



**HAL**  
open science

# Conversion CSG-BRep de scènes définies par des quadriques

Maria Pentcheva

► **To cite this version:**

┌ Maria Pentcheva. Conversion CSG-BRep de scènes définies par des quadriques. Informatique [cs].  
└ Université Nancy II, 2010. Français. NNT : . tel-00540015v2

**HAL Id: tel-00540015**

**<https://theses.hal.science/tel-00540015v2>**

Submitted on 12 Jul 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Conversion CSG-BRep de scènes définies par des quadriques

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 30 septembre 2010

pour l'obtention du

**Doctorat de l'université Nancy 2**

(spécialité informatique)

par

Maria PENTCHEVA

### Composition du jury

*Rapporteurs :* Bernard Lacolle  
Monique Teillaud

*Examineurs :* Raphaëlle Chainé  
Sebti Foufou  
Jens Gustedt  
Sylvain Lazard  
Sylvain Petitjean  
Salvatore-Antoine Tabbone

Mis en page avec la classe thloria.

# Résumé

Cette thèse porte sur la conversion d'un modèle CSG vers un modèle BRep d'une scène définie par des quadriques. Cet algorithme est composé de quatre étapes : (i) le paramétrage de chaque courbe d'intersection entre quadriques ; (ii) la détermination des points d'intersection entre au moins trois quadriques ; (iii) la détection des segments ainsi obtenus qui bornent une face du modèle BRep sur chaque quadrique séparément ; (iv) l'identification et le regroupement des chaînes de segments qui délimitent une même face sur chaque quadrique séparément (certaines faces peuvent avoir des « trous », et par conséquent être constituées par au moins deux chaînes de segments). Les deux premières étapes ont été résolues grâce à deux algorithmes de la littérature. Les deux étapes restantes sont traitées par des algorithmes que nous avons conçus : respectivement VE (Visible Edges) et CA (Chains Assembling).

Notre algorithme est robuste au sens où tous les cas dégénérés sont traités dans le paradigme du calcul géométrique exact. Il résout intégralement le problème de conversion CSG-BRep de scènes définies par des quadriques. Sa complexité dans le pire des cas s'élève à  $O(n^4)$  où  $n$  est le nombre de quadriques. Une implantation partielle a été effectuée et des tests préliminaires réalisés.

**Mots-clés:** géométrie algorithmique, conversion CSG-BRep, quadrique, calcul exact.

# Abstract

The objective of this thesis is to investigate the problem of boundary evaluation, which transforms the CSG model of a scene to its BRep corresponding model, for scenes defined by quadrics. This algorithm consists of four steps : (i) the parameterization of every intersection curve between quadrics ; (ii) the calculation of the intersection points between such curves and the quadrics ; (iii) the determination, among the resulting arcs of curves, of those that limit a face of the BRep model ; (iv) the identification of the arcs that delimit a single face, and their assembling into chains of arcs ; some faces might contain « holes », and thus may be limited by several chains of arcs. The first two steps were solved using two algorithms from the litterature. The two remaining steps were solved by introducing new algorithms : VE (Visible Edges) and CA (Chains Assembling) respectively.

Our algorithm of boundary evaluation is robust in the sense that all degenerate configurations are considered in the paradigm of exact geometric computing. It solves entirely the problem for scenes defined by quadrics. Its time-complexity is  $O(n^4)$  in the worst case, where  $n$  is the number of quadrics. A partial implementation was developed and preliminary experimental results were obtained.

**Keywords:** computational geometry, boundary evaluation, quadric, exact computation.

*À la mémoire de ma directrice de thèse, Hazel Everett.*



## Remerciements

Je suis extrêmement reconnaissante à ma directrice de thèse Hazel Everett sans laquelle ce travail n'aurait pu aboutir. Au cours de mon travail, Hazel m'a beaucoup encouragée et elle a toujours su trouver les mots justes et nécessaires au bon moment.

Je dois beaucoup à Sylvain Lazard et à Sylvain Petitjean pour leur encadrement. Ils ont été des moteurs essentiels dans l'avancement de cette thèse et ont été à mon écoute en cas de besoin.

Je remercie Jens Gustedt d'avoir accepté d'être mon référent interne et de m'avoir aidée quand j'en ai eu besoin.

Je remercie Monique Teillaud et Bernard Lacolle d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie bien entendu Antoine Tabbone, Sebti Fofou et Raphaëlle Chainé pour être membres de mon jury de thèse.

J'associe à ces remerciements l'ensemble des membres actuels et précédents de l'équipe Vegas pour leur soutien et leur aide, et plus en particulier Laurent Dupont, Xavier Goaoc, Luis Peñaranda, Julien Clément, Marc Glisse et Julien Demouth.

Enfin, je remercie mon mari Bruno et mes enfants Lisa et Péma pour leur présence chaleureuse et leur soutien de tous les instants malgré les nombreux effets secondaires que ce travail de thèse a pu engendrer.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et état de l'art</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation et définition du problème . . . . .	1
1.2	État de l'art . . . . .	5
1.2.1	Robustesse et efficacité . . . . .	6
1.2.2	Polyèdres - approches primant la robustesse . . . . .	8
1.2.3	Polyèdres - approches primant l'efficacité . . . . .	10
1.2.4	Approches pour les objets courbes . . . . .	11
1.3	Constat . . . . .	15
1.4	Résultats et plan de la thèse . . . . .	16
<b>2</b>	<b>CSG, BRep : définitions et propriétés</b>	<b>21</b>
2.1	Modèle CSG . . . . .	21
2.2	Modèle BRep . . . . .	24
2.3	Application des opérations booléennes régularisées dans la pratique . . . . .	26
2.3.1	Classement d'un élément non volumique . . . . .	27
2.3.2	Voisinages . . . . .	30
2.4	Brève présentation de notre algorithme de conversion CSG-BRep . . . . .	32
<b>3</b>	<b>QI : Paramétrage de l'intersection de deux quadriques</b>	<b>37</b>
3.1	Preliminaires . . . . .	38
3.2	Survol de l'algorithme de QI . . . . .	41
3.2.1	Cas générique . . . . .	42
3.2.2	Cas dégénérés . . . . .	44
3.3	Optimalité, robustesse et efficacité . . . . .	45
3.4	Exemples . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Q3 : Calcul du graphe d'adjacence d'un arrangement de quadriques</b>	<b>53</b>
4.1	Algorithme	54
4.2	Première étape : adopter un seul paramétrage pour les composantes identiques	54
4.2.1	Trouver les composantes identiques	55
4.2.2	Redéfinir les points singuliers sur le paramétrage choisi	57
4.3	Deuxième étape : calcul des points d'intersection entre trois quadriques	59
4.3.1	Cas où la composante n'est pas une quartique lisse	60
4.3.2	Cas d'une quartique lisse	60
4.4	Troisième étape : associer les points d'intersection entre triplets de quadriques	62
4.5	Quatrième étape : ordonner l'ensemble des points d'intersection sur les composantes	64
4.6	Graphe d'adjacence	65
4.7	Complexité et taille de sortie	66
<b>5</b>	<b>VE : Détermination des segments qui bornent une face sur chaque quadrique</b>	<b>69</b>
5.1	Préliminaires	71
5.2	Description de VE	74
5.3	Classement approfondi	76
5.3.1	Voisinage externe et voisinage interne d'une $Q$ -face	76
5.3.2	Secteur angulaire	77
5.3.3	Classement approfondi - description	80
5.3.4	Permutations du secteur angulaire	84
5.4	Le cas d'une droite singulière d'une paire de plans	86
5.5	Le cas des points isolés	94
5.6	Complexité et taille de sortie de VE	96
5.7	Conclusion	97
<b>6</b>	<b>Méthode de mise à jour du secteur angulaire</b>	<b>99</b>
6.1	Idée générale	99
6.2	Préliminaires	100
6.2.1	Classement approfondi au lieu de classement global	100
6.2.2	Notations	101
6.2.3	Terminologie	103
6.3	Règles de modification du secteur angulaire	105

---

6.3.1	Cas de figures principaux . . . . .	106
6.3.2	Cas où $l \not\subset Qi$ . . . . .	110
6.3.3	Cas où $l \subset Qi$ . . . . .	112
6.4	Complexité de VE amélioré par la mise à jour du secteur angulaire . . . . .	132
6.5	Conclusion . . . . .	133
<b>7</b>	<b>CA : Regroupement des <math>Q</math>-arêtes bornant une face du modèle CSG</b>	<b>135</b>
7.1	Idée générale . . . . .	135
7.2	Étape 1 : projection . . . . .	142
7.3	Étape 2 : ordonner les $Q$ -arêtes visibles autour de chaque $Q$ -point . . . . .	147
7.4	Étape 3 : regrouper les $Q$ -arêtes qui bornent une même $Q$ -face visible et les orienter . . . . .	150
7.4.1	Regrouper les $Q$ -arêtes . . . . .	150
7.4.2	Déterminer les $Q$ -faces visibles et orienter les $Q$ -arêtes visibles . . . . .	155
7.5	Complexité et taille de sortie de CA . . . . .	156
7.6	Conclusion . . . . .	158
<b>8</b>	<b>Implantation et résultats expérimentaux</b>	<b>161</b>
8.1	Implantation . . . . .	161
8.1.1	GMP . . . . .	163
8.1.2	LiDIA . . . . .	164
8.1.3	MPFR/MPFI . . . . .	164
8.1.4	FGb/RS . . . . .	165
8.1.5	Boolstuff . . . . .	166
8.2	Résultats expérimentaux . . . . .	167
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>171</b>
9.1	Résultats de la thèse . . . . .	171
9.2	Comparaison avec l'état de l'art . . . . .	173
9.3	Perspectives . . . . .	176
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>



# Chapitre 1

## Introduction et état de l'art

### 1.1 Motivation et définition du problème

La motivation de notre thèse est étroitement liée à la notion de synthèse d'images 3D. Cette dernière consiste en un ensemble de techniques permettant de créer des représentations virtuelles en perspective d'objets ou groupements d'objets géométriques en trois dimensions, appelés scènes. Les applications en sont nombreuses et couvrent plusieurs domaines, dont l'industrie manufacturière et le cinéma paraissent parmi les plus ciblés actuellement.

La synthèse d'images se traduit en deux étapes principales, modélisation et visualisation. Afin de donner un aperçu de leur nature nous avons établi cette section à partir de l'encyclopédie « Wikipedia » (<http://fr.wikipedia.org/wiki/Wikipédia>).

La modélisation permet de concevoir la scène sous forme d'une base de données géométriques. Elle est réalisée soit de façon automatique, pour une scène réelle, soit à partir d'un logiciel d'édition, nommé modeleur. Lors de la visualisation, cette base de données est transformée en une image bidimensionnelle. Celle-ci définit le résultat final dit rendu, d'où l'appellation du programme qui le génère, moteur de rendu. Cette phase se déroule elle-même en quelques pas. D'abord un éclairage est mis en place et ses effets sur la configuration sont calculés. Ensuite, la scène est projetée sur un plan d'observation et, à la fin, l'image qui en résulte est constituée. Étant donné que la scène est tridimensionnelle, définir plusieurs plans d'observation offre la possibilité de réaliser différents points de vue.

La modélisation d'objets solides s'étend au-delà de la synthèse d'images. Dans le cadre général elle est essentielle pour la conception assistée par ordinateur. Divers types de modélisation, appelés modèles, ont été créés dont CSG (abréviation de l'anglais « Constructive Solid Geometry ») qui consiste en l'assemblage par volumes simples, BRep (abréviation de l'anglais « Boundary Representation ») qui produit une représentation surfacique des objets de la scène, hybride qui est composite des modèles CSG et BRep, paramétrique qui résulte en une multitude de paramètres définissant les solides, octree qui procède par décomposition en cellules tridimensionnelles. Tous ayant des avantages et des inconvénients, le choix du modèle dépend de l'application envisagée.

De même, de différents procédés existent pour la visualisation. Typiquement l'éclairage d'une surface donnée peut être calculé de façon simple où seul le chemin direct de la source de lumière et cette surface est pris en compte, procédé appelé illumination locale, ou bien de façon plus complexe quand la lumière provenant des réflexions et des réfractions des rayons sur les autres surfaces est également considérée, procédé appelé illumination globale. De même, les méthodes utilisées pour la projection sur un plan d'observation et la constitution de l'image ne manquent pas de variété. Les techniques utilisées pour les trois étapes de la visualisation sont interdépendantes. Par exemple la radiosité, qui est une technique d'illumination globale et qui s'attaque à certains phénomènes physiques comme la dispersion lumineuse, est souvent associée au lancer de rayons qui est une technique de constitution d'image et qui simule le trajet de retour de la lumière vers le spectateur.

S'inspirant de la synthèse d'images 3D, notre recherche cible à la fois une modélisation volumique de haute précision et une visualisation par illumination globale basée sur la radiosité. Pour la première il se trouve que le modèle CSG répond bien à nos exigences de rigueur, mais pour la seconde c'est le modèle BRep qui convient mieux. Ainsi, dans les paragraphes suivants, nous allons nous concentrer brièvement sur ces deux modèles (cf. figure 1.1) et nous allons tenter d'établir un pont entre eux. Une description plus approfondie est donnée dans le Chapitre 2.

Le modèle CSG d'une scène s'exprime par un ensemble de volumes simples (comme par exemple des polyèdres, des sphères, des cylindres, des cônes, des tores) liés entre eux par des opérations booléennes - union, intersection, différence et négation (voir figure 1.1 a).

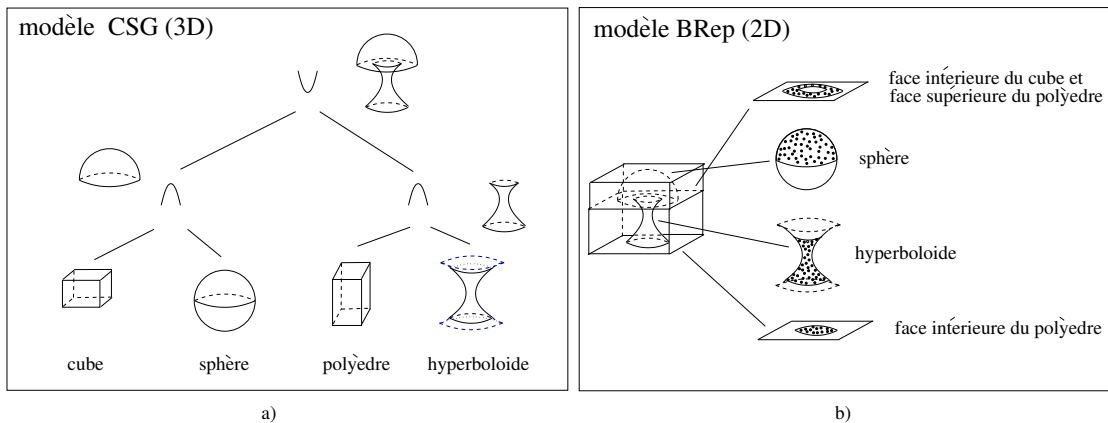


FIG. 1.1 – a) Exemple de modèle CSG. Les feuilles de l’arbre CSG sont représentées par des volumes simples et les nœuds internes par les opérations booléennes intersection ou union. b) Le modèle BRep correspondant est donné. Sur chacun des volumes simples sont illustrés en pointillé les carreaux bidimensionnels qui lui appartiennent et qui correspondent à une face de l’objet modélisé.

La sémantique de cette structure est caractérisée par un arbre fini, dont chaque feuille correspond à un volume simple, appelé primitive, et dont chaque nœud interne est marqué par une opération booléenne. Ainsi, tout nœud interne correspond au modèle CSG d’une scène intermédiaire, créé à partir de son opération booléenne appliquée aux objets géométriques stockés dans ses fils. Le modèle CSG de la scène considérée correspond ainsi à la racine de l’arbre. Remarquons qu’un modèle CSG n’est pas unique. Un modèle CSG qui lui est équivalent peut être obtenu avec le même ensemble de volumes simples par une restructuration de son arbre CSG.

Le modèle BRep décrit la scène par la surface des objets géométriques qui la constituent. Pour cela, la scène est décomposée en faces, naturellement obtenues par les contours de leurs bords (voir figure 1.1 b). Chaque face forme un carreau bidimensionnel sur la surface d’une primitive. Ce dernier est délimité par un ensemble de segments. Tout segment appartient à une droite ou plus globalement à une courbe d’intersection entre cette primitive et un autre volume. Il est séparé du reste de la courbe par deux points. Chacun d’eux correspond à un point d’intersection de cette courbe et une autre courbe d’intersection entre primitives. Pour résumer, un modèle BRep décrit la scène par sa surface sous forme



de carreaux de surfaces, segments de courbes et points. Contrairement au modèle CSG, il est unique.

Dans le cadre général, les deux approches ont des avantages et des inconvénients. Pour les illustrer nous nous sommes inspirés du travail descriptif sur la modélisation des objets solides de J. Rossignac et A. Requicha [43]. D'une part, le modèle CSG est plus concis et intuitif que le modèle BRep. Ceci incite beaucoup d'industriels à y recourir et donc à opérer par assemblage de volumes simples. Cependant, il n'exprime pas explicitement les faces de la scène sur la surface des primitives, alors que celles-ci se trouvent nécessaires dans de nombreuses applications, dont la visualisation par illumination globale. Ici le modèle Brep paraît plus adapté. Cependant, sa construction s'avère longue et difficile. Tout ceci induit l'apparition du problème d'une conversion du modèle CSG vers le modèle BRep. Plus précisément, il est plus pratique de concevoir une scène en tant que modèle CSG, mais, pour approfondir les études sur ce modèle, il est important de pouvoir le transformer en sa version BRep. Cette opération s'appelle conversion CSG-BRep et fait l'objet de notre thèse. Connue pour être assez complexe, elle a été étudiée dans le passé et continue d'être un des problèmes importants de la géométrie algorithmique.

Pour revenir à la synthèse d'images, notons que, comme la modélisation sert de support pour obtenir le rendu, le choix des techniques de visualisation dépend du choix de celles de la modélisation. Dans ce sens, rappelons que beaucoup de systèmes de visualisation travaillent avec un modèle BRep, mais que de nombreux modeleurs définissent leurs scènes par des modèles CSG. La conversion CSG-BRep permettrait donc d'établir un lien entre ces deux directions.

Bien sûr les applications de la conversion CSG-BRep ne se limitent pas à la synthèse d'images. Typiquement, elle est utilisée dans le calcul scientifique, par exemple dans le calcul du volume d'un modèle tridimensionnel. D'autres points d'application sont les problèmes qui effectuent des tests d'interférence ou des tests rapides de connectivité sur des modèles géométriques volumiques.

Il est clair que l'intérêt ici d'une conversion CSG-BRep n'existe que si elle est précise et raisonnablement rapide. Voilà pourquoi, nous avons opté pour concevoir un algorithme efficace de conversion CSG-BRep robuste au sens où tous les cas dégénérés sont traités

dans le paradigme du calcul géométrique exact. Selon un manuscrit de K. Mehlhorn et C. Yap [35] et les travaux de C. Yap et T. Dubé [53], la robustesse en ce sens garantit que le résultat sortant n'a pas subi d'approximation numérique par rapport aux données de départ. Elle traite deux problèmes, les erreurs d'approximation et les cas dégénérés. D'un côté, les erreurs d'approximation peuvent être très néfastes. Typiquement, tester la position d'un point dans l'espace par rapport à la scène considérée, à l'intérieur, sur la surface ou à l'extérieur de la scène, peut, en cas d'erreur d'approximation, donner un résultat erroné, voire bloquer l'exécution du programme. D'un autre côté, un cas dégénéré est par définition un cas limite dans lequel une classe d'objets se transforme afin d'adhérer à une autre classe. Par exemple, la transformation d'une configuration où deux sphères s'intersectent en une courbe vers celle où les deux sphères sont disjointes, passe par le cas dégénéré où les deux sphères se touchent en un point. Envisager l'ensemble des situations est parfois difficile et exige des algorithmes spécifiques pour traiter chaque cas dégénéré. Enfin, l'efficacité traduit la complexité théorique de l'algorithme en fonction de la taille asymptotique des données de départ ainsi que sa performance dans la pratique. Nous reviendrons dans la section 1.2 sur ces notions de robustesse et d'efficacité qui ont un aspect essentiel dans la thèse.

Intuitivement, la robustesse et la rapidité recherchées sont liées au type de primitives. Notre objectif a été de traiter des objets courbes. Ainsi, nous avons pris comme point de départ des primitives algébriques de faible degré. Surfaces algébriques de degré deux, les quadriques comprennent notamment les sphères, les cônes, les cylindres, les hyperboloïdes, les paraboloides et les paires de plans. Elles ont l'avantage d'être les moins coûteuses à manipuler parmi les surfaces courbes. Ainsi nous nous sommes concentrés sur la conversion CSG-BRep de scènes définies par des quadriques, d'où le titre de notre thèse.

## 1.2 État de l'art

Cette section a été établie à partir de l'ensemble des documents de référence indiqués dans la bibliographie de ce manuscrit.

Une des premières descriptions de conversion CSG-BRep a été réalisée par A. Requicha

et H. Voelker en 1985 [42]. Ces auteurs ont montré les aspects théoriques et algorithmiques du problème appliqué à des objets polyédriques dans le cadre du système de modélisation PADL. Depuis, de nombreuses améliorations et extensions ont été apportées au problème de conversion CSG-BRep, et de façon plus générale, aux problèmes de modélisation. En premier lieu ont été considérés les objets polyédriques, et ensuite également les objets courbes. Ces améliorations et extensions concernent notamment la robustesse et l'efficacité des algorithmes.

### 1.2.1 Robustesse et efficacité

Notons que quand nous parlons d'algorithme robuste nous pensons à un algorithme dont le résultat est exact dans tous les cas, c'est-à-dire que le résultat qu'il trouve pour un modèle donné est juste par rapport aux spécifications de ce modèle. La robustesse repose sur deux aspects : évaluation des prédicats (requêtes dont la réponse est une valeur finie et discrète) et constructions. Dans l'optique d'obtenir un algorithme robuste, l'objectif ici sera de suivre le paradigme de calcul géométrique exact qui garantit une topologie et des calculs de combinatoire corrects. En d'autres termes, les prédicats sont évalués de façon exacte et les constructions peuvent être approchées.

Un calcul qui évalue un prédicat considéré peut être purement numérique ou bien de nature symbolique. Dans le premier cas, il doit trouver, sans erreur d'approximation, la valeur du prédicat. Dans le second cas, il est censé fournir une expression symbolique ou implicite permettant de déterminer avec certitude la réponse cherchée. Pour cela, toute technique garantissant l'exactitude des calculs est la bienvenue. La difficulté ici provient de l'impossibilité de stocker tout nombre réel de manière exacte sur un ordinateur. Comme les objets géométriques considérés sont souvent définis sur l'ensemble des réels, ces derniers sont approchés selon la précision adoptée. Il est donc utile pour la programmation de dépasser les limites de la précision fixe, caractéristique, par exemple, de l'arithmétique en virgule flottante classique. Celle-ci n'est pas adaptée pour tous les cas. Par exemple, le calcul du signe d'une expression correspondant à une situation proche d'une dégénérescence peut s'avérer erroné à cause d'une erreur d'approximation et mener ainsi à une fausse évaluation de prédicat. Par ce fait, l'arithmétique de multiprécision s'avère d'une

aide précieuse.

Le calcul exact peut théoriquement traiter les nombres algébriques, c'est-à-dire tout nombre qui est solution d'un polynôme à une variable et à coefficients entiers ou rationnels. Ceci présente un avantage notamment pour les problèmes définis par des inégalités polynomiales, appelés semi-algébriques. L'inconvénient est que le calcul exact se révèle relativement coûteux, ce qui nécessite d'une part son utilisation modérée et astucieuse, et d'autre part, son accélération.

L'efficacité, de son côté, est évaluée en temps et en espace. L'efficacité en temps est souvent considérée de deux manières, théorique et pratique. La première montre la complexité en temps du problème en fonction de la taille de l'entrée (elle est présentée comme une fonction du nombre d'éléments géométriques de départ  $n$ ,  $n$  étant une variable discrète et positive). La deuxième indique le temps de calcul sur des exemples concrets. Elle diffère selon le modèle d'expérience. Enfin, l'efficacité en espace montre l'espace mémoire qui est utilisé lors des calculs pour résoudre le problème. Similairement à la complexité en temps théorique, elle est calculée comme une fonction de la taille de l'entrée de l'algorithme.

Il est naturel que la robustesse et l'efficacité soient interdépendantes. Plus précisément, les techniques utilisées pour rechercher un résultat exact dans la totalité des situations peuvent être complexes et ralentir l'algorithme. En même temps, un algorithme efficace n'est pas toujours intéressant s'il n'est pas robuste. En conséquence, les deux directions ont été explorées. Elles deviennent d'autant plus ardues lorsque les objets sont constitués à partir de surfaces courbes. Typiquement, le paramétrage de la droite d'intersection entre deux plans définis par des polynômes linéaires à coefficients rationnels ne contient pas de racines carrées. Par contre, celui de l'intersection entre deux quadriques courbes est susceptible de nécessiter, selon les cas, des racines carrées d'entiers voire la racine carrée d'une expression polynomiale, bien moins évidentes à traiter. Pour cette raison les progrès sur les questions de robustesse et d'efficacité ont généralement été effectués séparément pour les deux types de surface. Les deux sections qui suivent sont consacrées respectivement aux approches principales établies pour améliorer la robustesse et l'efficacité pour le polyèdres, et dans la section qui les succède, nous parlerons des quelques solutions trouvées à ce sujet pour les objets courbes.

## 1.2.2 Polyèdres - approches primant la robustesse

Différentes approches ont été utilisées pour minimiser ou éliminer l'apparition d'erreurs d'approximation sur des objets polyédriques. Certaines, appliquées le plus souvent à la modélisation de façon générale, sont présentées dans les paragraphes suivants.

Un moyen de traiter les dégénérescences consiste à les éliminer par une méthode de perturbation. Une légère modification des données de départ suscite des changements géométriques permettant d'éviter ces dégénérescences. Cette méthode a été étudiée en particulier dans le travail de H. Edelsbrunner et E. Mücke de 1988 [16]. Pour un modèle BRep, les données de départ n'étant pas toujours exactes en soi, une telle modification semble inoffensive. Toutefois, le résultat obtenu serait celui d'une configuration modifiée et il peut être difficile de l'appliquer à sa version d'origine. De plus, les dégénérescences peuvent avoir été créées intentionnellement et dans ce cas-là, les éliminer serait non approprié.

Issue de l'arithmétique par intervalles où chaque nombre est représenté par un intervalle qui le contient, l'application de tolérances est une autre approche pour gérer les erreurs d'approximation. La notion de tolérance se traduit par des valeurs de distance associées aux sommets, arêtes et faces des objets géométriques. Ainsi, un sommet est défini par une sphère dont il est le centre. De même, une arête peut être assimilée à un tuyau de rayon fixe ou variable en fonction des tolérances de ses extrémités. Enfin, une face est caractérisée par son épaisseur. Au cours de la construction du modèle, les relations d'incidence entre sommets, arêtes et faces sont déterminées en fonction de la distance qui les sépare et plus concrètement de la relation entre leurs régions de tolérance. Comme les tolérances sont généralement largement supérieures aux éventuelles erreurs d'approximation, en principe elles ne sont pas affectées lors des calculs. Ceci étant, des situations ambiguës peuvent survenir. Par exemple, si les régions de tolérance de deux sommets se superposent partiellement, cette approche ne peut pas donner de réponse sûre si ces derniers sont identiques ou disjoints. Des approches basées sur des tolérances variant au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme ont été développées notamment par M. Segal et H. Sequin en 1988 [48] et par M. Segal en 1990 [47] où elles sont limitées aux objets

polyédriques, ainsi que par S. Fang, B. Bruderlin et X. Zhu en 1993 [17] où les surfaces utilisées sont étendues aux plans et quadriques naturelles (plans, sphères, cylindres et cônes droits). Par la suite, une technique de tolérances locales a été décrite par D. Jackson en 1995 [25].

Dans le cas où les calculs numériques ne peuvent pas garantir la validité d'une décision et mènent à des situations géométriques ambiguës, les approches de raisonnement symbolique semblent adéquates. Ce dernier provient de la notion de symbole employée en algèbre et en analyse pour désigner une opération. Les relations entre les différentes opérations sont concrétisées par des formules où ces symboles prennent le rôle de variables. L'implémentation symbolique permet de résoudre ce genre de formules en préservant la cohérence entre décisions et relations géométriques. Cependant, elle peut être relativement lente et par conséquent nuire à l'efficacité de l'algorithme. Les techniques utilisées sont d'origine algébrique dont, par exemple, les résultants et les suites de Sturm. Le raisonnement symbolique a été utilisé en particulier dans le travail de C. Hoffmann, J. Hopcroft et M. Karasick de 1989 [23] pour préciser les résultats ambigus dus à des erreurs d'approximation.

Une autre approche consiste à minimiser voire éliminer les données redondantes s'il en existe. En cas de décisions dépendantes les unes des autres, ceci permet d'écartier la survenue de contradictions. Dans le travail de C. Hoffmann, J. Hopcroft et M. Karasick, cité ci-dessus pour son recours au raisonnement symbolique, la redondance numérique est réduite dans cet objectif.

Dans le cadre de la recherche de robustesse pour la conversion CSG-BRep, nous notons de plus le travail de R. Banarjee et J. Rossignac de 1996 [2] et celui de C.-Y. Hu, N. Patrikalakis et X. Ye de la même année [24]. R. Banarjee et J. Rossignac décrivent un algorithme où, dès le départ, les primitives sont approchées par des demi-espaces bornés par des plans à coefficients entiers de précision fixe. Toutes les décisions d'ordre topologique sont issues de calculs exacts effectués sur ces coefficients. Ainsi, le modèle BRep est déduit de façon topologiquement robuste à partir de l'approximation polyédrique du modèle CSG. C.-Y. Hu, N. Patrikalakis et X. Ye élaborent, quant à eux, une approche pour des objets dont le domaine s'étend aux « non-manifolds ». Utilisant l'arithmétique

en virgule flottante, cette approche est fondée sur une représentation géométrique par intervalles. Elle est robuste au sens où elle permet d'éviter les incohérences topologiques induites par les erreurs d'approximation.

Dans le domaine de la modélisation d'objets polyédriques, le calcul exact a trouvé une application notamment dans le travail de M.O. Benouamer, D. Michelucci et B. Peroche de 1994 [3] et celui de S. Fortune de 1997 [18]. M.O. Benouamer, D. Michelucci et B. Peroche expriment, dans leur conversion CSG-BRep, chaque valeur numérique de deux manières : par une expression à coefficients rationnels et par un intervalle qui la contient. En vue d'une meilleure efficacité, ils ont développé une méthode appelée « lazy arithmetic » qui utilise essentiellement la représentation par intervalles et qui effectue des calculs numériques précis uniquement si cela devient strictement nécessaire. De son côté, l'algorithme de S. Fortune, qui est un algorithme de modélisation surfacique, est fondé sur une arithmétique de multiprécision sur nombres entiers. Toute opération booléenne est calculée de façon exacte. Les transformations affines seules nécessitent des approximations afin de prévenir une augmentation excessive en terme de bits. Pour retrouver la cohérence topologique un autre algorithme est utilisé. Les prédicats sont d'abord évalués par arithmétique en virgule flottante et si le besoin se présente, par l'intermédiaire d'un calcul exact. La rapidité de cet algorithme se trouve proche de celle du même type d'algorithmes fonctionnant en virgule flottante.

### 1.2.3 Polyèdres - approches primant l'efficacité

La minimisation des redondances peut également contribuer à une meilleure efficacité. Par exemple, certains résultats intermédiaires obtenus au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme peuvent être redondants, et ceci sans contribuer au résultat final. Une recherche dans cette direction a été menée par J. Rossignac et H. Voelcker en 1989 [44]. Ils ont développé une théorie mathématique sur les zones actives pour un modèle CSG, où une zone active associée à une primitive est la région de l'espace où une modification de cette primitive aurait un impact sur l'objet modélisé. De même, ils montrent comment celles-ci peuvent accélérer certains algorithmes dont ceux de conversion CSG-BRep.

En dehors de cette approche, nous notons le travail de C. Crocker et W. Reinke de

1991 [9]. Leur algorithme est conçu pour des objets dont le domaine est étendu aux « non-manifolds ». Au cours de son exécution, il garde une description intégrale des primitives. Ceci permet d'appliquer rapidement d'éventuelles modifications de l'objet modélisé sans pour autant reprendre tous les calculs. Ces modifications peuvent s'exprimer par des changements dans la structure de l'arbre CSG, de ses opérations booléennes, ainsi que par l'ajout, la suppression ou le remplacement de primitives.

Dans son algorithme de 1993 [36], J. Miller maintient au fur et à mesure de son avancement, à part la structure CSG, une représentation BRep pour chaque nœud interne. L'information d'adjacence provenant de cette dernière permet de diminuer les calculs explicites de la position des segments par rapport à la surface de l'objet modélisé, ce qui accélère l'algorithme.

Enfin, en 1991, M. Tawfik a présenté un tel algorithme destiné aux objets polyédriques [51]. En termes de complexité en temps ce dernier est estimé à  $O(n^3)$  où  $n$  est le nombre total de faces des primitives. Étant donné que, de point de vue théorique, ceci correspond à la taille de la sortie dans le pire cas, cet algorithme est optimal.

#### 1.2.4 **Approches pour les objets courbes**

Dans le domaine de la modélisation d'objets courbes, le calcul exact a trouvé une application notamment dans le travail de J. Keyser, T. Culver, M. Foskey, S. Krisnan et D. Manocha de 2004 [27] pour des objets représentés de façon paramétrique, ainsi que dans le travail de B. Mourrain, J.P. Témecourt et M. Teillaud, décrit en 2004 et celui de N. Wolpert et E. Schömer de 2003 [46] pour des objets courbes représentés par des fonctions implicites. Dans les deux sous-sections suivantes, sont considérées séparément les approches établies pour les objets courbes représentés de façon paramétrique et ceux représentés par des fonctions implicites.

##### **Objets courbes - représentation paramétrique**

Dans le cadre général, la représentation paramétrique détermine explicitement la surface du modèle, ce qui permet d'y générer facilement des points. Souvent, elle est réalisée



sous forme de carreaux paramétriques. Ceux-ci ont déjà été utilisés dans le passé pour les problèmes de modélisation. En particulier, en 1987, M. Casale a étudié les combinaisons booléennes d'objets géométriques courbes [6] définis de cette façon. Son travail a abouti par la conception d'un algorithme en 1989 par M. Casale et J. Bobrow où les intersections entre carreaux sont réalisées par des méthodes de subdivision [7]. Plus tard, en 1997 S. Krishnan a présenté dans sa thèse de doctorat une conversion CSG-BRep pour des objets courbes décrits par des surfaces paramétriques splines [30]. Les intersections entre surfaces y sont calculées à l'aide de techniques algébriques, numériques et symboliques. La classification des composantes par rapport à l'objet modélisé est déterminée par la méthode de lancer de rayons. L'implémentation de cette conversion est le système BOOLE qui manipule des objets définis par des ensembles de carreaux de Bézier [31]. Il a été élaboré par S. Krishnan, D. Manocha, M. Gopi, T. Culver et J. Keyser en 2001. L'arithmétique en virgule flottante de double précision est utilisée, ce qui cause des problèmes de robustesse. Afin de diminuer les erreurs numériques, une méthode de tolérances est appliquée. Notons également que l'algorithme ne traite pas tous les cas et échoue même sur certains exemples de départ. Entre-temps, pour améliorer la robustesse numérique, J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha ont développé un autre algorithme de conversion s'appuyant sur le calcul exact [28, 29, 26]. Il manipule des courbes et des nombres algébriques et profite en particulier de techniques comme les suites de Sturm et les résultants à plusieurs variables. Son implémentation a abouti, en 2004, au système ESOLID [27]. Il traite les objets composés par des carreaux de surfaces paramétriques rationnelles et utilise le calcul exact. Comme il ne peut pas gérer la totalité des configurations dégénérées, l'absence de dégénérescences est supposée. En particulier, l'algorithme de J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha ne considère pas les cas où deux surfaces se touchent en un point ou bien quatre surfaces s'intersectent en un point. L'algorithme est accéléré par des combinaisons de différentes méthodes appropriées à chaque endroit, dont l'arithmétique par intervalles, une évaluation de haute précision que lorsqu'elle est vraiment nécessaire, les filtres en virgule flottante et l'arithmétique en virgule flottante de précision arbitraire. Toutefois, pour que son efficacité reste acceptable, les objets considérés doivent être constitués de surfaces de degré au plus quatre.

Ce dernier algorithme est proche de notre contexte de travail, car il tente de résoudre le problème de conversion CSG-BRep de façon exacte et d'efficacité raisonnable pour des objets définis par des surfaces de faible degré, dont les quadriques. Pour cela nous décrivons en quelques mots son fonctionnement. Au départ, toute primitive doit être exprimée par un ensemble de carreaux surfaciques. À chaque opération booléenne, les carreaux qui s'intersectent sont combinés pour former un nouveau carreau. Ainsi, après un parcours de l'arbre CSG, tous les carreaux constituant l'objet modélisé sont calculés. Notons que le rapport entre le nombre de carreaux initiaux et le nombre de primitives n'est pas précisé. D'après les travaux de C. Lamathe, S. Lazard et S. Petitjean [32], sa complexité en temps dans le pire des cas est  $O(n^3)$  si le modèle BRep correspondant à tout nœud interne de l'arbre CSG est constitué de  $O(n)$  carreaux, et  $O(n^9)$  dans le cas général. De ce fait, et en dehors des problèmes de dégénérescences, cette approche reste discutable en termes d'efficacité.

### Objets courbes - représentation par des fonctions implicites

La représentation surfacique à part, un autre moyen de représenter le modèle serait par des fonctions implicites. Elles ont l'avantage de donner d'une manière naturelle, en plus de la description des surfaces qui le constituent, la direction de leurs intérieur et extérieur, utile pour la classification de points par rapport à la scène considérée. Dans ce sens, une possibilité pour résoudre le problème de la conversion CSG-BRep consiste à calculer l'arrangement des primitives en trois dimensions et à en déduire le modèle BRep. Par définition, l'arrangement d'objets dans l'espace 3D est son partitionnement en cellules volumiques, chacune délimitée par un ensemble de faces, arêtes et sommets appartenant aux surfaces des objets. Dernièrement, deux méthodes ressortent sur l'arrangement de quadriques. Elles font l'objet des deux paragraphes qui suivent.

D'une part, l'algorithme de B. Mourrain, J.P. Técourt et M. Teillaud, décrit en 2004, fonctionne directement en trois dimensions en balayant le modèle à l'aide d'un plan [37]. Une décomposition verticale y est effectuée et ses changements sont observés au cours du balayage. Les quadriques sont exprimées par des polynômes à coefficients entiers. Un nombre algébrique est représenté comme un intervalle et un polynôme univarié. Afin de

traiter les nombres algébriques, des techniques algébriques sont mises en place, comme les séquences de Sturm et la représentation rationnelle univariée (RUR) des racines d'un système polynomial à plusieurs variables. Cet algorithme est exact, mais ne prend pas en compte tous les cas. Notamment certaines configurations dégénérées entre quadriques sur le plan de balayage ne sont pas considérées. Sa complexité combinatoire s'élève à  $O(n \log^2 n + V \log n)$  où  $V$  est la taille de la décomposition verticale. De plus, la décomposition verticale mène à une complexité algébrique élevée, comme par exemple des nombres algébriques de degré 16. Tout ceci rend cet algorithme difficilement implémentable en pratique à l'heure actuelle.

D'autre part, dans sa thèse de doctorat de 2002 [52] et dans sa publication de 2003 avec E. Schömer [46], N. Wolpert réduit le problème en un calcul d'arrangement bidimensionnel en projetant les quadriques sur un plan, par la méthode des résultants. Son algorithme repose sur des calculs algébriques rationnels exacts qui utilisent des outils comme l'algorithme d'Uspensky afin de calculer l'intervalle d'isolation pour une racine de polynôme, le calcul de pgcd, le calcul de dérivées, les résultants et les sous-résultants. Il est robuste, car il donne des résultats exacts y compris pour l'ensemble des cas dégénérés. Il est de complexité en temps  $O(n^3 \log n)$ . Une application de cette approche au problème de conversion CSG-BRep a été suggérée par E. Berberich dans son rapport de master de 2004 [5], mais n'a pas été développée à ce jour. Notons aussi que cette approche représente une façon indirecte pour calculer le modèle BRep du fait que l'arrangement de quadriques est un problème difficile en soi.

L'arrangement de quadriques n'est pas la seule possibilité pour résoudre le problème de la conversion CSG-BRep lorsque les objets de la scène sont décrits par des fonctions implicites. En particulier, l'idée de notre thèse a été de se baser sur le calcul d'une forme paramétrée de l'intersection entre toute paire de quadriques. Pour ce dernier, dans le passé, le travail de J. Levin de 1976 a été un grand pas en avant et a inspiré la recherche qui l'a suivi [34]. Enfin, en 2004, L. Dupont a présenté, dans sa thèse de doctorat, un algorithme robuste sur ce sujet [11]. Comme il sert de point de départ à notre approche, nous lui consacrons le chapitre 3 du présent document.

## 1.3 Constat

Comme nous venons de l'énoncer, parmi les travaux réalisés trois solutions s'approchent de notre objectif de conversion robuste et efficace de scènes déterminées par des quadriques : celle de J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha [28, 29], celle de B. Mourrain, J.P. Técourt et M. Teillaud [37], et celle de N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich [46, 5]. Rappelons que la première est destinée aux objets géométriques dont les primitives du modèle CSG sont décrites de façon paramétrique. De leur côté, les deux dernières solutions sont fondées sur le calcul de l'arrangement de quadriques à partir duquel le modèle BRep pourrait être déduit. Ici les primitives du modèle CSG sont représentées par des fonctions implicites.

Dans les paragraphes précédents nous avons également souligné que les solutions proposées, d'un côté, par J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha, et d'autre côté, par B. Mourrain, J.P. Técourt et M. Teillaud sont toutes les deux exactes. Toutefois, la première suppose qu'il n'y a pas de dégénérescences et la seconde exclut certaines configurations entre quadriques sur le plan de balayage. De plus, les deux méthodes s'avèrent sensibles du point de vue de leur complexité. La solution qui paraît être la plus proche de ce que nous cherchons à atteindre est celle de N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich. Cependant le problème que ces derniers ont résolu est celui de l'arrangement de quadriques, et son application au problème de la conversion CSG-BRep n'a été que suggérée pour le moment.

Notre algorithme de conversion CSG-BRep prend en entrée des primitives exprimées par des fonctions implicites. Il repose sur le calcul exact et il traite tous les cas dégénérés qui peuvent se produire, ce qui le rend robuste. Sa complexité dans le pire des cas s'élève à  $O(n^4)$ . Ici,  $n$  désigne le nombre de quadriques de départ. La solution qu'il donne est directe (elle n'est pas basée sur la solution d'un autre problème géométrique comme par exemple l'arrangement de quadriques). Le tableau 1.1 offre une comparaison rapide avec les autres approches. Pour la complexité en temps nous nous sommes basés sur les travaux de C. Lamathe, S. Lazard et S. Petitjean [32].

## **1.4 Résultats et plan de la thèse**

Dans ce manuscrit nous présentons un algorithme pour le problème de conversion CSG-BRep. L'algorithme conçu repose sur le calcul symbolique. Les constructions qu'il définit sont exactes. De plus, il traite l'ensemble des cas possibles ce qui le rend robuste.

approche	techniques algébriques	entrée	sortie	robustesse	complexité en temps
J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha [28, 29]	intersections de carreaux paramétrés	paramétrique	modèle BRep	exact	$O(n^3)$ si le modèle BRep correspondant à tout nœud interne de l'arbre CSG est constitué de $O(n)$ carreaux, et $O(n^9)$ dans le cas général [32]
B. Mourrain, J.P. Télecourt et M. Teillaud [37]	algorithme de balayage, décomposition verticale 3D	implicite	arrangement de quadriques	exact	$O(n \log^2 n + V \log n)$ avec $V$ borné par $O(2^{\alpha(n)^{16}} n^3)$ , $\alpha(n)$ étant la pseudo-réciproque de la fonction d'Ackermann [32]
N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich [46, 5]	projection sur un plan	implicite	arrangement de quadriques	robuste	$O(n^3 \log n)$ [32]
notre approche	QI, Q3, VE, CA	implicite	modèle BRep	robuste	$O(n^4)$

TAB. 1.1 – Tableau de comparaison entre les différentes approches : celle de J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha, celle de B. Mourrain, J.P. Télecourt et M. Teillaud, celle de N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich, et la nôtre.

En entrée chaque quadrique est donnée par son équation implicite. L'arbre CSG est représenté par une expression booléenne. À la sortie, l'ensemble des faces du modèle BRep sont déterminées sous forme de carreaux sur chacune des quadriques qui les contient. Tout carreau est délimité par l'intermédiaire de chaînes de segments issus des courbes d'intersection entre la quadrique qui les contient et les autres quadriques du modèle. Un tel segment correspond à une arête du modèle BRep.

Chaque courbe d'intersection est donnée sous forme paramétrique dans l'espace des paramètres d'une quadrique. Son paramétrage est exprimé de façon symbolique et sans approximation par l'intermédiaire de nombres rationnels et irrationnels. Les sommets du modèle BRep (extrémités des segments de courbe trouvés) sont calculés sous forme d'intervalles d'isolation sur chacune des courbes d'intersection. Le prédicat qui détermine si, pour une quadrique donnée, un segment qu'elle contient délimite une face du modèle BRep sur elle est également étudié de façon exacte.

Du point de vue de la complexité nous avons tenté de réduire le temps de calcul, d'une part en intégrant des algorithmes efficaces, et d'autre part en effectuant une mise à jour qui accélère les calculs déterminant pour toute quadrique les segments de courbe qui délimitent sur elle une face du modèle BRep (voir chapitre 6), et en utilisant des structures de données adaptées (cf. chapitre 7).

Le manuscrit se poursuit par quelques rappels sur les notions de base auxquelles cette thèse fait référence (chapitre 2). Le travail de thèse est ensuite décrit étape par étape. Dans sa globalité l'algorithme est constitué de 4 étapes (elles seront rappelées dans le chapitre 2) :

1. trouver le paramétrage de chaque courbe d'intersection entre quadriques ;
2. trouver les points d'intersection entre au moins trois quadriques et segmenter ainsi les courbes d'intersection obtenues ;
3. détecter les segments qui bornent une face du modèle BRep ;
4. constituer et grouper les chaînes de segments qui délimitent une même face (certaines faces peuvent avoir des « trous », et par conséquent leur bord peut être constitué par au moins deux chaînes de segments).

Nos travaux répondent à tous ces points, et donc résolvent intégralement d'un point de vue théorique le problème CSG-BRep. Chacun de ces points est décrit dans un chapitre à part. Notamment, le chapitre 3 est consacré à la première étape. Elle puise dans le travail de L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. Petitjean [13, 14, 15] qui trouve le paramétrage de la courbe d'intersection entre deux quadriques. Le chapitre 4 considère le deuxième point. Il est basé sur la recherche de L. Dupont, M. Hemmer, S. Petitjean et E. Schömer [12]. Le chapitre 5 décrit les solutions que nous avons apportées pour la troisième étape de l'algorithme. Le chapitre 6 présente notre méthode de mise à jour qui accélère l'étape 3. Le chapitre 7 donne une solution pour la quatrième étape de l'algorithme. Enfin, le chapitre 8 décrit brièvement l'implantation partielle de notre algorithme effectuée au cours de notre travail, ainsi que les résultats expérimentaux obtenus sur quelques exemples. Nous terminons avec des conclusions et des perspectives dans le chapitre 9.





# Chapitre 2

## CSG, BRep : définitions et propriétés

Inspirés par la terminologie de la synthèse d'images, nous définissons une *scène* comme un ensemble d'objets ou de groupements d'objets géométriques en trois dimensions. Elle peut être représentée numériquement par différentes méthodes de modélisation. Deux parmi elles nous intéressent, les modèles CSG et BRep. Le problème sur lequel nous avons travaillé consiste en la conversion d'un modèle CSG au modèle BRep qui lui correspond.

Ce chapitre s'intéresse aux caractéristiques des modèles CSG et BRep et établit un vocabulaire auquel nous nous référerons dans la suite du document. On y trouve en particulier une description théorique de ces modèles et certaines modalités de leur construction en pratique. Enfin, leur application dans les cas de volumes et surfaces quadratiques est abordée.

### 2.1 Modèle CSG

Comme nous l'avons intuitivement défini dans le chapitre précédent, un *modèle CSG* décrit une scène par une composition de volumes bornés par des surfaces simples (par exemple des polyèdres, cylindres, sphères, cônes, tores), appelés *primitives*, liés par l'in-

termédiaire des opérations booléennes<sup>1</sup> intersection (  $\cap$  ), union (  $\cup$  ) et complément (  $!$  ). Notons qu'en combinant ces dernières, d'autres opérations booléennes peuvent être réalisées. C'est le cas de la différence (  $A \setminus B$  ) entre deux ensembles  $A$  et  $B$  correspondant aux éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ . Elle peut s'écrire :

$$A \setminus B = A \cap !B.$$

De même, leur différence symétrique (  $A \Delta B$  ) comprend les éléments de  $A$  et  $B$  qui ne sont pas dans  $A \cap B$ . Elle peut être formalisée par :

$$A \Delta B = (A \cap !B) \cup (!A \cap B).$$

La structure du modèle CSG s'exprime par un arbre, appelé *arbre CSG*. Chacune de ses feuilles représente une primitive. Tout nœud interne correspond à un sous-arbre de l'arbre CSG et représente l'objet géométrique construit à partir des volumes de ses sous-arbres fils par l'intermédiaire de l'opération booléenne qui lui est associée. Enfin, sa racine représente la scène.

Généralement, un modèle CSG est conçu pour une scène dans l'objectif qu'elle soit physiquement réalisable. Pour que ce soit le cas, il doit satisfaire certaines conditions. Celles-ci ont été énumérées en 1980 par A. Requicha [41]. Typiquement, il doit former un volume invariant sous l'effet d'une translation, d'une rotation ou d'une réflexion. De plus, ce volume doit être *régulier*, ou en d'autres termes, il faut qu'il coïncide avec l'adhérence de son propre intérieur, et par conséquent ne contenir ni de sous-ensembles « pendants » ( *dangling*<sup>2</sup> ) ni de trous ou de fissures de dimension inférieure à trois (voir figure 2.1). Il doit également être borné et son bord doit être déterminé de façon complète et finie, par exemple par une description semi-algébrique. Enfin, il doit pouvoir être défini par l'intermédiaire d'une quantité finie de données.

---

<sup>1</sup>Ces opérations sont en réalité des opérations ensemblistes. Cependant, dans la littérature que nous avons trouvée au sujet de la conversion CSG-BRep, elles sont essentiellement appelées des opérations booléennes. Ainsi, par abus de langage, quand nous parlerons dans la suite du manuscrit d'opérations booléennes, nous entendrons les opérations ensemblistes intersection, union et complément.

<sup>2</sup>Un carreau de surface qui ne borne pas de volume ainsi qu'un segment qui ne borne pas de carreau de surface sont deux exemples de sous-ensembles flottants.

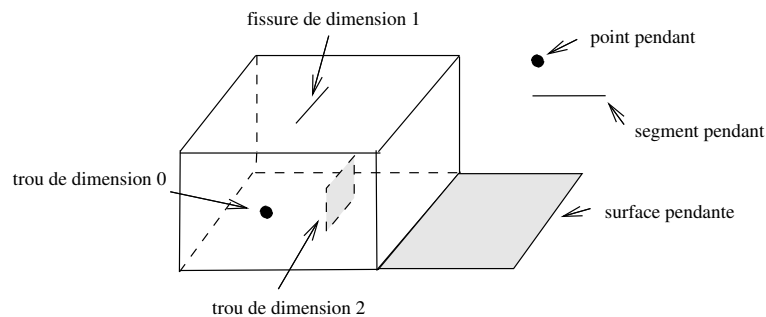


FIG. 2.1 – Exemple d'un cube qui n'est pas régulier.

Dans l'optique que ces conditions puissent être satisfaites par un modèle CSG donné, A. Requicha a suggéré dans son travail de 1980 [41] qu'elles soient d'abord vérifiées pour toutes les primitives qui le constituent. Pour cela, il a proposé que les primitives soient des «  $r$ -ensembles » ( $r$ -sets). Ce sont des ensembles volumiques semi-algébriques réguliers, fermés et bornés.

Une scène construite à partir de  $r$ -ensembles satisfait partiellement les conditions mentionnées ci-dessus. Elle est rigide, bornée, de bord semi-algébrique et de description finie, mais pas forcément régulière. Pour cette raison, les opérations booléennes de l'arbre CSG sont régularisées. L'idée de cette régularisation est de calculer le résultat d'une opération booléenne et de prendre l'adhérence de son intérieur [41]. Concrètement, pour deux ensembles  $A$  et  $B$ , et les opérations régularisées d'intersection, d'union et de complément notées respectivement  $\cap_r$ ,  $\cup_r$  et  $!_r$ , les égalités suivantes sont vérifiées :

- $A \cap_r B = \overline{\text{int}(A \cap B)}$ ;
- $A \cup_r B = \overline{\text{int}(A \cup B)}$ ;
- $!_r A = \overline{\text{int}(!A)}$

où la fonction  $\text{int}()$  désigne l'intérieur d'un ensemble, et  $\bar{\phantom{x}}$  désigne l'adhérence.

Les compositions de ces opérations sont également des opérations booléennes régularisées. Voici par exemple comment obtenir la différence et la différence symétrique régularisées :

$$A \setminus_r B = A \cap_r !_r B$$

$$A \Delta_r B = (A \cap_r !_r B) \cup_r (!_r A \cap_r B).$$

La figure 2.2 illustre un exemple de deux cubes  $A$  et  $B$  qui partagent un carré de surface. Leur intersection  $A \cap B$  correspond à ce carré. Par conséquent,  $A \cap B$  est de dimension inférieure à trois et ne représente pas un objet volumique. De son côté, leur intersection régularisée  $A \cap_r B$  est réduite à l'ensemble vide. De même, la différence  $A \setminus B$  revient au volume de  $A$  privé du carré de surface associé à  $A \cap B$ , volume non fermé et donc non régulier. Elle se distingue ainsi de la différence régularisée  $A \setminus_r B$  qui correspond au cube  $A$ .

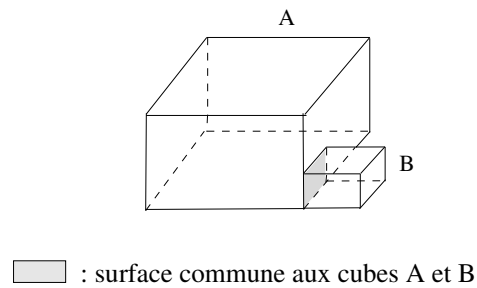


FIG. 2.2 – La surface hachurée est commune aux cubes  $A$  et  $B$  ci-dessus. Elle correspond à leur intersection au sens de la théorie des ensembles. Leur intersection régularisée est réduite à l'ensemble vide et leur différence régularisée, au cube  $A$ .

