



**HAL**  
open science

# Réflexions et réfractions non-linéaires d'ondes de gravité internes

Nicolas Grisouard

► **To cite this version:**

Nicolas Grisouard. Réflexions et réfractions non-linéaires d'ondes de gravité internes. Physique [physics]. Université de Grenoble, 2010. Français. NNT: . tel-00540608

**HAL Id: tel-00540608**

**<https://theses.hal.science/tel-00540608>**

Submitted on 28 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité **Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée et soutenue publiquement par

**NICOLAS GRISOUARD**

le **29 octobre 2010**

---

**RÉFLEXIONS ET RÉFRACTIONS NON-LINÉAIRES D'ONDES DE GRAVITÉ  
INTERNES**

---

Thèse dirigée par **CHANTAL STAQUET**

### JURY

M. Philippe Cardin	–	Directeur de Recherches, Grenoble	–	Président
Mme Sonya Legg	–	Research Oceanographer, Princeton	–	Rapporteur
M. Frédéric Moisy	–	Maître de Conférences, Orsay	–	Rapporteur
M. Francis Auclair	–	Maître de Conférences, Toulouse	–	Examineur
M. Claude Cambon	–	Directeur de Recherches, Lyon	–	Examineur
Mme Chantal Staquet	–	Professeur des Universités, Grenoble	–	Examineur

Thèse préparée au sein du **Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels** dans l'**École Doctorale Terre, Univers, Environnement**



*All of us were stuck to the surface of a ball, incidentally. The planet was ball-shaped. Nobody knew why we didn't fall off, even though everybody pretended to kind of understand it.*

Kurt Vonnegut, Jr., *Breakfast of Champions*

**RÉSUMÉ** Étudier les ondes internes est crucial pour comprendre le mélange dans l’océan. Dans cette thèse, un attracteur d’ondes 2D est tout d’abord simulé de manière directe, appuyé par une bonne comparaison avec une expérience pré-existante. Nous dérivons un modèle simple de la largeur de l’attracteur et mettons en évidence des effets non-linéaires. Nous réalisons dans une deuxième partie une étude expérimentale de la réflexion d’ondes planes sur une paroi inclinée. Les résonances prédites entre différents harmoniques n’apparaissent pas mais en revanche, un fort écoulement moyen horizontal apparaît, courbant les caractéristiques des ondes par effet Doppler. 70 à 80% du flux d’énergie incident sont dissipés ou convertis en écoulement moyen, ce dernier semblant alimenté par la dissipation des ondes. La génération d’ondes solitaires consécutive à la réflexion d’ondes sur une pycnocline est ensuite étudiée numériquement dans la troisième partie. Dans un premier temps, une étude académique, 2D est réalisée à l’aide de simulations directes. Nous montrons que des ondes solitaires de différents modes et piégées dans la pycnocline peuvent être générées. Deux critères pour comprendre la sélection d’un mode donné, l’un portant sur les différentes vitesses de phase, l’autre sur des arguments géométriques, sont définis. Ces critères sont dans un second temps comparés aux conditions du Golfe de Gascogne en été. Nous montrons qu’un rayon d’ondes internes seul ne peut générer des ondes solitaires correspondant aux observations, ce qui est corrigé en tenant compte de l’écoulement présent dans la pycnocline et indépendant du rayon d’ondes internes.

**MOTS-CLÉS** Ondes internes, Dynamique des fluides géophysiques, Écoulements stratifiés, Ondes solitaires, Triades résonantes, Attracteurs d’ondes internes, Simulations numériques, PIV.

**ABSTRACT** Internal wave studies are crucial to the understanding of deep-ocean mixing. In this thesis, we first describe a 2D direct numerical simulation of a wave attractor and validate it against pre-existing experimental data. We then propose a model for the thickness of the attractor along the direction of propagation of energy. We eventually study nonlinear effects induced by the attractor. In a second part, we describe an experimental study of the reflection of plane waves on a sloping wall. Unexpectedly, resonances between different wave harmonics are not observed. However, a horizontal mean flow is generated and the wave characteristics are curved, due to the Doppler effect. 70 to 80% of the incident energy flux is dissipated and transferred to the mean flow, the latter being seemingly generated by wave dissipation. In a third part, we perform a numerical study of the generation of internal solitary waves by an impinging wave beam. We first present direct numerical simulations of this process and show that different solitary wave modes can be excited. Criteria for the selection of a particular mode are put forward, the first one being in terms of phase speeds and the second one based on geometrical arguments. Results are compared with the configuration of the Bay of Biscay in summer. We show that a beam impinging on a thermocline initially at rest can not generate solitary waves which features agree with oceanic observations. This can be corrected by taking into account the background flow around the thermocline as found in the Bay of Biscay and independent of the internal wave beam.

**KEY WORDS** Internal waves, Geophysical fluid dynamics, Stratified flows, Solitary waves, Resonant triads, Internal wave attractors, Numerical simulations, PIV.

## Remerciements

Je remercie tout d'abord Sonya Legg et Frédéric Moisy d'avoir accepté la charge de rapporteurs, Philippe Cardin d'avoir accepté de présider le jury et Francis Auclair et Claude Cambon d'avoir accepté d'examiner ma soutenance de thèse.

Je remercie ensuite Chantal Staquet d'avoir eu la patience de m'encadrer pendant ces trois ans et demi, de m'apprendre les ficelles du métier tout en me laissant mener la recherche qui me plaisait. Le LEGI en général, son équipe Environnement, Rotation Et Stratification en particulier sont remerciés pour leur accueil. Sur la plate-forme Coriolis, Louis Gostiaux fut le binôme parfait, Samuel Viboud et Henri Didelle des professionnels indispensables.

La majeure partie des travaux présentés dans ce manuscrit ont été réalisés dans le cadre de projets trans-institutionnels: les collaborations ou discussions avec le NIOZ au Pays-Bas (Theo Gerkema, Jeroen Hazewinkel, Leo Maas), le Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon (Matthieu Mercier, Thierry Dauxois), le Laboratoire d'Aérodynamique à Toulouse (Francis Auclair), le Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes (Boris Dintrans) et le MIT (Manikandan Mathur) ont été très appréciées.

Les enseignements de Harvey Segur et Roger Grimshaw dédiés aux ondes non-linéaires et dispensés lors de l'édition 2009 du programme "Geophysical Fluid Dynamics" (WHOI) ont profondément influencé l'écriture de la Partie I de ce manuscrit, ainsi que mes orientations de fin de thèse. Je les en remercie, ainsi que les organisateurs de cette école (Oliver Bühler et Karl Helfrich).

Puissent aussi ces remerciements être l'occasion de rappeler que je ne me serais probablement pas lancé dans ce domaine sans l'excellente expérience préalable acquise en 2004 à l'Observatoire de Haute Provence et en 2005 à San Diego, Kraig Winters étant particulièrement remercié pour cette dernière expérience.

Les noms cités jusqu'ici ont été plus que des collègues et je me félicite d'avoir eu la chance de les côtoyer sur le plan personnel. Il me faut donc achever ce tableau en citant ceux qui n'ont certes pas compté au nombre des collègues mais dont le rôle dans l'achèvement de ce travail n'en a pas été moins fondamental. Qu'ils soient dans le bureau d'à côté ou dans le Groupe Modulaire des Utilisateurs du CROUS, disséminés sur le campus ou qu'ils aient partagé mon appartement, qu'ils m'aient soutenu depuis l'autre rive de l'Atlantique ou depuis ma Bourgogne natale, ils ont tous permis à ce que cette thèse se passe dans des conditions humaines fantastiques.

Cette thèse s'est déroulée grâce au soutien financier d'une bourse de la Direction Générale de l'Armement.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Physique des ondes internes</b>	<b>9</b>
<b>1 Ondes internes linéaires</b>	<b>11</b>
1.1 Deux forces de rappel anisotropes . . . . .	11
1.1.1 Stratification stable et confinement vertical . . . . .	11
1.1.2 Rotation et confinement latéral . . . . .	13
1.1.3 Stratification et rotation dans l’océan . . . . .	14
1.2 Dynamique linéaire des ondes internes . . . . .	17
1.2.1 Équation de propagation . . . . .	17
1.2.2 Relation de dispersion et vitesses de propagation . . . . .	19
1.2.3 Considérations énergétiques . . . . .	22
1.2.4 Réflexion contre une paroi inclinée . . . . .	23
1.3 Rayons d’ondes internes . . . . .	25
1.3.1 Rayons d’ondes internes en champ lointain . . . . .	25
1.3.2 Rayons d’ondes internes en champ proche . . . . .	28
1.3.3 Limites d’application et approximation WKB . . . . .	31
1.4 Description modale des ondes internes . . . . .	33
<b>2 Ondes internes non-linéaires</b>	<b>39</b>
2.1 Triades résonantes . . . . .	39
2.1.1 Équations d’évolution et coefficients d’interaction . . . . .	39
2.1.2 Applications pratiques des triades résonantes . . . . .	45
2.2 Ondes solitaires . . . . .	47
2.2.1 Historique . . . . .	47
2.2.2 Ondes solitaires d’interface . . . . .	49
2.2.3 Autres modèles . . . . .	55
2.2.4 Ondes solitaires pour une stratification quelconque . . . . .	57
2.3 Ondes internes, déferlement et turbulence . . . . .	58

<b>3</b>	<b>Outils pour l'étude des ondes internes</b>	<b>61</b>
3.1	Modélisation numérique des ondes internes . . . . .	61
3.1.1	Le MITgem . . . . .	61
3.1.2	Choix des résolutions spatiale et temporelle . . . . .	65
3.1.3	Dissipation d'énergie . . . . .	66
3.1.4	Conditions aux limites . . . . .	67
3.2	Étude expérimentale des ondes internes . . . . .	71
3.2.1	Stratification . . . . .	71
3.2.2	Génération d'ondes internes . . . . .	73
3.2.3	La vélocimétrie par images de particules (PIV) . . . . .	74
3.3	Deux outils de filtrage des données . . . . .	79
3.3.1	Le filtrage harmonique . . . . .	79
3.3.2	La transformée de Hilbert . . . . .	82
<b>II</b>	<b>Réflexion d'ondes internes contre une paroi solide</b>	<b>85</b>
<b>4</b>	<b>Two-dimensional internal wave attractor</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	87
4.2	Laboratory and numerical set-ups . . . . .	89
4.2.1	Laboratory experiment of HBDM08 . . . . .	89
4.2.2	Numerical set-up . . . . .	90
4.3	Comparison with the laboratory experiment of HBDM08 . . . . .	91
4.3.1	Overall behavior of the fluid motions . . . . .	91
4.3.2	Spatial structure of the wave attractor . . . . .	94
4.4	A simple model for the thickness of the wave attractor . . . . .	96
4.4.1	Model . . . . .	96
4.4.2	Analogy with an internal wave beam . . . . .	97
4.4.3	Numerical validation . . . . .	98
4.5	Nonlinear effects . . . . .	99
4.5.1	Existence of nonlinear effects . . . . .	99
4.5.2	Mixing . . . . .	100
4.6	Summary and conclusion . . . . .	101
	Épilogue . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Réflexion non-linéaire contre une paroi inclinée</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction . . . . .	107
5.1.1	Travaux antérieurs . . . . .	108
5.1.2	Expériences précédentes sur la plate-forme Coriolis . . . . .	112
5.1.3	Objectifs et plan . . . . .	113
5.2	Configuration expérimentale . . . . .	114
5.3	Aspect général des champs d'ondes . . . . .	116
5.3.1	Ondes à fréquence fondamentale . . . . .	118
5.3.2	Ondes à fréquences $2\omega$ et $3\omega$ . . . . .	118

5.3.3	Écoulement moyen . . . . .	122
5.4	Structure spatiale de l'onde réfléchie . . . . .	125
5.4.1	Simulation numérique . . . . .	125
5.4.2	Onde réfléchie . . . . .	125
5.5	Étude des flux d'énergie . . . . .	126
5.5.1	Allure des harmoniques et de l'écoulement moyen . . .	127
5.5.2	Calcul des flux . . . . .	129
5.6	Étude de l'écoulement moyen . . . . .	132
5.6.1	Effet Doppler et courbure des rayons . . . . .	132
5.6.2	Évolution temporelle . . . . .	134
5.7	Conclusion et perspectives . . . . .	135
<b>III Réflexion d'ondes internes contre une paroi fluide</b>		<b>139</b>
<b>6</b>	<b>Generation of solitary waves by an internal wave beam</b>	<b>143</b>
6.1	Introduction . . . . .	143
6.2	Numerical set-up . . . . .	147
6.3	Observations on the local generation of mode-1 ISWs . . . . .	151
6.3.1	Preliminary considerations . . . . .	151
6.3.2	Generation of mode-1 internal solitary waves . . . . .	153
6.4	How to control the mode number: a "far-field" approach. . . . .	155
6.4.1	Heuristic considerations: the modal decomposition . . .	155
6.4.2	Generation of mode-2 and mode-3 ISWs . . . . .	158
6.5	How to control the mode number: a "near-field" approach. . .	159
6.6	Discussion . . . . .	163
6.6.1	Bandwidths of the selection conditions . . . . .	163
6.6.2	Applicability of the selection conditions to the ocean . .	164
6.7	Conclusion . . . . .	167
<b>7</b>	<b>Local generation of solitary waves in the Bay of Biscay</b>	<b>171</b>
7.1	Introduction . . . . .	171
7.2	Set-up . . . . .	174
7.3	Tidal beam impinging on a thermocline initially at rest . . . . .	177
7.3.1	Generation of internal solitary waves . . . . .	177
7.3.2	Interpretation of experiments E1 and E2 . . . . .	179
7.4	A more realistic configuration . . . . .	182
7.5	Conclusion and discussion . . . . .	185
<b>Génération locale : quelques perspectives</b>		<b>189</b>

---

<b>Conclusion</b>	<b>191</b>
<b>Annexes</b>	<b>194</b>
<b>A Coefficients d'interaction des triades résonantes</b>	<b>197</b>
<b>B A laboratory and numerically observed wave attractor</b>	<b>199</b>
B.1 Introduction . . . . .	200
B.2 Experimental setup . . . . .	202
B.2.1 Description of laboratory experiments . . . . .	202
B.2.2 Description of numerical simulation . . . . .	203
B.2.3 New method of representing experimental data . . . . .	205
B.3 Results . . . . .	206
B.4 Discussion and summary . . . . .	208
<b>Bibliographie</b>	<b>224</b>

# Introduction

Des lois de Képler, on peut déduire l'énergie mécanique d'un corps de masse  $M_1$  lié à un autre corps de masse  $M_2$  par interaction gravitationnelle :

$$E_m = -\frac{GM_1M_2}{2a},$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle et  $a$  le demi-grand axe de la trajectoire elliptique du corps de masse  $M_1$ . Dans le cas du système Terre-Lune, le demi-grand axe  $a$  augmente chaque année d'environ 4 cm par an ([MW98]), ce qui implique que si on considère le système comme isolé, alors on doit conclure qu'il dissipe de l'énergie en permanence. D'autres astres composent le système solaire mais la perte d'énergie du système complet est pourtant bien là et le puits d'énergie réside dans la dissipation par les marées. Plus précisément, la puissance dissipée par les marées lunaires à chaque instant est de 3,2 TW<sup>1</sup>, auxquels viennent s'ajouter 0,5 TW dissipés surtout par les marées solaires<sup>2</sup>. Si ces quantités sont très précisément connues, les mécanismes exacts de dissipation, leurs localisations sur la Terre (la Lune, entièrement solide, dissipe très peu) et leurs conséquences sont très mal connues. Ces questions fondamentales, apparemment appuyées sur des arguments très simples, nous sont dues à deux grands noms de l'océanographie, Walter Munk et Carl Wunsch, qui les ont publiées en 1998 ([MW98])<sup>3</sup>. Elles ont donné lieu à un effort considérable de la communauté sur ce sujet, effort dans lequel cette thèse s'inclut. Mais tout d'abord, revenons plusieurs années en arrière.

En 1966, Walter Munk ([Mun66]), dans un article intitulé *Abyssal recipes*, soulève un problème qui reste d'actualité. Constatant que de l'eau froide et salée se forme aux pôles et coule vers le fond des océans, il en déduit que en dehors de ces endroits, de l'eau froide et salée doit remonter en permanence. Il constate ensuite que les profils de température, de salinité et de concentration de divers composés chimiques mesurés dans l'océan pacifique ne peuvent

---

1. 1 TW =  $10^{12}$  W.

2. soit un total de l'ordre de la puissance électrique produite par l'espèce humaine.

3. Plusieurs publications satellites, plus concises, ont accompagné cet article : un pré-curseur ([MW97]), un résumé commenté ([Kil98]) et une note ([Wun00]) accompagnant [ER00]. Nous ne référerons qu'à l'article principal mais certains commentaires de cette introduction peuvent être issus de ces autres publications.

être expliqués si l'intérieur des océans est uniquement animé par cette lente remontée d'eaux froides. Par exemple, la température de l'eau est observée comme étant trop élevée, trop profondément pour que le chauffage par le Soleil seul en soit responsable. Il est nécessaire d'introduire un flux de chaleur (ou autres) supplémentaire de la surface vers ces profondeurs et ce flux est de nature turbulente. En effet, la turbulence augmente les phénomènes de diffusion (que ce soit de quantité de mouvement, de température ou de concentration) et une diffusivité thermique uniforme de  $\kappa_{AS} = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  est requise afin que les prédictions s'ajustent aux observations, soit 1000 fois plus que la diffusivité thermique moléculaire. Là où Munk va plus loin que ses contemporains est qu'il s'essaie à trouver des mécanismes physiques afin d'expliquer cette valeur de  $\kappa_{AS}$ , de son propre aveu sans succès. Il note cependant que bien qu'insuffisantes, les marées internes pourraient apporter une partie de la réponse.

Cette descente d'eau aux pôles et leur lente remontée ultérieure s'est popularisée sous les appellations "circulation thermohaline", "grand tapis roulant océanique" ou "circulation méridienne de renversement" (*meridional overturning circulation*)<sup>4</sup>, dont le temps de bouclage est de quelques milliers d'années. En distribuant de grandes quantités de chaleur de l'équateur aux pôles et en ayant en tête que les deux premiers mètres sous la surface de l'océan peuvent potentiellement contenir autant d'énergie thermique que la totalité de l'atmosphère, on comprend en quoi cette circulation peut avoir un impact conséquent sur la machine climatique. La discussion de Munk se rattache ici à ce problème : si on peut comprendre les mécanismes responsables de la structure verticale de l'océan, une partie du mécanisme de la circulation à grande échelle s'éclairera et il sera alors possible de s'affranchir des "recettes" habituellement utilisées pour paramétrer cet élément.

La publication originale de Munk a été mise à mal lors des trois décennies qui ont suivi : il a été prouvé que les équations du modèle sont mal posées, il a été mesuré que dans les océans, loin de toute topographie, la diffusivité est plutôt de  $\kappa_{PE} = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (diffusivité dite "pélagique", cf. p. ex. [OC72, LWL93]) et qu'enfin, la supposition que le mélange se produisait de manière uniforme à l'échelle du globe était à revoir. Pendant ce temps, aucune publication n'a pourtant tenté d'en proposer une alternative.

C'est à ce moment que les marées refont leur apparition dans le débat. Pendant presque 75 ans, il avait été cru ([Egb97]) que la quasi-totalité des 3,5 TW dissipées par les marées océaniques se produisait dans les fines couches limites turbulentes des fonds plats des mers, inefficaces pour provoquer un mélange turbulent dans le volume des océans. C'est alors qu'en 1997, des données altimétriques fournies par le satellite TOPEX/POSÉIDON

---

4. Le terme "thermohaline" suggère que le seul forçage est dû aux variables thermodynamiques, à l'instar de l'atmosphère et ignorant par exemple le rôle du forçage mécanique, dont les conséquences sont l'objet de cette thèse. "Circulation méridienne de renversement" est l'expression de plus en plus privilégiée.

([Egb97]) permettent à Munk et Wunsch [MW98] de penser que 0,9 TW dissipés par la marée pourraient être disponibles à la conversion en marée interne (une estimation renforcée par [ER00]). Cette marée interne est constituée d'ondes internes générées par diffraction de la marée barotrope contre des topographies.

Munk et Wunsch intègrent ceci dans *Abyssal recipes II* ([MW98]), qui reprend l'effort entrepris dans *Abyssal recipes*. Armés d'un modèle analytique plus rigoureux et de progrès quantitatifs réalisés pendant les trente-deux années écoulées, ils retrouvent le fait qu'une diffusivité de  $\kappa_{AS} = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (avec cette fois quelques variations verticales) soit nécessaire pour maintenir la stratification observée dans les océans. Ils interprètent aussi sous un angle nouveau cette valeur de  $\kappa_{AS}$ . En effet, une telle valeur de diffusivité correspond à une dissipation de 2,1 TW, une puissance qui pourrait être obtenue si par exemple 99% de l'océan possédait une diffusivité  $\kappa_{PE}$  et le % restant une diffusivité de  $10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Or les observations montrent en effet des zones où  $\kappa$  est même bien supérieure à la dernière valeur citée. Dans ce cas,  $\kappa_{AS}$  serait une forme de valeur moyenne de  $\kappa$  sur l'ensemble des océans.

À l'aide du théorème de Sandström, qui affirme qu'il n'est pas possible d'alimenter une circulation dans tout un volume de fluide par un différentiel de température si les sources chaudes et froides sont à la même altitude, les auteurs reviennent sur le rôle du mélange sur la circulation de manière plus explicite qu'auparavant : le refroidissement aux pôles et le réchauffement à l'équateur, tous situés sur la même surface géopotentielle, ne peuvent alimenter la circulation méridienne de retournement telle qu'elle existe. Avec leur action seule, l'océan aurait une température quasiment uniforme et froide, les eaux des pôles ne couleraient donc qu'à quelques dizaines ou centaines de mètres de profondeur et seule une fine couche d'eau chauffée par le Soleil concentrerait tous les courants de – et vers les pôles. Le mélange turbulent, dissipation d'énergie mécanique, permet lui de diffuser la chaleur loin de la surface et d'alléger ainsi les eaux des océans sur une profondeur suffisante pour que les eaux alourdies aux pôles puissent couler jusqu'au fond et circuler dans l'intégralité du volume abyssal.

Munk et Wunsch proposent alors une répartition des flux d'énergie mécaniques (dus aux marées et au vent) dont une version simplifiée est affichée en figure 1. Il propose que 0,2 TW soient dissipés par les ondes internes et 0,7 TW directement par la turbulence. Ils ajoutent aussi que pour arriver au chiffre de 2,1 TW, le reste doit être fourni par le vent, qui peut transmettre de l'énergie dans l'intérieur des océans encore une fois *via* radiation d'ondes internes. Selon les auteurs mêmes, quasiment tous ces chiffres sont des estimations et doivent être considérés avec la plus grande précaution. Par exemple, ils n'excluent pas que la puissance nécessaire pour maintenir la stratification soit seulement de la moitié de 2,1 TW. Quelque soit la valeur précise, les auteurs remarquent cependant qu'on ne peut que s'étonner de constater qu'une telle puissance n'est rien comparé aux 2000 TW associés

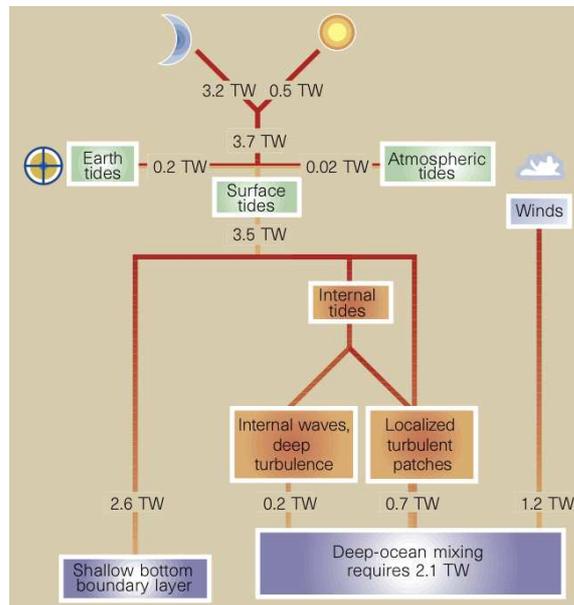


FIGURE 1 – Forme simplifiée du bilan de puissance dissipée par les marées et le vent. Plus on progresse dans les ramifications, plus les incertitudes sur les nombres sont grandes. Tiré de [Kil98], adapté de [MW98, Fig. 4].

au transport de chaleur de l'équateur vers les pôles par la circulation méridienne de renversement. Et pourtant, sans ces 2,1 TW, cette circulation n'existerait pas telle quelle.

Dans un article de revue, Wunsch, associé cette fois à Ferrari ([WF04]), semble cette fois dire que la majorité du mélange requis pourrait être fourni par les ondes internes. Cela ne contredit pas forcément [MW98] dans le sens où les ondes internes sont cette fois au coeur d'un système plus complexe d'échanges énergétiques (cf. [WF04, Fig. 5]). Depuis, de nombreuses autres quantifications ont probablement détaillé et/ou modifié le bilan présenté en figure 1. Par un choix que l'on pourrait qualifier d'éditorial, l'importance donnée ici à [MW98] n'est pas due au fait que cet article ait répondu à des questions ou introduit un modèle aidant à la description d'un problème donné. Au contraire, l'importance de ce papier réside dans le fait qu'il ait posé une série de questions qui ont donné une impulsion décisive à une communauté active pour encore de longues années, dans laquelle nous nous inscrivons.

Nous avons donc décrit le rôle des ondes internes pour la circulation globale de l'océan et donc le système climatique de la Terre. Venons-en à l'aspect plus pratique de leur génération et de leur dissipation.

On peut se placer en plusieurs endroits des océans et observer les spectres temporels des ondes internes, on trouvera très souvent une allure commune à beaucoup d'entre eux : deux pics énergétiques et une décroissance continue de la densité d'énergie pour les fréquences croissantes (cf. Fig. 2). Des deux

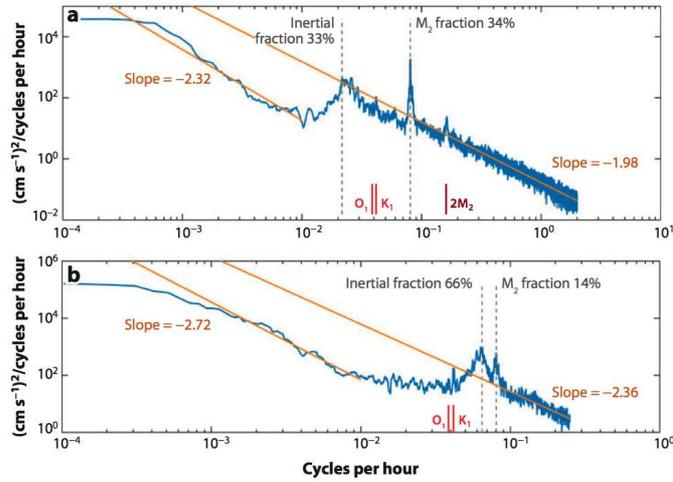


FIGURE 2 – Deux exemples de spectres d’énergie cinétique, correspondant à deux cas raisonnablement représentatifs de spectres rencontrés dans l’océan. On retrouve le pic d’énergie à la fréquence de Coriolis (marqué par “Inertial fraction”), le pic d’énergie à la fréquence de marée dominante (ici semi-diurne, marqué par “ $M_2$  fraction”) et un spectre d’énergie décroissant pour les fréquences croissantes. Le spectre du haut est mesuré dans l’Atlantique à la latitude  $15^\circ\text{N}$ , le spectre du bas au sud de la Tasmanie à la latitude  $50,7^\circ\text{S}$  (extrait de [FW09, Fig. 2]).

pics, un est à la fréquence de marée dominante (souvent semi-diurne) et l’autre est proche de la fréquence de Coriolis. Chaque pic correspond à une injection d’énergie, le premier par la marée interne et le second par le vent, poussant horizontalement des masses d’eau soumises ensuite à la force de Coriolis. Ces deux sources sont pratiquement les deux seules sources d’ondes internes dans l’océan.

Les ondes internes se propagent ensuite depuis leur point d’émission et finissent par être dissipées, éventuellement en subissant au préalable des transformations réduisant leur échelle, ce qui correspond à la décroissance continue de la densité d’énergie pour les fréquences croissantes. On peut recenser quatre causes différentes à cette cascade/dissipation :

1. les interactions avec la topographie,
2. les évolutions faiblement non-linéaires des ondes,
3. les interactions avec des structures méso-échelles ( $\sim 10$  km) telles que des tourbillons,
4. les instabilités hydrodynamiques (convectives et de cisaillement principalement) et le déferlement.

Certains aspects des points 1 et 2 constituent l’objet d’étude même de cette thèse et le point 3 s’y invite à quelques moments cruciaux. Le point 4 n’est pas abordé directement mais peut être catalysé par les points 1, 2 et 3. Il intervient donc en tant que motivation. Le mécanisme terminant la

chaîne de la dissipation est bien entendu la dissipation moléculaire, qui n'est pas directement un objet d'étude en soi ici mais est présent systématiquement. De plus, tous les points précédents l'induisent et constituent donc des préalables indispensables à sa caractérisation.

Plus précisément, cette thèse s'intéresse à quelques aspects fondamentaux de la physique des ondes internes lorsqu'elles rencontrent un obstacle au travers duquel elles ne peuvent pas, ou quasiment pas, être transmises. Ce peut être une paroi solide ou un saut de densité suffisamment fort pour que seule une faible quantité d'énergie soit transmise. Nous verrons que les effets non-linéaires sont des éléments centraux des processus engagés. Cet exposé aurait donc pu s'appeler *Réflexions non-linéaires d'ondes de gravité internes* mais nous avons constaté que dans notre étude, réflexion et réfraction sont deux concepts qui sont souvent allés de pair.

La plupart des résultats obtenus lors de cette thèse sont présentés sous forme d'articles publiés ou en état de révision avancée. La **Partie I** est consacrée à une description de la physique des ondes internes, ou ondes d'inertie-gravité. Son but est de fournir en trois chapitres un aperçu des connaissances nécessaires à la compréhension des deux autres parties et de l'esprit dans lequel elles ont été conçues, ce que ne permettent pas les articles.<sup>5</sup> Le Chapitre 1 porte sur les propriétés des ondes internes lorsqu'une dynamique linéaire est suffisante pour les décrire. Les quelques effets non-linéaires abordés lors de ce travail sont introduits dans le Chapitre 2 et enfin le Chapitre 3, plus technique, s'attache à décrire les outils d'étude des ondes internes qui seront employés dans les deux parties suivantes.

Dans la **Partie II**, nous nous intéressons à la réflexion d'ondes internes sur les parois inclinées solides et à leurs conséquences. Le but est d'améliorer la compréhension de concepts fondamentaux liés à la réflexion des ondes. Ainsi, le Chapitre 4 présente la simulation d'un attracteur bi-dimensionnel d'ondes internes de gravité, un objet physique qui peut être rencontré lorsque des ondes internes se propagent dans des espaces majoritairement clos, dont au moins une des parois n'est ni perpendiculaire, ni parallèle au vecteur de gravité. Le but est tout d'abord de valider cette simulation en la comparant à une expérience déjà réalisée, de proposer un modèle pour la largeur de la zone de confinement de l'attracteur et de mettre en évidence les effets non-linéaires qui apparaissent. Le Chapitre 5 quant à lui s'intéresse au système d'interactions non-linéaires entre une onde interne plane incidente contre une paroi inclinée, sa réflexion et les différents harmoniques générés. Les données sont cette fois principalement tirées d'expériences de laboratoire et éventuellement comparées à des simulations numériques 2D.

---

5. Il est à noter que comme l'indique le titre de cet ouvrage, les Parties II et III vont se consacrer majoritairement au cas particulier des d'ondes de gravité internes, c'est à dire que la rotation sera souvent absente. Nous avons quand même pris le parti de décrire le cas général des ondes d'inertie-gravité dans la Partie I, ce qui aura quelques applications, notamment dans la Partie III.

---

La **Partie III**, enfin, s'intéresse au problème de l'impact d'une onde interne sur un saut de densité ou pycnocline (une interface fluide en quelque sorte). Ce problème est cette fois motivé par l'exemple concret du Golfe de Gascogne et est traité en deux étapes. Le Chapitre 6 s'attache, à l'aide de simulations numériques 2D idéalisées, à déterminer sous quelles conditions un rayon d'ondes internes peut générer une perturbation de la pycnocline suffisamment forte pour générer des ondes non-linéaires et dispersives (dites ondes solitaires), ainsi qu'à comprendre en quoi une configuration donnée sélectionne une structure donnée des ondes solitaires. La deuxième étape, présentée en Chapitre 7, quitte le domaine des simulations académiques pour présenter des simulations numériques 2D à l'échelle du Golfe de Gascogne, en tentant de s'approcher autant que possible des conditions qui y sont observées. Le but est cette fois de voir dans quelle mesure les résultats déduits du contexte idéalisé du chapitre précédent s'y appliquent et en cas d'écart aux prédictions, d'en expliquer la raison.



Première partie

Physique des ondes internes



# Chapitre 1

## Ondes internes linéaires

### 1.1 Deux forces de rappel anisotropes

Comme toutes ondes mécaniques, les ondes internes ont besoin d'une ou plusieurs forces de rappel, fournie(s) ici par la rotation et/ou une stratification stable en densité. Ces deux caractéristiques créent deux directions privilégiées, sources d'anisotropies : l'axe de rotation dans le premier cas et la direction de la gravité dans le second. Sans prétendre égaler le classique Veronis [Ver70], nous allons passer en revue ici les caractéristiques de ces deux forces de rappel et insister sur leurs similitudes. En effet, comme l'indique le titre de cet ouvrage, les Parties II et III traiteront majoritairement d'ondes internes *de gravité*. Il est cependant particulièrement instructif dans un contexte géophysique de voir en quoi la rotation joue un rôle analogue à la gravité. Dans la suite, le terme "ondes internes" sans qualificatif dénotera donc le cas général des ondes en présence de rotation et/ou de stratification.

Définissons dès maintenant un repère cartésien orthonormé  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , avec  $\mathbf{e}_i$  le vecteur unitaire dans la direction  $i$  ( $\mathbf{e}_z$  se référant à la direction verticale ascendante) et  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  le vecteur vitesse et ses coordonnées dans le repère défini.

#### 1.1.1 Stratification stable et confinement vertical

Jusqu'à nouvel ordre, nous supposons que le fluide n'est pas en rotation. Un fluide stablement stratifié est un fluide dans lequel la densité diminue avec l'altitude : le fluide le plus lourd est donc en bas et le fluide le plus léger en haut. Bien que cette situation puisse paraître triviale, le quotidien nous habitue à ne remarquer que la situation inverse dite convective, par exemple lorsque de l'eau bout sur un feu ou lorsque le Soleil chauffe le sol. À l'état naturel, un cas de stratification stable se rencontre généralement dans des situations moins accessibles à l'expérience quotidienne : dans le volume des océans, océans polaires exceptés, dans la stratosphère, la basse troposphère hivernale ou dans les zones radiatives des étoiles telles que le Soleil.

Imaginons que l'on injecte un volume de fluide de densité  $\rho_0$  dans un plus grand volume de fluide stablement stratifié, caractérisé par un profil statique de densité  $\bar{\rho}(z)$  continu tel que  $\bar{\rho}(z_{max}) < \rho_0 < \bar{\rho}(z_{min})$ . En supposant que tout se passe de manière adiabatique, c'est à dire que les phénomènes diffusifs et/ou dissipatifs sont trop lents pour homogénéiser la densité du fluide intrusif avec celle de son environnement, ce fluide de densité  $\rho_0$  va "couler" jusqu'à atteindre la profondeur  $z_0$  telle que  $\rho_0 = \bar{\rho}(z_0)$ . Une fois cette profondeur atteinte, le fluide va se répartir en une nappe horizontale jusqu'à remplir le récipient sur l'étendue de sa superficie. Il sera donc *confiné verticalement* entre deux couches de fluides de densités légèrement différentes et sans un apport d'énergie conséquent, tout mouvement de fluide dans cette nappe sera astreint à l'horizontalité.

Revenons à notre grand volume de fluide stablement stratifié et imaginons que, partant de l'état de repos, on déplace une de ses parcelles d'eau vers le haut. Nous allons supposer que la condition d'adiabaticité est encore une fois satisfaite. Se trouvant dans un environnement subitement plus léger qu'elle, elle va couler, dépasser sa profondeur d'équilibre et se retrouver dans un environnement cette fois plus lourd qu'elle. Elle va ainsi remonter et le mouvement ondulatoire se poursuivra jusqu'à ce que les effets diffusifs et/ou dissipatifs l'amortissent complètement. Quantitativement, si la profondeur d'équilibre de la parcelle est  $z_0$  et qu'elle est déplacée de  $\xi > 0$ , suffisamment faible pour que  $\bar{\rho}(z_0 + \xi)/\bar{\rho}(z_0) \approx 1$ , la combinaison de la gravité et de la poussée d'Archimède volumique, dite flottabilité, exercée sur la particule s'écrit :

$$g(\bar{\rho}(z_0 + \xi) - \bar{\rho}(z_0)) \approx g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \xi, \quad (1.1)$$

avec  $g$  l'accélération de la pesanteur. En négligeant la contrainte visqueuse, l'application de la seconde loi de Newton par unité de masse de la parcelle de fluide donne au premier ordre :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \xi \quad (1.2)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique, mieux visible lorsque écrite sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + N^2\xi = 0, \quad (1.3)$$

avec  $N = \sqrt{-(g/\bar{\rho})d\bar{\rho}/dz}$ , une fréquence qui est bien positive lorsque le fluide est stablement stratifié (dans le cas contraire,  $N$  est imaginaire pur, correspondant à une situation convective). Cette fréquence, parfois appelée fréquence de flottabilité, est plus connue sous le nom de fréquence de Brunt-Väisälä<sup>1</sup>.

---

1. Du nom de deux météorologues du milieu du XX<sup>e</sup> siècle, l'anglais Sir David Brunt et le finlandais Vilho Väisälä.

Ainsi, dans un fluide stablement stratifié, les mouvements horizontaux sont privilégiés et les mouvements verticaux condamnés à être rappelés par la flottabilité.

### 1.1.2 Rotation et confinement latéral

Considérons maintenant un fluide homogène en densité, au repos dans un référentiel en rotation, le vecteur rotation s'écrivant  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ . Rappelons que les termes introduits dans les équations dynamiques du fait que le référentiel est en rotation sont l'accélération centrifuge, que l'on inclut dans une gravité généralisée, et l'accélération de Coriolis qui s'écrit  $2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ .

Imaginons cette fois que l'on injecte dans notre domaine un fluide identique au fluide environnant. Du fait du produit vectoriel donnant sa structure à l'accélération de Coriolis, tout mouvement colinéaire à l'axe de rotation ne sera pas affecté par la rotation. Il ne sera pas affecté non plus par la gravité car celle-ci est compensée par le gradient de pression hydrostatique. Il va donc se répandre en une colonne fluide parallèle à l'axe de rotation appelée colonne de Taylor<sup>2</sup>. Ainsi, la rotation favorise les mouvements le long de son axe<sup>3</sup>.

Au contraire, tout mouvement perpendiculaire à l'axe sera dévié par l'accélération de Coriolis (vers la droite si  $\Omega > 0$ ), reviendra à son point de départ et poursuivra son mouvement circulaire jusqu'à ce que les effets dissipatifs l'amortissent complètement. Nous sommes donc à nouveau en présence d'un mouvement oscillatoire qui doit encore une fois être décrit par les équations de base du mouvement. Imaginons qu'une impulsion perpendiculaire à l'axe de rotation soit donnée à une parcelle de fluide initialement en équilibre. En l'absence d'effets visqueux, l'équation régissant le mouvement de la parcelle de fluide est :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = 0, \quad (1.4)$$

où on a négligé les fluctuations de pression. Cette équation est très similaire à l'équation du mouvement d'une particule de charge  $q$  dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  (la force de Lorentz s'écrivant  $-q\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ ) qui est un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ . En projetant l'équation (1.4) sur le plan horizontal ( $O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ), on obtient deux équations :

$$\frac{du}{dt} - 2\Omega v = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\Omega u = 0, \quad (1.6)$$

2. Bien que d'après Velasco Fuentes [Vel09], Lord Kelvin ait été le premier à découvrir ce phénomène.

3. Elle tend en fait à homogénéiser la dynamique le long de son axe, avec pour résultat le théorème de Taylor-Proudman qui énonce qu'en régime permanent, un écoulement en rotation est bidimensionnel le long de l'axe.

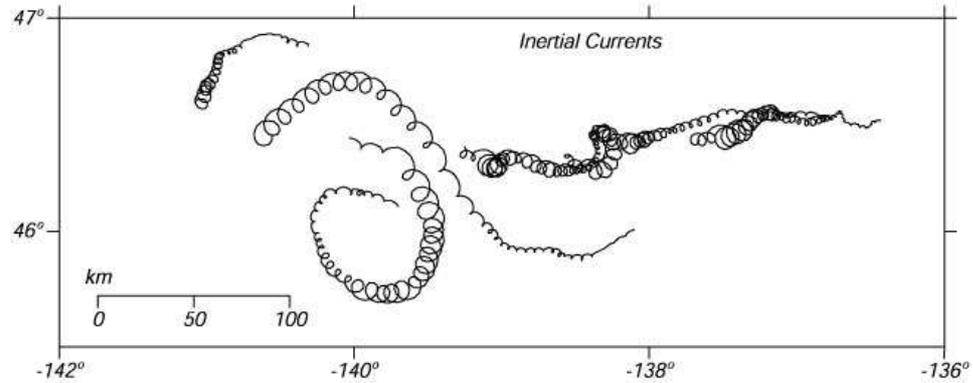


FIGURE 1.1 – Ondes inertielles superposées sur des mouvements de plus grande échelle suivies dans le Pacifique Nord en octobre 1987 par des bouées dérivantes flottant à 15 m de profondeur. Tiré de [Ste08, §9.1], adapté de [van98].

En combinant ces équations, on obtient à nouveau l'équation d'un oscillateur harmonique identique pour  $u$  et  $v$  :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0, \quad (1.7)$$

avec  $f = 2\Omega$  le paramètre de Coriolis qui est donc la fréquence d'oscillation de la parcelle de fluide. Cette dernière revient à sa position initiale deux fois par période de rotation du domaine. On parle d'oscillations inertielles qui se rencontrent couramment dans l'océan, comme le montre la Fig. 1.1.

Si on compare au cas stablement stratifié pour lequel l'axe de symétrie est la gravité, le confinement pour un fluide en rotation est inverse, avec des mouvements favorisés le long de l'axe de symétrie et rappelés dans le plan perpendiculaire à cet axe.

### 1.1.3 Stratification et rotation dans l'océan

#### Stratification

L'océan, pour sa majeure partie, est stablement stratifié. Comme nous le rappellent Gerkema et Zimmermann [GZ08, §2.3.2], tel quel, il n'est pas à l'équilibre thermodynamique du fait de l'apport constant d'énergie par le Soleil qui, en plus de chauffer directement l'eau, est le principal moteur de la machine climato-météorologique et par les marées qui "remuent" l'océan. En général, les eaux profondes sont plus froides que les eaux de surface, les premières étant alimentées par les eaux créées aux pôles, les secondes étant plus proches de l'atmosphère et du Soleil. Un autre composant de l'océan joue aussi sur ce gradient de densité, la salinité. Dans la plupart des cas, ces deux effets, thermique et salin, se combinent pour former un gradient de densité stable et donc une fréquence de Brunt-Väisälä réelle, comme on

peut en voir un exemple pour le Golfe de Gascogne en Fig. 1.2. La fréquence de Brunt-Väisälä entre 200 m et 2000 m de profondeur est typiquement comprise entre 1 et 4 cycles par heure ([CPO02]).

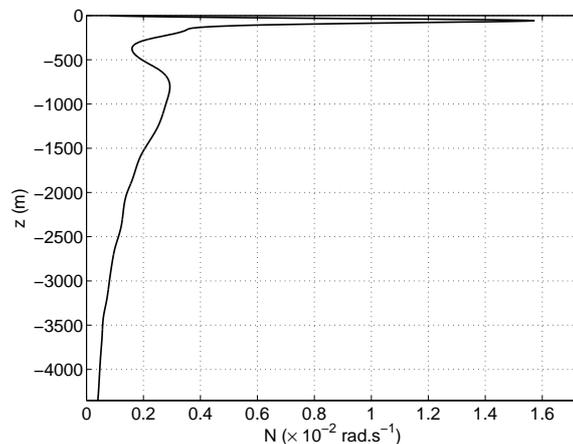


FIGURE 1.2 – Profil de la fréquence de Brunt-Väisälä dans le Golfe de Gascogne tel que mesuré à la fin de l’été. D’après [PN91].

La Fig. 1.2 montre une particularité intéressante, à savoir une forte augmentation de la fréquence de Brunt-Väisälä dans les 100 premiers mètres, correspondant à une forte diminution de la densité. On parle en général d’une “pycnocline”. Cette pycnocline peut être créée par une forte variation de la salinité (on parle alors de “halocline”) mais plus souvent par une forte variation de température (on parle alors de “thermocline”). Le mécanisme de formation d’une thermocline réside dans le fait que le Soleil chauffe la surface de l’eau et que cette eau est brassée par le vent sur une profondeur de quelques mètres (cas d’une mer peu profonde) à quelques dizaines de mètres (océan profond). On a ainsi formation d’une couche de mélange de densité homogène surmontant une brusque variation de densité : la thermocline. Une version très simplifiée de ce mécanisme est illustrée en Fig. 1.3. La présence d’une thermocline dépend généralement de plusieurs paramètres : la latitude, la saison, etc.

Les endroits où l’océan n’est pas ou peu stratifié se situent principalement aux pôles, là où l’eau de mer voit sa densité de surface augmenter du fait de l’action combinée du refroidissement et de la formation de glace, qui augmente la salinité de l’eau restée liquide. On est alors dans une situation de convection.

## Rotation

La rotation terrestre ne peut pas être prise en compte aussi simplement qu’en §1.1.2 car ce sont ses projections sur le référentiel terrestre qui

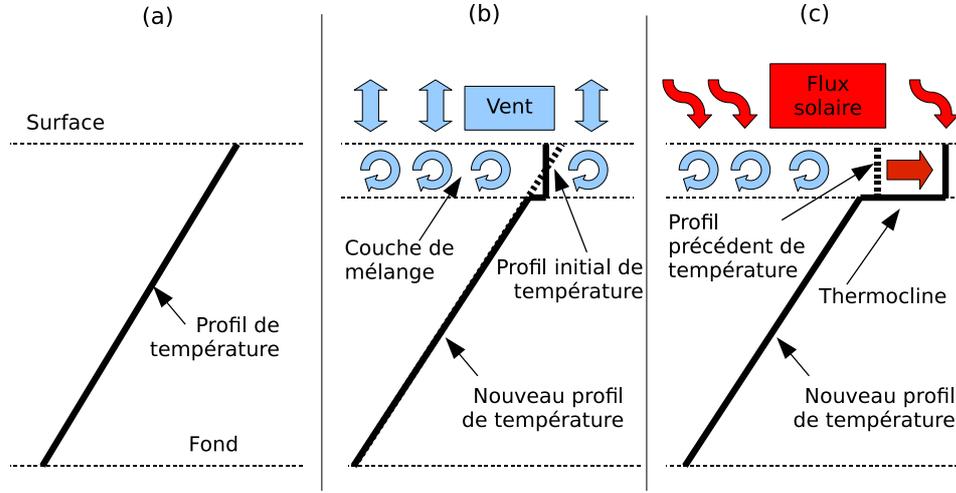


FIGURE 1.3 – Schéma de formation d’une thermocline. (a) : situation initiale, gradient de température constant, stratification stable. (b) : mélange de la couche supérieure de l’océan par le vent et homogénéisation de sa température. (c) : chauffage par le Soleil de la couche de mélange et formation de la thermocline, un saut de température à l’interface entre la couche de mélange et l’océan profond.

comptent. Si on attache le repère cartésien défini auparavant à un observateur  $O$  situé à la latitude  $\lambda$  avec  $y$  dirigé du sud au nord, on a (cf. figure 1.4) :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \tilde{f}w - fv \\ fu \\ -\tilde{f}u \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

avec  $(f, \tilde{f}) = 2\Omega(\sin \lambda, \cos \lambda)$  les paramètres de Coriolis respectivement “traditionnel” et “non-traditionnel”.

Dans les océans, les mouvements sont principalement confinés selon l’horizontale car dans leur majeure partie,  $N \gg \Omega$  (un cycle par jour correspondant à 0,04 cycles par heure). Ainsi, d’une part la flottabilité évoquée ci-dessus est dominante devant la composante verticale de l’accélération de Coriolis et d’autre part, on peut négliger  $\tilde{f}w$  devant  $fv$  dans sa composante selon  $x$ . Dans nombre de cas, on peut donc négliger les termes multipliés par  $\tilde{f}$  et tout se passe comme si à chaque endroit, le vecteur rotation était vertical. Cette approximation est qualifiée de “traditionnelle” et n’est cependant pas valable dans les endroits peu stratifiés où  $N$  est comparable à  $\Omega$ , voire nul (dans le fond des océans par exemple) ou près de l’Équateur où  $f$  s’annule. Une revue détaillée des effets non-traditionnels est faite en [GZMv08], nous n’y serons cependant pas confrontés dans cet exposé et le paramètre de Coriolis sera le paramètre traditionnel.

Nous considérerons  $f$  comme constant. En effet, l’extension méridionale maximale des phénomènes étudiés dans cet exposé sera de  $3^\circ$  autour de  $45^\circ\text{N}$ ,

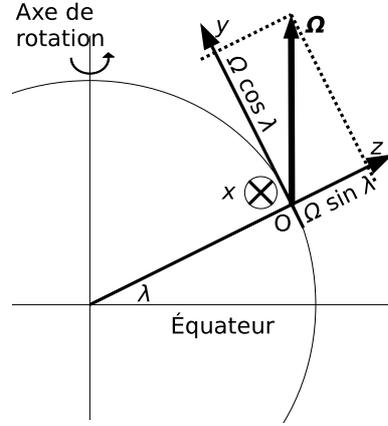


FIGURE 1.4 – Décomposition du vecteur de rotation terrestre  $\Omega$  à une latitude  $\lambda$  sur le repère cartésien  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ .

ce qui correspondra à des études en Golfe de Gascogne (cf. §7). Les valeurs de  $f$  aux latitudes  $44^\circ\text{N}$  et  $47^\circ\text{N}$  sont respectivement de  $1,01 \times 10^{-4} \text{rad.s}^{-1}$  et  $1,06 \times 10^{-4} \text{rad.s}^{-1}$ , soit une variation de 5% que nous négligerons. C'est ce qu'on appelle l'approximation du plan- $f$ <sup>4</sup>.

## 1.2 Dynamique linéaire des ondes internes

### 1.2.1 Équation de propagation

Les mécanismes décrits en §1.1.1 et §1.1.2 correspondent aux mécanismes de base des ondes de gravité internes et des ondes inertielles<sup>5</sup>, respectivement. Ces deux types d'ondes sont les deux visages des ondes internes et nous allons voir en quoi elles se rejoignent. Nous allons supposer que le fluide étudié est incompressible, non visqueux, non diffusif et que les approximations traditionnelle et de plan- $f$  s'appliquent. Tout d'abord, la condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.9)$$

ce qui permet d'écrire l'équation de conservation de la masse comme :

$$\partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1.10)$$

Enfin, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla P - \rho f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \rho b \mathbf{e}_z, \quad (1.11)$$

4. L'approximation de niveau supérieur consiste à prendre en compte les variations d'ordre 1 de  $f$  autour d'une valeur  $f_0$ . Dans ce cas, on écrit traditionnellement le paramètre de Coriolis comme  $f = f_0 + \beta y$ , d'où le nom d'approximation du plan- $\beta$ , que l'on emploie généralement pour des modélisations couvrant plusieurs milliers de km.

5. aussi appelées ondes gyroscopiques

avec  $b = -(\rho - \bar{\rho})g/\rho$  la flottabilité et  $P$  l'écart à la pression hydrostatique.

Nous allons supposer notre étude bidimensionnelle dans le sens où  $\partial_y = 0$  (ce qui n'implique pas  $v = 0$ ). Nous allons aussi considérer que la densité ne varie que très peu du fait des mouvements du fluide et donc que la densité peut être remplacée par sa moyenne  $\rho_0$ , à l'exception des fluctuations de densité incluses dans  $b$  (on a donc  $b = -(\rho - \bar{\rho})g/\rho_0$ ). Cette approximation est dite de Boussinesq ([Bou03]).

Nous allons prendre le rotationnel de l'équation (1.11). Il est utile de se rappeler que le rotationnel d'un gradient est nul, que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla(\|\mathbf{v}\|^2/2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (1.12)$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  est la vorticité du fluide, que l'identité de Lagrange dit que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \quad (1.13)$$

et enfin de garder en tête l'équation (1.9) pour le calcul du terme de Coriolis. On obtient ainsi l'équation de Helmholtz avec rotation et forcée par la flottabilité :

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = f \partial_z \mathbf{v} - (\partial_x b) \mathbf{e}_y. \quad (1.14)$$

Comme on peut le voir, la flottabilité est portée par  $\mathbf{e}_y$  et nous allons donc projeter l'équation (1.14) dans cette direction. Restera une équation pour  $v$  afin de fermer le système. Les équations [(1.14)· $\mathbf{e}_y$ ], [(1.11)· $\mathbf{e}_y$ ] et [ $g(1.10)/\rho_0$ ] deviennent donc, respectivement :

$$\partial_t \varpi_y + (u \partial_x + w \partial_z) \varpi_y = f \partial_z v - \partial_x b, \quad (1.15)$$

$$\partial_t v + (u \partial_x + w \partial_z) v = -f u, \quad (1.16)$$

$$\partial_t b + (u \partial_x + w \partial_z) b + N^2 w = 0, \quad (1.17)$$

avec  $N^2 = -(g/\rho_0)(\partial \bar{\rho}/\partial z)$  sous l'approximation de Boussinesq et  $\varpi_y = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_y$ .

La relation d'incompressibilité (1.9) s'écrit  $\partial_x u + \partial_z w = 0$  et permet d'affirmer qu'il existe une fonction de courant  $\psi$  telle que  $(u, w) = (\partial_z \psi, -\partial_x \psi)$ . On peut donc passer de quatre  $(u, v, w, b)$  à trois  $(\psi, v, b)$  inconnues en remarquant que  $\varpi_y = \partial_z u - \partial_x w = \nabla^2 \psi$  et écrire les équations (1.15)–(1.17) comme suit :

$$\partial_t \nabla^2 \psi - J(\psi, \nabla^2 \psi) = f \partial_z v - \partial_x b, \quad (1.18)$$

$$\partial_t v - J(\psi, v) = -f \partial_z \psi, \quad (1.19)$$

$$\partial_t b - J(\psi, b) - N^2 \partial_x \psi = 0, \quad (1.20)$$

où  $J$  est le déterminant jacobien défini pour deux fonctions  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  par  $J(\zeta_1, \zeta_2) = (\partial_x \zeta_1)(\partial_z \zeta_2) - (\partial_z \zeta_1)(\partial_x \zeta_2)$ . En effectuant l'opération  $\partial_t(1.18)$

+  $f\partial_z(1.19) - \partial_x(1.20)$ , on obtient finalement l'équation de propagation des ondes internes :

$$\partial_{tt}^2 \nabla^2 \psi + N^2 \partial_{xx}^2 \psi + f^2 \partial_{zz}^2 \psi = \partial_t J(\psi, \nabla^2 \psi) - \partial_x J(\psi, b) + f \partial_z J(\psi, v). \quad (1.21)$$

On peut remarquer que les jacobiens contiennent tous les termes non-linéaires et exclusivement eux. Ainsi, le membre de gauche de l'équation précédente correspond à l'équation de propagation *linéaire* des ondes internes. Dans le cas d'une onde plane de la forme

$$(\psi, v, b) = (\tilde{\psi}, \tilde{v}, \tilde{b}) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c., \quad (1.22)$$

où  $k_x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x$ ,  $k_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z$ ,  $\omega$  est la fréquence de l'onde et *c.c.* le complexe conjugué, tous les jacobiens s'annulent. Ainsi, *une onde plane linéaire est aussi solution des équations non-linéaires, quelle que soit son amplitude.*

### 1.2.2 Relation de dispersion et vitesses de propagation

Nous partons donc d'une onde plane décrite par l'équation (1.22), que nous injectons dans l'équation (1.21) pour obtenir la relation de dispersion des ondes internes :

$$k^2 \omega^2 = k_x^2 N^2 + k_z^2 f^2, \quad (1.23)$$

avec  $k = \|\mathbf{k}\|^2$  le module du vecteur d'onde. Il est possible de définir un angle  $\theta$  tel que  $(\sin \theta, \cos \theta) = (|k_x|, |k_z|)/k$ , l'angle entre le vecteur  $\mathbf{k}$  et la verticale. Dans ce cas, la relation de dispersion peut se réécrire :

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta. \quad (1.24)$$

Par la suite, nous allons supposer  $\omega > 0$ . On peut alors remarquer que  $\min(N, |f|) \leq \omega \leq \max(N, |f|)$ . Ainsi, un forçage oscillant donnera naissance à des ondes propagatives si sa fréquence est comprise entre ces deux extrêmes et à des ondes évanescentes sinon.

La relation de dispersion lie la fréquence à l'angle de propagation des ondes par rapport à la verticale (ou l'horizontale) et non pas au module du vecteur d'onde comme pour les ondes usuelles<sup>6</sup>. On retrouve l'anisotropie décrite qualitativement en §1.1. La relation de dispersion ne comportant que des carrés, si l'angle  $\theta$  la satisfait, alors  $-\theta$ ,  $\pi - \theta$  et  $\theta - \pi$  la satisfont aussi.

La vitesse de groupe se définit comme le gradient de la fréquence dans

6. telles les ondes (isotropes) électromagnétiques, sonores, de surface...

l'espace des nombres d'ondes [Gil82, §6.6] :

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\mathbf{e}_z. \quad (1.25)$$

Elle est donc perpendiculaire aux isocontours de  $\omega$  dans l'espace des nombres d'ondes, qui sont eux-mêmes des isocontours pour le rapport  $k_x/k_z$ . Ainsi, si un vecteur  $\mathbf{k}$  satisfait la relation de dispersion, il est perpendiculaire à  $\mathbf{c}_g$ , d'où la particularité parfois énoncée de dire que les ondes internes ont leur vitesse de groupe perpendiculaire à leur vitesse de phase<sup>7</sup>. Les expressions pour les vitesses de phase et de groupe sont finalement :

$$\begin{aligned} (c_\phi, c_{\phi x}, c_{\phi z}) &= \left( \frac{\omega}{k}, \frac{\omega}{k_x}, \frac{\omega}{k_z} \right) \\ &= \frac{\sqrt{N^2 \sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta}}{k} \left( 1, \frac{\text{sgn}(k_x)}{\sin \theta}, \frac{\text{sgn}(k_z)}{\cos \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_g &= \frac{(N^2 - f^2)k_x k_z}{\omega k^4} \begin{pmatrix} k_z \\ -k_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{(N^2 - f^2) \sin 2\theta}{2\omega k} \begin{pmatrix} \text{sgn}(k_x) \times \cos \theta \\ -\text{sgn}(k_z) \times \sin \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

La table 1.1 résume ces résultats et fournit une représentation des configurations de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{c}_g$  dans les quatre cadrans. On y voit notamment que  $\theta$  est aussi l'angle entre  $\mathbf{c}_g$  et l'horizontale. Enfin, on peut remarquer que pour  $\omega = N$  ou  $f$ ,  $\theta = \pi/2$  ou  $0$  respectivement et  $\mathbf{c}_g = 0$ . On peut donc réduire la condition de propagation des ondes à  $\min(N, |f|) < \omega < \max(N, |f|)$ .

Pour une onde plane et d'après la relation d'incompressibilité,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.28)$$

Ainsi, la structure du champ de vitesse est cisailée, avec des mouvements des particules fluides induites par l'onde perpendiculaires à la propagation de la phase, alignés avec les isophases des ondes on encore alignés avec la vitesse de groupe  $\mathbf{c}_g$  (cf. figure 1.5). La version linéarisée de l'équation (1.21) est :

$$\partial_{tt}^2 \nabla^2 \psi + N^2 \partial_{xx}^2 \psi + f^2 \partial_{zz}^2 \psi = 0. \quad (1.29)$$

---

7. Bien que cette manière de dire soit pédagogiquement intéressante, elle est quelque peu abusive. En effet, elle implique que la vitesse de phase soit un vecteur  $\mathbf{c}_\phi$  porté par  $\mathbf{k}$ . On serait ainsi tenté de définir par exemple  $c_{\phi x}$ , la vitesse de phase selon  $x$ , par  $\mathbf{c}_\phi \cdot \mathbf{e}_x$ . Or ceci n'est *pas* la vitesse de déplacement de la phase selon  $x$ , qui est plus grande que  $c_\phi = \|\mathbf{c}_\phi\|$ . Tout est question de conventions et celle utilisée ici est telle que les définitions de  $c_\phi$ ,  $c_{\phi x}$  et  $c_{\phi z}$  (scalaires) sont  $\omega/k$ ,  $\omega/k_x$  et  $\omega/k_z$ , respectivement. Dans ce cas,  $c_\phi^2 \neq c_{\phi x}^2 + c_{\phi z}^2$  et la vitesse de phase n'est donc pas un vecteur, au contraire de  $\mathbf{k}$  [Gil82, §5.3].

En supposant que la fonction de courant peut s'écrire  $\psi(x, z, t) = \psi_0(x, z)e^{-i\omega t}$ , la dernière équation devient :

$$(N^2 - \omega^2)\partial_{xx}^2\psi_0 + (f^2 - \omega^2)\partial_{zz}^2\psi_0 = 0. \quad (1.30)$$

qui est une équation aux dérivées partielles dont les courbes caractéristiques ont pour équation  $z \pm x\sqrt{(\omega^2 - f^2)/(N^2 - \omega^2)} = cte$ . Pour une onde plane, ces caractéristiques coïncident avec les lignes isocontour de  $\psi_0$  inclinées d'un angle  $\theta = \arctan((\omega^2 - f^2)/(N^2 - \omega^2))$  avec l'horizontale. Ainsi, nous parlerons de caractéristiques pour parler de lignes telles qu'en tout point, les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{c}_g$  y sont tangents.

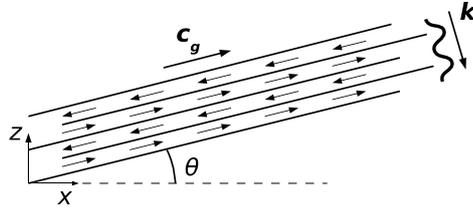


FIGURE 1.5 – Structure d'une onde interne de gravité plane (adapté de [Gos06, Fig. 1.2]). Pour une onde inertielle plane, le vecteur  $\mathbf{k}$  est opposé.

La relation de dispersion des ondes internes est illustrée en figure 1.6 pour  $f = 0$ , où l'on voit un cylindre oscillant émettre des ondes de gravité internes. Dans ce cas, la relation de dispersion devient  $\omega = N \sin \theta$ ,  $\theta$  correspondant à quatre couples  $(k_x, k_z)$ . Pour chaque fréquence telle que  $\omega < N$ , on a bien émission de quatre rayons d'ondes internes dans quatre directions formant une "croix de Saint-André", chaque branche de la croix étant portée par un vecteur  $\mathbf{c}_g$  différent. La mise en évidence expérimentale de ce phénomène a été réalisée pour la première fois par Görtler [Goe43] et redécouverte par Mowbray et Rarity [MR67]. La figure 1.6(e) montre un cas où  $\omega > N$  et où les ondes sont évanescentes. Nous reviendrons au cas de l'émission par un objet en §1.3.

Il est intéressant de relier ce comportement des ondes de gravité internes à ce qui a été dit en §1.1.1. En effet, quand  $\omega \rightarrow 0$ , on se rapproche du mouvement non-oscillant, qui est horizontal (confinement vertical des mouvements). Or, les rayons ainsi que les mouvements fluides deviennent plus horizontaux, ceux-ci étant alignés avec  $\mathbf{c}_g$ . Au contraire, lorsque  $\omega \rightarrow N$ , les mouvements de fluide deviennent plus verticaux et se rapprochent du cas des oscillations à la fréquence  $N$ . Ainsi, les deux mouvements décrits en §1.1.1 (non-oscillant et oscillation à fréquence  $N$ ) constituent les deux types "extrêmes" de mouvements possibles pour les ondes de gravité internes propagatives.

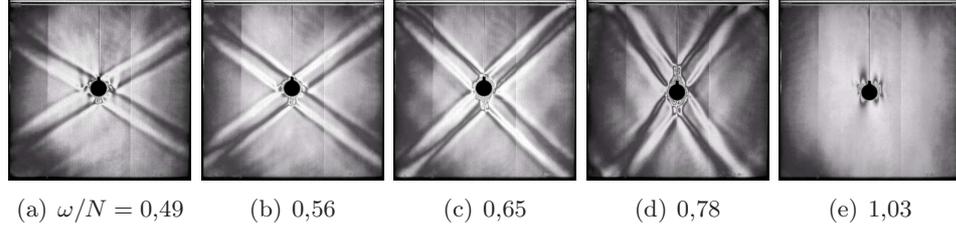


FIGURE 1.6 – Illustration de la relation de dispersion pour différentes valeurs du rapport  $\omega/N$  ( $f = 0$ ). Un objet cylindrique oscille verticalement dans une solution stratifiée en sel caractérisée par  $N = 3,9 \text{ rad.s}^{-1}$  et le dispositif est observé sur le côté. Les oscillations du fluide sont visualisées par interférométrie de moiré (tiré du site internet [www.gfd-dennou.org](http://www.gfd-dennou.org)).

En procédant par analogie et en s'appuyant sur la section 1.1.2, on peut voir que dans le cas où  $N = 0$  et  $f \neq 0$ , l'inverse se produit : les basses fréquences impliquent des rayons plus verticaux (confinement latéral) alors que les hautes fréquences impliquent des rayons plus horizontaux et des trajectoires quasi-circulaires. Dans le cas où  $N$  et  $f$  sont tous les deux non-nuls, le comportement des ondes internes consiste en un subtil mélange de ces deux types de comportements et l'objet de la table 1.1 a pour objet d'en dégager quelques aspects simples.

### 1.2.3 Considérations énergétiques

En supposant que tous les termes non-linéaires peuvent être négligés et les hypothèses de Boussinesq et d'incompressibilité satisfaites, on obtient, via l'opération  $(1.11) \cdot \mathbf{v} + b(1.17)/N^2$  :

$$\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial(\|\mathbf{v}\|^2 + b^2/N^2)}{\partial t} + \nabla \cdot (P\mathbf{v}) = 0. \quad (1.31)$$

On remarque que cette équation exprime la conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial(e_c + e_p)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0, \quad (1.32)$$

avec  $e_c = \rho_0 \|\mathbf{v}\|^2/2$  et  $e_p = \rho_0 b^2/(2N^2)$  les énergies volumiques cinétique et potentielle et  $\mathbf{\Pi} = P\mathbf{v}$  le vecteur de flux d'énergie transportée par le champ d'ondes internes, appelé ainsi par analogie avec le vecteur de Poynting rencontré en électromagnétique.

En supposant que la fonction de courant s'écrit  $\psi = \tilde{\psi} \sin(k_x x + k_z z - \omega t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (u, w) &= (k_z, -k_x) \tilde{\psi} \cos(k_x x + k_z z - \omega t), \\ (v, b) &= (fk_z, -N^2 k_x) \frac{\tilde{\psi}}{\omega} \sin(k_x x + k_z z - \omega t), \end{aligned} \quad (1.33)$$

qui sont des relations de polarisations qui seront généralisées en §1.4. Les équations (1.19) et (1.20) ont été utilisées pour  $v$  et  $b$ . Ainsi, on peut simplifier l'écriture des énergies volumiques :

$$e_c = \frac{\rho_0 \tilde{\psi}^2}{2} \left( k^2 \cos^2(k_x x + k_z z - \omega t) + \frac{f^2 k_z^2}{\omega^2} \sin^2(k_x x + k_z z - \omega t) \right) \quad (1.34)$$

$$e_p = \frac{\rho_0 N^2 k_x^2 \tilde{\psi}^2}{2\omega^2} \sin^2(k_x x + k_z z - \omega t). \quad (1.35)$$

On peut remarquer que dans le cas particulier où  $f = 0$ , il y a équipartition de l'énergie :  $\langle e_c \rangle = \langle e_p \rangle$ , où  $\langle \cdot \rangle$  représente la moyenne dans l'espace et/ou le temps. Dans tous les cas, l'énergie volumique macroscopique se simplifie remarquablement :

$$e_m = e_c + e_p = \frac{\rho_0 k^2 \tilde{\psi}^2}{2}. \quad (1.36)$$

Enfin, par définition, le vecteur de Poynting peut se réécrire :

$$\mathbf{\Pi} = e_m \mathbf{c}_g = \frac{\rho_0 (N^2 - f^2) k_x k_z \tilde{\psi}^2}{2\omega k^2} \begin{pmatrix} k_z \\ -k_x \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

#### 1.2.4 Réflexion contre une paroi inclinée

Comme remarqué pour la première fois par Phillips ([Phi66]), une manière de voir à quel point la relation de dispersion des ondes internes les rend particulières est d'examiner leur réflexion contre une paroi inclinée d'un angle  $\alpha$  ( $\neq 0$  ou  $\pi/2$ ) par rapport à l'horizontale. En effet, comme représenté en figure 1.7, la conservation de la fréquence lors de la réflexion entraîne que l'angle de propagation des rayons par rapport à cet axe de symétrie est conservé, au lieu de l'angle par rapport à la paroi pour les ondes usuelles. Pour caractériser la réflexion, la comparaison de  $\theta$  et  $\alpha$  amène à définir deux premières catégories de réflexions :

- les réflexions sur-critiques (cf. figure 1.7(a)) :  $\theta > \alpha$ ,
- les réflexions sous-critiques (cf. figure 1.7(b)) :  $\theta < \alpha$ .

La terminologie fait référence à une criticalité se produisant pour  $\theta = \alpha$ . Dans ce cas, une extrapolation des figures 1.7(a) et 1.7(b) permet de se rendre compte que l'onde réfléchie est censée se propager le long de la paroi, avec une longueur d'onde nulle et donc une amplitude infinie du fait de la conservation du flux d'énergie. De plus l'équation (1.27) implique pour  $k \rightarrow \infty$ , la vitesse de groupe devient nulle et les ondes réfléchies ne peuvent plus se propager. Enfin, elles ne peuvent pas non plus se propager vers la source des ondes incidentes car cela impliquerait que leur vecteur d'onde soit égal et opposé au vecteur d'onde incident. Nous sommes donc en présence

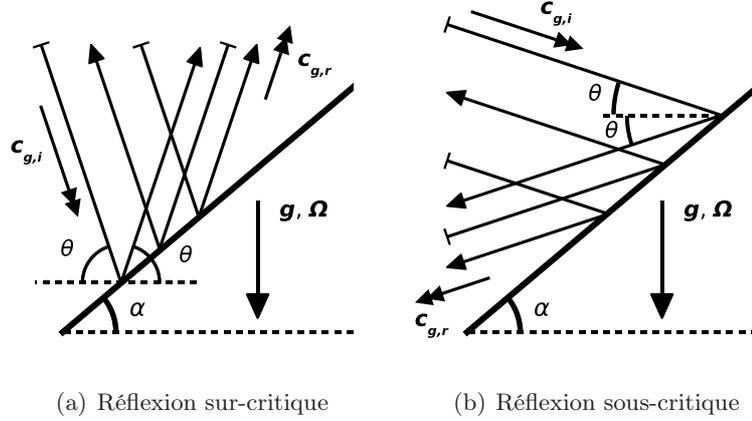


FIGURE 1.7 – Les deux types de réflexions focalisantes d’une onde interne sur une paroi inclinée d’un angle  $\alpha$  par rapport à l’horizontale. Les vecteurs  $\mathbf{c}_{g,i}$  et  $\mathbf{c}_{g,r}$  sont respectivement les vitesses de groupe incidentes et réfléchies. Les réflexions défocalisantes sur- et sous-critiques sont obtenues respectivement en inversant les vitesses de groupe dans les figures (a) et (b). Les flèches superposées aux caractéristiques représentent les vitesses dans le faisceau.

d’une singularité faisant l’objet de travaux de recherches<sup>8</sup> n’entrant pas dans le cadre de cet exposé.

