour obtenir la table du produit scalaire, exprimée dans la base  $\mathfrak{B}_3$  :

|                           |  |  |      |  |
|---------------------------|--|--|------|--|
| $\langle x, y \rangle$    | $M^* \otimes N$  | $\operatorname{End}_0(N)$  |      |  |
| $M^* \otimes N$           | $\begin{array}{c c} 0 & I_2 \\ \hline I_2 & 0 \end{array}$ | 0  |      |  |
| $\operatorname{End}_0(N)$ | 0  | $\begin{array}{c c c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$ | (28) |  |

Les deux espaces  $M^* \otimes N$  et  $\operatorname{End}_0$  sont bien orthogonaux. Le produit scalaire usuel sur  $M_2(\mathbb{C})$ , qui, à deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_2(\mathbb{C})$ , associe

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \frac{1}{2} [\det(A + B) - \det(A) - \det(B)], \\ \text{soit } \langle A, A \rangle &= \det(A), \end{aligned}$$

concorde bien, sur  $M^* \otimes N$ , d'une part, et  $\operatorname{End}_0(N)$ , d'autre part, avec le produit scalaire indiqué ci-dessus, via la correspondance indiquée en (27). Ainsi, le produit scalaire des deux éléments  $y_1$  et  $y_4$  de  $M^* \otimes N$  est égal à l'expression précédente pour les matrices  $K_1$  et  $K_4$  :

$$\begin{aligned} \langle y_1, y_4 \rangle &= 1, \\ \text{et } \langle K_1, K_4 \rangle &= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} \end{array} \middle| - \begin{array}{c|c} \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| - \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} \end{array} \right) = 1, \end{aligned}$$

et le produit scalaire de  $y_3$  et  $y_6$  de  $\operatorname{End}_0(N)$  correspond à l'expression de  $\langle T_3, T_6 \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle y_3, y_6 \rangle &= 1, \\ \text{et } \langle T_3, T_6 \rangle &= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} 0 & -\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{2} & 0 \end{array} \middle| - \begin{array}{c|c} 0 & -\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| - \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & 0 \end{array} \right) = 1. \end{aligned}$$

En tenant compte que les deux sous-espaces  $M^* \otimes N$  et  $\operatorname{End}_0(N)$  sont orthogonaux, on a, pour tout vecteur  $y$  de  $\mathcal{V}$  se décomposant sous la forme  $y = K + T$  où  $K \in M^* \otimes N$  et  $T \in \operatorname{End}_0(N)$ ,

$$\langle y, y \rangle = \langle K, K \rangle + \langle T, T \rangle = \det(K) + \det(T).$$

Afin de pouvoir définir une matrice appartenant à  $G_2$ , ensemble des automorphismes de  $\mathbb{O}$ , décrivons le lieu d'appartenance du produit de deux éléments de

$\mathcal{V}$ .

|                   |                 |                   |
|-------------------|-----------------|-------------------|
| $\nearrow$        | $M^* \otimes N$ | $\text{End}_0(N)$ |
| $M^* \otimes N$   | $\text{End}(N)$ | $M^* \otimes N$   |
| $\text{End}_0(N)$ | $M^* \otimes N$ | $\text{End}(N)$   |

Pour interpréter la table de multiplication précédente, définissons deux endomorphismes. Munissons  $M$  de la base  $(m_1, m_2)$ , duale de la base  $(m_1^*, m_2^*)$  et  $N^*$  de la base  $(n_1^*, n_2^*)$ , duale de la base  $(n_1, n_2)$  prise sur  $N$ . L'ensemble des homomorphismes  $\text{Hom}(M^*, M)$  est isomorphe à  $M \otimes M$ . Considérons  $\Lambda^2 M$  inclus dans  $M \otimes M$ , et en particulier l'élément  $m_1 \wedge m_2$  associé à l'élément  $m_1 \wedge m_2 - m_2 \wedge m_1$  de  $M \otimes M$ . L'homomorphisme de  $M^*$  dans  $M$ , noté  $S$ , relié à cet élément, associe  $m_2$  à  $m_1^*$  et  $-m_1$  à  $m_2^*$  :

$$\begin{aligned} S(m_1^*) &= m_1 * (m_1)m_2 - m_1^*(m_2)m_1 = m_2, \\ S(m_2^*) &= m_2 * (m_1)m_2 - m_2^*(m_2)m_1 = -m_1 \end{aligned}$$

Sa matrice dans les bases  $(m_1^*, m_2^*)$  et  $(m_1, m_2)$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, définissons l'homomorphisme  $T$  de  $N$  dans  $N^*$ , associé à l'élément  $n_1^* \wedge n_2^*$ . Sa matrice dans les bases  $(n_1, n_2)$  et  $(n_1^*, n_2^*)$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La table de multiplication est alors la suivante :

|  |                                   |                                |
|--|-----------------------------------|--------------------------------|
| $\nearrow$                                 | $m^* \otimes n \in M^* \otimes N$ | $\phi \in \text{End}_0(N)$     |
| $\alpha^* \otimes \beta \in M^* \otimes N$ | $\alpha^*(Sm^*) T\beta \otimes n$ | $\alpha^* \otimes \phi(\beta)$ |
| $\psi \in \text{End}_0(N)$                 | $-m^* \otimes \psi(n)$            | $\psi \circ \phi$              |

Vérifions que les deux tables coïncident. Explicitons le calcul pour quatre exemples, un dans chacune des quatre cases du tableau précédent :

$$\begin{aligned} y_2 \cdot y_4 &= \sqrt{2}y_6 = 2 n_1^* \otimes n_2, \\ \text{et } (\sqrt{2} m_1^* \otimes n_2) \cdot (\sqrt{2} m_2^* \otimes n_2) &= 2 m_1^*(Sm_2^*)Tn_2 \otimes n_2, \\ &= 2 m_1^*(-m_1)(-n_1^*) \otimes n_2 = 2 n_1^* \otimes n_2, \\ \text{donc } y_2 \cdot y_4 &= (\sqrt{2} m_1^* \otimes n_2) \cdot (\sqrt{2} m_2 \otimes n_2). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} y_2 \cdot y_3 &= -\sqrt{2}y_1 = -2 m_1^* \otimes n_1, \\ \text{et } (\sqrt{2} m_1^* \otimes n_2) \cdot T_3 &= \sqrt{2} m_1^* \otimes T_3(n_2) = -2 m_1^* \otimes n_1, \\ \text{donc } y_2 \cdot y_3 &= (\sqrt{2} m_1^* \otimes n_2) \cdot T_3. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} y_6 \cdot y_5 &= \sqrt{2}y_4 = 2 m_2^* \otimes n_2, \\ \text{et } T_6 \cdot (-\sqrt{2} m_2^* \otimes n_1) &= -(-\sqrt{2})m_2^* \otimes T_6(n_1) = 2 m_2^* \otimes n_2, \\ \text{donc } y_6 \cdot y_5 &= T_6 \cdot (-\sqrt{2} m_2^* \otimes n_1). \end{aligned}$$

Pour ce qui de la multiplication entre deux éléments de  $\text{End}_0(N)$ , la vérification a déjà été faite au paragraphe 1.4.2.2.

Nous sommes donc en mesure de définir une inclusion du groupe  $SO_4$  dans le groupe  $G_2$ . Le groupe  $SO_4$  est isomorphe au quotient

$$SO_4 \simeq (SL_2 \times SL_2)/\{e, -e\}$$

où  $e = (I_2, I_2) \in SL_2 \times SL_2$ , via  $\rho$  la représentation du groupe  $SL_2 \times SL_2$  suivante<sup>(10)</sup> :

$$\begin{aligned} \rho : SL_2 \times SL_2 &\longrightarrow \text{Hom}(M^* \otimes N) \\ (A, B) &\longmapsto A^* \otimes B = A \otimes B \end{aligned}$$

où  $M$  et  $N$  sont des espaces vectoriels complexes de dimension 2,  $M^* \otimes N$  est de dimension 4,  $M^* \otimes N$  est muni de la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée suivante :

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in M^* \otimes N, \quad \langle X, Y \rangle &= \frac{1}{2} [\det(X + Y) - \det(X) - \det(Y)], \\ \forall X \in M^* \otimes N, \quad \langle X, X \rangle &= \det(X) \end{aligned}$$

et

$$(A \otimes B)(m^* \times n) = Am^* \otimes Bn.$$

L'image de  $\rho$  est  $SO_4$ , son noyau est  $\{e, -e\} = \{(I_2, I_2), (-I_2, -I_2)\}$ . Ainsi,

$$(SL_2 \times SL_2)/\ker(\rho) = (SL_2 \times SL_2)/\{e, -e\} \simeq SO_4.$$

Définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} SL_2 \times SL_2 &\longrightarrow G_2 \\ (A, B) &\longmapsto K_{A,B} = P_{0,3}L_{A,B}P_{0,3}^{-1} \end{aligned}$$

où  $P_{0,3}$  représente la matrice de changement de base de la base  $\mathfrak{B}_0$  à la base  $\mathfrak{B}_3$  et où

$$L_{A,B} = \left( \begin{array}{c|c} A \otimes B & 0 \\ \hline 0 & \text{Conj}(B) \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \text{Conj}(B) : \text{End}_0(N) &\rightarrow \text{End}_0(N) \\ \phi &\mapsto B\phi B^{-1}. \end{aligned}$$

<sup>(10)</sup>L'isomorphisme entre  $SO_4$  et  $(SL_2 \times SL_2)/\{e, -e\}$  peut aussi s'obtenir via l'application suivante :

$$\begin{aligned} SL_2 \times SL_2 &\longrightarrow \text{End}(M_2(\mathbb{C})) \\ (A, B) &\longmapsto (X \mapsto AXB^{-1}) \end{aligned}$$

où  $\text{End}(M_2(\mathbb{C}))$  est muni de la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée provenant du déterminant.

Notons  $\Psi_{A,B}$  l'endomorphisme de  $\mathcal{V}$  ayant pour matrice  $K_{A,B}$  dans la base  $\mathfrak{B}_0$ . Cet endomorphisme a pour matrice la matrice  $L_{A,B}$  dans la  $\mathfrak{B}_3$ . Or,

$$\det(L_{A,B}) = \det(A \otimes B) \det(\text{Conj}(B)) = 1 * 1 = 1$$

donc  $\Psi_{A,B}$  est en fait un isomorphisme de  $\mathcal{V}$ . On prolonge  $\Psi_{A,B}$  par l'identité sur  $\mathbb{C}$  pour obtenir un isomorphisme de  $\mathbb{O}$ .

Vérifions que  $\Psi_{A,B}$  est bien d'un automorphisme de  $\mathcal{V}$ .

Soient  $\alpha^* \otimes \beta$  et  $m^* \otimes n$  deux éléments de  $M^* \otimes N$ . Leurs images par  $\Psi_{A,B}$  sont :

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}(\alpha^* \otimes \beta) &= A\alpha^* \otimes B\beta, \\ \Psi_{A,B}(m^* \otimes n) &= Am^* \otimes Bn, \end{aligned}$$

donc

$$\Psi_{A,B}(\alpha^* \otimes \beta) \cdot \Psi_{A,B}(m^* \otimes n) = (A\alpha^*)(SAm^*)TB\beta \otimes Bn. \quad (29)$$

Par ailleurs,

$$(\alpha^* \otimes \beta) \cdot (m^* \otimes n) = \alpha^*(Sm^*)T\beta \otimes n \in \text{End}(N),$$

donc

$$\Psi_{A,B}[(\alpha^* \otimes \beta) \cdot (m^* \otimes n)] = \alpha^*(Sm^*)B(T\beta \otimes n)B^{-1}. \quad (30)$$

Il faut comparer (29) et (30). D'après (25), pour tout  $A \in SL_2$ ,

$${}^tASA = \det(A)S = S$$

donc

$$(A\alpha^*)(SAm^*) = (A\alpha^*)(({}^tA)^{-1}Sm^*) = (A\alpha^*)(({}^tA)^{-1}SA^{-1})(Am^*).$$

Si l'on considère le changement de base sur  $M^*$  de matrice de changement de base  $A^{-1}$  dans la base  $(m_1^*, m_2^*)$  de  $M^*$ , alors les vecteurs  $\alpha^*$  et  $m^*$  sont respectivement transformés en les vecteurs  $A\alpha^*$  et  $Am^*$ , et l'application  $S$  est transformée en  $({}^tA)^{-1}SA^{-1}$ . Ainsi,

$$\alpha^*(Sm^*) = ({}^tA\alpha^*)(({}^tA)^{-1}SA^{-1})(Am^*).$$

De même, un changement de base de  $N$  de matrice de changement de base  $B^{-1}$  dans la base  $(n_1, n_2)$  de  $N$  transforme le vecteur  $n$  en  $Bn$ , la forme linéaire  $T\beta$  en  ${}^tB^{-1}T\beta$  et l'endomorphisme  $\phi$  de  $\text{End}(N)$  en  $B\phi B^{-1}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} TB\beta \otimes Bn &= {}^tB^{-1}T\beta \otimes Bn \quad \text{d'après l'équation (25),} \\ &= B(T\beta \otimes n)B^{-1} \end{aligned}$$

(il s'agit de l'endomorphisme  $T\beta \otimes n$  de  $N$  après changement de base  $B^{-1}$ ). Ainsi,

$$\begin{aligned} (A\alpha^*)(SAm^*)TB\beta \otimes Bn &= \alpha^*(Sm^*)B(T\beta \otimes n)B^{-1}, \\ \Leftrightarrow \Psi_{A,B}(\alpha^* \otimes \beta) \cdot \Psi_{A,B}(m^* \otimes n) &= \Psi_{A,B}[(\alpha^* \otimes \beta) \cdot (m^* \otimes n)]. \end{aligned}$$

Considérons  $m^* \otimes n$  de  $M^* \otimes N$  et  $\phi$  de  $\text{End}_0(N)$ .

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}(m^* \otimes n) &= Am^* \otimes Bn, \\ \Psi_{A,B}(\phi) &= B\phi B^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}(m^* \otimes n) \cdot \Psi_{A,B}(\phi) &= Am^* \otimes (B\phi B^{-1})(Bn), \\ &= Am^* \otimes B\phi n. \end{aligned} \quad (31)$$

Or,

$$\begin{aligned} (m^* \otimes n) \cdot \phi &= m^* \otimes \phi(n) \in M^* \otimes N, \\ \text{donc } \Psi_{A,B}[(m^* \otimes n) \cdot \phi] &= Am^* \otimes B\phi n. \end{aligned} \quad (32)$$

Les expressions (31) et (32) sont identiques donc

$$\Psi_{A,B}(m^* \otimes n) \cdot \Psi_{A,B}(\phi) = \Psi_{A,B}[(m^* \otimes n) \cdot \phi].$$

La vérification concernant le produit d'un élément de  $\text{End}_0(N)$  par un élément de  $M^* \otimes N$  est identique et celle concernant le produit de deux éléments de  $\text{End}_0(N)$  a déjà été faite au paragraphe 1.4.2.2.

L'isomorphisme  $\Psi_{A,B}$  est donc bien un automorphisme de  $\mathcal{V}$ ;  $\Psi_{A,B}$  est bien un élément de  $G_2$ .

Par ailleurs, l'image de  $(A, B)$  de  $SL_2 \times SL_2$  est identique à celle de  $(-A, -B)$ . L'application de  $SL_2 \times SL_2$  dans  $G_2$  passe donc au quotient et on définit l'inclusion  $j$  suivante :

$$j: \begin{array}{l} SO_4 \hookrightarrow G_2 \\ \overline{(A, B)} \mapsto K_{A,B} = P_{0,3}L_{A,B}P_{0,3}^{-1} \end{array} \quad (33)$$

où

$$L_{A,B} = \left( \begin{array}{c|c} A \otimes B & 0 \\ \hline 0 & \text{Conj}(B) \end{array} \right)$$

avec  $\text{Conj}(B)$  la conjugaison par  $B$  dans  $\text{End}_0(N)$  et où  $P_{0,3}$  représente la matrice de changement de base de la base  $\mathfrak{B}_0$  à la base  $\mathfrak{B}_3$ .

## CHAPITRE 2

### ÉTUDE DES FORMES TRILINÉAIRES ALTERNÉES SUR $\mathbb{C}^7$ DÉGÉNÉRÉES

Nous avons vu au Théorème 1.2.10 que le groupe  $G_2$  est constitué des éléments de déterminant trivial du stabilisateur  $\text{Stab}(\omega_0)$  où  $\omega_0$  est une forme trilinéaire alternée sur le sous-espace vectoriel de dimension 7 des octaves de Cayley constitué des éléments imaginaires purs.

Au sens de la définition 2.2.1, la forme trilinéaire alternée  $\omega_0$  est dite non-dégénérée. Afin de connaître toutes les formes trilinéaires alternées sur  $\mathcal{V}$  non-dégénérées, nous allons caractériser ici l'espace complémentaire : le lieu des formes trilinéaires alternées sur  $\mathcal{V}$  dégénérées.

Pour cela, commençons par définir diverses notations ainsi qu'une application  $\Phi$  associant une forme quadratique à une forme trilinéaire alternée.

#### 2.1. Grassmanniennes, plongement de Plücker et variétés des sécantes

Soit  $\mathcal{V}$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 7 constitué des octaves de Cayley imaginaires pures et  $\mathcal{V}^*$  son espace dual. On note  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{V}^*$  de dimension 3 et  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$  le plongement de Plücker qui, à un sous-espace vectoriel  $W \subset \mathcal{V}^*$  de dimension 3, engendré par trois éléments  $f_1, f_2, f_3$  de  $\mathcal{V}^*$ , associe  $[f_1 \wedge f_2 \wedge f_3] \in \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$ . Selon les cas, on considérera un élément de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  comme un sous-espace vectoriel de dimension 3 ou bien comme un point de  $\mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$ . On considère aussi les variétés des sécantes de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  : la  $k$ -ième variété des sécantes de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$ , notée  $\text{Sec}^{(k)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ , est l'adhérence, dans  $\mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$ , de la réunion de tous les sous-espaces projectifs  $\mathbb{P}^{k-1}$  engendrés par  $k$  points linéairement indépendants de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$ . Par exemple, la première variété des sécantes est  $\text{Sec}^{(1)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)) = \text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  et la deuxième est

$$\text{Sec}^{(2)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)) = \overline{\bigcup \langle p, q \rangle}$$

pour  $p, q$  parcourant  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$ , où  $\langle p, q \rangle$  désigne la droite projective passant par  $p$  et  $q$ .

**Remarque 2.1.1.** — La troisième variété des sécantes  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  aura une importance particulière dans notre étude.

## 2.2. Application rationnelle $\Phi$ et propriétés

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, après que l'étude des 2-formes non-dégénérées ait été menée (donnant lieu à la géométrie symplectique et à la définition du groupe de Lie  $Sp(n, \mathbb{C})$ ), F. ENGEL s'est intéressé à la géométrie résultant des formes trilinéaires alternées. En 1900, il publie deux articles [Enga] et [Engb] où il relie une forme quadratique à une forme trilinéaire alternée. C'est ce que nous allons présenter dans ce qui suit, munis de notations modernes.

Rappelons la définition déjà usité au paragraphe 1.1, qui associe à une forme trilinéaire alternée sur  $\mathcal{V}$  une forme quadratique :

**Définition 2.2.1.** — Soit l'application rationnelle  $\Phi$  suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*) & \dashrightarrow \mathbb{P}(\text{Sym}^2 \mathcal{V}^*) \\ [\omega] & \longmapsto [Q_\omega] \end{aligned}$$

où  $B_\omega$ , la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique  $Q_\omega$ , est définie par :

$$\forall x, y \in \mathcal{V}, \quad B_\omega(x, y) = \omega(x, \cdot, \cdot) \wedge \omega(y, \cdot, \cdot) \wedge \omega(\cdot, \cdot, \cdot).$$

On note parfois  $i_x(\omega) := \omega(x, \cdot, \cdot)$ , ce qui aboutit à l'écriture suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{V}, \quad B_\omega(x, y) = i_x(\omega) \wedge i_y(\omega) \wedge \omega(\cdot, \cdot, \cdot).$$

**Remarque 2.2.2.** — (1) Pour tous  $x, y \in \mathcal{V}$  et tout  $\omega \in \Lambda^3 \mathcal{V}^*$ ,  $B_\omega(x, y)$  appartient à  $\Lambda^7 \mathcal{V}^*$  qui est isomorphe à  $\mathbb{C}$  donc  $B_\omega(x, y)$  est bien un nombre complexe.

(2) Soit  $\omega \in \Lambda^3 \mathcal{V}^*$ . L'application bilinéaire  $B_\omega$  correspondante est bien symétrique puisque deux formes alternées d'ordre 2,  $i_x(\omega)$  et  $i_y(\omega)$ , commutent toujours.

(3) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et pour tous  $x, y \in \mathcal{V}$ ,  $B_{\lambda\omega}(x, y) = \lambda^3 B_\omega(x, y)$  donc, si  $Q_\omega \neq 0$ ,  $[Q_{\lambda\omega}] = [Q_\omega]$ . L'application rationnelle  $\Phi$  est donc bien définie entre les espaces projectifs et est de degré 3.

**Définition 2.2.3.** — Soit  $\omega \in \Lambda^3 \mathcal{V}^*$ . Lorsque la forme quadratique  $Q_\omega$  associée à  $\omega$  par  $\Phi$  est non-dégénérée (resp. dégénérée), la forme trilinéaire alternée  $\omega$  est dite **non-dégénérée** (resp. **dégénérée**).

Comme, pour tout  $\omega \in \Lambda^3 \mathcal{V}^*$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $B_{\lambda\omega} = \lambda^3 B_\omega$ , les formes trilinéaires alternées  $\omega$  et  $\lambda\omega$  sont simultanément dégénérées (ou simultanément non-dégénérées). Les notions « dégénérée » et « non-dégénérée » passe donc au projectif :

**Définition 2.2.4.** — Un point  $p \in \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$  sera dit **non-dégénéré** (resp. **dégénéré**) si un de ces représentant  $\omega \in \Lambda^3 \mathcal{V}^*$  l'est.

**2.2.1. Calcul de  $\Phi(\omega_0)$ .** — Traitons l'exemple de la forme trilinéaire  $\omega_0$  définie en 1.2.4. Nous allons, dans un premier temps, expliciter  $\omega_0$  puis, dans un second temps, calculer son image par l'application  $\Phi$ .

En conservant les notations  $(\phi_1, \dots, \phi_7)$  pour la base de  $\mathcal{V}^*$ , duale de la base  $(e_1, \dots, e_7)$  de  $\mathcal{V}$ , et en notant

$$\phi_{i,j,k} := \phi_i \wedge \phi_j \wedge \phi_k,$$

l'expression de  $\omega_0$  dans la base de  $\Lambda^3 \mathcal{V}^*$  est :

$$\omega_0 = \sum_{i < j < k} \lambda_{i,j,k} \phi_{i,j,k}$$

où  $\lambda_{i,j,k} = \omega_0(e_i, e_j, e_k) = -\text{Re}[(e_i e_j) e_k]$ . Si  $e_i, e_j, e_k$  ne sont pas alignés sur le diagramme de Fano, c'est-à-dire si  $e_i e_j \neq \pm e_k$ , alors  $(e_i e_j) e_k$  est une octave de Cayley purement imaginaire et donc  $\lambda_{i,j,k} = 0$ . Ainsi, le scalaire  $\lambda_{i,j,k}$  est non nul uniquement si le triplet  $(i, j, k)$  est l'un des 7 suivants :  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 4, 7)$ ,  $(1, 5, 6)$ ,  $(2, 4, 6)$ ,  $(2, 5, 7)$ ,  $(3, 4, 5)$  ou  $(3, 6, 7)$ . On obtient

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2,3} &= -\text{Re}[(e_1 e_2) e_3] = -\text{Re}(e_3^2) = 1, \\ \lambda_{1,4,7} &= -\text{Re}[(e_1 e_4) e_7] = -\text{Re}(e_7^2) = 1, \\ \lambda_{1,5,6} &= -\text{Re}[(e_1 e_5) e_6] = -\text{Re}(e_6^2) = 1, \\ \lambda_{2,4,6} &= -\text{Re}[(e_2 e_4) e_6] = -\text{Re}(e_6^2) = 1, \\ \lambda_{2,5,7} &= -\text{Re}[(e_2 e_5) e_7] = -\text{Re}(-e_7^2) = -1, \\ \lambda_{3,4,5} &= -\text{Re}[(e_3 e_4) e_5] = -\text{Re}(e_5^2) = 1, \\ \lambda_{3,6,7} &= -\text{Re}[(e_3 e_6) e_7] = -\text{Re}(e_7^2) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression<sup>(1)</sup> de  $\omega_0$  dans la base de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  est :

$$\omega_0 = \phi_{1,2,3} + \phi_{1,4,7} + \phi_{1,5,6} + \phi_{2,4,6} - \phi_{2,5,7} + \phi_{3,4,5} + \phi_{3,6,7}. \quad (34)$$

Nous sommes désormais en mesure de calculer la forme bilinéaire  $B_{\omega_0}$  associée à  $\omega_0$ .

**Lemme 2.2.5.** — *La forme quadratique sur  $Q_{\omega_0}$  associée à la forme trilinéaire  $\omega_0$  définie en 1.2.4 est*

$$Q_{\omega_0} = 6Q$$

où  $Q$  est la forme quadratique canonique sur  $\mathcal{V}$  définie en (1).

Ainsi,  $\omega_0$  est non-dégénérée. Par la suite, on notera

$$Q_0 = Q_{\omega_0}.$$

*Démonstration.* — Pour déterminer  $B_{\omega_0}$ , il suffit de calculer  $B_{\omega_0}(e_i, e_j)$ , pour  $e_i, e_j$  parcourant la base canonique. Commençons par le calcul de  $B_{\omega_0}(e_1, e_2)$ . D'après l'expression de  $\omega_0$  dans l'équation (34), on a

$$\begin{aligned} \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) &= \phi_{2,3} + \phi_{4,7} + \phi_{5,6}, \\ \omega_0(e_2, \cdot, \cdot) &= -\phi_{1,3} + \phi_{4,6} - \phi_{5,7}, \\ \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(e_2, \cdot, \cdot) &= \phi_{2,3,4,6} - \phi_{2,3,5,7} - \phi_{4,7,1,3} - \phi_{5,6,1,3}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} B_{\omega_0}(e_1, e_2) &= (\phi_{2,3,4,6} - \phi_{2,3,5,7} - \phi_{4,7,1,3} - \phi_{5,6,1,3}) \wedge \omega_0(\cdot, \cdot, \cdot), \\ B_{\omega_0}(e_1, e_2) &= (\phi_{2,3,4,6} - \phi_{2,3,5,7} - \phi_{4,7,1,3} - \phi_{5,6,1,3}) \\ &\quad \wedge (\phi_{1,2,3} + \phi_{1,4,7} + \phi_{1,5,6} + \phi_{2,4,6} - \phi_{2,5,7} + \phi_{3,4,5} + \phi_{3,6,7}), \\ B_{\omega_0}(e_1, e_2) &= 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \omega_0(e_3, \cdot, \cdot) &= \phi_{1,2} + \phi_{4,5} + \phi_{6,7}, \\ \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(e_3, \cdot, \cdot) &= \phi_{2,3,4,5} + \phi_{2,3,6,7} + \phi_{4,7,1,2} + \phi_{5,6,1,2}, \end{aligned}$$

donc, cette fois encore,

$$\begin{aligned} B_{\omega_0}(e_1, e_3) &= (\phi_{2,3,4,5} + \phi_{2,3,6,7} + \phi_{4,7,1,2} + \phi_{5,6,1,2}) \wedge \omega_0(\cdot, \cdot, \cdot), \\ B_{\omega_0}(e_1, e_3) &= (\phi_{2,3,4,5} + \phi_{2,3,6,7} + \phi_{4,7,1,2} + \phi_{5,6,1,2}) \\ &\quad \wedge (\phi_{1,2,3} + \phi_{1,4,7} + \phi_{1,5,6} + \phi_{2,4,6} - \phi_{2,5,7} + \phi_{3,4,5} + \phi_{3,6,7}), \\ B_{\omega_0}(e_1, e_3) &= 0. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup>L'expression de  $\omega_0$  dépend fortement de diagramme de Fano utilisé au départ (FIG 1). Ici, ce diagramme à été choisi comme indiqué sur la Figure FIG 1 car la multiplication qui en découle définit bien l'algèbre des octaves de Cayley et une telle multiplication a été utile lors du §1.3.

En fait,

$$\text{si } i \neq j, \quad B_{\omega_0}(e_i, e_j) = 0. \quad (35)$$

Calculons maintenant  $Q_0(e_1)$  :

$$\begin{aligned} \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) &= \phi_{2,3} + \phi_{4,7} + \phi_{5,6}, \\ \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) &= 2(\phi_{2,3,4,7} + \phi_{2,3,5,6} - \phi_{4,7,5,6}), \\ \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(e_1, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(\cdot, \cdot, \cdot) &= 2(\phi_{2,3,4,7,1,5,6} + \phi_{2,3,5,6,1,4,7} + \phi_{4,7,5,6,1,2,3}), \\ Q_0(e_1) &= 6. \end{aligned}$$

Le calcul de  $Q_0(e_2)$  est identique :

$$\begin{aligned} \omega_0(e_2, \cdot, \cdot) &= -\phi_{1,3} + \phi_{4,6} - \phi_{5,7}, \\ \omega_0(e_2, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(e_2, \cdot, \cdot) &= 2(-\phi_{1,3,4,6} + \phi_{1,3,5,7} - \phi_{4,6,5,7}), \\ \omega_0(e_2, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(e_2, \cdot, \cdot) \wedge \omega_0(\cdot, \cdot, \cdot) &= 2(\phi_{1,3,4,6,2,5,7} + \phi_{1,3,5,7,2,4,6} - \phi_{4,6,5,7,1,2,3}), \\ Q_0(e_2) &= 6. \end{aligned}$$

Les cinq autres calculs sont similaires et aboutissent au même résultat :

$$\forall i \in \{1, \dots, 7\}, \quad Q_0(e_i) = 6. \quad (36)$$

Ainsi, de par (35) et (36) :

$$Q_0 = 6Q.$$

□

**2.2.2. Propriétés de l'application rationnelle  $\Phi$ .** — Nous allons caractériser l'application rationnelle  $\Phi$ , mais, auparavant, précisons le vocabulaire pour un certain type d'éléments de la variété des sécantes  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  qui apparaîtront dans le prochain Théorème.

**Définition 2.2.6.** — Soient  $W_1, W_2$  et  $W_3$  trois sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{V}^*$  de dimension 3 et  $[\omega_i] = [a_i \wedge b_i \wedge c_i]$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  les trois éléments de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  correspondants. Un élément  $[\omega] = [\omega_1 + \omega_2 + \omega_3]$  de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  est dit **en position générale** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $W_i \cap W_j = \{0\}$  pour tous  $i, j$  distincts,
- (ii)  $\dim(Z^{j,k}) = 2$  pour tout  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , où

$$Z^{i,j} := (W_i \oplus W_j) \cap W_k$$

(on impose donc que ces dimensions soient les plus petites possibles), soit

$$W_i + W_j + W_k = \mathcal{V}^*.$$

L'ensemble  $PG := \{[\omega] \in \text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)) \mid [\omega] \text{ est en position générale}\}$  est un ouvert dense de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ , par irréductibilité de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ .

**Lemme 2.2.7.** — Soit un élément  $[\omega] = [\omega_1 + \omega_2 + \omega_3]$  de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  en position générale correspondant à trois points  $p_1 = [\omega_1], p_2 = [\omega_2]$  et  $p_3 = [\omega_3]$  de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$ . Alors, les points  $p_i$  ne sont pas alignés et  $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  est de dimension 2.

*Démonstration.* — Soit un élément  $[\omega]$  de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  en position générale, défini par trois sous-espaces vectoriels de dimension 3 de  $\mathcal{V}^*$  :  $W_1, W_2$  et  $W_3$ . D'après la condition (i) de la Définition 2.2.6, comme  $Z^{i,j} \subset W_k$  pour tout  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , on a :

$$\forall \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \quad Z^{i,j} \cap Z^{i,k} = \{0\}$$

Les sous-espaces  $Z^{i,j}$  sont deux à deux en somme directe.

Les trois points ne sont pas alignés dans  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*) \subset \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$  et forment un plan. En effet, le lemme suivant indique une condition vérifiée par trois points  $q_1, q_2, q_3$  de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  alignés dans  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*) \subset \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$ .

**Lemme 2.2.8.** — Soient trois points de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*) \subset \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$ , deux à deux distincts, correspondant respectivement aux trois sous-espaces vectoriels  $W_1, W_2, W_3$  de  $\mathcal{V}^*$ . Si ces trois points sont alignés, alors l'intersection  $W_1 \cap W_2 \cap W_3$  est de dimension 2.

*Démonstration.* — Si les points  $q_1, q_2, q_3$  de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$ , deux à deux distincts, sont alignés, alors il existe trois bases respectives  $(a_i, b_i, c_i)$  des trois 3-plans  $W_i$  correspondant, vérifiant la condition suivante :

$$a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 = a_2 \wedge b_2 \wedge c_2 + a_3 \wedge b_3 \wedge c_3.$$

Il existe un vecteur  $f_1 \in W_1$  tel que  $f_1 \notin W_2$  et  $f_1 \notin W_3$ . Si ce n'était pas le cas, tout élément  $f$  de  $W_1$  appartiendrait à  $W_2$  ou à  $W_3$ . Comme pour tout  $f \in W_1, f \wedge a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 = 0$ , on aurait

$$\forall f \in W_1, \quad f \wedge a_2 \wedge b_2 \wedge c_2 + f \wedge a_3 \wedge b_3 \wedge c_3 = 0.$$

Or, comme l'un des deux facteurs serait nul, l'autre le serait aussi. On aurait alors  $\forall f \in W_1, f \in W_2 \cap W_3$ , donc  $W_1 \subset W_2 \cap W_3$  et  $W_1 = W_2 = W_3$ ; ce qui est impossible vu qu'on considère trois points  $q_i$  distincts.

Comme  $f_1 \wedge a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 = 0$ , on obtient

$$f_1 \wedge a_2 \wedge b_2 \wedge c_2 = -f_1 \wedge a_3 \wedge b_3 \wedge c_3 \neq 0.$$

Ainsi,

$$[f_1 \wedge a_2 \wedge b_2 \wedge c_2] = [f_1 \wedge a_3 \wedge b_3 \wedge c_3] \in \mathbb{P}(\Lambda^4 \mathcal{V}^*).$$

D'où  $X := \langle f_1, a_2, b_2, c_2 \rangle = \langle f_1, a_3, b_3, c_3 \rangle$  désigne un même sous-espace vectoriel de dimension 4. Comme  $W_2$  et  $W_3$  sont tous les deux inclus dans  $X$ ,  $W_2 \cap W_3$

est de dimension au moins  $3 + 3 - 4 = 2$ , et même exactement 2 puisque il s'agit de deux 3-plans distincts. Soit  $P = W_2 \cap W_3$  ce plan.

$$\forall p \in P, \quad p \wedge a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 = p \wedge a_2 \wedge b_2 \wedge c_2 + p \wedge a_3 \wedge b_3 \wedge c_3 = 0.$$

Donc le plan  $P$  est aussi inclus dans  $W_1$ , et finalement  $P = W_1 \cap W_2 \cap W_3$ . L'intersection des trois 3-plans  $W_i$  associés à trois points  $q_i$  alignés deux à deux distincts est un plan.  $\square$

Dans le cas de 3-plans définissant  $[\omega]$  en position générale, les 3-plans  $W_i$  étant en somme directe deux à deux, leur intersection ne peut être un plan et les trois points associés ne donc sont pas alignés. Ils engendrent bien un plan.  $\square$

Étudions à présent les caractéristiques de l'application  $\Phi$  définie en 2.2.1.

**Théorème 2.2.9.** — (1) L'application rationnelle  $\Phi$  est donnée par un système linéaire  $|\mathcal{L}|$ , de dimension linéaire 28, de polynômes homogènes cubiques sur l'espace de Plücker  $\mathbb{P}(\Lambda^3(\mathcal{V}^*)) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C}^{35})$ ,

(2) le lieu exceptionnel de  $\Phi$  :

$$\text{Exc}(\Phi) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^3(\mathcal{V}^*)) \mid \Phi(\omega) = Q_\omega = 0\}$$

contient  $\text{Sec}^{(2)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ ,

(3) la restriction de  $\Phi$  à la variété des sécantes  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  peut être décrite de la manière suivante. Soient  $W_1, W_2, W_3$  trois sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{V}^*$  de dimension 3 vérifiant les conditions (i) et (ii) de la Définition 2.2.6 et  $[\omega_i]$  les trois points de la Grassmannienne  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  correspondants.

L'application  $\Phi$  contracte le plan  $\{[\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3] \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*\}$  en un seul point  $[Q_{123}]$  de  $\mathbb{P}(\text{Sym}^2\mathcal{V}^*)$ , dépendant uniquement de  $W_1, W_2$  et  $W_3$ . Cette forme quadratique  $Q_{123}$ , définie à un scalaire près, est de rang 4 et elle est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

(a) le rang de  $Q_{123}$  est 4 et son noyau :

$$\ker Q_{123} := \{x \in \mathcal{V} \mid B_{123}(x, y) = 0 \forall y \in \mathcal{V}\}$$

où  $B_{123}$  est la forme bilinéaire associée à  $Q_{123}$ , est le sous-espace vectoriel  $\Pi^\perp$  avec

$$\Pi = Z^{1,2} + Z^{1,3} + Z^{2,3} \quad \text{et} \quad \Pi^\perp = \{v \in \mathcal{V} \mid \forall f \in \Pi, f(v) = 0\} \subset \mathcal{V}; \quad (37)$$

(b) la forme quadratique  $Q_{123}$  contient les trois

$$(Z^{i,j})^\perp = \{v \in \mathcal{V} \mid \forall f \in Z^{i,j}, f(v) = 0\},$$

c'est-à-dire :

$$Q_{123|(Z^{i,j})^\perp} = 0, \quad \forall i \neq j.$$

*Démonstration.* — (1) Voir (3) de la Remarque 2.2.2, avec  $\dim(\text{Sym}^2 \mathcal{V}^*) = 28$  et  $\dim(\Lambda^3 \mathcal{V}^*) = 35$ .

(2) Soient  $f_1, \dots, f_6 \in \mathcal{V}^*$ . Considérons  $[\omega_1] = [f_{1,2,3}] \in \text{Sec}^{(1)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ . Pour tous  $x, y$  de  $\mathcal{V}$ , on a :

$$\begin{aligned} & f_{1,2,3}(x, \cdot, \cdot) \wedge f_{1,2,3}(y, \cdot, \cdot) \\ &= [f_1(x)f_{2,3} - f_2(x)f_{1,3} + f_3(x)f_{1,2}] \wedge [f_1(y)f_{2,3} - f_2(y)f_{1,3} + f_3(y)f_{1,2}], \\ &= 0. \end{aligned}$$

car chaque terme fait apparaître deux fois un même facteur. Donc, à fortiori,  $\forall x, y$  de  $\mathcal{V}$  :

$$B_{\omega_1}(x, y) = f_{1,2,3}(x, \cdot, \cdot) \wedge f_{1,2,3}(y, \cdot, \cdot) \wedge f_{1,2,3}(\cdot, \cdot, \cdot) = 0.$$

Ainsi, par linéarité,  $Q_\omega$  est nulle pour tout élément  $\omega$  de la première variété des sécantes  $\text{Sec}^{(1)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ ; i.e.  $\omega$  appartient au lieu exceptionnel  $\text{Exc}(\Phi)$  de l'application  $\Phi$ .

Considérons maintenant  $[\omega_2] = [f_{1,2,3} + f_{4,5,6}]$  dans  $\text{Sec}^{(2)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ . Pour tous  $x, y$  appartenant à  $\mathcal{V}$ , on a :

$$\begin{aligned} B_{\omega_2}(x, y) &= [f_1(x)f_{2,3} - f_2(x)f_{1,3} + f_3(x)f_{1,2} + f_4(x)f_{5,6} - f_5(x)f_{4,6} + f_6(x)f_{4,5}] \\ &\quad \wedge [f_1(y)f_{2,3} - f_2(y)f_{1,3} + f_3(y)f_{1,2} + f_4(y)f_{5,6} - f_5(y)f_{4,6} + f_6(y)f_{4,5}] \\ &\quad \wedge (f_{1,2,3} + f_{4,5,6}), \\ &= 0 \end{aligned}$$

car, là encore, chaque terme fait apparaître deux fois un même facteur  $f_i$  parmi  $f_1, \dots, f_6$ . Ainsi, pour tous  $f_i$  de  $\mathcal{V}^*$ ,

$$\text{si } \omega = f_{1,2,3} + f_{4,5,6} \text{ alors } Q_\omega = 0.$$

L'ouvert  $\mathcal{U} = \{[f_{1,2,3} + f_{4,5,6}] \mid f_i \in \mathcal{V}^*\}$  de  $\text{Sec}^{(2)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  est donc inclus dans le fermé  $\text{Exc}(\Phi)$ . Comme  $\text{Sec}^{(2)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  est irréductible, on a  $\overline{\mathcal{U}} = \text{Sec}^{(2)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)) \subset \text{Exc}(\Phi)$ . Tout élément de la deuxième variété des sécantes  $\text{Sec}^{(2)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$  appartient au lieu exceptionnel de l'application  $\Phi$ .

(3) Considérons trois sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{V}^*$  de dimension 3 vérifiant les deux conditions (i) et (ii) de la Définition 2.2.6. Cherchons tout d'abord une base particulière de  $\mathcal{V}^*$  dans laquelle peuvent s'exprimer les sous-espaces vectoriels  $W_i$ .

Soit une base  $(f, g)$  du plan  $Z^{1,2}$  où  $Z^{1,2} = W_3 \cap (W_1 \oplus W_2)$  :

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 \in (W_1 \oplus W_2) \cap W_3, \\ g &= g_1 + g_2 \in (W_1 \oplus W_2) \cap W_3 \end{aligned}$$

où  $f_i, g_i \in W_i$ . La famille  $(f_1, g_1)$  d'éléments de  $W_1$  est libre car, dans le cas contraire, une combinaison linéaire non nulle de  $f$  et de  $g$  serait égale à une combinaison linéaire de  $f_2$  et de  $g_2$ . Il y aurait alors un élément non nul dans  $W_2 \cap W_3$ . Ce qui contredirait la condition (ii) de la Définition 2.2.6.

Il en est de même pour la famille  $(f_2, g_2)$ . Nous pouvons ainsi renommer les vecteurs :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= f_1 = f - f_2 \in W_1 \cap (W_2 \oplus W_3) = Z^{2,3}, \\ \varphi_2 &= g_1 = g - g_2 \in W_1 \cap (W_2 \oplus W_3) = Z^{2,3}, \\ \varphi_3 &= f_2 = f - f_1 \in W_2 \cap (W_1 \oplus W_3) = Z^{1,3}, \\ \varphi_4 &= g_2 = g - g_1 \in W_2 \cap (W_1 \oplus W_3) = Z^{1,3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Z^{2,3} &= \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle, \\ Z^{1,3} &= \langle \varphi_3, \varphi_4 \rangle. \end{aligned}$$

Les deux familles  $(\varphi_1, \varphi_2)$  et  $(\varphi_3, \varphi_4)$  forment respectivement une base de  $Z^{2,3}$  et  $Z^{1,3}$  et ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants puisque  $W_1$  et  $W_2$  sont en somme directe, par (i) de la Définition 2.2.6. Complétons ces deux familles en des bases de  $W_1$  et de  $W_2$  :

$$W_1 = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_5 \rangle \quad \text{et} \quad W_2 = \langle \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6 \rangle$$

où  $(\varphi_1, \dots, \varphi_6)$  est une famille libre d'après (i) de la Définition 2.2.6. Avec ces notations, les deux vecteurs  $f = \varphi_1 + \varphi_3$  et  $g = \varphi_2 + \varphi_4$  de  $W_3$  étant indépendants, nous avons :

$$W_3 = \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_2 + \varphi_4, z \rangle$$

où l'élément  $z$  de  $\mathcal{V}^*$  est tel que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_6, z)$  est une famille libre puisque  $W_3$  n'est pas inclus dans  $W_1 \oplus W_2$  d'après la condition (ii) de la Définition 2.2.6. En notant  $z = \varphi_7$ , la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_7)$  forme une base de  $\mathcal{V}^*$ . On peut finalement écrire :

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_5 \rangle, \\ W_2 &= \langle \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6 \rangle, \\ W_3 &= \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_2 + \varphi_4, \varphi_7 \rangle. \end{aligned} \tag{38}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} Z^{2,3} &= \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle, \\ Z^{1,3} &= \langle \varphi_3, \varphi_4 \rangle, \\ Z^{1,2} &= \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_2 + \varphi_4 \rangle. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Pi &:= Z^{1,2} + Z^{1,3} + Z^{2,3}, \\ &= Z^{1,2} \oplus Z^{1,3} = Z^{1,2} \oplus Z^{2,3} = Z^{1,3} \oplus Z^{2,3}, \\ &= \langle \varphi_1, \dots, \varphi_4 \rangle. \end{aligned} \tag{39}$$

Le sous-espace vectoriel  $\Pi$  est donc de dimension 4.

D'après la description de la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_7)$  de  $\mathcal{V}^*$  et les trois relations inscrites en (38), pour chaque forme trilinéaire alternée  $\omega$  définie par les trois sous-espaces vectoriels  $W_i$ , il existe trois complexes non nuls  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que :

$$\omega = \alpha \varphi_{1,2,5} + \beta \varphi_{3,4,6} + \gamma (\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7. \tag{40}$$

Notons  $(v_1, \dots, v_7)$  la base de  $\mathcal{V}$ , duale de la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_7)$  de  $\mathcal{V}^*$ ,  $Q_\omega$  la forme quadratique associée par  $\Phi$  à  $\omega$  et  $B_\omega$  la forme bilinéaire associée à  $Q_\omega$ .

(a) Comme  $\Pi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \rangle$ , on a  $\Pi^\perp = \langle v_5, v_6, v_7 \rangle$ . Montrons que  $\Pi^\perp$  est inclus dans le noyau de la forme bilinéaire  $B_\omega$ . D'après (40), pour tout  $x \in \mathcal{V}$ , on a :

$$\begin{aligned} \omega(x, \cdot, \cdot) &= \alpha (\varphi_1(x)\varphi_{2,5} - \varphi_2(x)\varphi_{1,5} + \varphi_5(x)\varphi_{1,2}) \\ &\quad + \beta (\varphi_3(x)\varphi_{4,6} - \varphi_4(x)\varphi_{3,6} + \varphi_6(x)\varphi_{3,4}) \\ &\quad + \gamma [(\varphi_1 + \varphi_3)(x)(\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7 - (\varphi_2 + \varphi_4)(x)(\varphi_1 + \varphi_3) \wedge \varphi_7 \\ &\quad \quad + \varphi_7(x)(\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4)]. \end{aligned} \tag{41}$$

Considérons  $y = v_5$ . Par définition, on a  $\varphi_i(v_5) = 0$  pour tout  $i \neq 5$ . Donc, d'après (41),  $\omega(v_5, \cdot, \cdot) = \alpha \varphi_{1,2}$ . Ainsi,

$$\omega(v_5, \cdot, \cdot) \wedge \omega(\cdot, \cdot, \cdot) = \alpha\beta \varphi_{1,2,3,4,6} + \alpha\gamma \varphi_{1,2,3,4,7}.$$

Le terme  $\varphi_{1,2,3,4}$  apparaît dans les deux facteurs de la somme précédente, donc, vu que chacun des termes de  $\omega(x, \cdot, \cdot)$  fait apparaître au moins une fois un facteur  $\varphi_i$  parmi  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$  et que, pour chaque  $i \in \{1, \dots, 4\}$ ,  $\varphi_{1,2,3,4} \wedge \varphi_i = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{V}, \quad \omega(x, \cdot, \cdot) \wedge \omega(v_5, \cdot, \cdot) \wedge \omega(\cdot, \cdot, \cdot) &= 0, \\ \text{soit } \forall x \in \mathcal{V}, \quad B_\omega(x, v_5) &= 0. \end{aligned}$$

Il en va de même pour  $y = v_6$  :

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad B_\omega(x, v_6) = 0.$$

En ce qui concerne  $y = v_7$ , on a :

$$\begin{aligned} \omega(v_7, \cdot, \cdot) &= \gamma(\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4), \\ &= \gamma(\varphi_{1,2} + \varphi_{1,4} - \varphi_{2,3} + \varphi_{3,4}), \\ \text{et } \omega(v_7, \cdot, \cdot) \wedge \omega(\cdot, \cdot, \cdot) &= \alpha(\beta\varphi_{1,2,3,4,6} + \gamma\varphi_{1,2,3,4,7} + \gamma\varphi_{1,4,3,2,7} - \gamma\varphi_{2,3,1,4,7} \\ &\quad + \alpha\varphi_{3,4,1,2,5} + \gamma\varphi_{3,4,1,2,7}), \\ &= \alpha\varphi_{1,2,3,4} \wedge (\alpha\varphi_5 + \beta\varphi_6). \end{aligned}$$

Comme précédemment, le terme  $\varphi_{1,2,3,4}$  apparaît dans les deux facteurs de  $\omega(v_7, \cdot, \cdot)$ . On a donc aussi :

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad B_\omega(x, v_7) = 0.$$

D'où finalement :

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \Pi^\perp, \quad B_\omega(x, y) = 0.$$

Ainsi,  $\Pi^\perp$  est contenu dans le noyau de la forme quadratique  $Q_\omega$ .

Nous allons établir que  $\Pi^\perp$  est égal au noyau de  $Q_\omega$ , mais pour cela nous nécessitons une description plus poussée de cette forme quadratique, notamment le point (3b).

(b) Intéressons-nous à  $B_\omega$  sur chaque  $(Z^{i,j})^\perp$ . Étudions  $Z^{2,3} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$  par exemple. On a  $(Z^{2,3})^\perp = \langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \rangle$ . Comme  $Z^{2,3}$  est inclus dans  $\Pi$ ,  $\Pi^\perp = \langle v_5, v_6, v_7 \rangle$  est inclus dans  $(Z^{2,3})^\perp$ , nous avons notamment :

$$\forall x \in (Z^{2,3})^\perp, \forall i \in \{5, 6, 7\}, \quad B_\omega(v_i, x) = 0.$$

Il reste à calculer  $B_\omega(x, y)$  pour  $x, y \in \{v_3, v_4\}$ .

$$\begin{aligned} \omega(v_3, \cdot, \cdot) &= \varphi_{4,6} + (\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7 = \varphi_{4,6} + \varphi_{2,7} + \varphi_{4,7}, \\ \omega(v_4, \cdot, \cdot) &= -\varphi_{3,6} - (\varphi_1 + \varphi_3) \wedge \varphi_7 = -\varphi_{3,6} + \varphi_{1,7} - \varphi_{3,7}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \omega(v_3, \cdot, \cdot) \wedge \omega(v_3, \cdot, \cdot) &= (\varphi_{4,6} + \varphi_{2,7} + \varphi_{4,7}) \wedge (\varphi_{4,6} + \varphi_{2,7} + \varphi_{4,7}), \\ &= \varphi_{4,6,2,7} + \varphi_{2,7,4,6} = 2\varphi_{2,4,6,7}, \\ \text{et } B_\omega(v_3, v_3) &= 2\varphi_{2,4,6,7} \wedge [\varphi_{1,2,5} + \varphi_{3,4,6} \\ &\quad + (\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7], \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\omega(v_3, \cdot, \cdot) \wedge \omega(v_4, \cdot, \cdot) &= (\varphi_{4,6} + \varphi_{2,7} + \varphi_{4,7}) \wedge (-\varphi_{3,6} + \varphi_{1,7} - \varphi_{3,7}), \\
&= -\varphi_{4,6,1,7} - \varphi_{4,6,3,7} - \varphi_{2,7,3,6} - \varphi_{4,7,3,6}, \\
&= -\varphi_{1,4,6,7} - \varphi_{2,3,6,7}, \\
\text{et} \quad B_\omega(v_3, v_4) &= (-\varphi_{1,4,6,7} - \varphi_{2,3,6,7}) \wedge [\varphi_{1,2,5} + \varphi_{3,4,6} \\
&\quad + (\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7], \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\omega(v_4, \cdot, \cdot) \wedge \omega(v_4, \cdot, \cdot) &= (-\varphi_{3,6} + \varphi_{1,7} - \varphi_{3,7}) \wedge (-\varphi_{3,6} + \varphi_{1,7} - \varphi_{3,7}), \\
&= 2\varphi_{1,3,6,7}, \\
\text{et} \quad B_\omega(v_4, v_4) &= 2\varphi_{1,3,6,7} \wedge [\varphi_{1,2,5} + \varphi_{3,4,6} \\
&\quad + (\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7], \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in (Z^{2,3})^\perp, \quad B_\omega(x, y) &= 0, \\
\text{soit} \quad B_{\omega|_{(Z^{2,3})^\perp}} &= 0.
\end{aligned}$$

Il en est exactement de même sur  $(Z^{1,2})^\perp$  et  $(Z^{1,3})^\perp$ .