## 2.2 Modèle BRep

Le modèle BRep décrit une scène par les éléments non volumiques qui composent sa surface. Ces derniers consistent en faces, arêtes et sommets formés par l'interaction d'un ensemble de surfaces de départ. Ainsi, une face correspond à un carré d'une surface, une arête à un segment de courbe d'intersection d'au moins deux surfaces, et un sommet à un point d'intersection entre deux courbes distinctes. Les paragraphes qui suivent ont été établis à partie de la recherche de A. Requicha [40].

Pour une scène constituée de plans et de quadriques naturelles, A. Requicha définit une *face* comme un sous-ensemble bidimensionnel du bord de la scène qui est homogène (ne contient pas de sous-ensembles unidimensionnels), fermé, connexe et contenu dans une seule surface de départ. Elle est délimitée des autres faces du modèle par l'intermédiaire

d'un cycle de segments de courbes et de points obtenus par l'intersection de cette surface avec d'autres surfaces de départ. La scène est formée par l'union de toutes ses faces (voir figure 2.3).

De même, une *arête* est un sous-ensemble unidimensionnel fermé et connexe de l'intersection d'une paire de surfaces de départ qui appartient au bord d'une face [40]. Elle peut former une boucle ou bien elle est séparée des autres arêtes par ses extrémités, deux points nommés *sommets* correspondant quant à eux à l'intersection de trois surfaces de départ. Lorsque deux arêtes coïncident en un sommet, elles sont dites adjacentes. Les cycles constitués par l'ensemble de toutes les arêtes d'une même face, adjacentes deux à deux, déterminent son bord (cf. figure 2.3).

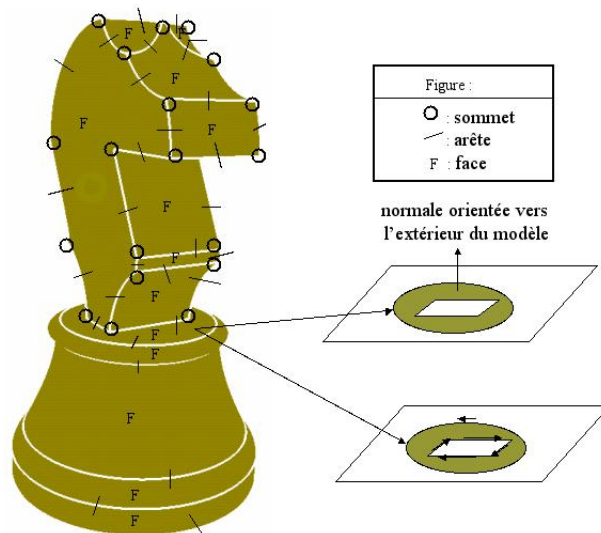


FIG. 2.3 – Sur cette figure, toutes les faces, arêtes et sommets visibles du modèle BRep sont indiqués. Pour une des faces de la scène, située sur un plan horizontal, deux types d'orientations sont illustrés : sur la première, la normale de cette face qui indique son côté extérieur, sur la seconde, une orientation des arêtes selon la convention que, vue de l'extérieur de la scène, la face qu'elles délimitent se trouve à gauche par rapport à leur orientation.

Globalement deux types de données, topologiques et géométriques, sont contenus dans le modèle BRep d'une scène. Côté topologique, une structure combinatoire (par exemple

un graphe dit d'adjacence) indique les relations d'adjacence entre les faces, les arêtes et les sommets. D'autre part, une description géométrique permet de situer toute face, toute arête et tout sommet du modèle dans l'espace (par exemple une face ou une arête peuvent être définies par l'intermédiaire des équations des surfaces qui les contiennent).

La structure d'un modèle BRep peut être détaillée. Typiquement, mémoriser les normales des faces ou bien orienter les faces, par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre vues de l'extérieur de la scène, permet de caractériser leur côté extérieur. Dans le même état d'esprit, une orientation peut être associée aux arêtes. En particulier, chaque face peut être spécifiée par une orientation des arêtes qui la délimitent de façon à ce que, vue de l'extérieur de la scène, elle soit située à gauche par rapport à leur orientation (voir figure 2.3).

## 2.3 Application des opérations booléennes régularisées dans la pratique

Étant donné que le modèle CSG définit une scène comme une composition de volumes et que le modèle BRep la décrit par sa surface, pour une même scène, le modèle BRep peut être considéré comme le bord du modèle CSG.

En ce qui concerne le modèle CSG, dans la section 2.1 nous avons souligné la nécessité que les opérations booléennes utilisées soient régularisées. Celles-ci garantissent en particulier, lorsque les primitives sont des  $r$ -ensembles, que la scène est un ensemble d'objets géométriques homogènes à trois dimensions (ne contenant pas de sous-ensembles de dimension 1 ou 2).

Cependant, les opérations booléennes régularisées sont un outil mathématique dont la réalisation informatique n'est pas simple. Dans la pratique, la construction d'un modèle CSG est effectuée à partir d'opérations booléennes au sens de la théorie des ensembles. Cette construction définit la même scène que la construction effectuée à partir d'opérations booléennes régularisées, mais comme nous le verrons dans la section 2.3.1 son bord ne correspond pas forcément au modèle BRep qui lui est associé. Typiquement, elle peut

contenir plus d'éléments de dimension 0, 1 ou 2.

Afin de détecter parmi tous les éléments non volumiques obtenus ceux qui font partie du modèle BRep, ils sont soumis à un classement par rapport au modèle CSG. Cette section s'intéresse aux spécificités de ce classement.

### 2.3.1 Classement d'un élément non volumique

Le classement d'un élément non volumique par rapport au modèle CSG d'une scène consiste à estimer sa position vis-à-vis de lui. Plus précisément, il détermine si cet élément se situe à l'extérieur, à l'intérieur de lui ou sur sa surface.

Comme tous les points contenus dans un élément surfacique ont le même classement par rapport au modèle CSG d'une scène donnée, un seul point parmi eux est considéré. Son classement est estimé relativement à la racine de l'arbre CSG. Pour cela, il est d'abord calculé par rapport à l'ensemble des primitives. Ainsi, chaque feuille est marquée par un signe :  $-1$ ,  $1$  ou  $0$  pour indiquer respectivement extérieur, intérieur ou surface. Ensuite, en partant des feuilles, un parcours progressif des opérations booléennes sur les nœuds internes permet de remonter jusqu'à la racine de l'arbre CSG. Nous parlons alors d'une *évaluation de l'arbre CSG*.

Les opérations booléennes union, intersection et complément au sens de la théorie des ensembles sont appliquées selon la convention donnée **comme** dans le tableau 2.1.

Il se trouve que le résultat pour la plupart des cas illustrés dans le tableau 2.1 reste le même lorsque les opérations booléennes sont régularisées (voir tableau 2.2).

Comme nous pouvons le voir, si l'évaluation de l'arbre CSG ne rencontre pas  $0 \cup 0$  ou  $0 \cap 0$ , alors le signe  $-1$ ,  $1$  ou  $0$  obtenu pour sa racine en utilisant les opérations booléennes ensemblistes du tableau 2.1 garantit que le point se trouve respectivement à l'extérieur, à l'intérieur ou sur la surface du modèle CSG, ce qui détermine son classement. Sinon, ce dernier risque de s'avérer erroné et mérite une étude plus approfondie.

En effet, dans l'exemple où au moins deux objets géométriques, qui ne partagent pas de volume, ont un élément non volumique en commun qui se situe sur leur surface, l'intersection non régularisée de ces objets résulte en ce même élément. Il devient alors pendant et par conséquent il n'est pas sur la surface du modèle BRep (voir figure 2.4).



<u>union</u>			
∪	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	?	1
1	1	1	1

<u>intersection</u>			
∩	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	0	0
1	-1	0	1

<u>complément</u>
!(-1) = 1
!(0) = 0
!(1) = -1

TAB. 2.1 – Ce tableau représente les opérations union, intersection et complément au sens de la théorie des ensembles. Les signes  $-1$ ,  $1$  et  $0$  indiquent respectivement l’extérieur, l’intérieur et la surface d’un ensemble donné. À titre d’exemple, un point  $p$  situé à l’extérieur de deux ensembles géométriques  $A$  et  $B$  est également à l’extérieur de  $A \cup B$  et de  $A \cap B$ . Notons que lorsque  $p$  se trouve sur la surface de  $A$  et de  $B$ , ces opérations ne permettent pas de conclure s’il est positionné à l’intérieur ou sur la surface de  $A \cup B$ .

De même, prenons l’exemple où deux objets géométriques volumiques  $A$  et  $B$  bornés par des surfaces simples n’ont pas de volume en commun, mais partagent une face  $F$ , et où les faces de  $A$  et  $B$  adjacentes en une arête de  $F$  et distinctes de  $F$ , notées respectivement  $F_A$  et  $F_B$ , reposent sur une même surface géométrique. Centrons notre attention sur l’arête commune de  $F$ ,  $F_A$  et  $F_B$ . Cette arête est déterminée comme arête de  $A \cap B$ , et ses extrémités comme sommets. Cependant elle correspond à une fissure de dimension 1 dans le modèle CSG et ne délimite pas de face sur sa version BRep (cf. figure 2.5) ce qui est en contradiction avec la définition que nous avons donnée dans la section 2.2.

Ces exemples d’intersection et d’union non régularisés montrent bien que les opérations  $0 \cap 0 = ?$  ou  $0 \cup 0 = 0$  posent deux problèmes : d’une part elles ne permettent pas de classer de façon fiable un élément non volumique (il n’est pas certain que cet élément se trouve effectivement sur le bord du modèle CSG), et d’autre part, même si le classement s’avère correct, elles ne peuvent pas garantir qu’il s’agisse bien d’une face, une arête ou un sommet du modèle BRep correspondant (par exemple un segment de courbe qui est bien sur la surface du modèle CSG, mais qui ne délimite pas pour autant une face de sa version BRep).

Comme dans notre travail nous procédons par des classements de segments de courbes

union régularisée

$\cup_r$	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	?	1
1	1	1	1

intersection régularisée

$\cap_r$	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	?	0
1	-1	0	1

complément régularisé

$!_r(-1) = 1$
$!_r(0) = 0$
$!_r(1) = -1$

TAB. 2.2 – Ce tableau représente les opérations union, intersection et complément régularisés. Les signes  $-1$ ,  $1$  et  $0$  indiquent respectivement l’extérieur, l’intérieur et la surface d’un ensemble donné. Notons qu’ici, lorsqu’un point  $p$  se trouve sur la surface de deux ensembles géométriques  $A$  et de  $B$ , ces opérations ne permettent pas de conclure où il est positionné par rapport à  $A \cup_r B$  (similairement au tableau 2.1) et par rapport à  $A \cap_r B$ .

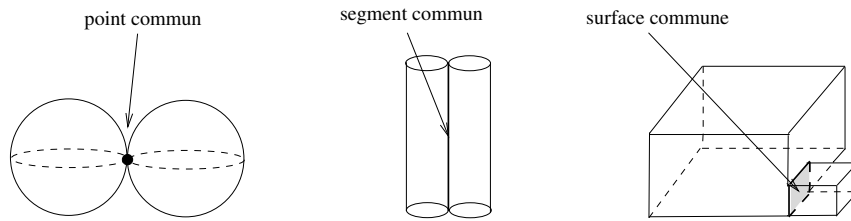


FIG. 2.4 – Objets volumiques qui ont un élément non volumique en commun. Leur intersection résulte respectivement en un point (dimension 0), en un segment (dimension 1) et en une face (dimension 2). Leur intersection régularisée est réduite de son côté à l’ensemble vide.

afin de vérifier s’ils sont des arêtes du modèle BRep, ceux-ci seront au centre de notre attention dans la suite du chapitre. Notons que si les opérations booléennes non régularisées ne suffisent pas toujours pour déterminer avec certitude le classement d’un segment, une étude du volume qui l’entoure permet de l’établir. En particulier un segment qui ne borne pas de volume peut être par exemple pendant ou délimiter une surface pendante et par conséquent il doit être éliminé. De même, il peut être entièrement entouré de volume. Dans ce cas-là il se situe à l’intérieur du modèle et il n’a pas besoin d’être conservé. Par contre, si le segment est partiellement entouré par le volume du modèle, alors il repose sur sa surface. Dans ce contexte, il est considéré comme arête uniquement lorsque le volume

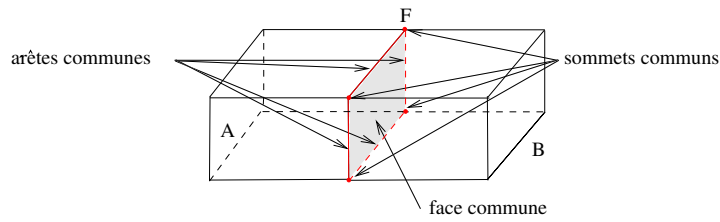


FIG. 2.5 –  $A$  et  $B$  sont deux cubes partageant une face  $F$ . Les faces de  $A$  et  $B$  adjacentes en une arête de  $F$  et distinctes de  $F$ , reposent sur un même plan. Leurs arêtes communes restent sur le bord de leur union non régularisée et forment ainsi des fissures de dimension 1, ce qui ne correspond pas au modèle BRep associé.

qui l'entoure n'est pas délimité par le même côté d'une seule surface (cf. figure 2.6). Afin de concrétiser ce que nous appelons volume autour d'un segment, nous recourons à la notion de voisinage d'un point.

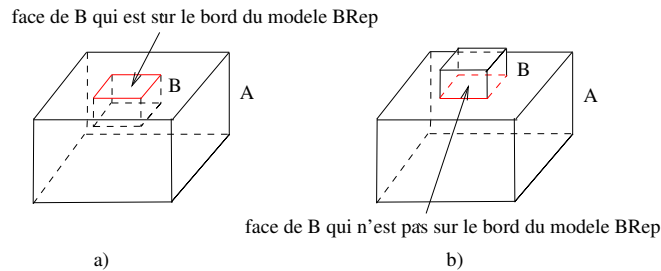


FIG. 2.6 – Scènes constituées de l'union régularisée de deux cubes  $A$  et  $B$ . La face de  $B$  qui est délimitée par des segments rouges est contenue dans la face supérieure de  $A$ . Ces segments sont sur la surface du modèle CSG. Deux situations sont distinguées : a)  $B$  est contenu dans  $A$  - les segments en rouge ne délimitent pas une face sur  $A \cup_r B$  et ne définissent donc pas des arêtes sur le modèle BRep qui lui est associé ; b)  $A$  et  $B$  n'ont pas de volume commun - les segments en rouge définissent des arêtes sur le modèle BRep.

### 2.3.2 Voisinages

Cette section a été établie à partir des travaux de recherche de A. Requicha [40].

Le *voisinage* d'un point  $p$  est une boule ouverte centrée en  $p$  de rayon suffisamment

petit. Dans ce sens,  $p$  se trouve à l'intérieur d'un objet volumique si et seulement si son voisinage  $y$  est entièrement contenu. De même, il est situé à l'extérieur d'un objet volumique si et seulement si son voisinage ne l'intersecte pas. Enfin, dans le cas où  $p$  appartient au bord d'un objet volumique, son voisinage intersecte partiellement cet objet.

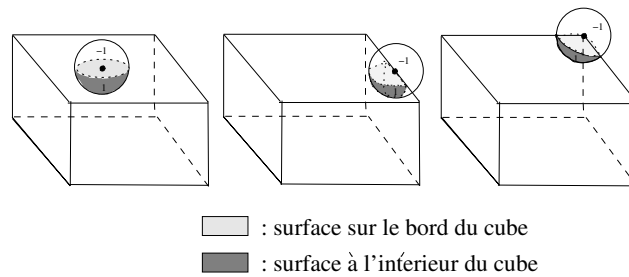


FIG. 2.7 – Figure inspirée du cours de A. Requicha sur la modélisation géométrique [40]. L'attention est portée sur le voisinage de trois points situés respectivement sur une face, une arête et un sommet d'un cube. L'intersection de l'adhérence du voisinage de ces points avec le cube est illustrée.

Les voisinages d'un point peuvent être caractérisés selon l'élément surfacique auquel ils appartiennent. La figure 2.7 montre les cas où  $p$  repose sur une face, une arête ou bien correspond à un sommet d'un tel objet. Comme nous l'avons signalé plus haut, nous nous sommes intéressés uniquement au voisinage d'un segment.

Lorsqu'un point  $p$  se situe sur une arête d'un polyèdre, son voisinage peut être illustré en deux dimensions sur le plan perpendiculaire à ce segment en  $p$ . Les intersections de ce plan avec toutes les surfaces qui passent par ce segment forment des *secteurs*. Ici, un système de coordonnées local pourrait servir d'origine pour mesurer les angles de ces secteurs et les représenter ainsi avec précision. Ces angles divisent en arcs le cercle obtenu sur le plan perpendiculaire par l'intersection de ce dernier avec la fermeture du voisinage de  $p$ . Il est alors facile de combiner les arcs formés en leur appliquant les opérations  $\cup_r$  et  $\cap_r$  (cf. figure 2.8).

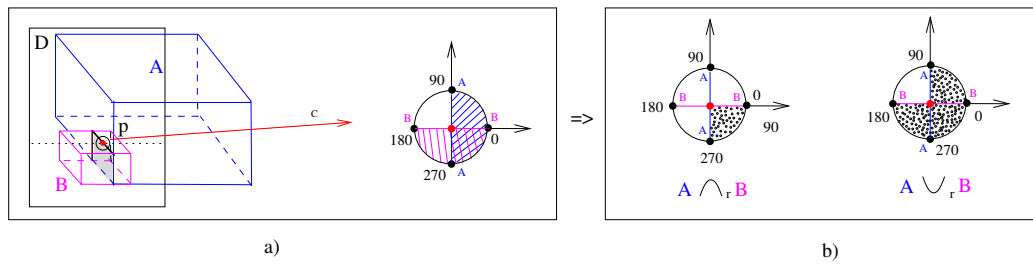


FIG. 2.8 – a) Voici deux cubes  $A$  et  $B$ . L'attention est portée sur le point  $p$  situé sur l'intersection de leurs surfaces.  $D$  est un plan qui passe par  $p$  et qui est perpendiculaire aux faces de  $A$  et  $B$  qui contiennent  $p$ . À droite sont donnés un système de coordonnées centré en  $p$  et contenu dans  $D$ , ainsi que le cercle  $C$  qui est l'intersection entre  $D$  et l'adhérence du voisinage de  $p$ . Les deux demi-cercles sur  $C$  correspondant à l'intérieur des deux cubes sont également illustrés. b) Ici sont représentés les arcs sur  $C$  qui correspondent respectivement à  $A \cap_r B$  et  $A \cup_r B$ .

## 2.4 Brève présentation de notre algorithme de conversion CSG-BRep

Revenons au sujet de cette thèse qui est de convertir un modèle CSG à base de quadriques volumiques en le modèle BRep qui lui correspond. Dans ce problème, la régularisation des opérations booléennes peut avoir lieu récursivement à chaque opération booléenne ou bien une fois que toutes les opérations booléennes ont été effectuées. Dans le premier cas, les éléments surfaciques des objets obtenus aux nœuds internes de l'arbre CSG sont classés au fur et à mesure de la construction de la scène, c'est la conversion CSG-BRep incrémentale. Dans le deuxième cas, le classement est fait directement pour les éléments surfaciques de la scène obtenue à la racine, c'est la conversion CSG-BRep non-incrémentale qui est l'objet de notre travail.

Notre conversion CSG-BRep comporte quatre étapes abordées dans la suite du manuscrit :

1. le calcul des courbes d'intersection entre primitives (Q1) ;
2. la segmentation des courbes obtenues par leurs points d'intersection (Q3) ;

3. le classement des segments de courbe par rapport au modèle CSG afin de sélectionner ceux qui forment les arêtes du modèle BRep correspondant (VE) ;
4. l'orientation et l'assemblage des segments sélectionnés en chaînes de segments, et groupes de telles chaînes, qui délimitent une même face de la scène (CA).

La suite de cette section fournit quelques détails de plus sur notre algorithme.

Les deux premières étapes sont résolues grâce à deux algorithmes que nous avons intégré dans notre travail : QI<sup>3</sup> qui trouve les courbes d'intersection entre quadriques sous forme paramétrique [13, 14, 15, 33], et un autre algorithme que nous avons appelé Q3 et qui calcule et ordonne les points d'intersection de chaque courbe avec les autres quadriques afin d'obtenir les segments de courbes à classer [12]. Les deux étapes restantes sont traitées par les algorithmes que nous avons conçus : VE (Visible Edges) pour la troisième étape, et CA (Chains Assembling) pour la dernière étape.

Comme il a été mentionné dans l'introduction du présent document, les primitives du modèle CSG que notre algorithme prend en entrée ne sont pas des  $r$ -ensembles comme le suggère A. Requicha, mais des volumes bornés par des quadriques (surfaces algébriques de degré deux). En particulier nos scènes sont construites à base de quadriques et d'opérations booléennes régularisées. Ainsi, leur bord est algébriquement déterminé et leur description peut être effectuée à partir d'une quantité finie de données. Cependant, nos scènes ne sont pas forcément régulières ou bornées, ce qui nécessite une justification sur ces deux points.

En ce qui concerne la régularité, le fait que toutes les primitives ne forment pas forcément de volumes réguliers (comme c'est le cas d'un plan double) n'implique pas automatiquement que nos scènes ne sont pas régulières. D'après la section 2.1 une scène n'est pas régulière si elle contient des sous-ensembles, des trous ou des fissures de dimension inférieure à trois. Dans notre algorithme, QI calcule, au cours de la première étape, les intersections entre paires de quadriques et élimine toutes celles qui sont de dimensions 0 (points) et 2 (surfaces). Les intersections de dimension 1 (segments) sont, quant à elles, examinées au cours de la troisième étape, lors de leur classement par VE. Ainsi, les segments pendants, l'ensemble de ceux qui sont intérieurs au modèle (les trous de dimension 1 appartiennent à cet ensemble) et l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à une face du

---

<sup>3</sup>disponible en ligne sur le cite <http://www.loria.fr/equipes/vegas/software.php>

modèle BRep à construire (les fissures de dimension 1 appartiennent à cet ensemble) sont éliminés (voir chapitre 5). Ceci remplit les conditions de régularité pour nos scènes à la fin de l'algorithme.

Il reste à vérifier si le modèle est borné. En effet, les quadriques ne le sont pas forcément. Cependant, elles peuvent être combinées par des opérations booléennes de façon à obtenir un modèle borné. Par exemple, le volume entre deux paires de plans n'est pas borné, mais celui d'un cube formé à partir de trois paires de plans l'est. Ainsi, les quadriques offrent la possibilité de créer des modèles bornés et des modèles non bornés. À part la création d'objets physiquement réalisables, ceci permet d'étendre la modélisation à des scènes plus générales, où, si cela s'avère nécessaire, une boîte englobante peut être ajoutée dans les données de départ pour rendre les scènes bornées. Dans le cadre de notre travail de thèse, nous considérons uniquement des modèles bornés. Ainsi, même si nos primitives ne sont pas de  $r$ -ensembles, les modèles CSG traités par notre algorithme sont physiquement réalisables et les modèles BRep obtenus sont bien définis.

L'idée de notre démarche consiste à déterminer chaque élément surfacique du modèle BRep par l'intermédiaire des segments de courbe obtenus à la sortie de Q3. En particulier, définir l'ensemble des arêtes revient à trouver et à décrire tous les segments de courbe qui correspondent à une arête. En partant de ces derniers, une face peut être définie sur une quadrique qui la contient par les segments de courbe correspondant aux arêtes qui la délimitent. Enfin, les sommets du modèle BRep sont les extrémités de ces segments. Ainsi, nous nous sommes efforcés dans notre algorithme (composé de VE et CA) à déterminer, sur chaque quadrique, les chaînes de segments de courbe qui délimitent sur elle une face du modèle BRep.

Les courbes d'intersection segmentées issues de Q3 sont examinées séparément. Sur une courbe donnée tous les segments sont étudiés un à un. Un premier classement (que nous appelons dans le chapitre 5 « classement global ») par rapport au modèle CSG est effectué. Pour cela, les classements du segment par rapport aux volumes bornés par chacune des quadriques de départ sont établis. Ensuite, l'évaluation de l'arbre CSG est calculée en appliquant les opérations du tableau 2.1 dans la section 2.3.

Notons que d'après ce dernier  $0 \cap 0 = ?$ . Ici ? n'est pas fixé. De façon générale ? peut

être  $-1$ ,  $0$  ou  $1$ . Dans ce sens, toujours d'après le même tableau, quelle que soit  $?$ ,  $?\cap 1 = 1$  et  $?\cup -1 = -1$ . Pour tous les autres cas d'union et d'intersection de  $?$ , le résultat dépend de la valeur de  $?$ . Afin de simplifier notre algorithme nous avons remplacé  $?$  par  $0$ . Ainsi il est certain que si l'évaluation de l'arbre CSG indique  $-1$  ou  $1$ , alors le segment est avec certitude respectivement à l'extérieur ou à l'intérieur du modèle CSG. De son côté, le cas où elle indique  $0$  n'est pas concluant.

Il est clair que tous les segments de courbe qui délimitent une face du modèle BRep sont nécessairement situés sur la surface du modèle CSG. Afin de les sélectionner, un deuxième classement (que nous appelons dans le chapitre 5 « classement approfondi ») est appliqué à tous ceux dont le premier classement indique  $0$ . Pour un segment situé sur une quadrique donnée, ce classement a pour objectif de déterminer s'il délimite une face sur cette quadrique (cf. figure 2.9). Il est basé sur la notion de secteur angulaire.

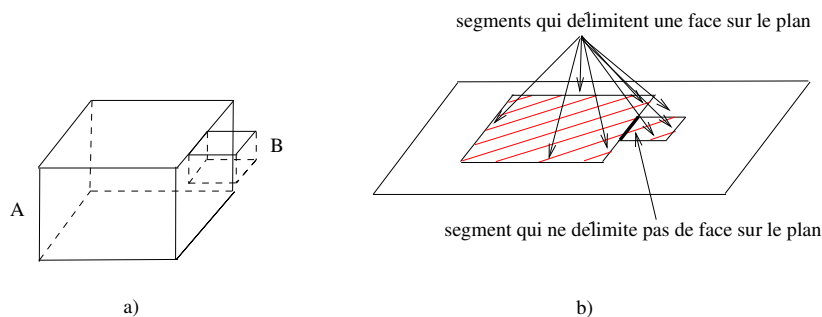


FIG. 2.9 – a) Voici un modèle formé par l'union de deux cubes  $A$  et  $B$ . Une des faces latérales de  $B$  est incluse dans une des faces latérales de  $A$ . b) Les faces supérieures de  $A$  et de  $B$  reposent sur un même plan. Le carreau hachuré correspond à l'union de ces deux faces qui forme de son côté une face du modèle BRep. Tous les segments en noir sont sur la surface du modèle BRep, et donc leur classement global indique  $0$ . Cependant ils ne délimitent pas tous une face du modèle BRep. En particulier, le segment en gras se trouve dans le carreau hachuré. Il n'est éliminé que lors de son classement approfondi.

Le secteur angulaire représente le voisinage d'un segment sur une quadrique donnée  $Q$  par rapport à un objet volumique. Il est divisé en quatre portions (à « gauche » du segment et à l'extérieur de  $Q$ , à « gauche » du segment et à l'intérieur de  $Q$ , à « droite » du segment



et à l'extérieur de  $Q$ , et enfin à « droite » du segment et à l'intérieur de  $Q$ ), nommés secteurs. Tout secteur est marqué par un nombre  $-1$  ou  $1$  pour indiquer s'il se situe à l'extérieur ou à l'intérieur d'un objet volumique considéré. Lors du classement approfondi, les secteurs angulaires par rapport au volume formé par chacune des quadriques sont établis. Ensuite, une évaluation de l'arbre CSG secteur par secteur est effectuée. Le secteur angulaire obtenu exprime le voisinage du segment en question sur  $Q$  par rapport au modèle CSG. VE conclut, selon les signes de ses secteurs, si ce segment délimite bien une face sur  $Q$  ou non. Le secteur angulaire sera défini de façon formelle dans le chapitre 5.

Une fois les arêtes sélectionnées pour l'ensemble des quadriques, elles sont orientées et assemblées séparément sur chacune des quadriques qui les contiennent d'après la convention d'orientation (voir figure 2.3). Enfin, l'ensemble des chaînes d'arêtes qui délimitent chaque face du modèle CSG sur le bord de  $Q$  est déterminé.

# Chapitre 3

## QI : Paramétrage de l'intersection de deux quadriques

Ce chapitre traite de la première étape de notre conversion CSG-BRep. Elle consiste à calculer un paramétrage des courbes d'intersection entre surfaces constituant le modèle CSG. Pour résoudre ce problème, un algorithme d'intersection de quadriques a été intégré dans notre travail. Il est basé sur la recherche de L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. Petitjean [11, 13, 14, 15]. Il a été implémenté par S. Lazard et S. Petitjean sous le nom de QI et son efficacité a été évaluée [33]. Nous nous sommes basés sur toutes ces références afin de l'exposer dans les paragraphes qui suivent.

Dans cet algorithme, les deux quadriques de départ sont représentées par leurs fonctions implicites à coefficients entiers de taille arbitraire. À sa sortie, leur courbe d'intersection, si elle existe, peut être exprimée sous forme paramétrique. Sa description topologique est également disponible. En particulier, le paramétrage de chacune de ses composantes est donné séparément et leurs incidences communes peuvent être indiquées. Dans le cas où les deux quadriques sont identiques ou bien elles n'ont pas de points en commun, l'algorithme indique que l'intersection correspond respectivement à une quadrique ou à l'ensemble vide.

Dans le contexte de notre thèse, QI est appliqué successivement à toutes les paires de quadriques en entrée. Par la suite, le résultat sortant sera soumis à un autre algorithme où chaque composante obtenue sera intersectée avec toutes les quadriques du modèle qui ne

la contiennent pas. Un point correspondant à l'intersection de 3 quadriques ainsi calculé sera potentiellement une extrémité de segment de courbe visible sur l'objet modélisé.

### 3.1 Préliminaires

L'espace de travail est l'espace projectif réel de dimension 3. Par définition, *l'espace projectif* de dimension  $n$  sur un corps  $\mathbb{K}$ , noté  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  est l'ensemble des droites passant par l'origine de  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Plus formellement, c'est l'ensemble des classes issues de la relation d'équivalence  $x \sim y$ ,  $x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tel que  $(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_{n+1})$ . Notons que l'ensemble  $(x_1, \dots, x_n, 1)$  peut être mis en bijection avec  $\mathbb{K}^n$ . Par contre, l'hyperplan projectif  $(x_1, \dots, x_n, 0)$  ne peut être associé à aucun sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ . Il est appelé hyperplan à l'infini.

Dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , une quadrique  $Q_S$  s'exprime par une équation homogène à quatre variables  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xw + 2a_{23}yz + 2a_{24}yw + 2a_{34}zw = 0$ , ou par abréviation  ${}^tV.S.V = 0$ , avec  $V$  le vecteur  $(x, y, z, w) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , et  $S$ , la matrice symétrique de ses coefficients

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

où  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ;  $1 \leq i, j \leq 4$ ;  $i, j \in \mathbb{N}$ .

L'*inertie* d'une quadrique est définie comme le couple  $(I_{max}, I_{min})$ , où  $I_{max}$  et  $I_{min}$  sont respectivement le max et le min du nombre des valeurs propres positives et de celui des valeurs propres négatives de sa matrice. La somme de  $I_{max}$  et  $I_{min}$  est appelée *rang* de la quadrique. Comme l'inertie est invariante sous l'effet d'une transformation congruente (application linéaire à coefficients réels dont la matrice associée est de déterminant non nul [11]), elle caractérise les quadriques projectives (la preuve de cette affirmation repose sur la loi d'inertie de Sylvester [50]).

Les quadriques projectives peuvent être de rang 4, 3, 2 ou 1 ([13, tableau 1]). Parmi les quadriques de rang 4, nous distinguons celles d'inertie (4, 0), (3, 1) et (2, 2). Dans l'espace

affine réel :

- celles d’inertie  $(4, 0)$  sont réduites à l’ensemble vide ;
- celles d’inertie  $(3, 1)$  comprennent les ellipsoïdes, les hyperboloïdes à deux nappes et les paraboloides elliptiques ;
- celles d’inertie  $(2, 2)$  englobent les hyperboloïdes à une nappe et les paraboloides hyperboliques.

Les quadriques de rang 3 sont appelées des *cônes*. Les cônes peuvent être d’inertie  $(2, 1)$  ou  $(3, 0)$  :

- ceux d’inertie  $(2, 1)$  sont associés dans l’espace affine réel à un cône ou à un cylindre ;
- ceux d’inertie  $(3, 0)$  reviennent dans l’espace affine complexe également à un cône ou à un cylindre, mais sont réduits dans l’espace affine réel respectivement à un point ou à l’ensemble vide.

Les quadriques de rang 2 sont dites des *paires de plans*. Leur inertie est soit  $(1, 1)$ , soit  $(2, 0)$  :

- celles d’inertie  $(1, 1)$  correspondent dans l’espace affine réel à une paire de plans ou à un plan simple ;
- celles d’inertie  $(2, 0)$  sont associées dans l’espace affine complexe à une paire de plans, qui, dans l’espace affine réel est réduite, ou bien à une droite, intersection des deux plans complexes s’ils sont sécants, ou bien à l’ensemble vide dans le cas contraire.

Enfin, les quadriques de rang 1 sont forcément d’inertie  $(1, 0)$  et reviennent à un plan double affine réel ou à l’ensemble vide si ce plan se trouve à l’infini.

À part l’inertie et le rang d’une quadrique, les notions de faisceau et d’équation déterminantielle occupent également une place fondamentale dans l’algorithme. Le *faisceau* de deux quadriques est l’ensemble de leurs combinaisons linéaires. Il contient une infinité de quadriques distinctes dont toutes les paires ont la même courbe d’intersection. De son côté, l’équation *déterminantielle* associée à deux quadriques  $Q_S$  et  $Q_T$  d’un faisceau donné s’écrit  $\det(\lambda.S + \mu.T) = 0$  pour  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

Les courbes d’intersection calculées par QI sont définies dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Elles sont caractérisées par leur nature singulière ou non singulière dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Dans le cadre général,

un point  $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , qui appartient à une courbe d'intersection  $C_{Q_1 \cap Q_2}$  entre deux quadriques  $Q_1$  et  $Q_2$  est dit *point singulier* si le rang de la matrice Jacobienne de  $C_{Q_1 \cap Q_2}$  formée par les équations implicites de  $Q_1$  et  $Q_2$  est inférieur à 2 (cette définition est classique, voir par exemple [13]). Une courbe dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  est dite *singulière* dans  $\mathbb{C}$  si elle contient un point singulier dans  $\mathbb{C}$ , et elle est dite *non singulière, régulière ou lisse* dans  $\mathbb{C}$  dans le cas inverse. Similairement, une courbe dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  est dite *singulière* dans  $\mathbb{R}$  si elle contient un point singulier dans  $\mathbb{R}$ , et elle est dite *non singulière, régulière ou lisse* dans  $\mathbb{R}$  dans le cas inverse.

Dans notre algorithme, nous nous intéressons uniquement aux quadriques et intersections réelles. Notons que, dans le cadre général, une courbe d'intersection définie dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  peut être réduite lors du passage dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Par exemple, une courbe présentant une singularité dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  peut être une courbe lisse dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Dans la suite du manuscrit nous considérons les courbes d'intersection dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Cependant, à moins que ce soit spécifié autrement, nous dirons qu'une courbe d'intersection est singulière ou non singulière (régulière, lisse) si elle est respectivement singulière ou non dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ .

Nous parlerons de deux types de paramétrages, celui d'une quadrique et celui d'une composante de la courbe d'intersection. Le paramétrage d'une quadrique est exprimé par un vecteur dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  dont les coordonnées sont le plus souvent des polynômes sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  ou  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. Petitjean [13, 11] ont déterminé des paramétrages pour les quadriques projectives d'inertie différente de (3,1), c'est-à-dire pour les quadriques réglées (voir la section suivante) [13, tableau 2]. Par exemple, une quadrique  $Q_R$  d'inertie (2, 2) d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 - dw^2 = 0$  est paramétrée par  $X_R = \left( \frac{ut+avs}{a}, \frac{us-bvt}{b}, \frac{ut-avs}{\sqrt{ac}}, \frac{us+bvt}{\sqrt{bd}} \right)$ ,  $(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Ces paramétrages sont optimaux au sens où, dans le cas le pire, les racines carrées dans leurs coefficients ne peuvent pas être évitées ([13, théorème 6.1]). De son côté, le paramétrage d'une composante de la courbe d'intersection est défini sur l'espace des paramètres d'une quadrique du faisceau. La composante est exprimée par un vecteur dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  de polynômes sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , comme, par exemple, celui de la droite  $\left( 15v, -54v, -u, -20v \right)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

## 3.2 Survol de l'algorithme de QI

Dans un même faisceau, les quadriques peuvent différer en leurs inerties et leurs rangs (dans l'espace projectif). De même, elles peuvent être régulières (lorsqu'elles ne contiennent pas de point singulier) ou singulières, réglées (lorsque par chaque point de leur surface passe une droite qui y est contenue) ou non-réglées. L'idée de l'algorithme est de choisir dans le faisceau, si elle existe, une quadrique réglée  $Q_R$ , à coefficients rationnels et de plus petit rang possible. Le faisceau contient nécessairement une telle quadrique sauf dans le seul cas très spécifique, où la courbe d'intersection est réduite à deux points distincts ([13, théorème 3]). Ensuite,  $Q_R$  est paramétrée et son paramétrage est injecté dans l'équation d'une des deux quadriques de départ, disons  $Q_S$ . L'équation obtenue est dite équation aux paramètres. Sa solution est transmise sur le vecteur de paramétrage. La courbe d'intersection cherchée est ainsi déterminée sur l'espace des paramètres de la quadrique choisie.

Dans leur travail, L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. Petitjean [13, 14, 15, 11] ont analysé les caractéristiques des courbes d'intersection entre deux quadriques et ont réalisé une séparation préalable de cas. Dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  la courbe d'intersection consiste en au plus 4 composantes dont le degré algébrique total ne dépasse pas 4. Dans cet espace, les divers cas peuvent être très globalement résumés par les situations suivantes : une composante de degré 4 (une quartique lisse, nodale ou cuspidale), deux composantes de degrés respectivement 3 et 1 (une cubique et une droite ou une droite triple et une droite simple) ou de degré 2 chacune (deux coniques, une conique et une droite double ou deux droites doubles), trois composantes de degrés respectivement 2, 1 et 1 (une conique et deux droites simples ou une droite double et deux droites simples), et enfin quatre composantes, chacune de degré 1 (quatre droites simples). Il arrive qu'une courbe d'intersection compte deux ou quatre composantes complexes, qui, dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  sont réduites à des points, voire à l'ensemble vide. Dans ce sens, le fait est que dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  le nombre de cas se révèle plus élevé.

Grâce à la séparation préalable des cas, l'étude du faisceau des deux quadriques considérées permet de déterminer le type du paramétrage attendu. Un premier classement de

la courbe d'intersection est effectué à partir du calcul de l'équation déterminantielle du faisceau généré. Il se trouve que les multiplicités de ses racines présentent un invariant pour un ensemble de cas. Ces invariants induisent deux situations principales : le cas régulier où l'équation déterminantielle a quatre racines distinctes, et les cas dégénérés où elle a au moins une racine multiple. Ces derniers sont détaillés dans les paragraphes qui suivent.

### 3.2.1 Cas générique

Le cas générique se produit lorsque l'équation déterminantielle n'a que des racines simples. Il résulte en une quartique lisse. Selon la nature des racines de l'équation déterminantielle, il existe trois possibilités. Si elle a 4 racines réelles, alors, dans le cas où le faisceau contient une quadrique d'inertie  $(4,0)$ , la quartique est réduite à l'ensemble vide ([13, théorème 4.3]), et sinon, elle consiste en 2 composantes affinement finies. Si l'équation déterminantielle a 2 racines réelles et 2 racines complexes (conjuguées), alors la quartique consiste en une composante affinement finie. Enfin, si l'équation déterminantielle a 4 racines complexes (conjuguées deux par deux), alors elle consiste en deux composantes affinement infinies. La première étape de l'intersection est de choisir dans le faisceau la quadrique à paramétrer. De préférence, elle doit être réglée, à coefficients rationnels et de plus petit rang possible.

Les quadriques dans ce faisceau peuvent être régulières, d'inertie  $(2, 2)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(3, 1)$ , ou singulières, d'inertie  $(2, 1)$ . Ces dernières sont réglées, et ici, de rang minimal. Cependant, leurs paramètres dans le faisceau correspondent aux racines de l'équation déterminantielle, polynôme de degré 4, et de ce fait il est difficile et coûteux de vérifier si elles sont à coefficients rationnels. Seul le cas où une des quadriques de départ est d'inertie  $(2, 1)$  garantit en soi que ses coefficients sont rationnels, ce qui complète les critères du choix. Si ce n'est pas le cas, alors l'algorithme cherche une quadrique parmi celles qui sont régulières.

Parmi les quadriques régulières, étant donné que celles d'inertie  $(3, 1)$  ne sont pas réglées, le choix est orienté vers celles d'inertie  $(2, 2)$  ou  $(4, 0)$ . Dans le faisceau, leurs matrices sont définies sur l'intervalle ou l'ensemble des intervalles  $I \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  où  $\det(\lambda.S + \mu.T) > 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in I$ . Pour résoudre cette inéquation, l'algorithme d'Uspensky est appliqué à l'équa-

tion déterminantielle et ses racines réelles sont approximées par des intervalles d'isolation. Une brève explication de ce dernier a été développée dans le chapitre 5. Il suffit alors de choisir un point  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  entre deux intervalles d'isolation où  $\det(\lambda.S + \mu.T) > 0$ .

Ensuite, des tests sont effectués sur les valeurs de  $(\lambda, \mu) \in I$ , pour vérifier s'il existe une quadrique d'inertie  $(4, 0)$  dans le faisceau. Si c'est le cas, alors la quartique lisse est complexe et l'intersection réelle revient à l'ensemble vide. Sinon, une quadrique de matrice  $R = \lambda_0.S + \mu_0.T$  pour  $(\lambda_0, \mu_0) \in I$  est choisie. Comme toutes les matrices définies sur un intervalle de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  entre deux racines de l'équation déterminantielle ont la même inertie,  $R$  est forcément d'inertie  $(2, 2)$ . Son paramétrage  $X_R$ , défini sur  $(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , est plongé dans  $Q_S$ , ce qui donne l'équation aux paramètres  $\Omega : {}^t X_R.S.X_R = 0$ ,

$$\Omega = a(u, v)s^2 + b(u, v)st + c(u, v)t^2 = 0,$$

où  $a(u, v)$ ,  $b(u, v)$  et  $c(u, v)$  sont des équations de degré 2 en  $(u, v)$ .

Dans ce contexte, les coefficients du paramétrage de la quartique peuvent contenir deux racines carrées dans leurs coefficients. Remplacer  $Q_R$  par une quadrique d'inertie  $(2, 2)$   $Q_{R_1}$  du faisceau contenant un point dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Z})$  peut améliorer cette complexité en une seule racine carrée ([13, Lemme 4.5]). L'astuce ici est d'approcher un point  $p$  sur  $Q_R$  par un point  $p_1$  à coordonnées entières et ensuite de trouver la quadrique d'inertie  $(2, 2)$  du faisceau qui passe par ce point. Quand  $p_1$  est suffisamment proche de  $p$ , cette quadrique existe forcément.

L'équation aux paramètres est résolue en une de ses variables,  $(u, v)$  ou  $(s, t)$ . Sa solution, que nous supposons sur  $(u, v)$ , est appliquée au vecteur de paramétrage de la quadrique choisie  $Q_R$ , ce qui donne un vecteur de la forme :  $\Psi(u, v) = \Psi_1(u, v) \pm \Psi_2(u, v)\sqrt{\Delta(u, v)}$ . Selon que  $Q_R$  est d'inertie  $(2, 1)$  ou  $(2, 2)$ , les degrés de  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  et  $\Delta$  sont respectivement  $2, 0, 4$  ou  $3, 1, 4$ . Comme la quartique lisse est une courbe d'intersection régulière entre deux quadriques, elle est de genre 1, et donc la racine carrée de polynôme est inévitable ([13, Proposition 7.1]). En ce qui concerne la complexité des coefficients, il existe deux cas de figure suivant que le paramétrage contient ou non une racine carrée. Il se trouve que dans le premier cas, la racine carrée n'est pas toujours nécessaire. En d'autres termes, il se peut que dans le faisceau il existe une autre quadrique que  $Q_R$ ,



d'inertie (2,2) contenant un point dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Z})$ , dont le choix pour le calcul de l'équation aux paramètres aurait pu éviter la racine carrée. Cependant, trouver cette quadrique en particulier, si elle existe, s'avère être un problème compliqué qui fait actuellement l'objet de recherches. De ce fait, la paramétrisation est dite quasi-optimale.

### 3.2.2 Cas dégénérés

Les cas dégénérés englobent les intersections où l'équation déterminantielle a au moins une racine multiple. En tout, il existe 47 cas différents.

Dans leur recherche L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. Petitjean ont effectué une étude complète de ces situations et ont établi leur classement [14, 15, 11]. Ainsi, pour calculer la courbe d'intersection, QI cherche d'abord le type d'intersection dont il s'agit, et ensuite, selon le cas, procède par l'approche la plus adaptée. La distinction des cas se fait principalement à partir de la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle, leur nature, l'inertie et le rang des quadriques qui leur sont associées. Ensuite, pour chaque cas, les informations de nature géométrique établies sur les quadriques du faisceau permettent de déterminer la courbe d'intersection.

Généralement, les racines de l'équation déterminantielle ne sont pas toutes complexes ou irrationnelles. L'idée est alors de considérer la quadrique  $Q_R$  correspondant à la racine multiple simple. Celle-ci est nécessairement rationnelle ce qui assure que  $Q_R$  est à coefficients rationnels. De plus, comme  $Q_R$  est associée à une solution de l'équation déterminantielle, son rang est forcément inférieur à 4, ce qui implique qu'elle est réglée.

Une fois le choix porté sur  $Q_R$ , elle est paramétrée et son paramétrage est appliqué à une autre quadrique du faisceau. L'équation aux paramètres obtenue est factorisée afin d'obtenir les composantes algébriques de la courbe d'intersection. Cette factorisation est facilitée par des informations de nature géométrique établies sur les quadriques du faisceau. Enfin le paramétrage des composantes de la courbe d'intersection est défini sur celui de  $Q_R$ . Comparé au cas générique, un cas dégénéré ne contient pas de racine de polynôme, mais il peut ou non contenir une racine carrée de nombre dans ses coefficients.

### 3.3 Optimalité, robustesse et efficacité

Le paramétrage de chaque composante de la courbe d'intersection calculé par QI est optimal du point de vue des fonctions de définition du paramétrage : les coordonnées du paramétrage sont polynomiales dans les cas dégénérés et contiennent la racine carrée d'un polynôme, inévitable, dans le cas générique. Du point de vue de la complexité algébrique, c'est-à-dire du nombre de racines carrées contenues dans les coefficients, le paramétrage est quasi-optimal ([13, théorème 1]). Cela signifie qu'au pire le nombre de racines carrées est à une unité de l'optimal. Par ailleurs, déterminer si la racine carrée supplémentaire est évitable ou non est un problème difficile de théorie algorithmique des nombres (QI contient toutefois un mécanisme pour savoir si une conique à coefficients entiers peut être paramétrée sans racine carrée). Le tableau 3.1, extrait de [11, 15], donne un aperçu de l'ensemble des cas génériques et dégénérés, en donnant pour chaque cas le format du paramétrage et en précisant si, dans le cas le pire, QI retourne ou non un paramétrage optimal. Les figures 3.1 et 3.2 d'après le manuscrit de doctorat de L. Dupont donnent respectivement deux exemples d'intersection régulière et deux exemples d'intersection singulière.

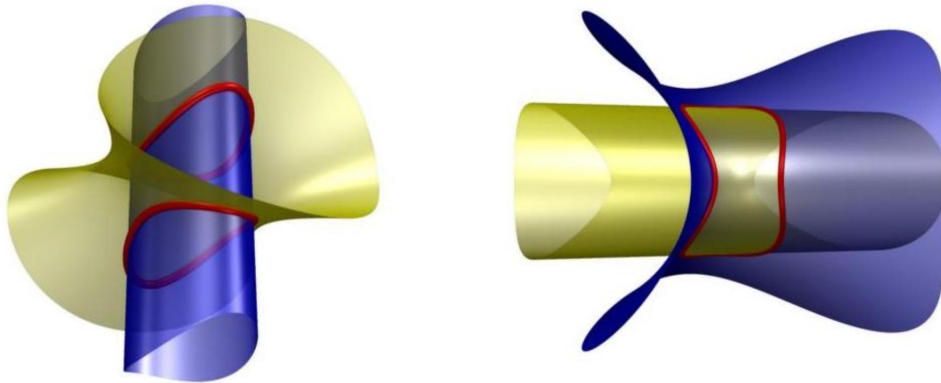


FIG. 3.1 – À gauche, une quartique lisse constituée de deux composantes affinement finies. À droite, une quartique lisse composée d'une composante affinement finie.

Notons que QI est un algorithme robuste et efficace. En effet, le résultat qu'il calcule est toujours mathématiquement exact, si besoin défini dans une extension algébrique de

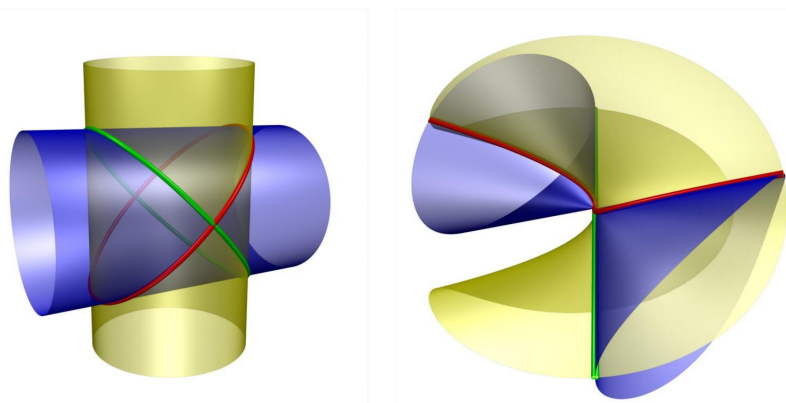


FIG. 3.2 – À gauche, deux coniques sécantes en deux points. À droite, une cubique et une droite tangentes.

l'ensemble des nombres rationnels. De plus, il manipule une paire de quadriques en position quelconque et considère tous les cas d'intersections. La nature de son approche, notamment le choix de la quadrique à paramétrer ainsi que les techniques algébriques utilisées contribuent à gérer l'apparition de nombres irrationnels et permettent de minimiser la complexité des coefficients du paramétrage final, ce qui, d'une part facilite le calcul exact, et d'autre part accélère le temps d'exécution. Les tests sur QI effectués par les auteurs ont montré qu'il est doté d'une forte efficacité [33]. À titre indicatif, dans les exemples concrets qui suivent, les intersections ont été réalisées en moins de dix millisecondes chacune sur une machine standard. Enfin, les résultats de QI sont complets et suffisamment simples pour être aisément réutilisés dans une large gamme d'applications et en particulier dans la suite de notre algorithme.

### 3.4 Exemples

Dans les exemples qui suivent, les quadriques ont été sélectionnées à partir du modèle CSG d'une pièce de jeu d'échecs, le cavalier (cf. figure 3.3). Les exemples sur QI couvrent les quatre situations principales d'intersection qui nous intéressent, à savoir, une quartique lisse sans racine carrée de nombre dans son paramétrage, une quartique lisse avec

symbole de Segre	type réel	format du paramétrage dans le pire cas	optimalité dans le pire cas
[1111]	quartique lisse	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi, \sqrt{\Delta}]$ , $\Delta \in \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[112]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	quartique nodale	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[13]	quartique cuspidale	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[22]	cubique et droite non tangentes	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[4]	cubique et droite tangente	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[11(11)]	deux points	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$	optimal
	conique	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta}, \sqrt{\mu})[\xi]$ , $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$	optimal si $\sqrt{\delta} \notin \mathbb{Q}$
	deux coniques sécantes	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta'})[\xi]$	non-optimal
[1(21)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	deux coniques tangentes	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[1(111)]	conique double	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[2(11)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	conique et point	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
	conique et deux droites	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[(31)]	conique	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
	conique et deux droites	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[(11)(11)]	deux points	$\mathbb{K}[\xi]$ , $\deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
	deux droites	$\mathbb{K}[\xi]$ , $\deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
	quatre droites	$\mathbb{K}[\xi]$ , $\deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
[(22)]	droite double	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
	deux droites simples et une droite double	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[(211)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	deux droites doubles	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[1{3}]	conique et droite double	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[111]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	2 droites concourantes	$\mathbb{K}[\xi]$ , $\deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
	4 droites concourantes	$\mathbb{K}[\xi]$ , $\deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
[12]	droite double	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
	deux droites simples et une droite double	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[3]	droites simple et triple	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[1(11)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	2 droites concourantes	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[(21)]	droite quadruple	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[11]	droite quadruple	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal

TAB. 3.1 – Anneau de définition et optimalité des coordonnées des paramétrages calculés par QI. Le symbole de Segre est un invariant du faisceau de deux quadriques, qui, dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sépare tous les cas possibles d'intersection.  $\delta$  et  $\delta'$  sont des nombres entiers,  $\xi \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , et  $\mathbb{K}$  est une extension sur  $\mathbb{Q}$ . (voir [11, 15])

racine carrée de nombre dans son paramétrage, un cas dégénéré sans racine carrée dans son paramétrage et un cas dégénéré avec racine carrée dans son paramétrage. Les deux premiers illustrent le cas générique, et les deux derniers, les cas dégénérés.

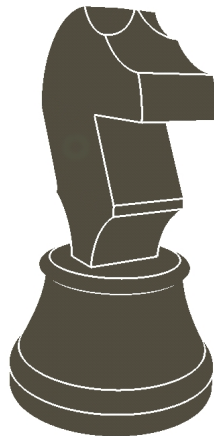


FIG. 3.3 – Modèle CSG du cavalier du jeu d'échecs, visualisé par la technique du lancer de rayons.

