



**HAL**  
open science

# Modèles de matrices et problèmes de bord dans la gravité de Liouville

Jean-Emile Bourgine

► **To cite this version:**

Jean-Emile Bourgine. Modèles de matrices et problèmes de bord dans la gravité de Liouville. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. NNT : . tel-00541162

**HAL Id: tel-00541162**

**<https://theses.hal.science/tel-00541162>**

Submitted on 30 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ORSAY - PARIS SUD XI  
ET  
INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA SACLAY

## THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur,  
spécialité « Physique Théorique »

par

Jean-Émile Bourgine

# MODÈLES DE MATRICES ET PROBLÈMES DE BORD DANS LA GRAVITÉ DE LIOUVILLE

Thèse soutenue le 18 juin 2010 devant le jury composé de :

M.	FATEEV Vladimir	LPTA Montpellier	(Rapporteur)
M.	KOSTOV Ivan	IPhT - CEA Saclay	(Directeur)
M <sup>me</sup>	KRISTJANSEN Charlotte	Niels Bohr Institute	(Rapporteur)
M.	OUVRY Stephane	Université Paris Sud XI	(Président)
M <sup>me</sup>	PETKOVA Valentina	INRNE, Bulgarian Academy of Sciences	(Examineur)
M.	ZUBER Jean-Bernard	Université Pierre et Marie Curie	(Examineur)



# REMERCIEMENTS

En premier lieu, je souhaiterais exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse, Ivan Kostov, qui m'a initié à ce passionnant sujet que sont les modèles de matrice. Je lui suis gré de sa disponibilité, de sa patience, et de ses nombreux conseils tout au long de ces quatre années. Je suis également extrêmement reconnaissant envers mes collaborateurs, Yutaka Matsuo, et tout particulièrement Kazuo Hosomichi pour m'avoir partagé ses connaissances sur la gravité de Liouville. Sans eux, ce travail n'aurait pu aboutir.

Je remercie chaleureusement Stéphane Ouvry, Valentina Petkova et Jean-Bernard Zuber d'avoir bien voulu accepter de faire partie de mon jury de thèse, et en particulier les rapporteurs Vladimir Fateev et Charlotte Kristjansen pour avoir donné de leur temps afin de juger la qualité de mon travail.

Un grand merci à toute l'équipe de l'IPhT qui fait de ce laboratoire un endroit aussi agréable et stimulant, et tout spécialement à Michel Bergère, François David, Bertrand Eynard, Hubert Saleur et Vincent Pasquier, avec qui j'ai eu l'occasion d'interagir et qui ont répondu à mes nombreuses questions. Merci également aux thésards et anciens thésards, et en particulier à Jérôme Dubail, Nicolas Orantin et Dmytro Volin pour ces discussions si instructives. Merci enfin aux secrétaires, Catherine, Laure et Sylvie qui nous déchargent des lourdeurs de l'administration dans la bonne humeur, ainsi qu'à Bruno, toujours prêt à rendre service.

Je voudrais aussi remercier le Niels Bohr Institute, et plus particulièrement Charlotte Kristjansen, pour m'avoir accueilli pendant un mois. Merci également au LPTA de Montpellier, à Sylvain Ribaud et Serguei Alexandrov, avec qui c'est toujours un plaisir de discuter.

Ces travaux ont bénéficié du financement de l'Union Européenne à travers le réseau ENRAGE (MRTN-CT-2004-005616), ainsi que de l'ANR GIMP (ANR-05-BLAN-0020-01).



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Théorie quantique du champ de Liouville</b>	<b>11</b>
1	Théorie du champ de Liouville dans le bulk . . . . .	13
1.1	Définition et propriétés élémentaires . . . . .	13
1.2	Fonction à trois points (DOZZ) . . . . .	16
1.3	Etats et opérateurs . . . . .	17
2	Théorie du champ de Liouville sur le bord . . . . .	18
2.1	Action et opérateurs de bord . . . . .	19
2.2	Corrélateurs . . . . .	21
3	Obtention des corrélateurs . . . . .	22
3.1	Propagateur du bulk sur la sphère . . . . .	23
3.2	Sur le disque . . . . .	24
A	Fonctions spéciales . . . . .	25
A.1	Fonction $\gamma$ . . . . .	26
A.2	Fonctions $G, \Upsilon, S$ . . . . .	26
B	Correspondance entre états et opérateurs . . . . .	27
B.1	Approche du mini-superspace . . . . .	27
B.2	Correspondance entre états et opérateurs . . . . .	29
<b>II</b>	<b>Gravité quantique bidimensionnelle</b>	<b>31</b>
1	Quantification DDK de la gravité . . . . .	33
1.1	Obtention de la fonction de partition . . . . .	33

1.2	Fonction de partition à aire fixé . . . . .	35
1.3	Habillage des opérateurs . . . . .	36
2	Ground ring . . . . .	39
2.1	Opérateurs de Ground Ring . . . . .	40
2.2	Exemple : fonction à trois points de bulk . . . . .	40
3	Comparaison avec les modèles de matrices . . . . .	41
3.1	Charge centrale . . . . .	41
3.2	Dimensions conformes . . . . .	41
A	Gaz de Coulomb . . . . .	43
<b>III Le modèle <math>O(n)</math> sur le réseau plat</b>		<b>47</b>
1	Modèle $O(n)$ dans le <i>bulk</i> . . . . .	49
1.1	Définition du modèle . . . . .	49
1.2	Comportement critique . . . . .	50
2	Le modèle $O(n)$ sur le bord . . . . .	53
2.1	Phénomènes critiques de surface . . . . .	53
2.2	Intégrabilité et applicabilité au modèle $O(n)$ . . . . .	55
3	Anisotropie de bord . . . . .	58
3.1	Anisotropie dans la phase dense . . . . .	58
3.2	Anisotropie dans la phase diluée . . . . .	61
<b>IV Le modèle <math>O(n)</math> matriciel</b>		<b>67</b>
1	Présentation du modèle $O(n)$ matriciel . . . . .	69
1.1	Définition du modèle . . . . .	69
1.2	Fonction de partition de disque . . . . .	71
1.3	Equations de boucle . . . . .	73
1.4	Equation résolvante . . . . .	74
2	Limite continue et comportement critique du <i>bulk</i> . . . . .	81
2.1	Phénomènes critiques de <i>bulk</i> . . . . .	81

2.2	Prédictions de la théorie de Liouville . . . . .	83
2.3	Calcul de la résolvante . . . . .	84
3	Opérateurs fuseaux . . . . .	88
3.1	Opérateurs fuseaux sur le bord . . . . .	88
3.2	Opérateurs fuseaux dans le bulk . . . . .	89
4	Bords JS et DJS . . . . .	90
4.1	Définition des bords JS et DJS . . . . .	90
4.2	Opérateurs de bord Ord/DJS . . . . .	93
4.3	Opérateur DJS/DJS dans la phase diluée . . . . .	98
5	Problèmes ouverts . . . . .	101
5.1	Détermination de $H(y)$ . . . . .	101
5.2	Anisotropie de <i>bulk</i> . . . . .	101
A	Formulaire de dérivation matricielle . . . . .	103
B	Opérateur * . . . . .	103
C	Opérateurs DJS/DJS . . . . .	105
<b>V</b>	<b>Les modèles ADE matriciels</b>	<b>109</b>
1	Modèles ADE sur le réseau plat . . . . .	111
1.1	Définition du modèle . . . . .	111
1.2	Etats de bord . . . . .	113
2	Modèle ADE matriciel . . . . .	116
2.1	Définition du modèle . . . . .	116
2.2	Comparaison des modèles matriciels ADE et $O(n)$ . . . . .	118
3	Etats de bord du modèle RSOS matriciel . . . . .	120
A	Ising tri-critique . . . . .	122
<b>VI</b>	<b>Cordes bidimensionnelles</b>	<b>125</b>
1	Un peu d'histoire... . . . . .	127
2	Dans le bulk . . . . .	130



2.1	Backgrounds . . . . .	130
2.2	Tachyons . . . . .	133
3	Cordes longues . . . . .	134
3.1	Approche semi-classique . . . . .	135
3.2	Calcul du facteur de phase $\delta_{CL}$ . . . . .	138
3.3	Interactions de deux cordes longues . . . . .	139
A	Corrélateur de bord à deux points dans la limite $b \rightarrow 1$ . . . . .	141

## **VII Mécanique quantique matricielle 143**

1	Mécanique Statistique Matricielle . . . . .	145
1.1	Discrétisation de l'action de corde . . . . .	145
1.2	Décomposition sous $SU(N)$ . . . . .	147
1.3	Fermions libres . . . . .	150
1.4	Obtention des autres secteurs . . . . .	153
2	Mécanique Quantique Matricielle . . . . .	154
2.1	Formalisme chirale . . . . .	155
2.2	Secteur singulet . . . . .	156
2.3	Tachyons . . . . .	158
3	Cordes longues . . . . .	159
3.1	Corde longue dans le formalisme $(X, P)$ . . . . .	159
3.2	Corde longue dans le formalisme chirale . . . . .	160
3.3	Diffusion de $n$ cordes longues . . . . .	161
3.4	Interaction entre un tachyon et une corde longue . . . . .	164
A	Calculs détaillés dans le formalisme chirale . . . . .	166
A.1	Fonction de partition . . . . .	166
A.2	Deux tachyons . . . . .	168
A.3	Une corde longue . . . . .	170
A.4	Une corde longue et un tachyon . . . . .	171

# INTRODUCTION

La physique est un pont entre deux mondes, une jonction, une synapse entre le réel et l'abstrait. Loin de se réduire à une simple étude de phénomènes, c'est la multiplicité des approches qui fait la force et la richesse de la physique moderne. Peu à peu se tisse une toile, un réseau entre une étonnante diversité de concepts que l'on croyait jadis isolés. Ainsi, s'il est permis de douter que la théorie des cordes décrira un jour les quatre forces fondamentales unifiées, nul ne peut ignorer son apport considérable au développement des théories conformes, elles-mêmes au centre de l'étude des systèmes de matière condensée. Et son lien profond avec les théories de jauge constitue une promesse, l'indice incontestable d'une structure complexe englobant les théories quantiques des champs, de particules, de cordes, de membranes,...

C'est dans cette perspective que se place notre étude des modèles de matrices. Initialement développés pour modéliser les niveaux énergétiques des noyaux atomiques lourds, ces modèles se sont vu attribuer un rôle central dans divers domaines de la physique. En quelques décennies, les modèles de matrices sont devenus un outil formidable, permettant l'étude des théories de jauge, de cordes, et même des modèles statistiques sur réseau comme le montre notre récent travail sur le modèle  $O(n)$ .

L'étude des conditions de bord n'est pas un problème récent en mathématique, et l'on y trouve attaché les plus grands noms : "Problème de Cauchy", "Conditions de Von Neumann, de Dirichlet", "Théorie de Sturm-Liouville",... Toutefois, avec l'apparition des D-branes en théorie des cordes dans les années quatre-vingt-dix, les problèmes de bord ont subi un regain d'intérêt parmi les théoriciens. L'objet central que constituent les conditions de bord conformes fut introduit dix ans plus tôt par J. Cardy pour étudier les phénomènes critiques de surface des modèles statistiques. Pourtant, encore aujourd'hui, de nombreuses questions restent sans réponse, notamment en ce qui concerne la délicate évolution de ces conditions de bord sous l'effet de la renormalisation.

Etudier les conditions de bords des modèles statistiques en utilisant une gravité discrète. L'idée pourrait sembler absurde au profane... Pourtant, l'énorme apport de symétrie prodigué par la covariance discrète rend ces systèmes intégrables. Depuis les balbutiements des matrices aléatoires, on sait que celles-ci peuvent décrire un système statistique sur un réseau aléatoire, les fluctuations du réseau s'identifiant aux fluctuations quantiques du modèle. Dans la limite continue, ce réseau dynamique devient une variété soumise aux effets de la gravité quantique, pendant continu des fluctuations du réseau. La description de la théorie continue est assurée, dans la jauge conforme, par la "gravité de Liouville" : un champ de type gaz de Coulomb, "la matière", est couplé au champ de Liouville qui rend compte des fluctuations de la métrique. La suprématie du modèle de matrice est la possibilité d'y prendre explicitement la limite continue, chose encore irréalisable avec la théorie sur le réseau "plat". L'autre force du modèle est de pouvoir passer du réseau plat au réseau dynamique, et du système gravitationnel à la théorie "nue" en utilisant les relations de KPZ [KPZ88]. On définit ainsi un algorithme des plus efficaces : placer le modèle statistique sur un réseau aléatoire, introduire le modèle de matrice qui le décrit, prendre sa limite continue, étudier la théorie

couplée à la gravité et enfin transposer les résultats obtenus aux théories conformes habituelles, limites continues du modèle sur le réseau plat.

C'est cette approche systématique que l'on a choisi d'employer pour l'étude du modèle  $O(n)$ . Si l'on se doutait déjà que les opérateurs de bords pouvaient être déterminés grâce au modèle de matrice, la possibilité d'étudier les phénomènes critiques de surface est un fait nouveau. Plus précisément, nous avons montré que le diagramme de phase décrivant les comportements de *bulk* comme de bord se transposait à la théorie couplée à la gravité. D'autres résultats primordiaux concernant l'évolution des conditions de bords entre les différentes phases ont aussi été obtenus. Ces résultats n'avaient été dérivés que partiellement par les méthodes plus conventionnelles, où intervient une grande part de simulations numériques.

Le problème étudié en deuxième partie de cette thèse est plus ambitieux encore. Il s'agit de décrire la formation d'un trou noir en théorie des cordes de façon non-perturbative. On sait, notamment grâce aux modèles de matrices, que les théories des cordes ne sont valables que perturbativement autour d'une configuration de champ et d'espace-temps donnée. On considère donc généralement la propagation et l'interaction des cordes dans un espace temps minkowskien "vide", ou dans une géométrie courbe, par exemple à proximité d'un trou noir. Il existe toutefois en dimension deux, une description indépendante du *background* considéré : la mécanique quantique matricielle. Plusieurs conjectures, étayées par des résultats partiels, laissent à penser que ce modèle de matrice pourrait être la description non-perturbative qui interpole entre le background plat et celui de trou noir. Sans nul doute, la compréhension à deux dimensions de ce Graal des cordistes ouvrirait la voie à des approches non-perturbatives plus élaborées en dimension supérieure dans lesquelles la description matricielle fait malheureusement défaut.

Plus spécifiquement, le trou noir de signature lorentzienne est supposé formé par la condensation de cordes longues dans l'espace-temps plat. Ces cordes ouvertes, de longueur infinie et repliées sur elles-mêmes, sont l'équivalent des vortex de la théorie euclidienne. Dans nos travaux, nous avons cherché à préciser la relation entre ces objets et certains secteurs du modèle de matrice. Nous avons ainsi identifié au premier ordre les coefficients de diffusion de deux cordes longues obtenus en utilisant les approches continues et matricielles. Ce résultat prometteur semble pouvoir s'étendre à un nombre arbitraire de cordes longues.

Cette thèse s'articule donc autour de deux thèmes : les opérateurs de bord du modèle  $O(n)$  matriciel et l'étude des cordes longues de la mécanique quantique matricielle. Afin de mieux appréhender les résultats de la limite continue, les deux premiers chapitres sont une brève introduction, l'un à la théorie de Liouville avec bord, l'autre à la quantification DDK de la gravité bidimensionnelle [Dav88, DK89]. Nous présenterons en particulier les relations de *boundary ground ring*, limite continue des équations de boucles qui sont l'objet essentiel de la technique matricielle. Nous y verrons aussi comment transposer les résultats gravitationnels à la théorie conforme "plate". Dans un troisième chapitre, nous détaillerons le

comportement critique du modèle  $O(n)$  sur réseau, avec un intérêt particulier pour les conditions de bords anisotropiques JS et DJS récemment introduites [JS08b, DJS10]. Le quatrième chapitre est le coeur de la première partie, on y présente le modèle matriciel  $O(n)$  ainsi que la méthode développée pour l'étude des conditions de bord. Enfin, nous adapterons notre méthode aux modèles RSOS décrits dans la limite continue par un modèle minimal unitaire, et discuterons les extensions possibles aux modèles ADE.

La seconde partie est plus restreinte, elle ne comporte que deux chapitres. Le premier rappelle la définition de la théorie des cordes à deux dimensions, et présente les résultats du calcul des corrélateurs dans la théorie continue. Le second chapitre détaille la mécanique quantique matricielle, en se concentrant sur l'approche chirale particulièrement adaptée aux calculs d'amplitudes de diffusion. Dans ces deux chapitres, on se focalisera principalement sur les amplitudes de cordes longues.



# THÉORIE QUANTIQUE DU CHAMP DE LIOUVILLE

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Théorie du champ de Liouville dans le bulk</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1	Définition et propriétés élémentaires . . . . .	13
1.2	Fonction à trois points (DOZZ) . . . . .	16
1.3	Etats et opérateurs . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Théorie du champ de Liouville sur le bord</b> . . . . .	<b>18</b>
2.1	Action et opérateurs de bord . . . . .	19
2.2	Corrélateurs . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Obtention des corrélateurs</b> . . . . .	<b>22</b>
3.1	Propagateur du bulk sur la sphère . . . . .	23
3.2	Sur le disque . . . . .	24
<b>A</b>	<b>Fonctions spéciales</b> . . . . .	<b>25</b>
A.1	Fonction $\gamma$ . . . . .	26
A.2	Fonctions $\mathbf{G}$ , $\Upsilon$ , $\mathbf{S}$ . . . . .	26
<b>B</b>	<b>Correspondance entre états et opérateurs</b> . . . . .	<b>27</b>
B.1	Approche du mini-superspace . . . . .	27
B.2	Correspondance entre états et opérateurs . . . . .	29

---

## Introduction

La théorie de Liouville est fascinante à bien des égards. Tout d’abord, c’est l’une des rares théories conformes “exactement solubles”, dans le sens où les fonctions à deux et trois points, ainsi que les constantes de structure, peuvent être déterminées. Outre quelques extensions supersymétriques de cette théorie, et en dehors du gaz de Coulomb, seul le modèle Wess-Zumino-Witten  $H_3^+$  possède des propriétés analogues. L’étude peut être prolongée sur le disque et l’on peut y déterminer les fonctions de corrélation des opérateurs de bord. Par ailleurs, et contrairement aux théories conformes rationnelles, cette théorie est non compacte, les états de *bulk* et de bord appartiennent à des séries continues de représentations de l’algèbre de Virasoro.

L’autre atout de cette théorie est la profusion des applications possibles. Nous l’utiliserons principalement dans le contexte de la limite continue du modèle  $O(n)$  matriciel, afin d’interpréter la dépendance des corrélateurs critiques en les constantes cosmologiques. Dans la seconde partie de cette thèse, nous verrons que le champ de Liouville joue un rôle fondamental pour la théorie lorentzienne des cordes bidimensionnelles puisqu’il décrit la dimension spatiale de l’espace cible. Mais on le retrouve aussi dans la description du *background* du dilaton linéaire des cordes critiques où il correspond à la coordonnée radiale des espaces de type AdS. Enfin, très récemment, L. Alday, D. Gaiotto et Y. Tachikawa ont découvert un lien très intéressant entre les blocs conformes de la théorie de Liouville et la fonction de partition de Nekrasov comptant les instantons de la théorie de jauge  $U(1) N_f = 2$  [AGT10].

Bien que similaire au gaz de Coulomb par certains de ses aspects, la théorie de Liouville peut se révéler assez subtile et il n’est pas question d’en offrir ici une revue détaillée. Au contraire, nous nous attarderons sur certains points spécifiques dans le but de mieux cerner les résultats du modèle de matrice. Dans le bulk, nous nous concentrerons principalement sur la fonction à trois points établie simultanément par H. Dorn et H.-J. Otto [DO94] et A.B. et Al.B. Zamolodchikov [ZZ96]. Celle-ci nous permettra d’introduire plusieurs concepts importants, tel que la dualité  $\mathfrak{b} \rightarrow 1/\mathfrak{b}$ , le rôle joué par les pôles des corrélateurs ou encore la présence d’un coefficient de réflexion. Mais c’est l’étude de la théorie sur le bord qui nous intéresse réellement. Celle-ci, initiée par l’article de V. Fateev et A. B. et Al. B. Zamolodchikov [FZZ00], permet non seulement de faire le lien entre corrélateurs matriciels et gravitationnels, mais aussi d’interpréter les équations de boucles du modèle de matrice dans le contexte de la gravitation. C’est pourquoi nous consacrons une section à la méthode d’obtention des corrélateurs utilisant les opérateurs dégénérés. Dans le chapitre suivant dédié à la gravité quantique, cette méthode prendra le nom de **Boundary Ground Ring** ou **BGR**.

Pour de plus amples détails sur la théorie de Liouville, nous invitons le lecteur à se reporter aux excellentes notes et revues sur le sujet. Citons simplement ici les articles de N. Seiberg [Sei90], P. Ginsparg et G. Moore [GM93], et plus récemment J. Teschner [Tes01] et Y. Nakayama [Nak04].

# 1 Théorie du champ de Liouville dans le bulk

## 1.1 Définition et propriétés élémentaires

La théorie du champ de Liouville est une théorie conforme à deux dimension, définie sur une surface  $\Sigma$  qui sera appelée feuille d'univers. Son action est celle d'un gaz de Coulomb de charge complexe  $-iQ \in \mathbb{C}$  à laquelle on a ajouté un potentiel exponentiel <sup>1, 2</sup> :

$$\mathcal{S}_L = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{g}} d^2x \left[ \hat{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + Q \hat{R} \phi + 4\pi \mu e^{2b\phi} \right] \quad (\text{I-1})$$

En raison du rôle joué par le terme exponentiel en gravité quantique, on appelle la constante  $\mu$ , **constante cosmologique**. Le paramètre sans dimension  $b$  est lui dénommé **constante de couplage de Liouville**. On se situera principalement dans le régime de faible couplage où  $b$  est réel et satisfait  $0 < b < 1$ . La limite  $b \rightarrow 1$  qui sera utile pour la corde bidimensionnelle doit être prise avec précaution à cause de certaines divergences qui requièrent une régularisation [AI05]. Nous verrons que le domaine  $b > 1$  est singulier, mais peut être relié dans une certaine mesure à la théorie de constante de couplage  $1/b$ .

On s'intéresse à la théorie définie sur une sphère. Cette sphère est paramétrisée par le plan projectif complexe, et l'on concentre le terme de courbure à l'infini, obtenant l'action

$$\mathcal{S}_L = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2z \left[ 2\partial\phi\bar{\partial}\phi + 2\pi\mu e^{2b\phi} \right], \quad (\text{I-2})$$

avec le comportement asymptotique suivant pour le champ classique,

$$\phi(z, \bar{z}) \sim -Q \log(z\bar{z}) + O(1) \quad \text{pour } |z| \rightarrow \infty. \quad (\text{I-3})$$

## TRANSFORMATION CONFORME

La transformation conforme du champ de Liouville est héritée de son rôle joué en gravité bidimensionnelle. Dans ce contexte, le champ  $\phi$  correspond au facteur conforme de la métrique fluctuante  $g^{ab} = e^{2b\phi} \hat{g}^{ab}$ . La transformation sous difféomorphismes  $z \rightarrow w(z)$  de la métrique  $g^{ab}$  se traduit sur le champ de Liouville par

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{1}{2b} \log \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \quad (\text{I-4})$$

1. La théorie du gaz de Coulomb est brièvement exposée en appendice A du chapitre II, on pourra aussi se rapporter au livre de P. Di Francesco, P. Mathieu et D. Sénéchal [DMS97].

2. Dans ce chapitre, nous emprunterons les conventions de [FZZ00].



Il existe donc une grande différence avec la transformation conforme du boson libre. Celle-ci est à l'origine de la relation non triviale entre la charge des opérateurs et leur impulsion. Le terme exponentiel de l'action est naturellement invariant, en revanche la partie associée à la courbure n'est invariante classiquement que si l'on suppose  $Q = 1/b$ .

### TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION

On s'intéresse ensuite au tenseur d'énergie-impulsion, identique à celui du gaz de Coulomb,

$$\begin{aligned} T(z) &= - : \partial\phi\partial\phi : + Q\partial^2\phi, & T_{z\bar{z}} &= 0, \\ \bar{T}(\bar{z}) &= - : \bar{\partial}\phi\bar{\partial}\phi : + Q\bar{\partial}^2\phi, & T_{\bar{z}z} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I-5})$$

où la notation  $: \partial\phi\partial\phi :$  désigne le produit régularisé d'opérateurs, il sera sous-entendu par la suite à chaque fois que deux opérateurs sont pris au même point.<sup>3</sup> Les modes du tenseur énergie-impulsion satisfont donc l'algèbre de Virasoro de charge centrale

$$c_L = 1 + 6Q^2, \quad (\text{I-6})$$

et puisque l'on considère un paramètre  $b$  réel, la charge centrale est bornée inférieurement,  $c_L \geq 25$ . Cette borne de la charge centrale est à l'origine de la restriction  $c_M \leq 1$  sur la charge centrale de la théorie de matière que l'on peut coupler à la gravité bidimensionnelle. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

### OPÉRATEURS DE BULK

On remarque que la théorie de Liouville possède un certain nombre de caractéristiques identiques à celle du gaz de Coulomb. Cela provient du fait qu'il est souvent possible de négliger le potentiel lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes à courte distance. Ainsi, dans le développement en produit d'opérateurs *OPE*, on peut associer aux contractions le propagateur du champ libre. On montre alors que les opérateurs de vertex  $V_\alpha = e^{2\alpha\phi}$  sont des champs primaires de poids conforme

$$h_\alpha = \bar{h}_\alpha = \alpha(Q - \alpha). \quad (\text{I-7})$$

Les opérateurs  $V_\alpha$  et  $V_{Q-\alpha}$  possèdent donc la même dimension conforme  $\Delta_\alpha = h_\alpha + \bar{h}_\alpha$ <sup>4</sup>, nous verrons qu'ils sont en fait proportionnels. Le cas  $\alpha = Q/2$  est dégénéré et l'on peut introduire l'opérateur  $U_{Q/2} = \phi e^{Q\phi}$  qui interviendra dans l'action de la gravité couplée à une matière  $c_M = 1$  (chapitre VI).

3. Il existe une différence subtile entre le produit régularisé et le produit normal-ordonné habituel défini lors de la quantification canonique. Les deux produits ne coïncident que dans la limite où l'interaction disparaît [Tes01].

4. Il y a ici une légère différence de notation avec [FZZ00] :  $\Delta_\alpha = 2\alpha(Q - \alpha)$ . Cette notation est préférable pour le couplage avec le gaz de Coulomb.

## SYMÉTRIE QUANTIQUE

Pour que la théorie soit invariante conforme au niveau quantique, il est nécessaire que l'opérateur  $V_b$  qui perturbe l'action du gaz de Coulomb se transforme comme un opérateur primaire de dimension  $(1, 1)$ . On en déduit une relation importante entre la charge de *background* et le paramètre de Liouville<sup>5</sup>

$$Q = b + \frac{1}{b}. \quad (\text{I-8})$$

Il y a donc une correction par rapport à l'invariance conforme classique qui imposait  $Q = 1/b$ . La transformation conforme du champ  $\phi$  doit elle aussi être modifiée,

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{Q}{2} \log \left| \frac{dw}{dz} \right|^2. \quad (\text{I-9})$$

De manière générale, nous verrons que la théorie possède une symétrie quantique  $b \rightarrow 1/b$  qui est brisée au niveau classique.

## DIMENSION DES CORRÉLATEURS

La charge de *background* est associée à la brisure de la symétrie  $U(1)$  du boson libre par le terme de courbure. Sous l'effet d'une translation  $\phi \rightarrow \phi + \rho$ , la variation de l'action du champ gaussien vaut

$$\delta \mathcal{S}_G = \rho \frac{Q}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{g}} d^2x R = \rho Q \chi, \quad (\text{I-10})$$

où  $\chi = 2 - 2h$  est la caractéristique d'Euler de la variété  $\Sigma$ , de genre  $h = 0$  pour la sphère. On peut utiliser l'invariance de la mesure gaussienne du champ  $\phi$  sous la translation  $\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{2b} \log \mu$  afin d'extraire la dépendance en la constante cosmologique  $\mu$  des corrélateurs,

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle_{\mu} = \mu^{\frac{Q\chi}{2b} - \frac{1}{b} \sum_i \alpha_i} \langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle_{\mu=1} \quad (\text{I-11})$$

où le terme proportionnel à la caractéristique d'Euler provient de la variation de l'action gaussienne dérivée précédemment (I-10). Cette formule permet d'associer une dimension d'échelle aux corrélateurs, ce qui se révélera extrêmement utile par la suite. Par convention, la constante cosmologique étant associée à l'aire de la variété, on lui affecte la dimension  $[\mu] = 2$ . On en déduit la dimension des corrélateurs de *bulk*,

$$[\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle] = \frac{Q\chi}{b} - \frac{2}{b} \sum_i \alpha_i. \quad (\text{I-12})$$

---

5. Une démonstration plus rigoureuse de cette formule fait intervenir la quantification canonique du champ de Liouville et la décomposition en mode  $L_n, \bar{L}_n$  de  $T$ . On s'aperçoit alors que les modes  $L_n$  et  $\bar{L}_n$  ne satisfont une algèbre de Virasoro que si  $Q = b + 1/b$  ([GM93] et références incluses).

## 1.2 Fonction à trois points (DOZZ)

Un chapitre important de la théorie de Liouville a été écrit par H. Dorn, H.-J. Otto, A.B. et A.I.B. Zamolodchikov avec le calcul de la fonction à trois points [DO94, ZZ96],

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) V_{\alpha_2}(z_2, \bar{z}_2) V_{\alpha_3}(z_3, \bar{z}_3) \rangle = |z_{12}|^{\gamma_3} |z_{23}|^{\gamma_1} |z_{31}|^{\gamma_2} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (\text{I-13})$$

où  $\gamma_1 = \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3}$ , et  $\gamma_2, \gamma_3$  sont obtenus par cyclicité. Si l'on pose  $\mu = 0$ , la fonction à trois points est simplement la continuation analytique de la formule du gaz de Coulomb à une charge complexe [DF85]. La complication majeure vient du fait que l'on ne peut traiter le potentiel perturbativement, comme le montre la relation I-11. En réalité, ce traitement est possible dans le cas où la charge est conservée [GL91],

$$s = \frac{Q}{\mathfrak{b}} - \frac{1}{\mathfrak{b}} \sum_i \alpha_i \in \mathbb{Z}^+. \quad (\text{I-14})$$

Cette relation peut être interprétée comme une condition de couche de masse [Pol91],[DK91], elle correspond donc aux pôles de la fonction de corrélation. Le résidu de ces pôles dépend de  $\mu$  comme une puissance entière et s'identifie aux termes du développement du potentiel calculés en champ libre [ZZ96]

$$\text{Res}_{\sum \alpha_i = Q - n\mathfrak{b}} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{(-\mu)^n}{n!} \int d^2 u_1 \cdots d^2 u_n \langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) V_{\mathfrak{b}}(u_1) \cdots V_{\mathfrak{b}}(u_n) \rangle \Big|_{\sum \alpha_i = Q - n\mathfrak{b}} \quad (\text{I-15})$$

Cette propriété analytique permet d'obtenir la formule DOZZ,

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left[ \pi \mu \gamma(\mathfrak{b}^2) \mathfrak{b}^{2-2\mathfrak{b}^2} \right]^s \frac{\Upsilon'(0) \Upsilon(2\alpha_1) \Upsilon(2\alpha_2) \Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(-\mathfrak{b}s) \Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (\text{I-16})$$

Ici,  $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$  et  $\Upsilon(x)$  est une fonction spéciale dont les propriétés sont détaillées dans l'appendice A. En plus des pôles prévus pour  $s \in \mathbb{Z}^+$ , on trouve les deux séries  $\sum \alpha_i = Q - s_{m,n}$  et  $\sum \alpha_i = 2Q + s_{m,n}$  pour

$$s_{m,n} = \frac{m}{\mathfrak{b}} + n\mathfrak{b}, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \quad (\text{I-17})$$

Les résidus de ces pôles sont associés à des fonctions de corrélation du gaz de Coulomb écrantés par les opérateurs de vertex intégrés  $V_{\mathfrak{b}}$  et  $V_{1/\mathfrak{b}}$ , ce qui met en lumière la symétrie sous-jacente au niveau quantique :  $\mathfrak{b} \rightarrow 1/\mathfrak{b}$  et  $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$  avec

$$(\pi \tilde{\mu} \gamma(1/\mathfrak{b}^2))^{\mathfrak{b}} = (\pi \mu \gamma(\mathfrak{b}^2))^{1/\mathfrak{b}}. \quad (\text{I-18})$$

Cette symétrie n'est évidemment pas une symétrie de l'action I-1. Cependant, au lieu de perturber le champ libre avec le terme  $\mu V_{\mathfrak{b}}$ , il est a priori possible de considérer  $\tilde{\mu} V_{1/\mathfrak{b}}$  puisque les deux opérateurs ont la même dimension (1, 1). Nous verrons plus loin que la description quasi-classique impose le choix  $\mathfrak{b} < 1$  (borne de Seiberg).

**COEFFICIENT DE RÉFLEXION**

La fonction  $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  est bien entendu cyclique en  $\alpha_i$ . Par ailleurs, elle satisfait aussi la propriété de réflexion

$$C(Q - \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = D(Q - \alpha_1)C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (\text{I-19})$$

avec le **coefficient de réflexion**

$$D(\alpha) = \frac{1}{\mathfrak{b}^2} (\pi\mu\gamma(\mathfrak{b}^2))^{(Q-2\alpha)/\mathfrak{b}} \frac{\gamma(2\alpha\mathfrak{b} - \mathfrak{b}^2)}{\gamma(2 - 2\alpha/\mathfrak{b} + 1/\mathfrak{b}^2)}, \quad D(\alpha)D(Q - \alpha) = 1. \quad (\text{I-20})$$

Dans la limite semi-classique, et pour des états physiques, ce coefficient décrit la réflexion d'une onde plane par le potentiel de Liouville. Il permet aussi de relier les opérateurs de dimension  $\Delta_\alpha$  par  $V_{Q-\alpha} = D(Q - \alpha)V_\alpha$ . En théorie des cordes à deux dimensions, ce coefficient donne essentiellement l'amplitude de diffusion d'un tachyon par le potentiel de Liouville.

**FONCTION À DEUX POINTS**

La fonction à deux points s'obtient à partir de la fonction à trois points dans la limite  $\alpha_3 \rightarrow 0$  [DO94]. Il y apparaît une divergence ayant pour origine la symétrie résiduelle de la sphère à deux points fixés. On la régularise en divisant par le volume du groupe de symétrie ce qui donne une fonction  $\delta$  imposant la conservation de la charge :

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1)V_{\alpha_2}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = |z_1 - z_2|^{-2\Delta_{\alpha_1}} (\delta_{\alpha_1, \alpha_2} D(\alpha_1) + \delta_{\alpha_1, Q-\alpha_2}) \quad (\text{I-21})$$

**1.3 Etats et opérateurs**

Une des subtilités de la théorie de Liouville réside dans la correspondance entre états et opérateurs. Nous nous contenterons ici d'une approche rudimentaire, de plus amples détails sont donnés en appendice B, et pour une discussion exhaustive on peut se reporter à la revue [Tes01].

**ENERGIE ET IMPULSION**

On étudie bien souvent les états d'une théorie en se plaçant sur un cylindre de longueur infinie de coordonnées  $\log z = t + i\sigma$ . La rotation de Wick  $t \rightarrow i\tau$  mène à la théorie Lorentzienne. En raison de la transformation particulière du champ de Liouville, la relation entre la charge d'un opérateur de vertex  $V_\alpha$  et la valeur propre  $P$  de l'opérateur d'impulsion s'écrit

$$\alpha = \frac{Q}{2} + iP. \quad (\text{I-22})$$

## ÉTATS NORMALISABLES

Utilisant l'approche du mini-superspace, on montre que les états physiques de la théorie doivent avoir une impulsion réelle, autrement la fonction d'onde associée n'est pas normalisable. On a donc bien plus d'opérateurs primaires que d'états physiques. Toutefois, on ne peut évincer ces opérateurs surnuméraires car ils jouent un rôle en gravité quantique. Il faut donc revoir la correspondance entre états et opérateurs.

On associe aux états physiques  $|P\rangle$  de fonction d'onde normalisable des opérateurs non locaux, appelés aussi macroscopiques en référence à leur comportement dans la limite semi-classique. Les opérateurs locaux, ou microscopiques, satisfont la **borne de Seiberg**  $\text{Re } \alpha < Q/2$  et sont associés à des fonctions d'ondes non-normalisables. Remarquons que, grâce à la relation entre  $V_\alpha$  et  $V_{Q-\alpha}$ , le choix de la borne de Seiberg est toujours possible<sup>6</sup>. Nous verrons qu'il est équivalent au choix de la racine de l'équation de KPZ. Pour les états physiques, nous prendrons  $P > 0$ .

Les opérateurs apparaissant dans le cadre des modèles de matrice satisfont  $P \in i\mathbb{R}$ . Nous utiliserons alors la convention  $\alpha(P) = Q/2 - P$ . Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant.

### CHOIX $\mathfrak{b} < 1$

Imposer la borne de Seiberg  $\alpha < Q/2$  à l'opérateur  $V_{\mathfrak{b}}$  présent dans l'action équivaut à choisir  $\mathfrak{b} < 1$ . Le choix opposé  $\mathfrak{b} > 1$  correspond à un opérateur non local qui conduit à la création de **bébés univers** qui font exploser la feuille d'univers (figure I.1). Il est possible de réaliser ce cas dans un modèle de matrice en ajustant un paramètre couplé aux atouchements de la feuille d'univers [Kle95]. Dans le chapitre suivant, nous définirons la fonction d'onde à aire fixée  $Z[A]$ . La dépendance en l'aire se factorise naturellement et permet de définir la susceptibilité de la corde  $\gamma_{\text{str}}$  par  $Z[A] = A^{\gamma_{\text{str}}-3}Z[1]$ . Les valeurs de  $\gamma_{\text{str}}$  pour  $\mathfrak{b} < 1$  et  $1/\mathfrak{b} > 1$  sont reliés par

$$\gamma_{\text{str}}(1/\mathfrak{b}) = \frac{\gamma_{\text{str}}(\mathfrak{b})}{\gamma_{\text{str}}(\mathfrak{b}) - 1}. \quad (\text{I-23})$$

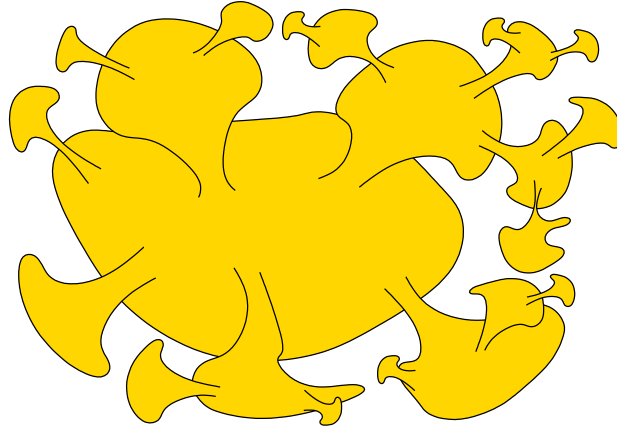
Par la suite, nous écarterons les valeurs  $\mathfrak{b} > 1$ , mais un phénomène analogue va se produire sur le bord.

## 2 Théorie du champ de Liouville sur le bord

Avec le rôle de plus en plus important des bords dans les théories de corde est venue la nécessité de développer la théorie de Liouville sur des variétés possédant un bord. Les articles fondateurs de V. Fateev, A. Zamolodchikov et Al Zamolodchikov [FZZ00] et J. Teschner [Tes00] introduisent et étudient l'action de Liouville sur un disque, avec un terme de bord. Dans le contexte de la théorie des cordes non critiques,

---

6. Comme nous le verrons au chapitre VI, dans le cas  $\alpha = Q/2$  le choix de l'opérateur est plus subtil.

FIGURE I.1 – Pour  $b > 1$ , la feuille d’univers explose en bébés univers.

ce terme de bord, allié à des conditions de type Neumann pour le champ de matière, est appelé brane FZZT (ou  $D1$ -brane dans le cas bidimensionnel du chapitre VI).

Il est possible d’introduire un autre type de conditions de bord [ZZ01], correspondant classiquement à faire tendre le champ  $\phi$  vers l’infini sur le bord, de manière à décrire un espace de type plan de Lobachevsky (ou pseudo-sphère) par la métrique  $g^{ab} = e^{2b\phi}\delta_{ab}$ . On obtient alors des états de bord paramétrisés par deux indices entiers  $(m, n)$ , et qui peuvent se décomposer sur les états FZZT. En théorie des cordes, on parle alors de branes ZZ (ou  $D0$ -brane en deux dimensions). Nous n’utiliserons pas ces conditions de bord par la suite.

## 2.1 Action et opérateurs de bord

Les conditions de bords invariantes conformes sont introduites par un terme de bord dans l’action, comprenant un terme de courbure intrinsèque  $\hat{K}$  ainsi qu’un potentiel associé à la constante de couplage  $\mu_B$  appelée **constante cosmologique de bord** qui paramétrise les conditions de bord “FZZT” :

$$\mathcal{S}_L^{(B)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} dx \hat{g}^{1/4} \left( Q \hat{K} + 2\pi\mu_B e^{b\phi} \right) \quad (\text{I-24})$$

où  $x$  désigne la coordonnée curviligne sur le bord  $\partial\Sigma$ . Remarquons que si la variété  $\Sigma$  possède plusieurs bords, il faut introduire une constante cosmologique et une action de bord pour chacun d’eux. On se ramènera par invariance conforme à l’étude sur le demi-plan complexe supérieur  $UHP$ , envoyant de nouveau la charge à l’infini. Les équations du mouvement classique sur le bord sont  $i(\partial - \bar{\partial})\phi = 2\pi\mu_B b e^{b\phi}$ , et l’on retrouve les conditions aux bords de Neumann dans la limite  $\mu_B \rightarrow 0$ .

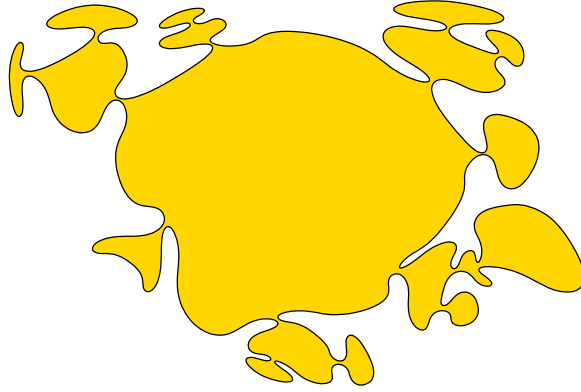


FIGURE I.2 – Un disque dont le bord se retouche décrit par le terme de bord dual.

### CONDITION DE BORD DUALE

Les opérateurs de bord primaires sont les opérateurs de vertex  $B_\beta(x) = e^{\beta\phi(x)}$ , ils ont pour dimension conforme  $\Delta_\beta = \beta(Q - \beta)$ . L'invariance conforme au niveau quantique impose la dimension un pour l'opérateur intervenant dans l'action de bord. On a donc la possibilité de choisir l'opérateur  $B_b(x) = e^{b\phi(x)}$  comme dans I-24, ou bien l'opérateur conjugué

$$\mathcal{S}_L^{(B)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} dx \hat{g}^{1/4} \left( Q \hat{K} + 2\pi \tilde{\mu}_B e^{b^{-1}\phi} \right). \quad (\text{I-25})$$

Par analogie avec le *bulk*, on interprète cette action comme décrivant un bord qui se touche lui-même un nombre infini de fois (figure I.2). A ce bord sera associée une dimension fractale  $[\tilde{\mu}_B] = 1/b^2 > 1$ , en contraste avec le bord présent dans l'action I-24 de dimension  $[\mu_B] = 1$ . Ces deux types de bords sont réalisés dans la limite continue du modèle de matrice. On peut toutefois ramener l'étude du bord dual à celle du bord I-24, et nous ne considérerons que ce dernier dans la suite de ce chapitre.

### OPÉRATEURS DE BORD

Les opérateurs de bord  $B_\beta(x)$  ne sont pas uniquement caractérisés par leur dimension, ils dépendent aussi des constantes cosmologiques des bords qui leur sont adjacents. Il est commode de paramétriser ces constantes par

$$\mu_B(s) = \sqrt{\frac{\mu}{\sin(\pi b^2)}} \cosh(\pi b s), \quad \tilde{\mu}_B(s) = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\sin(\pi b^{-2})}} \cosh(\pi s/b). \quad (\text{I-26})$$

Ainsi, on désignera l'opérateur de bord inséré entre deux bords de constantes cosmologiques  $\mu_{B_1}(s_1)$  et  $\mu_{B_2}(s_2)$  par  ${}^{s_1}B_\beta^{s_2}$ . Cette paramétrisation possède une coupure sur  $] -\infty, -\sqrt{\mu/\sin \pi b^2}]$  qui apparaît naturellement dans le cadre des modèles de matrice.

### DIMENSION DES CORRÉLATEURS

Utilisant la même invariance  $U(1)$  du champ  $\phi$ , il est possible de généraliser la formule I-11 donnant la dépendance des corrélateurs en la constante cosmologique au cas des opérateurs de bord :

$$\langle V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_n} B_{\beta_1}^{s_1} B_{\beta_2}^{s_2} \cdots B_{\beta_m}^{s_m} \rangle = \mu^{(Q\chi - 2\sum_i \alpha_i - \sum_j \beta_j)/2\mathfrak{b}} F(\mu_{B_1}^2/\mu, \dots, \mu_{B_m}^2/\mu). \quad (\text{I-27})$$

La caractéristique d'Euler vaut  $\chi = 1$  pour le disque. On peut de nouveau définir une dimension portant sur la dépendance en  $\mu$ ,

$$[\langle V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_n} B_{\beta_1}^{s_1} B_{\beta_2}^{s_2} \cdots B_{\beta_m}^{s_m} \rangle] = \frac{Q\chi}{\mathfrak{b}} - \frac{2}{\mathfrak{b}} \sum_i \alpha_i - \frac{1}{\mathfrak{b}} \sum_j \beta_j \quad (\text{I-28})$$

La dépendance de la fonction  $F$  dans le ratio  $\mu/\mu_B^2$  implique une dimension  $[\mu_B] = 1$ , et l'on montre de même que  $[\tilde{\mu}_B] = 1/\mathfrak{b}^2$ .

## 2.2 Corrélateurs

Dans le cadre des modèles matriciels, l'expression des fonctions de corrélation impliquant des opérateurs de bord nous intéresse particulièrement car elles apparaissent dans la limite continue. Nous retrouverons en particulier la fonction à deux points sur le bord lors de l'étude du modèle  $O(n)$  au chapitre IV.

### FONCTION À UN POINT DANS LE BULK

Nulle sur la sphère, la fonction à un point sur le disque a été dérivée dans [FZZ00] en utilisant la méthode des opérateurs dégénérés explicitée dans la section suivante,

$$\langle V_\alpha(z) \rangle = \frac{U(\alpha|\mu_B)}{|z - \bar{z}|^{\Delta_\alpha}}. \quad (\text{I-29})$$

L'expression de  $U$  dépend de la charge de l'opérateur et de la constante cosmologique de bord  $\mu_B(s)$ ,

$$U(\alpha|\mu_B) = \frac{2}{\mathfrak{b}} \Lambda^{(Q-2\alpha)/2\mathfrak{b}} \Gamma(\mathfrak{b}(2\alpha - \mathfrak{b})) \Gamma\left(\frac{2\alpha - 1/\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} - 1\right) \cosh((2\alpha - Q)\pi s), \quad (\text{I-30})$$

avec la constante  $\Lambda = \pi\mu\gamma(\mathfrak{b}^2)$ . Cette expression est compatible avec la relation entre les opérateurs de vertex conjugués  $V_\alpha$  et  $V_{Q-\alpha}$  car elle satisfait  $U(\alpha) = U(Q - \alpha)D(\alpha)$ . On peut aussi interpréter  $U(\alpha)$  comme la fonction d'onde des états de bord FZZT  $|\mu_B\rangle$ . Comme dans le bulk, il faut poser  $\alpha = Q/2 + iP$ , et les états physiques ont une impulsion  $P$  positive réelle.



## FONCTION À DEUX POINTS SUR LE BORD

L'expression du propagateur sur le bord provient elle aussi de l'article [FZZ00],

$$\langle {}^{s_1}B_\beta^{s_2}(x) {}^{s_2}B_\beta^{s_1}(0) \rangle = \frac{d(\beta|s_1, s_2)}{|x|^{2\Delta_\beta}}. \quad (\text{I-31})$$

Le coefficient  $d$  est une fonction double sinus dans les paramètres de bord  $s_{1,2}$ ,

$$d(\beta|s_1, s_2) = \left( \Lambda \mathfrak{b}^{2-2\mathfrak{b}^2} \right)^{-iP/\mathfrak{b}} \frac{\mathbf{G}(-2iP)}{\mathbf{G}(2iP)} \exp \left( - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t} \left[ \frac{e^{-2iPt} \cos s_1 t \cos s_2 t}{\sinh \mathfrak{b} t \sinh t/\mathfrak{b}} + \frac{2iP}{t} \right] \right), \quad (\text{I-32})$$

avec  $\beta = Q/2 + iP$ , et l'on consultera l'appendice A pour l'expression de la fonction spéciale  $\mathbf{G}$ . Cette expression satisfait une relation de réflexion

$$d(\beta|s_1, s_2)d(Q - \beta|s_1, s_2) = 1. \quad (\text{I-33})$$

## AUTRES CORRÉLATEURS

Les corrélateur à deux points bulk - bord et à trois points sur le bord ont été dérivés respectivement par K. Hosomichi [Hos01], et B. Ponsot et J. Teschner [PT02],

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha(z) B_\beta(x) \rangle &= \frac{R(\alpha, \beta|s)}{|z - \bar{z}|^{\Delta_\alpha - \Delta_\beta} |z - x|^{2\Delta_\beta}}, \\ \langle {}^{s_2}B_{\beta_1}^{s_3}(x_1) {}^{s_3}B_{\beta_2}^{s_1}(x_2) {}^{s_1}B_{\beta_3}^{s_2}(x_3) \rangle &= \frac{c(\beta_1, \beta_2, \beta_3|s_1, s_2, s_3)}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_{31}|^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}. \end{aligned} \quad (\text{I-34})$$

Les expressions générales pour  $R$  et  $c$  étant relativement complexes, et inutiles dans le cadre de cette thèse, nous ne les donnons pas ici.