Montrons que  $Q_\omega$  est caractérisée, à un scalaire près, par le fait d'être non identiquement nulle, le fait que  $\Pi^\perp \subset \ker Q_\omega$  et par la condition (3b) du Théorème 2.2.9.

Le sous-espace  $\Pi^\perp = \langle v_5, v_6, v_7 \rangle$  étant inclus dans le noyau de  $Q_\omega$  d'après (3a), il reste à étudier  $Q_\omega$  sur le sous-espace vectoriel  $W := \langle v_1, \dots, v_4 \rangle$ . Comme  $Q_{\omega|_{(Z^{i,j})^\perp}} = 0$  et que  $(Z^{2,3})^\perp \cap W = \langle v_3, v_4 \rangle$  et  $(Z^{1,3})^\perp \cap W = \langle v_1, v_2 \rangle$ , l'expression matricielle de la restriction  $B_{\omega|_W}$  de  $B_\omega$  à  $W$  muni de la base  $(v_1, \dots, v_4)$  est de la forme :

$$B_{\omega|_W} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Par ailleurs,  $(Z^{1,2})^\perp \cap W = \langle v_1 - v_3, v_2 - v_4 \rangle$ . D'après (3b),

$$Q_\omega(v_1 - v_3) = B_\omega(v_1, v_1) - 2B_\omega(v_1, v_3) + B_\omega(v_3, v_3) = 0.$$

Or,  $Q_\omega(v_1) = Q_\omega(v_3) = 0$  d'après (42), donc  $B_\omega(v_1, v_3) = 0$ . De même,  $Q_\omega(v_2 - v_4) = 0$  implique  $B_\omega(v_2, v_4) = 0$ . De plus,

$$\begin{aligned}
\text{donc} \quad Q_\omega(v_1 - v_3 + v_2 - v_4) &= 0, \\
\text{donc} \quad -2B_\omega(v_1, v_4) - 2B_\omega(v_2, v_3) &= 0, \\
\text{donc} \quad B_\omega(v_1, v_4) &= -B_\omega(v_2, v_3).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de la matrice de  $B_{\omega|W}$  dans la base  $(v_1, \dots, v_4)$  est la suivante :

$$B_{\omega|W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

D'où finalement :

$$[Q_{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant indépendante des coefficients  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , tout le plan  $\{[\omega] = [\alpha \varphi_{1,2,5} + \beta \varphi_{3,4,6} + \gamma (\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*]\}$  est bien contracté par  $\Phi$  en un seul point de  $\mathbb{P}(\text{Sym}^2 \mathcal{V}^*)$ , noté  $[Q_{123}]$  :

$$\forall \omega = \alpha \varphi_{1,2,5} + \beta \varphi_{3,4,6} + \gamma (\varphi_1 + \varphi_3) \wedge (\varphi_2 + \varphi_4) \wedge \varphi_7, \quad [Q_{\omega}] = [Q_{123}].$$

D'après l'expression matricielle précédente,  $Q_{123}$  est de rang 4 et son lieu singulier, i.e. son noyau, est  $\ker Q_{123} = \Pi^{\perp}$ . Elle contient trois sous-espaces vectoriels particuliers : les trois sous-espaces  $(Z^{i,j})^{\perp}$  ; c'est-à-dire

$$Q_{123|_{(Z^{i,j})^{\perp}}} = 0, \quad \forall i, j \text{ deux à deux distincts.}$$

Les deux conditions (3a) et (3b) du Théorème 2.2.9 définissent bien  $Q_{123}$  à un scalaire près.

□

**Remarque 2.2.10.** — Considérons  $[\omega]$  en position générale, définie par trois 3-plans  $W_i$  et notons  $Z^{i,j} := (W_i \oplus W_j) \cap W_k$ . Alors, les restrictions à  $Z^{1,2}$  des deux projections canoniques de l'espace  $W_1 \oplus W_2$  sur  $W_2$  et sur  $W_1$ , notées respectivement  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \alpha : Z^{1,2} &\longrightarrow W_2, \\ \beta : Z^{1,2} &\longrightarrow W_1 \end{aligned}$$

sont des isomorphismes de  $Z^{1,2}$  dans  $Z^{1,3}$  pour  $\alpha$  (respectivement de  $Z^{1,2}$  dans  $Z^{2,3}$  pour  $\beta$ ). De plus, si l'on note  $\gamma$  la restriction à  $Z^{2,3}$  de la projection canonique de  $W_2 \oplus W_3$  sur  $W_2$ , on a :  $\alpha = -\gamma \circ \beta$ .

Ainsi, les trois espaces  $Z^{i,j}$  sont canoniquement isomorphes.

*Démonstration.* — En conservant les notations de la démonstrations du théorème 2.2.9,  $\alpha(\varphi_1 + \varphi_3) = \varphi_3$  et  $\alpha(\varphi_2 + \varphi_4) = \varphi_4$  donc  $\alpha(Z^{1,2}) = Z^{1,3}$ . De même,  $\beta(\varphi_1 + \varphi_3) = \varphi_1$  et  $\beta(\varphi_2 + \varphi_4) = \varphi_2$  donc  $\beta(Z^{1,2}) = Z^{2,3}$ . Ainsi,  $\alpha$  et  $\beta$  sont bien des isomorphismes. Par ailleurs,  $\gamma \circ \beta(\varphi_1 + \varphi_3) = \gamma(\varphi_3) = \gamma[(\varphi_1 + \varphi_3) - \varphi_1] = -\varphi_1$  et  $\gamma \circ \beta(\varphi_2 + \varphi_4) = \gamma(\varphi_2) = \gamma[(\varphi_2 + \varphi_4) - \varphi_4] = -\varphi_4$ . Donc  $\gamma \circ \beta = -\alpha$ .  $\square$

**Remarque 2.2.11.** — Soit  $[\omega]$  en position générale, avec les notations  $W_1, W_2, W_3, Z^{i,j}$  et  $\Pi$  du Théorème 2.2.9. Nous avons vu que les deux conditions (3a) et (3b) définissaient  $[Q_\omega] = [Q_{123}]$ .

Plus géométriquement,  $[Q_{123}] \in \mathbb{P}(\text{Sym}^2 \mathcal{V}^*)$  est caractérisée par son lieu singulier :  $\Pi^\perp$ , par le fait que sa restriction à  $\overline{[Q_{123}]} \in \mathbb{P}(\text{Sym}^2(\mathcal{V}/\Pi^\perp)^*)$  contient les trois droites projectives  $\mathbb{P}\left(\left(Z^{i,j}\right)^\perp/\Pi^\perp\right) \subset \mathbb{P}(\mathcal{V}/\Pi^\perp)$  ne s'intersectant pas deux à deux (c'est-à-dire que la restriction de  $\overline{Q_{123}}$  à  $\mathcal{V}/\Pi^\perp$  est nulle) et par le fait qu'elle n'est pas identiquement nulle.

*Démonstration.* — En conservant les notations de la démonstrations du théorème 2.2.9, nous avons :

$$\begin{aligned} (Z^{1,3})^\perp/\Pi^\perp &= \langle v_1, v_2 \rangle, \\ (Z^{2,3})^\perp/\Pi^\perp &= \langle v_3, v_4 \rangle, \\ (Z^{1,2})^\perp/\Pi^\perp &= \langle v_1 - v_3, v_2 - v_4 \rangle. \end{aligned}$$

Donc les trois droites projectives  $\mathbb{P}\left(\left(Z^{i,j}\right)^\perp/\Pi^\perp\right)$  ne s'intersectent pas deux à deux. Or, il n'existe qu'une seule telle quadrique dans  $\mathbb{P}^3$ , d'après le lemme suivant :

**Lemme 2.2.12.** — *Il n'existe qu'une seule quadrique non nulle dans  $\mathbb{P}^3$  contenant trois droites projectives ne s'intersectant pas deux à deux. De plus, cette quadrique est lisse.*

*Démonstration.* — Parmi les quadriques non nulles de  $\mathbb{P}^3$ , seules celles de rang 4 peuvent contenir trois droites projectives qui ne s'intersectent pas deux à deux.

En effet, les quadriques non nulles de  $\mathbb{P}^3$  peuvent être classées par leur rang : 1, 2, 3 ou 4.

Considérons la quadrique  $Q_1$  de rang 1 d'équation  $x^2 = 0$ . Toute droite projective contenue dans  $Q_1$  correspond à un plan vectoriel d'équation

$$\begin{cases} x = 0, \\ by + cz + dt = 0. \end{cases}$$

Deux droites projectives contenues dans  $Q_1$ , ne s'intersectant pas, correspondent donc à deux hyperplans vectoriels de  $\mathbb{C}^3$  dont l'intersection contient une droite vectorielle. Ainsi, la quadrique  $Q_1$  ne peut contenir deux droites projectives (et à fortiori trois droites projectives) ne s'intersectant pas.

Considérons la quadrique  $Q_2$  de rang 2 d'équation  $xy = 0$ . Toute droite projective contenue dans  $Q_2$  correspond à un plan vectoriel d'équation

$$\begin{cases} x = 0, \\ by + cz + dt = 0. \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} y = 0, \\ ax + cz + dt = 0. \end{cases}$$

Si l'on considère trois droites projectives contenues dans  $Q_2$ , deux d'entre elles sont forcément simultanément du premier type ou bien du second type. Comme précédemment, ces deux droites ne peuvent être d'intersection non réduite à  $\{0\}$ .

Enfin, considérons la quadrique  $Q_3$  de rang 3 d'équation  $xy + z^2 = 0$ . Étudions l'équation d'un plan vectoriel correspondant à une droite projective  $D$  contenue dans la quadrique  $Q_3$ . Soit

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0. \end{cases}$$

Le fait que  $D$  soit contenue dans  $Q_3$  impose la nullité des coefficients  $d$  et  $d'$ . En effet, si ces deux coefficients étaient non nuls, quitte à faire un changement de variables, l'équation vectorielle de  $D$  serait de la forme :

$$\begin{cases} t = x, \\ t = y. \end{cases}$$

Or cette droite projective n'ai pas contenue dans  $Q_3$ . De même, si un seul de ces deux coefficients était nul, quitte à faire un changement de variables, l'équation vectorielle de  $D$  serait de la forme :

$$\begin{cases} t = x, \\ 0 = y. \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} t = x, \\ 0 = x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Cette droite projective n'ai pas non plus contenue dans  $Q_3$ .

Ainsi, les équations vectorielles d'une droite projective contenue dans  $Q_3$  ne font intervenir que les coordonnées  $x, y$  et  $z$ . Tous les points de coordonnées  $(0, 0, 0, t)$ , où  $t$  varie dans  $\mathbb{C}$ , appartiennent donc à une telle droite. Ainsi,  $Q_3$  ne peut contenir deux ni trois droites projectives ne s'intersectant pas deux à deux.

Comme toute quadrique de  $\mathbb{P}^3$  de rang 1, 2 ou 3 peut se ramener à une des quadriques  $Q_i$  étudiées, via un changement de coordonnées, il vient que, parmi les quadriques non nulles de  $\mathbb{P}^3$ , seules celles de rang 4 peuvent contenir trois droites projectives qui ne s'intersectent pas deux à deux.

Soient  $D_1, D_2$  et  $D_3$  trois droites projectives de  $\mathbb{P}^3$  ne s'intersectant pas deux à deux. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2)) &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^3 H^0(D_i, \mathcal{O}(2)) \\ Q &\longmapsto [\text{res}_{D_1}(Q), \text{res}_{D_2}(Q), \text{res}_{D_3}(Q)] \end{aligned}$$

où  $\text{res}_{D_i}(Q)$  est la restriction de  $Q$  à la droite  $D_i$ . Comme les deux dimensions  $\dim(H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2)))$  et  $\dim(\bigoplus_{i=1}^3 H^0(D_i, \mathcal{O}(2)))$  sont respectivement égales à 10 et à 9, le noyau  $K := \ker(f)$  est de dimension au moins égale à 1. Si la dimension de  $K$  était supérieure ou égale à 2, alors  $K \cap \{\det = 0\} \neq \{0\}$  serait au moins de dimension 1. Mais alors on aurait une forme quadratique singulière qui s'annulerait sur les trois droites ; ce qui est impossible d'après la remarque initiale. Ainsi, le noyau de  $f$  est de dimension 1 : il n'existe donc bien qu'une seule quadrique dans  $\mathbb{P}^3$  contenant trois droites projectives ne s'intersectant pas deux à deux. De plus, d'après ce qui précède, cette quadrique est de rang 4, donc lisse et irréductible.  $\square$

$\square$

Pour simplifier l'écriture, on notera  $\text{Gr}(3, 7)$  à la place de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$ .

**Corollaire 2.2.13 (du Théorème 2.2.9).** — *Chaque élément  $[\omega]$  de la troisième variété des sécantes  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  est dégénéré, c'est-à-dire si  $[\omega]$  appartient à  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  alors le déterminant de la forme quadratique associée  $Q_\omega$  est nul.*

*Démonstration.* — Soit  $PG$  l'ouvert de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  constitué des éléments en position générale, c'est-à-dire vérifiant la condition de la Définition 2.2.6. D'après (3a) du Théorème 2.2.9, pour tout  $[\omega] \in PG$ , le rang de la forme quadratique  $Q_\omega$  est 4. L'ouvert  $PG$  est donc inclus dans l'ensemble  $F := \{[\omega] \in \text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7)) \mid \text{rang}(Q_\omega) \leq 4\}$  qui est un fermé de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  car l'application  $\text{rang} \circ \Phi$  qui à  $\omega \in \Lambda^3 \mathcal{V}^*$  associe le rang de  $Q_\omega$  est semi-continue inférieurement. Ainsi, l'adhérence  $\overline{PG}$  de  $PG$  dans  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  est incluse dans  $F$ . Or,  $\overline{PG} = \text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  par irréductibilité de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  d'où

$$\forall [\omega] \in \text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7)), \quad [\omega] \text{ est dégénéré.}$$

$\square$

Pour étudier l'ensemble des  $[\omega]$  de  $\mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$  dégénérés, nous allons décrire l'équation, notée  $D$ , de la composée de l'application  $\Phi$  et du déterminant  $\det(\Phi)$  pour  $\omega \in \Lambda^3 \mathcal{V}^*$ . Notons

$$\Delta := \{[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*) \mid \det(Q_\omega) = 0\}.$$

Comme le déterminant sur les matrices d'ordre 7 est de degré 7 et que l'application  $\Phi$  est de degré 3 (voir (3) de la Remarque 2.2.2),  $D$  est de degré 21. D'après le Corollaire 2.2.13,  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  est incluse dans  $\Delta$ . En 1931, J.A. SCHOUTEN [Sch31] a étudié  $\text{Gr}(3, 7)$  et A. LASCOUX [Las81] a décrit  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  comme étant une hypersurface de  $\mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*)$  de degré 7.

**Théorème 2.2.14.** — *L'ensemble  $\Delta = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}^*) \mid \det(Q_\omega) = 0\}$  et la troisième variété des sécantes  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  de  $\text{Gr}(3, 7)$  coïncident. En notant  $D$  l'équation de  $\Delta$  et  $P_7$  celle de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$ , il vient :*

$$D = \lambda P_7^3,$$

où  $P_7$  est un polynôme homogène de degré 7 et  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

*Démonstration.* — D'après la démonstration du Corollaire 2.2.13,  $P_7$  divise  $D$  avec une multiplicité supérieure ou égale à 3. En effet, pour tout  $[\omega]$  appartenant à  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$ , le rang de  $Q_\omega$  est inférieur ou égal à 4; tous les mineurs d'ordre 5 et 6 sont donc nuls. Or, pour une matrice  $M = (M_1, \dots, M_7)$  où  $M_i$  représente la  $i$ -ème colonne de  $M$ , la différentielle de l'application déterminant en  $M$  calculée en  $H = (H_1, \dots, H_7)$  est

$$d_{(M_1, \dots, M_7)}(H_1, \dots, H_7) = \sum_{i=1}^7 \det(M_1, \dots, M_{i-1}, H_i, M_{i+1}, \dots, M_7).$$

Si tous les mineurs d'ordre 6 de  $M$  sont nuls, la différentielle de l'application déterminant en  $M$  est identiquement nulle et si de plus tous les mineurs d'ordre 5 de  $M$  sont nuls, les dérivées partielles d'ordre 2 de l'application déterminant en  $M$  le sont aussi. Ainsi,  $D = QP_7^n$ , où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 3 et  $Q \in \mathbb{C}[X]$ . Or, le degré de  $P_7$  est 7 d'après [Las81]. Ainsi la seule possibilité est  $n = 3$  et  $Q \in \mathbb{C}^*$ , soit

$$D = \lambda P_7^3,$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

Les éléments de  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  correspondent bien aux formes trilinéaires dégénérées, c'est-à-dire aux formes trilinéaires  $\omega$  telles que la forme quadratique  $Q_\omega$  associée par  $\Phi$  à  $\omega$  est de déterminant nul.  $\square$

L'hypersurface  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  a été abordée dans l'article [AOP09] par une description du cube de  $P_7$  avec  $\det(\Psi_\omega) = 2P_7^3$ , où  $\Psi_\omega : \Lambda^2 \mathbb{C}^7 \rightarrow \Lambda^5 \mathbb{C}^7$  est l'opérateur de multiplication par  $\omega \in \Lambda^3 \mathbb{C}^7$  fixée.

Par ailleurs, dans l'article de [SK77], il est établi que le degré du polynôme invariant relatif de  $\Lambda^3 \mathcal{V}$  (voir preuve du Lemme 2.2.15) est égal à 7 et que les équations des hypersurfaces irréductibles du lieu singulier de  $\Lambda^3 \mathcal{V}^*$  sont des multiples

de ce polynôme homogène, à une constante près. Cependant, le lieu des zéros de cet invariant relatif n'y est pas identifié. Nous allons voir dans le lemme suivant que l'invariant relatif n'est autre que le polynôme  $P_7$  décrivant  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, 7))$  (à une constante près).

**Lemme 2.2.15.** — *Soit l'action canonique de  $GL_7$  sur  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ . Il n'existe qu'une seule orbite dense sous l'action de  $GL_7$ . Pour  $\omega \in \Lambda^3\mathcal{V}^*$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *le point  $[\omega]$  de  $\mathbb{P}(\Lambda^3\mathcal{V})$  appartient à  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ ,*
- (2) *l'orbite  $Ob_{GL_7}(\omega) = \{g \cdot \omega \mid g \in GL_7\}$  n'est pas dense dans  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ .*

*Démonstration.* — Notons  $\rho$  la représentation canonique sur  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ . D'après la Proposition 8 au §5 de [SK77], le triplet  $(GL_7, \rho, \Lambda^3\mathcal{V}^*)$  est un espace vectoriel préhomogène régulier possédant un invariant relatif  $f$ . Ainsi, il existe  $\omega_1 \in \Lambda^3\mathcal{V}^*$  telle que son orbite sous  $GL_7$  soit dense (donc ouverte). Comme l'espace vectoriel  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  est irréductible et que deux orbites denses sont ouvertes, deux orbites denses s'intersectent et sont donc égales : il n'y a donc bien qu'une seule orbite dense sous l'action de  $GL_7$ .

Par ailleurs, le fermé de Zariski de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ , noté  $S$  et appelé lieu singulier, défini comme étant le complémentaire de cette orbite ouverte, est de codimension 1 et irréductible (voir [SK77]). Cette hypersurface est le lieu d'annulation de l'invariant relatif  $f$  qui est un polynôme homogène irréductible de degré 7.

Soit  $\omega$  un élément de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  tel que  $[\omega]$  appartienne à  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ . Son orbite est incluse dans l'hypersurface de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  correspondant à  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ , puisque si  $g \in GL_7$  et  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ , alors  $g \cdot \omega = g \cdot \omega_1 + g \cdot \omega_2 + g \cdot \omega_3$  et  $[g \cdot \omega] \in \text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ . Comme cette orbite est incluse dans un fermé propre, elle ne peut être dense et donc  $\omega$  appartient au lieu singulier  $S$  de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ . L'hypersurface  $\{\omega \in \Lambda^3\mathcal{V}^* \mid [\omega] \in \text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))\}$  est donc incluse dans  $S$ . Par la proposition 12 de §4 de [SK77], le polynôme  $P_7$  est, à une constante près, un multiple de  $f$ , où  $P_7$  est le polynôme irréductible décrivant  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ . Comme ces deux polynômes ont même degré, il sont (à une constante multiplicative près) égaux. D'où :

$$\mathbb{P}(S) = \text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)).$$

□

**Corollaire 2.2.16.** — *Pour  $\omega$  appartenant à  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *la forme trilinéaire  $\omega$  est non-dégénérée, c'est-à-dire  $\det Q_\omega \neq 0$ ,*
- (2) *l'orbite de  $\omega$  sous l'action de  $GL_7$  est dense dans  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ ,*

(3) le point  $[\omega]$  de  $\mathbb{P}(\Lambda^3\mathcal{V}^*)$  n'appartient pas à  $\text{Sec}^{(3)}(\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*))$ .

**Corollaire 2.2.17.** — *Considérons deux formes trilinéaires alternées  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , non-dégénérées de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ . Leurs stabilisateurs sous l'action de  $SL_7 : \text{Stab}(\omega_i) \cap SL_7$  sont alors conjugués<sup>(2)</sup>.*

*Le groupe de Lie  $G_2$  peut donc être défini, à conjugaison près<sup>(3)</sup>, comme le stabilisateur sous l'action de  $SL_7$ , de n'importe quelle forme trilinéaire alternée non-dégénérée de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$ .*

*Démonstration.* — Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux éléments de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  non-dégénérés. Les orbites  $Ob_{SL_7}(\omega_1)$  et  $Ob_{SL_7}(\omega_2)$  sont denses donc égales d'après le Lemme 2.2.15. Il existe donc  $g_0 \in SL_7$  tel que  $g_0 \cdot \omega_1 = \omega_2$ . Notons  $St_1 = \text{Stab}(\omega_1) \cap SL_7$  et  $St_2 = \text{Stab}(\omega_2) \cap SL_7$  les stabilisateurs sous  $SL_7$  de  $\omega_1$  et de  $\omega_2$ . Alors, pour tout  $g \in St_1$ , comme  $g \cdot \omega_1 = \omega_1$ , on a  $g_0 g g_0^{-1} \cdot \omega_2 = \omega_2$  donc  $g_0 St_1 g_0^{-1} \subset St_2$ . L'autre inclusion s'obtient de la même manière, d'où

$$g_0 St_1 g_0^{-1} = St_2.$$

D'après le Théorème 1.2.10, le groupe de Lie  $G_2$  est le stabilisateur sous  $SL_7$  de la forme trilinéaire alternée non-dégénérée  $\omega_0$ . Il peut être défini, à conjugaison près, par n'importe quelle autre forme trilinéaire alternée non-dégénérée.  $\square$

**Corollaire 2.2.18.** — *Le quotient  $SL_7/G_2$  est isomorphe à l'orbite, sous l'action de  $SL_7$ , de n'importe quelle forme trilinéaire alternée non-dégénérée, donc est isomorphe à l'ouvert dense de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  :*

$$\forall \omega \in \Lambda^3\mathcal{V}^* \text{ non-dégénérée, } SL_7/G_2 \simeq Ob_{SL_7}(\omega).$$

*Démonstration.* — D'après le corollaire précédent, le groupe  $G_2$  est isomorphe au stabilisateur  $\text{Stab}_{SL_7}(\omega)$  pour n'importe quelle forme trilinéaire alternée non-dégénérée. Ainsi, pour tout  $\omega$  de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  non-dégénérée,

$$SL_7/G_2 \simeq SL_7/\text{Stab}_{SL_7}(\omega) \simeq Ob_{SL_7}(\omega).$$

$\square$

**Remarque 2.2.19.** — Le fait que les stabilisateurs de deux formes trilinéaires alternées non-dégénérées de  $\Lambda^3\mathcal{V}^*$  soient conjugués est indiqué dans [SK77], (8)§5 Proposition 8 où  $(GL_7, \Lambda^3\mathcal{V})$  apparaît comme une espace préhomogène.

La proposition 22.12 de [FH91] énonce que le groupe  $G_2$  peut être défini à partir de n'importe quelle forme trilinéaire alternée générale.

<sup>(2)</sup> par un élément de  $SL_7$ .

<sup>(3)</sup> par un élément de  $GL_7$ .



## CHAPITRE 3

### ÉTUDE DES $G_2$ -FIBRÉS PRINCIPAUX ET DE LA NOTION DE (SEMI)-STABILITÉ

Suite aux définitions du groupe de Lie exceptionnel simple  $G_2$  énoncées précédemment, nous consacrons ce nouveau chapitre à l'étude des  $G_2$ -fibrés principaux et à l'espace de modules de  $G_2$ -fibrés principaux semistables. Nous commençons par rappeler la définition de la notion de  $G$ -fibré principal sur une courbe projective connexe lisse où  $G$  est un groupe algébrique, de la notion de réduction et d'extension de groupe de structure ainsi que les notions de semistabilité et de stabilité pour un  $G$ -fibré-principal. Une étude des  $G_2$ -fibrés principaux est menée en fonction des réductions aux sous-groupes  $SL_3$  et  $SO_4$  que peuvent admettre les  $G_2$ -fibrés principaux. De plus, l'espace de modules  $M_C(G_2)$  constitué des  $G_2$ -fibrés principaux semistable est analysé, avec une description explicite de son lieu singulier.

#### 3.1. Définitions générales relatives aux $G$ -fibrés principaux

*Notation 1.* — Dans ce qui suit,  $G$  et  $H$  désignent des groupes algébriques connexes réductifs sur  $\mathbb{C}$  et  $X$  une variété projective, connexe, lisse.

*Définition 3.1.1.* — Un  $G$ -fibré principal de groupe de structure  $G$  au-dessus de la base  $X$  est la donnée d'une variété  $E$  et d'un morphisme  $\pi : E \rightarrow X$  tels que la variété  $E$  soit munie d'une  $G$ -action à droite libre et transitive sur chaque fibre et que  $\pi$  soit  $G$ -équivariant ( $X$  étant munie de l'action triviale). De plus, on impose que  $\pi$  soit localement trivial pour la topologie étale de  $X$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  un recouvrement étale de  $X$  et des isomorphismes de trivialisations  $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_\alpha \times G$  tels que  $\text{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)}$ , c'est-à-dire

que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \mathcal{U}_\alpha \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathcal{U}_\alpha \end{array}$$

et où  $\Phi_\alpha$  commute avec l'action de  $G$ , soit si  $\Phi_\alpha(e) = (x, h)$  avec  $\pi(e) = x$  alors, pour tout  $g \in G$ ,  $\Phi_\alpha(e \cdot g) = (x, hg)$ .

Si  $\pi : E \rightarrow X$  est un  $G$ -fibré principal, alors  $\pi(e \cdot g) = \pi(e) \cdot g$  pour tout  $g \in G$  et tout  $e \in E$  et chaque fibre  $E_x = \pi^{-1}(x)$  pour  $x$  appartenant à  $X$  est stable sous l'action de  $G$ . De plus, pour tout  $e_1, e_2$  appartenant à une même fibre, il existe un et un seul élément  $g$  de  $G$  tel que  $e_1 \cdot g = e_2$ . Pour chaque fibre, via le choix d'un élément dedans, le groupe  $G$  est alors isomorphe à cette fibre.

Pour tout  $x$  appartenant à  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ , on a

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(x, g) = (x, \Psi_{\beta\alpha}(x, g))$$

avec  $\psi_{\beta\alpha}(x, \cdot) : G \rightarrow G$ . De plus,  $\Psi_{\beta\alpha}$  vérifie :  $\Psi_{\beta\alpha}(x, gh) = \Psi_{\beta\alpha}(x, g)h$  pour tous  $g, h$  de  $G$ . En prenant  $g = 1_G$  le neutre du groupe  $G$ , on obtient  $\Psi_{\beta\alpha}(x, h) = \Psi_{\beta\alpha}(x, 1_G)h$  pour tout  $h \in G$ ; on peut donc considérer que le morphisme  $\Psi_{\beta\alpha}$  n'est autre que la multiplication à gauche par l'élément  $\Psi_{\beta\alpha}(x, 1_G)$ . On simplifie les notations en écrivant  $g \mapsto \Psi_{\beta\alpha}(x)g$  cette multiplication. Comme pour les fibrés vectoriels, on est amené à définir les fonctions de transition d'un  $G$ -fibré principal :

$$\Psi_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \rightarrow G.$$

Ces fonctions de transitions vérifient en particuliers les relations de cocycles.

Par la suite, on désignera un  $G$ -fibré principal par  $(E, \pi)$  ou par  $\pi : E \rightarrow X$  ou bien tout simplement par  $E$  lorsque le contexte est clair. Par ailleurs, on est parfois amené à préciser le groupe de structure comme ceci :  $E_G$  pour un  $G$ -fibré principal.

**Définition 3.1.2.** — Soient  $\pi : E \rightarrow X$  et  $\pi' : F \rightarrow X'$  deux  $G$ -fibrés principaux. Un **morphisme de  $G$ -fibrés principaux** entre  $E$  et  $F$  est un morphisme  $\varphi : E \rightarrow F$  qui commute avec l'action de  $G$  sur  $E$  et sur  $F$  :

$$\forall e \in E, \forall g \in G, \quad \varphi(e \cdot g) = \varphi(e) \cdot g.$$

Lorsque les bases  $X$  et  $X'$  sont identiques et que  $\pi' \circ \varphi = \pi$ ,  $\varphi$  est appelé **isomorphisme** de  $G$ -fibrés principaux. Si, de plus,  $E = F$ ,  $\varphi$  est appelé **auto-morphisme** de  $G$ -fibré principal.

Pour  $E$  un  $G$ -fibré principal, on note  $\text{Aut}_G(E)$  ou  $\text{Aut}(E)$  le groupe formé des automorphismes de  $E$ .

**Définition 3.1.3.** — Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un  $G$ -fibré principal et  $Y$  une variété quasi-projective munie d'une  $G$ -action à gauche. On appelle **fibré associé** à  $Y$  le fibré  $\bar{\pi} : E(Y) \rightarrow X$  avec  $E(Y) = E \times^G Y := (E \times Y)/G$  où l'action de  $G$  sur  $E \times Y$  est la suivante :

$$g \cdot (e, y) = (e \cdot g, g^{-1} \cdot y)$$

et  $\bar{\pi} = E(Y) \rightarrow X$  associe à  $\overline{(e, y)}$  l'élément  $\pi(e)$ .

Soit  $E$  est un  $G$ -fibré principal. Chaque fibre de  $E(Y)$  est isomorphe à  $Y$ .

Lorsque  $Y$  est égal à  $G$ , muni de l'action de conjugaison, le fibré associé est appelé fibré adjoint  $\text{Ad}(E)$  :

$$\text{Ad}(E) := E \times^G G.$$

Lorsque  $Y$  est un espace vectoriel  $V$  muni d'une représentation de  $G$ , c'est-à-dire d'un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , on définit le fibré associé à  $E : E(V)$ . Chaque fibre de  $E(V)$  étant isomorphe à  $V$ ,  $E(V)$  est bien un fibré vectoriel de rang égal à la dimension de  $V$  : les fonctions de transitions de  $E(V)$  sont les fonctions de transition  $\{\Psi_{\beta\alpha}\}$  du fibré principal  $E$ . Il est à noter en particulier que  $\Psi_{\beta\alpha}(x)$  appartient à  $G$  pour tout  $x$  de  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ .

En particulier, lorsque  $G$  est un groupe de Lie, son algèbre de Lie,  $\mathfrak{Lie}(G)$ , est un espace vectoriel ; on note

$$\text{ad}(E) = E \times^G \mathfrak{Lie}(G)$$

le fibré vectoriel correspondant, appelé aussi fibré adjoint  $\text{ad}(E)$ .

**Exemple 3.1.4.** — Nous donnons ici la structure de quelques fibrés vectoriels provenant de  $G$ -fibrés principaux où  $G$  est un groupe classique (groupe algébrique affine) :

- Se donner un  $GL_r$ -fibré principal correspond exactement à la donnée du fibré vectoriel de rang  $r$  associé (tous deux uniquement définis, à isomorphismes près, par leurs fonctions de transition),
- Soient  $H$  un sous-groupe de  $GL_r$  et  $E_H$  un  $H$ -fibré principal. Notons  $E_{GL_r} = E(GL_r)$  le  $GL_r$ -fibré principal associé à  $E_H$  et  $V = E_{GL_r}(\mathbb{C}^r)$  le fibré vectoriel associé à  $E_{GL_r}$ . Alors  $E_H(\mathbb{C}^r)$  et  $V$  sont deux fibrés vectoriels isomorphes et les fonctions de transitions de  $V$  sont des éléments du sous-groupe  $H$ ,
- Un  $SL_r$ -fibré principal correspond à un fibré vectoriel de rang  $r$  muni d'un déterminant trivial,

– Les  $O_r$ -fibrés principaux correspondent aux fibrés vectoriels  $V$  de rang  $r$  muni d'une forme quadratique non-dégénérée  $q : V \rightarrow \mathcal{O}_X$  (qui peut être vu comme un isomorphisme de fibrés vectoriels  $V \xrightarrow{\sim} V^*$ ).

**Définition 3.1.5.** — Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un  $G$ -fibré principal. Une **section** de  $E$  est un morphisme  $\sigma : X \rightarrow E$  tel que  $\pi \circ \sigma = \text{id}_X$ .

Un fibré principal peut ne pas admettre de section.

**Remarque 3.1.6.** — Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un  $G$ -fibré principal et  $Y$  une variété quasi-projective munie d'une  $G$ -action à gauche. Se donner une section  $\sigma : X \rightarrow E(Y)$  est équivalent à se donner un morphisme  $s : E \rightarrow Y$  vérifiant  $s(e \cdot g) = g^{-1} \cdot s(e)$  et  $\sigma(x) = (e, s(e))$  pour tout  $x \in X$  et tout  $e \in E$  tel que  $\pi(e) = x$ .

*Démonstration.* — Soit  $\sigma : X \rightarrow E(Y)$  vérifiant  $\pi \circ \sigma = \text{id}_X$ . Soit  $x \in X$ . On a  $\sigma(x) = \overline{(e, y)} = \overline{(e \cdot g, g^{-1} \cdot y)}$  pour tout  $g \in G$ ,  $e \in E_x$ . Posons  $s(e) = y$  tel que  $\sigma(x) = \overline{(e, y)}$ . Le morphisme  $s : E \rightarrow Y$  est bien défini car si  $(e_0, y_0)$  est un représentant de  $\sigma(x)$  et  $e_1 \in E_x$  alors il existe un et un seul  $g_1 \in G$  tel que  $e_0 \cdot g_1 = e_1$  et  $\sigma(x) = \overline{(e_0, y_0)} = \overline{(e_0 \cdot g_1, g_1^{-1} \cdot y_0)} = \overline{(e_1, g_1^{-1} y_0)}$  et donc  $s(e_1) = g_1^{-1} \cdot y_0$ . De plus,  $s$  vérifie bien la condition  $s(e \cdot g) = g^{-1} \cdot s(e)$ .

Inversement, soit un morphisme  $s : E \rightarrow Y$  vérifiant la condition  $s(e \cdot g) = g^{-1} \cdot s(e)$  pour tout  $g \in G$  et tout  $e \in E$ . On définit  $\sigma : X \rightarrow E(Y)$  de la manière suivante : soit  $e \in E_x$ , on pose  $\sigma(x) = \overline{(e, s(e))}$ . Ce morphisme est bien défini car si  $e_1$  et  $e_2$  appartiennent à une même fibre  $E_x$ , alors il existe  $g \in G$  tel que  $e_1 \cdot g = e_2$  et  $\overline{(e_2, s(e_2))} = \overline{(e_1 \cdot g, s(e_1 \cdot g))} = \overline{(e_1 \cdot g, g^{-1} \cdot s(e_1))} = \overline{(e_1, s(e_1))}$ .  $\square$

**Définition 3.1.7.** — Soit  $\rho : H \rightarrow G$  un homomorphisme de groupe et  $E$  un  $H$ -fibré principal. Le  $G$ -fibré principal associé  $E(G)$  (où  $H$  agit  $G$  par multiplication à gauche via  $\rho$ ) est naturellement muni d'une structure de  $G$ -fibré principal. Ce  $G$ -fibré principal, noté  $\rho_*(E)$ , est appelé une **extension de groupe de structure** du  $H$ -fibré principal  $E$ .

**Définition 3.1.8.** — Soit  $\rho : H \rightarrow G$  un homomorphisme de groupe et  $E$  un  $H$ -fibré principal et  $F$  un  $G$ -fibré principal tels qu'il existe un isomorphisme de  $G$ -fibrés principaux  $\Phi : E(G) \rightarrow F$ . On dit alors que  $(E, \Phi)$  est une **réduction de groupe de structure** du fibré  $F$  au groupe  $H$ .

On omet parfois de stipuler l'isomorphisme  $\Phi$  et on dit alors que  $E$  est obtenu à partir de  $F$  par réduction de groupe de structure et que  $E$  est une  $H$ -réduction de  $F$ .

Deux  $H$ -réductions  $(E_1, \Phi_1)$  et  $(E_2, \Phi_2)$  d'un  $G$ -fibré principal  $F$  sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme de  $H$ -fibrés principaux  $\Psi : E_1 \rightarrow E_2$  tel que  $\Phi_2 \circ \Psi \circ \Phi_1 : F \rightarrow F$  soit un automorphisme de  $G$ -fibré principal.

**Remarque 3.1.9.** — Soit  $E$  un  $G$ -fibré principal et  $\rho : H \rightarrow G$  un homomorphisme de groupe injectif. Il y a une correspondance entre les  $H$ -réductions de  $E$  et les sections de  $E(G/H)$ .

*Démonstration.* — Pour voir cette correspondance, on identifie  $E(G/H)$  et  $E/H$  de la manière suivante. À  $\overline{(e, \bar{g})}$  appartenant à  $E(G/H)$ , on associe  $\overline{e \cdot \bar{g}}$  appartenant à  $E/H$ . Cette application est bien définie car tout autre représentant de  $\overline{(e, \bar{g})}$  est de la forme  $\overline{(e \cdot g_1, g_1^{-1} \bar{g})}$  où  $g_1 \in G$  et que  $\overline{e \cdot g_1 g_1^{-1} \bar{g}} = \overline{e \cdot \bar{g}}$ , et c'est un isomorphisme.

À une section  $\sigma : X \rightarrow E(G/H) \simeq E/H$ , on associe le  $H$ -fibré principal  $F$  suivant :

$$\begin{array}{ccc} F := \sigma^* E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\sigma} & E/H \simeq E(G/H). \end{array}$$

Comme  $E \rightarrow E/H$  est un  $H$ -fibré principal, le fibré  $F$  hérite de la même structure. Par ailleurs,  $F$  est une  $H$ -réduction de  $E$  comme le montre l'isomorphisme de  $G$ -fibrés principaux suivant :

$$\Psi : \frac{F(G)}{\overline{((x, e), g)}} \rightarrow E \\ \mapsto e \cdot g.$$

Le morphisme  $\Psi$  est bien défini puisque, pour tout  $h \in H$ ,  $\Psi(\overline{((x, e) \cdot h, h^{-1} g)}) = e \cdot h h^{-1} g = e \cdot g$ , et  $\Psi$  est bien  $G$ -équivariant puisque  $\Psi(\overline{((x, e), g)} \cdot g_1) = \Psi(\overline{((x, e), g g_1)}) = e \cdot g g_1 = \Psi(\overline{((x, e), g)}) \cdot g_1$  donc  $\Psi$  est bien un isomorphisme de  $G$ -fibrés principaux.

Inversement, soit  $F$  une  $H$ -réduction de  $E$ . Par définition, il existe  $\Psi : F(G) \rightarrow E$  un  $G$ -isomorphisme de fibrés principaux. On définit la section  $\sigma : X \rightarrow E(G/H)$  associée à  $F$  de la manière suivante : soit  $x$  appartenant à  $X$ , on considère un élément  $f$  de la fibre  $F_x$ , puis l'élément  $\overline{(f, 1_G)}$  de  $F(G) \simeq E$  et on pose  $\sigma(x) = \overline{[(f, 1_G)]_H}$  (élément de  $E/H \simeq E(G/H)$ ). Cette section est bien définie car deux éléments  $f_1$  et  $f_2$  d'une même fibre  $F_x$  sont reliés par un élément  $h \in H$  vérifiant  $f_1 h = f_2$  et donc  $\overline{(f_2, 1_G)} = \overline{(f_1 h, 1_G)} = \overline{(f_1, h)} = \overline{(f_1, 1_G)} \cdot h$ , soit  $\overline{[(f_2, 1_G)]_H} = \overline{[(f_1, 1_G)]_H}$ .  $\square$

**Remarque 3.1.10.** — D’après les Remarques 3.1.6 et 3.1.9, se donner une  $H$ -réduction de groupe de structure d’un  $G$ -fibré principal  $E$  équivaut à se donner un morphisme  $G$ -équivariant  $s : E \rightarrow G/H$  satisfaisant la condition  $s(e \cdot g) = g^{-1} \cdot s(e)$ .

Si  $E$  est un  $G$ -fibré principal, les réductions de groupe de structure de  $E$  à un sous-groupe  $H$  de  $G$  sont en bijection avec les sections au-dessus de la base  $X$  associées au fibré  $E/H = E \times^G E/H$ . Deux sections correspondent à des réductions isomorphiques si et seulement si elles diffèrent d’un  $G$ -automorphisme de  $E$ .

Nous utiliserons cette remarque notamment dans le cadre de l’étude de la (semi)-stabilité (notion mettant en scène des réductions de groupe de structure aux sous-groupes paraboliques maximaux d’un groupe de Lie).

**Exemple 3.1.11.** — Se donner un  $G_2$ -fibré principal sur une courbe  $C$  est équivalent à la donnée d’un fibré vectoriel de rang 7 muni d’une forme trilinéaire alternée non-dégénérée.

En effet, soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal et  $R := P_{G_2}(GL_7)$  le  $GL_7$ -fibré principal associé. Par définition, le fibré  $R$  admet une réduction à  $G_2$ , soit une section  $\sigma : C \rightarrow GL_7/G_2$ . Considérons

$$C \xrightarrow{\sigma} GL_7/G_2 \rightarrow GL_7/(G_2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

Par le Lemme 1.2.15,  $G_2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $\text{Stab}_{GL_7}(\omega_0)$ . Ainsi,

$$GL_7/(G_2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq GL_7/\text{Stab}_{GL_7}(\omega_0) \simeq \text{Orb}_{GL_7}(\omega_0).$$

Par ailleurs, le Corollaire 2.2.16 affirme que l’orbite  $\text{Orb}_{GL_7}(\omega_0)$  de  $\omega_0$  sous l’action de  $GL_7$  est l’ensemble de toutes les formes trilinéaires alternées non-dégénérées. Ainsi,  $P_{G_2}$  correspond bien à un fibré vectoriel de rang 7 muni d’une forme trilinéaire alternée non-dégénérée.

## 3.2. Notion de (semi)-stabilité pour les $G$ -fibrés principaux

### 3.2.1.

**Notation 2.** — Dans tout ce qui suit,  $C$  désigne une courbe algébrique projective, connexe et lisse sur  $\mathbb{C}$ .

L’ensemble des classes d’isomorphismes de fibrés vectoriels de rang et de degré fixés ne peut être paramétré par une variété algébrique. Il en est de même pour les  $G$ -fibrés principaux au-dessus d’une courbe. Afin de contourner ce problème, la notion de (semi)-stabilité a été introduite. Concernant les fibrés vectoriels, l’existence d’une filtration de Harder-Narasimhan (faisant apparaître de

successifs fibrés vectoriels quotients, semistables, de pente décroissante) permet de réduire l'étude des fibrés vectoriels à celle de fibrés semistables. Par ailleurs, la catégorie des fibrés vectoriels semistables de pente donnée est une catégorie abélienne. Une autre filtration souvent utilisée est la filtration de Jordan-Hölder qui associe à un fibré vectoriel semistable une graduation de fibrés quotients stables de même pente. Comme dans le cas de l'étude des fibrés vectoriels, la notion de semistabilité pour les fibrés principaux est cruciale. Le problème de la classification des  $G$ -fibrés principaux sur une courbe a été traité dans la thèse de A. RAMANATHAN [Ram96].

**Définition 3.2.1 (Semistabilité d'un  $G$ -fibré principal - Critère de Ramanathan)**

Un  $G$ -fibré principal  $E$  au-dessus de la base  $C$  est dit **semistable** (respectivement **stable**) si pour tout sous-groupe  $P$  parabolique maximal de  $G$  et pour toute réduction de groupe de structure  $\sigma : C \rightarrow E/P$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\deg(\sigma^*T_{E/P}) \geq 0$$

(respectivement  $\deg(\sigma^*T_{E/P}) > 0$ ) où  $T_{E/P}$  est le fibré tangent le long des fibres de la projection naturelle  $E/P \rightarrow C$ , c'est-à-dire que si l'on considère  $E \rightarrow E/P$  comme un  $P$ -fibré principal,  $T_{E/P}$  est le fibré vectoriel

$$T_{E/P} := E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) = (E \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})) / P$$

au-dessus de  $E/P$  associé à  $E$  considéré comme un  $P$ -fibré principal au-dessus de la base  $E/P$ , et où  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{p}$  sont les algèbres de Lie de  $G$  et de  $P$  et où  $P$  agit sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  par la représentation adjointe.

**Définition 3.2.2.** — Un  $G$ -fibré principal est dit **strictement semistable** s'il est semistable mais non stable.

**Notation 3.** — Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif. La variété  $M_C(G)$  désigne l'espace de modules des classes d'équivalence de  $G$ -fibrés principaux semistables sur  $C$  (à isomorphisme près) et  $M_C^{\text{st}}(G)$  l'espace de modules des  $G$ -fibrés principaux stables sur  $C$  (à isomorphisme près).

D'après la définition de semistabilité et de stabilité au niveau des  $G$ -fibrés principaux, il s'en suit qu'un  $GL_r$ -fibré principal est semistable (resp. stable) si et seulement si le fibré vectoriel de rang  $r$  associé est semistable (resp. stable). C'est ce qui est énoncé par le Lemme 3.2.7. Avant de démontrer ce lemme, rappelons la définition de (semi)-stabilité au niveau des fibrés vectoriels (critère de Mumford).

**Définition 3.2.3.** — La **pen**te d'un fibré vectoriel  $V$  (ou d'un faisceau cohérent) au-dessus d'une courbe  $C$  est le nombre rationnel suivant :

$$\mu(V) = \frac{\deg(V)}{\operatorname{rg}(V)}$$

où  $\deg V$  est le degré de  $V$  et  $\operatorname{rg}(V)$  est son rang.

**Définition 3.2.4.** — Un fibré vectoriel  $V$  est dit **semistable** (resp. **stable**) si pour tout sous-faisceau propre cohérent  $F$  de  $V$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mu(F) \leq \mu(V)$$

(resp.  $\mu(F) < \mu(V)$ ).

Cette définition peut être réduite à l'énoncé équivalent suivant :

**Définition 3.2.5 (Semistabilité d'un fibré vectoriel - Critère de Mumford)**

Un fibré vectoriel  $V$  est dit **semistable** (resp. **stable**) si pour tout sous-fibré vectoriel propre  $F$  de  $V$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mu(F) \leq \mu(V)$$

(resp.  $\mu(F) < \mu(V)$ ).

Soit  $V$  un fibré vectoriel et  $Q$  un fibré quotient de  $V$ . Alors il existe  $F$  un sous-fibré de  $V$  tel que  $Q = V/F$ . Les degrés de ces fibrés vérifiant la relation additive suivante :  $\deg V = \deg F + \deg Q$ , on a la relation suivante :

$$\mu(V)\operatorname{rg}(V) = \mu(F)\operatorname{rg}(F) + \mu(Q)\operatorname{rg}(Q).$$

Comme  $\operatorname{rg}(V) = \operatorname{rg}(F) + \operatorname{rg}(Q)$ , si  $V$  est semistable, on a  $\mu(Q) \geq \mu(V)$  et ce pour tout fibré vectoriel quotient  $Q$  de  $V$ . Ainsi, la définition suivante est équivalente à la Définition 3.2.5.

**Définition 3.2.6.** — Un fibré vectoriel  $V$  est dit **semistable** (resp. **stable**) si pour tout fibré vectoriel quotient propre  $Q$  de  $V$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mu(Q) \geq \mu(V)$$

(resp.  $\mu(Q) > \mu(V)$ ).

*Démonstration de l'équivalence des Définitions 3.2.4 et 3.2.5*

Soit  $V$  un fibré vectoriel. Tout sous-fibré vectoriel de  $V$  est à fortiori un sous-faisceau cohérent. Inversement, par saturation, tout sous-faisceau  $F$  de  $V$  propre et cohérent, est inclus dans un sous-fibré vectoriel de  $V$  de même rang et de pente supérieure ou égale à celle de  $F$  (voir 5.3 de [LP97]).  $\square$

**Lemme 3.2.7.** — *Les notions de semistabilité (resp. stabilité) sont équivalentes pour un  $GL_r$ -fibré principal et son fibré vectoriel de rang  $r$  associé.*

*Démonstration.* — Nous montrons ici que les conditions de semistabilité d'un  $GL_r$ -fibré principal (critère de Ramanathan) et de son fibré vectoriel associé (critère de Mumford) sont équivalentes. Le cas de la stabilité se traite en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Les sous-groupes paraboliques maximaux du groupe  $GL_r$  sont conjugués à l'un des  $(r - 1)$  sous-groupes suivants :

$$P_m := \left\{ M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \mid M \in GL_r \text{ et } A \in GL_m \right\} \quad \text{pour } m \in \{1, \dots, r - 1\}.$$

Il s'agit des stabilisateurs de  $m$ -plans, pour  $m$  variant de 1 à  $(r - 1)$ .

Considérons  $E$  un  $GL_r$ -fibré principal de base  $C$ ,  $V = E(\mathbb{C}^r)$  le fibré vectoriel de rang  $r$  associé et  $P = P_m$  un des sous-groupes paraboliques maximaux de  $GL_r$  cités ci-dessous. Soit  $\sigma : C \rightarrow E/P$  une réduction de groupe de structure de  $E$  à  $P$  (notons  $E_P$  le  $P$ -fibré principal correspondant) et  $M$  le sous-fibré vectoriel de  $V$  associé correspondant à cette réduction :  $M = E_P \overset{P}{\times} \mathbb{C}^r$ .

**Lemme 3.2.8.** — *On a l'isomorphisme suivant :*

$$\sigma^* T_{E/P} \simeq M^* \otimes (V/M).$$

*Démonstration.* — Par définition,  $T_{E/P} = E \overset{P}{\times} (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$  où  $E \rightarrow E/P$  est vu comme un  $P$ -fibré principal au-dessus de la base  $E/P$ , où  $\mathfrak{g} = \text{End}(\mathbb{C}^r)$  est l'algèbre de Lie de  $G = GL_r$  et où  $\mathfrak{p}$  (algèbre de Lie de  $P$ ) est constituée des éléments de  $\mathfrak{g}$  qui stabilisent les  $m$  premiers vecteurs de la base canonique.