Ensuite, pour chaque cas sur ou sous-critique, deux cas de figures peuvent se produire :

- la réflexion est focalisante (cf. figure 1.7) : après réflexion, les longueurs d’ondes sont contractées,
- la réflexion est défocalisante (cf. figure 1.7, en inversant les vitesses de groupe) : après réflexion, les longueurs d’ondes sont dilatées.

Le coefficient de contraction de la longueur d’onde transverse incidente  $\lambda_i$  se déduit d’un calcul géométrique dont les éléments sont présentés en figure 1.8 et qui est égal à :

$$\mathfrak{N} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \left| \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} \right|. \quad (1.38)$$

On voit notamment que pour le cas critique  $\theta = \alpha$ , on a bien une contraction infinie de la longueur d’onde.

Cela donne donc  $2 \times 2 = 4$  cas de figures, les cas sur- et sous-critiques pouvant chacun se sous-diviser en réflexions focalisante et défocalisante. L’objet de la Partie II est d’étudier en détail quelques conséquences frappantes de ces propriétés de réflexion.

8. par exemple [CW74, DY99, CPO02, DDF04]

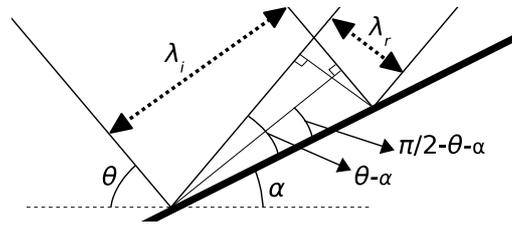


FIGURE 1.8 – Calcul du facteur de contraction  $\mathfrak{K} = \lambda_i / \lambda_r$  lors de la réflexion focalisante d'ondes internes sur une paroi inclinée d'un angle  $\alpha$ , avec  $\lambda_i$  et  $\lambda_r$  les longueurs d'ondes transverses incidentes et réfléchies, respectivement. (Tiré de [Gos06, Fig. 7.4])

### 1.3 Rayons d'ondes internes

Comme le montre la figure 1.6, un objet oscillant émet des ondes internes sous forme de rayons propageant l'énergie dans les directions permises par la relation de dispersion. Ils existent dans l'océan ([PN89, PN91]) et peuvent être générés par des topographies présentant localement des pentes critiques (c.-à-d. dont l'angle de la pente est égal à  $\theta$ , [Bai82]). Dans ce cas, ce n'est bien sûr pas la topographie qui oscille mais le fluide, entraîné par la marée. Cette section passe brièvement en revue les différentes modélisations de ces rayons. Nous considérerons une dépendance harmonique en temps des ondes ( $\psi \propto e^{-i\omega t}$ ).

#### 1.3.1 Rayons d'ondes internes en champ lointain

Comme nous l'avons dit en §1.2.2, en 1967, Mowbray et Rarity [MR67] ont observé expérimentalement la croix de Saint-André caractéristique de la relation de dispersion des ondes de gravité internes (cf. figure 1.9). Cinq ans plus tard, Thomas et Stevenson [TS72] ont proposé une modélisation analytique des observations de Mowbray et Rarity. Il a été prouvé par Peat [Pea78] que les conclusions présentées ici ne changent pas radicalement pour une étude avec rotation.

Sans perte de généralité, Thomas et Stevenson s'intéressent au rayon du premier cadran et commencent par tourner le repère cartésien d'un angle  $\theta$  de manière à ce que les nouveaux axes  $(O, \mathbf{e}_s)$  et  $(O, \mathbf{e}_\eta)$  soient respectivement dans le sens de  $\mathbf{c}_g$  et de  $\mathbf{k}$ , avec un nouveau jeu de coordonnées  $(s, \eta)$  tel que  $s = x \cos \theta + z \sin \theta$  et  $\eta = x \sin \theta - z \cos \theta$  (cf. figure 1.10). De plus, devant modéliser des phénomènes d'échelles centimétriques, ils ne négligent pas la viscosité  $\nu$ . Curieusement<sup>9</sup>, l'étude réalisée en [TS72] est réalisée sans inclure directement certaines approximations devenues usuelles telles que

9. selon nos standards actuels

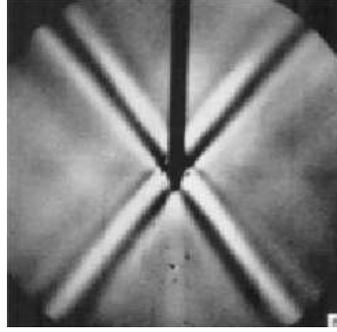


FIGURE 1.9 – Expérience de Mowbray et Rarity [MR67, Planche 1(6)], visualisée par strioscopie et avec  $\omega/N = 0.699$ .

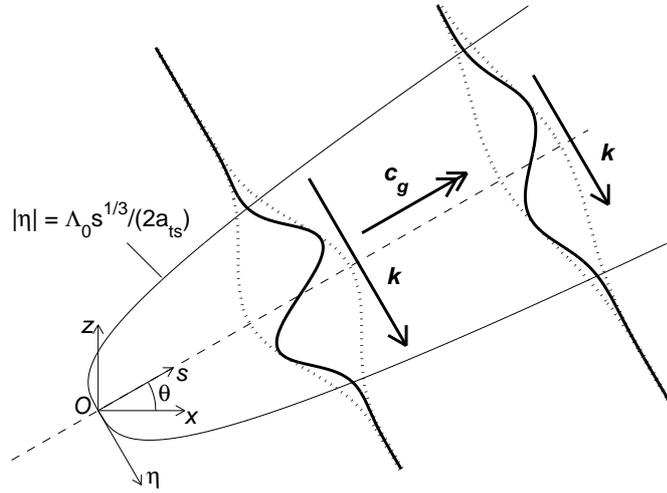


FIGURE 1.10 – Rayon de Thomas et Stevenson. Son amplitude diminue en  $s^{-2/3}$  et la courbe  $|\eta| = \Lambda_0 s^{1/3} / a_{ts}$  permet d'estimer l'évolution de la longueur d'onde dominante  $\lambda$  le long du rayon.

l'approximation de Boussinesq ou le fait de considérer la viscosité comme constante. Ils supposent cependant que les déplacements du fluide sont très faibles (termes non-linéaires négligés) et surtout que le champ (de vitesse, de déplacement...) a une structure de couche limite interne.

Cette dernière approximation est guidée par les expériences de [MR67] et signifie que les variations selon  $s$  sont bien moins importantes que les variations selon  $\eta$  (cf. figure 1.9) et que le faisceau est concentré transversalement dans une très faible portion de l'espace<sup>10</sup>. La traduction en termes mathématiques de cette approximation est que  $\partial_s$  est du même ordre que  $\varepsilon_{ts}\partial_\eta$  ( $\varepsilon_{ts} = ((N^2\omega\nu/2g^2)\tan\theta)^{1/3} \ll 1$ ) et que  $\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty}(\mathbf{v}, b, P) = 0$ .

Après adimensionnalisation et développement au premier ordre en  $\varepsilon_{ts}$  des

10. Pour plus de détails, voir [BO99, §9.6]

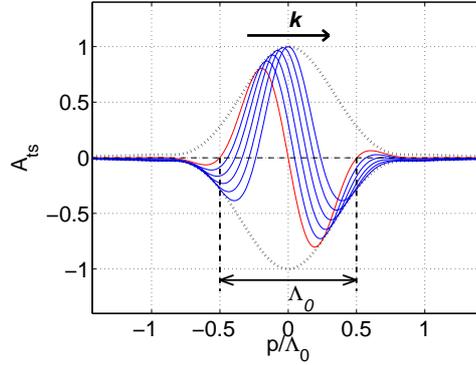


FIGURE 1.11 – Profil de la fonction  $A_{ts}(p, q)$ , c. à d. du rayon de Thomas et Stevenson pour  $p = a_{ts}\eta s^{-1/3}$  et  $q = \omega t$ . Les traits pointillés sont l’enveloppe du profil  $|A_{ts}|$ , le profil tracé en rouge correspond à  $q = 0$  et les autres profils sont tracés pour  $q = n\pi/10$  ( $n = 1 \dots 5$ ).

équations régissant la dynamique des fluides, les auteurs de l’article montrent que le champ  $\xi_{ts}$  de déplacement des particules le long du rayon doit être tel que :

$$\xi_{ts} \propto s^{-2/3} \Im(A_{ts}(a_{ts}\eta s^{-1/3}, \omega t)), \quad (1.39)$$

$\Im$  désignant la partie imaginaire,  $a_{ts} = (g/N\omega)^{2/3}/\varepsilon_{ts} = (2\omega/\nu \tan \theta)^{1/3}$  et avec :

$$A_{ts}(p, q) = \int_0^\infty K \exp(-K^3 + i(pK - q)) dK. \quad (1.40)$$

Le profil  $A_{ts}(p, q)$  est affiché en figure 1.11.

La forme de  $\xi_{ts}$  est riche en contenu physique. Par définition de  $A_{ts}$ , le rayon est le résultat de la superposition d’une infinité d’ondes planes ayant la même fréquence  $\omega$  mais des nombres d’ondes différents. Il est tout de même possible de définir une “longueur d’onde dominante”  $\lambda$ , calculée à partir de  $K_0 = 3^{-1/3}$  qui maximise  $K \exp(-K^3)$ . La longueur d’onde adimensionnée correspondante est  $\Lambda_0 = 2\pi 3^{1/3}$  et en définissant  $\lambda$  telle que  $\Lambda_0 = a_{ts}\lambda s^{1/3}$ , on obtient :

$$\lambda = 2\pi \left( \frac{3s\nu \tan \theta}{2\omega} \right)^{1/3}, \quad (1.41)$$

Cette méthode peut apparaître approximative mais la figure 1.11 montre nettement que pour  $q = 0$ ,  $\Lambda_0$  est la distance entre les deux zéros de  $A(p, q)$  entourant  $p = 0$ . Ainsi, la longueur d’onde  $\lambda$  et donc la largeur du rayon augmentent en  $s^{1/3}$ . Il est remarquable que quelque soit  $s$ , la forme du rayon s’étire mais ne change pas, d’où la qualification d’autosimilaire et qui justifie que la longueur d’onde ait été cavalièrement associée à la largeur du rayon.

Ensuite, par hypothèse du modèle, la structure du rayon ne dépend pas de la taille de l’objet. Plus spécifiquement, en  $s = 0$  (à l’origine),  $\lambda = 0$  et

tout se passe donc comme si on se plaçait infiniment loin de l'objet, d'où le fait que ce modèle soit adapté au champ lointain.

Pour ce qui est de l'amplitude, elle décroît le long du faisceau en  $s^{-2/3}$ . Les responsables sont en fait les effets dissipatifs, qui sont en outre responsables de l'élargissement du rayon. En effet, plus une onde plane a un nombre d'onde  $k$  élevé (petite échelle), plus la viscosité va atténuer son amplitude. Ainsi, au cours de sa propagation le long du rayon, un paquet d'onde possédant initialement toutes sortes d'échelles du fait de la taille nulle de l'objet oscillant va progressivement voir ses petites échelles se dissiper et la largeur du rayon va donc augmenter, en plus de voir son amplitude diminuer. Ces considérations (élargissement du rayon en  $s^{1/3}$ , diminution de son amplitude en  $s^{-2/3}$ ) sont résumées en figure 1.10.

On voit donc que la dissipation visqueuse joue un rôle fondamental dans l'existence des rayons dont la longueur d'onde est proportionnelle à  $\nu^{1/3}$ . Dans l'océan, les échelles en jeu pour les rayons d'ondes internes sont de l'ordre de 100 m, pour des vitesses de l'ordre de  $10 \text{ cm.s}^{-1}$ . Ainsi, les nombres de Reynolds construits avec la viscosité moléculaire de l'eau  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  sont de l'ordre de  $10^7$  et la viscosité moléculaire n'a pas d'effet sur de tels rayons. Cependant, de tels nombres de Reynolds indiquent que l'écoulement est turbulent à l'intérieur des rayons. Or, la turbulence augmente fortement la diffusion de quantité de mouvement et peut être modélisée par une viscosité effective supérieure à la viscosité moléculaire de plusieurs ordres de grandeur (p. ex. [GHP01, §11.1]). Ainsi, dans l'océan comme dans le laboratoire, la viscosité (éventuellement turbulente) joue un rôle essentiel dans la définition de l'échelle transverse des rayons d'ondes internes.

### 1.3.2 Rayons d'ondes internes en champ proche

Dans sa thèse, Louis Gostiaux [Gos06, §4.2-4.3] montre qu'en pratique, la taille de l'objet oscillant peut difficilement être ignorée. Il montre notamment que le modèle de Hurley et Keady [HK97], de 25 ans le cadet de [TS72], est plus adapté aux rayons dans l'océan.

#### Modèle de Hurley et Keady

Les hypothèses de [HK97] comprennent celle de Boussinesq, la non-prise en compte des effets non-linéaires (amplitude de déplacement de l'objet faible devant sa taille), l'approximation de couche limite avec cette fois  $\varepsilon_{hk} = \delta^2 \tan \theta / 2R^2$ ,  $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$  étant l'épaisseur de la couche limite visqueuse autour de l'objet et  $R$  sa taille caractéristique (rayon dans le cas d'un cylindre). Une condition à la limite de l'objet de glissement sans frottement est implémentée, ce qui implique que l'objet "effectif" est considéré comme étant l'objet solide augmenté de la couche limite visqueuse l'entourant, d'épaisseur  $\delta$ . Dans le cadre de ces approximations, le modèle [HK97]

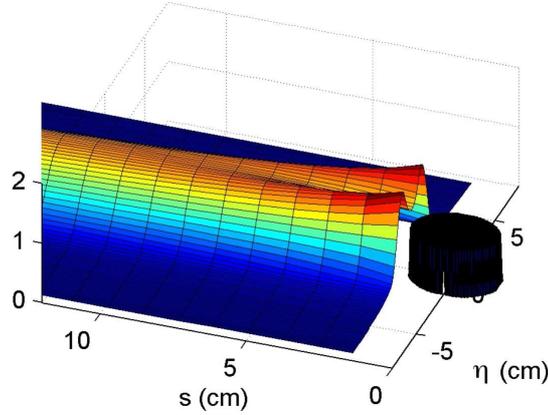


FIGURE 1.12 – Enveloppe du rayon de Hurley et Keady pour  $\omega/N = 0,5$  et  $R = 1,5$  cm (tiré de [Gos06, Fig. 4.6]).

prédit que le déplacement  $\xi_{hk}$  des particules est tel que :

$$\xi_{hk} \propto s^{-1/3} \Im(A_{hk}(\eta, s, t)), \quad (1.42)$$

avec :

$$A_{hk}(\eta, s, t) = \int_0^\infty J_1 \left( \frac{a_{hk}}{(Rs)^{1/3}} K \right) \exp \left( -K^3 + i \left( \frac{a_{hk}\eta}{s^{1/3}} K - \omega t \right) \right) dK, \quad (1.43)$$

avec  $J_1$  la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1 et avec  $a_{hk} = (R^2/\varepsilon_{hk})^{1/3} = (2R^4 \cot \theta/\delta^2)^{1/3}$ . On peut remarquer que du fait de la taille de l'objet, on ne peut plus regrouper  $s$  et  $\eta$  en une seule variable (ce qui nous avait permis de faire intervenir les variables  $p$  et  $q$  dans le modèle [TS72]) : le profil n'est plus autosimilaire. En revanche, à grande distance, du fait de la viscosité, seules les faibles valeurs de  $K$  contribuent significativement à la structure du rayon. Or, pour  $\zeta \gg 1$ ,  $J_1(\zeta) \propto \zeta$  et donc  $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{hk} = \xi_{ts}$ , ce qui fait de [TS72] une bonne approximation de [HK97] en champ lointain. Enfin, il est utile de remarquer que la décroissance de l'amplitude de  $\xi_{hk}$  n'est pas en  $s^{-1/3}$  car une partie de sa dépendance en  $s$  est contenue dans la fonction de Bessel.

L'enveloppe du rayon de Hurley et Keady est tracée en figure 1.12. On voit que près du cylindre oscillant, le rayon comporte deux maxima autour de l'axe  $(0, \mathbf{e}_s)$  : on parle alors de rayon bimodal. Au fur et à mesure de la propagation, les deux moitiés de rayon fusionnent pour donner un rayon de Thomas et Stevenson unimodal.

### Rayons générés par une topographie

Si on se rapproche encore du cylindre, on observe un champ d'ondes internes tel que tracé en figure 1.13(a). À chaque fois que l'angle de la tan-

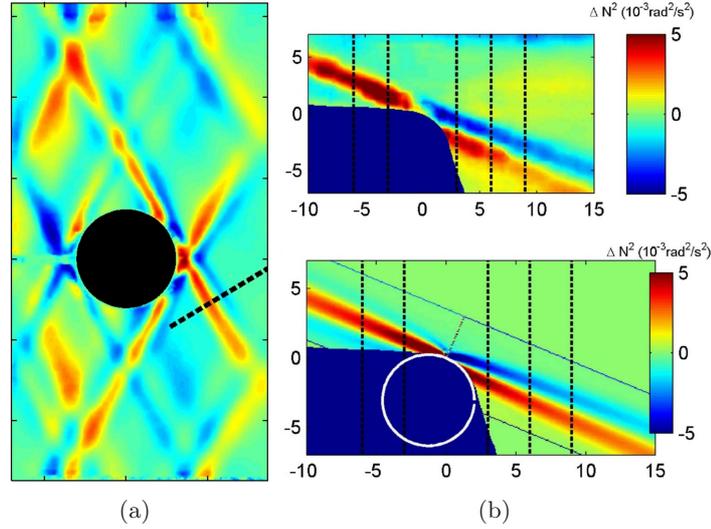


FIGURE 1.13 – (a) Gradient vertical de densité associé à des ondes internes émises par un cylindre de rayon  $R = 3$  cm, pour  $\omega/N = 2/3$ . Un des huit “demi-rayons” est coupé transversalement par la ligne en pointillés (il s’agit en fait de la figure [Gos06, Fig. 4.12] tournée de  $90^\circ$  pour pouvoir être comparée à (b)). (b) Comparaison entre des expériences de génération d’ondes par un talus continental (en haut) et la théorie de Hurley et Keady (en bas). Pour l’expérience, le gradient vertical de densité filtré harmoniquement à la fréquence de forçage est affiché. Les distances sont en cm (tiré de [GD07, Fig. 3]).

gente au cercle est critique, c’est à dire égal à  $\theta$ , un rayon est émis dans les deux directions permises par la relation de dispersion. Il y a donc huit “demi-rayons” émis qui vont s’apparier pour former les quatre rayons de la croix de Saint-André. Notons que d’après la forme analytique de  $A_{hk}$  (1.43), un demi-rayon isolé tendra aussi vers un profil de type Thomas et Stevenson en champ lointain.

Dans l’océan, des topographies présentant des pentes critiques peuvent émettre des rayons d’ondes internes. Cela peut se produire par exemple avec des montagnes, dorsales ou rebords de plateaux continentaux suffisamment pentus ([PN89, PN91], figure 1.14). Gostiaux et Dauxois [Gos06, GD07] ont montré expérimentalement que ces deux rayons d’ondes peuvent s’apparier à deux demi-rayons émis à un endroit de pente critique d’un cercle dont le rayon est égal au rayon de courbure de la topographie au même endroit, en comparant de manière quantitativement satisfaisante la structure du rayon émis par un rebord de plateau continental idéalisé avec la prédiction du modèle de Hurley et Keady (cf. figure 1.13(b)).

Ainsi, un rayon d’ondes internes dans l’océan est apparenté à un demi-rayon de Hurley et Keady. On peut conjecturer que si le rayon de courbure de la topographie est de taille comparable ou supérieure à la distance sur

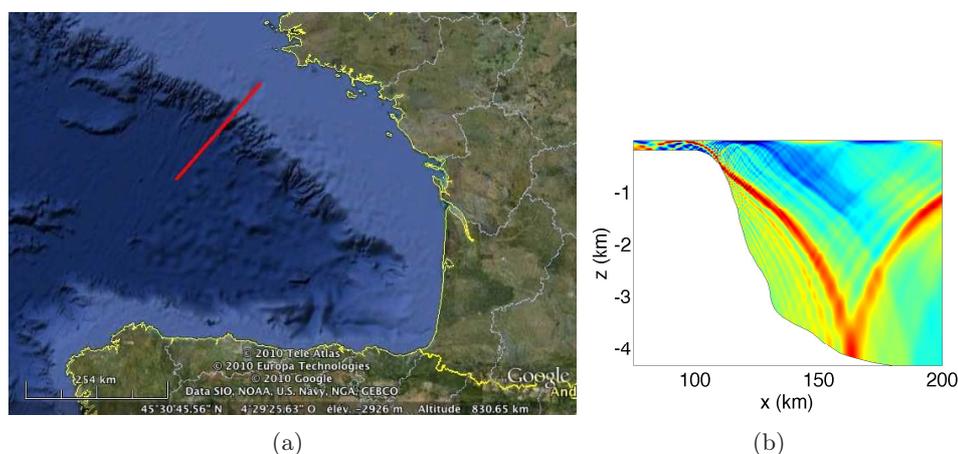


FIGURE 1.14 – (a) Topographie sous-marine du Golfe de Gascogne. Les zones en bleu clair correspondent au plateau continental profond d'environ 200 m, les zones en bleu foncé à l'océan abyssal profond d'environ 4 km. La ligne rouge correspond à la ligne le long de laquelle la coupe de la topographie est affichée en (b), qui montre l'émission de deux rayons d'ondes internes à l'endroit où la pente est critique. La composante de vitesse affichée  $u$  (unités arbitraires) est extraite d'une simulation numérique linéaire et filtrée harmoniquement à la fréquence de la marée semi-diurne (de période 12,42 h). Figure adaptée de la figure 7.7.

laquelle les rayons se propagent, le modèle le décrivant au mieux sera [HK97]. Suffisamment loin de sa zone de génération (typiquement 50 km pour le Golfe de Gascogne), [TS72] sera un modèle satisfaisant, en gardant en tête le fait que l'affirmation repose sur des approximations importantes (2D,  $N = cte. \dots$ ).

Les travaux de Gostiaux et Dauxois ont été cités, ceci dû au fait que l'auteur du manuscrit a été sensibilisé à leurs travaux très tôt. Il faut cependant préciser que ces conclusions ont été tirées postérieurement mais indépendamment par une équipe de l'Université du Texas à Austin ([ZKS07]).

### 1.3.3 Limites d'application et approximation WKB

À l'échelle d'un bassin océanique, les rayons d'ondes internes résistent rarement à plus d'une ou deux réflexions contre le fond ou la surface de l'océan. Plusieurs raisons sont à invoquer, beaucoup étant liées à leurs longueurs d'ondes relativement faibles en comparaison, par exemple, de la profondeur totale de l'océan.

Tout d'abord, les effet tri-dimensionnels peuvent atténuer ces rayons. À titre d'exemple, si ils sont générés par une topographie convexe, l'atténuation sphérique peut diminuer l'amplitude. Si elle est concave, on peut imaginer que les rayons se focalisent et soient dissipés plus vite.

La dissipation d'énergie en général est à bien sûr à invoquer, dissipa-

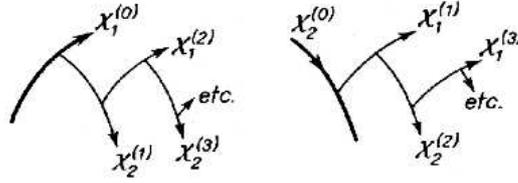


FIGURE 1.15 – Dans le cas où  $N(z)$  varie rapidement en espace et/ou en temps, un rayon initial  $\chi_1^{(0)}$  va subir de multiples réflexions/transmissions internes dans le volume du fluide et va perdre sa structure (tiré de [Bre60] via [GZ08, Fig. 6.6]).

tion accélérée par la turbulence qui fait cascader de l'énergie vers les petites échelles. De plus, les ondes internes sont naturellement et quasiment inconditionnellement sujettes à des instabilités paramétriques sous-harmoniques, qui transfèrent l'énergie vers des ondes de fréquence moitié de la fréquence du rayon (cf. p. ex. [GSB06]).

Un autre phénomène rend les rayons peu susceptibles de subsister en tant que structures cohérentes dans l'océan : la variabilité spatiale et temporelle du milieu dans lequel ils se propagent. Ceci fait intervenir la théorie des rayons, une sous-catégorie de théorie WKB<sup>11</sup> pour laquelle nous nous contenterons d'une description qualitative pour un milieu au repos (cf. [BO99, §10] pour une description de la théorie WKB et [GZ08, §6.5.1] pour son application aux ondes internes). Dans le cas où  $N$  est constant (cas (i)), un rayon se propage sans changement de direction et est bien décrit par les modèles [TS72] et [HK97]. Imaginons maintenant que  $N$  soit constant partout sauf en un endroit où la densité subit un saut, à la manière d'une pycnocline infiniment fine (auquel cas  $N$  est infini en un endroit de largeur nulle). Si ce saut de densité est très grand (cas (ii)), les ondes vont se réfléchir quelque soit la valeur de  $N$  de chaque côté de l'interface (on peut penser à ce qui se passerait à la surface d'un fluide stratifié). Les cas (i) et (ii) forment deux cas extrêmes, jamais observés en pratique mais qui donnent une idée de ce qui se passe dans les cas intermédiaires : si  $N$  varie faiblement en temps et en espace devant les échelles caractéristiques  $\omega^{-1}$  et  $\lambda$ , un rayon se propagera en étant faiblement réfracté et l'onde pourra être supposée localement plane. Si au contraire les variations de  $N$  se font sur des échelles ne pouvant plus être négligées par rapport à  $\lambda^{-1}$  et/ou  $\omega^{-1}$ , des phénomènes de réflexions/transmissions internes vont se produire dans le volume du fluide, qui vont plus ou moins rapidement détruire la structure du rayon (cf. figure 1.15). En remarque, on peut ajouter que des variations de l'écoulement moyen du fluide dans lequel se propagent les ondes peuvent produire des effets similaires à des variations de  $N$ .

$N$  n'est pas constant dans l'océan : pycnoclines (cf. §1.1.1), fronts, in-

11. Théorie développée en 1926 par chacun des membres de la triade Gregor Wentzel – Hendrik A. Kramers – Léon Brillouin.

fluence de l'atmosphère dans les zones proches de la surface sont des exemples ou des causes de variabilité. À cela s'ajoutent d'autres facteurs de perturbations des rayons, comme la présence d'écoulements moyens, de tourbillons, etc. Voilà pourquoi en pratique, un rayon résiste difficilement à la traversée de l'océan sur toute sa hauteur. Les ondes internes ne disparaissent cependant pas pour autant et peuvent traverser des bassins océaniques, comme il a été observé par exemple par Alford *et al.* [AMZ<sup>+</sup>07] au nord de Hawaii, ou par des simulations numériques globales ([SHA04, AWM10]). Elles ne le peuvent cependant pas sous la forme de rayons, comme nous allons le voir tout de suite.

## 1.4 Description modale des ondes internes

Supposons que la fonction d'onde puisse s'écrire sous la forme :

$$\psi(x, z, t) = \Psi(z) \exp i(k_x x - \omega t). \quad (1.44)$$

Lorsque  $\psi$  est injectée dans l'équation de propagation linéaire (1.29), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + k_x^2 \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \Psi = 0. \quad (1.45)$$

Cette équation est parfois dite de Taylor-Goldstein<sup>12</sup>. En supposant un fond plat à l'altitude  $z = -H$  et un toit rigide au lieu d'une surface libre (en pratique, l'élévation de la surface libre induite par les ondes internes est inférieure d'un ordre de grandeur  $\rho_{eau}/\rho_{air} \approx 1000$  au déplacement vertical induit dans le volume), on obtient pour les conditions aux limites :

$$\Psi(z)|_{z=-H} = \Psi(z)|_{z=0} = 0. \quad (1.46)$$

On aurait en fait pu choisir n'importe quelle constante, ce qui aurait assuré une vitesse verticale nulle aux deux parois.

Le système d'équations (1.45) et (1.46) forme un problème de Sturm-Liouville et possède une séquence infinie de fonctions propres normalisées  $\Psi_n$  associées à des valeurs propres – ou modes –  $k_{x,n}$ ,  $n$  étant le numéro du mode (entier). Comme pour tout problème de Sturm-Liouville, les fonctions propres forment une base orthogonale de l'espace des solutions, la relation d'orthogonalité les liant étant :

$$\int_{z=-H}^{z=0} \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \Psi_m \Psi_n dz = \delta_{mn}, \quad (1.47)$$

---

12. Steve Thorpe, qui a baptisé cette équation ([Tho69]), a cependant fait référence au cas  $f = 0$  avec présence d'écoulements moyen.

où  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker. Cette relation d'orthogonalité fixe par ailleurs la normalisation des  $\Psi_n$ . Ainsi, la solution générale pour  $\psi$  (limitée aux ondes se propageant dans le sens positif) peut s'écrire :

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Psi_n(z) \exp i(k_{x,n}x - \omega t), \quad (1.48)$$

où  $a_n \in \mathbb{C}$  est le poids du mode  $n$  et où  $k_{x,n} > 0$ .

On peut remarquer que les champs  $u, v, w, p$  et  $b$  peuvent s'écrire de la même manière que pour  $\psi$  avec l'équation (1.44) et que à partir de la définition de  $\psi$  et de l'équation (1.11), on peut déterminer les relations suivantes, appelées relations de polarisation :

$$\begin{aligned} U &= -\frac{d\Psi}{dz}; & V &= \frac{if}{\omega} \frac{d\Psi}{dz}; & W &= ik_x \Psi; \\ P &= \rho_0 \frac{f^2 - \omega^2}{\omega k_x} \frac{d\Psi}{dz}; & B &= \frac{N^2 k_x}{\omega} \Psi. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Pour faire simple, partons de l'exemple  $N = \text{constante}$ . Il n'est pas nécessaire de faire intervenir de théorie de Sturm-Liouville (un peu d'algèbre est tout de même nécessaire) pour trouver que les  $\Psi_n$  s'écrivent :

$$\Psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H} \frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right), \quad (1.50)$$

alors que les nombres d'onde se déduisent de la relation de dispersion :

$$k_{x,n} = \frac{n\pi}{H} \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}}. \quad (1.51)$$

Tout ceci est bien sûr valable à condition que  $\min(|f|, N) < \omega < \max(|f|, N)$ . Dans le cas contraire, les solutions sont exponentielles décroissantes quand on s'éloigne de la source (afin de respecter les conditions aux limites) et on retrouve les ondes évanescentes évoquées en §1.2.2.

$\Psi_1, \Psi_2$  et  $\Psi_3$  sont affichées en figure 1.16(a).  $\psi_1, \psi_2$  et  $\psi_3$  sont affichées en figures 1.16(b), (c) et (d) respectivement, en définissant  $\psi_n = a_n \Psi_n(z) \exp i(k_{x,n}x - \omega t)$  et en choisissant les  $a_n$  tel que  $\forall n, \max(\Psi_n) = 1$ . Plus intéressante est l'addition de  $\psi_1, \psi_2$  et  $\psi_3$ , en figure 1.16(e) : un rayon apparaît. Cet exemple est peu élaboré mais en ajustant les poids  $a_n$  (qui comprennent les déphasages entre les modes), on peut reproduire tout mouvement oscillatoire, à la condition que le domaine ait un fond plat ou faiblement variable par rapport aux longueurs d'ondes (*cf.* p. ex. [MG08]). Par exemple, un rayon très fin aura des poids plus élevés pour les modes élevés. Il est aussi possible d'inclure la viscosité dans le modèle mais cela complique nettement les calculs (*cf.* p. ex. [MP09]).

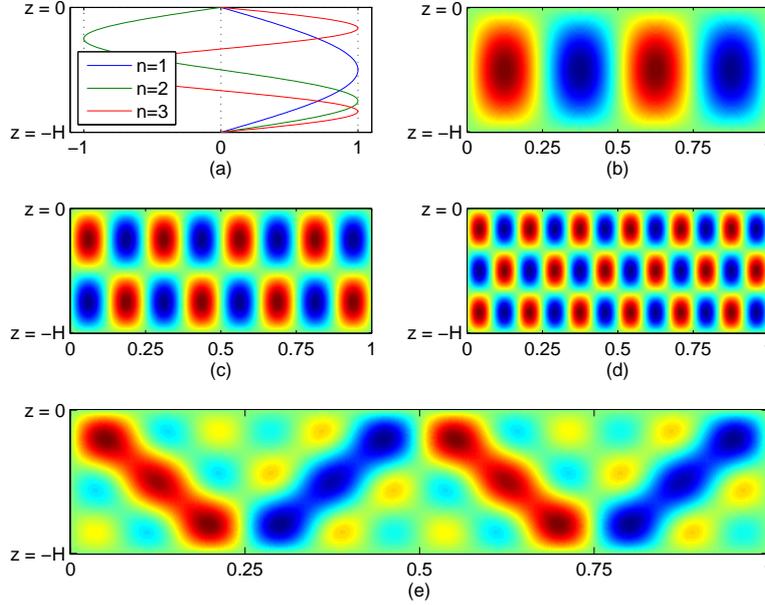


FIGURE 1.16 – Trois premiers modes d’ondes internes avec  $N$  constant. (a)  $\Psi_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . (b)  $\psi_1(x, z, t)|_{t=0}$ . (c)  $\psi_1(x, z, t)|_{t=0}$ . (d)  $\psi_2(x, z, t)|_{t=0}$ . (e)  $(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)(x, z, t)|_{t=0}$ . Les échelles de couleur pour (b), (c), (d) et (e) sont arbitraires mais identiques, les axes horizontaux correspondent à la quantité  $2\pi x/k_{x,1}$ .

Lorsque  $N$  dépend de l’altitude, il est plus simple et parfois nécessaire de passer par une résolution numérique du système (1.45)-(1.46), ce que nous ferons abondamment en Partie III de ce manuscrit.

Plus qu’une manière de décomposer les mouvements oscillatoires en modes orthogonaux, le formalisme modal possède une certaine réalité physique, en tout cas pour ce qui est des modes bas (s’il fallait donner une estimation, ce serait  $n \leq 3$ ). En effet, on peut introduire la dissipation en multipliant  $\psi_n$  par un facteur de décroissance visqueuse tel que sa nouvelle expression serait :

$$\psi_n(x, z, t) = \Psi_n(z) \exp i((k_x + i\beta_\nu)x - \omega t), \quad (1.52)$$

avec  $\beta_\nu$  l’inverse de la distance caractéristique d’atténuation de l’amplitude des ondes internes. Dans le cas d’une onde plane de vecteur d’onde  $\mathbf{k}$ , il est possible de trouver une expression simple pour cette distance. Le temps caractéristique d’atténuation visqueuse est  $(\nu k^2)^{-1}$ , donc l’amplitude d’un paquet d’onde décroît au cours de sa propagation selon un facteur  $e^{-\nu k^2 t}$ . Or,

$$\nu k^2 t = \nu k^2 x / c_g = \nu k^4 x / N k_z. \quad (1.53)$$

Pour obtenir ce résultat, on rappelle que d’après l’équation (1.27),  $c_g =$

$Nk_z/k^2$ . On a donc pour l'expression de  $\beta_\nu$  ([Lig78, §4.7, eq. (220)]) :

$$\beta_\nu = \frac{\nu k^4}{Nk_z} = \frac{\nu n^3 \pi^3}{H^2 \cos^3 \theta}, \quad (1.54)$$

$\nu$  pouvant encore une fois être une viscosité effective bien plus importante que la viscosité moléculaire de l'eau. La distance d'atténuation diminue en  $n^{-3}$  et les modes élevés sont donc beaucoup plus atténués que les modes bas. D'autres phénomènes entrent ensuite en jeu : instabilités paramétriques, perturbations par des courants ou autres, les grandes échelles étant toujours les moins sensibles à tous ces phénomènes. Concrètement, dans l'océan, seules les ondes internes de modes inférieurs ou égaux à 3 sont capables de parcourir des bassins océaniques de plusieurs milliers de kilomètres.

Ceci permet de fournir une image schématique de la répartition des types d'ondes internes : près des côtes et des endroits de génération, les ondes ont des structures de relativement petite échelle (10-1000 m) telles que des rayons ou autres structures (non-)linéaires (nous en verrons plusieurs exemples non-linéaires dans les Parties II et III de ce manuscrit). Ensuite, la dissipation, les déviations à l'approximation WKB, les instabilités éliminent progressivement les petites échelles. Ces phénomènes sont souvent générés par des effets non-linéaires, dont certains vont être étudiés dans le chapitre suivant. La structure des ondes internes devient ainsi de plus en plus modale, les modes les plus élevés disparaissant le plus rapidement. Après quelques milliers de kilomètres, seuls les ondes internes de mode 1 subsistent, qui vont ensuite venir interagir par exemple avec des topographies pour former de nouvelles ondes internes de petite échelle...

	$f = 0$	$f < N$	$f > N$	$N = 0$
Condition de propagation	$\omega < N$	$f < \omega < N$	$N < \omega < f$	$\omega < f$
Vitesse de phase ( $c_\phi = \omega/k$ )	$\frac{N \sin \theta}{k}$	$\frac{\sqrt{N^2 \sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta}}{k}$		$\frac{f \cos \theta}{k}$
Vitesse de groupe $\ \mathbf{c}_g\ $	$\frac{N \cos \theta}{k}$	$\frac{ f^2 - N^2  \sin 2\theta}{2\omega k}$		$\frac{f \sin \theta}{k}$
Comportement basse fréquence	$\theta \rightarrow 0$ (confinement vertical)		$\theta \rightarrow \pi/2$ (oscillations proches de $N$ )	
Comportement haute fréquence	$\theta \rightarrow \pi/2$ (confinement latéral)		$\theta \rightarrow 0$ (oscillations proches de $f$ )	
Orientation des rayons émis par un objet situé en $O$ .				

TABLE 1.1 – Différents régimes d’ondes internes suivant que la stratification ou la rotation domine. On suppose que  $f > 0$  (hémisphère nord). “Basse” et “haute” fréquences se réfèrent respectivement à  $\omega \rightarrow \min(f, N)$  et  $\max(f, N)$ .



## Chapitre 2

# Ondes internes non-linéaires

Nous avons passé en revue dans le chapitre précédent différentes propriétés des ondes internes en l'absence de non-linéarités et avons évoqué le rôle des non-linéarités pour détruire ces structures. Bien que la majeure partie de ce travail de thèse soit consacrée aux aspects non-linéaires de la réflexion d'ondes internes, un de ses fils conducteurs sera l'emploi d'arguments linéaires dans la mesure du possible afin d'utiliser au maximum des arguments intuitifs. Cependant, cette démarche comprend des risques et l'intuition peut parfois se révéler un allié désastreux lorsqu'employée hors de son domaine de compétences, ce qui est souvent le cas en physique non-linéaire. Afin de bien délimiter ce domaine, il est donc indispensable de connaître les effets principaux liés à la dynamique non-linéaire des ondes internes.

Nous allons rappeler les caractéristiques des différents phénomènes non-linéaires étudiés dans cette thèse, qui concernent principalement les interactions ondes-ondes. Nous commencerons par les triades résonantes, un aspect simple de ce type d'interaction car il ne fait intervenir que trois ondes. Nous passerons ensuite au cas un peu plus technique des ondes internes solitaires, dont la description analytique peut rester faiblement non-linéaire tout en ayant un domaine de validité s'étendant loin dans le domaine des ondes de grande amplitude. Enfin, les aspects liés au déferlement des ondes internes et à la turbulence seront brièvement évoqués.

### 2.1 Superposition non-linéaire d'ondes planes et triades résonantes

#### 2.1.1 Équations d'évolution et coefficients d'interaction

##### Adimensionnalisation des équations

Nous allons supposer que trois ondes planes se propagent dans le milieu étudié, avec  $N$  supposé constant. Les fonctions de courant peuvent donc à

l'ordre 0 s'écrire :

$$\psi(x, z, t) = \sum_{p=1}^3 \psi_p + c.c., \quad \text{avec} \quad \psi_p = A_p e^{i(k_{x,p}x + k_{z,p}z - \omega_p t)}, \quad (2.1)$$

$(\omega_p, k_{x,p}, k_{z,p})$  satisfaisant la relation de dispersion pour  $p = 1, 2, 3$ . Nous supposons dans la suite que toutes les fréquences sont positives. D'après les relations de polarisation (1.49), *a fortiori* valides pour des ondes planes, les champs  $v$  et  $b$  peuvent à l'ordre 0 s'écrire :

$$v(x, z, t) = -f \sum_{p=1}^3 \frac{k_{z,p}}{\omega_p} \psi_p + c.c., \quad (2.2)$$

$$b(x, z, t) = N^2 \sum_{p=1}^3 \frac{k_{x,p}}{\omega_p} \psi_p + c.c. \quad (2.3)$$

Nous allons définir un ensemble de quantités sans dimensions identifiées par des accents circonflexes en se basant sur les paramètres de l'onde indexée 1. En effet, nous allons étudier les interactions entre les trois ondes et on peut choisir l'onde 1 comme étant celle qui fournit la plus grande quantité d'énergie au système. Ainsi, les quantités sans dimensions sont définies comme :

$$t = \hat{t}/\omega_1, \quad x = \hat{x}/k_{x,1}, \quad z = \hat{z}/k_{z,1}, \quad (f, N) = (\hat{f}, \hat{N})\omega_1,$$

$$\psi = |A_1| \hat{\psi}, \quad v = \hat{f} k_{z,1} |A_1| \hat{v}, \quad b = \hat{N}^2 \omega_1 k_{x,1} |A_1| \hat{b},$$

$$\forall p = 1, 2, 3, \quad k_{x,p} = \hat{k}_{x,p} k_{x,1}, \quad k_{z,p} = \hat{k}_{z,p} k_{z,1}, \quad \omega_p = \omega_1 \hat{\omega}_p. \quad (2.4)$$

Après division par  $\omega_1^2 (k_{x,1}^2 + k_{z,1}^2) |A_1|$ , l'équation de propagation non-linéaire (1.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \partial_{\hat{t}\hat{t}}^2 \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} + \left( \hat{N}^2 \sin^2 \theta_1 \right) \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \hat{\psi} + \left( \hat{f}^2 \cos^2 \theta_1 \right) \partial_{\hat{z}\hat{z}}^2 \hat{\psi} = \\ & \sigma \left[ \partial_{\hat{t}} J(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) - \left( \hat{N}^2 \sin^2 \theta_1 \right) \partial_{\hat{x}} J(\hat{\psi}, \hat{b}) + \left( \hat{f}^2 \cos^2 \theta_1 \right) \partial_{\hat{z}} J(\hat{\psi}, \hat{v}) \right], \quad (2.5) \end{aligned}$$

avec  $\sigma = |A_1| k_{x,1} k_{z,1} / \omega_1$  et où on a noté par convention  $\hat{\nabla}^2 \equiv (\sin^2 \theta_1) \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 + (\cos^2 \theta_1) \partial_{\hat{z}\hat{z}}^2$ . Comme nous le verrons en §2.3,  $\sigma$  est relié à la pente des isopycnes. Lorsque  $\sigma \rightarrow 0$  les ondes sont de très faible amplitude et les isopycnes sont quasi-sinusoidales. Lorsque  $\sigma$  augmente, leur forme devient de plus en plus asymétrique, jusqu'à présenter des retournements pour  $\sigma > 1$ . Nous allons supposer ici que les ondes sont de faible amplitude, c'est à dire que  $\sigma \ll 1$ ,  $\sigma$  jouant le rôle de paramètre d'ordre ici. Nous allons aussi nous passer des accents circonflexes, à part pour l'opérateur  $\hat{\nabla}$ .

### Interactions non-linéaires

Lorsque  $\psi$ ,  $b$  et  $v$  sont insérées dans l'équation (2.5), les termes non-linéaires créent de nouvelles ondes. En effet,  $\forall a \in \mathbb{C}$ ,

$$J(\zeta_0, a\zeta_1 + \zeta_2) = aJ(\zeta_0, \zeta_1) + J(\zeta_0, \zeta_2). \quad (2.6)$$

Ainsi, on a :

$$J\left(\sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \psi_p, \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 a_p \psi_p\right) = \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-3 \\ q \neq 0}}^3 a_q J(\psi_p, \psi_q), \quad (2.7)$$

où l'on pose comme conventions  $A_{-p} = A_p^*$  le complexe conjugué de  $A_p$ ,  $a_{-p} = a_p^*$  ( $= a_p$  dans notre cas),  $\omega_{-p} = -\omega_p$  et similairement pour les  $k_{x,p}$  et les  $k_{z,p}$ . Ainsi,  $\psi_{-p} = \psi_p^*$ . De plus, on a :

$$J(\psi_p, \psi_q) = (k_{x,q}k_{z,p} - k_{x,p}k_{z,q})A_pA_q e^{i((k_{x,p}+k_{x,q})x+(k_{z,p}+k_{z,q})z-(\omega_p+\omega_q)t)}. \quad (2.8)$$

Or, les trois Jacobiens de l'équation (2.5) peuvent tous s'écrire sous la forme de l'équation (2.7). Nous avons donc fait apparaître six nouvelles fréquences ( $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_3$ ,  $\omega_2 + \omega_3$ ,  $|\omega_1 - \omega_2|$ ,  $|\omega_1 - \omega_3|$  et enfin  $|\omega_2 - \omega_3|$ ) et autant de vecteurs d'ondes dans le membre de droite de l'équation (2.5). De plus, les termes résultant des interactions sont multipliés par  $\sigma$ . On doit donc écrire la fonction de courant au moins jusqu'à l'ordre 1 en  $\sigma$ , c'est à dire comme la somme des trois ondes principales et des six ondes forcées :

$$\psi(x, z, t) = \left[ \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 A_p e^{i(k_{x,p}x+k_{z,p}z-\omega_p t)} \right] + \sigma \left[ \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p B_{pq} e^{i((k_{x,p}+k_{x,q})x+(k_{z,p}+k_{z,q})z-(\omega_p+\omega_q)t)} \right], \quad (2.9)$$

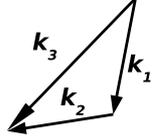
où les  $B_{pq}$  sont les amplitudes des différents termes découlant des interactions entre ondes que nous supposons uniquement variables en temps pour plus de simplicité. Supposons maintenant que les trois équations suivantes sont vérifiées simultanément :

$$k_{x,1} + k_{x,2} = k_{x,3}, \quad (2.10)$$

$$k_{z,1} + k_{z,2} = k_{z,3}, \quad (2.11)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (2.12)$$

Certaines ondes forcées sont donc aussi libres et leur phase est identique à celle d'une des ondes forçantes : on est dans le cas d'une résonance triadique et la configuration des vecteurs d'ondes est illustrée ci-contre.



Après insertion de la nouvelle forme de  $\psi$  dans l'équation (2.5), on peut voir que l'ordre 0 correspond à l'équation de propagation linéaire et s'annule. À l'ordre 1, la dérivée temporelle du membre de gauche de l'équation de propagation non-linéaire comporte entre autres le terme suivant, formé par l'interaction additionnant les ondes 1 et 2 et que nous appelons  $MG_{12}$  :

$$MG_{12} = -(k_{x,3}^2 \sin^2 \theta_1 + k_{z,3}^2 \cos^2 \theta_1) \times (\ddot{B}_{12} - 2i\omega_3 \dot{B}_{12} - \omega_3^2 B_{12}) e^{i(k_{x,3}x + k_{z,3}z - \omega_3 t)} + c.c., \quad (2.13)$$

où  $\dot{B}$  identifie la dérivée temporelle de  $B$ . Le terme en  $-\omega_3^2 B_{12}$  est solution de l'équation de propagation linéaire et s'annule donc avec d'autres termes de même phase. Ce qui reste du terme  $MG_{12}$  résonne avec le terme du membre de droite possédant la même phase mais un coefficient constant (proportionnel à  $A_1 A_2$ ). On se trouve alors pour  $B_{12}$  en présence d'une équation différentielle du type  $y' + ay = b$ , dont la solution augmente linéairement avec  $t$ , en d'autres termes diverge.

### Introduction de la variable temporelle lente

Un moyen d'éviter ce problème est de ne pas séparer les ondes en  $A_p$  primaires des ondes en  $B_{pq}$  créées par les interactions non-linéaires et plutôt de considérer que les  $A_p$  évoluent. Pour des raisons de simplicité, nous considérerons encore une fois que cette variabilité n'est que temporelle. Dans le cadre de faibles non-linéarités ( $\sigma \ll 1$ ), on peut ajouter que cette variation est lente. Pour bien séparer les évolutions lentes des évolutions rapides (c'est à dire se produisant sur des échelles de  $\omega_1^{-1}$ ), on introduit une variable temporelle "lente"  $\tau$  telle que désormais, les dérivées temporelles dans l'équation de propagation seront remplacées par  $\partial_t + \sigma \partial_\tau$ <sup>1</sup>. Ainsi, en cherchant des solutions de la forme

$$\psi_p(x, z, t; \tau) = A_p(\tau) e^{i(k_{x,p}x + k_{z,p}z - \omega_p t)},$$

1. dans le cas (plus réaliste) où des variables spatiales lentes  $X$  et  $Z$  auraient aussi été considérées, les dérivées selon  $x$  auraient été remplacées par  $\partial_x + \sigma c_{gx} \partial_X$ , similairement pour  $z$ .

le premier terme du membre de gauche de l'équation (2.5) s'écrit :

$$(\partial_{tt}^2 + 2\sigma\partial_{t\tau}^2 + \partial_{\tau\tau}^2)\hat{\nabla}^2\psi = \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 (k_{x,p}^2 \sin^2 \theta_1 + k_{z,p}^2 \cos^2 \theta_1)(\omega_p^2 A_p + 2i\sigma\omega_p \dot{A}_p) e^{i(k_{x,p}x + k_{z,p}z - \omega_p t)}. \quad (2.14)$$

où le terme d'ordre 2 est négligé. Le terme d'ordre 0 correspond à l'équation de propagation linéaire. Le membre de droite étant déjà multiplié par  $\sigma$ , l'effet des variations lentes ne s'y manifeste qu'aux ordres supérieurs à 1, que nous ne considérons pas. Ainsi, il n'est pas besoin d'effectuer de calculs supplémentaires pour le membre de droite.

Comme précédemment, les trois termes d'ordre 1 (plus trois complexes conjugués) que l'on voit dans l'équation (2.14) résonnent chacun avec un des termes non-linéaires du membre de droite de l'équation de propagation. Afin de ne pas avoir de divergence des solutions, ces paires de termes doivent s'annuler deux à deux, ce qui nous donne trois équations différentielles ordinaires pour l'évolution des amplitudes :

$$\dot{A}_1(\tau) = \delta_1 A_2^* A_3, \quad (2.15)$$

$$\dot{A}_2(\tau) = \delta_2 A_1^* A_3, \quad (2.16)$$

$$\dot{A}_3(\tau) = \delta_3 A_1 A_2, \quad (2.17)$$

où les  $\delta_p$  sont des coefficients d'interaction (réels) issus du calcul complet des termes non-linéaires à l'ordre 1 puis normalisés (proposé à la lecture en Annexe A). Chaque équation est associée à une équation complexe conjuguée. Ces équations ont été dérivées pour les ondes internes pour la première fois par Hasselmann ([Has66, Has67]).

### Propriétés des triades résonantes

Le système (2.15)–(2.17) possède ces trois invariants indépendants :

$$-iH = A_1 A_2 A_3^* - A_1^* A_2^* A_3, \quad (2.18)$$

$$J_1 = \frac{|A_2|^2}{\delta_2} - \frac{|A_3|^2}{\delta_3}, \quad (2.19)$$

$$J_2 = \frac{|A_1|^2}{\delta_1} - \frac{|A_3|^2}{\delta_3}, \quad (2.20)$$

où  $H$  n'est autre que l'Hamiltonien du système (cf. [Nee04]) et où les quantités  $J_1$  et  $J_2$  sont appelées invariants de Manley-Rowe<sup>2</sup>. On peut montrer que ces quantités sont bien invariantes en les dérivant par rapport au temps.

---

2. Définir une quantité  $J_3$  serait redondant ( $J_3 = J_2 - J_1$ ).

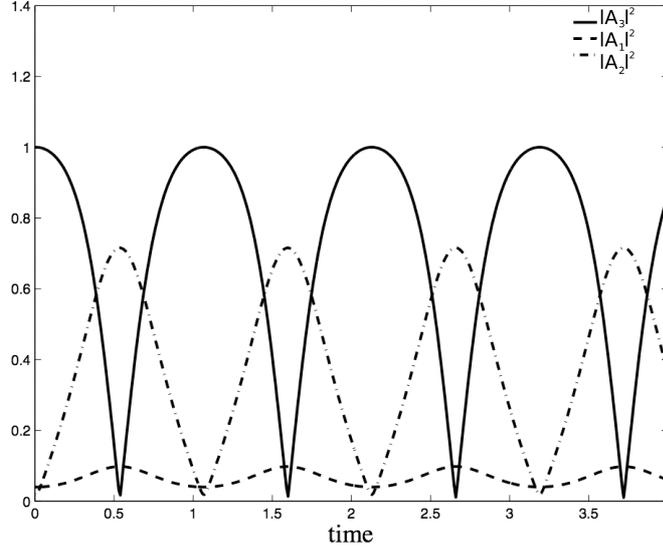


FIGURE 2.1 – Quantités  $|A_1|^2$ ,  $|A_2|^2$  et  $|A_3|^2$  calculées numériquement avec les paramètres suivants :  $(|A_1|, |A_2|, |A_3|)|_{\tau=0} = (0.04, 0.02, 1)$ ,  $(|\phi_1|, |\phi_2|, |\phi_3|)|_{\tau=0} = (5, 5, 3)$ ,  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (-4.7, -5.3, -40)$  (tiré de [Nee04, Fig. 2]).

À l'aide de ces invariants, on peut découpler les trois quantités  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . Par exemple, à l'aide des équations (2.15)–(2.17) et (2.19)–(2.20), on peut montrer que :

$$\ddot{A}_3 = \delta_1 \delta_2 (\delta_3 (J_1 + J_2) + 2|A_3|^2) A_3. \quad (2.21)$$

Cette équation ne fait intervenir que  $A_3$ . Il est possible, en écrivant  $A_3 = \sqrt{X} e^{i\phi_3}$  dans l'équation (2.21), de montrer que ([Nee04]) :

$$\dot{\phi}_3 X = C_1, \quad (2.22)$$

$$(\dot{X})^2 = 4\delta_1 \delta_2 X^3 - 4\delta_1 \delta_2 \delta_3 (J_1 + J_2) X^2 + C_2 X - 4C_1, \quad (2.23)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. Il se trouve que l'équation (2.23) a des solutions analytiques qui s'expriment en terme de fonctions elliptiques de Jacobi. La résolution de cette équation sera épargnée au lecteur mais on peut montrer que la fonction  $X$  possède une périodicité (temporelle ici), qui se retrouve pour les ondes 1 et 2. Ainsi, on voit en figure 2.1 l'énergie être transférée entre chaque mode avec une période identifiable visuellement. Plus précisément, dans le cas illustré par cette dernière figure, l'onde 3, qui au début est dominante, perd progressivement toute son énergie au profit des deux autres ondes, puis la retrouve, etc.

### 2.1.2 Applications pratiques des triades résonantes

Après un tel exposé abstrait, il est agréable de voir en quoi les triades résonantes sont des objets rencontrés dans le contexte géophysique.

#### Les triades résonantes, un mécanisme de base des interactions non-linéaires

Les triades résonantes sont un type d'interaction non-linéaire parmi les plus simples (conceptuellement) auquel on puisse penser. Étant donné le nombre de fréquences présentes dans la nature (fréquences qui ne sont pas forcément associées à des ondes internes), il existe une continuité de triades résonantes. Ainsi, de l'énergie introduite dans le système à une certaine fréquence peut, de triade en triade, être transférée à un spectre de fréquences très large. C'est l'idée qui sous-tend le modèle de Garrett et Munk ([GM75]), souvent critiqué, jamais remisé. Celui-ci explique en effet la forme des spectres des ondes internes observés dans la plupart des océans en considérant ce mécanisme comme un (sinon le) mécanisme fondamental.

#### Les instabilités paramétriques

Il a été montré numériquement ([HNN02, MW05, Sim08]) et dans certaines observations ([AMZ<sup>+</sup>07]) que la marée interne de période semi-diurne (12,42 h) perd beaucoup d'énergie à la latitude 28,9° (N et S). Or, à ces latitudes,  $2\pi/|f| = 24,8$  h et donc  $2|f| = \omega$ . À ces latitudes, l'instabilité paramétrique, un cas particulier de triade résonante impliquant la génération par la marée semi-diurne de deux ondes secondaires de fréquence diurne, est favorisée. Les vecteurs d'ondes ont des modules très supérieurs à celui de la marée interne semi-diurne, comme schématisé en figure 2.2(a). D'après l'équation (1.54), les signaux créés sont donc bien plus dissipés et de manière très localisée autour de ces latitudes, comme le montre la figure 2.2(b).

#### Les réflexions

Nous abordons ici des phénomènes au coeur de ce travail de thèse. Nous avons vu en §1.2.4 que lorsqu'une onde interne se réfléchit sur une paroi inclinée, l'onde réfléchie possède un vecteur d'onde réfléchi  $\mathbf{k}_r$  différent du vecteur incident  $\mathbf{k}_i$ . On peut très bien imaginer que sous certaines conditions, les deux ondes entrent en résonance et qu'elles donnent naissance à une troisième onde de vecteur d'onde  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_r$  et de fréquence  $\omega' = \omega_i + \omega_r = 2\omega$ , à la condition que  $(\omega', \mathbf{k}')$  satisfassent la relation de dispersion. La figure 2.3 montre que ce cas est analogue au cas de deux ondes se croisant, la grande différence résidant cependant dans la condition à la paroi, imperméable dans le premier cas et inexistante dans le second. Nous verrons une étude expérimentale de ce phénomène en §5.

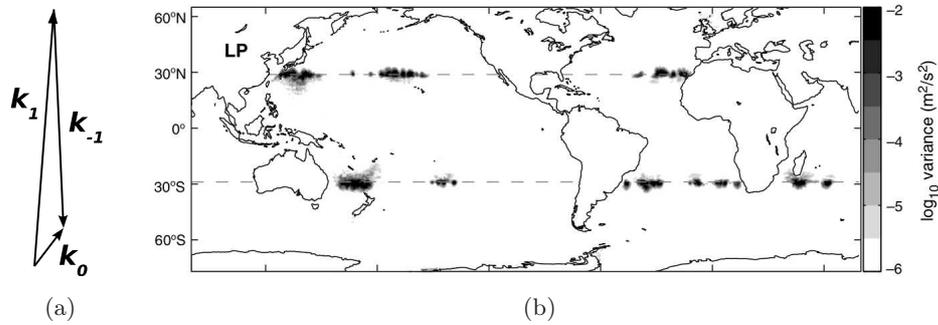


FIGURE 2.2 – (a) Configuration des vecteurs d'ondes pour une instabilité paramétrique,  $\mathbf{k}_0$  représentant le signal de la marée diurne et les vecteurs  $\mathbf{k}_{-1}$  et  $\mathbf{k}_1$  les deux ondes créées par l'instabilité paramétrique. (b) Répartition globale de la variance de vitesse induite par la marée à fréquence inférieure à la fréquence semi-diurne. On voit une très forte présence de ces ondes à hauteur des latitudes  $28,9^\circ$  N et S, signe que l'instabilité paramétrique se produit de manière forte (tiré des simulations numériques globales de [Sim08, Fig. 3]).

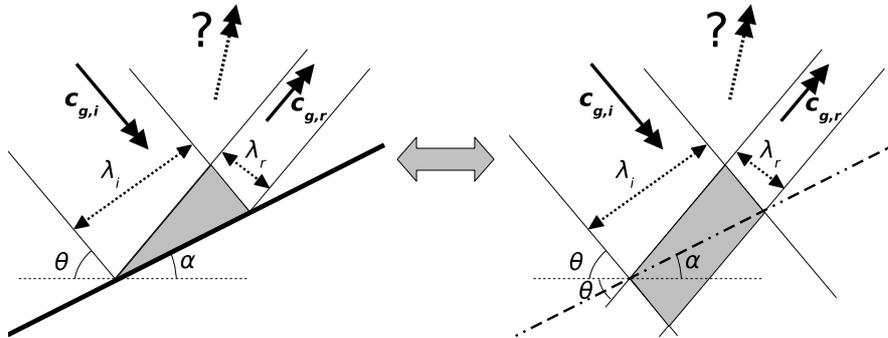


FIGURE 2.3 – Schéma illustrant la possible équivalence entre ce qui peut se passer lorsque une onde interne se réfléchit sur une paroi inclinée (gauche) et lorsque deux ondes internes se croisent. Dans les deux cas, les zones d'interaction sont grisées. Le point d'interrogation marque la possible génération d'une onde de fréquence supérieure à  $\omega$ .

## 2.2 Interaction d'une onde interne avec elle-même et ondes solitaires

Il se trouve que l'équation (2.21), qui régit l'évolution d'une des amplitudes d'un système triadique, a la forme d'une équation de Schrödinger non-linéaire (stationnaire). Bien que ce ne soit pas le cas dans notre contexte, cette équation admet sous certaines conditions des solutions solitons. Ceci nous offre une transition idéale pour passer à l'étude de l'autre grande forme d'onde non-linéaire que nous étudierons dans ce manuscrit : les ondes solitaires.

### 2.2.1 Historique

#### Découverte des solitons

En 1834, John Scott Russel, ingénieur hydrodynamicien, se promène au bord d'un canal près d'Edimbourg. Soudain une péniche s'arrête brusquement et, selon ses mots ([PD04]),

(...) il n'en fut pas de même pour la masse d'eau qu'elle avait mis en mouvement dans le canal. Elle s'accumula autour de la proue du bateau dans un état de violente agitation, puis, soudainement, l'abandonna, roula vers l'avant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire, (...) à la forme douce et bien définie, qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse.

Russel explique ensuite qu'il arrive à suivre la vague sur trois kilomètres, cheval au trot, jusqu'à ce qu'elle se perde dans les méandres des canaux. Il s'agit de la première observation d'un soliton, ou plutôt de la première fois qu'un soliton est reconnu en tant que phénomène original. Il passera 10 ans de sa vie à étudier ce phénomène et publiera en 1844 un rapport de ses expériences. Malheureusement, il rencontrera l'incompréhension voire l'hostilité de ses contemporains, notamment Sir G. B. Airy et G. G. Stokes. Russel connaîtra quand même de son vivant une reconnaissance de ces travaux par Boussinesq en 1871 [Bou71] puis Rayleigh en 1876 ([Ray76])<sup>3</sup>. En 1894, Gustav de Vries publie sa thèse de doctorat ([de 94]) sous la direction de Diederik Johannes Korteweg, thèse dans laquelle est introduite l'équation de Korteweg–de Vries (KdV) ainsi que ses solutions en termes de fonctions elliptiques de Jacobi cnoidales. Ne comprenant pas bien l'ampleur de leur découverte<sup>4</sup>, ils arrêtent leurs travaux qui tombent dans l'oubli.

L'intérêt pour ces ondes non-linéaires ressuscite à partir de 1953. lorsque Fermi, Pasta et Ulam effectuent une des premières expériences numériques

---

3. Il aura par ailleurs connu une carrière scientifique riche et reconnue dans d'autres domaines.

4. Ce qui se comprend à une époque où les applications n'existent pas encore.

de l'Histoire, cherchant à savoir comment un cristal évolue vers l'équilibre thermodynamique après injection de l'énergie dans le plus long mode de Fourier que peut contenir leur domaine périodique. Au lieu d'observer l'équilibre thermodynamique, à savoir une redistribution de l'énergie dans tous les modes, ils observent que cette énergie se distribue dans les quelques modes les plus longs, retournent entièrement dans le mode le plus long, avant que le cycle se répète. Ce que l'on appelle maintenant la "récurrence de Fermi-Pasta-Ulam" est publiée dans un rapport technique du centre de recherche de Los Alamos en 1955 ([FPU55]). Il faut attendre dix ans pour que Zabusky et Kruskal ([ZK65]) expliquent ce phénomène en déterrants l'équation de KdV et ses solutions cnoïdales périodiques. Observant que la collision de deux telles ondes les laissent inchangées (à un déphasage près), ils leur donnent le nom de "solitons" en référence à des particules sujettes à des collisions élastiques. D'autres noms célèbres vont ensuite ajouter leur contribution à un domaine qui connaît alors une très forte expansion : Gardner, Miura, Greene...<sup>5</sup>

Nous parlerons souvent d'ondes solitaires pour parler de solitons, en général lorsque la nature exacte de l'objet considéré n'aura pas été fermement établie comme étant un soliton. L'appellation "onde solitaire" est en effet plus ancienne puis qu'elle remonte à Russel (*cf.* citation précédente) et Boussinesq [Bou71], tout en étant moins précise que la définition qu'ont fait Zabusky et Kruskal d'un soliton.

### Les ondes solitaires dans l'océan

En parallèle, dans les années 60, les premières chaînes de thermistors rapides sont mises au point, qui enregistrent instantanément la température (et donc la stratification) sur une colonne de fluide, entraînant une révolution dans la mesure des ondes internes dans l'océan. Des ondes internes de grande amplitude, sont ainsi observées pour la première fois dans la Mer d'Andaman, entre l'Inde et l'Indonésie [PS65] (bien que d'après [PD04, DP06], leur signature en surface est connue depuis des temps illustres), puis dans la plupart des bordures continentales autour du monde (*cf.* figure 2.4) et dans certains lacs. Ces découvertes se produisant en même temps que la redécouverte des solitons évoquée ci-dessus, ces ondes ont été très tôt supposées être des ondes solitaires. En 1989, l'article de revue de Ostrovsky et Stepanyants [OS89] effectue une comparaison claire entre les profils mesurés et les profils théoriques de solitons et permet de dire que certaines de ces ondes sont effectivement des solitons. Pour la plupart des ondes qui n'en sont pas mais

---

5. Cependant, beaucoup de travaux sur ce qui était appelé "ondes solitaires" ont été effectués jusque dans les années 50, destinés il est vrai à la communauté plus restreinte des hydrodynamiciens (*cf.* p. ex. [Lon56] et sa bibliographie). Il est vrai aussi qu'aucun lien avec les travaux de Korteweg et de Vries ne semble avoir été fait et que le développement de la théorie des solitons a effectivement pris son envol à partir du rapport de Fermi, Pasta et Ulam.

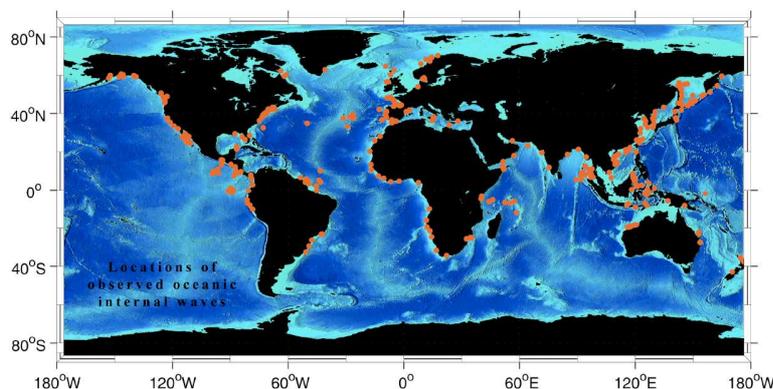


FIGURE 2.4 – Recensement des observations d’ondes solitaires océaniques faites jusqu’en 2004. Les ondes solitaires se retrouvent principalement près des côtes, bien que le manque d’observations en pleine mer vienne aussi d’un manque de données (tiré du site web [www.internalwaveatlas.com](http://www.internalwaveatlas.com)).

qui y ressemblent, les ingrédients nécessaires à l’existence de solitons jouent quand même un grand rôle : de la non-linéarité et de la dispersion.

Ces ondes internes de grande amplitude consistent en des oscillations de la pycnocline, dont les mouvements sont très analogues à ceux d’ondes de gravité de surface. Elles ne sont donc pas purement des ondes de volume comme celles étudiées jusqu’ici car elles présentent de nombreuses similitudes avec des ondes d’interfaces. La description des ondes internes telle qu’elle a été faite dans ce qui précède s’y applique pourtant, comme nous le verrons en §2.2.4 et surtout en Partie III.

Il se trouve que ces ondes, plus confinées et présentant des fronts plus raides que des ondes linéaires, sont associées à des mouvements de fluide plus intenses que pour ces dernières et sont donc susceptibles de catalyser le mélange du fluide sous la surface de l’océan. Ils peuvent notamment être le siège d’instabilités dynamiques (*cf.* §2.3 et Fig. 2.5) ou déferler en s’approchant des côtes.

### 2.2.2 Ondes solitaires longues et de faible amplitude à l’interface entre deux fluides

#### Équation de KdV

Nous allons considérer un système où la stratification est en bicouche, c’est-à-dire réalisée par deux couches de fluides de hauteurs au repos  $h_1$  et  $h_2$  ( $h_1 + h_2 = H$ ,  $h_1 < h_2$ ), de densités homogènes et différentes  $\rho_1 < \rho_2$  et séparées par une interface infiniment fine. Les notations employées dans cette section sont résumées en figure 2.6. Le déplacement de l’interface est noté  $\eta(x, t)$ . La surface et le fond sont plats.

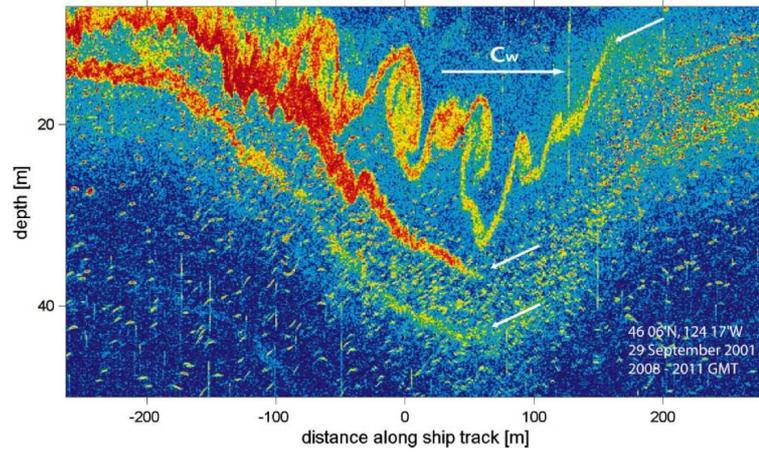


FIGURE 2.5 – “Photographie acoustique” d’une onde solitaire sur le plateau continental de l’Oregon. Elle contient dans sa structure principale une séquence de rouleaux typiques d’une instabilité de Kelvin-Helmoltz et donc de déferlement (tiré de [MFS<sup>+</sup> 03, Fig. 14]).

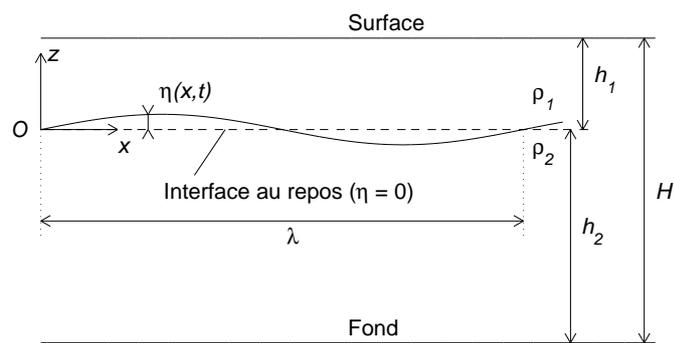


FIGURE 2.6 – Notations pour la configuration bicouche.