## 3 Obtention des corrélateurs

Une méthode extrêmement puissante pour le calcul des corrélateurs de la théorie de Liouville a été mise au point par J. Teschner sur la fonction à trois points de *bulk* [Tes95] puis reprise dans [FZZ00] pour le calcul des corrélateurs de bord. Celle-ci fait intervenir les opérateurs dégénérés d'impulsion (de charge)

$$P_{r,s} = \frac{i}{2} \left( \frac{r}{\mathfrak{b}} + s\mathfrak{b} \right), \quad \alpha_{r,s} = \frac{1-r}{2\mathfrak{b}} + (1-s)\frac{\mathfrak{b}}{2}, \quad (r, s) \in \mathbb{Z}^{+2}. \quad (\text{I-35})$$

Utilisant astucieusement la troncature du produit d'opérateurs et l'équation différentielle portant sur l'opérateur de vertex  $V_{r,s}$ , il est possible d'obtenir une équation sur les corrélateurs, parfois dénommée équation

BPZ [BPZ84]. Nous verrons que cette équation est en relation avec les équations de boucle du modèle de matrice dans la limite continue.

Dans le *bulk*, on utilise préférentiellement les opérateurs dégénérés les plus simples  $V_{1,2} = e^{-b\phi}$  et  $V_{2,1} = e^{-b^{-1}\phi}$ . Ceux-ci obéissent à une équation au niveau deux qui se traduit par une équation différentielle du second ordre,

$$[L_{-2} - \mathfrak{b}^{\mp 2} L_{-1}^2] V_{-b^{\pm 1/2}} = 0, \quad [T(z) + \mathfrak{b}^{\mp 2} \partial^2] V_{-b^{\pm 1/2}} = 0. \quad (\text{I-36})$$

Le développement du produit de ces opérateurs avec un opérateur de vertex arbitraire  $V_\alpha$  ne contient que deux modules,

$$V_{-b^{\pm 1/2}} V_\alpha = [V_{\alpha+b^{\pm 1/2}}] + [V_{\alpha-b^{\pm 1/2}}]. \quad (\text{I-37})$$

Nous verrons comment l'utiliser à bon escient dans l'exemple suivant.

### 3.1 Propagateur du bulk sur la sphère

Le corrélateur le plus simple est sans conteste le propagateur de *bulk* sur la sphère, il est proposé comme exemple dans [FZZ00]. Nous reproduisons ici ce raisonnement afin de donner une idée de l'utilisation des opérateurs dégénérés. Partons du produit d'un opérateur par l'opérateur dégénéré  $V_{-b/2}$ ,

$$V_{-b/2} V_\alpha = C_+(\alpha) [V_{\alpha-b/2}] + C_-(\alpha) [V_{\alpha+b/2}], \quad C_\pm(\alpha) = \langle V_\alpha(0) V_{-b/2}(1) V_{Q-\alpha \pm b/2}(\infty) \rangle_\mu \quad (\text{I-38})$$

où  $C_\pm(\alpha)$  désigne naturellement les constantes de structures. Une remarque importante s'impose : dans les deux cas la somme des charges vérifie la condition I-14, on peut donc traiter perturbativement le potentiel de Liouville. Le coefficient  $C_+$  vérifie  $s = 0$ , il n'a donc pas besoin de charge d'écran et l'on peut simplement prendre le résultat du gaz de Coulomb  $C_+ = 1$ . En revanche, pour  $C_-$ , on trouve  $s = 1$ , il faut donc écranter une fois à l'aide du potentiel de Liouville,

$$C_-(\alpha) = -\mu \int d^2z \langle V_\alpha(0) V_{-b/2}(1) V_b(z) V_{Q-\alpha-b/2}(\infty) \rangle_{\mu=0} \quad (\text{I-39})$$

L'expression de ce corrélateur est connue et fait intervenir la fonction  $\gamma(x)$ ,

$$C_-(\alpha) = -\frac{\mu\pi}{\gamma(-\mathfrak{b}^2)} \frac{\gamma(2\mathfrak{b}\alpha - 1 - \mathfrak{b}^2)}{\gamma(2\mathfrak{b}\alpha)}. \quad (\text{I-40})$$

Maintenant que les coefficients  $C_\pm$  sont déterminés, utilisons le produit d'opérateurs à l'intérieur du corrélateur auxiliaire

$$\langle V_\alpha(z_1) V_{\alpha+b/2}(z_2) V_{-b/2}(z) \rangle \quad (\text{I-41})$$

Dans la limite  $z \rightarrow z_1$ , le développement I-38 nous donne deux termes mais la conservation de la charge  $\delta_{\alpha_1, \alpha_2}$  annule celui qui est proportionnel à  $C_+$ . Le corrélateur se réduit donc à

$$\langle V_\alpha(z_1) V_{\alpha+b/2}(z_2) V_{-b/2}(z) \rangle \sim C_-(\alpha) |z - z_1|^{2\mathfrak{b}(Q-\alpha)} \langle V_{\alpha+b/2}(z_1) V_{\alpha+b/2}(z_2) \rangle + \text{descendants}. \quad (\text{I-42})$$

De même, dans la limite  $z \rightarrow z_2$ , le terme proportionnel à  $C_-$  s'annule et l'on trouve

$$\langle V_\alpha(z_1)V_{\alpha+\mathfrak{b}/2}(z_2)V_{-\mathfrak{b}/2}(z) \rangle \sim C_+(\alpha + \mathfrak{b}/2)|z - z_2|^{b(2\alpha+\mathfrak{b})} \langle V_\alpha(z_1)V_\alpha(z_2) \rangle + \text{descendants}. \quad (\text{I-43})$$

Regroupant les deux équations précédentes, on en déduit l'équation de translation (*shift equation*) sur la charge du corrélateur,

$$D(\alpha) = C_-(\alpha)D(\alpha + \mathfrak{b}/2). \quad (\text{I-44})$$

Cette relation, avec la symétrie  $\mathfrak{b} \rightarrow 1/\mathfrak{b}$ , caractérise entièrement le corrélateur  $D(\alpha)$ . Elle peut être résolue en utilisant une transformée de Fourier. Enfin, notons que l'exemple présenté ici est un cas très simple car la dépendance dans les coordonnées est fixée par la symétrie conforme, il n'est donc pas nécessaire de faire intervenir les blocs conformes dans l'OPE.

### 3.2 Sur le disque

Sur le disque, en particulier pour le calcul des fonctions à deux et trois points sur le bord, on utilise les opérateurs dégénérés  ${}^s B_{-\mathfrak{b}/2}^{s'}$  et  ${}^s B_{-1/2\mathfrak{b}}^{s'}$ . L'introduction de l'opérateur  ${}^s B_{-\mathfrak{b}/2}^{s'}$  ne peut se faire qu'entre des bords satisfaisant la condition

$$s - s' = \pm i\mathfrak{b} \quad \text{ou} \quad s + s' = \pm i\mathfrak{b}. \quad (\text{I-45})$$

Une relation similaire existe pour l'opérateur  ${}^s B_{-1/2\mathfrak{b}}^{s'}$ . On voit ici apparaître une nouvelle complexité dans le cas des corrélateurs de bord : les relations de translation font intervenir non seulement l'impulsion des corrélateurs, mais aussi les paramètres de bord. Ainsi, par exemple pour la fonction à deux points,

$$d(\beta|_{s_1 + i\mathfrak{b}, s_2}) - d(\beta|_{s_1 - i\mathfrak{b}, s_2}) = \left( \frac{-\mu}{\pi\gamma(-\mathfrak{b}^2)} \right)^{1/2} \frac{2i\pi\Gamma(1 - 2\mathfrak{b}\beta)}{\Gamma(2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{b}\beta)} \sinh(\pi\mathfrak{b}s_1) d(\beta + \mathfrak{b}/2|_{s_1, s_2}) \quad (\text{I-46})$$

Il est aussi possible d'utiliser les opérateurs  ${}^s B_{-\mathfrak{b}}^{s'}$  et  ${}^s B_{-1/\mathfrak{b}}^{s'}$  qui ont l'avantage de pouvoir être introduits entre deux conditions de bord identiques  $s = s'$  [FZZ00].

### FONCTION À TROIS POINTS

Les relations de translation de la fonction à trois points sont particulièrement utiles lors de l'étude des opérateurs de bord JS/JS ou DJS/DJS [Bou09]. Elles permettent de valider l'étude matricielle en montrant sa cohérence avec la description continue donnée par la gravité de Liouville. Ces relations sont

les suivantes [PT02, BHKM08]<sup>7</sup>,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(1 + 2\mathfrak{b}P_2 - t)}{\Gamma(2\mathfrak{b}P_2)} c\left(\beta_1, \beta_2 - \frac{\mathfrak{b}}{2}, \beta_3 \mid s_1, s_2, s_3 \pm i\mathfrak{b}\right) \\
& - \frac{\Gamma(1 - 2\mathfrak{b}P_1)}{\Gamma(t - 2\mathfrak{b}P_1)} c\left(\beta_1 - \frac{\mathfrak{b}}{2}, \beta_2, \beta_3 \mid s_1, s_2, s_3\right) \\
& = \frac{\Gamma(1 + 2\mathfrak{b}P_1)\Gamma(1 + 2\mathfrak{b}P_2 - t)}{\Gamma(1 + 2\mathfrak{b}P_1 + 2\mathfrak{b}P_2 - t)\Gamma(t)} \frac{d(\beta_1 \mid s_2, s_3 \pm i\mathfrak{b})}{d(\beta_1 + \frac{\mathfrak{b}}{2} \mid s_2, s_3)} c\left(\beta_1 + \frac{\mathfrak{b}}{2}, \beta_2, \beta_3 \mid s_1, s_2, s_3\right)
\end{aligned} \tag{I-47}$$

avec  $t = \frac{1}{2} + \mathfrak{b}(P_1 + P_2 + P_3)$  et  $\beta_i = Q/2 - P_i$ . La différence entre les relations de translation avec un signe plus et moins peut être reliée aux équations de discontinuité sur la coupure satisfaite par les corrélateurs. En plus de la cyclicité, la fonction à trois points satisfait une propriété de réflexion,  $c(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \mid s_1, s_2, s_3) = c(\beta_1, \beta_3, \beta_2 \mid s_1, s_3, s_2)$ . Notons aussi que certains corrélateurs matriciels correspondent à l'insertion d'opérateurs satisfaisant une relation similaire à I-17. Le pôle des fonctions à trois points s'élimine alors avec le zéro d'une fonction  $\Gamma$ , ce qui simplifie les relations précédentes [Bou09].

## Conclusion

Cette présentation de la théorie de Liouville peut sembler aride de prime abord aux non spécialistes. Il faut garder à l'esprit que la théorie quantique du champ de Liouville a été développée afin de décrire les fluctuations d'une métrique quantique dans la jauge conforme. Nous verrons au chapitre suivant que c'est dans ce contexte que certaines notions et propriétés prennent leur sens. En particulier, la dimension des corrélateurs reflète la dépendance en l'aire de la variété, et permet de retrouver de nombreuses informations sur le spectre de la théorie de matière. Nous verrons aussi le rôle primordial joué par les corrélateurs de la théorie de Liouville, ainsi que celui des opérateurs dégénérés pour les relations de *boundary ground ring*.

## Annexe A Fonctions spéciales

Dans cet appendice, nous présentons les fonctions spéciales qui interviennent dans les corrélateurs de la théorie de Liouville. Plus spécifiquement, on s'attache à en donner les propriétés analytiques, les relations translatoires auxquelles elles obéissent, ainsi que leur représentation intégrale.

---

7. Une convention légèrement différente a été prise ici, ce qui revient à échanger  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rightarrow (\beta_2, \beta_3, \beta_1)$ .

## A.1 Fonction $\gamma$

La fonction  $\gamma$  est relativement courante, elle est définie comme le quotient de deux fonctions  $\Gamma$ ,

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)^2 \frac{\sin \pi x}{\pi} \quad (\text{I-48})$$

Elle hérite donc de la pseudo-période unité de la fonction  $\Gamma$ ,  $\gamma(x+1) = -x^2\gamma(x)$ , et de la symétrie miroir  $\gamma(\bar{x}) = \overline{\gamma(x)}$ . La fonction  $\gamma$  est méromorphe sur le plan complexe, elle s'annule sur l'axe réel positif aux valeurs  $x = n + 1$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , et possède des pôles sur la partie négative de l'axe réel en  $x = -n$ , de résidu  $(-1)^n/(n!)^2$ . Enfin, elle admet la représentation intégrale

$$\log \gamma(x + 1/2) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[ 2xe^{-t} - \frac{\sinh xt}{\sinh t/2} \right] \quad (\text{I-49})$$

valable pour  $|\operatorname{Re} x| < 1/2$ . Remarquons aussi la propriété  $\gamma(x)\gamma(-x) = -1/x^2$ .

## A.2 Fonctions $\mathbf{G}$ , $\Upsilon$ , $\mathbf{S}$

La fonction  $\mathbf{G}$  est la plus élémentaire des trois car elle permet de définir les fonctions  $\Upsilon$  et  $\mathbf{S}$ ,

$$\Upsilon(x) = \mathbf{G}(x)\mathbf{G}(Q-x), \quad \mathbf{S}(x) = \frac{\mathbf{G}(Q-x)}{\mathbf{G}(x)}. \quad (\text{I-50})$$

C'est une fonction holomorphe qui possède des zéros aux points  $x = -nb - m/b$  où  $m$  et  $n$  sont deux entiers positifs  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , et obéit à des relations translatrices impliquant la fonction  $\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x + \mathbf{b}) &= \frac{\mathbf{b}^{1/2-bx}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(\mathbf{b}x) \mathbf{G}(x), \\ \mathbf{G}(x + 1/\mathbf{b}) &= \frac{\mathbf{b}^{x/\mathbf{b}-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(x/\mathbf{b}) \mathbf{G}(x). \end{aligned} \quad (\text{I-51})$$

Pour  $\operatorname{Re} x > 0$ , on peut en donner une représentation intégrale,

$$\log \mathbf{G}(x + Q/2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[ x^2 e^{-2t} - \frac{x}{t} + \frac{e^{-xt} \sinh xt}{\sinh(\mathbf{b}t) \sinh(t/\mathbf{b})} \right]. \quad (\text{I-52})$$

### FONCTION $\Upsilon$

La fonction  $\Upsilon(x)$  est une fonction holomorphe sur le plan complexe, possédant des zéros aux points  $x = -nb - m/b$  et  $x = Q + nb + m/b$ ,  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Il est possible d'en donner une représentation intégrale pour  $0 < \operatorname{Re} x < Q$ ,

$$\log \Upsilon(x + Q/2) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[ x^2 e^{-2t} - \frac{\sinh^2 xt}{\sinh(\mathbf{b}t) \sinh(t/\mathbf{b})} \right]. \quad (\text{I-53})$$

et ses autres valeurs sont obtenues par continuation analytique. Elle est invariante sous la symétrie  $\mathfrak{b} \rightarrow 1/\mathfrak{b}$ , et satisfait un couple de relations translatrices impliquant la fonction  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned}\Upsilon(x + \mathfrak{b}) &= \gamma(\mathfrak{b}x)\mathfrak{b}^{1-2\mathfrak{b}x}\Upsilon(x) \\ \Upsilon(x + 1/\mathfrak{b}) &= \gamma(x/\mathfrak{b})\mathfrak{b}^{2x/\mathfrak{b}-1}\Upsilon(x)\end{aligned}\tag{I-54}$$

Citons aussi la symétrie  $\Upsilon(x) = \Upsilon(Q - x)$ , et la valeur remarquable  $\Upsilon(Q/2) = 1$ .

## FONCTION S

Cette fonction, parfois rencontrée sous la dénomination de “fonction  $q$ -gamma”, est méromorphe, avec des pôles sur l’axe réel négatif aux points  $x = -n\mathfrak{b} - m/\mathfrak{b}$ , et des zéros sur l’axe positif  $x = Q + n\mathfrak{b} + m/\mathfrak{b}$ ,  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Sur la bande  $0 < \operatorname{Re} x < Q$ , on peut dériver sa représentation intégrale à partir de celle de  $\mathbf{G}$ ,

$$\log \mathbf{S}(x + Q/2) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[ \frac{x}{t} - \frac{\sinh(2xt)}{2 \sinh(\mathfrak{b}t) \sinh(t/\mathfrak{b})} \right].\tag{I-55}$$

Elle satisfait une relation d’unitarité  $\mathbf{S}(x)\mathbf{S}(Q - x) = 1$ , ainsi que les translations

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(x + \mathfrak{b}) &= 2 \sin(\pi \mathfrak{b}x) \mathbf{S}(x), \\ \mathbf{S}(x + 1/\mathfrak{b}) &= 2 \sin(\pi x/\mathfrak{b}) \mathbf{S}(x).\end{aligned}\tag{I-56}$$

Cette fonction  $\mathbf{S}$  est en réalité l’inverse de la fonction double sinus de périodes  $\omega_1 = \mathfrak{b}$  et  $\omega_2 = 1/\mathfrak{b}$ . Elle peut aussi s’exprimer comme un quotient de produits infinis,

$$\mathbf{S}(x) = e^{-i\pi B_{22}(x)/2} \frac{\prod_{n=1}^\infty (1 - \tilde{q}^{-2n} e^{2i\pi x/\mathfrak{b}})}{\prod_{n=0}^\infty (1 - q^{2n} e^{2i\pi \mathfrak{b}x})} = e^{i\pi B_{22}(x)/2} \frac{\prod_{n=1}^\infty (1 - q^{2n} e^{-2i\pi \mathfrak{b}x})}{\prod_{n=0}^\infty (1 - \tilde{q}^{-2n} e^{-2i\pi x/\mathfrak{b}})}\tag{I-57}$$

avec le polynôme  $B_{22}(x) = x^2 - Qx - (Q^2 + 1)/6$  et les paramètres  $q = e^{i\pi \mathfrak{b}^2}$  et  $\tilde{q} = e^{i\pi/\mathfrak{b}^2}$ .

## Annexe B Correspondance entre états et opérateurs

### B.1 Approche du mini-superspace

Pour comprendre la construction des états propres de l’hamiltonien, il est intéressant de partir de l’approche du mini-superspace ([Sei90],[MSS91],[GM93]). Pour cela, on quantifie de façon canonique le champ  $\phi(\sigma, \tau)$  que l’on développe en modes sur la variable  $\sigma$  et l’on s’intéresse uniquement aux modes d’ordre zéro,

$$\phi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\sigma \phi(\sigma, \tau) \quad \Pi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\sigma \partial_\tau \phi(\sigma, \tau).\tag{I-58}$$

Dans cette limite, l'Hamiltonien sur le cylindre s'écrit

$$H_0 = \frac{1}{2}\Pi_0^2 + \pi\mu e^{2b\phi_0} + \frac{Q^2}{4}. \quad (\text{I-59})$$

La relation de quantification canonique à temps égaux permet d'obtenir les relations de commutation de tous les modes, en particulier

$$[\phi(\sigma, t); \Pi(\sigma', t)] = i\delta(\sigma - \sigma') \quad \Rightarrow \quad [\phi_0; \Pi_0] = i. \quad (\text{I-60})$$

On identifie donc l'opérateur d'impulsion  $\Pi_0 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\phi_0}$  dans l'espace des coordonnées  $\phi_0$ , appelé aussi espace cible dans le contexte des théories des cordes. A ce mode de l'hamiltonien est associée une équation de Schrödinger

$$\left[ -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_0}\right)^2 + \pi\mu e^{2b\phi_0} + \frac{Q^2}{4} \right] \psi = h\psi, \quad (\text{I-61})$$

que l'on peut simplifier en introduisant la variable  $l = e^{b\phi_0}$  qui s'interprète comme une longueur mesurant la taille de l'univers de métrique  $g^{ab} = e^{2b\phi}\hat{g}^{ab}$ ,

$$\left[ -\frac{b^2}{4}(l\partial_l)^2 + \pi\mu l^2 + \frac{Q^2}{4} \right] \psi(l) = h\psi(l). \quad (\text{I-62})$$

On reconnaît l'équation de Wheeler - De Witt satisfaite par la fonction d'onde d'univers en gravité quantique, obtenue grâce à l'invariance sous difféomorphismes temporels.<sup>8</sup> Dans la limite  $\phi_0 \rightarrow -\infty$ , le potentiel exponentiel disparaît, et la solution correspond à des ondes planes  $\psi_P(\phi_0) \sim e^{\pm 2iP\phi_0}$ . On peut en déduire le spectre de la théorie,  $h = \Delta/2 = P^2 + Q^2/4$ . Ces ondes planes ne sont normalisables que si l'impulsion  $P$  associée est réelle. Notons qu'il est possible de résoudre exactement l'équation I-62 par une fonction de Bessel. On trouve alors la même propriété, les fonctions d'ondes ne sont normalisables que si l'impulsion est réelle.

L'équation de Wheeler - De Witt est invariante sous  $P \rightarrow -P$  et la borne de Seiberg impose  $P > 0$ . La limite  $\phi_0 \rightarrow -\infty$  est décrite par une superposition de deux ondes planes,

$$\psi(\phi_0) \sim e^{2iP\phi_0} + R(P)e^{-2iP\phi_0}. \quad (\text{I-63})$$

avec  $R(P) = D(Q/2 + iP)$ . Le facteur  $R(P) = D(Q/2 + iP)$  décrit la réflexion de l'onde plane par le potentiel de Liouville, et la symétrie  $P \rightarrow -P$  correspond au choix des états entrants et sortants.

---

8. Cette équation a été dérivée pour les opérateurs de boucles du modèle de matrice dans [MSS91]. Elle a aussi pu être interprétée dans le contexte de SLE [Kle07].

## B.2 Correspondance entre états et opérateurs

### B.2.1 Opérateurs $\rightarrow$ Etats

Essayons tout d'abord d'associer un état à tout opérateur  $V_\alpha$ . Pour cela, il est nécessaire d'introduire un vide  $|0\rangle$  sur lequel on construit les états

$$|\alpha\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} V_\alpha(z, \bar{z})|0\rangle \quad (\text{I-64})$$

Ce vide doit être invariant sous transformation conforme, donc avoir la charge  $\alpha = 0$ , ce qui implique  $P = iQ/2$ . L'impulsion n'étant pas réelle, cet état n'est pas dans l'espace de Hilbert.

Une autre solution consiste à utiliser l'intégrale fonctionnelle : on définit la fonction d'onde de l'état associé à l'opérateur  $V_\alpha$  par l'intégration sur le disque unité de l'opérateur inséré en  $z = 0$ . On impose la condition de bord  $\phi_B$  au champ de Liouville en  $|z| = 1$ , obtenant ainsi la fonction d'onde

$$\Psi_\alpha(\phi_B) = \int_{\phi_B} D[\phi] e^{-S[\phi]} V_\alpha(0). \quad (\text{I-65})$$

Dans l'approximation du mini-superspace, on peut développer  $\phi_B(\sigma)$  en modes sur la coordonnée  $\sigma$ , et la contribution du mode zéro se factorise,

$$\Psi_\alpha(\phi_B) = \psi_\alpha(\phi_B^0) \times (\text{higher modes}). \quad (\text{I-66})$$

On a vu précédemment que la fonction d'onde n'était normalisable que pour  $\alpha = Q/2 + iP$  avec  $P \in \mathbb{R}$  : seuls ces états sont présents.