---

## Exemple 1 : quartique lisse sans racine carrée dans son paramétrage, résultat optimal.

Input quadrics

Quadric 1: elliptic cylinder in  $\mathbb{R}^3$

$$400x^2 - 1000xw + 400y^2 - 1360yw + 1381w^2$$

Quadric 2: elliptic cylinder in  $\mathbb{R}^3$

$$-25x^2 - 25z^2 + 49w^2$$

Type of the intersection

Type in real projective space  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ : smooth quartic, one finite component

Type in complex projective space  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ : smooth quartic

[smooth quartic branch 1]

Parametrization is OPTIMAL: the number of square roots in the coefficients of the  $u^p v^q$  is minimal.

$$x(u, v) = 53175u^2v - 25v^3 + 1009u\sqrt{\Delta}$$

$$y(u, v) = 941919u^3 + 26112u^2v - 241uv^2 + (1700u + 25v)\sqrt{\Delta}$$

$$z(u, v) = -941919u^3 + 1009uv^2 + 25v\sqrt{\Delta}$$

$$w(u, v) = 15360u^2v + 1000u\sqrt{\Delta}$$

$$\Delta = 941919u^4 + 1118u^2v^2 - v^4$$

[smooth quartic branch 2]

Parametrization is OPTIMAL: the number of square roots in the coefficients of the  $u^p v^q$  is minimal.

$$x(u, v) = 53175u^2v - 25v^3 - 1009u\sqrt{\Delta}$$

$$y(u, v) = 941919u^3 + 26112u^2v - 241uv^2 + (-1700u - 25v)\sqrt{\Delta}$$

$$z(u, v) = -941919u^3 + 1009uv^2 - 25v\sqrt{\Delta}$$

$$w(u, v) = 15360u^2v - 1000u\sqrt{\Delta}$$

$$\Delta = 941919u^4 + 1118u^2v^2 - v^4$$


---

**Exemple 2 : quartique lisse avec une racine carrée dans son paramétrage, résultat quasi-optimal.**

Input quadrics

Quadric 1: elliptic cylinder in  $\mathbb{R}^3$   
 $-400*x^2-400*y^2+2960*y*w-4851*w^2$

Quadric 2: elliptic cylinder in  $\mathbb{R}^3$   
 $-25*x^2-25*z^2+49*w^2$

Type of the intersection

Type in real projective space  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ : smooth quartic, two finite components

Type in complex projective space  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ : smooth quartic

[smooth quartic branch 1]

Parametrization is NEAR-OPTIMAL: there might be one extra square root in the coefficients of the  $u^p*v^q$

$$x(u,v) = (12010*u^2*v - 490*v^3)*\text{sqrt}(15) + 32*u*\text{sqrt}(15)*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$y(u,v) = 94080*u^3 + 38325*u*v^2 + 250*v*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$z(u,v) = -4170*u^2*v + 7350*v^3 + 480*u*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$w(u,v) = 19200*u^3 + 16800*u*v^2 + 100*v*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$\Delta = 2940*u^4 - 3495*u^2*v^2 + 2940*v^4$$

[smooth quartic branch 2]

Parametrization is NEAR-OPTIMAL: there might be one extra square root in the coefficients of the  $u^p*v^q$

$$x(u,v) = (12010*u^2*v - 490*v^3)*\text{sqrt}(15) - 32*u*\text{sqrt}(15)*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$y(u,v) = 94080*u^3 + 38325*u*v^2 - 250*v*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$z(u,v) = -4170*u^2*v + 7350*v^3 - 480*u*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$w(u,v) = 19200*u^3 + 16800*u*v^2 - 100*v*\text{sqrt}(\Delta)$$

$$\Delta = 2940*u^4 - 3495*u^2*v^2 + 2940*v^4$$

---

**Exemple 3 : deux droites sécantes sans racine carrée dans leurs paramétrages, résultat optimal.**

Input quadrics

Quadric 1: elliptic cylinder in  $\mathbb{R}^3$

$$-400*x^2-400*y^2+2960*y*w-4851*w^2$$

Quadric 2: parallel planes in  $\mathbb{R}^3$

$$-100*y^2+450*y*w-486*w^2$$

Type of the intersection

Type in real projective space  $P^3(\mathbb{R})$ : two concurrent lines

Type in complex projective space  $P^3(\mathbb{C})$ : four concurrent lines

[line]

Parametrization is OPTIMAL: the number of square roots in the coefficients of the  $u^p*v^q$  is minimal.

$$[15*v, -54*v, -u, -20*v]$$

[line]

Parametrization is OPTIMAL: the number of square roots in the coefficients of the  $u^p*v^q$  is minimal.

$$[15*v, 54*v, -u, 20*v]$$

---



**Exemple 4 : deux droites sécantes avec une racine carrée dans leurs paramétrages, résultat optimal.**

Input quadrics

Quadric 1: elliptic cylinder in  $\mathbb{R}^3$

$-400x^2 - 400y^2 + 2960yw - 4851w^2$

Quadric 2: parallel planes in  $\mathbb{R}^3$

$-4y^2 + 14yw - 6w^2$

Type of the intersection

Type in real projective space  $P^3(\mathbb{R})$ : two concurrent lines

Type in complex projective space  $P^3(\mathbb{C})$ : four concurrent lines

[line]

Parametrization is OPTIMAL: the number of square roots in the coefficients of the  $u^p v^q$  is minimal.

$[429v, -60v\sqrt{429}, -u, -20v\sqrt{429}]$

[line]

Parametrization is OPTIMAL: the number of square roots in the coefficients of the  $u^p v^q$  is minimal.

$[429v, 60v\sqrt{429}, -u, 20v\sqrt{429}]$

---

# Chapitre 4

## Q3 : Calcul du graphe d'adjacence d'un arrangement de quadriques

La première étape de l'algorithme de conversion CSG-BRep a été de trouver les intersections entre paires de quadriques. Parmi elles, les courbes d'intersection contiennent les arêtes du modèle BRep que nous cherchons à identifier. Selon la définition que nous avons donnée dans le chapitre 2, les extrémités d'une arête sont des points d'intersection entre au moins trois quadriques. Par conséquent, déterminer les points d'intersection entre les courbes obtenues permettrait de diviser ces courbes en segments qui peuvent potentiellement être des arêtes.

Cet objectif est atteint lors de la deuxième étape de l'algorithme, qui est présentée dans ce chapitre. Elle consiste à calculer le graphe d'adjacence de l'arrangement des quadriques du modèle CSG. Outre la segmentation souhaitée qu'elle effectue, elle détecte les adjacences entre segments favorisant ainsi la perspective de leurs parcours ultérieurs. Elle a été réalisée par l'intermédiaire d'un algorithme conçu par L. Dupont, M. Hemmer, S. Petitjean et E. Schömer [12] qui calcule le graphe d'adjacence de l'arrangement des quadriques du modèle CSG. Son implémentation, effectuée par ses auteurs, a été intégrée dans notre conversion CSG-BRep sous le nom de Q3.

## 4.1 Algorithme

Étant donné que Q3 succède à QI [12], ses données de départ sont les intersections entre les quadriques du modèle CSG. Q3 sélectionne les courbes d'intersection et les traite composante par composante. Chaque courbe d'intersection est exprimée sous forme paramétrique dans l'espace des paramètres d'une quadrique qui la contient. Il se peut qu'elle contienne un point singulier (quartique nodale) ou que ses composantes algébriques s'intersectent (voir Tableau 3.1 dans le chapitre 3). Par commodité, nous appelons les points communs de ces dernières également des *points singuliers*. Il est possible de les fixer dans QI par un paramètre sur chacune des composantes, opération que nous supposons effectuée et qui reste à implémenter.

À la sortie de Q3, les points d'intersection entre composantes (points singuliers compris) sont ordonnés par ordre croissant du paramètre sur chacune d'elles et ceux qui représentent le même point en trois dimensions sont associés entre eux. Tous les segments ainsi obtenus sont par la suite classés dans VE (la troisième étape de l'algorithme de conversion).

Q3 procède en quatre étapes. D'abord il trouve sur les diverses courbes d'intersection les composantes qui sont identiques. Ensuite, pour toute composante, il calcule les paramètres de ses intersections avec les quadriques qui ne la contiennent pas. Après, il associe entre eux les points d'intersection qui coïncident dans  $\mathbb{R}^3$ , mais qui, situés sur différentes courbes d'intersection, sont exprimés dans différents espaces de paramètres. Enfin, il ordonne les points d'intersection obtenus sur chacune de ces composantes. La description de ces étapes, établie à partir de [12], est exposée dans les paragraphes ci-dessous.

## 4.2 Première étape : adopter un seul paramétrage pour les composantes identiques

À l'issue de QI, chaque courbe d'intersection est calculée dans l'espace des paramètres d'une quadrique du faisceau qui la définit. Toutefois, en dehors du cas d'une quartique, une même composante algébrique peut appartenir à différentes intersections, définies par

différents faisceaux. Par conséquent une composante peut être représentée par plusieurs paramétrages. Ainsi, chaque ensemble de points singuliers qu'elle forme au sein d'une courbe d'intersection qui la contient est supposé calculé sur le paramétrage qui lui correspond.

Afin de pouvoir chercher les intersections d'une même composante avec les quadriques du modèle CSG qui ne la contiennent pas sur un seul de ses paramétrages et afin de pouvoir unir ses points singuliers calculés sur ses différents paramétrages, l'idée de cette étape consiste à détecter les diverses représentations des composantes algébriques identiques, d'en choisir une seule par composante algébrique et de redéfinir sur elle tous les points singuliers que cette composante algébrique contient.

La description de cette étape a été séparée en deux parties. La première décrit les comparaisons entre composantes algébriques dont l'objectif est d'établir si elles sont identiques. La seconde explique pour le cas de composantes algébriques identiques comment leurs points singuliers sont redéfinis sur le paramétrage choisi.

### 4.2.1 Trouver les composantes identiques

Rappelons que dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  la courbe d'intersection entre deux quadriques consiste en au plus 4 composantes algébriques dont le degré total ne dépasse pas 4. Ainsi sont distinguées les quartiques (de degré algébrique 4), les cubiques (de degré algébrique 3), les coniques (de degré algébrique 2) et les droites (de degré algébrique 1). Comme seules les composantes de même nature peuvent coïncider, il convient de comparer uniquement celles qui sont de degré algébrique identique.

Lorsque l'intersection entre deux quadriques est une quartique, celle-ci est la seule composante algébrique de leur faisceau. Elle le définit donc entièrement. Ainsi, pour comparer deux quartiques il suffit de comparer les faisceaux qu'elles définissent. Dans le cas où ces faisceaux sont identiques, les quartiques sont également identiques. Dans le cas inverse, elles ne sont pas identiques.

De son côté, le cas d'une courbe d'intersection qui contient au moins deux composantes est un peu plus complexe du fait que chacune de ses composantes peut appartenir à plusieurs faisceaux. Ici, lorsque plus d'une composantes algébriques s'avèrent identiques,

le paramétrage d'une d'elles est choisi et appliqué aux autres composantes. Les points singuliers de ces dernières sont redéfinis dans le nouveau paramétrage.

Une cubique est l'une parmi deux composantes d'une courbe d'intersection, l'autre composante étant une droite. Sachant qu'une courbe d'intersection contient au plus une cubique, il est clair que deux cubiques contenues dans deux faisceaux identiques sont identiques. Par contre, le cas où les faisceaux diffèrent n'est pas suffisant en lui-même pour conclure du fait qu'une même cubique peut appartenir à deux ou plusieurs faisceaux non identiques (qui se distinguent par leurs droites). Ici la solution consiste à plonger le paramétrage d'une de ces cubiques dans le faisceau de l'autre cubique. Si le résultat est égal à 0, alors il s'agit de la même cubique. Sinon, ce sont deux cubiques distinctes.

De façon similaire, une conique forme une composante d'une courbe d'intersection qui contient de plus soit une autre conique, soit une paire de droites, soit l'ensemble vide. Il est certain que quand deux faisceaux identiques contiennent chacun une seule conique, celles-ci sont également identiques. De même, s'ils contiennent une paire de coniques chacun, ces paires sont les mêmes. Ici les coniques identiques entre les deux faisceaux sont associées entre elles grâce au fait que leur paramétrage obtenu dans QI coïncide [14]. Enfin, deux faisceaux non identiques peuvent partager au plus une seule conique. Ainsi, afin de comparer deux coniques situées dans deux faisceaux non identiques, Q3 recourt à la solution adoptée dans le cas analogue sur les cubiques.

Pour terminer, notons que les coefficients d'une droite dans l'intersection de deux quadriques peuvent être d'extension algébrique de degré 1, 2, 3 ou 4. D'après le tableau 3.1 dans le chapitre 2, QI garantit que ce degré d'extension algébrique est optimal. Par conséquent, si deux droites coïncident, alors leurs coefficients sont nécessairement de même degré d'extension algébrique.

Lorsque le degré d'extension de deux droites vaut 1 ou 2, elles sont comparées par l'intermédiaire de leurs coordonnées de Plücker (les modalités d'une telle comparaison sont présentées dans [49]). De son côté le faisceau qui contient une droite de degré d'extension algébrique 4 contient également ses trois conjuguées algébriques. Ainsi, lorsque deux droites de degré d'extension 4 coïncident, leurs paramétrages sont identiques par construction dans QI.

Dans le cas d'une droite de degré d'extension algébrique 3, le faisceau auquel elle appartient contient de plus ses deux conjuguées algébriques ainsi qu'une droite rationnelle (de degré d'extension algébrique 0). Ici, Q3 utilise la propriété que les trois droites non rationnelles du faisceau se coupent en un point rationnel.

Soient  $d_1$  et  $d_2$  les deux droites de degré d'extension 3 à comparer et soient  $T_1$  et  $T_2$  respectivement les ensembles de  $d_1$  avec ses conjugués et de  $d_2$  avec ses conjugués. Lors de la comparaison de  $d_1$  et  $d_2$ , Q3 vérifie si les points d'intersection de  $T_1$  et de  $T_2$  sont identiques. Dans le cas positif, il utilise l'arithmétique par intervalles pour calculer les points d'intersection de  $T_1$  et de  $T_2$  avec un plan à coefficients rationnels. Les intervalles obtenus sont récursivement rétrécis jusqu'à ce que, selon le cas, soit au moins un des intervalles associé à  $T_1$  ou  $T_2$  reste complètement isolé par rapport aux intervalles de  $T_2$  ou respectivement  $T_1$ , soit tout intervalle de  $T_1$  corresponde à exactement un intervalle de  $T_2$  et vice-versa (voir la section 4.4).

Dans le premier cas,  $T_1$  et  $T_2$  diffèrent, et donc,  $d_1$  et  $d_2$  ne coïncident pas. Par contre dans le second cas leur égalité n'est pas garantie. Pour cette raison Q3 procède par une projection des quatre droites de chaque faisceau dans une direction donnée, l'objectif étant de comparer les résultants obtenus. Ceux-ci sont des polynômes à deux variables de degré total 4. Ces polynômes sont simplifiés par le facteur linéaire qui correspond à la droite rationnelle du faisceau respectif. Si les parties primitives des polynômes restants ne correspondent pas, alors  $d_1$  et  $d_2$  sont distinctes. Sinon, il est nécessaire de s'assurer que le résultat n'a pas été biaisé sous l'effet de la projection. Pour cela les calculs sont repris selon une autre direction de projection, linéairement indépendante de la première. Dans le cas où ils mènent au même résultat (polynômes primitifs correspondants), Q3 conclut que  $d_1$  et  $d_2$  sont identiques.

### 4.2.2 Redéfinir les points singuliers sur le paramétrage choisi

Dans cette section sont considérées les composantes algébriques qui apparaissent dans des courbes différentes définies par des faisceaux différents, et qui ont au moins un point nodal. Les quartiques identiques étant définies par un même faisceau, il est clair que les composantes algébriques potentiellement concernées ici sont les cubiques, les coniques et

les droites. Les points nodaux d'une même composante algébrique sont calculés chacun sur le paramétrage de la courbe d'intersection à laquelle ils appartiennent. Comme un seul paramétrage est choisi par composante algébrique, il s'avère nécessaire d'y redéfinir tous les points singuliers qu'elle contient. Il est à noter que le nombre de tels points est limité à deux pour chaque paramétrage.

La difficulté de cette tâche vient de deux problèmes. D'une part, pour un ensemble de points, une application qui transforme leurs valeurs paramétriques correspondant à une composante algébrique en leurs valeurs paramétriques correspondant à une autre composante algébrique n'est pas linéaire pour les coniques et les cubiques. D'autre part, les deux paramétrages ne sont pas forcément construits sur une même extension algébrique.

Trois cas sont distingués par Q3, celui d'une droite rationnelle, celui d'un point rationnel et celui qui regroupe le reste des situations. Ils sont décrits dans les paragraphes qui suivent.

Notons  $C$ ,  $\Psi(u, v)$  et  $\Psi'(u, v)$  respectivement la composante considérée, le paramétrage choisi et un autre paramétrage de  $C$ . L'objectif est de redéfinir dans  $\Psi(u, v)$  les points singuliers de  $C$  calculés sur  $\Psi'(u, v)$ . Soit  $\mathcal{F}'$  le faisceau qui induit  $\Psi'(u, v)$  et soient  $L$  et  $L'$  les listes de points singuliers de  $C$  apparaissant respectivement sur  $\Psi(u, v)$  et  $\Psi'(u, v)$ .

Lorsque  $C$  est une droite rationnelle,  $\Psi(u, v)$  et  $\Psi'(u, v)$  sont également rationnelles. Supposons que  $\Psi'(u, v) = up' + vq'$ , où  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et  $p', q' \in \mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ . Les paramètres de  $p'$  et  $q'$  dans  $\Psi(u, v)$  sont calculées par des équations linéaires. Soit  $A$  la matrice construite à partir de ces dernières,

$$A = \begin{pmatrix} u_{p'} & u_{q'} \\ v_{p'} & v_{q'} \end{pmatrix}$$

avec  $(u_{p'}, v_{p'}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  et  $(u_{q'}, v_{q'}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ . Elle représente une application qui transforme les paramètres des points singuliers dans  $\Psi'(u, v)$  en leurs paramètres dans  $\Psi(u, v)$ .

Dans le cas où un point singulier  $p$  de  $\Psi'(u, v)$  est rationnel les calculs sont basés uniquement sur ses coordonnées  $p_i$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  et des fonctions rationnelles  $f_i(u, v) \in \mathbb{K}(u, v)$  où  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathbb{K}$  est l'extension algébrique dans laquelle est défini  $\Psi(u, v)$ . Le paramètre qui correspond au point à  $p$  sur  $\Psi(u, v)$  s'exprime par les racines réelles de  $\gcd(s_{14}(u, v), s_{24}(u, v), s_{34}(u, v))$ , avec  $s_{ij}(u, v) = f_i(u, v)p_j - f_j(u, v)p_i$ .

Enfin l'idée pour tous les cas restants est de calculer l'ensemble des points de la liste  $L$  en représentant les points de  $L'$  comme l'intersection entre  $C$  et l'ensemble  $P' = \{p \in Q_S \cap Q_T \mid \nabla Q_S(p) = \nabla Q_T(p)\}$ , où  $Q_S$  et  $Q_T$  sont des quadriques régulières de  $\mathcal{F}'$ . Une condition est cependant nécessaire ici,  $C$  ne doit pas être incluse dans  $P'$ . Il se trouve que cette condition est satisfaite, car sinon soit  $L'$  est vide, soit le problème revient à un des deux cas décrits ci-dessus. Notons que les points de  $L'$  sont les points nodaux de  $C$  induits par la courbe d'intersection qui le contient définie par  $\mathcal{F}'$ . Comme  $C$  n'est pas dans  $P'$ , ses intersections avec ce dernier sont exactement les points de  $L'$ . Ainsi, les points de  $L$  correspondent à l'ensemble  $\{\Psi(u, v) \mid S\Psi(u, v) = T\Psi(u, v); (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$ . Soient  $f_i(u, v)$  et  $g_i(u, v)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , les fonctions qui expriment les coordonnées respectivement de  $S\Psi(u, v)$  et de  $T\Psi(u, v)$ . Les valeurs paramétriques des points de  $L$  sont les racines réelles de  $gcd(s_{12}(u, v), s_{13}(u, v), s_{14}(u, v), s_{23}(u, v), s_{24}(u, v), s_{34}(u, v))$ , où  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et  $s_{ij}(u, v) = f_i(u, v)g_j(u, v) - f_j(u, v)g_i(u, v)$ . Pour finir, les points de la liste  $L'$  sont associés à ceux de la liste  $L$  par la méthode décrite dans la section 4.4.

### 4.3 Deuxième étape : calcul des points d'intersection entre trois quadriques

La deuxième étape de Q3 consiste à calculer les points d'intersection de toute composante avec les quadriques du modèle CSG qui ne la contiennent pas. Les  $n$  quadriques sont considérées trois par trois : les deux quadriques qui forment la composante en question et une parmi les  $n - 2$  quadriques restantes.

Soit  $C_{S,T}$  une des composantes de la courbe d'intersection entre les quadriques  $Q_S$  et  $Q_T$  et soit  $Q_U$  une autre quadrique du modèle. L'algorithme vérifie d'abord si  $C_{S,T}$  est contenue dans  $Q_U$ . Si ce n'est pas le cas, alors il cherche leurs points d'intersection réels sur le paramétrage de  $C_{S,T}$ . Cette étude est effectuée de façon itérative pour toutes les composantes de toutes les courbes d'intersection. Étant donné que les composantes qui coïncident ont été identifiées et qu'elles possèdent le même paramétrage, elles sont traitées une seule fois.



Deux cas de figure sont à considérer : celui où  $C_{S,T}$  est une quartique lisse, et celui où elle ne l'est pas. La différence vient de la complexité algébrique de son paramétrage. En particulier, le paramétrage d'une quartique lisse contient la racine carrée d'un polynôme tandis que celui d'une composante de toute autre courbe d'intersection est formé par des fonctions rationnelles (cf. chapitre 3). Pour cette raison nous avons présenté ces deux situations dans deux sections distinctes en commençant par la plus simple (celle où  $Q_S$  et  $Q_T$  ont une intersection singulière).

### 4.3.1 Cas où la composante n'est pas une quartique lisse

Supposons que  $C_{S,T}$  n'est pas une quartique lisse. Soit  $\Psi(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  son paramétrage. Les coordonnées de  $\Psi(u, v)$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  sont polynomiales.

Dans l'optique de trouver les points d'intersection entre  $C_{S,T}$  et  $Q_U$ , Q3 injecte  $\Psi(u, v)$  dans l'équation implicite de  $Q_U$ . Ceci résulte en un polynôme à une variable projective, que nous notons  $h(u, v)$  :

$$h(u, v) = {}^t\Psi(u, v).U.\Psi(u, v).$$

Si  $C_{S,T} \in Q_U$ , alors  $h(u, v)$  est identiquement nul. Sinon il est de degré 8, 6, 4 ou 2 quand  $C_{S,T}$  est respectivement une quartique, une cubique, une conique ou une droite. Chaque racine réelle de  $h(u, v)$  correspond à un point d'intersection entre  $C_{S,T}$  et  $Q_U$ .

### 4.3.2 Cas d'une quartique lisse

La racine carrée de polynôme dans le paramétrage  $\Psi(u, v)$  d'une quartique lisse rend ce cas un peu plus complexe algébriquement. D'après le chapitre 3,  $\Psi(u, v) = \Psi_1(u, v) + \epsilon.\Psi_2(u, v)\sqrt{\Delta(u, v)}$ ,  $(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et  $\epsilon \in \{\pm 1\}$ . Les deux signes possibles de  $\epsilon$  divisent  $C_{S,T}$  en deux arcs. Par conséquent, afin de trouver un point d'intersection entre  $C_{S,T}$  et  $Q_U$  il est nécessaire de calculer, d'une part, la valeur de  $(u, v)$  qui lui correspond, et d'autre part, l'arc auquel il appartient.

Rappelons que  $C_{S,T}$  est définie dans l'espace des paramètres d'une quadrique réglée à coefficients rationnels du faisceau engendré par  $Q_S$  et  $Q_T$ , que nous avons notée  $Q_R$  dans

le chapitre 3. Le calcul des points d'intersection de  $C_{S,T}$  avec  $Q_U$  est basé sur le fait que :

$$Q_S \cap Q_T \cap Q_U = Q_S \cap Q_R \cap Q_U = (Q_R \cap Q_S) \cap (Q_R \cap Q_U).$$

L'équation aux paramètres associée à  $Q_R$  et  $Q_S$  s'écrit :

$$\Omega_{R,S} = a_2(u, v)s^2 + a_1(u, v)st + a_0(u, v)t^2 = 0, \quad (4.1)$$

où  $a_2(u, v)$ ,  $a_1(u, v)$  et  $a_0(u, v)$  sont des polynômes de degré 2 en  $(u, v)$ , et où  $(u, v)$ ,  $(s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . L'image par le paramétrage de  $Q_R$  des solutions de cette équation de degré deux en  $(u, v)$  donne  $\Psi(u, v)$  :

$$(2a_0(u, v), -a_1(u, v) + \epsilon\sqrt{\Delta(u, v)}),$$

où  $\epsilon \in \pm 1$  et  $\Delta = a_1^2(u, v) - 4a_0(u, v)a_2(u, v) \in \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[(u, v)]$  avec  $\delta$  un nombre entier.

De façon similaire, sur l'espace des paramètres de  $Q_R$ , l'équation aux paramètres associée à  $Q_R$  et  $Q_U$  s'exprime par :

$$\Omega_{R,U} = b_2(u, v)s^2 + b_1(u, v)st + b_0(u, v)t^2 = 0, \quad (4.2)$$

$b_2(u, v)$ ,  $b_1(u, v)$  et  $b_0(u, v)$  étant des polynômes de degré 2 en  $(u, v)$ .

Comme les points communs entre  $C_{S,T}$  et  $Q_U$  sont les points communs entre  $Q_R \cap Q_S$  et  $Q_R \cap Q_U$ , ils correspondent aux racines communes de  $\Omega_{R,S}$  et de  $\Omega_{R,U}$ . Ainsi, Q3 calcule le résultant de  $\Omega_{R,S}$  et de  $\Omega_{R,U}$  en  $(s, t)$  :

$$r(\Omega_{R,S}, \Omega_{R,U}, (s, t)) = s_{02}^2(u, v) - s_{01}(u, v)s_{12}(u, v)$$

avec  $s_{ij}(u, v) = a_i(u, v)b_j(u, v) - a_j(u, v)b_i(u, v) \in \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[(u, v)]$ .

D'après la Proposition 1 dans [12],  $C_{S,T} \subset Q_U$  si et seulement si  $r(\Omega_{R,S}, \Omega_{R,U}, (s, t)) \equiv 0$ . Dans le cas où  $r(\Omega_{R,S}, \Omega_{R,U}, (s, t))$  n'est pas identiquement nul, c'est un polynôme de degré 8. Le théorème de Bézout garantit que ses solutions, considérées avec leurs multiplicités, correspondent aux valeurs de  $(u, v)$  des racines communes entre  $\Omega_{R,S}$  et  $\Omega_{R,U}$ . Désormais il reste le problème d'éliminer les racines complexes et à déterminer l'arc,  $(2a_0(u, v), -a_1(u, v) + \sqrt{\Delta(u, v)})$  ou bien  $(2a_0(u, v), -a_1(u, v) - \sqrt{\Delta(u, v)})$ , sur lequel chaque racine réelle repose.

Le théorème 2 dans [12] répond à ce problème. Soit  $(u_0, v_0) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  une racine réelle de  $r(\Omega_{R,S}, \Omega_{R,U}, (s, t))$  telle que  $a_0(u_0, v_0) \neq 0$ . Trois cas sont distingués :

- si  $\Delta(u_0, v_0) < 0$ , alors  $(u_0, v_0)$  correspond à deux points complexes différents ;
- si  $\Delta(u_0, v_0) = 0$ , alors  $(u_0, v_0)$  correspond à un point réel qui représente une extrémité commune sur les deux arcs ;
- enfin si  $\Delta(u_0, v_0) > 0$ , alors :
  - si  $s_{01}(u_0, v_0) \neq 0$ , alors  $(u_0, v_0)$  correspond à un point réel sur l'arc  $(2a_0(u, v), -a_1(u, v) + \epsilon\sqrt{\Delta(u, v)})$  où  $\epsilon = -\text{signe}(s_{01}(u_0, v_0)) \cdot \text{signe}(2a_0(u_0, v_0)s_{02}(u_0, v_0) - a_1(u_0, v_0)s_{01}(u_0, v_0))$  ;
  - si  $s_{01}(u_0, v_0) = 0$ , alors  $(u_0, v_0)$  correspond à deux points réels, un sur chaque arc.

## 4.4 Troisième étape : associer les points d'intersection entre triplets de quadriques

À l'issue de l'étape 2 de Q3, les points d'intersection entre tous les triplets de quadriques sont calculés. Pour trois quadriques données  $Q_S$ ,  $Q_T$  et  $Q_U$  du modèle CSG, ils reposent sur les trois courbes d'intersection qu'elles forment  $Q_S \cap Q_T$ ,  $Q_S \cap Q_U$  et  $Q_T \cap Q_U$ . Ils sont représentés séparément dans l'espace des paramètres de chacune d'elles. Cependant, il est clair que, trois par trois, ces points d'intersection ont les mêmes coordonnées dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . L'étape 3 de Q3 a pour objectif d'associer les différentes représentations d'un même point d'intersection et ceci pour tous les points d'intersection trouvés. Cette information est importante en particulier pour l'étape 4 (voir section 2.4) de l'algorithme de conversion CSG-BRep qui consiste à décrire la structure topologique du modèle BRep.

La démarche intuitive ici serait de comparer toutes les paires de points d'intersection. Étant donné qu'ils sont définis sur différents espaces de paramètres, cette comparaison doit se baser sur leurs coordonnées exactes dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Cependant la complexité algébrique du calcul des coordonnées exactes s'avère très élevée (dans le pire des cas, trouver chaque coordonnée inclut le calcul de la racine carrée d'un polynôme de degré 4 évalué en la racine réelle d'un polynôme de degré 8, tout ceci effectué dans une extension algébrique de degré 2), ce qui rendrait l'exécution inefficace.

Une autre démarche, basée sur l'arithmétique par intervalles, paraît beaucoup plus appropriée. Elle consiste à détecter les intervalles d'isolation qui ne se recouvrent pas. Deux

points d'intersection situés sur deux courbes distinctes sont comparés par l'intermédiaire des extrémités de leurs intervalles d'isolation. Ainsi l'image d'un intervalle d'isolation dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  détermine un intervalle pour chaque coordonnée. Les intervalles de l'ensemble des coordonnées dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  s'organisent sous forme de volume que nous appelons ici une *boîte volumique*. Les points d'intersection exacts dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  appartiennent chacun à la boîte volumique qui représente son intervalle d'isolation.

Voici le fonctionnement de cette démarche dans le cadre général. La précision des intervalles d'isolation détermine la taille des boîtes volumiques de chaque point. Si l'intersection de deux boîtes volumiques n'est pas vide, alors la précision des deux intervalles d'isolation est doublée, ce qui réduit la taille de leurs boîtes volumiques. Répété récursivement, ce processus s'arrête lorsque les deux boîtes volumiques sont disjointes dans le cas où les deux points d'intersection ne sont pas équivalents dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , ou bien continue à l'infini si les deux points coïncident. Cette méthode paraît adéquate au problème posé, mais il est nécessaire de l'adapter de façon à pouvoir éviter une itération infinie.

En effet, savoir détecter le cas où deux intervalles ne coïncident pas ne permet pas de les comparer directement, mais en revanche rend possible de comparer deux listes d'intervalles où il est connu avec certitude que chaque élément d'une liste coïncide avec un seul élément de l'autre liste. Ainsi, si l'intervalle d'isolation d'un point d'intersection donné correspond à un seul intervalle d'isolation parmi une liste, alors ceci permet d'éliminer facilement tous les intervalles d'isolation qui ne lui correspondent pas et, par conséquent, de déduire celui qui lui correspond.

Voilà pourquoi les points d'intersection ne sont pas comparés par paires mais par listes de points d'intersection (représentés par des intervalles d'isolation) entre trois quadriques. Prenons l'exemple de  $Q_S$ ,  $Q_T$  et  $Q_U$ . Trois listes sont comparées deux à deux : celle des points d'intersection entre la composante  $Q_S \cap Q_T$  et la quadrique  $Q_U$ , celle des points d'intersection entre la composante  $Q_S \cap Q_U$  et la quadrique  $Q_T$  et celle des points d'intersection entre la composante  $Q_T \cap Q_U$  et la quadrique  $Q_S$ . Soient *Liste1* et *Liste2* deux parmi ces listes. Il est clair que tous les éléments de *Liste1* ont un unique équivalent dans *Liste2* et vice versa. Par conséquent, la démarche décrite ci-dessus convient pour associer les éléments équivalents dans les deux listes.

Cette méthode de comparaison est appliquée à tous les triplets de quadriques du modèle CSG qui ont au moins deux points en commun. Bien sûr, lorsqu'un triplet de quadriques s'intersecte en un seul point, les intervalles qui le représentent sur les trois courbes d'intersection peuvent être immédiatement associés.

## 4.5 Quatrième étape : ordonner l'ensemble des points d'intersection sur les composantes

Cette dernière étape de Q3 s'emploie à ordonner, sur chacune des composantes trouvées, les points d'intersection (points singuliers compris) qui reposent sur ces composantes. Outre le fait qu'elle permet de détecter ceux qui coïncident, notamment les points d'intersection entre différents triplets de quadriques, la segmentation qu'elle forme sur chaque composante est nécessaire pour l'étape 3 de l'algorithme de conversion CSG-BRep qui vérifie lesquels parmi les segments obtenus sont contenus dans une arête du modèle BRep.

Sachant que chaque composante est paramétrée, les points sont comparés par la valeur de leur paramètre  $(u, v)$ . Ils sont ordonnés de façon cyclique avec pour origine le point à l'infini  $(u, v) = (u, 0)$ . Ainsi, la comparaison est effectuée sur les valeurs de  $(u, 1)$ . Le travail consiste donc à comparer les racines réelles de polynômes à une variable.

Rappelons que les points d'intersection correspondent aux racines réelles de polynômes à une variable le plus souvent dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et qu'ils sont exprimés par des intervalles d'isolation. Les extrémités de chaque intervalle correspondent à deux paramètres. Il est clair que quand deux intervalles ne se chevauchent pas, les points qu'ils contiennent ne coïncident pas. Afin d'ordonner ces deux intervalles l'un par rapport à l'autre il suffit de comparer les paramètres de leurs extrémités. Cependant, dans le cas où ils se recouvrent en partie ou entièrement, il est nécessaire de vérifier si les points qu'ils représentent coïncident. Pour cela, Q3 vérifie pour chacun des deux points si la racine réelle du polynôme qui le définit est également racine du polynôme dont l'autre point est racine. Si c'est le cas, alors les deux points coïncident. Sinon, les deux intervalles sont réduits jusqu'à ce qu'ils deviennent disjoints. Ils sont ensuite comparés.

Ce processus s'applique à toutes les composantes. Seuls deux cas de figure méritent d'être précisés en raison des particularités de leurs paramétrages : celui d'une quartique nodale et celui d'une quartique lisse. Ils sont détaillés dans les paragraphes qui suivent.

La difficulté liée à une quartique nodale provient du fait qu'elle contient un point singulier. Deux situations sont distinguées, celle où le point singulier est isolé et celle où il ne l'est pas :

- Quand le point singulier est isolé, il est exclu du paramétrage de la composante et représenté par ses coordonnées dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .
- À l'inverse, quand il n'est pas isolé, il est représenté par deux paramètres. En vue de le placer par rapport aux autres points à ordonner sur la quartique, Q3 néglige un de ces paramètres, mais le garde en mémoire afin de la prendre en compte dans la structure de données finale.

De son côté une quartique lisse est constituée de deux arcs  $(2a_0(u, v), -a_1(u, v) + \sqrt{\Delta(u, v)})$  et  $(2a_0(u, v), -a_1(u, v) - \sqrt{\Delta(u, v)})$  où  $\Delta(u, v)$  peut avoir 0, 2 ou 4 racines réelles, ce qui génère trois cas à considérer :

- Lorsque  $\Delta(u, v)$  n'a pas de racines réelles, les deux arcs ne se touchent pas et forment chacun une composante sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .
- Lorsque  $\Delta(u, v)$  a 2 racines réelles, les deux arcs sont incidents en ces racines, ce qui résulte en une seule composante sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Sur les deux arcs les points sont ordonnés respectivement en fonction des valeurs croissantes et des valeurs décroissantes de  $u$ .
- Enfin, lorsque  $\Delta(u, v)$  a 4 racines réelles, le domaine de définition ( $\Delta(u, v) \geq 0$ ) est divisé en 2 intervalles. Sur chacun d'eux les deux arcs sont incidents en deux parmi les racines, constituant ainsi deux composantes disjointes. L'ordre sur chacune d'elles est établi pareillement au cas précédent.

## 4.6 Graphe d'adjacence

Par le fait que Q3 calcule et ordonne tous les points d'intersection d'une composante avec les autres composantes obtenues par QI, il permet d'établir les adjacences entre les différents segments situés sur une même composante. En particulier, pour tout point ou

segment sur une composante, il est possible de trouver son prédécesseur et son successeur sur cette composante. De plus, Q3 associe les différentes représentations d'un point d'intersection sur les composantes auxquelles il appartient ce qui permet de son côté de trouver les adjacences entre segments situés sur différentes composantes. Ces deux types d'adjacences, sur une composante et entre composantes, induisent le graphe d'adjacence de l'arrangement des quadriques du modèle CSG.

## 4.7 Complexité et taille de sortie

L'objectif de cette section est de donner la complexité dans le pire des cas de l'algorithme ainsi que la taille de sa sortie en fonction de la taille d'entrée. Soit  $n$  le nombre de quadriques du modèle CSG. Rappelons que Q3 prend en entrée les courbes d'intersection trouvées par QI. Notons  $k$  leur nombre. La taille d'entrée de Q3 est donc  $O(k)$ , équivalente à  $O(k) = O(n^2)$ . Dans les paragraphes qui suivent la complexité dans le pire des cas et la taille de sortie sont calculées séparément pour chacune quatre étapes de Q3.

Lors de la première étape de Q3, toutes les paires de composantes algébriques appartenant aux  $k$  courbes d'intersection sont comparées. Leur nombre étant  $O(k)$ , le temps de calcul dans le pire des cas est estimé à  $O(k^2) = O(n^4)$ . Le nombre de composantes obtenues est clairement inférieur ou égal au nombre de celles de départ. La taille de sortie est par conséquent  $O(k) = O(n^2)$ .

Au cours de sa deuxième étape, Q3 calcule les points d'intersection de chaque composante algébrique avec les quadriques du modèle CSG. Pour cela, dans les deux cas distingués (cf. sections 4.3.1 et 4.3.2), l'algorithme procède par des calculs comprenant toujours au plus trois quadriques. Ceci revient à une complexité de  $O(n^3)$  dans le pire des cas. De son côté, la sortie correspond aux points d'intersection trouvés lors de cette étape. Soit  $m$  leur nombre. La taille de sortie est donc  $m = O(kn) = O(n^3)$ .

Pendant la troisième étape, les points d'intersection trouvés sur les différentes composantes algébriques sont associés entre eux. Ceci est réalisé par triplets de quadriques en effectuant des comparaisons entre listes de points de nombre au plus 8 par liste. Ceci vient du fait que trois quadriques peuvent avoir au maximum 8 points d'intersection. Le

temps de calcul et la taille de sortie s'avèrent ainsi de l'ordre de  $O(m) = O(kn) = O(n^3)$ .

Quant à la quatrième étape, afin d'ordonner les points d'intersection sur les composantes algébriques, Q3 considère pour chacune d'elles la liste de tous les points d'intersection qu'elle contient.  $O(k)$  listes d'une longueur maximale  $O(n)$  sont ainsi triées en temps total  $O(m \log n) = O(kn \log n) = O(n^3 \log n)$ . La taille de sortie n'a pas changé. Elle est  $O(m) = O(n^3)$ .

Pour conclure, la complexité dans le pire cas de Q3 est  $O(k^2) = O(n^4)$ , où  $k$  est la taille de son entrée. La taille de sa sortie est  $O(m) = O(kn) = O(n^3)$ , avec  $m$  le nombre total de points d'intersection trouvés.





# Chapitre 5

## VE : Détermination des segments qui bornent une face sur chaque quadrique

L'objet de ce chapitre est la troisième étape de notre algorithme dont l'appellation VE a pour origine l'expression en anglais « Visible Edges ». Cette étape détermine les arêtes du modèle BRep.

En entrée, VE prend trois types de données : des fonctions implicites, des courbes paramétrées segmentées et une expression booléenne. Les premières représentent les quadriques volumiques. Ce sont les mêmes fonctions que celles à l'entrée de QI. En ce qui concerne les courbes paramétrées, Q3 a établi les points d'intersection entre courbes et les a classés sur chacune d'elles par ordre croissant du paramètre, en la divisant ainsi en segments de courbe. Enfin, l'expression booléenne représente l'arbre CSG du modèle de départ.

**Remarque 1** *Notons que toutes les quadriques ne sont pas régulières. Les quadriques qui contiennent des points singuliers sont les cônes, les paires de plans et le plan double. Rappelons que Q3 a ajouté à l'ensemble des points d'intersections de chacune des composantes algébriques, s'il en existe un nombre fini, les points singuliers qu'elle contient de toutes les quadriques auxquelles elle appartient. En fait, comme nous le verrons plus loin, même*

si ces points singuliers ne sont pas forcément des points d'intersection ou des points singuliers des composantes algébriques auxquelles ils appartiennent, ils correspondent à des sommets dans l'arrangement des quadriques du modèle CSG et peuvent avoir un impact sur le modèle BRep à établir.

**Remarque 2** Il faut également savoir qu'un point isolé de l'intersection de deux quadriques (par exemple celui d'une quartique nodale avec un point isolé, ou celui d'une conique et un point) peut coïncider avec le sommet d'un cône  $Q$ , et, étant son sommet, il peut délimiter en lui seul une face ou deux faces sur ce cône. Il serait donc nécessaire de le considérer au même titre que les segments de courbe obtenus. Les points isolés étant calculés par QI, il a été supposé que l'ensemble de tels points, s'il en existe, a été établi. Ils sont traités dans la section 5.5.

**Remarque 3** Remarquons que les droites singulières des paires de plans peuvent contenir des arêtes du modèle BRep même lorsqu'elles n'appartiennent à aucune courbe d'intersection entre quadriques. Il est donc nécessaire de les considérer au même titre que les composantes algébriques issues de QI. Ainsi, si la droite singulière d'une paire de plans ne fait pas partie de l'intersection unidimensionnelle de cette dernière avec une autre quadrique (elle n'appartient pas à l'ensemble des composantes algébriques issues de QI), alors elle est ajoutée à l'ensemble des composantes algébriques issues de QI et ses points d'intersection avec les quadriques qui ne la contiennent pas sont calculés.

À la sortie, VE déduit pour toute quadrique l'ensemble des segments de courbe qui bornent au moins une face sur elle. Pour chacun d'eux, il calcule également le nombre de telles faces. Un segment est représenté par ses extrémités en fonction du paramètre de la courbe d'intersection qui le contient. Ses extrémités sont, quant à elles, exprimées par deux intervalles d'isolation. De même, VE détermine, pour tout cône parmi les quadriques du modèle CSG, si son sommet délimite en lui seul une face sur lui.

## 5.1 Préliminaires

Rappelons que dans notre problème de conversion, le modèle CSG est constitué à partir de quadriques. Par l'intermédiaire de son équation implicite une quadrique  $Q$  autre qu'un plan double (cf. remarque 4) divise l'espace en deux volumes topologiquement ouverts : celui, pour lequel, l'équation implicite de  $Q$  évaluée en un de ses points résulte en un nombre positif est appelé *intérieur de  $Q$* , et celui, pour lequel elle résulte en un nombre négatif, est dit *extérieur de  $Q$* . Ainsi dans la suite du manuscrit quand nous parlerons d'une quadrique donnée, nous ferons référence à son intérieur, sa surface (la quadrique même en tant que surface) et son extérieur.

Sur l'arbre CSG les feuilles sont associées aux primitives du modèle. Comme, dans notre cas précis, chaque primitive est composée de l'intérieur et la surface d'une quadrique, nous remplacerons par la suite le mot primitive par le terme *quadrique volumique*. Les nœuds internes de l'arbre CSG sont associés chacun à la représentation d'un objet ou d'un groupement d'objets géométriques en trois dimensions. Dans le chapitre 2 nous avons nommé une telle représentation *scène*. Afin de différencier la racine des nœuds internes nous spécifierons la notion de *scène* pour la représentation à la racine et le terme *objet volumique* pour celle de tout nœud interne.

**Remarque 4** *Pareillement aux autres quadriques volumiques, l'équation implicite d'un plan double divise l'espace en deux volumes topologiquement ouverts. Cependant, son équation implicite évaluée en tout point en dehors de sa surface résulte en un même signe. Ainsi, si une primitive dans notre algorithme est un plan double, alors elle correspond soit à l'espace tout entier, soit à sa surface uniquement. Étant donné que dans notre problème le modèle CSG forme un objet volumique borné, pour toute branche dont la feuille est une telle primitive, il existe, en parcourant l'arbre vers sa racine un nœud interne à partir duquel l'objet décrit est différent de l'espace tout entier et d'une surface. Il est obtenu soit par l'intersection entre  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  et un objet borné, soit par l'union entre l'ensemble vide et un objet borné. Dans ce sens, aucune feuille et aucun nœud interne associé à  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  ou à l'ensemble vide ne participe dans la construction du modèle CSG. Pour cette raison ces derniers sont supposés supprimés.*

Soit  $n$  le nombre de quadriques volumiques du modèle CSG et soit  $Q$  une d'elles. Les intersections de  $Q$  avec les  $n - 1$  autres quadriques forment des courbes d'intersection sur sa surface. L'ensemble de ces courbes définit sur  $Q$  un arrangement. Une 2-face de cet arrangement est appelée une  $Q$ -face. Cette dernière est dite *visible* quand elle est sur le bord du modèle CSG. Si de plus l'intérieur de  $Q$  et l'intérieur du modèle CSG se situent du même côté de la  $Q$ -face, alors cette dernière est appelée *visible sur son côté extérieur*. Sinon, elle est dite *visible sur son côté intérieur*. On dit également que deux  $Q$ -faces visibles sur le même côté de  $Q$  ont la *même orientation*, et dans le cas contraire, qu'elles ont des *orientations opposées* (cf. figure 5.1 a).

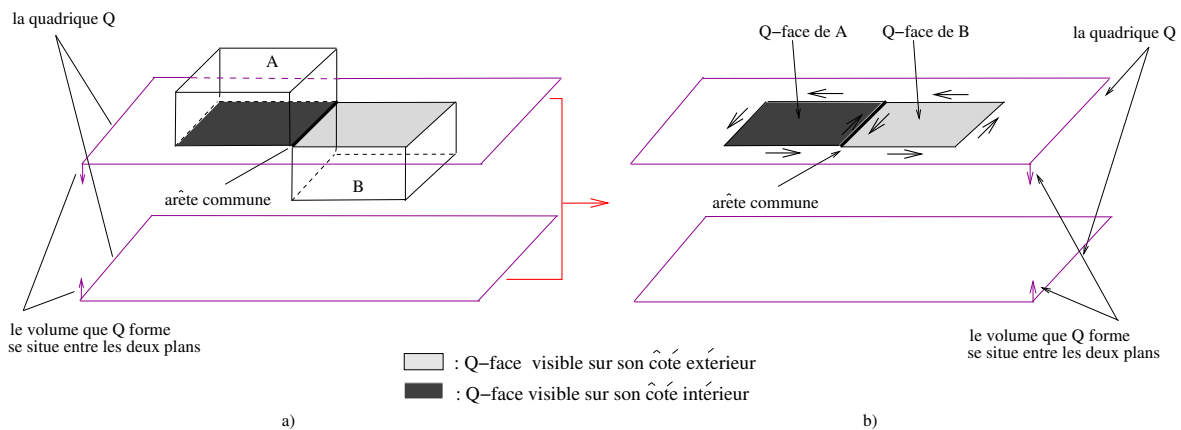


FIG. 5.1 – a) Ici, nous donnons l'exemple d'une scène composée de deux cubes  $A$  et  $B$  qui se touchent le long d'une arête.  $A$  et  $B$  sont construits à partir de quadriques qui sont des paires de plans. Ils forment deux faces visibles sur la quadrique  $Q$  en magenta ( $Q$ -faces visibles). Ce sont la face inférieure du cube  $A$  et la face supérieure du cube  $B$ . Comme le volume borné par  $Q$  et celui de la scène se situent du même côté de la  $Q$ -face formée par  $A$  et de côtés opposés par rapport à la  $Q$ -face formée par  $B$ , la première est visible sur son côté extérieur, et la seconde sur son côté intérieur. b) Ici, les  $Q$ -arêtes des deux  $Q$ -faces visibles sont orientées selon la convention adoptée dans le chapitre 2. Ainsi, vues de l'extérieur de  $Q$  ces  $Q$ -faces se situent à gauche par rapport à l'orientation des  $Q$ -arêtes qui les délimitent. Étant donné que l'arête commune entre  $A$  et  $B$  délimite à la fois ces deux  $Q$ -faces, elle est orientée dans les deux sens.

De même, une 1-face de l'arrangement est appelée une  $Q$ -arête. Toute  $Q$ -arête délimite deux  $Q$ -faces sauf si elle repose sur la droite singulière d'une paire de plans, cas très particulier décrit dans la section 5.3 du chapitre. Une  $Q$ -arête est dite *visible sur le bord de la quadrique  $Q$*  si une seule de ces  $Q$ -faces est visible ou si les deux sont visibles mais d'orientations opposées. Pour le reste des cas, c'est-à-dire si aucune des  $Q$ -faces n'est visible ou bien si les deux sont visibles et de même orientation, la  $Q$ -arête n'est pas visible sur le bord de  $Q$ . Remarquons qu'une  $Q$ -arête qui est également arête du modèle BRep n'est pas forcément visible sur le bord de toutes les quadriques qui la contiennent. Par contre, une  $Q$ -arête visible sur le bord de  $Q$  est nécessairement arête du modèle BRep (voir figure 5.2).

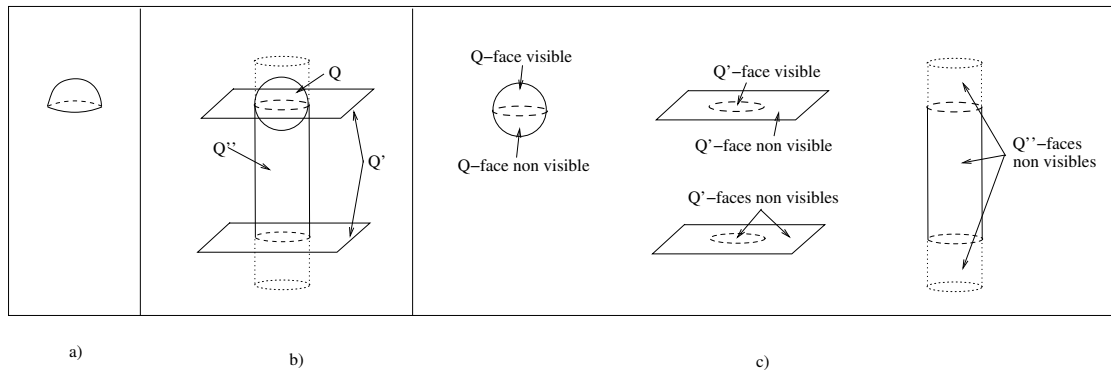


FIG. 5.2 – a) Scène constituée d'une demi-sphère. b) Cette scène est composée à partir de trois quadriques : la sphère  $Q$ , la paire de plans  $Q'$  et le cylindre  $Q''$  ( $Q \cap \overline{Q'} \cap Q''$ ). c) La courbe d'intersection entre  $Q$ ,  $Q'$  et  $Q''$  est une arête du modèle BRep. Elle est visible sur le bord de  $Q$  et de  $Q'$  car elle sépare une  $Q$ -face visible d'une  $Q$ -face non visible et une  $Q'$ -face visible d'une  $Q'$ -face non visible. Cependant cette arête n'est pas visible sur le bord de  $Q''$  car aucune des deux  $Q''$ -faces qu'elle délimite n'est visible.

Une  $Q$ -arête visible sur le bord de  $Q$  est caractérisée par son *degré de visibilité*. Ce dernier est le nombre de  $Q$ -faces visibles qu'elle délimite. Sur la figure 5.1 les arêtes de  $A$  et  $B$  contenues dans  $Q$  sont toutes visibles sur son bord. Parmi elles la  $Q$ -arête commune pour  $A$  et  $B$  est de degré de visibilité 2, car elle délimite deux  $Q$ -faces visibles. Les  $Q$ -arêtes restantes bornent une seule  $Q$ -face et sont par conséquent de degré de visibilité 1.

Dans la plupart des cas le degré de visibilité maximal pour une  $Q$ -arête est 2. Un seul cas de figure en fait exception. C'est le cas où  $Q$  est une paire de plans et cette  $Q$ -arête repose sur sa droite singulière. Pour ce cas très particulier le degré de visibilité est compris entre 1 et 4, du fait qu'ici la  $Q$ -arête sépare quatre  $Q$ -faces. Nous présentons ce cas à part, dans la section 5.4, après nous être concentrés dans les paragraphes suivants sur le reste des situations. Nous supposons donc que les  $Q$ -arêtes que nous considérons n'appartiennent pas à la droite singulière de  $Q$  si bien sûr  $Q$  en possède une.

Le degré de visibilité sert d'indice pour l'orientation des  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$  que nous envisageons à la suite de VE. Plus précisément, il indique si une  $Q$ -arête doit être orientée dans un seul sens ou bien dans les deux sens. D'après la convention d'orientation envisagée (mentionnée dans la section 2.4), vue de l'extérieur de  $Q$  toute  $Q$ -face devra se situer à gauche par rapport à l'orientation des  $Q$ -arêtes qui la délimitent. Par conséquent, une  $Q$ -arête de degré de visibilité 1 est orientée dans un seul sens et une  $Q$ -arête de degré de visibilité 2 est orientée dans les deux sens. Chaque sens d'orientation de cette dernière contribue à la description d'une parmi les deux  $Q$ -faces visibles qu'elle délimite (voir figure 5.1 b).

## 5.2 Description de VE

L'objectif de notre travail est de retrouver toute face du modèle BRep sur chacune des primitives auxquelles elle appartient. Comme une face contenue sur le bord de  $Q$  correspond à une  $Q$ -face visible, l'idée est de déterminer, pour toute quadrique  $Q$ , l'ensemble des  $Q$ -faces visibles sur son bord. Ces  $Q$ -faces sont circonscrites par les  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$ . Ainsi, pour toute composante de toute courbe d'intersection, l'algorithme considère successivement toutes les  $Q$ -arêtes. Pour une  $Q$ -arête donnée, il génère un point sur elle et le classe par rapport au modèle CSG. Seules les  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$  sont conservées.

VE distingue deux types de classement, classement global et classement approfondi. Une  $Q$ -arête est classée d'abord de façon globale et, si besoin, ensuite de façon approfondie.

Le classement global d'une  $Q$ -arête correspond au classement décrit dans le chapitre 2.

Évaluer l'équation implicite d'une quadrique volumique en un point permet de déterminer si ce dernier se trouve à l'extérieur, à l'intérieur d'elle ou sur sa surface. De cette façon, selon la position du point par rapport à chaque quadrique volumique du modèle CSG, toute feuille de l'arbre CSG est marquée par  $-1$ ,  $1$  ou  $0$  pour indiquer respectivement extérieur, intérieur ou surface.