L'espace vectoriel  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  est isomorphe à  $\text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^r/\mathbb{C}^m) = (\mathbb{C}^m)^* \otimes (\mathbb{C}^r/\mathbb{C}^m)$  donc

$$\begin{aligned} T_{E/P} &= E \overset{P}{\times} (\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \\ T_{E/P} &= E \overset{P}{\times} [(\mathbb{C}^m)^* \otimes (\mathbb{C}^r/\mathbb{C}^m)], \\ T_{E/P} &= \left[ E \overset{P}{\times} (\mathbb{C}^m)^* \right] \otimes \left[ E \overset{P}{\times} (\mathbb{C}^r/\mathbb{C}^m) \right], \\ \text{donc } \sigma^*(T_{E/P}) &= M^* \otimes V/M. \end{aligned}$$

□

Supposons que  $V$  soit un fibré vectoriel semistable. Soit  $\sigma : C \rightarrow E/P$  une réduction de groupe de structure de  $E$  à  $P$  où  $P$  est un sous-groupe parabolique maximal de  $GL_r$ . Le sous-groupe  $P$  est le stabilisateur d'un sous-espace vectoriel  $V_m$  de  $\mathbb{C}^r$  de dimension  $m$ , pour un certain  $m$  appartenant à  $\{1, \dots, r - 1\}$  et

correspond au drapeau

$$0 \subset V_m \subset \mathbb{C}^r.$$

Notons  $F$  le fibré vectoriel  $F := \sigma^*E(V_m)$  où  $E \rightarrow E/P$  est considéré comme un  $P$ -fibré principal. Ce fibré vectoriel apparaît dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F = \sigma^*E(V_m) & \longrightarrow & E \overset{P}{\times} V_m = E(V_m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\sigma} & E/P. \end{array}$$

Le fibré  $F$  est un sous-fibré vectoriel de rang  $m$  de  $V$ . D'après le lemme précédent,  $\sigma^*T_{E/P}$  et  $F^* \otimes (V/F)$  sont isomorphes donc

$$\begin{aligned} \deg(\sigma^*T_{E/P}) &= \deg(F^* \otimes V/F), \\ &= \deg(F^*)\operatorname{rg}(V/F) + \deg(V/F)\operatorname{rg}(F^*), \\ &= -\mu(F)\operatorname{rg}(F)\operatorname{rg}(V/F) + \mu(V/F)\operatorname{rg}(V/F)\operatorname{rg}(F), \\ &= [\mu(V/F) - \mu(F)]\operatorname{rg}(F)\operatorname{rg}(V/F). \end{aligned} \tag{43}$$

Or, comme  $V$  est supposé semistable, on a  $\mu(F) \leq \mu(V) \leq \mu(V/F)$ ; d'où

$$\deg(\sigma^*T_{E/P}) \geq 0.$$

Ainsi,  $E$  est bien semistable en tant que fibré principal.

Inversement, supposons que  $E$  soit un fibré principal semistable. Chaque sous-fibré vectoriel  $F$  de  $V$  est de la forme  $F = \sigma^*E(V_m)$  où  $\sigma : C \rightarrow E/P$  est une réduction de groupe de structure à un sous-groupe parabolique maximal  $P$  de  $GL_r$ , correspondant au drapeau  $0 \subset V_m \subset \mathbb{C}^r$  où  $V_m$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$ . Comme précédemment,  $\sigma^*T_{E/P}$  et  $F^* \otimes V/F$  sont isomorphes et  $\deg(\sigma^*T_{E/P})$  est positif ou nul puisque  $E$  est un fibré principal semistable. Ainsi, par le calcul (43), on obtient

$$\mu(F) \leq \mu(V).$$

Le fibré vectoriel  $V$  est bien semistable. □

Les notions de semistabilité (et de stabilité) au niveau de  $G$ -fibrés principaux étant parfois ramenée à l'étude de la semistabilité (et de la stabilité) de fibrés vectoriels, énonçons la proposition suivante, utile lors de la caractérisation de morphismes entre fibrés vectoriels semistables :

**Proposition 3.2.9.** — Soient  $V$  et  $W$  deux fibrés vectoriels sur une courbe algébrique  $C$  connexe lisse projective. Si  $\text{Hom}(V, W) \neq 0$ , alors

$$\mu(V) \leq \mu(W).$$

Si  $V$  et  $W$  sont deux fibrés stables, de même pente, alors tout morphisme  $f : V \rightarrow W$  non nul est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Voir la Proposition 5.3.3 de [LP97].  $\square$

**Corollaire 3.2.10.** — Soit  $V$  un fibré vectoriel stable sur une courbe algébrique  $C$  connexe lisse projective. Les seuls endomorphismes de  $V$  sont les homothéties. On dit alors que  $V$  est **simple**.

*Démonstration.* — Voir le Corollaire 5.3.4 de [LP97].  $\square$

Énonçons encore un lemme relié à la (semi)-stabilité de fibré vectoriel.

**Lemme 3.2.11.** — Soient  $V$  un fibré vectoriel (semi)-stable et  $L$  un fibré en droites. Alors  $V \otimes L$  est (semi)-stable.

*Démonstration.* — Supposons  $V$  semistable. La pente de  $V \otimes L$  est égale à

$$\begin{aligned} \mu(V \otimes L) &= \frac{\text{rg}(L) \deg(V) + \text{rg}(V) \deg(L)}{\text{rg}(V \otimes L)}, \\ &= \mu(V) + \deg(L). \end{aligned}$$

Soit  $W$  un sous-fibré vectoriel de  $V \otimes L$ . Le fibré vectoriel  $W \otimes L^*$  est un sous-fibré vectoriel de  $V$  donc, par semistabilité de  $V$ ,

$$\begin{aligned} \mu(W \otimes L^*) &= \mu(W) - \deg(L) \leq \mu(V), \\ \text{soit} \quad \mu(W) &\leq \mu(V) + \deg(L) = \mu(V \otimes L). \end{aligned}$$

Ainsi,  $V \otimes L$  est bien semistable. Le cas de la stabilité est similaire, il suffit de remplacer les inégalités larges en inégalités strictes.  $\square$

**3.2.2.** Voici trois cas où le Lemme 3.2.7 est vérifié, dans le cas de la semistabilité, pour des sous-groupes du groupe  $GL_r$ .

– Soit  $E$  un  $SL_r$ -fibré principal. Le  $SL_r$ -fibré principal  $E$  est semistable (resp. stable) si et seulement si  $E(\mathbb{C}^r)$  est un fibré vectoriel semistable (resp. stable),

– Soit  $G = O_r$ , le groupe orthogonal d'ordre  $r$ , et  $E$  un  $O_r$ -fibré principal. Le fibré principal  $E$  est alors appelé **fibré principal orthogonal**. Le fibré vectoriel associé  $E(\mathbb{C}^r)$  est autodual, sa pente  $\mu(E(\mathbb{C}^r))$  est donc nulle. Ainsi, un  $O_r$ -fibré principal  $E$  est semistable si et seulement si la pente de chaque sous-fibré isotrope  $F$  de  $E(\mathbb{C}^r)$  vérifie

$$\mu(F) \leq \mu(E(\mathbb{C}^r)) = 0$$

(voir Remarque 3.1 de [Ram96]).

En fait, il y a équivalence entre la semistabilité en tant que  $O_r$ -fibré principal et du fibré vectoriel  $E(\mathbb{C}^r)$  de rang  $r$  associé ([Ram81]),

– Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal et  $V = E(\mathbb{C}^7)$  le fibré vectoriel associé à la représentation irréductible de dimension 7 de  $G_2$ . Alors  $E$  est un  $G_2$ -fibré principal semistable si et seulement si  $V$  est un fibré vectoriel semistable. Cette équivalence fait l'objet de la Proposition 3.3.1 du § 3.3.2 consacré à l'étude des  $G_2$ -fibrés principaux.

Dans le cas où le groupe de Lie  $G$  est quelconque, A. RAMANATHAN a prouvé qu'un  $G$ -fibré principal  $E$  est semistable si et seulement si son fibré adjoint  $\text{ad}(E) = E \times^G \mathfrak{g}$  l'est (voir [Ram96]). Cette dernière reformulation de la définition de semistabilité des fibrés principaux en lien avec la notion de semistabilité au niveau des fibrés vectoriels suggère de mettre en évidence l'existence d'espaces de modules au niveau de fibrés principaux à partir de celle d'espaces de modules de fibrés vectoriels. C'est ce qui a été fait par A. RAMANATHAN au cours de sa thèse ([Ram96]).

Toute la suite de ce chapitre est consacrée l'étude de  $G$ -fibrés principaux lorsque le groupe  $G$  est égal à  $G_2$ .

### 3.3. Étude de réductions de $G_2$ -fibrés principaux

Les premiers énoncés de ce paragraphe concernent les notions de semistabilité et de stabilité d'un  $G_2$ -fibré principal et de son  $SO_7$ -fibré principal associé. Nous montrons qu'un  $G_2$ -fibré principal est semistable si et seulement si son  $SO_7$ -fibré principal associé l'est aussi. Par contre, lorsque'on s'intéresse à la notion de stabilité, une telle équivalence n'est plus valable. Cependant, nous verrons dans quels cas l'équivalence pour la notion de stabilité est maintenue. Ensuite, nous nous intéressons à l'espace de modules  $M_C(G_2)$  des classes d'équivalence de  $G_2$ -fibrés principaux semistables (à isomorphisme près) sur une courbe  $C$  algébrique lisse, projective et connexe. Pour cela, une étude minutieuse des  $G_2$ -fibrés principaux admettant une réduction aux sous-groupes  $SL_3$  et  $SO_4$  (les deux seuls sous-groupes de  $G_2$ , connexes, de rang maximal, maximaux pour l'ordre donné par l'inclusion) y est menée.

Un  $G_2$ -fibré principal est entièrement déterminé par la donnée d'un fibré vectoriel de rang 7, de déterminant trivial, muni de la forme trilinéaire non-dégénérée  $\omega_0$  puisque (voir la caractérisation des réductions dans l'exemple 3.1.11).

**3.3.1. Étude de la (semi)-stabilité d'un  $G_2$ -fibré principal et de son  $SO_7$ -fibré principal associé.** — Nous allons considérer ici des  $G_2$ -fibrés principaux et leurs fibrés vectoriels associés à la représentation irréductible de dimension 7 de  $G_2$ . Les fibrés vectoriels qui apparaissent ici sont alors des fibrés de rang 7, de déterminant trivial, munis d'une forme quadratique non-dégénérée (puisque  $G_2$  est inclus dans  $SO_7$ ) et d'une forme trilinéaire alternée non-dégénérée ( $G_2$  étant vu comme les éléments de déterminant 1 du stabilisateur d'une forme trilinéaire alternée non-dégénérée). On prendra par la suite  $G_2 = \text{Stab}(\omega_0) \cap SL_7$  et  $\omega_0$  sera la forme trilinéaire alternée non-dégénérée sur le fibré vectoriel associé à un  $G_2$ -fibré principal.

**Proposition 3.3.1.** — *Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal et  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  le fibré vectoriel associé à la représentation irréductible de dimension 7 de  $G_2$ . Alors,  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal semistable si et seulement si  $V$  est un fibré vectoriel semistable.*

*Démonstration.* — Cette démonstration fait l'objet de l'article [Sub99].

D'après le Théorème 1.2.10, on considère  $G_2$  comme un sous-groupe de  $SO_7$ .

Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal et  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  le fibré vectoriel associé. Le groupe  $G_2$  étant inclus dans  $O_7$ , le fibré vectoriel  $V$  est autodual ; son degré est donc nul :

$$\deg(V) = 0. \quad (44)$$

Au paragraphe 1.4, il est établi que les deux sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$  sont  $P_1 = \widetilde{P}_1 \cap G_2$  et  $P_2 = \widetilde{P}_2 \cap G_2$ , où  $\widetilde{P}_1$  et  $\widetilde{P}_2$  sont les sous-groupes paraboliques maximaux de  $SO_7$ , correspondant aux stabilisateurs d'une droite isotrope et d'un plan isotrope. Le sous-groupe  $\widetilde{P}_3$  est le sous-groupe parabolique maximal de  $SO_7$ , stabilisateur d'un 3-plan isotrope.

Citons trois résultats démontrés dans [Sub99] : Soient  $\mathbb{V}$  la représentation irréductible de dimension 7 de  $\mathcal{V}$  par le groupe  $G_2$ . On note  $\mathbb{P}(\mathbb{V})$  l'espace projectif des droites vectorielles de  $\mathbb{V}$ ,  $\Lambda^i(\mathbb{V})$  la  $i$ -ème puissance extérieure de  $\mathbb{V}$ ,  $\Gamma_{01}$  et  $\Gamma_{20}$  les représentations respectivement adjointe et de plus haut poids  $2\omega_1$  du groupe  $G_2$  (voir [FH91], § 22.3).

**Lemme 3.3.2.** — *Selon les notations précédentes, il vient :*

$$G_2/P_1 = SO_7/\widetilde{P}_1 \subset \mathbb{P}(\mathbb{V}), \quad (45)$$

$$G_2/P_2 = \left( SO_7/\widetilde{P}_2 \right) \cap \mathbb{P}(\Gamma_{01}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{V}), \quad (46)$$

$$G_2/P_1 = \left( SO_7/\widetilde{P}_3 \right) \cap \mathbb{P}(\Gamma_{20}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^3\mathbb{V}). \quad (47)$$

**Lemme 3.3.3.** — *Si  $V$  est un fibré vectoriel sur une courbe  $C$  algébrique, projective, connexe et lisse, alors l'ensemble des degrés des sous-fibrés vectoriels de  $V$  est majoré.*

*Démonstration.* — D'après la démonstration du Lemme 5.4.1 de [LP97], il suffit d'étudier le cas  $C = \mathbb{P}_1$ . Soit  $V$  un fibré vectoriel sur  $\mathbb{P}_1$ . D'après le Théorème de Birkhoff-Grothendieck (voir 4.4 de [Sab02]), si le rang de  $V$  est  $r$ , il existe une unique suite décroissante d'entiers relatifs  $(a_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$  telle que

$$V \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_r).$$

Nous allons donc en fait considérer uniquement le cas

$$V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_r).$$

Soit  $W$  un sous-fibré vectoriel de  $V$ . Notons  $n$  le rang de  $W$ .

Étudions le cas où  $W$  est un fibré en droites. Notons

$$\pi_j : W \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_j)$$

la projection sur le  $j$ -ème facteur de  $V$ . Il existe un  $i$  tel que le morphisme  $\pi_i : W \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_i)$  est non nul. D'après le Lemme 3.2.9, les fibrés en droites  $W$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_i)$  étant semistables, la pente  $\mu(W)$  est inférieure ou égale à la pente  $\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_i))$ . Ainsi,

$$\deg(W) \leq \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_i)) = a_i \leq \max_j \{a_j\}.$$

Si le rang de  $W$  est  $n$ , alors  $n$  est majoré par le rang de  $V$ . Le déterminant  $\det(W) = \Lambda^n W$  de  $W$  est un sous-fibré en droites de  $\Lambda^n V$ . Or,

$$\begin{aligned} \Lambda^n V &= \Lambda^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_r)), \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b_k) \end{aligned}$$

où chaque  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b_i)$  est de la forme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b_i) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_{i_n}).$$

Ainsi, d'après l'étude des sous-fibrés en droites qui vient d'être faite,

$$\deg(W) = \deg(\det(W)) \leq \max_j \{b_j\}.$$

Finalement, en notant  $M$  l'entier maximum obtenu comme produit de  $k$  éléments  $a_i$  distincts, pour  $k$  variant de 1 à  $r$ , on a

$$\deg(W) \leq M.$$

□

Montrons que la semistabilité du  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  implique celle du fibré vectoriel  $V$ . Raisonnons par l'absurde. Si  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal semistable sur  $C$  tel que  $V$  ne soit pas semistable. D'après le Lemme 3.3.3, l'ensemble des degrés des sous-fibrés vectoriel de  $V$  est majoré et donc l'ensemble des pentes des sous-fibrés vectoriels propres de  $V$  l'est aussi. Considérons donc  $W$  un sous-fibré vectoriel de  $V$  de pente maximale :

$$\mu(W) = \mu_{\max}(V) := \max \{ \mu(U) \mid U \text{ sous-fibré vectoriel propre de } V \}.$$

Ce sous-fibré vectoriel est semistable par construction, vu que tout sous-fibré vectoriel propre de  $W$  est un sous-fibré vectoriel propre de  $V$ . Par ailleurs, la pente de  $W$  est strictement positive puisque  $V$ , de pente nulle d'après (44) et non semistable, possède un sous-fibré vectoriel de pente strictement positive. Puisque  $G_2$  est un sous-groupe de  $SO_7$ , le fibré vectoriel  $V$ , associé au  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$ , est muni d'une forme quadratique non dégénérée. Ce qui donne un isomorphisme entre  $V$  et son dual  $V^*$ . Le morphisme

$$W \hookrightarrow V \xrightarrow{\sim} V^* \rightarrow W^*$$

est alors identiquement nul. En effet, il s'agit d'un morphisme entre deux sous-fibrés vectoriels  $W$  et  $W^*$  semistables avec  $\mu(W)$  est strictement supérieure à  $\mu(W^*)$  puisque  $\mu(W)$  est strictement positive et que les pentes  $\mu(W)$  et  $\mu(W^*)$  sont opposées. Ainsi, d'après la Proposition 3.2.9, ce morphisme est nul. Ainsi,  $W$  est contenu dans le noyau du morphisme  $V \rightarrow W^*$ , donc  $W$  est contenu dans  $W^\perp$ , le sous-fibré orthogonal à  $W$  pour la forme quadratique sur  $V$  indiquée ci-dessus. Ceci montre que le sous-fibré  $W$  est isotrope et son rang ne peut donc être autre que 1, 2 ou 3.

Nous allons voir qu'aucun de ces trois cas n'est possible, vu que l'existence d'un tel sous-fibré vectoriel entraînerait celle d'une  $P_i$ -réduction de  $P_{G_2}$  ( $P_i \in \{P_1, P_2\}$ ) en contradiction avec la semistabilité du  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$ .

(1) Cas où le rang de  $W$  est 1.

Si  $W$  est un sous-fibré en droites de  $V$ , il définit alors une section  $\tilde{\sigma} : C \rightarrow \mathbb{P}(V)$ . Puisque  $W$  est isotrope et que  $\widetilde{P}_1$  est le stabilisateur d'une droite isotrope, cette section se factorise à travers  $P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_1) = P_{G_2} \overset{G_2}{\times} (SO_7/\widetilde{P}_1)$  :

$$\begin{array}{ccc} P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_1) & \hookrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ \uparrow & \nearrow \tilde{\sigma} & \\ C & & \end{array}$$

Or, d'après (45),  $SO_7/\widetilde{P}_1 = G_2/P_1$ ; d'où l'existence d'une section

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(G_2/P_1) = P_{G_2}/P_1.$$

Par ailleurs, il existe un entier strictement positif  $m$  tel que le fibré tangent  $T_{P_{G_2}/P_1}$  soit égal à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)^{\otimes m}$ . Ainsi,

$$\deg(\sigma^*T_{P_{G_2}/P_1}) = \deg(\tilde{\sigma}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)^{\otimes m}) = m \deg(W^*) = -m \deg(W),$$

donc  $\deg(\sigma^*T_{P_{G_2}/P_1})$  est strictement négatif, ce qui contredirait le fait que  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré semistable.

(2) Cas où le rang de  $W$  est 2.

Dans ce cas, le fibré en droites  $\det(W) = \Lambda^2 W$  est un sous-fibré en droites de  $\Lambda^2 V$  et définit une section de  $\tilde{\sigma} : C \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ . La décomposition

$$\Lambda^2 \mathbb{V} = \mathbb{V} \oplus \Gamma_{01},$$

indiquée en §22.3 de [FH91], induit la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda^2 V &= \Lambda^2 P_{G_2}(\mathbb{V}) = P_{G_2}(\Lambda^2 \mathbb{V}), \\ &= P_{G_2}(\mathbb{V}) \oplus P_{G_2}(\Gamma_{01}), \\ &= V \oplus P_{G_2}(\Gamma_{01}) \end{aligned}$$

où  $P_{G_2}(\Gamma_{01}) = P_{G_2} \overset{G_2}{\times} \Gamma_{01}$ . Or,

$$\mu(\det(W)) = \deg(W) = \text{rg}(W)\mu(W) = 2\mu(W) > \mu(W) = \mu_{\max}(V),$$

donc l'image de  $\det(W)$  dans  $V$  ne peut être autre que le fibré vectoriel nul.

Ainsi,  $\det(W)$  est inclus dans  $P_{G_2}(\Gamma_{01})$ . En prenant en compte le fait que  $W$  est isotrope, la section  $\tilde{\sigma}$  se factorise finalement de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_2) \cap P_{G_2}(\Gamma_{01}) & \hookrightarrow & \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \\ \uparrow & \nearrow \tilde{\sigma} & \\ C & & \end{array}$$

Or, d'après (46),  $(SO_7/\widetilde{P}_2) \cap \mathbb{P}(\Gamma_{01}) = G_2/P_2$ ; d'où l'existence d'une section

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(G_2/P_2) = P_{G_2}/P_2.$$

Par ailleurs, il existe un entier strictement positif  $m$  tel que le fibré tangent  $T_{P_{G_2}/P_2}$  soit égal à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(1)^{\otimes m}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \deg(\sigma^*T_{P_{G_2}/P_2}) &= \deg(\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(1)^{\otimes m}) = m \deg(W^*) = -m \deg(W), \\ \text{soit } \deg(\sigma^*T_{P_{G_2}/P_2}) &< 0, \end{aligned}$$

ce qui contredirait là-aussi le fait que  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré semistable.

(3) Cas où le rang de  $W$  est 3.

Dans ce cas, le fibré en droites  $\det(W) = \Lambda^3 W$  est un sous-fibré de  $\Lambda^3 V$  et définit une section de  $\tilde{\sigma} : C \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 V)$ . La décomposition

$$\Lambda^3 V = V \oplus \Gamma_{20} \oplus 1,$$

indiquée en §22.3 de [FH91], induit la décomposition suivante :

$$\Lambda^3 V = V \oplus P_{G_2}(\Gamma_{20}) \oplus \mathcal{O}_C$$

où  $P_{G_2}(\Gamma_{20}) = P_{G_2} \times^{G_2} \Gamma_{20}$ . Or,

$$\mu(\det(W)) = \deg(W) = \mu(W)\text{rg}(W) = 3\mu(W) > \mu(W) = \mu_{\max}(V),$$

donc le morphisme  $\det(W) \rightarrow V$  est nul. Par ailleurs, la projection du fibré en droite  $\det(W)$  dans  $\mathcal{O}_C$  est soit nulle soit égale à  $\mathcal{O}_C$ . Or,

$$\mu(\det(W)) > \mu(\mathcal{O}_C) = 0$$

donc le morphisme  $\det(W) \rightarrow \mathcal{O}_C$  est aussi nul.

Ainsi,  $\det(W)$  est inclus dans  $P_{G_2}(\Gamma_{20})$ . En prenant en compte le fait que  $W$  est isotrope, la section  $\tilde{\sigma}$  se factorise finalement de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_3) \cap P_{G_2}(\Gamma_{20}) & \hookrightarrow & \mathbb{P}(\Lambda^3 V) \\ \uparrow & \nearrow \tilde{\sigma} & \\ C & & \end{array}$$

Or, d'après (46),  $(SO_7/\widetilde{P}_3) \cap \mathbb{P}(\Gamma_{20}) = G_2/P_1$ ; d'où l'existence d'une section

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(G_2/P_1) = P_{G_2}/P_1.$$

Par ailleurs, il existe un entier strictement positif  $m$  tel que le fibré tangent  $T_{P_{G_2}/P_1}$  soit égal à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(P_{G_2}(\Gamma_{20}))}(1)^{\otimes m}$ . Ainsi,

$$\deg(\sigma^* T_{P_{G_2}/P_1}) = \deg(\tilde{\sigma}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(P_{G_2}(\Gamma_{20}))}(1)^{\otimes m}) = m \deg(W^*) = -m \deg(W),$$

donc  $\deg(\sigma^* T_{P_{G_2}/P_1})$  est strictement négatif, ce qui contredirait une fois encore le fait que  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré semistable.

Ainsi, la semistabilité du  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  implique celle du fibré vectoriel  $V$ .

Inversement, supposons que  $V$  soit un fibré vectoriel semistable. Soit une réduction  $E_1$  de  $P_{G_2}$  au sous-groupe  $P_1$  de  $G_2$ , correspondant à la section  $\sigma_1 : C \rightarrow$

$P_{G_2}/P_1$ . Le sous-fibré en droites  $L := E_1(\mathbb{C}^7)$  de  $V$  est un sous-fibré en droites isotrope (puisque  $P_1$  est inclus dans  $\widetilde{P}_1$ , stabilisateur d'une droite isotrope). Il existe un entier  $m$  strictement positif tel que

$$\det(T_{P_{G_2}/P_1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)^{\otimes m}$$

donc

$$\begin{aligned} \deg(\sigma_1^* T_{P_{G_2}/P_1}) &= m \deg(\sigma_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = m \deg(L^*), \\ &= -m \deg(L). \end{aligned}$$

Or,  $V$  étant semistable et de degré nul par (44), le degré de  $L$  est négatif ou nul. Ainsi,

$$\deg(\sigma_1^* T_{P_{G_2}/P_1}) \geq 0.$$

Considérons à présent une réduction  $E_2$  de  $P_{G_2}$  au sous-groupe  $P_2$  de  $G_2$ , correspondant à la section  $\sigma_2 : C \rightarrow P_{G_2}/P_2$ . D'après (46),

$$P_{G_2}(G_2/P_2) \subset P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_2) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{V})$$

donc le sous-fibré  $M := E_2(\mathbb{C}^7)$  de  $V$  est un sous-fibré isotrope, de rang 2 de  $V$ . De même que précédemment, il existe un entier  $m$  strictement positif tel que

$$\det(T_{P_{G_2}/P_2}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(1)^{\otimes m}$$

donc

$$\begin{aligned} \deg(\sigma_2^* T_{P_{G_2}/P_2}) &= m \deg(\sigma_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(1)) = m \deg(M^*), \\ &= -m \deg(M). \end{aligned}$$

Le degré de  $M$  étant négatif ou nul,

$$\deg(\sigma_2^* T_{P_{G_2}/P_2}) \geq 0.$$

Ainsi, toute réduction de  $P_{G_2}$  à un sous-groupe parabolique maximal  $P_i$  de  $G_2$  associé à la section  $\sigma : C \rightarrow P_{G_2}/P_i$  vérifie

$$\deg(\sigma^* T_{P_{G_2}/P_i}) \geq 0.$$

Le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  est bien semistable. Par suite, si  $V$  est un fibré vectoriel semistable, alors  $P_{G_2}$  est à fortiori un  $G_2$ -fibré principal semistable.  $\square$

**Remarque 3.3.4.** — La proposition précédente devient fausse si l'on remplace « semistable » par « stable ». En effet, il existe des  $G_2$ -fibrés principaux stables tels que le fibré vectoriel de rang 7 associé ne soit pas stable, mais strictement semistable.

Par exemple, prenons  $F \rightarrow C$  un  $SL_3$ -fibré principal stable,  $P_{G_2} = F(G_2)$  le  $G_2$ -fibré principal associé et  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  le fibré vectoriel associé. Alors, on a la décomposition en somme directe

$$V = U \oplus U^* \oplus \mathcal{O}_C$$

où  $U = F \times^{SL_3} \mathbb{C}^3$  est un sous-fibré vectoriel de  $V$  et, d'après la Proposition 3.3.15,  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal stable. Or, le fibré vectoriel  $V$  et ses sous-fibrés vectoriels  $U$ ,  $U^*$  et  $\mathcal{O}_C$  sont de degré (et donc de pente) nul. Ainsi, le fibré vectoriel  $V$  n'est pas stable.

Rappelons ici le résultat de S. RAMANAN concernant la semistabilité des fibrés principaux orthogonaux :

**Proposition 3.3.5 ([Ram81]).** — *Un fibré principal orthogonal est semistable si et seulement si son fibré vectoriel associé est semistable. Il est stable si et seulement si son fibré vectoriel est somme directe de fibrés vectoriels stables mutuellement non isomorphes.*

En utilisant l'inclusion de  $G_2$  dans  $O_7$ , nous pouvons associer à un  $G_2$ -fibré principal son  $O_7$ -fibré principal correspondant et les résultats précédemment cités concernant la semistabilité de  $G_2$ -fibrés principaux se regroupent dans la proposition suivante :

**Proposition 3.3.6.** — *Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  est semistable,*
- (2) *le fibré principal orthogonal  $P_{G_2}(O_7)$  associé à  $P_{G_2}$  est semistable,*
- (3) *le fibré vectoriel  $P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  associé à  $P_{G_2}$  est semistable.*

**Lemme 3.3.7.** — *Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal et  $V$  le fibré vectoriel associé. Si  $V$  est stable alors  $P_{G_2}$  est stable.*

*Démonstration.* — Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal et  $V$  son fibré vectoriel associé. Pour montrer que la stabilité de  $V$  induit celle de  $P_{G_2}$ , il suffit de reprendre la preuve précédente avec des inégalités strictes. Les conditions, imposées par la stabilité du fibré vectoriel  $V$ , sur le degré de tous les sous-fibrés vectoriels, impose, en particulier, des conditions sur celui des sous-fibrés vectoriels isotropes (associés à des réductions aux sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$ ). Ainsi, la stabilité de  $V$  entraîne celle de  $P_{G_2}$ .  $\square$

La réciproque du lemme précédent n'est pas toujours vérifiée. La remarque 3.3.4 montre qu'il existe des  $G_2$ -fibrés principaux stables tels que le  $SO_7$ -fibré principal associé ne soit pas stable. La proposition suivante montre que l'exemple de la Remarque 3.3.4 (exhibant un cas où le  $G_2$ -fibré principal admet une  $SL_3$ -réduction) est le seul cas où le  $SO_7$ -fibré principal associé est strictement semistable.

**Théorème 3.3.8.** — Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal sur une courbe  $C$  et  $R_{SO_7}$  le  $SO_7$ -fibré principal correspondant. Supposons que  $P_{G_2}$  soit stable. Alors  $R_{SO_7}$  est semistable et s'il est strictement semistable alors  $P_{G_2}$  admet une  $SL_3$ -réduction.

*Démonstration.* — Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal stable sur une courbe  $C$ ,  $R_{SO_7}$  le  $SO_7$ -fibré principal correspondant et  $V$  le fibré vectoriel associé. La semistabilité de  $R_{SO_7}$  se déduit de la Proposition 3.3.1. Supposons que  $R_{SO_7}$  soit strictement semistable, donc que  $V$  ne soit pas stable (voir Proposition 3.3.5). Il existe alors un sous-fibré vectoriel  $S$  de  $V$  qui soit isotrope et de degré nul. Par isotropie, le rang de  $S$  est soit 1, soit 2, soit 3. On rappelle que l'on note  $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$  et  $\widetilde{P}_3$  les sous-groupes paraboliques maximaux de  $SO_7$  et  $P_1$  et  $P_2$  ceux de  $G_2$ .

(1) Cas où le rang de  $S$  est 1 :

Si  $S$  est un sous-fibré en droites de  $V$ , isotrope et degré nul, alors il correspond à une section  $\sigma$  :

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_1).$$

Or, d'après l'équation (45) du Lemme 3.3.2,

$$SO_7/\widetilde{P}_1 \simeq G_2/P_1$$

donc la section  $\sigma$  est en fait

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(G_2/P_1).$$

Ainsi,  $S$  correspond à une réduction de  $P_{G_2}$  au sous-groupe parabolique maximal  $P_1$  et  $S$  est de degré nul ; ce qui contredit la stabilité de  $P_{G_2}$ . Ainsi, un tel sous-fibré en droites de  $V$  (isotrope, de degré nul) ne peut exister.

(2) Cas où le rang de  $S$  est 2 :

Si  $S$  est de rang 2, son déterminant,  $\det(S) = \Lambda^2 S$ , est inclus dans  $\Lambda^2 V$ . Or,  $\Lambda^2 V$  se décompose de la manière suivante :

$$\Lambda^2 V = V \oplus P_{G_2}(\Gamma_{01})$$

(voir [FH91] §22.3). Notons pr la projection de  $\Lambda^2 V$  dans  $V$  :

$$\text{pr} : \Lambda^2 V = V \oplus P_{G_2}(\Gamma_{01}) \rightarrow V.$$

Définissons un morphisme  $G_2$ -équivariant entre  $\Lambda^2 V$  et  $V$ . À deux sections locales  $x$  et  $y$  de  $V$ , on peut associer à  $x \wedge y$  la section de  $V^*$  suivante :  $\omega_0(x, y, \cdot) \in V^*$ . Par l'isomorphisme entre  $V$  et  $V^*$ , issu de la forme quadratique non dégénérée, on associe à  $x \in V$  la forme linéaire  $B(x, \cdot) = -\text{Re}(x \cdot)$  (où  $B$  est la forme bilinéaire associée). Ainsi, à l'élément  $x \wedge y$  de  $\Lambda^2 V$ , on peut associer l'élément  $\omega_0(x, y, \cdot) = -\text{Re}[(xy) \cdot]$  de  $V^*$  puis l'élément  $xy$  de  $V$ . Il s'agit ici de la construction utilisée dans la preuve du Lemme 1.4.3. Par le lemme de Schur, la projection pr n'est

autre que l'application précédente (à un coefficient près). À une section locale  $x \wedge y$  de  $\Lambda^2 V$ , on associe :

$$\text{pr}(x \wedge y) = xy.$$

L'image du déterminant  $\det(S)$  par projection  $\text{pr}$  est soit nulle, soit de rang 1. Lorsque l'image de  $\det(S)$  par la projection  $\text{pr}$  est un fibré en droites alors ce fibré est de degré 0. En effet, si  $\text{pr}(\det(S))$  est un sous-fibré en droites de  $V$  alors son degré est négatif ou nul car  $V$  est un fibré vectoriel semistable de degré 0 et  $\text{pr}(\det(S))$ , étant un quotient du fibré en droites  $\det(S)$ , lui aussi de degré 0, est de degré positif ou nul ; donc si  $\text{pr}(\det(S))$  est un fibré en droites, il est de degré nul.

(a) Si l'image de  $\det(S)$  par projection  $\text{pr}$  est nulle, alors  $\det(S)$  est en fait contenu dans  $P_{G_2}(\Gamma_{01})$ . La section  $\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_2) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ , définissant le fibré vectoriel  $S$ , se factorise donc de la manière suivante :

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_2) \cap \mathbb{P}(P_{G_2}(\Gamma_{01})).$$

Mais, d'après l'équation (46) du Lemme 3.3.2 :

$$G_2/P_2 = \left( SO_7/\widetilde{P}_2 \right) \cap \mathbb{P}(\Gamma_{01}),$$

la section  $\sigma$  est en fait :

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(G_2/P_2).$$

Ceci définirait une réduction de  $P_{G_2}$  au sous-groupe parabolique maximal  $P_2$  de  $G_2$ , de degré 0 ; ce qui est impossible d'après la stabilité de  $P_{G_2}$ .

(b) Si l'image de  $\det(S)$  par projection  $\text{pr}$  est un fibré en droites de  $V$  de degré 0, considérons l'ouvert

$$\Omega = \text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V}) \setminus H$$

où  $\mathcal{V} = \mathcal{V}$  est l'espace vectoriel des octaves de Cayley imaginaires pures,  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$  est la Grassmannienne isotrope paramétrisant les sous-espaces isotropes de dimension 3 de  $V$  et  $H$  est l'hyperplan  $H = \{[\mathcal{W}] = [x \wedge y \wedge z] \in \text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V}) \mid \omega_0(x, y, z) = 0\}$ . Cet ouvert avait été introduit lors du Lemme 1.4.3, où il a été démontré que  $\Omega$  est l'orbite de n'importe quel élément de  $\Omega$  sous l'action de  $G_2$ . Cet ouvert de  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$  est de dimension 6.

**Lemme 3.3.9.** — *Il existe un ouvert  $\Omega'$  de  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$  tel que pour tout plan isotrope  $[\Pi]$  appartenant à  $\Omega'$ , il existe un 3-plan isotrope  $[\mathcal{W}] \in \Omega$  tel que  $\Pi \subset \mathcal{W}$ .*

*Démonstration.* — Considérons la variété d'incidence  $I$  inclus dans l'espace  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V}) \times \text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$  telle que

$$I = \{([\Pi], [\mathcal{W}]) \in \text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V}) \times \text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V}) \mid \Pi \subset \mathcal{W}\}.$$

Notons  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  les projections de  $I$  respectivement sur  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$  et sur  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$ . La variété  $I$  est de dimension 8 puisque  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$  est de dimension 7 et que chaque fibre de  $\text{pr}_1$  est de dimension 1 (ou bien car  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$  est de dimension 6 et que chaque fibre de  $\text{pr}_2$  est de dimension 2). Notons  $\Omega_I = \text{pr}_2^{-1}(\Omega)$  l'image inverse de  $\Omega$  par  $\text{pr}_2$ . Cet ensemble  $\Omega_I$  est un ouvert de  $I$ , de dimension 8 et son image par  $\text{pr}_1$  est donc de dimension 7, dans  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$  qui est aussi de dimension 7. Ainsi,  $\text{pr}_1(\Omega_I)$  contient un ouvert de  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$ , dense dans  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$ . En notant  $\Omega'$  cet ouvert, il vient

$$\forall \Pi \in \Omega', \quad \exists \mathcal{W} \in \Omega \quad \text{tel que} \quad \Pi \subset \mathcal{W}.$$

□

Considérons un 3-plan particulier  $\mathcal{W}_{2,3,4}$  donné par des sections locales  $y_2, y_3, y_4$  :

$$\mathcal{W}_{2,3,4} = [y_2 \wedge y_3 \wedge y_4]$$

où les  $y_i$  suivent les mêmes règles de calculs que la multiplication indiquée au tableau (83) de l'Annexe A). Comme  $\omega_0(y_2, y_3, y_4) = -\text{Re}[(y_2 y_3) y_4] = +\sqrt{2} \text{Re}(y_1 y_4) = -\sqrt{2}$ , donc  $\omega_0(y_2, y_3, y_4)$  est non nul, le 3-plan isotrope  $\mathcal{W}_{2,3,4}$  est bien un élément de  $\Omega$ . Regardons l'image d'un 2-plan de  $\mathcal{W}_{2,3,4}$  par la projection  $\text{pr}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \mathcal{W}_{2,3,4} &\rightarrow V \\ y_2 \wedge y_3 &\mapsto y_2 y_3 = -\sqrt{2} y_1, \\ y_2 \wedge y_4 &\mapsto y_2 y_4 = \sqrt{2} y_6, \\ y_3 \wedge y_4 &\mapsto y_3 y_4 = -\sqrt{2} y_5. \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{W}_{1,5,6}$  le 3-plan engendré par  $y_1, y_5$  et  $y_6$ . Ce 3-plan est isotrope d'après la matrice de la forme quadratique dans la base  $\mathfrak{B}_2$ , tableau (83) de l'Annexe A. D'après les calculs ci-dessus, tout élément de  $x \wedge y$  définissant un 2-plan de  $\mathcal{W}_{2,3,4}$  s'envoie par la projection  $\text{pr}$  sur un élément du 3-plan isotrope  $\mathcal{W}_{1,5,6}$ . L'image de  $x \wedge y$ , pour  $\langle x, y \rangle$  définissant un 2-plan de  $\mathcal{W}_{2,3,4}$ , est donc à fortiori isotrope.

De manière plus générale, pour tout 2-plan isotrope  $[\Pi]$  de l'ouvert  $\Omega'$  du Lemme 3.3.9, il existe un 3-plan  $[\mathcal{W}]$  de  $\Omega$  contenant  $\Pi$ . Or,  $\Omega$  est (en particulier) égal à l'orbite du 3-plan isotrope  $\mathcal{W}_{2,3,4}$ , donc il existe un élément  $g$  appartenant à  $G_2$  tel que  $g \cdot \mathcal{W}_{2,3,4} = \mathcal{W}$ . Le 2-plan  $\Pi$  est donc l'image par  $g$  d'un 2-plan de  $\mathcal{W}_{2,3,4}$ . Ainsi, il existe deux sections locales  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{W}_{2,3,4}$

telles que  $[\Pi] = [g(x) \wedge g(y)]$ . L'image par la projection  $\text{pr}$  de  $g(x) \wedge g(y)$  est  $g(x)g(y) = g(xy)$  (puisque  $g$  est un automorphisme). Or,  $xy$  est une section isotrope puisque  $xy = \text{pr}(x \wedge y)$  appartient à  $\mathcal{W}_{1,5,6}$ . La section  $g(xy)$  est aussi isotrope (car  $g$  préserve le produit scalaire).

De là, l'image  $\text{pr}(\det(S))$  par la projection  $\text{pr} : \Lambda^2 V \rightarrow V$  est un fibré en droites isotrope, de degré 0 pour tout sous-fibré vectoriel  $S$  de  $V$  tel que  $S = P_{G_2}(\Pi)$  où  $\Pi$  un 2-plan isotrope avec  $[\Pi]$  appartenant à l'ouvert  $\Omega'$  et tel que  $\text{pr}(\det(S))$  est non nulle. Ainsi, l'ouvert  $\Omega'$  de la Grassmannienne  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$  est contenant dans l'image inverse par  $\text{pr}$  de la quadrique du lieu d'isotropie de  $V$ . Cette quadrique étant fermée, son image réciproque par  $\text{pr}$  l'est aussi et contient donc l'adhérence de l'ouvert  $\Omega'$ . Or, la Grassmannienne  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$  est irréductible donc l'ouvert  $\Omega'$  est un ouvert dense dans  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$ . En conclusion, l'image  $\text{pr}(\det(S))$  par la projection  $\text{pr} : \Lambda^2 V \rightarrow V$  est un fibré en droites isotrope, de degré 0 pour tout sous-fibré vectoriel  $S$  de  $V$  tel que  $S = P_{G_2}(\Pi)$  où  $\Pi$  appartient  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$  et tel que  $\text{pr}(\det(S))$  est non nulle.

Or,  $V$  ne possède aucun sous-fibré en droites isotrope de degré 0 d'après l'étude du cas (1). Donc il ne peut y avoir de sous-fibré vectoriel  $S$  de  $V$ , isotrope, de rang 2, de degré 0 lorsque  $S = P_{G_2}(\Pi)$  avec  $[\Pi]$  appartenant à  $\text{Gr}^{\text{iso}}(2, \mathcal{V})$ , tel que  $\text{pr}(\det(S)) \neq 0$ .

(3) Cas où le rang de  $S$  est 3 :

Si  $S$  est de rang 3, son déterminant,  $\det(S) = \Lambda^3 S$ , est inclus dans  $\Lambda^3 V$ . Or, d'après [FH91] §22.3,

$$\Lambda^3 V = \mathcal{O}_C \oplus V \oplus P_{G_2}(\Gamma_{20}).$$

Les deux projections de  $\Lambda^3 V$  sur  $\mathcal{O}_C$  et sur  $V$  sont, par le Lemme de Schur les suivantes (à un coefficient de proportionnalité près) :

$$\begin{array}{lcl} \text{pr}_1 : \Lambda^3 V & \longrightarrow & \mathcal{O}_C \\ & & x \wedge y \wedge z \mapsto \omega_0(x, y, z), \\ \text{et } \text{pr}_2 : \Lambda^3 V & \longrightarrow & V \\ & & x \wedge y \wedge z \mapsto x \wedge y \wedge z \wedge \omega_0^* \end{array} \quad (48)$$

où  $x, y$  et  $z$  sont des sections locales de  $V$ ,  $\omega_0^*$  est l'élément de  $\Lambda^3 V$  correspondant à  $\omega_0$  de  $\Lambda^3 V^*$  et  $x \wedge y \wedge z \wedge \omega_0^*$  appartient à  $\Lambda^6 V \simeq V^* \simeq V$ .

(a) Si  $S$  est tel que  $\text{pr}_1(\det(S))$  est non nul, alors le morphisme  $\text{pr}_{1|\det(S)}$  entre les deux fibrés en droites de même pente,  $\det(S)$  et  $\mathcal{O}_C$ , est en fait un isomorphisme :

$$\det(S) \simeq \mathcal{O}_C.$$

Ainsi, le sous-fibré vectoriel  $S$  provient en fait d'une  $SL_3$ -réduction de  $P_{G_2}$ .

(b) Si la restriction du morphisme  $\text{pr}_1$  à  $\det(S)$  est identiquement nulle, c'est-à-dire si pour toutes sections locales  $x, y$  et  $z$  telles que  $S = P_{G_2}(\mathcal{W})$  où  $\mathcal{W} = \langle x, y, z \rangle$  est un 3-plan isotrope alors  $\omega_0(x, y, z) = 0$  (soit  $\mathcal{W} \in H$ ), alors  $\det(S)$  est inclus dans  $V \oplus P_{G_2}(\Gamma_{20})$ . Dans ce cas-là, regardons la projection de  $\det(S)$  sur  $V$ . Étudions le cas particulier où les sections locales sont  $y_1, y_2$  et  $y_3$ , vérifiant les mêmes règles de calculs que les vecteurs de la base  $\mathfrak{B}_1$  (tableau (78) de l'Annexe A). On a bien

$$\omega_0(y_1, y_2, y_3) = -\text{Re}[(y_1 y_2) y_3] = 0.$$

De plus, d'après (34),

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \phi_{1,2,3} + \phi_{1,4,7} + \phi_{1,5,6} + \phi_{2,4,6} - \phi_{2,5,7} + \phi_{3,4,5} + \phi_{3,6,7}, \\ \text{donc } \omega_0^* &= e_{1,2,3} + e_{1,4,7} + e_{1,5,6} + e_{2,4,6} - e_{2,5,7} + e_{3,4,5} + e_{3,6,7} \end{aligned}$$

où  $(e_i)_i$  est la base  $\mathfrak{B}_0$  de  $\mathcal{V}$ , issue du diagramme de Fano,  $(\phi_i)_i$  est sa base duale et  $e_{i,j,k} = e_i \wedge e_j \wedge e_k$ . On a

$$\begin{aligned} & y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(e_2 - ie_5) \wedge (e_1 - ie_4) \wedge (e_3 - ie_6), \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(e_{2,1,3} - ie_{2,1,6} - ie_{2,4,3} - e_{2,4,6} - ie_{5,1,3} - e_{5,1,6} - e_{5,4,3} + ie_{5,4,6}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_3) \\ &= y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge \omega_0^*, \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(e_{2,1,3} - ie_{2,1,6} - ie_{2,4,3} - e_{2,4,6} - ie_{5,1,3} - e_{5,1,6} - e_{5,4,3} + ie_{5,4,6}) \\ &\quad \wedge (e_{1,2,3} + e_{1,4,7} + e_{1,5,6} + e_{2,4,6} - e_{2,5,7} + e_{3,4,5} + e_{3,6,7}), \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(-ie_{2,1,6,3,4,5} - ie_{2,4,3,1,5,6} - ie_{5,1,3,2,4,6} + ie_{5,4,6,1,2,3}), \\ &= -\frac{i\sqrt{2}}{4}(e_{1,2,3,4,5,6} + e_{1,2,3,4,5,6} - e_{1,2,3,4,5,6} - e_{1,2,3,4,5,6}), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier,  $\text{pr}_2(\det(S)) = 0$  et donc le déterminant  $\det(S)$  est inclus dans  $P_{G_2}(\Gamma_{20})$ .

Montrons que, pour tout autre 3-plan isotrope  $\mathcal{W}$  tel que  $[\mathcal{W}]$  est inclus dans  $H$  (c'est-à-dire tel que  $[\mathcal{W}] = [x \wedge y \wedge z]$  avec  $\omega_0(x, y, z) = 0$ ), il existe un élément  $g$  de  $G_2$  tel que  $[\mathcal{W}] = [g \cdot y_1 \wedge y_2 \wedge y_3]$ . Conformément aux notations précédentes, on notera par la suite

$$y_{i,j,k} = y_i \wedge y_j \wedge y_k.$$

Soit la représentation de  $G_2$  suivante :

$$\begin{aligned} \rho : G_2 &\rightarrow \text{GL}(\Lambda^3 V) \\ g &\mapsto g \end{aligned}$$

avec  $g \cdot y_{i,j,k} = gy_i \wedge gy_j \wedge gy_k$  et

$$\begin{aligned} \rho_{y_{1,2,3}} : G_2 &\rightarrow \mathrm{GL}(\Lambda^3 V) \\ g &\mapsto g \cdot y_{1,2,3}. \end{aligned}$$

Considérons le morphisme :

$$\begin{aligned} \Phi : G_2 &\xrightarrow{\rho_{y_{1,2,3}}} \Lambda^3 \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V}) \\ g &\mapsto g \cdot y_{1,2,3} &\mapsto [g \cdot y_{1,2,3}]. \end{aligned}$$

L'image de  $\rho_{y_{1,2,3}}$  est l'orbite  $\mathrm{Orb}_{G_2}(y_{1,2,3})$  de  $y_{1,2,3}$  sous l'action de  $G_2$ . L'image de  $\Phi$  est l'orbite  $\mathrm{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  de  $[y_{1,2,3}]$  sous l'action de  $G_2$ . Cette orbite est contenue dans l'hyperplan  $H$  puisque, pour tout  $g \in G_2$ , on a

$$\omega_0(gy_1, gy_2, gy_3) = g^{-1} \cdot \omega_0(y_1, y_2, y_3) = \omega_0(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

car  $G_2$  est inclus dans le stabilisateur de  $\omega_0$  (Théorème 1.2.10).

Nous allons montrer que l'orbite  $\mathrm{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est égale à  $H$ . Pour cela, nous allons montrer que  $\mathrm{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est à la fois un ouvert et un fermé de  $H$  et que  $H$  est connexe.

La connexité  $H$  se démontre comme suit. Étant donnée la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-1) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0,$$

où  $Y$  est l'espace homogène  $Y := \mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}(3, \mathcal{V}) = SO_7/\widetilde{P}_3$  et  $H$  est vu comme un diviseur sur  $Y$ , il vient la suite exacte de cohomologie suivante :

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-1)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_H) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-1)).$$

Or,  $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(-1))$  est nulle et, par le théorème de Borel-Weil-Bott, la dimension  $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-1))$  est aussi nulle car  $Y = \mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}(3, \mathcal{V})$  est l'espace homogène  $SO_7/\widetilde{P}_3$ .

Ainsi,  $H^0(Y, \mathcal{O}_H)$  est isomorphe  $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ , c'est-à-dire à  $\mathbb{C}$ . Comme  $h^0(Y, \mathcal{O}_H)$  est le nombre de composantes connexes de  $H$ , on a bien :  $H$  connexe.