Nous allons par la suite appeler “ondes longues” des ondes dont la longueur spatiale  $\lambda$  le long de la direction de propagation est grande devant l'épaisseur totale du fluide<sup>6</sup>. Les approximations qui sont faites ici sont les suivantes : écoulement parfait, incompressible, irrotationnel dans les intérieurs des deux couches, ce qui permet de définir des potentiels d'écoulement  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , dont les gradients sont les vitesses dans chaque couche. Nous considérons aussi qu'il n'y a pas de phénomène de capillarité et que les ondes interfaciales sont longues :  $H \sim \delta^2 \lambda$ , avec  $\delta \ll 1$  défini prochainement. La considérer comme infinie reviendrait à considérer que les ondes sont des ondes d'eau peu profonde non-dispersives. Nous la considérons ici grande mais finie, ce qui revient au contraire à considérer une dispersion faible mais non-nulle. Nous considérons aussi une amplitude de déplacement interfacial faible devant la profondeur du fluide ( $\eta_0 \sim \varepsilon H \ll H$ ),  $f = 0$ ,  $\partial_y = 0$  et l'équilibre entre effets non-linéaires et dispersifs<sup>7</sup>. Ce dernier élément est plus un postulat, ou un type de solution cherchée, qu'une approximation et il se trouve qu'il se traduit après calculs par  $\delta^2 = \varepsilon$ . Nous discuterons de ces hypothèses en §2.2.3.

Nous ne ferons pas la démonstration de l'équation de KdV dans ce cas. Disons juste que les équations de départ sont l'incompressibilité du fluide dans les deux couches de fluide ( $\nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0$ ), les conditions d'imperméabilité au fond et à la surface du domaine ( $\partial_z \Phi_1|_{z=h_1} = \partial_z \Phi_2|_{z=-h_2} = 0$ ), l'égalité des vitesses verticales à l'interface ( $\partial_z \Phi_1|_{z=\eta} = \partial_z \Phi_2|_{z=\eta} = d\eta/dt$ ) et enfin la relation de Bernoulli le long de l'interface pour les deux fluides. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [KY78] et/ou aux notes de cours [BH09, Lect. 5] relatives aux ondes de surface et retranscrites par l'auteur du présent manuscrit (disponibles sur les archives en ligne de WHOI). Dans les grandes lignes, en développant  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  asymptotiquement et en cherchant une solution à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ , on va se retrouver en face du même cas de figure que celui décrit en §2.1.1 : des résonances vont apparaître entre des termes linéaires et des termes non-linéaires, causant une divergence non-physique des solutions. La solution à apporter est la même que pour les triades résonantes : introduire une variable de temps lente<sup>8</sup>  $\tau = \varepsilon t$  et annuler tous les termes résonants à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ . Cette annulation implique formellement d'écrire l'égalité suivante, qui est l'équation de KdV :

$$\partial_\tau \hat{\eta} + \partial_x \hat{\eta} + \varepsilon \hat{\eta} \partial_x \hat{\eta} + \delta^2 \partial_{x\hat{x}\hat{x}}^3 \hat{\eta} = 0, \quad (2.24)$$

avec  $\hat{\eta} = \eta/\eta_0$ ,  $\eta_0$  étant l'amplitude caractéristique de  $\eta$  (et pouvant être négative, nous verrons pourquoi),  $\hat{\tau} = c_0 \tau/\lambda$ , où pour un bicouche  $c_0 =$

6. Suivant les modèles, cela peut aussi être l'épaisseur de la plus fine des deux couches.

7. La justification de cette dernière affirmation requiert des calculs que nous épargnerons au lecteur mais découle directement de l'équilibre mentionné

8. Certains auteurs utilisent d'autres puissances de  $\varepsilon$ , comme  $\tau = \varepsilon^{3/2} t$

$\sqrt{g'h_1h_2/(h_1+h_2)}$  et  $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ . On a ensuite  $\hat{x} = x/\lambda$  et enfin les petits paramètres  $\varepsilon$  et  $\delta^2$  mesurant respectivement l'importance des effets non-linéaires et dispersifs s'écrivent (toujours pour un bicouche) :

$$\varepsilon = \frac{3\eta_0}{2} \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2}, \quad \delta^2 = \frac{1}{6} \frac{h_1 h_2}{\lambda^2}. \quad (2.25)$$

Dans l'ordre des calculs, les paramètres  $\delta$  et  $\varepsilon$  ont en fait été définis avant de supposer  $\varepsilon = \delta^2$ . C'est la raison pour laquelle nous gardons leurs expressions complètes, ce qui donne aussi en pratique un moyen de vérifier que la condition d'équilibre entre effets non-linéaires et dispersifs est satisfaite.

Il est à noter que l'équation (2.24) est valable pour des ondes se propageant vers la droite. Une autre équation de KdV se dérive pour les ondes se propageant vers la gauche.

### Propriétés physiques

Il a été dit qu'un soliton était soumis aux effets concurrentiels de la dispersion et des non-linéarités. Étudions plus précisément les effets des termes en question (et ignorons les circonflexes de l'équation (2.24)) :

- le terme  $\partial_x \eta$  peut être éliminé en se plaçant dans le référentiel mobile se déplaçant à la vitesse des ondes linéaires longues  $c_0$ ,
- le terme  $\varepsilon \eta \partial_x \eta$  est le terme non-linéaire. En ne prenant pas en compte les dérivées spatiales linéaires, on obtient l'équation dite de Burgers inviscide :

$$\partial_\tau \eta + \varepsilon \eta \partial_x \eta = 0. \quad (2.26)$$

Si le terme  $\varepsilon \eta \partial_x \eta$  était remplacé par  $v \partial_x \eta$ , cette équation serait une équation linéaire dont les solutions  $\eta$  se propageraient à vitesse  $v$ . Dans ce cas, en première approximation, on peut donc considérer que le signal se propage à une vitesse proportionnelle à son amplitude. Ainsi, si la perturbation prend la forme d'une "bosse", le sommet de la bosse se propage plus rapidement que la base, favorisant un raidissement de son front, voire l'apparition d'une onde de choc,

- le terme  $\delta^2 \partial_x^3 \eta$  est le terme dispersif. La version linéarisée de l'équation (2.24) est :

$$\partial_\tau \eta + \partial_x \eta + \delta^2 \partial_{xxx}^3 \eta = 0. \quad (2.27)$$

La relation de dispersion de cette équation est  $\omega = k(1 - \delta^2 k^2)$ . La vitesse de phase est donc  $1 - \delta^2 k^2$ , correspondant à une dispersion telles que les petites longueurs d'ondes se propagent moins vite que les grandes. Dans le cas des ondes internes d'interface, on parle souvent de dispersion non-hydrostatique car des ondes courtes sont de haute fréquence et sont associées à des mouvements plus verticaux. En résumé, la dispersion est liée au fait que les ondes ont une longueur finie, elle-même est reliée aux effets non-hydrostatiques.

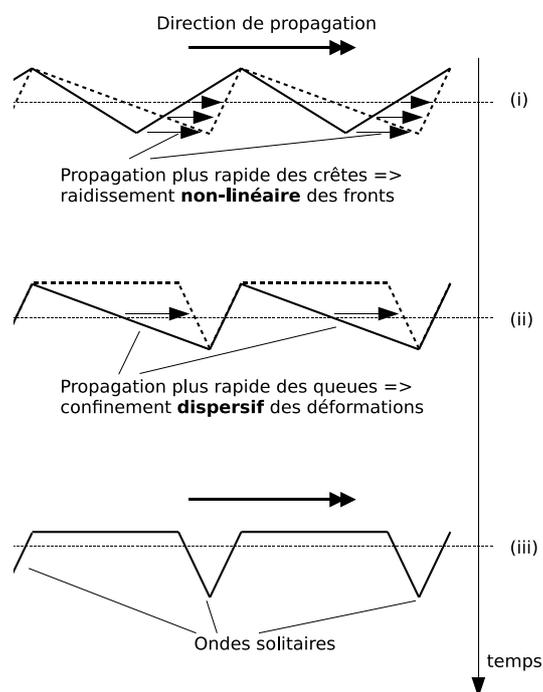


FIGURE 2.7 – Mécanisme séquentiel de comportement des solutions de l'équation de KdV. (i) Déformation initiale symétrique de l'interface. (ii) Les effets non-linéaires ont accéléré la crête de la déformation et asymétrisé le profil. (iii) Les effets dispersifs ont accéléré les queues des déformations par rapport aux fronts jusqu'à atteindre un point où ils s'équilibrent avec les effets non-linéaires. Une série d'ondes solitaires est créée, en dépression car nous considérons toujours  $h_1 < h_2$  (cf. §2.2.2-Solutions).

Ainsi, et adoptant une approche séquentielle, une déformation propagative de l'interface de forme arbitraire va tout d'abord se raidir, les points où l'amplitude étant la plus forte rattrapant la tête de la déformation. Du fait de la dispersion, la queue de la déformation, en pente douce et donc d'échelle horizontale relativement grande, va "rattraper" le front raide d'échelle horizontale et se raidir elle-même jusqu'à ce qu'un équilibre entre non-linéarité et dispersion soit atteint. Une schématisation de ce mécanisme est proposée en figure 2.7. Pour plus de détails, voir p. ex. [PD04].

## Solutions

Comme évoqué dans le récapitulatif historique précédent, la grande avancée de Korteweg et de Vries a été de démontrer que "leur" équation admet des solutions analytiques périodiques, qui peuvent s'exprimer en termes de fonc-



FIGURE 2.8 – Ondes cnoidales de surface. (a) Côte de Lima, Pérou, 2004 (photo Anna Segur, avec son aimable autorisation). (b) Panama, 1933 (Tiré du site web de Bernard Deconinck, Univ. Washington, [url](#)).

tions elliptiques de Jacobi, comme pour le problème des triades résonantes. Plus particulièrement, il s'agit de la fonction cnoidale :

$$\eta(x, \tau; \chi) = \text{cn}^2 \left[ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( x - \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} \right) \tau \right); \chi \right] \quad (2.28)$$

où  $\chi$  est un paramètre tel que  $\text{cn}(x; \chi)|_{\chi=0} = \cos(x)$  et  $\lim_{|\chi| \rightarrow 1} (\text{cn}(x; \chi)) = 1/\cosh(x)$ . En d'autres termes, quand  $\chi$  varie de 0 à 1, une onde initialement sinusoidale se transforme en ondes aux crêtes plus pointues et aux creux plus plats, comme schématisé en figure 2.7. C'est aussi ce qui se produit dans le contexte des ondes de surface lorsqu'elles approchent une côte caractérisée par une pente de plage très douce, comme montré en figure 2.8. Cette solution est celle pour laquelle les effets dispersifs et non-linéaires se compensent exactement en tout point, ce qu'on appelle une solution à profil constant (qui se propage sans se déformer).

En cherchant une solution confinée spatialement, on trouve la "forme douce et bien définie" observée par J.R. Russel, qui correspond à la solution monosoliton :

$$\eta(x, \tau) = \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ x - \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} \right) \tau \right] \right)}. \quad (2.29)$$

On voit que la vitesse de propagation dimensionnée du soliton est  $c_0(1 + \varepsilon/3) > c_0$ . Ainsi, plus un soliton a une amplitude grande, plus il se déplace vite. De plus, il est plus étroit car on a supposé  $\varepsilon = \delta^2 \propto \lambda^{-1}$ . La fonction  $1/\cosh^2$  est tracée en figure 2.9.

Enfin, pour que l'équation de KdV ait des solutions soliton, il faut que  $\varepsilon > 0$ , c'est à dire que le soliton soit en dépression ( $\eta_0 < 0$ ) pour  $h_1 < h_2$ , ou d'élévation ( $\eta_0 > 0$ ) pour  $h_1 > h_2$ . Ainsi, un soliton pointe toujours vers la couche de fluide la plus épaisse<sup>9</sup>. Comme on a pu le voir en figure 1.2, on

9. Ceci est en fait vrai à condition que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  soient suffisamment proches ou  $h_1$  et  $h_2$  suffisamment différents, ce qui est le cas dans l'océan.

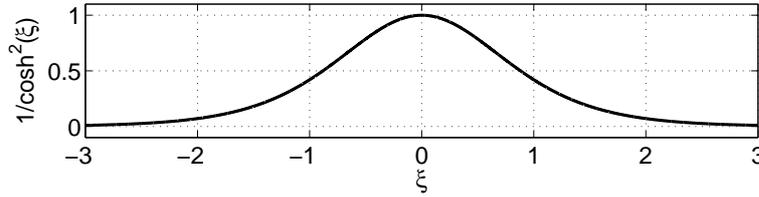


FIGURE 2.9 – Forme d’une solution monosoliton normalisée de l’équation de KdV (attention, dans le cas où  $h_1 < h_2$ ,  $\eta_0 < 0$ ).

a  $h_1 \ll h_2$  dans la plupart des fluides géophysiques stratifiés. Ce sont donc surtout des ondes solitaires de dépression qui sont observées, comme on peut en voir un exemple en figure 2.5.

Il existe des solutions multisoliton, que nous allons en fait abondamment rencontrer en Partie III. On les appelle ainsi car en laissant suffisamment évoluer le système, plusieurs solitons sont créés à chaque période au lieu d’un seul. Ces solitons sont ordonnés en amplitude (conséquence directe du fait que la vitesse d’un soliton est une fonction croissante de son amplitude). La méthode systématique pour prédire combien de solitons sont créés à partir d’une perturbation initiale et quelles sont leurs amplitudes est la méthode inverse de diffusion (inverse scattering method, cf. [PD04, §7]), que je n’expliquerai pas dans ce manuscrit.

### 2.2.3 Autres modèles

Les approximations et postulats qui sous-tendent le modèle de KdV sont très restrictifs. Bien que la plupart des caractéristiques qualitatives qui ont été évoquées précédemment soient valables en-dehors du domaine d’application de ce modèle, d’autres modèles peuvent s’avérer plus utiles quand il s’agit de passer à une description quantitative des ondes solitaires présentes dans l’océan. La plupart des modèles de KdV aux ordres supérieurs ont été dérivés dans [LB74, GPP02, p. ex.].

Par modèles faiblement dispersifs, on entend des modèles où l’échelle horizontale des solutions cherchées est grande devant au moins une des deux épaisseurs des couches.

Tout d’abord, on peut vouloir chercher une équation de KdV à l’ordre supérieur afin de pouvoir appréhender des amplitudes plus fortes. Dans ce cas, il faut aller aux ordres supérieurs dans les développements. On est alors dans le cas de l’équation de KdV étendue (eKdV), ou équation de Gardner qui s’écrit ([HM06]) :

$$\partial_\tau \eta + \partial_x \eta + \varepsilon \eta \partial_x \eta + \varepsilon_2 \eta^2 \partial_x \eta + \delta^2 \partial_{xxx}^3 \eta = 0, \quad (2.30)$$

toujours en variables adimensionnées et avec :

$$\varepsilon_2 = \frac{3\eta_0^2}{h_1^2 h_2^2} \left[ \frac{7}{8} (h_1 - h_2)^2 - \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2} \right].$$

Un cas particulier de cette équation est le cas où  $h_1 = h_2$ , auquel cas  $\varepsilon = 0$ . On parle alors d'équation KdV modifiée (mKdV) ([GPT97]).

On pourrait se demander pourquoi un seul terme à l'ordre 2 (en  $\varepsilon_2$ ) est présent et pourquoi aucun terme d'ordre  $\varepsilon\delta^2$ ,  $\delta^4$  ou autre n'est présent. Il se trouve qu'on pourrait en effet inclure ces termes mais la manière de procéder n'est pas unique et qu'on peut toujours se ramener à l'équation (2.30) (cf. [BH09, Lect. 6, §6]).

L'équation eKdV est valable pour des amplitudes plus fortes que pour l'équation de KdV mais reste théoriquement valable pour les amplitudes faibles. Cependant, les ondes solitaires observables par les moyens actuels sont caractérisées par des amplitudes de l'ordre de l'épaisseur de la couche de mélange, voire bien plus grandes (c'est ce que l'on voit sur la figure 2.5). Il a pourtant été possible d'appliquer ce modèle bien au-delà de ce domaine d'application, ce qui en fait un modèle de référence ([HM06]).

Le nombre de modèles existant pourrait constituer une branche de la zoologie en soi, certains incluant des coefficients variables en présence de topographie (KdV variable), une des deux couches infiniment grande (Benjamin-Ono [Ben67, Ono75]), une très forte amplitude (Dubreil-Jacotin-Long, [Lon53]), une stratification continue et/ou des vitesses de fluide variant suivant l'altitude, etc.

L'équation de KdV modifiée par la rotation mérite cependant d'y consacrer quelques lignes. Cette équation, aussi appelée équation d'Ostrovsky ([Ost78]), est donc une équation pour les ondes longues en présence de rotation :

$$\partial_x (\partial_\tau \eta + \partial_x \eta + \varepsilon \eta \partial_x \eta + \delta^2 \partial_{xxx}^3 \eta) = \delta_f \eta, \quad (2.31)$$

où  $\delta_f = \lambda/R_f$  est le coefficient qui compare la longueur des ondes à  $R_f = c_0/f$ , le rayon de déformation de Rossby qui discrimine les phénomènes de grande échelle influencés par la rotation des phénomènes de petite échelle qui, eux, ne sont pas affectés.

La dispersion de Coriolis va en sens inverse de la dispersion non-hydrostatique : les ondes longues sont plus lentes que les ondes courtes. Ainsi, lors du raidissement non-linéaire et en l'absence d'effets non-hydrostatiques, la queue de l'onde, au lieu d'aller plus vite et "rattraper" la crête de la déformation, va aggraver son retard, empêchant la formation de solitons. Il a donc longtemps été pensé (cf. p. ex. [GHO98]) que la rotation était un facteur qui empêchait les solitons de se propager indéfiniment, voire qui empêchait leur formation en cas de rotation rapide.

Ce n'est que récemment que Helfrich ([Hel07]) a montré que sous certaines conditions, les solitons pouvaient exister mais sous forme de solitons d'enveloppe (cf. figure 2.10). Grimshaw et Helfrich ([GH08]) ont ensuite montré

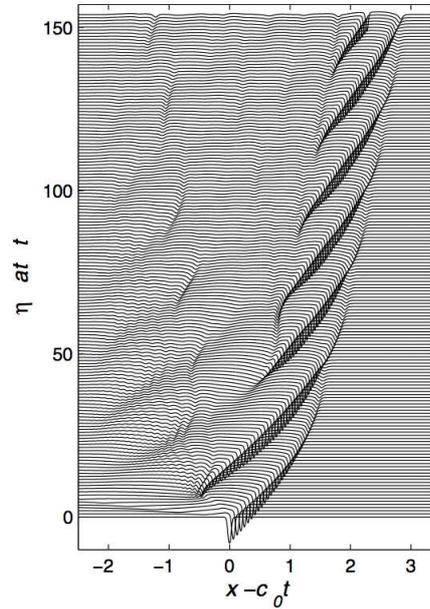


FIGURE 2.10 – Résolution numérique de l'équation (2.31), avec  $h_1/h_2 = 0,25$ ,  $\varepsilon = -0.8$ ,  $\delta = 4^{-4}$ ,  $\delta_f = 1$ , la condition initiale étant la ligne du bas. On voit ce qui ressemble à un soliton d'enveloppe se propager plus vite que la vitesse de phase linéaire  $c_0$  (tiré de [Hel07, Fig. 1]).

que l'équation d'Ostrovsky pouvait s'écrire sous la forme d'une équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) d'ordre élevé, le modèle NLS décrivant une autre grande classe de solitons après celui de KdV (cf. p. ex. [PD04, DP06] pour une description du modèle NLS).

Nous verrons en §7 des exemples d'ondes solitaires en présence de rotation. Nous n'étudierons pas directement les conséquences de cette dernière mais il sera très utile de garder ces résultats en tête pour définir les perspectives rendues possibles par ces travaux.

#### 2.2.4 Ondes solitaires pour une stratification quelconque

La physique contenue dans la section 2.2 décrit très bien les ondes solitaires dans l'océan, à ceci près : la stratification n'est jamais bicouche et la pycnocline possède une certaine épaisseur. Ainsi, alors que dans le cas précédent les seules ondes solitaires possibles consistaient en des déformations de l'interface, dans notre cas la pycnocline peut supporter des ondes ayant des structures plus compliquées, notamment modales (cf. §1.4). Ainsi, nous verrons en Partie III que des ondes solitaires de mode-1 (déplacement en bloc de la pycnocline), -2 (déplacements symétriques par rapport au centre de la pycnocline, qui est un noeud), -3 (déplacements antisymétriques par rapport au centre de la pycnocline et présence de deux noeuds) ou plus peuvent

exister. Les modèles vus jusqu'ici s'appliquent toujours, chaque paramètre s'écrivant cependant différemment. Par exemple, les coefficients de l'équation de KdV s'écrivent ([GPP02]) :

$$\varepsilon = \frac{3 \int_{-h_2}^{h_1} \bar{\rho}(z) c_n (d\Psi_n/dz)^3 dz}{2 \int_{-h_2}^{h_1} \bar{\rho}(z) (d\Psi_n/dz)^2 dz}, \quad \delta^2 = \frac{1 \int_{-h_2}^{h_1} \bar{\rho}(z) c_n \Psi_n^2(z) dz}{2 \int_{-h_2}^{h_1} \bar{\rho}(z) (d\Psi_n/dz)^2 dz}, \quad (2.32)$$

avec  $\bar{\rho}$  le profil de densité au repos,  $n$  le numéro du mode,  $c_n$  la vitesse de phase de l'onde de mode- $n$  (déterminée à partir de  $k_{x,n}$ , cf. §1.4) et où  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\max(\Psi_n) = 1$ , où  $\Psi_n$  est défini tel qu'en §1.4.

La présence d'une stratification stable ailleurs que dans la thermocline est aussi un facteur perturbateur pour les ondes solitaires. Ainsi, si leurs fronts ne sont pas assez raides pour que la fréquence caractéristique qui leur est associée soit supérieure à la fréquence de Brunt-Väisälä de la couche de fluide située juste en-dessous de la pycnocline, alors ces ondes vont perdre leur énergie *via* l'émission d'ondes internes vers le bas. De même, si la phase de formation de ces fronts raides est trop longue, beaucoup d'énergie sera perdue dans la couche inférieure avant qu'ils n'apparaissent, s'ils apparaissent. Nous traiterons de cette problématique en Partie III.

### 2.3 Ondes internes, déferlement et turbulence

Cette thèse ne traite pas de ce phénomène éminemment non-linéaire, alors pourquoi l'évoquer ? Car comme expliqué en Introduction, les ondes internes peuvent déferler, ce qui déclenche la turbulence, elle-même responsable du mélange dans les océans, lui-même responsable de l'entretien de la stratification de l'océan. La motivation ultime de la communauté étudiant les ondes internes est donc de connaître, quantifier et paramétriser ce mélange afin de pouvoir inclure ses effets dans les modèles climatiques. Or, les effets non-linéaires favorisent très souvent le déferlement qui n'est certes pas un objet d'étude de ce travail mais une motivation forte dans le cadre de la communauté scientifique en général.

Le déferlement des ondes internes a de très nombreuses causes ainsi que de très nombreuses manifestations. Je vais me contenter d'évoquer des causes de déferlement simples et montrer en quoi cette étude peut y être reliée. Pour une description plus complète du phénomène, voir l'article de revue [SS02].

Revenons à notre onde interne plane :

$$\psi(x, z, t) = A \sin(k_x x + k_z z - \omega t).$$

Les champs de vitesses et de températures qui s'en déduisent sont bien sinusoidaux mais les vecteurs vitesse étant obliques, les isopycnes ne sont pas sinusoidales (cf. figure 2.11). En effet, le déplacement d'une isopycne dans

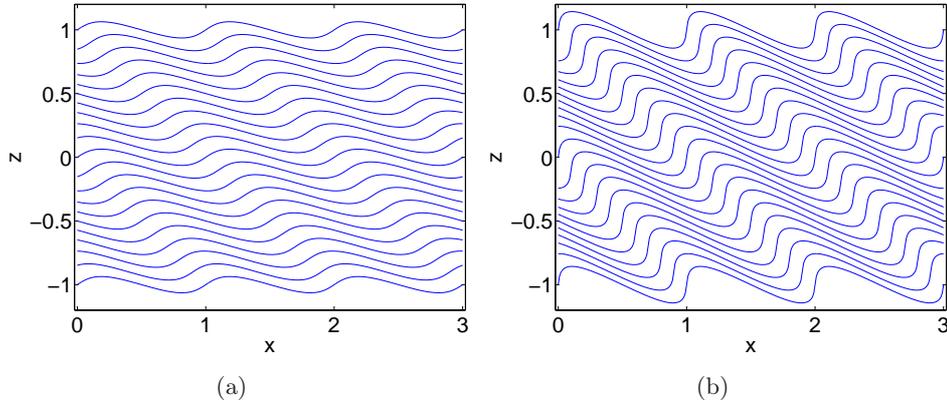


FIGURE 2.11 – Tracés des isopycnes à partir de l'équation 2.33 pour (a)  $\sigma = 0,4$  et (b)  $\sigma = 0,9$ . On voit qu'on se rapproche d'une configuration où les isopycnes pourraient se retourner.

un champ d'ondes internes s'écrit ([Tho87]) :

$$\eta = \frac{Ak_x}{\omega} \sin(k_x x + k_z(z + \eta) - \omega t). \quad (2.33)$$

En différentiant l'équation précédente, on peut calculer la pente des isopycnes :

$$\partial_x \eta = \frac{1}{\tan \theta} \frac{\sigma \sin(k_x x + k_z(z + \eta) - \omega t)}{1 - \sigma \cos(k_x x + k_z(z + \eta) - \omega t)}, \quad (2.34)$$

avec  $\sigma = Ak_z k_x / \omega$  la raideur de l'onde, qui comme nous l'avons dit en §2.1.1 est relié à la pente maximale des isopycnes par  $\sigma \tan \theta / (1 - \sigma)$  pour  $\sigma < 1$ . Si  $\sigma \geq 1$ , la pente des isopycnes peut devenir infinie et négative en certains endroits et les isopycnes peuvent donc se retourner. Dans ce cas, à un instant donné, du fluide lourd peut se retrouver au-dessus de fluide léger : on est dans une situation convective et les ondes peuvent déferler, comme montré en figure 2.12.

Un autre type d'instabilité peut être évoqué, l'instabilité de cisaillement. Pour cela, on peut donner un ordre de grandeur pour le nombre de Richardson qui compare l'effet stabilisateur de la stratification avec l'effet déstabilisateur du cisaillement à l'origine de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz :

$$Ri \sim \frac{N^2 \lambda^2}{U^2}, \quad (2.35)$$

avec  $U$  l'échelle typique des vitesses et  $\lambda$  l'échelle typique de la longueur d'onde. Si le nombre de Richardson devient inférieur à une certaine valeur, typiquement entre 0,4 et 1 dans l'océan d'après Large *et al.* [LMD94], alors on peut observer des rouleaux ressemblant à des rouleaux de Kelvin-Helmholtz, comme le montre la figure 2.5.

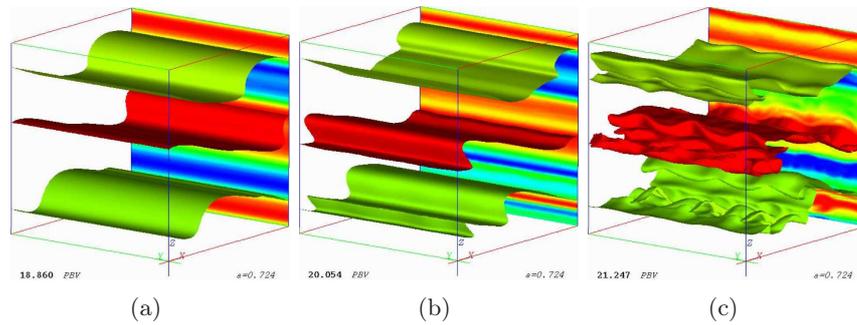


FIGURE 2.12 – Visualisation de trois surfaces isopycnales lors du déferlement d'une onde interne (tiré de [Kou99, Fig. 5.8]).

Plus une onde a une forte amplitude et une longueur d'onde faible, plus elle est raide et cisailée. Beaucoup de phénomènes évoqués jusqu'à présent, ainsi que la totalité des phénomènes étudiés dans la suite de ce manuscrit, peuvent contribuer à augmenter le cisaillement : contraction des faisceaux consécutive à des réflexions contre des parois solides et éventuellement génération d'harmoniques comme nous allons le voir en Partie II, génération d'ondes solitaires comme nous allons le voir en Partie III. Ainsi, si les phénomènes étudiés dans cette thèse ne traitent pas directement du déferlement, ils traitent tous de processus pouvant le catalyser.

## Chapitre 3

# Outils pour l'étude des ondes internes

Après avoir passé en revue les aspects de la théorie des ondes internes qui sous-tendent ce travail, nous allons décrire les différents outils et techniques d'études de ces ondes en nous limitant à ceux utilisés pendant ces quarante-et-un mois.

L'outil principal utilisé lors de cette thèse est un code numérique, le MIT general circulation model (MITgcm, *cf.* [MAH<sup>+</sup>97]). Le niveau de maîtrise qui a été obtenu de ce code est celui d'un utilisateur et non celui d'un développeur. Ainsi, je vais présenter les différents paramètres sur lesquels j'ai eu besoin de jouer et l'esprit dans lequel je les ai utilisés. Le deuxième outil que j'ai utilisé a été la grande plate-forme Coriolis à Grenoble, où des expériences ont été menées en utilisant la vélocimétrie par images de particules (PIV). Enfin, quelques outils de traitement de données vont être brièvement décrits.

### 3.1 Modélisation numérique des ondes internes

#### 3.1.1 Le MITgcm

##### Traitement non-hydrostatique de la pression

Sorti en 1997, le MITgcm a été le premier code numérique résolvant les équations de Navier-Stokes et destiné aux simulations globales à avoir la capacité de se passer de l'approximation hydrostatique ([MHPA97]). Nous avons très brièvement évoqué ce terme en §2.2.2 et nous allons commencer par développer sa signification ici étant donné son importance dans le domaine de la simulation numérique d'ondes internes.

L'équation de Navier-Stokes projetée sur  $z$  s'écrit :

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + b, \quad (3.1)$$

avec  $P$  la fluctuation de pression par rapport à la pression hydrostatique<sup>1</sup>. L'approximation hydrostatique consiste à dire que l'accélération verticale  $dw/dt$  peut être négligée devant la flottabilité  $b$ . Dans ce cas, la vitesse verticale se déduit de la condition d'incompressibilité.

Pour des ondes internes de faible amplitude ( $\sigma = \tilde{u}k_x/\omega = \tilde{w}k_z/\omega \ll 1$ ), où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{w}$  sont des amplitudes typiques de  $u$  et  $w$ ), l'accélération verticale est dominée par  $\partial_t w \sim \omega \tilde{w}$  que l'on veut petit devant le terme de flottabilité de grandeur caractéristique  $\tilde{b}$ . Or, d'après l'équation de conservation de la masse (1.17), on a  $\omega \tilde{b} = N^2 \tilde{w}$ . L'approximation hydrostatique consiste donc à dire que  $\omega^2/N^2 \ll 1$ . En ce qui concerne les ondes internes, ceci est le critère habituel qui détermine si cette approximation est valide (cf. [Gil82, §11.9]). Cependant, pour des ondes internes de forte amplitude (ou d'autres phénomènes, telle que la convection), l'accélération verticale est cette fois dominée par le terme d'advection et l'approximation hydrostatique est vérifiée par  $Fr^2 = \tilde{u}^2 k_x^2 / N^2 \ll 1$ ,  $Fr$  étant le nombre de Froude associé à l'onde.

En supposant que ni les effets de Coriolis, ni les effets non-linéaires ne dominant,  $\omega^2 \ll N^2$  implique que les longueurs d'ondes horizontales sont très grandes devant les longueurs d'ondes verticales (comme par exemple pour des rayons très penchés). Dans le cas où l'advection domine,  $\tilde{u}^2 k_x^2 / N^2 \ll 1$  correspond à des écoulements de très grande échelle, peu intenses ou à des fluides très stratifiés. Typiquement, d'après [MHPA97], abandonner l'approximation hydrostatique est devenu nécessaire quand les modèles numériques ont commencé à pouvoir résoudre des échelles de 1 à 10 km, qui correspondent aux plus petits tourbillons en équilibre géostrophique, aux phénomènes convectifs, aux ondes internes de faible longueur d'onde (rayons et modes élevés près des topographies) et aux cas où la stratification est faible (auquel cas l'approximation traditionnelle n'est pas valide).

Nos simulations numériques vont modéliser deux types de configurations : des reproductions d'expériences de laboratoire, où  $\omega/N = O(1)$  et des ondes solitaires pour lesquelles  $\omega/N = O(0,1)$  mais dont les effets non-hydrostatiques mêmes faibles doivent être pris en compte, comme nous l'avons vu en §2.2.2. Ainsi, sans un code qui prend en compte les effets non-hydrostatiques, cette étude n'aurait pas été possible.

### Les équations résolues

Les équations résolues sont les équations de la dynamique des fluides incompressibles sous l'approximation de Boussinesq. Ainsi, l'équation de Navier-Stokes (1.11) est modifiée par la viscosité :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P / \rho_0 + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + b \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

---

1. Pour des raisons que nous ne détaillerons pas, le code inclut aussi une pression de surface dans la décomposition de la pression.

avec  $\nu$  la viscosité cinématique. Il est à noter que comme les rapports d'aspects dans l'océan sont très faibles (les échelles horizontales sont beaucoup plus grandes que les échelles verticales), le code sépare les dynamiques horizontale et verticale, ainsi que la viscosité en viscosités horizontale et verticale. Nous définirons toujours ces deux viscosités comme égales mais nous verrons en §3.1.3 que nous pourrions ajouter d'autres formes de dissipation dans notre modèle, qui elles seront anisotropes.

Enfin, le code utilise deux autres équations que nous n'avons pas encore mentionnées, liées au fait que la flottabilité est définie *via* la température et que cette température est sujette à de la diffusion. Tout d'abord, nous avons l'équation d'advection-diffusion de la température :

$$\partial_t T + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \kappa_T \nabla^2 T, \quad (3.3)$$

où  $\kappa_T$  est la diffusivité thermique (qui pourrait se décomposer de la même manière que  $\nu$ ) et  $T$  la température.

Ensuite, une équation d'état relie la température à la densité. Le code offre plusieurs types d'équations d'état plus ou moins élaborées. Nous avons utilisé tout au long de ce travail la plus simple d'entre elles, l'équation d'état linéaire :

$$\rho(x, z, t) = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0)), \quad (3.4)$$

où  $T_0$  est la température telle que  $\rho(T_0) = \rho_0$  et  $\alpha_T$  le coefficient de dilatation thermique de l'eau. Bien que nous ne l'ayons pas fait, il est aussi possible d'implémenter la salinité dont les effets sont similaires à ceux de la température, comme nous le verrons en §3.2.1.

### Méthodes numériques

La discrétisation temporelle est faite à l'aide d'un schéma de Adams-Bashforth d'ordre 3 (*cf.* [PTVF07, §17.6]).

La discrétisation spatiale des équations est basée dans ses grandes lignes sur un schéma de volumes finis centré d'ordre 2<sup>2</sup>. La méthode des volumes finis consiste à intégrer les lois de conservation du problème sur des volumes élémentaires. Une loi de conservation d'une grandeur  $X$  s'écrit :

$$\partial_t X + \nabla \cdot \mathbf{F}(X) = Q(X), \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{F}(X)$  est le flux de la quantité  $X$  au travers des frontières d'un volume élémentaire  $\Omega$  et  $Q(X)$  un terme source.

Les détails du schéma sont en [MAH<sup>+</sup>97] et nous allons l'illustrer sur le cas de la température à une dimension. Le fluide étant incompressible, on peut écrire l'équation d'advection-diffusion de la température sous la forme :

$$\partial_t T + \nabla \cdot (T\mathbf{v} - \kappa_T \nabla T) = 0, \quad (3.6)$$

---

2. À part par exemple pour le schéma d'advection de la température, que l'on peut choisir. Nous avons souvent utilisé un schéma d'ordre 3 avant.

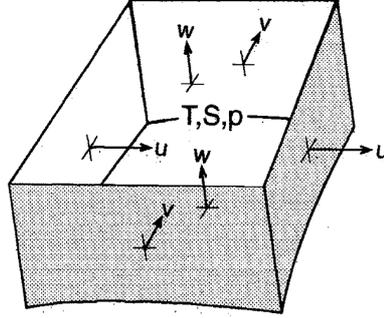


FIGURE 3.1 – Volume élémentaire de discrétisation centré autour d'un point où les température et pression (et salinité) sont calculés (tiré de [MAH<sup>+</sup> 97, Fig. 3(b)]).

qui est sa forme conservative. Après intégration sur un volume élémentaire  $\Omega$  fixe par rapport au système de coordonnées et délimité par la surface  $\Sigma$ , on applique le théorème de Green-Ostrogradski pour obtenir :

$$\partial_t \int_{\Omega} T d\Omega + \oint_{\Sigma} (T \mathbf{v} - \kappa_T \nabla T) \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0, \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  et pointant vers l'extérieur de  $\Omega$  en tout point.

Avant de revenir au code discrétisé, il faut comprendre à quoi ressemble la grille. Il s'agit d'une grille dite Arakawa C schématisée en figure 3.1. Cette figure représente un pavé élémentaire, une "cellule", terme préféré à "point de grille".  $T$  est évaluée au centre de la cellule,  $w$  au centre des faces supérieure et inférieure,  $u$  au centre des faces est et ouest et  $v$  au centre des faces nord et sud.

Pour simplifier l'explication, plaçons-nous à une dimension en supposant que tout se passe selon  $x$  et que le volume est délimité par  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+1/2}$  (l'indice  $i$  correspondant donc à un point à l'intérieur de la cellule) :

$$\partial_t \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} T dx + [Tu - \kappa_T \partial_x T]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = 0. \quad (3.8)$$

On voit ainsi tout l'intérêt de la grille décalée. On peut en effet discrétiser la grille de manière à ce que les points  $x_{i\pm 1/2}$  soient ceux où est évaluée la vitesse et les points  $x_i$  ( $= (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$  par exemple) ceux où est évaluée la température. La version de l'équation précédente partiellement discrétisée spatialement s'écrit donc :

$$\Delta x_i \partial_t T_i + T_{i+1/2} u_{i+1/2} - T_{i-1/2} u_{i-1/2} = \kappa_T [(\partial_x T)_{i+1/2} - (\partial_x T)_{i-1/2}], \quad (3.9)$$

avec  $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  et  $T_i, T_{i\pm 1/2}$  la température aux points  $x_i, x_{i\pm 1/2}$  respectivement (de même pour  $u$  et  $\partial_x T$ ). Les quantités  $T_{i\pm 1/2}$  doivent être

évaluées par différents moyens (moyenne, interpolation...), ce qui est une source majeure d'erreurs numériques.

En associant cette dernière équation à des schémas temporel et spatial discrétisés pour les dérivées de  $T$ , ainsi qu'à une méthode pour calculer  $u$ , on obtient finalement un système d'équations à résoudre pour chaque cellule afin d'obtenir les champs de température et de vitesse en chaque point de leurs grilles respectives.

Aux autres quantités  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont associées des cellules différentes, avec des manières quelque peu différentes de traiter les flux, certaines quantités se retrouvant parfois sur les arêtes des cellules et non sur leurs faces. La philosophie du schéma reste la même.

### 3.1.2 Choix des résolutions spatiale et temporelle

Le choix de la résolution spatiale vient en premier. En effet, il est tout simplement dicté par la taille des phénomènes que l'on veut modéliser. Cela est parfois frustrant lorsque les phénomènes les plus fins sont très localisés. Pour limiter le nombre de cellules, il est possible de faire varier spatialement la résolution afin de se concentrer sur une partie du domaine. Les développeurs du code préconisent alors de varier continûment la résolution et que le rapport entre les longueurs de deux cellules consécutives ne soit jamais supérieur à  $\sqrt{2}$ .

En se basant sur cette résolution spatiale, il faut régler le pas de temps. Le MITgcm étant basé sur une série de formulations explicites, ce réglage se fait en partie à l'aide du nombre de Courant qui, pour un problème unidirectionnel, s'écrit  $Co = c\Delta t/\Delta x$ , où  $c$  est la vitesse du plus rapide des phénomènes permis par les équations résolues,  $\Delta t$  le pas de temps et  $\Delta x$  le pas d'espace.  $\Delta x/\Delta t$  représente la vitesse d'information maximale que le schéma spatio-temporel peut propager et si  $Co > 1$ , alors le code devient instable. Les choses ne sont en fait pas si simples : chaque schéma spatio-temporel est associé à une définition différente du nombre de Courant, de même que suivant l'équation résolue, le nombre de Courant peut être supérieur à 1 tout en restant stable. La condition  $Co < Co_{max}$ ,  $Co_{max}$  dépendant donc du système d'équations résolu, est appelée condition CFL<sup>3</sup>.

Il est cependant parfois difficile de connaître le phénomène le plus rapide du système. Pour les ondes internes, la vitesse de phase du premier mode est une limite supérieure parfois trop contraignante quand ce mode n'est pas présent. Au contraire, les interactions avec les parois, les effets non-linéaires ou autres peuvent faire apparaître des phénomènes très rapides et parfois très localisés, donc difficiles à prédire. Enfin, la condition CFL est une condition nécessaire mais malheureusement pas suffisante. Ainsi, le premier réglage des résolutions est souvent empirique. Le nombre de Courant

---

3. Initiales de Richard Courant, Kurt Friedrichs et Hans Lewy ([CFL28, CFL67]).

n'intervient qu'ensuite, par exemple en sachant que si on veut doubler la résolution spatiale, il faut diviser par environ deux le pas de temps.

### 3.1.3 Dissipation d'énergie

L'autre grand paramètre à prendre en compte pour la stabilité est la viscosité. En effet, imaginons que la dynamique soit partiellement turbulente, avec une cascade directe d'énergie. Les structures turbulentes, par étirement des filaments de vorticité, vont devenir de plus en plus petites jusqu'à atteindre l'échelle de Kolmogorov.   cette échelle, la viscosité dissipe efficacement l'énergie macroscopique. Si le pas de grille  $\Delta x$  est plus grand que l'échelle de Kolmogorov, alors la cascade s'arrête prématurément et les mouvements d'échelle  $\Delta x$  subsistent plus longtemps que si la dissipation jouait pleinement son rôle, la viscosité n'étant pas suffisamment efficace à cette échelle. La cascade, elle, ne s'arrête pas et l'énergie à l'échelle  $\Delta x$  va s'accumuler sous la forme d'un "bruit"   l'échelle de la grille, qui se développe jusqu'à déstabiliser le calcul. Il faut dans ce cas soit augmenter l'échelle de Kolmogorov (augmenter la viscosité), soit augmenter la résolution.

Dans la Partie II, les simulations numériques reproduiront de manière la plus fidèle possible des expériences de laboratoire. Ainsi, la viscosité sera fixée à  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et la résolution y sera adaptée. En §6, le principe sera quasiment le même et la viscosité sera choisie en premier.

En §7 en revanche, des phénomènes d'échelle océanique seront modélisés. La résolution horizontale sera de 50 m, la résolution verticale maximale de 2 m, ces deux échelles étant (très) grandes devant les échelles millimétriques à centimétriques où la dissipation se produit. Des mesures de dispersion de traceurs ont cependant montré ([LMP<sup>+</sup>00]) qu'au-dessus d'une topographie où des rayons d'ondes internes sont présents, la viscosité verticale effective peut être bien plus importante, de l'ordre de  $10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , valeur que l'on peut choisir pour  $\nu$ . Cependant, cette valeur n' st que moyenne et localement, elle peut être bien plus importante. Il serait en revanche regrettable de l'augmenter encore au risque de supprimer toute dynamique partout ailleurs. Ainsi, on a recours à d'autres moyens, plus sélectifs, pour dissiper l'énergie.

La première est de définir une viscosité dite biharmonique qui, tel que le code est écrit, consiste à ajouter au membre de droite de l'équation (3.2) le terme :

$$\nu_2 \frac{\partial^4 \mathbf{v}}{\partial x^4}, \quad (3.10)$$

où  $\nu_2$  est la viscosité biharmonique (en  $\text{m}^4 \cdot \text{s}^{-1}$ ). Tel qu'il est codé dans le MITgcm, ce terme ne joue donc que sur la dissipation horizontale. La sensibilité de la viscosité "classique" aux petites échelles se traduit par le fait que son terme associé consiste en des dérivées secondes. On voit donc que la viscosité biharmonique, en dérivée quatrième, est encore plus sensible aux

petites échelles. Ainsi, une telle viscosité a tendance à dissiper dans des endroits très confinés où les vitesses peuvent devenir très élevées, de manière bien plus importante que la viscosité usuelle. Au contraire, les phénomènes de grande échelle y sont relativement insensibles. Enfin, une diffusivité thermique biharmonique est aussi implémentée.

L'autre méthode de dissipation utilisée en §7 est le schéma KPP, pour "K-Profile Parametrisation" ([LMD94]), qui agit sur les viscosité et diffusivité thermique verticales. Au contraire de la viscosité biharmonique, il s'agit d'un schéma relativement complexe qui ne peut pas être résumé en un terme. Il a plusieurs effets, comme par exemple accroître le mélange dû au forçage de surface, qui ne nous concerne pas. Dans l'intérieur du fluide, le nombre de Richardson évoqué en §2.3 et traduisant la comparaison entre stabilisation par la gravité et déstabilisation par le cisaillement est défini :

$$Ri = \frac{N^2}{(\partial_z u)^2}. \quad (3.11)$$

Cette définition est la forme exacte de l'expression (2.35).

Le schéma recalcule les viscosité et diffusivité thermique en chaque endroit en fonction de ce nombre de Richardson, en tenant compte de certains seuils et avec comme règle générale que plus  $Ri$  est bas, plus les viscosité et diffusivité verticales sont élevées. Il se trouve que dans les simulations du Chapitre 7, ce schéma conduira la viscosité verticale à atteindre très localement des valeurs de l'ordre de  $10^{-1} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 3.1.4 Conditions aux limites

Par défaut, le domaine est périodique dans les deux directions horizontales. Toutes nos simulations vont être bidimensionnelles ( $\partial_y = 0$ ) et ne comporteront qu'une cellule dans la direction  $y$ . Ainsi, la périodicité sera conservée dans cette direction et le domaine sera équivalent à un domaine d'extension infinie selon  $y$ , avec notamment des vitesses permises au travers du plan  $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ .

#### Surface

Pour toutes les simulations de ce travail de thèse, la frontière supérieure du domaine est une surface libre linéaire. Surface libre car un toit rigide est instable dans toutes les configurations testées et linéaire car appliquer une surface libre non-linéaire n'est pas prévu en configuration non-hydrostatique.

Cette surface libre est un point délicat en termes de stabilité : si l'amplitude de son déplacement est trop forte (typiquement un pas de grille vertical, même si c'est en termes de pression qu'il faudrait raisonner), le code explose. Ainsi, il faut veiller à ce que le flux net aux frontières soit minimisé.

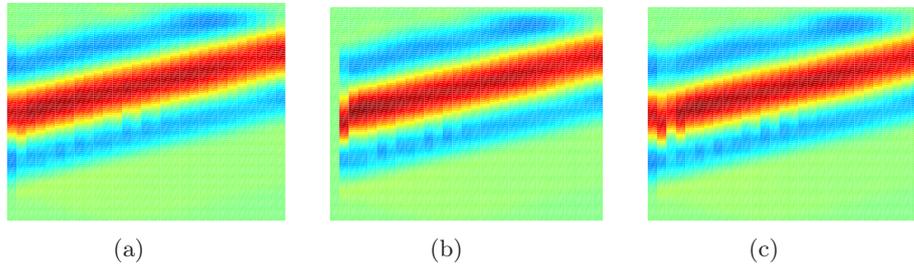


FIGURE 3.2 – Rayons d’ondes internes sans rotation créées par forçage appliqué sur la paroi gauche. La quantité affichée est la vitesse verticale  $w$ , avec  $x$  en ordonnées et  $z$  en abscisse (unités arbitraires). (a) Forçage sur les trois champs  $u$ ,  $w$  et  $T$ . (b) Forçage sur uniquement  $u$  et  $T$ . (c) Forçage sur uniquement  $u$  et  $w$ .

### Forçage

Le forçage est toujours appliqué à la frontière est ou ouest (ou les deux) et peut avoir des formes relativement arbitraires. On parle de condition ouverte à la frontière (OBC pour Open Boundary Condition) dans le sens où on peut faire “traverser” du fluide à la frontière, à condition de le prescrire. Ainsi, à contre-courant de l’intuition de beaucoup<sup>4</sup>, activer cette option sans rien prescrire d’autre empêche tout fluide de traverser la frontière, les valeurs des vitesses par défaut étant toutes nulles.

La première partie de ce travail de thèse, relatée en §4, s’est intéressée aux attracteurs d’ondes internes. Le forçage est barotrope (uniforme suivant la verticale) et la présence d’une frontière inclinée présente sur toute la hauteur du domaine empêche de compenser le flux de la frontière verticale par un flux sur la frontière opposée. Heureusement, l’amplitude est suffisamment faible pour ne pas poser de problèmes numériques. La continuation de ce travail, présentée en annexe B, utilise elle un forçage en onde interne de mode-1, qui élimine le problème numérique.

Inspiré ensuite par le générateur d’ondes internes créé pendant la thèse de Louis Gostiaux (*cf.* §3.2.2), des structures de forçages un peu plus élaborées ont été implémentées, à savoir des ondes planes d’étendues spatiales modulées ou non, plus ou moins grandes, comme utilisé en §5 et §6. Dans ce cas, appliquer le forçage à tous les champs accessibles, à savoir  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $T$ , améliore grandement la qualité du signal de sortie, y compris lorsque par exemple  $u \gg w$  (*cf.* Fig. 3.2). Ceci est relativement simple grâce aux relations de polarisation (1.49) et à l’équation d’état (3.4).

Vers la fin de cette thèse, de nouveaux forçages, plus élaborés, ont été définis, qui sont utilisés en §7 et avec des amplitudes de forçages désormais complexes. Ils ont permis dans un premier temps de reproduire un rayon de Thomas et Stevenson, la vitesse  $u$  s’écrivant par exemple (*cf.* expres-

4. à commencer par la mienne.

sion 1.40) :

$$u = U\Re(A_{ts}e^{-i\omega t}) = U [\Re(A_{ts}) \cos \omega t + \Im(A_{ts}) \sin \omega t], \quad (3.12)$$

avec  $U$  un facteur de normalisation de l'amplitude et  $\Re$  et  $\Im$  identifiant les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Les autres champs se déduisent encore une fois des relations de polarisation. C'est ce type de forçage qui sera décrit plus précisément en §7.2 et utilisé en §7.3.

Le fait d'introduire une amplitude complexe permet de modéliser des signaux comprenant plusieurs composantes déphasées entre elles. Ainsi, nous verrons en §7.4 qu'on peut reproduire le forçage complet d'une marée avec ses différentes composantes (barotrope, rayons, modes...) car ce forçage pourra toujours s'écrire sous la forme  $|A(z)|e^{i(\phi(z)-\omega t)}$ , sans limitation sur la structure verticale de la phase  $\phi(z)$  et de l'amplitude  $|A(z)|$ . Il s'agit de la forme la plus élaborée de forçage que je vais appliquer et n'est pas implémentée par défaut dans le code.

### Parois et topographies

Dans l'intérieur du domaine, le schéma en volumes finis est rigoureusement équivalent à un schéma en différences finies. L'avantage des volumes finis apparaît dans le traitement de la topographie ([AHM97]). Ce traitement a été historiquement une autre avancée du MITgcm, en tout cas pour ce qui est des codes à coordonnées  $z$  (cellules ou grilles à angles droits).

Deux méthodes ont été utilisées, schématisées en figure 3.3. La première, utilisée en §4, est appelée méthode des cellules arasées. Elle consiste à modifier la forme des cellules en leur faisant épouser la forme (plane par morceaux) de la topographie. Les développeurs du code, jugeant cette méthode trop coûteuse, l'ont remplacé au cours de cette thèse par la méthode des cellules partielles, plus légère et aux performances comparables. Cette méthode consiste à laisser aux cellules leur forme parallélépipédique mais à réduire leur hauteur de manière à ce que le fond de la cellule soit à la hauteur approximative de la topographie. Dans les deux cas, la réduction du volume et éventuellement des surfaces des faces est traitée en modifiant les flux entre cellules et la production des sources.

Soit une topographie définie par la courbe  $z = -h(x)$ . Le code prévoit deux types de conditions à cette limite : non-glissement, définie par  $\mathbf{v}|_{z=-h} = 0$  et glissement sans frottement, définie par  $\mathbf{v} \cdot \nabla h|_{z=-h} = 0$  et  $\partial_n v_t = 0$ , où  $\partial_n$  est la dérivée normale à la paroi et  $v_t$  la vitesse tangentielle à la paroi. La première condition consiste à ne pas négliger la couche limite visqueuse contre une paroi. Cette couche limite visqueuse a une épaisseur typique  $\delta_\nu = \sqrt{\nu/\omega}$ . Si le pas de grille ne permet pas de la résoudre, alors une condition de glissement sans frottement doit être préférée. Dans une expérience de laboratoire,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\omega \approx 0,1 - 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et donc  $\delta_\nu \approx 1 - 3 \text{ mm}$ ,

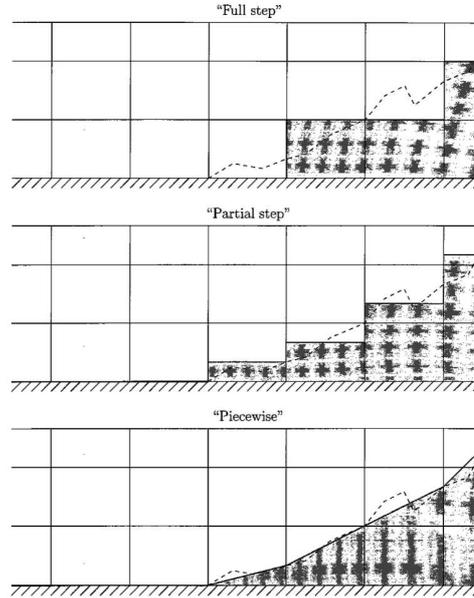


FIGURE 3.3 – Différents traitements des topographies pour une pente de topographie hypothétique en pointillés. Haut : traitement “pré-MITgcm”, où une case est considérée comme faisant partie de la topographie ou non. Milieu : cellules partielles. Bas : cellules arasées. Adapté de [AHM97, Fig. 8]

ce qui est l'ordre de grandeur des plus petits pas de grille que nous utiliserons. Ainsi, la condition de glissement sans frottement sera toujours choisie.

### Couche-éponge

Elle est destinée à absorber les mouvements des ondes à l'opposé de la frontière où le forçage est appliqué. Elle consiste en une zone en fin de domaine où un terme  $G$  est ajouté au membre de droite de l'équation de Navier-Stokes. Si le domaine a une longueur totale  $L$  et la couche-éponge une longueur  $\ell$ , alors ce terme s'écrit, pour  $L - \ell \leq x \leq L$  :

$$G(x, z) = \frac{\alpha_{ob}}{\alpha_{ob}\tau_b + (1 - \alpha_{ob})\tau_{in}} (u_{ob}(z) - u(x, z)), \quad (3.13)$$

avec  $\tau_b$  un temps de relaxation relatif à la frontière,  $\tau_{in}$  un temps de relaxation relatif à la limite de la couche-éponge à l'intérieur du domaine et  $u_{ob}(z)$  la valeur de  $u(x, z)$  prescrite en  $x = L$  via l'option `OBC`. Le paramètre  $\alpha_{ob}$  quant à lui a pour définition :

$$\alpha_{ob} = \frac{x - L + \ell}{\ell}. \quad (3.14)$$

La couche-éponge ne s'applique pas à  $v$  ni à  $w$  mais un terme similaire à  $F$  existe pour la température, qui s'applique aussi à l'équation pour la quantité de mouvement et donc à la flottabilité.

Ainsi, le traitement en question consiste en l'ajout d'un terme de relaxation de temps caractéristique variant continûment d'environ  $\tau_{in}/\alpha_{ob}$  à la limite intérieure de la couche-éponge à  $\tau_b$  à la frontière du domaine et qui relaxe les champs  $u$  et  $T$  à leurs valeurs prescrites à cette frontière. Par exemple, si la valeur prescrite est nulle, alors le terme  $F$  est un terme de friction d'intensité croissante à mesure qu'on se rapproche de la paroi.

Il faut choisir  $\tau_{in} < \tau_b$  de manière à ce que la relaxation soit de plus en plus efficace au fur et à mesure que l'on se rapproche de la frontière. Il faut aussi choisir ces deux temps suffisamment éloignés et la couche-éponge suffisamment longue pour que la friction-relaxation augmente progressivement en intensité. En effet, on est en face d'un problème d'adaptation d'impédance : si la transition entre l'intérieur du domaine et la couche-éponge, puis la diminution du temps de relaxation, sont trop abrupts, de l'énergie risque de se réfléchir contre la couche-éponge et dans son intérieur.

Des tests ont été effectués, qui ne sont pas reproduits ici mais qui ont mené à la conclusion (empirique) que pour complètement absorber une onde interne de période  $T_0$  et de mode-1 (de longueur d'onde horizontale  $\lambda_x$ ), on doit choisir  $\ell \geq \lambda_x$ ,  $\tau_{in} \approx T_0$  et  $\tau_b \approx T_0/1000$ . L'onde de mode-1 étant la plus rapide, ayant la plus grande longueur d'onde et étant donc la plus difficile à amortir, ces règles sont très efficaces pour absorber tout mouvement ondulatoire.

## 3.2 Étude expérimentale des ondes internes

Un aspect de ma thèse a permis d'aborder un autre moyen d'étude des ondes internes, à savoir leur étude expérimentale et ceci sur la grande plateforme Coriolis de Grenoble. Outre une taille impressionnante permettant d'obtenir de faibles rapports d'aspects et de s'affranchir en bonne partie des effets de viscosité, Coriolis offre divers outils de génération et d'acquisition de données. Nous allons décrire ici les deux outils utilisés lors de cette thèse : le générateur d'ondes internes et l'acquisition par PIV. Mais tout d'abord, intéressons-nous à la stratification en laboratoire.

### 3.2.1 Stratification

#### Agent de stratification

La température n'est pas souvent utilisée pour créer un fluide stratifié en laboratoire, la raison principale étant que la diffusion thermique homogénéise la température en quelques dizaines d'heures, surtout en présence d'ondes internes. La stratification en densité est en général réalisée à l'aide de sel, NaCl dans notre cas. En effet, les équations en densité et température sont les mêmes (première loi de Fick pour la salinité, loi de Fourier pour la température, équation d'état linéaire dans les deux cas) à part pour la valeur

de la diffusivité du sel dans l'eau  $\kappa_S$ , 100 fois inférieure à la diffusivité thermique. Ainsi, une stratification reste linéaire pendant deux à trois semaines. Pour cette raison, lorsque des reproductions numériques d'expériences de laboratoire vont être présentées, la stratification sera toujours réalisée en température mais en ajustant la valeur de la diffusivité de la température à celle du sel.

### Création de la stratification

La stratification est réalisée à partir de deux cuves de 65 m<sup>3</sup> chacune, l'une remplie d'eau salée et l'autre d'eau douce. Un ordinateur contrôle le débit relatif à la sortie de chaque cuve afin de modifier progressivement la salinité de l'eau arrivant dans la cuve. On peut ensuite remplir soit par en bas en commençant par l'eau douce (ce qui sera notre cas), soit par en haut en commençant par l'eau salée.

### Mesure de la densité

En se dissolvant, les ions du sel se séparent et augmentent la conductivité du fluide. Mesurer cette conductivité permet donc de remonter à la salinité et donc à la densité. Un profil de densité peut être réalisé simplement en plongeant à vitesse constante une sonde conductimétrique jusqu'au fond de la cuve, en enregistrant en continu le signal de sortie. Ce dernier est cependant en volts. De plus, les électrodes des sondes conductimétriques étant extrêmement fragiles et sujettes à la corrosion, il est nécessaire de les calibrer chaque jour. Pour cela, il faut des échantillons de densités différentes et un second appareil, mesurant leur densité. Cet appareil est appelé densimètre à capillaire car il détermine la fréquence propre d'oscillation d'un volume de fluide amené dans un capillaire (*cf.* figure 3.4), fréquence qui dépend de la densité. Enfin, la température est aussi prise en compte afin de corriger la valeur de la densité.

### Évolution temporelle

Suivant l'échelle de temps sur laquelle on la considère, la stratification est un objet à la fois robuste et fragile. Fragile tout d'abord à cause de la diffusion. Rappelons la première loi de Fick :

$$\mathbf{j}_s = -\kappa_S \nabla S, \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{j}_s$  est le flux de salinité et  $S$  la salinité.

Dans le cas où la salinité évolue linéairement, le gradient de salinité est constant et par conséquent le flux de salinité est uniforme : la diffusion n'agit donc pas dans le volume du fluide. Aux frontières du fluide en revanche, le flux perpendiculaire aux parois devient nul ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s = 0$ ) et on peut déduire de

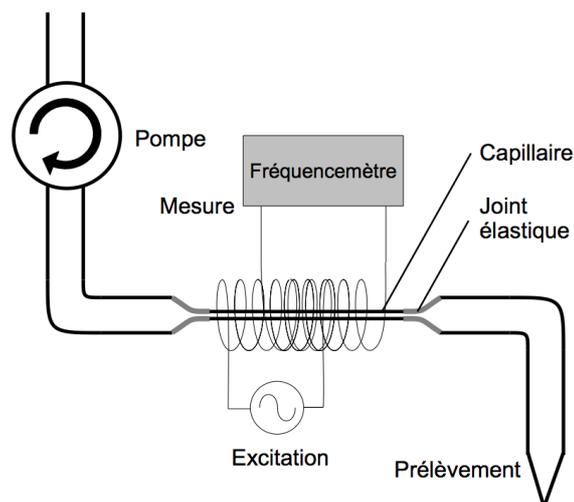


FIGURE 3.4 – Principe du densimètre à capillaire, mesurant la fréquence propre d’oscillation d’un capillaire rempli de la solution à étudier (tiré de [Gos06, Fig. 3.1.]).

l’équation (3.15) que en ces endroits,  $\mathbf{n} \cdot \nabla S = 0$ , c’est à dire que la salinité est localement homogène perpendiculairement aux parois non-verticales (fond, surface, topographie), homogénéité qui, elle, se transmet dans l’intérieur du fluide et détruit progressivement la stratification.

La stratification est cependant un objet robuste car le mécanisme précédent ne se fait sentir qu’au bout de plusieurs jours voire semaines. Robuste aussi car une fois la cuve remplie, il est possible d’y faire des manipulations en s’y plongeant, de remuer l’eau relativement brusquement sans qu’une modification visible de la stratification soit constatée dans l’immédiat<sup>5</sup>.

### 3.2.2 Génération d’ondes internes

Nous avons vu en §1.3 que l’on peut se servir d’objets oscillants (ou assimilés) pour générer des ondes internes mais que ces ondes ont des structures en rayons, ce qui ne permet pas de transposer dans le laboratoire des théories valables pour des ondes planes. Nous chercherons notamment en §5 à étudier expérimentalement des triades résonantes dont le cadre théorique a été décrit en §2.1 pour des ondes planes.

Au cours de la thèse de Louis Gostiaux [Gos06, §6], un type nouveau de générateur a été conçu. Outre dans la thèse susmentionnée, son développement et sa caractérisation sont relatés en [GDMD07, MMM<sup>+</sup>10]. Ce générateur a été conçu pour générer des ondes de gravité internes. Il est moins adapté aux ondes inertielles car il ne peut pas reproduire les trajectoires

5. Les annales de Coriolis font même état de la chute d’un ingénieur dans la cuve, suivie le lendemain par une reprise des travaux.

elliptiques des particules liées aux ondes inertielles. Pour notre campagne expérimentale, nous avons inauguré une version plus élaborée de ce générateur appelée GÉOIDE (GÉNérateur d'Ondes Internes DEux), conçu dans le cadre du contrat ANR PIWO. Nous décrivons ici ses caractéristiques.

Son principe repose sur le fait que pour exciter efficacement un champ d'ondes internes sans créer d'harmoniques ni de sous-harmoniques, il faut exciter directement sa structure de cisaillement. Pour cela, 24 plaques coulisent sur elles-mêmes avec un déphasage entre chaque, comme on peut le voir en figures 3.5(a) et 3.5(c). Les plaques ont pour dimensions  $2 \times 30 \times 150 \text{ cm}^3$ . Elles sont lestées de manière à ce que leur densité moyenne soit égale à celle de l'eau pure afin de faciliter les mouvements une fois immergées. Des rails leur permettent de coulisser, qui sont disposés tous les 21 mm afin de laisser de l'espace entre chaque plaque. L'ensemble peut être incliné par rapport à l'horizontale de manière à se rapprocher de l'inclinaison des caractéristiques des ondes internes.

Deux arbres à cames assurent le décalage entre chaque plaque ainsi que l'amplitude de déplacement de chaque plaque. Chaque came est excentrée et décalée angulairement par rapport à ses voisines immédiates, comme on peut le voir en figures 3.5(b) et 3.5(d). La première figure montre des arbres reproduisant des ondes planes, avec une excentricité commune à toutes les cames et un décalage angulaire constant entre chaque plaque. Il est en fait possible de donner à chaque came une phase et une excentricité propre, permettant ainsi de modéliser des rayons, des modes ou autres. Chaque plaque est donc associée à deux cames qui la poussent et deux ressorts à ses extrémités assurent le contact entre les cames et la plaque.

Les cames étant démontables et les arbres à cames amovibles par rapport à la structure principale, on peut, en moins d'une demi-journée, changer la forme du forçage. Cette caractéristique est inédite. Pour le premier modèle conçu pendant la thèse de Louis Gostiaux, modifier la configuration du générateur impliquait de vider la cuve, démonter le générateur plaque par plaque, came par came et de tout remonter ensuite.

Un des arbres est motorisé, l'autre arbre est entraîné par le premier à l'aide d'une chaîne (*cf.* Fig. 3.5(a)) en prenant garde que les phases des deux arbres sont accordées. En tournant sur eux-mêmes, les deux arbres propagent le cisaillement à la manière d'une vis d'Archimède. En réglant la vitesse du moteur, on règle la fréquence des ondes et en choisissant le sens de rotation, on choisit si les ondes seront émises vers le haut ou vers le bas.

### 3.2.3 La vélocimétrie par images de particules (PIV)

#### Principe général

La vélocimétrie par image de particules part d'une idée simple : mesurer le champ de vitesse du fluide en mesurant les vitesses des particules de

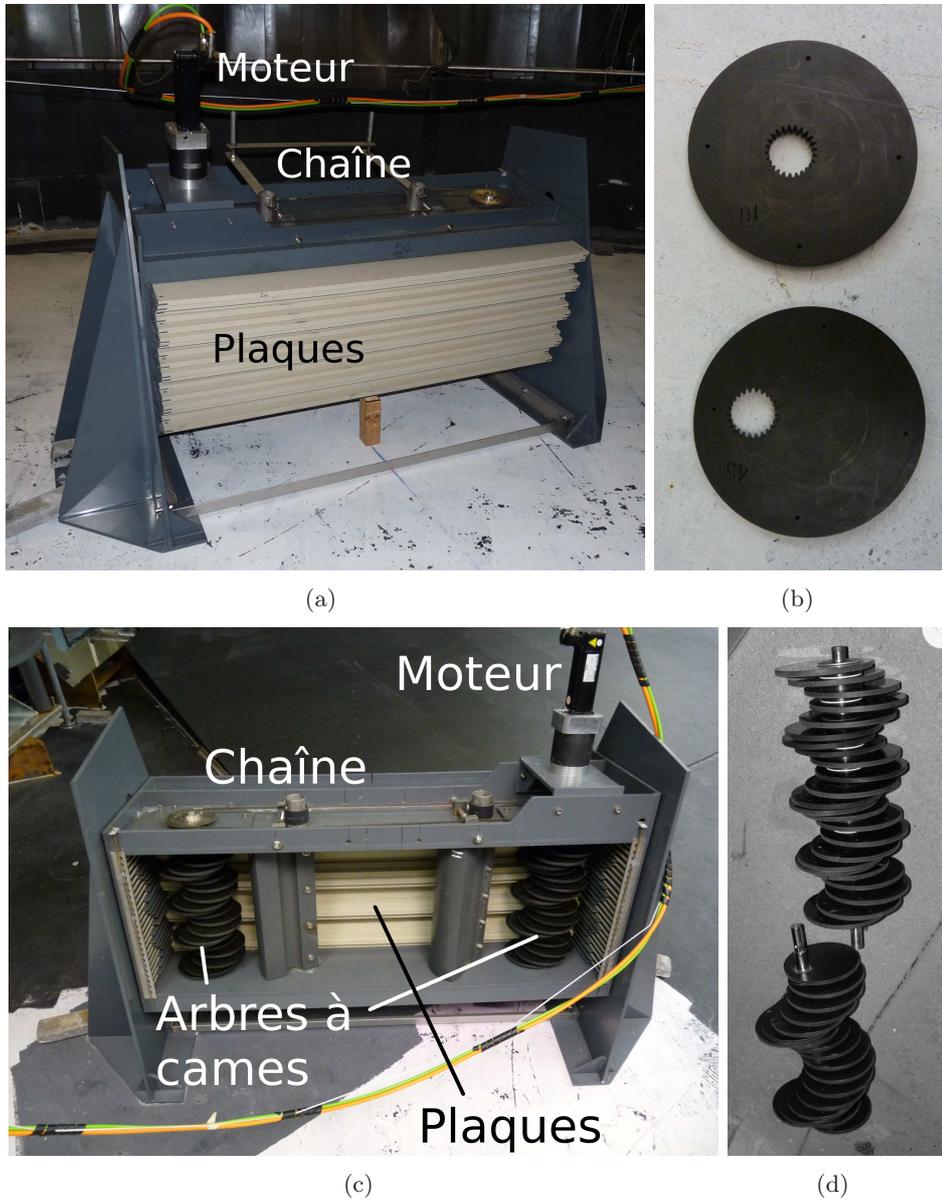


FIGURE 3.5 – (a) Le générateur d'ondes planes vu de face. (b) Deux cames d'excentricités différentes (10 mm en haut, 45 mm en bas). On voit la dentition en bordure intérieure des trous, permettant un réglage de la phase de chaque came. (c) Le générateur d'ondes planes vu de l'arrière. (d) Deux arbres à cames pour deux structures d'ondes planes différentes (quatre longueurs d'ondes en haut, deux longueurs d'ondes en bas). Remarque : les plaques ont par la suite été peintes en noir afin de limiter l'éclat du laser.

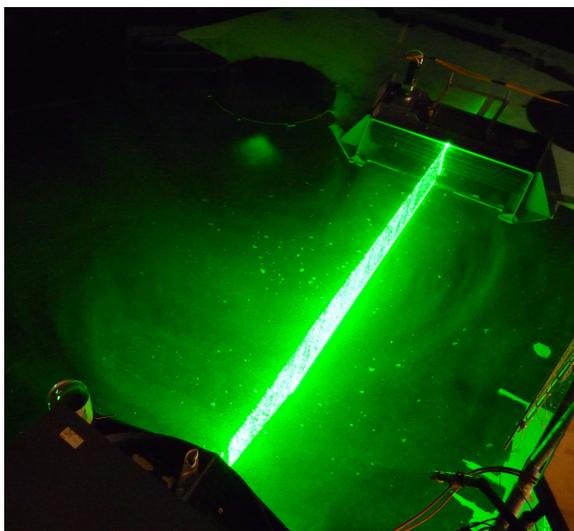


FIGURE 3.6 – Nappe laser vue d'en haut lors d'une expérience. On reconnaît en haut à droite le générateur d'ondes internes.

fluide. Si l'idée est simple, sa réalisation l'est beaucoup moins. Le fluide est ensemencé par des particules ajustables en densité et illuminé par une nappe laser (*cf.* 3.6). Des images du fluide sont alors prises à intervalles réguliers et les positions des particules sont comparées deux à deux par corrélation croisée pour remonter à leurs déplacements (en espérant qu'ils correspondent au déplacement du fluide) et enfin au champ de vitesse.