### B.2.2 Etats $\rightarrow$ Opérateurs

Voyons maintenant ce que donne l'approche opposée : essayer d'associer aux états un opérateur. Comme  $L_0 + \bar{L}_0$  correspond à l'Hamiltonien radial, insérer l'état  $|\alpha\rangle$  de fonction d'onde  $\Psi_\alpha$  sur le cercle unité (en  $t = 0$  sur le cylindre) équivaut à insérer l'état  $r^{-L_0 - \bar{L}_0}|\alpha\rangle$  sur le cercle  $|z| = r$  :

$$\int D[\phi] e^{-S_L[\phi]} V_\alpha(0) = \int D[\phi_B] \int_{\phi(|z|=r)=\phi_B} D[\phi] e^{-S_L[\phi]} r^{-L_0 - \bar{L}_0} \Psi_\alpha(\phi_B). \quad (\text{I-67})$$

Il faut ensuite faire tendre  $r \rightarrow 0$ , soit  $t \rightarrow -\infty$ . Classiquement, on montre que pour les états entrants et sortants (*in* et *out*), le mode zéro se comporte comme  $\phi_0 \sim \pm 2Pt$ . De nouveau, on sépare l'intégration sur le mode zéro,  $\phi_B = \phi_B^0 + \phi_B^{\text{oscill}}$  et  $D[\phi_B] = d\phi_B^0 D[\phi_B^{\text{oscill}}]$ . Pour pouvoir intégrer sur la fonction d'onde, il faut que celle-ci converge en  $\phi_B^0 \rightarrow -\infty$ , or  $\psi_\alpha(\phi_B^0) \sim e^{2(Q/2 - \alpha)\phi_B^0}$ . On doit donc imposer  $\text{Re } \alpha < Q/2$  pour obtenir un opérateur local. C'est la **borne de Seiberg**.





## GRAVITÉ QUANTIQUE BIDIMENSIONNELLE

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Quantification DDK de la gravité</b> . . . . .	<b>33</b>
1.1	Obtention de la fonction de partition . . . . .	33
1.2	Fonction de partition à aire fixé . . . . .	35
1.3	Habillage des opérateurs . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Ground ring</b> . . . . .	<b>39</b>
2.1	Opérateurs de Ground Ring . . . . .	40
2.2	Exemple : fonction à trois points de bulk . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Comparaison avec les modèles de matrices</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Charge centrale . . . . .	41
3.2	Dimensions conformes . . . . .	41
<b>A</b>	<b>Gaz de Coulomb</b> . . . . .	<b>43</b>

---

## Introduction

La théorie classique du champ de Liouville est connue depuis le 19<sup>ème</sup> siècle, développée notamment par H. Poincaré [Poi98], et décrit les surfaces de Riemann de courbure négative. Le besoin d’une théorie quantique pour le champ de Liouville est venue de la théorie des cordes, plus précisément d’une remarque de A. Polyakov [Pol81]. Dans cet article, est émise l’hypothèse d’une représentation des champs de coordonnées quantifiés de la corde par des bosons libres couplés à la gravité bidimensionnelle. Si la dimension de l’espace cible prend la valeur critique  $c_M = 26$ , alors la gravité se découple des autres champs et l’on peut étudier les bosons libres séparément. En revanche, ce n’est pas vrai dans le cas d’une dimension cible arbitraire, et il faut alors analyser en détail le couplage de la matière à une métrique quantifiée. Celle-ci ne possède qu’un seul degré de liberté, décrit dans la jauge conforme par un champ obéissant à l’action de Liouville, d’où la dénomination de **gravité de Liouville**.

De manière plus générale, nous présentons ici le couplage d’une théorie conforme quelconque de matière à la gravité bidimensionnelle. On se concentrera en particulier sur une matière décrite par le gaz de Coulomb, dans l’optique de décrire la limite continue du modèle  $O(n)$  matriciel. Le premier succès de quantification pour la gravité bidimensionnelle eut lieu dans la jauge du cône de lumière [KPZ88]. Cependant la jauge conforme, ou jauge de Polyakov, est plus simple et plus adaptée au contexte des modèles de matrice. Cette approche, développée par F. David [Dav88], et J. Distler et H. Kawai [DK89], sera au coeur de ce chapitre. Elle nous permettra de montrer la propriété fondamentale de factorisation des corrélateurs en trois secteurs : la matière, la métrique et les fantômes. Ces trois secteurs sont couplés via les relations dites de **KPZ** portant sur les charges centrales et les dimensions des opérateurs.

Dans le chapitre précédent, certains opérateurs dégénérés se sont révélés très précieux pour obtenir les corrélateurs de bord. Habillés par la matière et les fantômes, ces opérateurs forment un anneau appelé **ground ring** (*GR*) dans le cadre gravitationnel. Utilisant astucieusement les relations de fusion de ces opérateurs, on obtient un ensemble d’équations reliant les corrélateurs pour des valeurs translattées de leur impulsion. Un anneau équivalent existe sur le bord, le **boundary ground ring** (*BGR*), et les translations portent aussi sur les paramètres de bord associés aux constantes cosmologiques.

Nous terminerons ce chapitre par un ensemble de méthodes “prêtes à l’emploi” permettant de déterminer la dimension des opérateurs de bord de la théorie conforme de matière à partir des dimensions gravitationnelles. Ces méthodes sont celles employées dans les articles [BH09, Bou09, BHK10].

# 1 Quantification DDK de la gravité

## 1.1 Obtention de la fonction de partition

Dans cette section, nous montrons comment quantifier la gravité dans la jauge conforme. La méthode présentée se rapproche de celle des cordes critiques (voir par exemple [Pol98]), la seule complication réside dans le traitement du facteur conforme dynamique de la métrique qui engendre le champ de Liouville.

### COUPLAGE À LA GRAVITÉ

Considérons une théorie conforme de charge centrale  $c_M$  que nous appellerons matière. Cette théorie, d'action  $\mathcal{S}_M[X_i, g^{ab}]$ , comprend un certain nombre de champs  $X_i(z, \bar{z})$  définis sur une surface de Riemann  $\Sigma$  de métrique  $g^{ab}$  appelée **feuille d'univers**. Dans le cas d'une théorie des cordes bosoniques,  $\mathcal{S}_M$  correspond à l'action de Polyakov pour les coordonnées  $X_i$ , c'est à dire à l'action de  $c_M$  bosons libres, et la charge centrale  $c_M$  s'identifie à la dimension de l'espace cible. Le couplage à la gravité se fait en autorisant les fluctuations quantiques de la métrique,

$$\mathcal{Z} = \int \frac{D_g[g] D_g[X_i]}{\text{vol}(\text{Diff})} e^{-\mathcal{S}_M[X_i, g]} e^{-\frac{\kappa_0}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g}}. \quad (\text{II-1})$$

Un terme proportionnel à l'aire de la variété est introduit afin de pouvoir contrôler le comportement infrarouge de la théorie, le paramètre  $\kappa_0$  associé est la **constante cosmologique** nue.

### TRAITEMENT DE L'ANOMALIE CONFORME

Toute fonction de partition décrivant une théorie gravitationnelle possède naturellement une invariance par reparamétrisation de la métrique. On se doit donc de fixer une jauge et de renormaliser la fonction de partition par le volume du groupe d'invariance, en l'occurrence le groupe des difféomorphismes  $\text{vol}(\text{Diff})$ . Mais l'action  $\mathcal{S}_M$  est invariante conforme : elle possède une symétrie supplémentaire correspondant à la dilatation de la métrique et qui est donnée par la transformation de Weyl  $g^{ab} \rightarrow e^\sigma g^{ab}$ . Malheureusement, les mesures  $D_g[X]$  et  $D_g[g]$  ne sont pas invariantes, et l'anomalie est proportionnelle à  $c_M - 26$ . Dans le cas des cordes critiques  $c_M = 26$ , l'anomalie disparaît et l'on peut se ramener à une métrique plate. Ce n'est plus le cas pour une matière de charge centrale quelconque, et il faut considérer le facteur conforme comme un champ dynamique.

On choisit donc la jauge conforme  $g^{ab} = e^{2\phi} \hat{g}^{ab}$  où  $\hat{g}^{ab}(\tau)$  est une métrique fixée dépendant d'éventuels paramètres modulaires  $\tau$ . On impose cette jauge grâce à la méthode de Faddeev - Poppov, le Jacobien

génère une action conforme pour les fantômes  $b$  et  $c$ , de charge centrale  $c_{\text{gh}} = -26$ ,

$$\mathcal{S}_{\text{gh}}[b, c; \hat{g}] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2z \sqrt{\hat{g}} (b \bar{\nabla} c + \bar{b} \nabla c) \quad (\text{II-2})$$

où  $\nabla$ ,  $\bar{\nabla}$  désignent les dérivées covariantes associées à la métrique  $\hat{g}^{ab}$ . Avec ce choix de jauge, la mesure sur la métrique se décompose formellement comme  $D_g[g] = d\tau D_g[\phi] D_g[b, c] e^{-\mathcal{S}_{\text{gh}}[b, c; \hat{g}]}$ . Les anomalies des mesures pour les champs de matière et de fantômes sont bien connues,

$$D_{e^{\sigma}g}[X] = e^{\frac{c_M}{6}\mathcal{S}_L(\sigma)} D_g[X], \quad D_{e^{\sigma}g}[b, c] = e^{-\frac{26}{6}\mathcal{S}_L(\sigma)} D_g[b, c], \quad (\text{II-3})$$

où  $\mathcal{S}_L$  désigne l'action de Liouville non-renormalisée,

$$\mathcal{S}_L(\sigma) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \sigma \partial_b \sigma + R\sigma + \kappa e^{\sigma} \right). \quad (\text{II-4})$$

Regroupant tous ces termes, on trouve finalement, après fixation de jauge, la fonction de partition suivante,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \int d\tau D_g[\phi] D_{\hat{g}}[b, c] D_{\hat{g}}[X_i] \exp - \left[ \mathcal{S}_M[X_i, \hat{g}] + \mathcal{S}_{\text{gh}}[b, c; \hat{g}] \right. \\ \left. + \frac{26 - c_M}{24\pi} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\hat{g}} \left( \hat{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + R\phi + \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{6\kappa_0}{c_M - 26} \right) e^{2\phi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

## MESURE DU CHAMP DE LIOUVILLE

Il reste un problème majeur dans la fonction de partition II-5 : la mesure du champ de Liouville qui dérive de la mesure  $D_g[g]$  de la métrique n'est pas gaussienne [Fri82]. Ce problème de mesure est l'obstacle principal qui s'oppose à la quantification dans la jauge conforme. Il faut alors faire appel à l'hypothèse de David, Distler et Kawai [Dav88, DK89] qui consiste à supposer une mesure gaussienne pour le champ  $\phi$  tout en autorisant une action plus générale,

$$\mathcal{S}_L[\phi; \hat{g}] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{g}} d^2x \left[ \hat{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi} \right], \quad (\text{II-6})$$

associée au choix de jauge conforme  $g^{ab} = e^{2b\phi} \hat{g}^{ab}$ . La forme de cette action de Liouville "renormalisée" est obtenue en imposant la localité et les invariances sous difféomorphisme et transformation conforme. Nous avons vu que cette dernière imposait  $Q = \mathfrak{b} + 1/\mathfrak{b}$ , la charge centrale valant  $c_L = 1 + 6Q^2$ . L'invariance sous la transformation de Weyl  $\hat{g}^{ab} \rightarrow e^{\sigma} \hat{g}^{ab}$ ,  $\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{2\mathfrak{b}} \sigma$  impose l'annulation de la charge centrale totale,

$$c_L + c_M + c_{\text{gh}} = 0, \quad (\text{II-7})$$

qui détermine le paramètre  $\mathfrak{b}$  en fonction de la charge centrale de matière. Remarquons enfin que la constante cosmologique renormalisée  $\mu$  s'annule pour une valeur critique  $\kappa = \kappa_c$ . Celle-ci s'interprète comme une divergence de l'aire de la feuille d'univers, on obtient alors une théorie de champ libre pour  $\phi$ .

**RESTRICTION À  $1 < c_M < 25$** 

Lorsque la charge centrale de matière est inférieure à un  $c_M \leq 1$ , les paramètres  $Q$  et  $b$  découlants de la relation II-7 sont réels et la théorie est bien définie. Pour une charge centrale  $1 < c_M < 25$ , on se trouve dans le domaine de couplage fort de la théorie de Liouville,  $0 < Q^2 < 4$  et  $b$  est complexe. La fonction d'onde de l'opérateur  $e^{2b\phi}$  est alors normalisable, l'opérateur est macroscopique. L'insertion de cet opérateur dans l'action contribue à l'explosion de la feuille d'univers par le phénomène des bébés univers. Notons aussi que la métrique associée  $g^{ab} = e^{2b\phi}\hat{g}^{ab}$  est complexe. Enfin, dans la domaine  $c_M \geq 25$ , le paramètre  $b$  et la charge  $Q$  sont tous deux imaginaires. Il est possible de se ramener à des constantes réelles par une rotation de Wick du champ de Liouville qui devient un champ fantôme. Une discussion plus poussée sur les phénomènes associés à  $c_M > 1$  peut être trouvée dans la revue [GM93] et le cours [Amb94].

**PARAMÈTRES MODULAIRES ET VECTEURS DE KILLING**

Puisque nous nous intéressons uniquement aux fonctions de partition sur des surfaces dont la caractéristique d'Euler est positive, nous n'avons pas à intégrer sur d'éventuels paramètres modulaires. On pourrait toutefois s'intéresser à des genres plus élevés et les paramètres modulaires se traitent de manière analogue au cas de la corde critique, c'est à dire en insérant des opérateurs de fantômes  $b$  associés aux déformations de la métrique.

En revanche, nos surfaces possèdent des vecteurs de Killing, générateurs de symétries non prises en compte par le choix de jauge. Plus précisément, la sphère en comporte six, et le disque trois. Le traitement habituel de ces symétries consiste à fixer la position de  $N$  opérateurs de bulk et  $n$  opérateurs de bord pour  $2N + n$  vecteurs de Killing réels. Dans le cadre des surfaces triangulées (chapitre IV), ces invariances résiduelles seront fixées en introduisant des points marqués sur les surfaces.

**1.2 Fonction de partition à aire fixé**

Au lieu de la constante cosmologique  $\mu$ , on peut préférer travailler à aire fixée. Au niveau classique, l'élément d'aire de la feuille d'univers correspond à  $d^2x\sqrt{g}$ . Dans la jauge conforme, le déterminant de la métrique fait apparaître l'opérateur  $e^{2b\phi}$ . Cet opérateur étant de dimension conforme deux, l'élément  $e^{2b\phi}d^2x$  est invariant sous difféomorphismes et peut s'interpréter comme une mesure de l'aire quantique de la variété. La fonction de partition à aire fixée va donc être définie comme <sup>1</sup>

$$\mathcal{Z}[A] = \int D[\phi, X, b, c] e^{-S_M - S_L - S_{\text{gh}}} \delta \left( \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\hat{g}} e^{2b\phi} - A \right) \quad (\text{II-8})$$

1. Pour définir cette fonction de partition correctement, il faut prendre en compte les modes zéros des fantômes. Nous ne rentrerons pas dans ce genre de détails ici mais la question est traitée dans [DK89].

en prenant  $\mu = 0$  dans l'action de Liouville. La dépendance en l'aire peut être extraite en utilisant l'invariance  $U(1)$   $\phi \rightarrow \phi + (\log A)/2b$ , et l'on obtient  $\mathcal{Z}[A] = A^{\gamma_{\text{str}}-3} \mathcal{Z}[1]$  où  $\gamma_{\text{str}}$  est la **susceptibilité de corde**,

$$\gamma_{\text{str}} = 2 - \frac{Q\chi}{2b}. \quad (\text{II-9})$$

La fonction de partition  $\mathcal{Z}[\mu]$  est la transformée de Laplace de la fonction de partition à aire fixée,

$$\mathcal{Z}[\mu] = \int_0^\infty dA e^{-\mu A} \mathcal{Z}[A]. \quad (\text{II-10})$$

On retrouve ainsi la dépendance  $\mathcal{Z}[\mu] \sim \mu^{2-\gamma_{\text{str}}}$ , et la limite critique  $\mu \rightarrow 0$  correspond bien à la divergence de l'aire de la feuille d'univers  $A \rightarrow \infty$ .

### DISQUE AVEC BORD DE LONGUEUR FIXÉE

Pour définir une mesure de la longueur du bord, on cherche à intégrer un opérateur de bord de dimension 1 sur l'élément curviligne  $dx$ . Deux opérateurs possèdent cette dimension unité,  $B_b$  et  $B_{1/b}$ , permettant de définir deux mesures de longueur  $d\ell = e^{b\phi} dx$  et  $d\tilde{\ell} = e^{1/b\phi} dx$ . Chacun de ces opérateurs est associé à un terme de bord de type FZZT dans l'action, avec pour constante cosmologique respectivement  $\mu_B$  et  $\tilde{\mu}_B$ . La fonction de partition à longueur fixée obtenue à l'aide d'une fonction  $\delta$ ,

$$\delta\left(\ell - \int dx \hat{g}^{1/4} e^{b\phi(x)}\right), \quad \delta\left(\tilde{\ell} - \int dx \hat{g}^{1/4} e^{b^{-1}\phi(x)}\right). \quad (\text{II-11})$$

Les fonctions de partition à longueur fixée  $\ell$  et  $\tilde{\ell}$  sont les transformées de Laplace par rapport aux constantes cosmologiques respectivement  $\mu_B$  et  $\tilde{\mu}_B$ . On en déduit l'échelle des longueurs par rapport à l'aire,  $\ell \sim A^{1/2}$  et  $\tilde{\ell} \sim A^{1/2b^2}$ . Ainsi, l'opérateur  $B_b$  mesure une longueur dans le sens habituel, tandis que  $B_{1/b}$  correspond à une longueur fractale. Nous avons vu que ce type de comportement fractal apparaissait lorsque le bord se touchait lui-même un grand nombre de fois.

### 1.3 Habillage des opérateurs

Classiquement, pour être invariant sous les difféomorphismes de la variété  $\Sigma$ , les opérateurs  $V_i^{(M)}$  de la théorie matérielle doivent être intégrés sur la surface  $\int_\Sigma d^2x \sqrt{g} V_i^{(M)}$ . Au niveau quantique, et après avoir fixé la jauge, il faut habiller ces opérateurs par le champ de Liouville, et considérer

$$\int_\Sigma d^2x \sqrt{\hat{g}} V_i^{(M)} e^{2\alpha_i \phi}. \quad (\text{II-12})$$

Le produit  $V_i^{(M)} e^{2\alpha_i \phi}$  doit avoir le poids conforme  $(1, 1)$ , ce qui induit une relation entre la dimension nue  $\delta_i$  de l'opérateur  $V_i^{(M)}$  et la dimension conforme  $\Delta_i$  de l'opérateur de vertex  $V_{\alpha_i}^{(L)}$  de la théorie de

Liouville :  $\delta_i + \Delta_i = 2$ . Les relations entre les charges centrales d'une part, et les dimensions des opérateurs d'autre part, sont désignées sous le terme **relations de KPZ**

$$c_L + c_M = 26, \quad \delta + \Delta = 2. \quad (\text{II-13})$$

### OPÉRATEURS À POINT FIXÉ

On a vu précédemment qu'il était raisonnable de fixer la position de certains opérateurs lorsque la feuille d'univers présente des vecteurs de Killing. Ainsi, sur la sphère on souhaitera fixer la position de trois opérateurs, habituellement aux points 0, 1 et  $\infty$ . Cela peut se faire au prix de l'introduction de deux opérateurs fantômes  $c$  et  $\bar{c}$ , de dimension conforme  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , qui assurent l'invariance sous difféomorphismes. Dans un langage plus mathématique, et en utilisant les coordonnées complexes  $(z, \bar{z})$ , les opérateurs invariants sont les  $i$ -formes suivantes, de nombre de fantômes  $2 - i$ ,

Forme	# Fantômes	Opérateur
0	2	$\mathcal{V}^{(0)} = c\bar{c}\mathbf{V}(z, \bar{z})$
1	1	$\mathcal{V}^{(1)} = (dz\bar{c} - d\bar{z}c)\mathbf{V}(z, \bar{z})$
2	0	$\mathcal{V}^{(2)} = dzd\bar{z}\mathbf{V}(z, \bar{z})$

où  $\mathbf{V}(z, \bar{z}) = V^{(M)}e^{2\alpha\phi}$  est l'opérateur de matière habillé par un opérateur de vertex de la théorie de Liouville.

### NOMBRE DE FANTÔME

L'action  $\mathcal{S}_{\text{gh}}$  définit une théorie conforme de charge centrale  $c_{\text{gh}} = -26$ , et les champs  $b$  et  $c$  sont des opérateurs primaires de dimension conforme respectivement  $(2, 0)$  et  $(-1, 0)$  (et en inversant les chiralités,  $(0, 2)$  et  $(0, -1)$  pour respectivement  $\bar{b}$  et  $\bar{c}$ ). La théorie possède un courant  $U(1)$  pour chaque composante chirale, définit par  $J(z) = - : b(z)c(z) :$  et  $\bar{J}(\bar{z}) = - : \bar{b}(\bar{z})\bar{c}(\bar{z}) :$ . La charge associée est appelée **nombre de fantômes** (ou d'anti-fantômes pour  $\bar{J}$ ). Les opérateurs  $b$  et  $c$  sont chargés sous cette symétrie,  $b$  ayant un nombre de fantômes  $-1$  et  $c + 1$ , et de même pour  $\bar{b}$  et  $\bar{c}$ . Les corrélateurs doivent respecter cette symétrie, ce qui impose une charge de fantôme totale nulle.

### GAZ DE COULOMB

Dans le cas du modèle  $O(n)$  matriciel, on va supposer que l'action de la matière est celle du gaz de Coulomb II-28 (appendice A). A la différence des méthodes du réseau plat, cette hypothèse n'est



pas nécessaire pour prendre la limite continue au sein du modèle de matrice. Nous verrons qu'elle est cependant très commode pour interpréter les résultats matriciels.

La charge de *background*  $e_0$  du gaz de Coulomb est reliée au paramètre de Liouville  $\mathfrak{b}$  par la relation de KPZ II-13,  $e_0 = 1/\mathfrak{b} - \mathfrak{b}$ .<sup>2</sup> L'opérateur de vertex  $V_e$  de dimension conforme  $\delta = 2e(e - e_0)$  est habillé par le champ de Liouville avec une charge  $\alpha(e)$  donnée par

$$\delta + \Delta = 2e(e - e_0) + 2\alpha(Q - \alpha) = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\pm}(e) = \pm e + \mathfrak{b}^{\pm 1}. \quad (\text{II-14})$$

Cette relation étant quadratique, il existe deux solutions distinctes, donc deux habillages possibles pour les opérateurs de vertex,  $e^{2i\alpha_{\pm}(e)\phi}$ . Pour obtenir les opérateurs physiques, il faut imposer la borne de Seiberg  $\alpha < Q/2$  qui se traduit par le choix  $\alpha(e) = \alpha_+(e)$  si  $e < e_0/2$  et  $\alpha(e) = \alpha_-(e)$  sinon. Toutefois, en ce qui concerne les opérateurs de bord, cette borne n'est pas toujours vérifiée.

On normalise généralement les opérateurs de vertex suivant

$$\mathbf{V}_P^{(\pm)} = \frac{1}{\pi} \gamma (\pm 2P\mathfrak{b}^{\pm 1}) e^{2i(e_0/2 - P)X + 2\alpha(P)\phi} \quad (\text{II-15})$$

avec  $\alpha(P) = Q/2 - P$  si  $P > 0$  et  $\alpha(P) = Q/2 + P$  sinon<sup>3</sup>. La borne de Seiberg impose que les opérateurs physiques soient droits (*right moving*,  $P > 0$ ) pour les opérateurs  $\mathbf{V}^{(+)}$  et gauches (*left moving*,  $P < 0$ ) pour  $\mathbf{V}^{(-)}$ . La constante de normalisation, appelée *leg factor*, est généralement nécessaire lorsque l'on compare avec les résultats matriciels. Elle aura aussi l'énorme avantage de simplifier les relations du *ground ring* de la section suivante. Enfin, dans la limite  $c_M \rightarrow 1$ , le facteur  $\gamma$  permet d'absorber les divergences des corrélateurs [AI05]. Suivant la même idée, on renormalise la constante cosmologique  $\Lambda = \mu\pi\gamma(\mathfrak{b}^2)$ , ainsi que la constante cosmologique duale  $\tilde{\Lambda} = \pi\tilde{\mu}\gamma(1/\mathfrak{b}^2) = \Lambda^{1/\mathfrak{b}^2}$ .

Les opérateurs de bord ont la normalisation

$$\mathbf{B}_P^{(\pm)} = \frac{1}{\pi} \Gamma (\pm 2P\mathfrak{b}^{\pm 1}) e^{i(e_0/2 - P)X + \alpha(P)\phi}, \quad (\text{II-16})$$

ils peuvent être soit intégrés sur le bord de la feuille d'univers, soit fixés et l'on doit le multiplier par un champ de fantôme sur le bord,

$$\mathcal{B}_P = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B}_P(x) dx, \quad \text{ou} \quad \mathcal{B}_P(x) = c(x)\mathbf{B}_P(x). \quad (\text{II-17})$$

Comme pour le *bulk*, les opérateurs  $\mathbf{B}_P^{(+)}$  sont droits et  $\mathbf{B}_P^{(-)}$  sont gauches. On peut aussi renormaliser les constantes cosmologiques de bord, ainsi on pose  $\Lambda_B = \pi\mu_B/\Gamma(1 - \mathfrak{b}^2)$ , ce qui donne  $\Lambda_B = \sqrt{\Lambda} \cosh \pi\mathfrak{b}s$ , et de même pour la constante cosmologique duale  $\tilde{\mu}_B \rightarrow \tilde{\Lambda}$ .