Montrons à présent que  $\mathrm{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est un ouvert de  $H$ . L'application tangente  $d_e \rho$  en l'identité à  $\rho$  est :

$$\begin{aligned} d_e \rho : \mathfrak{g}_2 &\rightarrow T_{y_{1,2,3}}(\mathrm{Orb}_{G_2}(y_{1,2,3})) \\ X &\mapsto X \cdot y_{1,2,3} = (Xy_1) \wedge y_2 \wedge y_3 + y_1 \wedge (Xy_2) \wedge y_3 \\ &\quad + y_1 \wedge y_2 \wedge (Xy_3). \end{aligned}$$

Cette application linéaire est surjective et son image n'est autre que l'orbite de  $y_{1,2,3}$  sous l'action de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$ . Le calcul des images  $X \cdot y_{1,2,3}$  pour les 14 vecteurs  $\{A, B, X_{\pm 1}, \dots, X_{\pm 6}, \}$  qui engendrent  $\mathfrak{g}_2$  (voir (9)) montre que l'orbite  $\mathfrak{g}_2 \cdot y_{1,2,3} = \{X \cdot y_{1,2,3} \mid X \in \mathfrak{g}_2\}$  est de dimension 6. En effet, l'expression

des matrices  $A, B, X_{\pm 1}, \dots, X_{\pm 6}$  dans la base  $\mathfrak{B}_1 = (y_1, \dots, y_7)$  est la suivante :

$$\begin{aligned} A &= E_{1,1} - E_{4,4} + E_{2,2} - E_{5,5}, \\ X_1 &= E_{1,2} - E_{5,4} + i\sqrt{2}E_{3,7} - i\sqrt{2}E_{7,6}, \\ X_2 &= E_{2,3} - E_{6,5}, \\ X_3 &= E_{1,3} - E_{6,4} - i\sqrt{2}E_{2,7} + i\sqrt{2}E_{7,5}, \\ X_4 &= E_{2,6} - E_{3,4} - i\sqrt{2}E_{1,7} + i\sqrt{2}E_{7,4}, \\ X_5 &= E_{1,6} - E_{3,4}, \\ X_6 &= E_{1,5} - E_{2,4}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= E_{1,1} - E_{4,4} + E_{3,3} - E_{6,6}, \\ X_{-1} &= E_{2,1} - E_{4,5} + i\sqrt{2}E_{6,7} - i\sqrt{2}E_{7,3}, \\ X_{-2} &= E_{3,2} - E_{5,6}, \\ X_{-3} &= E_{3,1} - E_{4,6} - i\sqrt{2}E_{5,7} + i\sqrt{2}E_{7,2}, \\ X_{-4} &= E_{5,3} - E_{6,2} + i\sqrt{2}E_{4,7} - i\sqrt{2}E_{7,1}, \\ X_{-5} &= E_{4,3} - E_{6,1}, \\ X_{-6} &= E_{4,2} - E_{5,1}. \end{aligned}$$

Le calcul de  $X \cdot y_{1,2,3}$ , pour les 14 vecteurs précédents, est donc le suivant :

$$\begin{aligned} A \cdot y_{1,2,3} &= 2y_{1,2,3} & \text{et} & & B \cdot y_{1,2,3} &= 2y_{1,2,3}, \\ X_1 \cdot y_{1,2,3} &= 0, & & & X_{-1} \cdot y_{1,2,3} &= y_{1,2,7}, \\ X_2 \cdot y_{1,2,3} &= 0, & & & X_{-2} \cdot y_{1,2,3} &= 0, \\ X_3 \cdot y_{1,2,3} &= 0, & & & X_{-3} \cdot y_{1,2,3} &= -i\sqrt{2}y_{1,3,7}, \\ X_4 \cdot y_{1,2,3} &= 0, & & & X_{-4} \cdot y_{1,2,3} &= -\sqrt{2}y_{2,3,7} + y_{1,3,6} + y_{1,2,5}, \\ X_5 \cdot y_{1,2,3} &= 0, & & & X_{-5} \cdot y_{1,2,3} &= -y_{2,3,6} + y_{1,2,4}, \\ X_6 \cdot y_{1,2,3} &= 0, & & & X_{-6} \cdot y_{1,2,3} &= -y_{2,3,6} - y_{1,3,4}. \end{aligned} \tag{49}$$

Ainsi,  $\mathfrak{g}_2 \cdot y_{1,2,3}$  est de dimension 6. L'espace tangent  $T_{y_{1,2,3}}(\text{Orb}_{G_2}(y_{1,2,3}))$  est donc de dimension 6 et son image dans  $\mathbb{P}(\Lambda^3 \mathcal{V})$  est de dimension 5. Or, l'hyperplan  $H$  de la  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$  (qui est de dimension 6) est aussi de dimension 5. L'image du morphisme  $\Phi$  est donc incluse dans  $H$  et est de même dimension.

Par ailleurs,  $H$  est irréductible. En effet, le groupe de Picard  $\text{Pic}(\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V}))$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et l'hyperplan  $H$  de  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$  correspond à 1 dans cet isomorphisme. L'hyperplan  $H$  ne peut donc pas être réductible car 1 n'est pas divisible dans  $\mathbb{Z}$ .

Comme  $H$  est irréductible et l'image du morphisme  $\Phi$ , incluse dans  $H$ , est de même dimension que  $H$ , l'image du morphisme  $\Phi$  contient donc un ouvert de  $H$ . L'orbite  $\text{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est donc dense dans  $H$  : c'est la seule orbite dense.

En outre, l'image de  $\Phi$  est un fermé de  $H$ . En effet, l'image de  $\Phi$  est l'orbite  $\text{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$ . Elle est isomorphe au quotient de  $G_2$  par le stabilisateur  $\text{Stab}_{G_2}([y_{1,2,3}])$ . Si l'on montre que ce stabilisateur est un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G_2$ , l'orbite considérée sera donc un espace homogène  $G_2/P$  de  $\mathbb{P}(\Lambda^3\mathcal{V})$ , donc un fermé de  $H$ . Étudions donc le stabilisateur  $\text{Stab}_{G_2}([y_{1,2,3}])$ . D'après (49),  $X_1, \dots, X_6$  sont inclus dans le noyau de l'application tangente  $d_e\rho$ . Donc, le sous-groupe de  $G_2$  engendré par  $\exp(X_1), \dots, \exp(X_6)$  est contenu dans le stabilisateur de  $y_{1,2,3}$ , et, à fortiori, dans le stabilisateur de  $[y_{1,2,3}]$ . Par ailleurs, comme  $d_e\rho(A)(y_{1,2,3}) = 2y_{1,2,3}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \rho(\exp(A))y_{1,2,3} &= \exp(d_e\rho)(A)y_{1,2,3}, \\ &= e^2y_{1,2,3}, \\ \text{et} \quad \rho(\exp(B))y_{1,2,3} &= e^2y_{1,2,3}, \\ \text{donc} \quad \Phi(\exp(A)) = \Phi(\exp(B)) &= [y_{1,2,3}]. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\exp(A)$  et  $\exp(B)$  appartiennent aussi au stabilisateur de  $[y_{1,2,3}]$ . Finalement, le sous-groupe engendré par  $\exp(A), \exp(B), \exp(X_1), \dots, \exp(X_6)$  est inclus dans  $\text{Stab}_{G_2}([y_{1,2,3}])$ . Ce stabilisateur est donc un sous-groupe parabolique de  $G_2$  puisqu'il contient un sous-groupe de Borel<sup>(1)</sup>. De là, l'orbite  $\text{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}]) = G_2/\text{Stab}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est une variété projective algébrique. Il s'agit donc d'un fermé de  $H$ .

Ainsi, l'orbite  $\text{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est un fermé de  $H$  contenant un ouvert de  $H$ . L'adhérence de  $\text{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est donc égale à  $\text{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  et à  $H$ . Ainsi, l'orbite  $\text{Orb}_{G_2}([y_{1,2,3}])$  est égale à  $H$ . Tout élément  $[x \wedge y \wedge z]$  de  $H$ , il existe un élément  $g$  de  $G_2$  tel que  $[x \wedge y \wedge z] = [g \cdot y_{1,2,3}]$ .

Considérons un sous-fibré  $S$  de  $V$  de rang 3, isotrope tel que  $\text{pr}_1(S) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $S = P_{G_2}(\mathcal{W})$  où  $\mathcal{W} = \langle x, y, z \rangle$  et où  $x, y$  et  $z$  sont des sections locales vérifiant  $\omega_0(x, y, z) = 0$ , c'est-à-dire  $\mathcal{W}$  appartient à  $H$ . D'après ce qui précède, il existe  $g$  appartenant à  $G_2$  tel que  $[x \wedge y \wedge z] = [g \cdot y_{1,2,3}]$ , donc il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $x \wedge y \wedge z = \lambda g \cdot y_{1,2,3}$ . L'image de  $S$  par la projection

<sup>(1)</sup>Le stabilisateur de  $[y_{1,2,3}]$  est le sous-groupe parabolique maximal  $P_1$  associé à la sous-algèbre parabolique maximale  $\mathfrak{p}_1$  engendré par  $\{A, B, X_1, \dots, X_6, X_{-2}\}$  (voir (11))

$\text{pr}_2$  est localement donnée par

$$\begin{aligned}
\text{pr}_2(S) &= x \wedge y \wedge z \wedge \omega_0^*, \\
&= \lambda g \cdot y_{1,2,3} \wedge \omega_0^*, \\
&= \lambda g \cdot (y_{1,2,3} \wedge g^{-1} \cdot \omega_0^*), \\
&= \lambda g \cdot (y_{1,2,3} \wedge (g^{-1} \cdot \omega_0)^*), \\
&= \lambda g \cdot (y_{1,2,3} \wedge \omega_0^*) && \text{car } g \text{ préserve } \omega_0, \\
&= \lambda g \cdot 0, \\
\text{pr}_2(S) &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout sous-fibré  $S$  de  $V$ , de rang 3, isotrope, de degré 0, tel que l'image de  $\det(S)$  par la projection  $\text{pr}_1$  est nulle, vérifie :

$$\det(S) \hookrightarrow P_{G_2}(\Gamma_{20}).$$

Ainsi, la section  $\sigma$  associée à un tel fibré  $S$  se factorise de la manière suivante :

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_3) \cap \mathbb{P}(P_{G_2}(\Gamma_{20})).$$

Or, de par l'équation (47) du Lemme 3.3.2, on a

$$G_2/P_1 = (SO_7/\widetilde{P}_3) \cap \mathbb{P}(\Gamma_{20}).$$

D'où l'écriture de la section  $\sigma$  sous la forme :

$$\sigma : C \rightarrow P_{G_2}(G_2/P_1).$$

Il s'agit donc d'une section associée à une réduction au sous-groupe parabolique  $P_1$  de  $G_2$ . La stabilité de  $P_{G_2}$  en tant que  $G_2$ -fibré principal s'oppose à l'existence d'un tel sous-fibré  $S$  de degré 0.

Ainsi, la seule possibilité pour que le fibré vectoriel  $V$ , associé au  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$ , admette un sous-fibré vectoriel  $S$  isotrope, de degré 0 est que  $P_{G_2}$  admette une  $SL_3$ -réduction.  $\square$

En utilisant la notion de « stabilité régulière », nous allons pouvoir donner un cas où la stabilité d'un  $G_2$ -fibré principal entraîne celle du  $SO_7$ -fibré associé.

**Définition 3.3.10.** — Un  $G$ -fibré principal  $E$  est dit **régulièrement stable** lorsque  $E$  est stable et que

$$\text{Aut}_G(E) \simeq Z(G)$$

où  $\text{Aut}_G(E)$  est le groupe des automorphismes du  $G$ -fibré principal  $E$  et  $Z(G)$  désigne le centre de  $G$ .

**Remarque 3.3.11.** — Le centre  $Z(G)$  d'un groupe  $G$  est toujours inclus dans les automorphismes d'un  $G$ -fibré principal  $E$  : à un élément  $g_0$  du centre  $Z(G)$ ,

on associe la multiplication à droite par  $g_0$  qui est un automorphisme de  $E$  (le fait que  $g_0$  soit un élément du centre de  $G$  garantit la  $G$ -équivariance exigée). Mais il se peut qu'il existe d'autres automorphismes ne provenant pas de la multiplication par un élément du centre.

Un  $G$ -fibré principal est régulièrement stable lorsque que son groupe d'automorphismes est le plus petit possible.

**Théorème 3.3.12 (Corollaire du Théorème 3.3.8).** — *Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal et  $R_{SO_7}$  le  $SO_7$ -fibré principal correspondant. Si  $P_{G_2}$  est régulièrement stable alors  $R_{SO_7}$  est stable.*

*Démonstration.* — Si  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal régulièrement stable alors il est stable et son groupe d'automorphismes est trivial. D'après le Théorème 3.3.8, la seule manière pour que le  $SO_7$ -fibré principal  $R_{SO_7}$  ne soit pas stable est que  $P_{G_2}$  admette une  $SL_3$ -réduction. Or, si  $P_{G_2}$  est stable et si  $P_{G_2} = E(G_2)$  où  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal alors  $E$  est stable (voir plus loin la Proposition 3.3.15) et le groupe d'automorphismes de  $P_{G_2}$  ne serait pas trivial, d'après le Lemme 3.3.16. Ainsi, si  $P_{G_2}$  est régulièrement stable alors  $R_{SO_7}$  est stable.  $\square$

La proposition suivante donne une nouvelle caractéristique du lieu  $H$  constitué des 3-plans isotropes de l'espace des octaves imaginaires pures engendré par trois vecteurs  $x, y$  et  $z$  tels que  $\omega_0(x, y, z) = 0$ .

**Théorème 3.3.13.** — *L'hyperplan  $H$  de la Grassmannienne  $\text{Gr}^{\text{iso}}(3, \mathcal{V})$ , constitué des 3-plans isotropes  $[x \wedge y \wedge z]$  tels que  $\omega_0(x, y, z) = 0$ , est contenu dans le lieu d'associativité de octaves de Cayley :*

$$\text{si } [x \wedge y \wedge z] \in H \text{ alors } (xy)z = x(yz).$$

*Démonstration.* — D'après la démonstration de Théorème 3.3.8, l'hyperplan  $H$  est contenu dans le noyau du morphisme  $\text{pr}_2 : \Lambda^3 \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  décrit en (48), où  $\mathcal{V}$  est l'espace vectoriel constitué des octaves de Cayley imaginaires pures. Or, par le lemme de Schur, le morphisme  $\text{pr}_2 : \Lambda^3 \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  est, à un coefficient près, égal au morphisme  $G_2$ -équivariant  $\delta : \Lambda^3 \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  suivant<sup>(2)</sup> : pour  $a \wedge b \wedge c$  appartenant à  $\Lambda^3 \mathcal{V}$

$$\delta(a \wedge b \wedge c) := [a, b, c] = (ab)c - a(bc).$$

Le morphisme  $\delta$  est bien défini puisque si  $e_i, e_j$  et  $e_k$  sont trois éléments de la base  $\mathfrak{B}_0$  des octaves de Cayley alors  $\delta(e_i \wedge e_j \wedge e_k) = -\delta(e_j \wedge e_i \wedge e_k)$  et il est de

<sup>(2)</sup>On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_3) &= 0, \\ \text{et } \delta(y_1 \wedge y_2 \wedge y_3) &= (y_1 y_2) y_3 - y_1 (y_2 y_3) = 0 + \sqrt{2} y_1 y_1 = 0 \end{aligned}$$

même des autres permutations des trois éléments  $e_i, e_j, e_k$  en faisant apparaître la signature de la permutation<sup>(3)</sup>. L'algèbre de octaves de Cayley est ainsi dite **alternative** (voir [Ada96]).

Le morphisme  $\delta$ , parfois appelé associateur, mesure le défaut d'associativité entre trois éléments de  $\mathcal{V}$ . D'après la démonstration du Théorème 3.3.8,  $H$  est inclus dans le noyau de la projection  $\text{pr}_2$ , donc est inclus dans le noyau du morphisme  $\delta$ . Ainsi, pour  $x, y, z$  appartenant à  $\mathcal{V}$ ,

$$\begin{array}{ll} \text{si} & [x \wedge y \wedge z] \in H \quad \text{alors} \quad \delta(x, y, z) = 0, \\ \text{i.e. si} & [x \wedge y \wedge z] \in H \quad \text{alors} \quad (xy)z = x(yz). \end{array}$$

□

### 3.3.2. Étude des $G_2$ -fibrés principaux admettant une réduction. —

D'après la Proposition 3.3.1, si  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal et  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  son fibré vectoriel associé, alors  $P_{G_2}$  est semistable si et seulement si  $V$  est semistable.

Afin d'étudier le lieu stable des espaces de modules des  $G_2$ -fibrés principaux, établissons quelques propriétés, concernant notamment les  $G_2$ -fibrés principaux admettant une réduction à un des sous-groupes de  $G_2$  connexes, de rang maximal, maximaux pour l'ordre donné par l'inclusion :  $SL_3$  ou  $SO_4$  (voir paragraphe 1.5).

*3.3.2.1. Étude de  $G_2$ -fibrés principaux admettant une  $SL_3$ -réduction. —* Cette section est consacré aux  $G_2$ -fibrés principaux admettant une réduction au groupe simplement connexe  $SL_3$ .

**Lemme 3.3.14.** — *Soient  $E$  un  $SL_3$ -fibré principal sur une courbe  $C$ ,  $P_{G_2} = E(G_2) = E \times^{SL_3} G_2$  le  $G_2$ -fibré principal associé à  $E$  et  $W = E(\mathbb{C}^3)$  le fibré vectoriel de rang 3 associé à  $E$  et  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  le fibré vectoriel de rang 7*

---

et

$$\begin{array}{lll} y_1 \wedge y_2 \wedge y_4 & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{2,4,5} - ie_{1,2,5}) & \Lambda^3 \mathcal{V}, \\ \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_4) & \simeq & \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{2,3,4,5,6,7} + ie_{1,2,3,5,6,7}) & \in \Lambda^6 \mathcal{V}, \\ \text{donc } \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_4) & \simeq & \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1^* - ie_4^*) = y_2^* & \in \mathcal{V}^*, \\ & \simeq & y_2 & \in \mathcal{V}, \\ \text{et } \delta(y_1 \wedge y_2 \wedge y_4) & = & (y_1 y_2) y_4 - y_1 (y_2 y_4) = 0 - 2y_2 = -2y_2, \\ \text{donc } \delta(y_1 \wedge y_2 \wedge y_4) & = & -2 \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_4), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lll} y_1 \wedge y_2 \wedge y_5 & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{1,4,5} - ie_{1,2,4}) & \Lambda^3 \mathcal{V}, \\ \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_4) & \simeq & \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{1,3,4,5,6,7} + ie_{1,2,3,4,6,7}) & \in \Lambda^6 \mathcal{V}, \\ \text{donc } \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_4) & \simeq & -\frac{\sqrt{2}}{2}(e_2^* - ie_5^*) = -y_1^* & \in \mathcal{V}^*, \\ & \simeq & -y_1 & \in \mathcal{V}, \\ \text{et } \delta(y_1 \wedge y_2 \wedge y_5) & = & (y_1 y_2) y_5 - y_1 (y_2 y_5) = 0 - y_1(-1 + iy_7) = 2y_1, \\ \text{donc } \delta(y_1 \wedge y_2 \wedge y_5) & = & -2 \text{pr}_2(y_1 \wedge y_2 \wedge y_5). \end{array}$$

Le coefficient de proportionnalité entre  $\text{pr}_2$  et  $\delta$  est donc égale à  $(-2)$ .

<sup>(3)</sup>Voir 1.1.9 de [Yok09]

associé à  $P_{G_2}$ . Alors

$$V = W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C. \quad (50)$$

*Démonstration.* — Sous l'action de  $SL_3$ ,  $\mathbb{C}^7$  se décompose donc de la manière suivante en composantes irréductibles :

$$\mathbb{C}^7 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^* \oplus \mathbb{C}$$

où  $\mathcal{W}$  (et  $\mathcal{W}^*$ ) est un sous-espace vectoriel isotrope de dimension 3 (voir description de  $\mathcal{W}$  dans l'équation (16)). Ainsi, avec les notations de l'énoncé, le fibré vectoriel  $V = P_{G_2} \times^{G_2} \mathbb{C}^7 = E \times^{SL_3} \mathbb{C}^7$  est

$$\begin{aligned} V &= E \times^{SL_3} (\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^* \oplus \mathbb{C}) \\ V &= (E \times^{SL_3} \mathcal{W}) \oplus (E \times^{SL_3} \mathcal{W}^*) \oplus (E \times^{SL_3} \mathbb{C}) \\ V &= W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C, \end{aligned}$$

où  $W = E(\mathcal{W}) = E \times^{SL_3} \mathcal{W}$  est un sous-fibré vectoriel de  $V$ , isotrope de rang 3.  $\square$

Il se peut qu'une  $SL_3$ -réduction d'un  $G_2$ -fibré principal soit donnée par un sous-fibré vectoriel  $W'$  de  $V$  de rang 3, de déterminant trivial, où  $V$  est le fibré vectoriel associé au  $G_2$ -fibré principal en question. Explicitons comment obtenir une décomposition de  $V$  comme celle ci-dessus lorsque  $W'$  appartient à l'espace  $\Omega$  défini en au Lemme 1.4.3, c'est-à-dire  $W'$  isotrope et tel que  $\omega_{0|\Lambda^3 W'}$  est un isomorphisme. Il suffit de reprendre ce qui a été fait dans la preuve du Lemme 1.4.3 : on considère  $W'$  puis  $\Lambda^2 W'$  qui s'avère être isomorphe à  $(W')^*$  via un morphisme défini à partir de  $\omega_0$  (isomorphisme noté  $L_1$  au Lemme 1.4.3). Ces deux espaces sont alors en somme directe et la forme quadratique sur  $W' \oplus (W')^*$  est non-dégénérée. En faisant apparaître le fibré en droites orthogonal de  $W' \oplus (W')^*$ , on obtient la décomposition :

$$V = W' \oplus (W')^* \oplus^\perp \mathcal{O}_C.$$

**Proposition 3.3.15.** — Soient  $E$  un  $SL_3$ -fibré principal et  $P_{G_2} = E(G_2)$  le  $G_2$ -fibré principal associé à  $E$ . Alors  $E$  est stable si et seulement si  $P_{G_2}$  est stable.

*Démonstration.* — Considérons  $E$  un  $SL_3$ -fibré principal au-dessus de la courbe  $C$ ,  $P_{G_2} = E(G_2)$  le  $G_2$ -fibré principal correspondant et  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7) = P_{G_2} \times^{G_2} \mathbb{C}^7 = E \times^{SL_3} \mathbb{C}^7$  le fibré vectoriel associé à  $P_{G_2}$ .

Le groupe  $SL_3$  est vu ici comme un sous-groupe de  $G_2$ , lui-même inclus dans  $SO_7$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} SL_3 &\longrightarrow SO_7 \\ A &\longmapsto \left( \begin{array}{c|cc} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^t A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.3.14, le fibré vectoriel  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  est de la forme

$$V = W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C$$

où  $W = E \overset{SL_3}{\times} W$  est un sous-fibré vectoriel de  $V$ , isotrope de rang 3.

Les sous-groupes paraboliques maximaux du groupe  $G_2$  ( $P_1$  et  $P_2$ ) et ceux de  $SO_7$  ( $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$  et  $\widetilde{P}_3$ ) sont décrits au paragraphe 1.4.

Supposons que  $E$  soit stable. D'après le paragraphe 3.2.2, le fibré vectoriel  $W$  est aussi stable. Raisonnons par l'absurde : si  $P_{G_2}$  n'était pas stable, il posséderait une réduction  $\sigma : C \rightarrow P_{G_2}/P$  à un sous-groupe parabolique maximal  $P$  de  $G_2$  telle que le degré de  $\sigma^*T_{P_{G_2}/P}$  serait négatif ou nul.

Supposons qu'une telle réduction existe pour le sous-groupe  $P = P_1$ . D'après l'équation (45),

$$G_2/P_1 = SO_7/\widetilde{P}_1.$$

Ainsi

$$\sigma : C \longrightarrow P_{G_2}/P_1 = P_{G_2}(G_2/P_1) = P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_1).$$

De par la démonstration de la Proposition 3.3.1, cette réduction correspond à un fibré en droites isotrope  $L$  de  $V = W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C$  et il existe un entier  $m$  strictement positif tel que

$$\deg(\sigma^*T_{P_{G_2}/P_1}) = m \deg(L^*).$$

La condition «  $\deg(\sigma^*T_{P_{G_2}/P_1}) \geq 0$  » équivaut à la condition «  $\deg(L) \leq 0$  ». Considérons les trois projections suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 &:= L \hookrightarrow W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C \rightarrow W, \\ \text{pr}_2 &:= L \hookrightarrow W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C \rightarrow W^*, \\ \text{pr}_3 &:= L \hookrightarrow W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C. \end{aligned}$$

L'un de ces trois morphismes n'est pas identiquement nul. Or,  $\text{pr}_1 : L \rightarrow W$  est un morphisme entre deux fibrés vectoriels stables :  $L$  et  $W$  ( $L$  est stable car c'est un fibré en droites). Or, la pente de  $W$  est nulle car son degré est nul. En effet,  $W$  est le fibré vectoriel associé au  $SL_3$ -fibré  $E$ . Si  $\text{pr}_1$  n'est pas identiquement nul, on devrait avoir  $\mu(L)$  inférieure ou égale à  $\mu(W)$  d'après la Proposition 3.2.9. Ainsi, on devrait avoir  $\deg(L)$  négatif ou nul. Ainsi, la

seule solution possible est d'avoir  $\deg(L) = 0$ . Mais alors, le morphisme  $\text{pr}_1$  serait un morphisme entre deux fibrés vectoriels stables de même pente, donc un isomorphisme d'après la Proposition 3.2.9. Or, les rangs de  $L$  et de  $W$  étant différents, on ne peut avoir un tel isomorphisme. Il en va de même pour le cas où  $\text{pr}_2$  est non identiquement nul, puisque  $\mu(W^*) = -\mu(W) = 0$ . Enfin, si l'on suppose que  $\text{pr}_3$  est non identiquement nul, vu que  $\mu(\mathcal{O}_C) = 0$ , on aboutit au fait que  $\text{pr}_3 : L \rightarrow \mathcal{O}_C$  serait un isomorphisme. Or, le fibré en droites  $L$  est isotrope alors que  $\mathcal{O}_C$  est muni d'une forme quadratique non dégénérée, ce qui contredit l'existence de cet isomorphisme. Le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  ne peut donc pas posséder de réduction au groupe  $P_1$ .

Supposons maintenant que la réduction de  $P_{G_2}$  avec  $\deg(\sigma^*T_{P_{G_2}/P})$  négatif ou nul concerne une réduction au sous-groupe parabolique maximal  $\widetilde{P}_2$  de  $G_2$ . Cette fois-ci, il n'y a pas d'isomorphisme entre  $G_2/P_2$  et  $SO_7/\widetilde{P}_2$  mais seulement une inclusion (voir équation (46)). Considérons le sous-fibré vectoriel isotrope de  $V$ , de rang 2, noté  $M$ , défini par  $\sigma$  :

$$\begin{array}{ccc} P_{G_2}(G_2/P_2) & \longrightarrow & P_{G_2}(SO_7/\widetilde{P}_2) \\ \uparrow \sigma & \nearrow & \\ C & & \end{array}$$

Comme précédemment, le degré de  $\sigma^*T_{P_{G_2}/P_2}$  étant égal à  $m \deg(W^*)$  où  $m$  est un entier strictement positif. On suppose donc ici que le degré de  $M$  est positif ou nul (donc  $\mu(M) \geq 0$ ). Ce sous-fibré  $M$  est un fibré vectoriel stable. En effet, tout sous-fibré propre  $L$  de  $M$  est un fibré en droites isotrope, correspondant donc à une  $\widetilde{P}_1$ -réduction du  $SO_7$ -fibré associé à  $P_{G_2}$ , donc correspondant à une  $P_1$ -réduction de  $P_{G_2}$  car  $G_2/P_1 = SO_7/\widetilde{P}_1$ . Donc, d'après le paragraphe précédent, le degré de  $L$  est strictement négatif. En considérant les trois projections :

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 &:= M \hookrightarrow W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C \rightarrow W, \\ \text{pr}_2 &:= M \hookrightarrow W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C \rightarrow W^*, \\ \text{pr}_3 &:= M \hookrightarrow W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C \end{aligned}$$

dont l'une (au moins), notée  $\text{pr}_i$ , ne doit pas être identiquement nulle, on obtient que  $\mu(M)$  doit être négative ou nulle vu que  $\mu(W) = \mu(W^*) = \mu(\mathcal{O}_C) = 0$ . Ainsi, la pente de  $M$  est nulle. Le morphisme non nul  $\text{pr}_i$  entre deux fibrés stables de même pente devrait être un isomorphisme. Or, comme le rang de  $M$  est 2 et que ceux de  $W$ ,  $W^*$  et  $\mathcal{O}_C$  sont respectivement égaux à 3, 3 et 1. Aucune des trois projections précédentes ne peut être un isomorphisme, ce qui contredit l'hypothèse. Le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  ne peut donc pas posséder de réduction au

groupe  $P_2$ . En conclusion, si  $E$  est un  $SL_3$ -fibré stable alors  $P_{G_2} = E(G_2)$  l'est aussi.

Inversement, supposons que  $P_{G_2} = E(G_2)$  soit stable. Les sous-groupes paraboliques maximaux de  $SL_3$  sont

$$Q_1 = \left\{ \left( \begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\} \cap SL_3 \quad \text{et} \quad Q_2 = \left\{ \left( \begin{array}{c|cc} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \right\} \cap SL_3.$$

Ces sous-groupes sont naturellement inclus dans les sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$  :

$$Q_1 \subset P_1 \quad \text{et} \quad Q_2 \subset P_2.$$

Supposons qu'il existe  $\sigma : C \rightarrow E/Q_i = E \times^{SL_3} (SL_3/Q_i)$  une réduction de  $E$  à un sous-groupe parabolique maximal  $Q_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  telle que  $\deg \sigma^* T_{E/Q_i}$  soit négatif ou nul. Considérons la  $P_i$ -réduction de  $P_{G_2}$  définie par  $\tilde{\sigma} : C \rightarrow P_{G_2}/P_i$  avec

$$\tilde{\sigma} : C \xrightarrow{\sigma} E \times^{SL_3} (SL_3/Q_i) \longrightarrow E \times^{SL_3} (G_2/P_i) \simeq P_{G_2}(G_2/P_i).$$

Alors, il existe deux entiers  $m$  et  $\tilde{m}$  strictement positifs tel que

$$\begin{aligned} \deg \sigma^* T_{E/Q_i} &= m \mathcal{O}(1)_{|\mathbb{P}(\Lambda^i V)}, \\ \deg \tilde{\sigma}^* T_{P_{G_2}/P_i} &= \tilde{m} \mathcal{O}(1)_{|\mathbb{P}(\Lambda^i V)}, \end{aligned}$$

Ainsi, si le degré  $\deg \sigma^* T_{E/Q_i}$  est négatif ou nul, alors le degré  $\deg \tilde{\sigma}^* T_{P_{G_2}/P_i}$  l'est aussi. Ce qui définirait une  $P_i$ -réduction de  $P_{G_2}$  contredisant l'hypothèse de stabilité du  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$ . Ainsi, si  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal stable alors  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal stable.  $\square$

Explicitons les groupes d'automorphismes de  $G_2$ -fibrés principaux admettant une  $SL_3$ -réduction stable.

**Lemme 3.3.16.** — *Soit  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal stable sur une courbe  $C$ . Son groupe d'automorphismes  $\text{Aut}_{SL_3}(E)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .*

*Soit  $P$  le  $G_2$ -fibré principal associé à  $E$  :*

$$P = E(G_2).$$

*Si le fibré vectoriel  $W = E(\mathbb{C}^3)$  associé à  $E$  n'est pas autodual, c'est-à-dire si  $W$  n'est pas isomorphe à son dual  $W^*$ , alors le groupe d'automorphismes  $\text{Aut}_{G_2}(P)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  :*

$$\text{Aut}_{G_2}(P) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

*Si le fibré vectoriel  $W$  est autodual, alors*

$$\text{Aut}_{G_2}(P) = \Sigma_3$$

où  $\Sigma_3$  désigne le groupe symétrique d'ordre 3.

*Démonstration.* — Soit  $E$  un  $SL_3$ -fibré principal stable sur une courbe  $C$  et  $P = E(G_2)$  le  $G_2$ -fibré principal associé. Notons  $W = E(\mathbb{C}^3)$  le fibré vectoriel de rang 3 associé à  $E$  et  $V = P(\mathbb{C}^7) = W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C$  le fibré vectoriel de rang 7 associé à  $P$ . Par le paragraphe 3.2.2,  $W$  est stable.

Soit  $\varphi : E \rightarrow E$  un automorphisme de  $E$  et  $\tilde{\varphi} : W \rightarrow W$  l'isomorphisme de fibré vectoriel correspondant. D'après le Corollaire 3.2.10,  $W$  étant stable,  $\tilde{\varphi}$  est une homothétie. Notons  $\lambda$  le rapport de cette homothétie. Le déterminant  $\det(\tilde{\varphi})$  est trivial puisque  $\varphi$  est un automorphisme du  $SL_3$ -fibré principal  $E$ , ce qui impose finalement que  $\lambda^3 = 1$ . Inversement, toute homothétie dont le cube du rapport égal à 1 est bien un  $SL_3$ -automorphisme de  $E$ . D'où

$$\mathrm{Aut}_{SL_3}(E) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Considérons maintenant  $\varphi : P \rightarrow P$  un automorphisme du  $G_2$ -fibré principal  $P$ , ainsi que  $\tilde{\varphi} : V \rightarrow V$  l'isomorphisme du fibré vectoriel  $V$  correspondant. Sur un ouvert de trivialisations de  $V$ , pour  $i \in \{1, \dots, 7\}$ , notons  $y_i$  des sections locales constantes vérifiant la structure de l'algèbre de Cayley  $\mathcal{V}$  décrite au §1.4.2.1 : la base  $\mathfrak{B} = \{y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_1, y_7\}$  a les propriétés de la base  $\mathfrak{B}_2$  explicitée en (13) et correspond à une décomposition de  $V$  sous la forme  $W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C$ . Notons la matrice associée à  $\tilde{\varphi}$  dans la base  $\mathfrak{B}$  de la manière suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\varphi}} = \left( \begin{array}{c|c|c} A & B & K \\ \hline C & D & L \\ \hline G & H & J \end{array} \right)$$

Les morphismes  $G : W \rightarrow \mathcal{O}_C, H : W^* \rightarrow \mathcal{O}_C, K : \mathcal{O}_C \rightarrow W$  et  $L : \mathcal{O}_C \rightarrow W^*$  sont nuls puisque les fibrés vectoriels  $W, W^*$  et  $\mathcal{O}_C$  sont tous stables, de degrés 0 mais que le rang de  $W$  (et celui de  $W^*$ ) est différent de celui de  $\mathcal{O}_C$  et que tout morphisme non nul entre  $W$  et  $\mathcal{O}_C$  serait un isomorphisme. De plus,  $A : W \rightarrow W$  étant un endomorphisme de  $W$ , il s'agit d'une homothétie, d'après le Corollaire 3.2.10. Il en est de même pour  $D : W^* \rightarrow W^*$ . Par ailleurs, tout morphisme non nul entre  $W$  et  $W^*$  est un isomorphisme d'après la Proposition 3.2.9. Si  $W$  n'est pas autodual, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'isomorphisme entre  $W$  et  $W^*$ , alors  $C : W \rightarrow W^*$  et  $B : W^* \rightarrow W$  sont nuls. Par contre, si  $W$  est autodual, c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme  $\Phi : W \rightarrow W^*$ , alors tout morphisme  $f : W \rightarrow W^*$  est tel que la composée  $\Phi^{-1} \circ f : W \rightarrow W$  est une homothétie, soit  $f$  est isomorphe à  $\Phi$  à une homothétie près. En particulier, la transposée de  $\Phi$  est égale à  $\gamma\Phi$  pour un certain  $\gamma \in \mathbb{C}^*$ . Or,

$$\Phi = {}^t ({}^t\Phi) = {}^t (\gamma\Phi) = \gamma {}^t\Phi = \gamma^2\Phi,$$

donc  $\gamma$  appartient à  $\{\pm 1\}$ . Ainsi,  ${}^t\Phi = \Phi$  ou  ${}^t\Phi = -\Phi$ . La seconde solution n'étant pas possible en dimension impaire pour un isomorphisme, il vient :

$${}^t\Phi = \Phi.$$

De même, tout morphisme entre de  $W^*$  dans  $W$  est de la forme  $\beta\Phi^{-1}$  pour  $\beta \in \mathbb{C}$ .

Aussi, lorsque  $W$  n'est pas autodual, la matrice de  $\text{Mat}_{\tilde{\varphi}}$  est de la forme :

$$\text{Mat}_{\tilde{\varphi}} = \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda I_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \nu \end{array} \right) \quad \text{où } \lambda, \mu \text{ et } \nu \in \mathbb{C}$$

Lorsque  $W$  est autodual, avec  $\Phi : W \xrightarrow{\sim} W^*$ , la matrice de  $\text{Mat}_{\tilde{\varphi}}$  est de la forme :

$$\text{Mat}_{\tilde{\varphi}} = \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda I_3 & \beta\Phi^{-1} & 0 \\ \hline \alpha\Phi & \mu I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \nu \end{array} \right) \quad \text{où } \alpha, \beta, \lambda, \mu \text{ et } \nu \in \mathbb{C}$$

La forme quadratique dans la base  $\mathfrak{B}$  est la suivante

$$\tilde{Q} = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Le fait que  $\text{Mat}_{\tilde{\varphi}}$  appartienne à  $G_2$ , donc à  $SO_7$ , impose alors les conditions suivantes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {}^t\text{Mat}_{\tilde{\varphi}} \tilde{Q} \text{Mat}_{\tilde{\varphi}} = \tilde{Q}, \\ 2\lambda\alpha\Phi \equiv 0, \\ 2\mu\beta {}^t\Phi^{-1} \equiv 0, \\ \nu^2 = 1, \\ \det(\text{Mat}_{\tilde{\varphi}}) = \nu(\lambda^3\mu^3 - \alpha^3\beta^3) = 1 \end{cases}$$

soit

$$(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu) = \begin{cases} (0, 0, \lambda, \mu, \nu) & \text{si } \lambda \neq 0, \quad \text{avec } \nu(\lambda\mu)^3 = 1 \text{ et } \nu^2 = 1, \\ (\alpha, \beta, 0, 0, \nu) & \text{si } \alpha \neq 0, \quad \text{avec } \nu(\alpha\beta)^3 = -1 \text{ et } \nu^2 = 1. \end{cases}$$

Il faut encore vérifier que la matrice  $\text{Mat}_{\tilde{\varphi}}$  est bien celle d'un automorphisme de  $\mathcal{V}$ . Entre autre, il faut que  $\varphi(y_2y_5)$  soit égal à  $\varphi(y_2)\varphi(y_5)$  et que  $\varphi(y_2y_3)$  soit égal à  $\varphi(y_2)\varphi(y_3)$ . D'après le table de multiplication (??),  $y_2y_5$  est égal à  $-1 + iy_7$  et  $y_2y_3$  est égal à  $-\sqrt{2}y_1$ .

Dans le cas où  $(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu) = (0, 0, \lambda, \mu, \nu)$ , on a

$$\begin{cases} \varphi(y_2y_5) = \varphi(-1 + iy_7) = -1 + \nu y_7, \\ \varphi(y_2)\varphi(y_5) = (\lambda y_2)(\mu y_5) = \lambda\mu y_2y_5 = \lambda\mu(-1 + y_7), \end{cases}$$

ce qui impose  $\lambda\mu = 1$  et  $\nu = 1$ , soit  $\mu = \lambda^{-1}$  et  $\nu = 1$ . De plus, on a

$$\begin{cases} \varphi(y_2y_3) &= \varphi(-\sqrt{2}y_1) = -\sqrt{2}\mu y_1 = -\sqrt{2}\lambda^{-1}y_1, \\ \varphi(y_2)\varphi(y_3) &= (\lambda y_2)(\lambda y_3) = \lambda^2 y_2 y_3 = -\sqrt{2}\lambda^2 y_1, \end{cases}$$

donc  $\lambda^3 = 1$ . Ainsi, dans le cas où  $\lambda$  est non nul, on a

$$(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu) = (0, 0, \lambda, \lambda^{-1}, 1) \quad \text{avec } \lambda^3 = 1.$$

Un raisonnement analogue<sup>(4)</sup> pour le cas  $(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \beta, 0, 0, \nu)$  aboutit au résultat suivant :

$$\begin{cases} \alpha\beta &= 1, \\ \alpha^3 &= 1 \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas où  $\alpha$  est non nul, on a

$$(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \alpha^{-1}, 0, 0, -1) \quad \text{avec } \alpha^3 = 1.$$

Inversement, si  $\lambda$  et  $\alpha$  sont de cube égale à 1, les ensembles  $(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu) = (0, 0, \lambda, \lambda^{-1}, 1)$  et  $(\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \alpha^{-1}, 0, 0, -1)$  correspondent bien à des automorphismes de  $V$ .

En résumé, si  $W$  n'est pas autodual,  $\text{Mat}_{\tilde{\varphi}}$  est de la forme :

$$\text{Mat}_{\tilde{\varphi}} = \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda I_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda^{-1} I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{où } \lambda \in \mu_3$$

où  $\mu_3$  désigne le groupe des racines troisième de l'unité. Si  $W$  est autodual, avec  $\Phi : W \xrightarrow{\sim} W^*$ ,  $\text{Mat}_{\tilde{\varphi}}$  est de la forme :

$$\text{Mat}_{\tilde{\varphi}} = \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda I_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda^{-1} I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{ou} \quad \text{Mat}_{\tilde{\varphi}} = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & (\alpha\Phi)^{-1} & 0 \\ \hline \alpha\Phi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

avec  $\lambda$  et  $\alpha$  appartenant au groupe  $\mu_3$ . Ainsi,  $\text{Aut}_{G_2}(P)$  est isomorphe à  $\mu_2 \rtimes \mu_3 \simeq \Sigma_3$  et on a la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \mu_3 \rightarrow \Sigma_3 \simeq \text{Aut}_{G_2}(P) \rightarrow \mu_2 \rightarrow 1.$$

□

*3.3.2.2. Étude de  $G_2$ -fibrés principaux admettant une  $SO_4$ -réduction.* — Cette section est consacrée aux  $G_2$ -fibrés principaux admettant une  $SO_4$ -réduction. Alors que le groupe  $SL_3$  est simplement connexe, le groupe  $SO_4$ , lui, ne l'est pas. L'étude précédente et celle-ci seront donc être légèrement différente.

<sup>(4)</sup>Les calculs sont un peu plus fastidieux que lors du précédent cas, vu qu'il faut considérer une expression plus complexe pour l'expression matricielle de  $\Phi$ , mais, en tenant compte que cette matrice est symétrique, l'étude de  $y_2y_5$  et celle de  $y_2y_3$  sont suffisantes.

L'espace de modules  $M_C(SO_4)$  est l'union de deux composantes connexes :

$$M_C(SO_4) = M_C^+(SO_4) \cup M_C^-(SO_4)$$

où  $M_C^+(SO_4)$  est la composante connexe de  $M_C(SO_4)$  contenant le  $SO_4$ -fibré trivial. En effet, pour un groupe algébrique semisimple, les composantes connexes de  $M_C(G)$  sont en bijection avec le groupe fondamental  $\pi_1(G)$ . Ainsi, comme  $\pi_1(SO_4) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $M_C(SO_4)$  a bien deux composantes connexes.

Par ailleurs, comme  $SO_4$  est un quotient du produit  $SL_2 \times SL_2$ , nous allons, dans un premier temps, décrire les  $H$ -fibrés principaux lorsque  $H = G \times G'$ , puis regarder  $M_C^+(SO_4)$  et  $M_C^-(SO_4)$ .

3.3.2.2.1. *Description des  $H$ -fibrés principaux lorsque  $H = G \times G'$ . —*

**Lemme 3.3.17.** — *Soient  $G$  et  $G'$  deux groupes connexes réductifs algébriques sur  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $G$ -fibré principal sur  $C$  et  $F$  un  $G'$ -fibré principal sur  $C$ . On note  $E \times F$  le  $(G \times G')$ -fibré principal apparaissant dans le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & C. \end{array}$$

Alors,  $E$  et  $F$  sont semistables (resp. stables) si et seulement si  $E \times F$  l'est.

*Démonstration.* — Le raisonnement étant identique pour le cas de la semistabilité et celui de la stabilité, nous n'explicitons ici que celui de la semistabilité.

Les sous-groupes paraboliques maximaux de  $G \times G'$  sont de la forme  $P \times G'$  ou  $G \times P'$  où  $P$  et  $P'$  sont respectivement des sous-groupes paraboliques maximaux de  $G$  et de  $G'$ . En effet, l'ensemble des racines simples de l'algèbre de Lie de  $G \times G'$  est l'union des racines simples de  $\mathfrak{Lie}(G)$  et  $\mathfrak{Lie}(G')$ .

Supposons  $E$  et  $F$  semistables. Étudions une réduction de  $E \times F$  au sous-groupe parabolique  $P \times G'$  par exemple, correspondant à une section  $\sigma : C \rightarrow (E \times F)/(P \times G')$ . Alors,

$$T_{(E \times F)/(P \times G')} \simeq T_{E/P} \oplus T_{F/G'} \simeq T_{E/P}.$$

La semistabilité de  $E$  entraîne

$$\deg(\sigma^* T_{(E \times F)/(P \times G')}) \geq 0.$$

Si l'on prend en compte une réduction à  $G \times P'$ , la semistabilité de  $F$  entraîne la positivité  $\deg(\tilde{\sigma}^* T_{(E \times F)/(P \times G')})$  où  $\tilde{\sigma}$  est la section  $\tilde{\sigma} : C \rightarrow (E \times F)/(G \times P')$

correspondante à cette réduction. Ainsi, le  $(G \times G')$ -fibré principal  $E \times F$  est semistable.

Pareillement, la semistabilité de  $E \times F$  implique, de même, celle de  $E$  et celle de  $F$ .  $\square$

3.3.2.2.2. *Étude des espaces de modules  $M_C^+(SO_4)$  et de  $M_C^-(SO_4)$ .* —

**Lemme 3.3.18.** — *En utilisant l'isomorphisme  $SO_4 \simeq (SL_2 \times SL_2)/\{e, -e\}$  pour  $e = (id, id)$ , on a la surjection suivante :*

$$\begin{aligned} M_C(SL_2) \times M_C(SL_2) &\twoheadrightarrow M_C^+(SO_4) \\ (E, F) &\mapsto \overline{E \times F} \end{aligned}$$

où  $\overline{E \times F}$  est le  $SO_4$ -fibré principal provenant du  $(SL_2 \times SL_2)$ -fibré principal  $E \times F$  où chaque fibre de  $E \times F$  est quotientée par  $\{e, -e\}$ .

*Démonstration.* — Notons  $G = SO_4$  et  $\tilde{G} = SL_2 \times SL_2$  le revêtement universel de  $SO_4$ . La suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

induit la suite exacte en cohomologie non abélienne suivante :

$$H^1(C, \tilde{G}) \rightarrow H^1(C, \underline{G}) \rightarrow H^2(C, \underline{\pi_1(G)})$$

où  $\underline{G}$  est le faisceau de groupe des morphismes à valeurs dans  $G$ . Or,

$$H^2(C, \underline{\pi_1(G)}) = H^2(C, \underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

puisque la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donne la suite suivante :

$$H^2(C, \underline{\mathbb{Z}}) \rightarrow H^2(C, \underline{\mathbb{Z}}) \rightarrow H^2(C, \underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) \rightarrow H^3(C, \underline{\mathbb{Z}}).$$

Or,  $H^2(C, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$  et  $H^3(C, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$  donc  $H^2(C, \underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On peut monter que l'application

$$H^1(C, \underline{G}) \rightarrow H^2(C, \underline{\pi_1(G)}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

correspond à l'invariant de Stiefel-Whitney :

$$\begin{aligned} M_C(G) &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ E &\mapsto \text{la deuxième classe de Stiefel-Whitney de } E. \end{aligned}$$

Vu que  $0_G$  a pour image  $\bar{0}$  par cette application, toute la partie connexe  $M_C^+(G)$  s'envoie sur la constante  $\bar{0}$  de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ce qui montre la surjectivité de  $M_C(\tilde{G})$  vers  $M_C^+(G)$ .

□

Pour établir une surjection avec la seconde composante  $M_C^-(SO_4)$ , fixons  $L$  un fibré en droites sur  $C$  de degré impair, notons

$$M_C(2, L) = \{E \mid E \text{ est un fibré vectoriel de rang 2 sur } C \text{ tel que } \det(E) \simeq L\}.$$

**Lemme 3.3.19.** — *L'application :*

$$\begin{aligned} M_C(2, L) \times M_C(2, L) &\rightarrow M_C^-(SO_4) \\ (E, F) &\mapsto \text{Hom}(E, F) \end{aligned}$$

*est surjective.*

Dans tout ce qui suit, l'étude des  $P_{G_2}$ -fibrés principaux admettant une  $SO_4$ -réduction se fera sur  $M_C^+(SO_4)$ , l'analyse sur  $M_C^-(SO_4)$  étant similaire.

*3.3.2.2.3. Lien entre la (semi)-stabilité d'un  $SO_4$ -fibré et de son extension en temps que  $G_2$ -fibré principal; calculs de groupe d'automorphismes.* — À un  $SO_4$ -fibré principal de  $M_C^+(SO_4)$ , on peut donc associer deux  $SL_2$ -fibrés principaux, à un fibré en droites de 2-torsion<sup>(5)</sup> près, et inversement.

Utilisons les notations suivantes. On considère  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal, extension du  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  de  $M_C^+(SO_4)$  où  $E$  et  $F$  sont deux  $SL_2$ -fibrés principaux. Notons

$$\begin{aligned} M &= E(\mathbb{C}^7), \\ N &= F(\mathbb{C}^7) \end{aligned}$$

les fibrés vectoriels associés à  $E$  et à  $F$ . Ces deux fibrés vectoriels sont de rang 2 et il y a équivalence entre la stabilité de  $E$  (resp.  $F$ ) et celle de  $M$  (resp.  $N$ ). Par ailleurs, nous allons être amenés à considérer les deux fibrés vectoriels suivants :

$$M^* \otimes N \text{ et } \text{End}_0(N).$$

Le premier est de rang 4 et le second de rang 3. Le degré de  $M^* \otimes N$  est nul ainsi que celui de  $\text{End}_0(N)$ , puisque

$$\mathcal{O}_C \oplus \text{End}_0(N) = \text{End}(N)$$

et que  $\mathcal{O}_C$  et  $\text{End}(N)$  sont chacun de degré nul.

Lorsque les fibrés vectoriels  $M$  et  $N$  sont stables donc semistables, les fibrés vectoriels  $M^* \otimes N$  et  $N^* \otimes N = \text{End}(N)$  sont aussi semistables, car le produit tensoriel de deux fibrés vectoriels semistables de degré 0 est aussi semistable de

<sup>(5)</sup>Un fibré en droites  $L$  sur une courbe  $C$  est dit **de 2-torsion** lorsque

$$L \otimes L = L^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_C,$$

c'est-à-dire lorsqu'il est autodual.

degré 0 (voir Lemme 3.2 de [Bal09]);  $\text{End}_0(N)$  est alors aussi un fibré vectoriel semistable.

Étudions la notion de (semi)-stabilité pour un  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  de  $M_C^+(SO_4)$  où  $E$  et  $F$  sont deux  $SL_2$ -fibrés principaux.

**Lemme 3.3.20.** — *Soit  $\overline{E \times F}$  un  $SO_4$ -fibré principal de  $M_C^+(SO_4)$  où  $E$  et  $F$  sont deux  $SL_2$ -fibrés principaux. Alors,  $\overline{E \times F}$  est (semi)-stable si et seulement si  $E$  et  $F$  sont (semi)-stables.*

*Démonstration.* — La notion de (semi)-stabilité d'un  $G$ -fibré principal repose sur l'étude des sous-groupes paraboliques maximaux du groupe  $G$ . Nous allons montrer que les sous-groupes paraboliques maximaux du groupe  $SL_2 \times SL_2$  sont en correspondance avec ceux de  $SO_4$ . Posons

$$\tilde{G} = SL_2 \times SL_2 \quad \text{et} \quad G = SO_4.$$

Soit la surjection :

$$\phi : \tilde{G} \rightarrow G.$$

D'après le Corollaire C de 21.3 de [Hum75], l'image par  $\phi$  de tout sous-groupe parabolique maximal de  $\tilde{G}$  est un sous-groupe parabolique maximal de  $G$ . Inversement, soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  et  $\tilde{B}$  son image inverse par  $\phi$ . Considérons le sous-groupe  $N = \{e, -e\}$  (où  $e = (1, 1)$ ) inclus dans  $\tilde{B}$ . Ce sous-groupe est distingué et résoluble. Par définition de  $\phi$ , le quotient  $\tilde{B}/N$  est égal à  $B$  qui est résoluble, donc, d'après le Lemme 17.3 de [Hum75],  $\tilde{B}$  est aussi résoluble. Par ailleurs, il est maximal parmi les groupes résolubles donc  $\tilde{B}$  est un sous-groupe de Borel de  $\tilde{G}$ . Ainsi, l'image inverse d'un sous-groupe parabolique maximal de  $G$  est un sous-groupe parabolique maximal de  $\tilde{G}$ .

Il y a donc une correspondance entre les sous-groupes paraboliques maximaux de  $SO_4$  et ceux de  $SL_2 \times SL_2$ . D'autre part, comme les sous-groupes paraboliques maximaux de  $SL_2 \times SL_2$  sont de la forme  $P \times SL_2$  ou  $SL_2 \times P$  où  $P$  est un sous-groupe parabolique maximal de  $SL_2$ . Les sous-groupes paraboliques maximaux de  $SL_2 \times SL_2$  sont eux même en bijection avec les sous-groupes paraboliques maximaux des deux groupes  $SL_2$ .