### Particules

Leur densité doit se rapprocher le plus possible de celle du fluide afin de ni couler, ni flotter. Ce problème, critique en fluide homogène, est moins gênant en fluide stratifié. En effet, des billes de polystyrène expansible, initialement 5% plus denses que l'eau douce, sont chauffées dans un bain à 70 – 80°C, ce qui diminue aléatoirement leur densité de quelques pour-cents. On obtient ainsi une distribution de densité de particules couvrant une plage suffisamment large pour des expériences à Coriolis. Une densité variant de 1000 à 1050  $\text{kg.m}^{-3}$  sur 1 m de haut correspond à une fréquence de Brunt-Väisälä d'environ 0,7  $\text{rad.s}^{-1}$ , soit une période de 9 s, largement accessible au générateur d'ondes internes et au système d'acquisition de données. Nous opérerons d'ailleurs à  $N = 0,42 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La taille des particules doit être suffisamment grande pour que celles-ci soient lumineuses lorsqu'éclairées, mais suffisamment faible pour limiter leur inertie. Le rayon typique des particules est de 0,2 mm. De plus, leur concentration doit assurer que les boîtes de corrélation (*cf.* pages suivantes, "Vélocimétrie par corrélation d'images (CIV)") contiennent suffisamment de

particules. En revanche, elle doit être suffisamment faible pour ne pas atténuer la visibilité d’une part entre la nappe laser et les caméras et d’autre part le long de la nappe laser elle-même. Une densité de 0,05 particules par pixels est un bon ordre de grandeur. Enfin, ces particules ont tendance à s’agglomérer. Pour y remédier ainsi que pour faciliter leur mouillage, elles sont enduites d’Ilofotol, un tensio-actif.

### Acquisition des images

On utilise un laser solide Nd:YVO<sub>4</sub> de longueur d’onde 532 nm (vert) et de puissance 6 W en continu pour éclairer les particules. La nappe laser est réalisée à l’aide d’un miroir oscillant à une fréquence de 60 Hz, ce qui fait que chaque endroit de la nappe est illuminé à une fréquence moyenne de 120 Hz. Les caméras ont généralement des temps de pose de 0,5 à 1 s avec déclenchement synchronisé sur l’oscillation du miroir et le balayage laser n’apparaît donc pas sur les images.

Dans notre cas, nous avons utilisé trois caméras synchronisées à partir du même ordinateur. Une calibration spatiale des caméras est nécessaire, au moins pour les raisons suivantes :

- les sorties des caméras sont en pixels, qu’il faut convertir en positions spatiales,
- la position de chaque caméra est ajustée de manière à faire face à la nappe laser mais l’alignement est toujours imparfait, ce qu’il faut compenser,
- les optiques induisent des déformations dans les coins des images qu’il faut corriger,
- les champs des trois caméras sont fusionnés et il est nécessaire d’avoir une calibration précise et unique pour ne pas déceler de zones de recouvrement sur les images finales.

Pour ce faire, une grille de pas 10 cm a été fabriquée (*cf.* figure 3.7(a)). Plongée dans l’eau à une position connue (*cf.* figure 3.7(b)), elle permet à un algorithme Tsai ([Tsa86]) de faire une correspondance précise entre pixels et coordonnées spatiales, tout en corrigeant la déformation géométrique susmentionnée.

### Vélocimétrie par corrélation d’images (CIV)

Cette suite d’algorithmes permet, en comparant les images deux à deux, de trouver le champ de vitesse du fluide. Nous numérotions par la suite les deux images de la paire “image 1” et “image 2” dans l’ordre chronologique. Le procédé a été développé à Coriolis même par Fincham et Delerce ([FD00]).

Tout d’abord, le domaine est divisé en “boîtes de corrélation” (BC). Le choix de la taille de ces boîtes est fait selon la règle empirique qu’une BC doit contenir au moins 5 particules, ce qui donne des largeurs de boîtes

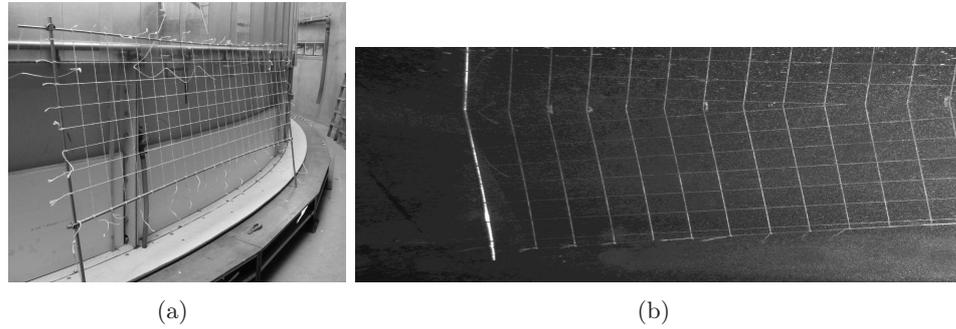


FIGURE 3.7 – Grille servant à calibrer les images. (a) Grille hors de l'eau. (b) Grille dans l'eau, prise par une caméra d'acquisition. Le générateur est à gauche de l'image et la grille est posée sur un fond incliné. C'est sur ce type d'image que la calibration des caméras est faite.

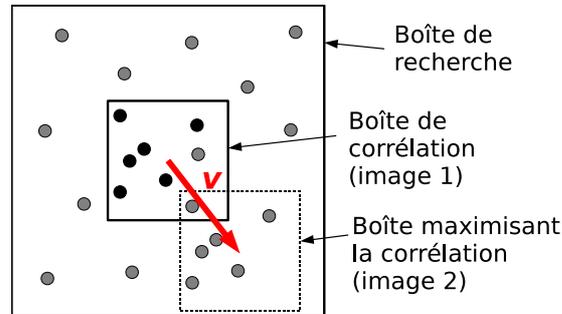


FIGURE 3.8 – Principe des boîtes de corrélation (BC) et des boîtes de recherche (BR). Les pastilles noires représentent les particules de l'image 1 (initiale) dans la BC, les pastilles grises les particules de l'image 2 (finale) dans la BR. L'algorithme CIV1 cherche dans la BR la position de la boîte qui maximise la corrélation avec la BC.

typiquement comprises entre 21 et 31 pixels.

Le premier algorithme, CIV1, est illustré en figure 3.8. Il va prendre chaque BC de l'image 1 et calculer sa corrélation avec toutes les boîtes de même taille de l'image 2, dans un certain rayon autour de la position originale de la BC. Nous appellerons l'espace ainsi couvert la "boîte de recherche" (BR). Il va donc en quelque sorte prendre le motif contenu dans la BC originale et le comparer avec tous les motifs possibles de l'image 2 contenus dans la BR, en cherchant où ce motif a pu se translater. À chaque essai correspond un déplacement de la BC et donc, après division par le pas de temps, un vecteur vitesse possible. La vitesse associée à la translation qui maximise la corrélation est considérée comme étant la vitesse locale à l'endroit où la BC a été choisie.

La taille de la BC résulte d'un compromis lié au choix de la concentration

en particules. Plus petite, elle risque de ne pas contenir un motif que CIV1 pourrait reconnaître. Trop grande, elle risque de contenir une parcelle de fluide qui se déformera ou pivotera et qui deviendra donc méconnaissable entre deux images. La taille de la BR est elle aussi le fruit d'un compromis. Trop petite par rapport à la vitesse du fluide, elle risque de ne pas inclure les mêmes particules d'une image à l'autre. Trop grande, le temps de calcul devient prohibitif et la probabilité augmente de retrouver un motif éloigné, indépendant du premier mais suffisamment ressemblant pour être associé à une corrélation élevée.

Malgré ces précautions, l'algorithme peut générer des vecteurs vitesse faux. Lorsque la corrélation maximale est trop basse, un second algorithme, FIX1, vient éliminer ces vecteurs et un troisième algorithme, PATCH1, vient remplacer les vecteurs éliminés par des vecteur interpolés.

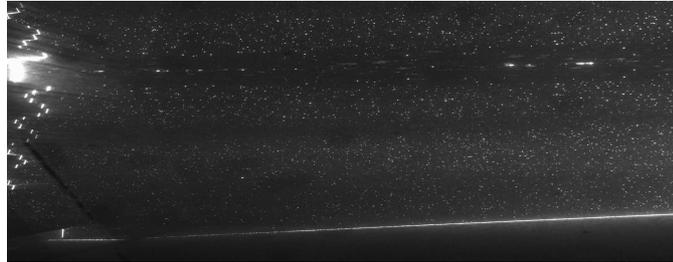
L'algorithme CIV1 fonctionne bien tant que le champ est en déformation pure mais ne sait pas gérer les déformations et les rotations. De plus, il a tendance à fournir un spectre de déplacements piqué autour des valeurs entières de pixels, malgré l'interpolation. Pour remédier à ces deux problèmes, un quatrième algorithme, CIV2, est appliqué, qui réalise une interpolation plus fine des déplacements et qui tient compte de toutes les composantes du tenseur de déformation. Ce quatrième algorithme est complété par FIX2 et PATCH2, dont les rôles sont identiques à FIX1 et PATCH1. On peut voir en figure 3.9 un exemple de ce qui est fourni en entrée (images 1 et 2) et du résultat du processus. De deux images indiscernables à l'oeil nu, on obtient un champ de vecteurs vitesse nettement distinguable. Enfin, en dernière étape, les champs de vitesses issus de chaque caméras sont fusionnés pour former des images globales.

### 3.3 Deux outils de filtrage des données

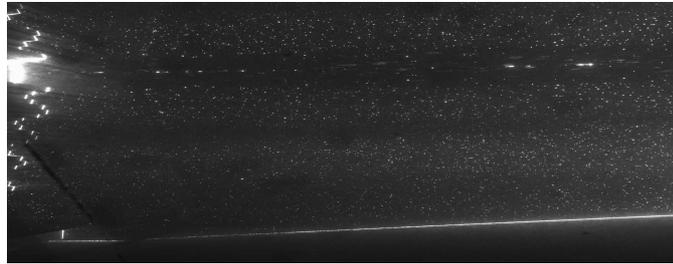
Nous allons ici décrire brièvement les deux principales méthodes de filtrage des données qui ont été utilisées lors de ce travail de thèse. Le premier, le filtrage harmonique, permet d'isoler chaque composante fréquentielle d'un signal brut. Le deuxième, le filtrage par transformée de Hilbert, permet *a priori* d'extraire d'un signal monochromatique seulement certains vecteurs d'onde. Nous nous contenterons de décrire pourquoi ce filtrage permet d'isoler les ondes internes se propageant vers le haut ou vers le bas car nous ne pousserons pas plus loin son utilisation.

#### 3.3.1 Le filtrage harmonique

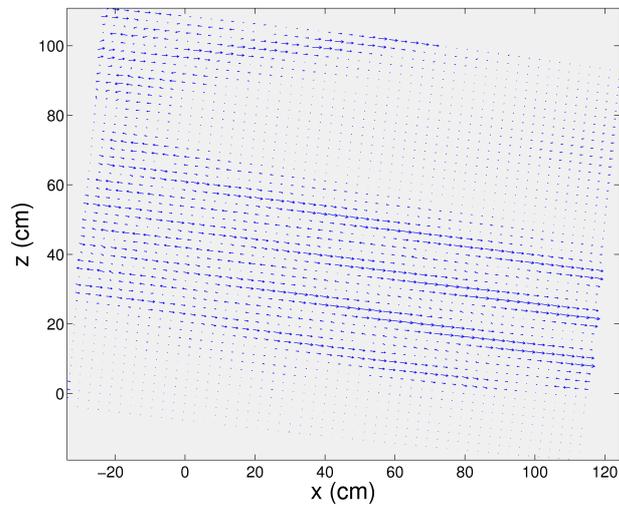
De par sa nature même, ce travail de thèse va traiter de phénomènes non-linéaires qui sont caractérisés par des transferts d'énergies entre modes de différentes fréquences, comme nous l'avons vu en §2. Le filtrage harmonique consiste en pratique à ne calculer la valeur de la transformée de Fourier



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.9 – Exemple d'entrées et de sortie du processus CIV utilisé à Coriolis. (a) Image 1. (b) Image 2, prise une seconde après l'image 1. (c) Résultat final du processus. On peut voir à gauche de (a) et (b) le profil dentelé du générateur d'onde interne et retrouver cette forme dans le cisaillement de l'onde interne visible en (c).

temporelle de  $F$  que pour une fréquence  $\omega$ . Il permet donc d'isoler chaque composante et constitue une première étape dans la quantification de ces effets non-linéaires.

Soit  $F(x, z, t)$  un champ issu soit de simulations numériques, soit d'une expérience et qui pourrait par exemple être la vitesse horizontale ou la flotabilité. Nous allons appeler  $\widehat{F}(x, z, \omega)$  le résultat du filtrage harmonique à la fréquence  $\omega$  de ce champ, défini par :

$$\widehat{F}(x, z, \omega) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(x, z, t) e^{i\omega(t-t_0)} dt. \quad (3.16)$$

$T$  correspond à la durée sur lequel le filtrage est effectué et doit être un multiple de  $2\pi/\omega$ . Ce filtrage opère en quelque sorte une moyenne harmonique sur la durée  $T$ , qui doit être la plus grande possible afin d'améliorer la qualité de cette moyenne.

Le filtrage est effectué à partir d'un instant initial  $t_0$  qui doit être choisi lorsque la situation est considérée comme stationnaire, c'est-à-dire lorsque les phénomènes transitoires ont quasiment disparu. Ils ne disparaissent en effet jamais complètement : par nature, les phénomènes non-linéaires sont des phénomènes qui ont des temps d'évolution et des périodes de récurrence qui ne sont pas forcément des multiples de  $2\pi/\omega$  (*cf.* l'introduction de variables lentes en §2). Les équilibres dynamiques entre modes ne sont donc quasiment jamais observés. Cependant, les cas traités en Partie II montreront tous des situations où ces phénomènes transitoires pourront être considérés comme des fluctuations autour d'un état moyen, auquel cas le filtrage temporel correspond à une opération riche en sens physique.

Ce filtrage peut être effectué pour n'importe quelle fréquence mais dans notre pratique, il n'est utile que pour certaines d'entre elles : la fréquence de forçage, ses multiples, etc. Si pour les simulations numériques, la fréquence de forçage et toutes celles qui en découlent sont connues exactement, il faut faire en sorte dans les expériences de soigneusement mesurer la fréquence de forçage, par des transformées de Fourier temporelles des champs mesurés par exemple.

$\widehat{F}(x, z, \omega)$  est une grandeur à valeurs complexes, dont on peut extraire les répartitions spatiales des quantités suivantes :

- le champ instantané, *via*  $\Re(\widehat{F}e^{i\phi})$ , où  $\phi \in [0, 2\pi]$  permet de régler l'instant que l'on souhaite reconstituer,
- l'amplitude, *via* la norme  $|\widehat{F}|$ ,
- la phase instantanée, *via*  $\text{Arg}(\widehat{F}e^{i\phi})$
- les nombres d'ondes, *via*  $\mathbf{k} = \nabla(\text{Arg}(\widehat{F}e^{i\phi}))$ , ce dernier point étant particulièrement important pour la transformée de Hilbert.

Il faut cependant prendre garde au fait que tous ces champs ne sont que reconstitués à partir d'une moyenne harmonique. Une illustration du filtrage harmonique est donnée par les figures 3.10(a) et 3.10(b).

### 3.3.2 La transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert a été introduite dans la communauté des ondes internes par Mercier *et al.* ([MGD08]).

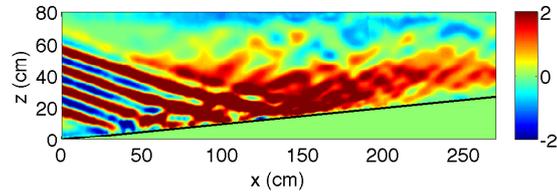
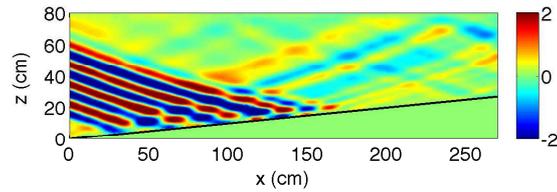
Soit une onde plane décrite par  $\psi = \tilde{\psi}e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$ . Si  $k_z < 0$ , sa phase se propage vers le haut. À partir d'un champ  $\widehat{F}(x, z, \omega)$  issu d'un filtrage harmonique, la transformée de Hilbert permet de séparer les composantes se propageant vers le haut des composantes se propageant vers le bas en suivant ces quelques étapes :

1. transformation de Fourier rapide (FFT) de  $\widehat{F}(x, z, \omega)$  selon  $z$  : on obtient une grandeur  $\mathcal{F}(x, k_z, \omega)$ ,
2. pour sélectionner les ondes se propageant vers le haut (le bas) :

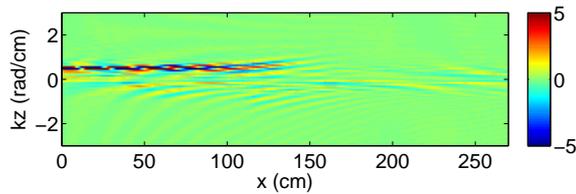
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{+(-)}(x, k_z, \omega) &= \mathcal{F}(x, k_z, \omega) & \forall k_z < 0 (> 0), \\ \mathcal{F}_{+(-)}(x, k_z, \omega) &= 0 & \forall k_z > 0 (< 0), \end{aligned}$$

3. FFT inverse de  $\mathcal{F}_{+(-)}(x, k_z, \omega)$  selon  $k_z$  : on obtient une grandeur  $\widehat{F}_{+(-)}(x, z, \omega)$  ne comportant que les ondes de  $\widehat{F}$  se propageant vers le haut (le bas).

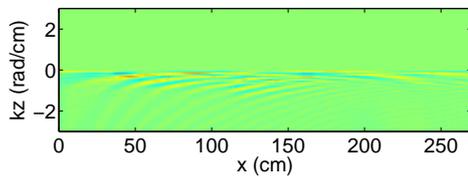
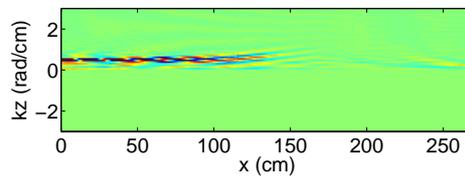
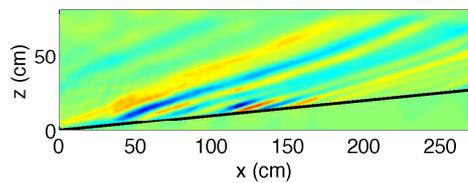
Cette méthode peut sembler grossière (et elle l'est si on la compare à la méthode originale décrite en [MGD08]) mais elle permet d'obtenir des résultats très convenables, comme le montre la figure 3.10.

(a) Vitesses horizontales brutes (en  $\text{mm.s}^{-1}$ ).

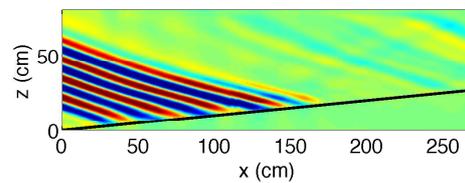
(b) Vitesses horizontales filtrées harmoniquement à la fréquence de forçage.



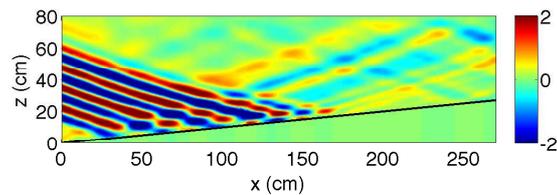
(c) FFT selon la verticale du champ précédent.

(d) Annulation de la FFT pour  $k_z > 0$ .(e) Annulation de la FFT pour  $k_z < 0$ .

(f) FFT inverse du champ affiché ci-dessus.



(g) FFT inverse du champ affiché ci-dessus.



(h) Somme des champs affichés en (f) et (g).

FIGURE 3.10 – Filtrage harmonique et transformée de Hilbert sur des données expérimentales (expérience 24 de la §5) de réflexions d'ondes planes sur une paroi inclinée (matérialisée par un trait noir). Sont affichées les parties réelles des grandeurs mentionnées.



Deuxième partie

Réflexion d'ondes internes  
contre une paroi solide



## Chapter 4

# Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor

**Résumé** Les attracteurs d’ondes (de gravité) internes peuvent se former dans des bassins fermés possédant des frontières non-parallèles ou non-perpendiculaires à la direction de la gravité. De tels attracteurs ont été étudiés d’un point de vue théorique, au travers d’expériences de laboratoires et à l’aide de simulations numériques linéaires. Dans le présent chapitre, des simulations numériques bidimensionnelles d’un attracteur d’ondes internes sont décrites. Le code employé est le MITgcm, un code non-linéaire et non-hydrostatique. Tout d’abord, l’expérience de laboratoire de Hazewinkel *et al.* (*J. Fluid Mech.*, 2008) est reproduite et un très bon accord avec les données expérimentales est obtenu. Nous proposons ensuite de modéliser la largeur de l’attracteur en nous basant sur quelques idées simples. Ce modèle prédit que cette largeur doit évoluer en puissance  $1/3$  des paramètres sans dimension mesurant le rapport entre les effets visqueux et les effets de flottabilité. Lorsque l’attracteur est fortement focalisant, sa largeur doit aussi évoluer en puissance  $1/3$  de la distance longitudinale. L’analyse des données numériques pour deux attracteurs différents donne en effet des valeurs de cet exposant proche de  $1/3$ , dans une marge de 30%. Enfin, nous étudions les effets non-linéaires associés à l’attracteur.

Cet article ([GSP08]) est paru sous la référence suivante : N. GRISOUARD, C. STAQUET et I. PAIRAUD : Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor. *J. Fluid Mech.*, 614 :1-14 (2008).

### 4.1 Introduction

Stably stratified fluids are encountered in geophysics and astrophysics, examples being the oceanic thermocline, the stratosphere and the radiative

zone of the Sun. From a mechanical point of view, any non-horizontal motion in these fluids yields a restoring force, namely the buoyancy force, which generates internal gravity waves. (The Coriolis force due to the rotation of the system –such as a star– may also act as a restoring force.) These waves are dispersive with a very specific dispersion relation: their frequency depends upon the angle  $\theta$  of the wave vector with respect to the gravity vector. In an unlimited medium with a constant stable gradient of density, the dispersion relation is indeed  $\omega = N \cos \theta$ , where  $\omega$  is the frequency of the waves and  $N$  is the buoyancy frequency (whose square is proportional to the stable gradient of density). As a consequence, phase and energy propagate perpendicularly to each other (e.g. Lighthill [Lig78]). As first noted by Phillips [Phi66], the peculiar form of the dispersion relation leads to a peculiar wave reflexion at a wall inclined with respect to the gravity vector: because  $\omega$  is preserved upon reflexion, the angle  $\theta$  is preserved as well which leads to focusing or defocusing of the waves after reflexion.

In closed domains, multiple reflections with more focusing than defocusing at the boundaries can lead to the formation of a wave attractor, namely a part of the domain where almost all the wave-induced energy is concentrated, as shown by Maas & Lam [ML95]. From a mathematical point of view, the existence of the attractor stems from the fact that the linear equations of motions are spatially hyperbolic (when a harmonic time-dependence is imposed) while boundary conditions must be satisfied on the walls of the closed domain. The problem is therefore ill-posed in the absence of viscosity. Singular solutions, distinct from the usual (regular) normal modes, may arise which eventually converge toward an attractor as time elapses. The introduction of viscosity regularizes the equation, which becomes elliptic (Rieutord *et al.* [RGV01]). But the attractor appears again in the viscous solution when viscosity effects are low enough with respect to restoring effects. This was shown by Rieutord & Valdettaro [RV97] in the astrophysical context for a rotating shell. As analyzed by Rieutord & Noui [RN99] and Ogilvie [Ogi05], these results are valid whether the restoring force is the buoyancy force or the Coriolis force in a rotating system. These works ensure that the structure and dynamics of a wave attractor can be studied numerically by solving directly the viscous equations of motions, provided the viscosity is low enough. From a practical point of view, this implies that the grid size should be much smaller than the thickness of the attractor, namely the resolution should be high enough to satisfy this requirement.

Most studies on internal wave attractors are theoretical, focusing on the derivation of analytical models for the attractors, with and without viscosity. Experimental work was performed recently, starting with laboratory evidence of an internal wave attractor in a trapezoidal stably-stratified water tank (Mass *et al.* [MBSL97]). The data of the latter experiment were reanalysed by Lam & Maas [LM08] and further experimental studies were performed by Hazewinkel *et al.* [HvDM08] (hereafter referred to as simply [HvDM08]).

Nearly all numerical studies of wave attractors solve the linear equations of motions (Rieutord, Georgeot & Valdetaro [RGV01, RVG02], Ogilvie [Ogi05]). In the recent paper by Drijfhout & Maas [DM07], a nonlinear hydrostatic numerical ocean model is used to investigate the dynamics of trapped waves in a closed channel in the vicinity of a continental slope, but the forcing amplitude is tuned so that the flow dynamics is linear at all times. To our knowledge, no attempt has been made yet to investigate the fine structure of the attractor and its nonlinear behavior by means of nonlinear direct numerical simulations. This is the aim of the present paper. The MIT general circulation model is used for this purpose at a high resolution so that a low viscosity can be used, as discussed above. The results are carefully validated against the laboratory experiment of [HvDM08] to test the ability of the numerical code to reproduce the singular solution associated with the attractor. In §4.2, we present the experimental and numerical set-ups while the comparison between the numerical and experimental results is reported in §4.3. In §4.4 we propose a simple model for the thickness of the wave attractor, which we test against our numerical data and relate to the theoretical work by Thomas & Stevenson [TS72]. Insight into the nonlinear behavior of the wave attractor is presented in §4.5 before we draw conclusions in the final Section.

## 4.2 Laboratory and numerical set-ups

### 4.2.1 Laboratory experiment of HBDM08

The height and width of the tank in the experiment are respectively equal to 200 mm and 101 mm; the length of the tank varies from 353 mm at the upper boundary to 453 mm at the bottom boundary, due to the presence of a sloping wall that makes an angle  $\alpha = 27^\circ$  with the vertical (see Figure 4.2 below).

The stratification is imposed by salt water whose density decreases linearly upwards, with  $N_{lab} \simeq 3.0 \text{ rad.s}^{-1}$ . However, because the heat flux through the free surface and bottom boundary is equal to zero, the stratification cannot be maintained there and very thin diffusive mixed layers slowly develop from these boundaries. The experimental viscosity has a value of  $1 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$ , the Prandtl number of salt water being equal to 700. The forcing mechanism of the wave field is as follows. Starting from rest, the tank is subjected to an oscillation at frequency  $\omega_e = 1.23 \text{ rad.s}^{-1}$  (associated with a period  $T = 5.11 \text{ s}$ ), leading to the generation of a wave field at the same frequency. The frequency and tank geometry have been chosen so that a wave field develops and gets focused toward an attractor.

This is the experiment we reproduce numerically, apart from some differences which we explain below.

### 4.2.2 Numerical set-up

The MIT general circulation model is used to solve the nonlinear, non-hydrostatic, incompressible Boussinesq equations that govern the fluid dynamics (see Marshall *et al.* [MAH<sup>+</sup>97]). No subgrid scale modelling is used in the present work, implying that the simulations are direct (i.e. the diffusion operator is the ordinary Laplacian operator).

The symmetry of the forcing as well as the narrow width of the tank in the laboratory experiment implies that the dynamical processes should be mainly two-dimensional in a vertical plane; hence, in the numerical experiment, a two-dimensional domain is used for simplicity. We also flip this numerical domain in the  $z$ -direction so that the wall becomes of positive slope and can be easily handled by the code (we also reverse the density field so that the stratification remains stable). The Boussinesq equations are indeed invariant under this transformation.

We were able to reproduce the same attractor as in the laboratory experiment by setting  $N$  to the value of 2.76 rad/s (instead of 3 rad/s). We think that the origin of this difference lies in the thickness of the mixed layers which develop at the free surface and at the bottom of the tank, which are slightly different in the experiment and in the simulation. The attractor reflects indeed onto these mixed layers.

To speed-up the convergence toward the attractor, we chose the following forcing. A barotropic current oscillating at frequency  $\omega_e$  and of amplitude  $7.38 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  is imposed at the vertical boundary to force the flow. This amplitude has been chosen to ensure that a linear regime sets in, as in the laboratory experiment. (To analyse nonlinear effects in §4.5, we carried out the same computation with a ten times larger amplitude.) In the laboratory experiment, the forcing regime is imposed over  $50T$  and then turned off. In the simulation, the forcing regime is turned off after  $61T$ , to lengthen this regime and improve the statistics. The subsequent decay stage is monitored over  $51T$ .

Viscosity is set to  $\nu = 1 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , as in the laboratory experiment, while the Prandtl number has a value of 100. (A higher value of this parameter would lead to ill-resolved smallest diffusive scales.)

Free surface and free-slip conditions on the three other boundaries are set to prevent under-resolved viscous boundary layers from appearing. However the forcing we chose requires an open-boundary condition on the vertical wall which cancels the free-slip condition at this boundary (the vertical velocity being set to zero there). As a consequence, a very thin shear layer appears on the vertical wall during the forced stage which quickly vanishes (in approximately  $3T$ ) after forcing is turned off.

We use a Cartesian grid with horizontal and vertical grid sizes equal to  $dx = dz = 0.5 \text{ mm}$ , the cells being shaved on the sloping wall to allow for the reflexion of the wave field. As we show in §4.4, the thickness of the attractor

is around 45 mm wide, which is therefore described by 90 points. One period is discretized into 250 time steps (implying that  $dt = 0.02044$  s).

In the following sections measurements of the buoyancy  $b = -g\rho'/\rho_0$  are displayed, where  $\rho_0$  is a constant reference density and  $\rho'$  is the density perturbation, computed as the difference between the instantaneous density field and the initial density profile.

### 4.3 Comparison with the laboratory experiment of HBDM08

#### 4.3.1 Overall behavior of the fluid motions

The buoyancy field  $b$  is displayed versus time in Figure 4.1a at a fixed location within the attractor. Three regimes can be distinguished. From initial time until  $t \simeq 30T$ , the amplitude of the oscillations grows as the wave field organizes itself into an attractor. A stationary regime is then reached, once the attractor has formed, implying that some equilibrium has occurred; note that the mean (temporally averaged) buoyancy is slightly negative because of forcing. The equilibrium regime ceases at  $61T$ , when forcing is turned off, and the flow relaxes to rest through decaying oscillations. The buoyancy field being computed as the difference between the instantaneous density profile and the initial profile (up to a multiplicative constant), the non-zero final value of  $b$  attests to the fact that mixing has been induced.

As in [HvDM08] in which synthetic schlieren method is used, we computed the vertical gradient of the buoyancy field,  $\partial_z b$ , as a function of time (Figure 4.1b). The remarkable point is that the maximum amplitude of this field remains unchanged during a few periods after forcing has been turned off. Since the amplitude of  $b$  decays, this implies that the vertical scale associated with the buoyancy field decreases after the forcing is turned off, thus compensating the decay in amplitude of  $b$ . This point is further discussed below.

To visualize the attractor, we follow [HvDM08] and filter the field  $\partial_x b$  at frequency  $\omega_e$  during the equilibrium regime. The filtered field, denoted  $B_{\omega_e}(x, z)$ , is defined by

$$B_{\omega_e}(x, z) = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} [\partial_x b(x, z, t)] e^{i\omega_e(t-t_i)} dt, \quad (4.1)$$

with  $t_i = 40T$  and  $t_f = 61T$ .

The modulus  $|B_{\omega_e}|$  of the filtered field is displayed in Figure 4.2a, thereby showing the spatial distribution of the amplitude. The attractor predicted by ray theory, namely the trajectory of the wave-induced energy at large times, is also displayed with a dashed line. Several striking features may be noted in this Figure. The amplitude is focused within a well-defined structure

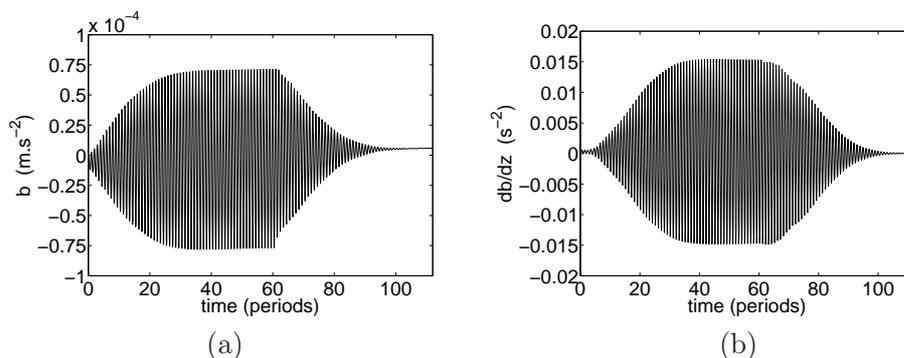


Figure 4.1: (a) Evolution of the buoyancy field  $b$  as a function of time, at a point located in the central part of the attractor along section  $S_1$  displayed in Figure 4.2. (b) Same as (a) for  $\partial_z b$ .

– the attractor – made of four branches. The amplitude is maximum at the beginning of the first branch on the inclined wall, where the focusing point is located. The amplitude constantly decays along the attractor when travelling from the focusing point, due to viscous effects. This decrease of the amplitude provides the direction of the group velocity  $\mathbf{c}_g$  which is clockwise, consistent with the direction in which focusing occurs. Precisely the same structure was obtained by [HvDM08] in their laboratory experiment. The only difference lies in the values of the amplitude, which cannot be compared because the forcings are different.

To complement Figure 4.2a, the phase of the buoyancy field at  $t = t_f$ , given by  $\arg(B_{\omega_e} e^{i\varphi})$  with  $\varphi = 2\pi(t_f - t_i)/T$ , is displayed in Figure 4.2b. The direction of propagation of the phase can be read directly from this Figure (as indicated by the arrows). Assuming the wave field is spatially monochromatic within the attractor, a wave vector  $\mathbf{k}$  can be defined, which is aligned with the spatial gradient of the phase. The wavelength associated with  $\mathbf{k}$  will be referred to as the apparent wavelength hereafter. Since the vertical component of  $\mathbf{k}$  and of the group velocity are of opposite sign for internal gravity waves, the direction of the group velocity can also be inferred from Figure 4.2b.

The modification of the attractor once forcing has been turned off, from  $t = 61T$ , is illustrated in Figure 4.3 through contours of  $\partial_z b$  plotted at successive times. The apparent wavelength of the attractor decreases with time suggesting, following [HvDM08], that the short wavelengths “survive” longer than the large ones. This striking behavior is further discussed in the next Section and will serve as a precise comparison between our numerical model and the experimental results.

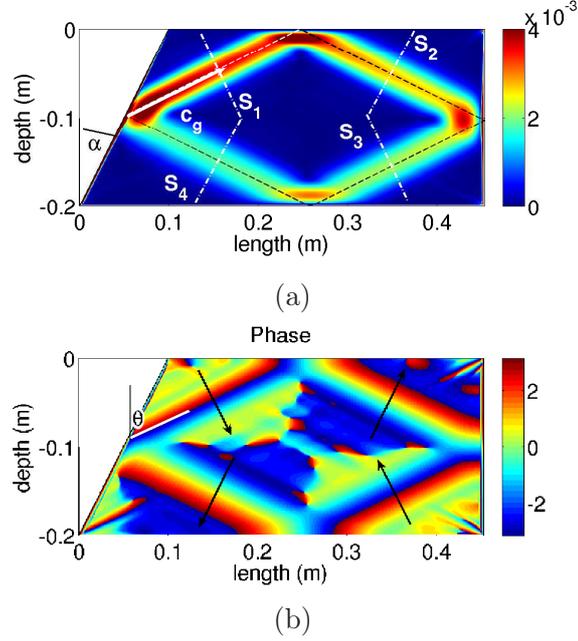


Figure 4.2: Harmonic analysis of  $\partial_x b$  from  $t = 40T$  to  $t = 61T$ . (a) Amplitude field. The white arrow points towards the direction of the group velocity  $\mathbf{c}_g$  and the four sections  $S_1 - S_4$  used in the analysis are displayed (the slope angle  $\alpha$  is also shown). The location of the attractor as predicted by ray theory is indicated with a dashed line. (b) Phase field. The black arrows point toward the direction of phase propagation, or  $\mathbf{k}$ , for each branch; the propagation angle  $\theta$  is shown.

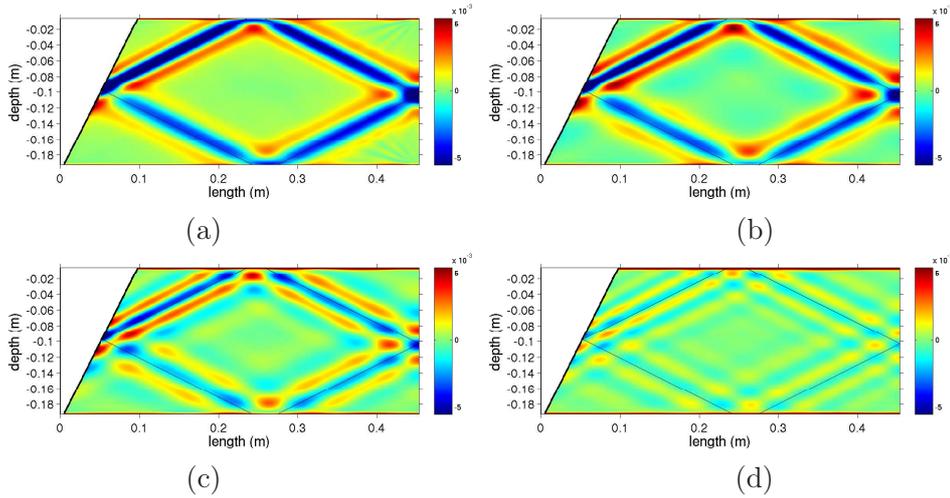


Figure 4.3: Constant contours of  $\partial_x b$  at (a)  $t = 63T$ , (b)  $t = 71T$ , (c)  $t = 79T$ , (d)  $t = 87T$ . The location of the attractor as predicted by ray theory is indicated with a thin black line.

### 4.3.2 Spatial structure of the wave attractor

The striking evolution of the apparent wavelength during the decay stage suggests performing a spatial spectral analysis of the wave field. For this purpose, we introduce a natural coordinate system  $(s, \eta)$ , with  $s$  the along-branch abscissa starting from the focusing point and oriented in the same direction as  $\mathbf{c}_g$  and  $\eta$  the cross-branch ordinate whose origin is on a branch and oriented to get a direct coordinate system for each branch. We choose four locations, each in the middle of a different branch, and we perform the analyses along the cross-attractor-sections which start from these points and which we call  $S_1 - S_4$ . Along  $S_1$  for instance, we write  $\partial_\eta b$  as:

$$\partial_\eta b(\eta, t)|_{S_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k, t) e^{i(k\eta - \omega t)} dk \quad (4.2)$$

using  $k = |\mathbf{k}|$ , this analysis being performed also along  $S_2 - S_4$ .

Figure 4.4 shows the spectra  $|A|^2$  of  $S_1 - S_4$  at  $t = 50T$  during the equilibrium regime for the simulation and the experiment of [HvDM08]. Both approaches show that the spectrum is continuous, implying that not just a single scale is involved, and that it displays a maximum, implying that a dominant scale exists. As one progresses along the attractor from  $S_1$  to  $S_4$ , the peak shifts towards small values of  $k$  (i.e. large values of wavelength) and the maximum amplitude decreases, because of diffusive effects. This is consistent with the apparent broadening and decaying amplitude of the attractor after the focusing point observed in Figure 4.2.

Despite the qualitative agreement between the simulation and the laboratory experiment, a difference should be noted: the decrease in amplitude along the attractor is stronger in the experiment. This difference might be explained by damping effects being larger in the experiment than in the simulation. It should indeed be emphasized that the experiment is three-dimensional so that boundary layers also exist in the third direction, which provide an additional sink of energy (McEwan [McE71]). Such boundary layers are prohibited by the two-dimensional geometry of the simulation.

Spectra of  $S_1$  for the simulation and the experiment are displayed in Figure 4.5 during the decay stage, at different times. It is quite noteworthy that the decay in the total amplitude now goes with a shift of the peak towards high values of  $k$ , as implied by Figure 4.1b, and not toward small values of  $k$ , as a simple argument based upon viscous effects would imply. The difference in the evolution of the amplitude between experiment and simulation can still be noted. The amplitude decays less rapidly in the simulation and its maximum value is nearly the same at  $63T$  and  $72T$ . This is consistent with the behavior observed in Figure 4.1b for  $\partial_z b$ : the reduction in amplitude of the buoyancy is made up for by the decrease of the attractor thickness, so that the amplitude of  $\partial_z b$  remains nearly unchanged during several periods after forcing has been turned off. This effect is not visible in

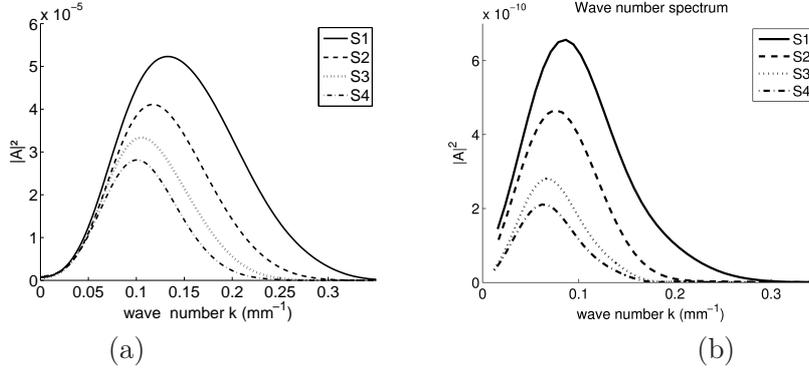


Figure 4.4: Spectral analysis along sections  $S_1 - S_4$  at time  $t = 50T$ . (a) Results from the numerical simulation. (b) Tank measurements by [HvDM08].

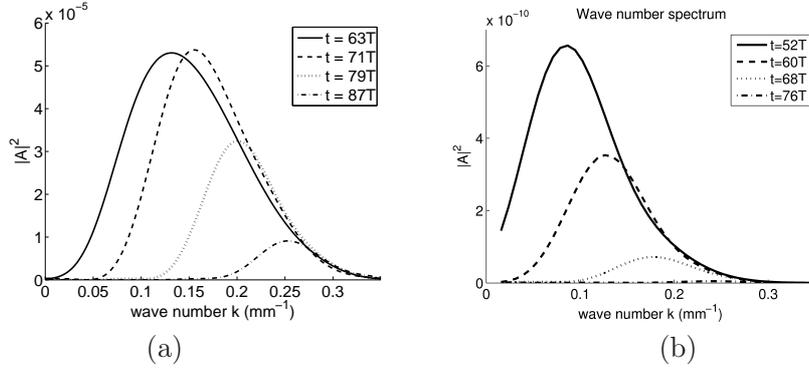


Figure 4.5: Spectral analysis along section  $S_1$  at times  $\tau = 2T$ ,  $\tau = 10T$ ,  $\tau = 18T$  and  $\tau = 26T$  after forcing has been turned off. (a) Simulation. (b) Experiment of [HvDM08].

the experiment possibly because of the presence of boundary layers in the third direction, as argued above, which promote energy dissipation.

We follow again [HvDM08] to explain the behavior of these spectra. The forcing excites the largest vertical scale of the tank, which has wave number  $k_0 = \pi/H$ . This new-born wave packet propagates and gets focused at the sloping wall, propagates and gets focused again. This focusing results in a transfer of energy towards high wave numbers (small scales) and the wave number of the wave packet can be considered as a measure of its "age". Viscous damping then acts and the smaller the scale is, the more efficient this damping is. At the beginning of its life, amplification thus dominates and the amplitude of the wave packet increases; but viscous damping increases as well which eventually overcomes amplification. Seen from a continuous point of view, the balance between focusing and viscous damping in the equilibrium regime results in the spectra displayed in Figure 4.4. When forcing is turned off, creation of low wave number wave packets stops, but not the propagation

and reflections of existing wave packets. Their scales get smaller and smaller because of focusing and those wave packets get eventually dissipated. This is what we observed in Figures 4.3 and 4.5.

## 4.4 A simple model for the thickness of the wave attractor

### 4.4.1 Model

In the analysis developed in [HvDM08] and summarized in the previous Section, the spatial structure of the attractor is accounted for by the evolution of a wave packet travelling along the attractor. The apparent wavelength of this wave packet defines a scale, which may be used to characterize the thickness of the attractor. Let us derive a simple model for this scale, referred to as  $\lambda$  in the following.

As in Rieutord *et al.* [RGV01] and [HvDM08], we argue that the thickness of the attractor is set by the competition between focusing, which reduces the scale by a factor  $\gamma = \sin(\theta + \alpha)/\sin(\theta - \alpha)$  and diffusion, which makes that scale grow.

Along the attractor, as long as the focusing point is not crossed, the only effect acting on the wave packet is diffusion. Hence, from diffusion scaling law,  $\lambda(d\lambda/dt) = C\nu$ , where  $C$  is constant and  $\nu$  is the viscosity. Introducing the coordinate  $s$  along the attractor yields  $\lambda(d\lambda/ds)(ds/dt) = C\nu$ . With  $ds/dt = |\mathbf{c}_g| = N(\sin\theta)\lambda/2\pi$ , one gets

$$\lambda^2 \frac{d\lambda}{ds} = \frac{2\pi C\nu}{N\sin\theta}. \quad (4.3)$$

We integrate along the attractor over its length  $L_a$  in the direction of energy propagation from  $s = 0^+$  (just after the focusing point) to  $s = L_a^-$  (just before it). If this is the  $n$ th travel of the wave packet, we get

$$\lambda_n^3(L_a^-) - \lambda_n^3(0^+) = 6\pi C \frac{\nu L_a}{N\sin\theta}. \quad (4.4)$$

When the wave packet crosses the focusing point, its thickness is focused again so that  $\lambda_{n+1}(0^+) = \lambda_n(L_a^-)/\gamma$ . In the equilibrium regime,  $\lambda_{n+1}(0^+) = \lambda_n(0^+)$ . It follows that

$$\lambda(0^+) = C'(\gamma^3 - 1)^{-1/3} \left( \frac{\nu L_a}{N\sin\theta} \right)^{1/3} \quad (4.5)$$

dropping the index  $n$  and with  $C' = (6\pi C)^{1/3}$ . At any location along the attractor, the thickness is therefore defined as

$$\lambda(s) = C' \left( \frac{\nu L_a}{N\sin\theta} \right)^{1/3} \left( \frac{s}{L_a} + \frac{1}{\gamma^3 - 1} \right)^{1/3}. \quad (4.6)$$

Rieutord *et al.* [RGV01] guessed from their numerical simulations that the thickness of the attractor should scale as  $E^{1/3}$ , where  $E$  is the Ekman number, assumed  $\ll 1$ ; in practice, this parameter should be smaller than  $10^{-6}$  for this scaling to hold. The analogue of the Ekman number in our study is  $\nu/(ND^2)$  where  $D$  is a typical scale of the attractor. Using  $D = L_a$ , the values of  $\nu/(NL_a^2)$  are smaller than  $10^{-6}$  in our simulation (since  $L_a = 954$  mm). And expression (4.6) indeed involves a dependency on the power  $1/3$  of this parameter, when written in a dimensionless manner:

$$\frac{\lambda(s)}{L_a} = C'(\sin\theta)^{-1/3} \left( \frac{\nu}{NL_a^2} \right)^{1/3} \left( \frac{s}{L_a} + \frac{1}{\gamma^3 - 1} \right)^{1/3}. \quad (4.7)$$

As well, in Ogilvie [Ogi05], an asymptotic ( $\nu \rightarrow 0$ ) solution is derived to describe the attractor resulting from a periodic forcing. The derivation fundamentally relies on the assumption that the thickness of the attractor scales like  $\nu^{1/3}$ , in agreement with our model.

#### 4.4.2 Analogy with an internal wave beam emitted by an oscillating object

When the focusing parameter  $\gamma$  is much larger than 1, expression (4.6) becomes

$$\lambda_{\gamma \gg 1}(s) = C' \left( \frac{\nu s}{N \sin\theta} \right)^{1/3}. \quad (4.8)$$

This expression is identical to that obtained by Thomas & Stevenson [TS72] when modelling the structure of a wave beam emitted by an oscillating two-dimensional object (see also Gostiaux [Gos06]). The emission region is the location where the wave beam is tangent to the object, the direction of the beam being set by the dispersion relation. Since the size of the object does not come into play in this theory, the far-field limit is assumed. In other words, the object is seen as a source point. A length scale still comes into play, which is the thickness of the boundary layer on the object. Expression (4.8) may indeed be written as  $C'(\delta^2 s / \tan\theta)^{1/3}$ , where  $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$  is the thickness of the boundary layer.

The analogy of relation (4.8) with the expression of Thomas & Stevenson [TS72] may be interpreted as follows. Consider a frame of reference attached to the vertical forcing boundary. In this frame, the inclined wall oscillates and may be considered as the actual source of energy for the wave field. Hence, in this frame, the wave attractor becomes a wave beam emitted by an oscillating object. The emission region is on the inclined wall, at the location where the reflected beam coincides with the incident one. And the thickness  $\delta$  is that of the boundary layer on the inclined wall. The attractor may then be interpreted as a wave beam emitted by an infinitely small oscillating source located at the focusing point.

The fact that the analogy is obtained for  $\gamma \gg 1$  suggests interpreting  $1/\gamma$  as the (properly scaled) size of the source. When  $\gamma$  is large, the factor  $(\gamma^3 - 1)^{-1/3}$  becomes quickly neglectable with respect to  $s/L_a$  as one moves away from the source, implying that the source is infinitely far.

### 4.4.3 Numerical validation

The validation of relation (4.7) requires the computation of the thickness  $\lambda$  of the attractor. As noted above, the apparent wavelength of the wave packet travelling along the attractor serves as a measure of the attractor thickness. To compute such an apparent wavelength, we plot in Figure 4.6a the density perturbation profile across the attractor at a given position and time during the equilibrium regime. As indicated in the Figure, an apparent wavelength can be defined, as twice the distance between two extrema of the profile.

The apparent wavelength has therefore been computed from the plot of the density perturbation profile at different locations on the second, third and fourth branches after the focusing point (the first branch being too close to the sloping wall to get proper measurements).  $\lambda$  is plotted against  $s/L_a + 1/(\gamma^3 - 1)$  in log-log scale in Figure 4.6b to find a possible power relation. Linear regressions shows that  $\lambda \propto (s/L_a + 1/(\gamma^3 - 1))^{0.229 \pm 0.011}$ .

In this simulation,  $\gamma = 1.67$  so that  $1/(\gamma^3 - 1)$  is equal to 0.27 and is never small with respect to  $s/L_a$ . We therefore ran another simulation with a higher value of  $\gamma$ . This simulation corresponds to the same tank as in the experiment of [HvDM08] except that the bottom length is 290 mm instead of 453 mm and the top length is 140 mm instead of 353 mm. It is filled with 300 mm of water, with stratification  $N = 2 \text{ rad.s}^{-1}$  and the forcing frequency is  $\omega_e = 1.65 \text{ rad.s}^{-1}$ . In this configuration, the beams have a steeper slope with an associated  $\gamma = 6.96$ . Under this condition, one can approximate expression (4.6) by (4.8) as soon as  $s \gg L_a/300 \approx 3 \text{ mm}$  (with  $L_a = 726 \text{ mm}$  in this case). Results for this simulation are also displayed in Figure 4.6b. We find  $\lambda \propto (s/L_a + 1/(\gamma^3 - 1))^{0.417 \pm 0.015}$ .

These two cases show that neither power exponent is equal to  $1/3$  but both exponents are close to it, within 30 %. The observed discrepancy very likely comes from the main assumption of our (very simple) model, which is that a single scale characterizes the attractor. The spectra displayed in Figures 4.4 and 4.5 show indeed that only a dominant scale exists among a continuum of scales.

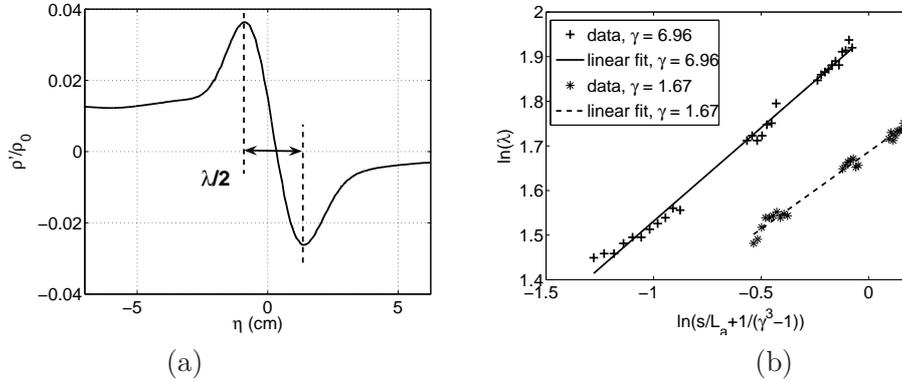


Figure 4.6: (a) Definition of the half-wavelength of the density perturbation field at a given time. (b) Plot of  $\lambda$  as a function of  $s/L_a + 1/(\gamma^3 - 1)$  in log-log scale for the configuration with  $\gamma = 1.67$  (stars) and the associated linear fit (dashed line), as well as for the configuration with  $\gamma = 6.96$  (crosses) and the associated linear fit (solid line).

## 4.5 Nonlinear effects

### 4.5.1 Existence of nonlinear effects

The forcing amplitude in the previous runs was low enough to ensure that a linear regime was reached. To investigate the manifestation of nonlinear effects, we ran a simulation analogous to that described in §4.3 except that the forcing amplitude is ten times larger. This run is displayed in Figure 4.7, through constant contours of  $\partial_z b$  two periods after forcing has been turned off.

Since forcing occurs at frequency  $\omega_e$ , all motions oscillate at that frequency in a linear regime. Nonlinear effects yield new motions at a harmonic frequency, which are visible in Figure 4.7: steep wave beams at frequency  $2\omega_e$ , distinct from the attractor, propagate in the domain. Motions at frequency  $2\omega_e$  and  $3\omega_e$  (using the same filtering method as in §4.3.1) are displayed in Figure 4.8. Since  $2\omega/N = 0.89 < 1$ , the  $2\omega_e$ -field can propagate but, in the present case, does not reach an attractor. As shown in Figure 4.8a, this field is generated at the locations where the attractor reflects on the vertical and upper horizontal boundaries. At these locations the superpositions of the branches make the nonlinear terms of the governing equations non-zero, as shown by Tabaei *et al.* [TAL05] in the more general context of wave beams. The focusing point has a particular status in the present case as the  $2\omega_e$  beam has a propagation angle equal to the slope of the wall, which is why no emitted beam is clearly observed.

On the other hand,  $3\omega_e/N = 1.33 > 1$  so that the  $3\omega_e$ -field cannot propagate. Figure 4.8b shows that this motion is trapped within the attractor. Its amplitude is the strongest at the crossings between the  $\omega_e$ -branches of

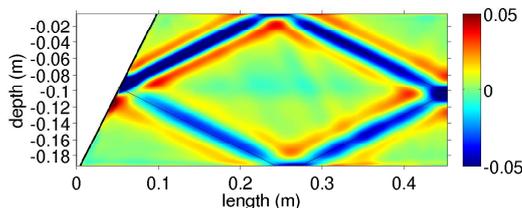


Figure 4.7: Same as Figure 4.3a, for a ten times larger forcing amplitude.

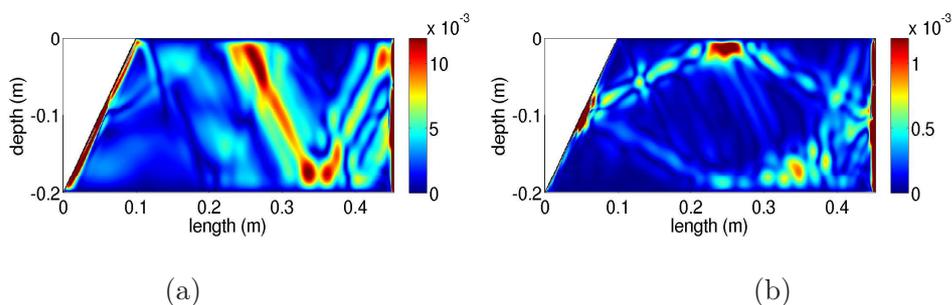


Figure 4.8: Harmonic analysis of  $\partial_z b$  from  $t = 40T$  to  $t = 61T$ , filtered at frequencies  $2\omega_e$  and  $3\omega_e$ . (a):  $2\omega_e$ -component; (b):  $3\omega_e$ -component. Note that the color scales of the two figures are different.

the attractor and the  $2\omega_e$ -beam emitted at the reflection location on the upper boundary, attesting of its nonlinear generation from these two frequency motions.

#### 4.5.2 Mixing

As shown above, the thickness of the attractor during the equilibrium regime is small, in the sense that it is set by an equilibrium between focusing and viscous effects. Strong gradients of the velocity and fluctuating density fields therefore occur all along the attractor, which result in local mixing of mass. As in any stably-stratified fluid, local mixing yields horizontal density, and therefore pressure, gradients so that the mixed fluid travels along iso-density surfaces away from the mixed region (for instance Browand *et al.* [BGY87], McPhee-Shaw-Kunze [MK02]). Rieutord & Noui [RN99] already pointed out the important role wave attractors should play in the transport properties of the flow. More recently Tilgner [Til07], using asymptotic expansion of the flow variables in a rotating fluid, was able to show that nonlinear interactions within the attractor could produce a mean flow.

In the present case, we found that the relative change in  $N$  due to mixing between initial and final times of the simulation is not larger than 0.3%. This value depends upon the duration of the forcing stage but is still very weak.

Mixing is actually usually small in a uniformly stratified fluid because the scale of the density profile is the height of the tank container, which is much larger than the vertical scale of the motions which mix the fluid. In the present case, the thickness of the attractor (a few cms) should be compared with the water height (20 cm).

The ability of the attractor to mix the fluid can be estimated by computing a turbulent diffusivity during the equilibrium regime. Since this regime is weakly nonlinear, we expect the turbulent diffusivity to be close to the molecular diffusivity but it is still useful to check this.

In the present case of a uniformly stratified fluid, the turbulent diffusivity is defined by (Winters *et al.* [WLRD95]):

$$K_t(z) = \frac{g}{\rho_0} \frac{\phi_d(z)}{N^2}, \quad (4.9)$$

where  $\phi_d$  is the instantaneous diffusive flux of density due to mixing. Since the fluid is not turbulent in the attractor,  $\phi_d$  may be computed as

$$\phi_d(z) = \kappa \frac{g}{\rho_0} \frac{\overline{|\nabla \tilde{\rho}|^2}}{N^2}, \quad (4.10)$$

where  $\tilde{\rho}$  refers to the density field averaged over one period and the overline is a horizontal average. It follows that the turbulent diffusivity can eventually be computed as

$$\frac{K_t(z)}{\kappa} = \left( \frac{g}{\rho_0} \right)^2 \frac{\overline{|\nabla \tilde{\rho}|^2}}{N^4}. \quad (4.11)$$

The ratio  $K_t/\kappa$  in the attractor can easily be estimated from this expression. Decomposing the density field  $\tilde{\rho}$  into the background linear part and the fluctuations yields  $K_t/\kappa = 1 + 2\partial_z \tilde{b}/N^2 + |\nabla \tilde{b}|^2/N^4$ . In the attractor, where the changes are dominantly in the cross-direction (i.e.  $\partial/\partial s \ll \partial/\partial \eta$ ), we can write  $|\nabla \tilde{b}|^2 \simeq (\partial_\eta \tilde{b})^2 \simeq (\sin\theta)^{-2} (\partial_z \tilde{b})^2$ . From the color scale of Figure 4.7, we may take a value of 0.01 as an upper bound for  $|\partial_z \tilde{b}|/N^2$  so that  $K_t \simeq \kappa$  in the attractor. The same is of course true outside the attractor since slow large scale motions dominate there.

## 4.6 Summary and conclusion

The purpose of this paper is to model numerically an internal gravity wave attractor using the MIT general circulation model to go beyond previous approaches and address questions about nonlinear effects and mixing. For this purpose, the laboratory experiment of [HvDM08] is reproduced and a careful comparison with the experimental results is carried out. The geometry of the experiment consists of a trapezoidal tank with a uniform stratification. Despite the two-dimensional configuration of our simulation,

a very good agreement with the experiment is obtained. The only difference is an insufficient decrease of the amplitude along the attractor and we invoke the absence of lateral boundary layers in the simulation to account for this difference.

We propose a simple model for the thickness of the attractor based upon the opposite effects of viscous diffusion and focusing. This model predicts that the thickness should evolve as the  $1/3$  power of the ratio of viscous to stratification effects. This agrees well with results by Rieutord *et al.* [RGV01] and Ogilvie [Ogi05] for rotating fluids (this ratio becoming the Ekman number). When the focusing parameter is larger than about 3 (so that its cube power is much larger than 1), the expression for the thickness becomes identical to that predicted by Thomas & Stevenson [TS72] for a wave beam in the far field limit. This analogy allows us to interpret the wave attractor as a wave beam emitted by an oscillating source point located at the focusing point.

A linear regime was considered up to this point and the forcing amplitude was increased by a factor 10 to get insight into nonlinear effects and induced mixing. Harmonics at twice the forcing frequency were found, as a result of nonlinear interaction between branches of the attractor, consistent with Tabaei *et al.* [TAL05]’s prediction for wave beams. The second harmonic motions do not converge toward an attractor and propagate within the closed domain. Third harmonic motions were also found, which are trapped in the attractor because their frequency is larger than the Brunt-Väisälä frequency. Consistently with the weakly nonlinear regime, we found that the turbulent diffusivity within the attractor is hardly larger than the molecular diffusivity.

Several directions of research may be pursued. The simplest one is to consider a nonlinear wave attractor, by increasing again the forcing amplitude. The fate of the attractor in this case is not obvious: harmonics should be produced, which may act as perturbation to the intense vorticity and density layers of the attractor and destabilize them via a Kelvin-Helmholtz instability. Does the attractor form again once the turbulent scales have been dissipated? Also, if the forcing is maintained over a long enough time, induced mixing may modify the background stratification, resulting in a step like profile which should modify the attractor. The shape of the fluid container has also a strong influence on the attractor, as studied by Maas & Lam [ML95] in a linear context. All these simplified approaches are prerequisites before addressing a natural geophysical situation, such as a closed oceanic basin.

**Acknowledgments** We thank Leo Maas who proposed us to model numerically the internal wave attractor. We also thank Jeroen Hazewinkel for having provided an earlier draft of his experimental paper, which greatly helped in the detailed comparison with the simulation. Fruitful discussions

with J. Hazewinkel and L. Maas are also acknowledged. Computations were performed on the french Supercomputer Center IDRIS, through contract 070580.

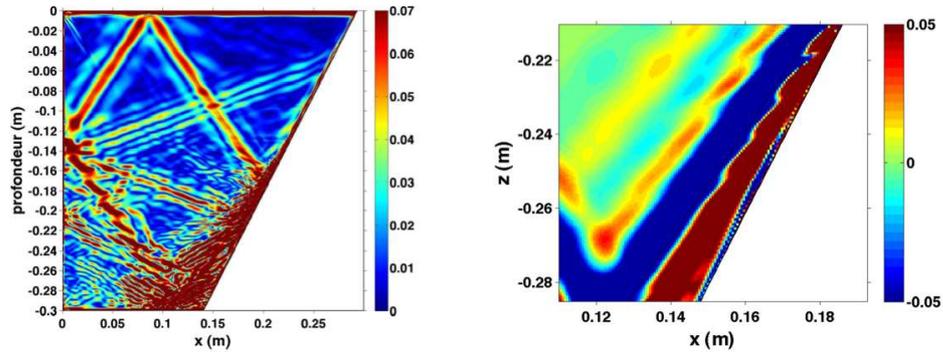


FIGURE 4.9 – Simulation numérique d’un attracteur d’ondes internes. Hormis la taille du domaine, les paramètres qui diffèrent notablement de ceux décrits en §4.2 sont  $N = 2 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_e = 1,65 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $dx = dz = 0,6 \text{ mm}$ , une amplitude de forçage de  $1 \text{ mm.s}^{-1}$  et surtout une viscosité  $\nu = 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . À gauche, champ  $\|\nabla b\|$  après 60 périodes de forçage. Les rayons inclinés visibles sur la figure ont des angles tels que la fréquence qui leur est associée est moitié de la fréquence de forçage. À droite, agrandissement du champ  $\partial_x b$  pendant le développement de l’instabilité.

## Épilogue

L’article reproduit dans ce Chapitre fait partie d’une série d’articles tendant à montrer qu’un attracteur peut être décrit comme un rayon d’ondes internes replié sur lui-même. C’est peut-être une des applications les moins exploitées de ce type d’objet : les attracteurs d’ondes internes, très faciles à obtenir en laboratoire, pourraient servir de support à des études sur les rayons. On peut notamment penser à l’article de Hazewinkel *et al.* [HDDM10], qui décrit des propriétés de transport d’un attracteur en considérant ce dernier comme un rayon d’ondes internes. Dans une version antérieure de ce travail ([Gri07]), il a été trouvé que les branches d’un attracteur d’ondes internes pouvaient être sujettes à des instabilités de cisaillement, donnant naissance à des rayons de fréquence moitié de la fréquence de forçage, à la manière d’une instabilité paramétrique (*cf.* Fig. 4.9). Il y a tout lieu de penser que cette instabilité n’est pas propre aux attracteurs mais plutôt aux rayons d’ondes internes.

Entre la publication de cet article et la soutenance de cette thèse, pratiquement deux ans se sont écoulés et quelques développements notables se sont produits. Un second article a été publié avec J. Hazewinkel (premier auteur) et S. Dalziel (troisième auteur), proposant une comparaison détaillée entre expériences de laboratoire et simulations numériques. Cette comparaison a pour but de valider le caractère bidimensionnel des expériences de laboratoire menées depuis 14 ans et de valider une méthode de calcul de la fonction de courant et des fluctuations de densité à partir de données expérimentales. Cet article ([HGD10]) est proposé à la lecture en Annexe B.

---

Une problématique récurrente au sujet des attracteurs d'ondes internes est de savoir si un tel phénomène peut se reproduire dans la nature. Echeverri *et al.* [EYBP10] montrent analytiquement que la topographie du détroit de Luzon (situé entre l'île des Philippines du même nom et l'île de Taipei), pourrait être propice à la formation d'un attracteur. Ce travail reste cependant très idéalisé : il est bidimensionnel, les topographies sont lissées, la stratification n'est sujette à aucune variabilité et à part la marée barotrope, aucun courant n'est présent. Il s'agit cependant du premier travail cherchant explicitement à trouver un endroit où un attracteur peut exister.



## Chapitre 5

# Réflexion sur-critique, non-linéaire d'une onde plane contre une paroi inclinée

### 5.1 Introduction

Une des grandes questions de l'océanographie moderne (qui arrive même en première position pour Munk et Wunsch [MW98, §8]) est de savoir combien d'énergie est dissipée au fond des océans, cette énergie dissipée affectant l'état de la stratification à grande échelle des océans par les processus de mélange en particulier. Eriksen [Eri82, Eri85], en se basant sur des arguments linéaires, semble avoir pensé pour la première fois que la réflexion d'ondes internes sur les pentes océaniques pouvait jouer un rôle dans la quantité de mélange requise par Munk [Mun66] pour entretenir cette stratification. Un autre exemple, plus récent, nous est donné par van Haren et Gostiaux [vG10, Bro10] qui ont observé dans les Canaries que des ondes internes interagissant avec une topographie sous-marine pouvaient donner lieu à de spectaculaires phénomènes turbulents. La réflexion d'ondes internes sur des pentes peut aussi avoir une grande importance dans le domaine de la sédimentologie ([CPO02]).

Plusieurs travaux, plus académiques ([IN89, SR96, DII97, SR98, JIA99, IWD00, MK02]), s'intéressent au problème de la turbulence et du mélange induit lors de la réflexion d'une onde interne contre une paroi inclinée de pente constante. Presque tous s'intéressent au cas de la réflexion critique, à la différence notable de De Silva *et al.* [DII97] qui observent une faible efficacité de mélange dans tous les cas mais notent des instabilités loin de la topographie dans le cas de la réflexion sur-critique, imputables à des interactions entre ondes incidente et réfléchie. Nous n'allons pas nous intéresser directement au mélange mais à ces interactions ondes-ondes et allons maintenant passer en revue plus précisément les principaux travaux portant sur

ce sujet.

### 5.1.1 Travaux antérieurs

Le problème de la réflexion d'une onde interne sur une paroi inclinée connaît une première effervescence à partir de 1966, date à laquelle Phillips ([Phi66]) popularise les propriétés originales de réflexion des ondes internes évoquées en §1.2.4. On peut par exemple citer les travaux de Wunsch et Cacchione ([Wun68, Wun69, CW74]). L'étude de ce problème, relativement complexe, a avancé par à-coups depuis presque cinquante ans, avec il me semble une transmission difficile des résultats d'une étape à l'autre.

#### Les prédictions de Thorpe (1987)

Steve Thorpe ([Tho87]) est à notre connaissance le premier à avoir apporté une contribution significative à l'étude des interactions ondes-ondes se produisant lors de la réflexion d'ondes internes sur une paroi inclinée. Plus précisément, comme nous l'avons évoqué en §2.1.2, il s'est intéressé aux interactions non-linéaires entre une onde plane incidente et sa réflexion, puis entre l'onde plane incidente et l'onde née de la première interaction, et ainsi de suite.

Pour des raisons de facilité d'interprétation des résultats, il se place dans un repère tourné d'un angle  $\alpha$ , dont l'axe des  $x$  est parallèle à la paroi, l'axe des  $z$  perpendiculaire, vers le haut et l'origine des axes à la base de la paroi. Dans ce repère tourné, la relation de dispersion sans rotation devient :

$$(k_x^2 + k_z^2)\omega^2 = (k_x \cos \alpha - k_z \sin \alpha)^2 N^2, \quad (5.1)$$

$k_x$  et  $k_z$  étant les coordonnées du vecteur d'onde dans le repère tourné.

Le nombre d'interactions possibles étant *a priori* très grand, il n'utilise pas directement le formalisme décrit en §2.1 mais adopte une démarche itérative. Il part d'une onde forçante incidente et de sa réflexion, dont les fonctions de courant s'écrivent :

$$\psi_i = A_i \sin(k_{x,i}x + k_{z,i}z - \omega t), \quad (5.2)$$

$$\psi_r = A_r \sin(k_{x,r}x + k_{z,r}z - \omega t), \quad (5.3)$$

avec  $A_r = -A_i = -A$ ,  $k_{x,i} = k_{x,r} = k_x$ ,

$$k_{z,i} = 2k_x \frac{\sin 2\theta - \sin 2\alpha}{\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha}, \quad (5.4)$$

$$k_{z,r} = -2k_x \frac{\sin 2\theta + \sin 2\alpha}{\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha}, \quad (5.5)$$

$\theta$  étant à nouveau l'angle de propagation des rayons par rapport à l'horizontale. On peut vérifier que  $\psi_i + \psi_r = cte$  en  $z = 0$ , expression de la condition

d'imperméabilité à la paroi. Dans le cas sous-critique ( $\theta > \alpha$ ),  $k_{z,i} > 0$  et  $k_{z,r} < 0$ .

D'après ce que nous avons vu en §2.1.1, l'interaction non-linéaire de ces deux ondes va mener à la création de deux autres, forcées, qui s'écrivent :

$$\psi_2 = A_2 \sin(2k_x x + (k_{z,i} + k_{z,r})z - 2\omega t), \quad (5.6)$$

$$\psi_0 = A_0 \sin((k_{z,i} - k_{z,r})z), \quad (5.7)$$

les coefficients  $A_2$  et  $A_0$  étant proportionnels au carré de l'amplitude de l'onde incidente.