2. En vérité cette condition ne détermine  $e_0$  qu'à un signe près, signe qui peut être réabsorbé dans une redéfinition du champ  $X$

3. Avec la convention de la théorie de Liouville  $\alpha = Q/2 + iP$ , la relation de KPZ avec une charge réelle pour l'opérateur de matière impose une impulsion de Liouville purement imaginaire. C'est pourquoi il est préférable ici de changer de convention.

### FACTORISATION DES CORRÉLATEURS

Supposons que la variété ait un espace modulaire de dimension nulle pour  $\Sigma$ . Nous avons montré que l'action de la gravité était la somme des actions de matière, de Liouville et de fantômes. Cela implique la factorisation de la fonction de partition en ces trois composantes. De plus, les opérateurs gravitationnels sont construits comme produits de ces trois secteurs, et la propriété de factorisation se transmet aux corrélateurs. Ainsi, par exemple pour la fonction à trois points,

$$\langle \mathcal{V}_1(0)\mathcal{V}_2(1)\mathcal{V}_3(\infty) \rangle = \langle V_1(0)V_2(1)V_3(\infty) \rangle_L \times \langle V_1(0)V_2(1)V_3(\infty) \rangle_M \times \langle c\bar{c}(0)c\bar{c}(1)c\bar{c}(\infty) \rangle_{\text{ghost}}. \quad (\text{II-18})$$

A cause des intégrations sur les coordonnées des opérateurs, cette factorisation n'est en général plus visible. On peut toutefois remarquer que les seuls paramètres des fonctions de corrélation sont les constantes cosmologiques, et que seul le corrélateur de la théorie de Liouville en dépend. Lorsque la dépendance en coordonnées et en constantes cosmologiques de ce corrélateur se factorisent, il est possible de réaliser séparément l'intégration sur les coordonnées. Ainsi, le corrélateur gravitationnel est donné par celui de Liouville à une constante près. Cette constante nous importe peu pour la comparaison avec les modèles de matrice, aussi nous nous contenterons d'identifier les corrélateurs ayant la même dépendance en constantes cosmologiques, et nous utiliserons le symbole  $\propto$  pour cette identification,

$$\langle \mathcal{V}_1 \cdots \mathcal{V}_n \rangle_{2\text{DG}} \propto \langle V_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle_L. \quad (\text{II-19})$$

Remarquons aussi que la notion de dimension des corrélateurs définie pour la théorie de Liouville (chapitre I section 1.1) s'étend naturellement aux corrélateurs gravitationnels.

## 2 Ground ring

Bien que le calcul des corrélateurs de la gravité se réduise à l'évaluation de fonctions de corrélations pour les théories de matière, de Liouville, et de fantômes, la gravité quantique possède une symétrie plus grande que ses trois composantes prises séparément. Cette symétrie se traduit par un ensemble d'opérateurs qui obéissent à une relation de multiplication commutative et associative, ce qui leur donne une structure d'anneau, le *ground ring*. Ces opérateurs furent découverts par E. Witten dans la théorie du boson libre  $c_M = 1$  compactifié au rayon autodual  $SU(2)$  [Wit92], puis rapidement étendus au cas du boson libre général, compactifié ou non [WZ92]. Dans [KMS92], D. Kutasov, E. Martinec et N. Seiberg généralisèrent encore ces résultats aux théories couplées à une matière  $c_M \leq 1$ . Nous verrons dans la seconde partie de cette thèse que ces relations sont fondamentales pour l'obtention de la théorie des cordes à deux dimensions.

Nous ne développerons pas ici le lien avec les algèbres  $W_\infty$  et l'intégrabilité, ni la relation avec l'espace des phases des fermions libres du modèle de matrice [WZ92]. Nous adopterons uniquement un point

de vue pratique, et montrerons comment obtenir un certain nombre d'équations reliant les opérateurs à travers un exemple simple. C'est pourquoi nous n'introduisons pas tous les opérateurs de l'anneau, mais considérerons uniquement les opérateurs  $a_+$  et  $a_-$  qui le génèrent. Enfin, nous nous plaçons ici sur la sphère, et étudions des opérateurs de *bulk*, mais une étude similaire est possible sur le disque avec des opérateurs de bord [Kos04b, Kos04a].

## 2.1 Opérateurs de Ground Ring

Les opérateurs  $a_{\pm}$  générant le *ground ring* sont obtenus à partir des opérateurs dégénérés, de charge  $\alpha = -\mathfrak{b}^{\pm 1}/2$ , de la théorie de Liouville,

$$\begin{aligned} a_+ &= -|bc - \mathfrak{b}(\partial\phi - i\partial X)|^2 e^{-\mathfrak{b}^{-1}(\phi+iX)}, \\ a_- &= -|bc - \mathfrak{b}^{-1}(\partial\phi + i\partial X)|^2 e^{-\mathfrak{b}(\phi-iX)}. \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

Les opérateurs  $\mathcal{V}_P^{(\pm)}$  forment un module sur l'anneau généré par  $a_{\pm}$ , le produit d'opérateurs étant donné par

$$\begin{aligned} a_+ \mathcal{V}_P^{(+)} &= -\mathcal{V}_{P+\mathfrak{b}-1}^{(+)}, & a_- \mathcal{V}_P^{(-)} &= -\mathcal{V}_{P-\mathfrak{b}}^{(-)}, \\ a_+ \mathcal{V}_P^{(-)} &= -\tilde{\Lambda} \mathcal{V}_{P+\mathfrak{b}-1}^{(-)}, & a_- \mathcal{V}_P^{(+)} &= -\Lambda \mathcal{V}_{P-\mathfrak{b}}^{(+)}. \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

En présence d'un opérateur intégré, il faut aussi tenir compte des termes de contact,

$$a_+ \mathcal{V}_P^{(-)} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\hat{g}} \mathcal{V}_{P_1}^{(-)} = \mathcal{V}_{P+P_1+\mathfrak{b}}^{(-)}, \quad a_- \mathcal{V}_P^{(+)} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\hat{g}} \mathcal{V}_{P_1}^{(+)} = \mathcal{V}_{P+P_1-\mathfrak{b}-1}^{(+)}. \quad (\text{II-22})$$

Ces relations sont vraies à un commutateur avec la charge BRST près, elles sont obtenues en considérant d'abord le champ libre  $\Lambda = 0$  puis en tenant compte perturbativement des corrections. Les opérateurs  $a_{\pm}$  satisfont l'importante propriété de posséder des dérivées  $\partial a_{\pm}$  et  $\bar{\partial} a_{\pm}$  BRST exactes. Cette propriété nous permet de déplacer à loisir le point d'insertion des opérateurs sur la feuille d'univers afin d'utiliser leurs relations de fusion.

## 2.2 Exemple : fonction à trois points de bulk

En guise d'exemple, regardons le cas le plus simple : la fonction à trois points. Ces trois points sont supposés fixés aux coordonnées habituelles  $0, 1, \infty$  et aucun terme de contact n'apparaît suite à des opérateurs intégrés. Supposons que l'impulsion des opérateurs satisfassent  $P_{1,2} > 0$  et  $P_3 < 0$  quitte à utiliser les amplitudes de réflexion  $\mathcal{V}_P^{(+)} = S_P^{+-} \mathcal{V}_P^{(-)}$  et  $\mathcal{V}_P^{(-)} = S_P^{-+} \mathcal{V}_P^{(+)}$ , et étudions

$$C_{++-}(P_1, P_2 | P_3) = \left\langle \mathcal{V}_{P_1}^{(+)}(0) \mathcal{V}_{P_2}^{(+)}(1) \mathcal{V}_{P_3}^{(-)}(\infty) \right\rangle. \quad (\text{II-23})$$

Considérons le corrélateur auxiliaire

$$C_{++-}(P_1, P_2|P_3) = \left\langle \mathcal{V}_{P_1}^{(+)}(0) a_-(z) \mathcal{V}_{P_2}^{(+)}(1) \mathcal{V}_{P_3}^{(-)}(\infty) \right\rangle, \quad (\text{II-24})$$

et faisons tendre  $z$  vers les points d'insertion des opérateurs de vertex. En utilisant les produits II-21, il est facile de dériver les relations suivantes,

$$\Lambda C_{++-}(P_1, P_2 - \mathfrak{b}|P_3) = \Lambda C_{++-}(P_1 - \mathfrak{b}, P_2|P_3) = C_{++-}(P_1, P_2|P_3 - \mathfrak{b}). \quad (\text{II-25})$$

Ce résultat se généralise à un plus grand nombre d'opérateurs de *bulk* en prenant en compte les termes de contact (II-22). Sur le disque, les relations obtenues avec le *boundary ground ring* font aussi intervenir les constantes cosmologiques de bord [Kos04b, Kos04a].

### 3 Comparaison avec les modèles de matrices

Il est bien connu que dans la limite continue, les modèles statistiques sur réseau au point critique sont décrits par une théorie conforme. Lorsque le modèle est placé sur un réseau aléatoire, les fluctuations du réseau génèrent dans la limite continue un couplage entre la théorie conforme et la gravité. Ce couplage impose notamment d'intégrer les opérateurs sur la surface, et l'information sur les corrélateurs se trouve diluée dans le corrélateur gravitationnel. Toutefois, ce n'est pas le cas du spectre de la théorie, et grâce aux relations de KPZ II-13, les informations sur la charge centrale et la dimension des opérateurs peuvent être retrouvées. C'est ce que nous nous proposons de faire ici pour le gaz de Coulomb.

#### 3.1 Charge centrale

La charge centrale de la matière  $c_M$  est reliée à la charge de *background* de la théorie de Liouville. Cependant, on préfère plutôt utiliser l'exposant de corde  $\gamma_{\text{str}} = 2 - Q/\mathfrak{b}$  obtenu en étudiant la dépendance de la fonction de partition en la constante cosmologique  $\mu$ ,

$$c_M = 1 - 6 \frac{\gamma_{\text{str}}^2}{1 - \gamma_{\text{str}}}. \quad (\text{II-26})$$

Pour les modèles minimaux unitaires  $(h, h + 1)$ ,  $c = 1 - 6/(h(h + 1))$  et  $\gamma_{\text{str}} = 1/(h + 1)$ .

#### 3.2 Dimensions conformes

Pour déterminer la dimension des opérateurs de matière, il suffit de connaître la dimension des corrélateurs. Rappelons que celle-ci est définie en utilisant la covariance par translation du champ de Liouville I-27, et que deux corrélateurs reliés par le symbole  $\propto$  possèdent la même dépendance en constantes

cosmologiques, par conséquent la même dimension. Les constantes cosmologiques ont pour dimension  $[\mu] = 2$ ,  $[\mu_B] = 1$  et  $[\tilde{\mu}_B] = 1/\mathfrak{b}^2$ , et les fonctions de partition sur la sphère et sur le disque respectivement  $[\mathcal{Z}] = 4 - 2\gamma_{\text{str}}$  et  $[\mathcal{Z}_{\text{disc}}] = 2 - \gamma_{\text{str}}$ .

La théorie de matière étant donnée par un gaz de Coulomb, nous utiliserons la notation de la table de Kac II-35 pour la dimension des opérateurs. Les opérateurs dégénérés correspondent à des indices  $(r, s)$  entiers, mais nous rencontrerons aussi des opérateurs quelconque d'indices réels. L'opérateur de *bulk*  $V_{r,s}^{(M)}$  aura donc la dimension  $\delta_{r,s} = 2h_{r,s}$ , et l'opérateur de bord  $B_{r,s}^{(M)}$  la dimension  $\delta_{r,s} = h_{r,s}$ . La relation de KPZ II-13 donne la valeur de la charge de l'opérateur de Liouville auquel l'opérateur matériel est couplé,

$$\alpha_{r,s} = \frac{Q}{2} - |P_{r,s}|, \quad \beta_{r,s} = \frac{Q}{2} - |P_{r,s}|, \quad P_{r,s} = \frac{r}{2\mathfrak{b}} - \frac{s\mathfrak{b}}{2}. \quad (\text{II-27})$$

La connaissance de la charge des opérateurs d'habillage permet d'obtenir directement la dimension de l'opérateur nu.

### DIMENSION DES CORRÉLATEURS

Par la suite, nous aurons fréquemment besoin d'identifier les opérateurs insérés dans une fonction de corrélation à deux points de gravité. Pour un corrélateur de *bulk* proportionnel au corrélateur de Liouville  $\langle V_\alpha^{(L)} V_\alpha^{(L)} \rangle$  de dimension  $d_\alpha$ , l'impulsion des opérateurs de vertex est  $|P| = d_\alpha \mathfrak{b}/4$ , utilisant la relation II-27, on en déduit la dimension de l'opérateur nu.

Le raisonnement est identique sur le bord : le corrélateur de disque  $\langle B_\beta^{(L)} B_\beta^{(L)} \rangle$  de dimension  $d_\beta$  possède une impulsion  $|P| = d_\beta \mathfrak{b}/2$  qui via II-27 donne la dimension recherchée. Notons que cette relation ne dépend pas de la dimension des constantes cosmologiques associées aux deux bords.

### DIMENSION DES PARAMÈTRES

On peut aussi vouloir identifier l'opérateur qui se couple à un paramètre de dimension donnée. Pour cela, on suppose que le terme  $\lambda V_{r,s}^{(M)} V_{r,s}^{(L)}$  est invariant, ce qui implique la dimension  $[\lambda] = 2\alpha_{r,s}/\mathfrak{b}$  pour le couplage. De même, pour un opérateur de bord  $[\lambda] = \beta_{r,s}/\mathfrak{b}$ . Remarquons que l'on retrouve de cette manière la dimension des constantes cosmologiques  $\mu$ ,  $\mu_B$  et  $\tilde{\mu}_B$ .

## Conclusion

L'identification des corrélateurs matriciels et gravitationnels à une constante près peu paraître frustrante. En réalité, il est possible dans certains cas de faire mieux, à condition de prendre en compte les *leg*

*factors* et les termes de contact qui proviennent des ambiguïtés dans la prescription du produit d'opérateurs au même point [MSS91]. C'est ce qui est fait pour le modèle à une matrice dans [BZ09, BR10], et la transformation entre les couplages de la hiérarchie KdV et les constantes de couplages associées aux opérateurs de la théorie de Liouville a pu être conjecturée, et vérifiée aux premiers ordres. Cependant, nous verrons que dans le cas du modèle  $O(n)$  matriciel, l'identification des opérateurs est plus simple que pour le modèle à une matrice. Cela s'explique par la limite continue qui, dans le cas du modèle  $O(n)$ , ne fait intervenir que les deux premiers régimes critiques.

Nous avons vu ici comment coupler une théorie conforme à la gravité. Malheureusement, ce n'est pas suffisant pour expliquer complètement les résultats obtenus dans le cadre du modèle  $O(n)$  matriciel. En effet, nous verrons qu'il est possible de calculer dans la limite continue certains corrélateurs matriciels qui ne correspondent plus à une théorie conforme. Cette théorie quantique des champs peut cependant être obtenue comme une perturbation de la théorie conforme décrivant le point critique. Peu de résultats sont connus pour ce type de couplage, en particulier la propriété de factorisation des corrélateurs n'est plus valide.

Remarquons enfin qu'une pléthore de résultats ont été obtenus pour une matière décrite par un modèle minimal (*Minimal Liouville Gravity*). Ces résultats englobent les constantes de structures de *bulk* [Zam05] et de bord [FPS09], les conditions de bords [Hos08], et de manière plus générale la théorie des cordes minimales [SS05, MMSS04]. Pour certaines valeurs de  $n$ , le modèle  $O(n)$  est décrit par un modèle minimal, et ces résultats peuvent donner une certaine intuition sur le comportement de la théorie à  $n$  quelconque.

## Annexe A Gaz de Coulomb

La théorie conforme du gaz de Coulomb a été développée principalement par V. S. Dotsenko et V. A. Fateev dans une série de deux articles [DF84, DF85]. Selon la conjecture de B. Nienhuis que nous verrons plus en détail au chapitre VI, le modèle  $O(n)$  peut être décrit par une théorie de type gaz de Coulomb sur réseau. La théorie conforme présentée ici décrit donc la limite continue de notre modèle.

### ACTION POUR LE GAZ DE COULOMB

Le gaz de Coulomb peut être obtenu à partir du boson libre non compact en ajoutant un terme de courbure à l'action gaussienne,

$$\mathcal{S}_G[X] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{g}} d^2x \left[ \hat{g}^{ab} \partial_a X \partial_b X + i e_0 \hat{R} X \right]. \quad (\text{II-28})$$

Le tenseur  $\hat{g}^{ab}$  désigne ici la métrique de la variété  $\Sigma$  ( $\hat{g} = \det \hat{g}^{ab}$ ) et  $\hat{R}$  est le scalaire de courbure (ou de Ricci) associé. De part la symétrie conforme, la théorie ne dépend que de la topologie de  $\Sigma$ , et l'on

se concentre sur la sphère. Il est commode de voir cette sphère comme un plan projectif complexe et de concentrer la courbure au pôle nord qui se projette sur l'infini complexe. On fait ainsi disparaître le terme de courbure de l'action qui devient simplement

$$\mathcal{S}_G[X] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2z [2\partial X \bar{\partial} X]. \quad (\text{II-29})$$

Le champ bosonique  $X(z, \bar{z})$  est donc paramétrisé par le plan complexe, et obéit à la condition de courbure à l'infini

$$X(z, \bar{z}) \sim -ie_0 \log(z\bar{z}) + O(1) \quad \text{pour } |z| \rightarrow \infty. \quad (\text{II-30})$$

Cette charge à l'infini est appelée charge de fond, ou de *background*.

### TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION

Le tenseur énergie-impulsion s'obtient à partir de l'action précédente <sup>4</sup>,

$$T(z) = -\partial X \partial X + ie_0 \partial^2 X, \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\bar{\partial} X \bar{\partial} X + ie_0 \bar{\partial}^2 X, \quad (\text{II-31})$$

et les composantes transverses sont nulles ( $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$ ). Les modes du tenseur satisfont une algèbre de Virasoro dont la charge centrale dépend de la charge de *background*,

$$c_M = 1 - 6e_0^2. \quad (\text{II-32})$$

### OPÉRATEURS DE VERTEX

Comme pour le boson  $c = 1$ , les opérateurs de vertex  $V_e = e^{2ieX}$  sont primaires, leur poids conforme dépend de la charge  $e_0$ ,

$$\delta_e = h_e + \bar{h}_e, \quad h_e = \bar{h}_e = e(e - e_0). \quad (\text{II-33})$$

Les opérateurs  $V_e$  et  $V_{e_0-e}$  possèdent donc la même dimension conforme. Il en résulte différentes manières équivalentes d'évaluer les corrélateurs, suivant le choix de l'opérateur de dimension  $\delta_e$ .

### OPÉRATEURS DÉGÉNÉRÉS

Certains opérateurs primaires sont en correspondance avec des représentations de dimension finie de l'algèbre de Virasoro, ils sont dit **dégénérés**. Ces opérateurs possèdent un développement en produit d'opérateurs tronqué, et obéissent à une certaine équation différentielle [BPZ84]. Leur dimension est

---

4. Dans tout ce chapitre, les produits d'opérateurs sont supposés ordonnés

donnée par la table de Kac,

$$h_{r,s} = \frac{(re_+ + se_-)^2 - (e_+ + e_-)^2}{4}, \quad (r,s) \in \mathbb{Z}^{+2}, \quad (\text{II-34})$$

avec  $2e_{\pm} = e_0 \pm \sqrt{e_0^2 + 2}$ . Il est parfois utile de paramétriser la charge de *background* par  $e_0 = 1/\mathfrak{b} - \mathfrak{b}$ . On trouve alors  $e_{\pm} = \pm \mathfrak{b}^{\mp 1}$  et

$$h_{r,s} = \frac{(r/\mathfrak{b} - s\mathfrak{b})^2 - (1/\mathfrak{b} - \mathfrak{b})^2}{4}. \quad (\text{II-35})$$

Les charges correspondantes sont simplement  $e_{r,s} = \frac{1}{2}((1-r)e_+ + (1-s)e_-)$ , et les opérateurs seront notés  $V_{r,s}$ .

### CONDITION DE NEUTRALITÉ

Le terme de courbure induit une anomalie pour la symétrie  $U(1)$  du boson libre : sous la translation  $X \rightarrow X + \rho$ , la variation de l'action s'écrit

$$\delta \mathcal{S}_G = \rho \frac{ie_0}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{g}} d^2x R = \rho ie_0 \chi, \quad (\text{II-36})$$

où  $\chi = 2 - 2h$  est la caractéristique d'Euler de la variété  $\Sigma$ . Cette symétrie implique la nullité des corrélateurs, à moins qu'ils ne satisfassent la condition de neutralité

$$\sum_i e_i = e_0. \quad (\text{II-37})$$

Il est cependant possible de contourner cette condition en introduisant les opérateurs d'écran. Ceux-ci sont construits à partir des opérateurs de vertex  $V_{\pm}$  de charge  $e_{\pm}$ ,<sup>5</sup>

$$Q_{\pm} = \oint_C \frac{dz}{2i\pi} V_{\pm}(z). \quad (\text{II-38})$$

Ces opérateurs sont de dimension nulle, ils n'affectent donc pas le comportement conforme du corrélateur. L'introduction de  $m$  charge  $Q_+$  et  $n$  charges  $Q_-$

$$\langle V_{e_1} \cdots V_{e_n} Q_+^m Q_-^n \rangle \quad (\text{II-39})$$

permet de généraliser la condition de neutralité

$$\sum_i e_i + me_+ + ne_- = e_0. \quad (\text{II-40})$$

Cette condition est satisfaite par les corrélateurs de tous les opérateurs dégénérés. Enfin, il est possible de remplacer l'opérateur  $V_e$  par l'opérateur de même dimension  $V_{e_0-e}$  pourvu que la condition de neutralité reste satisfaite, ce qui est le cas pour un opérateur dégénéré.

---

5. Le choix du contour  $C$  n'est pas univoque, chaque choix possible reflète une solution des équations différentielles obtenues en utilisant les opérateurs dégénérés. Le corrélateur physique est construit en associant ces solutions de manière à annuler certaines monodromies. Comme nous ne chercherons pas à évaluer ces corrélateurs, nous n'aurons pas besoin de ces détails ici.





LE MODÈLE  $O(N)$  SUR LE RÉSEAU PLAT

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modèle <math>O(n)</math> dans le <i>bulk</i></b> . . . . .	<b>49</b>
1.1	Définition du modèle . . . . .	49
1.2	Comportement critique . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Le modèle <math>O(n)</math> sur le bord</b> . . . . .	<b>53</b>
2.1	Phénomènes critiques de surface . . . . .	53
2.2	Intégrabilité et applicabilité au modèle $O(n)$ . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Anisotropie de bord</b> . . . . .	<b>58</b>
3.1	Anisotropie dans la phase dense . . . . .	58
3.2	Anisotropie dans la phase diluée . . . . .	61

---

## Introduction

Le modèle  $O(n)$  fut introduit par H. Stanley en 1968 dans [Sta68]. Son idée était de considérer un hamiltonien général dépendant d'un paramètre  $n$ , se réduisant pour des valeurs spécifiques de  $n$  aux modèles d'Ising ( $n = 1$ ), planaire XY ( $n = 2$ ), de Heisenberg ( $n = 3$ ) et sphérique ( $n = \infty$ ). À l'aide d'un développement à haute température, il parvint à calculer perturbativement les premiers ordres de la chaleur spécifique et de la susceptibilité. Il en déduisit alors une valeur approchée de la température critique et des exposants  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\nu$ . Ses résultats suggérèrent une dépendance continue de ces quantités dans le paramètre  $n$ . C'est justement dans la possibilité d'une continuation analytique pour le paramètre  $n$  que réside l'intérêt majeur du modèle  $O(n)$ . On découvrit plus tard que ce modèle pouvait se reformuler comme un gaz de boucles où la continuation analytique est naturelle [DMNS81].

Dans notre étude du modèle  $O(n)$ , nous nous restreindrons à des réseaux bidimensionnels, ainsi qu'à l'intervalle  $-2 \leq n \leq 2$  pour lequel les propriétés critiques sont les plus intéressantes. Pour  $n$  fixé, on peut déterminer deux valeurs critiques de la température. En ces points, le modèle  $O(n)$  est décrit dans la limite continue par une théorie conforme de type gaz de Coulomb. Pour les valeurs  $n = 2 \cos \pi/h$  avec  $h$  entier, cette théorie conforme s'identifie à un modèle minimal de la série unitaire. Le modèle  $O(n)$  propose donc une description régularisée sur réseau d'un ensemble continu de théories conformes, en général non rationnelles, qui interpole entre les modèles minimaux unitaires.

Notre travail porte sur l'anisotropie de bord du modèle  $O(n)$ . Toutefois, il est nécessaire de présenter en premier lieu le comportement critique du modèle dans le *bulk*, ainsi que les phénomènes critiques de bord dans le cas isotrope. En règle générale, l'argument initial provient d'une analyse en champ moyen et les résultats principaux sont ensuite dérivés par la méthode de la matrice de transfert, en utilisant l'intégrabilité. D'autres arguments sont obtenus grâce à l'analogie avec le gaz de Coulomb, ou à des simulations numériques.