Ainsi, le  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  est (semi)-stable si et seulement si les deux  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  sont (semi)-stables.  $\square$

À deux  $SL_2$ -fibrés principaux, on peut associer un  $SO_4$ -fibré principal et un  $G_2$ -fibré principal par extension de groupe de structure. Les deux propositions suivantes établissent le lien entre la stabilité des  $SL_2$ -fibrés principaux et celle du  $G_2$ -fibré principal correspondant.

**Lemme 3.3.21.** — Soient  $E$  et  $F$  deux  $SL_2$ -fibrés principaux et  $\overline{E \times F}$  le  $SO_4$ -fibré principal correspondant (voir Lemme 3.3.18). Notons  $M = E(\mathbb{C}^2)$  le fibré vectoriel associé à  $E$ ,  $N$  celui associé à  $F$  et  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  le fibré vectoriel associé à  $P_{G_2}$ . Alors,  $M^* \otimes N$  est le fibré vectoriel associé à  $\overline{E \times F}$  et

$$V = M^* \otimes N \oplus^{\perp} \text{End}_0(N). \quad (51)$$

*Démonstration.* — Au paragraphe 1.5.2, l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  des imaginaires pures des octaves de Cayley a été décrit via la somme directe suivante :

$$\mathcal{V} = \mathbb{C}^4 \oplus^{\perp} \mathbb{C}^3$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 &= \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{N}, \\ \mathbb{C}^3 &= \text{End}_0(\mathbf{N}), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  sont isomorphes à  $\mathbb{C}^2$ ,  $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{N}$  et  $\text{End}_0(\mathbf{N})$  sont orthogonaux et munis de la forme quadratique donnée par le déterminant. Le groupe  $SO_4$  agit sur  $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{N}$  par :

$$\begin{aligned} SO_4 &\rightarrow (\overline{E \times F})(\mathbb{C}^4) = M^* \otimes N \\ \overline{(A, B)} &\mapsto A \otimes B. \end{aligned}$$

Le groupe  $SO_4$  agit sur  $\text{End}_0(\mathbf{N})$  par conjugaison. Ainsi,

$$V = M^* \otimes N \oplus^{\perp} \text{End}_0(N).$$

□

**Proposition 3.3.22.** — Soit  $P_{G_2} = (\overline{E \times F})(G_2)$  le  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension du  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  où  $E$  et  $F$  sont des  $SL_2$ -fibrés principaux. Si  $P_{G_2}$  est stable alors  $\overline{E \times F}$  est stable, ce qui est équivalent au fait que  $E$  et  $F$  sont stables.

*Démonstration.* — Soit  $P_{G_2} = (\overline{E \times F})(G_2)$  un  $G_2$ -fibré principal avec  $E$  et  $F$  des  $SL_2$ -fibrés principaux. Supposons  $P_{G_2}$  stable.

Considérons  $P$  le sous-groupe parabolique maximal de  $SL_2$  :

$$P = \left\{ M = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mid M \in SL_2 \right\}.$$

Rappelons l'inclusion  $j$  de  $SO_4$  dans  $G_2$ , définie en (33) :

$$\begin{aligned} j: \quad SO_4 &\hookrightarrow G_2 \\ \overline{(A, B)} &\mapsto K_{A,B} = P_{0,3} L_{A,B} P_{0,3}^{-1} \end{aligned} \quad (52)$$

où  $L_{A,B}$  est la matrice :

$$L_{A,B} = \left( \begin{array}{c|c} A \otimes B & 0 \\ \hline 0 & \text{Conj}(B) \end{array} \right)$$

exprimée dans la base  $\mathfrak{B}_3 = (y_1, y_2, y_4, y_5, y_3, y_6, y_7)$ . L'identification faite en (27) entre  $\langle y_1, y_2, y_4, y_5 \rangle$  et  $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{N}$  est la suivante ( $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  désignant des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension 2) :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 &\longrightarrow M^* \otimes N \\ y_1 &\mapsto K_1 = \sqrt{2} m_1^* \otimes n_1 \\ y_2 &\mapsto K_2 = \sqrt{2} m_1^* \otimes n_2 \\ y_4 &\mapsto K_4 = \sqrt{2} m_2^* \otimes n_2 \\ y_5 &\mapsto K_5 = -\sqrt{2} m_2^* \otimes n_1 \end{aligned}$$

avec  $(m_1^*, m_2^*)$  et  $(n_1, n_2)$  des bases de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$ .

L'image de  $\overline{P \times SL_2}$  par le morphisme  $j$  est égale à  $\text{Stab}(\langle y_1, y_2 \rangle) \cap j(SO_4)$  (car tout élément de  $A$  de  $P$  stabilise  $m_1^*$ ) et celle de  $\overline{SL_2 \times P}$  par  $j$  est égale à  $\text{Stab}(\langle y_1, y_5 \rangle) \cap j(SO_4)$  (car tout élément de  $B$  de  $P$  stabilise  $n_1$ ). Ainsi,  $j(\overline{P \times SL_2})$  est égale à  $P_2 \cap j(SO_4)$ , où  $P_2$  est le sous-groupe parabolique maximal de  $G_2$  égal au stabilisateur du sous-espace vectoriel isotrope  $\langle y_1, y_2 \rangle$ . Par ailleurs, comme  $\langle y_1, y_5 \rangle$  est un plan isotrope de  $\mathcal{V}$ , le stabilisateur  $\text{Stab}(\langle y_1, y_5 \rangle) \cap G_2$  est conjugué à  $P_2$  sous l'action de  $G_2$ . Notons  $\overline{P_2}$  ce conjugué. Ainsi :

$$\begin{aligned} SO_4 / (\overline{P \times SL_2}) &\hookrightarrow G_2 / P_2, \\ SO_4 / (SL_2 \times P) &\hookrightarrow G_2 / \overline{P_2}. \end{aligned}$$

Soit une  $P$ -réduction de  $E$ , correspondant à la section  $\sigma : C \rightarrow E(SL_2/P)$ . Or,

$$E(SL_2/P) \subset (\overline{E \times F})(SO_4 / (P \times SL_2)) \subset P_{G_2}(G_2/P_2) \subset \mathbb{P}^k.$$

À partir de  $\sigma$ , définissons la section  $\tilde{\sigma} : C \rightarrow P_{G_2}(G_2/P_2)$ . Il existe deux entiers strictement positifs  $p$  et  $q$  tels que  $T_{E/P} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{\otimes p}$  et  $T_{P_{G_2}/P_2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{\otimes q}$  donc

$$\deg(\sigma^* T_{E/P}) = \frac{p}{q} \deg(\sigma^* T_{P_{G_2}/P_2}).$$

Comme  $P_{G_2}$  est stable, le second membre de l'égalité précédente est strictement positif, il en est de même du membre de droite : le  $SL_2$ -fibré principal  $E$  est donc stable.

Il en est de même pour le  $SL_2$ -fibré principal  $F$ . □

**Notation 4.** — Considérons  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension d'un  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  avec  $E$  et  $F$  deux  $SL_2$ -fibrés principaux et  $M$  et

$N$  les fibrés vectoriels associés à  $E$  et à  $F$ . Nous désignerons par le symbole  $\blacklozenge$  les conditions simultanément vérifiées suivantes :

- les  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  sont stables,
- le couple de  $(M, N)$  n'est pas de la forme  $(\bar{\pi}_*(L), \bar{\pi}_*(L))$ ,
- le couple de  $(M, N)$  n'est pas de la forme  $(\bar{\pi}_*(L^{\otimes 3}), \bar{\pi}_*(L))$

pour  $L$  un fibré en droites sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à un fibré en droites  $\pi : B \rightarrow C$  de 2-torsion, où la courbe  $\bar{\pi} : \tilde{X} \rightarrow C$  est le revêtement étale de degré 2 associé à  $\pi : B \rightarrow C$ , avec  $\bar{\pi}^*(B) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  (tel que pour tout  $t \in C$ ,  $\bar{\pi}^{-1}(t) = \{x, -x\}$  où les éléments  $x$  et  $(-x)$  de  $B$  sont les seuls vérifiant  $f(x \otimes x) = (t, 1)$ ) avec  $f$  l'isomorphisme  $f : B \otimes B \simeq \mathcal{O}_C$ .

**Proposition 3.3.23.** — *Soient deux  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  stables sur une courbe  $C$ . Soit  $P_{G_2}$  le  $G_2$ -fibré principal, extension du  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  (voir Lemme 3.3.18).*

*Si les conditions  $\blacklozenge$ , définies en Notation 4, sont vérifiées, alors le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  est stable.*

*Démonstration.* — Soit  $E$  et  $F$  deux  $SL_2$ -fibrés principaux sur  $C$ , stables. Notons  $\overline{E \times F}$  le  $SO_4$ -fibré principal correspondant à  $E$  et  $F$  par le Lemme 3.3.18 et  $P_{G_2}$  le  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension de  $\overline{E \times F}$  au groupe  $G_2$ . Notons  $M = E(\mathbb{C}^2)$  et  $N = F(\mathbb{C}^2)$  leurs fibrés vectoriels associés. Par le Lemme 3.3.17, le  $(SL_2 \times SL_2)$ -fibré principal  $E \times F$  est stable et le  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  l'est aussi d'après le Lemme 3.3.20. Considérons la représentation de groupe

$$\begin{aligned} \rho : SL_2 \times SL_2 &\rightarrow GL(\mathbb{C}^4) \\ (A, B) &\mapsto {}^t A \otimes B \end{aligned}$$

et celle induite par  $\rho$  sur le quotient  $SO_4$ . Le fibré vectoriel  $\overline{(E \times F)}(\mathbb{C}^4)$  est alors isomorphe à  $(E \times F)(\mathbb{C}^4)$ , soit à  $M^* \otimes N$ . Vu que  $\overline{E \times F}$  est un  $SO_4$ -fibré stable, le fibré vectoriel  $M^* \otimes N$  ne possède pas sous-fibré vectoriel isotrope de degré 0. De la même manière, le fibré vectoriel  $N^* \otimes N = \text{End}(N)$  n'admet pas de sous-fibré vectoriel isotrope de degré 0.

Notons  $V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7)$  le fibré vectoriel associé à  $P_{G_2}$ . Par (51),

$$V = M^* \otimes N \oplus \text{End}_0(N).$$

Les fibrés vectoriels  $M$  et  $N$  étant stables, donc semistables, de degré 0, les fibrés vectoriels  $M^* \otimes N$  et  $N^* \otimes N = \text{End}(N)$  le sont aussi, car le produit tensoriel de deux fibrés vectoriels semistables de degré 0 est aussi semistable de degré 0 (voir Lemme 3.2 de [Bal09]). D'après la décomposition  $\text{End}(N) = \mathcal{O}_C \oplus \text{End}_0(N)$ ,  $\text{End}_0(N)$  est un sous-fibré vectoriel de rang 3, de degré 0 ; il est donc aussi semistable. Le fibré vectoriel  $V$ , somme directe de deux fibrés vectoriels

semistables de pente nulle, est aussi semistable de degré 0 (voir Corollaire 7 de [Ses82]).

Ainsi, d'après la Proposition 3.3.1, le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  est semistable. Le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  est donc stable si le fibré vectoriel  $V$  ne possède aucun sous-fibré vectoriel de rang 1 ou de rang 2, isotrope, de degré 0 (correspondant respectivement à une  $P_1$ -réduction ou à une  $P_2$ -réduction de  $P_{G_2}$ ).

Si  $V$  possède un sous-fibré en droites, noté  $W_1$ , isotrope de degré 0 :

$$W_1 \hookrightarrow V = M^* \otimes N \oplus^\perp \text{End}_0(N).$$

Considérons

$$\begin{aligned} \Phi_1 : W_1 &\hookrightarrow M^* \otimes N \oplus^\perp \text{End}_0(N) \xrightarrow{\text{pr}_1} M^* \otimes N, \\ \Phi_2 : W_1 &\hookrightarrow M^* \otimes N \oplus^\perp \text{End}_0(N) \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{End}_0(N) \end{aligned}$$

où  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  sont les projections  $\text{pr}_1 : V \rightarrow M^* \otimes N$  et  $\text{pr}_2 : V \rightarrow \text{End}_0(N)$ . Les morphismes  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  ne sont pas identiquement nuls car sinon  $W_1$  serait un sous-fibré en droites isotrope de degré 0 de  $M^* \otimes N$  ou de  $\text{End}_0(N)$ , ce qui est impossible d'après la remarque précédente.

Portons tout d'abord notre attention sur le morphisme non nul  $\Phi_2 : W_1 \rightarrow \text{End}_0(N)$ . L'existence de ce morphisme non nul implique que  $W_1$  n'est pas isomorphe à  $\mathcal{O}_C$ , puisque tout morphisme de  $\mathcal{O}_C$  vers  $\text{End}_0(N)$  correspond à un morphisme de  $N$  dans  $N$ , de trace nulle. Or,  $N$  étant stable, ce morphisme est une homothétie. En prenant en compte la nullité de la trace, il ne peut s'agir que du morphisme nul.

En tensorisant  $W_1 \xrightarrow{\Phi_2} \text{End}_0(N) \hookrightarrow N^* \otimes N$  de part et d'autre par  $W_1^*$ , on obtient le morphisme non nul suivant

$$\mathcal{O}_C = W_1 \otimes W_1^* \longrightarrow N^* \otimes (N \otimes W_1^*) = \text{Hom}(N, N \otimes W_1^*).$$

D'où l'existence d'un morphisme non nul, noté  $\varphi_2$ , de  $N$  dans  $N \otimes W_1^*$ . Or,  $N$  est un fibré vectoriel stable donc  $N \otimes W_1^*$  l'est aussi d'après le Lemme 3.2.11. D'après la Proposition 3.2.9,  $\varphi_2 : N \rightarrow N \otimes W_1^*$  est un isomorphisme. En considérant le déterminant  $\det(N)$  de  $N$ , qui est trivial vu que  $N$  est un fibré vectoriel associé à un  $SL_2$ -fibré principal, l'isomorphisme précédent montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_C = \det(N) &\xrightarrow{\sim} \Lambda^2(N \otimes W_1^*) \simeq \det(N) \otimes (W_1^* \otimes W_1^*), \\ \text{donc} \quad W_1^* \otimes W_1^* &\simeq \mathcal{O}_C, \\ \text{soit} \quad W_1 \otimes W_1 &\simeq \mathcal{O}_C, \\ &W_1 \simeq W_1^* \end{aligned}$$

Ainsi,  $W_1$  est autodual, i.e. de 2-torsion.

La proposition 2.6 de [NR75] affirme que si  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow C$  est un recouvrement cyclique non ramifié au-dessus d'une variété complète  $C$  de groupe de Galois  $G$  et si  $N$  est un fibré vectoriel sur  $C$  simple (c'est-à-dire sans automorphismes autre que des homothéties) tel que  $N \otimes L_\chi \simeq N$  pour tout caractère  $\chi \in \widehat{G}$  où  $\widehat{G}$  désigne le groupe dual de Pontryagin associé au groupe de Galois  $G$  de  $C$  :  $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$  et  $L_\chi$  désigne le fibré en droites associé au caractère  $\chi$ , alors  $N$  est l'image directe d'un fibré vectoriel sur  $\tilde{X}$ . Or, par stabilité du fibré principal  $E$ , le fibré vectoriel  $N$  est simple. Le groupe de Galois  $G$  de  $C$  est au groupe abélien fini  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , donc  $\widehat{G}$  est aussi égal à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Les fibrés  $L_\chi$  pour  $\chi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sont ici  $\mathcal{O}_C$  et  $W_1$ . L'isomorphisme entre  $N$  et  $N \otimes W_1$  implique donc l'existence d'un fibré en droites  $L$  sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à  $W_1$  tel que

$$N \simeq \tilde{\pi}_*(L),$$

où  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow C$  désigne ici la courbe associée à  $W_1$  ( $N$  étant de rang 2 et  $\tilde{\pi}$  de degré 2,  $L$  est bien un fibré en droites).

Un raisonnement analogue concernant le morphisme non nul  $\Phi_1$  montre que  $M$  est isomorphe à  $N \otimes W_1$ , qui est lui-même isomorphe à  $N$ . Vu que  $N \simeq \tilde{\pi}_*(L)$ , nous aboutissons à

$$M \simeq N \simeq \tilde{\pi}_*(L).$$

Ainsi, si  $E$  et  $F$  vérifient l'hypothèse du théorème,  $V$  n'admet aucun sous-fibré en droites isotrope de degré nul. Or, sous cette hypothèse,  $V$  n'admet pas non plus de fibré vectoriel de rang 2, isotrope, de degré nul. En effet, s'il existe  $W_2$  un tel sous-fibré de  $V$ , alors ce fibré est semistable, puisque sa pente est nulle et que tout sous-fibré vectoriel de  $W_2$ , étant un sous-fibré de  $V$ , est de pente négative ou nulle. Ce fibré  $W_2$  est même stable car tout sous-fibré en droites de  $W_2$ , étant isotrope de par l'isotropie de  $W_2$ , ne peut être de degré nul, puisque  $V$  ne contient aucun sous-fibré en droites isotrope de degré nul. Comme précédemment, les morphismes

$$\begin{aligned} \Phi_1 : W_2 &\hookrightarrow M^* \otimes N \oplus \text{End}_0(N) \xrightarrow{\text{pr}_1} M^* \otimes N, \\ \text{et } \Phi_2 : W_2 &\hookrightarrow M^* \otimes N \oplus \text{End}_0(N) \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{End}_0(N) \end{aligned}$$

ne sont pas identiquement nuls. Considérons le morphisme  $\Phi_2$ . L'image  $\Phi_2(W_2)$  est de rang 1 ou 2. Or,  $\Phi_2(W_2)$  ne peut être un fibré en droites de  $\text{End}_0(N)$  puisque  $\Phi_2(W_2)$  serait alors un quotient propre du fibré vectoriel stable  $W_2$  de degré 0 donc aurait un degré strictement positif, ce qui contredirait la semistabilité de  $\text{End}_0(N)$ . Ainsi, le rang de  $\Phi_2(W_2)$  est 2. Alors,  $\Phi_2(W_2)$  est de degré 0. Les fibrés vectoriels  $W_2$  et  $\Phi_2(W_2)$  sont isomorphes.

Dans la suite exacte

$$1 \rightarrow \Phi_2(W_2) \rightarrow \text{End}_0(N) \rightarrow Q \rightarrow 1, \quad (53)$$

$Q$  est de rang 1, de degré 0. En dualisant la suite précédente, nous obtenons

$$1 \rightarrow Q^* \rightarrow \text{End}_0(N),$$

soit un morphisme non nul entre  $Q^*$  et  $\text{End}_0(N)$  où  $Q^*$  est un fibré en droites de degré 0. On retombe dans la même situation que dans l'étude des sous-fibrés en droites isotropes de degré nul. Ainsi,  $Q$  est autodual et il existe un fibré en droites  $L$  sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à  $Q$  tel que  $N$  soit isomorphe à  $\bar{\pi}_*(L)$ . Or,  $\mathcal{O}_C \oplus \text{End}_0(N) = N^* \otimes N$ . En utilisant la formule de projection, donnant l'isomorphisme suivant

$$\bar{\pi}_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} = \bar{\pi}_*(\mathcal{F} \otimes \bar{\pi}^*(\mathcal{G}))$$

pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux faisceaux localement libres, on obtient

$$\begin{aligned} N^* \otimes N &= \bar{\pi}_*(L^*) \otimes \bar{\pi}_*(L), \\ &\simeq \bar{\pi}_*(L^* \otimes \bar{\pi}^*\bar{\pi}_*(L)), \\ &\simeq \bar{\pi}_*(L^* \otimes (L \oplus \sigma^*(L))) \quad \text{où } \sigma \text{ est l'involution sur } \tilde{X}, \\ &\simeq \bar{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}} \oplus L^* \otimes L^*) \quad \text{car } \sigma^*(L) = L^{*(6)}, \\ &\simeq \bar{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \oplus \bar{\pi}_*(L^{\otimes(-2)}), \\ &\simeq \mathcal{O}_C \oplus Q \oplus \bar{\pi}_*(L^{\otimes 2}), \\ \mathcal{O}_C \oplus \text{End}_0(N) &\simeq \mathcal{O}_C \oplus Q \oplus \bar{\pi}_*(L^{\otimes 2}), \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{End}_0(N) \simeq Q \oplus \bar{\pi}_*(L^{\otimes 2}). \quad (54)$$

La suite exacte (53) devient

$$1 \rightarrow \Phi_2(W_2) \rightarrow Q \oplus \bar{\pi}_*(L^{\otimes 2}) \rightarrow Q \rightarrow 1$$

ce qui impose

$$W_2 \simeq \Phi_2(W_2) \simeq \bar{\pi}_*(L^{\otimes 2}).$$

L'étude du morphisme non nul  $\Phi_1 : W_1 \rightarrow M^* \otimes N$  aboutit à :  $\Phi_1(W_2)$  est de rang 2, de degré 0 et  $W_2$  et  $\Phi_1(W_2)$  sont isomorphes. Le morphisme  $\Phi_1$  peut donc être vu comme un morphisme non nul entre  $W_2 \simeq \bar{\pi}_*(L^{\otimes 2})$  et  $M^* \otimes N \simeq M^* \otimes \bar{\pi}_*(L)$ . Donc  $\text{Hom}(\bar{\pi}_*(L^{\otimes 2}), M^* \otimes \bar{\pi}_*(L))$  est non nul. Or, la formule d'adjonction énonce

<sup>(6)</sup>En effet,

$$L \otimes \sigma^*(L) = \bar{\pi}^*(\text{Nm}(L)) = \bar{\pi}^*(Q) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$$

donc  $\sigma^*(L) = L^*$ .

l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \pi_*(\mathcal{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\pi^*(\mathcal{F}), \mathcal{G}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\pi_*(L^{\otimes 2}), M^* \otimes \pi_*(L)) &\simeq \mathrm{Hom}(\pi_*(L^{\otimes 2}), \pi_*(L \otimes \pi_*(M^*))), \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\pi^*\pi_*(L^{\otimes 2}), L \otimes \pi_*(M^*)), \\ &\simeq \mathrm{Hom}(L^{\otimes 2} \oplus \sigma^*(L^{\otimes 2}), L \otimes \pi_*(M^*)), \\ &\simeq \mathrm{Hom}(L^{\otimes 2} \oplus (L^{\otimes 2})^*, L \otimes \pi_*(M^*)) \end{aligned}$$

(la première équivalence s'obtient par projection, la seconde par adjonction). Il existe donc un morphisme non nul entre  $L^{\otimes 2} \oplus (L^{\otimes 2})^*$  et  $L \otimes \pi_*(M^*)$ . S'il existe un morphisme non nul entre  $L^{\otimes 2}$  et  $L \otimes \pi_*(M^*)$ , soit un morphisme non nul entre  $L$  et  $\pi_*(M^*)$ , alors, par projection, il existe un morphisme non nul entre  $\pi_*(L)$  et  $M$ . Ceci implique que les fibrés vectoriels  $N$  et  $M$  sont isomorphes tous les deux isomorphes à  $\pi_*(L)$ . S'il existe un morphisme non nul entre  $(L^{\otimes 2})^*$  et  $L \otimes \pi_*(M^*)$ , soit un morphisme non nul entre  $(L^{\otimes 3})^*$  et  $\pi_*(M^*)$ , alors, par projection, il existe un morphisme non nul entre  $\pi_*(L^{\otimes 3})$  et  $M$ , qui est en fait un isomorphisme. Dans ce cas,  $N$  est isomorphe à  $\pi_*(L)$  et  $M$  à  $\pi_*(L^{\otimes 3})$ .

Ainsi, si  $(M, N)$  n'est isomorphe ni à  $(\pi_*(L), \pi_*(L))$ , ni à  $(\pi_*(L^{\otimes 3}), \pi_*(L))$  où  $L$  un fibré en droites sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à un fibré en droites de 2-torsion alors le fibré vectoriel  $V$ , associé à  $P_{G_2}$ , ne possède aucun sous-fibré isotrope, de degré 0, de rang 1 ou de rang 2. Ainsi, le  $SO_7$ -fibré principal  $P_{G_2}(SO_7)$ , associé à  $P_{G_2}$ , ne possède aucune réduction au sous-groupe parabolique  $\tilde{P}_1$  ou  $\tilde{P}_2$  de  $SO_7$  qui soit associée à un sous-fibré vectoriel de  $V$  isotrope, de degré 0. D'après les équations (45) et (46) retranscrites ci-dessous :

$$\begin{aligned} G_2/P_1 &= SO_7/\tilde{P}_1, \\ G_2/P_2 &= \left( SO_7/\tilde{P}_2 \right) \cap \mathbb{P}(\Gamma_{01}), \end{aligned}$$

où  $P_1$  et  $P_2$  désignent les deux sous-groupes paraboliques maximaux de  $G_2$ , le fibré principal  $P_{G_2}$  ne possède aucune réduction à  $P_1$  ou à  $P_2$  qui soit associée à un sous-fibré vectoriel de  $V$  isotrope de degré nul. Par conséquent, le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  est stable.  $\square$

**Remarque 3.3.24.** — La restriction faite dans la proposition précédente, c'est-à-dire la condition  $\blacklozenge$  (et particulièrement les conditions sur le couple  $(M, N)$ ) est nécessaire car, en toute généralité, il existe des  $G_2$ -fibrés principaux strictement semistables, provenant de deux  $SL_2$ -fibrés principaux stables. Explicitons un exemple dans le cas où  $M$  et  $N$ , les fibrés vectoriels associés aux  $SL_2$ -fibrés

principaux  $E$  et  $F$ , sont isomorphes à  $\pi_*(L)$  pour  $L$  un fibré en droites sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à un fibré en droites de 2-torsion.

Soit  $W$  est un fibré en droites sur  $C$ , non isomorphe à  $\mathcal{O}_C$ , vérifiant  $W \otimes W = \mathcal{O}_C$ . Le degré de  $W$  est donc nul. Considérons  $L$  un fibré en droites sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à  $W$ , général, appartenant à  $\text{Nm}^{-1}(W)$  où  $\text{Nm} : \text{Pic}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Pic}(C)$  est l'application norme, et le fibré vectoriel  $\pi_*(L)$  (selon les notations précédentes), de rang 2. Soient  $M = N = \pi_*(L)$ . Le déterminant de  $M = \pi_*(L)$  est trivial car

$$\det(M) = \det(\pi_*(L)) = \text{Nm}(L) \otimes W = W \otimes W = \mathcal{O}_C,$$

d'après la formule de [BNR89] §4 :

$$\det(\pi_*(\xi)) = \text{Nm}(\xi) \otimes \det(\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})) = \text{Nm}(\xi) \otimes \det(\mathcal{O}_C \oplus W)$$

et  $\det(\mathcal{O}_C \oplus W) = \Lambda^2(\mathcal{O}_C \oplus W) = \mathcal{O}_C \otimes W = W$ . Par ailleurs,  $M = \pi_*(L)$  est stable car  $L$  est pris général. Posons  $E$  et  $F$  deux  $SL_2$ -fibrés principaux égaux au  $SL_2$ -fibré principal correspondant au fibré vectoriel  $\pi_*(L)$ . Ce  $SL_2$ -fibré principal  $E$  (et donc  $F$ ) est donc stable. D'après l'équation (54), on a

$$\text{End}_0(N) \simeq W \oplus^\perp \pi_*(L^{\otimes 2})$$

$$\text{et } M^* \otimes N = N^* \otimes N = \mathcal{O}_C \oplus^\perp \text{End}_0(N) = \mathcal{O}_C \oplus^\perp W \oplus^\perp \pi_*(L^{\otimes 2}).$$

Donc

$$V = \mathcal{O}_C \oplus^\perp W \oplus^\perp \pi_*(L^{\otimes 2}) \oplus^\perp W \oplus^\perp \pi_*(L^{\otimes 2}).$$

Par ailleurs, l'inclusion de  $W$  dans  $V = \mathcal{O}_C \oplus^\perp W \oplus^\perp \pi_*(L^{\otimes 2}) \oplus^\perp W \oplus^\perp \pi_*(L^{\otimes 2})$  se réduit à l'inclusion

$$W \hookrightarrow W \oplus^\perp W$$

car toutes les projections de  $W$  vers  $\mathcal{O}_C$  ou  $\pi_*(L^{\otimes 2})$  sont nuls pour des critères de stabilité. L'inclusion de  $W$  dans  $V$  est donc de la forme :

$$\begin{aligned} i_W : W &\hookrightarrow W \oplus^\perp W \\ w &\mapsto \lambda w + \mu w. \end{aligned}$$

Les deux occurrences de  $W$  dans  $V$  étant orthogonales, la forme quadratique  $q$  est diagonale et s'y exprime à l'aide de deux constantes complexes  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\forall x + y \in W \oplus^\perp W \subset V, \quad q(x + y) = \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Ainsi,

$$\forall w \in W \subset W \oplus^\perp W \subset V, \quad q(w) = \alpha \lambda^2 w^2 + \beta \mu^2 w^2 = (\alpha \lambda^2 + \beta \mu^2) w^2.$$

En choisissant les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  pour que  $\alpha\lambda^2 + \beta\mu^2 = 0$ , on obtient

$$\forall w \in W \subset V, \quad q(w) = 0,$$

donc le sous-fibré en droites  $W$  de  $V$  est isotrope. On a bien construit un sous-fibré en droites de  $V$  isotrope et de degré nul, ce qui montre que  $V$  n'est pas stable en temps que  $SO_7$ -fibré principal et que  $P_{G_2}$  n'est pas stable en tant que  $G_2$ -fibré principal.

**Remarque 3.3.25.** — Le cas  $(M, N) = (\overline{\pi}_*(L^{\otimes 3}), \overline{\pi}_*(L))$ , pour un fibré en droites  $L$  sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à un fibré en droites de 2-torsion, a été écarté dans la proposition précédente. Il reste à être étudié ce cas plus en détail pour voir s'il est légitime ou non d'écarter cette possibilité.

**Notation 5.** — Considérons  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension d'un  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  avec  $E$  et  $F$  deux  $SL_2$ -fibrés principaux et  $M$  et  $N$  les fibrés vectoriels associés à  $E$  et à  $F$ . Nous désignerons par le symbole  $\star$  les conditions simultanément vérifiées suivantes :

- les  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  sont stables,
- ni  $M$  ni  $N$  ne sont de la forme  $\overline{\pi}_*(L)$  pour  $L$  un fibré en droites sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à un fibré en droites  $\pi : B \rightarrow C$  de 2-torsion, où la courbe  $\overline{\pi} : \tilde{X} \rightarrow C$  est le revêtement étale de degré 2 associé à  $B$  (voir Proposition 3.3.23),
- le fibré vectoriel  $M$  n'est pas isomorphe à  $N \otimes K$  pour  $K$  un fibré en droites de 2-torsion.

**Lemme 3.3.26.** — Soient  $E$  et  $F$  deux  $SL_2$ -fibrés principaux, de fibrés vectoriels associés  $M$  et  $N$  respectivement. Les fibrés vectoriels  $M^* \otimes N$  et  $\text{End}_0(N)$  sont semistables. De plus, si les conditions  $\star$ , définies dans Notation 5, sont vérifiées, alors les fibrés vectoriels  $M^* \otimes N$  et  $\text{End}_0(N)$  sont stables.

*Démonstration.* — Si  $\text{End}_0(N)$  est strictement semistable, c'est-à-dire s'il possède un sous-fibré propre de degré 0, ce sous-fibré est de rang 1 ou de rang 2. Par dualité, vu que  $\text{End}_0(N)$  est autodual, il suffit d'étudier le cas d'un sous-fibré en droites de degré 0. Si il existe  $W$  un sous-fibré en droites  $\text{End}_0(N)$  de degré 0 alors il existe un morphisme non nul entre les deux fibrés vectoriels stables  $N$  et  $N \otimes W^*$ . À l'instar de la preuve de la Proposition 3.3.23, il existe un fibré en droites  $L$  sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à  $W$ , tel que  $\overline{\pi}_*(L)$  soit isomorphe à  $N$ .

Étudions le cas où  $M^* \otimes N$  est strictement semistable. Si  $M^* \otimes N$  possède un sous-fibré en droite de degré 0, noté  $K$ , alors il existe un morphisme non nul entre  $M$  et  $N \otimes K^*$ . Le fibré en droites  $K$  est alors autodual (i.e. de 2-torsion)

car  $M$  et  $N$  sont chacun de déterminant trivial. Ainsi, il existe un morphisme non nul entre  $M$  et  $N \otimes K$ . Par stabilité,  $M$  et  $N \otimes K$  sont isomorphes.

Si  $M^* \otimes N$  possède un sous-fibré vectoriel de rang 2 de degré 0, noté  $W_2$ , alors ce sous-fibré est non isotrope car  $\overline{E} \times \overline{F}$  est un  $SO_4$ -fibré principal stable ( $E$  et  $F$  étant stables). Par ailleurs, on peut supposer que  $W_2$  est stable car sinon  $W_2$  posséderait un sous-fibré en droites de degré 0. Ce cas rentrerait dans le cadre de l'étude précédente. Le forme bilinéaire sur  $M^* \otimes N$  restreinte à  $W_2$  est non nulle car  $W_2$  est non isotrope. Il s'agit donc d'un isomorphisme entre  $W_2$  et  $W_2^*$ , vu que  $W_2$  (et donc  $W_2^*$ ) est supposé stable. Le fibré  $W_2$ , muni d'une forme quadratique non dégénérée, est orthogonal, de rang 2 et de degré 0 et peut donc s'écrire sous la forme :

$$W_2 = \overline{\pi}_*(L)$$

pour un fibré en droites  $L$  sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à un fibré en droites  $B$  de 2-torsion sur  $C$ . En dualisant  $\overline{\pi}_*(L) \hookrightarrow M^* \otimes N$ , il vient  $M^* \otimes N \hookrightarrow \overline{\pi}_*(L^*)$ . Par adjonction, il existe un morphisme non nul entre  $\overline{\pi}^*(M^* \otimes N)$  et  $L^*$ , c'est à dire, en dualisant à nouveau, un morphisme non nul entre  $L$  et  $\overline{\pi}^*(M^*) \otimes \overline{\pi}^*(N)$ . D'où l'existence d'un morphisme  $\Psi$  non nul :

$$\Psi : \overline{\pi}^*(M) \rightarrow \overline{\pi}^*(N) \otimes L^*. \quad (55)$$

Effectuons une disjonction des cas :

- Si  $\overline{\pi}^*(M)$  (ou  $\overline{\pi}^*(N)$ ) est strictement semistable, alors  $M$  est de la forme  $M = \overline{\pi}_*(K)$  pour un  $K$  un fibré en droites sur une courbe associée à un fibré en droites de 2-torsion sur  $C$ .
- Si  $\overline{\pi}^*(M)$  et  $\overline{\pi}^*(N)$  sont stables, alors le morphisme  $\Psi$  est un isomorphisme. Puisque  $\overline{\pi}^*(M)$  et  $\overline{\pi}^*(N)$  sont de déterminant trivial, le fibré en droites  $L$  est de 2-torsion :  $L^*$  est isomorphe à  $L$ . En faisant agir  $\sigma^*$  sur les fibrés vectoriels  $\overline{\pi}^*(M)$  et  $\overline{\pi}^*(N) \otimes L$ , où  $\sigma$  est l'involution canonique de  $\tilde{X}$ , on obtient :

$$\overline{\pi}^*(M) \simeq \overline{\pi}^*(N) \otimes \sigma^*(L) \quad (56)$$

puisque  $\sigma^*(\overline{\pi}^*(M)) = \overline{\pi}^*(M)$  et  $\sigma^*(\overline{\pi}^*(N)) = \overline{\pi}^*(N)$ . D'après (55) et (56), il vient

$$\begin{aligned} \overline{\pi}^*(N) &\simeq \overline{\pi}^*(N) \otimes L \otimes \sigma^*(L), \\ &\simeq \overline{\pi}^*(N) \otimes \overline{\pi}^*(\text{Nm}(L)), \\ &\simeq \overline{\pi}^*(N \otimes \text{Nm}(L)). \end{aligned}$$

En prenant l'image directe par  $\overline{\pi}_*$ , on a :

$$N \oplus (N \otimes B) \simeq (N \otimes \text{Nm}(L)) \oplus (N \otimes \text{Nm}(L) \otimes B)$$

Les quatre fibrés  $N, N \otimes B, N \otimes \text{Nm}(L)$  et  $N \otimes \text{Nm}(L) \otimes B$  étant stables, on a :

$$\begin{aligned} N &= N \otimes \text{Nm}(L), \\ \text{ou} \quad N &= N \otimes \text{Nm}(L) \otimes B. \end{aligned}$$

Si  $\text{Nm}(L) = L \otimes \sigma^*(L) = \mathcal{O}_{\bar{X}}$ , alors  $\sigma^*(L) = L$  et  $L$  est de la forme  $\bar{\pi}^*(\Lambda)$  pour  $\Lambda$  un fibré en droites sur une courbe associée à un fibré en droites de 2-torsion. L'isomorphisme entre  $\bar{\pi}^*(M)$  et  $\bar{\pi}^*(N) \otimes \bar{\pi}^*(\Lambda)$  induit un isomorphisme entre  $M$  et  $N \otimes \Lambda$ .

Si  $\text{Nm}(L)$  n'est pas isomorphe à  $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ , alors le fait que  $N$  soit isomorphe à  $N \otimes \text{Nm}(L)$  implique que  $N$  est de la forme  $\bar{\pi}^*(\Lambda)$  pour  $\Lambda$  un fibré en droites sur une courbe associée à un fibré en droites de 2-torsion.

Dans les conditions  $\star$ , les fibrés vectoriels  $M^* \otimes N$  et  $\text{End}_0(N)$  sont donc stables.  $\square$

**Lemme 3.3.27.** — *Soit  $P_{G_2}$  le  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension d'un  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$  tel que  $E$  et  $F$  soient deux  $SL_2$ -fibrés principaux stables.*

*Alors, les groupes d'automorphismes de  $E$  et de  $F$  sont isomorphes à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  :*

$$\text{Aut}_{SL_2}(E) = \text{Aut}_{SL_2}(F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

*De plus, sous les conditions  $\star$ , définies dans Notation 5, le groupe d'automorphismes de  $P_{G_2}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  :*

$$\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* — Soient  $E$  et  $F$  deux  $SL_2$ -fibrés principaux stables sur une courbe  $C$  et  $P_{G_2}$  le  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension du  $SO_4$ -fibré principal  $\overline{E \times F}$ . Notons  $M, N$  et  $V$  les fibrés vectoriels associés respectivement à  $E, F$  et  $P_{G_2}$ . Tout automorphisme  $\varphi$  de  $E$  induit un isomorphisme  $\tilde{\varphi}$  du fibré vectoriel  $M$  associé à  $E$ . D'après le Corollaire 3.2.10, comme  $M$  est stable,  $\tilde{\varphi}$  est une homothétie. Vu que  $\det(\tilde{\varphi})$  est trivial, le rapport de cette homothétie doit être de carré égal à 1 (le rang de  $M$  étant égal à 2). Ainsi,

$$\text{Aut}_{SL_2}(E) = \text{Aut}_{SL_2}(F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Considérons maintenant un automorphisme  $\Psi$  de  $P_{G_2}$  et  $\tilde{\Psi}$  l'isomorphisme de  $V$  associé. D'après le Lemme 3.3.21,

$$V = M^* \otimes N \oplus \text{End}_0(N). \quad (57)$$

Notons

$$M_{\tilde{\Psi}} = \left( \begin{array}{c|c} \alpha & \delta \\ \hline \gamma & \beta \end{array} \right)$$

la matrice de  $\tilde{\Psi}$ , exprimée sur un ouvert de trivialisations, dans une base adaptée à la décomposition de  $V$  exprimée dans l'équation (57).

Dans les conditions  $\star$ , il ne peut y avoir de morphisme non nul entre les fibrés vectoriels  $M^* \otimes N$  et  $\text{End}_0(N)$  car ils sont tous les deux stables, de même pente mais de rang différent (Proposition 3.2.9).

Ainsi,  $\gamma : M^* \otimes N \rightarrow \text{End}_0(N)$  et  $\delta : \text{End}_0(N) \rightarrow M^* \otimes N$  sont nuls. La matrice  $M_{\tilde{\Psi}}$  est donc de la forme :

$$M_{\tilde{\Psi}} = \left( \begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right).$$

Comme les fibrés vectoriels  $M^* \otimes N$  et  $\text{End}_0(N)$  sont stables, les morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  sont des homothéties. De plus, ces fibrés étant orthogonaux, il faut que  $\alpha$  et  $\beta$  soient des morphismes orthogonaux. Notons  $Q_1$  et  $Q_2$  les restrictions de la forme quadratique  $\tilde{Q}$  (voir (28)). Notons  $\lambda$  et  $\mu$  les rapports des homothéties  $\alpha$  et  $\beta$ . Il faut que  ${}^t\alpha Q_1 \alpha = Q_1$ , soit  $\lambda^2 Q_1 = Q_1$ , ce qui impose  $\lambda$  appartient à  $\{\pm 1\}$ . De même,  $\mu$  appartient à  $\{\pm 1\}$ . Le fait que le déterminant de  $M_{\tilde{\Psi}}$  est trivial impose  $\mu = 1$  car  $\det(M_{\tilde{\Psi}}) = \lambda^4 \mu^3 = \mu$ .

Dans les conditions  $\star$ , les seuls automorphismes de  $P_{G_2}$  sont donc associés aux matrices :

$$M_{\tilde{\Psi}} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{ou} \quad M_{\tilde{\Psi}} = \left( \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

Le groupe d'automorphismes de  $P_{G_2}$  est donc bien isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  $\square$

### 3.4. Propriétés relatives à l'espace de modules $M_C(G_2)$

#### 3.4.1.

**Notation 6.** — Dans ce qui suit, la lettre  $G$  désigne un groupe algébrique affine, connexe et semisimple et  $C$  une courbe algébrique projective, connexe et lisse sur  $\mathbb{C}$ . On note  $M_C(G)$  l'espace de modules des  $G$ -fibrés principaux semistables sur une courbe  $C$  et l'on va s'intéresser tout particulièrement à l'espace de modules  $M_C(G_2)$ .

**Proposition 3.4.1 (Ramanathan).** — *Soit  $E \rightarrow C$  un  $G$ -fibré principal stable où  $G$  est semisimple. Alors, l'ensemble des automorphismes de  $E$  est fini.*

*Démonstration.* — Soit  $E$  un  $G$ -fibré principal stable sur une courbe  $C$  avec  $G$  semisimple. Fixons une représentation  $\rho$  de  $G$  :

$$\rho : G \hookrightarrow GL(V)$$

où  $V$  est un espace vectoriel sur lequel  $G$  agit et où  $\rho$  est prise fidèle et irréductible. D'après la Proposition 2.11 de [Bal09],

$$\mathrm{Aut}(E) = H^0(C, \mathrm{Ad}(E)) = H^0(C, E \overset{G}{\times} G)$$

où  $G$  agit sur lui-même par conjugaison. La représentation  $\rho : G \hookrightarrow GL(V)$  induit le morphisme injectif suivant

$$E \overset{G}{\times} G \hookrightarrow E \overset{G}{\times} GL(V) \hookrightarrow E \overset{G}{\times} \mathrm{End}(V),$$

d'où

$$\mathrm{Aut}(E) \hookrightarrow H^0(C, E \overset{G}{\times} \mathrm{End}(V)) = H^0(C, \mathrm{End}(E(V))).$$

Selon les notations utilisées en §3 de [Ram75], posons

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{\lambda\rho(g) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*, g \in G\} \quad \text{le cône au-dessus de la représentation } \rho, \\ A &= \{\sigma \in H^0(C, \mathrm{End}(E(V))) \mid \sigma(C) \subset E(\overline{\mathcal{C}})\} \subset H^0(C, \mathrm{End}(E(V))). \end{aligned}$$

Alors,  $\mathrm{Aut}(E)$  est contenu dans  $A$ . Par la Proposition 3.1 de [Ram75],  $E$  étant stable, l'image  $\mathbb{P}(A)$  de  $A$  dans  $\mathbb{P}H^0(C, \mathrm{End}(E(V)))$  n'intersecte pas l'hypersurface du lieu d'annulation de la fonction déterminant dans  $H^0(C, \mathrm{End}(E(V)))$ . Ce sous-ensemble est donc fini. L'image  $I$  de  $\mathrm{Aut}(E)$  dans  $\mathbb{P}H^0(C, \mathrm{End}(E(V)))$  est donc finie. Considérons la suite exacte

$$\mathrm{Aut}(E) \rightarrow I \rightarrow 1. \tag{58}$$

Cherchons le noyau de cette suite exacte. Tout automorphisme  $\gamma : E \rightarrow E$  tel que le morphisme  $\tilde{\gamma} : E(V) \rightarrow E(V)$  soit la multiplication par un scalaire non nul  $\lambda$  sur  $V$  est lui-aussi l'homothétie  $\lambda \mathrm{id}$ . En effet,  $\tilde{\gamma} : E(V) \rightarrow E(V)$  est défini comme suit : pour tout  $(\overline{e, v})$  de  $E(V)$ , on pose  $\tilde{\gamma}(\overline{(e, v)}) = \overline{(\gamma(e), v)}$ . Fixons  $e \in E$ . Il existe  $g \in G$  tel que  $\gamma(e) = e \cdot g$ . L'image de  $(\overline{e, v})$  par  $\tilde{\gamma}$  est  $(\overline{e \cdot g, v}) = (\overline{e, gv})$ . Si  $gv = \lambda v$  pour tout  $v \in V$ , on obtient bien  $g = \lambda \mathrm{id}$ . Et ceci est vrai pour tout  $e$  de  $E$ . Ainsi, le noyau de la suite exacte de l'équation (58) est donc  $G \cap \mathbb{C}^*$ . On a la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow G \cap \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{Aut}(E) \rightarrow I \rightarrow 1.$$

Ainsi,  $\mathrm{Aut}(E)$  est une extension de  $I$  par  $G \cap \mathbb{C}^*$ . Or,  $G \cap \mathbb{C}^*$  est inclus dans le centre  $Z(G)$  de  $G$  qui est fini car  $G$  est semisimple. Les deux ensembles  $G \cap \mathbb{C}^*$  et  $I$  étant finis,  $\mathrm{Aut}(E)$  l'est aussi.  $\square$

Rappelons deux définitions intervenant dans le prochain théorème.

**Définition 3.4.2.** — Un élément  $g$  d'un groupe algébrique  $G$  est dit **semi-simple** s'il existe une représentation fidèle  $\rho : G \hookrightarrow GL(V)$  telle que  $\rho(g)$  soit diagonalisable.

**Remarque 3.4.3.** — Soit un élément  $g$  d'un groupe algébrique  $G$ . S'il existe une représentation fidèle  $\rho$  de  $G$  telle que  $\rho(g)$  soit diagonalisable, alors pour toute autre représentation fidèle  $\tilde{\rho}$  de  $G$ ,  $\tilde{\rho}(g)$  est diagonalisable.

**Définition 3.4.4.** — Le **centralisateur** d'un élément  $g$  d'un groupe algébrique  $G$ , noté  $C_g$ , est constitué des éléments qui commutent avec  $g$  :

$$C_g = \{h \in G \mid hg = gh\}.$$

**Exemple 3.4.5.** — Le centralisateur d'un élément  $z$  de centre  $Z_G$  d'un groupe  $G$  est le groupe  $G$  entier, tout autre centralisateur est un sous-groupe strictement inclus dans le groupe  $G$ .

Rappelons la définition suivante concernant le groupe des automorphismes d'un  $G$ -fibré principal :

**Définition 3.4.6.** — Un  $G$ -fibré principal  $E$  est dit **régulièrement stable** lorsque  $E$  est stable et que

$$\text{Aut}_G(E) \simeq Z(G)$$

où  $\text{Aut}_G(E)$  est le groupe des automorphismes du  $G$ -fibré principal  $E$  et  $Z(G)$  désigne le centre de  $G$ .

**Théorème 3.4.7.** — Soit  $E \rightarrow C$  un  $G$ -fibré principal. Supposons que  $E$  soit un  $G$ -fibré principal stable, non régulièrement stable. Alors, il existe un élément  $g$  appartenant à  $G$  tel que  $g$  soit semisimple et tel que  $E$  admette une réduction au centralisateur  $C_g$ . De plus, ce centralisateur est de rang maximal, c'est-à-dire égal au rang de  $G$  et si  $G$  est simplement connexe, alors ce centralisateur est connexe.

*Démonstration.* — Soit  $\pi : E \rightarrow C$  un  $G$ -fibré principal stable tel que le centre  $Z_G$  de  $G$  soit strictement inclus dans  $\text{Aut}(E)$ . Considérons  $\gamma : E \rightarrow E$  appartenant à  $\text{Aut}(E) \setminus Z_G$ .

Comme  $\gamma$  n'est pas la multiplication par un élément de  $Z_G$ , il existe  $e_0$  de  $E$  tel que son image  $\gamma(e_0)$  n'appartienne pas à  $\{e_0 \cdot z \mid z \in Z_G\}$ . Ainsi,  $\gamma(e_0) = e_0 \cdot g_0$  où  $g_0$  n'est pas un élément du centre  $Z_G$ . Notons  $x_0$  le point de la courbe  $C$  tel que  $\pi(e_0) = x_0$ .

Comme  $\text{Aut}(E)$  est fini d'après la Proposition 3.4.1,  $\gamma$  est d'ordre fini. Il existe donc un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\gamma^n = id$ . Comme  $\gamma^n = id$ , il vient  $e_0 = \gamma^n(e_0) = e_0 \cdot g_0^n$  donc  $g_0^n = 1_G$ ; l'élément  $g_0$  est d'ordre fini. Il est donc diagonalisable puisqu'il est annulé par le polynôme  $X^n - 1$  à racines simples. Cet élément est donc bien semisimple.