Le signal  $\psi_0$  de fréquence temporelle nulle correspond à un écoulement moyen stationnaire forcé, parallèle à la paroi et qui traverse donc les isopycnes, en contradiction avec la conservation matérielle du champ de densité. Mais Thorpe ([Tho87, §2.3, l. 11]) fait remarquer que dans un cadre lagrangien, cet écoulement est bien nul, en d'autres termes que la moyenne temporelle de la vitesse d'une particule que l'on suit dans son mouvement – soumise aux champs des ondes incidente et réfléchie – est nulle.

L'onde  $\psi_2$  de fréquence  $2\omega$  est quant à elle produite par le forçage non-linéaire mais ne peut pas se propager en tant que telle, ne respectant *a priori* pas la relation de dispersion. De plus, elle ne s'annule pas en  $z = 0$  et ne satisfait donc pas la condition d'imperméabilité à la paroi. Pour y remédier, l'auteur introduit une autre onde décrite par  $\psi'_2 = -A_2 \sin(2k_x x + m_2 z - 2\omega t)$  et appelée "onde libre" car satisfaisant la relation de dispersion (5.1). Après calculs, cela donne :

$$m_2 = -\frac{2k_x \left( \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \beta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \beta} \right)}{4 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}. \quad (5.8)$$

Cette dernière onde est introduite de façon *ad hoc* afin que la somme  $\psi_2 + \psi'_2$  satisfasse la condition d'imperméabilité. Elle n'est donc pas un résultat des interactions non-linéaires entre les deux ondes "primaires". L'auteur ne précise pas le mécanisme physique qui pourrait générer cette onde.

En insérant  $\psi_i + \psi_r$  dans l'équation de propagation non-linéaire (1.21), Thorpe calcule  $A_2$  dans le cas où  $\omega < N$ , ce qui donne :

$$\psi_2 + \psi'_2 = \frac{3A^2 k_x^2 \sin^2 2\theta \sin 2\alpha}{8\omega(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)D} [\sin(2k_x x + (k_{z,i} + k_{z,r})z - 2\omega t) - \sin(2k_x x + m_2 z - 2\omega t)], \quad (5.9)$$

avec  $D = 4 \sin^4 \theta - (7 \sin^2 \alpha + 1) \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \alpha$ . L'annulation du dénominateur permet de distinguer deux singularités : la singularité critique pour  $\alpha = \theta$  et une autre singularité pour  $D = 0$ . On peut montrer que cette dernière condition est réalisée quand  $I_2 = m_2 - k_{z,i} - k_{z,r} = 0$ , c'est à dire lorsque l'onde forcée devient libre et donc que l'onde incidente, sa réflexion et l'onde forcée forment une triade résonante (*cf.* figure 5.1).

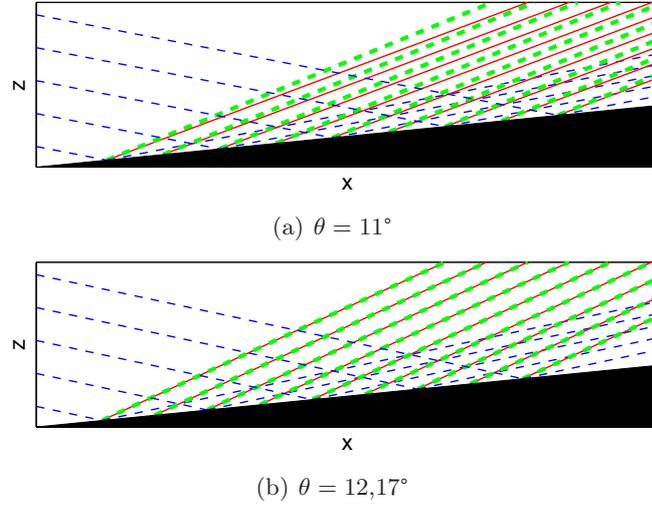


FIGURE 5.1 – Pour une paroi de pente 10%, tracé des caractéristiques pour une onde plane incidente et sa réflexion (tirets bleus), de l'onde de fréquence  $2\omega$  forcée par l'interaction (ligne rouge continue) et de l'onde libre correspondante (tirets verts épais). (a) Cas proche d'une résonance. (b) Résonance : ondes libre et forcée se superposent.

Lorsque  $D = 0$  (ou  $I_2 = 0$ ), le dénominateur s'annule mais le numérateur aussi,  $\psi_2$  et  $\psi'_2$  étant alors en opposition de phase. On peut montrer que la solution ne diverge pas mais la recherche des zéros du dénominateur de la fonction d'onde permet toujours de détecter pour quelle configuration on peut avoir une triade résonante entre l'onde incidente, réfléchie et l'onde à fréquence  $2\omega$ . À ce stade, on peut d'ailleurs remarquer que la configuration sous-critique ne peut donner lieu à une telle résonance, soit analytiquement ([JM09]), soit géométriquement (figure 5.2).

Thorpe va ensuite plus loin en étudiant les interactions entre les multiples rayons incident, réfléchi et créés par les interactions résonantes. En se limitant aux fréquences inférieures ou égales à  $3\omega$ , il détermine que les résonances possibles sont :

- entre l'onde incidente et l'onde libre de fréquence  $2\omega$ , qui produit une onde de fréquence  $\omega$  et de nombre d'onde vertical  $k_{z,r}$ , caractérisée par  $I'_2 = k_{z,r} - m_2 + k_{z,i} (= -I_2) = 0$ ,
- entre l'onde incidente et l'onde forcée de fréquence  $2\omega$ , qui produit une onde libre de fréquence  $3\omega$  et de nombre d'onde vertical  $m_3$ , caractérisée par  $I_3^{(1)} = m_3 - 2k_{z,i} - k_{z,r} = 0$ ,  $m_3$  satisfaisant la relation de dispersion  $(3\omega)^2(9k_x^2 + m_3^2) = (3k_x \cos \alpha - m_3 \sin \alpha)^2 N^2$ ,
- entre l'onde incidente et l'onde libre de fréquence  $2\omega$ , qui produit une onde libre de fréquence  $3\omega$  et de nombre d'onde vertical  $m_3$ , caractérisée par  $I_3^{(2)} = m_3 - m_2 - k_{z,i} = 0$ .

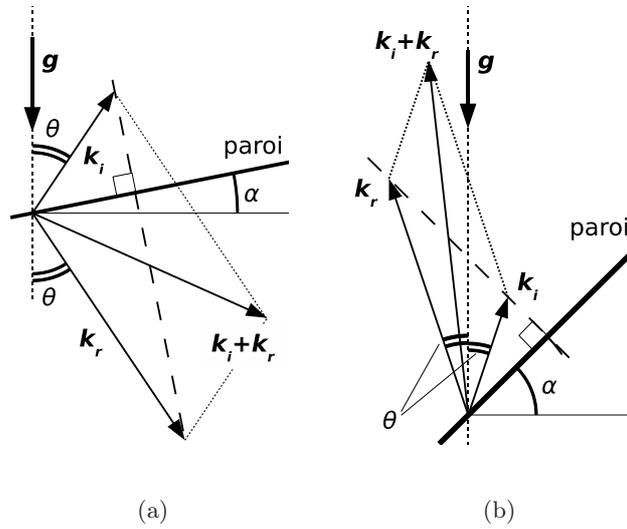


FIGURE 5.2 – Construction géométrique du vecteur d’onde forcé par l’onde incidente et sa réflexion sur-critique (a) et sous-critique (b). La ligne en pointillés longs exprime la conservation de la projection des vecteurs d’onde incidents et réfléchis contre la paroi. On voit que dans le cas sous-critique, le vecteur d’onde forcé à  $2\omega$  est plus vertical que le rayon incident à  $\omega$  et ne satisfait donc pas la relation de dispersion : il ne peut pas y avoir résonance dans ce cas. D’après Louis Gostiaux.

Les courbes  $I_2 = 0$ ,  $I_3^{(1)} = 0$  et  $I_3^{(2)} = 0$  sont tracées en figure 5.3.

À partir de maintenant, nous revenons dans le référentiel initial.  $k_{x,i}$ ,  $k_{z,i}$ , etc. sont désormais les quantités projetées sur les axes perpendiculaire et parallèle à la gravité.

### Travaux de Tabaei *et al.* (2005) et contestations

Tabaei, *et al.* ([TAL05]) ne considèrent plus une onde plane mais un rayon de profil quelconque et abandonnent l’introduction d’une deuxième onde pour satisfaire la condition d’imperméabilité. Par conséquent, les solutions forcées de [TAL05] traversent la paroi inclinée. De plus, comme remarqué par Jiang et Marcus [JM09], ils prédisent des interactions pouvant être résonantes menant à la création de rayons forcés qui ne peuvent pas satisfaire la relation de dispersion, dont un exemple est fourni en figure 5.2. Par une simulation numérique directe (donc indépendante de leurs calculs analytiques) de réflexion d’un rayon gaussien sur une paroi inclinée, [TAL05] montre qu’un rayon de fréquence  $2\omega$  est en effet créé mais que son amplitude est très faible. Les expériences de Peacock et Tabaei [PT05] ne montrent pas ce rayon, probablement trop faible pour que leur système de mesure puisse le détecter.

Un autre travail nous vient du groupe de Harry Swinney de l’Université du Texas à Austin (non publié à ce jour). Leur travail expérimental montre

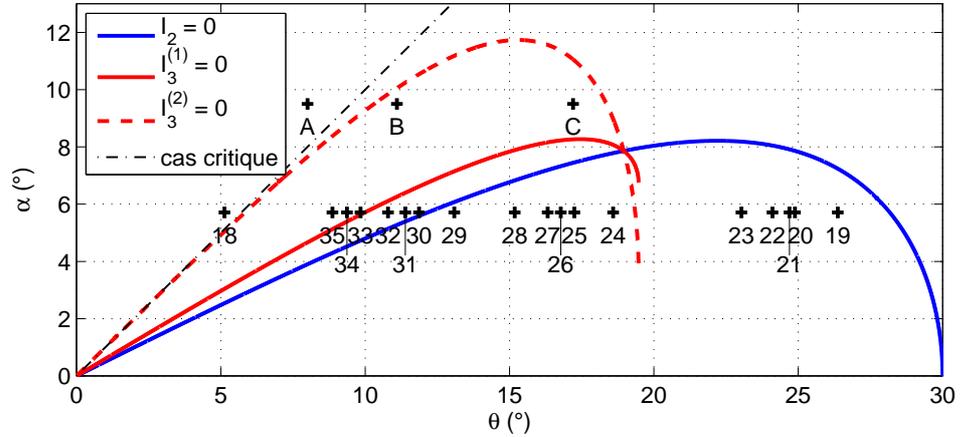


FIGURE 5.3 – Courbes où les couples  $(\alpha, \theta)$  satisfont les différentes conditions de résonance. Les courbes  $I_3^{(1)} = 0$  et  $I_3^{(2)} = 0$  diffèrent notablement de [Tho87, Fig. 6]. Une vérification par tracé de caractéristiques ne semble pas indiquer de résonances dans les parties manquantes. Les croix numérotées localisent les expériences que nous avons menées, les croix lettrées celles de Louis Gostiaux en 2006 ([Gos06, §8.3]).

que pour des rayons, l'amplitude de la vorticité    fréquence  $2\omega$  est maximisée lorsque la largeur du rayon de fréquence  $2\omega$  émis est égale à la largeur du rayon incident. Ils prétendent que ces observations ne s'accordent pas avec [TAL05], qui lui prédit une émission maximale lors de la réflexion critique (nous n'avons pas trouvé de telle affirmation dans [TAL05]).

### 5.1.2 Expériences précédentes sur la plate-forme Coriolis

Dans le cadre de la thèse de Louis Gostiaux, deux campagnes expérimentales se sont succédées. La première utilisait un excitateur    volets ([IWD00]) et a mené à la première observation quantitative d'émission d'harmoniques ([GDD+06]) alors que la seconde a été l'occasion d'inaugurer le nouveau générateur d'ondes internes ([GDMD07]). La publication qui en a été tirée s'est focalisée sur la caractérisation de l'onde plane   mise par le générateur et n'a pas montré les résultats relatifs à la génération d'harmoniques.

Des résultats, il y en avait pourtant. Pour les cas proches de la réflexion critique, les harmoniques générés sont très faibles. On peut le comprendre en reprenant le concept de triade résonante. En effet, près de la réflexion critique, l'onde réfléchie est confinée le long de la pente et ne peut interagir efficacement avec l'onde incidente, un problème que l'on retrouve pour les harmoniques générés. Encore une fois, le cas sous-critique ([Gos06, §8.3, Exp. A]) est beaucoup moins propice à la génération d'harmoniques. Une expérience de réflexion sur-critique ([Gos06, §8.3, Exp. C]) a par contre montré

une forte émission d'harmoniques à fréquence  $2\omega$  et  $3\omega$ , d'amplitude comparable au rayon incident. Si on revient à la figure 5.3, on voit que cette expérience C est relativement proche de la courbe de résonance  $I_3^{(2)} = 0$  (entre l'onde incidente et les ondes libres aux fréquences  $2\omega$  et  $3\omega$ ).

### 5.1.3 Objectifs et plan

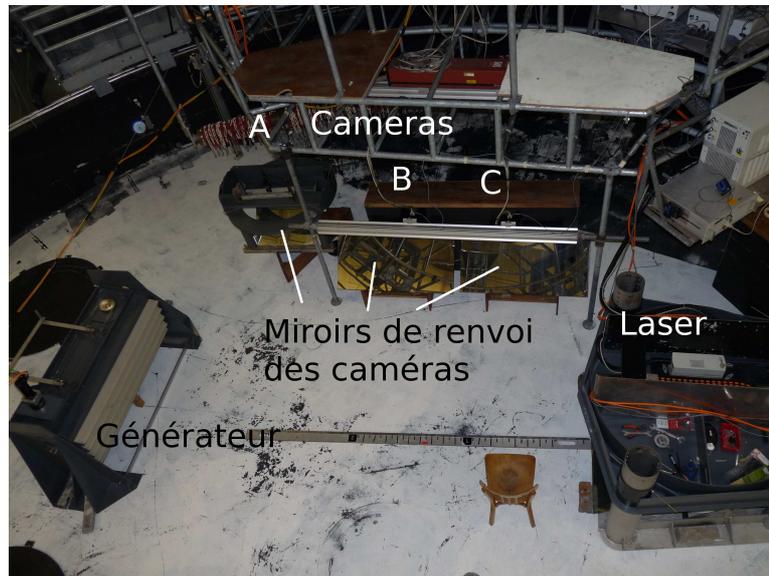
Il est assez difficile de tirer de ces différentes références un message clair. Entre les solutions de Thorpe, qui respectent la condition d'imperméabilité mais qui font coexister deux ondes différentes dont l'une est introduite de manière *ad hoc* et possède un mécanisme de génération non-précisé et les solutions de Tabaei *et al.* qui ne respectent pas la condition d'imperméabilité, entre les ondes planes de Thorpe, Jiang et Marcus et les rayons de Tabaei *et al.* et Swinney *et al.* et si on y ajoute des observations issues d'expériences ou de simulations numériques, le message semble confus. Nous allons nous servir des études de Gostiaux *et al.* comme point d'appui pour apporter notre contribution à ce problème.

Il est important de souligner que les interprétations des expériences de Louis Gostiaux ont mis un certain temps à mûrir et qu'il y a quatre ans, les expérimentateurs n'avaient pas à l'esprit les triades résonantes. Ce n'est qu'à l'issue de ce processus de maturation qu'il a été décidé de réaliser une campagne expérimentale en décembre 2009. Un des objectifs de cette étude<sup>1</sup> était d'explorer l'espace des paramètres autour des résonances, sans rotation et pour une pente donnée (un paramètre qui n'est en général pas aisément ajustable), de voir si l'hypothèse des résonances triadiques pouvait expliquer les observations de Louis Gostiaux et si oui, de tenter de voir quelles résonances étaient les plus efficaces en termes de génération d'harmoniques. Lorsqu'utiles, des simulations numériques directes bi-dimensionnelles sont employées en appui des observations expérimentales. Nous verrons que ces objectifs initiaux seront fortement modifiés par l'apparition de phénomènes imprévus.

Nous allons présenter en §5.2 le dispositif expérimental utilisé. En §5.3, nous décrirons l'aspect général des ondes internes et donnerons les caractéristiques qualitatives de chaque composante fréquentielle. L'apparition de phénomènes inattendus nous obligera alors à réviser nos objectifs. En §5.4, nous nous intéresserons à la structure spatiale de l'onde réfléchie. En §5.5, nous nous intéresserons aux flux d'énergie de l'onde incidente vers les ondes réfléchie et de fréquences  $2\omega$  et  $3\omega$ . En §5.6, nous dégagerons quelques propriétés de l'écoulement moyen qui s'établit dans presque toutes les expériences. Enfin, en §5.7 nous conclurons et envisagerons quelques perspectives possibles.

---

1. Il y en a eu d'autres : réflexion d'ondes inertielles et réflexion tri-dimensionnelle en incidence oblique.



(a)

FIGURE 5.4 – Photo du dispositif expérimental (la paroi inclinée n'est pas encore installée).

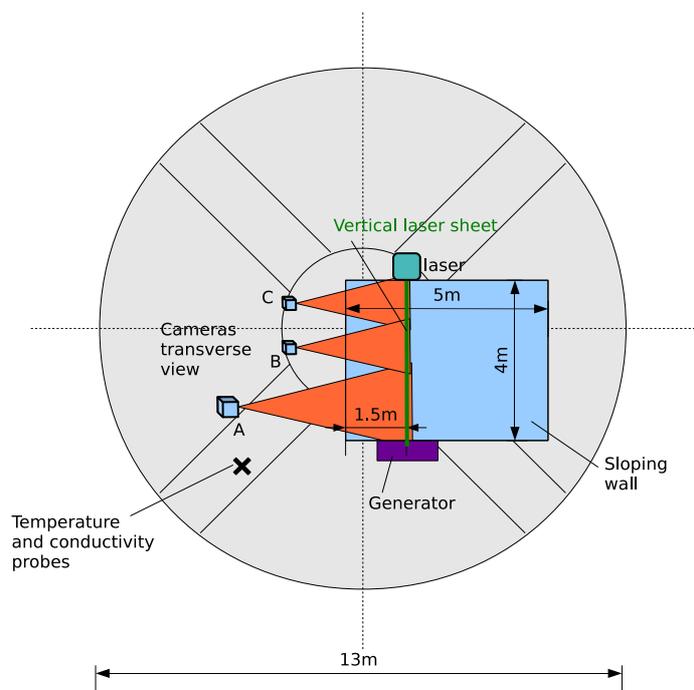
## 5.2 Configuration expérimentale

Des visualisations du dispositif sont proposées en figures 5.4 et 5.5. Un pan incliné de longueur au sol 4 m et de pente 10% ( $5,71^\circ$ ) est installé entre le laser et le générateur (cf. §3.2), eux-mêmes en vis-à-vis. La largeur des plaques du générateur (1,5 m) et le fait que la nappe laser passe en leur centre sont censés assurer que la dynamique observée est 2D.

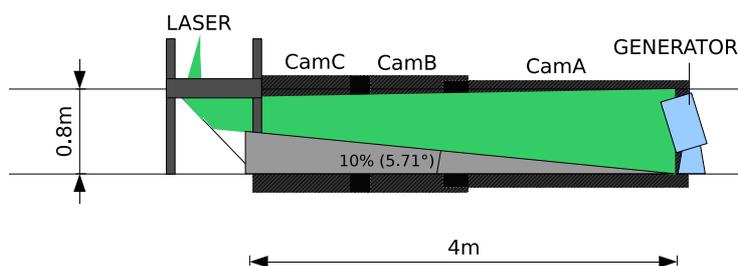
Trois caméras couvrent la nappe laser sur toute sa longueur. Une première caméra (Pike AVTF421B), que nous abrègerons en caméra A, de résolution effective  $2048 \times 800$  pixels<sup>2</sup>, couvre la moitié du champ du côté du générateur. Deux autres caméras identiques (Dalsa 1M60), de résolution latérale plus faible ( $1024 \times 1024$  pixels<sup>2</sup>) couvrent à elles deux la seconde moitié de la longueur. Nous les appellerons caméras B et C.

La hauteur de fluide est de 80 cm. Une fréquence de Brunt-Väisälä  $N = 0,46$  rad.s<sup>-1</sup> est prescrite. Nous pouvons voir en figure 5.6 que durant la campagne expérimentale, la valeur moyenne de  $N$  sur la hauteur du fluide (fond et surface exclus) varie entre 0,41 et 0,47 rad.s<sup>-1</sup>, soit une variation de 15% dont il faudra tenir compte. Les sondes de température et de conductivité, à partir desquelles est obtenue  $N$ , sont situées à quelques mètres de l'ensemble {générateur, pan incliné, laser}.

Dans notre étude, nous nous intéresserons à 18 expériences, dont les positions dans l'espace des paramètres sont données en figure 5.3 et de manière



(a) Vue de dessus



(b) Vue latérale

FIGURE 5.5 – Schémas du dispositif expérimental.

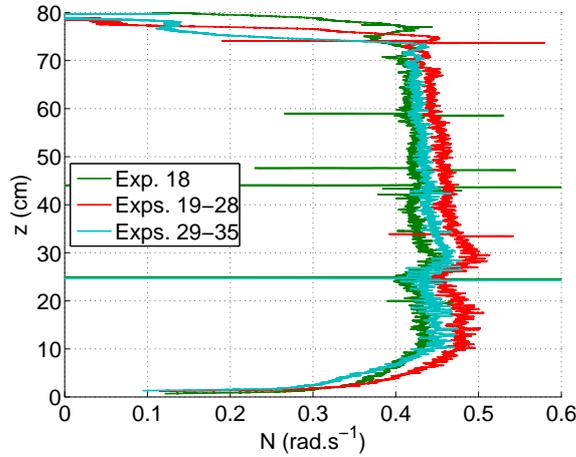


FIGURE 5.6 – Profils de  $N$  pour les différentes expériences (identifiées en légende).

plus détaillée en table 5.1. La numérotation commence à 18 et se termine à 35 car, en tout, près d’une centaine d’expériences a été réalisée. Nous avons décidé de ne pas établir de nouvelle numérotation afin d’éviter toute confusion lors de la compilation de nos résultats.

Cette série d’expériences est réalisée avec un forçage en onde plane, limitée à quatre longueurs d’ondes. L’excentricité des cames est de 3 cm, les plaques du générateur font un angle de  $12,7^\circ$  avec l’horizontale et la cuve ne tourne pas.

### 5.3 Aspect général des champs d’ondes

Il est assez difficile de trouver une variable pertinente pour représenter les ondes internes. À amplitude égale, la vitesse horizontale (verticale) donne plus d’importance aux ondes de basse (haute) fréquence, la norme de la vitesse n’a que des valeurs positives, la vorticité donne plus d’importance aux ondes de courte longueur d’onde (les harmoniques élevés dans notre cas) alors que l’énergie “écrase” les signaux faibles et ses valeurs sont aussi uniquement positives.

Sauf exception explicitement mentionnée, nous avons pris le parti par la suite d’afficher  $\text{sgn}(u) \times \sqrt{u^2 + w^2}$ , la norme de la vitesse instantanée multipliée par le signe de la vitesse horizontale, un compromis entre les scalaires évoqués. Nous avons aussi choisi d’afficher chaque composante fréquentielle séparément afin de ne pas introduire de comparaison entre elles, comparaison qui comme nous l’avons dit dépendrait du scalaire utilisé. À chaque fois, le filtrage est effectué sur les 8 dernières périodes de forçage (sur une vingtaine au total).

Dans cette section, nous ne chercherons pas à décrire quantitativement

Exp. n°	$\omega$	$\langle N \rangle$	$\theta$	$\theta_{2\omega}$	$\theta_{3\omega}$	$k_{x,i}$	$\sigma$
19	0,208	0,468	26,4°	62,7°	∩	22,8	0,23
20	0,197		24,9°	57,3°	∩	21,5	0,24
21	0,195		24,7°	56,7°	∩	21,3	0,21
22	0,191		24,1°	54,8°	∩	20,8	0,24
23	0,183		23,0°	51,5°	∩	19,8	0,25
24	0,149		18,6°	39,6°	73,0°	16,0	0,28
25	0,139		17,2°	36,4°	62,8°	14,8	0,26
26	0,135		16,8°	35,2°	60,0°	14,4	0,25
27	0,131		16,3°	34,2°	57,5°	14,0	0,24
28	0,122	0,468	15,2°	31,6°	51,8°	13,1	0,22
29	0,100	0,442	13,1°	26,9°	42,8°	11,3	0,19
30	0,091		11,9°	24,3°	38,1°	10,3	0,17
31	0,087		11,4°	23,3°	36,3°	9,85	0,16
32	0,083		10,8°	22,0°	34,2°	9,34	0,16
33	0,075		9,84°	20,0°	30,8°	8,53	0,15
34	0,072		9,37°	19,0°	29,2°	8,13	0,14
35	0,068	0,442	8,86°	17,9°	27,5°	7,70	0,14
18	0,041	0,455	5,12°	10,3°	15,5°	4,49	0,10

TABLE 5.1 – Quelques données tirées des expériences.  $\omega$  est en  $\text{rad.s}^{-1}$ ,  $\langle N \rangle$  est la moyenne de  $N$  (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) entre 12 et 60 cm au-dessus du fond de la cuve. La valeur locale de  $N$  peut fluctuer d'environ  $\pm 5\%$  autour de cette valeur.  $\theta_{n\omega} = \arcsin(n\omega/\langle N \rangle)$ ,  $k_{x,i}$  est en  $\text{rad.m}^{-1}$  et  $\sigma = \tilde{u}k_{x,i}/\omega$  mesure la raideur des ondes forçantes (cf. §2.1.1 et §2.3), l'amplitude de vitesse  $\tilde{u}$  étant tirée des expériences. ∩ signifie que l'onde est évanescente. On rappelle que l'excentricité des cames est de 3 cm et l'angle de la paroi de 5,71°.

les champs mais plutôt à identifier quels sont les détails auxquels il faut s'intéresser afin de pouvoir nous concentrer sur ces points plus tard.

### 5.3.1 Ondes à fréquence fondamentale

Tous les champs filtrés à la fréquence fondamentale (*cf.* Fig. 5.7) ont un point en commun : l'amplitude des ondes réfléchies est fortement atténuée par rapport à l'amplitude des ondes incidentes. L'énergie est donc transférée vers d'autres fréquences ou dissipée.

Une caractéristique inattendue des ondes réfléchies est que la structure en onde plane semble parfois perdue et que dans ces cas l'amplitude de l'onde est plus forte sur les *bords* de la zone de réflexion, laissant un "trou" entre ces deux bords. Ceci est particulièrement visible pour l'expérience 19 (*cf.* Fig. 5.7, Exp. 19), mais aussi les expériences 21, 22, 26 et 28 à 31 (*cf.* Fig. 5.7). Si on en revient à la figure 5.3, les occurrences de ce phénomène ne semblent pas corrélées avec les courbes de résonances. Bien sûr, les expériences à basse fréquence ne semblent pas montrer un tel comportement mais cela peut venir du fait que justement, les rayons sont trop horizontaux pour que ce phénomène soit visible, les réflexions étant focalisantes et les deux rayons émis pouvant donc fusionner. Nous y reviendrons en §5.4.

Un autre élément apparaît inattendu : une légère courbure des caractéristiques des ondes internes. Cette courbure étant plus accentuée pour les harmoniques supérieurs, nous y reviendrons plus tard.

### 5.3.2 Ondes à fréquences $2\omega$ et $3\omega$

On peut voir en figure 5.8 les champs filtrés à la fréquence  $2\omega$  pour les différentes expériences. La première chose à remarquer est que lorsqu'on s'approche de la résonance  $I_2$  (qui correspondrait aux expériences 29 et 30, dans une moindre mesure à 19, *cf.* Fig 5.3), aucun comportement particulier ne semble apparaître. Par exemple, les ondes à la fréquence  $2\omega$  pour les expériences 29 et 30 semblent dans la continuité des expériences 28 et 31.

Cette observation n'est en apparence pas valable pour les résonances impliquant des fréquences  $3\omega$ , c'est à dire telles que  $I_3^{(1)} = 0$  et  $I_3^{(2)} = 0$  (*cf.* Fig. 5.9), qui correspondraient aux expériences 24 et 33. Au moins pour l'expérience 24, une émission d'ondes à  $3\omega$  est observée de manière plus forte que pour sa voisine, l'expérience 25. L'expérience 33 ne semble pas montrer de comportement particulier.

On retrouve aussi la courbure décrite pour les ondes de fréquences fondamentales. On voit pour certaines expériences (particulièrement pour les expériences 19 à 27, ondes de fréquences  $2\omega$ ) que les ondes s'échappant de la zone d'interaction vers la droite ont une courbure positive.

Cette variation de la courbure des caractéristiques pourrait être due à une variation de  $N$ . Comme nous allons le voir immédiatement après, elle est

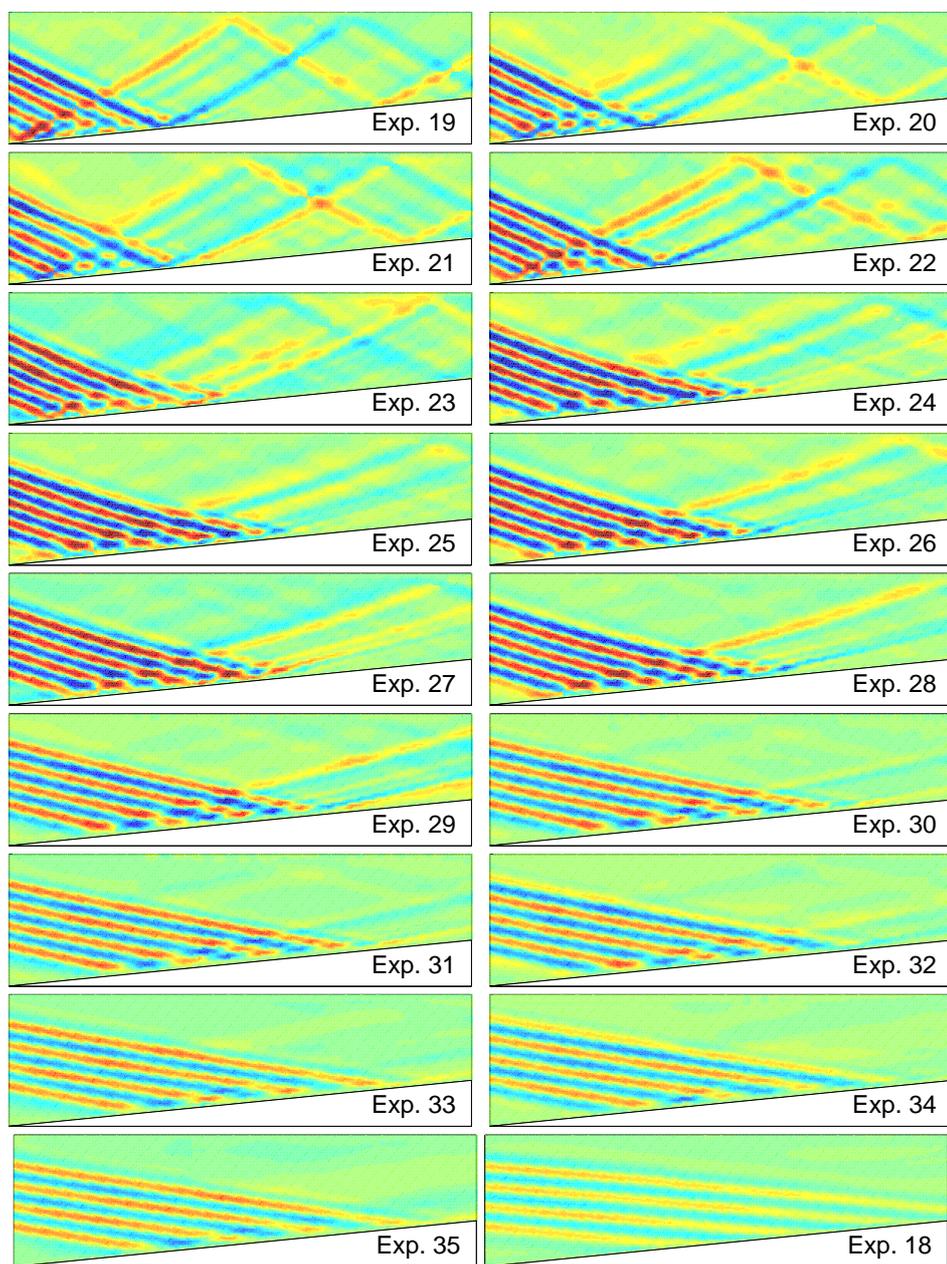


FIGURE 5.7 – Champs filtrés à la fréquence fondamentale. Les axes horizontaux vont de 0 à 280 cm, les axes verticaux de 0 à 80 cm, l'origine étant prise au début de la pente. La palette de couleur va de  $-3$  à  $+3 \text{ mm.s}^{-1}$ .

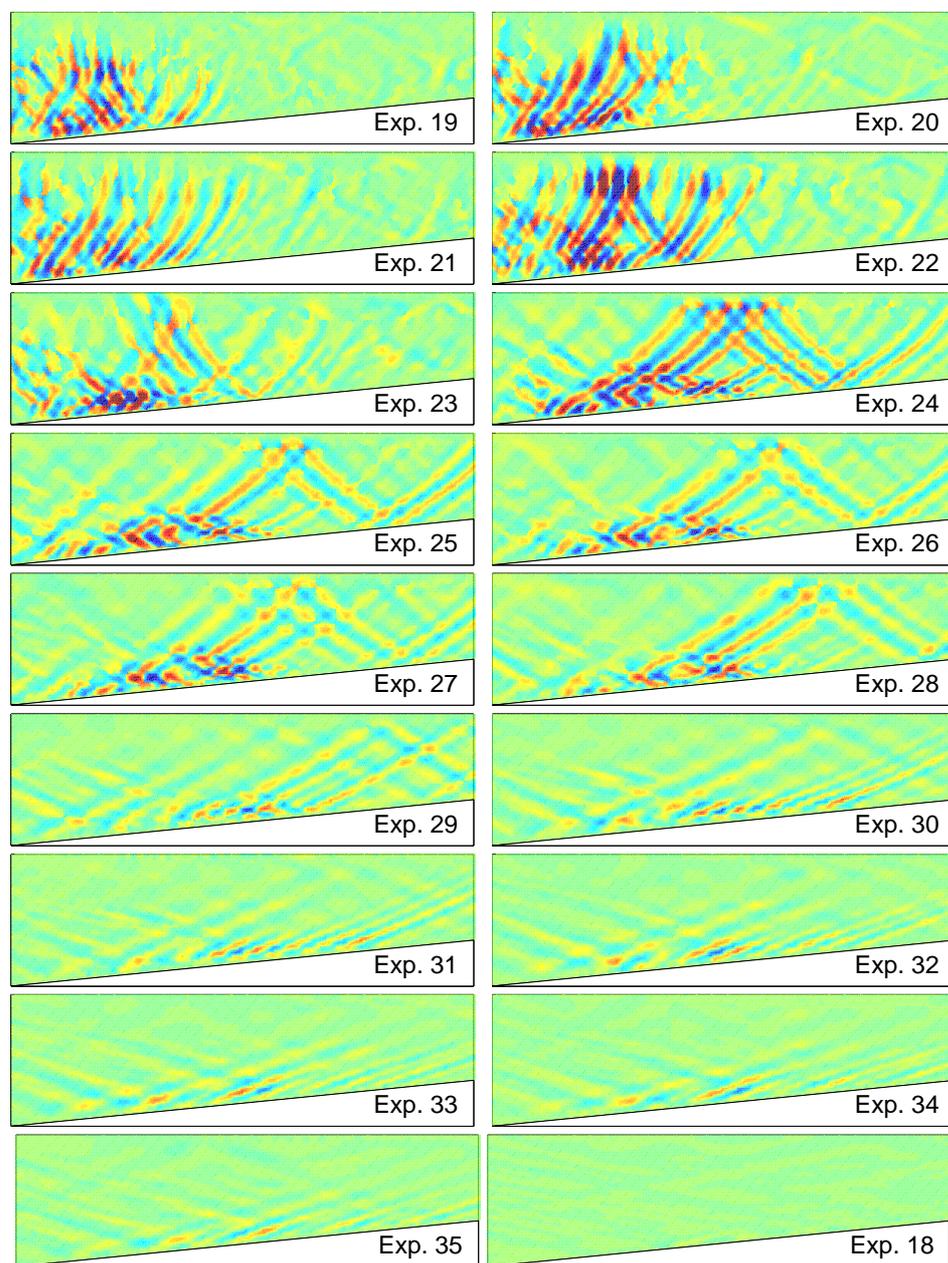


FIGURE 5.8 – Même légende que pour la figure 5.7 pour les fréquences  $2\omega$ . La palette de couleur va cette fois de  $-1$  à  $+1$  mm.s<sup>-1</sup>.

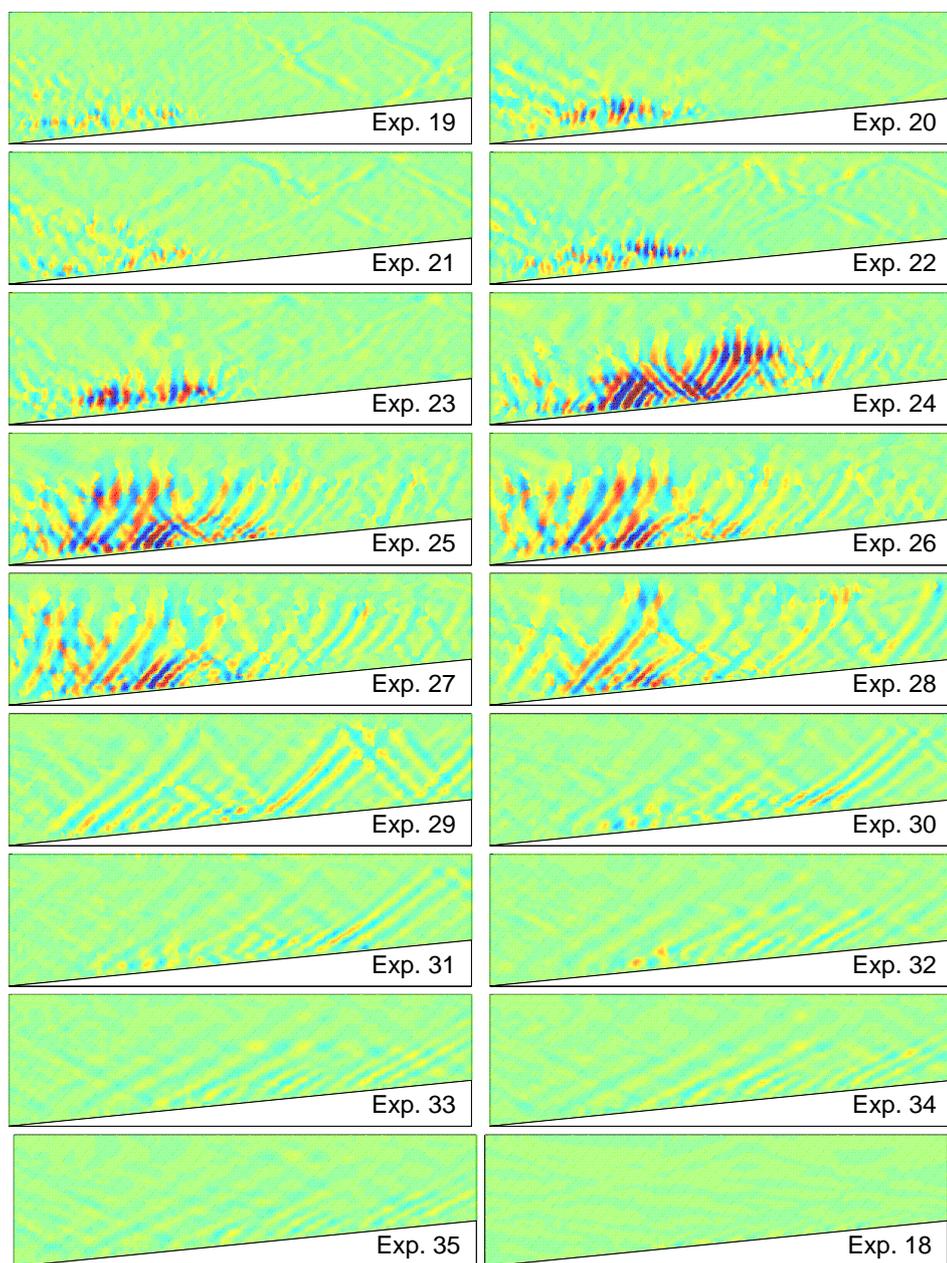


FIGURE 5.9 – Même légende que pour la figure 5.7 pour les fréquences  $3\omega$ . La palette de couleur va cette fois de  $-0,6$  à  $+0,6 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ .

dans notre cas due plutôt à un phénomène que nous n'avions pas anticipé : l'advection des ondes par un écoulement moyen, en d'autres termes l'effet Doppler.

### 5.3.3 Écoulement moyen

La figure 5.10 montre que dans toutes les expériences (à part l'expérience 18), un écoulement moyen est généré. Comme évoqué en §5.1.1, Thorpe ([Tho87]) prédit des courants de fréquence nulle *parallèles* à la paroi, dont on voit des traces dans les expériences 27 à 31 (Fig. 5.10) et plus précisément dans le coeur de la zone d'interaction. Ces courants sont cependant systématiquement dominés par un courant *horizontal*, ce qui se voit à la quasi-absence de vitesses verticales (non affichées) et conformément à ce qui a été dit en §1.1.1. De plus, ce courant est dirigé dans le sens de la pente montante, à l'instar des vitesses de phase des ondes à fréquence fondamentale. L'amplitude de ce courant est enfin très forte, comparable à l'amplitude des vitesses de la composante fondamentale. Comme nous le verrons en §5.6.2, la visualisation proposée en figure 5.10 est quelque peu trompeuse. En effet, elle représente la moyenne du champ sur les 8 dernières périodes sur lesquelles les expériences ont été menées. Or, ce courant augmente constamment en intensité pendant la durée des expériences, comme on le verra en §5.6.2.

La cuve expérimentale étant un espace fermé, la conservation du débit impose un courant de retour en sens opposé. Bien qu'aucune visualisation tri-dimensionnelle à l'échelle de la cuve ne soit disponible, il est raisonnable de penser que ce courant horizontal correspond au coeur d'un dipôle centré autour de la zone d'interaction, comme schématisé en figure 5.11.

Les conséquences de l'apparition d'un tel dipôle sont particulièrement importantes pour cette série d'expériences. Il est à noter que dans sa thèse, Louis Gostiaux [Gos06, §9.2, Fig. 9.8] observait une courbure des plans d'ondes *dans le plan horizontal*, qui pourrait être due à ce dipôle.

Ces observations suggèrent que l'hypothèse 2D est à remettre en cause. Le générateur est suffisamment large pour penser qu'autour de la nappe laser, l'écoulement ne varie pas transversalement, mais quelle est l'extension de cette zone ? De plus, cette zone est de toute manière très probablement influencée par ce phénomène 3D.

Cet écoulement peut expliquer la courbure des rayons d'ondes internes par effet Doppler. En effet, la fréquence intrinsèque  $\hat{\omega}$  des ondes (c. à. d. dans le référentiel de l'écoulement de vitesse  $\mathbf{U}$ ) est définie par rapport à leur fréquence absolue (dans notre cas, les fréquences de forçage  $\omega$  et les fréquences multiples) et leur vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  par la formule (cf. [Lig78]) :

$$\hat{\omega} = \omega - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}. \quad (5.10)$$

Dans notre cas, la fréquence absolue  $\omega$  étant conservée et  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}$  étant positif, la fréquence intrinsèque des ondes se propageant vers la droite, ce qui est

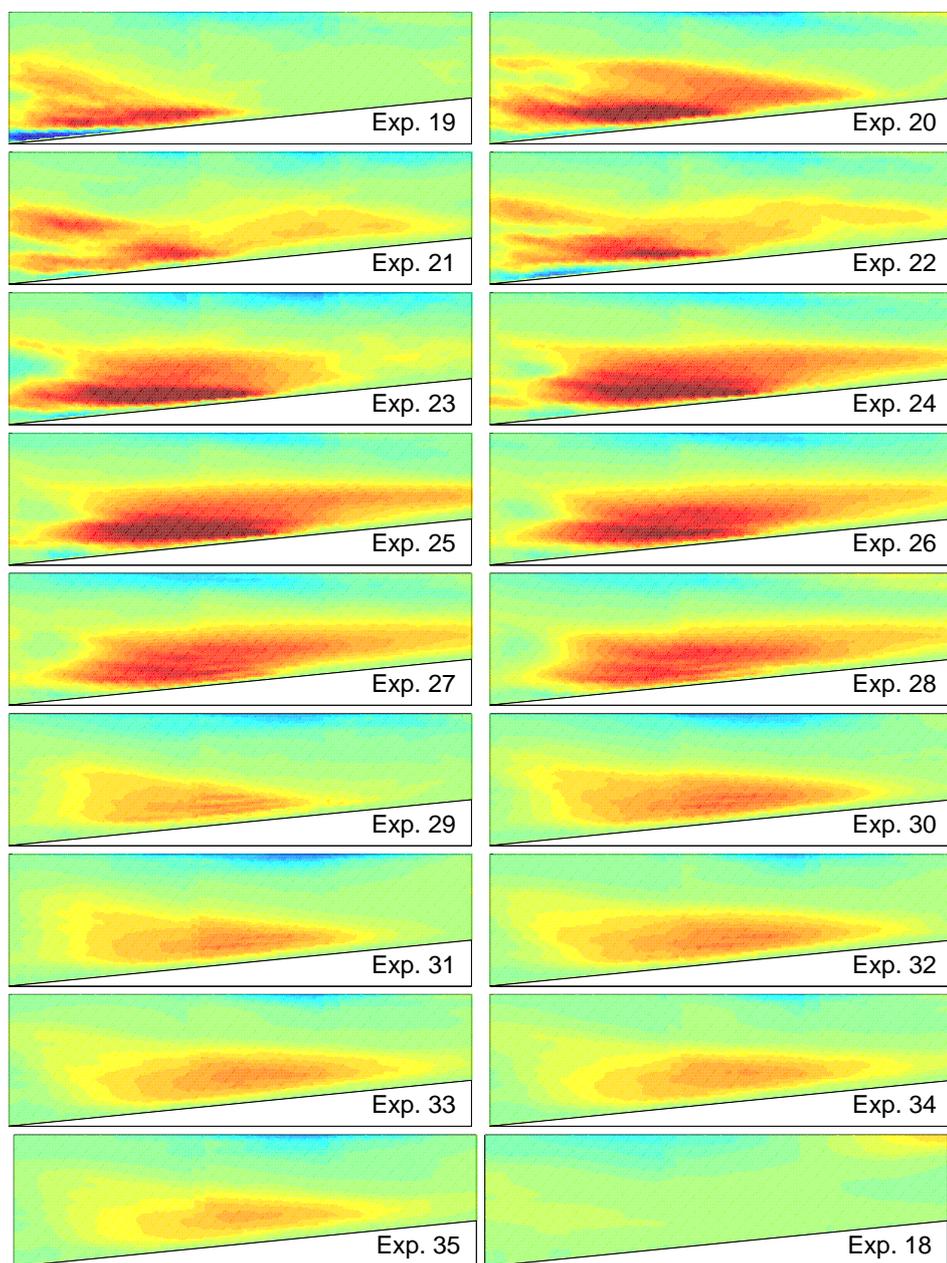


FIGURE 5.10 – Même légende que pour la figure 5.7 pour la fréquence nulle. Comme pour cette dernière figure, la palette de couleur va de  $-3$  à  $+3$   $\text{mm.s}^{-1}$ .

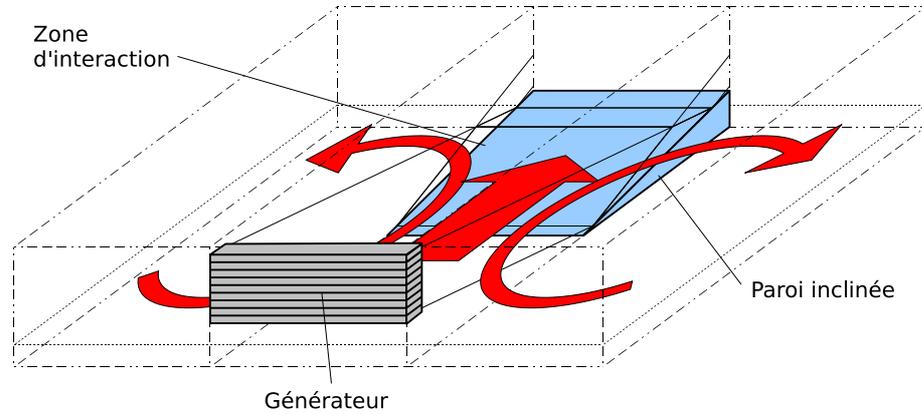


FIGURE 5.11 – Dipôle hypothétiquement présent dans la cuve, qui expliquerait que l'écoulement moyen observé dans les expériences soit dirigé uniquement dans le sens montant de la paroi. Les flèches rouges sont dans le plan horizontal.

systématiquement le cas ici, est inférieure à leur fréquence absolue. Ainsi, les caractéristiques des ondes sont plus horizontales dans les zones où ce courant horizontal est présent qu'en-dehors, ce qui pourrait expliquer la courbure des caractéristiques des ondes s'échappant de la zone d'interaction. Nous reviendrons plus en détail sur ce phénomène en §5.6.1.

L'écoulement est localisé à l'endroit où les ondes sont présentes, est particulièrement fort dans la zone d'interaction et ne vient donc pas du générateur. Pour les autres expériences (20 à 28), la présence de forts harmoniques localisés en-dehors du faisceau incident pourrait être responsable d'une répartition plus diffuse de l'écoulement moyen. Cette répartition pose le problème de la génération de l'écoulement moyen. A ce jour, la piste la plus prometteuse est de lier ce courant à la règle de la "pseudo-quantité de mouvement", qui dit que la dissipation des ondes est ressentie par le fluide comme une force effective, dont l'expression est l'opposée du taux de dissipation de la pseudo-quantité de mouvement horizontale  $\mathbf{p}_h (= \mathbf{k}_h e_m / \hat{\omega})$ , avec  $\mathbf{k}_h$  le vecteur d'onde horizontal et  $e_m$  la densité d'énergie des ondes), soit  $\mathbf{F} = -d\mathbf{p}_h/dt$ . On montre que l'écoulement moyen résultant de cette force est dans la direction de  $\mathbf{p}_h$  et donc de  $\mathbf{k}_h$  (cf. p. ex. [Bue09, Bue10]). Ce dernier fait expliquerait pourquoi selon l'horizontale, l'écoulement moyen est dans la même direction que les vitesses de phase des ondes.

On comprend maintenant pourquoi les résonances ne sont pas observées aux endroits de l'espace des paramètres où on les attendait : avec un tel courant qui modifie les fréquences intrinsèques et les angles des caractéristiques, il est difficile de dire qu'une expérience se situe bien à un endroit donné de l'espace des paramètres sur la figure 5.3.

Nous avons ainsi dégagé deux phénomènes inattendus : le fait que l'émis-

sion de l'onde réfléchie à la fréquence fondamentale ne se fasse parfois qu'à partir des bords de la zone d'interaction et la génération d'un fort courant de fréquence nulle. Pour essayer d'aller plus loin dans la description de ces phénomènes, nous allons nous concentrer sur deux expériences que nous allons comparer à des simulations numériques : l'expérience 19, qui présente un exemple d'émission sur les bords de la zone d'interaction particulièrement frappant et l'expérience 24, qui présente à la fois une forte émission d'onde à fréquence  $3\omega$  et une courbure des ondes à fréquence  $2\omega$  marquée.

## 5.4 Structure spatiale de l'onde réfléchie

### 5.4.1 Simulation numérique

Pour voir quelle importance peuvent avoir les effets 3D dans la structure spatiale de l'onde réfléchie, une simulation numérique 2D est effectuée, dans le but de reproduire l'expérience 19. La simulation débute avec le fluide au repos et est effectuée sur 20 périodes de forçage (environ 10 périodes de forçages sont nécessaire pour atteindre un régime établi à partir du repos).

Ses résolutions horizontale et verticale sont toutes les deux de 2 mm, la viscosité est fixée à  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , la diffusivité thermique à  $1,43 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et aucune autre paramétrisation de la dissipation n'est employée. La fréquence de forçage est arrondie à 30,25 s et le pas de temps est fixé à  $dt = 60,5 \text{ ms}$ , soit 500 pas de temps par période de forçage.

L'amplitude en vitesse du forçage est fixée à  $2,4 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  pour la norme de la vitesse, basée sur la valeur mesurée pour l'expérience 19. Comme pour cette expérience, le forçage est appliqué sur quatre longueurs d'ondes verticales de 12,6 cm et est centré autour de 32 cm au-dessus de la base de la paroi, elle-même située à l'origine horizontale du domaine.

La profondeur du domaine est encore une fois de 80 cm. La stratification affichée en figure 5.6 est interpolée sur la grille numérique et définie comme étant le profil initial de stratification. La longueur totale du domaine est fixée à 3 m, dont les 60 derniers centimètres sont occupés par une couche-éponge établie suivant les principes énoncés en §3.1.4. Une condition de glissement sans frottement est appliquée à la paroi inclinée.

### 5.4.2 Onde réfléchie

Le champ expérimental à la fréquence fondamentale est filtré au sens de Hilbert. En figure 5.12(a), on voit clairement que les ondes réfléchies (ascendantes) se concentrent sur deux rayons partant des bords de la zone d'interaction.

Les champs issus de la simulation numérique sont filtrés à la fréquence fondamentale sur les 8 dernières périodes de forçage. Le champ  $\sqrt{|u|^2 + |w|^2}$  de la composante ascendante est affiché en figure 5.12(b), en regard de son

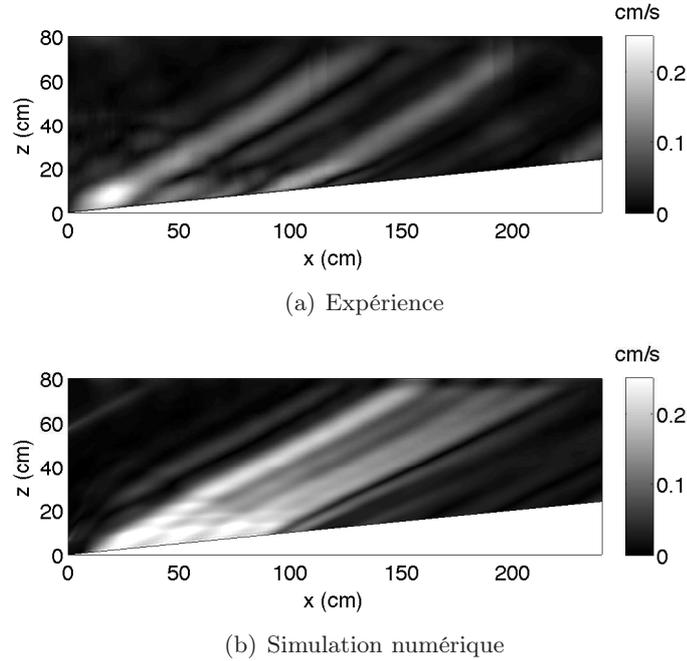


FIGURE 5.12 – Champs  $\sqrt{|u|^2 + |v|^2}$  expérimentaux (a) et numériques (b), filtrés à la fréquence fondamentale en ne retenant que la composante ascendante.

équivalent expérimental (Fig. 5.12(a)). On voit qu’un “trou” au centre de la composante réfléchie existe aussi dans le cas numérique mais qu’il est beaucoup moins marqué. Le phénomène n’est donc probablement pas un phénomène tri-dimensionnel mais il est probable que des effets tri-dimensionnels l’influencent (ceci en partant du postulat que la différence principale entre une expérience et une simulation numérique réside dans le fait que cette dernière soit purement tri-dimensionnelle).

Une explication possible de l’existence de ce “trou” pourrait être que dans le coeur de la zone de recouvrement des ondes incidentes et réfléchies, les interactions non-linéaires transfèrent de l’énergie vers d’autres fréquences, y compris la fréquence nulle. Ces interactions sont moins fortes sur les bords de cette zone, impliquant que moins d’énergie y est extraite du champ d’ondes à fréquence fondamentale.

## 5.5 Étude des flux d’énergie

Nous allons maintenant nous focaliser sur l’expérience 24, une des raisons étant qu’elle présente une forte émission d’onde libre à fréquence  $3\omega$ , ce qui rend l’étude des flux d’énergie dus aux ondes plus intéressante que pour les autres expériences.

Une simulation est à nouveau réalisée, les seuls paramètres qui changent par rapport à la simulation décrite en §5.4.1 sont la période de forçage (42,14 s, en conservant 500 itérations par périodes), l'amplitude de forçage en vitesse (2,2 mm.s<sup>-1</sup>) et la longueur d'onde verticale (12,83 cm).

### 5.5.1 Allure des harmoniques et de l'écoulement moyen

Nous allons dans ce paragraphe comparer qualitativement les résultats de l'expérience avec la simulation numérique, en supposant encore une fois que les différences constatées seront principalement dues à la différence entre bi- et tri-dimensionnalité. Cette section permettra surtout de fournir des visualisations des champs avant de passer à des considérations plus quantitatives.

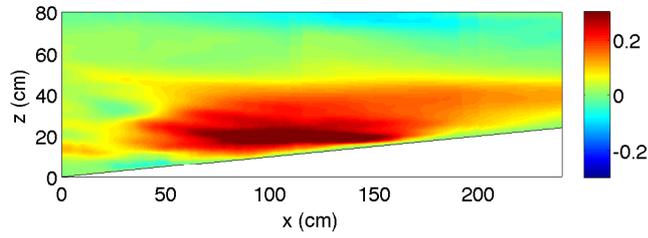
#### Écoulement moyen

En figure 5.13, on peut voir une comparaison entre le courant à fréquence nulle expérimental et numérique. Pour la simulation numérique, on retrouve la prédiction de Thorpe : des courants alternés, parallèles à la paroi et forcés par les interactions non-linéaires. Dans ce cas, les conditions aux limites latérales périodiques (avec un seul point dans cette direction) empêchent le dipôle illustré en figure 5.11 de se former. On ne peut qu'être frappé par la différence d'avec l'expérience et du courant horizontal qui s'y établit (Fig. 5.13(a)).

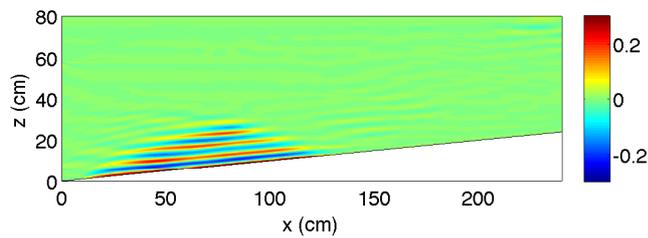
#### Ondes à fréquence $2\omega$

Les composantes ascendantes et descendantes pour les expériences comme pour les simulations sont affichées en figure 5.14. Les expériences et les simulations numériques présentent certaines similitudes, avec une amplitude de vitesse quatre fois plus faible que l'amplitude dans le faisceau incident et une réflexion interne (*cf.* §1.3.3 et Fig. 1.15) dans la zone d'interaction, comme on peut le voir à la présence d'une composante descendante entre les abscisses 50 et 150 cm et entre les ordonnées 10 et 40 cm, ceci de manière plus forte dans l'expérience. Cela semble indiquer qu'une approximation WKB n'est pas valide, ou encore que les échelles spatiales du milieu évoluent sur des distances comparables aux longueurs d'ondes (la variabilité temporelle du milieu étant plus faible que la période des ondes).

L'échelle spatiale en question est à la fois l'échelle de l'écoulement moyen présent uniquement dans l'expérience et l'échelle de la fréquence de Brunt-Väisälä, qui présente une légère discontinuité de sa dérivée entre les altitudes  $z = 20$  cm et  $z = 30$  cm (*cf.* Fig. 5.6) dans l'expérience comme dans la simulation. Cette discontinuité peut expliquer pourquoi une réflexion interne se produit dans tous les cas alors que l'écoulement moyen, présent uniquement dans l'expérience, peut expliquer pourquoi cette réflexion interne y est plus forte.

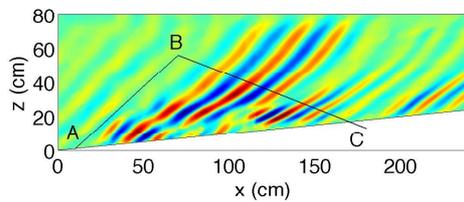


(a) Expérience

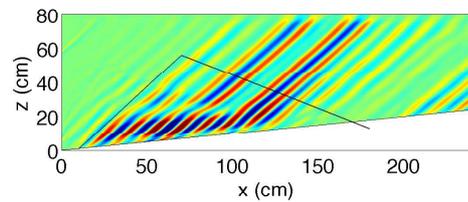


(b) Simulation numérique

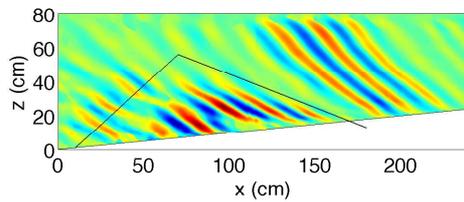
FIGURE 5.13 – Champs relatifs à l'expérience 24 (en  $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ) expérimentaux (a) et numériques (b), moyennés sur huit périodes. On rappelle que dans le cas expérimental, ces vitesses sont strictement horizontales alors que dans la simulation, ces vitesses sont parallèles à la paroi.



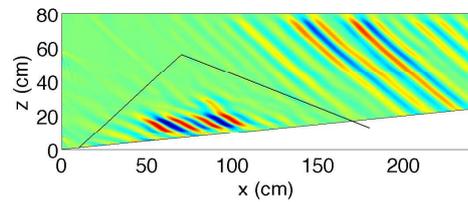
(a) Expérience, composante ↗



(b) Simulation numérique, composante ↗



(c) Expérience, composante ↘



(d) Simulation numérique, composante ↘

FIGURE 5.14 – Ondes forcées à la fréquence  $2\omega$  pour l'expérience 24 (a et c) et pour la simulation numérique correspondante (b et d). Les composantes ascendantes (a et b) sont séparées des composantes descendantes (c et d). Les échelles de couleur vont de  $-0,8$  à  $+0,8 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ . La boîte ABC décrite en §5.5 est tracée.

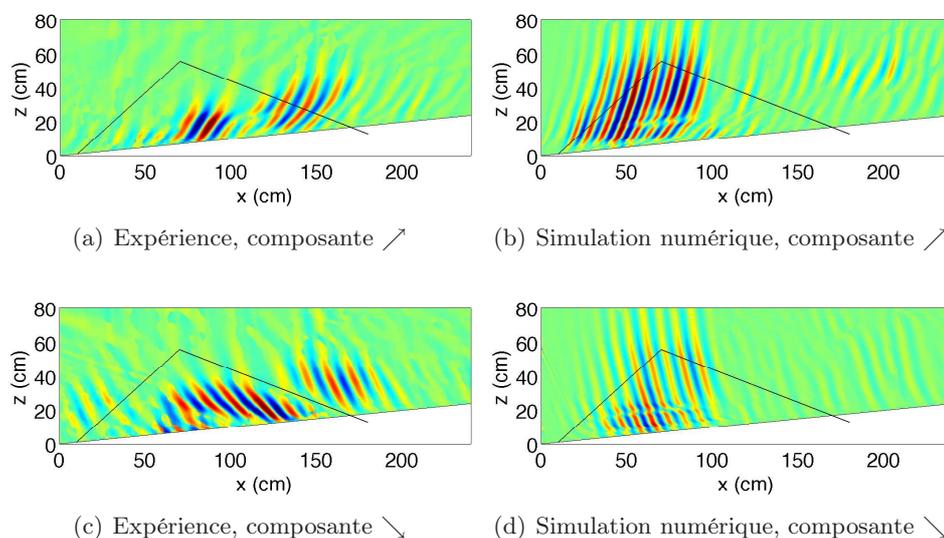


FIGURE 5.15 – Même légende que pour la figure 5.14 pour les ondes à fréquence  $3\omega$ .

### Ondes à fréquence $3\omega$

De la même manière que précédemment, les champs qui nous intéressent ici sont affichés en figure 5.15. Il est cette fois difficile de trouver des similitudes entre l'expérience et la simulation. La différence la plus frappante réside probablement dans la structure spatiale des ondes. Alors que dans l'expérience, les ondes émises semblent subir une réflexion interne dans la zone d'interaction avant de pouvoir s'en échapper, les ondes générées numériquement s'échappent de la zone d'interaction sans avoir subi de réflexion interne apparente.

Dans les deux cas, les ondes se réfléchissent dans le tiers supérieur du domaine. Elles sont alors très proches de l'évanescence, rendant l'angle de leurs caractéristiques très sensible aux variations de  $N$ . Or, on peut voir en figure 5.6 que  $N$  diminue légèrement avec l'altitude, d'où une possible explication pour la courbure observée des caractéristiques. Cette courbure a peu à voir avec la courbure évoquée en §5.3.2 et qui serait due à l'effet Doppler. Dans ce cas précis, les deux doivent être considérées, comme nous le verrons en §5.6.1.

#### 5.5.2 Calcul des flux

Après ces quelques considérations qualitatives, nous allons ici établir le bilan d'énergie dans une "boîte" (2D) incluant la zone d'interaction, afin de voir quelle proportion du flux d'énergie part dans des mouvements autres que des ondes à fréquences  $\omega$ ,  $2\omega$  et  $3\omega$ . Sur le plan technique, ce calcul est re-

lativement compliqué, ce pourquoi nous allons d'abord détailler le protocole employé.

### Protocole

On calcule tout d'abord le vecteur de flux d'énergie dans le domaine à l'aide de la formule suivante (cf. Eq. (1.37)) :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\rho_0 N^2}{2\omega k^2} \begin{pmatrix} k_x \tilde{u}^2 \\ -k_z \tilde{w}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

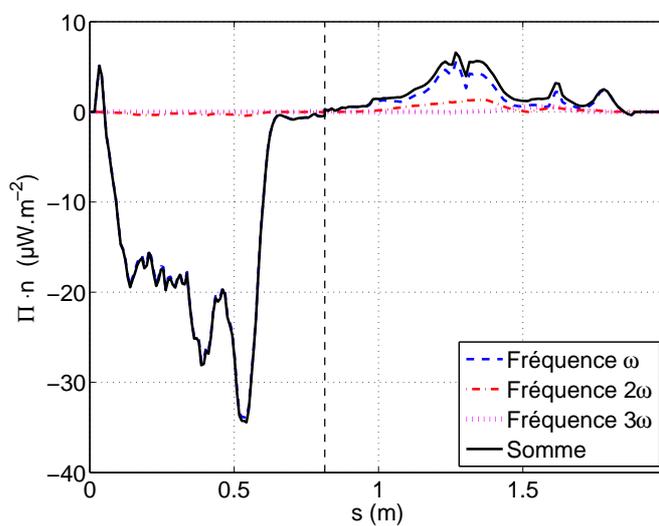
où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{w}$  sont les amplitudes des vitesses horizontale et verticale, respectivement. Comme nous l'avons vu précédemment,  $k_z$  comme  $k_x$  sont modifiés lors de la propagation.  $\mathbf{k}$  est donc mesuré à partir de  $\phi$  sur le principe de la formule  $\mathbf{k} = \nabla\phi$ , où  $\phi$  est la phase de l'onde que nous prenons égale à l'argument complexe de la composante de la vitesse horizontale filtrée à une fréquence absolue donnée, ascendante ou descendante. Si on ne sépare pas ces deux dernières composantes, leurs intersections induisent des sauts de phase qui rendent le calcul de  $\mathbf{k}$  très difficile. De plus, la fonction Matlab `unwrap` est employée.

On définit ensuite une boîte  $ABC$  dont les coordonnées (en cm) des trois coins sont  $A(10;1)$ ,  $B(70;56)$  et  $C(180;13)$  (cf. Fig. 5.14(a)). On interpole ensuite  $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}$  sur cette boîte, où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante de la boîte (impliquant qu'un flux entrant est négatif). Pour cela, les faces  $AB$  et  $BC$  de la boîte sont discrétisées en 100 points chacune et nous appelons  $s$  la coordonnée le long de ces deux faces et  $ds$  le pas de discrétisation.

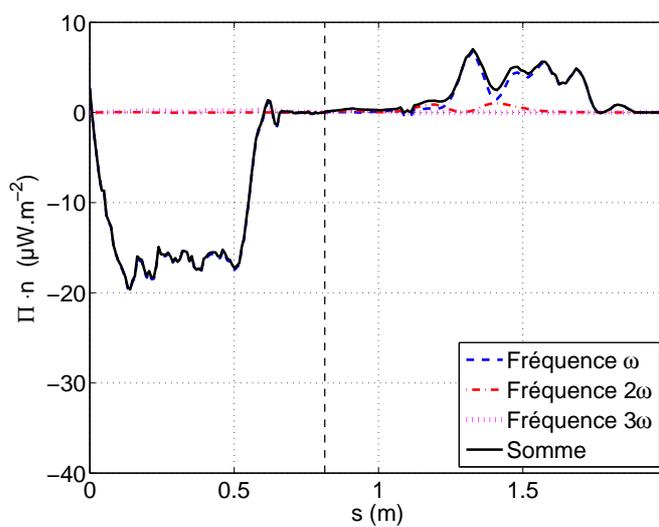
Un filtrage passe-bas est appliqué pour l'onde fondamentale : lorsque  $d^2(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})/ds^2 > 10 \text{ mW.m}^{-4}$ , alors les valeurs de  $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}$  sont considérées comme dominées par le bruit et sont remplacées par des valeurs interpolées à partir des intervalles où  $d^2(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})/ds^2 \leq 10 \text{ mW.m}^{-4}$ . En pratique, cela a pour unique effet de supprimer des valeurs non-physiques de  $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}$  dans des intervalles où l'onde est d'amplitude très faible.

### Mesures

En figure 5.16, on peut voir les flux tracés. Sont séparés les flux des ondes à fréquence  $\omega$ ,  $2\omega$  et  $3\omega$  et leur somme. On peut constater que le flux dû à l'onde à fréquence fondamentale est largement dominant, bien plus que les amplitudes respectives de chaque onde ne le laissent penser. En effet, un ordre de grandeur de  $\|\mathbf{\Pi}\|$  est  $\rho_0 \langle N \rangle^2 U^2 / (\omega k)$ , où  $U$  est l'ordre de grandeur de l'amplitude de la vitesse. Il se trouve qu'entre les ondes des trois fréquences, la norme du vecteur d'onde change peu (légèrement inférieure à  $1 \text{ rad.m}^{-1}$ ). La fréquence, elle, change et l'amplitude est quatre fois plus grande pour l'onde forçante que pour les deux autres ondes. Ainsi, le flux associé à l'onde



(a) Expérience



(b) Simulation numérique

FIGURE 5.16 – Tracés de  $\Pi \cdot \mathbf{n}$ , le flux d'énergie au travers de la boîte. La ligne verticale pointillée matérialise la position du point B. Les tirets bleus représentent le flux dû aux ondes de fréquence fondamentale, la ligne mixte rouge celui dû aux ondes de fréquence  $2\omega$ , la ligne pointillée magenta celui dû aux ondes de fréquence  $3\omega$  et la ligne noire continue la somme des trois précédents flux.

fondamentale est 32 fois supérieur au flux associé à l'onde de fréquence  $2\omega$  et 48 fois supérieur aux flux associé à l'onde de fréquence  $3\omega$ .

Afin de savoir combien d'énergie est dissipée, convertie en écoulement moyen ou s'échappe latéralement, on peut mesurer les flux sortant et entrant. Le flux total se définit comme :

$$\int_{ABC} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad (5.12)$$

en ne retenant que les valeurs  $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} < 0$  pour le flux entrant et les valeurs  $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} > 0$  pour le flux sortant. Pour l'expérience, environ  $11,4 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$  entrent dans la boîte et  $2,4 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$  en sortent, ce qui veut dire qu'environ 80% du flux entrant dans la boîte ne ressort pas, autant de puissance disponible pour la dissipation et pour l'accélération de l'écoulement moyen.