<u>union</u>				<u>intersection</u>				<u>complément</u>
$\cup$	$-1$	$0$	$1$	$\cap$	$-1$	$0$	$1$	$!(-1) = 1$
$-1$	$-1$	$0$	$1$	$-1$	$-1$	$-1$	$-1$	$!(0) = 0$
$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$0$	$!(1) = -1$
$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$-1$	$0$	$1$	

TAB. 5.1 – Ce tableau représente la convention d'application des opérations union, intersection et complément adoptée dans VE. Les signes  $-1$ ,  $1$  et  $0$  indiquent respectivement l'extérieur, l'intérieur et la surface d'un objet volumique donné.

Ensuite, l'arbre CSG est évalué selon la convention adoptée sur les opérations union, intersection et complément présentée dans le tableau 5.1. Elle est issue de la convention sur ces opérations exposée dans le tableau 2.1. La seule différence avec cette dernière repose sur l'opération  $0 \cup 0$ . Dans le chapitre 2 nous avons constaté que  $0 \cup 0 = 0$  ou bien  $0 \cup 0 = 1$ . Ici, nous convenons que  $0 \cup 0 = 0$ .

Cette évaluation est dite *évaluation globale*. À son issue la racine de l'arbre CSG est marquée par  $-1$ ,  $1$  ou  $0$ . Les signes  $-1$  et  $1$  garantissent que la  $Q$ -arête se trouve respectivement à l'extérieur ou à l'intérieur du modèle CSG et par conséquent qu'elle n'est pas arête du modèle BRep cherché. De son côté, suite à la convention que nous avons adoptée, le signe  $0$  ne permet pas de conclure. Ceci crée la nécessité d'un classement approfondi. Celui-ci est décrit dans la section qui suit.



## 5.3 Classement approfondi

Avant d'exposer le classement approfondi de l'arbre CSG, il est nécessaire d'introduire les notions de voisinage externe et de voisinage interne d'une  $Q$ -face ainsi que le terme « secteur angulaire ».

### 5.3.1 Voisinage externe et voisinage interne d'une $Q$ -face

Observons le voisinage d'un point  $M$  contenu dans une  $Q$ -face  $F$ . D'après le chapitre 2 il s'agit d'une boule ouverte centrée en  $M$  de rayon infinitésimal. Supposons son rayon suffisamment petit pour qu'elle intersecte uniquement  $F$ . Le voisinage de  $M$  est découpé en deux « demi »-boules ouvertes situées des deux côtés de  $F$ . L'une se trouve à l'intérieur, et l'autre à l'extérieur de  $Q$ . Nous appelons *voisinage externe de la  $Q$ -face  $F$  en  $M$* , respectivement *voisinage interne de la  $Q$ -face  $F$  en  $M$*  la demi-boule située à l'extérieur, respectivement à l'intérieur de  $Q$  (cf. figure 5.3).

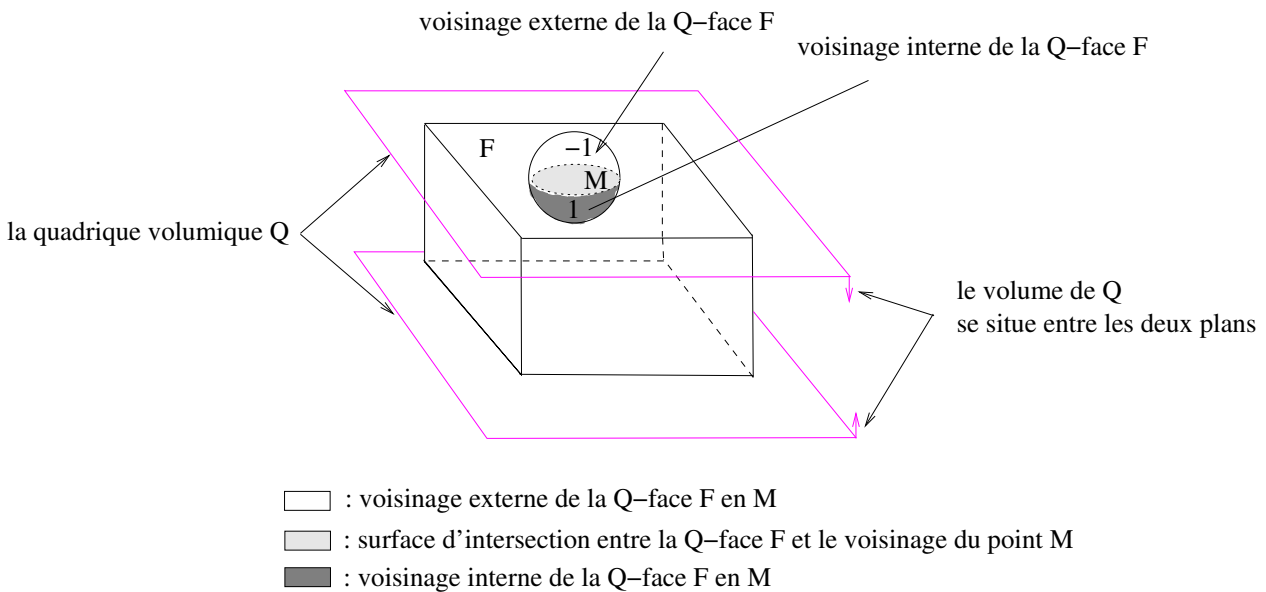


FIG. 5.3 – Ici la scène est composée d'un cube dont la face  $F$  repose sur la paire de plans  $Q$ . Le voisinage de la  $Q$ -face  $F$  en  $M$  est illustré par une sphère centrée en  $M$ .  $F$  est visible sur son côté extérieur, ce qui correspond au fait que son voisinage externe est négatif et que son voisinage interne est positif.

Si le voisinage, externe ou interne, est situé en dehors d'un objet volumique, alors il est appelé négatif par rapport à cet objet et marqué par  $-1$ . Dans le cas inverse, il est dit positif par rapport à lui et marqué par  $1$ . Étant donné que les voisinages interne, respectivement externe, sont de même signe en tous les points de  $F$ , nous parlerons dans la suite de *voisinage externe, respectivement interne de  $F$* .

Notons que quand  $F$  est visible, ses voisinages externe et interne par rapport au modèle CSG sont de signes opposés (voir figure 5.3). Typiquement,  $F$  est visible sur le côté extérieur de  $Q$  si et seulement si par rapport au modèle CSG son voisinage externe est négatif tandis que son voisinage interne est positif. Par contre,  $F$  est visible sur le côté intérieur de  $Q$  si et seulement si par rapport au modèle CSG son voisinage externe est positif et son voisinage interne est négatif.

Pour résumer, une  $Q$ -face est caractérisée par ses voisinages externe et interne par rapport au modèle CSG, et une  $Q$ -arête, par les  $Q$ -faces qu'elle délimite. Par conséquent, une  $Q$ -arête est caractérisée par les voisinages de ces  $Q$ -faces, d'où l'idée de secteur angulaire.

### 5.3.2 Secteur angulaire

Intuitivement, le secteur angulaire d'une  $Q$ -arête schématise sa section transversale en un point  $M$ . Celle-ci est réduite à l'échelle du voisinage de  $M$ .  $Q$  y est représenté par les  $Q$ -faces délimitées par cette  $Q$ -arête. Nous supposons que, si  $Q$  est une paire de plans, alors la  $Q$ -arête ne se situe pas sur sa droite singulière. Ce cas très particulier sera présenté dans la section 5.4. Ici l'accent est mis sur les voisinages externe et interne de ces  $Q$ -faces qui sont classés par rapport à une quadrique volumique, un objet volumique ou la scène. De façon plus concrète :

**Definition 1** *Le secteur angulaire d'une  $Q$ -arête orienté par rapport à un objet ou à un groupement d'objets géométriques en trois dimensions (qui correspondent, sur l'arbre CSG, à une feuille, à un nœud interne ou à la racine, et qui sont représentés respectivement par une quadrique volumique, par un objet volumique ou par la scène) est l'ensemble ordonné des signes, négatifs ou positifs, des voisinages externe et interne des  $Q$ -faces que la  $Q$ -arête délimite, dont l'ordre est défini dans la convention décrite ci-dessous. En tant*

qu'éléments du secteur angulaire, les voisinages des  $Q$ -faces sont appelés secteurs.

**Remarque 5** Soient  $Q$  et  $Q_i$  respectivement deux quadriques (non nécessairement distinctes) du modèle CSG, et  $a$  une  $Q$ -arête. Cette dernière est une arête de l'arrangement des quadriques du modèle CSG. Nous notons  $S(a, Q, Q_i)$  le secteur angulaire de  $a$  en tant que  $Q$ -arête par rapport à  $Q_i$ .  $S(a, Q, Q_i)$  est défini comme les quatre signes de  $Q_i$  dans chacune des quatre cellules de l'arrangement délimitées par les deux  $Q$ -faces que  $a$  sépare.

Le secteur angulaire d'une  $Q$ -arête est illustré par un cercle, son diamètre horizontal, son centre et quatre nombres (voir figure 5.4). Ici nous adoptons la convention que son diamètre horizontal et son centre représentent, respectivement, la surface de  $Q$  et la  $Q$ -arête. Les deux rayons obtenus représentent, de leur côté, les  $Q$ -faces que la  $Q$ -arête sépare. Les nombres notés sur les deux côtés de chaque rayon correspondent aux signes des secteurs,  $-1$  ou  $1$  (cf. figures 5.5 et 5.6). Les secteurs sont numérotés de 1 à 4. Ils sont ordonnés dans le sens des aiguilles d'une montre commençant par le secteur 1 situé en haut à droite. La normale de  $Q$  est supposée orientée vers l'extérieur de  $Q$  qui est illustré au-dessus du diamètre horizontal du secteur angulaire, et la tangente de  $a$  est supposée orientée dans le sens du parcours de la composante qui le contient que nous imaginons en sens opposé par rapport à l'observateur. Chacun des quatre secteurs de  $S(a, Q, Q_i)$  correspond à un parmi les quadrants ainsi formés.

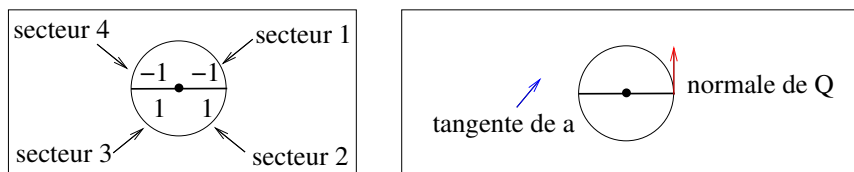


FIG. 5.4 –  $S(a, Q, Q)$ . La normale de  $Q$  est supposée orientée vers l'extérieur de  $Q$  qui est illustré au-dessus du diamètre horizontal du secteur angulaire, et la tangente de  $a$  est supposée orientée dans le sens du parcours de la composante qui le contient que nous imaginons en sens opposé par rapport à l'observateur.

**Remarque 6** Comme  $a$  est une  $Q$ -arête, d'après la remarque 1 il est clair que la quadrique volumique  $Q$  est régulière en tout point de  $a$  en dehors de ses extrémités (le cas

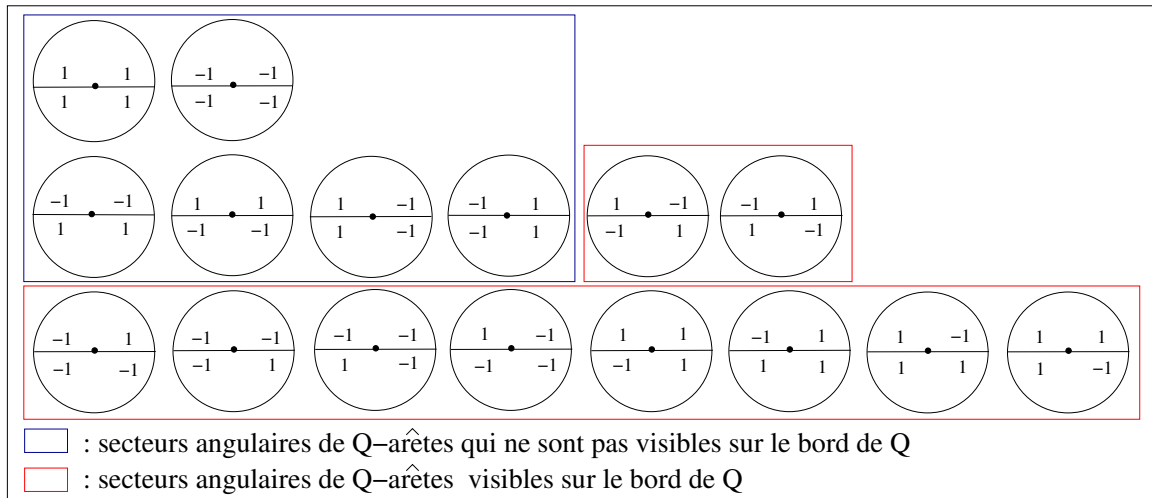


FIG. 5.5 – Les seize secteurs angulaires distincts. Les six formes de secteurs angulaires correspondent respectivement au secteur angulaire qui a quatre secteurs positifs, à celui qui n’a aucun secteur positif, à ceux qui ont deux secteurs positifs consécutifs, à ceux qui ont deux secteurs positifs non consécutifs, à ceux qui ont un seul secteur positif, et enfin, à ceux qui ont trois secteur positifs.

très particulier où  $Q$  est une paire de plans et  $a$  est contenue dans sa droite singulière est traité dans la section 5.4). De même, la composante algébrique à laquelle  $a$  appartient est régulière sur  $a$  (du fait que les composantes algébriques sont régulières en les segments obtenus par  $Q3$ ). Ainsi, la normale de  $Q$  et la tangente de  $a$  sont définies en tout point de  $a$ . Par conséquent, la convention indiquée ci-dessus garantit la correspondance entre cellules de l’arrangement des quadriques volumiques et les quatre secteurs de  $S(a, Q, Q_i)$  en tout point de  $a$  sauf en ses extrémités. Le secteur angulaire est donc bien défini pour toute  $Q$ -arête (à l’exception du cas décrit dans la section 5.4).

Il existe en tout seize secteurs angulaires distincts (voir figure 5.5). Ils sont groupés en six formes de secteurs angulaires en fonction du nombre des valeurs positives ou négatives de leurs secteurs : quatre secteurs positifs, trois secteur positifs, deux secteurs positifs consécutifs, deux secteurs positifs non consécutifs, un secteur positif, et aucun secteur positif. Toutes ces formes peuvent se produire par rapport au modèle CSG.

Trois parmi elles sont associées aux  $Q$ -arêtes qui ne sont pas visibles sur le bord de  $Q$ . Elles correspondent respectivement au secteur angulaire qui ne contient aucun secteur positif (la  $Q$ -arête se trouve à l'extérieur du modèle), à ceux qui contiennent deux secteurs positifs successifs (la  $Q$ -arête se trouve sur le bord du modèle, mais elle n'est pas arête du modèle BRep), et à celui qui en contient quatre (la  $Q$ -arête se trouve à l'intérieur du modèle).

Les trois formes restantes de secteurs angulaires sont celles des  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$ . Elles correspondent respectivement aux secteurs angulaires qui ont un seul secteur positif, à ceux qui en ont trois et à ceux qui ont deux secteurs positifs, 1 et 3 ou bien 2 et 4, et les deux autres négatifs. Ici, un nombre impair de secteurs positifs induit un degré de visibilité, et deux secteurs positifs induisent deux degrés de visibilité (cf. figure 5.6).

### 5.3.3 Classement approfondi - description

Revenons au classement des  $Q$ -arêtes par rapport au modèle CSG. Rappelons que, pour une  $Q$ -arête  $a$ , VE génère un point  $M$  et effectue un classement global en ce point. Lorsque celui-ci n'est pas suffisant pour déterminer si  $a$  est visible sur le bord de  $Q$  ou non, il est suivi d'un *classement approfondi*. Le classement approfondi détermine d'abord les secteurs angulaires de  $a$  en tant que  $Q$ -arête par rapport à chacune des quadriques volumiques. Ensuite, il procède par une *évaluation approfondie* de l'arbre CSG. Cette dernière trouve, en parcourant l'arbre CSG, le secteur angulaire de  $a$  par rapport à la scène à partir de ses secteurs angulaires par rapport à toutes les quadriques volumiques. Enfin, il déduit, selon sa forme, si  $a$  est visible sur le bord de  $Q$ . Le calcul des secteurs angulaires est expliqué dans les paragraphes qui suivent.

#### Secteurs angulaires vis-à-vis des quadriques volumiques

Vis-à-vis des quadriques volumiques les secteurs angulaires d'une  $Q$ -arête  $a$  sont distingués en trois groupes : par rapport à  $Q$ , par rapport à une quadrique volumique ne contenant pas  $a$  sur sa surface, et par rapport à une quadrique volumique autre que  $Q$

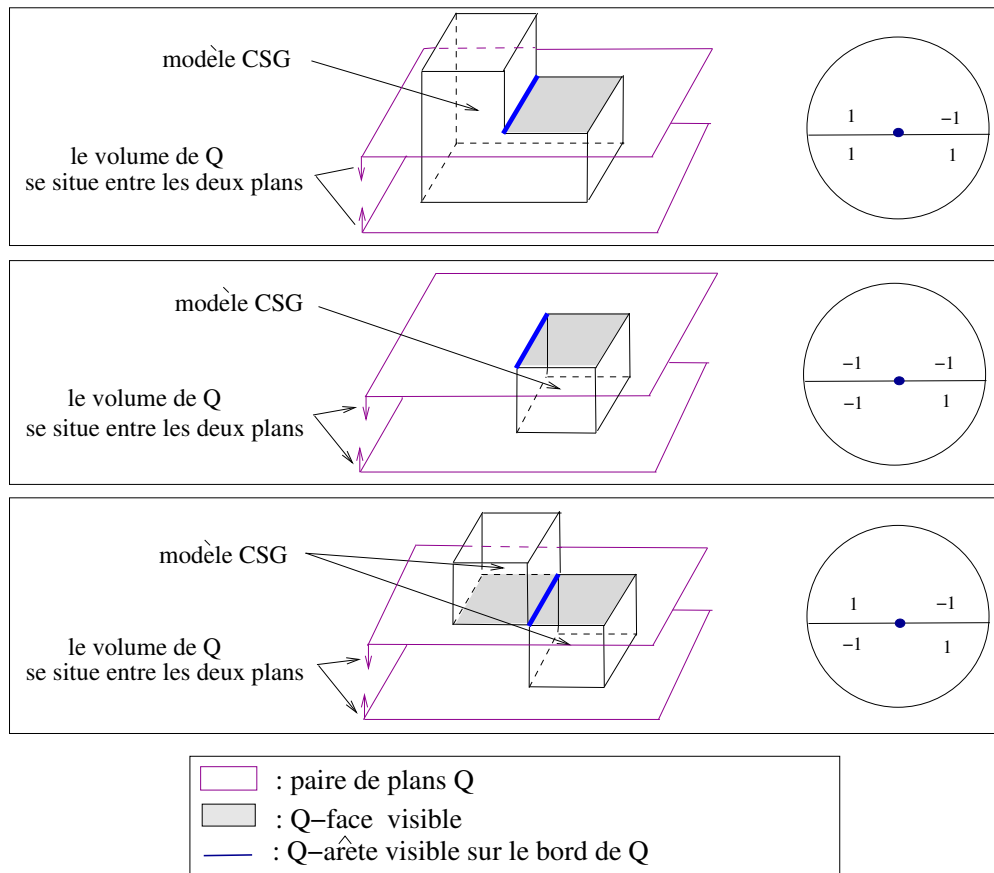


FIG. 5.6 – Secteurs angulaires de  $Q$ -arêtes visibles sur le bord d'une paire de plans  $Q$  : avec trois secteurs positifs (degré de visibilité 1), avec un secteur positif (degré de visibilité 1), et avec deux secteurs positifs (degré de visibilité 2).

contenant  $a$  sur sa surface. Par rapport à  $Q$  les secteurs 1 et 4 sont supposés, par convention, correspondre aux voisinages externes des  $Q$ -faces que  $a$  délimite et sont marqués par  $-1$ . De même, les secteurs 2 et 3 sont associés aux voisinages internes de ces  $Q$ -faces et sont marqués par 1. Ainsi,  $S(a, Q, Q) = (-1, 1, 1, -1)$ . Par rapport à une quadrique volumique  $Q'$  ne contenant pas  $a$  sur sa surface, selon que  $a$  se situe à l'extérieur ou à l'intérieur d'elle, les quatre secteurs sont égaux soit à  $-1$  ( $S(a, Q, Q') = (-1, -1, -1, -1)$ ), soit à 1 ( $S(a, Q, Q') = (1, 1, 1, 1)$ ). Enfin, par rapport à une quadrique volumique contenant  $a$  sur sa surface autre que  $Q$ , le calcul du secteur angulaire nécessite une étude locale. Celle-ci est abordée dans les paragraphes qui suivent.

### Construction des secteurs angulaires par rapport à une quadrique volumique qui contient la $Q$ -arête

Soit  $J$  l'ensemble des quadriques volumiques contenant  $a$  sur leur surface, duquel on a soustrait  $Q$ . L'algorithme génère un plan  $D$  qui coupe transversalement  $a$  au point  $M$ . Les intersections de  $D$  avec  $Q$  et de  $D$  avec les quadriques volumiques de  $J$  sont calculées par l'intermédiaire de QI, décrit dans le chapitre 3. Notons  $K_D$  la composante de la courbe d'intersection entre  $D$  et  $Q$  contenant  $M$ . Grâce à Q3, exposé dans le chapitre 4, les points d'intersection de  $K_D$  avec les quadriques volumiques de  $J$  sont déterminés et ordonnés. Ceci forme une section transversale de  $Q$  en  $M$  où  $a$  et les  $Q$ -faces que  $a$  délimite sont représentés respectivement par le point  $M$  et les deux segments de la composante  $K_D$  incidents en  $M$  (voir figure 5.7).

Par la suite, VE génère un point sur un de ces deux segments que nous notons  $K_{D_1}$ , par exemple celui dont les valeurs du paramètre (du paramétrage de la composante algébrique contenant  $a$ ) sont supérieures, et le classe vis-à-vis de chacune des quadriques volumiques de  $J$ . Dans le cas où ce point se trouve sur une quadrique volumique de  $J$ , VE vérifie si la normale de cette quadrique volumique en ce point a le même sens que la normale de  $Q$  en le même point. Pour toute quadrique volumique  $Q' \in J$  ceci induit les signes de deux secteurs du secteur angulaire  $S(a, Q, Q')$ . Nous supposons que ce sont les secteurs 1 et 2 (cf figure 5.7). Il se trouve que ce choix n'a pas d'impact sur la suite de l'algorithme. Une justification de cette affirmation découle de la section 5.3.4.

Nous avons constaté qu'il existe une relation entre les signes des différents secteurs du secteur angulaire. Soit  $l$  la composante algébrique contenant  $a$ . Ses propriétés permettent d'établir cette relation. Trois situations sont distinguées dans les deux paragraphes qui suivent : transversale, tangente et dégénérée. Elles sont illustrées sur la figure 5.8.

Les cas transversal et tangent arrivent lorsque  $Q$  et  $Q'$  n'ont pas de surface commune et donc  $l$  est une composante algébrique de leur courbe d'intersection. D'un côté, dans le cas transversal, la multiplicité de  $l$  (composante algébrique simple, double, triple ou quadruple) donnée par QI est impaire et le signe des secteurs 3 et 4 du secteur angulaire est le complément de celui des secteurs 1 et 2. D'un autre côté, dans le cas tangent,  $l$  est

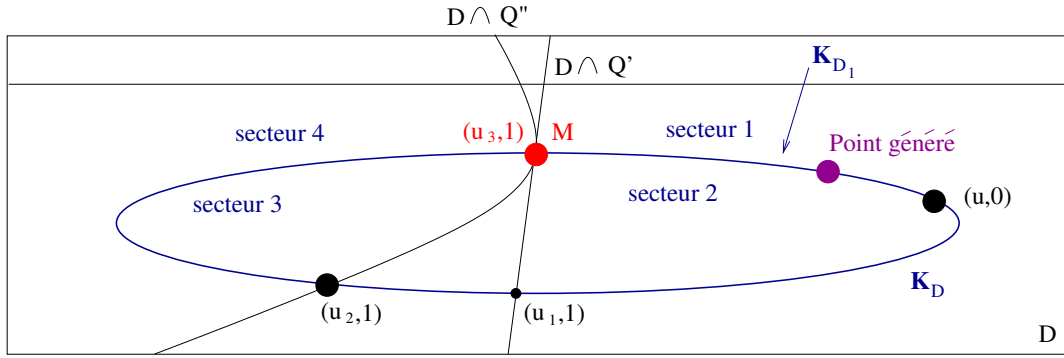


FIG. 5.7 – Cette figure illustre la section transversale, obtenue sur le plan  $D$ , de  $Q$  au point  $M$ . Ici, l'ensemble  $J$  est composé de deux quadriques volumiques,  $Q'$  et  $Q''$ .  $K_D$  est la courbe d'intersection entre  $Q$  et  $D$ . Ses points d'intersection avec  $Q'$  et  $Q''$  sont ordonnés par ordre croissant sur son paramétrage :  $(u_1, 1)$ ,  $(u_2, 1)$  et  $(u_3, 1)$ .  $(u, 0)$  est le point à l'infini sur ce paramétrage. Le point en magenta est généré et sa position (extérieur ou intérieur) par rapport à  $Q'$  et  $Q''$  donne les valeurs des secteurs 1 et 2 du secteur angulaire.

de multiplicité paire. Ici, les secteurs 3 et 4 du secteur angulaire ont le même signe que les secteurs 1 et 2.

Enfin, le cas dégénéré se produit lorsque  $Q$  et  $Q'$  sont deux paires de plans qui ont un plan commun et  $l$  est une composante algébrique sur le plan commun. Il existe deux variantes : celle où  $l$  est la droite singulière de  $Q'$  et celle où elle ne l'est pas. Dans la première variante les signes des secteurs 3 et 4 sont respectivement les compléments des signes des secteurs 2 et 1. Dans la seconde variante, ils leur sont respectivement égaux. Remarquons que nous ne considérons pas ici le cas où  $l$  est la droite singulière de  $Q$ . Ce cas très particulier fera l'objet de la section 5.4.

Précisons que dans le cas dégénéré,  $K_{D_1}$  est sur la surface de  $Q'$ . Par conséquent, son classement par rapport à  $Q'$  indique 0 et non pas  $-1$  ou  $1$  comme dans le cas transversal et le cas tangent. Pour cela, à l'issue de ce classement, VE vérifie si les normales de  $Q$  et de  $Q'$  en un point de  $K_{D_1}$  ont le même sens ou sont de sens opposés. Dans le premier cas, les secteurs 1 et 2 du secteur angulaire par rapport à  $Q'$  et ceux du secteur angulaire par rapport à  $Q$  sont de même signe. Dans le second cas, ils sont de signes opposés. Dans la suite du manuscrit, nous supposons que cette vérification fait partie du classement de



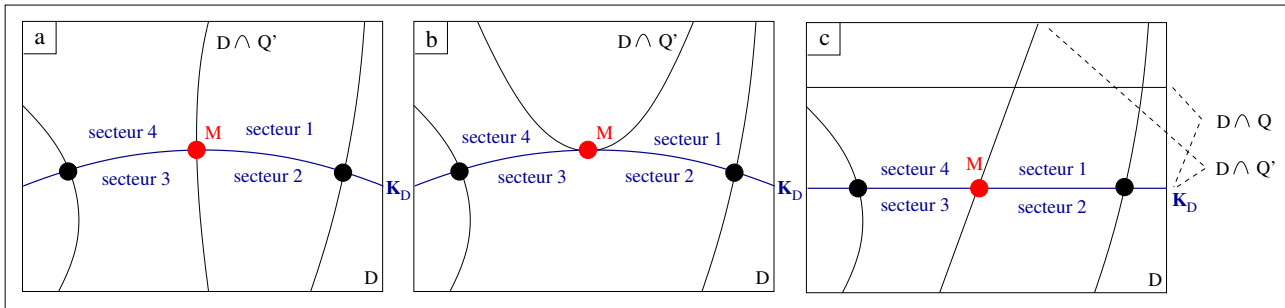


FIG. 5.8 – Les trois situations induites par les propriétés de l'intersection en  $l$  : a) cas transversal, b) cas tangent et c) cas dégénéré.

$K_{D_1}$ .

### Évaluation approfondie

Une fois que les secteurs angulaires de  $a$  sont établis par rapport à chacune des quatriques volumiques, VE procède à une évaluation approfondie. Lorsqu'un nœud interne de l'arbre CSG est associé à l'opération complément, tous les secteurs du secteur angulaire changent de signe. De son côté lorsqu'un nœud interne est associé à une union ou à une intersection les secteurs angulaires de ses deux fils sont combinés. L'opération booléenne est alors appliquée séparément à tous leurs secteurs de numéro identique. Elles suivent la même convention pour l'union, l'intersection et le complément que l'évaluation globale (cf. figure 5.9). Comme les secteurs sont marqués soit par  $-1$ , soit par  $1$ , le résultat de ces opérations est exact. Le secteur angulaire obtenu à la racine est le secteur angulaire cherché. Sa forme indique si  $a$  est visible sur le bord de  $Q$ , et dans le cas positif, son degré de visibilité.

#### 5.3.4 Permutations du secteur angulaire

Dans la section précédente, par le fait de considérer, selon les valeurs du paramètre, un des deux segments de la composante  $K_D$  incidents en  $M$ , et d'en déduire les signes des secteurs 1 et 2 du secteur angulaire, il a été suggéré que les secteurs angulaires ont une orientation par rapport aux  $Q$ -faces  $F_1$  et  $F_2$  que  $a$  délimite sur  $Q$ . Ainsi, les secteurs 1 et

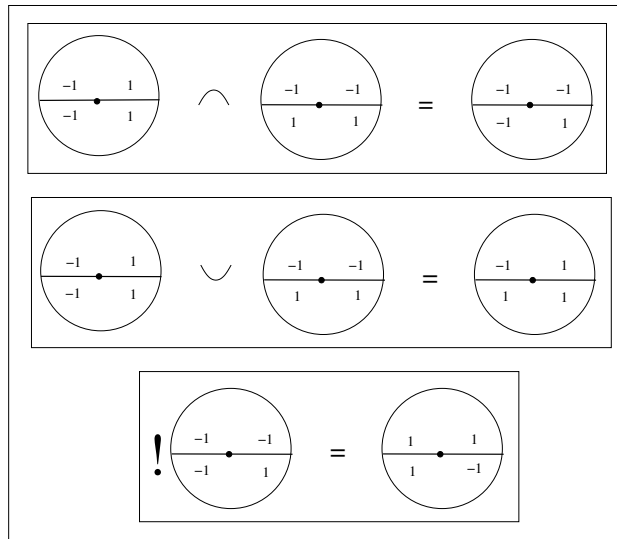


FIG. 5.9 – Un exemple d’intersection, d’union et de complément sur des secteurs angulaires.

2 ont été associés respectivement aux voisinages externe et interne de la  $Q$ -face contenant  $K_{D_1}$ .

En 3D, cette orientation dépend de l’emplacement de  $K_{D_1}$  vis-à-vis de  $a$ . Comme dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  la notion de direction utilisée dans l’espace affine perd son sens, l’idée a été d’établir une convention de correspondance entre les secteurs et les voisinages de  $F_1$  et  $F_2$  garantissant, lors de l’évaluation approfondie, la cohérence entre secteurs de même numéro de tous les secteurs angulaires. Sachant qu’une  $Q$ -arête est déterminée comme visible ou non sur le bord de  $Q$  en fonction du nombre de secteurs positifs et éventuellement selon le fait qu’ils se succèdent ou non, cette convention paraît suffisante. L’objet des paragraphes qui suivent est de justifier sa validité en montrant que toute autre « orientation » des secteurs angulaires mènerait à la même conclusion sur  $a$ .

#### Quatre « orientations »

En tout, quatre « orientations » différentes peuvent être appliquées au secteur angulaire. D’après la convention adoptée, par rapport à  $Q$  les secteurs 1 et 4 sont associés au voisinage externe de  $F_1$  et  $F_2$ . L’échange des signes des secteurs 1 et 4 avec respectivement ceux des secteurs 2 et 3 résulte en une deuxième convention. Cet échange est appelé *per-*

*mutation horizontale* (il est effectué par rapport au diamètre du secteur angulaire illustré horizontalement). Par rapport à  $a$  les secteurs 1 et 2 sont situés soit autour de la  $Q$ -face contenant  $K_{D_1}$ , soit autour de celle qui ne le contient pas. L'échange de leurs signes avec respectivement ceux des secteurs 4 et 3 implique une troisième convention. Ici, il s'agit d'une *permutation verticale* (elle est réalisée verticalement par rapport au diamètre). Enfin, l'échange des signes des secteurs 1 et 2 avec respectivement ceux des secteurs 3 et 4 définit la quatrième convention. C'est une *permutation centrale* (elle est faite par rapport au centre du secteur angulaire).

### Même forme du secteur angulaire à la racine

Il se trouve que quelque soit la convention adoptée, le secteur angulaire issu de l'évaluation approfondie a la même forme. Afin de l'affirmer, il suffit de vérifier que pour la convention que nous avons adoptée, appliquer une permutation horizontale, verticale ou centrale aux secteurs angulaires des feuilles de l'arbre CSG revient à appliquer la même permutation au secteur angulaire de la racine. Notons que si cette propriété est vérifiée pour la permutation verticale, alors elle est aussi vérifiée pour la permutation horizontale. Ceci vient du fait que dans les deux cas les effets de la permutation et de l'évaluation approfondie sont équivalents : d'abord la permutation est effectuée entre secteurs consécutifs, et ensuite, les opérations booléennes sont traitées secteur par secteur. De plus, si la propriété est vérifiée pour la permutation verticale, alors elle est également vérifiée pour la permutation centrale, fonction composée d'une permutation horizontale et d'une permutation verticale.

## 5.4 Le cas d'une droite singulière d'une paire de plans

Cette section s'intéresse au cas très particulier où  $Q$  est une paire de plans et où la composante parcourue coïncide avec sa droite singulière.

D'après la convention adoptée pour le secteur angulaire, ce dernier possède quatre secteurs. Pour une  $Q$ -arête donnée  $a$  ils désignent les quatre voisinages autour des deux  $Q$ -faces séparées par  $a$ . Cependant, dans le cas étudié à présent  $a$  sépare quatre  $Q$ -faces,

deux  $Q$ -faces par plan. De plus, la normale de  $Q$  n'est pas définie sur  $a$  et elle est orientée en sens opposé sur chacune des  $Q$ -faces d'un même plan séparées par  $a$  (cf. figure 5.10). Cette convention ne convient donc pas ici, ce qui nécessite de trouver une convention plus adaptée à ce cas précis.

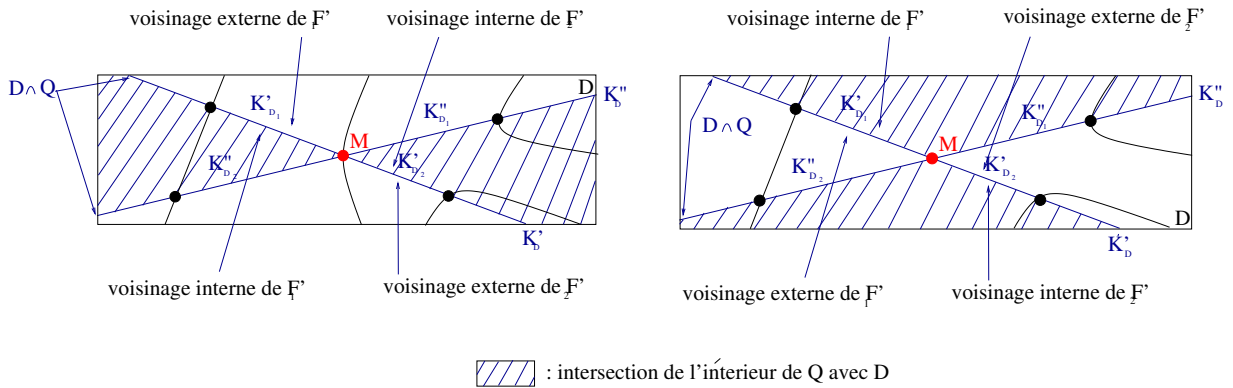


FIG. 5.10 – Cette figure illustre deux paires de plans identiques en tant que surface mais dont l'extérieur et l'intérieur diffèrent. La normale sur chaque plan est orientée en sens opposé sur chacune des faces séparées par la droite singulière.  $D$  est un plan transversal à  $a$ .  $P'$ ,  $P''$  et  $a$  sont représentés sur  $D$  respectivement par deux droites que nous notons  $K'_D$  et  $K''_D$  et le point  $M$ .  $K'_{D_1}$  et  $K'_{D_2}$  sont les segments adjacents à  $M$  de  $K'_D$ , et  $K''_{D_1}$  et  $K''_{D_2}$  les segments adjacents à  $M$  de  $K''_D$ .

Il pourrait sembler plus pratique d'avoir séparé au préalable les paires de plans en plans simples. Toutefois, même si les paires de plans sont exprimées par des équations implicites à coefficients rationnels, une fois séparés, celles des plans simples peuvent contenir des coefficients irrationnels. Ainsi nous avons préféré ne pas séparer les paires de plans. À la place, l'idée a été d'adapter le secteur angulaire à chaque plan selon la nouvelle convention exposée ci-dessous.

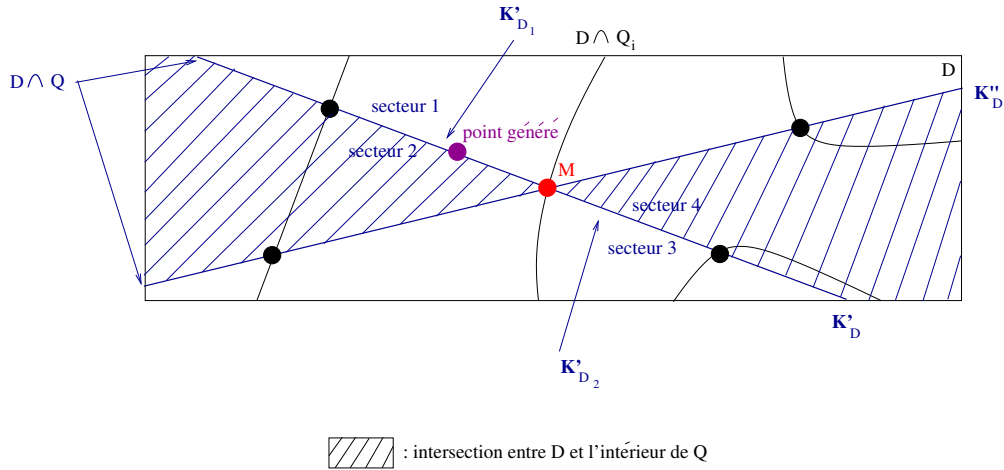
Notons les deux plans de  $Q$ ,  $P'$  et  $P''$ . La  $Q$ -arête  $a$  délimite sur chacun d'eux deux  $Q$ -faces que nous appelons respectivement  $P'$ -faces et  $P''$ -faces. Elle est considérée séparément sur  $P'$  comme une  $P'$ -arête et sur  $P''$  comme une  $P''$ -arête. Remarquons que  $a$ , en tant que  $Q$ -arête, peut être de degré de visibilité 1, 2, 3 ou 4, et en tant que  $P'$ -arête ou  $P''$ -arête, de degré de visibilité 1 ou 2.

Nous cherchons à savoir si  $a$  est visible sur le bord de  $P'$  et  $P''$ . Lorsque le classement global s'avère insuffisant, il est suivi de deux classements approfondis visant à caractériser  $a$  en tant que  $P'$ -arête et  $P''$ -arête. Le principe du classement approfondi pour chacun des deux plans étant exactement le même, dans les paragraphes qui suivent  $P'$  indiquera le plan considéré.

Pareillement aux cas précédents, le secteur angulaire ici est illustré par un cercle, son diamètre horizontal, son centre et quatre nombres. La nouvelle convention que nous adoptons associe son diamètre horizontal et son centre, respectivement, à la surface de  $P'$  et à  $a$  en tant que  $P'$ -arête. Les deux rayons obtenus représentent, de leur côté, les  $P'$ -faces que  $a$  sépare. Les nombres notés sur les deux côtés de chaque rayon correspondent aux signes des secteurs,  $-1$  ou  $1$ . Les secteurs sont numérotés de 1 à 4. Ils sont ordonnés dans le sens des aiguilles d'une montre commençant par le secteur 1 situé en haut à droite. La tangente de  $a$  est supposée orientée dans le sens du parcours que nous imaginons en sens opposé par rapport à l'observateur. La normale de  $P'$  est orientée vers l'extérieur de  $Q$  et donc elle est de sens opposé sur les deux rayons du secteur angulaire. Par conséquent, deux secteurs consécutifs quelconques du secteur angulaire  $S(a, P', Q)$  sont marqués de signes opposés. La normale de la  $P'$ -face qui correspond au rayon droit de  $S(a, P', Q)$  est supposée orientée vers le « haut ». Ainsi, les secteurs 1, 2, 3 et 4 sont supposés être respectivement marqués par  $-1$ ,  $1$ ,  $-1$  et  $1$  (voir figure 5.11).

De façon similaire aux cas précédents, par rapport à toute quadrique volumique qui ne contient pas la droite singulière de  $Q$ , tous les secteurs sont négatifs si  $M$  se trouve à l'extérieur d'elles, et positifs dans le cas inverse. Afin d'établir le secteur angulaire par rapport à une quadrique  $Q'$  de l'ensemble  $J$  des quadriques du modèle CSG autres que  $Q$  qui contiennent la droite singulière de  $Q$ , comme précédemment, un plan  $D$  transversal à  $a$  est généré, ses courbes d'intersection avec  $Q$  et  $J$  sont trouvées et leurs points d'intersection calculés (voir figure 5.12).  $P'$ ,  $P''$  et  $a$  sont représentés sur  $D$  respectivement par deux droites que nous notons  $K'_D$  et  $K''_D$  et le point  $M$ . Soient  $K'_{D_1}$  et  $K'_{D_2}$  les segments adjacents à  $M$  de  $K'_D$ , et  $K''_{D_1}$  et  $K''_{D_2}$  les segments adjacents à  $M$  de  $K''_D$ .

Afin de trouver les signes des quatre secteurs de  $S(a, P', Q')$  il est possible de générer deux points sur  $K'_D$ , un sur  $K'_{D_1}$ , et un autre sur  $K'_{D_2}$ , et, de façon similaire aux cas



$S(a, P', Q)$

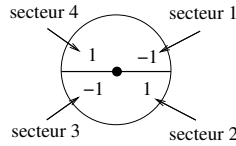


FIG. 5.11 – La section transversale de  $Q$  sur  $D$  et  $S(a, P', Q)$ .  $D$  est un plan transversal à  $a$ .  $P'$ ,  $P''$  et  $a$  sont représentés sur  $D$  respectivement par deux droites que nous notons  $K'_D$  et  $K''_D$  et le point  $M$ .  $K'_{D_1}$  et  $K'_{D_2}$  sont les segments adjacents à  $M$  de  $K'_D$ .

traités avant cette section, de déterminer pour chacun d'eux deux parmi les secteurs de  $S(a, P', Q')$ , 1 et 2 ou bien 3 et 4. Cependant, nous avons réussi à montrer comment alléger les calculs en prenant en compte si  $Q'$  contient  $P'$ , et dans le cas contraire, en considérant la multiplicité de la droite singulière. Remarquons qu'ici nous ne pouvons pas nous référer à la relation entre les signes des différents secteurs du secteur angulaire établie dans la section 5.3.3. En effet, si l'intersection entre  $Q$  et  $Q'$  est de dimension 1, alors la multiplicité de la droite singulière de  $Q$  vaut la somme des multiplicités de cette droite en tant que composante de l'intersection entre  $P'$  et  $Q'$  et en tant que composante de l'intersection entre  $P''$  et  $Q'$ . Or, pour utiliser la relation entre les signes des différents secteurs du secteur angulaire établie dans la section 5.3.3 pour  $S(a, P', Q')$  et  $S(a, P'', Q')$  il aurait fallu connaître ces multiplicités. Ainsi, il a été nécessaire de trouver une autre

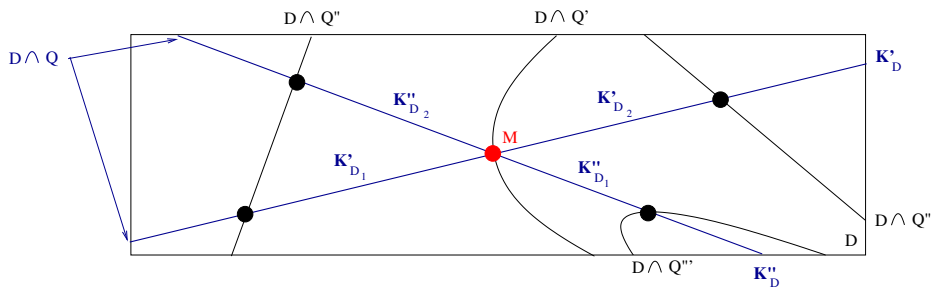


FIG. 5.12 – Cette figure illustre la section transversale de  $Q$  obtenue sur le plan  $D$ .  $K'_D$  est la droite d'intersection entre  $P'$  et  $D$ ,  $K''_D$  la droite d'intersection entre  $P''$  et  $D$ , et  $M$  le point d'intersection entre  $a$  et  $D$ . Ici, l'ensemble  $J$  est composé d'une seule quadrique volumique  $Q'$ .  $Q''$  et  $Q'''$  sont des quadriques volumiques du modèle CSG.  $K'_{D_1}$  et  $K'_{D_2}$  sont les segments adjacents à  $M$  de  $K'_D$ , et  $K''_{D_1}$  et  $K''_{D_2}$  les segments adjacents à  $M$  de  $K''_D$ .

relation entre les signes des différents secteurs. Celle-ci fera l'objet des paragraphes qui suivent.

Considérons le secteur angulaire de  $a$  en tant que  $P'$ -arête et celui de  $a$  en tant que  $P''$ -arête par rapport à une quadrique volumique  $Q'$  de  $J$ . Supposons que deux points sont générés, un sur  $K'_{D_1}$  et un autre sur  $K''_{D_1}$ . Leur classement par rapport à  $Q'$ , et si nécessaire la normale de  $Q$  et de  $Q'$  en ces points, sont comparés pour établir deux de ses secteurs que nous supposons être les secteurs 1 et 2. Afin d'en déduire les secteurs 3 et 4 cinq situations sont distinguées (cf. figure 5.13) :

- celle où  $Q$  et  $Q'$  ont un plan commun, où  $Q'$  est également une paire de plans, et où la droite singulière de  $Q$  coïncide avec la droite singulière de  $Q'$  ;
- celle où  $Q$  et  $Q'$  ont un plan commun et où si  $Q'$  est une paire de plans ( $Q'$  peut être un plan simple), alors la droite singulière de  $Q$  ne coïncide pas avec la droite singulière de  $Q'$  ;
- celle où la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité quadruple ;
- celle où la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité double ;
- celle où la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité triple.

Considérons d'abord le cas où  $Q$  et  $Q'$  ont un plan commun, où  $Q'$  est également

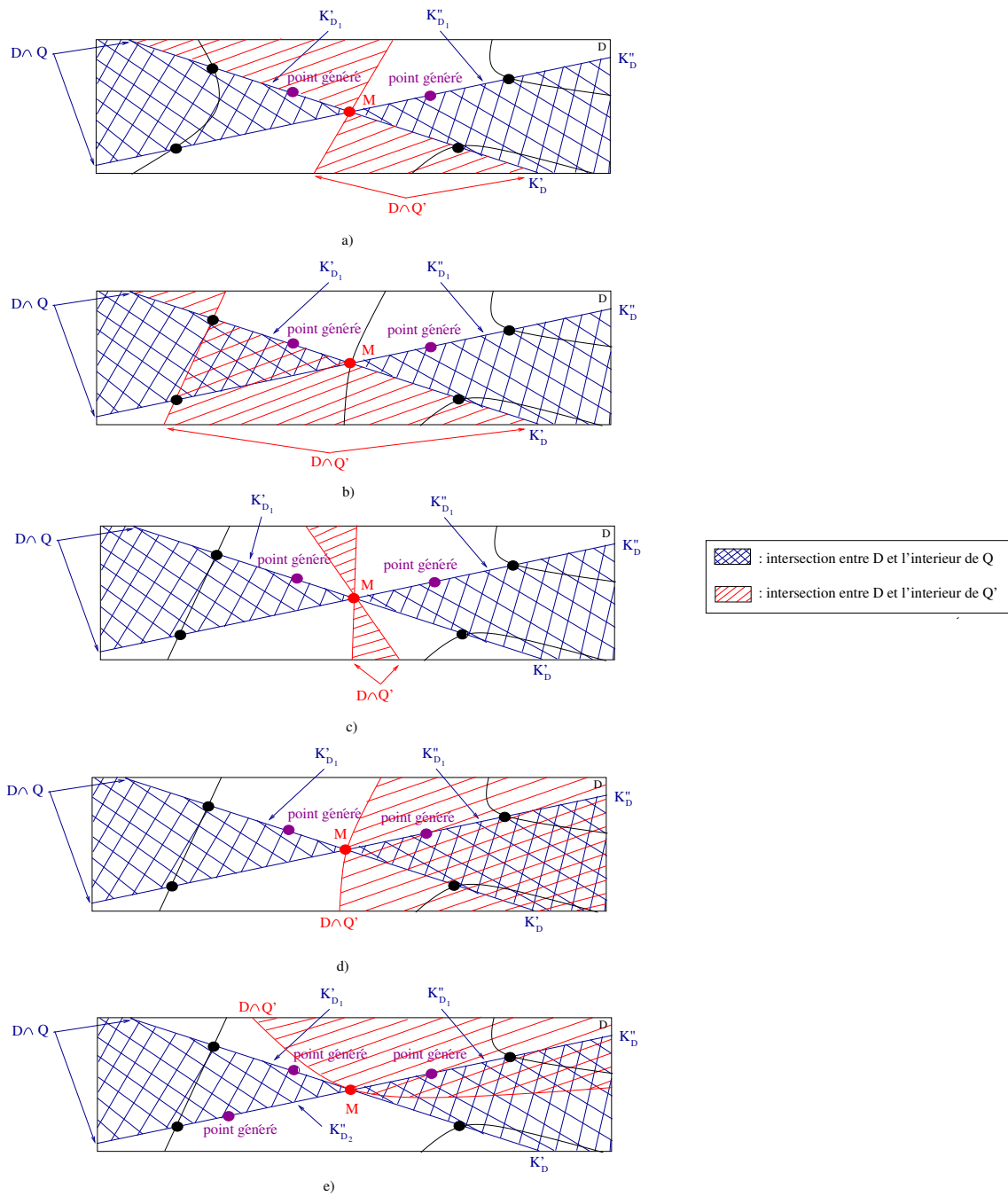


FIG. 5.13 – Exemples pour les cinq cas de figure que nous avons distingués pour l'intersection entre  $Q$  et  $Q'$  : a)  $Q$  et  $Q'$  ont un plan commun et la droite singulière de  $Q$  coïncide avec la droite singulière de  $Q'$  ; b)  $Q$  et  $Q'$  ont un plan commun et la droite singulière de  $Q$  ne coïncide pas avec la droite singulière de  $Q'$  ; c) la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité quadruple ; d) la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité double ; e) la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité triple.



une paire de plans, et où la droite singulière de  $Q$  coïncide avec la droite singulière de  $Q'$ . Supposons que  $P'$  est le plan commun de  $Q$  et  $Q'$ .  $K''_{D_1}$  et  $K''_{D_2}$  se situent soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de  $Q'$ . Par conséquent, dans  $S(a, P'', Q')$  les secteurs 3 et 4 ont les mêmes signes que les secteurs 1 et 2. De son côté, selon que l'intérieur de  $Q$  et l'intérieur de  $Q'$  soient situés du même côté vis-à-vis de  $K'_{D_1}$  ou non,  $S(a, P', Q_i)$  est identique à  $S(a, P', Q)$  ou égal à son complément.

La figure 5.13 a) présente ce cas. Ici,  $K''_{D_1}$  et  $K''_{D_2}$  se situent à l'extérieur de  $Q'$  et par conséquent tous les secteurs de  $S(a, P'', Q')$  sont marqués par  $-1$ . Compte tenu du fait que l'intérieur de  $Q$  et l'intérieur de  $Q'$  ne sont pas situés du même côté vis-à-vis de  $K'_{D_1}$ ,  $S(a, P', Q') = S(a, P', Q)$  (les secteurs 1 et 3 sont marqués par 1, et les secteurs 2 et 4 par  $-1$ ).

Dans le cas où  $Q$  et  $Q'$  ont un plan commun que nous supposons être  $P'$ , et où, si  $Q'$  est une paire de plans, alors la droite singulière de  $Q$  ne coïncide pas avec la droite singulière de  $Q'$ , les segments  $K''_{D_1}$  et  $K''_{D_2}$  se situent l'un à l'extérieur et l'autre à l'intérieur de  $Q'$ . Par conséquent, dans  $S(a, P'', Q')$  les signes des secteurs 3 et 4 sont les compléments des signes des secteurs 1 et 2. De son côté, selon que l'intérieur de  $Q$  et l'intérieur de  $Q'$  soient situés du même côté vis-à-vis de  $K'_{D_1}$  ou non, les secteurs 1 et 2 de  $S(a, P', Q')$  sont identiques respectivement aux secteurs 1 et 2 de  $S(a, P', Q)$  ou égaux à leurs compléments. Les secteurs 3 et 4 sont les compléments respectivement des secteurs 2 et 1.

Sur la figure 5.13 b), qui illustre ce cas, les secteurs 1 et 2 de  $S(a, P'', Q')$  sont marqués par  $-1$  et les secteurs 3 et 4 par 1. Étant donné que l'intérieur de  $Q$  et l'intérieur de  $Q'$  sont situés du même côté vis-à-vis de  $K'_{D_1}$ , les secteurs 1, 2, 3 et 4 sont marqués respectivement par  $-1, 1, 1$  et  $-1$ .

Quand la multiplicité de  $K$  est quadruple  $K'_{D_1}$  et  $K'_{D_2}$  se situent soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de  $Q'$ . Idem pour  $K''_{D_1}$  et  $K''_{D_2}$ . Ainsi chacun des deux secteurs angulaires,  $S(a, P', Q')$  et  $S(a, P'', Q')$  de  $a$ , a tous ses secteurs de même signe. Par exemple, sur la figure 5.13 c) les deux secteurs angulaires ont tous leurs secteurs négatifs.

Le cas où la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité double implique que l'intersection entre  $P'$  et  $Q'$  ainsi que celle entre  $P''$  et  $Q'$  sont de multiplicité simple et par conséquent  $Q'$  est sécante pour  $P'$  et  $P''$  en  $K$ . Il en suit que pour chacune des droites  $K'_D$  et  $K''_D$

un des segments adjacents en  $M$  se trouve à l'extérieur et l'autre à l'intérieur de  $Q'$ . Par conséquent, pour les secteurs angulaires  $S(a, P', Q')$  et  $S(a, P'', Q')$  le signe des secteurs 3 et 4 est le complément du signe des secteurs 1 et 2.