Montrons que le  $G$ -fibré principal  $E$  admet une réduction au sous-groupe  $C_{g_0}$ , qui un sous-groupe stricte de  $G$  d'après l'exemple 3.4.5 puisque  $g_0$  n'est pas un élément de  $Z_G$ . Pour définir une telle réduction, il suffit de pouvoir définir une section de  $C$  dans  $E/C_{g_0}$ . Considérons un ouvert de trivialisatation  $\mathcal{U} \subset C$  contenant le point  $x_0$ . Pour chaque point  $(x, 1_G)$  de  $\mathcal{U} \times G$ , il existe un unique  $g \in G$  tel que  $\gamma((x, 1_G)) = (x, g) = (x, 1_G) \cdot g$ . Ainsi, à l'automorphisme  $\gamma$  correspond le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : \mathcal{U} &\rightarrow G \\ x &\mapsto g \quad \text{tel que} \quad \gamma((x, 1_G)) = (x, g). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que tous les éléments de l'image de  $\tilde{\gamma}$  sont conjugués deux à deux. Le groupe  $G$  étant affine, notons

$$G = \text{Spec}(A)$$

où  $A$  est une algèbre de type fini. Le groupe  $G$  agit sur  $A$  par conjugaison et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & G = \text{Spec}(A) \\ & \searrow \Phi_{\mathcal{U}} & \downarrow \pi \\ & & \text{Spec}(A^G) \end{array}$$

où  $A^G = \{a \in A \mid \forall g \in G, a \cdot g = a\}$  est l'ensemble des invariants de  $A$  sous l'action de  $G$  et où  $\pi$  est le morphisme canonique associé à l'inclusion  $A^G \hookrightarrow A$ . Le schéma affine  $\text{Spec}(A^G)$  est un bon quotient  $\text{Spec}(A)//G$  (voir l'Exemple (a) de 14.2 de [LP97] ou le Lemme 2.13 de [Dré04]). Recollons l'ensemble des morphismes  $\Phi_{\mathcal{U}}$  pour définir un morphisme sur la courbe  $C$  qui est réunion des ouverts de trivialisatation :

$$\Phi : C \rightarrow \text{Spec}(A^G).$$

La courbe  $C$  étant propre, l'image  $\Phi(C)$  de  $C$  l'est aussi. Or,  $\Phi(C)$  est un sous-ensemble de l'espace affine  $\text{Spec}(A^G)$ , donc il s'agit d'un ensemble discret. De plus,  $C$  et donc  $\Phi(C)$  étant connexes, l'image  $\Phi(C)$  est en fait réduit à un seul point, noté  $y$ . Ainsi, tous les éléments  $\tilde{\gamma}(x)$  pour  $x \in \mathcal{U}$  appartiennent à  $\pi^{-1}(y)$ . Or,  $\pi^{-1}(y)$  est constitué de plusieurs orbites dont une seule seulement est fermée (voir Théorème 2.16 de [Dré04]). Par ailleurs, l'élément  $g_0 = \tilde{\gamma}(x_0)$  étant semi-simple, son orbite par l'action de conjugaison est fermée. En effet, l'orbite, sous l'action de conjugaison, d'un élément  $g$  de  $G$  diagonalisable est l'intersection des

deux fermés de Zariski suivants :

$$\text{Orb}_G(g) = \{M \in G \mid P_{\min(g)}(M) = 0\} \cap \{M \in G \mid P_{\text{car}}(M) - P_{\text{car}}(g) = 0\}$$

où  $P_{\min(g)}$  est le polynôme minimal de  $g$  et  $P_{\text{car}}(M)$  son polynôme caractéristique et  $P_{\text{car}}(g)$  le polynôme caractéristique de  $g$ . Ainsi, l'élément  $g_0$  appartient à l'unique orbite fermée de  $\pi^{-1}(y)$ . Il en est de même pour chaque autre élément  $\tilde{\gamma}(x)$  pour  $x \in \mathcal{U}$ . Chaque orbite étant une classe de conjugaison, tous les éléments  $\tilde{\gamma}(x)$  pour  $x \in \mathcal{U}$  sont donc conjugués :

$$\forall x_1 \in \mathcal{U}, \exists g_1 \in G \quad \text{tel que} \quad \tilde{\gamma}(x_1) = g_1 g_0 g_1^{-1}. \quad (59)$$

Nous sommes à présent en mesure de définir la réduction recherchée. Nous allons définir une section  $\sigma$  au dessus de l'ouvert  $\mathcal{U}$ . Soit  $x_1 \in \mathcal{U}$ . L'image de  $(x_1, 1_G)$  par  $\gamma$  est  $(x_1, \tilde{\gamma}(x_1))$ . Or, d'après (59), il existe  $g_1 \in G$  tel que  $\tilde{\gamma}(x_1) = g_1 g_0 g_1^{-1}$ . Notons  $e_1 = (x_1, g_1)$ . L'image de  $e_1$  par  $\gamma$  est :

$$\begin{aligned} \gamma(e_1) &= \gamma((x_1, 1_G) \cdot g_1) = \gamma((x_1, 1_G)) \cdot g_1, \\ &= (x_1, g_1 g_0 g_1^{-1}) \cdot g_1, \\ &= (x_1, g_1 g_0), \\ &= e_1 \cdot g_0. \end{aligned}$$

Ainsi, au-dessus de tout élément  $x_1$  de  $\mathcal{U}$ , il existe un élément  $e_1$  appartenant à  $\mathcal{U} \times G$  tel que  $\gamma(e_1) = e_1 \cdot g_0$ . À chaque élément  $x_1$  de  $\mathcal{U}$ , on associe un élément du quotient  $E/C_{g_0}$  de la manière suivante : posons  $\sigma(x_1) = \overline{e_1}$  où  $e_1$  est un élément à la fibre au-dessus de  $x_1$  vérifiant  $\gamma(e_1) = e_1 \cdot g_0$ . La section  $\sigma$  est bien définie. En effet, considérons deux éléments  $e_1$  et  $e_2$  appartenant à la fibre d'un élément  $x$  de  $\mathcal{U}$  fixé et vérifiant  $\gamma(e_1) = e_1 \cdot g_0$  et  $\gamma(e_2) = e_2 \cdot g_0$ . Notons  $h$  l'élément de  $G$  tel que  $e_2 = e_1 \cdot h$ . On a

$$\begin{aligned} \gamma(e_2) &= e_2 \cdot g_0, \\ \Leftrightarrow \gamma(e_1 \cdot h) &= (e_1 \cdot h) \cdot g_0, \\ \Leftrightarrow e_1 \cdot g_0 h &= e_1 \cdot h g_0, \\ \text{Donc} \quad g_0 h &= h g_0. \end{aligned}$$

L'élément  $h$  appartient à la classe de conjugaison de  $g_0$ ,  $\overline{e_1} = \overline{e_2}$ . Les deux éléments  $e_1$  et  $e_2$  représentent le même élément dans  $E/C_{g_0}$ . Donc, la section  $\sigma$  est bien définie. On étend cette définition pour obtenir une section de  $C$  à  $E/C_{g_0}$ , ce qui fournit une réduction de  $E$  au sous-groupe  $C_{g_0}$  où  $g_0$  est un élément semi-simple de  $G$ .

D'après le Théorème de §2.2 de [Hum95], le centralisateur  $C_{g_0}$  de  $g_0$  est réductif et de rang maximal. Et, de part le Théorème de §2.11 de [Hum95], si  $G$  est simplement connexe,  $C_{g_0}$  est connexe.

Le fibré principal  $E$  admet bien une réduction au centralisateur  $C_{g_0}$  d'un élément semisimple où  $C_{g_0}$  est un sous-groupe réductif (connexe si  $G$  est simplement connexe) et de rang maximal  $C_{g_0}$ .  $\square$

### 3.4.2.

**Théorème 3.4.8.** — Soit  $[P_{G_2}]$  un point de  $M_C(G_2)$  où  $P_{G_2}$  soit un  $G_2$ -fibré principal sur une courbe algébrique  $C$  de genre  $g$  supérieur ou égal à 2. L'équivalence suivante est vérifiée :

$$P_{G_2} \text{ est régulièrement stable} \quad \Leftrightarrow \quad [P_{G_2}] \text{ est un point lisse de } M_C(G_2).$$

*Démonstration.* — Soit  $P_{G_2}$  un  $G_2$ -fibré principal sur une courbe  $C$  de genre  $g$  supérieur ou égal à 2.

Supposons que  $P_{G_2}$  est régulièrement stable. D'après le Lemme 1.2.14

$$\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}) = Z(G_2) = \{Id\}.$$

Pour savoir si  $[P_{G_2}]$  est un point lisse de  $M_C(G_2)$ , on s'intéresse au bon quotient :

$$H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) // \text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$$

où  $\text{ad}(P_{G_2}) = P_{G_2} \overset{G_2}{\times} \mathfrak{g}_2$  est le fibré adjoint de  $P_{G_2}$ . Le point  $[P_{G_2}]$  est un point lisse de  $M_C(G_2)$  si et seulement si ce bon quotient est lisse. Or, le groupe des automorphismes de  $P_{G_2}$  est ici trivial donc le bon quotient précédent n'est autre que l'espace vectoriel  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$ , qui est lisse. Ainsi,  $[P_{G_2}]$  est un point lisse de  $M_C(G_2)$ .

Inversement, comme dans chaque classe de S-équivalence, il existe un représentant polystable, supposons  $P_{G_2}$  soit polystable. Si  $P_{G_2}$  n'est pas régulièrement stable, alors soit il est non stable, soit il est stable mais de groupe d'automorphismes non trivial.

Dans le premier cas,  $P_{G_2}$ , polystable et non stable, admet une réduction à un sous-groupe de Levi (sous-groupe réductif connexe de rang 2, isomorphe à  $GL_2$  d'après 1.4.2.1 et 1.4.2.2). Ce sous-groupe de Levi est inclus dans l'un des deux sous-groupes réductifs connexes de rang maximal, maximaux pour l'ordre de l'inclusion :  $SL_3$  et  $SO_4$  (voir classification de [BDS49]), correspondant respectivement aux diagrammes de Dynkin  $A_2$  et  $A_1 \times A_1$ . Par extension,  $P_{G_2}$  admet une réduction à  $SL_3$  ou à  $SO_4$ .

Dans le second cas ( $P_{G_2}$  stable, non régulièrement stable), le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  possède une  $H$ -réduction pour  $H$  appartenant à  $\{SL_3, SO_4\}$ . En effet, de par le Théorème 3.4.7,  $G_2$  étant un groupe de Lie simple et simplement connexe (voir Théorème 1.9.3. de [Yok09]),  $P_{G_2}$  possède une  $C_g$ -réduction où  $C_g$  est un sous-groupe connexe de rang maximal de  $G_2$ . Ainsi, le groupe  $C_g$  est inclus dans

l'un des deux groupes,  $SL_3$  ou  $SO_4$ . Ainsi, par extension de groupe de structure de cette  $C_g$ -réduction, le  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  possède une réduction de groupe de structure à  $SL_3$  ou à  $SO_4$ .

Ainsi, si  $P_{G_2}$  ne soit pas régulièrement stable,  $P_{G_2}$  admet une réduction à  $SL_3$  ou à  $SO_4$ .

On s'intéresse au bon quotient

$$H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) // \text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}).$$

Il s'agit de montrer que ce bon quotient est singulier lorsque  $P_{G_2}$  ne soit pas régulièrement stable. D'après le Lemme 2.13 de [Dré04], si l'on note

$$\text{Spec}(A) = H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})),$$

on a l'isomorphisme suivant :

$$H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) // \text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}) \simeq \text{Spec}(A^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})})$$

où  $A^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})}$  désigne l'algèbre des éléments de  $A$  invariants sous l'action du groupe  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ .

Étudions séparément le cas où  $P_{G_2}$  admet une réduction à  $SL_3$  et le cas où  $P_{G_2}$  admet une réduction à  $SO_4$ .

(1) Cas où  $P_{G_2}$  possède une  $SL_3$ -réduction.

Supposons que  $P_{G_2}$  soit stable. S'il existe un  $SL_3$ -fibré principal  $E$  qui soit une  $SL_3$ -réduction de  $P_{G_2}$ , alors, vu que  $P_{G_2}$  est pris stable, le  $SL_3$ -fibré principal  $E$  l'est aussi, d'après la Proposition 3.3.15. L'action de  $SL_3$  sur  $\mathbb{C}^7$  décompose  $\mathbb{C}^7$  en trois composantes irréductibles :

$$\mathbb{C}^7 = \mathbb{C}^3 \oplus (\mathbb{C}^3)^* \oplus \mathbb{C}$$

d'où l'expression du fibré vectoriel associé à  $P_{G_2}$  :

$$\begin{aligned} V = P_{G_2}(\mathbb{C}^7) &= P_{G_2} \times^{G_2} \mathbb{C}^7, \\ &= E \times^{SL_3} \mathbb{C}^7, \\ &= W \oplus W^* \oplus \mathcal{O}_C. \end{aligned}$$

où  $W = E \times^{SL_3} \mathbb{C}^3$  est le fibré vectoriel associé au  $SL_3$ -fibré principal  $E$ . Afin de discuter du caractère lisse ou singulier du point  $[P_{G_2}]$ , étudions le fibré adjoint  $\text{ad}(P_{G_2}) = P_{G_2}(\mathfrak{g}_2)$ . Pour cela, explicitons la décomposition en composantes irréductibles de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  sous l'action de  $\mathfrak{sl}_3$ . D'après le chapitre 22 de [FH91],

$$\mathfrak{g}_2 = \mathbb{C}^3 \oplus (\mathbb{C}^3)^* \oplus \text{End}_0(\mathbb{C}^3).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \text{ad}(P_{G_2}) &= P_{G_2} \times^{G_2} \mathfrak{g}_2, \\ &= E \times^{SL_3} \mathfrak{g}_2, \\ \text{ad}(P_{G_2}) &= W \oplus W^* \oplus \text{End}_0(W). \end{aligned} \quad (60)$$

Le  $SL_3$ -fibré principal  $E$  étant stable, son groupe d'automorphismes est isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et le groupe d'automorphisme de  $P_{G_2}$  l'est aussi dans la cas où le fibré vectoriel  $W$  n'est pas autodual, d'après le Lemme 3.3.16. Plaçons-nous dans ce cas :

$$\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Notons

$$d = h^1(C, W).$$

Par le Théorème de Riemann-Roch, en notant  $g$  est le genre de la courbe  $C$ ,

$$h^0(C, W) - h^1(C, W) = \text{deg}(W) + \text{rg}(W)(1 - g) = 3(1 - g)$$

et

$$\begin{aligned} h^0(C, \text{End}_0(W)) - h^1(C, \text{End}_0(W)) &= \text{deg}(\text{End}_0(W)) + \text{rg}(\text{End}_0(W))(1 - g), \\ &= 8(1 - g). \end{aligned}$$

Or,  $h^0(C, W) = \dim(\Gamma(C, W)) = 0$  et  $h^0(C, \text{End}_0(W)) = 0$ . En effet, s'il existait une section globale non nulle de  $W$ , elle correspondrait à un morphisme de  $\mathcal{O}_C$  vers  $W$ . Or, ces deux fibrés vectoriels étant stables de degré 0, ce morphisme serait un isomorphisme, ce qui est impossible vu que  $\mathcal{O}_C$  est de rang 1 alors que  $W$  est de rang 3. Par ailleurs, toute section globale de  $\text{End}_0(W)$  correspond à un morphisme de  $W$  vers  $W$ , qui est une homothétie de trace nulle, car  $W$  est un fibré vectoriel stable donc simple. Donc, la seule section globale de  $\text{End}_0(W)$  est la section nulle. Ainsi,

$$\begin{aligned} d &:= h^1(C, W) = 3(g - 1), \\ l &:= h^1(C, \text{End}_0(W)) = 8(g - 1). \end{aligned}$$

Les entiers  $d$  et  $l$  sont strictement supérieurs à 1 dès que  $g$  est supérieur ou égal à 2.

Une pseudo-réflexion d'un espace vectoriel est un endomorphisme de cet espace vectoriel dont le noyau est de codimension 1. Nous allons voir si le groupe d'automorphismes  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ , agissant sur  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$ , est engendré par des pseudo-réflexions. Considérons la décomposition :

$$\begin{aligned} H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) &= H^1(C, W \oplus W^* \oplus \text{End}_0(W)), \\ &= H^1(C, W) \oplus H^1(C, W^*) \oplus H^1(C, \text{End}_0(W)). \end{aligned}$$

Par le Lemme 3.3.16, en notant  $M_\lambda$  la matrice de l'automorphisme de  $V$  associée à  $\lambda \in \mu_3$ ,  $M_\lambda$  agit par multiplication par  $\lambda$  sur  $H^1(C, W)$ , par  $\lambda^{-1}$  sur  $H^1(C, W^*)$  et agit trivialement sur  $H^1(C, \text{End}_0(W))$ . Ainsi, pour tout élément  $\lambda$  de  $\mu_3$  différent de 1,  $M_\lambda$  n'est pas une pseudo-réflexion puisque les dimensions  $h^1(C, W)$  et  $h^1(C, W^*)$  sont égales à  $d$ , strictement supérieur à 1 quand  $g$  est supérieur ou égal à 2. Donc  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ , agissant sur  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$ , n'est pas engendré par des pseudo-réflexions.

Posons

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[H^1(C, W)] &= \mathbb{C}[X_i]_{i \in \{1, \dots, d\}}, \\ \mathbb{C}[H^1(C, W^*)] &= \mathbb{C}[Y_j]_{j \in \{1, \dots, d\}}, \\ \mathbb{C}[H^1(C, \text{End}_0(W))] &= \mathbb{C}[Z_m]_{m \in \{1, \dots, l\}}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))] = \mathbb{C}[H^1(C, W \oplus W^* \oplus \text{End}_0(W))] = \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m]$$

où  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  et  $m \in \{1, \dots, l\}$ . L'automorphisme de  $P_{G_2}$ , agissant par multiplication par  $\lambda$ , où  $\lambda$  appartient  $\mu_3$ , sur  $W$  se traduit, sur  $\text{ad}(P_{G_2}) = W \oplus W^* \oplus \text{End}_0(W)$ , par la multiplication par  $\lambda^{-1}$  sur  $W^*$  et par l'action triviale sur  $\text{End}_0(W)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})} &= \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]^{\mu_3}, \\ &= \mathbb{C}[X_i X_j X_k, Y_i Y_j Y_k, X_i Y_j, Z_m] \end{aligned} \quad (61)$$

où  $i, j, k \in \{1, \dots, d\}$  et  $m \in \{1, \dots, l\}$ . En notant  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) = \text{Spec}(A)$ , la surjection naturelle

$$\Psi : \mathbb{A}^{2d+l} = \text{Spec}(A) \twoheadrightarrow \text{Spec}(A) // \text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}) = \text{Spec}(A^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})}) \subset \mathbb{A}^n$$

(où  $n = C_d^3 + A_d^2 + d + l$ ) équivaut à l'inclusion  $A^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})} \hookrightarrow A$ , soit

$$\mathbb{C}[X_i X_j X_k, Y_i Y_j Y_k, X_i Y_j, Z_m] \hookrightarrow \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m]$$

où  $i, j, k \in \{1, \dots, d\}$  et  $m \in \{1, \dots, l\}$ . Par le Théorème de Luna sur les slices étales (voir [Dré04], §7.4), il vient que  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M_C(G_2)$  si et seulement si  $\Psi(\mathbb{A}^{2d+l})$  est singulière au point 0 de  $\mathbb{A}^n$  puisque les anneaux locaux correspondant sont isomorphes.

Notons  $S = \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m]_{\{i, j, m\}}$  et  $R = \mathbb{C}[X_i X_j X_k, Y_i Y_j Y_k, X_i Y_j, Z_m]_{\{i, j, k, m\}}$  la sous-algèbre de  $S$  formée des éléments invariants par le groupe  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ . D'après ce qui précède,  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ , agissant sur  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$ , n'est pas engendré par des pseudo-réflexions. Ainsi, d'après le Théorème de Chevalley-Shephard-Todd (voir Théorème 4, chapitre V, §5 de [Bou68]),  $R$  n'est pas une  $\mathbb{C}$ -algèbre graduée (libre) de polynômes. Or, il y a équivalence entre le fait que l'algèbre  $R$  soit une algèbre de polynômes et le fait que le point 0 soit un point lisse (admis).

Ici, l'algèbre  $R$  n'étant pas polynômiale, le point  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M_C(G_2)$ .

Ainsi, lorsque  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal stable, non régulièrement stable, admettant une  $SL_3$ -réduction  $E$  telle que le fibré vectoriel  $M = E(\mathbb{C}^3)$  n'est pas autodual, alors  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de l'espace de modules  $M_C(G_2)$ . L'ouvert  $M_C(G_2)$  constitué des points  $[P_{G_2}]$  avec  $P_{G_2} = E(G_2)$  où  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal stable tel que  $M := E(\mathbb{C}^3)$  n'est pas autodual, est contenu dans le lieu singulier de  $M_C(G_2)$ . Or, le lieu singulier étant un fermé, il contient donc aussi l'adhérence de cet ouvert.

(2) Cas où  $P_{G_2}$  possède une  $SO_4$ -réduction, notée  $G$ . Supposons que  $P_{G_2}$  soit stable.

– Si  $P_{G_2}$  est obtenu par extension de groupe de structure d'un élément  $P$  tel que  $[P]$  appartient à  $M_C^+(SO_4)$ , alors, par la surjectivité de  $M_C(SL_2) \times M_C(SL_2) \rightarrow M_C^+(SO_4)$  indiquée au Lemme 3.3.18, il existe deux  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  tels que  $P_{G_2} = \overline{E \times F}$ . D'après la proposition 3.3.22,  $E$  et  $F$  sont stables puisque  $P_{G_2}$  est supposé stable. Supposons par ailleurs que les conditions  $\star$ , définies dans en Notation 5, soient vérifiées. Par le Lemme 3.3.27, leurs groupes d'automorphismes sont isomorphes à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et si les fibrés vectoriels associés à  $E$  et à  $F$  ne sont pas isomorphes, le groupe d'automorphismes de  $P_{G_2}$  est aussi isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . D'après le Lemme 3.3.21, le fibré vectoriel  $V$  associé à  $P_{G_2}$  est

$$V = M^* \otimes N \oplus \text{End}_0(N)$$

où  $M = E(\mathbb{C}^2) = E(\mathbf{M})$  et  $N = F(\mathbb{C}^2) = F(\mathbf{N})$  sont les fibrés vectoriels associés à  $E$  et à  $F$ .

Afin de discuter du caractère lisse ou singulier du point  $[P_{G_2}]$ , étudions le fibré adjoint  $\text{ad}(P_{G_2}) = P_{G_2}(\mathfrak{g}_2)$ . Pour cela, explicitons la décomposition en composantes irréductibles de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  sous l'action de  $\mathfrak{so}_4$ .

Le système de racines de  $\mathfrak{so}_4$  est  $D_2$  et celui de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$  est  $A_1 \times A_1$ , donc, au niveau des algèbres de Lie, on a bien :

$$\mathfrak{so}_4 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2.$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  se décompose sous la forme suivante

$$\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6} \oplus V_{\alpha_5}. \quad (62)$$

où  $(\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1}, (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6}$  et  $(\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6}$  sont des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}_2$  et  $V_{\alpha_5}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}_2$ , où les notations utilisées sont les

suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} &= \langle H_{\alpha_1} \rangle \oplus (\mathfrak{g}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{g}_2)_{-\alpha_1}, \\ (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6} &= \langle H_{\alpha_6} \rangle \oplus (\mathfrak{g}_2)_{\alpha_6} \oplus (\mathfrak{g}_2)_{-\alpha_6}, \\ V_{\alpha_5} &= \bigoplus_{\alpha \in \{\pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_5\}} (\mathfrak{g}_2)_\alpha \end{aligned}$$

et  $H_{\alpha_i} = [X_i, X_{-i}]$ ,  $X_i$  et  $X_{-i}$  générant respectivement  $(\mathfrak{g}_2)_{\alpha_i}$  et  $(\mathfrak{g}_2)_{-\alpha_i}$  (voir (10)). Les sous-algèbres de Lie  $(\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1}$  et  $(\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6}$  sont toutes les deux isomorphes à  $\mathfrak{sl}_2$  et elles sont en somme directe car les vecteurs  $H_{\alpha_1}$ ,  $H_{\alpha_6}$ ,  $X_1$ ,  $X_6$  et  $X_{-6}$  vérifient

$$\begin{aligned} [H_{\alpha_1}, X_6] &= [H_{\alpha_6}, X_1] = 0, \\ \text{et } [X_1, X_6] &= [X_1, X_{-6}] = 0 \end{aligned}$$

(les deux racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_6$  ont été judicieusement choisies dans ce but<sup>(7)</sup>). Le calcul de  $[H_{\alpha_1}, X_6]$ , par exemple, est le suivant :

$$\begin{aligned} H_{\alpha_1} &= [X_1, X_{-1}], \\ &= P_{0,1}(E_{1,1} + E_{5,5} + 2E_{3,3} - E_{2,2} - E_{4,4} - 2E_{6,6})P_{0,1}^{-1}, \\ X_6 &= P_{0,1}(E_{1,5} - E_{2,4})P_{0,1}^{-1}, \\ \text{donc } [H_{\alpha_1}, X_6] &= P_{0,1}(E_{1,5} + E_{2,4} - (E_{1,5} + E_{2,4}))P_{0,1}^{-1} = 0. \end{aligned}$$

On considère la représentation  $\pi$  de  $\mathfrak{so}_4 = (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6}$  sur  $\mathfrak{g}_2$  comme restriction de la représentation adjointe :

$$\pi : (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}_2).$$

L'équation (62) n'est autre que la décomposition de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  en sous-espaces vectoriels correspondant à la décomposition de la représentation  $\pi$  en représentations irréductibles. En effet, tous les crochets de Lie  $[X_1, X_k]$ ,  $[X_{-1}, X_k]$ ,  $[X_6, X_k]$  et  $[X_{-6}, X_k]$  appartiennent à  $V_{\alpha_5}$  pour  $k \in \{\pm 2, \dots, \pm 5\}$ . Donc  $V_{\alpha_5}$  est bien un sous-espace vectoriel stable de cette représentation. Il est de plus irréductible car en retranchant à la racine  $\alpha_5$  les racines  $\alpha_1$  ou  $\alpha_6$  une ou plusieurs fois, on parcourt toutes les racines de  $\{\alpha_{\pm 2}, \dots, \alpha_{\pm 5}\}$ . Notons  $\pi_5$  la représentation irréductible de  $(\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6}$  sur  $V_{\alpha_5}$ , associée à  $\pi$  :

$$\pi_5 : (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6} \rightarrow \text{End}(V_{\alpha_5}).$$

Le vecteur associé au plus haut poids de la représentation  $\pi_5$  est l'unique vecteur (à homothétie près) vérifiant

$$[X, X_1] = [X, X_6] = 0$$

<sup>(7)</sup>Tout autre choix de deux racines  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  parmi les racines positives de  $\mathfrak{g}_2$  n'aurait pas vérifié simultanément  $[X_i, X_j] = [X_i, X_{-j}] = [H_{\alpha_i}, X_j] = [H_{\alpha_j}, X_i] = 0$

puisque  $X_1$  et  $X_6$  sont les vecteurs propres associés aux racines positives de  $\mathfrak{so}_4 = (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6}$ . Le vecteur recherché est  $X_5$ . Le plus haut poids de la représentation  $V_{\alpha_5}$  est donc  $\alpha_5$  (ce qui justifie les notations utilisées).

Caractérisons la représentation  $V_{\alpha_5}$ , en comparaison avec une représentation de  $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2) \otimes \mathbb{C}^2$ . d'après le Lemme 3.4.9 ci-après, les représentations  $\pi_5$  et  $\rho$  (définies lors du lemme) sont isomorphe :

$$\begin{aligned} \pi_5 : (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6} &\rightarrow \text{End}(V_{\alpha_5}) \\ \rho : \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 &\rightarrow \text{End}(\text{Sym}^3(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B}). \end{aligned}$$

En posant  $\mathbf{A} = \mathbf{N}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^*$ , la représentation  $\pi : \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  aboutit à la décomposition suivante de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  :

$$\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6} \oplus (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*$$

où  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$  agit sur  $(\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1}, (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6}$  et  $(\text{Sym}^3 N) \otimes M^*$  de manière irréductible.

Le fibré adjoint  $\text{ad}(P_{G_2}) = P_{G_2}(\mathfrak{g}_2)$  s'écrit donc :

$$\text{ad}(P_{G_2}) = \text{End}_0(M^*) \oplus \text{End}_0(N) \oplus (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*. \quad (63)$$

Par le Théorème de Riemann-Roch, en notant  $g$  est le genre de la courbe  $C$ , pour tout fibré vectoriel  $W$  sur la courbe  $C$ , on a :

$$h^0(C, W) - h^1(C, W) = \text{deg}(W) + \text{rg}(W)(1 - g).$$

En appliquant cette formule aux fibrés vectoriels  $\text{End}_0(M^*), \text{End}_0(N)$  et  $(\text{Sym}^3 N) \otimes M^*$ , il vient :

$$\begin{aligned} h^0(C, \text{End}_0(M^*)) - h^1(C, \text{End}_0(M^*)) &= 3(1 - g), \\ h^0(C, \text{End}_0(N)) - h^1(C, \text{End}_0(N)) &= 3(1 - g), \\ \text{et } h^0(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*) - h^1(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*) &= 8(1 - g). \end{aligned}$$

Or, comme précédemment,  $h^0(C, \text{End}_0(M^*))$  et  $h^0(C, \text{End}_0(N))$  sont nuls car  $M^*$  et  $N$  sont des fibrés vectoriels stables. Les entiers  $d$  et  $l$ , définis comme suit :

$$\begin{aligned} d &:= h^1(C, \text{End}_0(M^*)) = h^1(C, \text{End}_0(N)) = 3(g - 1), \\ l &:= h^1(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*) = 8(g - 1) + h^0(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*), \end{aligned}$$

sont strictement supérieurs à 1 dès que  $g$  est supérieur ou égal à 2.

Montrons que le groupe d'automorphismes  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ , agissant sur l'espace  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$  n'est pas engendré par des pseudo-réflexions. Considérons la décomposition :

$$\begin{aligned} H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) &= H^1(C, \text{End}_0(M^*) \oplus \text{End}_0(N) \oplus (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*), \\ &= H^1(C, \text{End}_0(M^*)) \oplus H^1(C, \text{End}_0(N)) \\ &\quad \oplus H^1(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.3.27, chaque automorphisme de  $P_{G_2}$  induit un isomorphisme du fibré vectoriel  $V = M^* \otimes N \oplus \text{End}_0(N)$  de la forme suivante ayant pour matrice, dans une base adaptée à la décomposition précédente,

$$M_{(1)} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{ou} \quad M_{(-1)} = \left( \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right). \quad (64)$$

L'automorphisme de  $G_2$  associé à  $M_{(1)}$  agit trivialement sur  $\text{ad}(P_{G_2})$ . D'autre part, le  $(SL_2 \times SL_2)$ -automorphisme de  $(M^*, N)$ , agissant par multiplication par  $\lambda = -1$  sur  $M^*$  et trivialement sur  $N$  induit l'automorphisme de  $G_2$  associé à  $M_{(-1)}$ . Cet automorphisme agit trivialement sur  $\text{End}_0(M^*)$  et sur  $\text{End}_0(N)$  et agit trivialement sur  $\text{Sym}^3 N$  et par multiplication par  $\lambda = -1$  sur  $M^*$  donc agit par multiplication par  $\lambda = -1$  sur  $(\text{Sym}^3 N) \otimes M^*$ . L'automorphisme associé à  $M_{(-1)}$  agit donc de manière triviale sur  $\text{End}_0(M^*)$  et sur  $\text{End}_0(N)$  et par multiplication par  $\lambda = -1$  sur  $(\text{Sym}^3 N) \otimes M^*$ . Ainsi, le groupe  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$  agissant sur  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$  est constitué du morphisme identité et du morphisme qui agit trivialement sur  $H^1(C, \text{End}_0(M^*))$  et sur  $H^1(C, \text{End}_0(N))$  et par multiplication par  $(-1)$  sur  $H^1(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*)$ . Comme la dimension  $l$  de  $H^1(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*)$  est strictement supérieure à 1 quand  $g$  est supérieur ou égal à 2, le groupe  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ , agissant sur  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$ , n'est pas engendré par des pseudo-réflexions.

Posons

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[H^1(C, \text{End}_0(M^*))] &= \mathbb{C}[X_i]_{i \in \{1, \dots, d\}}, \\ \mathbb{C}[H^1(C, \text{End}_0(N))] &= \mathbb{C}[Y_j]_{j \in \{1, \dots, d\}}, \\ \mathbb{C}[H^1(C, (\text{Sym}^3 N) \otimes M^*)] &= \mathbb{C}[Z_m]_{m \in \{1, \dots, l\}}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))] = \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m]$$

où  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  et  $m \in \{1, \dots, l\}$ , et d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})} &= \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]^{\mu_2}, \\ &= \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m Z_n] \end{aligned}$$

où  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  et  $m, n \in \{1, \dots, l\}$ . En notant  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) = \text{Spec}(A) = \mathbb{A}^{2d+l}$ , la surjection naturelle

$$\Psi : \text{Spec}(A) \twoheadrightarrow \text{Spec}(A) // \text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}) = \text{Spec}(A^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})}) \subset \mathbb{A}^{2d+l}$$

équivalent à l'inclusion  $A^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})} \hookrightarrow A$ , soit

$$\mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m Z_n] \hookrightarrow \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m]$$

où  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  et  $m, n \in \{1, \dots, l\}$ . Par le Théorème de Luna sur les slices étales (voir [Dré04], §7.4), il vient que  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M_C(G_2)$  si et seulement si  $\Psi(\mathbb{A}^{2d+l})$  est singulière au point 0 de  $\mathbb{A}^{2d+l}$ .

Notons  $S = \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m]_{\{i,j,m\}}$  et  $R = \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m Z_n]_{\{i,j,m,n\}}$  la sous-algèbre de  $S$  formée des éléments invariants par le groupe  $\text{Aut}_{G_2}(V)$ . Par le Théorème de Chevalley-Shephard-Todd (voir Théorème 4, chapitre V, §5 de [Bou68]), le groupe  $\text{Aut}_{G_2}(V)$  n'étant pas engendré par des pseudo-réflexions, l'algèbre  $R$  n'est pas une  $\mathbb{C}$ -algèbre graduée (libre) de polynômes. Donc 0 est un point singulier de  $\mathbb{A}^{2d+l}$ . Par suite,  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M_C(G_2)$ .

Ainsi, si  $P_{G_2}$  est  $G_2$ -fibré principal stable, non régulièrement stable admettant une  $SO_4$ -réduction à un élément de  $M^+(SO_4)$  vérifiant les conditions  $\star$  définies en Notation 5, alors  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M(G_2)$ .

– Si  $P_{G_2}$  est obtenu par extension de groupe de structure d'un élément  $P$  tel que  $[P]$  appartient à  $M^-(SO_4)$ , l'étude est similaire. Si  $P_{G_2}$  appartient à un certain ouvert de  $M_C(G_2)$  et si  $P_{G_2}$  n'est pas régulièrement stable alors  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M(G_2)$ .

Ainsi, en regroupant les résultats précédents, si  $P_{G_2}$  est un  $G_2$ -fibré principal appartenant soit à l'ouvert de  $M_C(G_2)$  constitué des points  $[P_{G_2}]$  avec  $P_{G_2} = E(G_2)$  où  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal stable tel que  $M := E(\mathbb{C}^3)$  n'est pas autodual, soit à l'ouvert de  $M_C(G_2)$  constitué des points  $[P_{G_2}]$  avec  $P_{G_2}$  non régulièrement stable, admettant une  $SO_4$ -réduction à un élément de  $M^+(SO_4)$  vérifiant les conditions  $\star$  définies en Notation 5, ou à un certain ouvert de  $M_C(G_2)$  constitué des points  $[P_{G_2}]$  avec  $P_{G_2}$  non régulièrement stable, admettant une  $SO_4$ -réduction à un élément de  $M^-(SO_4)$ , alors  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M(G_2)$ .

Ainsi, le lieu singulier de  $M(G_2)$ , qui est un fermé, contient l'adhérence de ces ouverts. Au final, si  $P_{G_2}$  n'est pas régulièrement stable alors  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M(G_2)$ . Donc, le lieu lisse de  $M(G_2)$  est contenu dans le lieu régulièrement stable.

Il y a donc équivalence entre le lieu lisse et le lieu régulièrement stable.  $\square$

Voici l'énoncé et la démonstration du Lemme 3.4.9, utilisé dans la démonstration précédente.

**Lemme 3.4.9.** — *En reprenant les notations de la démonstration précédente, les représentations  $\pi_5$  et  $\rho$  sont isomorphes où*

$$\begin{aligned} \pi_5 : (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_1} \oplus (\mathfrak{sl}_2)_{\alpha_6} &\rightarrow \text{End}(V_{\alpha_5}) \\ \rho : \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 &\rightarrow \text{End}(\text{Sym}^3(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B}). \end{aligned}$$

avec,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension 2, et, pour  $g = g_1 + g_2$  de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$  et  $a_i a_j a_k \otimes b$  de  $\text{Sym}^3(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B}$  :

$$\rho(a_i a_j a_k \otimes b) = \overline{\rho}_1(g_1)(a_i a_j a_k) \otimes b \quad \oplus \quad a_i a_j a_k \otimes \rho_{(-1)}(g_2)(b).$$

et  $\overline{\rho}_1$  est la représentation de  $\mathfrak{sl}_2$  sur  $\text{Sym}^3(\mathbf{A})$  induit par la représentation  $\rho_1$  de  $\mathfrak{sl}_2$  sur  $\mathbf{A}$  de plus haut poids 1, et  $\rho_{(-1)}$  la représentation de  $\mathfrak{sl}_2$  sur  $\mathbf{B}$  de plus haut poids  $-1$ .

*Démonstration.* — Considérons la représentation adjointe de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ . La décomposition de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$  en sous-algèbre de Cartan et en espaces propres pour l'action adjointe est la suivante :

$$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 = \langle h_1, h_2 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle \oplus \langle f_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle$$

où

$$\begin{aligned} h_1 &= (h, 0), e_1 = (e, 0), f_1 = (f, 0), \\ \text{et } h_2 &= (0, h), e_2 = (0, e), f_2 = (0, f), \end{aligned}$$

où

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(voir [Kna02], §I.1). La sous-algèbre  $\langle h_1, h_2 \rangle$  est la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ . Les vecteurs racines associés aux racines positives sont  $e_1$  et  $e_2$ .

Notons

$$\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$$

deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension 2 et

$$\begin{aligned} \rho_1 : \mathfrak{sl}_2 &\rightarrow \text{End}(\mathbf{A}), & \text{et} & \quad \rho_{(-1)} : \mathfrak{sl}_2 &\rightarrow \text{End}(\mathbf{B}), \\ X &\mapsto X & & \quad X &\mapsto -X \end{aligned}$$

les représentations irréductibles de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{B}$  de poids dominant 1 et  $(-1)$  (uniques à isomorphisme équivariant près). On note  $\overline{\rho}_1$  la représentation  $\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(\text{Sym}^3(\mathbf{A}))$  déduite de  $\rho_1$  : pour tout  $g \in \mathfrak{sl}_2$  et  $a_i a_j a_k \in \text{Sym}^3(\mathbf{A})$ ,

$$\overline{\rho}_1(g_1)(a_i a_j a_k) = \rho_1(g_1)(a_i) a_j a_k + a_i \rho_1(g_1)(a_j) a_k + a_i a_j \rho_1(g_1)(a_k).$$

Étudions la représentation :

$$\rho : \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(\text{Sym}^3(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B})$$

vérifiant, pour  $g = g_1 + g_2 \in \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$  et  $a_i a_j a_k \otimes b \in \text{Sym}^3(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B}$  :

$$\rho(a_i a_j a_k \otimes b) = \overline{\rho}_1(g_1)(a_i a_j a_k) \otimes b \quad \oplus \quad a_i a_j a_k \otimes \rho_{(-1)}(g_2)(b).$$

On rappelle que les racines de  $\mathfrak{sl}_2$  sont  $h^*$  et  $(-h^*)$  si  $h$  désigne le générateur de la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{sl}_2$  décrit ci-dessus. Les poids de la représentation  $\rho$  sont obtenus en sommant trois poids de la représentation  $\rho_1$  et un poids de l'action de  $\rho_{(-1)}$  (les poids des représentations  $\rho_1$  et  $\rho_{(-1)}$  étant opposés). Ainsi, les 8 poids de la représentation  $\rho$  sont

$$\{3h_1^* + h_2^*, h_1^* + h_2^*, -h_1^* + h_2^*, -3h_1^* + h_2^*, \\ 3h_1^* - h_2^*, h_1^* - h_2^*, -h_1^* - h_2^*, -3h_1^* - h_2^*\}.$$

Les 8 vecteurs propres associés à ces poids sont de la forme

$$a_i a_j a_k \otimes b_l$$

avec  $i, j, k, l$  appartenant à  $\{1, 2\}$ . Notons  $X_\lambda$  le vecteur

$$X_\lambda = a_1 a_1 a_1 \otimes b_1.$$

Sous l'action de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ , tous les vecteurs propres sont obtenus à partir de  $X_\lambda$ , donc la représentation  $\rho$  est irréductible. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \rho(e_1)(X_\lambda) = \rho(e, 0)(X_\lambda) &= \overline{\rho}_1(e)(a_1 a_1 a_1) \otimes b_1 + 0 = 0, \\ \text{et } \rho(e_2)(X_\lambda) = \rho(0, e)(X_\lambda) &= 0 + a_1 a_1 a_1 \otimes \rho_{(-1)}(e)(b_1) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur  $X_\lambda = a_1 a_1 a_1 \otimes b_1$  est le vecteur de plus haut poids de la représentation  $\rho$ . Calculons le poids  $\lambda$  associé au vecteur  $X_\lambda$ , qui est le plus haut poids de cette représentation. Le vecteur propre  $X_\lambda$  est associé au poids  $\lambda := 3h_1^* - h_2^*$  puisque

$$\begin{aligned} \rho(h_1)(X_\lambda) = \rho(h, 0)(X_\lambda) &= \overline{\rho}_1(h)(a_1 a_1 a_1) \otimes b_1 + a_1 a_1 a_1 \otimes \rho_{(-1)}(0)(b_1), \\ &= 3a_1 a_1 a_1 \otimes b_1 + 0, \\ &= 3X_\lambda, \\ \text{et } \rho(h_2)(X_\lambda) = \rho(0, h)(X_\lambda) &= \overline{\rho}_1(0)(a_1 a_1 a_1) \otimes b_1 + a_1 a_1 a_1 \otimes \rho_{(-1)}(h)(b_1), \\ &= 0 + a_1 a_1 a_1 \otimes (-b_1), \\ &= -X_\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi, la représentation  $\rho$  est une représentation irréductible  $V_\lambda$  de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$  de plus haut poids  $\lambda$  avec

$$\lambda = 3h_1^* - h_2^*.$$

D'un autre côté, la représentation irréductible  $\pi_5$  a pour plus haut poids  $\alpha_5$ .

Les deux représentations  $\rho$  et  $\pi_5$  sur deux représentations irréductibles de l'algèbre de Lie complexe semisimple  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ . Afin de savoir si elles sont isomorphes, il suffit de comparer leur plus haut poids. Le plus haut poids de la représentation  $\rho$  est  $3h_1^* - h_2^*$ . Par ailleurs, la représentation  $\pi_5$  a pour plus haut poids la forme linéaire  $\alpha_5$ . D'après le calcul des crochets de Lie  $[H_{\alpha_i}, X_5]$ , égaux à  $\alpha_5(H_{\alpha_i})X_5$ , pour  $i \in \{1, 6\}$ , l'évaluation de  $\alpha_5$  sur la sous-algèbre de Cartan  $\langle H_{\alpha_1}, H_{\alpha_6} \rangle$  de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$  est :

$$\begin{aligned}\alpha_5(H_{\alpha_1}) &= 3, \\ \alpha_5(H_{\alpha_6}) &= -1.\end{aligned}$$

Donc,  $\alpha_5$  est égal à  $3H_{\alpha_1}^* - H_{\alpha_6}^*$ .

Ainsi, en identifiant les deux algèbres de Cartan  $\langle h_1, h_2 \rangle$  et  $\langle H_{\alpha_1}, H_{\alpha_6} \rangle$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\langle h_1, h_2 \rangle &\longrightarrow \langle H_{\alpha_1}, H_{\alpha_6} \rangle \\ h_1 &\mapsto H_{\alpha_1} \\ h_2 &\mapsto H_{\alpha_6}\end{aligned}$$

les deux représentations irréductibles  $\rho$  et  $\pi_5$  sont isomorphes.  $\square$

**Remarque 3.4.10.** — Le résultat du Théorème 3.4.8 est un cas particulier du Corollaire 3.6 de [BH10]. Ce dernier énonce le fait suivant :

**Théorème 3.4.11 (Biswas-Hoffmann).** — *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe réductif sur  $\mathbb{C}$ . Le lieu lisse de  $\mathcal{M}_G$  est constitué des points  $[E]$  de  $\mathcal{M}_G$  tels que  $E$  est un  $G$ -fibré principal régulièrement stable.*

Cependant, le lieu singulier  $y$  est décrit de manière théorique. Nous verrons, dans le Théorème 3.4.12, une description détaillée du lieu singulier de l'espace de modules  $M_C(G_2)$ .

**3.4.3.** L'objet de ce paragraphe est l'étude du lieu lisse (ou, de manière équivalente, du lieu singulier) de l'espace de modules  $M_C(G_2)$ . Pour une courbe algébrique lisse, projective, connexe  $C$  de genre égal à 0, cet espace de module est réduit à un point : il est par conséquent entièrement lisse.

Au paragraphe 1.5 (équations (26) et (33)), il a été mis en évidence les deux inclusions suivantes :

$$\begin{aligned}i: SL_3 &\hookrightarrow G_2, \\ j: SO_4 &\hookrightarrow G_2.\end{aligned}$$

Elles induisent deux morphismes au niveau des espaces de modules (morphismes d'extension de groupe de structure)<sup>(8)</sup> :

$$\begin{aligned} i : M_C(SL_3) &\rightarrow M_C(G_2) \\ j : M_C(SO_4) &\rightarrow M_C(G_2) \end{aligned} \quad (65)$$

**Théorème 3.4.12.** — *Le lieu singulier de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  constitué des classes d'isomorphismes des  $G_2$ -fibrés principaux semistables sur une courbe algébrique lisse, projective, connexe de genre au moins 2 est :*

$$M_{C,\text{sing}}(G_2) = i(M_C(SL_3)) \cup j(M_C(SO_4)).$$

*Le lieu singulier de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  possède ainsi trois composantes connexes :*

$$i(M_C(SL_3)), j(M_C^+(SO_4)) \text{ et } j(M_C^-(SO_4)).$$

*Démonstration.* — D'après le Théorème 3.4.8, le lieu singulier de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  est le lieu non régulièrement stable de  $M_C(G_2)$ . Ainsi, il est constitué des  $G_2$ -fibrés principaux strictement semistables et des  $G_2$ -fibrés principaux stables dont le groupe d'automorphismes n'est pas trivial. Tout  $G_2$ -fibré principal tel que  $[P_{G_2}]$  est un point singulier admet donc une réduction à l'un des deux groupes suivants :  $SL_3$  ou  $SO_4$ . En effet, si l'on considère un  $G_2$ -fibré principal polystable strictement semistable contenue dans la classe de S-équivalence  $[P_{G_2}]$  alors il admet une réduction à un sous-groupe de Levi et ce sous-groupe est inclus dans l'un de deux groupes précédemment cités (voir paragraphe 1.4.2)<sup>(9)</sup>. Par ailleurs, cette affirmation dans le cas d'un  $G_2$ -fibré principal stable de groupe d'automorphismes non trivial est l'objet du Théorème 3.4.7. Ainsi,

$$M_{C,\text{sing}}(G_2) \subset i(M_C(SL_3)) \cup j(M_C(SO_4)).$$

Inversement, si  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal stable alors  $P_{G_2}$ , le  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension de groupe de structure de  $E$ , est stable d'après l'équivalence énoncée à la Proposition 3.3.15. Par ailleurs, le groupe d'automorphismes de  $P_{G_2}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  si  $E(\mathbb{C}^3)$  n'est pas autodual (voir Lemme 3.3.16) donc n'est pas trivial. Par le Théorème 3.4.8,  $[P_{G_2}]$  est un point singulier de  $M_C(G_2)$ .

<sup>(8)</sup>Les inclusions  $i : SL_3 \hookrightarrow G_2$  et  $j : SO_4 \hookrightarrow G_2$  ne sont pas uniques. En revanche, les morphismes correspondantes entre espaces de modules ne dépendent pas du choix des inclusions au niveau des groupes. En effet, si l'on considère  $E$  un  $SL_3$ -fibré principal et deux inclusions  $i_1$  et  $i_2$  de  $SL_3$  dans  $G_2$ , alors le  $G_2$ -fibré principal associé à  $E$  via l'inclusion  $i_1$  est isomorphe au  $G_2$ -fibré principal obtenu à partir de  $E$  via l'inclusion  $i_2$ . Ainsi, dans l'espace de modules  $M_C(G_2)$ , il s'agit bien du même point. Le morphisme  $i : M_C(SL_3) \hookrightarrow M_C(G_2)$  est donc bien définie au niveau des espaces de modules. Il en est de même pour  $j : M_C(SO_4) \hookrightarrow M_C(G_2)$ .

<sup>(9)</sup>Ce résultat est particulier au groupe  $G_2$ .

Si  $(E \times F)$  est un  $SO_4$ -fibré principal tel que  $[E \times F]$  appartient à  $M_C^+(SO_4)$  et si les conditions ouvertes  $\blacklozenge$  et  $\blackstar$  sont vérifiées, alors le  $G_2$ -fibré principal obtenu par extension de groupe de structure est stable et son groupe d'automorphismes est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (voir Proposition 3.3.23 et Lemme 3.3.27). Donc, le point de  $M_C(G_2)$  correspondant à ce  $G_2$ -fibré principal est un point singulier.

Un travail similaire peut être réalisé sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $M_C^-(SO_4)$ .

Notons  $\mathcal{U}_1$  l'ouvert de  $M_C(G_2)$  constitué des points  $[P_{G_2}]$  avec  $P_{G_2} = E(G_2)$  où  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal stable tel que  $M := E(\mathbb{C}^3)$  n'est pas autodual et  $\mathcal{U}_2$  celui constitué des points  $[P_{G_2}]$  avec  $P_{G_2} = (\overline{E \times F})(G_2)$  où  $E$  et  $F$  sont deux  $SL_2$ -fibrés principaux stables vérifiant les conditions  $\blacklozenge$  et les conditions  $\blackstar$ .

Les ouverts  $\mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_2$  et  $\mathcal{U}$  sont contenus dans le lieu singulier de l'espace de modules  $M_C(G_2)$ . Or,  $M_C(G_2)$  est un fermé. Donc, l'adhérence de ces ouverts est encore contenue dans le lieu singulier de  $M_C(G_2)$ . Finalement, nous aboutissons à

$$M_{C,\text{sing}}(G_2) = i(M_C(SL_3)) \cup j(M_C(SO_4)).$$

□

**3.4.4.** Considérons les espaces de modules  $M_C(G_2)$  et  $M_C(SO_7)$  et le morphisme d'extension :

$$\gamma : M_C(G_2) \longrightarrow M_C(SO_7).$$

La représentation de  $G_2$  sur l'espace vectoriel  $\Lambda^3\mathcal{V}$  donne lieu à la décomposition suivante :

$$\Lambda^3\mathcal{V} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{V} \oplus \Gamma_{20}$$

(voir [FH91], § 22.3).

**Proposition 3.4.13.** — *Sur l'ouvert non vide  $\mathcal{U}_\blacktriangle$  de l'espace de modules  $M_C(G_2)$  constitué des  $G_2$ -fibrés principaux  $P_{G_2}$  tels que les fibrés vectoriels associés  $P_{G_2}(\mathcal{V})$  et  $P_{G_2}(\Gamma_{20})$  sont stables :*

$$\mathcal{U}_\blacktriangle = \{[P_{G_2}] \in M_C(G_2) \mid P_{G_2}(\mathcal{V}) \text{ et } P_{G_2}(\Gamma_{20}) \text{ sont stables}\},$$

le morphisme  $\gamma$  est injectif.

*Démonstration.* — Pour un  $G_2$ -fibré principal  $P_{G_2}$  tel que  $[P_{G_2}]$  appartient à l'ouvert  $\mathcal{U}_\blacktriangle$ , la dimension de l'espace des sections globales de  $P_{G_2}(\Lambda^3\mathcal{V})$  est :

$$\begin{aligned} h^0(C, P_{G_2}(\Lambda^3\mathcal{V})) &= h^0(C, \mathcal{O}_C) \oplus h^0(C, P_{G_2}(\mathcal{V})) \oplus h^0(C, P_{G_2}(\Gamma_{20})), \\ &= 1 \end{aligned}$$

car  $h^0(C, P_{G_2}(\mathcal{V}))$  et  $h^0(C, P_{G_2}(\Gamma_{20}))$  sont nuls de par l'hypothèse de stabilité. Ainsi, toutes les formes trilinéaires alternées de  $P_{G_2}(\Lambda^3\mathcal{V})$  sont égales, à un scalaire près.

Or, se donner un  $G_2$ -fibré principal est équivalent à se donner un fibré vectoriel de rang 7, de déterminant trivial, muni d'une forme trilinéaire non-dégénérée. Ainsi, si deux éléments de  $M_C(G_2)$  ont la même image par le morphisme  $\gamma$  alors ils coïncident.