Pour la simulation numérique, environ  $8,5 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$  entrent dans la boîte et  $2,5 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$  en sortent. Au final, environ 70% du flux entrant est donc absorbé à l'intérieur de la boîte et doit donc être finalement dissipé, les effets 3D et l'écoulement moyen présent dans l'expérience ne pouvant jouer aucun rôle ici. En supposant que la seule différence d'avec l'expérience réside dans ces effets et que la dissipation est la même dans les deux cas, alors les effets 3D absorberaient 10% du flux entrant. Cela semble peu probable et on doit plutôt s'attendre à ce que dissipation et courant horizontal se répartissent différemment dans chaque cas. De plus, par nature des effets 3D, ce qui est vrai au centre de la zone de forçage ne l'est pas forcément lorsqu'on s'en éloigne et le bilan sur le volume complet doit être différent.

Ces mesures ont donc permis de donner une estimation sommaire de l'énergie absorbée par les effets 3D, au premier rang desquels nous pensons à ce dipôle schématisé en figure 5.11. Nous allons maintenant nous y intéresser de plus près.

## 5.6 Étude de l'écoulement moyen

Nous allons encore une fois nous concentrer sur l'expérience 24. En effet, cette expérience présente des courbures particulièrement visibles des caractéristiques des ondes à fréquences  $2\omega$  et  $3\omega$ , ce qui en fait une expérience intéressante pour étudier l'écoulement moyen et vérifier que l'effet Doppler peut être considéré comme un candidat crédible à l'explication du phénomène.

### 5.6.1 Effet Doppler et courbure des rayons

On décide d'étudier deux types de caractéristiques. Le premier type, que nous allons appeler "caractéristique absolue", a pour équation  $x - x_i = z \cot(\arcsin(\omega/N))$ , où  $x_i$  est le point de départ de chaque caractéristique. Il s'agit de caractéristiques que l'on trouverait si leur angle avec la verticale

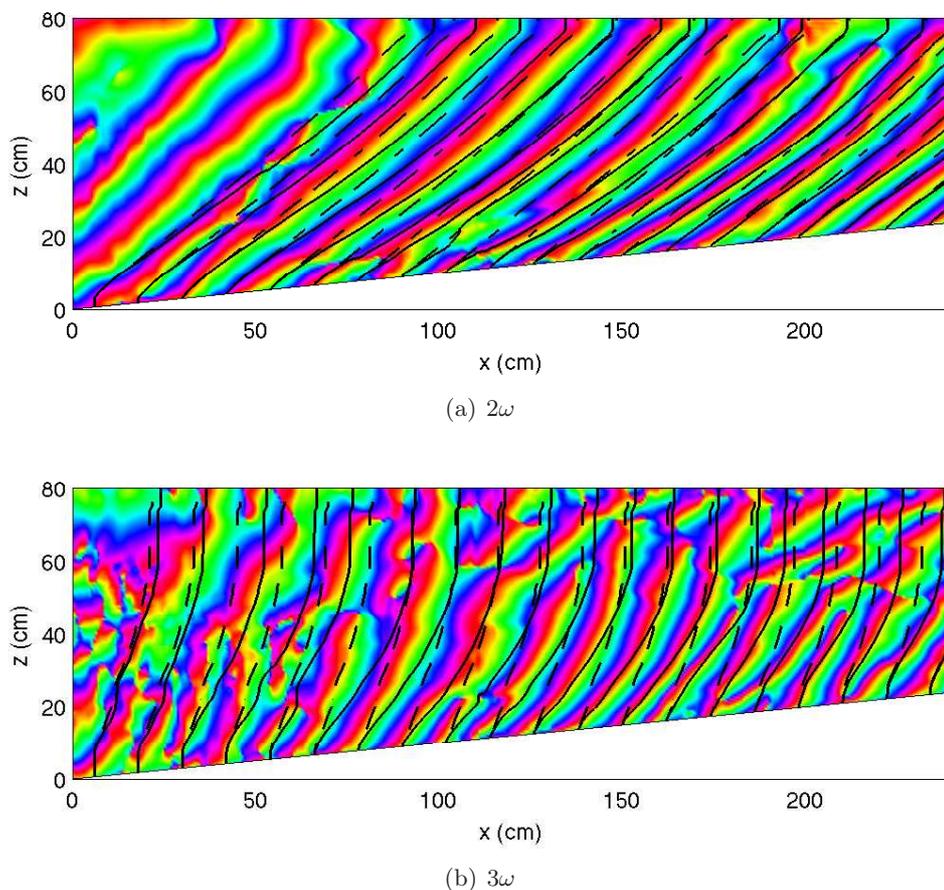


FIGURE 5.17 – Sur chaque figure, des caractéristiques absolues (tirets noirs) et intrinsèques (lignes noires) sont tracées, superposées à la phase de la composante ascendante de la vitesse horizontale de l'onde filtrée harmoniquement aux fréquences absolues  $2\omega$  (a) et  $3\omega$  (b). Le codage de couleur est cyclique de période  $2\pi$ .

dépendait uniquement de  $\omega$  et  $N$ . Le second type, que nous allons appeler “caractéristique intrinsèque”, a pour équation  $x - x_i = z \cot(\arcsin(\hat{\omega}/N))$  et prend donc en compte la modification de la fréquence par l'écoulement moyen dont il est question en §5.3.3 et par le vecteur d'onde (*cf.* Eq. (5.10)). Le tracé des caractéristiques intrinsèques telles qu'il est fait ici repose sur une approximation de type WKB qui ne s'applique que modérément, comme nous l'avons constaté précédemment.

Un ensemble de caractéristiques de chaque type est tracé en figure 5.17, superposées avec  $\phi$ , pour les composantes ascendantes des ondes de fréquences absolues  $2\omega$  et  $3\omega$ . On voit que dans les deux cas, les caractéristiques intrinsèques ont des courbures positives bien plus marquées que les caractéristiques absolues.

Ces dernières sont assez proches de lignes droites pour les ondes à fréquence  $2\omega$ , preuve que la stratification seule ne peut expliquer la courbure. Les caractéristiques absolues des ondes à fréquence  $3\omega$  quant à elles sont déjà incurvées du fait de la variation de  $N$ , comme mentionné en §5.5.1, mais dans une mesure insuffisante pour expliquer les observations.

Les caractéristiques intrinsèques suivent relativement bien les isophases dans les 20 cm au-dessus de la paroi, là où l'écoulement moyen est fort. Ainsi, dans cette région, l'effet Doppler semble bien expliquer l'angle des rayons. Mais entre environ 40 et 80 cm d'altitude, les caractéristiques intrinsèques "décrochent" des isophases, qui sont plus verticales que ce qui est prédit par le modèle incluant l'effet Doppler. Il est à noter que dans les 20 cm en-dessous de la surface, fréquences absolue et intrinsèque sont proches et les deux types de caractéristiques sont parallèles. Dans le haut du domaine, les caractéristiques absolues ne font donc pas un meilleur travail pour capturer les angles des isophases. Pour les ondes de fréquence absolue  $3\omega$ , ce décrochage ne se produit pas car la configuration est plus simple, les ondes étant évanescentes dans le tiers supérieur de domaine. Pour les deux fréquences cependant, il est clair qu'inclure l'effet Doppler pour expliquer les angles des isophases produit un bien meilleur résultat que de ne pas l'inclure.

### 5.6.2 Évolution temporelle

Tous ces résultats doivent être relativisés par le fait que l'écoulement moyen semble en constante augmentation au cours de l'expérience.

L'écoulement moyen observé dans les expériences a une échelle caractéristique verticale de l'ordre de 10 cm et les vitesses associées sont de l'ordre du  $\text{mm.s}^{-1}$  au  $\text{cm.s}^{-1}$ , ce qui donne un nombre de Reynolds associé au dipôle de  $10^2$  à  $10^3$ . Ces valeurs sont suffisamment élevées pour estimer que la viscosité a peu prise sur cet écoulement mais suffisamment basses pour penser qu'il n'est pas non plus turbulent. Ainsi, l'écoulement est très peu freiné pendant le déroulement de l'expérience et on peut penser que si le champ d'ondes applique effectivement une accélération en continu sur ce dipôle, il est en croissance permanente pendant cette durée.

Pour vérifier cette hypothèse, un filtrage harmonique glissant est effectué sur l'expérience 19 : le champ est moyenné sur 4 périodes en quatre fois : sur les périodes 5 à 8, 9 à 12, 13 à 16 et 17 à 20, la période 1 correspondant à la première période écoulée après que le générateur ait été mis en marche. Il a été vérifié par le même procédé qu'en ce qui concerne les ondes à fréquence fondamentale, peu de différences sont observées entre le champ filtré sur les périodes 9 à 12, le champ filtré sur les périodes 13 à 16 et le champ filtré sur les périodes 17 à 20, impliquant que la dynamique a atteint pour cette composante un régime relativement permanent dans cette zone.

On voit qu'entre chaque champ filtré sur des créneaux de quatre périodes successives, le courant horizontal augmente systématiquement. Qu'il y ait

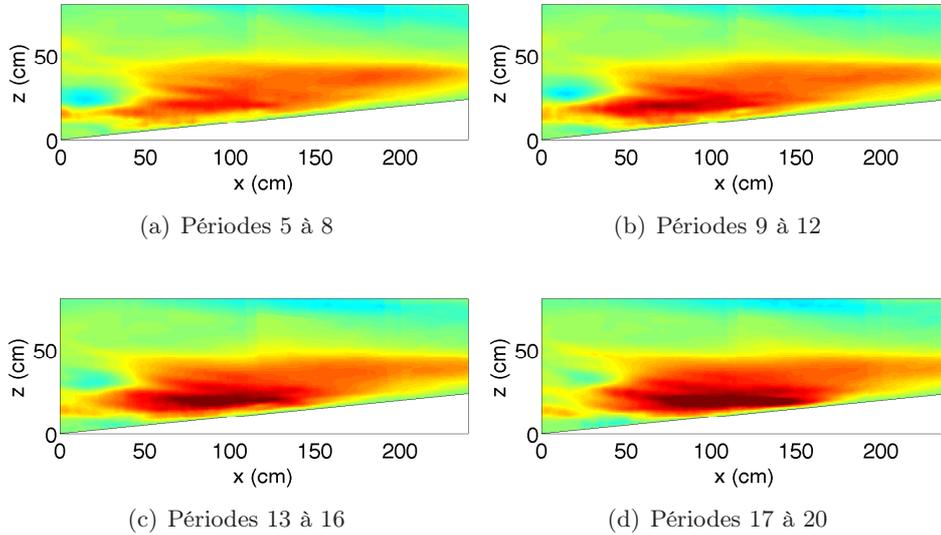


FIGURE 5.18 – Champs  $u$  (la palette de couleur allant de  $-3$  à  $+3$   $\text{mm.s}^{-1}$ ) issus de l'expérience 24, moyennés sur les quatre périodes indiquées sous chaque figure (la période 1 correspondant à la première période écoulée après que le générateur ait été mis en marche).

une différence entre le premier (Fig. 5.18(a)) et le second créneau de filtrage (Fig. 5.18(b)) peut se comprendre par le fait que l'onde à fréquence fondamentale évolue elle-même entre ces deux créneaux de filtrage. Mais lorsque la composante fondamentale a atteint un régime quasi-permanent, ce champ continue d'augmenter en intensité, conformément à notre prédiction.

Ainsi, les champs présentés en figures 5.10 et 5.13(a), dans une moindre mesure les figures 5.18(a) à 5.18(d), représentant les moyennes d'un phénomène en constante évolution, doivent être relativisés quant à leur signification quantitative. De plus, si l'expérience avait été poursuivie pendant une plus longue durée, on aurait pu se poser la question des conséquences que cela aurait eu sur le champ d'ondes et sur le mélange dans la cuve.

## 5.7 Conclusion et perspectives

Des expériences de réflexions d'ondes internes planes sur une paroi de pente 10% ont été réalisées. Le but de ces expériences était d'étudier les interactions non-linéaires entre ondes incidentes, réfléchies et les différents harmoniques générées par les interactions. Il s'agissait en premier lieu de voir si les prédictions de Thorpe ([Tho87]) pour localiser ces résonances dans l'espace des paramètres étaient vérifiées.

Un survol des différentes expériences n'a pas permis de localiser ces ré-

sonances telles que prévues par Thorpe. Plus particulièrement, trois phénomènes imprévus ont été observés. Premièrement, la structure spatiale de l'onde réfléchie n'est plus en onde plane mais plutôt lacunaire, présentant deux zones de plus forte émission à partir des deux extrémités de la zone d'interaction entre les différentes ondes. Deuxièmement, les caractéristiques des ondes sont courbées d'une manière telle que les variations de  $N$  ne peuvent l'expliquer. Troisièmement, un courant horizontal dont le coeur se situe dans la zone d'interaction et dirigé vers la pente ascendante est généré, probablement la manifestation d'un dipôle s'établissant à l'échelle de la cuve. Les vitesses induites par ce courant sont fortes, de l'ordre des vitesses induites par l'onde forçante.

Pour tenter d'éclairer ces phénomènes, deux expériences ont fait l'objet d'une attention plus particulière, notamment par le biais de comparaisons avec des simulations numériques 2D.

La première expérience, numérotée 19, a été choisie car l'onde réfléchie observée présente une structure lacunaire très marquée. Ce phénomène se retrouve dans la simulation mais de manière beaucoup moins forte. Ainsi, on peut penser que le phénomène n'est pas complètement 3D mais qu'il en est fortement influencé. Une interprétation possible est que les interactions entre ondes se produisent dans le volume de la zone d'interaction et sont moins fortes sur ses bords, d'où une atténuation moins forte des ondes réfléchies en ces endroits.

La seconde expérience, numérotée 24, a elle été choisie en partie car elle présente une relativement forte amplitude de vitesse pour l'onde à fréquence  $3\omega$ . Un bilan de flux d'énergie dû aux ondes de fréquences fondamentales,  $2\omega$  et  $3\omega$  pour un espace fermé englobant la zone d'interaction est établi. Il permet de dire que la majorité du flux d'énergie entrant (80% pour l'expérience, 70% pour la simulation) est absorbé au sein de cet espace. La simulation numérique, purement 2D, ne peut absorber cette puissance que par dissipation alors que dans l'expérience, une autre partie de la puissance peut être absorbée par le dipôle.

Ce dipôle se manifeste par une vitesse horizontale relativement forte, qui peut induire un effet Doppler pour les ondes. Vitesses de phase horizontales et vitesse du fluide induite par le dipôle vont dans le même sens, cet effet Doppler diminue la fréquence intrinsèque des ondes et donc l'angle que font les caractéristiques avec l'horizontale. En partant d'une hypothèse de type WKB (qui est une approximation forte dans notre cas), des caractéristiques des ondes sont tracées telles qu'elles le seraient si uniquement la stratification jouait sur leur angle et d'autres caractéristiques sont tracées telles qu'elles le seraient si l'effet Doppler jouait aussi un rôle. Enfin, toutes ces caractéristiques sont comparées aux isophases des ondes de fréquence  $2\omega$  et  $3\omega$ , qui correspondent aux caractéristiques observées des ondes. Il apparaît clairement qu'inclure l'effet Doppler permet de capturer plus exactement la courbure observée des caractéristiques. Il a aussi été mis en évidence qu'au

cours de l'expérience et même lorsque les ondes semblent avoir atteint un régime permanent, le dipôle croît en intensité. Ainsi, l'action sur le long terme de ce dipôle reste à étudier.

Ce phénomène ne doit pas être confondu avec des intrusions de couches néphéloïdes ([MK02]). Ces dernières sont générées par le mélange contre une paroi et expulsées vers le large, alors que dans notre cas, le courant est dirigé vers la paroi. Il semble que l'observation faite dans ce chapitre soit rare car d'une part, les simulations numériques 3D sont extrêmement coûteuses et à notre connaissance, aucune d'entre elles n'a cherché à limiter latéralement l'onde forçante et d'autre part, les méthodes de mesures expérimentales des ondes internes ont longtemps été limitées à des dérivés de méthodes de strioscopie, qui nécessitent un fluide confiné dans un volume étroit latéralement. Il semble donc que ce phénomène n'ait été anticipé qu'en théorie ([MN90, Bue10]). L'observation que nous avons réalisée s'est faite grâce à l'avancée technique relativement récente qu'est la PIV-CIV. De plus, sans la grande taille de la plate-forme tournante Coriolis, unique au monde, la qualité du signal fourni par le générateur d'ondes internes associé à la transformée de Hilbert, deux outils de conceptions très récentes, il aurait probablement été plus difficile de mettre en évidence un tel phénomène. Il est à noter qu'en plus de la thèse de Louis Gostiaux, lors de laquelle il avait été insuffisamment interprété, ce phénomène a été observé indépendamment de nous par Guilhem Bordes et Thierry Dauxois, de l'ENS Lyon.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Tout d'abord, si l'effet Doppler a permis de réduire de un le nombre de phénomènes surprenants, il reste toujours à comprendre (1) la raison de la structure spatiale de l'onde réfléchie et (2) quel est le mécanisme qui permet au dipôle 3D de puiser son énergie. Pour ce dernier point, une étude approfondie des théories d'interaction entre un écoulement moyen et une onde interne *via* des phénomènes dissipatifs semble très prometteuse.

Une deuxième série d'expériences a aussi été menée, en utilisant cette fois comme forçage un rayon d'ondes internes (*cf.* Fig. 5.19). Ce dispositif, plus réaliste du point de vue de l'océan, peut éclairer plusieurs points. Tout d'abord, à propos de l'émission d'ondes super-harmoniques, il peut aider à trancher entre les différents modèles, certains ([Tho87, JM09]) s'appuyant sur des ondes planes, d'autres ([TAL05], Swinney *et al.*) sur des rayons. Enfin, d'autres séries d'expériences ont été réalisées en fluide homogène tournant. Dans notre cas, savoir si l'écoulement moyen s'établit toujours et en quoi il est comparable à celui qui s'établit pour l'onde plane pourrait apporter plus d'éclaircissements. Les données existent, nous n'avons encore malheureusement pas eu le temps de les exploiter.

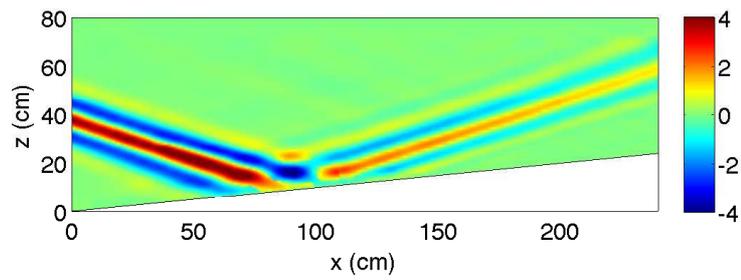


FIGURE 5.19 – Champ (en  $\text{mm.s}^{-1}$ ) pour une expérience forcée par un rayon d'ondes internes, filtrée à la fréquence fondamentale. Les paramètres principaux sont  $\omega = 0,136 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\langle N \rangle = 0,441 \text{ rad.s}^{-1}$ , soit un angle  $\theta = 18,0^\circ$ .

Troisième partie

Réflexion d'ondes internes  
contre une paroi fluide



Après avoir évoqué deux cas de réflexions contre des parois solides, nous allons aborder un cas particulier de réflexion contre une paroi fluide, à savoir une pycnocline. À la grande différence d'avec la partie précédente, de l'énergie peut être transmise au travers de cette paroi et/ou piégée à l'intérieur. Dans notre cas, la pycnocline sera située à une profondeur faible devant la longueur d'onde forçante, rendant possible la génération d'ondes solitaires.

Dans la vaste majorité des cas documentés, les ondes solitaires internes sont générées lorsque la marée s'écoule au-dessus d'une topographie de telle manière qu'une forte perturbation de la thermocline soit générée. C'est ce qu'on peut voir en figure 5.20 et qui est la raison de la répartition spatiale des ondes solitaires illustrée en figure 2.4. Le processus qui va être étudié dans cette partie, la génération d'ondes solitaires internes par un rayon d'ondes internes, représente donc un phénomène beaucoup moins documenté.

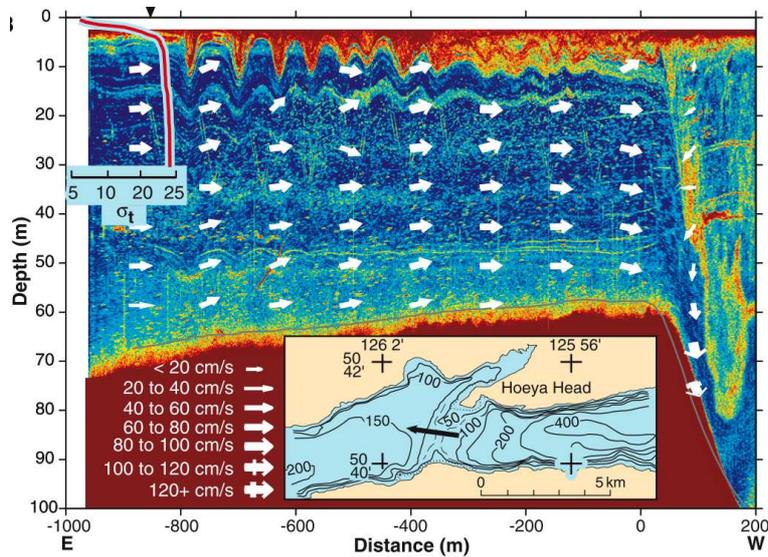


FIGURE 5.20 – Ondes solitaires générées dans la baie Knight (Colombie-Britannique, Canada) et observées par sonar. Les flèches blanches indiquent les courants, la ligne rouge le profil de densité. La flèche noire de la carte indique la trajectoire du navire. Tiré de [FA99, Fig. 1(B)].



## Chapter 6

# Generation of solitary waves by an internal wave beam

**Résumé** Des observations dans le Golfe de Gascogne, au large du Portugal, dans le Canal du Mozambique et au-dessus de la dorsale des Mascareignes ont montré l’existence de la génération d’ondes solitaires par un rayon de marée interne forçant des déplacements de la thermocline par le bas – un processus dit de “génération locale” (par opposition avec la génération d’ondes solitaires au-dessus d’une topographie). Nous présentons ici les premières simulations numériques directes d’un tel processus à l’aide d’un code numérique pleinement non-linéaire et non-hydrostatique, et ceci pour des expériences à l’échelle du mètre. Nous montrons que différents modes d’ondes solitaires peuvent être excités et nous fournissons des exemples d’ondes solitaires de modes 1, 2 et 3, piégées dans la pycnocline. Un critère pour comprendre la sélection d’un mode donné, portant sur les différentes vitesses de phase, est proposé. Afin d’expliquer la sélection d’un mode d’une manière plus intuitive, un autre critère, basé sur un argument géométrique, est proposé. Enfin, les résultats sont discutés et comparés avec la configuration du Golfe de Gascogne.

Cet article est la première révision de l’article :

N. GRISOUARD, C. STAQUET et T. GERKEMA : Generation of internal solitary waves in a pycnocline by an internal wave beam : a numerical study, soumis au *Journal of Fluid Mechanics*.

### 6.1 Introduction

Internal solitary waves (ISWs) in the oceans and shelf seas started to be observed in the 1960s; this coincided with mathematical developments on the Korteweg-de Vries equation and soliton theory. The KdV equation has since served as the primary theoretical tool for interpreting observations of ISWs in the ocean [OS89]. More recently, important developments have occurred

on two fronts. First, the advance in measurement techniques such as moored Acoustic Doppler Current Profilers, or airborne and satellite remote sensing, allowing more detailed but also more synoptic observations to be made. Second, the advance in theoretical and numerical modelling, allowing one to go beyond the weakly nonlinear KdV theory and to study ISWs of large amplitude. These developments, however, have not altered the view of the basic mechanism behind the generation of the majority of ISWs, which starts with (tidal) flow over topography generating internal waves, their subsequent evolution and steepening and finally splitting up into ISWs. In this view, propagation is horizontal, as in uni-modal internal or interfacial waves. For a review on the study of ISWs, see Helfrich & Melville [HM06].

An altogether different mechanism was proposed by New & Pingree [NP90] to explain observations of ISWs in the central Bay of Biscay. They argued that these ISWs are not directly related to topography (the continental slope), but are generated by an internal tidal beam hitting the seasonal thermocline from below. The beam itself originates from the shelf-break, with downward propagation of energy into the abyssal ocean, which turns into upward propagation when the beam reflects from the bottom. On its upward path, it finally encounters the seasonal thermocline, perturbs it locally and may, under the right circumstances, lead to ISWs in the thermocline. New and Pingree coined the term “local generation” of ISWs to refer to this process. Measurements of the beam location were consistent with ray paths computation based upon the local stratification and upon the bathymetry of the Bay of Biscay [PN91]. Further evidence of local generation of ISWs was presented by New & Pingree [NP92]. This set of three papers therefore convincingly proved the existence of a local generation mechanism of ISWs. Since the beginning of the 2000s, new remote sensing techniques – namely SAR<sup>1</sup> [Nd02, dNSS02] and ocean colour imaging [AdN06] – have confirmed the occurrence of this mechanism in spring and summer, when the seasonal thermocline is present. SAR imagery recently also showed the occurrence of local generation off south-west Portugal [dNA07] and in the Mozambique channel [dNM09]. This mechanism might also explain observations near the Mascarene ridge by Konyaev *et al.* [KSS95], which, interestingly, shows that the observed ISWs are partly mode-1 waves, *i.e.* the whole water column in the thermocline moves in phase, and partly mode-2 waves, in which case the structure of vertical displacements has a node in the middle of the thermocline, while positions above and below this point move in opposite directions. In the remainder of this paper, we shall rather use the term “pycnocline” in place of thermocline for more generality. Indeed a temperature jump results in a density jump, as does also a jump in salinity.

Few attempts have so far been made to explain quantitatively the underlying physical mechanism. This mechanism should follow certain rules,

---

1. Synthetic Aperture Radar

requiring specific conditions to be met, as suggested by the sparsity of the observations. We briefly discuss previous work that dealt with this problem.

The effect on a pycnocline of an incident plane internal gravity wave was studied experimentally and theoretically by Delisi & Orlanski [DO75] for the first time, the wave field achievable in their experiments being actually closer to a wave beam. In the theoretical model they developed, the vertical density profile consists of a density jump across an interface (the pycnocline), with a stably stratified layer of constant  $N$  above, and a non-stratified layer (*i.e.*  $N = 0$ ) below. Here  $N$  is the buoyancy or Brunt-Väisälä frequency, defined by  $N^2 = -(g/\rho_0)d\bar{\rho}/dz$ , where  $g$  is the gravity,  $\rho_0$  a reference density and  $\rho_0 + \bar{\rho}(z)$  the hydrostatic density profile,  $z$  being the vertical coordinate oriented positively upwards. Their model is linear and implicitly assumes the upper and lower layers to be infinite. It describes the evolution of a plane internal gravity wave reflecting at the interface from above. It predicts a phase shift between the incident and reflected waves as well as the amplitude of the interfacial displacement induced by the reflection of the wave. This displacement was found to be largest for a specific density jump  $\Delta\rho$  such that

$$\beta \equiv g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{k_x}{\omega^2} \simeq 1, \quad (6.1)$$

where  $k_x$  is the horizontal wave number component of the incident wave and  $\omega$  its frequency. This relation represents the square of a ratio of two phase speeds. First, the horizontal phase speed of the incident plane wave ( $\omega/k_x$ ). Second, the theoretical short-wave phase speed of interfacial waves (the upper and lower layers being of infinite extent) is given by  $(g\Delta\rho/(2k_x\rho_0))^{1/2}$  and, apart from a factor of two, this expression features in (6.1). In this paper, no reference was made to possible generation of ISWs along the interface; instead the emphasis was on the occurrence of overturning.

Following the work of New & Pingree in the 90's, the theoretical model of Delisi & Orlanski [DO75] was considered again by Thorpe [Tho98]. Thorpe derived the dispersion relation of interfacial waves for the case in which the homogeneous layer is finite. He investigated the influence of weakly nonlinear effects upon the reflected internal gravity wave, and showed that a harmonic wave can be generated. He also discussed for what range of parameter values, as encountered in the Bay of Biscay, a generalized version of Equation (6.1) could be satisfied; he argued that these would form favourable conditions for the development of ISWs in the pycnocline due to an incident internal tidal wave beam.

This work was further extended by Akylas *et al.* [AGCT07], in the limit of long waves (in the sense that  $k_x h \ll 1$ , *i.e.* long with respect to the mixed layer thickness implying that nonhydrostatic effects are weak) and when an internal wave beam (instead of a simple plane wave of infinite horizontal extent) impinges on the pycnocline. Akylas *et al.* [AGCT07] first addressed the linear development of the interfacial waves. Because the frequency of

these waves is the forcing frequency  $\omega$ , they radiate energy back into the stratified fluid. Long-living interfacial waves are therefore prohibited in the linear regime. The weakly nonlinear regime was then investigated, the near-field and far-field evolutions leading to distinct solutions. In the near-field evolution, no radiation occurs and the interfacial displacement is found to be maximum when the wavelength of the interfacial wave matches the horizontal width of the incoming wave beam. The far-field evolution is described by an equation which involves weakly nonlinear, weakly nonhydrostatic and radiative effects. It admits soliton-like solutions, obtained numerically.

Their result confirmed the general idea behind “local generation” as put forward by Gerkema [Ger01], namely that the initial phase is essentially linear and amounts to a “scattering” of the beam as it encounters the pycnocline; nonlinear (and nonhydrostatic) effects become important in the second phase, when the perturbation of the pycnocline propagates away, steepens and may break up into ISWs. In some ways the setting adopted by Gerkema [Ger01] was different from that of Akylas *et al.* [AGCT07]. In the former, too, the stratification consists of a mixed upper layer, an interfacial pycnocline and a constantly stratified lower layer, but the ocean depth was taken finite and the internal tidal beam (which impinges on the pycnocline from below) was generated by including barotropic tidal flow over infinitesimal topography. The linear problem was solved analytically in terms of vertical modes. All parameters were representative of an oceanic configuration and were fixed, except for the density jump across the interface, which was varied. It was then shown that the amplitude of the interfacial displacement is controlled by the ratio of the phase speed of interfacial long waves in a two-layer fluid to the phase speed of the first internal gravity wave mode in the uniformly stratified lower layer. It was concluded that the density jump across the pycnocline has to be moderate for the displacement amplitude of the interface to be maximum. If the density jump is stronger (than moderate), the beam is reflected at the interface and if the density jump is weaker, the beam is transmitted across the discontinuity as an evanescent wave which decay length is much longer than the height of the homogeneous layer. The beam is then reflected at the free surface and almost fully transmitted back into the stratified layer. Gerkema [Ger01] also derived and solved numerically the equations for the weakly nonlinear and weakly nonhydrostatic regime. Only for a moderate density jump was the nonlinear development of interfacial waves observed, evident from steepening and disintegration into ISWs. This work was extended by Maugé & Gerkema [MG08] to a more general setting in which the topography (here: a continental slope) was allowed to be of finite amplitude.

All these studies are limited in that they address at best weakly nonlinear and weakly nonhydrostatic effects and treat the pycnocline as an interface, *i.e.* a layer of infinitesimal thickness, with the exception of Maugé & Gerkema [MG08] who used stratification profiles obtained from measurements in the

Bay of Biscay. In the present paper, we present numerical results obtained with the MIT general circulation model; we are thus able to relax all these constraints at once: we allow a finite thickness of the pycnocline as well as fully nonlinear and nonhydrostatic effects. Our aim is to investigate when ISWs can be obtained in this more general situation, what the influence is of the finite thickness of the pycnocline upon the wave structure and whether the criteria of Delisi & Orlanski [DO75], Gerkema [Ger01] and Akylas *et al.* [AGCT07] for maximum pycnocline displacement still hold. The numerical set-up we consider is idealised, being two-dimensional, with simplified structures of stratification and forcing. Rotation is absent and the values of the parameters we consider are inspired from laboratory experiments performed on the same problem in Grenoble. This experimental work will be reported in due time by their authors.

The numerical set-up is described in the next Section. In Section 6.3, we show that a mode-1 ISW, which is the kind most commonly observed and documented, can be generated at the pycnocline by the impinging beam. A criterion for the selection of a particular mode is put forward for this purpose, in terms of phase speeds. This allows us to show in Section 6.4 that initial and forcing conditions can be designed such that mode-2 or mode-3 ISWs are obtained. In addition, we propose in Section 6.5 another simple physical model to understand the selection of modes in the very near-field of the internal wave beam impact. The bandwidths of the selection criteria thus derived are discussed in Section 6.6 along with the predictions of these criteria for the configuration of the Bay of Biscay. We conclude in Section 6.7.

## 6.2 Numerical set-up

We use the MIT-gcm code, a finite-volume, nonlinear, nonhydrostatic numerical model which solves the equations of motion under the Boussinesq approximation [MHPA97]. No subgrid modelling option is activated in our case, implying that the numerical simulations are direct.

We define a two-dimensional Cartesian co-ordinate system  $(O, x, z)$  whose origin is at the top left-hand corner of a rectangular domain, with  $z$  oriented vertically upwards. The Coriolis frequency is set to zero, for a discussion of effects of rotation, see Section 6.6.2. An internal wave beam is imposed on the left boundary of the domain and propagates in a uniformly stratified fluid before impinging on a pycnocline of finite thickness. This configuration is described in detail below and sketched in Figure 6.1. All parameters defined in this Section have their values displayed in Tables 6.1 and 6.2.

The density profile we consider is continuous and consists of a homogeneous upper layer, a uniformly stratified lower layer and a pycnocline in between, namely a strong but continuous change in density. The associated

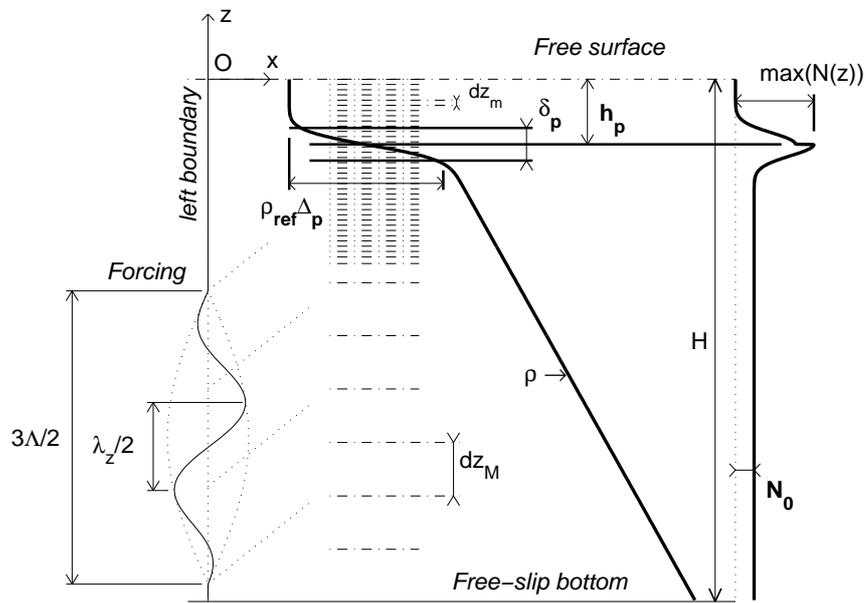


Figure 6.1: Sketch summarising the main features of the numerical set-up. *Italic characters refer to boundary conditions. The thick solid lines and bold labels refer to the density and Brunt-Väisälä profiles, as indicated. The horizontal dash-dotted lines and associated labels refer to the vertical setting of the grid. The coordinate system  $(O, x, z)$  is sketched in the top left-hand corner. The dotted, sloping lines starting from the left boundary sketch internal wave characteristics of the beam.*

Brunt-Väisälä frequency in the lower layer	$N_0$	$0.6 \text{ rad.s}^{-1}$
Forcing frequency	$\omega_0$	$0.424 \text{ rad.s}^{-1}$
Forcing period	$T_0 = 2\pi/\omega_0$	$14.81 \text{ s}$
Angle of the internal wave beam in the lower layer	$\theta_0$	$45^\circ$
Vertical location of the pycnocline	$h_p$	$2 \text{ cm}$
Thickness of the pycnocline	$\delta_p$	$1 \text{ cm}$
Kinematic viscosity	$\nu$	$10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Mass diffusivity	$\kappa$	$1.43 \times 10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

Table 6.1: Set-up parameters that are common to all experiments.

profile of the Brunt-Väisälä frequency is defined by:

$$N^2(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} g \frac{\Delta_p}{\delta_p} \exp \left[ - \left( \frac{z + h_p}{\delta_p/2} \right)^2 \right] + \begin{cases} N_0^2 & \text{for } -H \leq z < -h_p \\ 0 & \text{for } -h_p \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

$\Delta_p$ ,  $\delta_p$  and  $h_p$  are the relative change in density across the pycnocline, the thickness of the pycnocline and the depth of its center line respectively;  $H$  is the total water depth and  $N_0$  is the (constant) Brunt-Väisälä frequency of the lower layer. Note that the initial profile  $N(z)$  is not continuous, the discontinuity being slowly smoothed by diffusion during the course of the simulation. No noticeable modification of  $N(z)$  is to be seen over that time however.

In order to control the beam characteristics, we impose directly the wave beam at the left boundary of the domain in the lower layer (hence we do not model the generation of the wave beam over topography, as in Gerkema [Ger01]). According to the dispersion relation of internal gravity waves, the energy of the wave beam propagates with the group velocity making an angle  $\theta_0 = \sin^{-1}(\omega_0/N_0)$  with respect to the horizontal, where  $\omega_0$  is the frequency of the wave beam [Lig78]. The velocity profile of this wave beam is

$$\vec{v}(x=0, z, t) = \Pi(z) \cos \left( \frac{2\pi z}{\Lambda} + \omega_0 t \right) \cos \left[ \frac{2\pi}{3\Lambda} \left( z + \frac{H}{2} \right) \right] \vec{e}_0 \quad (6.3)$$

with

$$\Pi(z) = \begin{cases} A \omega_0 & \text{for } |z + H/2| \leq 3\Lambda/4, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.4)$$

$A$  is the amplitude of the along-beam displacement of particles located on the left boundary and  $\vec{e}_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  is the along-beam unit vector. This profile is displayed on the left-hand side of Figure 6.1. As shown in Equation (6.4), the forcing is applied on the vertical scale  $3\Lambda/2$ , which should therefore be smaller than the height of the uniformly stratified lower layer. This accounts for the total water depth  $H$  to be slightly larger for experiment E1 than for experiments E2 and E3 (see Table 6.2).

The profile (6.3) is a simple model of the far-field velocity profile of the internal wave field emitted by an oscillating object (the corresponding exact theoretical expression has been derived by Thomas & Stevenson [TS72]). Here, the object would be the bathymetry of the continental shelf at the location of critical slope [GD07]. As shown by Staquet *et al.* [SSP<sup>+</sup>07], a wave vector can be locally defined within the wave beam, though a wave beam is not a simple plane wave. This accounts for the profile (6.3) to be considered as spatially monochromatic. The profile (6.3) was also designed such that its integrated flux at the left boundary is always zero. In other words, it ensures that the free-surface mean displacement is zero at each time, which greatly improves the stability of the simulations.

The effective horizontal and vertical wavelengths of the wave beam, denoted  $\lambda_x$  and  $\lambda_z$  respectively, can be inferred from (6.3), by calculating the distance  $l$  between the maximum and minimum values of  $|\vec{v}|$  at a given time and defining  $\lambda_z$  as  $2l$  and  $\lambda_x$  as  $2l/\tan\theta$ . From the values of  $A$  and  $\lambda_z$ , the steepness of the waves defined by Thorpe [Tho87] as the amplitude of the vertical displacement of the isopycnals multiplied by the vertical wavenumber can be computed. The values are displayed in Table 6.2 and never exceed 1, implying that the beam is statically stable in all three experiments.

Three numerical experiments denoted E1, E2 and E3 were carried out, each of which, as we shall see, being designed so that ISWs develop in the pycnocline with a different modal structure along the vertical. The length and frequency scales in Table 6.1 were taken from the laboratory experiments. The choice of the parameter  $\Delta_p$  for experiment E1 (displayed in Table 6.2) was guided by the numerical simulations of Gerkema [Ger01]: it yields the value of the parameter  $\gamma$  in Gerkema's work (defined in the next Section) for which the amplitude of the waves generated in the pycnocline is largest. The choice of the other parameters for this experiment is explained in §6.4, as well as those for experiments E2 and E3. Note that the horizontal width of the beam varies from one experiment to the other (for computational reasons) implying that the length of the domain  $L$  varies as well to allow the pycnocline wave (evolving into a train of ISWs) to propagate over long enough distances. In the following, a pycnocline wave refers to an interfacial wave propagating in a pycnocline of finite thickness.

At the right end of the domain, a sponge layer of length  $l_s$  is implemented to absorb the beam and the ISWs. This sponge layer consists of adding to the momentum equations an extra term characterised by a relaxation timescale, which forces the motions to evolve from their values at the boundary of the sponge layer facing the interior of the domain (or inner boundary) to the value prescribed at the end of the domain (zero in our case). In order to avoid reflections at the inner boundary back to the interior of the domain, the relaxation time is progressively decreased from  $T_0$  at the inner boundary to  $T_0/1000$  at the boundary of the domain,  $T_0$  being the forcing frequency. This is the sponge layer implemented by default in the MIT-gcm which

Designation of the experiment		E1	E2	E3
Domain depth	$H$ (m)	0.95	0.8	0.8
Domain length	$L$ (m)	6	3	1.2
Forcing amplitude	$A$ (cm)	1.5	1.5	1.1
Vertical scale of the forcing	$\Lambda$ (cm)	60	26	15
Effective wavelengths of the forcing	$\lambda_x, \lambda_z$ (cm)	53.6	23.2	13.4
Transverse wavelength of the beam	$\lambda_0 = \lambda_x \sin \theta$ (cm)	37.9	16.4	9.48
Reynolds number of the beam	$Re = \Lambda A \omega_0 / \nu$ ( $\times 10^5$ )	3.8	1.6	0.7
Wave steepness of the beam	$\sqrt{2\pi} A / \lambda_z$	0.12	0.29	0.37
Relative density jump	$\Delta_p$ (%)	2.05	3.38	4
Maximum value of $N(z)/\omega_0$	$\max N(z)/\omega_0$	11.2	14.3	15.5
Long wave phase speed, two-layer case	$c^* = \sqrt{g \Delta_p h_p}$ (cm.s $^{-1}$ )	6.34	8.14	8.86
$\alpha$ parameter (see [AGCT07])	$\alpha = N_0 \lambda_0 / c^*$	3.6	1.2	0.64
$\gamma$ parameter (see [Ger01])	$\gamma = c^* / N_0 H$	0.11	0.17	0.19
Number of time steps per period	$T_0 / dt$	400	800	250
Horizontal resolution	$dx$ (mm)	4	2	1
Fine vertical resolution	$dz_m$ (mm)	0.4	0.3	0.2
Coarse vertical resolution	$dz_M$ (mm)	4	4	3.5
Sponge layer length	$l_s$ (m)	2	1	0.25

Table 6.2: Set-up parameters that vary from one experiment to another.

corresponds to the Herbaut formulation as described in Zhang & Marotzke [ZM99].

The value of the viscosity  $\nu$  was set to  $10^{-7}$  m $^2$ /s. As we show below, this value ensures that a mode-3 ISW develops with a significant amplitude (for a realistic value of  $\nu = 10^{-6}$  m $^2$ /s, this mode is hardly visible and for  $\nu \leq 10^{-8}$  m $^2$ /s, spurious effects occur at the smallest scales because of insufficient damping of those scales).

We use a grid with a constant horizontal resolution  $dx$  and with a vertical resolution that varies smoothly from a coarse resolution  $dz_M$  in the lower part to a fine resolution  $dz_m$  in the upper part of the domain, the middle of the transition zone being set to  $z = -3h_p$ .

## 6.3 Observations on the local generation of mode-1 ISWs

### 6.3.1 Preliminary considerations

In the works of Gerkema [Ger01] and Akylas *et al.* [AGCT07] mentioned in the Introduction, the phase speed of the interfacial waves generated as the beam impacts the pycnocline is characterised by the phase speed of long waves propagating at a pycnocline between two homogeneous fluids,

namely  $c^* = \sqrt{g\Delta_p h_p}$ , using notations of the previous Section. (Note that, from [Tho98],  $c^*$  is a good approximation of the actual phase speed of long interfacial waves propagating at a pycnocline over a uniformly stratified fluid layer, when the wave frequency is much larger than  $N_0$ .) In these works, the thickness of the pycnocline is infinitesimal, *i.e.* an interface.

At the region of beam impact, when the regime is still linear, Gerkema [Ger01] showed from analytical solutions that the parameter (denoted  $\gamma$ ) controlling the displacement amplitude of the interface is the ratio of  $c^*$  over the phase speed of the first internal wave mode that propagates in the lower layer,  $N_0 H/\pi$ . Thus,  $\gamma = c^*/N_0 H$ , ignoring a factor  $\pi$  in front of  $c^*$ . Gerkema [Ger01] found that values of  $\gamma$  around  $\simeq 0.12$  lead to the largest interfacial waves. Note that the expression of the phase speed of the first internal wave mode is valid only in the hydrostatic approximation ( $\omega_0 \ll N_0$ ), which is obviously not the case here. Using the correct expression would reduce  $\gamma$  by a factor  $\sqrt{2}$  only (using  $\omega_0 = N_0/\sqrt{2}$ ). We chose to ignore this factor, keeping the expression of  $\gamma$  unchanged.

In [AGCT07], the displacement amplitude of the interface was found to depend upon a parameter (denoted  $\alpha$ ) which compares the horizontal width of the beam  $\lambda_x$  with the horizontal wavelength of the interfacial wave  $2\pi c^*/\omega_0 = 2\pi c^*/N_0 \sin \theta_0$  (since at the beam impact, the interfacial wave has the same frequency as the wave beam). Hence,  $\alpha = N_0 \lambda_0/c^*$ , introducing the transverse wavelength of the beam  $\lambda_0 = \lambda_x \sin \theta_0$  and ignoring again a factor  $2\pi$  in front of  $c^*$ . Akylas *et al.* [AGCT07] showed from numerical solutions of their soliton equation that maximum interfacial displacements occur when  $\alpha \simeq 1$ .

A third criterion was derived by Delisi & Orlanski [DO75] for short waves (namely eq. 6.1) but is identical to the one in terms of  $\alpha$ , mentioned above and will not be further discussed.

To sum up, these works lead to two parameters  $\alpha$  and  $\gamma$  which control the displacement amplitude, defined as

$$\alpha = \frac{N_0 \lambda_0}{c^*}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{N_0 H}{c^*}. \quad (6.5)$$

The criteria based on these parameters both ensure that the impinging of the internal wave beam upon the interface leads to its maximum displacement.

The two parameters  $\alpha$  and  $\gamma$  have been designed in the context of an infinitely thin pycnocline, hence supporting only mode-1 ISWs. As we will see in the following Sections, only in E1 do mode-1 ISWs develop and therefore, only for E1 are  $\alpha$  and  $\gamma$  relevant. For purposes of illustration however, the values of  $\alpha$  and  $\gamma$  for all three experiments are displayed in Table 6.2.

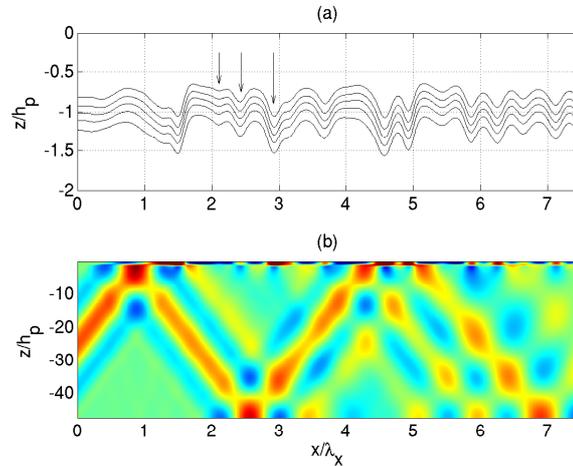


Figure 6.2: Generation of a mode-1 ISW by an internal wave beam in experiment E1. (a): Magnification of the isopycnals around the height  $z = h_p$ , with a train of 3 deformations explicitly indicated with arrows (the leading deformation has almost passed by the rear deformation of the preceding train). (b): Horizontal velocity field allowing to locate the internal wave beam; values range from  $-7.5 \text{ mm.s}^{-1}$  (dark blue) to  $7.5 \text{ mm.s}^{-1}$  (red).

### 6.3.2 Generation of mode-1 internal solitary waves

Results from experiment E1 are displayed in Figure 6.2, through contours of a few isopycnals around the pycnocline (frame (a)) and through the spatial distribution of the horizontal velocity field over the whole water depth (frame (b)). This figure displays two striking features. Frame (a) shows that a pycnocline wave is generated as the internal wave beam, visible in frame (b), hits the pycnocline. This wave, whose vertical structure is mode-1, degenerates into a mode-1 ISW. Frame (b) shows that the beam is strongly affected by the interaction with the pycnocline. A part of the beam is reflected downwards at the base of the pycnocline, while the remaining part is transmitted into the pycnocline. This transmitted part is refracted because the local Brunt-Väisälä frequency is stronger in the pycnocline; it reflects downwards on the upper boundary of the pycnocline and is partly transmitted back into the lower layer, thus emerging further away than the part that reflected at the base of the pycnocline (see [MP09] for a detailed study of this process). Hence, the incident beam decomposes into two beams after reflecting from the pycnocline, resulting in the spreading of the beam energy in the lower layer. Gerkema [Ger01] also concluded from his linear solutions that “the internal-beam energy gets spread all over the domain”.

As discussed in §6.2, the parameters of experiment E1 have been designed such that  $\gamma$  is very close to the optimal value obtained by Gerkema [Ger01]. The value of  $\gamma$  for this experiment is thus equal to 0.11. As for  $\alpha$ , we found

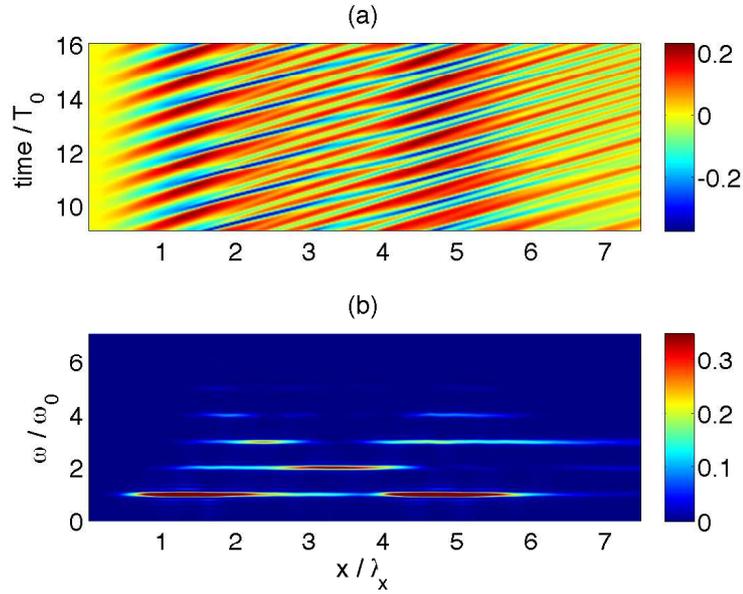


Figure 6.3: Temporal analysis of the pycnocline displacement for E1. (a):  $(x, t)$  plot of the vertical displacement of the isopycnal located at the center of the pycnocline (whose depth at rest is  $z = -h_p$ ). The vertical displacement is scaled by  $h_p$ ,  $T_0$  is the period of the forcing beam and  $\lambda_x$ , the effective horizontal wavelength of that beam. (b):  $(x, \omega)$  plot of the power spectral density of the top figure, computed as the squared modulus of the temporal Fourier transform of the pycnocline displacement and scaled by its maximum value.

$\alpha = 3.6$ , which is of order 1 and thus in accordance with the criterion by Akylas *et al.* [AGCT07]. It is noteworthy that these criteria, established for interfaces, thus also seem to hold when the pycnocline is of finite thickness.

The temporal development of the nonlinear dynamics of the pycnocline wave is displayed in Figure 6.3 via space-time and space-frequency diagrams. Frame (a) displays the displacement of the isopycnal located in the middle of the pycnocline in a distance-time diagram. The horizontal axis is scaled by the horizontal effective wavelength of the incoming beam  $\lambda_x$  while the unit of the vertical axis is the forcing period  $T_0$ . In frame (b), the power spectral density of this displacement is displayed in a distance-frequency diagram. The vertical axis is scaled by the forcing frequency  $\omega_0$  for a clearer detection of harmonic frequencies of  $\omega_0$  by nonlinear effects.

Figures 6.2 and 6.3 show that the pycnocline dynamics can be decomposed into three stages. (i) As noted above, the beam impinges on the pycnocline and part of its energy is transmitted into the pycnocline, the remaining part being reflected (Figure 6.2(b)). The transmitted beam excites a pycnocline wave and this generation process is essentially linear (as argued earlier by Gerkema [Ger01] and Akylas *et al.* [AGCT07]). As shown

in Figure 6.3(b) indeed, the dominant frequency for  $x/\lambda_x \lesssim 1$  is the forcing frequency. (ii) Approximately one  $\lambda_x$  further, *i.e.* for  $1 \lesssim x/\lambda_x \lesssim 2$ , this pycnocline wave propagates horizontally and steepens, a nonlinear effect. Such a steep front can be seen on Figure 6.2(a), at location  $x/\lambda_x = 1.5$ . The growing importance of nonlinearity is also evident from Figure 6.3(b), which shows that higher harmonics of  $\omega_0$  are being developed during this stage. Since  $2\omega_0 \approx 0.8 \text{ rad.s}^{-1} > N_0$ , the now nonlinear pycnocline wave remains trapped in the pycnocline and grows in amplitude due to the continuous internal wave beam forcing. Finally (iii), further away (for  $x/\lambda_x \gtrsim 2$ ), the large amplitude pycnocline wave disintegrates into trains of three shorter, amplitude-ordered and solitary-like deformations. This is indicated by arrows in Figure 6.2(a). The largest deformations propagate faster than the smallest ones, hence the amplitude ordering. This is to be seen in the pattern in Figure 6.3(a), for example for  $2 < x/\lambda_x < 4$ , where the different propagation speeds manifest themselves in different slopes of the lines following the deformations.

These ISWs eventually decay, possibly because of viscosity, although radiation of internal waves in the lower stratified layer might play a role. The latter phenomenon is actually visible in Figure 6.2 where low-amplitude signature of radiated waves outside the main envelope of the beam can be detected close to the pycnocline. To rule out the possibility of a viscous decay, let us introduce the  $e$ -folding viscous decay length scale of the amplitude, denoted  $\xi$ . Assuming the ISW may be modelled as an internal gravity wave of frequency  $\hat{\omega} > N_0$  and horizontal wavenumber  $\hat{k}$  propagating in the pycnocline of Brunt-Väisälä frequency  $\hat{N}$ ,  $\xi$  is given by Lighthill [Lig78, p. 272]:

$$\xi = \frac{1}{\nu} \left( \frac{\hat{\omega}}{\hat{k}} \right)^3 \frac{\sqrt{\hat{N}^2 - \hat{\omega}^2}}{\hat{N}^3}. \quad (6.6)$$

The ratio  $\hat{\omega}/\hat{k}$  is the horizontal phase velocity of the wave and, as we shall see in the next Section, is well approximated by the horizontal phase velocity of the beam  $\omega_0/k_x$ . The time  $2\pi/\hat{\omega}$  is the typical temporal width of the ISW and, from Figure 6.3, can be estimated as  $T_0/3$ . Using  $\hat{N} = 4 \text{ rad.s}^{-1}$  as a typical measure of the Brunt-Väisälä frequency in the pycnocline, we get  $\xi = 28 \text{ m} \approx 52\lambda_x$ , which is much larger than the length of the domain  $L = 6 \text{ m} \approx 11\lambda_x$ . Hence, viscosity can be ignored in this experiment.

## 6.4 How to control the mode number: a “far-field” approach.

### 6.4.1 Heuristic considerations: the modal decomposition

In the present case of a pycnocline of finite thickness, the modal decomposition provides a simple method to study the structure and characteristics

of the full internal gravity wave field that develops over the total water depth. We shall show in this Section that this method also provides a useful heuristic tool to design a numerical experiment so that mode-1 ISWs develop.

For the sake of simplicity, we will make a rigid lid approximation. Indeed, in all our experiments, the free-surface displacement never exceeds 0.2 mm, which is 2 orders of magnitude smaller than the height of the upper homogeneous layer  $h_p$ .

We briefly recall the principles of the modal decomposition (see, *e.g.*, [LM78] for detail). When searching for a vertical velocity solution of the linear inviscid Boussinesq equations of the form

$$w(x, z, t) = W(z) \exp i(Kx - \Omega t)$$

with  $K > 0$  as we are only interested in rightward propagating waves, it can be found that  $W$  and  $K$  satisfy the eigenvalue problem :

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + K^2 \frac{N^2(z) - \Omega^2}{\Omega^2} W = 0, \quad (6.7a)$$

$$W|_{z=0} = W|_{z=-H} = 0. \quad (6.7b)$$

The system of equations (6.7a) and (6.7b) forms a Sturm-Liouville problem and has an infinite sequence of modes, of eigenfunctions  $W_n$  associated with eigenvalues  $K_n$  ( $n$  being the mode number). The general solution for  $w$  limited to rightward propagating components can therefore be written as

$$w(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(z) \exp i(K_n x - \Omega t),$$

where the coefficients ( $a_n$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , are the amplitude of the modes. Solving equations (6.7a) and (6.7b) then requires  $N(z)$  and  $\Omega$  as input parameters which determine  $W_n$  and  $K_n$  for each mode  $n$  (setting  $K$  and retrieving the  $\Omega_n$  would also have been possible). The phase speeds of each mode are then  $c_n = \Omega/K_n$  (or  $\Omega_n/K$ ).

The case of experiment E1 is now considered to illustrate how we use heuristically this method to determine the parameter set that favors the development of a mode-1 ISW.

In the work of Akylas *et al.* [AGCT07], the maximum interfacial displacement is obtained when the horizontal width of the beam matches the horizontal wavelength of the interfacial wave. Since this wave is forced at the beam frequency, its horizontal phase speed therefore matches the horizontal phase speed of the beam. As we now show, when the pycnocline is of finite thickness and weakly nonlinear effects have developed, the mode-1 pycnocline wave also has the same horizontal phase speed as the incoming beam.

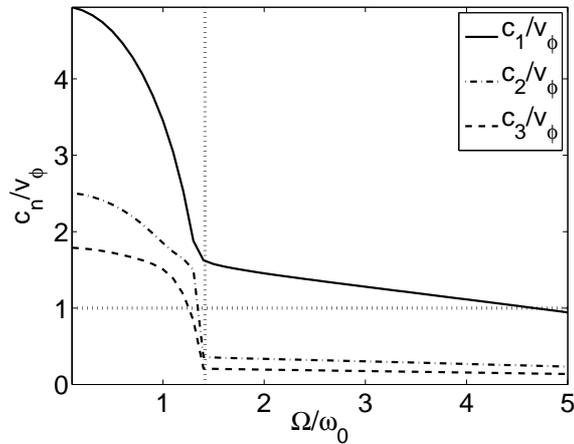


Figure 6.4: Phase speeds of the first three modes  $c_1$ ,  $c_2$  and  $c_3$  for experiment E1 computed from Equations (6.7a) and (6.7b) for  $N(z)$  given by Equation (6.2) as a function of  $\Omega$ . The phase speeds and  $\Omega$  are scaled by the phase speed  $v_\phi$  and frequency  $\omega_0$  of the wave beam respectively.

To apply the modal decomposition to experiment E1, we assume that an ISW may be modelled as a superposition of linear internal gravity waves which are trapped within the thermocline, *i.e.* of frequency comprised between  $N_0$  and  $\max(N(z))$ . We solved Eqs. (6.7a) and (6.7b) with  $\Omega$  varying and display the phase speeds of the first three modes  $c_1$ ,  $c_2$  and  $c_3$  versus  $\Omega$  in Figure 6.4. The figure shows that the phase speed decays as  $\Omega$  increases, with a sharp transition when  $\Omega = N_0$  (*i.e.* for  $\Omega/\omega_0 = \sqrt{2}$ ): the decay rate of the phase speeds drops, corresponding to the modes being trapped in the thermocline. For  $\Omega \geq N_0$ , all three phase speeds evolve quasi-linearly with  $\Omega$ ,  $c_2$  and  $c_3$  being nearly constant and distinct from  $c_1$ . The latter velocity is very close to the horizontal phase velocity  $v_\phi$  of the wave beam as  $\Omega$  increases.

Hence, to select a mode-1 ISW, the internal wave beam should be designed such that its horizontal phase speed is close to  $c_1$  (computed from modal decomposition,  $N(z)$  and  $\Omega > N_0$  being given). This is how experiment E1 was designed, adjusting also the wave beam amplitude so that a strong deformation is induced in the thermocline while assuring that the beam remains stable.

We will now make the conjecture that in order to excite mode- $n$  ISWs, the horizontal phase speed of the internal wave beam should be within the range of values in which the phase speeds of the mode- $n$  internal waves are comprised when trapped in the pycnocline (*i.e.* with frequency  $\Omega > N_0$ ). This conjecture will be verified next.

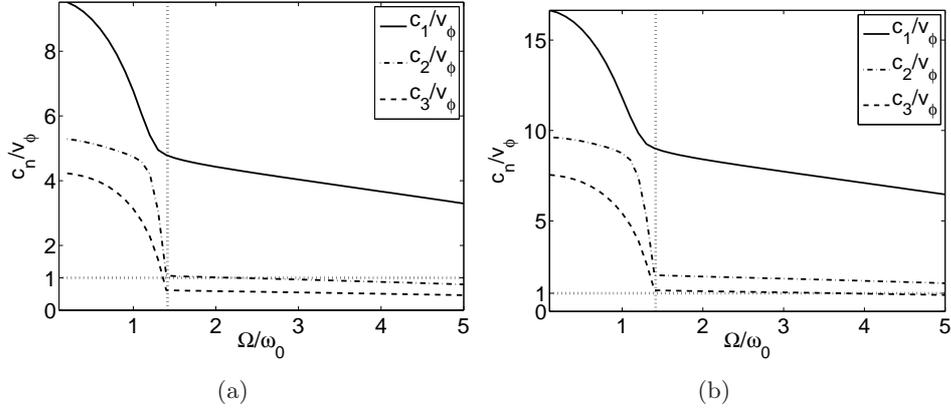


Figure 6.5: Caption as for Figure 6.4 for experiments (a) E2 and (b) E3.

#### 6.4.2 Application to the generation of mode-2 and mode-3 internal solitary waves

We now focus on experiments E2 and E3. In Figures 6.5(a) and 6.5(b), the phase speeds of the first three modes are plotted versus  $\Omega$  for experiments E2 and E3 respectively. These phase speeds display the same behavior as for experiment E1,  $c_2$  and  $c_3$  reaching a nearly constant value as soon as  $\Omega$  exceeds  $N_0$ . We find that for  $\Omega > N_0$ ,  $v_\phi$  ( $\approx 1.57 \text{ cm.s}^{-1}$ ) in experiment E2 is closer to  $c_2$  ( $\approx 1.5 \text{ cm.s}^{-1}$  as far as we computed it) in this case. When the modal decomposition is applied to E3, the value of  $c_3$  for  $\Omega > N_0$  ( $\approx 1 \text{ cm.s}^{-1}$ ) here is the closest to  $v_\phi$  ( $\approx 0.905 \text{ cm.s}^{-1}$ ). Like E1 with  $c_1$ , experiments E2 and E3 were actually designed from the computation of  $c_2$  and  $c_3$  respectively, such that the horizontal phase speed of the wave beam matches  $c_2$  in E2 and  $c_3$  in E3.

Visualisation of the fields similar to Figure 6.2 are displayed in Figure 6.6 for each experiment. Figure 6.6 shows that ISWs develop again from the impact of the wave beam on the pycnocline (frames (b) and (d)). But the vertical structure of the pycnocline wave is now a mode 2 for E2 (frame (a)) and a mode 3 in E3 (frame (c)), the number of visible deformations per train being 3 in the former case and 2 in the latter. The amplitude of the mode-3 ISWs is actually rather weak and, as we will see next, very sensitive to viscous effects. We verified that the three stages of the process going from a linear to a weakly nonlinear internal wave trapped in the pycnocline, described in §6.3, also occur in these two experiments.

In order to validate *a posteriori* the value of  $\nu$  we chose, let us go back to Equation (6.6). For E2, using  $2\pi/\hat{\omega} = T_0/8$  and  $\hat{N} = 5.5 \text{ rad.s}^{-1}$ , we obtain  $\xi = 1 \text{ m} \approx 4.3\lambda_x$ , which is now smaller than the length of the domain ( $L = 3 \text{ m} \approx 13\lambda_x$ ). For experiment E3, using  $2\pi/\hat{\omega} = T_0/6$  and  $\hat{N} = 6 \text{ rad.s}^{-1}$  yields  $\xi = 0.18 \text{ m} \approx 1.3\lambda_x$ , which is even smaller compared to  $L$  (since

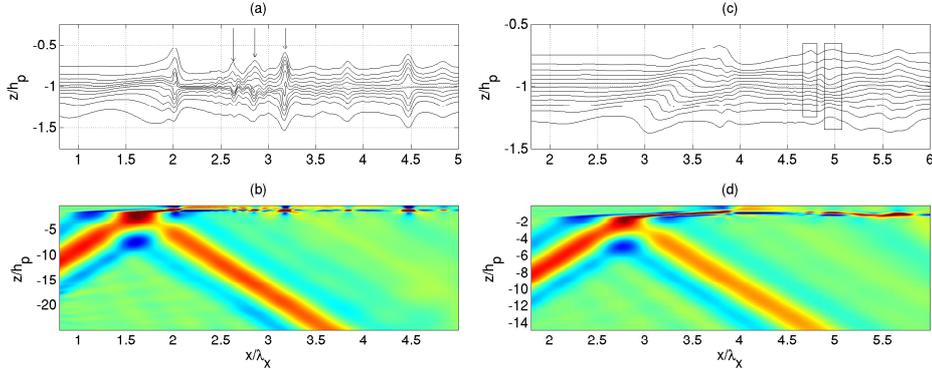


Figure 6.6: Generation of ISWs by an internal wave beam in experiments E2 and E3. This figure is similar to Figure 6.2 for experiment E1. In frame (a), a mode-2 ISW develops and a train with three visible deformations is highlighted with arrows; in frame (c), a mode-3 ISW is framed, consisting of a train with two visible deformations. In frame (b), values range from  $-5 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$  (dark blue) to  $5 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$  (red) and in frame (d), values range from  $-4 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$  (dark blue) to  $4 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$  (red).

$L = 1.2 \text{ m} \approx 9\lambda_x$ ). The values of  $\hat{\omega}$  for E2 and E3 have been estimated from Figure 6.6. The orders of magnitude for  $\xi$  show that for E2 and E3, viscosity plays an important role in the decay of the ISWs. Hence, the use for  $\nu$  of the realistic value  $10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  would have led to a very quick attenuation of mode-2 ISWs and prevented the development of mode-3 ISWs, as we checked it.

## 6.5 How to control the mode number: a “near-field” approach.

The approach developed above addresses the “far-field” evolution of the dynamics within the pycnocline, when weakly nonlinear waves have developed. The approach we consider now may be referred to as the “near-field” evolution, in the sense that we analyse the deformation of the pycnocline at the beam impact.

The simple model we shall derive is motivated by a careful inspection of the impact zone of the internal wave beam in runs E2 and E3, which is magnified in Figure 6.7. The beam is refracted as it gets into the pycnocline, since the local Brunt-Väisälä frequency increases and its frequency and horizontal wavelength remain unchanged (the dynamics being linear and the changes of the medium occurring along  $z$  only). We shall see that conditions for optimal forcing of the pycnocline wave by the beam can be derived, which also set the vertical structure (*i.e.* mode number) of the pycnocline wave.

The model is based on three approximations: (i) we focus on the initial phase of wave generation in the pycnocline, so that the dynamics may be

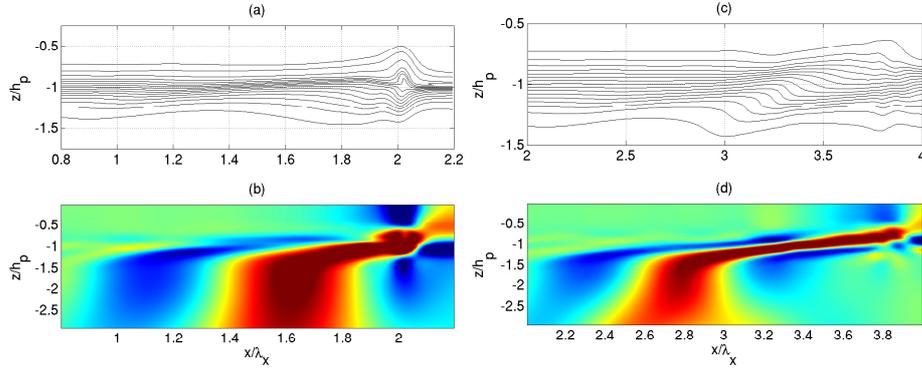


Figure 6.7: Caption as for Figure 6.6 for experiments E2 (a and b) and E3 (c and d), magnified around the zones of impact of the internal wave beam in order to emphasise the refraction of the beam during its propagation in the pycnocline.

assumed linear; (ii) we also consider a simple plane wave instead of a wave beam; (iii) we assume that the profile of the Brunt-Väisälä frequency is a piece-wise continuous function consisting of three parts, namely:

$$N_{3L}^2(z) = \begin{cases} N_0^2 & \text{for } -H \leq z < -h_p - \frac{\delta_p}{2}, \\ N_i^2 & \text{for } -h_p - \frac{\delta_p}{2} \leq z \leq -h_p + \frac{\delta_p}{2}, \\ 0 & \text{for } -h_p + \frac{\delta_p}{2} < z \leq 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

where  $N_i$  is the Brunt-Väisälä frequency within the pycnocline. The value of  $N_i$  has been chosen in order to preserve the phase shift between the induced displacements of the top and bottom of the pycnocline. In other words, let us assume that in our numerical experiments, an internal wave characteristic impinges on the bottom of the pycnocline at a location  $x_0$ , is refracted until being reflected against the top of the pycnocline at the location  $x_0 + \Delta x$ . Our three-layer model is designed such that the locations  $x_0$  and  $x_0 + \Delta x$  are preserved, although the characteristics are now piece-wise straight lines. The slope of a characteristic is equal to  $\sqrt{\omega_0^2/(N^2(z) - \omega_0^2)}$  and  $\Delta x$  is computed by integrating the path of a characteristic between the boundaries of the pycnocline, which we set to be at depths  $z_1 = -h_p - \delta_p/2$  and  $z_2 = -h_p + \delta_p/2$ :

$$\Delta x = \int_{z_1}^{z_2} dz \sqrt{\frac{N^2(z) - \omega_0^2}{\omega_0^2}}.$$

In the case of a pycnocline characterised by the constant Brunt-Väisälä frequency  $N_i$ , this expression reduces to  $\Delta x = \delta_p \sqrt{(N_i^2 - \omega_0^2)/\omega_0^2}$ . Matching these two expressions then leads to the following expression for  $N_i$ :

$$N_i^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{\delta_p^2} \left( \int_{z_1}^{z_2} dz \sqrt{\frac{N^2(z) - \omega_0^2}{\omega_0^2}} \right)^2. \quad (6.9)$$

Let us show that a Bragg-like resonance condition based on simple geometric arguments can be obtained for the selection of the mode. At depth  $z = -h_p - \delta_p/2$ , upon entering the pycnocline, the angle of propagation of the energy of the plane wave is changed from  $\theta_0$  to  $\theta_i = \arcsin(\omega_0/N_i) < \theta_0$ , due to refraction. Leaving aside the mode-1 case which does not seem to be tractable with the present approach, we now distinguish the two cases we investigate, starting with the forcing of a mode-2 pycnocline wave.