D'autres modèles statistiques sur réseau sont en relation plus ou moins directe avec le modèle  $O(n)$ , en particulier les modèles SOS, RSOS,  $q$ -Potts. Le modèle SOS (*Solid On Solid*) est un modèle de hauteurs entières  $h(r) \in \mathbb{Z}$ , les hauteurs des sites voisins  $\langle rr' \rangle$  devant différer d'une valeur unité,  $|h(r) - h(r')| = 1$ . On peut voir les modèles RSOS (*Restricted Solid On Solid*) comme un raffinement du modèle SOS où les hauteurs sont restreintes à un intervalle entier  $h(r) \in [0, p]$ . Ces modèles correspondent à la série A des modèles ADE présentés au chapitre V. Enfin, le modèle  $q$ -Potts [Pot52] est une généralisation du modèle d'Ising où les spins  $S(r)$  peuvent prendre non pas deux mais  $q$  valeurs (ou couleurs) distinctes,

$$\mathcal{H}_{\text{Potts}} = -J \sum_{\langle rr' \rangle} \delta(S(r), S(r')). \quad (\text{III-1})$$

# 1 Modèle $O(n)$ dans le *bulk*

## 1.1 Définition du modèle

Soit  $S_a(r)$  le spin classique à  $n$  composantes  $a = 1 \cdots n$  associé au site  $r$  d'un réseau  $\Gamma$ . Les spins  $S_a(r)$  prennent leurs valeurs sur la sphère d'un espace de dimension  $n$ , et sont normalisés selon  $\text{tr } S_a(r)S_b(r') = \delta_{ab}\delta_{rr'}$ . La trace est ici à prendre au sens de la physique stastique comme somme sur les degrés de liberté du système  $\int \prod_{a,r} dS_a(r)$ . Le réseau  $\Gamma$  est supposé hexagonal, bien que certaines études utilisant la matrice de transfert soient plus naturelles sur un réseau carré tilté ([JS08a, JS08b, DJS09a, DJS10, DJS09b]). En réalité, pour les propriétés universelles qui nous intéressent, le type de réseau considéré n'est pas un facteur déterminant.

### FONCTION DE PARTITION

L'hamiltonien consiste en une interaction entre plus proches voisins de constante de couplage  $J$ ,

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle rr' \rangle \in \Gamma} \sum_a S_a(r)S_a(r'), \quad \mathcal{Z}_\Gamma^{(\mathcal{H})} = \text{tr } e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad (\text{III-2})$$

et l'on supposera le couplage ferromagnétique  $J > 0$ . Il est parfois difficile de travailler avec la fonction de partition associée, aussi préférera-t-on la fonction de partition "géométrique",

$$\mathcal{Z}_\Gamma(T) = \text{tr} \prod_{\langle rr' \rangle} \left( 1 + \frac{1}{T} \sum_{a=1}^n S_a(r)S_a(r') \right), \quad (\text{III-3})$$

où  $T$  sera appelée **température**. Pour le modèle d'Ising ( $n = 1$ ), on montre l'équivalence des deux fonctions de partition par un développement haute température, et la température est reliée aux paramètres  $\beta$  et  $J$  par  $T = \coth \beta J$ . Cette équivalence se démontre de la même manière pour le modèle de Potts. Dans le cas du modèle  $O(n)$ , nous supposons simplement que les deux fonctions de partition appartiennent à la même classe d'universalité. Toutefois, quelques différences subtiles surviendront dans l'étude des phénomènes critiques de bord, mais nous aurons l'occasion d'insister sur ce point un peu plus loin. Ces fonctions de partition sont invariantes sous la symétrie de rotation des composantes du spin, de groupe  $O(n)$ , d'où le nom du modèle.

### GAZ DE BOUCLE

La fonction de partition sur le réseau hexagonal III-3 peut se récrire comme un gaz de boucles ([DMNS81]).<sup>1</sup>

1. Les boucles considérées ici ne sont pas orientées. Il est cependant possible de les orienter, ce qui est utile lorsque l'on s'intéresse à la description par le gaz de Coulomb.

Pour se faire, on utilise à nouveau un développement à haute température. Dans le produit sur les liens de  $\mathcal{Z}_\Gamma$ , pour chaque terme  $\langle rr' \rangle$  on peut prendre soit le coefficient 1 soit le produit scalaire des spins avec un poids  $T^{-1}$ . On représente graphiquement ce dernier choix par un lien entre les deux vertex  $r$  et  $r'$ . Pour que la trace soit non-nulle, il faut un nombre pair de liens par site  $r$ . Ces liens forment des configurations de boucles auto- et mutuellement évitantes qui correspondent à des chemins fermés constitués de spins identiques. Le poids d'une boucle passant par  $m$  vertex est donné par

$$T^{-m} \sum_{a_i} \int \prod_{i=1}^m \prod_{a=1}^n dS_a(i) S_{a_1}(1) S_{a_1}(2) S_{a_2}(2) S_{a_2}(3) \cdots S_{a_m}(m) S_{a_m}(1) = T^{-m} n. \quad (\text{III-4})$$

Ainsi, chaque boucle possède un poids égal au nombre de composantes de spins qui peuvent la réaliser et la température se couple à la longueur moyenne totale des boucles,

$$\mathcal{Z}_\Gamma(T) = \sum_{\text{boucles}} T^{-(\text{longueur})} n^{\#(\text{boucles})}. \quad (\text{III-5})$$

Cette formulation à l'avantage de rendre explicite la continuation analytique du paramètre  $n$  à toute valeur réelle. On peut remarquer que le modèle d'hexagones durs résolu par R.J. Baxter [Bax80] se retrouve dans la limite  $n \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$ ,  $nT^{-6} = \text{cste}$  où seules les boucles avec un minimum de liens (6) contribuent à la fonction de partition.

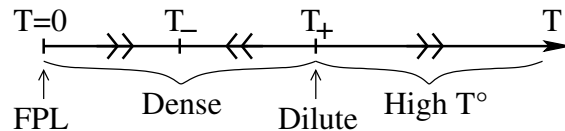
## 1.2 Comportement critique

Le comportement critique du modèle  $O(n)$  en deux dimensions et pour  $|n| < 2$  a été étudié pour la première fois dans [Nie82]. Dans cette lettre, B. Nienhuis conjecture l'expression de la température au point critique  $T_c(n)$  ainsi que la valeur des exposants critiques  $\nu$  et  $\theta$  en utilisant le modèle à six vertex et un argument de gaz de Coulomb<sup>2</sup>. Les exposants critiques furent ensuite identifiés aux dimensions des opérateurs dans la théorie conforme du gaz de Coulomb par V. Dotsenko et V. Fateev [DF84].

### INTÉGRABILITÉ

Un peu plus tard, d'énormes progrès ont été réalisés dans la compréhension du comportement critique du modèle  $O(n)$  grâce à l'intégrabilité. Le modèle peut en effet être résolu exactement pour deux valeurs de la température  $T_\pm(n)$  en utilisant l'ansatz de Bethe pour diagonaliser la matrice de transfert [Bax86]. La température  $T_+$  correspond à la température critique  $T_c$  conjecturée par B. Nienhuis. En étudiant le modèle sur un cylindre de circonférence finie [BB88], on peut obtenir, à partir des valeurs propres de la matrice de transfert, la charge centrale de la théorie conforme décrivant la limite continue, ainsi que les exposants critiques caractérisant la transition.

2. De plus amples détails sur cette méthode peuvent être trouvés dans les articles de revue [Nie84, Nie83]

FIGURE III.1 – Diagramme de phase du modèle  $O(n)$  dans le *bulk*.

En dehors des points intégrables, la matrice de transfert peut être diagonalisée par des méthodes numériques [BN89b]. On obtient ainsi certaines informations sur les *flows* du groupe de renormalisation qui viennent étayer la conjecture identifiant les points intégrables à des points critiques. Remarquons enfin que si nombre de ces résultats ont été obtenus sur le réseau hexagonal, le comportement critique et les exposants associés sont universels comme le montrent les études réalisées sur le réseau carré [BN89a].

### DIAGRAMME DE PHASE

Résumons les divers résultats obtenus sur le comportement critique du modèle  $O(n)$ . Tout d'abord, pour  $|n| > 2$ , il ne semble pas y avoir de transition de phase. Nous nous plaçons donc dans l'intervalle  $-2 \leq n \leq 2$ . Les deux points intégrables discutés plus haut correspondent aux valeurs suivantes de la température,

$$T_{\pm} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2 - n}}. \quad (\text{III-6})$$

Le point de Nienhuis  $T = T_+$  sépare une phase à haute température qui est désordonnée, d'une phase de basse température. Cette seconde phase a la particularité de posséder une fonction de corrélation spin-spin ayant une décroissance algébrique avec la distance. Ce phénomène est déjà observé pour le modèle XY, mais en diffère ici puisque les exposants critiques associés ne dépendent pas de la température.

Rappelons que la température se couple au nombre de vertex libres de liens  $T^{-(\text{longueur})} = T^{N_v - N_L}$  (avec  $N_L$  le nombre total de liens et  $N_v$  le nombre de liens vides)<sup>3</sup>. Une phase de basse température correspond à une abondance de vertex reliés. Dans le langage du gaz de boucles, une telle phase est appelée **phase dense** (*Densely Packed Loops* ou *DPL*). Le point critique  $T_c = T_+$  correspond à une transition du second ordre désignée sous le terme de **phase diluée**. La phase de haute température renormalise vers un point fixe gaussien  $T \rightarrow \infty$  qui correspond à une théorie vide de boucles. La phase dense renormalise vers le point fixe  $T_-$ , et l'on montre que les exposants thermiques correspondent à des perturbations non-pertinentes (*irrelevant*) à proximité du point fixe  $T_-$  et pertinentes (*relevant*) près du point critique  $T_+$ . Ce comportement est résumé dans le diagramme de phases de la figure III.1.

3. Le préfacteur constant  $T^{-N_L}$  est indépendant de la configuration de boucles et peut donc être écarté de la fonction de partition.

## EXPOSANTS CRITIQUES

Les exposants critiques ne dépendent que de  $n$  et l'on utilisera le paramètre  $g$  défini par  $n = -2 \cos \pi g$ . Les phases denses et diluées correspondent à des branches différentes de cette paramétrisation :  $1 < g < 2$  dans la phase diluée, et  $0 < g < 1$  dans la phase dense. Pour l'étude des phénomènes de bords, il est plus commode de poser  $n = 2 \cos \pi \theta$  avec  $0 < \theta < 1$ . On a alors  $g = 1 + \theta$  pour la phase diluée, et  $g = 1 - \theta$  dans la phase dense.

Les phases denses et diluées sont décrites dans la limite continue par une théorie conforme de charge centrale

$$c_{\pm} = 1 - 6 \frac{(g-1)^2}{g} = 1 - 6 \frac{\theta^2}{1 \pm \theta}. \quad (\text{III-7})$$

Les exposants thermiques  $y_T = 1/\nu$  et magnétiques  $y_H = 2 - \eta/2$  sont reliés à la dimension conforme des opérateurs par  $y = 2 - \delta$ . L'exposant thermique correspond à un couplage avec l'opérateur de dimension  $\delta_{1,3}$  dans la phase diluée, et  $\delta_{3,1}$  dans la phase dense. L'opérateur magnétique a quant à lui une dimension  $\delta_{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\theta}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\theta}}$  avec un signe  $+$  dans la phase diluée. Notons que dans la phase dense, l'exposant  $\eta$  change de signe pour  $n = 1$ , il est négatif pour  $n < 1$  ce qui correspond à une fonction de corrélation spin-spin croissante avec la distance.

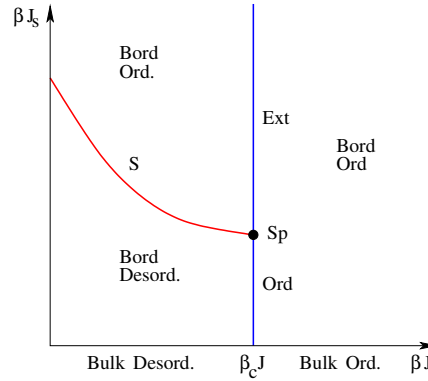
## A TEMPÉRATURE NULLE

Sur le réseau hexagonal, le nombre de liens traversés par une boucle est pair, par conséquent la fonction de partition est symétrique par rapport à la température  $\mathcal{Z}_{\Gamma}(-T) = \mathcal{Z}_{\Gamma}(T)$ . Ainsi, le point  $T = 0$  ne peut pas être attiré vers le point critique dense  $T = T_-$ . La seule possibilité est qu'il s'agisse d'un point fixe instable. En ce point, les seules configurations qui contribuent à la fonction de partition correspondent à des boucles qui recouvrent entièrement le réseau, tous les vertex sont occupés mais seul un tiers des liens le sont. On parle de boucles entièrement compactées ou *Fully Packed Loops (FPL)*. La charge centrale et la dimension des opérateurs thermique et magnétique ( $g = 1 - \theta$ ,  $0 < g < 1$ ) s'obtiennent par la technique de la matrice de transfert [BN94, BSY94],

$$\begin{aligned} c_{\text{FPL}} = c_{\text{dense}} + 1 &= 2 - 6 \frac{(1-g)^2}{g} = 2 - 6 \frac{\theta^2}{1-\theta}, \\ y_H &= 1 - \frac{1}{2g} = \frac{1-2\theta}{2(1-\theta)}, \\ y_T &= \frac{3g}{2} = \frac{3-3\theta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

## LE MODÈLE D'ISING

Il est naturel de se demander comment le diagramme de phase se traduit pour le modèle d'Ising.

FIGURE III.2 – Diagramme des phases selon les couplages de *bulk* et de bord

Pour cela, rappelons la relation entre les paramètres de la fonction de partition “Hamiltonienne”  $\mathcal{Z}_T^{(\mathcal{H})}$  et la fonction de partition géométrique :  $T = \coth \beta J$ . Ainsi, pour les paramètres physiques  $\beta J \in \mathbb{R}^+$ , la température est restreinte à l’intervalle  $T \in [1, \infty[$ , et le domaine  $T < 1$  correspond à un couplage  $\beta J$  imaginaire. Si les phases de haute température  $T \rightarrow \infty$  et  $\beta J \rightarrow 0$  correspondent, la phase dense  $T = T_- = 1$  décrit le modèle de température nulle  $\beta J \rightarrow \infty$ . C’est donc la phase diluée  $T_c = \sqrt{3}$  qui décrit la transition ordre - désordre caractérisée par la charge centrale  $c = 1/2$ . Rappelons que le modèle d’Ising est auto-dual : le modèle à haute température est équivalent au modèle à basse température sur le réseau dual. Ainsi, la phase dense possède la même charge centrale que la phase  $T \rightarrow \infty$ ,  $c_{\text{dense}} = 0$ .

## 2 Le modèle $O(n)$ sur le bord

La nécessité de comprendre les théories conformes sur des variétés avec bords est venue de l’étude des phénomènes critiques de surface [Car84]. L’influence des conditions de bords sur le comportement critique des modèles magnétiques a été longtemps étudiée, et l’on en trouvera une revue détaillée dans [Bin83], et une présentation plus concise dans [Die82]. Dans cette partie, nous raisonnerons tout d’abord sur un système magnétique général, de type modèle d’Ising, avec une fonction de partition usuelle  $\mathcal{Z}_T^{(\mathcal{H})}$ . Nous verrons ensuite comment le comportement critique décrit peut s’appliquer au modèle  $O(n)$ .

### 2.1 Phénomènes critiques de surface

Considérons un système magnétique de géométrie semi-infinie ayant un couplage  $J$  dans le *bulk*. Près de la surface, on introduit un terme de bord qui modifie le couplage en  $J_s$ . En règle général, on obtient le diagramme de phase de la figure III.2. Quel que soit le comportement du bord, le *bulk* s’ordonne à la température inverse  $\beta = \beta_c$ . Mais le comportement de la surface est plus complexe. Lorsque  $J_s/J$  est faible, la surface s’ordonne à la même température que le *bulk*, la transition est dite **Ordinaire** (Ord). En



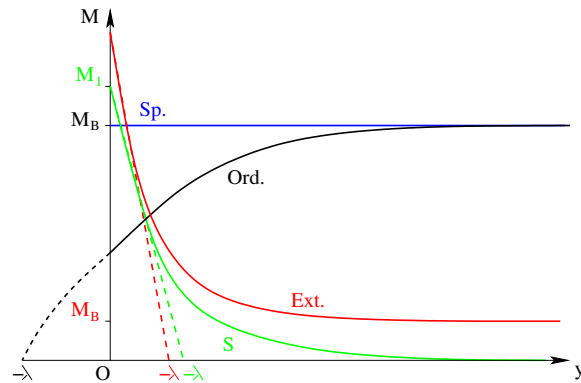


FIGURE III.3 – Aimantation en fonction de la distance au bord.

revanche, si  $J_s/J$  est grand, la surface s'ordonne à une température plus grande que celle du *bulk*. Ainsi, on obtient une transition de **Surface** (S) avec une surface qui s'ordonne tandis que le *bulk* reste désordonné, suivit d'une transition **Extraordinaire** (Ext) pendant laquelle le *bulk* s'ordonne alors que la surface est déjà ordonnée. Le point **Spécial** (Sp) sépare les différentes transitions.

### ÉTUDE EN CHAMP MOYEN

Pour comprendre ces transitions de surface, on peut utiliser l'approche du champ moyen. Bien que cette approche ne soit pas valable en dimension  $d$  inférieure à quatre, elle permet néanmoins de saisir le comportement général du modèle. Le paramètre d'ordre que l'on considère est l'aimantation moyennée sur les coordonnées tangentes à la surface  $M(y)$ , elle dépend donc uniquement de la coordonnée normale restante  $y$ . Le terme de surface de l'action de champ moyen implique les conditions de bord générales suivantes [Bin83],

$$\partial_y M = \frac{M}{\lambda}, \quad \frac{a}{\lambda} = 1 - 2(d-1) \left[ \frac{J_s}{J} - 1 \right] \quad (\text{III-9})$$

où  $a$  est la maille du réseau et  $\lambda$  la distance à laquelle l'aimantation disparaît. On a tracé sur la figure III.3 le comportement de champ moyen du paramètre d'ordre en fonction de la distance pour les diverses phases qui nous préoccupent. Le comportement critique de la surface provient de la compétition entre la longueur  $\lambda$  et la longueur de corrélation du *bulk*.

Dans le cas d'une transition Ord, on passe d'un état désordonné  $M = 0$  à une aimantation donnée par la courbe noire. La distance  $\lambda$  est faible devant la longueur de corrélation du *bulk* qui diverge pour  $T \rightarrow T_c$ . Ainsi, dans la limite continue, cette distance  $\lambda$  tend vers zéro ( $a/\lambda > 1$ ) et l'on va imposer au champ des conditions de type Dirichlet  $M = 0$  sur le bord. Lors de la transition spéciale, on part du même état désordonné pour arriver à un état d'aimantation correspondant à la courbe bleue. On constate alors que  $\lambda$  diverge, il faut négliger  $M/\lambda$  et imposer des conditions de bord de type Neumann  $\partial_y M = 0$ . Les résultats du développement en  $d = 4 - \epsilon$  mènent à penser que le point fixe Sp est instable sous perturbation

thermique.

Pour une transition de surface, on va d'un état désordonné vers l'état correspondant à la courbe verte. L'aimantation du *bulk* est nulle,  $M_b = 0$ , et sur le bord  $M(0) \propto (T - T_S^{(c)})^{\alpha_1}$  où  $T_S^{(c)}$  est la température à laquelle a lieu la transition. L'exposant  $\alpha_1$  est positif, et l'aimantation s'annule à la température critique,  $M(0) = 0$ . Enfin, si après une transition de surface (courbe verte) la décroissance  $M(y)$  est exponentielle, elle devient algébrique au niveau de la transition extraordinaire, et l'aimantation diverge en surface (courbe rouge), d'où la condition de bord  $M = \infty$ .

## TERMINOLOGIE

Par la suite, nous nous placerons à la température de *bulk* critique  $T_c$  et nous parlerons de conditions de bord Ord, Sp et Ext en faisant référence à la transition correspondante. Par ailleurs, au lieu de s'intéresser aux conditions de bords sur le paramètre d'ordre  $M$ , on peut se placer du point de vue du spin. Ainsi, pour la transition Ord, il n'y a pas d'aimantation sur le bord : les spins fluctuent librement, on parle de conditions de bord de type **Neumann** (ou **Libres**). Pour la transition Ext, l'aimantation non nulle impose de fixer les spins dans une direction donnée, ce sont donc des conditions de type **Dirichlet** (ou **Fixées**). Ces différentes terminologies sont résumées dans le tableau suivant :

Transition	Aimantation	Spins
Ord	Dirichlet $M = 0$	Neumann/Libres
Sp	Neumann $\partial_y M = 0$	Sp
Ext	Dirichlet $M = \infty$	Dirichlet/Fixées

Afin d'éviter les confusions, par la suite nous garderons uniquement la terminologie des conditions de bords en terme de spins. Remarquons toutefois que lorsqu'il est question du modèle de hauteur équivalent défini sur le réseau dual, comme le modèle SOS lors de l'étude par le gaz de Coulomb ou les modèles ADE du chapitre V, le poids correspondant s'identifie avec le paramètre d'ordre dans la limite continue. On utilisera donc plutôt la terminologie inversée.

## 2.2 Intégrabilité et applicabilité au modèle $O(n)$

Selon le théorème de Mermin-Wagner, une surface unidimensionnelle ne peut avoir un comportement ferromagnétique, et le diagramme de phase précédent n'est valable qu'en dimension  $d > 2$ , pour  $d = 2$  seule la transition ordinaire étant observée. Dans le cas d'une symétrie continue telle celle du modèle  $O(n)$ , l'ordre spontané ne peut apparaître sur le bord que s'il a une dimension plus grande que deux. Ainsi, ce diagramme de phase n'est valable que pour  $d > 3$ . Cependant, nous allons voir que le raisonnement

précédent n'est plus valable si l'on considère la fonction de partition géométrique

$$\mathcal{Z}_\Gamma(T, T_S) = \text{tr} \left[ \prod_{\langle rr' \rangle \in \Gamma} \left( 1 + \frac{1}{T} \sum_{a=1}^n S_a(r) S_a(r') \right) \prod_{\langle rr' \rangle \in \partial\Gamma} \left( 1 + \frac{1}{T_S} \sum_{a=1}^n S_a(r) S_a(r') \right) \right] \quad (\text{III-10})$$

et que l'on travaille avec les températures de *bulk*  $T$  et de bord  $T_S$  au lieu des couplages  $J$  et  $J_S$  [FS94, BY95a].

Pour le modèle  $O(n)$  avec la fonction de partition III-10, la température de bord correspondant au point spécial a été obtenue grâce à l'intégrabilité [BY95a]. Supposant de nouveau que les points intégrables correspondent à des points critiques, on trouve en effet un point critique à  $T_S = T_c$  correspondant aux conditions de bord Ord, ainsi qu'un second point critique pour

$$T_S^{(c)} = (2 - n)^{1/4} \quad (\text{III-11})$$

décrivant les conditions de bord conformes Sp.

Revenons à notre assertion sur le comportement critique de la fonction de partition géométrique, et supposons que la relation entre les couplages du bord et la température  $T_S$  du modèle géométrique soit analogue au modèle d'Ising  $T_S = \coth \beta J_S$ . A partir de l'expression III-11, on constate que la température au point spécial  $T_S^{(c)}$  est supérieure à 1 si  $n < 1$ . Dans ce cas, le modèle  $O(n)$  n'est pas unitaire et la théorie de Mermin-Wagner ne s'applique pas. Prenons maintenant  $n > 1$ , ce qui donne une théorie unitaire pour certaines valeurs de  $n$ . Toutefois,  $T_S^{(c)} < 1$  et le couplage de bord  $J_S$  correspondant est imaginaire. Le cas limite est donné par le modèle d'Ising  $n = 1$  avec  $T_S = 1$  : on obtient une transition spéciale pour  $\beta J_S = \beta J$  qui n'est autre que... la transition ordinaire.