En particulier, sur la figure 5.13 d) les secteurs 1 et 2 de  $S(a, P', Q')$  sont négatifs tandis que ses secteurs 3 et 4 sont positifs. De leur côté, les secteurs 1 et 2 de  $S(a, P'', Q')$  sont positifs et ses secteurs 3 et 4 négatifs.

Enfin, le cas où la droite singulière de  $Q$  est de multiplicité triple induit une multiplicité double pour l'intersection entre  $Q'$  et un des plans de  $Q$  et une multiplicité simple pour l'intersection entre  $Q'$  et l'autre plan de  $Q$ . Supposons  $P'$  le premier et  $P''$  le second plan.  $Q'$  est désormais tangente à  $P'$  et sécante à  $P''$  en la droite singulière de  $Q$ . Ceci implique que le signe des secteurs 3 et 4 de  $S(a, P', Q')$  est identique à celui des secteurs 1 et 2. À son inverse, le signe des secteurs 3 et 4 de  $S(a, P'', Q')$  est le complément de celui de ses secteurs 1 et 2.

À titre d'exemple, sur la figure 5.13 e) tous les secteurs de  $S(a, P', Q')$  sont négatifs. Par contre, en ce qui concerne  $S(a, P'', Q')$ , les secteurs 1 et 2 sont positifs et les secteurs 3 et 4 négatifs.

Notons qu'ici nous avons supposé  $Q'$  tangente à  $P'$  et sécante à  $P''$ . Néanmoins, dans la pratique, les deux plans de  $Q$  ne sont pas distingués et donc  $P'$  et  $P''$  ne sont pas identifiés. Ainsi, lors du parcours de leurs droites d'intersection avec  $D$ , nous ignorons laquelle correspond à  $K'_D$ , et laquelle à  $K''_D$ . Cependant, dans ce cas précis, cette information est nécessaire afin de déduire correctement le signe des secteurs 3 et 4 à partir de celui des secteurs 1 et 2 pour  $S(a, P', Q')$  et  $S(a, P'', Q')$ .

Pour cela, considérons les segments des deux droites  $K'_D$  et  $K''_D$  adjacents en  $M$ . Il est clair que pour  $K'_D$  les classements des deux segments sont identiques, et que pour  $K''_D$  ils sont de signes opposés. Pour parvenir à les identifier il suffit de considérer deux segments sur une de ces droites et de comparer leurs classements. S'ils sont de signes identiques, alors il s'agit de  $K'_D$ . Sinon, il s'agit de  $K''_D$ .

Typiquement, sur la figure 5.13 e) les deux points générés sur une même droite sont de signes différents. Cette droite est donc  $K''_D$ . Il en suit que pour  $S(a, P', Q')$ , les secteurs 3 et 4 doivent être de même signe que les secteurs 1 et 2 déterminés par le classement du

point généré sur  $K'_D$ .

## 5.5 Le cas des points isolés

Soit  $Q$  un cône. Nous appelons un point qui coïncide avec le sommet de  $Q$  un  $Q$ -sommet *visible* lorsque ce dernier délimite en lui-même une  $Q$ -face visible (voir figure 5.14). Pour détecter ces sommets, VE considère les points isolés qui correspondent au sommet d'au moins un cône du modèle CSG (voir remarque 2). Notons  $M$  le sommet d'un cône  $Q$ . Afin de vérifier si  $M$  est un  $Q$ -sommet visible, VE effectue un classement global de  $M$  par rapport au modèle CSG. Il est clair que, si  $M$  se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur de ce dernier, alors  $M$  n'est pas un  $Q$ -sommet visible. Cependant, dans le cas inverse, il est nécessaire de faire une étude plus approfondie.

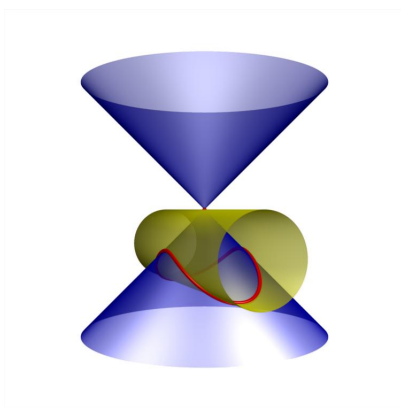


FIG. 5.14 – Soient  $Q$  le cône et  $Q_i$  le cylindre. Ils s'intersectent en une quartique nodale avec un point isolé. Supposons que la  $Q$ -face qu'elle délimite est une face du modèle CSG. Dans ce cas-là, la composante algébrique constituant la quartique est une  $Q$ -arête visible, et le point isolé est un  $Q$ -sommet visible.

Remarquons que  $M$  est un  $Q$ -sommet visible si et seulement si un seul des deux demi-cônes de  $Q$  forme une  $Q$ -face visible au voisinage de  $M$ , ou bien, si chacun des deux demi-cônes de  $Q$  forme une  $Q$ -face visible au voisinage de  $M$ , mais l'une est visible sur son côté intérieur et l'autre sur son côté extérieur. Ceci montre la nécessité de vérifier, pour chaque demi-cône de  $Q$ , s'il contient des  $Q$ -arêtes visibles au voisinage de  $M$ . Il

est clair que, s'il existe au moins un carreau visible sur un demi-cône de  $Q$ , alors  $M$  est extrémité d'au moins deux  $Q$ -arêtes visibles de ce demi-cône et n'y délimite donc pas en lui seul une  $Q$ -face visible.

Bien évidemment, nous devons pouvoir distinguer les  $Q$ -arêtes sur chacun des deux demi-cônes de  $Q$ . Pour cela, dans le cas où il existe au moins une composante algébrique sur  $Q$  qui passe par  $M$ , VE génère l'équation implicite d'un plan simple dont  $M$  est la seule intersection avec  $Q$ . Ce plan sépare  $Q$  en deux demi-cônes : l'un se trouve à l'intérieur, et l'autre, à l'extérieur du plan. Ainsi, il sépare également les  $Q$ -arêtes situées sur ces demi-cônes. Il reste à savoir combien parmi les deux demi-cônes ont leur surface au voisinage de  $M$  sur le bord du modèle CSG, 0, 1 ou 2, et dans le dernier cas, si les deux  $Q$ -faces qu'ils forment au voisinage de  $M$  sont visibles sur le même côté (intérieur ou extérieur). Si leur nombre est 1, alors  $M$  délimite une  $Q$ -face visible. De même, lorsque leur nombre est 2 et ces deux  $Q$ -faces sont visibles, l'une sur son côté intérieur, et l'autre sur son côté extérieur,  $M$  délimite une  $Q$ -face visible. De son côté, quand leur nombre est 2 et ces deux  $Q$ -faces sont visibles du même côté (intérieur ou extérieur), les deux demi-cônes de  $Q$  sont visibles du même côté au voisinage de  $M$  et  $M$  ne sépare donc pas deux faces du modèle CSG.

Supposons que nous considérons un demi-cône  $q$  en particulier. Supposons également qu'il contient sur sa surface des segments de courbe incidents à  $M$ . Notons que, si la surface de  $q$  au voisinage de  $M$  est sur le bord du modèle CSG, alors, d'une part, aucun de ces segments ne délimite une  $Q$ -face, et d'autre part, tous sont sur le bord du modèle CSG. Dans le cas où  $q$  contient sur sa surface des  $Q$ -arêtes incidentes à  $M$ , on peut supposer que cette information ait été stockée lors de leur classement global ou approfondi. Il ne reste donc plus que VE l'analyse pour conclure. De son côté, lorsque  $q$  ne contient pas de  $Q$ -arêtes incidentes à  $M$ , VE génère un plan qui passe par  $M$  et qui a au moins une droite d'intersection avec  $Q$ . Cette droite est paramétrée par l'intermédiaire de QI et ses points d'intersection avec les autres quadriques sont calculés par Q3. L'intérêt ici porte sur son segment qui est sur  $q$  et qui est incident à  $M$ . VE calcule son classement global par rapport au modèle CSG. Si ce classement vaut 0, alors la surface de  $q$  au voisinage de  $M$  est sur le bord du modèle CSG.

Une fois les deux demi-cônes de  $Q$  considérés, si la surface d'un seul d'eux est, au voisinage de  $M$ , sur la surface du modèle CSG, alors  $M$  est un  $Q$ -sommet visible, et si la surface d'aucun d'eux n'est, au voisinage de  $M$ , sur la surface du modèle CSG, alors  $M$  n'est pas un  $Q$ -sommet visible. Sinon, la surface de chacun des deux demi-cônes est, au voisinage de  $M$ , sur la surface du modèle CSG et il convient de vérifier si ces deux  $Q$ -faces qu'ils forment au voisinage de  $M$  sont visibles sur le même côté (intérieur ou extérieur). Pour cela, VE calcule, s'il n'est pas connu, le classement approfondi des segments incidents à  $M$  déjà considérés. Ainsi, si ces deux  $Q$ -faces ne sont pas visibles sur le même côté, alors  $M$  est un  $Q$ -sommet visible. Sinon,  $M$  n'est pas un  $Q$ -sommet visible.

## 5.6 Complexité et taille de sortie de VE

L'objectif de cette section est de donner la complexité de VE dans le pire des cas ainsi que la taille de sa sortie en fonction de la taille d'entrée. Rappelons que cette dernière est  $O(m) = O(n^3)$ , avec  $m$  le nombre total de points d'intersection trouvés par Q3.

Rappelons que VE considère un par un tous les segments délimités sur chacune des composantes algébriques issues de QI par les points d'intersection trouvés par Q3. Le nombre de ces segments est  $O(m) = O(n^3)$ .

Chacun de ces segments est une  $Q$ -arête pour toute quadrique  $Q$  qui le contient. Rappelons que, dans QI, les quadriques sont traitées par paires et que chaque segment obtenu sur une composante de l'intersection de deux quadriques est ensuite considéré par rapport à chacune de ces deux quadriques de façon à ce qu'un segment soit considéré une seule fois par quadrique. Ainsi, chaque segment est considéré un nombre constant de fois. Cela représente au total  $O(m) = O(n^3)$  classements globaux ou approfondis par rapport au modèle CSG.

Afin d'obtenir le classement global d'une  $Q$ -arête par rapport au modèle CSG, un point généré sur elle est évalué par rapport à chacune des  $n$  quadriques du modèle CSG. De même, si un classement approfondi s'avère nécessaire, alors les secteurs angulaires de cette  $Q$ -arête par rapport à chacune des  $n$  quadriques du modèle CSG sont calculés. Cela fait au total  $O(n)$  opérations pour un classement global ou un classement global suivi

par un classement approfondi. Le temps de calcul de VE pour toutes les  $Q$ -arêtes revient donc, dans le pire des cas, à  $O(mn) = O(n^4)$ .

Rappelons également que VE considère, de plus, tous les points isolés qui coïncident avec le sommet d'un cône parmi les quadriques du modèle CSG. Leur nombre étant  $O(n)$ , dans le pire des cas il est nécessaire d'effectuer  $O(n^2)$  classements (globaux ou approfondis) supplémentaires (pour les segments obtenus par l'intersection entre les cônes et les plans simples générés par VE - cf. section 5.5). Ainsi, le temps de calcul total de VE dans le pire des cas reste  $O(mn) = O(n^4)$ .

La taille de sortie de VE correspond au nombre de segments, dont chacun est visible sur le bord d'au moins une quadrique du modèle CSG, et de points délimitant en eux seuls une face sur un cône parmi les quadriques du modèle CSG. Elle est donc inférieure ou égale au nombre total de segments et points isolés considérés par VE qui est  $O(m) = O(n^3)$ .

## 5.7 Conclusion

Nous venons de montrer comment déterminer le secteur angulaire d'une  $Q$ -arête par rapport au modèle CSG, comment en déduire si cette  $Q$ -arête est visible sur le bord de la quadrique volumique  $Q$ , et dans le cas affirmatif comment établir son degré de visibilité. À l'issue de VE, lorsque toutes les  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$  ainsi que leurs degrés de visibilité respectifs sont trouvés, elles seront orientées, assemblées en fonction des  $Q$ -faces visibles qu'elles délimitent, et parcourues, de façon à ce que chaque ensemble obtenu décrive une  $Q$ -face visible. Ceci comprend les deux dernières étapes de notre algorithme de conversion CSG-BRep et sera décrit dans le chapitre 7.

Notons que le degré de visibilité permet d'ores et déjà de fixer l'orientation pour certaines  $Q$ -arêtes du fait qu'il correspond au nombre de fois où une  $Q$ -arête doit être parcourue. Remarquons que, si une  $Q$ -arête délimite une  $Q$ -face visible, alors elle ne sera parcourue que dans un seul sens. De même, dans le cas où elle sépare deux  $Q$ -faces visibles (l'une visible sur son côté extérieur et l'autre sur son côté intérieur), si  $Q$  est une paire de plans et elle se situe sur sa droite singulière, alors elle sera parcourue deux fois dans le même sens, du fait que la normale de  $Q$  est orientée en sens opposé sur chacun de ses

deux plans d'un côté et de l'autre par rapport à la droite singulière. Cependant, dans le reste des cas (la  $Q$ -arête sépare deux  $Q$ -faces visibles, l'une visible sur son côté extérieur et l'autre sur son côté intérieur, et si  $Q$  est une paire de plans, alors elle ne se situe pas sur sa droite singulière), elle sera parcourue une fois dans un sens et une seconde fois dans le sens inverse, ce qui implique qu'elle doit être orientée dans les deux sens.

Pour conclure, l'algorithme VE que nous avons présenté dans ce chapitre répond au défi de déterminer les arêtes du modèle CSG et complète ainsi la troisième étape de la conversion CSG-BRep non-incrémentale.

Nous allons, dans le chapitre suivant, montrer comment améliorer la complexité de VE, de  $O(n^4)$  à  $O(n^3 \log n)$ . Cette amélioration est basée sur une mise à jour du secteur angulaire lors du parcours d'une composante algébrique.

# Chapitre 6

## Méthode de mise à jour du secteur angulaire

Ce chapitre a pour objectif de montrer comment améliorer l'efficacité de VE par l'intermédiaire d'une mise à jour du secteur angulaire lors du parcours d'une composante algébrique. La section qui suit énonce l'idée générale de cette amélioration.

### 6.1 Idée générale

Jusqu'ici il a été expliqué comment déterminer les  $Q$ -arêtes visibles sur le bord d'une quadrique volumique  $Q$  en considérant une à une toutes les  $Q$ -arêtes de chaque composante des courbes d'intersection entre  $Q$  et les autres quadriques volumiques du modèle CSG. Rappelons que pour une  $Q$ -arête donnée VE procède par un classement global suivi si nécessaire d'un classement approfondi et que chacun de ces classements comprend une évaluation de l'arbre CSG (respectivement globale ou approfondie). Ainsi, le classement de chaque  $Q$ -arête d'une composante donnée nécessite le parcours de tous les nœuds de l'arbre CSG.

Afin d'alléger le calcul de classement de toutes les  $Q$ -arêtes d'une composante  $l$ , ce chapitre montre le lien que nous avons établi entre les points d'intersection trouvés sur  $l$  par Q3 et les changements qu'ils suscitent lors du parcours de  $l$  pour les feuilles de l'arbre CSG. Par exemple, le passage par un point d'intersection  $M$ , qui n'est un point



singulier ni de  $l$ , ni d'une quadrique du modèle CSG, implique une modification pour chaque feuille qui correspond à une quadrique volumique, distincte de  $Q$ , si et seulement si celle-ci « traverse »  $Q$  et  $l$  en  $M$ . Les résultats principaux de ce chapitre sont résumés dans la proposition 1 dans la section 6.5.

L'idée repose sur le fait de classer la première  $Q$ -arête du parcours de  $l$  et de garder en mémoire les valeurs, pour un classement global, ou bien les secteurs angulaires, pour un classement approfondi, des nœuds internes de l'arbre CSG obtenus lors de son évaluation. Pour classer la  $Q$ -arête qui lui est adjacente il suffit de mettre à jour les valeurs (resp. les secteurs angulaires) associées aux feuilles et d'effectuer une réévaluation de l'arbre CSG en parcourant uniquement les branches dont les feuilles ont été modifiées. La même procédure est appliquée à l'ensemble des  $Q$ -arêtes de  $l$ . Ainsi ces dernières peuvent être progressivement classées sans pour autant évaluer l'arbre CSG en entier à chaque fois.

## 6.2 Préliminaires

### 6.2.1 Classement approfondi au lieu de classement global

Rappelons que lors d'un classement global toute feuille de l'arbre CSG est marquée par  $-1$ ,  $1$  ou  $0$  pour désigner respectivement extérieur, intérieur ou bord par rapport à la quadrique volumique qui lui est associée. Rappelons également que l'union et l'intersection régularisées des nœuds internes appliquées à  $-1$  et  $0$  et à  $1$  et  $0$  sont de la forme :  $-1 \cup_r 0 = 0$ ,  $1 \cup_r 0 = 1$ ,  $1 \cap_r 0 = 0$  et  $-1 \cap_r 0 = -1$ .

Notons que si le classement global s'avère suffisant pour la première  $Q$ -arête de  $l$ , ce n'est pas forcément le cas pour toutes les  $Q$ -arêtes de  $l$ . En fait, le passage par un point d'intersection lors du parcours de  $l$  peut provoquer le changement de signe d'une ou de plusieurs feuilles de  $1$  vers  $-1$  ou vice versa. Par conséquent il est possible que la valeur associée à au moins un nœud interne se transforme de  $1$  ou  $-1$  vers  $0$ . Ainsi, en remontant l'arbre CSG, l'évaluation globale peut se trouver bloquée par le calcul de  $0 \cup_r 0$  ou  $0 \cap_r 0$  qui ne sont pas définis et il serait nécessaire de recourir au classement approfondi. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes concentrés dans les paragraphes qui suivent sur

le classement approfondi.

Il est à remarquer que, lors du parcours de  $l$ , connaître la mise à jour du classement approfondi induite par le passage par un point d'intersection revient à connaître la mise à jour du classement global. Avant d'expliciter cette affirmation notons que le secteur angulaire associé à une feuille de l'arbre CSG dont tous les secteurs sont marqués par  $-1$  (resp.  $1$ ) correspond respectivement à la valeur  $-1$  (resp.  $1$ ) associée à la même feuille lors du classement global. Toutes les autres formes de secteur angulaire correspondent quant à elles à la valeur  $0$ .

Il est clair que si au cours d'une mise à jour le secteur angulaire doit être modifié, alors tous ses secteurs (les voisinages des deux  $Q$ -faces qu'il représente - voir chapitre 5) changent de valeur. Ainsi, si, au cours de la mise à jour, le secteur angulaire associé à une feuille de l'arbre CSG et dont tous les secteurs sont marqués par  $-1$  (resp.  $1$ ) est modifié, alors après transformation tous ses secteurs sont marqués par  $1$  (resp.  $-1$ ). De façon analogue, pour un classement global, au cours de la mise à jour la valeur de la même feuille se transforme de  $-1$  à  $1$  (resp. de  $1$  à  $-1$ ). Le caractère commun de toutes les autres formes de secteur angulaire d'une feuille est que ses quatre secteurs ne sont pas tous identiques ni avant, ni après transformation. Elles sont toutes associées à la valeur  $0$  d'une feuille qui ne change pas lors de la mise à jour d'un classement global.

## 6.2.2 Notations

Soit  $Q$  la quadrique volumique sur laquelle nous souhaitons déterminer les  $Q$ -arêtes visibles et soient  $C \subset Q$  et  $l \subset C$  la courbe d'intersection entre  $Q$  et une autre quadrique volumique et sa composante algébrique que nous considérons. Le cas des points isolés ayant déjà été traité dans la section 5.5, nous supposons ici que  $l$  n'est pas réduite à un point. Soient  $a$  et  $a'$  deux  $Q$ -arêtes successives (au niveau du paramètre) sur  $l$  et  $M$  leur extrémité commune.  $M$  est un point d'intersection de  $l$  défini par Q3. Nous cherchons ici à décrire dans quelles circonstances le secteur angulaire  $S(a, Q, Q_i)$  de  $a$  par rapport à une quadrique volumique  $Q_i$  du modèle CSG,  $i \in \{1, \dots, n\}$  est modifié lors du passage par  $M$  pour devenir  $S(a', Q, Q_i)$ . Remarquons que si  $S(a, Q, Q_i)$  est modifié, alors les valeurs de chacun de ses secteurs changent soit de  $1$  vers  $-1$ , soit de  $-1$  vers  $1$ . Dans ce cas-là, nous

notons  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

Supposons de plus que toute arête de l'arrangement des quadriques du modèle CSG possède deux extrémités distinctes. En fait, si ce n'est pas le cas, alors notre algorithme ajoute des sommets aux composantes algébriques dans cet objectif. Soit  $k$  le nombre de paires de  $Q$ -arêtes successives en  $M$  de  $C$  différentes de  $a$  et  $a'$ , et soit  $K$  leur nombre compté avec la multiplicité de leur composante algébrique (voir figure 6.1). À titre d'exemple, lorsqu'il y a une seule composante algébrique de  $C$  distincte de  $l$  qui passe par  $M$  et qui est de multiplicité double,  $k = 1$  et  $K = 2$ . Notons que, dans le cas où  $l$  est une quartique cuspidale et  $M$  son point cuspidal,  $k = K = 0$ . De son côté, lorsque  $l$  est une quartique nodale sans point isolé et  $M$  son point nodal,  $k = K = 1$ . Les  $2k$   $Q$ -arêtes incidentes en  $M$  à  $a$  et  $a'$  seront notées  $a_1$  et  $a'_1$ ,  $a_2$  et  $a'_2$ , ...,  $a_k$  et  $a'_k$ .

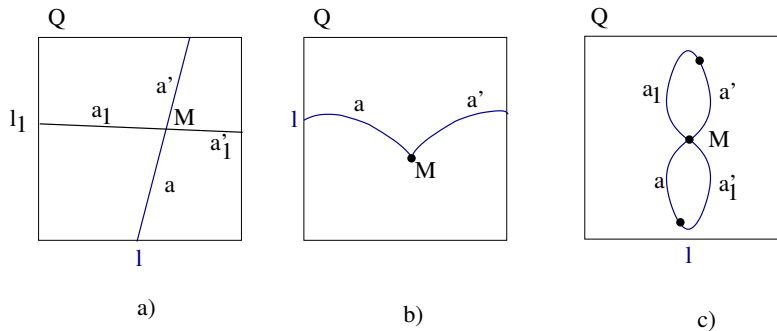


FIG. 6.1 – Cette figure illustre trois intersections qui diffèrent pour  $k$  et  $K$ . a) La composante algébrique  $l$  intersecte une autre composante algébrique  $l_1$  de  $C$  qui est de multiplicité double. Ici,  $k = 1$  et  $K = 2$ . b) La composante algébrique  $l$  est une quartique cuspidale et  $M$  est son point cuspidal. Dans ce cas-ci,  $k = K = 0$ . c) La composante algébrique  $l$  est une quartique nodale sans point isolé et  $M$  est son point nodal. Dans cet exemple,  $k = K = 1$ .

Enfin, nous noterons dans la suite de ce chapitre  $S_i$  la matrice symétrique des coefficients de  $Q_i$ .

### 6.2.3 Terminologie

Dans la section 3.1, nous avons énoncé qu'un point  $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , qui appartient à une courbe d'intersection  $C_{Q_1 \cap Q_2}$  entre deux quadriques  $Q_1$  et  $Q_2$  est dit *point singulier* si le rang de la matrice Jacobienne de  $C_{Q_1 \cap Q_2}$  formée par les équations implicites de  $Q_1$  et  $Q_2$  est inférieur à 2. Ici, dans l'objectif de ne pas considérer comme singuliers les points d'une composante algébrique double qui ne sont pas nodaux (rappelons que les courbes d'intersection sont définies par QI dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  - voir la section 3.1), nous ajoutons une condition supplémentaire et considérons un point comme singulier s'il répond à cette définition, et s'il est de plus, soit sur une composante algébrique **simple** de  $C_{Q_1 \cap Q_2}$ , soit commun à au moins deux composantes algébriques différentes de  $C_{Q_1 \cap Q_2}$ . De façon plus formelle, nous dirons qu'un point est singulier dans  $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  si l'idéal engendré par polynômes des équations implicites de  $Q_1$  et  $Q_2$  contient tous les polynômes qui s'annulent en  $Q_1 \cap Q_2$ . Ainsi, un point singulier d'une courbe d'intersection est soit cuspidal (quartique cuspidale), soit nodal (quartique nodale sans point isolé ou bien un point d'intersection entre au moins deux composantes algébriques d'une même courbe d'intersection), soit isolé (quartique nodale avec point isolé).

Nous donnons à présent une définition de la *multiplicité d'un point  $M$ , intersection entre une composante algébrique et une quadrique qui ne la contient pas*. Soient respectivement  $M$ ,  $l$  et  $Q_i$  le point, la composante algébrique et la quadrique en question,  $l \not\subset Q_i$ . Rappelons que, dans QI, deux cas principaux d'intersections de quadriques sont distingués, le cas générique où la courbe d'intersection est une quartique non singulière, que nous appelons également quartique régulière ou lisse, et le cas dégénéré qui regroupe le reste des intersections. Ici, nous considérons d'abord le cas où  $l$  est une composante algébrique d'une intersection singulière ( $l$  n'est pas une quartique lisse), et ensuite, celui où  $l$  est une intersection non singulière ( $l$  est une quartique lisse).

De façon générale, dans le cas dégénéré les points d'intersection entre trois quadriques sont obtenus comme les points d'intersection entre une composante algébrique (une quartique singulière, une cubique, une conique ou une droite) et une quadrique. Revenons à notre cas concret. Rappelons que lorsque  $l$  n'est pas une quartique régulière, son paramé-

trage, que nous notons  $\Psi(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , est défini par des fonctions polynomiales. D'après le chapitre 4 ses points d'intersection avec  $Q_i$  correspondent aux racines du polynôme

$$h(u, v) = {}^t\Psi(u, v) \cdot S_i \cdot \Psi(u, v)$$

en la variable projective  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  de degré minimal égal à 8, 6, 4 ou 2 selon que  $l$  soit respectivement une quartique, une cubique, une conique ou une droite. Ainsi, chaque solution réelle de  $h(u, v)$  correspond à un point d'intersection entre  $l$  et  $Q_i$ . Étant parmi ses solutions,  $M$  correspond à un paramètre fixe  $(u_0, v_0)$  de  $\Psi(u, v)$ . Pour conclure, *lorsque  $l$  n'est pas une quartique lisse, la multiplicité de  $M$  comme point d'intersection entre  $l$  et  $Q_i$  est définie comme la multiplicité de la racine  $(u_0, v_0)$  de  $h(u, v)$ .*

D'un autre côté, lorsque  $l$  est une quartique lisse,  $M$  est calculé comme l'intersection entre deux courbes dans l'espace des paramètres d'une quadrique  $Q_R$  du faisceau des deux quadriques qui définissent  $l$ ,  $Q_R$  étant une quadrique réglée à coefficients rationnels (voir chapitre 4). Ces deux courbes sont, d'une part  $l = Q \cap Q_R$ , et d'autre part la courbe  $(Q_R \cap Q_i)$ . Ainsi,  $l \cap Q_i = (Q \cap Q_R) \cap (Q_i \cap Q_R)$ . Les points communs entre  $Q \cap Q_R$  et  $Q_i \cap Q_R$  sont trouvés par la méthode des résultants appliquée aux deux équations aux paramètres qui leur sont associées (voir les Équations 4.1 et 4.2). *La multiplicité de  $M$  est définie comme la multiplicité de l'intersection entre les courbes  $Q \cap Q_R$  et  $Q_i \cap Q_R$  en  $M$  dans l'espace des paramètres de  $Q_R$ , qui est de dimension 2.*

Il existe dans la littérature différentes formulations de la notion de multiplicité d'un point d'intersection entre deux courbes [1, 8, 20, 19, 45]. Bien que nous n'ayons pas trouvé de document le démontrant, il semble bien connu qu'elles sont toutes équivalentes en 2D. Nous rappelons ici succinctement quelques définitions classiques. Soit  $(X, Y)$  le système de coordonnées.  $(0, 0)$  est son origine. Notons  $C_1$  et  $C_2$  les deux courbes qui s'intersectent et  $Res$  le résultant en  $x$  des deux polynômes qui les définissent. Supposons d'abord qu'une translation a été appliquée à  $C_1$  et  $C_2$  pour que leur point d'intersection dont on cherche la multiplicité corresponde à l'origine du système. La multiplicité de ce point peut être exprimée comme la plus grande puissance de  $y$  qui divise  $Res$  [1, 8, 20]. Cette définition suppose que  $C_1$  et  $C_2$  n'ont aucune paire de points d'intersection sur une même droite verticale. De même, la multiplicité de ce point peut être donnée comme la multiplicité de

la racine qui lui correspond de la RUR (Rational Univariate Representation) des racines du système constitué par les deux polynômes caractérisant  $C_1$  et  $C_2$  [45]. La multiplicité peut encore être définie comme le nombre maximal d'intersections distinctes qui peuvent être obtenues si  $C_1$  et  $C_2$  sont légèrement perturbées. Enfin, la multiplicité est également la dimension de  $K[[x, y]]/I$  où l'anneau  $K[[x, y]]$  est l'ensemble des séries infinies de la forme  $\sum a_{i,j}x^i y^j$  de coefficients dans  $K$ , et où  $I$  est l'idéal de  $K[[x, y]]$  [20, 19].

Il se trouve que, même si ces définitions peuvent paraître relativement simples en 2 dimensions, elles deviennent très ardues en 3 dimensions (voir par exemple la note de S. Abhyankar sur ce problème, p. 129 [1]). Le fait de considérer l'intersection de courbes possiblement singulières et de surfaces possiblement singulières complique énormément cette définition. Étant donné que notre algorithme de conversion CSG-BRep est destiné à un ensemble limité de surfaces, nous avons préféré utiliser ici notre propre définition. De plus, les multiplicités issues de Q3 correspondent aux définitions que nous considérons et elles sont également simples à manipuler dans notre contexte.

Enfin, nous dirons *qu'une composante qui se situe sur la surface d'un cône traverse le sommet de ce dernier* si elle passe par son sommet et si ce dernier la sépare en deux branches situées chacune sur un seul de ses demi-cônes.

## 6.3 Règles de modification du secteur angulaire

Rappelons qu'à la sortie de Q3 toutes les quadriques volumiques qui contiennent  $l$ , tous les points singuliers de  $l$  ainsi que tous les points d'intersection de  $l$  avec les quadriques volumiques qui ne le contiennent pas sont connus. En particulier, pour un point singulier sur  $l$ , Q3 indique la courbe d'intersection dont il est point singulier ( $C$  ou une autre courbe d'intersection entre quadriques volumiques qui contiennent  $l$ ) et le type de singularité dont il s'agit. De même, pour un point d'intersection de  $l$  avec une quadrique volumique qui ne le contient pas, Q3 indique cette dernière et la multiplicité du point.

Notons que certaines figures empruntées du manuscrit de doctorat de L. Dupont [11] ont été intégrées dans la suite de ce chapitre.

### 6.3.1 Cas de figures principaux

Rappelons que les secteurs 1 et 4 et les secteurs 2 et 3 du secteur angulaire de toute  $Q$ -arête par rapport à  $Q$ , mis à part le cas où  $Q$  est une paire de plans et cette  $Q$ -arête est contenue dans sa droite singulière, sont supposés correspondre respectivement aux voisinages externes et aux voisinages internes des  $Q$ -faces délimitées par cette  $Q$ -arête (cf. section 5.3.3). Rappelons de plus que les secteurs 1 et 3 et les secteurs 2 et 4 du secteur angulaire de toute  $Q$ -arête de la droite singulière d'une paire de plans  $Q$  par rapport à  $Q$  sont supposés correspondre respectivement aux voisinages externes et aux voisinages internes des  $Q$ -faces délimitées par cette  $Q$ -arête sur chacun des deux plans de  $Q$  (cf. section 5.4). Par conséquent nous pouvons énoncer le lemme suivant :

**Lemme 1** *Si  $Q_i \equiv Q$ , alors  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .*

Supposons dorénavant que  $Q_i \not\equiv Q$ . Il est clair que lorsque  $M \notin Q_i$ , les  $Q$ -arêtes  $a$  et  $a'$  se trouvent soit toutes les deux à l'intérieur, soit toutes les deux à l'extérieur de  $Q_i$ . Par conséquent :

**Lemme 2** *Si  $M \notin Q_i$ , alors  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .*

Ainsi, dans la suite de ce chapitre il est supposé que  $M$  se situe sur  $Q_i$ . Afin d'illustrer les problèmes qui se posent dans ce contexte, nous avons décrit ci-dessous le cas qui semble le plus intuitif ainsi que quelques exemples de cas particuliers qui nécessitent une étude plus approfondie.

Le cas le plus intuitif semble être celui où  $l \not\subset Q_i$ ,  $M$  est le point d'intersection entre  $l$  et  $Q_i$ ,  $M$  n'est pas un point singulier de  $C$  et le plan tangent de  $Q_i$  en  $M$  existe. Nommons ce dernier  $T$ . Dans ce contexte, nous dirons que  $l$  *traverse*  $Q_i$  en  $M$ , lorsqu'en ce point  $Q_i$  sépare  $l$  en deux branches dont chacune est située, au voisinage de  $M$ , sur un côté différent par rapport à la surface de  $Q_i$ . Selon que  $l$  traverse ou non  $Q_i$  en  $M$ ,  $S(a, Q, Q_i)$  et  $S(a', Q, Q_i)$  sont différents ou égaux.

- $l$  traverse  $Q_i$  en  $M$  si et seulement si au voisinage de  $M$  une des branches de  $l$  se situe à l'intérieur de  $Q_i$  et l'autre à l'extérieur de  $Q_i$ . Ceci arrive en particulier lorsque  $l$  n'est pas tangente à  $T$  en  $M$ . Ici  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$  (cf. figure 6.2 a) ;

- De même,  $l$  ne traverse pas  $Q_i$  en  $M$  seulement si au voisinage de  $M$  les deux branches de  $l$  se situent soit toutes les deux à l'intérieur de  $Q_i$ , soit toutes les deux à l'extérieur de  $Q_i$ . Il est ainsi nécessaire que  $l$  soit tangente à  $T$  en  $M$ . Ici  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  (cf. figure 6.2 b).

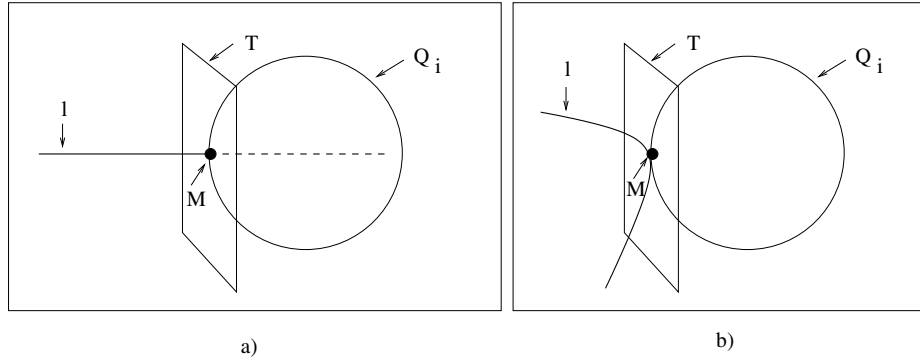


FIG. 6.2 – Cette figure illustre une quadrique volumique  $Q_i$ , son plan tangent  $T$  en un point  $M$  et une composante algébrique  $l$  qui intersecte  $Q_i$  en  $M$ . a)  $l$  traverse  $Q_i$  en  $M$  et  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . b)  $l$  ne traverse pas  $Q_i$  en  $M$  et  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Cependant, nombre d'autres cas de figures paraissent plus délicats.

- Par exemple, dans le cas où le plan tangent à  $Q_i$  n'est pas défini en  $M$ , la notion de traversée ( $l$  traverse  $Q_i$ ) devient moins intuitive. Figure 6.3 montre deux exemples où  $Q_i$  est un cône et  $M$  est son sommet. Dans le premier  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ , et dans le second  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

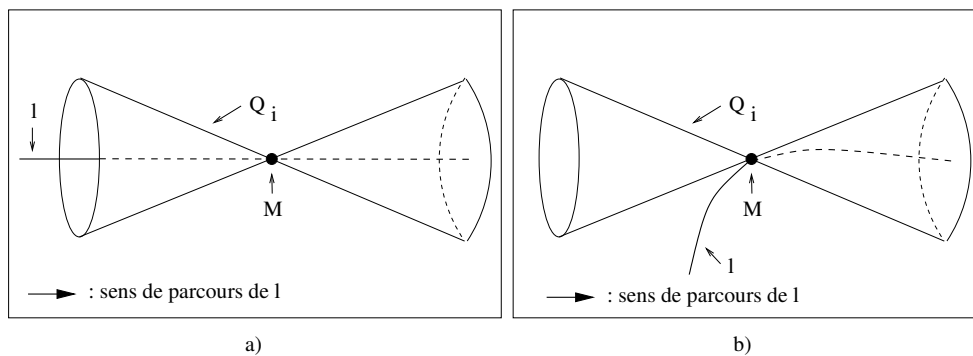


FIG. 6.3 – Sur cette figure  $Q_i$  est un cône et  $M$  son point singulier. Lors du parcours de  $l$   $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  dans a), mais dans b)  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .



- De même, nombreux sont les cas à envisager lorsque  $l \subset Q_i$ . Ici, quatre exemples sont illustrés dont les figures sont issues du travail de thèse de L. Dupont [11]. Dans la figure 6.4,  $M$  est un point singulier pour la courbe d'intersection  $C$  (point nodal) et  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . De son côté, dans la figure 6.5,  $M$  est un point singulier pour la quadrique volumique  $Q$  et  $Q_i$  est tangent à  $Q$  en  $l$ . Ici, lorsque  $Q_i$  est un plan simple,  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . Le troisième exemple est représenté par figure 6.6. Ici  $Q$  et  $Q_i$  sont deux paires de plans qui partagent un plan,  $l$  est la droite singulière de  $Q$  et  $M$  est un point singulier pour  $Q_i$ . Dans ce cas  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . Enfin, dans le quatrième exemple (cf. figure 6.7)  $Q$  est une paire de plans,  $l$  est sa droite singulière,  $Q_i$  est un cône,  $M$  est son point singulier et  $Q$  a un plan qui est tangent à  $Q_i$  en  $l$ . Si  $S(a, Q, Q_i)$  et  $S(a', Q, Q_i)$  sont des secteurs angulaires associés à ce plan, alors  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Par contre s'ils sont associés à l'autre plan de  $Q$ , alors  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . Il est clair qu'ici d'autres conditions pour la modification du secteur angulaire s'avèrent nécessaires à établir.

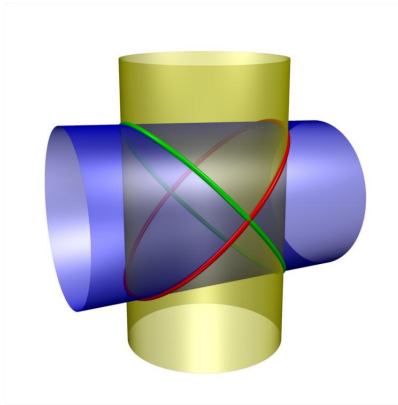


FIG. 6.4 – Soient  $Q$  le cylindre bleu et  $Q_i$  le cylindre jaune. Les deux composantes algébriques dessinées en rouge et vert représentent la courbe d'intersection entre les deux cylindres. Soient  $l$  la composante algébrique rouge et  $M$  un de ses points nodaux. Ici  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

Cette diversité des cas de figures a nécessité d'envisager plusieurs conditions pour déterminer les situations où le secteur angulaire est modifié et celles où il ne l'est pas.

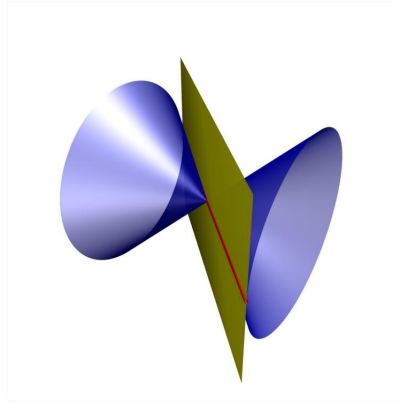


FIG. 6.5 – Soient  $Q$  le cône et  $Q_i$  la quadrique volumique qui contient le plan.  $l$  est la droite de tangence entre  $Q$  et  $Q_i$ . Soit  $M$  le point singulier du cône. Lors du parcours de  $l$  l'évolution du secteur angulaire au moment du passage par  $M$  dépend de la multiplicité du plan (simple ou double). En particulier si ce plan est simple, alors comme les deux demi-cônes sont situés chacun d'un côté différent de ce plan,  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . Sinon  $Q_i$  est un plan double et dans ce cas-là  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

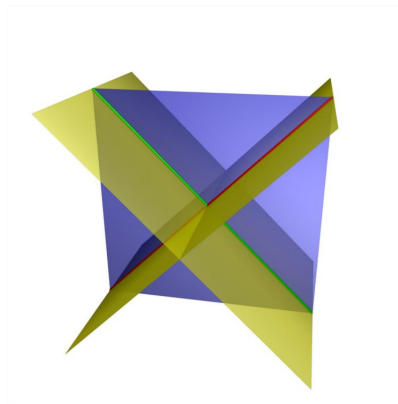


FIG. 6.6 – Soient  $Q$  et  $Q_i$  deux paires de plans qui ont un plan en commun, le plan bleu. Soient les droites rouge et verte respectivement les droites singulières de  $Q$  et de  $Q_i$ . Enfin, soient  $P'$  et  $P''$  les deux plans de  $Q$ . Ici  $l$  est la droite singulière de  $Q$  et  $M$  par son point d'intersection avec la droite singulière de  $Q_i$ . En d'autres termes,  $l$  est une droite singulière de  $Q$  et  $M$  un point singulier de  $Q_i$ . Ici  $S(a, P', Q_i) = -S(a', P', Q_i)$  et  $S(a, P'', Q_i) = -S(a', P'', Q_i)$ .

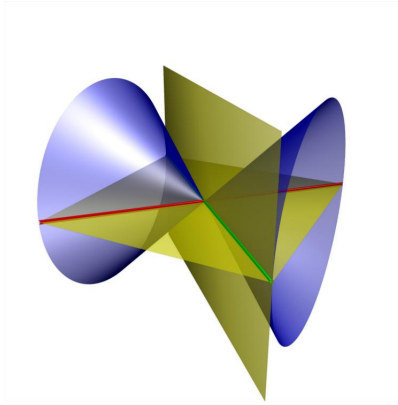


FIG. 6.7 – Soient  $Q$  la paire de plans et  $Q_i$  le cône. Notons  $P'$  le plan de  $Q$  tangent à  $Q_i$ , et  $P''$ , le plan de  $Q$  qui n'est pas tangent à  $Q_i$ . Prenons pour  $l$  la droite verte, droite de tangence entre  $P'$  et  $Q_i$ .  $l$  est la droite singulière de  $Q$  et  $M$  est un point singulier de  $Q_i$ . Ici,  $S(a, P', Q_i) = S(a', P', Q_i)$  et  $S(a, P'', Q_i) = -S(a', P'', Q_i)$ .

Dans la suite du chapitre nous séparons le problème en deux cas principaux, celui où  $l \not\subset Q_i$  et celui où  $l \subset Q_i$ . Les cas de figure suivants sont considérés :

1.  $l \not\subset Q_i$ ;
2.  $l \subset Q_i$  et  $Q \cap Q_i$  est de dimension 1 ;
  - $Q$  est régulière en  $M$  ;
  - $Q_i$  est régulière en  $M$  et  $M$  est simple ;
  - $Q_i$  est régulière en  $M$  et  $M$  est multiple ;
  - $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$  et  $M$  est simple ;
  - $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$  et  $M$  est multiple ;
3.  $l \subset Q_i$  et  $Q \cap Q_i$  est de dimension 2.

Tous ces cas de figure sont résumés dans la proposition 1 à la fin de ce chapitre.

### 6.3.2 Cas où $l \not\subset Q_i$

Le cas où  $l \not\subset Q_i$  est basé sur la multiplicité du point  $M$  en tant que point d'intersection entre  $l$  et  $Q_i$ . Rappelons que la notion de multiplicité d'un point  $M$ , intersection entre une composante algébrique et une quadrique volumique qui ne la contient pas, a été

définie dans la section 6.2.3. Rappelons également que nous avons donné deux définitions de multiplicité différentes, une pour le contexte où  $l$  est une quartique régulière, et une autre, pour le reste des situations. Ce cas peut être résumé par le lemme suivant.

**Lemme 3** *Si  $M$  est de multiplicité paire, alors  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Sinon  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .*

**Démonstration :** Étant donné que la multiplicité de  $M$  n'est pas définie de la même façon selon la nature de  $l$ , il convient de considérer séparément le cas où  $l$  est une quartique lisse et celui où  $l$  n'est pas une quartique lisse. Comme le deuxième cas est plus simple nous commençons par lui.

Supposons que  $l$  n'est pas une quartique lisse. Soit  $\Psi(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  le paramétrage de  $l$  et soit

$$h(u, v) = {}^t\Psi(u, v).S_i.\Psi(u, v).$$

Il est clair que si  $M$  est de multiplicité paire, alors  $h(u, v)$  ne change pas de signe en  $M$ . Par conséquent,  $l$  ne traverse pas  $Q_i$  en  $M$  et donc  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Par contre, si  $M$  est de multiplicité impaire, alors  $h(u, v)$  change de signe en  $M$ ,  $l$  traverse  $Q_i$  en  $M$  et donc  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

Considérons maintenant le cas où  $l$  est une quartique lisse. Notons tout d'abord que puisque  $l \not\subset Q_i$  et  $l \subset Q \cap Q_R$  où  $Q_R$  est une quadrique lisse du faisceau de  $l$ ,  $S(a, Q, Q_i) = S(a, Q_R, Q_i)$  et  $S(a', Q, Q_i) = S(a', Q_R, Q_i)$ . Ceci vient du fait que  $a$  et  $a'$  (qu'ils soient considérés comme des  $Q$ -arêtes ou comme des  $Q_R$ -arêtes) se situent soit à l'extérieur de  $Q_i$ , ou dans son intérieur.  $S(a, Q, Q_i)$  peut donc être remplacé dorénavant par  $S(a, Q_R, Q_i)$ , et  $S(a', Q, Q_i)$  par  $S(a', Q_R, Q_i)$ .

Notons que la multiplicité de  $M$  correspond au nombre de branches de  $Q_R \cap Q_i$ , comptées avec leurs multiplicités, que  $l$  traverse dans l'espace de paramètres de  $Q_R$ . Étant donné que  $Q_R$  est une quadrique lisse, ce nombre correspond au nombre de branches de  $Q_R \cap Q_i$ , comptées avec leurs multiplicités, que  $l$  traverse en 3D. Remarquons ici que, comme  $Q_R$  est une quadrique régulière, toute  $Q_R$ -arête de la courbe  $Q_R \cap Q_i$  sépare sur  $Q_R$  deux carreaux dont l'un est à l'intérieur de  $Q_i$  est l'autre à l'extérieur de  $Q_i$ .

Un cas particulier fait tout de même exception, celui où  $Q_R$  et  $Q_i$  ne se traversent pas en cette arête, et dans ce cas-là la composante sur laquelle cette arête repose est de multiplicité paire. Par conséquent, si  $l$  traverse en  $M$  un nombre pair de branches de  $Q_R \cap Q_i$ , comptées avec leurs multiplicités, alors  $l$  reste du même côté de la surface de  $Q_i$  et donc  $S(a, Q_R, Q_i) = S(a', Q_R, Q_i)$ . Sinon,  $S(a, Q_R, Q_i) = -S(a', Q_R, Q_i)$ .  $\square$

### 6.3.3 Cas où $l \subset Q_i$

Remarquons que, dans le cas où  $l \subset Q_i$ ,  $Q \cap Q_i$  peut être de dimension 1 ou de dimension 2.  $Q \cap Q_i$  est de dimension 2 lorsque  $Q$  et  $Q_i$  sont deux paires de plans, ou bien, une paire de plans et un plan simple, qui ont une droite d'intersection ( $l$  est la droite singulière d'une paire de plans) et qui contiennent un plan en commun. Cette section décrit séparément ces deux cas.

#### Cas où $l \subset Q_i$ et $Q \cap Q_i$ est de dimension 1

Dans cette section nous démontrons, en deux lemmes, un résultat qui englobe l'ensemble des situations où  $l \subset Q_i$  et  $C = Q \cap Q_i$  est de dimension 1. Ce résultat repose principalement sur le nombre de composantes de  $C$  comptées avec multiplicité que  $l$  intersecte en  $M$ . Globalement, quand ce nombre est pair,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ , sinon  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . D'autres facteurs doivent toutefois être pris en compte.

- Deux composantes d'une courbe d'intersection  $C$  peuvent être sécantes ou tangentes en un point nodal  $M$  de  $C$ . En particulier, il se trouve que, lorsque cette intersection est une tangence, le secteur angulaire n'est pas modifié (voir figure 3.2).
- Il est possible qu'au moins une des quadriques  $Q$  ou  $Q_i$  soit singulière en  $M$  ce qui peut avoir un impact sur le secteur angulaire. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte, en plus de la multiplicité des composantes intersectées, le nombre de singularités des quadriques  $Q$  et  $Q_i$  en  $M$  (0, 1 ou 2) (cf. figure 6.8).
- La composante  $l$  peut être simple ou multiple. Cette propriété est prise en compte lorsque  $M$  est un point singulier pour  $Q$  (voir figure 6.5).
- Enfin, quand  $Q$  est une paire de plans et  $l$  est sa droite singulière,  $l$  est évaluée sur

chaque plan de  $Q$ , ce qui nécessite deux secteurs angulaires.

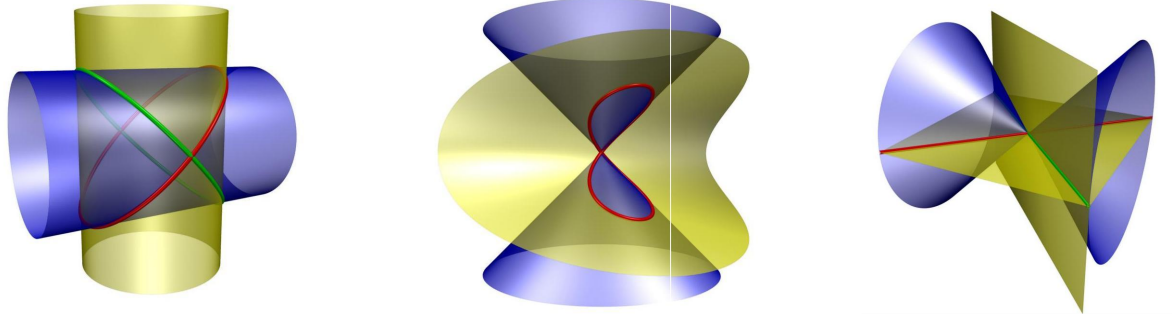


FIG. 6.8 – Exemples de quadriques régulières ou singulières au point nodal de leur intersection. Ici, il est supposé qu’une seule composante algébrique de l’intersection est intersectée par  $l$  et qu’elle est simple. À gauche, les deux quadriques sont lisses aux deux points nodaux. Quelle que soit la quadrique  $Q$ , et quelle que soit la composante algébrique  $l$ , le secteur angulaire est modifié. Au milieu, une des quadriques est singulière et l’autre régulière au point nodal. Ici aussi, quelle que soit la quadrique  $Q$  le secteur angulaire est modifié. Enfin, à droite, les deux quadriques sont singulières au point nodal.  $l$  coïncide avec la droite singulière de la paire de plans. Si la quadrique  $Q$  est le cône, alors le secteur angulaire n’est pas modifié. De son côté, si  $Q$  est la paire de plans, alors le secteur angulaire est modifié ou non selon le plan considéré.

Avant d’exposer notre résultat sous forme d’un lemme, nous consacrons, dans les paragraphes qui suivent, une attention particulière au contexte où  $Q$  est une paire de plans ou un cône, car la nature singulière de ces derniers induit dans certains cas une rotation peu intuitive du secteur angulaire lors du parcours de  $l$  (voir figure 6.9). Nous considérons d’abord que  $Q$  est une paire de plans, puis que c’est un cône.

Supposons que  $Q$  est une paire de plans, que la composante algébrique  $l$  est différente de la droite singulière de  $Q$  et qu’elle est sécante à cette dernière en  $M$  (cf. figure 6.9 a). Observons les secteurs angulaires des  $Q$ -arêtes de  $l$  par rapport à  $Q$ . Dans le chapitre 5 nous avons pris la convention que la normale de  $Q$  est orientée vers l’extérieur de  $Q$  et que ce dernier est illustré sur le secteur angulaire au-dessus de son diamètre horizontal.

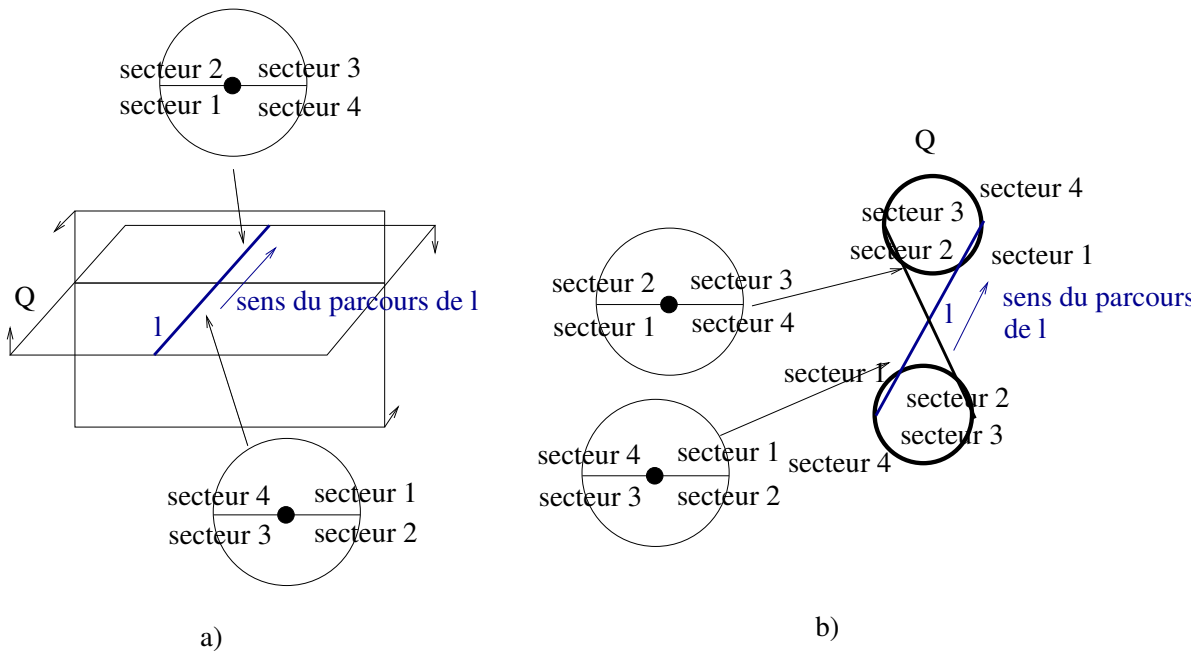


FIG. 6.9 – Illustration de la rotation du secteur angulaire lors du parcours de  $l$  pour  $Q$  quadrique singulière. a)  $Q$  est une paire de plans et la rotation s'effectue au point d'intersection entre  $l$  et sa droite singulière. b)  $Q$  est un cône et  $l$  le traverse en son sommet.