Two isophases of the incident plane wave are plotted in Figure 6.8(a) as well as two isopycnals at the top and bottom of the pycnocline. If the horizontal wavelength of the plane wave  $\lambda_x$  is such that  $\lambda_x/2 = \Delta x$ , the induced displacements of the top and bottom of the pycnocline are opposite in phase (phase shift of  $\pi$ ), making the vertical structure of the refracted wave in the pycnocline similar to the one of a mode-2 internal wave. Figure 6.8(a) only displays wave characteristics until one reaches the top of the pycnocline but the wave characteristics can be drawn further along the pycnocline without altering the pattern of a mode-2 internal wave. The subsequent steps are then similar to those of any ISWs generation: the isopycnals forming the symmetrical pattern, typical of a mode-2 wave, steepen and split up into trains of mode-2 ISWs. Since  $\Delta x = \delta_p/\tan\theta_i$ , a mode-2 pycnocline wave is therefore forced if

$$\frac{\lambda_x \tan\theta_i}{2\delta_p} = 1. \quad (6.10)$$

The case of a mode-3 pycnocline wave is sketched in Figure 6.8(b). The displacements of the top and bottom of the pycnocline have a phase shift of  $2\pi$  if  $\Delta x = \lambda_x$ , implying that within the pycnocline, the displacement of the middle isopycnal is opposite in phase with the displacements of the top and bottom ones, as for a mode-3 wave. Hence, a mode-3 pycnocline wave is forced if

$$\frac{\lambda_x \tan\theta_i}{\delta_p} = 1. \quad (6.11)$$

The two conditions described here can be gathered into a single one and extended to any mode  $n \geq 2$  by noting that the displacements of the top and bottom of the pycnocline should have a phase shift of  $(n-1)\pi$  for the vertical structure of the wave to resemble a mode- $n$  internal wave trapped in the pycnocline. Conditions (6.10) and (6.11) can thus be generalized to any mode number  $n$  ( $n \geq 2$ ) as:

$$\frac{n-1}{2} \frac{\lambda_x \tan\theta_i}{\delta_p} = 1. \quad (6.12)$$

The validity of relation (6.12) for the two experiments E2 and E3 is checked by computing the left-hand-side of this relation, which we denote as  $\mu_n$ . The values of  $\mu_2$  and  $\mu_3$  are displayed in Table 6.3:  $\mu_2$  departs from the

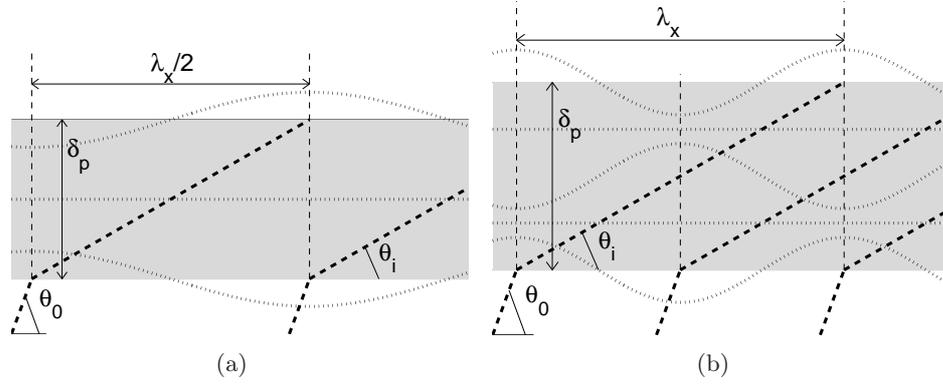


Figure 6.8: Sketches illustrating the conditions for the generation of mode-2 (a) and mode-3 (b) internal waves trapped in a pycnocline using the linear, three-layer model presented in §6.5. The shaded area is the pycnocline, the thick dashed lines represent isophases of the displacement separated by a distance  $\lambda_x/2$  (phase shift  $\pi$ ) and the dotted lines sketch the displacements induced by the plane wave in the pycnocline, highlighting the selected vertical structure.

value of 1 by 6% and  $\mu_3$  by less than 1%, attesting that relation (6.12) is well satisfied for these two experiments. This relation explains why a beam with a short wavelength generates high-mode pycnocline waves or, equivalently, why such high mode waves are favoured by a strongly stratified pycnocline.

Relation (6.12) has not been checked numerically for higher modes as the conditions to generate a displacement that is large enough for nonlinear effects to later take place are then much more difficult to achieve and would be associated with a costly increase in resolution. Note that this approach does not apply to mode-1 pycnocline waves. It relies indeed on the phase shift between the displacements on top and bottom of the pycnocline while a mode-1 wave induces vertical displacements that are all in phase along the vertical. An indication however that mode-1 ISWs can be generated is when the value of  $\mu_2$  is noticeably higher than one, since  $\mu_2 = 1$  when mode-2 ISWs are generated.

It is not clear to us how to relate this “near-field” approach to the “far-field” approach derived in the previous Section. It is useful however to bring together the conclusions of the two approaches. Writing  $v_\phi = c_n$  on the one hand, and relation (6.12) on the other hand, allows one to derive an approximate analytical expression for  $c_n$ , namely

$$c_n = \frac{\delta_p \sqrt{N_i^2 - \omega_0^2}}{\pi(n-1)}. \quad (6.13)$$

This is obtained by expressing (6.12) in terms of  $v_\phi$  ( $= \omega_0 \lambda_x / 2\pi$ ), writing the dispersion relation as  $\omega_0 = N_i \sin \theta_i$  and therefore  $N_i \cos \theta_i = \sqrt{N_i^2 - \omega_0^2}$ .

Experiment	E2	E3
$n$	2	3
$N_i$ (rad.s <sup>-1</sup> )	5.24	5.68
$\mu_n$	0.94	1.00

Table 6.3: Verification of relation (6.12) for experiments E2 and E3.  $n$  is the mode number of the pycnocline wave,  $N_i$  (defined by (6.9)) is the local Brunt-Väisälä frequency in the pycnocline and the parameter  $\mu_n$  is the left-hand-side of relation (6.12).

As  $N_i \gg \omega_0$  for the three experiments, Equation (6.13) can be simplified to  $c_n = \delta_p N_i / (\pi(n-1))$ . Numerical estimate of  $c_n$  given by Equation (6.13) for the parameters of Table 6.2 yields  $c_2 \approx 1.66$  cm.s<sup>-1</sup> for E2 and  $c_3 \approx 0.901$  cm.s<sup>-1</sup> for E3, which is in good agreement with the values given in §6.4.2.

## 6.6 Discussion

### 6.6.1 Bandwidths of the selection conditions

This paper aims at determining optimal conditions to generate mode- $n$  ISWs. However, the bandwidths of these conditions have not been discussed. In other words, when for a given situation,  $\mu_n < 1 < \mu_{n+1}$  and/or  $c_n < v_\phi < c_{n+1}$  in the trapped regime, it is yet to be determined whether ISWs develop at all and, if they do, which of the two  $n$  or  $n+1$  modes would preferentially develop and what would be their amplitudes. From a qualitative point of view, the answer must depend on several parameters, such as the ratio  $|c_n - v_\phi| / |v_\phi - c_{n+1}|$  in the trapped regime (or any quantity comparing the distances between  $v_\phi$  and the different phase speeds in that regime). From a quantitative point of view, the computation of the amplitude of the trapped modes would provide a precise answer but would be quite involved as the nonlinear nature of these waves implies that the motion cannot be easily projected on an orthogonal basis of linear wave modes at a given frequency. The projection of the motion on an orthogonal basis of *nonlinear* modes would require to know which model (such as a high-order KdV model) describes it accurately, which has not been done for the present paper.

To get some indication on the bandwidths of the selection conditions, we rather performed another numerical experiment (not shown). This experiment involves a beam, for which  $v_\phi$  is the same as in E1 but which stratification profile is the same as in E2. From the near-field condition (6.10), one finds  $\mu_2 = 2.17 > 1$ , which implies that mode-1 ISWs can be generated (as the near-field condition does not apply to mode-1 ISWs, it is not possible to be more specific). Regarding the far-field condition, Figure 6.5(a) for E2

shows that  $v_\phi$  is halfway between  $c_1$  and  $c_2$  in the trapped regime (since  $v_\phi$  for E1 is 2.3 times larger than for E2). Therefore we are in an intermediate regime. Observation of the pycnocline motion in this experiment indicates that although mode-2 ISWs are observed, mode-1 ISWs are the dominant type of motion. Hence, the two bandwidths for the far-field selection conditions overlap but the bandwidth for the selection of mode-1 ISWs seems to be larger than the one for mode-2 ISWs.

Two conjectures can be proposed based on this example: first, when in an intermediate case, ISWs can be generated and the bandwidths of the selection conditions for each mode number can overlap; second, that the lower the mode of the ISWs is, the broader the bandwidth of its selection condition might be. These conjectures both seemed to be verified in a few other numerical tests that helped us derive to our selection conditions.

### 6.6.2 Applicability of the selection conditions to the oceanic setting

This paper addresses fundamental aspects of the generation of ISWs by an internal wave beam. However, let us recall that this problem was motivated by oceanic observations. We will see how these rules can be applied to the more realistic context of the Bay of Biscay and whether they can predict correctly the observations (in the Bay of Biscay, local generation is associated with mode-1 ISWs). We will also show that rotation can be easily introduced in the far-field and near-field approaches.

The reference stratification profile we consider is a typical profile observed in the Bay of Biscay in mid to late summer, when the pycnocline is best developed and when local generation is observed. This reference profile (displayed in Figure 6.9) is characterised by a strong seasonal pycnocline which maximal value is  $1.6 \times 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$  at 58 m depth. The dominant forcing frequency in the Bay of Biscay is the semidiurnal tide of frequency  $\omega_{BB} = 1.41 \times 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$ , corresponding to a period of 12.42 hours.

Let us see how the far-field condition applies to the configurations just described. In order to compute the phase speeds of the different internal wave modes, we introduce rotation in Equation (6.7a):

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + K^2 \frac{N^2(z) - \Omega^2}{\Omega^2 - f_{45^\circ}^2} W(z) = 0. \quad (6.14)$$

where  $f_{45^\circ} = 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$  is the Coriolis parameter at a latitude of  $45^\circ$ . The rest of the procedure is as in §6.4.

The phase speeds of the two first modes are displayed in Figure 6.10. As in E1, E2 and E3, a regime in which waves are trapped in the seasonal pycnocline is observed for frequencies exceeding approximately  $17\omega_{BB}$ . This regime is coloured in grey in Figure 6.10. Note that for such high frequencies, rotation could be neglected in Equation (6.14) but has a great role

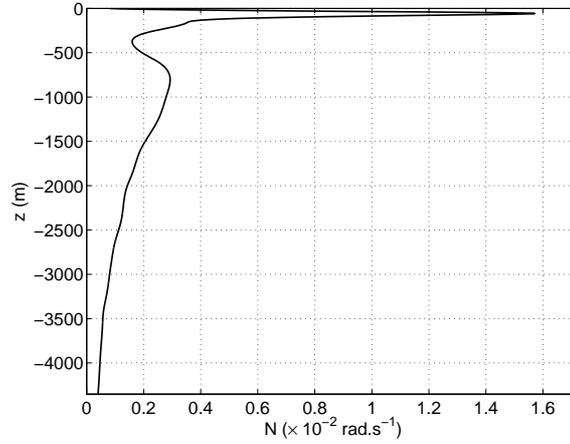


Figure 6.9: Typical stratification observed in the Bay of Biscay in mid to late summer.

in setting the angle of the beam and therefore its horizontal wavelength. The typical phase speeds for the mode-1 and mode-2 trapped internal waves are approximately  $0.7$  and  $0.2 \text{ m.s}^{-1}$ , respectively. In order to match these phase speeds, an internal tidal beam of frequency  $\omega_{BB}$  should have a dominant horizontal wavelength of  $31$  and  $9 \text{ km}$ , respectively. Observations being scarce, the dominant horizontal wavelength of the beam in the Bay of Biscay right under the point of impact has to be estimated from previous numerical simulations. For example, [GLM04, Fig. 7] shows a beam, which horizontal wavelength is about  $15 \text{ km}$  (as computed from the vertical dependency of the phase at a given horizontal location). Regarding the far-field condition,  $v_\phi$  is closer to  $c_2$  than to  $c_1$  in the trapped regime, the situation being generally intermediate. The discussion at the end of Section 6.6.1 shows that it is then possible that mode-1 ISWs are generated, coexisting with mode-2 ISWs which are much harder to detect in the ocean.

Let us now move on to the near-field condition. Mode-1 ISWs are observed in the Bay of Biscay and the near-field condition only applies for modes strictly higher than 1. As we said earlier in §6.5,  $\mu_2$  should be noticeably higher than unity when mode-1 ISWs are generated. We will try to verify this condition in the case of the Bay of Biscay. Considering that the seasonal pycnocline is defined by  $N(z) > 3.5 \times 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$ , it is located between  $z_1 = -158 \text{ m}$  and  $z_2 = -18 \text{ m}$ , meaning that the thickness of the pycnocline is  $\delta_p = 140 \text{ m}$ . As we are considering linear dynamics, the slope of the internal wave characteristics is now  $\sqrt{(\omega_{BB}^2 - f_{45^\circ}^2)/(N^2 - \omega_{BB}^2)}$ . Therefore, using the same notation as in §6.5,  $\Delta x$  has now to verify the following

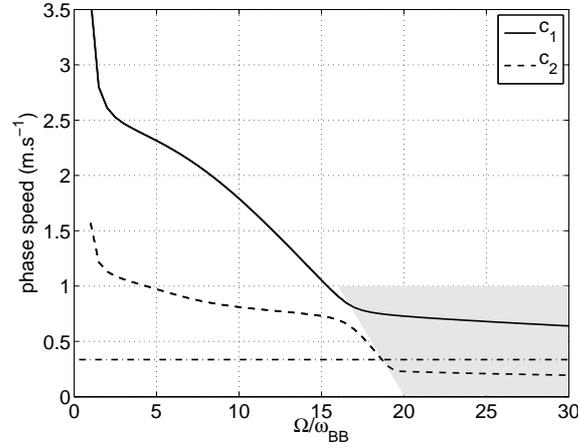


Figure 6.10: Phase speeds of the two first internal modes versus their frequency for the stratification displayed in Figure 6.9 and with rotation. The regime for which internal waves are trapped in the seasonal pycnocline is coloured in grey. The dash-dotted line display the horizontal phase speed of the beam in the Bay of Biscay, estimated from hydrostatic numerical simulations by Gerkema et al. [GLM04] and corresponding to a horizontal wavelength of the beam of 15 km.

condition:

$$\Delta x = \int_{z_1}^{z_2} dz \sqrt{\frac{N^2(z) - \omega_{BB}^2}{\omega_{BB}^2 - f_{45^\circ}^2}} = \delta_p \sqrt{\frac{N_i^2 - \omega_{BB}^2}{\omega_{BB}^2 - f_{45^\circ}^2}}.$$

$N_i$  is then defined by:

$$N_i^2 = \omega_{BB}^2 + \frac{\omega_{BB}^2 - f_{45^\circ}^2}{\delta_p^2} \left( \int_{z_1}^{z_2} dz \sqrt{\frac{N^2(z) - \omega_{BB}^2}{\omega_{BB}^2 - f_{45^\circ}^2}} \right)^2.$$

We find  $N_i = 8.4 \times 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$ . Once rotation has also been included in the definition of  $\theta_i$ , the procedure is the same as in §6.5. In order to satisfy  $\mu_2 = 1$ , the ITB should have a dominant horizontal wavelength of 24 km, which is higher than the dominant horizontal wavelength of the beam in the Bay of Biscay as estimated earlier. Moreover, in order to satisfy  $\mu_3 = 1$ , the ITB should have a horizontal wavelength of 12 km. The near-field condition here therefore predicts that we are in an intermediate case between the generation of mode-2 and mode-3 ISWs. These considerations lead us to the conclusion that this simple model is quantitatively less suitable than the far-field approach when it comes to realistic conditions, one possible reason being the large uncertainties on the parameters that enter the model.

In comparison, the arguments on which the far-field approach is based are much more robust: for a given mode number  $n$ , internal waves which frequencies differ but which are all trapped in the pycnocline propagate with

phase speeds that are close to each other, which is therefore the approximate propagation speed of any mode- $n$  ISW trapped in the pycnocline. A beam (or any other disturbance) should therefore have a horizontal speed that is close to this value to efficiently force mode- $n$  ISWs (provided that the forcing is strong enough for nonlinear effects to develop within its direct range).

## 6.7 Conclusion

We addressed the local generation of internal solitary waves (ISWs), when an internal wave beam impinges on a pycnocline. Nonlinear, nonhydrostatic numerical experiments were conducted for this purpose, the vertical density profile being continuous and made up of a lower layer with constant value  $N_0$  of the Brunt-Väisälä frequency, a pycnocline of finite thickness and a thin homogeneous upper layer. This work complements previous theoretical [Ger01, AGCT07] and experimental [DO75] studies in which the thickness of the pycnocline was vanishingly small (*i.e.* an interface).

We showed that ISWs can be generated and that the finite thickness of the pycnocline allows different vertical modes to be excited, depending on the parameters. We ran numerical experiments showing that modes-1, -2 or -3 internal solitary waves can develop. We next proposed two different approaches to predict the conditions of occurrence of a mode- $n$  pycnocline wave, which depend fundamentally upon the finite thickness of the pycnocline.

In the “far-field” approach, that is when harmonics of the forcing frequency have appeared, we showed that the observed mode- $n$  weakly nonlinear pycnocline waves have the same horizontal phase speed as the incident wave beam. We demonstrated this result heuristically by using a modal decomposition based upon the actual density profile and a frequency of value higher than  $N_0$ . For a mode-1 wave, this result extends to a pycnocline of finite thickness the linear criterion found for [AGCT07]. This result allowed us to design numerical experiments so that a mode-1, -2 or -3 pycnocline wave develops, the density jump across the pycnocline increasing with the mode number (or equivalently, the horizontal width of the wave beam decreasing with the mode number).

One might wonder why the phase speed of a beam should be matched with the phase speed of trapped waves, that are physically some distance away from the beam. We observed in Section 3.2 that the evolution towards ISWs actually takes one or two wavelengths only, a much shorter distance than for weakly nonlinear waves described *e.g.* by a KdV model. This is very likely due to the large amplitude of the forcing which allows the development of nonlinear structures in its vicinity, that propagate with the same speed as the forcing phase speed.

The “near-field” approach consists of deriving simple geometrical condi-

tions ensuring that a mode- $n$  wave develops at the beam impact (the model holds for  $n \geq 2$  only). In this approach, the dynamics is linear, a simple plane wave is considered in place of a wave beam and a piecewise three-layer stratification is assumed. We showed that a mode- $n$  wave is forced if a simple relation is satisfied which involves the thickness of the pycnocline, the angle of the refracted internal wave in the pycnocline and the horizontal wavelength of this wave. This model was originally designed as a qualitative argument but in spite of its great simplicity, it also gave a good quantitative agreement with our numerical data for  $n \geq 2$ . It explains why a beam with a short wavelength generates high mode waves or, equivalently, why such high mode waves are favoured by a strongly stratified pycnocline. When related to the conclusion of the far-field approach, this model provides a simple analytical expression for the phase speed of a mode- $n$  ISW.

We discussed the more general situation in which the wave beam has an intermediate phase speed between those of modes  $n$  and  $n + 1$ . With the help of an example, we conjectured that both modes could be selected in this case and that the lower the mode-number is, the larger its bandwidth is. The computation of the amplitude of those modes would be required to answer precisely this problem. This requires to solve for the amplitudes the nonlinear nonhydrostatic Boussinesq equations forced by the wave beam, a rather involved task.

The predictions of the two selection conditions derived in this paper were eventually examined in the more realistic context of the Bay of Biscay, in which mode-1 ISWs are observed. The far-field approach predicts a situation that is intermediate between the selection of mode-1 and mode-2 ISWs and an agreement with the observations is therefore possible. In the contrary, the near-field approach does not seem to be quantitatively reliable when applied to this realistic configuration as it predicts a situation that is intermediate between the selection of mode-2 and mode-3 ISWs. But the application of the latter selection rule requires several simplifications which leads to strong uncertainties in the parameters that enter the model.

The ultimate goal of the present study will be to address the configuration of the Bay of Biscay and investigate whether ISWs with characteristics close to those observed by New & Pingree [NP92] can be reproduced and therefore predicted. This will be reported in a forthcoming paper [GS10].

**acknowledgments** We thank the experimental team for having shared their early results, especially Louis Gostiaux, Matthieu Mercier and Manikandan Mathur. M. Mathur is also acknowledged for his help during the revision of this paper. The detailed comments of the anonymous referees greatly helped to improve this article. N.G. is supported by a grant from the Direction Générale de l'Armement. This work has been supported by ANR contracts TOPOGI-3D (# 05-BLAN-0176) and PIWO (# 08-BLAN-0113).

Numerical experiments were performed on the French supercomputer center IDRIS, through contracts 070580 and 080580.



## Chapter 7

# Local generation of solitary waves in the Bay of Biscay

**Résumé** Nous poursuivons l'étude du chapitre précédent et allons plus loin dans l'application des critères qui y ont été dérivés. En effet, nous présentons ici des simulations numériques bi-dimensionnelles à l'aide du même code que précédemment mais qui cette fois décrivent la configuration du Golfe de Gascogne en été. Nous montrons qu'un rayon d'ondes internes interagissant avec une thermocline initialement au repos peut induire un déplacement des isopycnes suffisamment grand pour que des ondes solitaires soient générées. Ces ondes solitaires sont cependant très différentes de celles observées dans le Golfe de Gascogne en regard de leur amplitude et de la distance séparant deux trains successifs. Nous montrons alors que pour obtenir une valeur correcte de ce dernier paramètre, l'écoulement présent dans la thermocline du Golfe de Gascogne indépendamment du rayon de marée interne doit être inclus comme partie intégrante du forçage. Ceci apporte donc une vision nouvelle, plus précise, de ce qu'est la génération locale dans le Golfe de Gascogne.

Cet article est la première révision d'un article qui, entre l'écriture de ce manuscrit et l'impression de sa version définitive, a subi une deuxième révision très mineure et a été publié, sa référence précise étant : N. GRISOUARD et C. STAQUET : Numerical simulations of the local generation of internal solitary waves in the Bay of Biscay, *Nonlin. Processes Geophys.*, 17 :575–584, 2010<sup>1</sup>.

### 7.1 Introduction

Internal waves have numerous effects in the ocean. They increase the amount of nutrients that are to be found just under the sea surface, they

---

1. Publication dans le cadre d'une édition spéciale intitulée *Large Amplitude Internal Waves in the Coastal Ocean* éditée par R. Grimshaw, K. Helfrich et A. Scotti.

locally modify the fluid density distribution and therefore modify the ray paths of sound waves with consequences for sonars. They are also believed to have a key role in maintaining the thermal balance and circulation of the ocean by dissipating a significant fraction of the tidal energy that is put into the oceans [MW98, WF04].

Internal wave restoring forces are buoyancy and the Coriolis pseudo-force. The dispersion relation of these waves is expressed as (*e. g.* [Gil82, §8.4]):

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta, \quad (7.1)$$

where  $\omega$  is the frequency of the waves,  $N$  the so-called Brunt-Väisälä frequency,  $\theta$  the angle of the wave vector relative to the vertical and  $f$  the Coriolis parameter. For a fluid in which only the temperature acts on density,  $N$  is defined as  $N^2 = \alpha g(dT_0/dz)$ , where  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient,  $g$  the gravity,  $T_0(z)$  the background temperature profile and  $z$  the vertical coordinate oriented positively upwards.

A noticeable feature of Eq. (7.1) is that  $\omega$  is bounded by  $\min(N, |f|)$  and  $\max(N, |f|)$  (assuming  $\omega > 0$ ): oscillatory motions are therefore freely propagating within this interval and vertically evanescent outside. In a fluid in which  $N$  varies along the vertical, this allows for wave trapping. For instance, a typical stratification in mid- and tropical latitudes is strongly inhomogeneous with an upper mixed layer, an intermediate thermocline supporting high values of  $N$  and finally the less stratified and much deeper abyssal ocean. Internal waves of tidal frequency (referred to as the internal tide) are of low enough frequency to propagate down to the bottom of the ocean. The internal tide may encounter a sharp elevation of the bathymetry (continental shelf or sill) and therefore increase in amplitude to preserve the energy flux. Nonlinear transfers of energy to high frequencies then take place. These frequencies are often too high for the associated waves to propagate back in the abyssal ocean but are low enough for these waves to propagate in the thermocline. Strikingly, the subsequent confinement of energy usually leads to a self-organisation of the waves in the form of nonlinear, nonhydrostatic dispersive waves which have been successfully described in terms of internal solitary waves (ISWs), or solitons. For reviews on ISWs in the ocean, see *e. g.*, [OS89, HM06].

However, New & Pingree [NP90] observed ISWs in the central Bay of Biscay, too far from the shelf break or any other bathymetry to have been generated there. These authors rather conjectured that in this case, ISWs are generated by an internal tidal beam (ITB) hitting the seasonal thermocline from below. This ITB originates from the shelf break, with downward propagation of energy into the abyssal ocean, which turns into upward propagation when it reflects from the bottom. On its upward path, the ITB finally encounters the seasonal thermocline, perturbs it locally which may lead to ISWs in the thermocline. New and Pingree coined the term “local generation”

of ISWs to refer to this process. Measurements of the ITB location were consistent with ray path computations based upon the local stratification and upon the bathymetry of the Bay of Biscay [PN91]. Further evidence of local generation of ISWs was presented by New & Pingree [NP92], giving further support for the existence of local generation. Since the beginning of the 2000s, new remote sensing techniques — namely Synthetic Aperture Radar (SAR) [Nd02, AdN06] and ocean colour imaging [dNSS02] — have confirmed the occurrence of this mechanism in spring and summer, when the seasonal thermocline is present. SAR imagery recently also showed the occurrence of local generation off Southwest Portugal [dNA07] and in the Mozambique Channel [dNM09]. This mechanism might also explain observations near the Mascarene Ridge by Konyaev *et al.* [KSS95].

The underlying physical mechanism should require very specific conditions to be met, as suggested by the sparsity of the observations. Few attempts have been made so far to explain it quantitatively (see [GSG10] for a review). The starting point is to derive conditions which maximize the interfacial displacement of the thermocline by the impinging beam, as first done by Delisi & Orlanski [DO75]. This work was extended by Thorpe [Tho98] and applied to the Bay of Biscay, to examine whether the local generation process proposed by New and Pingree could occur. This problem was later addressed by Akylas *et al.* [AGCT07] using asymptotic approaches in the linear and weakly nonlinear, long wave regimes (yielding a soliton equation in the latter case). Gerkema [Ger01] and Maugé & Gerkema [MG08], considering an abyssal ocean of finite depth, solved the problem analytically in terms of vertical modes. Although these approaches varied in numerous aspects, they all relied on the comparison between the phase speed of the interfacial waves in the equivalent two-layer system (i.e. for an equivalent homogeneous abyssal ocean) and the dominant phase speed of the forcing wave. The forcing is found optimal when the ratio of these two waves is of order one [DO75, Tho98, AGCT07], a case referred to as “moderate” by Gerkema [Ger01]. From a qualitative point of view, an optimal forcing promotes the nonlinear steepening of the interfacial waves, thereby preventing internal wave radiation in the abyssal ocean. Moreover, as first noticed by Gerkema [Ger01], when this condition is met, the ITB experiences multiple reflections and transmissions and therefore scattering. When this condition is not met, the ITB is either completely transmitted through the thermocline (the interfacial phase speed being slower than the forcing wave) or completely reflected against it (the interfacial phase speed being faster than the forcing wave).

Grisouard *et al.* [GSG10] (hereafter simply referred to as [GSG10]) successfully modelled the local generation process by allowing fully nonlinear and nonhydrostatic effects (as the authors used the term “pycnocline” rather than “thermocline”, we will use this terminology when referring to their work). The set-up was academic, namely two-dimensional, non-rotating with

idealised forcing and stratification. The stratification profile was again composed of three parts: an upper homogenous layer, a lower deep layer with constant Brunt-Väisälä frequency  $N_0$  and a pycnocline in-between. The difference with most previous works was that the density variation across the density jump was continuous with a pycnocline of finite thickness. By varying the amplitude of the density jump across the pycnocline and the horizontal phase speed of the forcing beam, [GSG10] derived conditions to generate mode- $n$  ISWs, showing the crucial importance of the finite thickness of the pycnocline. They applied these conditions to a typical stratification of the Bay of Biscay in summer when local generation is observed. They concluded that both mode-1 and mode-2 ISWs could be generated, without being able to anticipate the dominant mode. Observations show that mode-1 ISWs are generated in the Bay of Biscay. An agreement with these observations was therefore possible but further investigations were required. This is the purpose of the present paper.

Following [GSG10], we present a new set of numerical experiments performed with the MIT general circulation model, of which parameters are directly based on those of the Bay of Biscay in summer. The numerical set-up is described in Sect. 7.2. In Sect. 7.3, we consider the effects of the impact of the ITB on a thermocline initially at rest, its subsequent scattering and the generation of ISWs. Our goal is to verify whether local generation occurs with these parameters and whether the dominant mode number, if any, agrees with the predictions of [GSG10]. We show that these predictions are confirmed but the ISWs generated by this process are noticeably different from those observed in the Bay of Biscay. The trains of ISWs are separated by 25 to 30 km (in agreement with the predictions of [GSG10]), whereas in the Bay of Biscay this distance is about 50 km. We next point out that, regardless of the location of where the ITB impinges on the thermocline, the internal tide in the Bay of Biscay is dominated in the upper 100 m by a signal of wavelength 50 km. This similarity suggests that this signal may also play a role in the local generation process in the Bay of Biscay. To support this idea, we carry out in Sect. 7.4 two simulations with a forcing including both components of the internal tide. Clear trains of mode-1 ISWs are now generated, separated by 55 km. In Sect. 7.5, the results are summarised and discussed.

## 7.2 Set-up

We use the MIT-gcm code, a finite-volume, nonlinear, nonhydrostatic numerical model which solves the equations of motion under the Boussinesq approximation [MAH<sup>+</sup>97]. We define a Cartesian co-ordinate system  $(O, x, z)$  whose origin is at the upper western corner of the two-dimensional rectangular domain. Although we allow for velocities in the meridional direction,

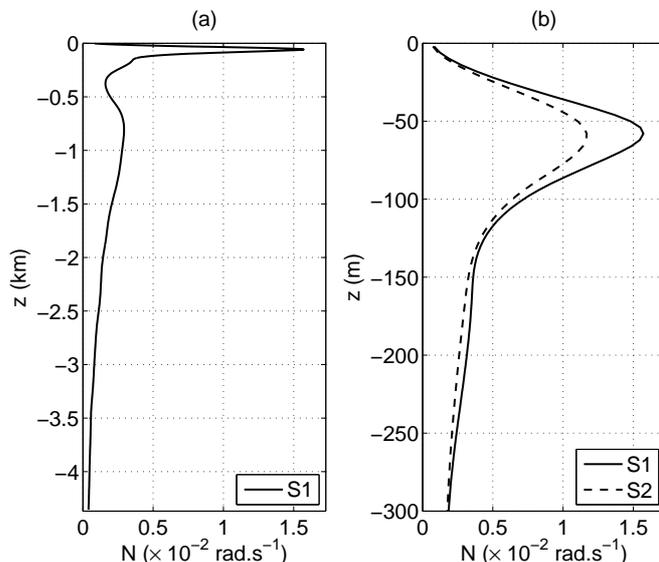


Figure 7.1: (a): Brunt-Väisälä profile for stratification S1 over the whole water depth (4,370 m). (b): Brunt-Väisälä profiles for stratifications S1 and S2 from 0 to 300 m depth. Below 300 m depth, S1 and S2 are identical.

the adjective “horizontal” will refer to the  $x$  (zonal) direction. The reference stratification profile we consider is a typical profile observed in the Bay of Biscay in mid to late summer, when the thermocline is best developed and was used by *e. g.*, Maugé & Gerkema [MG08] and [GSG10]. This reference profile will be hereafter referred to as S1; the corresponding Brunt-Väisälä profile  $N(z)$  is characterised by a strong seasonal thermocline which maximal value is  $1.6 \times 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$  at 58 m depth. Local generation is observed during mid to late summer, *i.e.* when S1 is measured. For purposes that will become clear in Sect. 7.3, another stratification profile referred to as S2 will also be used, with a maximal value of  $N(z)$  equal to  $1.2 \times 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$ , corresponding to a late spring stratification. The Brunt-Väisälä profiles for S1 and S2 are displayed in Fig. 7.1.

We impose an ITB on the western boundary of the domain. The setup of this beam is slightly different than in [GSG10]. In the first place, the analytical expression of the forcing envelope is the profile of an internal wave beam as found by Thomas & Stevenson [TS72] in a non-rotating fluid of constant  $N$  and extended to a rotating fluid by Peat [Pea78], namely:

$$A(z) = \mathcal{A} \int_{-\infty}^{+\infty} k \exp \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{\lambda_0 k}{2\pi} \right)^3 + i k \left( z + \frac{H}{2} \right) \right) dk. \quad (7.2)$$

$\mathcal{A}$  is a normalisation factor such that the maximal value of  $|A(z)|$  is equal to  $12 \text{ cm.s}^{-1}$ , which is approximately the maximal value of the along-beam

velocity in the Bay of Biscay (*e. g.* [GLM04]).  $H = 4,370$  m is the total depth of the domain and  $\lambda_0$  the dominant vertical wavelength. We set  $\lambda_0 = 1,500$  m, which is representative of the ITB in the Bay of Biscay. The zonal, meridional and vertical velocities and the temperature at the western boundary (referred to as  $u_b$ ,  $v_b$ ,  $w_b$  and  $T_b$  respectively) are found through the polarisation relations:

$$u_b(z, t) = \sqrt{\frac{N_{1/2}^2 - \omega_0^2}{N_{1/2}^2 - f^2}} \Im (Ae^{-i\omega_0 t}), \quad (7.3)$$

$$v_b(z, t) = \frac{f}{\omega_0} \sqrt{\frac{N_{1/2}^2 - \omega_0^2}{N_{1/2}^2 - f^2}} \Re (Ae^{-i\omega_0 t}), \quad (7.4)$$

$$w_b(z, t) = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - f^2}{N_{1/2}^2 - \omega_0^2}} u_b(z, t), \quad (7.5)$$

$$T_b(z, t) = T_0(z) + \frac{N_{1/2}^2}{g\alpha\omega_0} \sqrt{\frac{\omega_0^2 - f^2}{N_{1/2}^2 - f^2}} \Re (Ae^{-i\omega_0 t}), \quad (7.6)$$

with  $N_{1/2} = 1.315 \times 10^{-3}$  rad.s<sup>-1</sup>, the Brunt-Väisälä frequency at mid-depth (which is the same for S1 and S2),  $\omega_0$  the M2 tidal frequency in the Bay of Biscay corresponding to a period of 12.42 hours (hereafter referred to as the M2 period) and  $f = 1.04 \times 10^{-4}$  rad.s<sup>-1</sup> the Coriolis parameter at 45° N. We set  $\alpha = 1.89 \times 10^{-4}$  K<sup>-1</sup> and therefore  $T_0$  has to vary from 4° C to 17° C for S1 and to 14.5° C for S2. Finally,  $\Re$  and  $\Im$  denote the real and imaginary parts respectively.

The ISWs in the Bay of Biscay are about 1 to 2 km long in the direction of their propagation and have amplitudes up to 80 m [NP90, NP92, Nd02]. In order to resolve an ISW with 20 points in each direction, the horizontal grid spacing is set to 50 m and the vertical grid spacing is set to 4 m in the upper 170 m. Such a high vertical resolution is not necessary everywhere and is therefore equal to 25 m in the lower 3,900 m. The transition between the two vertical resolutions is achieved as in [GSG10] and is centred around 330 m depth. The grid size is  $4,000 \times 1 \times 234$  points, implying that the horizontal extent of the domain is 200 km. At the eastern side of the domain, a sponge layer of length 50 km is implemented. It consists of adding to the momentum equations an extra term characterised by a relaxation timescale, relaxing the motions from the boundary of the sponge layer facing the interior of the domain (or inner boundary) to the value prescribed at the end of the domain. In order to avoid reflections at the inner boundary back to the interior of the domain, the relaxation time is progressively decreased from 12.42 hrs at the inner boundary to  $12.42 \times 10^{-3}$  hrs at the boundary of the domain. This is

the sponge layer implemented by default in the MIT-gcm which corresponds to the Herbaut formulation as described in [ZM99].

The background viscosity and thermal diffusivity are set, respectively, to  $10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  and  $10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  to reproduce the eddy diffusivities that are expected in the ITB in the Bay of Biscay. Considering  $\max(|A(z)|)$  and  $\lambda_0$  as reference velocities and length scales, respectively, the Reynolds number in the ITB is therefore in the order of  $10^6$ . To avoid accumulation of energy at the grid scale due to the turbulent energy cascade, a KPP scheme acting on the vertical viscosity and diffusivity is enabled [LMD94], which induces very high values of the vertical viscosity, up to  $0.1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  where the beam impinges on the thermocline. In the horizontal direction, biharmonic viscosity and diffusivity are both set to  $10^3 \text{ m}^4.\text{s}^{-1}$ .

## 7.3 Internal tidal beam impinging on a thermocline initially at rest

### 7.3.1 Generation of internal solitary waves

Starting from rest, we carry out a numerical experiment hereafter referred to as experiment E1, using the stratification profile S1. E1 is run for 16 M2 periods. We observe a strong scattering of the ITB after interaction with the thermocline, as described by Gerkema [Ger01]. This suggests that we are in the “moderate regime” for the density jump, which favours local generation. This scattering can be seen in Fig. 7.2b. In Fig. 7.2a, very weak signatures of mode-2 ISWs are to be seen, which are approximately 2.5 km wide, with an induced isopycnal displacement typically smaller than 10 m. This contradicts observations, for which 80 m-amplitude, mode-1 ISWs are observed for the stratification profile S1. However, there is some uncertainty on the parameters required for local generation to occur, which are the horizontal phase speed of the ITB and the stratification profile in the thermocline.

The sensitivity of the local generation process to the stratification profile is addressed in a second experiment, hereafter referred to as E2, which is run with stratification S2 for 16 periods: Fig. 7.3a shows that mode-1 ISWs are now generated at a rate of one train per M2 period, leading to a strong scattering of the ITB (Fig. 7.3b). We shall show below that these ISWs still do not compare favourably with in situ measurements in the Bay of Biscay, the distance between two wave trains and the ISWs amplitude being too small. Also, local generation is not known to happen in late spring, during which a stratification profile like S2 is expected to be found. This implies that some extra process may come into play in the local generation of ISWs, an important point further addressed in Sect. 7.4.

Fig. 7.4 displays the temporal evolution of the isopycnal in E2 where

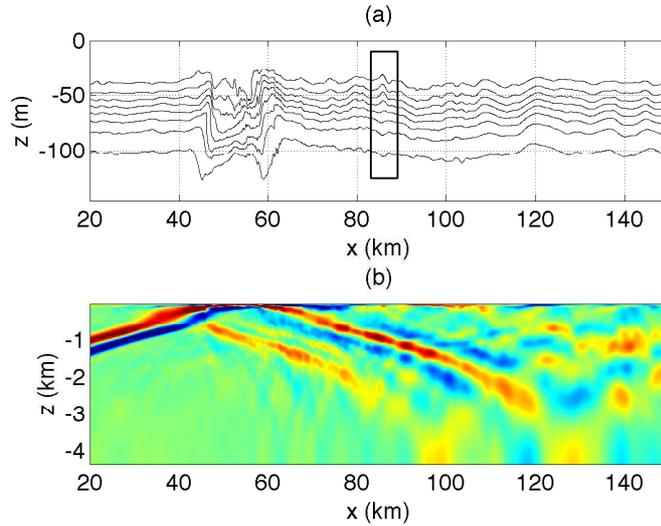


Figure 7.2: Snapshot taken from E1, 16 M2 periods after the start of the simulation. (a): Contours of a few isopycnals around the thermocline. A mode-2 ISW is framed. (b): Horizontal velocity field in the domain, the colour scale ranging from  $-12$  (blue) to  $+12$   $\text{cm.s}^{-1}$  (red).

$N(z)$  is maximal over one M2 period. The leading deformations of the ISW trains, each of them having been generated one M2 period after the other, are also tracked. We chose to display this temporal evolution in a rather early stage of the simulation as high frequency motions tend to increase and make the pictures harder to interpret. However, the main features of the ISWs remain the same over the course of the simulation. Fig. 7.4 shows that the induced isopycnal displacement is in the order of 25 m, while the observations of New & Pingree [NP90, NP92] report values up to 80 m, as mentioned above.

The distance between two trains of ISWs needs also to be discussed. Regardless of the location of where the ITB impinges on the thermocline, the internal tide in the Bay of Biscay is dominated in the upper 100 m by a signal of wavelength 50 km (*e. g.* [PN91, PC06]). We will refer to this signal as the “upper tide”, which physical features are discussed in Gerkema *et al.* [GLM04, §4]. This signal can be qualitatively described as a background oscillation of the thermocline. In addition, the distance between two trains of ISWs has also been measured to be about 50 km (*e. g.* [Nd02]), suggesting a connexion between these two types of waves. In E2, by contrast, two trains of ISWs are rather separated by 25 to 30 km (see Figs. 7.3a and 7.4), meaning that these ISWs propagate almost twice as low as the ISWs observed in the Bay of Biscay.

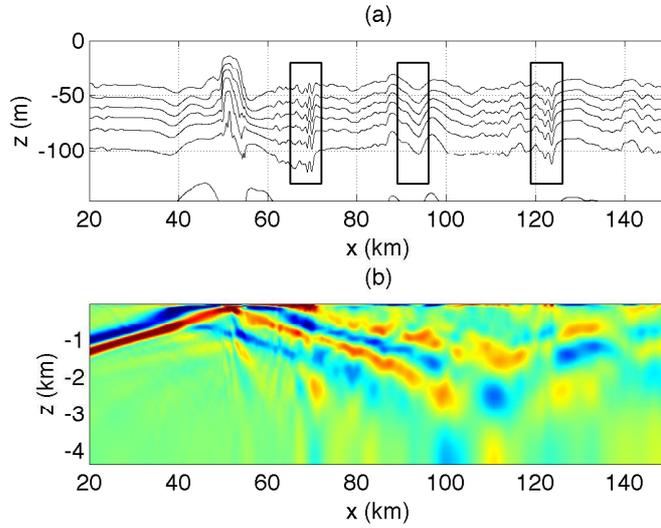


Figure 7.3: Caption as for Fig. 7.2, but for E2, 11.5 M2 periods after the start of the simulation. The three main wave trains are framed in (a) and have all been generated one M2 period after each other.

### 7.3.2 Interpretation of experiments E1 and E2

[GSG10] proposed two different selection conditions to predict what mode of ISWs will be selected, if any. Although the two conditions were qualitatively insightful, the “far-field condition” proved to give better quantitative results when addressing the problem of a realistic stratification, as is the case here. Hence, we will focus on this condition only.

The “far-field condition” relies on the fact that ISWs evolve from internal waves that are trapped in the thermocline, i.e. whose frequencies are comprised between  $N_0$  and the maximum value of  $N(z)$ . In that case, a forcing beam of horizontal phase speed close to the phase speed of the desired trapped mode will select that mode, provided that the amplitude of the forcing beam is large enough to promote nonlinear effects. Increasing the density jump or decreasing the horizontal phase speed of the beam has the effect of selecting ISWs of higher modes.

Since the ITB frequency is the M2 frequency, the horizontal phase speed of the ITB (hereafter referred to as  $v_\phi$ ) is estimated by measuring the dominant horizontal wavelength of the ITB. Note also that since a wave train is created every M2 period at the beam impact, the phase-matching condition implies that the distance between two wave trains matches the horizontal wavelength of the ITB. Fig. 7.2b shows that the horizontal wavelength of the ITB is approximately 18 km which gives a value for  $v_\phi$  of about  $0.4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . The phase speeds of the trapped modes are computed via a normal mode approach, using the stratification profile  $N(z)$ . Searching for a

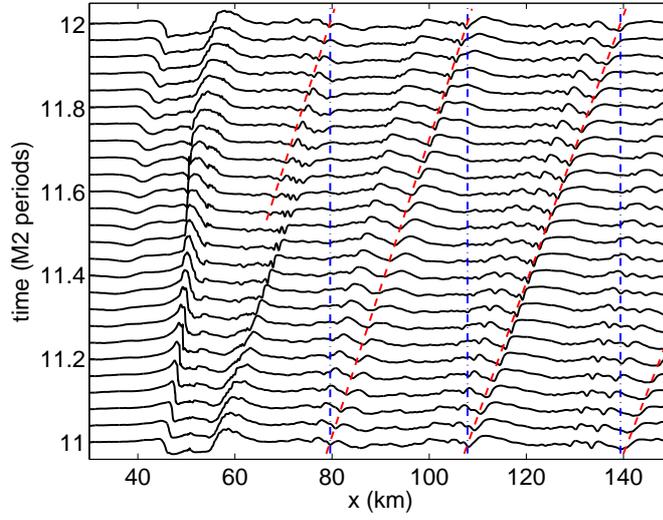


Figure 7.4: In E2, vertical displacement of the isopycnal where  $N(z)$  is maximal between 11 and 12 M2 periods after the start of the simulation. Two isopycnals on the left side of the pictures are separated by  $1/25$  M2 periods, also corresponding to 30 m in terms of displacement amplitude. Red, dashed lines follow four different wave trains at different locations, each of them having been generated one M2 period after the other. The blue, dash-dotted lines help noticing that the four leading deformations highlighted by the red, dashed lines can be seen as four different life stages of a single wave train. The large displacement located between 40 and 60 km corresponds to the ITB impact on the thermocline.

vertical velocity solution of the linear inviscid Boussinesq equations of the form  $w(x, z, t) = W(z)e^{i(Kx - \Omega t)}$  ( $K > 0$  for eastward-propagating waves and  $\Omega$  not necessarily equal to  $\omega_0$ ), we solve the Taylor-Goldstein equation, along with boundary conditions consisting of a flat bottom and a rigid lid:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + K^2 \frac{N^2(z) - \Omega^2}{\Omega^2 - f^2} W(z) = 0, \quad (7.7)$$

$$W(z = -H) = W(z = 0) = 0. \quad (7.8)$$

The system of equations (7.7) and (7.8) has an infinite sequence of eigenfunctions  $W_n$  associated with eigenvalues  $K_n$  ( $n$  being the mode number) yielding the phase speed of each mode  $c_n = \Omega/K_n$ .

The phase speeds of the two first modes and of the forcing ITB are displayed in Fig. 7.5 for S1 and in Fig. 7.6 for S2. Two regimes are to be distinguished. The first one is referred to as the “free” regime and is associated with frequencies low enough for the waves to be able to propagate below the seasonal thermocline. The second regime is referred to as the “trapped” regime (coloured in grey in Figs. 7.5 and 7.6), with frequencies too high to propagate anywhere else than in the seasonal thermocline. In this regime, the phase speed of the waves weakly varies with frequency, as

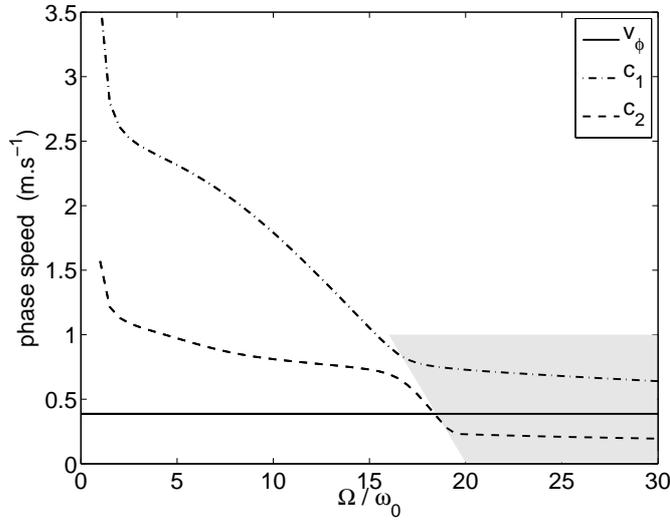


Figure 7.5: Phase speeds of the two first internal modes versus their frequency for stratification S1 and comparison with the horizontal phase speed of the ITB. The “trapped regime” is the grey-shaded area (adapted from [GSG10]).

opposed to the free regime. We will consider this phase speed as constant and call it the “trapped phase speed”. This phase speed has to match  $v_\phi$  for the corresponding mode to be forced. Fig. 7.5 compares  $v_\phi$  with the phase speeds of the two first modes versus frequency for S1. In this case,  $v_\phi$  lies between these two phase speeds so that no trapped motion can be efficiently forced in the seasonal thermocline. This could explain why no strong signature of ISWs is detected in E1. For S2 however, the trapped phase speeds of the modes are lower due to lower values of the Brunt-Väisälä frequency in the seasonal thermocline. The trapped phase speed of the first mode is then brought closer to  $v_\phi$ , hence the observation of mode-1 ISWs, as seen in Fig. 7.6.

To conclude the comparison between E1 and E2, E1 is an experiment set up with parameters for which local generation is known to be favoured. However, local generation is not convincingly observed. To see if local generation still could occur with slightly different parameters, a second experiment E2 is designed, with the stratification profile slightly departing from the reference situation on which E1 was based. Mode-1 ISWs are now locally generated but their amplitude and the distance between two trains of ISWs noticeably differ with observations in the Bay of Biscay. We will see in the next section that a set-up, including more components of the internal tide and especially the background motion of the pycnocline, can reproduce observations more accurately. This in contrast with all previous papers (including [GSG10]), in which the problem of an ITB impinging on a thermocline initially at rest was considered.

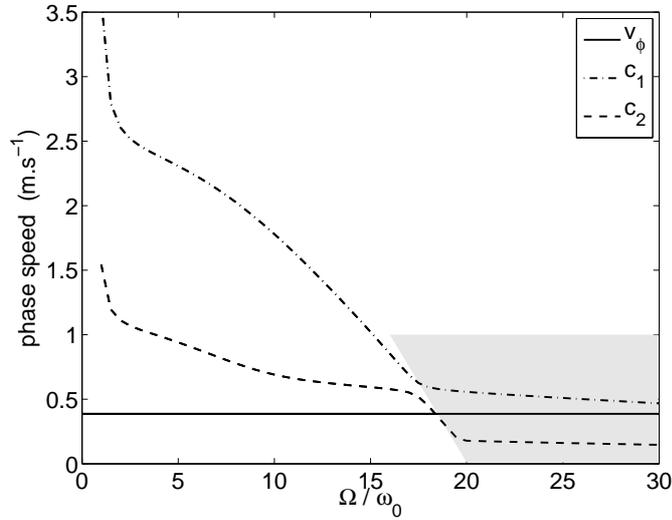


Figure 7.6: Caption as for Fig. 7.5, for stratification S2.

## 7.4 A more realistic configuration

As we observed in Sect. 7.3.1, the trains of ISWs generated in E2 are separated by distances which are selected by the wavelength of our beam, whereas in the ocean these trains are separated by a distance approximately equal to the wavelength of the upper tide, regardless of the position and characteristics of the ITB. We present here a way to set up a numerical experiment, complex enough to model a more realistic forcing, yet numerically affordable as there is no need to include the continental shelf and slope. Indeed, to include this bathymetry would imply to double the size of the domain in the horizontal direction, with still a high horizontal resolution needed throughout most of the domain, especially near the shelf break. Such a complete bathymetry would help retrieving a more realistic ITB as well as the upper tide but is numerically unaffordable. We then decided to proceed in two steps, bearing some similarities with a nested grid approach.

First, a low-resolution, low-amplitude numerical experiment, hereafter referred to as E3 and including a continental shelf is designed. It is noticeably different from E1 and E2 and has a much reduced numerical cost. The length of the domain is 400 km, the vertical and horizontal grid resolutions are respectively 25 m and 400 m. The bathymetry has been designed by Gerkema *et al.* [GLM04] from measurements in the Bay of Biscay and can be seen in Fig. 7.7. The continental shelf and the deep ocean are both made flat and respectively 100 and 216 km long. The stratification profile S1 is used. Two sponge layers at each end of the domain are implemented. They have the same characteristics as in E1 and E2, except for their length which is now 100 km. The viscosities, thermal diffusivities and biharmonic viscosity

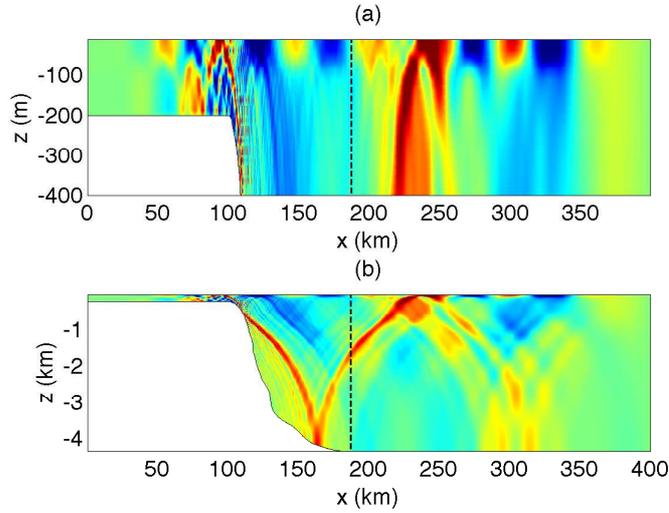


Figure 7.7: Snapshot taken from experiment  $\hat{E}3$ , 30 M2 periods after the start of the simulation. (a): Close-up of the horizontal velocity field in the upper 400 m of the domain. (b): horizontal velocity field in the whole domain, the colour scale ranging from  $-1$  (blue) to  $+1$   $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$  (red). The white region is the bathymetry and the dashed line is the line from where the tidal forcing is extracted.

remain unchanged and the KPP scheme is turned off as it is now unnecessary. The forcing is barotropic, with an amplitude of the horizontal velocity being equal to  $0.1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$  on the eastern boundary (facing the open ocean in our case). A barotropic flow is also imposed on the western boundary in order to satisfy flux conservation.

The amplitude of the eastern forcing is about a hundred times less than in the Bay of Biscay to retrieve a dynamics as linear as possible and reduce the computational cost. Indeed, the large-scale structure of the internal tide we wish to model is governed by a quasi-linear dynamics. Nonlinearities become important when the ITB interacts with the thermocline, which processes cannot occur in this low-resolution experiment. The experiment is run for 30 M2 periods with the same time step as in E1 and E2. Harmonic analysis of the velocity and temperature fields is then performed at  $\omega_0$  on the twelve last M2 periods, during which the permanent regime is established.

Second, a numerical experiment E3 is designed. We choose to use the stratification S1 as in E1, as it is the typical stratification for which mode-1 ISWs are observed in the Bay of Biscay. E3 is almost identical to E1 except for the forcing. Indeed, instead of using the analytical expression  $A(z)$  (Eq. 7.2) for the ITB, the result of the harmonic analysis of  $\hat{E}3$  is extracted at location  $x = 188 \text{ km}$  (see Fig. 7.7). This gives complex vertical profiles for the forcing velocity and temperature fields which are applied directly at the western boundary. The amplitude of this forcing is also rescaled such

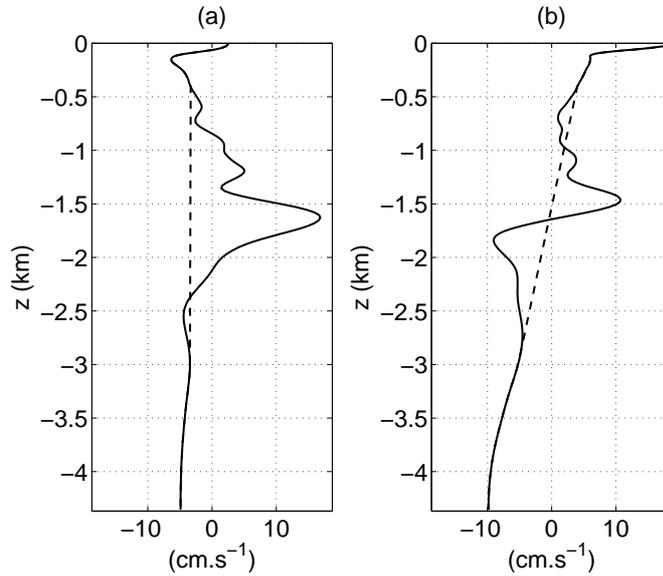


Figure 7.8: Real (a) and imaginary (b) parts of the horizontal velocity forcing for E3 (solid line) and E4 (dashed line).

that the maximal along-beam velocity is equal to  $17 \text{ cm.s}^{-1}$  at the boundary, which ensures that the amplitude of the ITB is the same as in E1 at depth  $z = -1400 \text{ m}$ . For purposes of illustration, the real and imaginary part of the horizontal velocity profile are displayed in Fig. 7.8. As this forcing includes a significant barotropic component, a barotropic flow is set at the eastern boundary that preserves the flux through the whole domain.

Fig. 7.9 shows a snapshot of the wave field, 12 M2 periods after the start of the simulation and Fig. 7.10 shows the evolution of the isopycnal where  $N(z)$  is maximum between 11 and 12 M2 periods after the start of the simulation. Unlike in E1 and as in E2, mode-1 ISWs can be seen. Their amplitude is nearly the same as in E2. Yet, the stratification used here is S1, as in E1 where no mode-1 ISWs were observed. This cannot be explained by a higher value of the horizontal phase speed of the ITB, as its wavelength is smaller than in E1 ( $\approx 15 \text{ km}$ ). From [GSG10] predictions (see Fig. 7.5), the sole ITB would rather force mode-2 ISWs.

It can be seen on Fig. 7.10 that the trains of ISWs in E3 are now separated by 55 km, meaning that they propagate approximately twice as fast as the ISWs observed in E2 and consistent with the observations in the Bay of Biscay. The ISWs observed in E3 could however be due to the upper tide experiencing nonlinear steepening and nonhydrostatic evolution into ISWs, as suggested by New & Pingree [NP00]. In this case, ISWs would be generated even without an ITB. To infirm this, a last experiment E4 is designed, based on E3 except that the ITB is “removed” from the forcing field by lin-

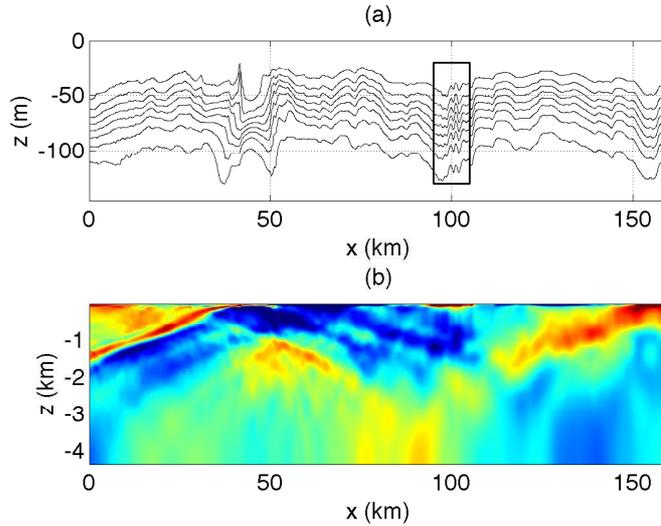


Figure 7.9: Caption as for Fig. 7.2, this time for E3, 12 M2 periods after the start of the simulation.

early interpolating this forcing between its values at depths  $z = -408$  m and  $z = -2980$  m and keeping it unchanged everywhere else (see Fig. 7.8). Figs. 7.11 and 7.12 show that, unlike E3, E4 displays no strong nonlinear features in the thermocline. Fig. 7.12 indicates also that the carrier wave of the ISWs in E3 can be superposed on the interfacial displacement in E4, which is the upper tide. It therefore seems that the local generation mechanism is very sensitive to the presence of a background wave field in the upper 100 m.

## 7.5 Conclusion and discussion

We have presented two-dimensional numerical experiments using parameters representative of the Bay of Biscay when local generation is observed. Two first experiments address the problem of an ITB impinging on a thermocline initially at rest. The first experiment E1, using a mid to late summer stratification that is typical of the Bay of Biscay when local generation is observed and a realistic ITB, does not lead to a convincing generation of ISWs, thus disagreeing with the observations. The second experiment E2 uses a slightly reduced density jump across the seasonal thermocline similar to that observed in late spring. In this case mode-1 ISWs are generated. The vertical structure (mode number) of the ISWs developing in E1 and E2 agree with the predictions of the far-field condition derived in [GSG10]. Nonetheless, the distance between two wave trains in E2 displays significant discrepancies with the observations. In the Bay of Biscay indeed, this distance is about

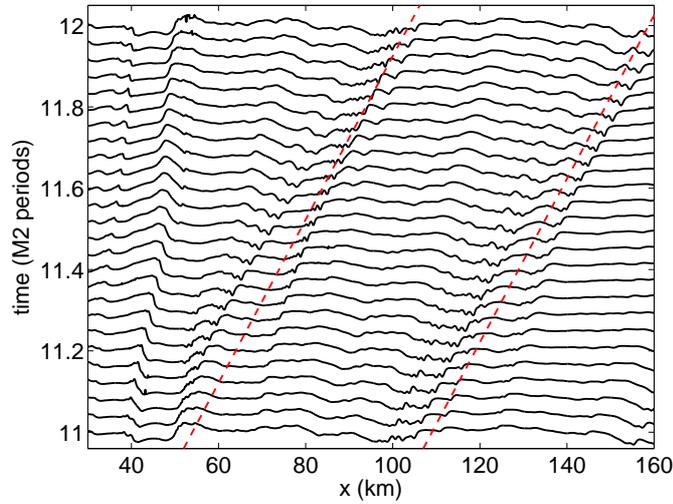


Figure 7.10: Caption as for Fig. 7.4, this time for E3. The two dashed, red lines are now separated by 55 km and correspond to velocities of  $1.23 \text{ m.s}^{-1}$  (namely, 55 km per M2 period). The large displacement located between 40 and 55 km corresponds to the ITB impact on the thermocline.

50 km, which is also the dominant wavelength of the internal tide in the upper 100 m (referred to as the upper tide), regardless of the characteristics of the ITB. In E2 by contrast, the ISW trains are separated by 25 to 30 km, close enough to 18 km, the horizontal wavelength of the forcing ITB, for it to generate mode-1 ISWs.

A possible explanation for this discrepancy relies upon the interaction of the ITB with the upper tide generated at the shelf break and propagating throughout the domain. A third numerical experiment E3 was thus designed, forced by the internal tide generated by a barotropic flow on the continental slope. The stratification is the same as in E1 (and as, therefore, in the Bay of Biscay when local generation occurs). This experiment shows that mode-1 ISWs are generated, each train being now separated by about 55 km, in agreement with observations. To investigate the role of the upper tide in the generation process of these ISWs, a fourth and last experiment E4 was designed, which forcing includes the upper tide but not the ITB. No ISWs appear but the interfacial displacement could be superposed on the carrier wave of the ISWs observed in the third experiment.

To sum up, E1 and E2 shows that an ITB impinging on a seasonal thermocline can generate ISWs but that the mechanism is very sensitive to the amplitude of the density jump across the seasonal thermocline, in agreement with [GSG10] as well as the predictions of previous works [Ger01, AGCT07]. E2 also shows that mode-1 ISWs are generated but with quantitatively different features than those of the ISWs observed in the Bay of Biscay. On the other hand, the upper tide alone does not evolve into trains of ISWs. Only

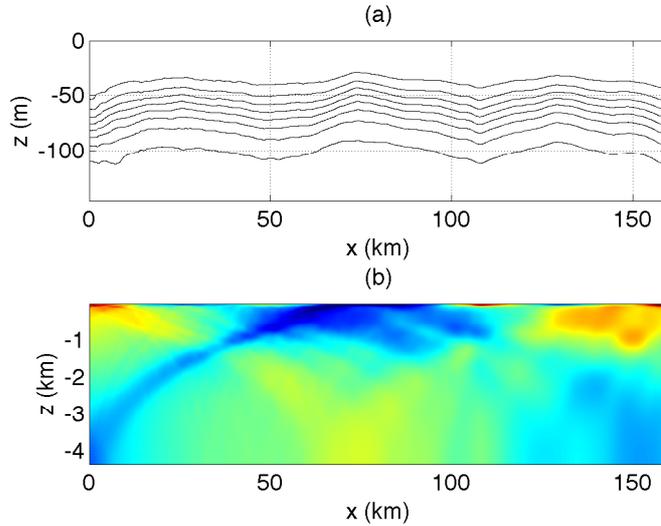


Figure 7.11: Caption as for Fig. 7.9, for  $E_4$ .

when an ITB interacts with the upper tide is the formation of ISWs observed, with physical characteristics<sup>18</sup> close to the observations. The propagation speeds and distance between trains of ISWs are now controlled by the upper tide but the ITB supplies a significant part of the energy necessary for the generation of ISWs, provided that the stratification allows for an efficient interaction of that beam with the thermocline. This mechanism is quite different than the classical image of the local generation process and could actually be invoked in many places of the world where ISWs are observed.

Conjectures on the mechanism of how energy is transferred to the thermocline in the presence of the upper tide can be proposed. For instance, the upper tide can be modelled as an oscillating horizontal shear flow. As this oscillating motion is synchronous with those induced in the thermocline by the ITB, the phase shift between the ITB and the upper tide may be such that  $c_1$  would be reduced by Doppler effect at the location of the impact of the ITB and hence brought closer to  $v_\phi$ . If it is brought close enough, the selection condition discussed about in §7.3.2 would predict that mode-1 ISWs are generated. Further analytical work is required to address the validity of this conjecture.

We are quite aware that several effects have been neglected. First, our numerical experiments are two-dimensional. Also, Gerkema *et al.* [GZMv08] showed that the ITB in the Bay of Biscay is very sensitive to non-traditional effects. Including these effects would modify the initialisation of experiments E3 and E4. Also, the relative amplitudes of the ITB and of the upper tide might be different than those set in E3. Performing three-dimensional realistic non-hydrostatic (and nonlinear) numerical experiments of the Bay of Biscay, still a computational challenge nowadays, appears to be necessary

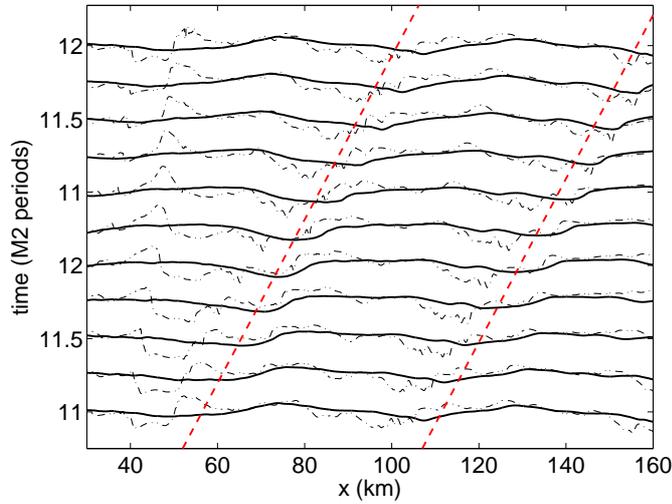


Figure 7.12: Caption as for Fig. 7.4, except that two isopycnals on the left side of the pictures are separated by  $1/10$   $M2$  periods and also by  $40$  m in terms of displacement amplitude. Solid lines refer to  $E4$ , dash-dotted lines to  $E3$ .

to assess the respective roles of the ITB and the upper tide in the generation of ISWs and in the control of their spatial structure

**acknowledgements** N.G. is supported by a grant from the Direction Générale de l'Armement. This work has been supported by ANR contract PIWO (# 08-BLAN-0113). Numerical experiments were performed on the French supercomputer center IDRIS, through contracts 080580 and 090580. We thank Yves Morel and Annick Pichon for sharing their knowledge about the Bay of Biscay.

# Génération locale : quelques perspectives

## Expériences de laboratoire

Comme mentionné en §6, des expériences de laboratoire ont été menées sur la plate-forme Coriolis en septembre 2008<sup>2</sup>. Il est tout à fait possible de reproduire précisément ces expériences à l'aide de simulations numériques directes.

Le premier intérêt serait bien sûr d'apporter une validation expérimentale aux critères définis en §6. Un deuxième intérêt est que pour interpréter correctement les observations expérimentales et notamment la structure spatiale des ondes solitaires, les auteurs ont dû prendre en un compte un courant horizontal situé juste en-dessous de la surface et autour de la pycnocline. Cela n'est pas sans rappeler la sensibilité du processus de génération locale à la marée supérieure et permet d'imaginer de nouvelles perspectives de recherche.

## Perturbations des ondes solitaires

Les résultats des expériences de laboratoire et numériques (*cf.* §7) montrent que le processus de génération locale est très sensible aux courants situés au niveau de la pycnocline. Or, l'océan est un milieu bien moins contrôlé que ces expériences. En plus de la marée supérieure, on peut penser à la présence de tourbillons méso-échelles tels que des SWODDIES (Slope Water Oceanic eDDIES) ou à des courants irréguliers tels que la Navidad ([Cai04]). On a là une voie possible pour affiner la compréhension du processus dans le Golfe de Gascogne.

De plus, ces structures venant perturber la génération locale pourraient la masquer : il est possible qu'en plusieurs endroits du globe, des ondes solitaires soient générées, dont les caractéristiques seraient reliées à des structures ostensiblement présentes, telle que la marée interne de mode-1 pour prendre

---

2. Menées par Theo Gerkema et avec comme participants Matthieu Mercier, Manikandan Mathur, Louis Gostiaux, Jorge Magalhães, Thierry Dauxois et José Da Silva.

l'exemple de la mer de Chine du Sud ([FLP09]). Il n'est cependant pas à exclure que dans plusieurs cas, la génération locale soit un mécanisme discret mais déterminant pour fournir de l'énergie lors de la génération d'ondes solitaires.

Pour en revenir à la marée supérieure, le déphasage entre le rayon de marée interne et la marée supérieure pourrait être un élément majeur pour une transmission efficace d'énergie dans la pycnocline. Il est possible que la situation envisagée en §7.4 ait été favorable de ce point de vue. C'est un point relativement aisé à vérifier : la phase étant un élément du forçage sur lequel on peut jouer, il suffirait de déphaser progressivement le forçage des 200 premiers mètres sous la surface avec le reste.

## Rotation terrestre

Les Chapitres 6 et 7 concernent la génération des ondes solitaires. Dans le Chapitre 7, on s'intéresse à leur propagation mais uniquement pour vérifier la distance entre deux trains. Un élément important de la propagation n'a pas été évoqué car s'écartant du sujet principal du dit chapitre : l'effet de la rotation.

Comme expliqué en §2.2.3, la sensibilité des ondes solitaires à la rotation terrestre peut apparaître lorsqu'on observe leur propagation sur de longues distances. De plus, la rotation se manifeste par une radiation horizontale d'ondes par les ondes solitaires, qui recréent d'autres ondes solitaires plus loin, le processus global donnant naissance à des solitons d'enveloppe. Nous n'observons pas d'enveloppe mais suivre une onde solitaire particulière est rendu difficile par un phénomène ressemblant à cette radiation d'ondes, que l'on peut deviner dans les figures 7.4 et 7.10. En effet, sur ces images, il est relativement aisé de suivre un paquet d'ondes en général, mais il est plus dur de suivre une onde en particulier, typique d'un phénomène de dispersion forte comme dans le modèle de Grimshaw et Helfrich [GH08].

Reste à savoir si une connexion peut être faite entre nos simulations et les résultats de Helfrich et Grimshaw. Si tel est le cas, une étude de l'évolution à long terme des ondes solitaires, dépassant le cadre de la génération locale, pourrait être entreprise.

# Conclusion

Un des buts de l’océanographie physique actuelle est de connaître en quels endroits et par quels processus les ondes internes peuvent contribuer au mélange dans l’océan. Nous avons vu lors de ce travail que les ondes internes, lorsqu’elles rencontrent des obstacles, sont sujettes à de radicales transformations susceptibles de catalyser ce mélange.