## GAZ DE BOUCLES

Dans le langage du gaz de boucles, la température de bord se couple aux liens du bord traversés par les boucles,

$$Z = \sum_{\text{boucles}} n^{\#(\text{boucles})} T^{-(\text{longueur bulk})} T_S^{-(\text{longueur bord})}. \quad (\text{III-12})$$

## ÉCOULEMENTS DU GROUPE DE RENORMALISATION

Les écoulements (*flows*) du groupe de renormalisation entre les conditions de bord Ord et Sp ont été étudiés à l'aide de l'intégrabilité dans [FS94]. En supposant que l'intégrabilité des modèles minimaux perturbé par l'opérateur thermique de bord (de dimension  $h_{1,3}$ ) [GZ94] s'étendait au modèle  $O(n)$  par continuation analytique, P. Fendley et H. Saleur ont obtenu la dimension de l'opérateur de changement de condition de bord (*boundary condition changing operator* ou opérateur *bcc*) réalisant le changement de

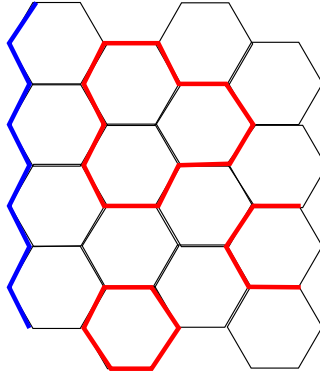


FIGURE III.4 – Au point Teflon un polymère (bleu) se colle sur le bord.

condition de bord Ord/Sp :  $h_{1,2}$ . Calculant le rapport des entropies de bord pour les états Ord et Sp, ils ont aussi confirmé grâce au théorème  $g$  ([AL91, AL92]) le sens du *flow* entre conditions de bord.<sup>4</sup>

Enfin, ces auteurs ont aussi étudié l'introduction des opérateurs de fuseaux que nous verrons un peu plus loin dans ce chapitre. Ces opérateurs introduisent des lignes ouvertes sur le bord, et sont de dimension  $h_{L+1,1}$  ([DS86]). On peut remarquer que la fusion d'un opérateur fuseau avec l'opérateur  $bcc$  de dimension  $h_{1,2}$  contient deux modules correspondants aux opérateurs fuseaux aux points Sp (dimension  $h_{L+1,3}$ ) et Ord (dimension  $h_{L+1,1}$ ). Ces résultats ont été confirmés par le calcul du spectre de la matrice de transfert par ansatz de Bethe [BY95b].

### TRANSITION EXT

La transition Ext a été étudiée, en partie numériquement, par M. Batchelor et J. Cardy dans [BC97]. Ils ont montré que les exposants critiques de bord (ou les valeurs propres de la matrice de transfert) ne dépendaient pas explicitement de la température  $T_S$ , et que le comportement du système était décrit par le point **Teflon**  $T_S = \infty$ . En ce point, une boucle se colle contre le bord et agit de manière répulsive vis à vis des autres boucles, produisant des conditions de bord Ord effectives pour les spins voisins du bord (figure III.4). En particulier, les études numériques montrent que les matrices de transfert ont le même spectre pour des conditions de bord Teflon  $T_S = \infty$  en taille  $L$ , et des conditions de bords Ord  $T_S = T_c$  en taille  $L - 2$ . Toutefois, comme les valeurs propres se mélangent, le rôle d'un opérateur de dimension donnée peut être différent dans les deux phases.

4. A priori, le théorème  $g$  n'a aucune raison d'être valable pour une théorie conforme non-unitaire, cependant des arguments liés à l'intégrabilité permettent d'espérer qu'il le reste pour  $n > 0$ . De plus, comme le modèle  $O(n)$  interpole continuellement entre diverses théories unitaires, il est raisonnable de supposer que les résultats sont stables sous continuation analytique.

### 3 Anisotropie de bord

Notre travail sur le modèle  $O(n)$  porte plus précisément sur l’anisotropie de bord. Celle-ci fut étudiée pour la première fois par H. W. Diehl et E. Eisenriegler dans [DE84]. En 2008 [JS08b], J. Jacobsen et H. Saleur ont repris cette étude dans le langage du gaz de boucles (*Boundary Loop Model*). Ils ont ainsi pu obtenir d’importants résultats, que ce soit sur les conditions de criticalité pour les couplages du bord, ou la dimension des opérateurs *bcc*.

Le modèle étudié possède donc une interaction isotrope dans le *bulk* et anisotrope sur le bord. Dans la phase dense, les boucles occupent le bord de manière maximale et les perturbations anisotropes sont non-pertinentes. Il faut alors imposer l’anisotropie de manière artificielle en restreignant le nombre de composantes des spins de bord, ou d’une façon équivalente, modifier le poids des boucles qui touchent le bord. Dans la phase diluée, les phénomènes sont plus subtils car ils font apparaître un paramètre supplémentaire correspondant à la fugacité des monomères sur le bord qui, à la manière de la température de *bulk*, doivent être finement ajustés.

#### 3.1 Anisotropie dans la phase dense

##### 3.1.1 Conditions de bord JS

Dans [JS08b], J. Jacobsen et H. Saleur ont étudié le modèle  $O(n)$  sur un réseau carré incliné avec la géométrie de l’anneau, et ont obtenu le spectre des conditions de bord conformes dans la phase dense. Ces nouvelles conditions de bord, que nous dénoterons  $JS_k$ , dépendent d’un paramètre continu  $k$ . Pour obtenir la dimension des opérateurs de bord, ils ont réexprimé la matrice de transfert à l’aide des générateurs d’une algèbre de Temperley-Lieb “blobbée” [MS93]. En s’appuyant sur une étude numérique, ils sont parvenus à conjecturer l’expression de la fonction de partition sur l’anneau, avec des conditions de bord libres sur le bord intérieur de l’anneau, et quelconques sur le bord extérieur.

#### POIDS DES BOUCLES

L’idée de J. Jacobsen et H. Saleur est de donner un poids  $k$  aux boucles qui touchent le bord JS, différent du poids  $n$  des boucles de *bulk*. Il est aussi possible d’introduire  $L$  boucles non contractibles (n.c.) qui entourent le bord intérieur de l’anneau, la boucle la plus à l’extérieur pouvant, ou non, toucher le bord JS ; si elle le touche on lui donne un poids  $m$ , sinon un poids  $l$ . La boucle n.c. touchant le bord extérieur correspond au secteur **blobbé** de l’algèbre de Temperley-Lieb sous-jacente, le secteur **non-blobbé** étant celui où la boucle n.c. n’est pas autorisée à toucher le bord. La dimension des opérateurs ne dépend pas du poids des boucles n.c. (uniquement du fait de les autoriser à toucher le bord), et pour l’application au

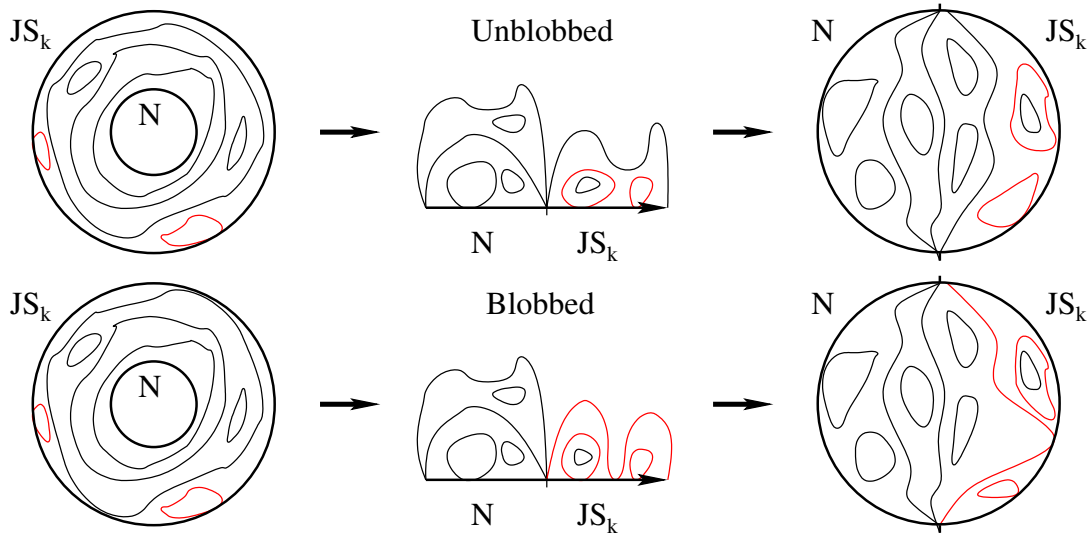


FIGURE III.5 – Différentes topologies pour les conditions de bord  $JS_k$

modèle  $O(n)$ , nous prendrons  $l = n$  et  $m = k$ . Nous verrons par la suite qu'il est utile dans le cadre des modèles de matrice de transformer la topologie de l'anneau en celle du disque (c.f. figure III.5, les boucles en rouge ont un poids  $k$ , en noir un poids  $n$ ). Dans ce cas, on voit apparaître les opérateurs de changement de condition de bord  $bcc$ , et les boucles n.c. deviennent des "lignes ouvertes" reliant les deux points du bords où sont insérés les opérateurs  $bcc$ .

De même que l'on paramétrise  $n = 2 \cos \pi\theta$ , il est utile d'introduire  $k(r)$ , avec  $r \in [0, h]$ ,  $h = 1/\theta$  :

$$k(r) = \frac{\sin \pi(r+1)\theta}{\sin \pi r\theta} \quad (\text{III-13})$$

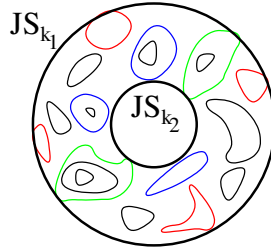
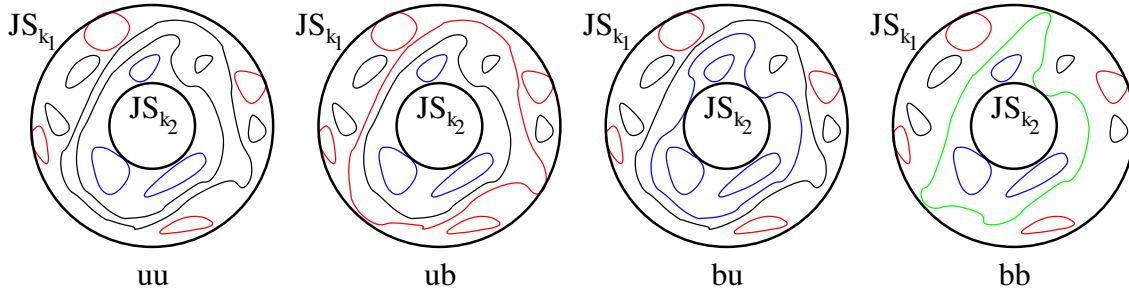
qui satisfait les relations remarquables  $k(h-1-r)k(r) = 1$  et  $k(h-r) + k(r) = n$ . Par ailleurs,  $k(1) = n$ , et l'on retrouve les conditions aux bords libres, ou de Neumann. Pour  $r = (h-1)/2$ ,  $k(r) = 1$  et les spins s'alignent sur une composante : les conditions aux bords sont de types Dirichlet.

### SPINS

Dans la formulation spinorielle du modèle  $O(n)$ , les conditions de bord  $JS_k$  consistent à restreindre les fluctuations des spins à  $k$  composantes au lieu de  $n$ . On considère donc la fonction de partition III-3 avec une somme restreinte à  $a = 1 \cdots k$  si  $r$  ou  $r'$  appartiennent au bord du réseau. Les lignes ouvertes sont introduites à l'aide des opérateurs de fuseaux

$$\mathbb{S}_L^b = \sum_{1 \leq a_1 < \cdots < a_L \leq k} S_{a_1} \cdots S_{a_L}, \quad \mathbb{S}_L^u = \sum_{k < a_1 < \cdots < a_L \leq n} S_{a_1} \cdots S_{a_L}, \quad (\text{III-14})$$

où  $\mathbb{S}_L^b$  introduit  $L$  lignes blobbées, i.e. qui peuvent toucher le bord, et  $\mathbb{S}_L^u$   $L$  lignes non-blobbées.

FIGURE III.6 – Anneau avec conditions de bord JS, secteur  $L = 0$ .FIGURE III.7 – Anneaux avec conditions de bord JS, secteurs  $uu$ ,  $ub$ ,  $bu$ , et  $bb$ .

### FONCTION DE PARTITION

La fonction de partition sur l'anneau ayant des conditions de type Neumann sur le bord intérieur, et de type  $JS_k$  sur le bord extérieur conjecturée par J. Jacobsen et H. Saleur, s'exprime en termes des caractères  $\chi_{r,s}(q)$  des module de Virasoro de poids  $h_{r,s}$ ,<sup>5</sup>

$$\mathcal{Z}_L^{\text{unblobbed}} = \chi_{r,r-L}(q), \quad \mathcal{Z}_L^{\text{blobbed}} = \chi_{r,r+L}(q). \quad (\text{III-15})$$

On est donc tenté d'identifier le bord correspondant avec les états de Cardy  $|u L \rangle$  et  $|b L \rangle$ , associés à des opérateurs  $bcc$  de poids conforme  $h_{r,r-L}$  dans le secteur non blobbé, et  $h_{r,r+L}$  pour le cas blobbé. Pour  $L = 0$  et  $k = 1$ , on retrouve la dimension de l'opérateur de *twist* Neumann/Dirichlet. Remarquons aussi que la symétrie  $k \rightarrow n - k$  échange les secteurs blobbés  $b$  et non-blobbés  $u$ .

#### 3.1.2 Opérateurs $bcc$ JS/JS

Les résultats précédents ont été démontrés et généralisés au cas d'une fonction de partition avec deux bords de type JS dans [JS08a, DJS09a] par des arguments utilisant le gaz de Coulomb. Dans le cas de l'anneau JS/JS, les boucles touchant le premier bord ont un poids  $k_1$ , le second bord  $k_2$ , et les deux bords  $k_{12}$  (c.f. figure III.6). En plus des paramétrisations  $k_1(r_1)$  et  $k_2(r_2)$ , il est nécessaire d'introduire

$$k_{12}(r_{12}) = \frac{\sin(r_1 + r_2 + 1 - r_{12})\frac{\pi\theta}{2} \sin(r_1 + r_2 + 1 + r_{12})\frac{\pi\theta}{2}}{\sin r_1 \pi \theta \sin r_2 \pi \theta}. \quad (\text{III-16})$$

5. Ici,  $q$  est un paramètre associé à la géométrie de l'anneau :  $q = \exp(-2\pi/\log(R_2/R_1))$  où  $R_1$  et  $R_2$  sont les deux rayons.

Si aucune boucle ne touche les deux bords ( $k_{12} = 0$ ), il est possible d'insérer des boucles non-contractibles (figure III.7). On distingue alors les secteurs  $uu$ ,  $ub$ ,  $bu$  et  $bb$  correspondants aux boucles n.c. pouvant toucher ( $b$ ) ou non ( $u$ ) le bord extérieur/intérieur.

Les résultats obtenus sont basés sur l'étude de l'algèbre de Temperley-Lieb avec deux opérateurs de blob [Nic06b, Nic06a, DN09]. A l'aide d'arguments algébriques, et en utilisant le gaz de Coulomb, J. Dubail, J. Jacobsen et H. Saleur sont parvenus à déterminer la fonction de partition dans les différents secteurs. Cette expression permet d'obtenir la dimension  $h_{r,s}$  des opérateurs de bord insérés entre les conditions de bord JS<sub>1</sub> et JS<sub>2</sub>.

Secteur	$(r, s)$
$L = 0$	$(r_{12} - 2j, r_{12})$
$bb$	$(r_1 + r_2 - 1 - 2j, r_1 + r_2 - 1 + L)$
$bu$	$(r_1 - r_2 - 1 - 2j, r_1 - r_2 - 1 + L)$
$ub$	$(-r_1 + r_2 - 1 - 2j, -r_1 + r_2 - 1 + L)$
$uu$	$(-r_1 - r_2 - 1 - 2j, -r_1 - r_2 - 1 + L)$

La dimension des opérateurs dépend d'un paramètre entier  $j \in \mathbb{Z}$ , positif pour  $L > 0$ . Nous analyserons plus en détail ces résultats au chapitre suivant, et nous verrons qu'ils reflètent la fusion des opérateurs de bord N/JS.

## 3.2 Anisotropie dans la phase diluée

Afin de mieux appréhender le diagramme de phases caractérisant les conditions de bord de la phase diluée, on se propose ici de commencer par analyser les arguments de champ moyen. On présentera ensuite les résultats récents obtenus par J. Dubail, J. Jacobsen et H. Saleur ([DJS09b, DJS10]) dans le cadre du gaz de boucles.

### 3.2.1 Etude en champ moyen

Reprenons brièvement l'étude de H. W. Diehl et E. Eisenriegler ([DE84]) qui utilisent la méthode du groupe de renormalisation (développement en  $d = 4 - \epsilon$ ) pour étudier les effets de l'anisotropie de surface à proximité des transitions ordinaires et spéciales. Pour cela, ils introduisent un couplage de bord différents  $J_S^a$  pour chaque composante de spin  $S_a$  et considèrent l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle rr' \rangle \in \Gamma} \sum_{a=1}^n S_a(r) S_a(r') - \sum_{\langle rr' \rangle \in \partial\Gamma} \sum_{a=1}^n J_S^a S_a(r) S_a(r'). \quad (\text{III-17})$$

En posant  $J_S^a = J_S^1$  pour un ensemble d'axes d'aimantation facile  $a = 1 \cdots n_1$ , et  $J_S^a = J_S^2$  pour  $n_2$  composantes d'aimantation difficile  $a = n_1 + 1 \cdots n$ , avec  $J_S^1 < J_S^2$ , on brise la symétrie  $O(n)$  sur le bord



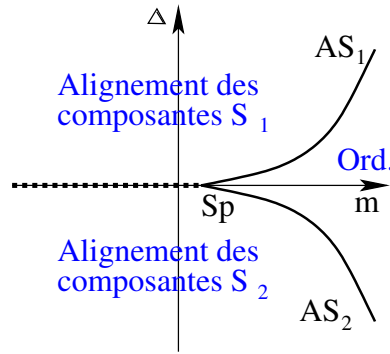


FIGURE III.8 – Diagramme de phase en fonction des couplages de bord

en  $O(n_1) \times O(n_2)$ .

L'analyse en champ moyen généralise celle développée précédemment, on est en particulier amené à introduire une aimantation de bord, ainsi qu'une longueur  $\lambda_a$  (III-9) pour chaque composante de spin. Dans le cas d'une transition ordinaire, la susceptibilité associée à la réponse des aimantations aux champs de bords reste finie pour toutes les composantes, tandis qu'elle diverge pour une transition isotrope spéciale. Dans [DE84], les auteurs mettent en évidence une nouvelle transition, dite **Anisotrope Spéciale** (AS), pour laquelle les  $n_1$  premières composantes de la susceptibilité magnétique de bord divergent, alors que les  $n_2$  autres composantes restent finies.

### DIAGRAMME DE PHASE

Plutôt que de travailler avec les longueurs  $\lambda_a$ , il est commode d'introduire les paramètres  $m_a = \lambda_a^{-1}$  qui sont proportionnels aux couplages. Brisons la symétrie  $O(n)$  en deux sous-groupes :  $m_a = m_1$  pour les composantes exhaussées  $a = 1 \cdots n_1$  et  $m_a = m_2$  pour les  $n_2$  composantes restantes. Le résultat de l'analyse en champ moyen est le suivant : pour le point Sp (isotrope), les couplages sont nuls  $m_1 = m_2 = 0$  pour toutes les composantes (les longueurs  $\lambda_a$  divergent), tandis qu'ils sont finis  $m_{1,2} > 0$  pour une transition Ord (isotrope). Dans le cas de la transition anisotrope spéciale  $AS_e$ , les composantes exhaussées ont un couplage nul  $m_1 = 0$  tandis que les autres couplages sont finis.

Si l'on introduit les couplages isotrope  $m = m_1 + m_2$  et anisotrope  $\Delta = m_1 - m_2$  ( $\Delta > 0$  pour exhauser les couplages  $a = 1 \cdots n_1$ ), le diagramme de phases (figure III.8) consiste en deux lignes  $AS_1$  et  $AS_2$  d'équations respectivement  $m_{AS}(\Delta) = n_2 \Delta / n$  et  $m_{AS}(\Delta) = -n_1 \Delta / n$  se rejoignant au point spécial Sp. Ces lignes correspondent à des transitions du second ordre entre une surface désordonnée et un alignement des spins dans les directions  $n_1$  ( $n_2$ ). La transition  $AS_1/AS_2$  est du premier ordre (ligne pointillée).

## RENORMALISATION

Les effets de la renormalisation sont minimes. Tout d'abord, les couplages nus ne s'annulent plus pour les transitions Sp et AS mais prennent une valeur critique  $m_1 = m_2 = m_{\text{Sp}}$  pour Sp et  $m_1 = m_{\text{AS}}$  pour AS. On est amené à faire deux hypothèses d'échelle ([DE84, PJF74]) : à proximité des lignes critiques AS, les paramètres renormalisés se comportent comme  $m - m_{\text{AS}}(\Delta) \sim \Delta^x$ , et au voisinage du point critique,  $m - m_c \sim \Delta^x$  avec  $x < 1$ . L'équation des lignes critiques AS pour les couplages renormalisés est modifiée en une loi d'échelle  $m_{\text{AS}}(\Delta) - m_{\text{Sp}} \propto \Delta^x$ , et les deux lignes se rejoignent au point spécial avec une forme de *cusp* (figure III.8).<sup>6</sup> L'étude du *flow* du groupe de renormalisation montre que la transition Ord est la plus stable, les perturbations anisotropes y sont non-pertinentes. La point Sp est totalement instable : l'anisotropie est pertinente. Quant à la transition AS<sub>1</sub>, elle est stable par rapport aux composantes  $n_2$  (paramètre  $m_2$  non-pertinent) et instable pour les autres composantes ( $m_1$  pertinent).

### 3.2.2 Etude de l'anisotropie par le gaz de boucles

Les conditions de bord de type JS ont été généralisées pour la phase diluée dans [DJS10]. Si dans la phase dense, la fugacité des monomères sur le bord est un paramètre non-pertinent, il est important d'en tenir compte dans la phase diluée. Les conditions de bord de type JS diluées, ou simplement DJS, introduisent deux types de boucles touchant le bord, de température  $T_1$  et  $T_2$ , et de poids  $n_1$  et  $n_2$ , avec  $n = n_1 + n_2$ . En termes de spins, la fonction de partition s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\Gamma(T, T_1, T_2) = & \text{tr} \left[ \prod_{\langle rr' \rangle \in \Gamma} \left( 1 + \frac{1}{T} \sum_{a=1}^n S_a(r) S_a(r') \right) \right. \\ & \left. \times \prod_{\langle rr' \rangle \in \partial\Gamma} \left( 1 + \frac{1}{T_1} \sum_{a=1}^{n_1} S_a(r) S_a(r') + \frac{1}{T_2} \sum_{a=n_1+1}^n S_a(r) S_a(r') \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

Reformulée dans le langage des boucles, on obtient

$$\mathcal{Z}_\Gamma(T, T_1, T_2) = \sum_{\text{loops}} n^X n_1^{X_1} n_2^{X_2} T^{-Y} T_1^{-Y_1} T_2^{-Y_2}, \quad (\text{III-19})$$

où  $X, X_i$  désigne le nombre de boucles de *bulk*, ou de couleur  $i$ , et  $Y, Y_i$  la longueur correspondante. Les couplages précédents sont reliés aux températures de surface par  $m_i = 1/T_i$ .

## OPÉRATEURS BCC

Les auteurs de [DJS10] sont parvenus à dériver l'équation de Yang-Baxter de bord en présence d'anisotropie.

6. La présence de ce point de rebroussement fait suite à l'hypothèse d'échelle pour la susceptibilité  $\chi(\Delta, m) = (m - m_{\text{Sp}})^{-\gamma} X(\zeta)$  où  $X$  est une fonction de  $\zeta = \Delta(m - m_{\text{Sp}})^{-1/x}$ . La susceptibilité doit diverger uniquement sur la ligne critique, ce qui impose que la fonction  $X$  diverge en un seul point  $\zeta = \zeta^*$  d'où l'on tire l'équation de la courbe AS.

En admettant l'hypothèse habituelle<sup>7</sup> que les solutions intégrables correspondent à des points critiques, ils ont redérivé le diagramme de phase III.8 pour les conditions de bord DJS, et obtenu les équations des lignes anisotropes spéciales  $AS_{1,2}$ . Calculant la fonction de partition Ord/DJS sur ces lignes critiques, ils ont trouvé le spectre des opérateurs de bord que l'on peut insérer entre des conditions Ord et AS. Ces opérateurs *bcc* font intervenir des boucles non-contractibles engendrées par les composantes de spins (1) :  $1 \cdots n_1$  ou (2) :  $n_1 + 1 \cdots n$  :

$$\mathbb{S}_L^{(1)} = \sum_{1 \leq a_1 < \cdots < a_L \leq n_1} S_{a_1} \cdots S_{a_L}, \quad \mathbb{S}_L^{(2)} = \sum_{n_1 < a_1 < \cdots < a_L \leq n} S_{a_1} \cdots S_{a_L}. \quad (\text{III-20})$$

Utilisant toujours la paramétrisation III-13  $n_1 = k(h - r)$ ,  $n_2 = k(r)$ , les dimensions des opérateurs *bcc* sont les suivantes,

$$\begin{aligned} (\text{Ord}|\mathbb{S}_L^{(1)}|AS_1) &\rightarrow h_{r-L,r}, & (\text{Ord}|\mathbb{S}_L^{(2)}|AS_1) &\rightarrow h_{r+L,r}, \\ (\text{Ord}|\mathbb{S}_L^{(1)}|AS_2) &\rightarrow h_{r-L,r+1}, & (\text{Ord}|\mathbb{S}_L^{(2)}|AS_2) &\rightarrow h_{r+L,r+1}. \end{aligned}$$

Les dimensions des opérateurs *bcc* insérés entre deux bords DJS ont également été obtenues, les résultats sont sensiblement identiques à ceux de la phase dense. Ils sont donnés par la table 3.1.2, en inversant les indices  $(r, s) \rightarrow (s, r)$ .