Ainsi, comme la normale de chaque plan de  $Q$  n'a pas le même sens des deux côtés de la droite singulière, comme  $l$  est contenue dans un seul des deux plans de  $Q$  et comme  $l$  est sécante à la droite singulière de  $Q$ , lors de son parcours, en passant par  $M$  le secteur angulaire subit une rotation à 180 degrés (ce qui revient à une rotation de 180 degrés par rapport au plan qui contient  $l$ ).

Un phénomène très similaire est observé dans le cas où  $Q$  est un cône,  $M$  son sommet et  $l$  une droite qui traverse  $Q$  en  $M$ . Figure 6.9 b) illustre ce cas. Prenons le plan tangent à  $Q$  en  $l$ . Comme il a été convenu que la normale de  $Q$  soit toujours orientée vers son extérieur, les normales calculées en deux points de  $l$  situées chacune sur un demi-cône distinct de  $Q$  sont de sens opposés. Par conséquent, le secteur angulaire des  $Q$ -arêtes subit, lors du parcours de  $l$ , une rotation de 180 degrés (ce qui revient à une rotation de 180 degrés par rapport au plan tangent de  $l$ ).

En fait, un cône peut être approché par un ensemble d'hyperboloïdes et peut être vu comme le cas limite de celles-ci. Sur chaque hyperboloïde de cet ensemble prenons une droite et considérons l'évolution de sa normale lors du parcours de cette dernière. Plus l'hyperboloïde est proche du cône, plus la rotation que la normale subit est proche de 180 degrés. Dans le cas limite, quand l'hyperboloïde se transforme en cône, cette rotation atteint 180 degrés et elle est effectuée au niveau de son sommet.

Le premier lemme qui résume notre résultat suppose que, dans le cas où  $Q$  est une paire de plans,  $l$  n'est pas sa droite singulière. Avant de l'énoncer, posons :

- $K^l_M = K$ , lorsque  $Q$  est régulière ;
- $K^l_M = K + (\text{multiplicité de } l) - 1$ , lorsque  $Q$  est singulière en  $M$  et  $Q_i$  est régulière en  $M$  ;
- $K^l_M = K + (\text{multiplicité de } l)$ , lorsque  $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$ .

**Lemme 4** *Si  $K^l_M$  est pair, ou bien, si tous les arcs de  $Q \cap Q_i$  sont tangents en  $M$ , alors  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Sinon,  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .*

**Remarque 7** *Notons que l'ensemble des cas où tous les arcs de  $Q \cap Q_i$  sont tangents est facile à déduire du tableau 3.1 qui est exhaustif.*

**Démonstration :** Nous avons supposé dans cette section que  $Q \cap Q_i$  est de dimension 1. Il n'y a donc pas de surface commune entre  $Q$  et  $Q_i$ . Prenons une  $Q$ -arête de  $Q \cap Q_i$  et considérons les deux cellules de l'arrangement en 3D bornées par une des deux  $Q$ -faces délimitées par cette  $Q$ -arête. Tous les points situés à l'intérieur de ces deux cellules ont le même classement par rapport à  $Q_i$ . Ainsi, dans le secteur angulaire de cette  $Q$ -arête par rapport à  $Q_i$  les secteurs 1 et 3 ont respectivement le même signe que les secteurs 2 et 4.

Cinq cas sont considérés dans la suite de cette démonstration. Ils diffèrent selon la nature, régulière ou singulière, de  $Q$  et  $Q_i$  ainsi que la multiplicité de  $C$  :

1.  $Q$  est régulière en  $M$  ;
2.  $Q_i$  est régulière en  $M$  et  $l$  est simple ;
3.  $Q_i$  est régulière en  $M$  et  $l$  est multiple ;



4.  $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$  et  $l$  est simple ;
5.  $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$  et  $l$  est multiple.

Dans la suite de la démonstration ces cas sont présentés un par un.

**Cas 1/  $Q$  est régulière en  $M$ .** Ici,  $K^l_M = K$ . Prouvons que si  $K$  est pair, ou bien, si toutes les branches de  $Q \cap Q_i$  sont tangentes en  $M$ , alors  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ , et que, sinon,  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

Supposons d'abord que  $K = 0$ . Dans ce contexte,  $a \cup a'$  est le seul arc de  $Q \cap Q_i$  qui passe par  $M$ . Par conséquent,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Le lemme étant vérifié pour  $K = 0$ , il reste à le démontrer pour  $K > 0$ . Pour cela, nous avons besoin de la remarque suivante :

**Remarque 8** *Notons que lorsque la multiplicité d'une composante algébrique dans l'intersection  $Q \cap Q_i$ , où si  $Q$  est une paire de plans, alors cette composante algébrique n'est pas sa droite singulière, est impaire (composante algébrique simple ou triple), toute  $Q$ -arête de celle-ci sépare sur  $Q$  l'extérieur et l'intérieur de  $Q_i$ . Par contre, lorsqu'elle est de multiplicité paire, les deux  $Q$ -faces de  $Q$  délimitées par cette  $Q$ -arête se trouvent soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de  $Q_i$ .*

$Q$  étant régulière en  $M$ , les  $Q$ -arêtes  $a$  et  $a'$ ,  $a_1$  et  $a'_1$ , ...,  $a_k$  et  $a'_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  peuvent être prises dans un ordre circulaire autour de  $M$ . Il résulte de la remarque 8 qu'en traversant chacune des  $Q$ -arêtes suivant cet ordre, si la multiplicité de cette dernière est impaire, alors on passe d'une  $Q$ -face à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) de  $Q_i$  à une  $Q$ -face à l'extérieur (respectivement intérieur) de  $Q_i$ , et si sa multiplicité est paire, alors on reste du même côté par rapport à  $Q_i$  (extérieur ou intérieur). Ainsi, lorsque le nombre de  $Q$ -arêtes compté avec multiplicité de  $Q \cap Q_i$  situées à gauche ou à droite de  $l$  (gauche ou droite vu de l'extérieur de  $Q$  et par rapport au sens d'orientation de la tangente de  $l$ , cf. chapitre 5) au voisinage de  $M$  est pair, les  $Q$ -faces situées à gauche de  $l$  (respectivement celles situées à sa droite) que  $a$  et  $a'$  délimitent sont du même côté par rapport à  $Q_i$  (extérieur ou intérieur) et donc  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  (voir figure 6.10).

À l'inverse, lorsque ce nombre est impair, une de ces  $Q$ -faces se trouve à l'extérieur et l'autre à l'intérieur de  $Q_i$ , et  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

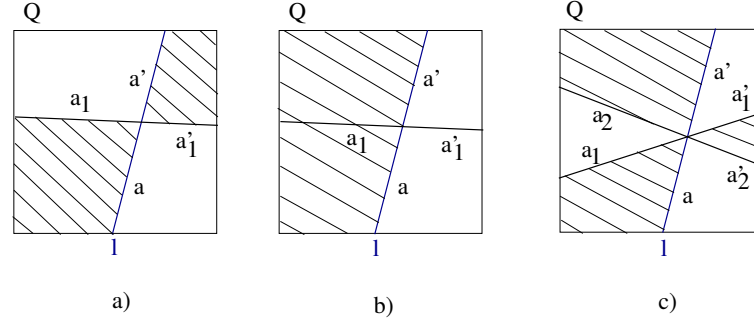


FIG. 6.10 – Sur la surface de la quadrique  $Q$ ,  $l$  est illustrée en bleu et intersecte en un point une ou deux autres composantes algébriques de  $Q \cap Q_i$ . Les zones hachurées sont celles qui se trouvent à l'intérieur de  $Q_i$ . a) La composante algébrique  $l$  intersecte une seule autre composante algébrique de  $Q \cap Q_i$  qui est simple. Ici  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ . b) La composante algébrique  $l$  intersecte une seule autre composante algébrique de  $Q \cap Q_i$  qui est double. Ici,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . c) La composante algébrique  $l$  intersecte deux autres composantes algébriques de  $Q \cap Q_i$  qui sont simples. Ici,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Afin de vérifier le lemme pour  $K > 0$  deux cas sont distingués, celui où il n'existe pas d'arcs de  $Q \cap Q_i$  tangents au voisinage de  $M$ , et celui où au moins deux arcs  $a \cup a'$  et  $a_i \cup a'_i$  sont tangents en  $M$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Lorsque  $K > 0$ ,  $Q \cap Q_i$  n'est pas une quartique et donc tous les arcs  $a_i \cup a'_i$  sont lisses en  $M$ . Il est clair que, si  $a \cup a'$  et  $a_i \cup a'_i$  ne sont pas tangents en  $M$ , et donc sont sécants, alors il y a le même nombre  $K$  d'arêtes comptées avec multiplicité de chaque côté de l'arc  $a \cup a'$  sur  $Q$ . Ainsi, d'après ce qui a été dit plus haut, si  $K$  est pair, alors  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Sinon,  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

Supposons maintenant qu'il existe deux arcs distincts  $a \cup a'$  et  $a_i \cup a'_i$  tangents en  $M$  et démontrons qu'ils ne sont pas sécants sur  $Q$  en  $M$ . D'après la classification des intersections de quadriques (cf. [14, tableau 1]) ceci arrive uniquement lorsque  $Q \cap Q_i$  consiste en deux coniques tangentes ou en une cubique et une droite tangentes ( $K = 1$  dans les deux cas) et donc représente le cas où tous les arcs de  $Q \cap Q_i$  sont tangentes

en  $M$ . Par le théorème de Jordan, si deux composantes algébriques sont sécantes sur un plan projectif, alors elles sont sécantes en au moins deux points. Cette propriété est donc également vérifiée dans l'espace de paramètres d'une quadrique lisse. Or, d'après la classification des intersections de quadriques (voir [14, tableau 1]), dans les deux cas ci-dessus les composantes s'intersectent une seule fois.  $Q$  étant une quadrique lisse, elles ne sont pas sécantes sur sa surface. Ainsi, de chaque côté de l'arc  $a \cup a'$ , il y a un nombre pair (0 ou 2 selon le côté) d'arêtes incidentes à ce dernier comptées avec multiplicité. D'après les paragraphes précédents  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Nous avons donc démontré le lemme pour le cas où  $Q$  est régulière en  $M$ .

**Cas 2/  $Q_i$  est régulière en  $M$  et  $l$  est simple.** Le cas où  $Q$  est une quadrique régulière en  $M$  ayant déjà été traité, l'accent ici est donné au contexte où  $Q$  est singulière en  $M$ . Notons que, comme précédemment,  $K^l_M = K$ . Notons également que, d'après la classification des intersections de quadriques (cf. [14, tableau 1]), le cas de figure où il existe deux arcs distincts  $a \cup a'$  et  $a_i \cup a'_i$  tangents en  $M$  est inclus dans ce cas lorsque  $Q$  est singulière (soit  $Q$  est un cône et  $M$  correspond à son sommet - cubique et une droite tangentes, soit  $Q$  est une paire de plans et  $M$  se situe sur sa droite singulière - deux coniques tangentes). Nous allons montrer que le cas 2/ est équivalent au cas 1/. Pour cela, nous allons prouver que, même si  $Q$  est singulière en  $M$ ,  $Q$  peut être remplacée dans  $Q \cap Q_i$  par une quadrique du faisceau différente de  $Q_i$  qui est régulière en  $M$ .

Prenons deux points différents de  $M$ , un point sur  $a$  et un autre sur  $a'$ . Comme  $l$  est une composante algébrique simple, ce sont deux points réguliers de  $Q$  et de  $Q_i$  et les plans tangents de  $Q$  et de  $Q_i$  en chacun d'eux sont distincts. Cette propriété est vérifiée pour toute autre paire de quadriques dans le faisceau de  $Q \cap Q_i$ . Par conséquent, les secteurs angulaires  $S(a, Q', Q_i)$  et  $S(a', Q', Q_i)$ , pour  $Q' = Q + \epsilon Q_i$ ,  $\forall \epsilon > 0$  suffisamment petit, sont invariants. Supposons que  $Q'$  n'est pas régulière en  $M$   $\forall \epsilon > 0$  suffisamment petit. Dans ce cas, son gradient en  $M$  est nul  $\forall \epsilon > 0$  suffisamment petit, et par conséquent, le gradient de  $Q$  et celui de  $Q_i$  sont tous les deux nuls en  $M$ . Ceci contredit l'hypothèse que  $Q_i$  est régulière en  $M$ .  $Q'$  est donc bien régulière en  $M$ . Ainsi, le cas 2/ est équivalent au cas 1/.

**Cas 3/  $Q_i$  est régulière en  $M$  et  $l$  est multiple.** Le cas de figure où  $Q$  est une quadrique régulière en  $M$  ayant été considéré dans le cas 1/, nous nous concentrons ici sur le cas de figure où  $Q$  est singulière en  $M$ .

Afin de pouvoir isoler les différentes intersections possibles dans ce cas, montrons d'abord que  $Q$  et  $Q_i$  n'ont pas de point singulier commun. Puisque  $Q$  est singulière en  $M$ ,  $Q$  est soit un cône, soit une paire de plans.

- Lorsque  $Q$  est un cône et  $Q_i$  est régulière en son sommet, il est clair que  $Q$  et  $Q_i$  n'ont pas de point singulier commun.
- Lorsque  $Q$  est une paire de plans,  $l$  étant multiple, c'est une droite double. De plus, comme  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q$  et comme  $l$  est double, la droite singulière de  $Q$  n'est pas incluse dans  $C$ . Ainsi,  $M$  est le point d'intersection entre cette dernière et  $l$ . Si  $Q_i$  a au moins un point singulier, alors  $Q_i$  est soit un cône, soit une paire de plans.
- Si  $Q_i$  est un cône, alors il a un seul point singulier qui est son sommet. Ce dernier est contenu dans  $l$ . Cependant,  $Q_i$  étant régulière en  $M$ ,  $M$  n'est pas le sommet de  $Q_i$ . Par conséquent,  $Q$  et  $Q_i$  n'ont pas de point singulier commun.
- Si  $Q_i$  est également une paire de plans, alors, comme  $l$  est double, c'est nécessairement la droite singulière de  $Q$  ou de  $Q_i$ . Or, il a été supposé que  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q$  et que  $Q_i$  est régulière en  $M \in l$ . Ce cas ne peut donc pas se produire. Ainsi,  $Q$  et  $Q_i$  n'ont pas de point singulier commun.

Les quadriques  $Q$  et  $Q_i$  n'ayant pas de point singulier commun, et ayant une composante algébrique commune multiple, d'après la classification des intersections de quadriques (voir [14, tableaux 1 et 2]), l'intersection est une parmi les suivantes :

- conique double, de symbole de Segre [1(111)];
- droite double, de symbole de Segre [(22)];
- deux droites simples sécantes coupant une droite double, de symbole de Segre [(22)];
- deux droites doubles sécantes, de symbole de Segre [(211)];
- une conique et une droite double, de symbole de Segre [13];
- $l$  est une droite double et  $Q_i$  est un plan simple.

Remarquons que l'intersection où  $l$  est une droite double et  $Q_i$  est un plan simple peut

être confondue avec celle qui consiste en une droite double et qui est de symbole de Segre [(22)]. Cependant, comme nous le verrons plus loin, selon la classification des intersections de quadriques, [14, tableaux 1 et 2], où les plans simples ne sont pas considérés car ils y sont homogénéisés en paires de plans, cette dernière ne peut pas se produire lorsque  $Q$  est singulière. Toutefois cela n'exclut pas la possibilité que  $l$  puisse être une droite double lorsque  $Q$  est singulière et  $Q_i$  est un plan simple. C'est pourquoi, ici, nous considérons ce cas de figure au même titre que les autres.

Tous ses six cas de figure seront considérés dans la suite de la démonstration un par un.

Commençons par le premier, celui d'une conique double (de symbole de Segre [1(111)]). Nous allons prouver qu'il ne peut pas se produire. La classification des intersections de quadriques (voir [14, tableau 1]) indique que le faisceau de  $Q \cap Q_i$  consiste en un plan double, un cône et des quadriques régulières. Rappelons que, dans le chapitre 5, il a été supposé ne pas avoir de plans doubles dans le modèle CSG. Rappelons également qu'ici nous nous sommes placés dans le contexte où  $Q$  est singulière en  $M$ .  $Q$  est donc un cône et  $M$  correspond à son sommet. Cependant,  $l$  est une conique sur la surface de  $Q$  qui passe par  $M$ , ce qui implique que  $Q$  doit être régulière en  $M$ . Ceci étant en contradiction avec l'hypothèse que  $Q$  est singulière en  $M$ , nous pouvons conclure que ce cas de figure n'arrive pas.

Concernant le deuxième cas de figure, celui d'une droite double (de symbole de Segre [(22)]), d'après la classification des intersections de quadriques (voir [14, tableau 1]) il existe une seule quadrique singulière dans le faisceau de  $Q \cap Q_i$  et c'est une droite. Comme  $Q$  est une surface, ce cas de figure ne se produit pas non plus.

En ce qui concerne le troisième cas de figure, celui de deux droites simples sécantes coupant une droite double (de symbole de Segre [(22)]), le faisceau de  $Q \cap Q_i$  contient une unique quadrique singulière qui est une paire de plans.  $Q$  est donc cette quadrique et  $l$ , la droite double, est sa droite singulière. Ce cas sera traité à part, dans cette section.

Le quatrième cas de figure consiste en deux droites doubles sécantes (de symbole de Segre [(211)]). Le faisceau de  $Q \cap Q_i$  contient une seule quadrique singulière qui est un plan double. Étant donné que, dans la remarque 4 (section 5.1), il a été supposé ne pas

avoir de plans doubles dans le modèle CSG, ce cas de figure n'arrive pas.

Le cinquième cas de figure est celui d'une conique et une droite double (de symbole de Segre [13]), illustré sur la figure 6.11. Le faisceau de  $Q \cap Q_i$  consiste en une paire de plans et des cônes dont les sommets balayent la droite double (cf. [14, section 4.1]). Aucune paire de quadriques du faisceau n'a de point singulier commun. Ainsi, la droite double de l'intersection n'est pas la droite singulière de la paire de plans. Par contre, le point d'intersection entre la droite double et la conique repose sur la droite singulière de la paire de plans. Il est donc distinct des sommets des cônes.

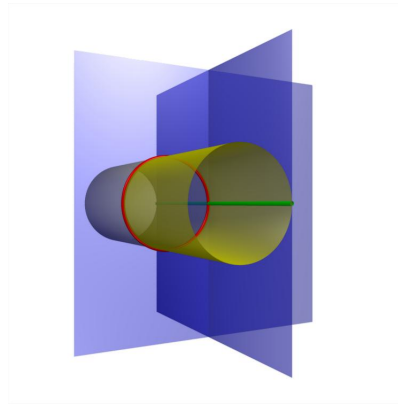


FIG. 6.11 – Une paire de plans et un cône projectif dont l'intersection est une conique et une droite double sécantes.

Considérons d'abord le cas où  $Q$  est un cône. Comme  $Q$  est une quadrique singulière en  $M$ ,  $M$  est forcément son sommet, ce qui implique que  $M$  n'est pas sur la conique. Par conséquent,  $k = 0$  et  $K_M^l = 1$ . Comme  $Q_i$  est régulière en  $M$ ,  $Q$  passe, en  $M$ , d'un côté de la surface de  $Q_i$  vers l'autre côté de sa surface. Par conséquent  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ .

Supposons maintenant que  $Q$  est la paire de plans.  $M$  est donc le point d'intersection entre la droite double et la conique. Ainsi,  $k = 1$  et  $K_M^l = 2$ . Montrons que  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Nous savons que  $Q_i$  est régulière en  $M$ . De plus, même si  $Q$  est singulière en  $M$ , les plans de  $Q$  pris séparément sont tous les deux réguliers en  $M$ . Or, le parcours de  $l$  est effectué sur un seul plan de  $Q$ , celui, qui contient  $l$ . Notons  $P'$  ce plan. Comme  $l$  est double,  $P'$  et  $Q_i$  ne se traversent pas en  $l$  et donc ils ne se traversent pas en  $M$ . Par conséquent  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  (voir figure 6.11).

Le sixième cas de figure est celui où  $Q_i$  est un plan simple et  $l$  est une droite double. Comme la quadrique  $Q$  a été supposée singulière en  $M$ , elle est soit une paire de plans, soit un cône. Si  $Q$  est une paire de plans, alors  $l$  est forcément sa droite singulière. Ce cas sera traité ultérieurement, dans cette section. De son côté, si  $Q$  est un cône, comme  $l$  est double, alors  $Q$  et  $Q_i$  sont tangents  $l$  (cf. figure 6.5). Ainsi,  $Q$  change de côté par rapport à la surface de  $Q_i$  en  $M$ . Par conséquent,  $S(a, Q, Q_i) = -S(a', Q, Q_i)$ , ce qui prouve le lemme pour ce cas de figure puisqu'ici  $k = 0$  et  $K_M^l = 1$ .

**Cas 4/  $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$  et  $l$  est simple.** La classification des intersections de quadriques (voir [14, tableaux 1 et 2]) indique que  $l$  est une droite et que les autres composantes algébriques de  $C$  sont, soit une droite simple, soit trois droites comptées avec multiplicité, c'est-à-dire, une droite triple, une droite double et une droite simple, ou trois droites simples. Ainsi,  $K = 1$  ou  $K = 3$ , et  $K_M^l = K + 1$  est pair. Montrons que  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Les quadriques du faisceau de  $Q \cap Q_i$  sont soit des cônes, soit une paire de plans (cf. [14, tableaux 1 et 2]). Par conséquent, comme  $l$  est une droite, les plans tangents à  $Q$  (respectivement à  $Q_i$ ) en  $l$  sont identiques en tout point de  $l$  où  $Q$  (respectivement  $Q_i$ ) est régulière. Notons que, puisque  $l$  est simple, les plans tangents à  $Q$  en  $l$  sont distincts de ceux tangents à  $Q_i$ . Comme  $M$  est un point singulier de  $Q$  et de  $Q_i$ , les normales de  $Q$  et de  $Q_i$  subissent toutes les deux, en parcourant  $l$ , une rotation de 180 degrés en  $M$  (voir figures 6.12 et 6.9 b). Selon la convention établie dans la section 5.3.2, la normale de  $Q$  est supposée orientée vers son extérieur qui est illustré au-dessus du diamètre horizontal de  $S(a, Q, Q)$  et  $S(a', Q, Q)$ . Cela induit une rotation entre  $S(a, Q, Q)$  et  $S(a', Q, Q)$  de 180 degrés. Cette rotation en  $M$  du secteur angulaire par rapport à  $Q$ , ainsi que la rotation en  $M$  de la normale de  $Q_i$  impliquent que  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ , ce qui prouve le lemme pour ce cas de figure.

**Cas 5/  $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$  et  $l$  n'est pas simple.** Dans ce cas la classification des intersections de quadriques (voir [14, tableaux 1 et 2]) indique que  $l$  est une droite double, triple ou quadruple. Si  $l$  est double, alors soit  $l \equiv C$ , soit les autres

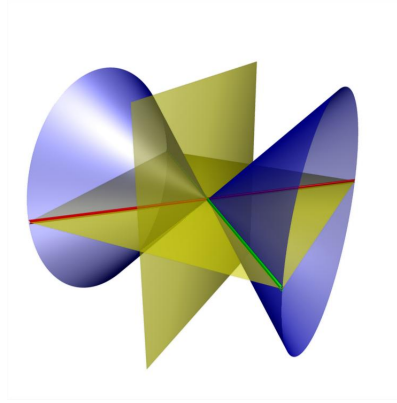


FIG. 6.12 – Un cône et une paire de plans dont l'intersection consiste en deux droites simples. Soit  $M$  le point d'intersection de ces dernières. Quelle que soit la quadrique  $Q$ , le cône ou la paire de plans, et, quelque soit la composante algébrique  $l$ , la droite rouge ou la droite verte, lors de son parcours, le secteur angulaire n'est pas modifié au passage par  $M$ .

composantes algébriques de  $C$  sont deux droites simples ou une droite double. Si  $l$  est triple, alors  $C$  contient une autre droite simple. Enfin,  $l$  peut être une droite quadruple. Notons que, lorsque  $l$  est de multiplicité paire,  $K$  est également pair. Par contre, lorsque  $l$  est triple,  $K$  est impair,  $K = 1$ . Par conséquent, quelle que soit la multiplicité de  $l$ ,  $K_M^l$  est un nombre pair. Afin de démontrer le lemme pour ce cas, nous allons montrer que  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

La classification des quadriques (cf. [14, tableaux 2 et 5]) indique que le faisceau de  $Q \cap Q_i$  contient des paires de plans, des plans doubles et des cônes. Comme, la présence de plans doubles dans le modèle CSG a été exclue (voir la remarque 4, section 5.1), chacune des quadriques,  $Q$  et  $Q_i$ , peut être un plan double ou un cône. Les différentes possibilités sont étudiées une à une dans les paragraphes qui suivent.

Supposons d'abord que  $Q$  et  $Q_i$  sont des cônes. Lorsque  $l$  est de multiplicité paire,  $Q$  et  $Q_i$  ne se traversent pas en  $l$ , et  $Q$  est, au voisinage de  $a$  et  $a'$ , soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur de  $Q_i$ . Par conséquent, ici,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  (cf. figure 6.13 a). De façon analogue, lorsque  $l$  est triple,  $S(a, Q, Q_i)$  et  $S(a', Q, Q_i)$  ont, soit leurs secteurs 1 et 2 positifs et leurs secteurs 3 et 4 négatifs, soit à l'inverse, leurs secteurs



1 et 2 négatifs et leurs secteurs 3 et 4 positifs. Par conséquent,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  ici aussi (voir figure 6.13 b).

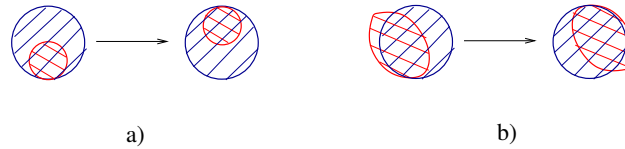


FIG. 6.13 – Sur cette figure  $Q$  et  $Q_i$  sont deux cônes tangents en  $l$ . Ici sont illustrées les coupes transversales de  $l$  en  $a$  et en  $a'$ . a)  $Q$  et  $Q_i$  ne se traversent pas en  $l$  et  $l$  est de multiplicité paire. b)  $Q$  et  $Q_i$  se traversent en  $l$  et  $l$  est triple.

Supposons maintenant que  $Q$  est un cône et que  $Q_i$  est une paire de plans. Deux cas de figure sont distingués : celui où  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q_i$  et celui où  $l$  est la droite singulière de  $Q_i$ .

Si  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q_i$ , alors, lors du parcours de  $l$ , en  $M$ ,  $Q$  change de côté par rapport à la surface du plan de  $Q_i$  qui contient  $l$ . En même temps, comme  $M$  est un point singulier pour  $Q_i$ , sa normale change de signe sur ce plan. Par conséquent,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

À l'inverse, si  $l$  est la droite singulière de  $Q_i$ , alors deux sous-cas sont possibles, d'une part, celui où  $l$  est double, et d'autre part, celui où  $l$  est triple.

Lorsque  $l$  est double, le plan tangent à  $Q$  en  $l$  ne coïncide avec aucun des deux plans de  $Q_i$ . Ainsi,  $Q$  reste entièrement à l'extérieur ou entièrement à l'intérieur de  $Q_i$  au voisinage de  $M$ , et le fait que, lors du parcours de  $l$  la normale de  $Q$  change de signe en  $M$ , n'a pas d'impact sur le secteur angulaire par rapport à  $Q_i$ . Ceci implique que  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Lorsque  $l$  est triple,  $Q$  et un des plans de  $Q_i$  sont tangents en  $l$ , et, de plus,  $l$  est la droite singulière de  $Q_i$ . Ici, lors du parcours de  $l$ , la normale de  $Q$  change de signe en  $M$ , mais comme  $l$  est la droite singulière de  $Q_i$ ,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  (cf. figure 6.7 pour le cas où  $Q$  est le cône et  $Q_i$  la paire de plans).

Enfin, dans le cas de figure où  $Q$  est une paire de plans il est supposé que  $l$  n'est pas sa droite singulière (le cas contraire sera traité plus loin dans cette section). Deux sous-cas

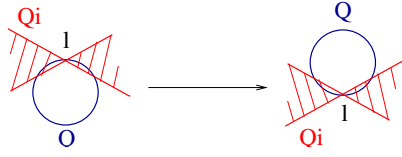


FIG. 6.14 – Sur cette figure  $Q$  est un cône et  $Q_i$  est une paire de plans.  $Q \cap Q_i$  consiste en une droite double et deux droites simples concourantes en un point. Notons  $l$  la droite double. Ici sont illustrées les coupes transversales de  $l$  en  $a$  et en  $a'$ . La zone hachurée présente l'intérieur de  $Q_i$ . Il est clair qu'au voisinage de  $l$ , la surface de  $Q$  se situe à l'intérieur de  $Q_i$ . Ainsi,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

sont à distinguer, celui où  $Q_i$  est un cône, et celui où  $Q_i$  est également une paire de plans.

Commençons par le sous-cas où  $Q_i$  est un cône. Figure 6.15 illustre ce cas. La droite  $l$  est nécessairement double. C'est donc une droite de tangence entre  $Q$  et  $Q_i$ . Le plan  $P'$  de  $Q$ , tangent à  $Q_i$  en  $l$ , et  $Q_i$  se traversent en  $M$ . Comme  $M$  est le sommet de  $Q_i$ ,  $P'$  reste à l'extérieur de  $Q_i$  au voisinage de tout point de  $l$ . Ainsi,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

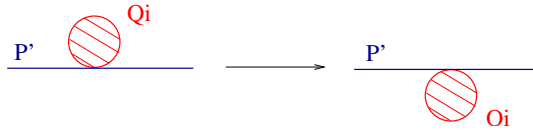


FIG. 6.15 – Sur cette figure  $Q$  est une paire de plans et  $Q_i$  est un cône. Un seul parmi les deux plans de  $Q$  est illustré,  $P'$ .  $P'$  et  $Q_i$  sont tangents en  $l$  qui est une droite double. Deux coupes transversales sont présentées ici, celle de  $l$  en  $a$  et celle de  $l$  en  $a'$ . La zone hachurée correspond à l'intérieur de  $Q_i$ . Il est clair que, dans les deux coupes, au voisinage de  $l$ , la surface de  $P'$  se situe à l'extérieur de  $Q_i$ . Ainsi,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Pour finir, considérons le sous-cas où  $Q_i$  est une paire de plans (voir figure 6.16). Par supposition,  $C$  est de dimension 1. Ainsi,  $l \equiv C$  et correspond à la droite singulière de  $Q_i$ . Ceci implique que toutes les  $Q$ -faces du plan de  $Q$  contenant  $l$ , délimitées par  $l$ , se trouvent du même côté de  $Q_i$  (extérieur ou intérieur). Par conséquent, que la normale de  $Q$  change de signe en parcourant  $l$  ou non, les  $Q$ -faces bornées par  $a$  et  $a'$  sont forcément soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de  $Q_i$ , et donc  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .  $\square$

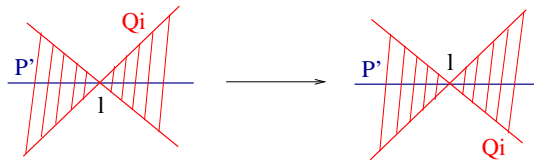


FIG. 6.16 – Sur cette figure  $Q$  et  $Q_i$  sont des paires de plans. Un seul parmi les deux plans de  $Q$  est illustré,  $P'$ . La droite singulière de  $Q_i$  se situe sur  $P'$ . C'est la composante algébrique  $l$  qui est, par conséquent, une droite double. Deux coupes transversales sont présentées, celle de  $l$  en  $a$  et celle de  $l$  en  $a'$ . La zone hachurée correspond à l'intérieur de  $Q_i$ . Il est clair que, dans les deux coupes, au voisinage de  $l$ , la surface de  $P'$  se situe à l'intérieur de  $Q_i$ . Ainsi,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Ceci finit la preuve du lemme 4 pour  $l$  une composante algébrique différente de la droite singulière de  $Q$  avec  $Q$  une paire de plans. Nous allons maintenant considérer le cas où  $Q$  est une paire de plans et  $l$  est sa droite singulière.

Remarquons qu'ici  $Q$  est singulière en  $M$ . En même temps,  $P'$  et  $P''$ , en tant que plans simples, sont réguliers en  $l$ . Enfin,  $Q_i$  est soit régulière, soit singulière en  $M$ .

La droite  $l$  en tant que composante algébrique de  $Q \cap Q_i$  est multiple.  $l$  est donc double, triple ou quadruple. Du fait que  $Q$  contient deux plans en  $l$ , la multiplicité de  $l$  dans  $Q \cap Q_i$  vaut la somme des multiplicités de  $l$  dans  $P' \cap Q_i$  et  $P'' \cap Q_i$ , où  $P'$  et  $P''$  sont les deux plans de  $Q$ . Ainsi, quand  $l$  est double ou quadruple pour  $Q \cap Q_i$ ,  $l$  est, respectivement simple ou double pour  $P' \cap Q_i$  et  $P'' \cap Q_i$ . De son côté, quand  $l$  est triple,  $l$  pourrait être double pour  $P' \cap Q_i$  et simple pour  $P'' \cap Q_i$ , ou inversement, simple pour  $P' \cap Q_i$  et double pour  $P'' \cap Q_i$ .

Notons  $k'$  le nombre de composantes algébriques en  $M$  de  $C$  différentes de  $l$  qui sont sur  $P'$ , et  $k''$ , le nombre de celles qui sont sur  $P''$ ,  $k = k' + k''$ . D'après la convention adoptée dans 5.4 nous associons un secteur angulaire à chaque plan de  $Q$ . Notons  $P$ , de façon générale, le plan de  $Q$  auquel le secteur angulaire considéré est associé, qu'il soit  $P'$  ou  $P''$ . Soit également  $k_P$  le nombre de paires de  $Q$ -arêtes successives en  $M$  de  $C$  différentes de  $l$  qui sont sur  $P$ . Comme  $P$  est un plan,  $k_P = 0$  ou  $k_P = 1$ .

Étant donné que les  $Q$ -arêtes  $a$  et  $a'$  sont considérées comme des  $P$ -arêtes, nous prenons en compte, dans le lemme suivant, en plus de  $k$ ,  $k_P$ .

**Lemme 5** Lorsque  $k = 0$ ,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$ . Lorsque  $k = 1$  :

- si  $k_P = 0$ , alors  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$  ;
- sinon,  $S(a, P, Q_i) = -S(a', P, Q_i)$ .

Lorsque  $k = 2$ ,  $S(a, P, Q_i) = -S(a', P, Q_i)$ .

**Démonstration** : Lorsque  $k = 0$ ,  $a \cup a'$  est le seul arc de  $Q \cap Q_i$  qui passe par  $M$ . Par conséquent,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ . Le lemme étant vérifié pour  $k = 0$ , il reste à le démontrer pour  $k > 0$ . Rappelons que  $l$  est double, triple ou quadruple.

Notons également que, lorsque  $k_P = 0$ ,  $P \equiv P'$  ou  $P \equiv P''$ ,  $a \cup a'$  est le seul arc de  $P \cap Q_i$  qui passe par  $M$ . Ainsi,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$ .

La suite de la preuve est séparée en deux cas. Ils diffèrent selon la nature, régulière ou singulière de  $Q_i$  :

1.  $Q_i$  est régulière en  $M$  ;
2.  $Q_i$  est singulière en  $M$ .

**Cas 1/  $Q_i$  est régulière en  $M$ .** Supposons que  $l$  est double. D'après la caractérisation des intersections de quadriques (voir [14, tableau 2]), un seul cas de figure paraît possible, celui de 2 droites simples sécant une droite double en deux points distincts, de symbole de Segre [(22)] (celui de 2 droites simples et une droite doubles toutes sécantes au même point, de symbole de Segre [12] nécessite que  $Q_i$  soit également singulière en  $M$ ). La figure 6.17 illustre ce cas. Ici,  $k = 1$  et  $k_P = 0$  ou  $k_P = 1$ . Lorsque  $k_P = 0$ ,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$ . De son côté, lorsque  $k_P = 1$ , comme  $P$  et  $Q_i$  sont régulières en  $M$  et comme les deux droites de  $P \cap Q_i$  sont simples,  $S(a, P, Q_i) = -S(a', P, Q_i)$ .

Notons ici que lorsque  $k_P = 1$ , nous ne savons pas sur quel plan se trouve la composante rencontrée,  $P'$  ou  $P''$  (cf. figure 6.17). Or, en parcourant  $l$ , nous calculons les secteurs angulaires correspondant aux  $P$ -arêtes, où soit  $P \equiv P'$ , soit  $P \equiv P''$ . Ainsi, il s'avère nécessaire de calculer deux fois le secteur angulaire par rapport à  $Q_i$ , une première fois lors du premier

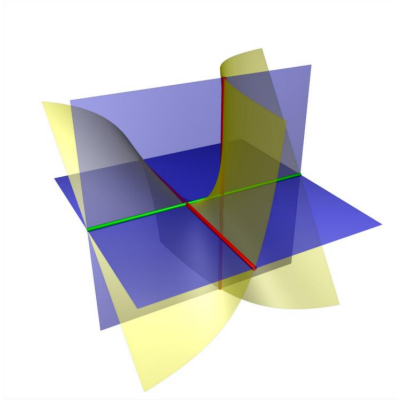


FIG. 6.17 – Sur cette figure  $Q$  est une paire de plans et  $Q_i$  est une quadrique lisse. La composante algébrique  $l$  est la droite singulière de  $Q$ , illustrée en vert. Elle traverse deux autres composantes algébriques de  $Q \cap Q_i$ , illustrées en rouge, en deux points distincts. Chacune de ces composantes algébriques est contenue dans un seul parmi les deux plans de  $Q$ . Lors du parcours de  $l$ , le secteur angulaire de chaque plan de  $Q$  par rapport à  $Q_i$  est modifié une seule fois, au passage par le point nodal avec la composante algébrique qui est sur sa surface.

calcul du secteur angulaire, et une seconde fois, après le passage par un point nodal de  $C$ . En supposant que ce dernier est  $M$ , si  $S(a, P', Q_i) = -S(a', P', Q_i)$ , alors nous pouvons tout de suite conclure que, d'une part  $S(a, P'', Q_i) = S(a', P'', Q_i)$ , et que, d'autre part  $S(y, P', Q_i) = S(y', P', Q_i)$  et  $S(y, P'', Q_i) = -S(y', P'', Q_i)$  où  $y$  et  $y'$  sont les  $Q$ -arêtes de  $l$  incidentes en l'autre point nodal de  $C$ . De même, si  $S(a, P', Q_i) = S(a', P', Q_i)$ , alors  $S(a, P'', Q_i) = -S(a', P'', Q_i)$ ,  $S(y, P', Q_i) = -S(y', P', Q_i)$ , et  $S(y, P'', Q_i) = S(y', P'', Q_i)$ .

Supposons maintenant que  $l$  est triple. D'après la caractérisation des intersections de quadriques ([14, tableau 2]) le seul cas figure possible où  $l$  est triple est celui d'une droite triple et d'une droite simple sécantes, de symbole de Segre [3]. Cependant, dans ce cas de figure,  $Q_i$  doit être singulière en  $M$ . Il ne se produit donc pas dans le contexte présent.

Enfin, si  $l$  est quadruple,  $l \equiv C$  et donc  $k = 0$ , cas que nous avons déjà considéré.

**Cas 2/  $Q_i$  est singulière en  $M$ .** Puisque  $Q_i$  est singulière en  $M$ , soit  $Q_i$  est un cône et  $M$  son sommet, soit c'est une paire de plans et  $M$  se situe sur sa droite singulière.

Supposons que  $l$  est double. Si  $Q_i$  est un cône, alors  $M$  est son sommet. Par le fait que  $l$  est double pour  $Q \cap Q_i$ ,  $Q_i$  traverse  $P'$  et  $P''$  en  $l$ . La figure 6.18 illustre ce cas. Nécessairement,  $Q_i$  traverse chacun des plans  $P'$  et  $P''$  également en une autre droite qui est simple.  $C$  consiste donc en une droite double ( $l$ ) et deux droites simples toutes concourantes en le sommet de  $Q_i$ . Ainsi,  $k = 2$ . De son côté, lorsque  $Q_i$  est une paire de plans, un de ses plans passe par  $l$ , et l'autre plan intersecte  $P'$  et  $P''$  en deux droites simples, une par plan (voir figure 6.19). Les trois droites sont concourantes en  $M$ . Ici aussi,  $k = 2$ . Par conséquent,  $k_P = 1$  pour  $P \equiv P'$  et pour  $P \equiv P''$ , et  $S(a, P, Q_i) = -S(a', P, Q_i)$ .

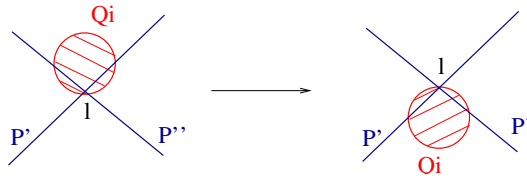


FIG. 6.18 – Sur cette figure  $Q$  est une paire de plans et  $Q_i$  est un cône. Les deux plans de  $Q$ ,  $P'$  et  $P''$  sont illustrés.  $Q_i$  traverse  $P'$  et  $P''$  en  $l$  qui est une droite double. Deux coupes transversales sont présentées ici, celle de  $l$  en  $a$  et celle de  $l$  en  $a'$ . La zone hachurée correspond à l'intérieur de  $Q_i$ . Notons qu'au voisinage de  $l$ , la surface de  $P'$  qui se situe à l'extérieur (respectivement à l'intérieur) de  $Q_i$  dans la première coupe, se trouve à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) de  $Q_i$  dans la seconde coupe. Ainsi,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

Supposons maintenant que  $l$  est triple. D'après la caractérisation des intersections de quadriques ([14, tableau 2]) le seul cas possible ici est celui d'une droite triple et d'une droite simple sécantes, de symbole de Segre [3]. Figure 6.7 illustre ce cas. Ici,  $k = 1$ , et  $k_P = 0$  ou  $k_P = 1$ . Lorsque  $k_P = 0$ ,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$ . De son côté, lorsque  $k_P = 1$ ,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$ . Notons ici qu'il ne peut y avoir de confusion entre les plans  $P'$  et  $P''$ . En effet,  $Q_i$  ne traverse que l'un d'eux. Soit  $P'$  ce dernier. D'une part,  $S(a, P', Q_i)$  et  $S(a', P', Q_i)$  ont respectivement leurs secteurs 1 et 3 de même signe que leurs secteurs 2 et 4, et  $k' = 1$ . D'autre part,  $S(a, P'', Q_i)$  et  $S(a', P'', Q_i)$  ont tous leurs secteurs de même signe, et  $k'' = 0$ .

Enfin, lorsque  $l$  est quadruple,  $k = 0$ , cas que nous avons déjà considéré. □

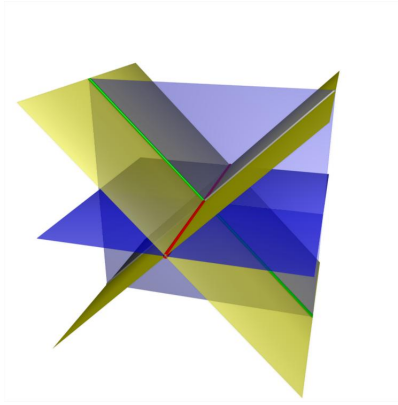


FIG. 6.19 – Sur cette figure  $Q$  et  $Q_i$  sont deux paires de plans.  $Q$  est illustrée en jaune, et  $Q_i$  en bleu. La composante algébrique  $l$  est la droite singulière de  $Q$ , en rouge. Elle traverse, en un même point, deux autres composantes algébriques de  $Q \cap Q_i$ , en vert. Ce point se situe sur la droite singulière de  $Q_i$ . Pour cette raison, lors du parcours de  $l$ , le secteur angulaire de chacun des deux plans de  $Q$ ,  $P'$  et  $P''$ , par rapport à  $Q_i$  est modifié au passage de ce point.

Ceci termine la preuve du lemme 5, ce qui complète l'étude de l'ensemble des cas où  $l \subset Q_i$  et  $Q \cap Q_i$  est de dimension 1 (étude commencée en début de la section 6.3.3).

### Cas où $l \subset Q_i$ et $Q \cap Q_i$ est de dimension 2

Ayant supposé que  $Q \neq Q_i$ , dans le cas où  $l \subset Q_i$  et  $Q \cap Q_i$  est de dimension 2,  $Q$  et  $Q_i$  sont nécessairement deux paires de plans qui ont un plan commun. Soient  $P'$  et  $P''$  les plans de  $Q$ . Si  $l$  est sur le plan commun de  $Q$  et  $Q_i$ , alors  $l$  est la droite singulière de  $Q$  ou celle de  $Q_i$ . Rappelons que nous avons supposé, dans le chapitre 5, que ces droites sont considérées au même titre que les composantes algébriques issues de QI et que leurs points d'intersection avec les autres quadriques du modèle CSG ont été calculés (voir remarque 3).

De façon similaire à la section précédente, lorsque  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q$ , nous étudions  $S(a, Q, Q_i)$  et  $S(a', Q, Q_i)$ , et lorsque  $l$  est la droite singulière de  $Q$ , nous étudions  $S(a, P, Q_i)$ ,  $S(a', P, Q_i)$ , où  $P$  représente  $P'$  ou  $P''$ . Ici,  $k = 0$  ou  $k = 2$ .

Notre résultat pour ce cas est énoncé dans le lemme suivant.

**Lemme 6** Lorsque  $k = 0$ ,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$  ou  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  selon que  $l$  soit respectivement la droite singulière de  $Q$  ou une autre droite de  $Q$ . Lorsque  $k = 2$  :

1. si  $l$  est la droite singulière de  $Q$ , alors  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$  ;
2. sinon,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$ .

**Démonstration** : Dans cette démonstration, nous pouvons nous référer à la figure 6.6, sachant que  $l$  peut être la droite singulière de  $Q$ , la droite singulière de  $Q_i$  ou la droite de  $Q \cap Q_i$  qui n'appartient pas à la surface du plan commun entre  $Q$  et  $Q_i$ .

Supposons d'abord que  $k = 0$ . Dans ce contexte,  $a \cup a'$  est le seul arc de  $Q \cap Q_i$  qui passe par  $M$ . Par conséquent,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  (dans le cas de figure où  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q$ ) et  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$  (dans le cas de figure où  $l$  est la droite singulière de  $Q$ ).

**Cas 1/  $k = 2$  et  $l$  est la droite singulière de  $Q$ .** Ici,  $M$  est le point d'intersection des droites singulières de  $Q$  et  $Q_i$ . Puisque  $l$  est la droite singulière de  $Q$ , quelque soit le plan considéré  $P$  de  $Q$ , le secteur angulaire ne subit pas de rotation en passant par  $M$ . Ainsi, comme  $l$  intersecte la droite singulière de  $Q_i$  en  $M$ , et comme la normale de chaque plan de  $Q_i$  n'a pas le même sens des deux côtés de sa droite singulière,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$ .

**Cas 2/  $k = 2$  et  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q$ .** Puisque  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q$ ,  $l$  intersecte cette dernière en  $M$ . Comme la normale de chaque plan de  $Q$  n'a pas le même sens des deux côtés de la droite singulière, et comme  $l$  est sécante à la droite singulière de  $Q$ , lors de son parcours, en passant par  $M$  le secteur angulaire subit une rotation à 180 degrés. Deux cas de figure sont traités ici : celui où  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q_i$ , et celui où  $l$  est la droite singulière de  $Q_i$ .

Dans le premier cas,  $l$  est sécante aux droites singulières de  $Q$  et  $Q_i$  en  $M$ , et lors de son parcours la normale du plan de  $Q$  ainsi que celle du plan de  $Q_i$  qui la contiennent changent de sens en  $M$ . Par conséquent,  $S(a, Q, Q_i) = S(a', Q, Q_i)$  pour ce cas de figure.

Dans le second cas de figure, lors du parcours de  $l$ , la normale du plan de  $Q$  qui la contient change de sens en  $M$ . Toutefois, comme  $l$  est la droite singulière de  $Q_i$ , les secteurs



1 et 2 de  $S(a, P, Q_i)$  et  $S(a', P, Q_i)$  sont respectivement de même signe que leurs secteurs 3 et 4. Ainsi,  $S(a, P, Q_i) = S(a', P, Q_i)$  également pour ce cas.  $\square$

Ceci termine la démonstration du lemme 6, ce qui complète l'ensemble des cas où  $l \subset Q_i$ .

## 6.4 Complexité de VE amélioré par la mise à jour du secteur angulaire

Au début de ce chapitre il a été précisé que la mise à jour du secteur angulaire est destinée à améliorer l'efficacité de VE. Cette section décrit l'amélioration obtenue.

Comme précédemment, VE parcourt les segments de  $O(n^2)$  composantes algébriques. Chaque composante algébrique est divisée en  $O(n)$  segments qui correspondent à ses intersections avec les  $n$  quadriques du modèle CSG.

Un premier segment par composante est classé, d'abord par rapport aux  $n$  quadriques volumiques, et ensuite, par l'intermédiaire d'une évaluation de l'arbre CSG, par rapport au modèle CSG. Cette évaluation nécessite un temps de  $O(n)$  par composante algébrique. Par conséquent, la complexité totale à ce stade s'élève à  $O(n^2n) = O(n^3)$ .

Puisqu'une composante algébrique  $l$  a au plus 8 points d'intersection avec une quadrique qui ne la contient pas, lors du parcours de  $l$ , le nombre de modifications du secteur angulaire par rapport à une feuille de l'arbre CSG est  $O(1)$ . Ainsi, le nombre de modifications des secteurs angulaires par rapport aux feuilles de l'arbre CSG est  $O(n)$ . Par conséquent, au cours de la mise à jour du secteur angulaire, les  $O(n)$  chemins de l'arbre CSG, allant d'une feuille jusqu'à la racine, sont parcourus chacun  $O(1)$  nombre de fois. Soit  $h$  la hauteur de l'arbre CSG. Étant donné que le nombre de composantes algébriques considérées est  $O(n^2)$ , la complexité totale de BE amélioré revient donc à  $O(n^3 + n^2hn) = O(hn^3)$ . L'arbre CSG est binaire et M. Goodrich [21] a montré que tout arbre CSG binaire à  $m$ -sommets dont les opérations sont **and**, **or**, **munis** ou **xor** peut être transformé en un arbre binaire de taille  $O(m)$  et de hauteur  $O(\log m)$ . Le temps nécessaire de cette transformation est de l'ordre de  $O(m)$ . Ainsi, en supposant que cette transformation ait été

effectuée pour l'arbre CSG de notre problème, nous pouvons conclure que la complexité totale de VE amélioré dans le pire des cas s'élève à  $O(n^3 \log n)$ .

## 6.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude de mise à jour du secteur angulaire, qui permet, lors du parcours d'une composante algébrique de définir les modifications du secteur angulaire en fonction des points d'intersection parcourus. Nous avons également montré que cette étude apporte une amélioration de la complexité de VE qui est de l'ordre de  $\Omega(\frac{n}{\log n})$ , c'est-à-dire, la complexité totale de VE amélioré dans le pire des cas est  $O(n^3 \log n)$ . Sachant que l'entrée de VE consiste en  $O(n^3)$  segments de courbe, et qu'à sa sortie VE présente, pour toute quadrique du modèle CSG, ceux qui bornent au moins une face sur elle, ceci est un résultat quasi-optimal.

Pour finir, nous présentons ci-dessous une proposition qui regroupe l'ensemble des lemmes de ce chapitre. Rappelons que  $Q$  est la quadrique sur laquelle nous souhaitons déterminer les  $Q$ -arêtes visibles,  $l$  la composante algébrique que nous considérons, et  $Q_i$  une quadrique du modèle CSG. Nous avons noté  $a$  et  $a'$  deux  $Q$ -arêtes successives sur  $l$ , et  $M$  leur extrémité commune. Nous avons également noté  $k$  le nombre de paires de  $Q$ -arêtes successives en  $M$  de  $Q \cap Q_i$  différentes de  $a$  et  $a'$ , et  $K$  leur nombre compté avec la multiplicité de leur composante algébrique.  $P$  désigne, pour le cas où  $Q$  est une paire de plans, le plan de  $Q$  auquel le secteur angulaire considéré est associé. De son côté,  $k_P$  est le nombre de paires de  $Q$ -arêtes successives en  $M$  de  $Q \cap Q_i$  différentes de  $l$  qui sont sur  $P$ . Enfin, le nombre  $K^l_M$  a été défini comme  $K^l_M = K$  lorsque  $Q$  est régulière,  $K^l_M = K + (\text{multiplicité de } l) - 1$  lorsque  $Q$  est singulière en  $M$  et  $Q_i$  est régulière en  $M$ , et  $K^l_M = K + (\text{multiplicité de } l)$  lorsque  $Q$  et  $Q_i$  sont singulières en  $M$ .

Afin d'alléger notre notation, posons  $S_Q = S(a, Q, Q_i)$ ,  $S'_Q = S(a', Q, Q_i)$ ,  $S_P = S(a, P, Q_i)$  et  $S'_P = S(a', P, Q_i)$ .

**Proposition 1** *Si  $Q_i \equiv Q$ , ou si  $Q_i \not\equiv Q$  et  $M \notin Q_i$ , alors  $S_Q = S'_Q$ . Sinon :*

1. *Lorsque  $l \notin Q_i$ ,  $S_Q = S'_Q$  ou  $S_Q = -S'_Q$  selon que  $M$  soit de multiplicité paire ou non.*

2. Lorsque  $l \subset Q_i$  et  $Q \cap Q_i$  est de dimension 1 :

(a) Cas où  $l$  n'est pas la droite singulière de  $Q$  (si  $Q$  est une paire de plans) : si  $K_M^l$  est pair, ou bien, si tous les arcs de  $Q \cap Q_i$  sont tangents en  $M^4$ , alors  $S_Q = S'_Q$  ; sinon,  $S_Q = -S'_Q$ .

(b) Cas où  $Q$  est une paire de plans et  $l$  est sa droite singulière :

i. lorsque  $k = 0$ ,  $S_P = S'_P$  ;

ii. lorsque  $k = 1$ ,  $S_P = S'_P$  ou  $S_P = -S'_P$  selon que  $k_P = 0$  ou non ;

iii. lorsque  $k = 2$ ,  $S_P = -S'_P$ .

3. Lorsque  $l \subset Q_i$  et  $Q \cap Q_i$  est de dimension 2 :

(a) lorsque  $k = 0$ ,  $S_P = S'_P$  ou  $S_Q = S'_Q$  selon que  $l$  soit respectivement la droite singulière de  $Q$  ou une autre droite de  $Q$  ;

(b) lorsque  $k = 2$ ,  $S_P = -S'_P$  ou  $S_Q = S'_Q$  selon que  $l$  soit la droite singulière de  $Q$  ou non.