Les attracteurs d’ondes internes sont un exemple frappant de sensibilité des ondes internes aux conditions de réflexion. En effet, lorsque confinées dans un espace clos possédant au moins une paroi inclinée, ces ondes internes se focalisent dans un espace restreint et adoptent une structure particulière indépendante du forçage tant que celui-ci est à grande échelle. Nous avons mené les premières simulations numériques directes d’un tel attracteur et les avons validé par comparaison quantitative à une expérience de laboratoire. Cette simulation nous a permis de mettre en évidence que la structure de l’attracteur était similaire à celle d’un rayon et que lorsque ce rayon se réfléchissait contre une paroi horizontale, des effets non-linéaires pouvaient se produire.

Un cas particulier de réflexion sur une paroi horizontale a ainsi occupé une grande partie de ce travail. L’océan est souvent caractérisé dans ses 100 premiers mètres sous la surface par la présence d’un brusque saut de densité, ou pycnocline. Les rayons d’ondes internes océaniques ont des échelles spatiales suffisamment faibles pour que lorsqu’ils rencontrent cette pycnocline, leur énergie y soit partiellement réfléchi. La partie transmise, elle, peut évoluer et créer des ondes solitaires, comme observé dans le Golfe de Gascogne central mais jamais simulé numériquement. Nous avons abordé le problème par un cas académique à l’aide de simulations numériques directes. L’exclusivité de la démarche a permis de mettre en évidence que l’épaisseur finie de la pycnocline jouait un rôle fondamental dans ce processus. En effet, nous avons montré que des modes d’ondes solitaires arbitraires pouvaient être générés, ce qui ne pourrait être le cas si l’interface était infiniment fine, le seul cas envisagé jusqu’à présent dans le cadre de travaux théoriques. Nous avons pu aller plus loin et définir des critères pour qu’un mode en particulier soit généré. Plus précisément, deux critères ont été dérivés, le premier basé sur la comparaison entre la vitesse de phase du mode “à générer” et la vitesse de phase du rayon forçant, le second basé sur une condition géométrique

d'interférence constructive, similaire à une condition de Bragg.

Ces critères ont ensuite été testés sur une configuration plus réaliste, à savoir sur des simulations numériques bi-dimensionnelles de la configuration du Golfe de Gascogne, le rayon étant recréé à une des parois latérales. Il se trouve que le second critère ne donne pas un accord quantitatif suffisant pour considérer qu'il prédise correctement les résultats observés dans les simulations. L'interprétation qualitative qu'il fournit reste cependant tout à fait crédible. En revanche, la prédiction issue du premier critère est en très bon accord avec les résultats numériques. Un problème survient cependant : les résultats numériques – et donc le premier critère – ne sont pas en accord avec les observations dans le Golfe de Gascogne, les ondes solitaires se propageant deux fois moins vite dans les simulations que dans l'océan. Deux interprétations viennent alors à l'esprit. La première est que le critère prédictif comme la simulation numérique reproduisent insuffisamment précisément les processus du Golfe de Gascogne. La deuxième est que ce qui se produit dans le Golfe de Gascogne est différent de l'image que l'on s'en fait habituellement, à savoir qu'un rayon interagirait avec une pycnocline *au repos*. En effet, les ondes solitaires dans le Golfe de Gascogne central se propagent à la même vitesse que la composante sub-surface de la marée interne, c'est-à-dire deux fois plus rapidement que la vitesse de phase du rayon. Une autre simulation numérique a alors montré qu'en effet, prendre en compte dans le forçage à la fois le rayon et la marée interne de sub-surface permet de générer des ondes solitaires se propageant à la même vitesse que dans l'océan. Dans ses grandes lignes, le processus de génération des ondes solitaires dans le Golfe de Gascogne central imaginé jusqu'à présent est sauf : une dernière simulation a montré que la marée interne de sub-surface seule ne peut générer d'ondes solitaires et que le rayon est bien nécessaire.

Cela pose le problème de la sensibilité des ondes internes à d'autres structures cohérentes. Il s'agissait d'une autre onde interne dans le Golfe de Gascogne, dans d'autres cas il pourrait s'agir de courants, de tourbillons... Une problématique que l'on retrouve lorsqu'on étudie la réflexion d'ondes planes sur une paroi inclinée, ce que nous avons réalisé expérimentalement sur la grande plate-forme Coriolis. Alors que le but initial était d'étudier les interactions entre ondes incidente, réfléchie et générées non-linéairement, les résultats obtenus ont été fortement perturbés par l'apparition d'un écoulement moyen dipolaire inattendu. Inattendu par le simple fait que ce dipôle ne peut se développer si le champ d'ondes est contraint latéralement par des parois et que notre configuration expérimentale et de traitement de données est une des rares à pouvoir s'affranchir de ces parois, d'où le fait que nous ayons été parmi les premiers à observer ce phénomène. Le dipôle en question semble créé par le champ d'ondes lui-même, alimenté par une partie de la puissance dissipée à la réflexion. Cette simple observation est susceptible d'avoir de grandes conséquences. L'alimentation du dipôle étant cumulative, il est susceptible d'atteindre des dimensions et d'induire des vitesses de fluide

importantes. De plus, le moindre écart à la tri-dimensionnalité pourrait être suffisant pour son établissement, ce qui est systématiquement le cas dans l’océan. Cela peut potentiellement remettre en question 40 ans d’expériences de laboratoire, toutes bi-dimensionnelles et confinées latéralement, et peut aussi poser un véritable défi aux numériciens : alors que cette thèse illustre le fait que les simulations numériques ont atteint un niveau de résolution suffisant pour reproduire des expériences de laboratoire bi-dimensionnelles, elles ne sont pas encore en moyen de reproduire précisément les phénomènes tri-dimensionnels relatifs aux ondes internes.

Cela nous mène aux perspectives de ce travail, la première étant l’étude des effets tri-dimensionnels susceptibles de modifier tous les résultats énoncés jusqu’ici. La question reste ouverte et il est difficile d’énoncer des directions précises. Dans le domaine des attracteurs cependant, des prémices se font déjà fait sentir en astrophysique ([RV10]) et dans le laboratoire ([HDDM10]). D’autres groupes, tel que celui de l’ENS Lyon, en arrivent aux mêmes conclusions.

Sur certains aspects plus spécifiques du travail effectué pendant ces 41 mois, les perspectives restent nombreuses. Ainsi, l’étude du mélange n’a quasiment pas été faite bien qu’elle représente la motivation initiale de ce travail et qu’elle soit judicieuse dans chaque cas. Le cas de l’attracteur par exemple est un excellent laboratoire pour l’étude du déferlement de rayons d’ondes internes. Pour ce qui est de la génération d’ondes solitaires par un rayon d’ondes internes, les critères dérivés sont empiriques et nécessitent une étude analytique rigoureuse ainsi que de plus amples comparaisons avec des cas concrets afin de préciser leurs caractéristiques. La comparaison avec les expériences en cours peut apporter de nombreux éclaircissements sur ce dernier point. De plus, pour le cas de l’océan, l’effet à long terme de la rotation terrestre sur la propagation des ondes internes pourrait être étudié. Enfin, et cela rejoint le paragraphe précédent, la sensibilité des ondes internes aux phénomènes perturbateurs, qu’ils soient d’origine 3D ou non, pourrait être entreprise. Par exemple, comprendre en quoi la marée de sub-surface modifie la structure des ondes forcées par le rayon de marée interne ou achever l’interprétation de la génération de l’écoulement moyen dans l’expérience par les effets dissipatifs semblent pouvoir être menés dans un futur proche.



# Annexes



## Annexe A

# Coefficients d'interaction des triades résonantes

Nous allons ici calculer les coefficients d'interaction  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$  dont il a été question en §2.1.1.

Nous repartons de l'équation (2.7). Il se trouve que  $J(\zeta_1, \zeta_2) = -J(\zeta_2, \zeta_1)$ , ce qui permet de développer la somme double :

$$\sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-3 \\ q \neq 0}}^3 a_q J(\psi_p, \psi_q) = \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p (a_p - a_q) J(\psi_p, \psi_q). \quad (\text{A.1})$$

De plus,

$$\begin{aligned} \partial_X \left( \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-3 \\ q \neq 0}}^3 a_q J(\psi_p, \psi_q) \right) &= \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p (a_p - a_q) (k_{x,p} k_{z,q} - k_{x,q} k_{z,p}) \partial_X (\psi_p \psi_q), \\ &= \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p i(a_p - a_q) (k_{x,p} k_{z,q} - k_{x,q} k_{z,p}) (\kappa_{X,p} + \kappa_{X,q}) \psi_p \psi_q, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où  $X$  peut être  $t$ ,  $x$  ou  $z$  et  $\kappa_{X,p}$  peut être dans le même ordre  $-\omega_p$ ,  $k_{x,p}$  ou  $k_{z,p}$ .

Ainsi, chaque terme du membre de droite de l'équation (1.21) s'écrit :

$$\partial_t J(\psi, \hat{\nabla}^2 \psi) = \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p i a_{pq} \psi_q \psi_p, \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_x J(\psi, b) = \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p i b_{pq} \psi_q \psi_p, \quad (\text{A.4})$$

$$\partial_z J(\psi, v) = \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p i c_{pq} \psi_q \psi_p, \quad (\text{A.5})$$

avec, d'après les équations (2.2) et (2.3) et en se rappelant que  $\hat{\nabla}^2 \equiv (\sin^2 \theta_1) \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 + (\cos^2 \theta_1) \partial_{\hat{z}\hat{z}}^2$  :

$$a_{pq} = (k_{x,p} k_{z,q} - k_{x,q} k_{z,p}) (\omega_p + \omega_q) \times \\ ((k_{x,q}^2 - k_{x,p}^2) \sin^2 \theta_1 + (k_{z,q}^2 - k_{z,p}^2) \cos^2 \theta_1), \quad (\text{A.6})$$

$$b_{pq} = (k_{x,p} k_{z,q} - k_{x,q} k_{z,p}) (k_{x,p} + k_{x,q}) \left( \frac{k_{x,q}}{\omega_q} - \frac{k_{x,p}}{\omega_p} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$c_{pq} = (k_{x,p} k_{z,q} - k_{x,q} k_{z,p}) (k_{z,p} + k_{z,q}) \left( \frac{k_{z,q}}{\omega_q} - \frac{k_{z,p}}{\omega_p} \right). \quad (\text{A.8})$$

Ainsi, le membre de droite de l'équation (1.21) s'écrit finalement :

$$MD = \sum_{\substack{p=-3 \\ p \neq 0}}^3 \sum_{\substack{q=-p \\ q \neq 0}}^p i \alpha_{pq} \psi_q \psi_p, \quad (\text{A.9})$$

avec :

$$\alpha_{pq} = a_{pq} - (N^2 \sin^2 \theta) b_{pq} + (f^2 \cos^2 \theta) c_{pq}. \quad (\text{A.10})$$

Dans le cas d'une résonance décrite par le système (2.15)–(2.17), ce sont les termes multipliés par les coefficients  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{-1,3}$  et  $\alpha_{-2,3}$  (ainsi que  $\alpha_{-1,-2}$ ,  $\alpha_{1,-3}$  et  $\alpha_{2,-3}$ ) qui vont résonner. Chacun de ces termes devant être égalisé avec, respectivement,  $-2i\omega_3 \dot{A}_3$ ,  $-2i\omega_2 \dot{A}_2$ ,  $-2i\omega_1 \dot{A}_1$ , on en déduit que les coefficients d'interaction s'écrivent :

$$\delta_1 = -\frac{\alpha_{-2,3}}{2\omega_1}, \quad (\text{A.11})$$

$$\delta_2 = -\frac{\alpha_{-1,3}}{2\omega_2}, \quad (\text{A.12})$$

$$\delta_3 = -\frac{\alpha_{12}}{2\omega_3}. \quad (\text{A.13})$$

Heureusement, les expressions des  $\alpha_{pq}$  se simplifient quelque peu par rapport aux expressions (A.6)–(A.10) en utilisant les équations (2.15)–(2.17).

## Appendix B

# Comparison of laboratory and numerically observed scalar fields of an internal wave attractor

Publication: J. HAZEWINDEL, N. GRISOUARD et S. B. DALZIEL : Comparison of laboratory and numerically observed scalar fields of an internal wave attractor, *Eur. J. Mech. B*, in press. [[HGD10](#)]

**abstract** Observations of internal gravity wave beams are frequently accompanied by theory that is purely two-dimensional, or two-dimensional numerical models. Although qualitative agreement between such models and laboratory experiments has been demonstrated, quantitative comparison has only been possible in a limited range of cases. Here, we present a quantitative comparison for internal wave attractors in the laboratory and a two-dimensional non-hydrostatic numerical model. To make a closer connection with previous theoretical work, the experimental and numerical results are presented in terms of the streamfunction and density perturbation, rather than the measured velocity and density gradient fields. The streamfunction is commonly used in the two-dimensional descriptions, e.g. to predict spatial patterns found in an enclosed stratified fluid in the laboratory. We demonstrate that, although the laboratory experiment in a narrow tank is only semi-two-dimensional, the flow is well described by two-dimensional internal wave theory and the numerical model reproduces quantitatively comparable attractors. The observed streamfunction field is compared with theoretical predictions, addressing an open question on the form of the streamfunction for internal wave attractor in a trapezoidal domain. The streamfunction has a simple spatial structure with sharp gradients at the attractor separating regions of nearly constant value outside the attractor.

*Keywords:* Stratified fluids – Internal waves – Attractors – MIT-gcm – Synthetic schlieren

## B.1 Introduction

Internal wave attractors can arise in stably stratified fluids in a confined domain [ML95] and are observed in the laboratory [MBSL97]. In a trapezoidal tank of uniform width with one sloping end-wall, internal waves reflect from the sloping wall into the domain and are focused towards an attractor. Repeated reflection from the sloping wall leads to an energy cascade to the higher wave numbers [HvDM08]. With a steady forcing at large scales, a balance is reached between the energy cascade and dissipation at the viscous scale, observed as a steady state internal wave attractor. The steady state internal wave amplitude can be increased by using different forcing mechanisms [HvD<sup>+</sup>07]. Quite generally, stable continuously stratified fluids support internal wave beams resulting from a disturbance in the fluid [Goe43, TS72, SDHL99, PT05, GDD<sup>+</sup>06]. The properties of internal gravity waves in laboratory experiments have often been observed and measured using schlieren [MR67] and more recently synthetic schlieren [DHS00, SDHL99] techniques. Synthetic schlieren observations provide an integrated view and usually assume homogeneity of the fluid response in the direction of view, as if it were two-dimensional. These observations are sensitive to the gradient of the density perturbation, but it is possible to invert this to recover the perturbation density (see [DHS00] and in a simpler form in [SDHL99]). However, it has become customary to present just the directly observed gradient information rather than the more natural density perturbation itself. By its very design, PIV (particle image velocimetry) leads to planar velocity measurements in the fluid. Again assuming homogeneity in one direction, the measured velocity fields can be combined in streamfunction  $\psi$ . The streamfunction relates the velocity fields,  $(u, w) = (-\psi_z, \psi_x)$  (where we anticipate that in the following  $u$  will be the velocity component in the horizontal  $x$  direction and  $w$  the velocity in the vertical  $z$  direction). This streamfunction is also the field considered in the theory for internal wave attractors [ML95, Maa05].

The laboratory experiments of Hazewinkel et al. [HvDM08] were very successfully modelled in a numerical study [GSP08] using the MIT general circulation model [MAH<sup>+</sup>97] in a two-dimensional set-up. Naturally, the calculations were done in terms of the density field, but, in order to compare with the observation from the laboratory, the gradient density fields were presented. The very strong correspondence between the results of laboratory and numerics allows for further comparison. It suggests that indeed the laboratory experiments can be assumed two-dimensional. If this is confirmed, the use of the streamfunction makes sense and wider connection can

be made between theory and observations. The use of numerical simulation and laboratory experiment can then answer the open question as to what is the streamfunction of internal wave attractors is in a real viscous fluid.

Theoretically, the two-dimensional inviscid streamfunction for free internal waves in an enclosed domain with suitably re-scaled coordinates, can be found exactly by solving the spatial wave equation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{B.1})$$

with  $\psi = 0$  at the arbitrarily shaped boundaries, by means of ray tracing [ML95]. The equation can be solved by noting that an arbitrary complex function  $f$  is preserved along the characteristics  $x - z$  and  $x + z$ . From any starting point at the surface the characteristics reflect through the domain, creating a web of connected points. Once the web is constructed, the prescription of  $f$  at the surface determines the spatial structure of  $\psi(x, z)$ . However, as  $f$  is preserved along the rays, there are connections between surface points. This means that the surface prescription of  $f$  should be limited to so-called fundamental intervals. This localised prescription then determines the structure of  $\psi(x, z)$  in the whole domain. An example of such a streamfunction for a rectangular tank with a sloping side wall (trapezoid) was presented by [MBSL97], see figure B.1a. This geometrically constructed, unforced internal wave pattern is self-similar in space and has fine structures around the attractor, set only by the form of  $f$  across the fundamental intervals at the surface. The corresponding analytic solution for streamfunction recovers these fine structures and features a self-similar spectrum [Maa09]. A modified picture for the streamfunction was found [LM08] for a continuous forcing in the form of seiche wave at the surface. In order to preserve this continuous pressure along the surface it was assumed that the imposed values did not influence surface pressure values elsewhere, even though the points were connected by the characteristics. The modified picture for the streamfunction, although still inviscid, lost most of the fine structure. It became more a plateau type, that is, the streamfunction has constant values outside and inside the attractor with a sharp jump in value at the attractor, see figure B.1b. Similar solutions for the streamfunction were found in numerical work, using a regularisation procedure for the discretised problem, based on minimisation of the energy [SSMB07].

The objectives of this paper are twofold. Building further on the successful two-dimensional numerical simulation of the laboratory experiments [GSP08], we now compare results from laboratory and simulation that both feature a tank scale sloshing as internal wave forcing. First we use the numerically obtained density field to verify the integration of the density gradient fields observed in the laboratory, and use this field to check if two-dimensional theory applies in the laboratory experiment. Secondly, we compare the observed streamfunction from both laboratory experiments and from numerical

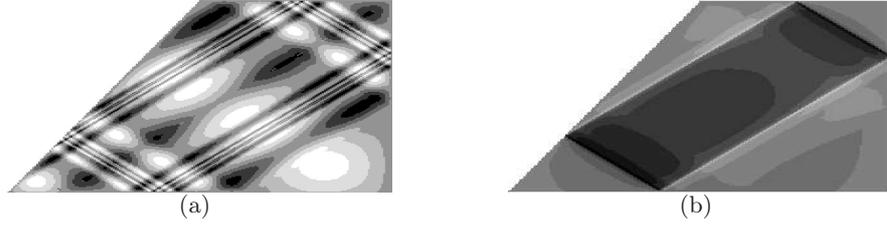


Figure B.1: Streamfunction for inviscid internal wave attractor as found by [MBSL97] and [LM08]. a) A free wave solution, b) the forced wave solution. [Courtesy Frans-Peter Lam]

experiments with the prediction from two-dimensional theory for a sloshing type of forcing.

## B.2 Experimental setup

Fluid height	$H$	=	250	mm
Length	$L$	=	453	mm
Width (Lab)	$W$	=	120	mm
Angle of sloping wall	$\alpha$	=	0.47	rad
Buoyancy frequency	$N$	=	$2.2 \pm 0.1$	rad s <sup>-1</sup>
Viscosity	$\nu$	=	1	mm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
Diffusivity	$\kappa$	=	$1.3 \times 10^{-3}$	mm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
Prandtl number	$Pr = \nu/\kappa$	=	770	
Forcing period	$T$	=	$5.12 \pm 5 \times 10^{-3}$	s
Forcing frequency	$\omega_e = 2\pi/T$	=	1.23	rad s <sup>-1</sup>

Table B.1: Parameters of both experiments §B.2.

### B.2.1 Description of laboratory experiments

For the laboratory experiments a trapezoidal tank containing a fluid with dimensions  $L \times W \times H$  is used, see table B.1. As the tank is relatively narrow, the motion was assumed to be nearly two-dimensional in previous work. The tank is filled using a pair of peristaltic pumps with density stratification that is linear in the vertical. The stratification is characterised by buoyancy frequency  $N = \sqrt{-g/\rho_0 d\bar{\rho}/dz}$  with  $\rho_0$  the reference density of the fluid,  $\bar{\rho}(z)$  the density stratification and  $g$  the acceleration due to gravity. We use a density probe that can traverse vertically through the tank to establish  $N$ . To measure the motions of the fluid in the tank, we make use of both synthetic schlieren and PIV techniques, as described in [HvD<sup>+</sup>07, HDDM10]. For the synthetic schlieren, we have a dot pattern on a light-bank 0.5 m

behind the tank fixed in the laboratory. The internal waves are forced by horizontally oscillating a platform supporting the tank with an amplitude of 2 cm at fixed frequency  $\omega$ . This horizontal motion of the platform results in a weak sloshing of the water in the tank. The sloping side wall converts this barotropic sloshing into weak baroclinic internal waves that focus towards the attractor to form wave beams [HvDM08]. As the tank and fluid are horizontally oscillating in front of the dot pattern, we phase lock the camera with the oscillation, capturing 32 frames evenly spaced through each forcing period. This allows us to perform the synthetic schlieren during the steady state of the experiment, with each of the 32 snapshots having its own reference frame to remove the influence of any optical imperfections in the tank. The particles for the PIV are Iriodin Glitter Bronze 530 from which we selected fine particles that slowly sink out in the fluid. The images used for the PIV are captured using the same phase-locked technique as for the synthetic schlieren. Both synthetic schlieren and PIV techniques rely on pattern matching. In the case of synthetic schlieren, the dot pattern gets distorted by density and hence refractive index changes in the fluid. The apparent displacement of the dots due to this distortion is determined by correlation with an unperturbed image. For the PIV, the particle patterns from frame to frame are tracked and represent the local Eulerian velocity field (though the particles are Lagrangian of course). The data are analyzed with the DigiFlow software (Dalziel Research Partners, Cambridge). For simplicity and to maximise the signal quality, we used separate experiments for the synthetic schlieren and PIV measurements. This was possible as the experiments proved to be highly repeatable, with differences of less than 3% even after emptying and refilling the tank. Typically, we used a given stratification twice, first for synthetic schlieren then, after adding particles, for PIV, further reducing the difference in the conditions between SS and PIV runs.

### B.2.2 Description of numerical simulation

The numerical configuration is nearly the same as in [GSP08]. The MIT general circulation model is used in a two-dimensional configuration to solve the nonlinear, nonhydrostatic, incompressible Boussinesq equations that govern the fluid dynamics [MAH<sup>+</sup>97]. Its second-order finite volume implementation allows for a simple treatment of the topography (as opposed to spectral methods). No sub-grid parametrization is used and the simulation models diffusion using the ordinary Laplacian operator. They are at a high enough resolution to ensure the motion is well resolved. Indeed, the spatial resolution  $\Delta$  is 0.5 mm in both vertical and horizontal directions, meaning that the width of the attractor ( $\sim 5$  cm) is resolved by about hundred points. For technical reasons regarding the way the code handles the equations, the numerical domain and the vertical density gradient are flipped in the

$z$ -direction relative to those of the experiments. The Boussinesq equations are indeed invariant under this transformation and to keep the comparison simple, the figures related to the numerical simulation will be flipped again in the  $z$ -direction. We discretise time into 250 time steps per forcing period. The fastest wave propagating in the domain being the mode-one internal wave of horizontal phase speed  $H\sqrt{N^2 - \omega_e^2}/\pi$ , the Courant number in our configuration is therefore

$$C = \frac{H\sqrt{N^2 T^2 - 4\pi^2}}{250\pi\Delta} \approx 6$$

The physical parameters are based on those used in the laboratory experiment and are listed in table B.1. The numerical physical setting is nearly the same as in the laboratory, although some discrepancies remain. A first difference lies in the forcing that is of a different nature than the forcing in the laboratory one. Indeed, in the laboratory experiment the horizontal velocity of the fluid vanishes (relative to the tank) at the vertical wall, whereas for the numerical simulation we use an open boundary condition in the form of an oscillating current  $(u_b, w_b)$  at the vertical wall, reproducing a mode-1 internal wave:

$$\begin{aligned} u_b(t, z) &= \frac{A\sqrt{N^2 - \omega_e^2}}{N} \sin(\omega_e t) \cos \frac{\pi z}{H} \\ w_b(t, z) &= -\frac{A\omega_e}{N} \cos(\omega_e t) \sin \frac{\pi z}{H} \end{aligned}$$

The amplitude of the mode-one wave,  $A = 0.4$  mm/s, is chosen so that the maximal velocity within the attractor field is in close agreement with the experimental one, which is the order of 10 mm/s. Another difference lies in the purely two-dimensional numerics that cannot take into account the dissipation that occurs in viscous shear layers at the front and back walls in the laboratory experiment. The long horizontal side of the trapezium, which is located at the bottom of the experiment but at the top of the numerical domain, is coded with a linear free-surface condition. A free-slip boundary condition is implemented for the short horizontal side (which is located at the bottom of our numerical domain) and the sloping boundary of the trapezium in order to inhibit viscous layers that would be underresolved. Indeed, the Reynolds number is higher where the beams reflect against boundaries. With a typical fluid velocity of 1 cm/s, a typical scale of 50 mm and a viscosity  $\nu$  as defined, the Reynolds number there is about 500, low enough for the boundary layer to be considered as laminar. The typical thickness of the boundary layer for an oscillating field is  $\sqrt{\nu/\omega} \simeq 1$  mm, which is too small to be resolved by our grid. As noticed in [GSP08], the absence of viscous effects at the walls might lead to a noticeable underestimation of the dissipation at

the boundaries. Finally, the vertical boundary is where the forcing is applied, which is a boundary condition by itself.

A linear equation of state is used and thermal expansion coefficient is chosen such that the stratification is linear in temperature, and thus described by constant  $N$ . Thermal diffusivity  $\kappa$  is set to the value for the salt diffusion in the laboratory and no heat flux is prescribed at the boundaries.

### B.2.3 New method of representing experimental data

In most previous work the results of the synthetic schlieren imaging are presented in terms of the gradient perturbation buoyancy fields [YSP07, DCSD07],  $(b_x, b_z) = -g/\rho_0 \nabla \rho'$ , as these are directly found from the distortions of the dot pattern by density perturbation  $\rho'$ . Here, we introduce the integrated field

$$b = \nabla^{-1}(b_x, b_z). \quad (\text{B.2})$$

Although we expect  $b = \nabla^{-1}(b_x, b_z)$ , direct integration is complicated by noise in the experimental measurements of the irrotational  $\nabla b$  field, leading to an additional rotational part. We thus choose to integrate  $b = (g/\rho_0)\rho'$  through a least squares procedure that minimises the energy contained in the rotational part, see the Appendix for details. In summary, we note that the least squares solution for  $b$  on a regular two-dimensional grid with an irregular boundary, for each point in the domain or on the boundary, corresponds to taking the mean of the solutions calculated from the (up to four) immediately neighbouring points at which the solution exists. The structure of this problem then leads itself to a simple iterative solution, convergence of which is greatly enhanced by formulating in a multigrid framework. Only a single arbitrary constant of integration is required, here selected so that the spatial mean of  $b$  vanishes. We note in passing that setting  $b = 0$  outside the domain and then using the regular procedure (e.g. using library function `intgrad2` [John D'Errico, Mathworks]) for integrating the gradient in a rectangular domain leads to a slightly larger error, but provides a good alternative. The main problem points are found to be the sloping wall and the reflection points at the walls and surface. However, the difference fields,  $b_{x,z} - \nabla(\nabla^{-1}(b_x, b_z))$  are at most 5% in the reflection points and much smaller elsewhere.

We can use the same multigrid least squares iteration procedure to determine the streamfunction from

$$\psi = \nabla^{-1}(w, -u), \quad (\text{B.3})$$

effectively minimising the energy of the non-solenoidal part of the measured  $(u, w)$ .

Two-dimensional linear internal wave theory relates the buoyancy  $b$  with the vertical velocity. This is readily understood since, in the absence of diffusion, the density surfaces move up and down with the vertical velocity. The relation,

$$b = -i \frac{N^2}{\omega} \psi_x, \quad (\text{B.4})$$

allows for another check on the integration: a check that ought to be included whenever velocity and buoyancy fields are measured separately. In the numerical simulation this relation is fully recovered, as expected from the two-dimensional code. In the laboratory experiment it provides both a check whether our integration of the buoyancy field works, and a validation of our assumption that we measure an essentially two-dimensional field. This assumption underlies most of the previous work on attractors in narrow tanks [MBSL97, HvDM08, HvD+07, HDDM10] and practically all previous experimental studies to internal waves.

### B.3 Results

For the parameters used in the laboratory, the density gradient fields reveal a simple, essentially rectangular attractor with a shape very similar to that presented by previous authors [HvDM08, GSP08]. From the PIV observations, we find the accompanying velocity fields. The forcing is somewhat stronger than that used by [HvDM08, GSP08], giving shear velocities in the attractor branches that are an order of magnitude larger, i.e.  $10 \text{ mm.s}^{-1}$ . The velocity fields in the laboratory are poorly resolved in places, due to the combination of low seeding densities (particularly under the sloping boundary), and the wave-driven net-drift of PIV-tracers [HDDM10] (this net-drift eventually results in a weak three-dimensional flow).

We observe the growth of an attractor in about twenty periods, featuring the generation of low-wavenumber internal wave beams from the sloping wall and the subsequent focussing, linear wavenumber cascade, towards the attractor. The wavenumber spectrum achieves a steady state once the high-wavenumber side of the spectrum reaches the dissipation length-scale. From this steady state we obtain the perturbation gradient density fields and velocity fields. The experiments were forced during 50 periods.

We calculate the density perturbation field by integrating the gradient fields measured by synthetic schlieren and then perform harmonic analysis on the integrated fields over the last twenty periods. The resulting perturbation density field is compared with the harmonic analysis of the perturbation density from the numerical simulation. From the harmonic analysis we obtain a real and an imaginary part that are combined to one complex field, so that we can plot both the amplitude and phase of this complex field. Amplitude and phase show the imprint of the attractor, visible in figure B.2. The

amplitude field reveals a decay in the clockwise direction of the branches (the internal wave beams) from the sloping wall. Compared with the numerical simulation, the cross-sections of the attractor branches are wider in the experiment but the values are comparable. The same difference in confinement is observed in structure of the phase. Although values are in agreement, the angle of propagation in the laboratory experiment is different in the upper and lower part of the fluid. This indicates a non-constant  $N$  and results in an attractor that looks a bit different.

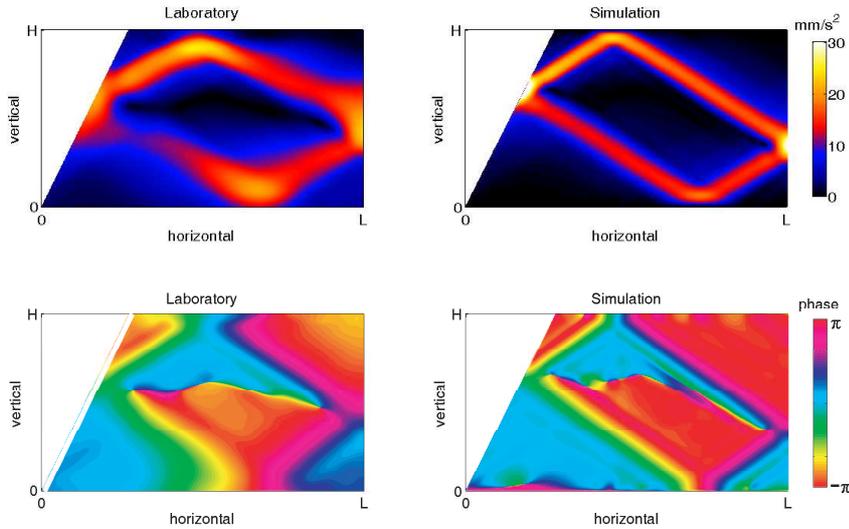


Figure B.2: The amplitude and phase of the perturbation buoyancy after harmonic analysis. Laboratory on the left and numerical model on the right

Figure 3 uses relation 4 to compare the buoyancy field from the integrated synthetic schlieren data and the vertical velocity component from the PIV. As the synthetic schlieren and PIV measurements are performed separately, we leave out the phase part (the  $-i$  in equation B.4), instead we compare absolute values. The structure of both fields is very similar, apart from the region under the slope where we cannot measure the velocity. Where both measurements exist, the values differ by less than 5%.

As for the density, from harmonic analysis we obtain real and imaginary components for vertical and horizontal velocity fields. These are integrated to provide the complex amplitude of the streamfunction (and can be combined to the complex streamfunction field). We do this for both numerical simulation and laboratory experiment and the show real part in figure B.4. The actually measured velocities and the derivative of  $\psi$  differ less than 1%. The observed streamfunctions are similar but again show, as would be expected, the different angle of propagation. They both reveal that a realistic streamfunction field is of simple shape. The numerical simulation results in

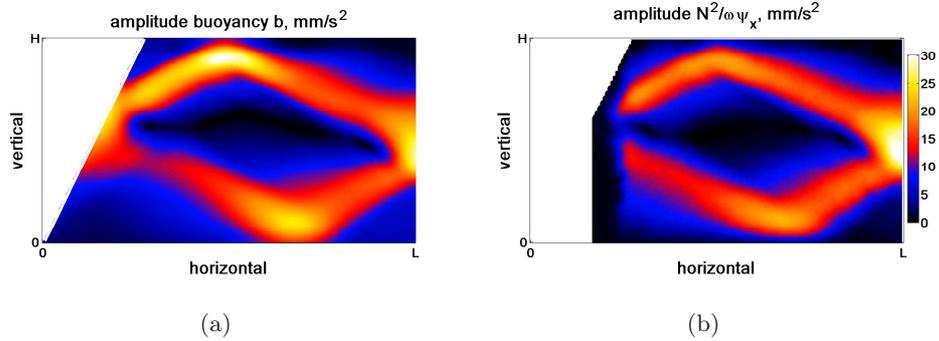


Figure B.3: Comparison between observed a) buoyancy field amplitude and b) vertical velocity field via left-hand side and right-hand side in equation B.4.

somewhat lower values due to the more confined structure of the velocity field.

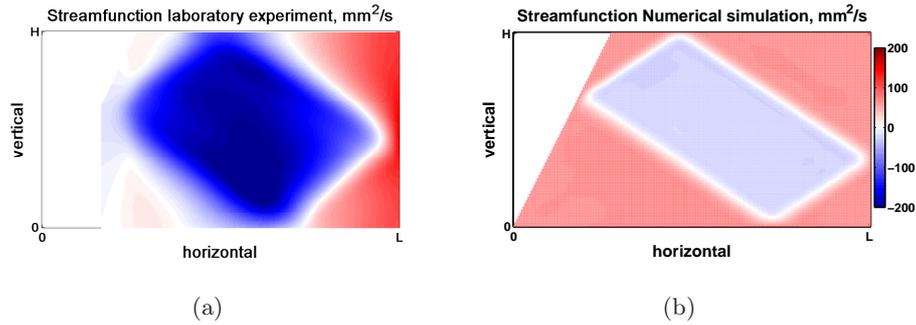


Figure B.4: Streamfunction for a) experiment and b) numerical simulation.

## B.4 Discussion and summary

The qualitative agreement between gradient density fields in the laboratory and from the numerical simulation was reported previously [GSP08]. Here, we conclude that the numerical simulation and the laboratory experiment also correspond quantitatively notwithstanding some distinct differences between them. The observed density fields have similar amplitude values and phase structure. The forcing in the numerical simulation is adjusted such that the peak velocities correspond to the peak velocities observed in the laboratory experiment. This does not mean the streamfunction values will match, only that the peak gradients in the streamfunction will match. In particular, given the difference in spatial structure, the range of streamfunction values will be greater for the experiments, as is indeed the case. The

difference in propagation angle of the wave beams in numerical and laboratory experiment is related to our uncertainty about the stratification in the laboratory experiment, that features a slightly non-constant value of  $N$ .

The differences in spatial structure found between the two suggest that considering only internal dissipation of the waves is not realistic. As the dissipation from the front and back wall in the laboratory is likely to affect only the low wave numbers, it seems that the boundary layers where reflections occur are important in the laboratory experiment. The top and bottom of the fluid in the laboratory feature some mixed layers, as can be seen from the phase spreading at those locations in figure B.2.

The use of the streamfunction is only possible in a two-dimensional description of the flow. In our comparison, we recognise that the numerical simulation is two-dimensional and that the laboratory is not. This may explain some further differences in the spatial structure of the streamfunction. However, the accurate recovery of the relation between observed buoyancy and vertical velocity reveals that the laboratory experiments are well described by two-dimensional theory (figure B.3). This two-dimensionality is something that should be tested in laboratory observations whenever both synthetic schlieren and PIV data are available. The streamfunction fields are the plateau type of solution, very comparable to the solutions found for a sloshing forcing at the surface. It appears that viscosity smoothes the solution. This is true at least in the smaller laboratory scale where the linear energy cascade of the basin scale waves approaches the viscous scales after a small number of loops [HvDM08]. The form of the streamfunction for much larger scale flows (e.g. astrophysical flows) remains an open question [Ogi05].

In summary, we presented a new way of working with observations as typically found in laboratory experiments on stratified fluids. The least squares integration of the observed/reconstructed perturbation density gradient fields reveals a physically more readily understood scalarfield, namely the perturbation density field. Comparison with a two-dimensional numerical simulation, and with two-dimensional internal wave theory, reveals that the narrow three-dimensional tank can be considered effectively to be two-dimensional. This effective two-dimensionality also suggests that the description in terms of streamfunction is useful, so the velocity fields are integrated using the same least squares approach to the integration as for the perturbation gradient density fields. Although the streamfunction might arguably be a less physical scalarfield than the perturbation density field, it is the field considered by most theoretical work. We conclude that the streamfunction for a real internal wave attractor in a viscous fluid is of plateau/simple type.

**Acknowledgements** We thank Leo Maas and Chantal Staquet for comments on an earlier version of this paper and Frans-Peter Lam for help with

figure B.1. J.H. is supported by a grant from the Dutch National Science Foundation through the NWO/FOM Dynamics of Patterns program. N.G. is supported by a grant from the French Direction Générale de l'Armement (D.G.A) and by the French National Agency for Research (A.N.R) through contract TOPOGI-3D. Numerical experiments were performed on the French supercomputer center I.D.R.I.S, through contract 0705890.

### Appendix Inverting density gradients

Let  $\xi = (\xi, \zeta)$ , the (2D) scaled measurements of the apparent displacement of synthetic schlieren patterns. Without loss of generality, we can write  $\xi$  in terms of a scalar potential  $\rho$  and vector potential  $\Phi$  as

$$\xi = \nabla\rho + \nabla \times \Phi. \quad (\text{B.5})$$

Clearly,  $\nabla\rho$  represents the irrotational part of  $\xi$ , while  $\nabla \times \Phi$  is the rotational part. Now since the apparent displacements themselves are due solely to the gradient of a scalar quantity, any rotational part of  $\delta$  represents an error in the measurement. The segregation of  $\xi$  into rotational and irrotational parts, however, is not unique. We might therefore choose to project  $\xi$  onto irrotational space to minimise the energy contained in  $\nabla \times \Phi$ . In particular, we might choose  $\rho$  so as to minimise

$$\varepsilon = \int_D (\nabla \times \Phi) d\mathbf{x} = \int_D (\xi - \nabla\rho) d\mathbf{x}, \quad (\text{B.6})$$

where  $\varepsilon$  is the energy in the rotational field and  $D$  is the fluid domain. The synthetic schlieren measurements  $(\xi_{i,j}, \zeta_{i,j})$  are obtained on a regular grid  $(x_i, y_j) = (i\Delta, j\Delta)$ , with  $i = [0, m]$  and  $j = [0, n]$ , so it is convenient to consider a discrete version of B.6. For reasons which shall become clear, we elect to form the discrete version using central differences on a staggered grid with spacing  $\Delta$ ,

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n (\xi_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}}{\Delta})^2 + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} (\zeta_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j}}{\Delta})^2, \quad (\text{B.7})$$

where we use linear interpolation to determine  $\xi_{i+\frac{1}{2},j} = (\xi_{i+1,j} + \xi_{i,j})/2$  and  $\zeta_{i,j+\frac{1}{2}} = (\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j})/2$ . This summation is rewritten as

$$\varepsilon = (\delta - M\rho)^T (\delta - M\rho) \quad (\text{B.8})$$

where  $\delta$  is a vector containing  $P = m(n+1) + n(m+1)$  entries serialising the  $m(n+1)$  values of  $\xi_{i+\frac{1}{2},j}$  and the  $n(m+1)$  values of  $\zeta_{i,j+\frac{1}{2}}$ , and  $\rho$  contains the  $Q = (m+1)(n+1)$  (unknown) serialised  $\rho_{i,j}$  values. The  $P \times Q$  matrix  $M$  is block bi-diagonal, zero apart from entries of  $1/\Delta$  along the diagonal and  $-a/\Delta$  somewhere else along the same row (with the position depending on whether the row represents an  $x$  or  $z$  gradient).

Since  $P > Q$  then the system is over-determined and minimising  $\varepsilon$  is a least squares problem, the solution of which requires  $\rho$  to be chosen such that

$$M^T M \rho = M^T \delta \quad (\text{B.9})$$

While this linear problem can be solved directly (e.g. using Singular Value Decomposition or the Householder Transformation), this calculation is computationally expensive. However, the particular structure of  $M^T M \rho$  and  $M^T \delta$  reveals an alternative approach. In particular, we note that for internal points we have

$$\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i-1,j} + \rho_{i,j+1} + \rho_{i,j-1} - 4\rho_{i,j}}{\Delta^2} = \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j} + \zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\Delta}, \quad (\text{B.10})$$

the second order finite difference approximation to  $\nabla^2\rho = \nabla \cdot \xi$ . At boundary points the formula is similar, omitting values that fall outside the domain. For example, at the  $i = 0$  boundary (away from the corner),

$$\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j+1} + \rho_{i,j-1} - 3\rho_{i,j}}{\Delta^2} = \frac{(\xi_{i+1,j} + \xi_{i,j}) + \zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\Delta}, \quad (\text{B.11})$$

while when we also have  $j = n$  (hence a corner point) this further reduces to

$$\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j+1} - 2\rho_{i,j}}{\Delta^2} = \frac{(\xi_{i+1,j} + \xi_{i,j}) - (\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1})}{2\Delta}, \quad (\text{B.12})$$

The brackets on the right-hand side in these last two expressions serve to highlight the role played by the interpolated values  $\xi_{i+1/2,j}$  and  $\zeta_{i,j-1/2}$ . The simplicity of the above expressions, and the similarity between these and the Poisson equation, has two important consequences. First, an iterative solution using a multigrid formulation is both straight forward and efficient. Second, the multigrid solution is readily adapted for more complex domains. The relaxation step of the multigrid is essentially replacing  $\rho_{i,j}$  with the mean value obtained using the trapezium integration rule from each of the surrounding points that fall within the domain. Indeed, although not formulated as a least squares problem, this natural approach to direct iterative integration of the observed density gradient is exactly what has been used previously by [DHS00].



# Bibliographie

- [AdN06] A. AZEVEDO, J. C. B. DA SILVA et A. L. NEW : On the generation and propagation of internal solitary waves in the southern Bay of Biscay. *Deep-Sea Res. Pt. I*, 53:927–941, juin 2006.
- [AGCT07] T. R. AKYLAS, R. H. J. GRIMSHAW, S. R. CLARKE et A. TABAEI : Reflecting tidal wave beams and local generation of solitary waves in the ocean thermocline. *J. Fluid Mech.*, 593:297–313, 2007.
- [AHM97] A. ADCROFT, C. HILL et J. MARSHALL : Representation of Topography by Shaved Cells in a Height Coordinate Ocean Model. *Mon. Weather Rev.*, 125:2293–+, 1997.
- [AMZ<sup>+</sup>07] M. H. ALFORD, J. A. MACKINNON, Z. ZHAO, R. PINKEL, J. KLYMAK et T. PEACOCK : Internal waves across the Pacific. *Geophys. Res. Lett.*, 34:24601–+, décembre 2007.
- [AWM10] B. K. ARBIC, A. J. WALLCRAFT et E. J. METZGER : Concurrent simulation of the eddying general circulation and tides in a global ocean model. *Ocean Model.*, 33:175–187, 2010.
- [Bai82] P. G. BAINES : On internal tide generation models. *Deep-Sea Res. Pt. I*, 29:307–338, mars 1982.
- [Ben67] T. B. BENJAMIN : Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *J. Fluid Mech.*, 29:559–592, 1967.
- [BGY87] F. K. BROWAND, D. GUYOMAR et S.-C. YOON : The behavior of a turbulent front in a stratified fluid : Experiments with an oscillating grid. *J. Geophys. Res.*, 92:5329–5341, mai 1987.
- [BH09] O. BUEHLER et K. R. HELFRICH : GFD program of studies : nonlinear waves. Rapport technique, WHOI, 2009.
- [BO99] C. M. BENDER et S. A. ORSZAG : *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. Springer, New York, 1999.
- [Bou71] J. BOUSSINESQ : Théorie de l’intumescence liquide appelé *onde solitaire* ou *de translation*, se propageant dans un canal rectangulaire. In *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des Sciences - Tome soixante-douzième*, volume 72, pages

- 755–759, Quai des Augustins, 55, Paris, juin 1871. Académie des Sciences, Gauthier-Villars.
- [Bou03] J. BOUSSINESQ : *Théorie analytique de la chaleur*, volume 2. Gauthier-Villars, Quai des Augustins, 55, Paris, 1903.
- [Bre60] L. M. BREKHOVSKIKH : *Waves in layered media*. Applied mathematics and mechanics. Academic Press, New York, 1960.
- [Bro10] William J. BROAD : In deep sea, waves with a familiar curl. *The New York Times*, avril 2010.
- [Bue09] O. BUEHLER : *Waves and Mean Flows*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press, août 2009.
- [Bue10] O. BUEHLER : Wave-Vortex Interactions in Fluids and Superfluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 42:205–228, janvier 2010.
- [Cai04] S. CAILLEAU : *Validation de méthodes de contrainte aux frontières d'un modèle océanique : application à un modèle hauturier de l'Atlantique Nord et à un modèle régional du Golfe de Gascogne*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, décembre 2004.
- [CFL28] R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY : Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Math. Ann.*, 100(1):32–74, 1928.
- [CFL67] R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY : On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM J. Res. Dev.*, 11(2):215–234, mars 1967.
- [CPO02] D. A. CACCHIONE, L. F. PRATSON et A. S. OGSTON : The Shaping of Continental Slopes by Internal Tides. *Science*, 296:724–727, avril 2002.
- [CW74] D. CACCHIONE et C. WUNSCH : Experimental study of internal waves over a slope. *J. Fluid Mech.*, 66(02):223–239, 1974.
- [DCSD07] S. B. DALZIEL, M. CARR, J. K. SVEEN et P. A. DAVIES : Simultaneous synthetic schlieren and PIV measurements for internal solitary waves. *Meas. Sci. Technol.*, 18:533–547, mars 2007.
- [DDF04] T. DAUXOIS, A. DIDIER et E. FALCON : Observation of near-critical reflection of internal waves in a stably stratified fluid. *Phys. Fluids*, 16(6):1936–1941, juin 2004.
- [de 94] G. DE VRIES : *Bijdragen tot de kennis der lange golven*. Thèse de doctorat, Univ. Amsterdam, 1894.
- [DHS00] S. B. DALZIEL, G. O. HUGHES et B. R. SUTHERLAND : Whole-field density measurements by 'synthetic schlieren'. *Exp. Fluids*, 28:322–335, 2000.

- [DII97] I. P. D. DE SILVA, J. IMBERGER et G. N. IVEY : Localized mixing due to a breaking internal wave ray at a sloping bottom. *J. Fluid Mech.*, 350:1–27, novembre 1997.
- [DM07] S. DRIJFHOUT et L. R. M. MAAS : Impact of Channel Geometry and Rotation on the Trapping of Internal Tides. *J. Phys. Oceanogr.*, 37:2740–+, 2007.
- [dNA07] J. C. B. DA SILVA, A. L. NEW et A. AZEVEDO : On the Role of SAR for observing “local generation” of internal solitary waves off the Iberian Peninsula. *Can. J. Remote Sens.*, 33(5):388–403, 2007.
- [dNM09] J. C. B. DA SILVA, A. L. M. NEW et J. M. MAGALHAES : Internal Solitary Waves in the Mozambique Channel : Observations and Interpretation. *J. Geophys. Res.*, 114:C05001, 2009.
- [dNSS02] J. C. B. DA SILVA, A. L. NEW, M. A. SROKOSZ et T. J. SMYTH : On the observability of internal tidal waves in remotely-sensed ocean colour data. *Geophys. Res. Lett.*, 29(12):1569(4), juin 2002.
- [DO75] D. P. DELISI et I. ORLANSKI : On the role of density jumps in the reflexion and breaking of internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 69:445–464, 1975.
- [DP06] T. DAUXOIS et M. PEYRARD : *Physics of Solitons*. Cambridge University Press, mars 2006.
- [DY99] T. DAUXOIS et W. R. YOUNG : Near-critical reflection of internal waves. *J. Fluid Mech.*, 390(-1):271–295, 1999.
- [Egb97] G. EGBERT : Tidal data inversion : interpolation and inference. *Prog. Oceanog.*, 40:53–80, 1997.
- [ER00] G. D. EGBERT et R. D. RAY : Significant dissipation of tidal energy in the deep ocean inferred from satellite altimeter data. *Nature*, 405:775–778, juin 2000.
- [Eri82] C. C. ERIKSEN : Observations of internal wave reflection off sloping bottoms. *J. Geophys. Res.*, 87:525–539, 1982.
- [Eri85] C. C. ERIKSEN : Implications of Ocean Bottom Reflection for Internal Wave Spectra and Mixing. *J. Phys. Oceanogr.*, 15:1145–1156, septembre 1985.
- [EYBP10] P. ECHEVERRI, T. YOKOSHI, N. J. BALMFORTH et T. PEACOCK : Internal tide attractors in double ridges. *J. Fluid Mech.*, in press 2010.
- [FA99] D. FARMER et L. ARMI : The generation and trapping of solitary waves over topography. *Science*, 283(5399):188, 1999.

- [FD00] A. FINCHAM et G. DELERCE : Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Exp. Fluids*, 29:13–22, décembre 2000.
- [FLP09] D. FARMER, Q. LI et J.-H. PARK : Internal Wave Observations in the South China Sea : the Role of Rotation and Non-Linearity. *Atmos. Ocean*, 47(4):267–280, 2009.
- [FPU55] E. FERMI, J. PASTA et S. ULAM : Studies of nonlinear Problems I. Rapport technique LA-1940, Los Alamos, 1955.
- [FW09] R. FERRARI et C. WUNSCH : Ocean Circulation Kinetic Energy : Reservoirs, Sources, and Sinks. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 41:253–282, janvier 2009.
- [GD07] L. GOSTIAUX et T. DAUXOIS : Laboratory experiments on the generation of internal tidal beams over steep slopes. *Phys. Fluids*, 19(2):028102–+, février 2007.
- [GDD<sup>+</sup>06] L. GOSTIAUX, T. DAUXOIS, H. DIDELLE, J. SOMMERIA et S. VI-BOUD : Quantitative laboratory observations of internal wave reflection on ascending slopes. *Phys. Fluids*, 18(5):056602–+, mai 2006.
- [GDMD07] L. GOSTIAUX, H. DIDELLE, S. MERCIER et T. DAUXOIS : A novel internal waves generator. *Exp. Fluids*, 42:123–130, janvier 2007.
- [Ger01] T. GERKEMA : Internal and interfacial tides : Beam scattering and local generation of solitary waves. *J. Mar. Res.*, 59:227–255, 2001.
- [GH08] R. H. J. GRIMSHAW et K. R. HELFRICH : Long-time Solutions of the Ostrovsky Equation. *Stud. Appl. Math*, 121:71–88, 2008.
- [GHO98] R. H. J. GRIMSHAW, J.-M. HE et L. A. OSTROVSKY : Terminal damping of a solitary wave due to radiation in rotational systems. *Stud. Appl. Math*, 101:197–210, 1998.
- [GHP01] E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique physique*. Savoirs actuels. EDP Sciences, 2<sup>e</sup> édition, 2001.
- [Gil82] A. E. GILL : *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, novembre 1982.
- [GLM04] T. GERKEMA, F.-P. A. LAM et L. R. M. MAAS : Internal tides in the Bay of Biscay : Conversion rates and seasonal effects. *Deep-Sea Res. Pt. II*, 51:2995–3008, 2004.
- [GM75] C. GARRETT et W. MUNK : Space-time scales of internal waves : A progress report. *J. Geophys. Res.*, 80:291–298, janvier 1975.
- [Goe43] H. GOERTLER : Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung. *Z. angew. Math. Mech.*, 23:65–71, 1943.

- [Gos06] L. GOSTIAUX : *Étude expérimentale des ondes de gravité internes. Émission, propagation, réflexion*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 2006.
- [GPP02] R. H. J. GRIMSHAW, E. PELINOVSKY et O. POLOUKHINA : Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface. *Nonlin. Processes Geophys.*, 9:221–235, 2002.
- [GPT97] R. GRIMSHAW, E. PELINOVSKY et T. TALIPOVA : The modified Korteweg–de Vries equation in the theory of large–amplitude internal waves. *Nonlin. Processes Geophys.*, 4:237–250, 1997.
- [Gri07] N. GRISOUARD : Attracteur d’ondes internes. simulations numériques, structure spatiale et non-linéarités. Mémoire de D.E.A., Université Joseph Fourier, juillet 2007.
- [GS10] N. GRISOUARD et C. STAQUET : Numerical simulations of the local generation of internal solitary waves in the Bay of Biscay. *Nonlin. Processes Geophys.*, 17:575–584, octobre 2010.
- [GSB06] T. GERKEMA, C. STAQUET et P. BOURUET-AUBERTOT : Decay of semi-diurnal internal-tide beams due to subharmonic resonance. *Geophys. Res. Lett.*, 33:8604–+, avril 2006.
- [GSG10] N. GRISOUARD, C. STAQUET et T. GERKEMA : Generation of internal solitary waves in a pycnocline by an internal wave beam : a numerical study. *Submitted to J. Fluid Mech.*, 2010.
- [GSP08] N. GRISOUARD, C. STAQUET et I. PAIRAUD : Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor. *J. Fluid Mech.*, 614:1–14, novembre 2008.
- [GZ08] T. GERKEMA et J. T. F. ZIMMERMANN : *An introduction to internal waves*, 207 pp. Lectures Notes, Royal NIOZ, 2008.
- [GZMv08] T. GERKEMA, J. T. F. ZIMMERMAN, L. R. M. MAAS et H. VAN HAREN : Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation. *Rev. Geophys.*, 46:RG2004, 2008.
- [Has66] K. HASSELMANN : Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes. *Rev. Geophys.*, 4(1):1–32, 1966.
- [Has67] K. HASSELMANN : Nonlinear interactions treated by the methods of theoretical physics (with application to the generation of waves by wind). *Proc. R. Soc. Lond. A*, 299:77–100, juin 1967.
- [HDDM10] J. HAZEWINKEL, S. B. DALZIEL, A. DOELMAN et L. R. M. MAAS : Tracer transport by internal wave beams. unpublished, see J. H.’s homepage, 2010.
- [Hel07] K. R. HELFRICH : Decay and return of internal solitary waves with rotation. *Phys. Fluids*, 19:026601, février 2007.

- [HGD10] J. HAZEWINKEL, N. GRISOUARD et S. B. DALZIEL : Comparison of laboratory and numerically observed scalar fields of an internal wave attractor. *Eur. J. Mech. B*, In Press, Corrected Proof:–, 2010.
- [HK97] D. G. HURLEY et G. KEADY : The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution. *J. Fluid Mech.*, 351:119–138, novembre 1997.
- [HM06] K. R. HELFRICH et W. K. MELVILLE : Long Nonlinear Internal Waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 38:395–425, janvier 2006.
- [HNN02] T. HIBIYA, M. NAGASAWA et Y. NIWA : Nonlinear energy transfer within the oceanic internal wave spectrum at mid and high latitudes. *J. Geophys. Res.*, 107:3207–+, novembre 2002.
- [HvD<sup>+</sup>07] J HAZEWINKEL, P. VAN BREEVOORT, A. DOELMAN, L. R. M. MAAS et S. B. DALZIEL : Equilibrium spectrum for internal wave attractor in a trapezoidal basin. *In Proceedings of the 5th International Symposium on Environmental Hydraulics*, décembre 2007.
- [HvDM08] J HAZEWINKEL, P. VAN BREEVOORT, S. B. DALZIEL et L. R. M. MAAS : Observations on the wavenumber spectrum and evolution of an internal wave attractor. *J. Fluid Mech.*, 598:373–382, mars 2008.
- [IN89] G. N. IVEY et R. I. NOKES : Vertical mixing due to the breaking of critical internal waves on sloping boundaries. *J. Fluid Mech.*, 204:479–500, 1989.
- [IWD00] G. N. IVEY, K. B. WINTERS et I. P. D. DE SILVA : Turbulent mixing in a sloping benthic boundary layer energized by internal waves. *J. Fluid Mech.*, 418:59–76, septembre 2000.
- [JIA99] A. JAVAM, J. IMBERGER et S. W. ARMPFIELD : Numerical study of internal wave reflection from sloping boundaries. *J. Fluid Mech.*, 396:183–201, octobre 1999.
- [JM09] C.-H. JIANG et P. S. MARCUS : Selection rules for the nonlinear interaction of internal gravity waves. *Phys. Rev. Lett.*, 102(12):124502, 2009.
- [Kil98] P. KILLWORTH : Oceanography : Something stirs in the deep. *Nature*, 396(6713):720–721, décembre 1998.
- [Kou99] C. KOUDELLA : *Ondes internes de gravité en fluide stratifié : instabilités, turbulence et vorticité potentielle*. Thèse de doctorat,  cole Normale Supérieure de Lyon, 1999.
- [KSS95] K. KONYAEV, K. SABININ et A. SEREBRYANY : Large-amplitude internal waves at the Mascarene Ridge in the Indian Ocean. *Deep-Sea Res. Pt. I*, 42:2075–2081, novembre 1995.

- [KY78] T. KAKUTANI et N. YAMASAKI : Solitary waves on a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 45:674–679, août 1978.
- [LB74] C.-Y. LEE et R. C. BEARDSLEY : The Generation of Long Nonlinear Internal Waves in a Weakly Stratified Shear Flow. *J. Geophys. Res.*, 79:453–462, 1974.
- [Lig78] J. LIGHTHILL : *Waves in fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [LM78] P. H. LEBLOND et L. A. MYSAK : *Waves in the ocean*. Elsevier oceanography series ; 20. Elsevier, Amsterdam, 1978.
- [LM08] F.-P. A. LAM et L. R. M. MAAS : Internal wave focusing revisited; a reanalysis and new theoretical links. *Fluid Dyn. Res.*, 40:95–122, février 2008.
- [LMD94] W. G. LARGE, J. C. MCWILLIAMS et S. C. DONEY : Oceanic vertical mixing : a review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. *Rev. Geophys.*, 32:363–404, 1994.
- [LMP<sup>+</sup>00] J. R. LEDWELL, E. T. MONTGOMERY, K. L. POLZIN, L. C. ST LAURENT, R. W. SCHMITT et J. M. TOOLE : Evidence for enhanced mixing over rough topography in the abyssal ocean. *Nature*, 403(6766):179–182, janvier 2000.
- [Lon53] R. R. LONG : Some aspects of the flow of stratified fluids. i. a theoretical investigation. *Tellus*, V(1):42–58, février 1953.
- [Lon56] R. R. LONG : Solitary Waves in the One- and Two-Fluid Systems. *Tellus*, VIII(4):460–471, novembre 1956.
- [LWL93] J. R. LEDWELL, A. J. WATSON et C. S. LAW : Evidence for slow mixing across the pycnocline from an open-ocean tracer-release experiment. *Nature*, 364(6439):701–703, août 1993.
- [Maa05] L. R. M. MAAS : Wave attractors : linear yet nonlinear. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 15:2757–2782, 2005.
- [Maa09] L. R. M. MAAS : Exact analytic self-similar solution of a wave attractor field. *Physica D*, 238:502–505, mars 2009.
- [MAH<sup>+</sup>97] J. MARSHALL, A. ADCROFT, C. HILL, L. PERELMAN et C. HEISEY : A finite-volume, incompressible Navier Stokes model for studies of the ocean on parallel computers. *J. Geophys. Res.*, 102:5753–5766, 1997.
- [MBSL97] L. R. M. MAAS, D. BENIELLI, J. SOMMERIA et F.-P. A. LAM : Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid. *Nature*, 388:557–561, août 1997.
- [McE71] A. D. MCEWAN : Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 50:431–448, 1971.

- [MFS<sup>+</sup>03] J. N. MOUM, D. M. FARMER, W. D. SMYTH, L. ARMI et S. VAGLE : Structure and Generation of Turbulence at Interfaces Strained by Internal Solitary Waves Propagating Shoreward over the Continental Shelf. *J. Phys. Oceanogr.*, 33:2093–+, 2003.
- [MG08] R. MAUGÉ et T. GERKEMA : Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography : a modal approach. *Nonlin. Processes Geophys.*, 15:233–244, 2008.
- [MGD08] M. J. MERCIER, N. B. GARNIER et T. DAUXOIS : Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform. *Phys. Fluids*, 20(8):086601–+, août 2008.
- [MHPA97] J. MARSHALL, C. HILL, L. PERELMAN et A. ADCROFT : Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling. *J. Geophys. Res.*, 102:5733–5752, 1997.
- [MK02] E. E. MCPHEE-SHAW et E. KUNZE : Boundary layer intrusions from a sloping bottom : A mechanism for generating intermediate nepheloid layers. *J. Geophys. Res.*, 107(C6):3050–3065, juin 2002.
- [ML95] L. R. M. MAAS et F.-P. A. LAM : Geometric focusing of internal waves. *J. Fluid Mech.*, 300:1–41, 1995.
- [MMM<sup>+</sup>10] M. J. MERCIER, D. MARTINAND, M. MATHUR, L. GOSTIAUX, T. PEACOCK et T. DAUXOIS : New wave generation. *J. Fluid Mech.*, 657:308–334, 2010.
- [MN90] M. E. MCINTYRE et W. A. NORTON : Dissipative wave-mean interactions and the transport of vorticity or potential vorticity. *J. Fluid Mech.*, 212:403–435, 1990.
- [MP09] M. MATHUR et T. PEACOCK : Internal wave beam propagation in non-uniform stratifications. *J. Fluid Mech.*, 639(-1):133–152, 2009.
- [MR67] D. E. MOWBRAY et B. S. H. RARITY : A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *J. Fluid Mech.*, 28:1–16, avril 1967.
- [Mun66] W. H. MUNK : Abyssal recipes. *Deep-Sea Res.*, 13(4):707–730, 1966.
- [MW97] W. MUNK et C. WUNSCH : The Moon, of Course. ... *Oceanography*, 10(3):132–134, 1997.
- [MW98] W. MUNK et C. WUNSCH : Abyssal recipes II : energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Res. Pt. I*, 45:1977–2010, 1998.
- [MW05] J. A. MACKINNON et K. B. WINTERS : Subtropical catastrophe : Significant loss of low-mode tidal energy at 28.9°. *Geophys. Res. Lett.*, 32:15605–+, août 2005.

- [Nd02] A. L. NEW et J. C. B. DA SILVA : Remote-sensing evidence for the local generation of internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep-Sea Res. Pt. I*, 49:915–934, 2002.
- [Nee04] L. NEEF : Triad resonance as a mechanism for internal wave dissipation. Rapport technique, WHOI, 2004.
- [NP90] A. L. NEW et R. D. PINGREE : Large-amplitude internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep-Sea Res.*, 37(3):513–524, 1990.
- [NP92] A. L. NEW et R. D. PINGREE : Local generation of internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep-Sea Res.*, 39(9):1521–1534, 1992.
- [NP00] A. L. NEW et R. D. PINGREE : An intercomparison of internal solitary waves in the Bay of Biscay and resulting from Korteweg-de Vries-type theory. *Progress in Oceanography*, 45:1–38, 2000.
- [OC72] T. R. OSBORN et C. S. COX : Oceanic fine structure. *Geophys. Astro. Fluid Dyn.*, 3:321–345, 1972.
- [Ogi05] G. I. OGILVIE : Wave attractors and the asymptotic dissipation rate of tidal disturbances. *J. Fluid Mech.*, 543:19–44, octobre 2005.
- [Ono75] H. ONO : Algebraic Solitary Waves in Stratified Fluids. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 39:1082–+, octobre 1975.
- [OS89] L. A. OSTROVSKY et Y. A. STEPANYANTS : Do internal solitons exist in the ocean? *Rev. Geophys.*, 27:293–310, 1989.
- [Ost78] L. A. OSTROVSKY : Nonlinear internal waves in a rotating ocean. *Oceanology*, 18(2):119, 1978.
- [PC06] A. PICHON et S. CORREARD : Internal tides modelling in the Bay of Biscay. Comparison with observations. *Sci. Mar.*, 70S1:65–88, juin 2006.
- [PD04] M. PEYRARD et T. DAUXOIS : *Physique des Solitons*. EDP Sciences. CNRS Éditions, août 2004.
- [Pea78] K. S. PEAT : Internal and inertial waves in a viscous rotating stratified fluid. *Appl. Sci. Res.*, 33:481–499, janvier 1978.
- [Phi66] O. M. PHILLIPS : *Dynamics of the upper ocean*. Cambridge University Press, 1966.
- [PN89] R. D. PINGREE et A. L. NEW : Downward propagation of internal tidal energy into the Bay of Biscay. *Deep-Sea Res.*, 36(5):735–758, 1989.
- [PN91] R. D. PINGREE et A. L. NEW : Abyssal Penetration and Bottom Reflection of Internal Tidal Energy in the Bay of Biscay. *J. Phys. Oceanogr.*, 21:28–39, janvier 1991.

- [PS65] R. B. PERRY et G. R. SCHIMKE : Large-Amplitude Internal Waves Observed off the Northwest Coast of Sumatra. *J. Geophys. Res.*, 70:2319–2324, mai 1965.
- [PT05] T. PEACOCK et A. TABAEI : Visualization of nonlinear effects in reflecting internal wave beams. *Phys. Fluids*, 17(6):061702–+, juin 2005.
- [PTVF07] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY : *Numerical recipes : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 3<sup>e</sup> édition, septembre 2007.
- [Ray76] Lord RAYLEIGH : On waves. *Phil. Mag.*, 5:257–279, 1876.
- [RGV01] M. RIEUTORD, B. GEORGEOT et L. VALDETTARO : Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum. *J. Fluid Mech.*, 435:103–144, mai 2001.
- [RN99] M. RIEUTORD et K. NOUI : On the analogy between gravity modes and inertial modes in spherical geometry. *Eur. Phys. J. B*, 9:731–738, juillet 1999.
- [RV97] M. RIEUTORD et L. VALDETTARO : Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.*, 341:77–99, juin 1997.
- [RV10] M. RIEUTORD et L. VALDETTARO : Viscous dissipation by tidally forced inertial modes in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.*, 643:363–394, 2010.
- [RVG02] M. RIEUTORD, L. VALDETTARO et B. GEORGEOT : Analysis of singular inertial modes in a spherical shell : the slender toroidal shell model. *J. Fluid Mech.*, 463:345–360, juillet 2002.
- [SDHL99] B. R. SUTHERLAND, S. B. DALZIEL, G. O. HUGHES et P. F. LINDEN : Visualization and measurement of internal waves by synthetic schlieren. Part 1. Vertically oscillating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 390:93–126, juillet 1999.
- [SHA04] H. L. SIMMONS, R. W. HALLBERG et B. K. ARBIC : Internal wave generation in a global baroclinic tide model. *Deep-Sea Res. Pt. II*, 51:3043–3068, décembre 2004.
- [Sim08] H. L. SIMMONS : Spectral modification and geographic redistribution of the semi-diurnal internal tide. *Ocean Model.*, 21:126–138, 2008.
- [SR96] D. SLINN et J. J. RILEY : Turbulent mixing in the oceanic boundary layer caused by internal wave reflection from sloping terrain. *Dynam. Atmos. Oceans*, 24:51–62, janvier 1996.
- [SR98] D. N. SLINN et J. J. RILEY : Turbulent Dynamics of a Critically Reflecting Internal Gravity Wave. *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, 11:281–303, 1998.

- [SS02] C. STAQUET et J. SOMMERIA : Internal gravity waves : from instabilities to turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34:559–593, 2002.
- [SSMB07] A. SWART, G. L. G. SLEIJPEN, L. R. M. MAAS et J. BRANDTS : Numerical solution of the two-dimensional Poincare equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 200:317–341, mars 2007.
- [SSP<sup>+</sup>07] C. STAQUET, J. SOMMERIA, I. PAIRAUD, K. GOSWAMI et M. MEHDIZADEH : Numerical and experimental modelling of the internal tide near a continental shelf. In AFM, éditeur : *18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, France*, 2007.
- [Ste08] R. STEWART : *Introduction to Physical Oceanography*. Texas A&M University lecture notes, août 2008.
- [TAL05] A. TABAEI, T. R. AKYLAS et K. G. LAMB : Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams. *J. Fluid Mech.*, 526:217–243, mars 2005.
- [Tho69] S. A. THORPE : Neutral eigensolutions of the stability equation for stratified shear flow. *J. Fluid Mech.*, 36(4):673–683, 1969.
- [Tho87] S. A. THORPE : Reflection of internal waves from a uniform slope. *J. Fluid Mech.*, 178:279–302, 1987.
- [Tho98] S. A. THORPE : Nonlinear Reflection of Internal Waves at a Density Discontinuity at the Base of the Mixed Layer. *J. Phys. Oceanogr.*, 28:1853–1860, septembre 1998.
- [Til07] A. TILGNER : Zonal Wind Driven by Inertial Modes. *Phys. Rev. Lett.*, 99(19):194501–+, novembre 2007.
- [TS72] N. H. THOMAS et T. N. STEVENSON : A similarity solution for viscous internal waves. *J. Fluid Mech.*, 54:495–506, 1972.
- [Tsa86] R. Y. TSAI : An efficient and accurate camera calibration technique for 3D machine vision. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 364–374. IEEE Computer Society Press, 1986.
- [van98] P. VAN MEURS : Interactions between near-inertial mixed layer currents and the mesoscale : The importance of spatial variabilities in the vorticity field. *Journal of Physical Oceanography*, 28(7):1363–1388, 1998.
- [Vel09] O. U. VELASCO FUENTES : Kelvin’s discovery of Taylor columns. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 28(3):469 – 472, 2009.
- [Ver70] G. VERONIS : The Analogy Between Rotating and Stratified Fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2:37–66, 1970.

- [vG10] H. VAN HAREN et L. GOSTIAUX : A deep-ocean Kelvin-Helmholtz billow train. *Geophys. Res. Lett.*, 37:3605–+, février 2010.
- [WF04] C. WUNSCH et R. FERRARI : Vertical Mixing, Energy, and the General Circulation of the Oceans. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36:281–314, 2004.
- [WLRD95] K. B. WINTERS, P. N. LOMBARD, J. J. RILEY et E. A. D’ASARO : Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, 289:115–128, avril 1995.
- [Wun68] Carl WUNSCH : On the propagation of internal waves up a slope. *Deep-Sea Res.*, 15(3):251 – 258, 1968.
- [Wun69] C. WUNSCH : Progressive internal waves on slopes. *J. Fluid Mech.*, 35:131–144, 1969.
- [Wun00] C. WUNSCH : Moon, tides and climate. *Nature*, 405(6788):743–744, juin 2000.
- [YSP07] K.-Y. YICK, R. STOCKER et T. PEACOCK : Microscale Synthetic Schlieren. *Exp. Fluids*, 42:41–48, janvier 2007.
- [ZK65] N. J. ZABUSKY et M. D. KRUSKAL : Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243, août 1965.
- [ZKS07] H. P. ZHANG, B. KING et H. L. SWINNEY : Experimental study of internal gravity waves generated by supercritical topography. *Phys. Fluids*, 19(9):096602–+, septembre 2007.
- [ZM99] K. Q. ZHANG et J. MAROTZKE : The importance of open-boundary estimation for an Indian Ocean GCM-data synthesis. *J. Mar. Res.*, 57(2):305–334, mars 1999.