Il reste à voir que cet ouvert  $\mathcal{U}_\blacktriangle$  n'est pas vide. Cela découle des résultats de [BPS06] suivants. D'une part, pour un groupe  $G$  semisimple et une courbe  $X$  projective lisse, il existe un  $G$ -fibré principal stable ayant une monodromie égale à  $G$ . D'autre part, si  $P_G$  est un  $G$ -fibré principal stable de monodromie égal à  $G$  et si  $G \rightarrow GL(\mathbb{C}^n)$  est une représentation irréductible, alors le fibré vectoriel associé  $P_G(\mathbb{C}^n)$  est stable. Pour le cas du groupe de Lie simple  $G = G_2$ , en appliquant ces deux résultats aux deux représentations irréductibles  $\mathcal{V}$  et  $\Gamma_{20}$ , on aboutit à l'existence d'un  $G_2$ -fibré principal stable tel que les fibrés vectoriels  $P_{G_2}(\mathcal{V})$  et  $P_{G_2}(\Gamma_{20})$  sont stables. Ainsi, l'ouvert  $\mathcal{U}_\blacktriangle$  n'est donc pas vide.  $\square$

**Remarque 3.4.14.** — Nous venons de démontrer que l'ouvert  $\mathcal{U}_\blacktriangle$  n'est pas vide. Cependant, on ne sait pas le décrire.

Soit  $\mathcal{U}_1$  l'ouvert de  $M_C(G_2)$  constitué des points  $[P_{G_2}]$  tels que  $P_{G_2} = E(G_2)$  où  $E$  est un  $SL_3$ -fibré principal stable muni d'un fibré vectoriel associé non autodual. Notons  $\gamma_1$  la restriction du morphisme  $\gamma$  à l'ouvert  $\mathcal{U}_1$  de  $M_C(G_2)$  :

$$\gamma_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow M_C(SO_7).$$

**Proposition 3.4.15.** — La différentielle du morphisme  $\gamma_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow M_C(SO_7)$  est injective.

*Démonstration.* — Considérons

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 : & \mathcal{U}_1 & \rightarrow M_C(SO_7) \\ & [E(G_2)] & \mapsto [R_{SO_7}] \end{array}$$

où  $R_{SO_7}$  est le  $SO_7$ -fibré principal associé au  $G_2$ -fibré principal  $E(G_2)$ .

Soit  $E$  un  $SL_3$ -fibré principal. On note  $P_{G_2} = E(G_2)$  et  $R_{SO_7} = E(SO_7)$  les  $G_2$ -fibré principal et  $SO_7$ -fibré principal associés, et  $V = E(\mathcal{V})$  le fibré vectoriel de rang 7 associé. On suppose que  $E$  est stable et que  $M = E(\mathbb{C}^3)$  n'est pas autodual.

Montrons que

$$H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) // \text{Aut}_{G_2}(P_{G_2}) \longrightarrow H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7})) // \text{Aut}_{SO_7}(R_{SO_7})$$

est injectif, ce qui revient à montrer que

$$\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7}))]^{\text{Aut}_{SO_7}(R_{SO_7})} \longrightarrow \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})}$$

est surjectif.

D'après le Lemme 3.3.14, le fibré vectoriel  $V$  s'exprime de la manière suivante :

$$V = M \oplus M^* \oplus \mathcal{O}_C$$

et par le Lemme 3.3.16, le groupe des  $G_2$ -automorphismes de  $P_{G_2}$ ,  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$ , est isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Étudions le groupe d'automorphismes du  $SO_7$ -fibré principal  $R_{SO_7}$ . Si  $\Psi$  est un  $SO_7$ -automorphisme de  $R_{SO_7}$  et  $\tilde{\Psi}$  l'isomorphisme de  $V$  qui en découle, alors, localement,  $\tilde{\Psi}$  s'exprime matriciellement, dans une base adaptée à la décomposition de  $V$  précédente, par :

$$M_{\tilde{\Psi}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des homothéties. En effet, puisque  $M$  et  $M^*$  sont stables (donc simples) et non isomorphes. Par ailleurs, l'appartenance de  $M_{\tilde{\Psi}}$  à  $SO_7$  impose  $\lambda\mu = 1$  et  $\det(M_{\tilde{\Psi}}) = (\lambda\mu)^3\nu = \nu = 1$ . Ainsi,

$$M_{\tilde{\Psi}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe des  $SO_7$ -automorphismes de  $R_{SO_7}$  est donc isomorphe à  $\mathbb{C}^*$ .

Exprimons les fibrés adjoints  $\text{ad}(P_{G_2})$  et  $\text{ad}(R_{SO_7})$ . Le fibré adjoint  $\text{ad}(P_{G_2})$  est isomorphe à

$$\text{ad}(P_{G_2}) \simeq M \oplus M^* \oplus \text{End}_0(M)$$

(voir équation (60)). L'algèbre  $\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]$  est

$$\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))] = \mathbb{C}[X_i, Y_j, Z_m]$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[H^1(C, M)] &= \mathbb{C}[X_i], \\ \mathbb{C}[H^1(C, M^*)] &= \mathbb{C}[Y_j], \\ \mathbb{C}[H^1(C, \text{End}_0(M))] &= \mathbb{C}[Z_m]. \end{aligned}$$

D'après (61), l'algèbre des invariants de  $\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]$  sous l'action du groupe d'automorphismes  $\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})$  est

$$\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})} = \mathbb{C}[X_i X_j X_k, Y_i Y_j Y_k, X_i Y_j, Z_m].$$

D'autre part, le fibré adjoint  $\text{ad}(R_{SO_7})$  est :

$$\begin{aligned}
\text{ad}(R_{SO_7}) &= R_{SO_7}(\mathfrak{so}_7) = P_{G_2}(\mathfrak{so}_7), \\
&= P_{G_2}(\Lambda^2 \mathbb{C}^7), \\
&= \Lambda^2 V, \\
&= \Lambda^2(M \oplus M^* \oplus \mathcal{O}_C), \\
&= M \oplus M^* \oplus \Lambda^2 M \oplus \Lambda^2 M^* \oplus \text{End}(M), \\
&= M \oplus M^* \oplus \Lambda^2 M \oplus \Lambda^2 M^* \oplus \text{End}_0(M) \oplus \mathcal{O}_C.
\end{aligned}$$

Notons  $\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7}))] = \mathbb{C}[A_i, B_j, S_k, T_l, C_m]$  où

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[H^1(C, M)] &= \mathbb{C}[A_i], \\
\mathbb{C}[H^1(C, M^*)] &= \mathbb{C}[B_j], \\
\mathbb{C}[H^1(C, \Lambda^2 M)] &= \mathbb{C}[S_k], \\
\mathbb{C}[H^1(C, \Lambda^2 M^*)] &= \mathbb{C}[T_l], \\
\mathbb{C}[H^1(C, M^* \otimes M)] &= \mathbb{C}[C_m].
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7}))]^{\text{Aut}_{SO_7}(R_{SO_7})} = \mathbb{C}[A_i B_j, S_k T_l, A_i A_j T_l, B_i B_j S_k, C_m]$$

L'étude de l'inclusion de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  dans  $\mathfrak{so}_7$  présenté en Annexe B montre que l'inclusion de  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$  dans  $H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7}))$  se fait de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll}
H^1(C, \text{ad}(P_{G_2})) & \longrightarrow & H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7})) & \\
H^1(C, M) & \mapsto & 2\sqrt{2} H^1(C, M) & +i\sqrt{2} H^1(C, \Lambda^2 M^*), \\
H^1(C, M^*) & \mapsto & \alpha H^1(C, M^*) & +\beta H^1(C, \Lambda^2 M), \\
H^1(C, \text{End}_0(M)) & \mapsto & H^1(C, \text{End}_0(M)). & 
\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7}))] & \longrightarrow \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))] \\
A & \mapsto X \\
B & \mapsto Y \\
S & \mapsto Y \\
T & \mapsto X \\
C & \mapsto Z
\end{array}$$

(les indices ont été volontairement omis pour soulager l'écriture). Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7}))]^{\text{Aut}_{SO_7}(R_{SO_7})} &\longrightarrow \mathbb{C}[H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))]^{\text{Aut}_{G_2}(P_{G_2})} \\ AB &\mapsto XY \\ ST &\mapsto XY \\ AAT &\mapsto XXX \\ BBS &\mapsto YYY \\ C &\mapsto Z. \end{aligned}$$

Par conséquent, le morphisme précédent est surjectif, ce qui montre l'injectivité de  $H^1(C, \text{ad}(P_{G_2}))$  dans  $H^1(C, \text{ad}(R_{SO_7}))$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{U}_2$  l'ouvert de  $M_C(G_2)$  constitué des points  $[P_{G_2}]$  avec  $P_{G_2} = (\overline{E \times F})(G_2)$  où  $E$  et  $F$  sont deux  $SL_2$ -fibrés principaux stables vérifiant les conditions ouvertes  $\blacklozenge$  et  $\blackstar$ . Notons  $\gamma_2$  la restriction du morphisme  $\gamma$  à l'ouvert  $\mathcal{U}_2$  de  $M_C(G_2)$  :

$$\gamma_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow M_C(SO_7).$$

**Proposition 3.4.16.** — *La différentielle du morphisme  $\gamma_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow M_C(SO_7)$  est injective.*

**Rappel.** — Deux  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  vérifient les conditions  $\blacklozenge$  et les conditions  $\blackstar$  si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

- les  $SL_2$ -fibrés principaux  $E$  et  $F$  sont stables,
- ni  $M$  ni  $N$  ne sont de la forme  $\overline{\pi}_*(L)$ , pour  $L$  un fibré en droites sur la courbe  $\tilde{X}$  associée à un fibré en droites  $\pi : B \rightarrow C$  de 2-torsion, où la courbe  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow C$  est le revêtement étale de degré 2 associé à  $B$  (voir Proposition 3.3.23),
- le fibré vectoriel  $M$  n'est pas isomorphe à  $N \otimes K$  pour  $K$  un fibré en droites de 2-torsion sur  $C$ .

où  $M$  et  $N$  sont les fibrés vectoriels à  $E$  et  $F$ .

*Démonstration.* — La démonstration est en tous points similaire à celle de la Proposition 3.4.15.  $\square$

Il serait intéressant d'obtenir un ouvert non vide sur lequel le morphisme  $\gamma : M_C(G_2) \rightarrow M_C(SO_7)$  est un plongement.



## CHAPITRE 4

### UTILISATION DES FORMULES DE VERLINDE

Le but de ce chapitre est d'explicitier un lien entre différents espaces de la forme  $H^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}^i)$  sur une courbe projective, lisse, connexe où  $\mathcal{M}_C(G)$  le champ de modules des  $G$ -fibrés principaux semistables sur  $C$ , avec une attention particulière portée à l'espace  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}^i)$  associé au groupe  $G_2$ .

Dans tout ce chapitre, la lettre  $C$  désigne une courbe  $C$  projective, connexe, et lisse de genre  $g$ .

#### 4.1. Utilisation de la formule de Verlinde pour le calcul de $h^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}_G^i)$ pour $G = G_2, SL_2$ ou $SL_3$ et différents entiers $i$

Soient  $G$  un groupe de Lie complexe simple et simplement connexe et  $\mathcal{M}_C(G)$  le champ des modules des  $G$ -fibrés principaux stables sur  $C$ . Alors  $\mathcal{M}_C(G)$  est muni naturellement d'un fibré en droites canonique  $\mathcal{L}$  : le fibré déterminant. Les formules de Verlinde prédisent la dimension de  $h^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}^i)$ , pour  $i$  parcourant les entiers strictement positif.

**Proposition 4.1.1 (Formule de Verlinde).** — *Soient un groupe de Lie  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de type classique ou de type  $G_2$ ,  $\mathcal{L}$  le fibré en droites canonique dont est muni naturellement  $\mathcal{M}_C(G)$  et  $i$  un entier strictement positif. L'entier  $h^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}^i)$  est donné par la relation suivante :*

$$h^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}^i) = (\#T_i)^{g-1} \sum_{\mu \in \mathcal{P}_i} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \left[ 2 \sin \left( \frac{\pi \langle \alpha, \mu + \rho \rangle}{i + g^*} \right) \right]^{2-2g}.$$

où

$$\begin{aligned}
 \#T_i &= (i + g^*)^{\text{rg}(\mathfrak{g})} \#(\mathcal{P}/Q) \#(Q/Q_{l\mathfrak{g}}), \text{ où } \text{rg}(\mathfrak{g}) \text{ désigne le rang de } \mathfrak{g}, \\
 \mathcal{P} &\text{ est le réseau des poids,} \\
 Q &\text{ est le réseau des racines,} \\
 Q_{l\mathfrak{g}} &\text{ est le réseau des racines longues,} \\
 \rho &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha_j \in \Delta_+} \alpha_j, \\
 \mathcal{P}_i &= \{\text{poids dominants } \mu \mid \langle \mu, \theta \rangle \leq i\}, \\
 \theta &\text{ est la racine positive maximale,} \\
 \Delta_+ &= \{\text{racines positives de } \mathfrak{g}\} \\
 g^* &\text{ est le nombre de Coxeter dual du groupe } G.
 \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Voir [OW96] et [Sor96]. □

#### 4.1.1. Calcul de $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}^i)$ pour $i = 1$ et $2$ . —

4.1.1.1.  $G_2$  et son système de racines. — Le système de racines de  $G_2$  possède six racines positives  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ , dont deux racines simples  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

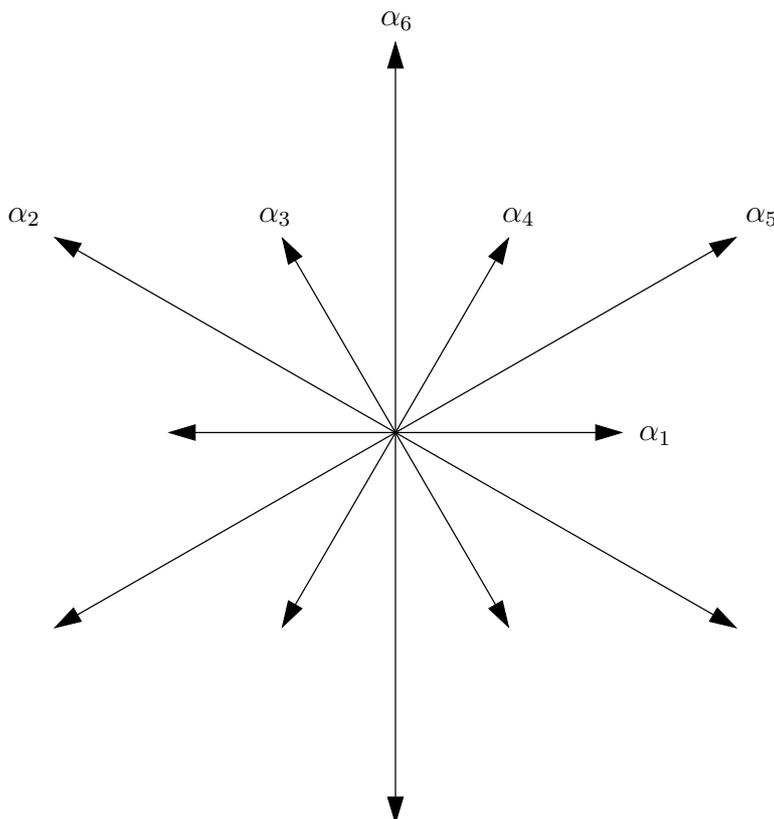


FIG. 1. Système de racines de  $G_2$

L'angle formé entre ces deux dernières racines est de  $5\pi/6$  et leurs normes vérifient la relation suivante :  $\|\alpha_2\| = \sqrt{3}\|\alpha_1\|$ . Les autres racines positives découlent des deux racines simples via les relations suivantes :  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_5 = 3\alpha_1 + \alpha_2$  et  $\alpha_6 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ . De plus,  $\|\alpha_1\| = \|\alpha_3\| = \|\alpha_5\|$  et  $\|\alpha_2\| = \|\alpha_4\| = \|\alpha_6\|$ . La racine positive maximale est  $\theta = \alpha_6$ . On normalise la forme de Killing pour obtenir  $\langle \theta, \theta \rangle = \langle \alpha_6, \alpha_6 \rangle = 2$ . Notons  $\|\alpha_1\|^2 = \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = x^2$ , on a alors  $2 = \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 3x^2$ ; ce qui impose  $x = \sqrt{2/3}$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= 2/3, \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \|\alpha_1\| \|\alpha_2\| \cos(5\pi/6) = -1, \\ \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle &= 2.\end{aligned}$$

*4.1.1.2. Calcul explicite  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}^i)$  pour  $i = 1$  et  $2$  via la formule de Verlinde.* — Les constantes apparaissant dans la formule de Verlinde pour  $G = G_2$ ,  $i = 1$  et  $i = 2$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned}g^* &= 4, \\ \text{rg}(\mathfrak{g}_2) &= 2, \\ \#T_1 &= (1+4)^2 \times 1 \times 3 = 75, \\ \#T_2 &= (2+4)^2 \times 1 \times 3 = 108, \\ \rho &= 5\alpha_1 + 3\alpha_2, \\ \theta &= \alpha_6 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ \mathcal{P}_i &= \{\mu = k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2 \mid k_j \in \mathbb{N} \text{ et } \langle \mu, \theta \rangle \leq i\}\end{aligned}$$

où  $\varpi_1 = \alpha_4$  et  $\varpi_2 = \alpha_6$  sont les deux poids fondamentaux de  $\mathfrak{g}_2$ .

*4.1.1.2.1. Calcul de  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ .* —

**Proposition 4.1.2.** —

$$h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1}. \quad (66)$$

**Exemple 4.1.3.** — Pour une courbe de genre 2, on obtient

$$h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) = 5. \quad (67)$$

Le reste de ce paragraphe constitue la démonstration de cette proposition.

Décrivons l'ensemble  $\mathcal{P}_1$  qui apparaît dans la formule de Verlinde pour  $G = G_2$ . Le premier poids fondamental est  $\varpi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , le second est  $\varpi_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ .

$$\begin{aligned}\langle \varpi_1, \theta \rangle = \langle 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \rangle &= 6\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + 7\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle, \\ &= 4 - 7 + 4 = 1, \\ \langle \varpi_2, \theta \rangle = \langle \alpha_6, \alpha_6 \rangle &= \langle \theta, \theta \rangle = 2.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}_1 = \{0, \varpi_1\}$ .

Calculons  $\langle \alpha_i, \mu + \rho \rangle$  pour  $\mu = 0$  et  $\mu = \varpi_1$  et  $i$  variant de 1 à 6. Pour  $\mu = 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1, \rho \rangle &= 5\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + 3\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 5 \times 2/3 - 3 = 1/3, \\ \langle \alpha_2, \rho \rangle &= 5\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + 3\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = -5 + 6 = 1, \\ \langle \alpha_3, \rho \rangle &= \langle \alpha_1 + \alpha_2, \rho \rangle = 1/3 + 1 = 4/3, \\ \langle \alpha_4, \rho \rangle &= \langle \alpha_3 + \alpha_1, \rho \rangle = 4/3 + 1/3 = 5/3, \\ \langle \alpha_5, \rho \rangle &= \langle \alpha_4 + \alpha_1, \rho \rangle = 5/3 + 1/3 = 2, \\ \langle \alpha_6, \rho \rangle &= \langle \alpha_5 + \alpha_2, \rho \rangle = 2 + 1 = 3.\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $\mu = \varpi_1$ , on a  $\mu + \rho = 7\alpha_1 + 4\alpha_2$ ; d'où :

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1, \varpi_1 + \rho \rangle &= 7\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + 4\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 7 \times 2/3 - 4 = 2/3, \\ \langle \alpha_2, \varpi_1 + \rho \rangle &= 7\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + 4\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = -7 + 8 = 1, \\ \langle \alpha_3, \varpi_1 + \rho \rangle &= \langle \alpha_1 + \alpha_2, \varpi_1 + \rho \rangle = 2/3 + 1 = 5/3, \\ \langle \alpha_4, \varpi_1 + \rho \rangle &= \langle \alpha_3 + \alpha_1, \varpi_1 + \rho \rangle = 5/3 + 2/3 = 7/3, \\ \langle \alpha_5, \varpi_1 + \rho \rangle &= \langle \alpha_4 + \alpha_1, \varpi_1 + \rho \rangle = 7/3 + 2/3 = 3, \\ \langle \alpha_6, \varpi_1 + \rho \rangle &= \langle \alpha_5 + \alpha_2, \varpi_1 + \rho \rangle = 3 + 1 = 4.\end{aligned}$$

L'application de la formule de Verlinde donne :

$$\begin{aligned}h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) &= \left(\frac{75}{212}\right)^{g-1} \left[ \left[ \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right]^{2(1-g)} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right]^{2(1-g)} \right], \\ h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) &= \left(\frac{212}{75}\right)^{1-g} \left[ \left[ \frac{3}{4} \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{4\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin^4\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right]^{1-g} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{3}{4} \sin^2\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{7\pi}{5}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^{1-g} \right], \\ h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) &= \left(\frac{210}{25}\right)^{1-g} \left[ \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{4\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin^4\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right]^{1-g} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sin^2\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{7\pi}{5}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^{1-g} \right].\end{aligned}$$

Pour connaître la valeur exacte de  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ , il faut évaluer les valeurs suivantes :  $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ,  $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $\sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{4\pi}{15}\right)$  et  $\sin^2\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{7\pi}{15}\right)$ .

Commençons par l'évaluation de  $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ . Pour cela, on utilise la formule de Moivre suivante :

$$\left[ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^5 = \exp(i\pi) = -1.$$

En considérant les parties imaginaires de deux membres, on obtient :

$$\begin{aligned}5 \cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - 10 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right) &= 0, \\ \text{et} \quad 5 \cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 10 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right) &= 0.\end{aligned}$$

En posant  $X = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ , on a :

$$5(1 - X)^2 - 10(1 - X)X + X^2 = 16X^2 - 20X + 5 = 0,$$

soit  $X = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ . Donc

$$\begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{5 - \sqrt{5}}{8}, \\ \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 4\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right)\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{8}\right) = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}. \end{cases} \quad (68)$$

Il vient

$$\begin{cases} \sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{1}{2^8}(5 - \sqrt{5})^2 = \frac{1}{2^6}(25 - 10\sqrt{5} + 5) = \frac{5}{2^5}(3 - \sqrt{5}), \\ \sin^4\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \frac{1}{2^8}(5 + \sqrt{5})^2 = \frac{1}{2^6}(25 + 10\sqrt{5} + 5) = \frac{5}{2^5}(3 + \sqrt{5}). \end{cases} \quad (69)$$

Calculons maintenant  $\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ . La soustraction des deux formules trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{aligned}$$

donne

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b). \quad (70)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{15}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{15}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il reste à évaluer  $A := \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ . On sait que  $A^2 = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$ . Cherchons  $A$  sous la forme suivante :  $A = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{5})$  où  $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 + 4xy\sqrt{5} &= 3 + \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 = 3 &\text{ et } 4xy\sqrt{5} = \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow y = \frac{1}{4x} &\text{ et } x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{16} = 0. \end{aligned}$$

Notons  $X = x^2$  et considérons l'équation  $(E) := X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{5}{16} = 0$ . Les solutions de  $(E)$  sont  $X = \frac{1}{4}$  et  $X = \frac{5}{4}$ .

Si  $x^2 = X = \frac{1}{4}$  alors  $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  ou  $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , donc  $A$  est égal à :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(x + y\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \\ \text{ou } A &= \frac{1}{2}(x + y\sqrt{5}) = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Or  $A = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ . Donc, la solution  $-\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$  n'est pas valide.

Si  $x^2 = X = \frac{1}{4}$ , on obtient  $(x, y) = (\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}})$  ou  $(x, y) = (-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{5}})$ , donc  $A$  est égal à

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(x + y\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \\ \text{ou } A &= \frac{1}{2}(x + y\sqrt{5}) = -\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{5}} = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Pour la même raison, la seconde solution ne convient pas. Les deux cas aboutissent donc à la même solution. D'où :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{15}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{5}), \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{4\pi}{15}\right) &= \frac{1}{2^6}(-1 + \sqrt{5})^2 = \frac{1}{2^5}(3 - \sqrt{5}). \end{aligned} \quad (71)$$

Effectuons le même raisonnement pour calculer  $\sin^2\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{7\pi}{15}\right)$ . D'après (70), on a :

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) &= \cos\left(\frac{9\pi}{15}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{15}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \\ &= -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il reste à calculer  $B := \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ . Comme  $B^2 = 1 - \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ , on recherche  $B$  sous la forme suivante :  $B = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{5})$  où  $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{3-\sqrt{5}}{8} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{4x} \quad \text{et} \quad x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{16} = 0. \end{aligned}$$

Comme précédemment, il y a deux choix possibles pour  $x^2 : \frac{1}{4}$  et  $\frac{5}{4}$ . Ce qui donne, au final, les deux choix suivants pour  $B$  :

$$B = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) \quad \text{ou} \quad B = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}).$$

Comme  $B = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ , on obtient :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{5}), \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{4\pi}{15}\right) &= \frac{1}{2^6}(1 + \sqrt{5})^2 = \frac{1}{2^5}(3 + \sqrt{5}). \end{aligned} \quad (72)$$

Nous sommes désormais en mesure de calculer  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ . D'après (68), (69), (71) et (72), on a :

$$\begin{aligned}
h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) &= \left(\frac{2^{10}}{25}\right)^{1-g} \left[ \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{4\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin^4\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right]^{1-g} \right. \\
&\quad \left. + \left[ \sin^2\left(\frac{2\pi}{15}\right) \sin^2\left(\frac{7\pi}{5}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^{1-g} \right] \\
&= \left[ \left(\frac{2^{10}}{25}\right) \left(\frac{1}{25}\right) (3 - \sqrt{5}) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{23}\right) \left(\frac{5}{25}\right) (3 + \sqrt{5}) \right]^{1-g} \\
&\quad + \left[ \left(\frac{2^{10}}{25}\right) \left(\frac{1}{25}\right) (3 + \sqrt{5}) \left(\frac{5+\sqrt{5}}{23}\right) \left(\frac{5}{25}\right) (3 - \sqrt{5}) \right]^{1-g} \\
&= \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^{1-g} + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^{1-g} \\
&= \left(\frac{10}{5-\sqrt{5}}\right)^{g-1} + \left(\frac{10}{5+\sqrt{5}}\right)^{g-1} \\
&= \left(\frac{10(5+\sqrt{5})}{20}\right)^{g-1} + \left(\frac{10(5-\sqrt{5})}{20}\right)^{g-1} \\
&= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^{g-1}.$$

4.1.1.2.2. *Calcul de  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}^2)$ .* — Dans la formule de Verlinde pour  $G = G_2$ , calculons à présent  $\mathcal{P}_2$ .

$$\begin{aligned}
\langle \varpi_1, \theta \rangle = \langle 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \rangle &= 6\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + 7\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle, \\
&= 6 \times 2/3 - 7 + 4 = 1, \\
\langle \varpi_2, \theta \rangle = \langle \alpha_6, \alpha_6 \rangle &= \langle \theta, \theta \rangle = 2.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}_2 = \{0, \varpi_1, 2\varpi_1, \varpi_2\}$ . Les calculs correspondant à  $\mu = 0$  et à  $\mu = \varpi_1$  ont été faits précédemment. En ce qui concerne  $\mu = 2\varpi_1$ , on a  $2\varpi_1 + \rho = 9\alpha_1 + 5\alpha_2$ .

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1, 2\varpi_1 + \rho \rangle &= 9\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + 5\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 9 \times 2/3 - 5 = 1, \\
\langle \alpha_2, 2\varpi_1 + \rho \rangle &= 9\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + 5\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = -9 + 5 \times 2 = 1, \\
\langle \alpha_3, 2\varpi_1 + \rho \rangle &= 2, \\
\langle \alpha_4, 2\varpi_1 + \rho \rangle &= 3, \\
\langle \alpha_5, 2\varpi_1 + \rho \rangle &= 4, \\
\langle \alpha_6, 2\varpi_1 + \rho \rangle &= 5.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne  $\mu = \varpi_2$ , on a  $\varpi_2 + \rho = 8\alpha_1 + 5\alpha_2$ .

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \varpi_2 + \rho \rangle &= 8\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + 5\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 8 \times 2/3 - 5 = 1/3, \\ \langle \alpha_2, \varpi_2 + \rho \rangle &= 8\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + 5\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = -8 + 5 \times 2 = 2, \\ \langle \alpha_3, \varpi_2 + \rho \rangle &= 7/3, \\ \langle \alpha_4, \varpi_2 + \rho \rangle &= 8/3, \\ \langle \alpha_5, \varpi_2 + \rho \rangle &= 3, \\ \langle \alpha_6, \varpi_2 + \rho \rangle &= 5. \end{aligned}$$

L'application de la formule de Verlinde donne :

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}^2) &= \left(\frac{108}{2^{12}}\right)^{g-1} \left[ \left[ \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^{2(1-g)} \right. \\ &\quad + \left[ \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]^{2(1-g)} \\ &\quad + \left[ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]^{2(1-g)} \\ &\quad \left. + \left[ \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]^{2(1-g)} \right], \\ h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}^2) &= \left(\frac{108}{2^{12}}\right)^{g-1} \left[ \left[ \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \right]^{2(1-g)} \right. \\ &\quad + \left[ \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right) \right]^{2(1-g)} \\ &\quad + \left(\frac{3}{32}\right)^{2(1-g)} \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right]^{2(1-g)} \right]. \end{aligned}$$

L'évaluation sur Maple de  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}^2)$  pour  $g = 2$  aboutit à  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}^2)$  est égale à 30.

**4.1.2. Calcul de  $h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^i)$  pour  $i = 1$  et  $3$ .** — Le groupe de Lie  $SL_2$  correspond à l'algèbre de Lie classique de type  $A_1$ . Son système de racines est de dimension 1 et ne possède qu'une racine positive, notée  $\alpha$ .

$$\longleftarrow \bullet \longrightarrow \alpha$$

Système de racines de  $SL_2$ , de type  $A_1$ .

Les constantes apparaissant dans la formule de Verlinde, pour le cas du groupe

$SL_2$  et les entiers  $i = 1$  et  $i = 3$ , sont les suivantes :

$$\begin{aligned} g^* &= 2, \\ \text{rg}(\mathfrak{sl}_2) &= 1, \\ \#T_1 &= (1 + 2)^1 \times 2 \times 1 = 6, \\ \#T_3 &= (3 + 2)^1 \times 2 \times 1 = 10, \\ \rho &= \frac{1}{2}\alpha, \\ \theta &= \alpha, \\ \mathcal{P}_i &= \{\mu = k\varpi_1 \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \langle \mu, \theta \rangle \leq i\} \end{aligned}$$

où  $\varpi_1 = \frac{1}{2}\alpha$  est le poids fondamental de  $\mathfrak{sl}_2$ .

4.1.2.1. Calcul de  $h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2})$ . —

**Lemme 4.1.4.** —

$$h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) = 2^g. \quad (73)$$

*Démonstration.* — Le produit scalaire  $\langle \varpi_1, \theta \rangle$  est le suivant :

$$\langle \varpi_1, \theta \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\alpha, \alpha \right\rangle = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{P}_1 = \{0, \omega_1\}$ . En appliquant la formule de Verlinde, il vient :

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) &= (6)^{g-1} \left[ (2 \sin(\frac{\pi}{3}))^{2-2g} + (2 \sin(\frac{2\pi}{3}))^{2-2g} \right], \\ &= 2(6)^{g-1} (\sqrt{3})^{2-2g}, \\ &= 2 \frac{6^{g-1}}{3} = 2^g \end{aligned}$$

d'où

$$h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) = 2^g. \quad \square$$

4.1.2.2. Calcul de  $h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$ . —

**Lemme 4.1.5.** —

$$h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}) = 2^g \left[ \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^{g-1} + \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^{g-1} \right]. \quad (74)$$

*Démonstration.* — D'après le calcul du produit scalaire  $\langle \varpi_1, \theta \rangle$ , l'ensemble  $\mathcal{P}_3$  est égal à  $\{0, \varpi_1, 2\varpi_1, 3\varpi_1\}$ , où  $\mathcal{P}_3$  est l'ensemble de poids dominants  $\mu = k\varpi_1$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $\langle \mu, \theta \rangle \leq 3$ .

Calculons  $\langle \alpha, \mu + \rho \rangle$  pour chaque  $\mu$  appartenant à  $\mathcal{P}_3$ .

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \rho \rangle &= \frac{1}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle = 1, \\ \langle \alpha, \varpi_1 + \rho \rangle &= \langle \alpha, \alpha \rangle = 2, \\ \langle \alpha, 2\varpi_1 + \rho \rangle &= \frac{3}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle = 3, \\ \langle \alpha, 3\varpi_1 + \rho \rangle &= 2 \langle \alpha, \alpha \rangle = 4.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}) \\ &= (10)^{g-1} (2)^{2-2g} \left[ \left[ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^{2-2g} + \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right]^{2-2g} + \left[ \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right]^{2-2g} + \left[ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right]^{2-2g} \right], \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^{g-1} \left[ 2 \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^{1-g} + 2 \left[ \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right]^{1-g} \right].\end{aligned}$$

D'après (68), l'expression de  $h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$  est la suivante :

$$\begin{aligned}h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}) &= 2 \left(\frac{5}{2}\right)^{g-1} \left( \left(\frac{8}{5-\sqrt{5}}\right)^{g-1} + \left(\frac{8}{5+\sqrt{5}}\right)^{g-1} \right), \\ &= 2 \left(\frac{5}{2}\right)^{g-1} \left[ \left(\frac{8(5+\sqrt{5})}{20}\right)^{g-1} + \left(\frac{8(5-\sqrt{5})}{20}\right)^{g-1} \right], \\ &= 2 \left(\frac{5}{2}\right)^{g-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{g-1} \left[ \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} \right], \\ &= 2^g \left[ \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} \right].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}) = 2^g \left[ \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{g-1} \right].$$

□

#### 4.1.3. Comparaison de $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ et de $h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$ . —

Nous sommes en mesure d'établir le lien entre la dimension de  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et celle de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$ .

**Lemme 4.1.6.** — *Sur une courbe projective, lisse, connexe  $C$  de genre  $g$ , nous avons l'égalité suivante*

$$2^g h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) = h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}). \quad (75)$$

*Démonstration.* — La comparaison des expressions (66) et (74) aboutit directement au résultat. □

## 4.2. Surjectivités et isomorphismes entre différents $H^0(\mathcal{M}_C(G), \mathcal{L}_G^i)$

Notons  $K_C$  le fibré canonique sur  $C$ , de degré  $(2g - 2)$  et  $\text{Pic}^{g-1}(C)$  le groupe de Picard paramétrant les classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur  $C$ , de degré  $(g - 1)$ .

Nous avons été amené à étudier des morphismes  $f : \mathcal{M}_C(G) \rightarrow \mathcal{M}_C(G_1)$  entre champs de modules, où  $G$  est un sous-groupe d'un groupe de Lie  $G_1$ . De tels morphismes induisent, par image inverse, une application linéaire entre les espaces de Verlinde :  $H^0(\mathcal{M}_C(G_1), \mathcal{L}_{G_1})$  et  $H^0(\mathcal{M}_C(G), f^*(\mathcal{L}_{G_1}))$ . La proposition suivante énonce le lien entre l'image inverse du fibré déterminant sur  $\mathcal{M}_C(G_1)$  lorsque  $G_1 = SL_n$  et le fibré générateur ample de  $\text{Pic}(H^0(\mathcal{M}_C(G)))$ .

**Proposition 4.2.1 (Proposition-Définition).** — *Soient  $G$  un groupe de Lie simple, simplement connexe et  $\rho : G \rightarrow SL_n$  une représentation de  $G$  dans  $SL_n$ . Notons identiquement l'application induite au niveau des champs de modules :*

$$\rho : \mathcal{M}_C(G) \rightarrow \mathcal{M}_C(SL_n).$$

Notons  $\mathcal{D}_{SL_n}$  le fibré déterminant, générateur de  $\text{Pic}(\mathcal{M}_C(SL_n))$  et  $\mathcal{L}_G$  le fibré en droites ample générateur de  $\text{Pic}(\mathcal{M}_C(G))$  :

$$\begin{aligned} \text{Pic}(\mathcal{M}_C(SL_n)) &= \langle \mathcal{D}_{SL_n} \rangle \cdot \mathbb{Z}, \\ \text{Pic}(\mathcal{M}_C(G)) &= \langle \mathcal{L}_G \rangle \cdot \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Alors

$$\rho^*(\mathcal{D}_{SL_n}) = \mathcal{L}_G^{\otimes d(\rho)}$$

où  $d(\rho)$  est un nombre entier naturel, appelé **indice de Dynkin**, dépendant du groupe  $G$  et de la représentation  $\rho$ .

Une table de référence des indices de Dynkin est donnée dans [LS97].

*Démonstration.* — Voir [KNR94] et [LS97]. □

Introduisons à présent la notion de thêta-caractéristique :

**Définition 4.2.2.** — Soit  $C$  une courbe projective, lisse, connexe, de genre  $g$  supérieur ou égal à 2. Une **thêta-caractéristique** est un élément  $\kappa$  de  $\text{Pic}^{g-1}(C)$  vérifiant :

$$\kappa \otimes \kappa = K_C.$$

Une thêta-caractéristique  $\kappa$  de  $\Theta(C)$  est dite **paire** (resp. **impaire**) lorsque  $h^0(C, \kappa)$  est pair (resp. lorsque  $h^0(C, \kappa)$  est impair). On note  $\Theta(C)$  l'ensemble des thêta-caractéristiques et  $\Theta^{\text{paire}}(C)$  l'ensemble des thêta-caractéristiques paires :

$$\begin{aligned} \Theta(C) &= \{\kappa \in \text{Pic}^{g-1}(C) \mid \kappa \otimes \kappa = K_C\}, \\ \Theta^{\text{paire}}(C) &= \{\kappa \in \Theta(C) \mid h^0(C, \kappa) \text{ est pair}\}. \end{aligned}$$

Une courbe  $C$  est dite **sans thêta-constante effective** lorsque  $h^0(C, \kappa) = 0$  pour tout  $\kappa$  appartenant à  $\Theta(C)^{\text{paire}}$ .

Le cardinal de  $\Theta(C)$  est égal à  $2^{2g}$ , celui de  $\Theta^{\text{paire}}(C)$  est  $2^{g-1}(2^g + 1)$ . Toute courbe de genre 2 est sans thêta-constante effective, de même qu'une courbe générale de genre supérieur ou égal à 3.

Pour toute thêta-caractéristique  $\kappa$  paire, on définit le champ de modules suivant, inclus dans  $\mathcal{M}_C(SO_7)$  :

$$\Delta_\kappa = \{[P] \in \mathcal{M}_C^+(SO_7) \mid h^0(C, P(\mathbb{C}^7) \otimes \kappa) > 0\} \subsetneq \mathcal{M}_C(SO_7).$$

(voir [Bea06]). Pour toute thêta-caractéristique  $\kappa$  paire,  $\Delta_\kappa$  est un diviseur de Cartier et détermine, à un scalaire près, une section de  $H^0(\mathcal{M}_C^+(SO_7), \mathcal{L}_{SO_7})$ . Ainsi, chaque  $\Delta_\kappa$  peut donc être vu comme un élément du système linéaire  $\mathbb{P}H^0(\mathcal{M}_C^+(SO_7), \mathcal{L}_{SO_7})$ .

Par la suite, nous considérons le morphisme :

$$\begin{aligned} \rho_0 : \mathcal{M}_C(G_2) &\rightarrow \mathcal{M}_C(SO_7) \\ [P_{G_2}] &\mapsto [P_{G_2}(SO_7)], \end{aligned}$$

ainsi que l'image inverse  $\rho_0^*(\Delta_\kappa)$  appartenant à  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ , pour  $\Delta_\kappa$  appartenant à  $\mathcal{M}_C(SO_7)$ .

On appelle  $G_2$ -**fonction thêta généralisée** un élément de l'espace de Verlinde  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ .

**4.2.1. Restriction des  $G_2$ -fonctions thêta généralisées au champs des modules  $\mathcal{M}_C(SL_3)$ .** — Dans cette partie, nous allons définir une application  $\Upsilon$  entre les espaces de section globales  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})$  et en étudier ses propriétés.

**Définition 4.2.3.** — Soit  $C$  une courbe projective, lisse, connexe, de genre supérieur ou égal à 2. Le morphisme donné par extension du groupe de structure

$$i : \mathcal{M}_C(SL_3) \rightarrow \mathcal{M}_C(G_2)$$

induit, par image inverse, une application linéaire  $\Upsilon$  entre les espaces de Verlinde suivants :

$$\Upsilon : H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$$

où  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$  désigne le sous-espace propre de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})$ , associé à la valeur propre 1, pour l'involution naturelle dont il est muni, associant à  $E$ , appartenant à  $\mathcal{M}_C(SL_3)$ , son dual  $E^*$ .

*Démonstration.* — Montrons que le morphisme  $\Upsilon$  tel qu'il a été écrit ci-dessus est bien défini.

Il faut, d'une part, vérifier que  $i^*(\mathcal{L}_{G_2}) = \mathcal{L}_{SL_3}$  et, d'autre part, contrôler que l'image de  $\Upsilon$  est bien contenue dans  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ .

Pour aboutir à  $i^*(\mathcal{L}_{G_2}) = \mathcal{L}_{SL_3}$ , étudions le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_C(G_2) & \xrightarrow{\rho_1} & \mathcal{M}_C(SL_7) \\ \uparrow i & & \uparrow \rho_2 \\ \mathcal{M}_C(SL_3) & \xrightarrow{\rho_3} & \mathcal{M}_C(SL_3) \times \mathcal{M}_C(SL_3) \end{array}$$

où

|          |           |   |           |                                      |
|----------|-----------|---|-----------|--------------------------------------|
| $\rho_1$ | associe à | $[P_{G_2}] \in \mathcal{M}_C(G_2)$                          | l'élément | $[P_{G_2}(SL_7)],$                   |
| $\rho_2$ | associe à | $[(E, F)] \in \mathcal{M}_C(SL_3) \times \mathcal{M}(SL_3)$ | l'élément | $[E \oplus F \oplus \mathcal{O}_C],$ |
| $\rho_3$ | associe à | $[E] \in \mathcal{M}_C(SL_3)$                               | l'élément | $[(E, E^*)],$                        |
| $i$      | associe à | $[E] \in \mathcal{M}_C(SL_3)$                               | l'élément | $[E(G_2)]$                           |

(pour la définition de  $i$ , voir (65)).

D'après la Proposition 2.6 de [LS97], pour  $G = G_2$ ,  $SL_n = SL_7$  et  $\rho = \rho_1 = \varpi_1$  la représentation irréductible de plus haut poids  $\varpi_1$ , l'indice de Dynkin  $d(\rho_1)$  est égal à 2. Par conséquent,

$$\rho_1^*(\mathcal{D}_{SL_7}) = \mathcal{L}_{G_2}^{\otimes 2}.$$

Pour  $\rho_2$  et  $\rho_3$ , on a :

$$\begin{aligned} \rho_2^*(\mathcal{D}_{SL_7}) &= \mathcal{L}_{SL_3} \boxtimes \mathcal{L}_{SL_3}, \\ \text{et } \rho_3^*(\rho_2^*(\mathcal{D}_{SL_7})) &= \mathcal{L}_{SL_3}^{\otimes 2}. \end{aligned}$$

On rappelle que l'élément  $\lambda \boxtimes \mu$  de  $\mathcal{M}_C(X_1 \times X_2)$  est  $\lambda \boxtimes \mu = \text{pr}_1^*(\lambda) \otimes \text{pr}_2^*(\mu)$  lorsque  $\lambda \in \text{Pic}(\mathcal{M}_C(X_1))$ ,  $\mu \in \text{Pic}(\mathcal{M}_C(X_2))$  et  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  sont les deux projections de  $X_1 \times X_2$  sur  $X_1$  et sur  $X_2$ .

Ainsi, comme  $\rho_2 \circ \rho_3 = \rho_1 \circ i$ , il vient

$$\begin{aligned} (\rho_2 \circ \rho_3)^*(\mathcal{D}_{SL_7}) &= (\rho_1 \circ i)^*(\mathcal{D}_{SL_7}), \\ \mathcal{L}_{SL_3}^{\otimes 2} &= i^*(\rho_1^*(\mathcal{D}_{SL_7})) = i^*(\mathcal{L}_{G_2}^{\otimes 2}), \\ \text{donc } \mathcal{L}_{SL_3} &= i^*(\mathcal{L}_{G_2}) \end{aligned}$$

car  $\text{Pic}(\mathcal{M}_C(SL_3))$ , étant isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , il n'existe qu'un seul élément de carré fixé : si  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(\mathcal{M}_C(SL_3))$  vérifie  $\mathcal{L}^{\otimes 2} = \mathcal{L}_{SL_3}^m$  alors  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SL_3}^k$  avec  $k = \frac{m}{2}$ .

L'application  $\Upsilon$  est donc bien définie entre les espaces  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})$ . Il s'agit maintenant de montrer que l'image de  $\Upsilon$  est contenue dans  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ .

Le morphisme  $i$  est  $\sigma$ -invariant, où  $\sigma$  est l'involution de  $\mathcal{M}_C(SL_3)$  qui à  $[E]$  de  $\mathcal{M}_C(SL_3)$  associe  $[E^*]$ . En effet, si  $[E]$  appartient à  $\mathcal{M}_C(SL_3)$  alors les deux  $G_2$ -fibrés principaux  $E(G_2)$  et  $E^*(G_2)$  sont isomorphes. Ceci repose sur le fait suivant. Il existe un automorphisme extérieur  $\alpha : SL_3 \rightarrow SL_3$ , restriction d'un automorphisme intérieur  $C_{g_0}$  de  $G_2$ , où  $C_{g_0}$  est la conjugaison par l'élément  $g_0$  de  $G_2$  (l'existence d'un tel élément  $g_0$  sera décrite par la suite). Cet automorphisme extérieur  $\alpha$  échange les deux représentations fondamentales, associées d'une part à  $\varpi_1$  sur  $\mathbb{C}^3$  et d'autre part à  $\varpi_2$  sur  $\Lambda^2 \mathbb{C}^3 = (\mathbb{C}^3)^*$ . L'automorphisme  $\alpha$  induit l'automorphisme  $\tilde{\alpha}$  entre l'espace de modules  $\mathcal{M}_C(SL_3)$ , qui fait correspondre à  $E$  son fibré dual :  $\Lambda^2 E = E^*$ . Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} SL_3 & \hookrightarrow & G_2 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow C_{g_0} \\ SL_3 & \hookrightarrow & G_2 \end{array}$$

Ce diagramme induit le diagramme suivant au niveau des espaces de modules :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_C(SL_3) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_C(G_2) \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \tilde{C}_{g_0} \\ \mathcal{M}_C(SL_3) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_C(G_2) \end{array}$$

Le morphisme  $\tilde{C}_{g_0} : \mathcal{M}_C(G_2) \rightarrow \mathcal{M}_C(G_2)$  est l'identité puisque  $C_{g_0}$  est un automorphisme intérieur de  $G_2$ . Ainsi, pour tout  $[E]$  appartenant à  $\mathcal{M}_C(SL_3)$ ,

$$E^*(G_2) = \tilde{\alpha}(E) \simeq \tilde{C}_{g_0}(E(G_2)) = E(G_2).$$

Donc,  $i(\sigma(E))$  est isomorphe à  $i(E)$  pour tout  $[E]$  appartenant à  $\mathcal{M}_C(SL_3)$  : le morphisme  $i$  est  $\sigma$ -invariant.

Il reste à montrer l'existence d'un élément  $g_0$  appartenant à  $G_2$  tel que la restriction de la conjugaison  $C_{g_0}$  à  $SL_3$  soit un automorphisme extérieur de  $SL_3$ . Pour cela, il suffit de considérer un élément  $g_0$  de  $G_2 \setminus SL_3$  qui appartienne au normalisateur  $N_{G_2}(SL_3)$  de  $SL_3$  dans  $G_2$  (où  $N_{G_2}(SL_3) = \{g \in G_2 \mid g(SL_3)g^{-1} = SL_3\}$ ) et de considérer l'automorphisme de  $G_2$  donné par la conjugaison  $C_{g_0}$  par cet élément. Vérifions qu'un tel élément existe et que la restriction de  $C_{g_0}$  à  $SL_3$  est bien un automorphisme de  $SL_3$ . Un tore maximal de  $T$  de  $SL_3$  est aussi un tore maximal de  $G_2$  puisque la dimension d'une algèbre de Cartan de  $\mathfrak{sl}_3$  et celle d'une algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_2$  sont toute deux égale à 2. Le groupe de Weyl  $W(SL_3)$ , égal au quotient  $N_{SL_3}(T)/T$  est inclus dans le groupe de Weyl  $W(G_2)$ ,

égal au quotient  $N_{G_2}(T)/T$ . Le sous-groupe  $W(SL_3)$  est d'indice 2 dans  $W(G_2)$ . Il existe donc bien un élément  $g_0$  dans  $G_2$  tel que  $[g_0] \in W(G_2) \setminus W(SL_3)$ . Dans ce cas,  $g_0$  n'appartient pas à  $SL_3$ . Par ailleurs, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_3$  correspond à la sous algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_2$  ainsi qu'aux sous-espaces associés aux racines longues. Tout élément du groupe de Weyl  $W(G_2)$ , préservant la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}_2$ , préserve  $\mathfrak{sl}_3$ . Ainsi, la conjugaison  $C_{g_0}$  préserve  $SL_3$  puisque  $SL_3$  est engendré par  $\exp(\mathfrak{sl}_3)$  et que pour tout élément  $e^X$  de  $SL_3$  où  $X \in \mathfrak{sl}_3$ , on a

$$C_{g_0}(e^X) = g_0 e^X g_0^{-1} = e^{Ad_{g_0}(X)} \in SL_3.$$

Via l'involution  $\sigma$ , le champ de modules  $\mathcal{M}_C(SL_3)$  est décomposé en deux sous-espaces : l'espace propre  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ , associé à la valeur propre 1 et l'espace propre  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_-$ . Le fait  $\Upsilon$  soit  $\sigma$ -invariant implique que ces deux espaces propres sont stables. L'image réciproque  $\sigma^*(i^*(\mathcal{L}_{G_2}))$  est isomorphe à  $\sigma^*(\mathcal{L}_{SL_3}) = \mathcal{L}_{SL_3} = i^*(\mathcal{L}_{G_2})$ . Ainsi,  $i^*(\mathcal{L}_{G_2})$  appartient à  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ . L'image de  $\Upsilon$  est donc bien entièrement contenue  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ .  $\square$

**Théorème 4.2.4.** — *L'application linéaire  $\Upsilon$  entre espaces de Verlinde définie ci-dessus :*

$$\Upsilon : H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$$

*possède les propriétés suivantes :*

- (1) *l'application  $\Upsilon$  est surjective lorsque  $C$  est sans thêta-constante effective.*
- (2) *l'application  $\Upsilon$  est un isomorphisme lorsque la courbe  $C$  est de genre 2.*

Avant d'aller plus avant, établissons un lemme concernant la dimension de l'espace  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ , utile à la preuve du théorème énoncé.

**Lemme 4.2.5.** — *Sur une courbe  $C$  de genre  $g$ , la dimension de l'espace de Verlinde  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$  est :*

$$h^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+ = \frac{3^g + 1}{2}. \quad (76)$$

*Démonstration.* — Notons  $\Theta = \{L \in \text{Pic}^{g-1}(C) \mid h^0(C, L) > 0\}$  et considérons l'application naturelle :

$$\varphi : H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})^* \xrightarrow{\sim} H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)$$

ainsi que l'application entre espaces projectifs correspondante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})^* &\xrightarrow{\sim} \mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta), \\ \mathbb{P}(\varphi) : |\mathcal{L}_{SL_3}|^* &\xrightarrow{\sim} |3\Theta|. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 3 de [BNR89], l'application suivante :

$$\varphi : H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})^* \xrightarrow{\sim} H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)$$

est un isomorphisme. De plus, l'isomorphisme  $\varphi$  est équivariant vis-à-vis des involutions dont sont munis respectivement  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})^*$  et  $H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)$  à savoir l'involution  $E \mapsto E^*$  sur  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})^*$  et l'involution  $L \mapsto K_C \otimes L^{-1}$  sur  $H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)$ . De par l'équivariance de  $\varphi$ , les composantes (+) et (-) de part et d'autre se correspondent :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_{SL_3}|_+^* &\xrightarrow{\sim} |3\Theta|_+, \\ \mathbb{P}H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+^* &\xrightarrow{\sim} \mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+ \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dim(H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+) = \dim(H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+) = \frac{3g+1}{2}.$$

□

*Démonstration du Théorème 4.2.4.* — (1) Démontrons la surjectivité de l'application  $\Upsilon$  pour une courbe  $C$  est sans thêta-constante effective. Utilisons pour cela les thêta-caractéristiques introduites en début de paragraphe. Soit  $\kappa$  une thêta-caractéristique. Définissons l'élément  $H_\kappa$  de  $\mathbb{P}H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$  de la façon suivante :

$$H_\kappa = \{E \in \mathcal{M}_C(SL_3) \mid h^0(C, E \otimes \kappa) > 0\}.$$

On note parfois  $H_\kappa^{SL_3}$  lorsque l'on veut préciser le groupe de structure de l'espace de modules dans lequel vit l'élément  $H_\kappa$ .