---

<sup>4</sup>D'après la classification des intersections de quadriques (cf. [14, tableau 1]) ceci arrive uniquement lorsque  $Q \cap Q_i$  consiste en deux coniques tangentes ou en une cubique et une droite tangentes.

# Chapitre 7

## CA : Regroupement des $Q$ -arêtes bornant une face du modèle CSG

À ce stade de notre algorithme de conversion CSG-BRep, VE a déduit les  $Q$ -arêtes visibles pour chaque quadrique volumique  $Q$ . L'étape qui suit, et qui fait l'objet de ce chapitre, consiste à déterminer l'ensemble des chaînes de  $Q$ -arêtes qui délimitent chaque face du modèle CSG sur le bord de  $Q$ . Les  $Q$ -arêtes sont orientées selon la convention que la face qu'elles bornent, observée d'un point de vue extérieur à  $Q$ , se situe à gauche par rapport à leur orientation. Nous avons appelé cette étape CA par abréviation de l'expression en anglais « Chains Assembling ».

L'idée générale de CA est présentée dans la section suivante. Comme nous le verrons, cet algorithme est constitué de 5 étapes. Les trois premières étapes étant de nature plus compliquée que les deux dernières étapes, leur description est approfondie respectivement dans les sections 7.2, 7.3 et 7.4. Enfin, une analyse de la complexité de CA est présentée dans la section 7.5, et généralisée sur notre algorithme de conversion CSG-BRep dans la section 7.6.

### 7.1 Idée générale

Appelons les deux extrémités d'une  $Q$ -arête des  $Q$ -points. Les modèles CSG que nous considérons sont des modèles bornés, et, par conséquent, chaque  $Q$ -face visible est déli-

mitée par une ou plusieurs chaînes de  $Q$ -arêtes visibles qui commencent, chacune par un  $Q$ -point, et se terminent au même  $Q$ -point. Ainsi, appelons également une chaîne fermée de  $Q$ -arêtes visibles délimitant une face du modèle CSG sur le bord de  $Q$  qui contient exactement deux fois un seul  $Q$ -point un  $Q$ -cycle visible. Enfin, appelons chaque ensemble connexe de  $Q$ -cycles visibles qui délimitent une face du modèle CSG sur le bord de  $Q$ , une  $Q$ -chaîne visible (voir figure 7.3). Naturellement, il est nécessaire, afin de composer les  $Q$ -cycles visibles et les  $Q$ -chaînes visibles, de connaître, d'une part, les  $Q$ -arêtes visibles, et d'autre part, les  $Q$ -points qui les relie. Ainsi, les données de départ de CA sont le graphe d'adjacence de l'arrangement des quadriques du modèle CSG et les  $Q$ -arêtes visibles pour toute quadrique  $Q$  du modèle CSG. Le premier est établi par Q3, et les seconds sont calculés par VE.

L'idée générale de CA repose sur l'orientation des  $Q$ -arêtes visibles et le parcours selon cette orientation des  $Q$ -chaînes visibles. Chaque  $Q$ -point non isolé possède au moins une  $Q$ -arête entrante ( $Q$ -arête visible orientée vers le point) et une  $Q$ -arête sortante ( $Q$ -arête visible orientée au sens inverse du point). Le nombre de fois où une  $Q$ -arête est parcourue correspond à son degré de visibilité. Ainsi, le nombre de  $Q$ -arêtes entrantes et sortantes correspond au nombre de  $Q$ -arêtes incidentes à ce point comptées avec leur degré de visibilité.

Dans l'optique de la recherche de  $Q$ -chaînes visibles, CA associe, pour tout  $Q$ -point, chaque  $Q$ -arête entrante à la  $Q$ -arête sortante qui doit lui succéder lors du parcours des  $Q$ -arêtes visibles. Rappelons que, d'après la convention que nous avons adoptée, la face délimitée par les  $Q$ -arêtes visibles, observée d'un point de vue extérieur à  $Q$ , se situe à gauche par rapport à leur orientation. Nous adoptons ici une convention sur les  $Q$ -arêtes visibles, selon laquelle, au sein d'une  $Q$ -chaîne visible, *pour deux  $Q$ -arêtes visibles successives incidentes au même  $Q$ -point, observées d'un point de vue extérieur à  $Q$ , la  $Q$ -arête sortante est définie comme la première  $Q$ -arête à gauche par rapport à l'orientation de la  $Q$ -arête entrante.* Afin de faciliter le parcours des  $Q$ -arêtes, CA oriente les  $Q$ -arêtes visibles et ordonne autour de chaque  $Q$ -point, toutes les  $Q$ -arêtes visibles qui lui sont incidentes dans le sens des aiguilles d'une montre, ceci observé d'un point vue extérieur à  $Q$ .

Ainsi, à sa sortie, CA décrit pour chaque quadrique  $Q$  du modèle CSG l'ensemble des  $Q$ -faces visibles qu'elle contient. Chacune de ces dernières est déterminée par l'ensemble des  $Q$ -chaînes visibles qui la délimitent, parcourues de façon à ce que, observée d'un point de vue extérieur à  $Q$  :

- la  $Q$ -face visible qu'elles bornent se situe à gauche par rapport à ce parcours ;
- pour tout  $Q$ -point, chaque  $Q$ -arête sortante est définie comme la première  $Q$ -arête à gauche par rapport à l'orientation de la  $Q$ -arête entrante.

Globalement, CA contient cinq étapes, décrites dans la suite de ce chapitre. Pour chaque quadrique  $Q$  du modèle CSG, ces étapes sont :

1. projeter les  $Q$ -arêtes visibles de  $Q$  sur un plan ;
2. ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point ;
3. regrouper les  $Q$ -arêtes visibles qui bornent une même  $Q$ -face visible et les orienter ;
4. reconnecter les projections ;
5. déterminer les  $Q$ -chaînes visibles.

Nous présentons brièvement et de manière simplifiée chacune de ces étapes dans les paragraphes suivants.

**1. Projection.** La première étape de CA a un rôle préparatif qui consiste à réaliser la projection des  $Q$ -arêtes visibles sur un plan. Cette projection a pour objectif de faciliter les étapes suivantes. Nous souhaitons qu'elle ne crée pas de nouveaux points d'intersection entre  $Q$ -arêtes, ce qui nécessite de séparer la quadrique  $Q$  en régions.

Le plan de projection est en général le plan  $Z = 0$ , où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les trois axes de  $\mathbb{R}^3$ . CA calcule d'abord la silhouette de  $Q$  par rapport au plan  $Z = 0$  ainsi que ses points d'intersection avec les  $Q$ -arêtes visibles. La silhouette de  $Q$  est déterminée comme l'intersection entre  $Q$  et le plan simple  $\frac{\partial F}{\partial z}$ , où  $F$  est l'équation implicite de  $Q$ . Notons  $Q_z$  ce plan. La silhouette de  $Q$  permet de séparer son bord en deux, celui qui se situe au-dessus de  $Q_z$  et que nous nommons *bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$* , et celui qui se situe en-dessous de  $Q_z$  et que nous nommons *bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$* . Deux projections distinctes sont effectuées sur le plan  $Z = 0$ , celle des  $Q$ -arêtes visibles situées sur le bord de  $Q$  supérieur

à  $Q_z$  et celle des  $Q$ -arêtes visibles situées sur le bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$ . Cette étape est détaillée dans la section 7.2.

**2. Ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point.** Cette étape est effectuée séparément sur chacune des deux projections obtenues. Pour chaque  $Q$ -point, les  $Q$ -arêtes visibles qui lui sont incidentes sont ordonnées. Pour simplifier la présentation, nous identifions les  $Q$ -arêtes visibles et les  $Q$ -points à leur projection. Notons que ceci n'est nécessaire que si le nombre de ces  $Q$ -arêtes visibles est strictement supérieur à 2. Dans ce cas-là, CA ordonne verticalement (parallèlement à  $Y$ ) les  $Q$ -arêtes visibles qui lui sont incidentes à gauche (par rapport à  $X$ ), et séparément celles qui lui sont incidentes à droite (par rapport à  $X$ ). Ceci est réalisé par l'intermédiaire de leur intersection avec deux droites verticales suffisamment proches du  $Q$ -point, l'une à sa gauche et l'autre à sa droite. L'éventuelle existence de  $Q$ -arêtes visibles verticales (au plus 2) est également prise en compte. L'ordre des  $Q$ -arêtes visibles dans le sens des aiguilles d'une montre vu de l'extérieur de  $Q$  se déduit par la suite selon que la projection étudiée corresponde au bord de  $Q$  supérieur ou inférieur par rapport à  $Q_z$ . Cette étape est présentée de façon plus approfondie dans la section 7.3.

**3. Regrouper les  $Q$ -arêtes visibles qui bornent une même  $Q$ -face visible et les orienter.** L'objectif de la troisième étape de CA est, d'une part, de déterminer pour chaque face, l'ensemble de  $Q$ -arêtes visibles qui la délimitent, et d'autre part, d'orienter les  $Q$ -arêtes visibles. Pour cela, CA détermine l'arrangement des  $Q$ -chaînes visibles en effectuant un balayage sur chacune des deux projections. C'est un balayage simplifié, car les  $Q$ -arêtes visibles peuvent être incidentes aux  $Q$ -points, mais *ne s'intersectent pas*. De plus, les  $Q$ -points sont connus à l'entrée de CA et leur identification sur le plan de projection est facile à obtenir.

À chaque stade du balayage, sont calculés, sur la droite de balayage, les intervalles formés par les différentes  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$  (voir la section 7.4.1). Un deuxième balayage établit, pour chacun de ces intervalles, s'il se situe sur le bord du modèle CSG ainsi que l'orientation des  $Q$ -arêtes visibles qui le délimitent (cf. la section

7.4.2). Chaque intervalle obtenu correspond à une et une seule  $Q$ -face visible ou non, mais plus d'un intervalle peuvent représenter une même  $Q$ -face.

Déterminer les  $Q$ -faces visibles et orienter les  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$  peuvent être effectués en même temps que le regroupement des  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$  qui forment une même  $Q$ -face, par l'intermédiaire d'un seul balayage. Cependant, afin de faciliter leur présentation ici, nous supposons, dans la suite de ce chapitre, que CA les réalise séparément en deux balayages.

CA numérote les  $Q$ -faces parcourues et établit, à chaque stade du balayage, l'ensemble des  $Q$ -arêtes visibles qui les délimitent. La difficulté principale ici est que lors de certains événements du balayage, deux faces considérées jusqu'alors comme distinctes peuvent se révéler identiques (voir figure 7.1). CA fusionne alors les deux listes des  $Q$ -arêtes correspondantes. Comme nous allons le voir, ceci peut se faire en temps constant par fusion, et donc n'a pas d'impact sur la complexité standard du balayage. À la fin du balayage, CA a établi, pour toute  $Q$ -face, l'ensemble de  $Q$ -arêtes visibles sur le bord de  $Q$  qui la délimitent.

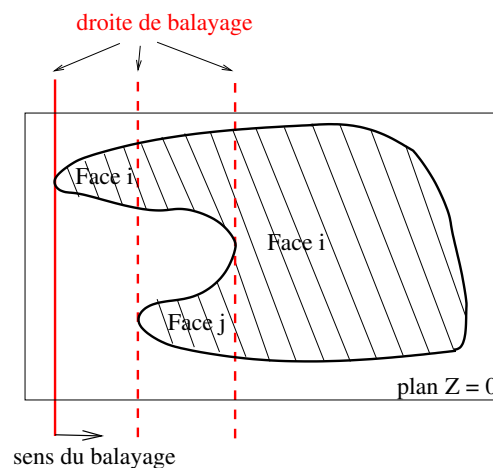


FIG. 7.1 – Cette figure illustre, pour une quadrique  $Q$ , la projection sur le plan  $Z = 0$  des  $Q$ -arêtes visibles délimitant une même  $Q$ -face visible. Au cours du balayage, cette  $Q$ -face est d'abord considérée comme deux  $Q$ -faces visibles distinctes numérotées  $i$  et  $j$ . Lorsque ces deux  $Q$ -faces se révèlent identiques (les deux intervalles sont fusionnés), CA leur accorde un même numéro,  $i$ , et fusionne les deux listes des  $Q$ -arêtes correspondantes.



De plus, CA détermine, pour la première  $Q$ -face rencontrée, ou une des premières  $Q$ -faces rencontrées, si elle est visible (cf. figure 7.2) en utilisant un classement approfondi (introduit dans le chapitre 5). Étant donné que le degré de visibilité de chaque  $Q$ -arête visible détermine si elle délimite une ou deux  $Q$ -faces visibles, CA déduit, pour chaque nouvelle  $Q$ -face rencontrée si elle est visible ou non. Ainsi, comme pour toute  $Q$ -arête sont connus d'une part les deux  $Q$ -faces qu'elle délimite, et d'autre part, leur ordre vertical, CA établit, selon que la projection étudiée corresponde au bord de  $Q$  supérieur ou inférieur par rapport à  $Q_z$ , l'orientation des  $Q$ -arêtes visibles.

Autant la nécessité d'un balayage pour regrouper les  $Q$ -arêtes visibles qui forment une même  $Q$ -face visible paraît claire, autant pour l'orientation des  $Q$ -arêtes visibles on pourrait considérer une approche purement vorace. Cependant, remarquons qu'une telle approche permettrait de déduire, à partir de l'orientation d'une première  $Q$ -arête visible d'une composante connexe du graphe d'adjacence, l'orientation des autres  $Q$ -arêtes visibles de cette même composante connexe. Or, le graphe d'adjacence peut contenir des composantes disjointes, d'où l'utilité de la méthode de balayage.

Cette étape est décrite plus en détail dans la section 7.4.

**4. Reconnexion des projections.** Au cours de la quatrième étape de CA, les résultats obtenus sur chacune des deux projections sont réunis. Ainsi, les  $Q$ -arêtes visibles incidentes à  $Q \cap Q_z$  et situées sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$  sont connectées à celles qui sont sur le bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$ . Cette opération est triviale du fait que leurs points d'intersection avec  $Q \cap Q_z$  sont connus. De même, pour les  $Q$ -points de  $Q \cap Q_z$  (s'ils existent), l'ensemble des  $Q$ -arêtes visibles des deux projections qui leur sont incidentes sont ordonnées selon l'ordre obtenu sur les deux projections dans l'étape 2. Enfin, les  $Q$ -faces communes aux deux projections sont identifiées, et pour chacune d'elles sont regroupées l'ensemble des  $Q$ -arêtes visibles des deux projections qui les délimitent.

**5. Déterminer les  $Q$ -chaînes visibles.** Le parcours des  $Q$ -arêtes visibles suivant leur orientation et leur ordre autour de chaque  $Q$ -point permet d'établir les  $Q$ -chaînes visibles. À la fin de cette étape, le nombre de fois où chaque  $Q$ -arête visible est parcourue est égal

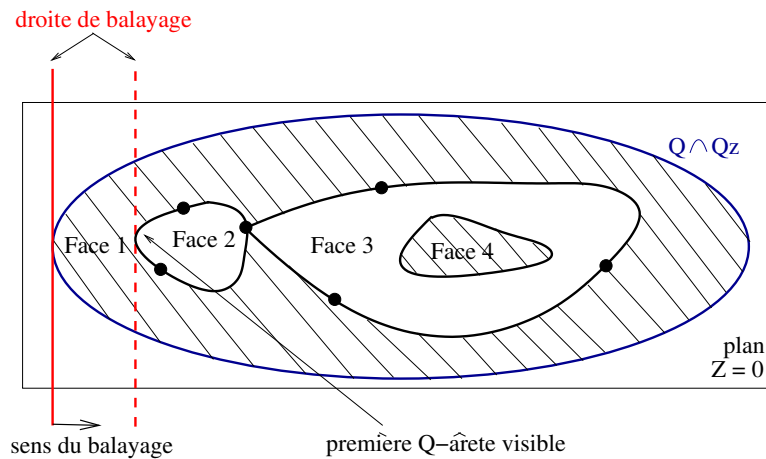


FIG. 7.2 – Cette figure illustre une projection sur le plan  $Z = 0$  de  $Q \cap Q_z$  pour une quadrique  $Q$ , ainsi que des  $Q$ -arêtes visibles (situées sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$  ou sur le bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$ ). Ici,  $Q$  est bornée et la première  $Q$ -face rencontrée au cours du balayage est visible. La première  $Q$ -arête visible après  $Q \cap Q_z$  est supposée être de degré de visibilité 1. Par conséquent, la  $Q$ -face qu'elle délimite et qui se situe après elle n'est pas visible.

à son degré de visibilité, et le nombre de passages par un  $Q$ -point est égal au nombre de  $Q$ -arêtes visibles dont il est extrémité comptées avec leur degré de visibilité. Lorsque le parcours passe par une  $Q$ -arête entrante d'un  $Q$ -point, si ce dernier est extrémité de  $Q$ -arêtes non encore parcourues, alors il emprunte la  $Q$ -arête suivante qui lui est différente (celle-ci est nécessairement sortante), sinon, il repart d'un autre  $Q$ -point qui est extrémité de  $Q$ -arêtes non encore parcourues. Au cours du parcours, la description de toute  $Q$ -chaîne visible commence en un  $Q$ -point et se termine quand le parcours revient à ce  $Q$ -point.

La figure 7.3 illustre les formes de  $Q$ -chaînes visibles qui peuvent être obtenues par CA. Remarquons qu'une face du modèle CSG peut contenir des trous. Ainsi, lorsqu'une  $Q$ -face visible est constituée de plus d'une  $Q$ -chaînes visibles, elle est *incluse dans une seule parmi ces  $Q$ -chaînes*, tandis que les  $Q$ -chaînes restants forment ses trous.

Les étapes 1 (projection), 2 (ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point) et 3 (regrouper les  $Q$ -arêtes visibles qui bornent une même  $Q$ -face visible et les orienter) sont présentées, de façon plus approfondie, une par une dans les sections qui suivent.

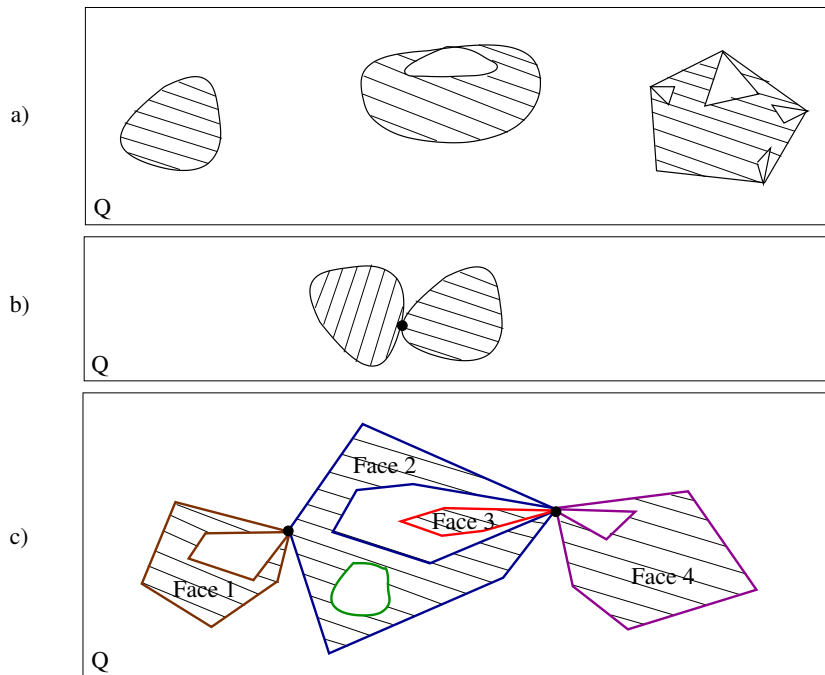


FIG. 7.3 – a) Exemple de trois  $Q$ -faces visibles sur une quadrique  $Q$  et les trois  $Q$ -chaînes visibles assemblées par CA chacune délimitant une de ces faces. b) Les  $Q$ -arêtes visibles formant les deux  $Q$ -faces visibles illustrées sont assemblées par CA en deux  $Q$ -chaînes visibles dont chacune délimite une des  $Q$ -faces visibles. c) Exemple de quatre  $Q$ -faces visibles sur une quadrique  $Q$ , numérotées de 1 à 4, et les cinq  $Q$ -chaînes visibles qui les délimitent, assemblées par CA, chacune illustrée par une couleur différente. La  $Q$ -face 1 est « incluse » dans la  $Q$ -chaîne marron. De son côté, la  $Q$ -face 2 est « incluse » dans la  $Q$ -chaîne bleue et contient un trou formé par la  $Q$ -chaîne verte. La  $Q$ -face 3 est « incluse » dans la  $Q$ -chaîne rouge. Enfin, la  $Q$ -face 4 est incluse dans la  $Q$ -chaîne magenta.

## 7.2 Étape 1 : projection

La première étape de CA consiste à projeter les  $Q$ -arêtes visibles de  $Q$  sur un plan. Pour ce faire, nous avons choisi le plan  $Z = 0$ , où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les trois axes de  $\mathbb{R}^3$ , mais comme nous le verrons dans les paragraphes qui suivent, celui-ci peut être remplacé par le plan  $X = 0$  ou  $Y = 0$ . Rappelons que l'objectif de cette étape est de faciliter les étapes suivantes, à savoir ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point, regrouper les

$Q$ -arêtes visibles qui bornent une même  $Q$ -face visible et les orienter. Pour cela, CA sépare  $Q$  en régions de façon à ce qu'aucune paire de  $Q$ -arêtes visibles d'une même région ne s'intersecte après projection, excepté en leurs extrémités.

La projection est calculée différemment selon que  $Q$  soit une paire de plans ou une autre quadrique. Dans les paragraphes qui suivent, nous les considérons séparément.

Dans le cas où  $Q$  est une paire de plans, CA détermine auquel parmi les deux plans appartient chaque  $Q$ -arête visible et projette les  $Q$ -arêtes visibles de chaque plan  $P_i$  de  $Q$  séparément. Cette projection est effectuée sur le plan  $Z = 0$  lorsque  $P_i$  n'est pas vertical. Dans le cas où  $P_i$  est vertical, elle est effectuée sur le plan  $X = 0$  ou  $Y = 0$ . Afin de déterminer auquel parmi les deux plans appartient chaque  $Q$ -arête visible, CA repose sur le fait que, comme  $Q$  a une équation à coefficients rationnels, sa droite singulière (la droite d'intersection entre les deux plans) est rationnelle. Il est donc facile de générer deux plans rationnels qui contiennent la droite singulière de  $Q$  et qui séparent l'espace en quatre quadrants, chacun contenant un des quatre demi-plans de  $Q$ .

Supposons maintenant que  $Q$  ne soit pas une paire de plans. Supposons sans perte de généralité que la projection soit réalisée sur le plan  $Z = 0$ , mais précisons que dans le cas où  $Q$  est un cylindre vertical elle est effectuée sur le plan  $X = 0$ . Comme il a été introduit dans la section précédente, CA sépare  $Q$  en régions délimitées par le plan  $Q_z$  (qui peut être réduit à l'ensemble vide), dont l'équation implicite,  $\frac{\partial F}{\partial z}$ , est la dérivée de l'équation implicite  $F$  de  $Q$  par rapport à  $z$ . L'hypothèse que  $Q$  n'est ni une paire de plans, ni un cylindre vertical assure que  $Q_z$  est un plan ou l'ensemble vide et qu'il coupe  $Q$  en une courbe, un point ou l'ensemble vide. L'intersection de  $Q$  et de  $Q_z$  est l'union des points singuliers de  $Q$  et de la silhouette de  $Q$ , ensemble des points dont le plan tangent à  $Q$  est défini et vertical. L'ensemble des points singuliers et des points de la silhouette sont appelés les *points critiques de  $Q$* . Ensuite, CA détermine, par l'intermédiaire de Q3, l'ensemble des points d'intersection entre le lieu des points critiques et les composantes des courbes d'intersection qui se situent sur  $Q$ . Ces points d'intersection sont ordonnés sur le lieu des points critiques, et ajoutés au bon emplacement parmi les points d'intersection ordonnés des composantes algébriques sur  $Q$ . Le paramétrage de  $Q \cap Q_z$  et des  $Q$ -arêtes visibles ayant déjà été calculé par QI, leurs projections sur le plan  $Z = 0$  sont obtenues

de manière triviale.

La projection des points critiques de  $Q$  sur le plan  $Z = 0$  partitionne ce dernier en cellules de dimension 2, 1 et 0. Chaque cellule de dimension 2 correspond à un ensemble (possiblement vide) de carreaux de surface de  $Q$ , tel que la projection de chaque carreau sur le plan  $Z = 0$  est une bijection. De manière similaire, les cellules de dimension 1 et 0 correspondent à des ensembles d'arcs de courbes ou de points.

Nous montrons dans les paragraphes qui suivent que la projection de toute  $Q$ -arête sur le plan  $Z = 0$  est un segment de courbe qui ne s'intersecte pas lui-même sauf éventuellement en ses extrémités<sup>5</sup>, et que la projection de toute paire de  $Q$ -arêtes situées du même côté de  $Q_z$  correspond à deux segments de courbe qui ne s'intersectent pas sauf éventuellement en leurs extrémités. Pour cela, nous montrons d'abord le lemme suivant :

Rappelons que si une  $Q$ -arête n'est pas contenue dans  $Q_z$ , mais a au moins un point commun avec ce dernier ( $Q_z$  n'est pas réduit à l'ensemble vide) en dehors de ses extrémités, alors elle est divisée par  $Q_z$  en au moins deux morceaux, considérés par la suite comme des  $Q$ -arêtes. Ainsi, aucune  $Q$ -arête ne traverse  $Q_z$  lorsque ce dernier est un plan.

**Lemme 7** Soient  $Q$ ,  $Q_z$  et  $D$  respectivement une quadrique, le plan dont l'équation implicite est la dérivée de l'équation implicite de  $Q$  par rapport à  $z$ , et une droite verticale de coordonnées  $(x_0, y_0)$ , avec  $x_0$  et  $y_0$  des nombres réels. Alors :

1. soit  $D$  coupe  $Q$  en deux points, un de chaque côté de  $Q_z$  ;
2. soit  $D$  coupe  $Q$  en un point double sur  $Q_z$  ;
3. soit  $D$  n'intersecte pas  $Q$  ;
4. soit  $D$  coupe  $Q$  en un point simple ;
5. soit  $D$  est contenue dans  $Q$  et dans  $Q_z$ .

**Démonstration :** Écrivons l'équation implicite de  $Q$  sous la forme suivante

$$F := az^2 + p(x, y)z + q(x, y) = 0,$$

---

<sup>5</sup>Il est possible qu'une  $Q$ -arête visible soit projetée en une courbe fermée. Ce cas de figure se produit lorsque les extrémités de la  $Q$ -arête visible se situent sur une droite verticale contenue dans  $Q$ .

où  $a$  est une constante rationnelle et où  $p(x, y)$  et  $q(x, y)$  sont des polynômes à coefficients rationnels en  $x$  et  $y$ . Notons  $F_z$  l'équation implicite de  $Q_z$ ,

$F_z := 2az + p(x, y) = 0$ . Considérons les points d'intersection entre  $D$  et  $Q$ , et les points d'intersection entre  $D$  et  $Q_z$ .

Supposons d'abord que  $a \neq 0$ . Trois possibilités se présentent ici : soit  $D$  intersecte  $Q$  en deux points distincts,  $z_1 = \frac{-p(x_0, y_0) - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-p(x_0, y_0) + \sqrt{\Delta}}{2a}$ , où  $\Delta$  est le discriminant de  $F$  que nous supposons positif, soit  $D$  intersecte  $Q$  en un point double,  $z = \frac{-p(x_0, y_0)}{2a}$ , soit  $D$  n'intersecte pas  $Q$ . De même,  $D$  intersecte  $Q_z$  en  $z = \frac{-p(x_0, y_0)}{2a}$ .

Dans le cas où  $D$  intersecte  $Q$  en deux points distincts, comme leur point de milieu est sur  $Q_z$ , l'un de ces points se situe au-dessus de  $Q_z$  et l'autre en-dessous de  $Q_z$ , ce qui correspond au cas 1 du lemme. Dans le cas où  $D$  intersecte  $Q$  en un point double, celui-ci coïncide avec le point d'intersection entre  $D$  et  $Q_z$ , ce qui correspond au cas 2 du lemme. Enfin, le cas où  $D$  n'intersecte pas  $Q$  correspond au cas 3 du lemme.

Supposons maintenant que  $a = 0$ . Trois cas se présentent, soit  $p(x_0, y_0) \neq 0$ , soit  $p(x_0, y_0) = 0$  et  $q(x_0, y_0) \neq 0$ , soit  $p(x_0, y_0) = q(x_0, y_0) = 0$ . Dans le premier cas, il existe un point simple d'intersection entre  $D$  et  $Q$ ,  $z = \frac{-q(x_0, y_0)}{p(x_0, y_0)}$ , ce qui correspond au cas 4. Dans le deuxième cas,  $D$  n'intersecte pas  $Q$ , ce qui correspond au cas 3 du lemme. Enfin, dans le troisième cas,  $D$  est contenue dans  $Q$  et dans  $Q_z$ , ce qui correspond au cas 5. L'ensemble des solutions présenté étant exhaustif, ceci termine la preuve du lemme.  $\square$

Le lemme 7, que nous venons de démontrer, nous permet, à présent, de montrer le lemme suivant :

**Lemme 8** *Toute paire de  $Q$ -arêtes situées du même côté de  $Q_z$  se projette en deux segments de courbe qui ne s'intersectent pas sauf éventuellement en leurs extrémités. De même, la projection de toute  $Q$ -arête sur le plan  $Z = 0$  est un segment de courbe qui ne s'intersecte pas lui-même sauf éventuellement en ses extrémités.*

**Démonstration** : Remarquons que si  $Q_z$  est réduit à l'ensemble vide, alors la

projection de  $Q$  sur le plan  $Z = 0$  est une bijection et le lemme est trivial. Supposons donc que  $Q_z$  est un plan.

Le cas d'une  $Q$ -arête contenue dans  $Q_z$  où  $Q_z$  est un plan vertical est également trivial. En effet, celle-ci est alors contenue dans la droite verticale  $D = Q \cap Q_z$ , sa projection est un point, et toute intersection en ce point est l'extrémité de cette  $Q$ -arête projetée. Nous pouvons donc supposer, dans la suite de la preuve, qu'aucune  $Q$ -arête n'est contenue dans  $Q_z$  lorsque ce dernier est un plan vertical.

Supposons que les projections de deux  $Q$ -arêtes situées du même côté de  $Q_z$  se coupent en un point  $(x_0, y_0)$ . La droite verticale  $D$  passant par ce point coupe ces deux  $Q$ -arêtes en deux points,  $q_1$  et  $q_2$ . Si  $q_1 = q_2$ , ce point est nécessairement une extrémité des deux  $Q$ -arêtes (car les  $Q$ -arêtes ne se coupent qu'en leurs extrémités). Par conséquent, sa projection est également une extrémité des deux  $Q$ -arêtes projetées. Si  $q_1 \neq q_2$ , alors, comme ces deux points sont du même côté de  $Q_z$ , d'après le lemme 7 la droite  $D$  est contenue dans  $Q$  et  $Q_z$ .  $Q_z$  est alors un plan vertical. Comme les  $Q$ -arêtes ont été coupées par  $Q_z$  (et que l'on a supposé que les  $Q$ -arêtes ne sont pas contenues dans  $Q_z$ ),  $q_1$  et  $q_2$  sont des extrémités des deux  $Q$ -arêtes, et donc leurs projections sont des extrémités des  $Q$ -arêtes projetées.

De manière similaire, si la projection d'une  $Q$ -arête (située du même côté de  $Q_z$ ) se coupe en un point, alors les deux extrémités de la  $Q$ -arête projetée sont égales à ce point.  $\square$

**Remarque 9** *Le fait que la projection de certains  $Q$ -points distincts puisse coïncider est facile à gérer lors des étapes suivantes de CA, car la droite verticale à laquelle ils appartiennent fait partie de  $Q \cap Q_z$ , et donc, ces  $Q$ -points ont déjà été calculés et ordonnés sur cette droite.*

**Bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$  et bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$ .** CA calcule la projection sur le plan  $Z = 0$  de toutes les  $Q$ -arêtes visibles et gère séparément, dans les étapes 2 (ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point) et 3 (regrouper les  $Q$ -arêtes visibles qui bornent une même  $Q$ -face visible et les orienter), l'ensemble de celles qui sont

sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$  et l'ensemble de celles situées sur le bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$ . La notion de région supérieure ou inférieure à  $Q_z$  est naturellement bien définie dans le cas où  $Q_z$  est un plan non vertical. Pour traiter le cas où  $Q_z$  est un plan vertical ou n'est pas un plan, nous considérons les situations plus générales suivantes :

- dans le cas où  $Q_z$  est l'ensemble vide, la normale en tout point de  $Q$  est dirigée soit vers le haut, soit vers le bas (c'est-à-dire, son produit scalaire avec un vecteur parallèle à l'axe  $Z$  est soit positif, soit négatif) ;
- dans le cas où  $Q_z$  est un plan, il sépare la surface  $Q$  en régions telles que dans chaque région la normale de  $Q$  est dirigée soit vers le haut, soit vers le bas.

Ainsi, une région est définie comme *supérieure* (respectivement *inférieure*) à  $Q_z$  lorsque ses points ont une normale dirigée vers le haut (respectivement vers le bas).

La projection des courbes situées sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$  et celle des courbes situées sur le bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$  sont distinguées par l'intermédiaire du plan  $Q_z$  (le cas où  $Q_z$  est réduit à l'ensemble vide est trivial). Étant donné que  $Q_z$  sépare l'espace en deux, deux points qui n'appartiennent pas à  $Q_z$ , chacun sur un côté différent de  $Q_z$ , se trouvent l'un à l'intérieur, et l'autre, à l'extérieur du volume déterminé par l'équation implicite de  $Q_z$ . Ainsi, pour toute composante algébrique de  $Q$ , il suffit de générer un point sur une de ses  $Q$ -arêtes et de le classer par rapport au volume déterminé par l'équation implicite de  $Q_z$ . Ceci indique si cette  $Q$ -arête est sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$  ou inférieur à  $Q_z$ . Un parcours de la composante algébrique à laquelle elle appartient permet de savoir, pour toute  $Q$ -arête visible rencontrée, si elle est du même côté par rapport à  $Q_z$  ou non.

## 7.3 Étape 2 : ordonner les $Q$ -arêtes visibles autour de chaque $Q$ -point

Au cours de la deuxième étape de CA, en chaque  $Q$ -point qui a plus de 2  $Q$ -arêtes visibles incidentes, celles-ci sont ordonnées dans le sens des aiguilles d'une montre, vu de l'extérieur de  $Q$ . Pour cela, CA procède en deux sous-étapes. D'abord, toutes les  $Q$ -arêtes visibles sont coupées en leurs points extrêmes en  $X$ , c'est-à-dire les points où une  $Q$ -arête



visible a une tangente parallèle au plan  $YZ$ , et toutes les extrémités des  $Q$ -arêtes visibles sont ordonnées selon  $X$ . Ensuite, pour tout  $Q$ -point (extrémité d'une  $Q$ -arête visible), les  $Q$ -arêtes visibles qui lui sont incidentes à gauche (par rapport à l'axe  $X$ ), et celles qui lui sont incidentes à droite (par rapport à l'axe  $X$ ) sont ordonnées par rapport à  $Y$ .

Pour ordonner circulairement les  $Q$ -arêtes visibles autour d'un  $Q$ -point, CA ordonne circulairement les  $Q$ -arêtes visibles projetées sur le plan  $Z = 0$  autour du  $Q$ -point projeté. L'ordre est préservé par la projection. En effet, lorsque le plan tangent à  $Q$  au  $Q$ -point est vertical (ou non défini), ce  $Q$ -point est un point critique de  $Q$ , et, dans l'étape 1, CA projette séparément les  $Q$ -arêtes visibles qui sont sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$  de celles sur le bord inférieur à  $Q_z$ . Pour simplifier la présentation, nous pouvons donc identifier dans la suite les  $Q$ -arêtes visibles et les  $Q$ -points à leur projection.

La seconde sous-étape est locale : CA ordonne pour chaque  $Q$ -point, localement par rapport à  $Y$ , les  $Q$ -arêtes visibles qui lui sont incidentes à sa gauche, et celles qui lui sont incidentes à sa droite. L'idée générale est de considérer deux droites parallèles à l'axe  $Y$  et suffisamment proches du  $Q$ -point, dont l'une se situe entre ce  $Q$ -point et le point extrême le plus proche à sa gauche, et l'autre se situe entre ce  $Q$ -point et le point extrême le plus proche à sa droite. Par l'intermédiaire des coordonnées de leurs intersections avec les  $Q$ -arêtes visibles, CA ordonne verticalement (parallèlement à  $Y$ ) les  $Q$ -arêtes visibles qui sont incidentes au  $Q$ -point à gauche, et séparément celles qui lui sont incidentes à droite.

Plus précisément, soient  $(x_0, y_0)$  les coordonnées d'un  $Q$ -point. Supposons que CA doive ordonner les arcs  $a_1, \dots, a_k$  des  $Q$ -arêtes visibles issues à droite de ce  $Q$ -point (ou similairement à sa gauche). Ceci revient à ordonner ces arcs de façon à ce que, dans une bande verticale  $]x_0, x_0 + \epsilon[ \times \mathbb{R}$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit, les  $Q$ -arêtes visibles soient ordonnées de bas en haut par rapport à  $Y$ . En effet, pour  $\epsilon$  suffisamment petit, les arcs de  $Q$ -arêtes sont monotones en  $X$  et ne se coupent pas, ce qui assure que l'ordre est le même partout dans la bande verticale. L'ordre vertical de la bande  $]x_0, x_0 + \epsilon[ \times \mathbb{R}[$  est calculé de la manière suivante.

Notons  $(x_1, y_1)$  le  $Q$ -point le plus proche à droite de  $(x_0, y_0)$ . Tous les  $Q$ -points étant ordonnés en  $X$ ,  $(x_1, y_1)$  peut être trouvé en temps  $O(\log n)$ . Dans la bande verticale  $]x_0, x_1[ \times \mathbb{R}$  tous les arcs de  $Q$ -arêtes issues de  $(x_0, y_0)$  sont monotones en  $X$  et ne se

7.3. *Étape 2 : ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point*

---

coupent pas d'après le lemme 8. L'ordre vertical au voisinage à droite de  $(x_0, y_0)$  est donc le même que l'ordre vertical dans toute la bande  $]x_0, x_1[ \times \mathbb{R}$ . Soit  $c = \frac{(x_0+x_1)}{2}$ . CA détermine l'intersection de chaque arc  $a_i$  avec la droite  $x = c$ . L'arc  $a_i$  est paramétré par  $(x_i(u), y_i(u))$ , pour  $u \in [u_1, u_2]$ , où  $u_1$  et  $u_2$  sont des nombres algébriques définis par un polynôme et deux intervalles d'isolation (cf. chapitre 4). Dans le cas le pire (pour une quartique lisse),  $x_i(u)$  et  $y_i(u)$  sont de la forme  $\frac{\Psi'_{1x_i}(u) + \Psi'_{2x_i}(u)\sqrt{\Delta(u)}}{\Psi''_{1x_i}(u) + \Psi''_{2x_i}(u)\sqrt{\Delta(u)}}$  (et similairement pour  $y_i(u)$ , avec le même  $\Delta(u)$ ), où  $\Psi'_{1x_i}(u)$ ,  $\Psi''_{1x_i}(u)$ ,  $\Psi'_{2x_i}(u)$ ,  $\Psi''_{2x_i}(u)$  et  $\Delta(u)$  sont de degré respectivement 3, 3, 1, 1 et 4 en  $u$ . L'équation  $x_i(u) = c$  peut être transformée, en élevant au carré, en un polynôme de degré 6 en  $u$ . CA résout ce polynôme en déterminant les intervalles d'isolation pour ses racines, qu'il raffine jusqu'à l'obtention d'un unique intervalle qui soit strictement inclus dans  $[u_1, u_2]$ , et tel que, son image par  $x_i(u)$  contienne  $c$ . Soit  $[u'_i, u''_i]$  cet intervalle. L'unique racine du polynôme dans cet intervalle est nécessairement la valeur  $u_i$  pour laquelle  $(x_i(u_i), y_i(u_i))$  est le point d'intersection entre  $a_i$  et la droite  $x = c$ . CA calcule les intervalles  $[u'_i, u''_i]$  pour chaque arc  $a_i$  et les raffine jusqu'à ce que les intervalles correspondants  $y_i([u'_i, u''_i])$  soient deux à deux disjoints. Chacun des arcs  $a_i$  coupe la droite  $x = c$  dans le segment  $(c, y_i([u'_i, u''_i]))$ . Les intervalles  $y_i([u'_i, u''_i])$  étant deux à deux disjoints, l'ordre de ces intervalles sur  $\mathbb{R}$  correspond à l'ordre vertical (par rapport à  $Y$ ) des arcs  $a_i$  dans la bande  $]x_0, x_1[ \times \mathbb{R}$ . L'ordre vertical des arcs incident à gauche du  $Q$ -point est déterminé de manière similaire.

Il reste à déterminer si l'ordre circulaire recherché correspond à un ordre vertical de bas en haut ou de haut en bas des arcs  $a_i$  dans la bande  $]x_0, x_1[ \times \mathbb{R}$  et similairement dans la bande à gauche du  $Q$ -point. Rappelons l'objectif de cette étape qui est d'ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point au sens des aiguilles d'une montre vu de l'extérieur de  $Q$ . Notons que cet ordre dépend du sens de la normale de  $Q$  en le  $Q$ -point considéré.

Observons d'abord la projection du bord de  $Q$  dont la normale est orientée vers le haut (par rapport à  $Z$ ). L'ordre de bas en haut (par rapport à  $Y$ ) des arcs de  $Q$ -arêtes visibles issues à gauche et celui des arcs de  $Q$ -arêtes visibles issues à droite du  $Q$ -point est connu. De plus, dans le cas où il existe des  $Q$ -arêtes verticales (au maximum 2), CA détermine trivialement pour chacune d'elles est si elle se situe au-dessus ou en-dessous du  $Q$ -point.

Les  $Q$ -arêtes visibles incidentes au  $Q$ -point à sa gauche sont ordonnées de bas vers le haut, et celles qui lui sont incidentes à sa droite, de haut en bas. Suivant ce nouvel ordre où les éventuelles  $Q$ -arêtes verticales sont également intégrées, les  $Q$ -arêtes visibles autour du  $Q$ -point sont ordonnées au sens des aiguilles d'une montre vu de l'extérieur de  $Q$ .

Pour la projection du bord de  $Q$  dont la normale est orientée vers le bas (par rapport à  $Z$ ), cet ordre est inversé.

Soit  $k$  le nombre total d'arcs. En supposant le temps de calcul de l'isolation des racines d'un polynôme (de degré borné) et du raffinement de ces intervalles d'isolation constant, la complexité combinatoire de cette étape est trivialement  $O(k \log k)$ .

## 7.4 Étape 3 : regrouper les $Q$ -arêtes qui bornent une même $Q$ -face visible et les orienter

La troisième étape de CA consiste, d'une part, à regrouper, pour chaque  $Q$ -face visible l'ensemble des  $Q$ -arêtes visibles qui la bornent, et d'autre part, à orienter les  $Q$ -arêtes visibles. Nous commençons ici, dans la section 7.4.1, par expliquer comment CA détermine les  $Q$ -arêtes visibles qui délimitent une  $Q$ -face. La section 7.4.2 décrit, de son côté, comment orienter les  $Q$ -arêtes visibles et comment déterminer les  $Q$ -faces visibles.

### 7.4.1 Regrouper les $Q$ -arêtes

CA effectue deux balayages, celui de la projection des  $Q$ -arêtes visibles qui sont sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$ , et celui de la projection des  $Q$ -arêtes visibles qui sont sur le bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$ . Chacun d'eux balaye, d'une part, l'ensemble des projections sur le plan  $Z = 0$  des  $Q$ -arêtes (sur le bord de  $Q$  supérieur ou inférieur à  $Q_z$ ), celles-ci étant préalablement coupées en leur points extrêmes en  $X$  (voir section 7.3), et d'autre part, la projection de la courbe  $Q \cap Q_z$ , également coupée en ses points extrêmes en  $X$ . Afin de simplifier notre présentation, nous considérons ici les arcs de cette dernière également comme des  $Q$ -arêtes visibles. De plus, nous identifions, comme précédemment,

#### 7.4. *Étape 3 : regrouper les $Q$ -arêtes qui bornent une même $Q$ -face visible et les orienter*

---

toute  $Q$ -arête à sa projection.<sup>6</sup>

L'ensemble des  $Q$ -arêtes balayées est monotone en  $X$ , et d'après le lemme 8, les  $Q$ -arêtes ne se coupent pas deux à deux, excepté éventuellement en leurs extrémités. La droite de balayage est parallèle à l'axe  $Y$  et parcourt l'axe  $X$ . L'algorithme de balayage standard de Bentley-Ottmann [4] (voir également [38], [39], [10]) s'applique, mais comme les  $Q$ -arêtes sont monotones et ne se coupent pas en dehors de leurs extrémités, les seuls événements sont les extrémités des  $Q$ -arêtes (projetées). Cependant, nous maintenons durant le balayage plus d'information que l'algorithme standard. Plus précisément, CA maintient :

- la liste ordonnée des événements en  $X$  qui contient l'ensemble des  $Q$ -points (extrémités en  $X$  des  $Q$ -arêtes visibles) ;
- la liste ordonnée des  $Q$ -arêtes visibles coupées par la droite de balayage (et donc des intervalles formés par elles) ; nous appelons cette liste *liste des intervalles sur  $Y$*  ;
- la liste ordonnée des numéros des  $Q$ -faces coupées par la droite de balayage entre deux  $Q$ -arêtes ; nous nommons cette liste *liste des  $Q$ -faces* ;
- pour chaque (numéro de)  $Q$ -face, la liste des  $Q$ -arêtes visibles connues qui la bornent.

**Liste des événements en  $X$  et liste des intervalles en  $Y$ .** Étant donné que les  $Q$ -arêtes ne se coupent pas sauf éventuellement en leurs extrémités, la liste des événements est invariante. La liste des intervalles sur  $Y$  est également maintenue de manière standard. Notons que, dans la mesure où les  $Q$ -arêtes sont supposées bornées, cette liste est vide au début du balayage, et par conséquent, elle ne nécessite pas d'initialisation. Notons de même, que l'ordre dans lequel les  $Q$ -arêtes visibles sont coupées par la droite de balayage est déduit à partir de l'ordre des  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point, calculé au cours de la deuxième étape de CA.

**Liste des  $Q$ -faces.** Nous distinguons les  $Q$ -arêtes visibles qui se situent à gauche d'un  $Q$ -point de celles qui se situent à sa droite. Nous dirons qu'*une  $Q$ -arête disparaît en un*

---

<sup>6</sup>Notons que la projection de toute  $Q$ -arête verticale (parallèle à l'axe  $Z$ ) est réduite à un point. Cependant, une telle  $Q$ -arête est nécessairement contenue dans  $Q \cap Q_z$ , et par conséquent elle sera prise en considération lors d'étape 4 de CA qui gère la reconnexion des deux projections.

événement lorsqu'elle se situe à sa gauche et qu'une  $Q$ -arête apparaît en un événement lorsqu'elle se situe à sa droite. Ainsi, en un événement il peut y avoir des  $Q$ -arêtes qui disparaissent et des  $Q$ -arêtes qui apparaissent. Leurs nombres respectifs permettent de déterminer le nombre de  $Q$ -faces qui disparaissent et celui des  $Q$ -faces qui apparaissent en l'événement.

Typiquement, si  $l > 0$   $Q$ -arêtes disparaissent, respectivement apparaissent, en un événement, alors le nombre de  $Q$ -faces qui disparaissent (par rapport au sens du balayage), respectivement apparaissent, en l'événement est  $l - 1$ . Un nouveau numéro est associé à chaque  $Q$ -face qui apparaît localement et une liste de  $Q$ -arêtes visibles qui la délimitent est associée à ce numéro. Remarquons qu'il est possible que la droite de balayage coupe une  $Q$ -face en plusieurs intervalles, et que si cette  $Q$ -face est constituée, à gauche de la droite de balayage, de plusieurs composantes connexes, ces composantes correspondent à des numéros distincts de  $Q$ -faces, qui seront « fusionnées » ultérieurement durant le balayage (voir figure 7.1).

Lorsque aucune  $Q$ -arête ne disparaît en un événement, au moins deux  $Q$ -arêtes apparaissent en l'événement. Soit  $l$  leur nombre. L'intervalle de la liste des intervalles sur  $Y$ , dans lequel l'événement apparaît, est séparé après l'événement en deux par ces  $Q$ -arêtes, et donc par les  $l - 1$  nouveaux intervalles. Dans la liste des  $Q$ -faces, le numéro de la  $Q$ -face qui a été séparée en deux est conservé dans les deux intervalles qui lui sont associés. Figure 7.4 illustre ce cas.

De même, si aucune  $Q$ -arête n'apparaît en un événement, alors au moins deux  $Q$ -arêtes disparaissent en cet événement. Il existe donc au moins un intervalle qui disparaît en cet événement, et possiblement un ensemble d'intervalles d'union connexe. Les deux intervalles incidents à cette union fusionnent en l'événement. Il est possible que les numéros des deux  $Q$ -faces correspondant aux deux intervalles qui fusionnent soient différents (voir figure 7.1). En effet, dans la liste des  $Q$ -faces, ceux-ci correspondent aux numéros des  $Q$ -faces connues au cours du balayage. Ainsi, lorsque deux  $Q$ -faces fusionnent, leurs numéros et la liste des  $Q$ -arêtes qui les délimitent doivent être mis à jour.

7.4. Étape 3 : regrouper les  $Q$ -arêtes qui bornent une même  $Q$ -face visible et les orienter

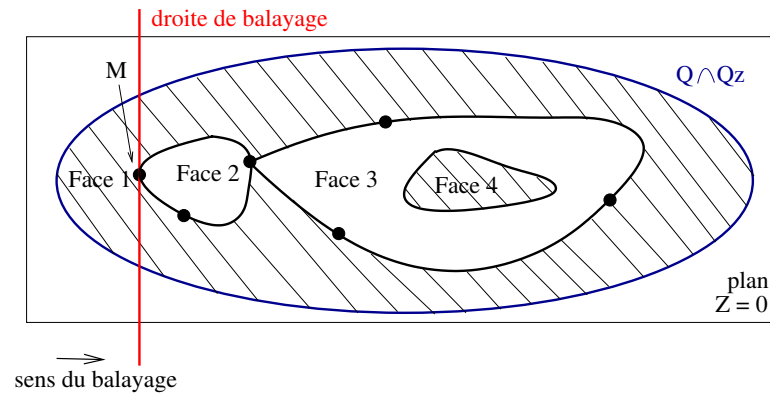


FIG. 7.4 – Cette figure illustre, pour une quadrique  $Q$ , la projection sur le plan  $Z = 0$  des  $Q$ -arêtes visibles délimitant quatre  $Q$ -faces dans  $Q \cap Q_z$ . À l'événement  $M$ , l'intervalle associé à la  $Q$ -face 1 est séparé en deux intervalles qui conservent le même numéro de  $Q$ -face.

**Listes des  $Q$ -arêtes visibles par numéro de  $Q$ -face.** Afin de décrire les  $Q$ -faces, CA stocke dans un tableau  $T$  au fur et à mesure de l'avancement du balayage, pour chaque numéro de  $Q$ -face, la liste des  $Q$ -arêtes visibles qui la délimitent. Le nombre d'entrées de ce tableau est majoré par le nombre de  $Q$ -arêtes divisé par deux. En dehors de la fusion, la gestion de ces listes est triviale. Lors de la fusion de deux  $Q$ -faces, les listes des  $Q$ -arêtes visibles qui les délimitent doivent également être fusionnées. Afin d'éviter de copier à plusieurs reprises des listes de  $Q$ -arêtes et de gérer chaque événement du balayage en temps logarithmique en le nombre d'arêtes, CA procède comme suit.

CA enregistre dans le tableau  $T$ , pour chaque numéro de  $Q$ -face, un nombre et la liste chaînée des  $Q$ -arêtes visibles qui la délimitent, représentée par un pointeur vers la première  $Q$ -arête de la liste, et un autre pointeur vers la dernière  $Q$ -arête de la liste. Le nombre est soit  $-1$ , ce qui indique que l'entrée considérée de  $T$  est d'indice le numéro de la  $Q$ -face courante et que la liste de  $Q$ -arêtes qui lui est associée est stockée dans cette entrée, soit il correspond à l'indice de l'entrée de  $T$  associée au numéro de la  $Q$ -face courante après la dernière mise à jour, et contenant la liste chaînée de  $Q$ -arêtes qui la délimitent après la fusion. Dans le second cas, la liste stockée dans l'entrée considérée de  $T$  est vide.

Lorsque CA procède à une fusion de deux  $Q$ -faces  $i$  et  $j$ , trois cas se présentent : celui

où les deux nombres associés, l'un à  $T[i]$  et l'autre à  $T[j]$ , sont égaux à  $-1$ , celui où ils sont tous les deux différents de  $-1$ , et celui où seul l'un des deux nombres est égal à  $-1$ . Soit  $i < j$ .

Dans le premier cas, les  $Q$ -faces fusionnées prennent le numéro  $i$ . CA fusionne les listes  $T[i]$  et  $T[j]$  en reliant la dernière  $Q$ -arête de  $T[i]$  à la première  $Q$ -arête de  $T[j]$ , en gardant le pointeur de la première  $Q$ -arête de la nouvelle liste de  $T[i]$  vers la première  $Q$ -arête de  $T[i]$ , en associant le pointeur de la dernière  $Q$ -arête de la nouvelle liste de  $T[i]$  à la dernière  $Q$ -arête de la liste  $T[j]$ , et en remplaçant, dans  $T[j]$ , le nombre  $-1$  par  $i$ . Les deux pointeurs de la liste de  $T[j]$  sont associés à NULL.

Dans le deuxième cas, les  $Q$ -faces dont les numéros correspondent aux nombres de  $T[i]$  et  $T[j]$  sont fusionnées comme dans le cas précédent. Soient  $k$  et  $l$  respectivement les nombres de  $T[i]$  et de  $T[j]$ . Supposons que  $k < l$ . CA fusionne les listes  $T[k]$  et  $T[l]$  en reliant la dernière  $Q$ -arête de  $T[k]$  à la première  $Q$ -arête de  $T[l]$ , en gardant le pointeur de la première  $Q$ -arête de la nouvelle liste de  $T[k]$  vers la première  $Q$ -arête de  $T[k]$ , en associant le pointeur de la dernière  $Q$ -arête de la nouvelle liste de  $T[k]$  à la dernière  $Q$ -arête de la liste  $T[l]$ , et en remplaçant, dans  $T[l]$ , le nombre  $-1$  par  $k$ . Les deux pointeurs de la liste de  $T[l]$  sont associés à NULL. Le seul changement supplémentaire est le remplacement de  $l$  par  $k$  dans  $T[j]$ .

Enfin, le dernier cas consiste à fusionner deux  $Q$ -faces dont seule l'une est issue d'une fusion précédente de deux  $Q$ -faces. Ce cas est facilement traité à partir des deux autres cas.