Notons  $\rho$  l'application entre champs de modules suivante<sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} \rho: \mathcal{M}_C(SL_3) &\rightarrow \mathcal{M}_C^+(SL_7) \\ [E] &\mapsto [E(SL_7)] \end{aligned}$$

Le Lemme 3.3.14 affirme que le fibré vectoriel  $V$  associé à un  $SL_3$ -fibré principal  $E$  est

$$V = E \oplus E^* \oplus \mathcal{O}_C.$$

Pour une thêta-caractéristique  $\kappa$ , le pull-back  $\rho^*(\Delta_\kappa)$  est donc

$$\rho^*(\Delta_\kappa) = \{[E] \in \mathcal{M}_C(SL_3) \mid h^0(C, E \oplus E^* \oplus \mathcal{O}_C \otimes \kappa) > 0\}.$$

<sup>(1)</sup>Selon les notations précédentes,  $\rho = \rho_1 \circ i$ .

Par définition, lorsque la courbe  $C$  est sans thêta-constante effective,  $h^0(C, \kappa)$  est nul pour toute thêta-caractéristique paire. Ainsi, lorsque  $C$  est sans thêta-constante effective et que  $\kappa$  est une thêta-caractéristique paire :

$$\begin{aligned} \rho^*(\Delta_\kappa) &= \{[E] \in \mathcal{M}_C(SL_3) \mid h^0(C, E \oplus E^* \oplus \mathcal{O}_C) \otimes \kappa > 0\}, \\ &= \{[E] \in \mathcal{M}_C(SL_3) \mid h^0(C, E \otimes \kappa) + h^0(C, E^* \otimes \kappa) + h^0(C, \kappa) > 0\}, \\ &= \{[E] \in \mathcal{M}_C(SL_3) \mid h^0(C, E \otimes \kappa) + h^0(C, E^* \otimes \kappa) > 0\}, \\ &= \{[E] \in \mathcal{M}_C(SL_3) \mid 2h^0(C, E \otimes \kappa) > 0\} \quad \text{par la dualité de Serre,} \\ &= 2H_\kappa. \end{aligned}$$

Par là,  $\rho^*(\Delta_\kappa)$  et  $H_\kappa$  sont ensemblistement égaux. Par ailleurs, comme  $\mathcal{O}(H_\kappa)$  et  $\mathcal{O}(\rho^*(\Delta_\kappa))$  sont tous les deux égaux au générateur  $\mathcal{L}_{SL_3}$  du groupe de Picard  $\text{Pic}(\mathcal{M}_C(SL_3))$ , il y a aussi égalité entre les diviseurs ; on utilisera

$$H_\kappa = \rho^*(\Delta_\kappa).$$

Montrons que l'ensemble des  $H_\kappa$  pour  $\kappa \in \Theta^{\text{paire}}(C)$  engendre l'espace de Verlinde  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ . Le Théorème de [BNR89] énonce l'isomorphe suivant, pour une courbe  $C$  sans thêta-constante effective :

$$H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})^* \xrightarrow{\sim} H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)$$

soit  $|3\Theta|^*$  isomorphe à  $\mathbb{P}H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})$ . Cet isomorphisme respectant les parties (+) et (-), il vient

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+^* &\xrightarrow{\sim} H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+, \\ \text{et } \mathbb{P}H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+^*. \end{aligned}$$

L'image de  $H_\kappa$  par cet isomorphisme est  $\varphi_{3\Theta}(\kappa)$  où  $\varphi_{3\Theta}$  est l'application naturelle :

$$\varphi : \text{Pic}^{g-1}(C) \dashrightarrow |3\Theta|_+^* = \mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+^*.$$

Ainsi, l'ensemble des  $H_\kappa$  pour  $\kappa \in \Theta^{\text{paire}}(C)$  engendre  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$  si et seulement si l'ensemble des  $\varphi_{3\Theta}(\kappa)$  pour  $\kappa \in \Theta^{\text{paire}}(C)$  engendre  $|3\Theta|_+^*$ .

Notons  $\varphi_{4\Theta}$  l'application naturelle :

$$\varphi_{4\Theta} : \text{Pic}^{g-1}(C) \dashrightarrow |4\Theta|_+^*$$

ainsi que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & |4\Theta|_+^* \\ & \nearrow \varphi_{4\Theta} & \vdots \\ \text{Pic}^{g-1}(C) & \xrightarrow{\varphi_{3\Theta}} & |3\Theta|_+^* \end{array}$$

L'inclusion de  $H^0(C, 3\Theta)_+$  dans  $H^0(C, 4\Theta)_+$  :

$$\begin{aligned} H^0(C, 3\Theta)_+ &\hookrightarrow H^0(C, 4\Theta)_+ \\ D &\mapsto D + \Theta \end{aligned}$$

implique une surjection entre leurs espaces duaux :

$$H^0(C, 4\Theta)_+^* \rightarrow H^0(C, 3\Theta)_+^*,$$

ainsi qu'une surjection entre les espaces projectifs des espaces duaux :

$$\mathbb{P}H^0(C, 4\Theta)_+^* \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, 3\Theta)_+^*.$$

Par la surjection  $\mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 4\Theta)_+^* \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, 3\Theta)_+^*$ , tout élément de l'espace  $\mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+^*$  est l'image d'un élément de l'espace  $\mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 4\Theta)_+^*$ .

Par ailleurs, d'après [KPS09], lorsque  $C$  est sans thêta-constante effective, l'ensemble des  $\varphi_{4\Theta}(\kappa)$  pour  $\kappa$  appartenant à  $\Theta^{\text{paire}}(C)$  est une base de  $|4\Theta|_+^*$  puisque le nombre de thêta-caractéristiques paires,  $d_+ = 2^{g-1}(2^g + 1)$  (voir [Bea91]), est égal à la dimension linéaire du système  $|4\Theta|_+^*$ . Ainsi, les  $d_+$  thêta-caractéristiques paires ne sont pas contenus dans un hyperplan de  $|4\Theta|_+^*$ ; l'enveloppe linéaire des thêta-caractéristiques paires est donc bien  $|4\Theta|_+^*$ . Tout élément de  $\mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+^*$  appartient à l'ensemble engendré par les  $H_\kappa$  pour  $\kappa$  appartenant à  $\Theta^{\text{paire}}(C)$ .

Comme chaque élément  $H_\kappa$  est égal à  $\rho^*(\Delta_\kappa)$  pour une thêta-caractéristique paire, l'ensemble  $\{\Upsilon(\rho_1^*(\Delta_\kappa))\}_{\kappa \in \Theta^{\text{paire}}(C)}$  engendre  $\mathbb{P}H^0(\text{Pic}^{g-1}(C), 3\Theta)_+^*$ . L'application  $\Upsilon$  de  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  dans  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$  est donc bien surjective lorsque la courbe de base  $C$  est sans thêta-constante effective.

(2) Pour établir la seconde assertion, il suffit d'établir l'égalité entre les dimensions de  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$ . En effet, lorsque le genre de  $C$  est égal à 2, la courbe  $C$  est sans thêta-constante effective donc, d'après 1,  $\Upsilon$  est surjective. D'après (67),  $h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  est égal à 5 quand le genre de la courbe  $C$  est 2. Par ailleurs, d'après l'équation (76) appliquée au cas  $g = 2$ , il vient :

$$h^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+ = \frac{3^2 + 1}{2} = 5.$$

Les dimensions de  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_3), \mathcal{L}_{SL_3})_+$  sont égales donc  $\Upsilon$  est un isomorphisme lorsque le genre  $g$  de la courbe  $C$  est égal à 2.  $\square$

**4.2.2. Restriction des  $G_2$ -fonctions thêta généralisées au champs des modules  $\mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2)$ .** — Définissons une application  $\Psi$  entre les espaces  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et les espaces  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$  et étudions-en quelques propriétés.

**Définition 4.2.6.** — Soit  $C$  une courbe projective, lisse, connexe, de genre  $g$  au moins 2. Le morphisme donné par extension du groupe de structure

$$j : \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2) \rightarrow \mathcal{M}_C(G_2)$$

induit, par image inverse, une application linéaire  $\Psi$  entre les espaces de Verlinde suivants :

$$\Psi : H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) \rightarrow [H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$$

où  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$  désigne l'ensemble des sections invariantes sous le groupe  $JC[2]$  constitué des éléments de la Jacobienne  $\text{Jac}(C)$  dits de 2-torsion<sup>(2)</sup>.

*Démonstration.* — Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_C(G_2) & \xrightarrow{\rho_1} & \mathcal{M}_C(SL_7) \\ \uparrow j & & \uparrow \rho_4 \\ \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2) & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & \mathcal{M}_C(SL_4) \times \mathcal{M}_C(SL_3) \end{array}$$

où

|                    |   |           |                                  |
|--------------------|---|-----------|----------------------------------|
| $\rho_1$ associe à | $[P_{G_2}] \in \mathcal{M}_C(G_2)$                            | l'élément | $[P_{G_2}(SL_7)],$               |
| $\rho_4$ associe à | $[(A, B)] \in \mathcal{M}_C(SL_4) \times \mathcal{M}_C(SL_3)$ | l'élément | $[A \oplus B],$                  |
| $f_1$ associe à    | $[(M, N)] \in \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2)$ | l'élément | $[M \otimes N],$                 |
| $f_2$ associe à    | $[(M, N)] \in \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2)$ | l'élément | $[\text{End}_0(N)],$             |
| $j$ associe à      | $[(E, F)] \in \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2)$ | l'élément | $[(\overline{E \times F})(G_2)]$ |

(pour la définition de  $j$  : voir Lemme 3.3.18 pour la définition de  $\overline{E \times F}$  et l'équation (65) pour la définition de  $j$ ).

Notons  $\mathcal{D}_{SL_7}$  le fibré déterminant de  $\mathcal{M}_C(SL_7)$ .

En notant  $\text{pr}_i$  ( $i = 1, 2$ ) les projections de  $\mathcal{L}_{SL_2} \times \mathcal{L}_{SL_2}$  sur chacun des deux facteurs, on a

$$f_1^*(\mathcal{L}_{SL_4}) = \text{pr}_1^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 2} \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 2} = \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2} \boxtimes \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2}$$

et, [Bea91] et d'après le tableau B de [Sor00],

$$f_2^*(\mathcal{L}_{SL_3}) = \text{pr}_1^*(\mathcal{O}_C) \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 4},$$

<sup>(2)</sup>La Jacobienne  $\text{Jac}(C)$  est, par définition, le groupe de Picard  $\text{Pic}^0(C)$ . Un élément  $\alpha$  appartenant à  $\text{Jac}(C)$  est dit de 2-torsion lorsque  $\alpha \otimes \alpha = \mathcal{O}_C$

car  $f_2$  est relié à la représentation adjointe de  $SL_2$  ( $d_{\text{Ad}} = 2r + 2 = 4$  pour  $r = 1$ ).  
D'où

$$\begin{aligned}
\rho_4^*(\mathcal{D}) &= \mathcal{L}_{SL_4} \boxtimes \mathcal{L}_{SL_3}, \\
\text{donc } j^*(\mathcal{L}_{G_2}^{\otimes 2}) &= (f_1, f_2)^*(\mathcal{L}_{SL_4} \boxtimes \mathcal{L}_{SL_3}), \\
&= f_1(\mathcal{L}_{SL_4}) \otimes f_2^*(\mathcal{L}_{SL_3}), \\
&= [\text{pr}_1^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 2} \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 2}] \otimes [\text{pr}_1(\mathcal{O}_C) \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 4}], \\
&= \text{pr}_1^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 2} \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 2} \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 4}, \\
j^*(\mathcal{L}_{G_2}^{\otimes 2}) &= \text{pr}_1^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 2} \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 6}, \\
\text{soit } j^*(\mathcal{L}_{G_2}) &= \text{pr}_1^*(\mathcal{L}_{SL_2}) \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{L}_{SL_2})^{\otimes 3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$j^*(\mathcal{L}_{G_2}) = \mathcal{L}_{SL_2} \boxtimes \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}$$

Le morphisme  $\Psi$  est donc bien défini de l'espace  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  vers l'espace  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$ .

Par ailleurs, le morphisme  $j : \mathcal{M}_{SL_2} \times \mathcal{M}_{SL_2} \rightarrow \mathcal{M}_{G_2}$  est invariant par  $JC[2]$ . En effet, si  $([E], [F])$  appartient à  $\mathcal{M}_{SL_2} \times \mathcal{M}_{SL_2}$  et si  $\alpha$  appartient à  $JC[2]$  alors alors le  $SL_7$ -fibré principal correspondant à  $(E \otimes \alpha, F \otimes \alpha)$  par  $j$  est

$$\begin{aligned}
&(E \otimes \alpha) \otimes (F \otimes \alpha) \oplus \text{End}_0(F \otimes \alpha) \\
&= E \otimes F \otimes \alpha \otimes \alpha \oplus \text{End}_0(F \otimes \alpha), \\
&= E \otimes F \oplus \text{End}_0(F).
\end{aligned}$$

Or,  $E \otimes F \oplus \text{End}_0(F)$  est le  $SL_7$ -fibré principal correspondant à  $(E, F)$ . L'image de  $\Psi$  est contenue dans  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$ .  $\square$

L'égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée de l'application  $\Psi$  va nous permettre d'examiner plus en détail cette application.

**Lemme 4.2.7.** — *Les dimensions de  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$  et  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  sont égales.*

*Démonstration.* — L'égalité entre ces dimensions se montre de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\dim([H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0) \\
&= \frac{1}{2^{2g}} [h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \times h^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})] \quad \text{car } |JC[2]| = 2^{2g}, \\
&= \frac{1}{2^{2g}} \times 2^g \times 2^g h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) \quad \text{d'après (73) et (75),} \\
&= h^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}).
\end{aligned}$$

Il y a bien égalité des dimensions de  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$  et de  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ .  $\square$

Les deux résultats suivants se fondent sur la conjecture de la normalité cubique. Son énoncé est le suivant :

**Conjecture 4.2.8.** — Pour une courbe  $C$  générale, l'application

$$\eta : \text{Sym}^3 H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$$

est une surjection.

Lorsque l'application  $\eta$  est surjective, on dit que la courbe  $C$  vérifie la **normalité cubique**.

**Exemple 4.2.9.** — La normalité cubique est vérifiée pour une courbe  $C$  est de genre 2, de genre 3 non-hyperelliptique ou de genre 4 sans thêta-constante effective.

*Démonstration.* — En genre 2,  $\mathcal{M}_C(SL_2)$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^3$  et  $\mathcal{L}_{SL_2}$  à  $\mathcal{O}(1)$  (voir [NR75]). Pour une courbe  $C$  non-hyperelliptique de genre 3, il s'agit de l'étude de la quartique de Coble (voir [NR87]). La normalité cubique est vraie dans ces deux cas. Pour une courbe générale  $C$  de genre 4 et sans thêta-constante effective, la normalité cubique est l'objet du Théorème 4.1 de [OP99]. □

**Remarque 4.2.10.** — L'étude des équivalents en genre élevé des dimensions de  $\text{Sym}^3 H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2})$  et de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$  corrobore la conjecture de la normalité cubique. En effet, la dimension de  $\text{Sym}^3 H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2})$  est égale à  $\binom{2g+2}{3}$ , équivalant à  $\frac{8g}{6}$  quand  $g$  est grand.

La dimension de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$ , quant à elle, est inférieure à  $\frac{8g-1}{6}$ .

La conjecture de normalité cubique a pour conséquences les deux faits suivants :

**Proposition 4.2.11.** — Pour une courbe  $C$  de genre au moins 2, sans thêta-constante effective et vérifiant la normalité cubique,

(1) l'application  $\Psi$  est un isomorphisme,

(2) l'espace de Verlinde  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  est linéairement engendré par les diviseurs  $\rho_0^*(\Delta_\kappa)$  pour  $\kappa$  variant parmi les thêta-caractéristiques paires, où  $\rho_0$  est le morphisme d'extension

$$\rho_0 : \mathcal{M}_C(G_2) \rightarrow \mathcal{M}_C(SO_7).$$

*Démonstration.* — Pour montrer le point (1), il suffit de démontrer la surjectivité de l'application  $\Psi$ . En effet, par le Lemme 4.2.7, les dimensions des deux espaces vectoriels  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$  et  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  sont égales.

Notons  $V$  l'espace  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2})$ .

Dans l'article [Bea91], on associe à chaque thêta-caractéristique paire un élément de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2})$  et un élément de  $V \otimes V$  : la section  $d_\kappa$  de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2})$  d'une part et l'élément  $\xi_\kappa$  de  $V \otimes V$  d'autre part. Les sections  $d_\kappa$  sont définies à partir de sous-variétés réduites  $D_\kappa$  de l'espace de modules des fibrés vectoriels semistables de rang 2, de déterminant trivial. Les sous-variétés  $D_\kappa$  sont formées des classes de fibrés  $S$  pour lesquels  $H^0(C, \text{End}_0(S) \otimes \kappa)$  n'est pas nul. Il s'avère que l'ensemble des sections  $d_\kappa$  pour  $\kappa$  variant dans  $\Theta^{\text{paire}}(C)$  est un base de  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2})$  (voir [Bea91], Théorème 1.2).

Considérons les applications  $\rho_0^*$  et  $\beta$  suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_0^* : & H^0(\mathcal{M}_C^+(SO_7), \mathcal{L}_{SO_7}) \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2}) \\ \text{et } \beta : & [V \otimes V \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2})]_0 \longrightarrow [V \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0. \end{aligned}$$

Pour une thêta-caractéristique paire, l'image  $\Psi(\rho_0^*(\Delta_\kappa))$  est égale à  $\beta(\xi_\kappa \otimes d_\kappa)$ . En effet, le morphisme  $\Psi$  est induit par le morphisme :

$$\begin{aligned} j : \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2) &\longrightarrow \mathcal{M}_C(G_2) \\ (E, F) &\longmapsto \text{End}_0(E) \oplus \text{Hom}(E, F). \end{aligned}$$

Le pull-back  $\Psi(\rho_0^*(\Delta_\kappa))$  est donc la somme de deux diviseurs :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{(E, F) \in \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2) \mid h^0(C, \text{End}_0(E) \otimes \kappa) > 0\}, \\ \Delta_2 &= \{(E, F) \in \mathcal{M}_C(SL_2) \times \mathcal{M}_C(SL_2) \mid h^0(C, \text{Hom}(E, F) \otimes \kappa) > 0\}. \end{aligned}$$

Or,  $\mathcal{O}(\Delta_1) = \mathcal{O}_C \boxtimes \mathcal{L}^{\otimes 2}$  et  $\mathcal{O}(\Delta_2) = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}$  (voir [Bea91]) et plus précisément

$$\Delta_1 = \text{Zéros}(d_\kappa) \text{ et } \Delta_2 = \text{Zéros}(\xi_\kappa).$$

De plus, si la courbe  $C$  est de genre au moins 2 sans thêta-constante effective, alors il existe une bijection entre  $\text{Sym}^2 V$  et  $H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2})$ . Dans [Bea88], il est montré que le morphisme de multiplication

$$\begin{aligned} \varphi_0^* : \text{Sym}^2 V &\longrightarrow H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2}) \\ \xi_\kappa &\longmapsto d_\kappa \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On identifie  $\text{Sym}^2 V$  à l'espace invariant de  $V \otimes V$  sous l'involution  $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ . L'espace vectoriel  $[V \otimes V \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2})]_0$  est alors engendré par l'ensemble des  $\xi_\kappa \otimes d_\kappa$  lorsque  $\kappa$  varie parmi les thêta-caractéristiques paires (lemme admis). Ainsi, il suffit de montrer la surjectivité de  $\beta$  pour obtenir celle de l'application  $\Psi$ .

Soit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3}) \\
 \uparrow & & \uparrow \eta \\
 V \otimes V \otimes V & \longrightarrow & \text{Sym}^3 V.
 \end{array}$$

Sous l'hypothèse de normalité cubique,  $\eta$  est surjective, impliquant la surjectivité  $V \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2}) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})$ . Par restriction aux sections invariantes sous l'action de  $JC[2]$ ,  $\beta$  se trouve être aussi surjective.

L'application  $\Psi$  est donc un isomorphisme.

Le point (2) est une conséquence du point (1). Chaque  $\kappa$  paire est telle que  $\rho_0^*(\Delta_\kappa)$  a pour image, par  $\Psi$ ,  $\xi_\kappa \otimes d_\kappa$ . Comme l'ensemble des  $\{\xi_\kappa \otimes d_\kappa\}_{\kappa \text{ paire}}$  engendre l'espace  $[V \otimes V \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 2})]$ , l'ensemble des  $\{\rho_0^*(\Delta_\kappa)\}_{\kappa \text{ paire}}$  engendre  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$ .  $\square$

**Théorème 4.2.12.** — *L'application linéaire  $\Psi$  entre les espaces de Verlinde  $H^0(\mathcal{M}_C(G_2), \mathcal{L}_{G_2})$  et  $[H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}) \otimes H^0(\mathcal{M}_C(SL_2), \mathcal{L}_{SL_2}^{\otimes 3})]_0$  est un isomorphisme lorsque la courbe  $C$  est de genre 2, lorsque  $C$  est une courbe de genre 3 non-hyperelliptique sans thêta-constante effective ou que  $C$  est de genre 4 sans thêta-constante effective.*

*Démonstration.* — Pour chacun des cas cités dans le Théorème 4.2.12, la normalité cubique est vérifiée (voir Exemple 4.2.9). Ce théorème découle donc du point (1) de la Proposition 4.2.11.  $\square$

L'étude concernant l'espace de modules  $\mathcal{M}_C(SO_4)^-$  n'a pas été réalisée ici mais elle serait intéressante.



## ANNEXE A

### TABLES DE MULTIPLICATION DANS $\mathcal{V}$ DANS DIFFÉRENTES BASES

Au chapitre 1, nous avons fait intervenir différentes bases de  $\mathcal{V}$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{O}$  constitué des octaves de Cayley imaginaires pures. Nous rassemblons ici les différentes tables de multiplication associée aux bases  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$  et  $\mathfrak{B}_3$ .

Nous rappelons que la base  $\mathfrak{B}_0$  est la base canonique de  $\mathcal{V}$  avec les règles de multiplication indiquées sur le diagramme de Fano FIG. 1. La base  $\mathfrak{B}_1$  est obtenue à partir de la base  $\mathfrak{B}_0$  via le changement de base donné par la matrice

$$P_{0,1} := \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -i & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array} \right).$$

Les bases  $\mathfrak{B}_2$  et  $\mathfrak{B}_3$  sont constituées des même vecteurs que la base  $\mathfrak{B}_1$ , classés dans un ordre différemment.

(1) Dans la base  $\mathfrak{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ , la table de multiplication, décrite sur le diagramme de Fano FIG. 1) est la suivante :

| $\nearrow$ | $e_1$  | $e_2$  | $e_3$  | $e_4$  | $e_5$  | $e_6$  | $e_7$  |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $e_1$      | -1     | $e_3$  | $-e_2$ | $e_7$  | $e_6$  | $-e_5$ | $-e_4$ |
| $e_2$      | $-e_3$ | -1     | $e_1$  | $e_6$  | $-e_7$ | $-e_4$ | $-e_5$ |
| $e_3$      | $e_2$  | $-e_1$ | -1     | $e_5$  | $-e_4$ | $e_7$  | $-e_6$ |
| $e_4$      | $-e_7$ | $-e_6$ | $-e_5$ | -1     | $e_3$  | $e_2$  | $e_1$  |
| $e_5$      | $-e_6$ | $e_7$  | $e_4$  | $-e_3$ | -1     | $e_1$  | $-e_2$ |
| $e_6$      | $e_5$  | $e_4$  | $-e_7$ | $-e_2$ | $-e_1$ | -1     | $e_3$  |
| $e_7$      | $e_4$  | $-e_5$ | $e_6$  | $-e_1$ | $e_2$  | $-e_3$ | -1     |

(77)

(2) Dans la base  $\mathfrak{B}_1 = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ , la table de multiplication est la suivante :

| $\nearrow$ | $y_1$          | $y_2$          | $y_3$          | $y_4$          | $y_5$          | $y_6$          | $y_7$   |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| $y_1$      | 0              | 0              | 0              | $-1 - iy_7$    | $-\sqrt{2}y_3$ | $\sqrt{2}y_2$  | $iy_1$  |
| $y_2$      | 0              | 0              | $-\sqrt{2}y_1$ | $\sqrt{2}y_6$  | $-1 + iy_7$    | 0              | $-iy_2$ |
| $y_3$      | 0              | $\sqrt{2}y_1$  | 0              | $-\sqrt{2}y_5$ | 0              | $-1 + iy_7$    | $-iy_3$ |
| $y_4$      | $-1 + iy_7$    | $-\sqrt{2}y_6$ | $\sqrt{2}y_5$  | 0              | 0              | 0              | $-iy_4$ |
| $y_5$      | $\sqrt{2}y_3$  | $-1 - iy_7$    | 0              | 0              | 0              | $-\sqrt{2}y_4$ | $iy_5$  |
| $y_6$      | $-\sqrt{2}y_2$ | 0              | $-1 - iy_7$    | 0              | $\sqrt{2}y_4$  | 0              | $iy_6$  |
| $y_7$      | $-iy_1$        | $iy_2$         | $iy_3$         | $iy_4$         | $-iy_5$        | $-iy_6$        | -1      |

(78)

(3) Dans la base  $\mathfrak{B}_2 = (y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_1, y_7)$ , la table de multiplication est la suivante :

| $\nearrow$ | $y_2$          | $y_3$          | $y_4$          | $y_5$          | $y_6$          | $y_1$          | $y_7$   |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| $y_2$      | 0              | $-\sqrt{2}y_1$ | $\sqrt{2}y_6$  | $-1 + iy_7$    | 0              | 0              | $-iy_2$ |
| $y_3$      | $\sqrt{2}y_1$  | 0              | $-\sqrt{2}y_5$ | 0              | $-1 + iy_7$    | 0              | $-iy_3$ |
| $y_4$      | $-\sqrt{2}y_6$ | $\sqrt{2}y_5$  | 0              | 0              | 0              | $-1 + iy_7$    | $-iy_4$ |
| $y_5$      | $-1 - iy_7$    | 0              | 0              | 0              | $-\sqrt{2}y_4$ | $\sqrt{2}y_3$  | $iy_5$  |
| $y_6$      | 0              | $-1 - iy_7$    | 0              | $\sqrt{2}y_4$  | 0              | $-\sqrt{2}y_2$ | $iy_6$  |
| $y_1$      | 0              | 0              | $-1 - iy_7$    | $-\sqrt{2}y_3$ | $\sqrt{2}y_2$  | 0              | $iy_1$  |
| $y_7$      | $iy_2$         | $iy_3$         | $iy_4$         | $-iy_5$        | $-iy_6$        | $-iy_1$        | -1      |

(79)

(4) Dans la base  $\mathfrak{B}_3 = (y_1, y_2, y_4, y_5, y_3, y_6, y_7)$ , la table de multiplication est la suivante :

| $\nearrow$ | $y_1$          | $y_2$          | $y_4$          | $y_5$          | $y_3$          | $y_6$          | $y_7$   |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| $y_1$      | 0              | 0              | $-1 - iy_7$    | $-\sqrt{2}y_3$ | 0              | $\sqrt{2}y_2$  | $iy_1$  |
| $y_2$      | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_6$  | $-1 + iy_7$    | $-\sqrt{2}y_1$ | 0              | $-iy_2$ |
| $y_4$      | $-1 + iy_7$    | $-\sqrt{2}y_6$ | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_5$  | 0              | $-iy_4$ |
| $y_5$      | $\sqrt{2}y_3$  | $-1 - iy_7$    | 0              | 0              | 0              | $-\sqrt{2}y_4$ | $iy_5$  |
| $y_3$      | 0              | $\sqrt{2}y_1$  | $-\sqrt{2}y_5$ | 0              | 0              | $-1 + iy_7$    | $-iy_3$ |
| $y_6$      | $-\sqrt{2}y_2$ | 0              | 0              | $\sqrt{2}y_4$  | $-1 - iy_7$    | 0              | $iy_6$  |
| $y_7$      | $-iy_1$        | $iy_2$         | $iy_4$         | $-iy_5$        | $iy_3$         | $-iy_6$        | -1      |

(80)

La forme quadratique  $Q$  sur  $\mathcal{V}$  est associée à la forme bilinéaire suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{V}, \quad B(x, y) = \langle x, y \rangle = -\operatorname{Re}(xy).$$

Ainsi, pour obtenir l'expression de la matrice de la forme quadratique dans chacune des bases précédentes, il suffit de considérer l'opposé de la partie réelle des éléments obtenus dans les tableaux ci-dessus.

(1) Dans la base  $\mathfrak{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (I_7). \quad (81)$$

(2) Dans la base  $\mathfrak{B}_1 = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$  :

$$\tilde{Q} = \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & I_2 & 0 \\ \hline I_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (82)$$

(3) Dans la base  $\mathfrak{B}_2 = (y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_1, y_7)$  :

$$\tilde{Q}_2 = \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & I_2 & 0 \\ \hline I_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (83)$$

(4) Dans la base  $\mathfrak{B}_3 = (y_1, y_2, y_4, y_5, y_3, y_6, y_7)$  :

$$\tilde{Q}_3 = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (84)$$

## ANNEXE B

### INCLUSION DE L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{g}_2$ DANS L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{so}_7$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  est la somme directe de trois sous-espaces vectoriels stables sous l'action de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_3$ . Il s'agit de la décomposition de  $\mathfrak{g}_2$  en composantes irréductibles sous l'action de  $\mathfrak{sl}_3$ . Dans le chapitre 22 de [FH91], cette décomposition est explicite :

$$\mathfrak{g}_2 = W \oplus W^* \oplus \text{End}_0(W)$$

avec

$$\begin{aligned} W &= \langle X_4, X_{-1}, X_{-3} \rangle, \\ W^* &= \langle X_{-4}, X_1, X_3 \rangle, \\ \text{End}_0(W) &= \langle A, B, X_2, X_5, X_6, X_{-2}, X_{-5}, X_{-6} \rangle \end{aligned}$$

et où les vecteurs  $A, B, X_{\pm 1}, \dots, X_{\pm 6}$  sont les vecteurs introduits en (9). L'objet de cette annexe est de montrer chacune de ces composantes est incluse dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_7$  contenant  $\mathfrak{g}_2$ .

On peut remarquer que  $\text{End}_0(W)$  regroupe les vecteurs de la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_2$ , ainsi que les vecteurs associés aux racines longues. Le sous-ensemble  $W$  est, quand à lui, engendré par des vecteurs associés à trois racines courtes, formant un triangle équilatéral sur le diagramme du système de racines de  $G_2$ . Il en va de même pour le sous-espace  $W^*$ , avec les trois autres racines courtes. D'après le Lemme 1.3.1, l'algèbre  $\mathfrak{so}_7$  est isomorphe à  $\Lambda^2 \mathcal{V}$  pour  $\mathcal{V}$  l'espace vectoriel de dimension 7 constitué par les octaves de Cayley imaginaires pures. Notons

$$\mathcal{W}_0 = \langle y_1, y_5, y_6 \rangle$$

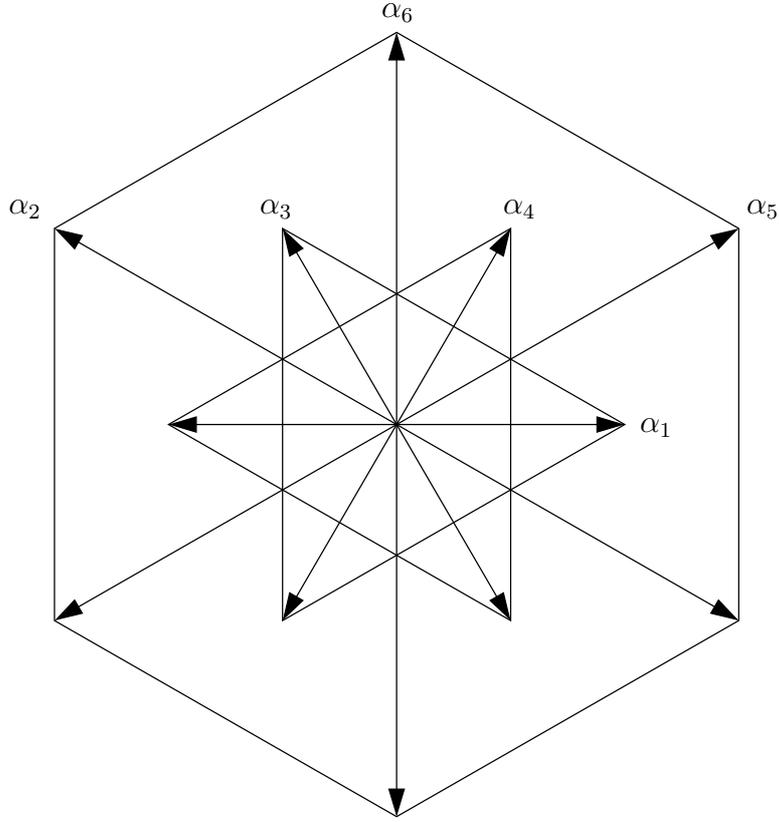


FIG. 1. Décomposition de  $\mathfrak{g}_2$  en composantes irréductibles sous l'action de  $\mathfrak{sl}_3$

le sous-espace vectoriel isotrope de  $\mathcal{V}$  engendré par les vecteurs  $y_1, y_5$  et  $y_6$  de la base  $\mathfrak{B}_1$  de  $\mathcal{V}$ . L'espace dual de  $\mathcal{W}_0$  est  $\mathcal{W}_0^* = \langle y_2, y_3, y_4 \rangle$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \mathbb{C}y_7, \\ \text{et } \mathfrak{so}_7 &\simeq \Lambda^2 \mathcal{V} \simeq \Lambda^2 \mathcal{W}_0 \oplus \Lambda^2 \mathcal{W}_0^* \oplus \text{Hom}(\mathcal{W}_0, \mathbb{C}y_7) \oplus \text{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathbb{C}y_7) \\ &\quad \oplus \text{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0), \\ \text{donc } \mathfrak{so}_7 &\simeq \Lambda^2 \mathcal{W}_0 \oplus \Lambda^2 \mathcal{W}_0^* \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \text{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0). \end{aligned}$$

Notons

$$\Phi : \mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7$$

l'inclusion de  $\mathfrak{g}_2$  dans  $\mathfrak{so}_7$ . Regardons l'image par  $\Phi$  de  $A, B, X_{\pm 1}, \dots, X_{\pm 5}$  et  $X_{\pm 6}$ . On rappelle que les correspondances utilisées dans la suite sont les suivantes :

– isomorphisme entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^*$ , provenant de la forme quadratique non dégénérée sur  $\mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{V}^* \\ y_5 &\mapsto y_2, & \text{et} & & y_2 &\mapsto y_5, & \text{et} & & y_7 &\mapsto y_7, \\ y_6 &\mapsto y_3, & & & y_3 &\mapsto y_6, & & & & \\ y_1 &\mapsto y_4, & & & y_4 &\mapsto y_1. & & & & \end{aligned}$$

– isomorphisme entre  $\Lambda^2\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}^*$  et  $\mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda^2\mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}^* &\rightarrow \mathcal{V} \\ x \wedge y &\mapsto -\operatorname{Re}[(xy)\cdot] &\mapsto xy. \end{aligned}$$

Étudions l'image de  $W$  par l'application  $\Phi$ , en commençant par l'étude de  $X_4$ . D'après (9), l'expression de la matrice  $X_4$  (exprimée dans la base  $\mathfrak{B}_1 = (y_1, \dots, y_7)$ ) est :

$$X_4 = E_{2,6} - E_{3,5} - \sqrt{2}E_{1,7} + i\sqrt{2}E_{7,4}.$$

La matrice  $X_4$  représente l'automorphisme envoyant le vecteur  $y_4$  sur  $i\sqrt{2}y_7$ ,  $y_5$  sur  $-y_3$ ,  $y_6$  sur  $y_2$ ,  $y_7$  sur  $-\sqrt{2}y_1$  et tous les autres vecteurs de base  $\mathfrak{B}_1$  sur 0. Ainsi,  $X_4$  correspond à la somme de deux éléments dans  $\Lambda^2\mathcal{V}$  : un élément de  $\mathcal{W}_0$  et un élément de  $\operatorname{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0)$ . Le fait d'associer à  $y_4$  le vecteur  $i\sqrt{2}y_7$  correspond à l'élément  $i\sqrt{2}y_4^* = i\sqrt{2}y_1$  de  $\mathcal{W}_0 \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathbb{C}y_7)$ . De même, le fait d'associer à  $y_5$  et  $y_6$  les vecteurs  $-y_3$  et  $y_2$  correspond à l'élément  $-y_5^* \otimes y_3 + y_6^* \otimes y_2 = -y_2 \otimes y_3 + y_3 \otimes y_2$  de  $\mathcal{W}_0^* \otimes \mathcal{W}_0^* \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_0^*)$ . Il s'agit donc de l'élément  $y_3 \wedge y_2$  de  $\Lambda^2\mathcal{W}_0^*$ , correspondant à l'élément  $y_3y_2 = \sqrt{2}y_1$  de  $\mathcal{W}_0$ . En résumé,  $X_4$  correspond  $i\sqrt{2}y_1$  de  $\mathcal{W}_0 \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathbb{C}y_7)$  et à  $\sqrt{2}y_1$  de  $\Lambda^2\mathcal{W}_0^* \simeq \mathcal{W}_0$ . Ainsi, concernant l'inclusion de  $\mathfrak{g}_2$  dans  $\mathfrak{so}_7$ , il vient

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{g}_2 &\hookrightarrow \Lambda^2\mathcal{W}_0 \oplus \Lambda^2\mathcal{W}_0^* \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \operatorname{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0) \\ X_4 &\mapsto 0 + \sqrt{2}y_1 + i\sqrt{2}y_1 + 0 + 0 \end{aligned}$$

En réitérant cette démarche pour les vecteurs  $X_{-1}$  et  $X_{-3}$ , on obtient les résultats suivants sur  $W$  :

$$\begin{aligned} \Phi : W &\hookrightarrow \Lambda^2\mathcal{W}_0 \oplus \Lambda^2\mathcal{W}_0^* \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \operatorname{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0) \\ X_4 &\mapsto 0 + \sqrt{2}y_1 + i\sqrt{2}y_1 + 0 + 0, \\ X_{-1} &\mapsto 0 + \sqrt{2}y_6 + i\sqrt{2}y_6 + 0 + 0, \\ X_{-3} &\mapsto 0 + \sqrt{2}y_5 + i\sqrt{2}y_5 + 0 + 0. \end{aligned}$$

De même, sur  $W^* = \langle X_{-4}, X_1, X_3 \rangle$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Phi : W^* &\hookrightarrow \Lambda^2 \mathcal{W}_0 \oplus \Lambda^2 \mathcal{W}_0^* \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \text{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0) \\ X_{-4} &\mapsto \sqrt{2}y_4 + 0 + 0 + i\sqrt{2}y_4 + 0, \\ X_1 &\mapsto \sqrt{2}y_3 + 0 + 0 + i\sqrt{2}y_3 + 0, \\ X_3 &\mapsto \sqrt{2}y_2 + 0 + 0 + i\sqrt{2}y_2 + 0. \end{aligned}$$

Et sur  $\text{End}_0(W) = \langle A, B, X_2, X_5, X_6, X_{-2}, X_{-5}, X_{-6} \rangle$ , il vient

$$\begin{aligned} \Phi : \text{End}_0(W) &\hookrightarrow \Lambda^2 \mathcal{W}_0 \oplus \Lambda^2 \mathcal{W}_0^* \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \text{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0) \\ A &\mapsto 0 + y_5 \otimes y_2 - y_1 \otimes y_4, \\ B &\mapsto 0 + y_6 \otimes y_2 - y_1 \otimes y_4, \\ X_2 &\mapsto 0 + y_6 \otimes y_2, \\ X_5 &\mapsto 0 + -y_1 \otimes y_3, \\ X_6 &\mapsto 0 + -y_6 \otimes y_2, \\ X_{-5} &\mapsto 0 + y_5 \otimes y_3, \\ X_{-2} &\mapsto 0 + y_6 \otimes y_4, \\ X_{-6} &\mapsto 0 + y_5 \otimes y_4. \end{aligned}$$

En conclusion, nous pouvons voir que lorsque l'on considère l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_2$  comme somme directe de sous-espaces correspondants aux représentations irréductibles sous l'action de  $\mathfrak{sl}_3$  :

$$\mathfrak{g}_2 = W \oplus W^* \oplus \text{End}_0(W)$$

l'inclusion de  $\mathfrak{g}_2$  dans  $\mathfrak{so}_7$  se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 &\hookrightarrow \mathfrak{so}_7 \simeq \Lambda^2 \mathcal{V} \simeq \Lambda^2 \mathcal{W}_0 \oplus \Lambda^2 \mathcal{W}_0^* \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \text{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0) \\ W &\hookrightarrow \Lambda^2 \mathcal{W}_0^* \oplus \mathcal{W}_0 \\ W^* &\hookrightarrow \Lambda^2 \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \\ \text{End}_0(W) &\hookrightarrow \text{Hom}(\mathcal{W}_0^*, \mathcal{W}_0) \end{aligned}$$

lorsque

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_0^* \oplus \mathbb{C}y_7, \\ \mathcal{W}_0 &= \langle y_1, y_5, y_6 \rangle, \\ \mathcal{W}_0^* &= \langle y_4, y_2, y_3 \rangle. \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ada96] J. F. ADAMS – *Lectures on exceptional Lie groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996, With a foreword by J. Peter May, Edited by Zafer Mahmud and Mamoru Mimura.
- [AOP09] H. ABO, G. OTTAVIANI & C. PETERSON – « Non-defectivity of grassmannians of planes », *arXiv :0901.2601v1* (2009).
- [Bae02] J. C. BAEZ – « The octonions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2002), no. 2, p. 145–205 (electronic).
- [Bal09] V. BALAJI – « Lectures on principal bundles », *Moduli spaces and vector bundles*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 359, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, p. 2–28.
- [BDS49] A. BOREL & J. DE SIEBENTHAL – « Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos », *Comment. Math. Helv.* **23** (1949), p. 200–221.
- [Bea88] A. BEAUVILLE – « Fibrés de rang 2 sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta », *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), no. 4, p. 431–448 (1989).
- [Bea91] ———, « Fibrés de rang deux sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta. II », *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), no. 3, p. 259–291.
- [Bea06] ———, « Orthogonal bundles on curves and theta functions », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), no. 5, p. 1405–1418.
- [BH10] I. BISWAS & N. HOFFMANN – « A Torelli theorem for moduli spaces of principal bundles over a curve », *ArXiv e-prints* (2010).

- [BNR89] A. BEAUVILLE, M. S. NARASIMHAN & S. RAMANAN – « Spectral curves and the generalised theta divisor », *J. Reine Angew. Math.* **398** (1989), p. 169–179.
- [Bou68] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337, Hermann, Paris, 1968.
- [BPS06] I. BISWAS, A. J. PARAMESWARAN & S. SUBRAMANIAN – « Monodromy group for a strongly semistable principal bundle over a curve », *Duke Math. J.* **132** (2006), no. 1, p. 1–48.
- [Che55] C. CHEVALLEY – *Theory of Lie Groups I; Théorie des groupes de Lie II, Groupes algébriques; Théorie des groupes de Lie III, Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie*, 1946-1951-1955.
- [DP06] R. DONAGI & T. PANTEV – « Langlands duality for Hitchin systems », *ArXiv Mathematics e-prints* (2006).
- [Dré04] J.-M. DRÉZET – « Luna’s slice theorem and applications », Algebraic group actions and quotients, Hindawi Publ. Corp., Cairo, 2004, p. 39–89.
- [Enga] F. ENGEL – « Sur un groupe simple à quatorze paramètres ».
- [Engb] F. ENGEL – « Ein neues, dem linearen complexe analoges gebilde ».
- [FH91] W. FULTON & J. HARRIS – *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.
- [Hit06] N. HITCHIN – « Langlands duality and G2 spectral curves », *ArXiv Mathematics e-prints* (2006).
- [Hum75] J. E. HUMPHREYS – *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, 1975, Graduate Texts in Mathematics, No. 21.
- [Hum95] J. E. HUMPHREYS – *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [Kna02] A. W. KNAPP – *Lie groups beyond an introduction*, second éd., Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

- [KNR94] S. KUMAR, M. S. NARASIMHAN & A. RAMANATHAN – « Infinite Grassmannians and moduli spaces of  $G$ -bundles », *Math. Ann.* **300** (1994), no. 1, p. 41–75.
- [KPS09] Y. KOPELIOVICH, C. PAULY & O. SERMAN – « On theta functions of order 4 », *Bull. Lond. Math. Soc.* **41** (2009), no. 3, p. 423–428.
- [KW07] A. KAPUSTIN & E. WITTEN – « Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program », *Commun. Number Theory Phys.* **1** (2007), no. 1, p. 1–236.
- [Las81] A. LASCOUX – « Degree of the dual of a Grassmann variety », *Comm. Algebra* **9** (1981), no. 11, p. 1215–1225.
- [LP97] J. LE POTIER – *Lectures on vector bundles*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, Translated by A. Maciocia.
- [LS97] Y. LASZLO & C. SORGER – « The line bundles on the moduli of parabolic  $G$ -bundles over curves and their sections », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **30** (1997), no. 4, p. 499–525.
- [MS72] D. MUMFORD & K. SUOMINEN – « Introduction to the theory of moduli », Algebraic geometry, Oslo 1970 (Proc. Fifth Nordic Summer-School in Math.), Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, p. 171–222.
- [NR75] M. S. NARASIMHAN & S. RAMANAN – « Generalised Prym varieties as fixed points », *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **39** (1975), p. 1–19 (1976).
- [NR87] ———, «  $2\theta$ -linear systems on abelian varieties », Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 11, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1987, p. 415–427.
- [OP99] W. OXBURY & C. PAULY – « Heisenberg invariant quartics and  $SU_C(2)$  for a curve of genus four », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **125** (1999), no. 2, p. 295–319.
- [OW96] W. M. OXBURY & S. M. J. WILSON – « Reciprocity laws in the Verlinde formulae for the classical groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 7, p. 2689–2710.
- [Ram75] A. RAMANATHAN – « Stable principal bundles on a compact Riemann surface », *Math. Ann.* **213** (1975), p. 129–152.
- [Ram81] S. RAMANAN – « Orthogonal and spin bundles over hyperelliptic curves », *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **90** (1981), no. 2, p. 151–166.

- [Ram96] A. RAMANATHAN – « Moduli for principal bundles over algebraic curves. I et II », *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **106** (1996), no. 3, p. 301–328.
- [Sab02] C. SABBAH – *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)], EDP Sciences, Les Ulis, 2002, Mathématiques (Les Ulis). [Mathematics (Les Ulis)].
- [Sch31] J. SCHOUTEN – « Klassifizierung der alternierenden grössen dritten grades in 7 dimensionen », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **55** (1931), p. 137–156.
- [Ses67] C. S. SESHADRI – « Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface », *Ann. of Math. (2)* **85** (1967), p. 303–336.
- [Ses82] ———, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque, vol. 96, Société Mathématique de France, Paris, 1982, Notes written by J.-M. Drezet from a course at the École Normale Supérieure, June 1980.
- [SK77] M. SATO & T. KIMURA – « A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants », *Nagoya Math. J.* **65** (1977), p. 1–155.
- [Sor96] C. SORGER – « La formule de Verlinde », *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 794, 3, 87–114, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [Sor00] ———, « Lectures on moduli of principal  $G$ -bundles over algebraic curves », School on Algebraic Geometry (Trieste, 1999), ICTP Lect. Notes, vol. 1, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2000, p. 1–57.
- [Sub99] S. SUBRAMANIAN – « On principal  $G_2$  bundles », *Asian J. Math.* **3** (1999), no. 2, p. 353–357.
- [Yok09] I. YOKOTA – « Exceptional Lie groups », *ArXiv e-prints* (2009).

## INDEX

- 2-torsion, 104
- $G_2$ , 3
- $G_2$ -fonction thêta généralisée, 152
- $\mathbb{O}$ , 1
- $\mathcal{U}_1$ , 135
- $\mathcal{U}_2$ , 135
- $\mathcal{U}_\bullet$ , 135
- $\omega_0$ , 5
- Éléments de  $\text{Gr}(3, \mathcal{V}^*)$  en position générale, 49
- Alternative, 94
- Automorphisme de  $G$ -fibrés principaux, 66
- Centralisateur, 119
- Conditions  $\star$ , 114
- Conditions  $\blacklozenge$ , 108
- Définition de  $G$ -fibré principal, 65
- Extension de groupe de structure, 68
- Fibré associé à un  $G$ -fibré principal, 67
- Fibré principal orthogonal, 75
- Forme trilinéaire alternée dégénérée, 47
- Forme trilinéaire alternée non-dégénérée, 47
- Indice de Dynkin, 151
- Isomorphisme de  $G$ -fibrés principaux, 66
- Morphisme de  $G$ -fibrés principaux, 66
- Normalité cubique, 161
- Pente d'un fibré vectoriel, 72
- Réduction de groupe de structure, 68
- Régulièrement stable, 92, 119
- Sans thêta-constante effective, 152
- Section d'un  $G$ -fibré principal, 68
- Semisimple (élément semisimple), 118
- Semistabilité d'un fibré vectoriel, 72
- Semistabilité pour un  $G$ -fibré principal, 71
- Simple (fibré vectoriel simple), 75
- Stabilité d'un fibré vectoriel, 72
- Stabilité pour un  $G$ -fibré principal, 71
- Stricte semistabilité, 71
- Thêta-caractéristique, 151
- Thêta-caractéristique impaire, 151
- Thêta-caractéristique paire, 151
- Triplet basique, 11





## RÉSUMÉ

L'objet de cette thèse est l'étude de l'espace de modules des  $G_2$ -fibrés principaux sur une courbe complexe projective connexe lisse, où  $G_2$  désigne le groupe de Lie exceptionnel de plus petit rang. Le groupe  $G_2$  est caractérisé via trois approches différentes, la première étant celle où  $G_2$  est défini comme le groupe des automorphismes de l'algèbre complexe des octaves de Cayley. Les différentes réductions et extensions que peut admettre un  $G_2$ -fibré principal sont étudiées ainsi que la relation entre la stabilité d'un  $G_2$ -fibré principal et celle du fibré vectoriel qui lui est associé. L'espace de modules des  $G_2$ -fibrés principaux semistables est analysé. Nous obtenons notamment une caractérisation de son lieu lisse, une décomposition explicite de son lieu singulier en trois composantes connexes et une analyse de l'espace de Verlinde de niveau 1 pour le groupe  $G_2$ .

## ABSTRACT

This thesis studies the moduli space of principal  $G_2$ -bundles over a smooth connected projective curve, where  $G_2$  is the exceptional Lie group of smallest rank. The group  $G_2$  is introduced through three different ways, the first of them is the definition of  $G_2$  as the group of automorphisms of the complex algebra of the Cayley numbers. We study reductions and extensions that a principal  $G_2$ -bundle can admit, as well as the link between a principal  $G_2$ -bundle and its associated vector bundle in relation to the notion of (semi)stability. The moduli space of semistable principal  $G_2$ -bundles is analysed. We notably obtain a characterisation of its smooth locus, with an explicit decomposition of its singular locus into three connected components. We also give an analysis of the Verlinde space of  $G_2$  at level 1.

## MOTS-CLÉS

Géométrie algébrique, Octaves de Cayley, Groupe de Lie  $G_2$ ,  $G$ -fibré principal, (semi)-stabilité, Espace de modules.

## CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14D20, 14H10, 14H42, 14L40, 20C33.