La structure de données adoptée ici permet d'effectuer chaque fusion en temps constant, en reliant le dernier élément d'une liste au premier élément d'une autre liste, en modifiant les éléments associés à trois pointeurs, et en remplaçant un ou deux nombres par d'autres nombres. Par conséquent, les mises à jour, que les fusions entre  $Q$ -faces nécessitent, de leurs numéros et des listes des  $Q$ -arêtes qui les délimitent n'ont pas d'impact sur la complexité standard du balayage.

### 7.4.2 Déterminer les $Q$ -faces visibles et orienter les $Q$ -arêtes visibles

Nous avons expliqué dans la section précédente la manière dont CA regroupe, pour toute  $Q$ -face sur le bord de  $Q$  supérieur ou inférieur à  $Q_z$ , l'ensemble des  $Q$ -arêtes visibles qui la délimitent. Dans la présente section, nous montrons comment déterminer lesquelles de ces  $Q$ -faces sont visibles et comment orienter les  $Q$ -arêtes visibles en fonction de la nature (visible ou non) des deux  $Q$ -faces qu'elles séparent.

**Déterminer les  $Q$ -faces visibles.** Supposons d'abord que l'on sait si la première  $Q$ -face rencontrée (ou les premières  $Q$ -faces rencontrées) durant le balayage est visible. Le degré de visibilité des  $Q$ -arêtes qui la délimitent permet de déduire la nature (visible ou non) des  $Q$ -faces qui lui sont voisines. En particulier, si une de ces  $Q$ -arêtes est de degré de visibilité 1, alors la  $Q$ -face voisine qu'elle délimite n'est pas de même nature. Si, par contre, elle est de degré de visibilité 2, alors la  $Q$ -face voisine qu'elle délimite est de même nature. La nature de toutes les  $Q$ -faces restantes est déduite progressivement, de la même manière. Par conséquent, il suffit de déterminer si la  $Q$ -face (ou les  $Q$ -faces) qui apparaît au premier  $Q$ -point rencontré au cours du balayage est visible. La nature (visible ou non) des  $Q$ -faces restantes est déduite progressivement au fur et à mesure de l'avancement du balayage.

Pour déterminer si la  $Q$ -face (ou les  $Q$ -faces) qui apparaît au premier  $Q$ -point rencontré au cours du balayage est visible, CA vérifie d'abord si la courbe  $Q \cap Q_z$  est finie. Si ce n'est pas le cas, comme le modèle CSG est borné, la première  $Q$ -face balayée n'est pas sur le bord du modèle CSG. De son côté, si la courbe  $Q \cap Q_z$  est finie, deux sous-cas sont envisagés : soit le premier  $Q$ -point de  $Q \cap Q_z$  rencontré au cours du balayage n'est pas sur une  $Q$ -arête visible du modèle BRep, soit il est sur une  $Q$ -arête visible du modèle BRep.

Dans le premier sous-cas, CA applique à une parmi les deux  $Q$ -arêtes de  $Q \cap Q_z$ , dont le premier  $Q$ -point de  $Q \cap Q_z$  est extrémité, une évaluation approfondie afin de déterminer si elle, et donc si la première  $Q$ -face rencontrée au cours du balayage, se situe sur le bord du modèle CSG. Dans le second sous-cas, il est nécessaire de considérer un point qui se situe sur une  $Q$ -face entre le premier  $Q$ -point de  $Q \cap Q_z$  et l'événement suivant. Dans



cet objectif, un plan orthogonal à l'axe  $X$  est généré entre ces deux événements. Son intersection avec  $Q$  est calculée par QI et ces points d'intersection avec les autres courbes d'intersection sur  $Q$  sont déterminés par Q3. CA considère une des arêtes ainsi formées et lui applique une évaluation approfondie. Le secteur angulaire indique si la  $Q$ -face qu'il représente se situe sur le bord du modèle CSG. Ce résultat permet de déduire, pour toutes les  $Q$ -faces entre le premier et le second événement, lesquelles sont visibles.

**Orienter les  $Q$ -arêtes visibles.** Lorsque CA détermine les  $Q$ -faces visibles, il oriente, en parallèle, les  $Q$ -arêtes visibles du modèle BRep. Ces dernières sont orientées au passage de l'événement où elles apparaissent.

Notons que l'orientation d'une même  $Q$ -arête visible diffère selon qu'elle soit située sur le bord de  $Q$  supérieur ou inférieur à  $Q_z$ . Ceci est dû à la convention que nous avons adoptée, selon laquelle la face que les  $Q$ -arêtes bornent, observée d'un point de vue extérieur à  $Q$ , se situe à gauche par rapport à leur orientation. Ainsi, nous considérons, dans le paragraphe qui suit seules les  $Q$ -arêtes visibles situées sur le bord de  $Q$  supérieur à  $Q_z$ . Pour celles, situées sur le bord de  $Q$  inférieur à  $Q_z$ , l'orientation se fait dans le sens opposé.

Le principe de l'orientation est basé sur l'ordre vertical (par rapport à l'axe  $Y$ ) et la nature, visible ou non, des  $Q$ -faces que la  $Q$ -arête délimite. Typiquement, lorsque la  $Q$ -face qui se situe au-dessus d'une  $Q$ -arête existe et elle est visible, cette  $Q$ -arête est orientée de l'événement où elle apparaît vers l'événement où elle disparaît. Inversement, lorsque la  $Q$ -face qui se situe en-dessous d'une  $Q$ -arête existe et elle est visible, elle est orientée de l'événement où elle disparaît vers l'événement où elle apparaît. Naturellement, il est possible que les deux  $Q$ -faces qu'une  $Q$ -arête délimite soient visibles. C'est le cas des  $Q$ -arêtes visibles de degré de visibilité 2 qui ont été identifiées par VE.

## 7.5 Complexité et taille de sortie de CA

Cette section présente la complexité de CA dans le pire des cas ainsi que la taille de sa sortie en fonction de la taille d'entrée. Rappelons que cette dernière est  $O(m) = O(n^3)$ ,

où  $m$  est le nombre total de points d'intersection trouvés par Q3. Afin de détailler le calcul de la complexité totale de CA, les paragraphes qui suivent donnent la complexité par quadrique de chacune des cinq étapes de CA séparément.

1. Étape 1 (projection). Le temps de projection d'une  $Q$ -arête est constant. Chaque quadrique contient  $O(n^2)$   $Q$ -arêtes visibles. Par conséquent, le temps de calcul dans le pire des cas de cette étape par quadrique revient à  $O(n^2)$ .
2. Étape 2 (ordonner les  $Q$ -arêtes visibles autour de chaque  $Q$ -point). Rappelons que toutes les  $Q$ -arêtes visibles sont coupées en leurs points extrêmes en  $X$  ce qui augmente le nombre de  $Q$ -points et de  $Q$ -arêtes. Cependant, comme une  $Q$ -arête est coupée un nombre constant de fois, ce nombre reste  $O(n^2)$ . Ces  $Q$ -points sont ordonnés par rapport à l'axe  $X$ . Leur nombre étant  $O(n^2)$ , ceci nécessite un temps de calcul en  $O(n^2 \log n)$ . Ensuite, les  $Q$ -arêtes incidentes à un  $Q$ -point sont coupées par deux droites (une pour celles qui se situent à sa gauche, et une autre pour celles qui se situent à sa droite). Au total, chaque  $Q$ -arête est coupée deux fois. Ainsi, la complexité ici est égale au nombre de  $Q$ -arêtes, c'est-à-dire  $O(n^2)$ . Enfin, les  $Q$ -arêtes incidentes à un  $Q$ -point sont ordonnées par rapport à l'axe  $Y$ . En supposant que le  $k_i$ -ème  $Q$ -point est extrémité de  $k_i$   $Q$ -arêtes visibles, le temps de calcul nécessaire pour ce  $Q$ -point est  $O(k_i \log(k_i))$ , et celui nécessaire pour l'ensemble des  $Q$ -points est  $O(n^2 \log n)$ . Il se trouve donc que la complexité de cette étape par quadrique dans le pire des cas est  $O(n^2 \log n)$ .
3. Étape 3 (regrouper les  $Q$ -arêtes visibles qui bornent une même  $Q$ -face visible et les orienter). Au cours du balayage, l'opération la plus coûteuse lors du passage à un nouvel événement, est la fusion entre deux  $Q$ -faces visibles. Or, nous avons montré dans la section 7.4.1 que chaque fusion est effectuée en temps constant. Par conséquent, la complexité de cette étape revient à la complexité du balayage standard en fonction du nombre de  $Q$ -points et de  $Q$ -arêtes, qui est  $O(n^2 \log n)$  par quadrique.
4. Étape 4 (reconnexion des projections). La reconnexion des projections s'effectue trivialement en temps constant par  $Q$ -point. Comme les  $Q$ -points concernés sont

ceux de  $Q \cap Q_z$ , et comme  $Q \cap Q_z$  peut être coupé par au maximum  $n$  courbes d'intersection entre  $Q$  et les autres quadriques du modèle CSG, le nombre de ces  $Q$ -points par quadrique est  $O(n)$ . Ainsi, la complexité de cette étape s'élève à  $O(n)$  par quadrique.

5. Étape 5 (déterminer les  $Q$ -chaînes visibles). Étant donné que les  $Q$ -chaînes visibles sont déterminées par l'intermédiaire d'un parcours des  $Q$ -arêtes visibles, le temps de calcul dans le pire des cas de cette étape revient à  $O(n^2)$  par quadrique.

Pour conclure, la complexité dans le pire des cas par quadrique de CA est  $O(n^2 \log n)$ . Ainsi, sa complexité totale dans le pire des cas est de l'ordre de  $O(n^3 \log n) = O(m \log n)$ .

Enfin, la taille de sortie de CA correspond au nombre de  $Q$ -faces visibles, le nombre de  $Q$ -chaînes visibles et le nombre de  $Q$ -arêtes visibles. L'ensemble de ces éléments est de taille  $O(n^2)$  par quadrique, et donc  $O(m) = O(n^3)$  au total, ce qui est égal à la taille d'entrée de CA.

## 7.6 Conclusion

L'algorithme CA, que nous avons décrit dans ce chapitre, assemble les  $Q$ -arêtes visibles obtenues par VE en fonction des  $Q$ -faces visibles qu'elles délimitent, les oriente et les parcourt de façon à ce que chaque ensemble obtenu décrive une  $Q$ -face visible selon la convention que, observée d'un point de vue extérieur à  $Q$ , celle-ci se situe à gauche par rapport à leur orientation. Ainsi, CA résout la dernière étape de notre algorithme de conversion CSG-BRep qui consiste, d'une part, à constituer, pour toute quadrique, chaque chaîne de segments qui délimite une face sur elle, et d'autre part, à regrouper, pour tout carreau final d'une quadrique, les différentes chaînes de segments qui le bornent.

Nous avons également montré que la complexité de CA dans le pire des cas est  $O(n^3 \log n)$  et que sa taille de sortie est  $O(m) = O(n^3)$ , où  $m$  est le nombre total de points d'intersection trouvés par Q3. Sachant que l'entrée de CA consiste en  $O(n^3)$  segments de courbe, et qu'à sa sortie CA les a orientés d'après notre convention et présente, pour toute quadrique du modèle CSG, l'ensemble des  $Q$ -chaînes formées par ceux qui bornent une même face sur elle, ceci est un résultat quasi-optimal.

Nous allons, dans le chapitre suivant, présenter brièvement l'implantation partielle que nous avons effectuée au cours de notre travail, ainsi que les résultats expérimentaux obtenus sur quelques exemples.



# Chapitre 8

## Implantation et résultats expérimentaux

Ce chapitre présente les travaux d'implantation et les résultats expérimentaux réalisés durant cette thèse.

### 8.1 Implantation

Au cours du travail de thèse, nous avons commencé à implanter notre algorithme. Une implantation partielle a été réalisée. Elle trouve, pour toute quadrique du modèle CSG, les arêtes exprimées de façon rationnelle qui délimitent une face sur cette quadrique. Quelques résultats d'expérimentation de cette implantation sont présentés dans la section 8.4.

Dans la suite Q3 fait référence à la deuxième étape de notre algorithme, qui consiste à calculer le graphe d'adjacence de l'arrangement des quadriques du modèle CSG.

Notre algorithme de conversion CSG-BRep comprend QI, Q3, VE et CA. L'implantation de QI a été intégrée. Celle-ci a été réalisée en langage C++ et consiste en environ 20 000 lignes de code. Lorsque nous avons commencé à programmer notre algorithme, l'implantation de Q3 effectuée par L. Dupont, M. Hemmer, S. Petitjean et E. Schömer [12] n'était pas encore disponible, et nous avons entamé une implantation parallèle en C++ qui fonctionne pour les composantes de paramétrage à coefficients rationnels<sup>7</sup> (voir

---

<sup>7</sup>incluant les quartiques lisses dont le paramétrage (non rationnel) est à coefficients rationnels

les deux paragraphes qui suivent). Nous avons également effectué une implantation de VE qui fonctionne pour tous les cas, sauf celui où la quadrique considérée est une paire de plans et les arêtes sont sur sa droite singulière. L'amélioration de VE, décrite dans le chapitre 6, n'a pas été prise en compte ici. L'implantation de Q3 et de VE a été faite en C++ et compte approximativement 3 500 lignes de code. Nous n'avons pas, pour le moment, procédé à une implantation de CA.

Comme il a été souligné dans le chapitre 3, du point de vue de la complexité algébrique les paramétrages issus de QI peuvent contenir une ou deux racines carrées dans leurs coefficients. Étant donné que nous avons voulu d'abord implanter et tester l'ensemble de notre algorithme pour le cas simple où les composantes sont de paramétrage à coefficients rationnels, nous n'avions pas prévu dans notre algorithme de conversion de structures de données spécifiques pour le cas des composantes de paramétrage à coefficients non rationnels, ces structures de données spécifiques étant nécessaires pour procéder au calcul de leurs points d'intersection avec les quadriques. Typiquement, si par exemple le paramétrage correspond à  $P_1 + \sqrt{N}P_2$  où  $P_1$  et  $P_2$  sont deux vecteurs de polynômes et  $N$  est un nombre, alors l'algorithme le stocke par le vecteur  $(P_1, P_2, N)$ . À titre indicatif, dans l'Exemple 4 du chapitre 3, pour le paramétrage obtenu  $P_1 = (429v, 0, -u, 0)$ ,  $N = 429$  et  $P_2 = (0, 60v, 0, 20v)$ .

Les tests préliminaires effectués sur notre implantation (Q3 et VE) ayant donné les résultats attendus (cf. la section 8.2), il était naturel de compléter notre implantation de Q3 aux composantes de paramétrage à coefficients non rationnels. Ceci coïncide avec le moment de sortie de Q3 implantée par L. Dupont, M. Hemmer, S. Petitjean et E. Schömer dans le cadre de la plateforme EXACUS<sup>8</sup> (Efficient and Exact Algorithms for Curves and Surfaces). Toutefois, celle-ci ne nous a pas avancés, car le temps nécessaire pour adapter et connecter notre implantation de VE à celle de Q3 effectuée par L. Dupont, M. Hemmer, S. Petitjean et E. Schömer aurait probablement été équivalent au temps nécessaire pour étendre notre implantation de Q3 aux composantes de paramétrage à coefficients non rationnels. Enfin, nous avons préféré nous concentrer sur l'implantation de VE, qui n'a présenté aucun obstacle particulier, et la suite théorique de notre algorithme, CA, qui

---

<sup>8</sup><http://www.mpi-inf.mpg.de/projects/exacus>

n'était pas à ce moment encore finie.

Dans la suite de cette section, nous décrivons les bibliothèques et logiciels intégrés dans notre implantation. Ceux-ci sont : GMP pour la manipulation d'entiers de taille arbitraire, LiDIA pour les structures mathématiques, FGb/RS pour la résolution de systèmes polynomiaux, MPFR et MPFI pour la manipulation de nombres flottants de taille arbitraire et d'intervalles constitués à partir de tels nombres, et enfin Boolstuff pour la structure et la manipulation de l'arbre CSG.

La figure 8.1 illustre le lien qui existe entre certains de ces bibliothèques et logiciels. En particulier LiDIA et MPFR s'appuient sur GMP, MPFI utilise MPFR, et RS repose à la fois sur GMP et MPFI. Enfin, Boolstuff est une bibliothèque indépendante par rapport aux précédentes. Les caractéristiques principales de chacune de ces bibliothèques ainsi que leur application dans notre algorithme sont détaillées dans les paragraphes suivants.

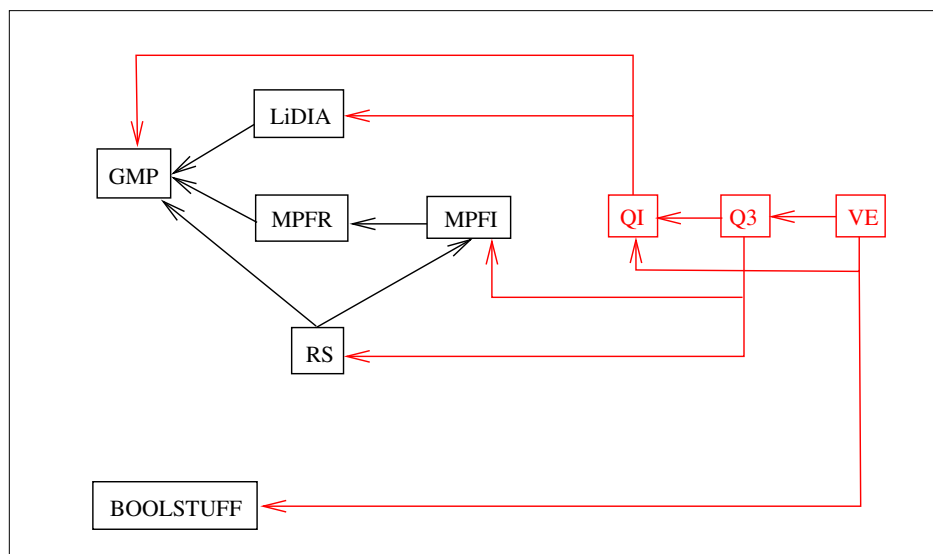


FIG. 8.1 – Lien entre les différentes bibliothèques.

### 8.1.1 GMP

GMP<sup>9</sup> est une parmi les deux bibliothèques intégrées dans notre algorithme de conversion CSG-BRep au niveau de QI. Tous les calculs de base sur nombres entiers effectués

<sup>9</sup><http://gmplib.org>



dans QI y font appel. Il s'agit d'une bibliothèque qui génère des nombres entiers, rationnels et flottants de taille arbitraire et gère des opérations arithmétiques et logiques dessus. QI fait appel notamment aux opérations de GMP d'addition, soustraction, multiplication, division, puissance, racine, comparaison de nombres entiers de taille arbitraire, ainsi qu'aux calculs de PGCD ou de PPCM de tels nombres.

### 8.1.2 LiDIA

LiDIA<sup>10</sup> est une bibliothèque de théorie des nombres qui s'appuie sur une bibliothèque d'entiers de taille arbitraire. Dans le cas de notre algorithme elle s'appuie sur GMP et joue le rôle d'interface pour son utilisation. De plus LiDIA fournit en elle-même certains types de données mathématiques (dont des vecteurs, des matrices et des polynômes) ainsi que des fonctions efficaces pour les traiter.

Dans notre algorithme LiDIA est à l'origine de la majorité des structures de données utilisées : vecteurs, matrices, polynômes. Typiquement chaque point dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  ou  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  est exprimé comme vecteur, chaque quadrique est représentée par une matrice obtenue à partir des coefficients de son équation implicite, et chaque intersection entre trois quadriques distinctes dans Q3 est obtenue par l'intermédiaire de résolution de polynômes (voir chapitre 4). Différentes opérations de LiDIA sont appliquées à ces données dont multiplication de matrices, calcul du déterminant d'une matrice, extraction de sous-matrices, calcul du GCD d'un polynôme, factorisation d'entiers, extraction de facteurs entiers.

### 8.1.3 MPFR/MPFI

À partir de la deuxième étape de notre algorithme (Q3), dans le cadre des intersections entre trois quadriques volumiques, notre algorithme nécessite l'utilisation de nombres flottants de taille arbitraire et pour cela il recourt à la bibliothèque MPFR<sup>11</sup>. Celle-ci est conçue en langage C pour les calculs d'arithmétique à base de nombres flottants de taille arbitraire. Pareillement à LiDIA elle est basée sur GMP. MPFR permet notamment d'ef-

---

<sup>10</sup><http://www.cdc.informatik.tu-darmstadt.de/TI/LiDIA>

<sup>11</sup><http://www.mpfr.org>

fectuer des opérations comme addition, soustraction, multiplication, division, puissance, comparaison et arrondi de nombres flottants de taille arbitraire.

Ici, la notion de précision indique le nombre d'octets utilisés pour représenter la mantisse d'un nombre flottant. Elle peut être fixée par l'utilisateur. Il est possible que le résultat d'une opération sur des nombres flottants ne puisse pas être représenté de façon exacte dans la mantisse qui lui est destinée. Dans ce genre de situations MPFR fournit un arrondi correct du résultat.

Rappelons que les points d'intersection entre trois quadriques volumiques sont exprimés par des intervalles d'isolation (cf. chapitre 4). Ces intervalles d'isolation sont exprimés par l'intermédiaire de MPFI<sup>12</sup>, une bibliothèque en C destinée au calcul d'arithmétique par intervalles à précision arbitraire. Dans MPFI un intervalle est représenté par les valeurs de ses extrémités qui sont des nombres flottants définis sur MPFR. Ils sont supposés avoir la même précision.

#### 8.1.4 FGb/RS

Les intervalles d'isolation dans  $\mathbb{Q}^3$  sont trouvés avec l'aide de deux logiciels, FGb et RS. FGb<sup>13</sup> est destiné au calcul d'une base de Gröbner d'un système polynomial. RS<sup>14</sup> procède de son côté à l'isolation des racines réelles de polynômes ou de systèmes de polynômes à une variable et à coefficients entiers. Pour les calculs arithmétiques il s'appuie sur GMP, et pour exprimer l'isolation des racines il utilise MPFI.

Concrètement, FGb transforme un système de polynômes en une base Gröbner, et RS calcule les solutions de ce système en calculant une « Représentation Univariée Rationnelle » (RUR) dont les solutions sont isolées à l'aide de l'algorithme de Descartes. Les racines du système de départ sont ainsi calculées sous forme d'intervalles d'isolation en garantissant que toute boîte d'isolation contient une unique racine réelle du système.

Dans  $\mathbb{Q}^3$ , RS permet également de détecter parmi les points d'intersection sur une même composante ceux qui coïncident. En effet il peut évaluer une parmi les racines d'un

<sup>12</sup>[http://perso.ens-lyon.fr/nathalie.revol/mpfi\\_toc.html](http://perso.ens-lyon.fr/nathalie.revol/mpfi_toc.html)

<sup>13</sup><http://fgbrs.lip6.fr/jcf/Software/FGb/index.html>

<sup>14</sup><http://fgbrs.lip6.fr/~rouillie/Software/RS>

polynôme à une variable en un autre polynôme à une variable. Ainsi, si par exemple le résultat de cette évaluation est égal à 0, alors cette racine est commune aux deux polynômes. Lorsque c'est le cas pour deux polynômes à une variable qui représentent les points d'intersection d'une même composante avec deux quadriques volumiques distinctes ceci implique que les points d'intersection correspondant à cette racine pour chacun de deux polynômes sont identiques.

Afin d'illustrer l'application de FGb et RS à notre algorithme par un exemple, rappelons qu'à sa sortie VE déduit pour toute quadrique l'ensemble des segments de courbe qui bornent au moins une face sur elle. Pour chacun de ces segments, il calcule également le nombre de telles faces. Dans le cas de la figure du cavalier, pour la quadrique numérotée 1 et la courbe d'intersection de l'exemple 3 du chapitre 3, BE affiche un segment par composante :

```
composante [25*v, - 74*v, - u, - 20*v] :  
[[-1.0201e1,-1.0199e1],[1.0199e1,1.0201e1]] -> 1 face  
composante [25*v, 74*v, - u, 20*v] :  
[[-1.0201e1,-1.0199e1],[1.0199e1,1.0201e1]] -> 1 face.
```

Le segment est représenté par ses extrémités en fonction du paramètre projectif de la courbe d'intersection. Ses extrémités sont, quant à elles, exprimées par deux intervalles d'isolation, calculés dans Q3 par l'intermédiaire de FGb et RS.

### 8.1.5 Boolstuff

À l'entrée de notre algorithme, l'arbre CSG est représenté par une expression textuelle booléenne. Dans le cas de la figure du cavalier (cf. figure 8.3) celle-ci est constituée par la chaîne de caractères :

```
(0&1&2&3&4&5) | (6&7&8) | (9&10&11&1&13) | ((14&15)&16) | 17 | (18&19) | (20&21) .
```

Ici, un nombre désigne une quadrique volumique en particulier, et correspond à une feuille. Les signes &, | et ! représentent respectivement les opérateurs des nœuds internes intersection, union ou complément. De leur côté, les parenthèses séparent les branches de l'arbre.

Notons que cette expression booléenne nous est communiquée par un modèleur. De ce fait nous ne maîtrisons pas sa structure, et notamment les redondances qu'elle peut contenir (par exemple une même quadrique volumique qui y apparaît plus d'une fois). Dans VE, elle est stockée sous forme d'un arbre binaire par l'intermédiaire d'une classe de BoolStuff qui a été adaptée à notre problème.

Boolstuff<sup>15</sup> est une bibliothèque en C++ qui fournit un certain nombre d'opérations pour les arbres binaires d'expressions booléennes. En particulier Boolstuff peut transformer une expression booléenne formulée par des opérateurs AND, OR, NOT et de parenthèses en une expression booléenne d'arbre binaire en forme normale disjonctive, c'est-à-dire sous forme de disjonction (séquence de OR), dont chaque ensemble est une conjonction (AND) de littéraux (caractère ou bien négation de caractère). Une fois cette nouvelle expression obtenue, Boolstuff peut procéder à la construction de son arbre binaire.

## 8.2 Résultats expérimentaux

Cette section présente quelques résultats des tests effectués sur notre implantation. Ces tests ont été réalisés sur un DELL Mobile Intel(R) Pentium(R)4 - M CPU 2,20 GHz. La compilation a été faite avec g++.

Nous présentons ici quatre des scènes traitées (voir figures 8.2, 8.3, 8.4 et 8.5). Le tableau 8.1 résume, pour toute scène prise séparément, d'une part, le temps d'exécution de chacune des étapes de l'algorithme, Q1, Q3, et VE, et d'autre part le nombre de composantes avec et sans racines, le nombre de polynômes résolus et le nombre de leurs racines réelles.

Il est clair, d'après le tableau 8.1, que le temps d'exécution nécessaire pour VE dépasse largement celui nécessaire pour les autres étapes de notre algorithme. Cela ne paraît pas en désaccord avec le fait que, l'amélioration de VE, décrite dans le chapitre 6, n'a pas été prise en compte dans son implantation, et que, pour chaque quadrique, le nombre d'arêtes à évaluer est de l'ordre du nombre de sommets (points d'intersection entre courbes) sur

---

<sup>15</sup><http://perso.b2b2c.ca/sarrazip/dev/boolstuff.html>

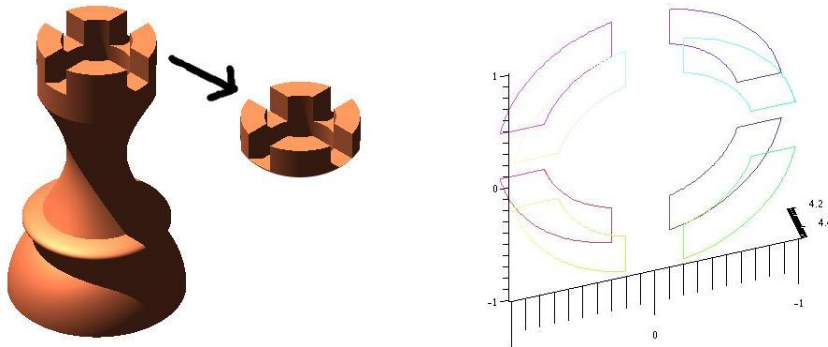


FIG. 8.2 – À gauche, le modèle CSG de la « couronne » de la tour d'un jeu d'échecs, visualisé par la technique du lancer de rayons, à droite l'ensemble des arêtes exprimées de façon rationnelle qui délimitent une face sur au moins une des quadriques constituant le modèle.

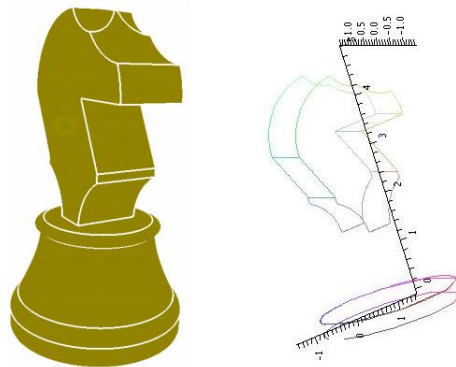


FIG. 8.3 – À gauche, le modèle CSG du cavalier d'un jeu d'échecs, visualisé par la technique du lancer de rayons, à droite l'ensemble des arêtes exprimées de façon rationnelle qui délimitent une face sur au moins une des quadriques constituant le modèle.

cette quadrique. En effet, ceci implique une évaluation, probablement approfondie, pour chaque arête, ce qui revient à appliquer Q1 et Q3 localement à chaque arête. Tout de même, il est possible que ceci soit également dû à un problème de programmation dont l'efficacité reste à améliorer.

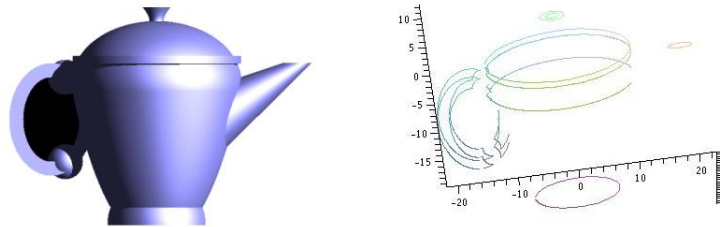


FIG. 8.4 – À gauche, le modèle CSG d'une théière, visualisé par la technique du lancer de rayons, à droite l'ensemble des arêtes exprimées de façon rationnelle qui délimitent une face sur au moins une des quadriques constituant le modèle.

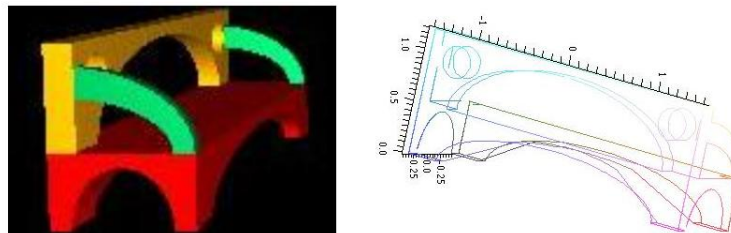


FIG. 8.5 – À gauche, le modèle CSG d'un banc, visualisé par la technique du lancer de rayons, à droite l'ensemble des arêtes exprimées de façon rationnelle qui délimitent une face sur au moins une des quadriques constituant le modèle.

	« couronne » de la tour ( 8.2)	cavalier ( 8.3)	théière ( 8.4)	banc ( 8.5)
temps total d'exécution	510 msec	7 sec 410 msec	4 sec 760 msec	13 sec 450 msec
QI	40 msec	660 msec	570 msec	640 msec
Q3	30 msec	2 sec 70msec	870 msec	1 sec 240 msec
VE	440 msec	4 sec 680 msec	3 sec 320 msec	11 sec 570 msec
nombre total de composantes algébriques	32	261	178	183
composantes avec des racines	16	83	70	56
composantes sans racines	16	178	108	127
quartiques lisses avec des racines	0	11	20	16
autres composantes avec des racines	16	72	50	40
quartiques lisses sans racines	0	3	3	1
autres composantes sans racines	16	175	105	126
nombre de polynômes résolus pour les quartiques lisses	0	60	48	19
nombre de leurs racines réelles	0	93	42	21
nombre de polynômes résolus pour les autres composantes	48	3199	1612	2070
nombre de leurs racines réelles	88	2250	947	1494

TAB. 8.1 – Tableau montrant nos résultats expérimentaux sur les quatre scènes illustrées par les figures 8.2, 8.3, 8.4 et 8.5.

# Chapitre 9

## Conclusion

Ce chapitre a pour objet de résumer les résultats obtenus au cours de cette thèse, de les comparer avec l'état de l'art, et de donner quelques éventuelles directions futures de recherche.

### 9.1 Résultats de la thèse

Dans notre travail de thèse, nous avons conçu un algorithme de conversion CSG-BRep pour des scènes définies par des quadriques. Notre algorithme est robuste. En effet, il repose sur le calcul symbolique et les constructions qu'il définit sont exactes, et de plus, il traite l'ensemble des cas possibles. Il s'agit d'une conversion CSG-BRep non-incrémentale.

Notre algorithme consiste en quatre étapes décrites dans ce manuscrit :

1. le calcul des courbes d'intersection entre primitives (QI) ;
2. la segmentation des courbes obtenues par leurs points d'intersection (Q3) ;
3. le classement des segments de courbe par rapport au modèle CSG afin de sélectionner ceux qui forment les arêtes du modèle BRep correspondant (VE) ;
4. l'orientation et l'assemblage des segments sélectionnés en chaînes de segments, et groupes de telles chaînes, qui délimitent une même face de la scène (CA) ;

Les deux premières étapes sont résolues grâce à deux algorithmes que nous avons



intégrés dans notre travail : QI<sup>16</sup> qui calcule les courbes d'intersection entre quadriques sous forme paramétrique [11, 13, 14, 15, 33], et un autre algorithme que nous avons appelé Q3, qui calcule et ordonne les points d'intersection de chaque courbe avec les autres quadriques afin d'obtenir les segments de courbes à classer [12]. Les trois étapes restantes sont traitées par les algorithmes que nous avons conçus : VE (Visible Edges) pour la troisième étape, et CA (Chains Assembling) pour la dernière étape.

En entrée, chaque quadrique est donnée par son équation implicite. De son côté, l'arbre CSG est représenté par une expression booléenne. À la sortie, l'algorithme décrit, pour chacune des quadriques, l'ensemble des faces du modèle BRep qu'elle contient. Sur une quadrique donnée, chaque face est déterminée par l'ensemble des arêtes qui la délimitent assemblées en chaînes et orientées selon la convention que, observée d'un point de vue extérieur de la quadrique, cette face se situe à gauche par rapport à leur orientation. Toute arête est calculée comme un segment sur la courbe d'intersection entre au moins deux quadriques, donnée sous forme paramétrique dans l'espace des paramètres d'une quadrique. Ses extrémités sont, quant à elles, exprimées par deux intervalles d'isolation.

Parmi les deux algorithmes que nous avons conçus pour résoudre les deux dernières étapes de notre algorithme de conversion CSG-BRep, VE est basé sur la notion de secteur angulaire que nous avons définie dans le chapitre 5, et CA, de son côté utilise des techniques standard, comme projection et balayage, que nous appliquons aux résultats obtenus par VE. Globalement, le secteur angulaire représente le volume autour d'un segment au voisinage d'une quadrique donnée, et après parcours de l'arbre CSG, exprime sa position (intérieur, extérieur ou sur la surface) par rapport au modèle CSG, ce qui permet de conclure si ce segment délimite bien une face sur cette quadrique.

Du point de vue de la complexité, nous avons tenté de réduire le temps de calcul, d'une part en intégrant des algorithmes efficaces, QI et Q3, et d'autre part en effectuant une mise à jour dans VE qui accélère les calculs déterminant, pour toute quadrique, les segments de courbe qui délimitent sur elle une face du modèle BRep, et en utilisant des structures de données adaptées dans CA. La complexité en temps dans le pire des cas de notre algorithme est  $O(k^2) = O(n^4)$ , où  $k$  est le nombre de courbes d'intersection

---

<sup>16</sup>disponible en ligne sur le site <http://www.loria.fr/equipes/vegas/software.php>

entre quadriques. La complexité de l'ensemble de l'algorithme est en réalité  $O(n^3 \log n)$  à l'exception d'une seule étape de Q3 dont la complexité est  $O(n^4)$  (voir les chapitres 4, 5, 6 et 7). Il s'agit de l'étape qui élimine, parmi les  $O(n^2)$  composantes algébriques des intersections entre quadriques, celles qui apparaissent de manière redondante. Cette étape est présentée de façon naïve dans Q3 [12] car elle n'a pas d'incidence en pratique sur les performances de son implantation. Cependant, cette opération de « dédoublement » peut être effectuée en temps  $O(n^3 \log n)$  de manière relativement directe. En effet, une approche possible consiste à (i) calculer pour chacune des  $O(n^2)$  composantes, les  $O(n)$  quadriques du modèle qui la contiennent ; on peut ne considérer que les ensembles de quadriques qui définissent ces composantes et (ii) les ordonner par ordre lexicographique des indices des quadriques qui apparaissent ; il suffit alors (iii) d'éliminer tous les doublons d'ensembles de quadriques, et (iv) de recalculer pour chaque ensemble restant de quadriques, la ou les composantes communes. L'ensemble de ces opérations peut être effectué en temps  $O(n^3 \log n)$ . La taille de sortie est de l'ordre de  $O(m) = O(kn) = O(n^3)$ , où  $m$  est le nombre total de points d'intersection trouvés par Q3.

## 9.2 Comparaison avec l'état de l'art

Parmi les travaux réalisés, trois solutions s'approchent de notre objectif de conversion sur des scènes déterminées par des quadriques, celle de J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha [28, 29], celle de B. Mourrain, J.P. Técourt et M. Teillaud [37], et celle de N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich [46, 5].

L'algorithme de J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha [28, 29] s'appuie sur le calcul exact, mais ne gère pas la totalité des configurations dégénérées. En particulier, il ne considère pas les cas où deux surfaces se touchent en un point ou bien quatre surfaces s'intersectent en un point. C'est un algorithme de conversion incrémental. Les objets géométriques sont construits à partir de primitives composées par des carreaux de surfaces. D'après les travaux de C. Lamathe, S. Lazard et S. Petitjean [32], sa complexité en temps dans le pire des cas est  $O(n^3)$  si le modèle BRep correspondant à tout nœud interne de l'arbre CSG est constitué de  $O(n)$  carreaux, et  $O(n^9)$  dans le cas général.

Comparé à cet algorithme, le nôtre est exact et il traite de plus tous les cas, y compris les cas dégénérés. Comme il est non-incrémental, sa complexité en temps dans le pire des cas n'est pas sensible au nombre de faces ou le nombre de carreaux nécessaires pour définir la surface du modèle. Cette complexité étant  $O(n^4)$ , notre algorithme est plus coûteux que celui de J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha dans le cas où le nombre de tels carreaux est (au plus) linéaire en le nombre de primitives. Par contre, il est clairement beaucoup plus efficace dans le cas où ce nombre est au plus cubique en  $n$ .

De leur côté, l'algorithme de B. Mourrain, J.P. Técourt et M. Teillaud [37] et celui de N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich [46, 5] ne calculent pas une conversion CSG-BRep, mais l'arrangement de quadriques à partir duquel le modèle BRep pourrait être déduit. Ici les primitives du modèle CSG sont représentées par des fonctions implicites. Notons que cette approche représente une façon indirecte pour calculer le modèle BRep du fait que l'arrangement de quadriques est un problème difficile en soi.

L'algorithme de B. Mourrain, J.P. Técourt et M. Teillaud [37] utilise la technique de décomposition verticale. Il est exact, mais certaines configurations entre quadriques sur le plan de balayage ne sont pas considérées. Sa complexité combinatoire dans le pire des cas s'élève à  $O(n \log^2 n + V \log n)$  où  $V$  est la taille de la décomposition verticale. D'un autre côté, la technique de décomposition verticale utilisée mène à une complexité algébrique élevée, comme par exemple des nombres algébriques de degré 16, ce qui rend cet algorithme difficilement implémentable en pratique à l'heure actuelle.

Enfin, l'algorithme de N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich [46, 5] réduit le problème en un calcul d'arrangement bidimensionnel en projetant les quadriques sur un plan. Il donne des résultats exacts y compris pour l'ensemble des cas dégénérés. Il est également efficace, de complexité en temps  $O(n^3 \log n)$ . Une application de cette approche au problème de conversion CSG-BRep a été suggérée par E. Berberich dans son rapport de master de 2004 [5], mais n'a pas été développée à ce jour.

En comparaison avec l'algorithme de B. Mourrain, J.P. Técourt et M. Teillaud, le nôtre est également exact, mais, de plus, il considère tous les cas. Sa complexité en temps dans le pire des cas est supérieure. Cependant, sa complexité algébrique est relativement faible grâce à, d'une part QI qui calcule un paramétrage quasi-optimal des courbes d'intersection

entre quadriques, c'est-à-dire qu'au pire le nombre de racines carrées est à une unité de l'optimal, et d'autre part Q3 qui exprime les points d'intersection entre quadriques par un polynôme et un intervalle d'isolation. Comparé à l'algorithme de N. Wolpert, E. Schömer et E. Berberich le nôtre est également robuste au sens où tous les cas dégénérés sont traités dans le paradigme du calcul géométrique. Sa complexité en temps dans le pire des cas est par contre supérieure. Notons, de plus, que notre algorithme résout intégralement le problème de conversion CSG-BRep, ce qui n'est pas le cas des deux algorithmes ci-dessus.

Il semble intéressant de se demander si notre solution du problème de conversion CSG-BRep, qui est destinée aux scènes définies par des quadriques, apporte une amélioration aux solutions qui existent du problème sur des scènes déterminées par des polyèdres. Comme notre objectif était de concevoir un algorithme robuste, il serait adéquat de faire une comparaison avec les algorithmes qui traitent des polyèdres de manière exacte. Deux algorithmes de modélisation correspondent à ces critères, celui de M.O. Benouamer, D. Michelucci et B. Peroche de 1994 [3] et celui de S. Fortune de 1997 [18]. Le premier est un algorithme de conversion CSG-BRep incrémentale. Le second est un algorithme de modélisation surfacique qui ne résout pas le problème de conversion CSG-BRep, mais qui peut être appliqué à une conversion CSG-BRep incrémentale. Nous n'avons pas trouvé d'estimation de complexité théorique pour ces deux solutions dans la littérature.

Toutefois, du fait qu'elles sont incrémentales, elles sont nécessairement sensibles au nombre de faces qui constituent la surface des objets correspondant aux différents nœuds de l'arbre CSG. M. Tawfik a présenté un algorithme de conversion CSG-BRep qui est optimal en termes de complexité, non exact, et destiné aux objets polyédriques [51]. Sa complexité en temps dans le pire des cas est estimée à  $O(n^3)$  où  $n$  est le nombre total de faces des primitives. Comme cette complexité est optimale, et comme les algorithmes ci-dessus ont en plus la contrainte du calcul exact, leur complexité en temps dans le pire des cas est au moins égale à celle de l'algorithme de M. Tawfik, c'est-à-dire  $O(n^3)$ . Ainsi, la complexité de notre algorithme dans le pire des cas étant  $O(n^4)$ , où  $n$  est le nombre de primitives, ce dernier n'apporte pas d'amélioration pour les scènes définies par des polyèdres pour le cas où le nombre total de faces des primitives est linéaire en le nombre de primitives.

## 9.3 Perspectives

Une suite naturelle de notre travail serait d'avancer l'implantation de notre algorithme de conversion CSG-BRep. Rappelons que l'implantation de Q3 a, à l'heure actuelle, été établie par ses auteurs dans son intégralité via EXACUS<sup>17</sup> (Efficient and Exact Algorithms for Curves and Surfaces). Notre implantation partielle de Q3, effectuée en C++, ne dispose pas pour le moment de structures de données spécifiques pour traiter l'ensemble des composantes algébriques. Ainsi, il semble approprié d'adapter et connecter notre implantation de VE à celle de Q3 réalisée dans EXACUS. Enfin, il reste à procéder à une implantation de CA.

Il pourrait également être envisagé, dans la quête d'une meilleure complexité, de transformer notre algorithme de conversion CSG-BRep, qui est non incrémental, en un algorithme de conversion CSG-BRep incrémental. Dans cette optique, notre algorithme pourrait être appliqué, de façon récursive, à tous les nœuds internes de l'arbre CSG. Il calculerait, pour l'objet volumique correspondant à chaque nœud interne, la description de toutes les faces visibles sur chacune des quadriques qui le constituent. Toute face serait déterminée sur chacune des quadriques qui la contiennent par l'ensemble des arêtes qui la délimitent assemblées en chaînes. Chaque arête serait calculée comme un segment sur la courbe d'intersection entre au moins deux quadriques, donnée sous forme paramétrique dans l'espace des paramètres d'une quadrique. Comparé à l'algorithme de J. Keyser, S. Krishnan et D. Manocha [28, 29], ici les primitives ne seraient pas divisées en carreaux de surfaces, ce qui rendrait l'algorithme indépendant de leur éventuel nombre en fonction du nombre de primitives.

Notre algorithme de conversion CSG-BRep peut également être appliqué au problème du calcul du diagramme de Voronoi de droites ou segments en 3D, et plus généralement de polyèdres. Typiquement, comme le diagramme de Voronoi dans ce cas est constitué par des cellules dont les faces sont formées par des carreaux de quadriques et dont les arêtes et les sommets sont issus de l'intersection entre ces quadriques, il pourrait déterminer l'ensemble des chaînes d'arêtes constituant chaque face d'une telle cellule.

---

<sup>17</sup><http://www.mpi-inf.mpg.de/projects/exacus>

L'idée ici serait de concevoir un algorithme qui construit l'ensemble de l'arrangement induit par le diagramme. Notons que ce problème est également considéré par une autre approche, celle de M. Hemmer, O. Setter et D. Halperin [22], qui est également robuste au sens où tous les cas dégénérés sont traités dans le paradigme du calcul géométrique exact et qui serait une base de comparaison.



# Bibliographie

- [1] S. Abhyankar. *Algebraic geometry for scientists and engineers*, volume 35. Mathematical Surveys and Monographs, 1990. 104, 105
- [2] R. Banerjee and J. Rossignac. Topologically exact evaluation of polyhedra defined in CSG with loose primitives. *Computer Graphics forum*, 15(4) :205 – 217, 1996. 9
- [3] M. Benouamer, D. Michelucci, and B. Peroche. Error-free boundary evaluation based on a lazy rational arithmetic : A detailed implementation. *Computer-Aided Design*, 26(6) :403 – 416, 1994. 10, 175
- [4] J. L. Bentley and T. A. Ottmann. Algorithms for reporting and counting geometric intersections. *IEEE Transactions on computers*, (9) :643 – 647, 1979. 151
- [5] E. Berberich. Exact arrangements of quadric intersection curves. Master’s thesis, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2004. 14, 15, 17, 173, 174
- [6] M. Casale. Free-form solid modeling with trimmed surface patches. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 33 – 43, 1987. 12
- [7] M. Casale and J. Bobrow. A set operation algorithm for sculptured solids modeled with trimmed patches. *Computer Aided Geometric Design*, 6 :235 – 247, 1989. 12
- [8] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Using algebraic geometry (Second edition)*, volume 185. Graduate Tests in Mathematics, Springer, 2005. 104
- [9] G. Crocker and W. Reinke. An editable nonmanifold boundary representation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(2) :39 – 51, 1991. 11
- [10] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry (2nd edition)*. Springer-Verlag, 2000. 151



- [11] L. Dupont. *Paramétrage quasi-optimal de l'intersection de deux quadriques : théorie, algorithmes et implantation*. PhD thesis, Université Nancy 2, 2004. 14, 37, 38, 40, 41, 44, 45, 47, 105, 108, 172
- [12] L. Dupont, M. Hemmer, S. Petitjean, and E. Schomer. Complete, exact and efficient implementation for computing the adjacency graph of an arrangement of quadrics. In *Proceedings of ESA (European Symposium on Algorithms)*, pages 633 – 644, 2007. 19, 33, 53, 54, 61, 161, 172, 173
- [13] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics : I. The generic algorithm. *Journal of Symbolic Computation*, 43(3) :168 – 191, 2008. 19, 33, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 45, 172
- [14] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics : II. A classification of pencils. *Journal of Symbolic Computation*, 43(3) :192 – 215, 2008. 19, 33, 37, 41, 44, 56, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 127, 128, 129, 134, 172
- [15] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics : III. Parameterizing singular intersections. *Journal of Symbolic Computation*, 43(3) :216 – 232, 2008. 19, 33, 37, 41, 44, 45, 47, 172
- [16] H. Edelsbrunner and E. Mücke. Simulation of simplicity : A technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. *Transactions in Graphics*, 9(1) :66 – 104, 1990. 8
- [17] S. Fang, B. Bruderlin, and X. Zhu. Robustness in solid modeling - a tolerance based intuitionistic approach. *Computer-Aided Design*, 25(9) :567 – 576, 1993. 9
- [18] S. Fortune. Polyhedral modeling with multiprecision integer arithmetic. *Computer-Aided Design*, 29(2) :123 – 133, 1997. 10, 175
- [19] W. Fulton. *Algebraic curves : an introduction to algebraic geometry*. <http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/>. 104, 105
- [20] W. Fulton. *Intersection theory (Second edition)*. Springer, 1998. 104, 105
- [21] M. Goodrich. Applying parallel processing techniques to classification problems in

- 
- constructive solid geometry. *Proceedings of the first annual Symposium on Discrete Algorithms*, pages 118 – 128, 1990. 132
- [22] M. Hemmer, O. Setter, and D. Halperin. Constructing the exact Voronoi diagram of arbitrary lines in space. *INRIA Research Report 7273*, 2010. 177
- [23] C. Hoffmann, J. Hopcroft, and M. Karasick. Robust set operations on polyhedral solids. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9(6) :50 – 59, 1989. 9
- [24] C.-Y. Hu, N. Patrikalakis, and X. Ye. Robust interval solid modelling, part 2 : boundary evaluation. *Computer-Aided Design*, 28(10) :819 – 830, 1996. 9
- [25] D. Jackson. Boundary representation modelling with local tolerances. In *Proceedings of ACM Solid Modeling*, pages 247 – 253, 1995. 9
- [26] J. Keyser. *Exact Boundary Evaluation for Curved Solids*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of North Carolina, Chapel Hill, 2000. 12
- [27] J. Keyser, T. Culver, M. Foskey, S. Krishnan, and D. Manocha. Esolid - a system for exact boundary evaluation. *Computer-Aided Design*, 36(2) :175 – 193, 2004. 11, 12
- [28] J. Keyser, S. Krishnan, and D. Manocha. Efficient and accurate B-Rep generation of low degree sculptured solids using exact arithmetic 1 : Representations. *Computer Aided Geometric Design*, 16(9) :841 – 859, 1999. 12, 15, 17, 173, 176
- [29] J. Keyser, S. Krishnan, and D. Manocha. Efficient and accurate B-Rep generation of low degree sculptured solids using exact arithmetic 2 : Computation. *Computer Aided Geometric Design*, 16(9) :861 – 882, 1999. 12, 15, 17, 173, 176
- [30] S. Krishnan. *Efficient and Accurate Boundary Evaluation Algorithms for Sculptured Solids*. PhD thesis, University of North Carolina, 1997. 12
- [31] S. Krishnan, D. Manocha, M. Gopi, T. Culver, and J. Keyser. Boole : A boundary evaluation system for boolean combinations of sculptured solids. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 11(1) :105 – 144, 2001. 12
- [32] C. Lamathe, S. Lazard, and S. Petitjean. Complexity of boundary evaluation algorithms for curved solids. *Manuscript 2004*. 13, 15, 17, 173

- [33] S. Lazard, L. M. Penaranda, and S. Petitjean. Intersecting quadrics : An efficient and exact implementation. *Computational Geometry, Theory and Applications*, 35(1-2) :74 – 99, 2006. [33](#), [37](#), [46](#), [172](#)
- [34] J. Levin. A parametric algorithm for drawing pictures of solid objects composed of quadric surfaces. *Communications of ACM*, 19(10) :555 – 563, 1976. [14](#)
- [35] K. Mehlhorn and C. Yap. Robust geometric computation (manuscript). <http://cs.nyu.edu/yap/bks/egc>. [5](#)
- [36] J. Miller. Incremental boundary evaluation using inference of edge classifications. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(1) :71 – 78, 1993. [11](#)
- [37] B. Mourrain, J.P. T ecourt, and M. Teillaud. On the computation of an arrangement of quadrics in 3d. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 30 :145 – 164, 2004. [13](#), [15](#), [17](#), [173](#), [174](#)
- [38] J. O’Rourke. Computational geometry in C (2nd edition). 1998. [151](#)
- [39] F. P. Preparata and M. I. Shamos. Computational geometry : an introduction. 1985. [151](#)
- [40] A. Requicha. Geometric modeling : A first course. <http://www-pal.usc.edu/requicha/book.html>. [24](#), [25](#), [30](#), [31](#)
- [41] A. Requicha. Representation for rigid solids : Theory, methods, and systems. *ACM Computing Surveys*, 12(4) :437 – 464, 1980. [22](#), [23](#)
- [42] A. Requicha and H. Voelcker. Boolean operations in solid modeling : Boundary evaluation and merging algorithms. *Proceedings of the IEEE*, 73(1) :30 – 44, 1985. [6](#)
- [43] J. Rossignac and A. Requicha. Solid modeling. J. Webster, John Wiley and Sons, 1999. [4](#)
- [44] J. Rossignac and H. Voelcker. Active zones in CSG for accelerating boundary evaluation, redundancy elimination, interference detection, and shading algorithms. *ACM Transactions on Graphics*, 8(1) :51 – 87, 1989. [10](#)
- [45] F. Rouillier. Solving zero-dimensional systems through the rational univariate representation. *Journal of Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 9(5) :433 – 461, 1999. [104](#), [105](#)

- 
- [46] E. Schomer and N. Wolpert. An exact and efficient approach for computing a cell in an arrangement of quadrics. *Computational Geometry : Theory and Applications, Special Issue on Robust Geometric Algorithms and their Implementations*, 33 :65 – 97, 2006. [11](#), [14](#), [15](#), [17](#), [173](#), [174](#)
- [47] M. Segal. Using tolerances to guarantee valid polyhedral modelling results. *Computer Graphics*, 24(4) :105 – 114, 1990. [8](#)
- [48] M. Segal and C. Sequin. Partitioning polyhedral objects into nonintersecting parts. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 8(1) :53 – 67, 1988. [8](#)
- [49] J. Stolfi. *Oriented Projective Geometry : A Framework for Geometric Computation*. Academic Press, Boston, 1991. [56](#)
- [50] J. Sylvester. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by a real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine*, (4) :138 – 142, 1852. [38](#)
- [51] M. Tawfik. An efficient algorithm for CSG to B-Rep conversion. In *Proceedings of the first Symposium on Solid modeling foundations and CAD/CAM applications*, pages 99 – 108, 1991. [11](#), [175](#)
- [52] N. Wolpert. *An Exact and Efficient Approach for Computing a Cell in an Arrangement of Quadrics*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2002. [14](#)
- [53] C. Yap and T. Dube. The exact computation paradigm. Du and Hwang, World Scientific Press, Second Edition, 1995. [5](#)