## ÉCOULEMENTS DU GROUPE DE RENORMALISATION

Les *flows* du groupe de renormalisation ont aussi été étudiées dans [DJS10] à l'aide du théorème *g*. On retrouve ainsi les résultats de Diehl et Eisenriegler [DE84] sur la stabilité des différentes conditions de bords. La dimension des opérateurs qui génèrent les *flows* ont aussi été déterminés. L'opérateur qui génère les perturbations anisotropes introduit un morceau de boucle sur le bord avec un poids différent. Près d'une transition ordinaire, il a pour dimension  $h_{3,1}$  (non-pertinente), et  $h_{3,3}$  (pertinente) près du point spécial. La perturbation isotrope à proximité du point Sp est engendrée par l'opérateur thermique de bord  $h_{1,3}$  (pertinente). Enfin, la perturbation des conditions de bord AS dans la direction instable est effectuée par un opérateur de dimension  $h_{1,3}$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence une structure très riche pour les phénomènes critiques de surface du modèle  $O(n)$ . Nous verrons dans le chapitre suivant comment redériver ces résultats sur le

---

7. Pour l'heure, il n'existe pas de justification physique pour cette hypothèse. Toutefois, pour certaines théories, intégrabilité et criticalité semblent découler d'une propriété plus fondamentale qu'est la présence d'observables satisfaisant une version discrète de la condition d'holomorphisme [IC09].

réseau aléatoire. Utilisant habilement le modèle de matrice, nous retrouverons les conditions de criticalité des bords DJS, ainsi que la dimension des opérateurs de bord.

Faute de place, nous n'avons pu parler ici d'une limite extrêmement intéressante du modèle  $O(n)$  :  $n \rightarrow 0$ . Dans cette limite, les boucles fermées disparaissent et les lignes ouvertes introduites par les opérateurs de fuseaux se comportent comme des polymères. Dans la phase diluée, ces polymères décrivent des marches auto-évitantes *Self Avoiding Walks (SAW)*, et le point critique  $Sp$  correspond à la transition d'adsorption de ces polymères [BY95a, FS94].

Enfin, citons simplement le lien entre les lignes ouvertes introduites par les opérateurs de fuseaux et l'évolution de Schramm-Loewner. Entre deux conditions de bord de type Ord, ces opérateurs introduisent des chemins de type  $SLE_\kappa$  où  $\kappa = 4/g$  (phase diluée  $\kappa < 4$ , phase dense  $\kappa > 4$ ). Insérés entre des conditions de bord Ord/AS, ils génèrent des évolutions plus générales impliquant un terme de *drift*  $SLE_{\kappa,\rho}$  [LSW03, Car04], le paramètre  $\rho$  étant relié à  $n_1(r)$  par  $\rho = 2r\theta/(1+\theta) - 2$ . Le modèle de matrice ouvre la possibilité d'étudier ces courbes aléatoires sur une surface aléatoire. Dans la limite continue, les chemins sont munis d'une mesure aléatoire donnée par un champ gaussien [DS08, DS09, DB09].



LE MODÈLE  $O(N)$  MATRICIEL

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation du modèle <math>O(n)</math> matriciel</b> . . . . .	<b>69</b>
1.1	Définition du modèle . . . . .	69
1.2	Fonction de partition de disque . . . . .	71
1.3	Equations de boucle . . . . .	73
1.4	Equation résolvante . . . . .	74
<b>2</b>	<b>Limite continue et comportement critique du <i>bulk</i></b> . . . . .	<b>81</b>
2.1	Phénomènes critiques de <i>bulk</i> . . . . .	81
2.2	Prédictions de la théorie de Liouville . . . . .	83
2.3	Calcul de la résolvante . . . . .	84
<b>3</b>	<b>Opérateurs fuseaux</b> . . . . .	<b>88</b>
3.1	Opérateurs fuseaux sur le bord . . . . .	88
3.2	Opérateurs fuseaux dans le <i>bulk</i> . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Bords JS et DJS</b> . . . . .	<b>90</b>
4.1	Définition des bords JS et DJS . . . . .	90
4.2	Opérateurs de bord Ord/DJS . . . . .	93
4.3	Opérateur DJS/DJS dans la phase diluée . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Problèmes ouverts</b> . . . . .	<b>101</b>
5.1	Détermination de $H(y)$ . . . . .	101
5.2	Anisotropie de <i>bulk</i> . . . . .	101
<b>A</b>	<b>Formulaire de dérivation matricielle</b> . . . . .	<b>103</b>
<b>B</b>	<b>Opérateur *</b> . . . . .	<b>103</b>
<b>C</b>	<b>Opérateurs DJS/DJS</b> . . . . .	<b>105</b>

---

## Introduction

Le modèle  $O(n)$  matriciel a été introduit par I. Kostov en 1989 dans [Kos89a]. Ce modèle est basé sur les travaux d' E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi et J. B. Zuber sur les surfaces bidimensionnelles triangulées [BIPZ78], et s'inspire des intégrales matricielles proposées par V. Kazakov pour le modèle d'Ising [Kaz86, BK87a, BK87b] et pour le modèle de Potts [Kaz88]. L'objectif principal de l'article [Kos89a] était de déterminer l'exposant critique de la susceptibilité  $\gamma_{\text{str}}$  et la dimension des opérateurs de fuseaux afin de vérifier l'accord avec les relations de KPZ fraîchement obtenues [KPZ88]. Grâce aux progrès récents dans le développement de la théorie de Liouville avec bord [FZZ00], nous verrons qu'il est maintenant possible de faire beaucoup plus, et de comparer les corrélateurs des deux théories, ainsi que les équations de boucle aux équations du *boundary ground ring*.

La stratégie employée ici est de se concentrer d'abord sur l'analyse du comportement critique de *bulk* à travers l'étude de la résolvante dans la limite continue. Il y a à cela un double avantage. Tout d'abord, on introduit ainsi graduellement, et sur des résultats relativement familiers, certains concepts centraux tel que la limite continue de surfaces triangulées, l'interprétation combinatoire des équations de boucles, ou encore la compréhension des phénomènes critiques à travers l'examen de ces équations. Ensuite, l'étude du *bulk* permet de saisir l'essentiel de la méthode employée sur le bord sans avoir à s'encombrer de formules interminables. On résumera ensuite les résultats des articles [BH09, Bou09, BHK10], avec un intérêt spécial pour l'étude de la phase diluée. En outre, nous donnerons en guise d'exemple une généralisation de [Bou09] présentant l'étude des opérateurs DJS/DJS (appendice C).

Le modèle de matrice étudié ici est un modèle formel : nous ne chercherons pas à calculer directement les intégrales matricielles, et nous nous servons uniquement de la structure donnée par les équations de boucle qui reflète les propriétés combinatoires du réseau aléatoire. Comme dans le chapitre II, nous nous restreindrons à des surfaces ayant la topologie de la sphère ou du disque, bien qu'il soit possible de considérer le modèle  $O(n)$  matriciel pour n'importe quelle topologie [BE09].<sup>1</sup> Les corrélateurs seront donc évalués dans la limite planaire. De surcroît, pour ne pas compliquer inutilement le problème, nous calculerons les corrélateurs directement dans la limite continue, sans passer par la solution pseudo-elliptique pour la résolvante [EK95, Kos06].

Nous ne détaillerons pas ici les résultats de base sur les modèles à une et deux matrices hermitiennes, bien qu'en posant brutalement  $n = 0$  on retrouve le modèle à une matrice.<sup>2</sup> Une introduction générale sur les modèles de matrice et le modèle  $O(n)$  peut être trouvée dans l'excellente revue de P. Di Francesco, P. Ginsparg et J. Zinn-Justin [DGZJ95], et pour des résultats antérieurs on pourra consulter le livre de

---

1. Considérer des topologies plus complexes n'apporte rien pour la détermination des opérateurs de bord car la relation de KPZ permet d'obtenir la dimension des corrélateurs définis sur une surface de genre quelconque à partir de la dimension attribuée au corrélateur défini sur la surface de genre minimal.

2. Cette limite ne doit pas être confondue avec la limite "douce"  $n \rightarrow 0$  où l'on décrit le comportement des polymères.

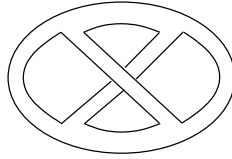


FIGURE IV.1 – Exemple de croisement à interdire dans la limite planaire.

M. L. Mehta [Meh88]. Il pourra aussi s'avérer utile de se reporter au cours de J. Ambjorn donné aux Houches '94 [Amb94] pour ce qui concerne la limite continue des modèles géométriques.

## 1 Présentation du modèle $O(n)$ matriciel

### 1.1 Définition du modèle

Les fonctions de partition  $\mathcal{Z}_\Gamma$  du modèle  $O(n)$  définies au chapitre III (III-3, III-10, III-18) peuvent être considérées sur n'importe quel réseau  $\Gamma$ . L'idée fondamentale de la méthode matricielle est de sommer sur toutes les réalisations d'un réseau aléatoire ayant une topologie donnée. Nous prendrons uniquement des réseaux formés de vertex trivalents, cette simplification n'ayant pas de conséquences universelles. La fonction de partition étudiée est donc la somme

$$\mathcal{Z}(\kappa, T) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{k(\Gamma)} \mathcal{Z}_\Gamma(T) e^{-\Lambda A(\Gamma)} \quad (\text{IV-1})$$

où la constante cosmologique  $\Lambda$  se couple à l'aire du réseau  $A(\Gamma)$ . Cette aire correspond au nombre total de vertex, chaque vertex ayant par conséquent un poids  $\kappa = e^\Lambda$ .<sup>3</sup>

Le réseau dual  $\tilde{\Gamma}$ , obtenu en reliant le centre des hexagones par des liens orthogonaux aux liens du réseau  $\Gamma$ , est constitué de triangles quelconques. Nous nous restreignons ici à une topologie planaire (sphère, disque,...) dans laquelle les croisements (figure IV.1) sont interdits. Suivant le **calcul de Regge** [Reg61], ces triangles peuvent être vus comme des triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur unité, dessinés sur une surface courbe de topologie fixée. On définit ainsi une métrique intrinsèque, l'élément d'aire au vertex  $r$  étant donné par le nombre  $N(r)$  de triangles qui se rencontrent en ce point  $A(r) = N(r)/3$ . Cette discrétisation des surfaces de Riemann possède l'avantage d'être invariante sous les reparamétrisations des surfaces. Ainsi, comme pour le modèle à une matrice [Dav85a, Dav85b], on obtient la triangulation des surfaces de genre zéro, avec toutefois une modification majeure : l'apparition d'un poids donné aux configurations de boucles qui passent à travers les triangles. Le facteur  $k(\Gamma)$  prend en compte les symétries du réseau, i.e. la possibilité d'échanger liens et triangles.

3. La fonction de partition IV-1 peut être vu comme la discrétisation de la fonction de partition de la gravité bidimensionnelle. Le paramètre  $\Lambda$  s'identifie avec la constante  $\kappa_0$  du chapitre II (II-1). Nous reviendrons sur ce type d'interprétation dans le chapitre sur la théorie des cordes à deux dimensions.



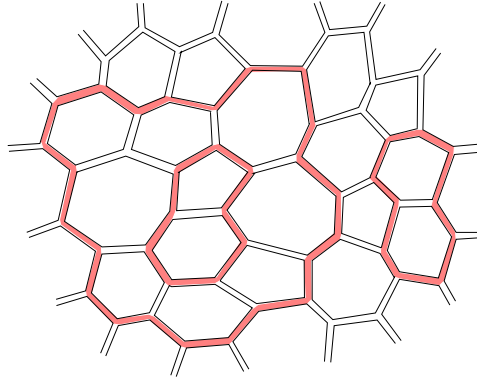


FIGURE IV.2 – Configuration de boucles.

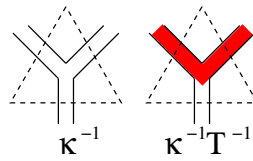


FIGURE IV.3 – Vertex du modèle de matrice.

### MODÈLE DE MATRICE $O(n)$

L'intérêt principal de la somme IV-1 sur les réseaux est l'apparition d'une symétrie correspondant à une version discrète de la covariance générale. Cette symétrie se traduit par des relations combinatoires faisant intervenir les triangles élémentaires du réseau dual  $\tilde{\Gamma}$ . Dans le langage des modèles de matrices, elle donne lieu aux équations de boucle qui permettent le calcul perturbatif des corrélateurs. Nous détaillerons la relation entre ces deux approches lors de la dérivation de l'équation de la résolvante (section 1.4.3).

Les configurations de réseaux et de boucles (figure IV.2) peuvent être obtenus dans la limite planaire comme les diagrammes de Feynman construits à partir d'un vertex vide de poids  $\kappa^{-1}$  et de  $n$  vertex pleins,  $a = 1 \cdots n$ , de poids  $\kappa^{-1} T^{-1}$  (figure IV.3). Ces règles diagrammatiques découlent d'un modèle de matrice faisant intervenir les matrices hermitiennes de taille  $N \times N$ ,  $M$  et  $Y_a$ ,

$$\mathcal{Z}_{O(n)} = \int dM \prod_{a=1}^n dY_a \exp \left[ \beta \text{tr} \left( -\frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{3} M^3 - \frac{T}{2} \sum_{a=1}^n Y_a^2 + \sum_{a=1}^n M Y_a^2 \right) \right]. \quad (\text{IV-2})$$

Il est d'usage de simplifier les équations en faisant disparaître le terme quadratique des matrices  $Y_a$  par le changement de variable  $X = M - T/2$ ,

$$\mathcal{Z}_{O(n)} = \int dX \prod_{a=1}^n dY_a \exp \left[ -\beta \text{tr} \left( V(X) - \sum_{a=1}^n X Y_a^2 \right) \right]. \quad (\text{IV-3})$$

Dans le cas présent, le potentiel est donc cubique,

$$V(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{b_{k-1}}{k} x^k = \frac{1}{2} \left( x + \frac{T}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( x + \frac{T}{2} \right)^3. \quad (\text{IV-4})$$

Il est toutefois possible de s'intéresser au cas plus général d'un potentiel polynomial quelconque [EK95, BE09], ce qui permet d'obtenir dans la limite continue des régimes critiques plus complexes [Kos92, KS92].

## LIMITE PLANAIRE

Le poids d'un diagramme de Feynman est proportionnel à  $N^\chi(\beta/N)^{-V/2}$  où  $V$  désigne le nombre de vertex. La limite planaire consiste à ne garder que les surfaces de genre minimal, i.e. la sphère  $\chi = 2$  ou le disque  $\chi = 1$ . Pour cela, il faut envoyer la taille  $N$  des matrices et le paramètre  $\beta$  vers l'infini, tout en fixant le rapport associé aux vertex,  $\beta/N = \kappa^2$ . La fonction de partition du réseau aléatoire correspond aux diagrammes connectés du modèle de matrice,

$$\mathcal{Z}(\kappa, T) = \lim_{N, \beta \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \mathcal{Z}_{O(n)}(N, \beta, T). \quad (\text{IV-5})$$

## POINTS MARQUÉS

Nous avons vu au chapitre II que l'on pouvait fixer la position de certains opérateurs afin de supprimer la symétrie résiduelle du groupe de Killing. Au niveau discret, il est opportun de "marquer un point" sur la surface (ou sur le bord) pour éliminer les facteurs de symétrie associés à l'invariance par translation. Dans la limite continue où les contributions principales ont une aire divergente<sup>4</sup>, le facteur de symétrie est  $k(\Gamma) \sim A(\Gamma)!$ , et marquer un point revient à dériver par rapport à  $-\Lambda$ .

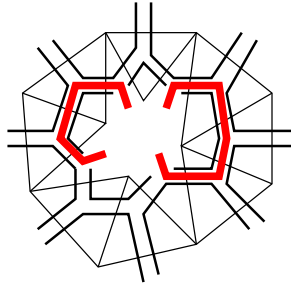
Suite à l'invariance par translation, la fonction à un point marqué ne dépend pas de la position de ce point. La fonction à deux points marqués correspond à la susceptibilité  $\chi(\Lambda) \propto \partial_\Lambda^2 \mathcal{Z}$ . Ce terme prend sa source dans l'analogie entre les modèles géométriques et la mécanique statistique : la fonction de partition IV-1 peut être vue comme la fonction de partition grand-canonique associée à la variation du nombre de vertex  $A(\Gamma)$ , la constante  $\Lambda$  jouant le rôle du potentiel chimique.

## 1.2 Fonction de partition de disque

Nous voulons étudier des conditions de bord, nous allons donc restreindre la somme IV-1 aux triangulations d'un disque avec  $L$  arêtes sur le bord. Au lieu de fixer cette longueur de bord  $L(\Gamma)$ , on préfère la laisser fluctuer et rendre compte de ses fluctuations par une constante cosmologique de bord  $\Lambda_B$ ,

$$\mathcal{Z}(\kappa, T, \Lambda_B) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{k(\Gamma)} \mathcal{Z}_{\Gamma}(T) e^{-\Lambda A(\Gamma)} e^{-\Lambda_B L(\Gamma)}. \quad (\text{IV-6})$$

4. Les termes d'aire finie ne donnent que des contributions analytiques à la fonction de partition, or celle-ci présente une coupure. Ce sont donc les termes d'aire divergente qui prédominent dans la limite continue.

FIGURE IV.4 – Disque avec 8 pattes externes ( $\tilde{W}_8$ ).

Les vertex sur le bord du réseau sont associés à des propagateurs entrants, et chaque type de propagateur engendre une condition de bord différente.

### RÉSOLVANTE

Dans un premier temps, nous prendrons des conditions de bord libres (ou Ord), obtenues à l'aide du propagateur de la matrice  $M$  (figure IV.4). Celui-ci se couple avec les deux types de vertex,  $M^3$  (avec une fugacité 1) et  $MYY$  (avec une fugacité  $T^{-1}$ ), ce qui correspond bien aux fluctuations des spins à la température  $T$ . Nous noterons  $\tilde{W}_l$  cette fonction de partition dans la limite planeaire,

$$\tilde{W}_l = \lim_{N, \beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \langle \text{tr } M^l \rangle. \quad (\text{IV-7})$$

La fonction génératrice associée est appelée la **résolvante**,

$$W(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^{-l-1} \tilde{W}_l = \lim_{N, \beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M} \right\rangle \quad (\text{IV-8})$$

et correspond à la fonction de partition de constante cosmologique  $z = e^{\Lambda_B}$  avec un point marqué sur le bord,  $W(z) \propto -\partial_{\Lambda_B} \mathcal{Z}(\kappa, T, z)$ .

Nous avons vu qu'il était préférable de travailler avec la matrice  $X$ , on introduit donc la variable translattée  $x = z + T/2$  ainsi que le développement correspondant

$$W(x) = W(z + T/2) = \lim_{N, \beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} x^{-l-1} W_l, \quad W(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\kappa^{-2}}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (\text{IV-9})$$

Enfin, il est parfois utile d'introduire la transformée de Laplace,

$$W(x) = \int_0^{\infty} e^{-\ell x} W(\ell) d\ell, \quad W(\ell) = \langle \text{tr } e^{\ell X} \rangle. \quad (\text{IV-10})$$

### 1.3 Equations de boucle

Avant de commencer à discuter les comportements critiques du modèle  $O(n)$  matriciel, il faut introduire notre outil principal que sont les équations de boucles. Ce sont en réalité les équations de Schwinger-Dyson de la théorie des champs, appliquées aux modèles matriciels. Dans le cadre de la combinatoire des cartes triangulées, elles sont appelées “équations de Tutte”. Notons aussi que certains modèles de matrices peuvent être reformulés comme des théories conformes pour des champs collectifs, et ces équations réalisent les contraintes de Virasoro [Kos99, Kos10].

Nos équations de boucle sont obtenues en utilisant l’invariance des mesures matricielles sous translations infinitésimales. On dérive de cette manière les fameuses règles *split* et *merge* (voir par exemple [Eyn06]). Il est équivalent, et peut-être plus naturel, de poser pour tout  $F$

$$\int dX \prod_{a=1}^n dY_a \frac{\partial}{\partial X_{ij}} (e^{-\beta \text{tr } \mathcal{S}[X, Y_a]} F[X, Y_a])_{kl} = 0. \quad (\text{IV-11})$$

Cette identité est aussi valable pour les matrices  $Y_a$ . Un bref rappel sur la dérivation matricielle est présentée en appendice A. En appariant correctement les indices, on en déduit deux équations de boucle “élémentaires”

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \langle \partial_X F \rangle + \langle \text{tr} [(-V'(X) + Y_n^2) F] \rangle &= 0 \\ \frac{1}{\beta} \langle \partial_{Y_a} F \rangle + \langle \text{tr} [Y_a (X F + F X)] \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-12})$$

où la dérivation matricielle est donnée par  $\partial_X F = \sum_{i,j,k,l} \delta_{ik} \delta_{jl} \partial F_{kl} / \partial X_{ij}$  et où l’on a utilisé la notation  $Y_n^2 = \sum_{a=1}^n Y_a^2$ . La seconde équation peut être réécrite de manière astucieuse en posant  $G = -(X F + F X)$ , soit formellement<sup>5</sup>

$$F = \int_0^\infty d\ell e^{\ell X} G e^{\ell X}. \quad (\text{IV-13})$$

On obtient alors

$$\sum_{ij} \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_a ij} \int_0^\infty d\ell (e^{\ell X} G e^{\ell X})_{ij} \right\rangle = \langle \text{tr } G Y_a \rangle. \quad (\text{IV-14})$$

Il est plus simple de travailler dans l’espace  $x$  relié aux variables  $\ell$  par transformée de Laplace (IV-10). Nous verrons par la suite que les corrélateurs ayant un bord de type Ord possèdent une coupure  $[a, b]$  pour la constante cosmologique  $x$  associée. La transformée de Laplace inverse génère alors un contour encerclant cette coupure,

$$\langle \text{tr} (Y_a G) \rangle = \frac{1}{\beta} \oint_{[a,b]} \frac{dx}{2i\pi} \left\langle \partial_{Y_a} \left[ \frac{1}{x-X} G \frac{1}{-x-X} \right] \right\rangle. \quad (\text{IV-15})$$

5. De prime abord, cette intégrale peut sembler divergente en  $+\infty$ . En réalité, nous n’avons pas précisé le chemin d’intégration pour la matrice  $X$ . Le signe du terme cubique pour le potentiel indique que ce chemin doit rejoindre l’infini dans la partie  $\text{Re } < 0$  du plan complexe. Ce fait est confirmé par le support de la densité de valeurs propres, qui appartient à  $\mathbb{R}^-$ .

Par la suite, nous utiliserons intensément ces identités, ainsi que la propriété de factorisation dans la limite planaire  $\langle \text{tr } A \text{ tr } B \rangle \approx \langle \text{tr } A \rangle \langle \text{tr } B \rangle$ .

## 1.4 Equation résolvente

La quantité élémentaire pour caractériser un modèle de matrice dans la limite planaire est sa résolvente (IV-9). Il existe plusieurs méthodes pour dériver l'équation de boucle associée à cette quantité, nous en présentons trois. La première que nous exposerons est aussi la première à avoir été introduite, mais son intérêt n'est pas qu'historique puisqu'elle permet un traitement rigoureux de la limite planaire. En particulier, nous montrerons que la résolvente est la transformée de Stieltjes (ou de Cauchy) de la densité de valeurs propres du modèle de matrice. Nous verrons aussi qu'elle possède une coupure sur le support de cette densité, et y satisfait l'équation

$$W(x + i0) + W(x - i0) + nW(-x) = V'(x), \quad x \in [a, b]. \quad (\text{IV-16})$$

La seconde méthode fait intervenir les équations de boucles, et est sans doute la façon la plus rapide de dériver l'équation précédente. Elle nous permettra d'introduire le produit de convolution  $*$  qui joue un rôle prépondérant dans l'étude des corrélateurs. Enfin, la méthode combinatoire fera le lien entre les équations et la triangulation, et nous conduira à introduire une représentation diagrammatique des équations de boucles.

### EQUATION QUADRATIQUE

L'équation IV-16 possède quelques défauts : elle n'est valable que sur la coupure et ne prend pas en compte le comportement de la résolvente à l'infini. Il est possible de la récrire sous une forme plus symétrique. Pour cela, on multiplie par la discontinuité de  $W$  sur la coupure  $[a, b]$  afin d'obtenir

$$\text{Disc } [W(x)^2 + nW(x)W(-x) - V'(x)W(x)] = 0, \quad x \in [a, b], \quad (\text{IV-17})$$

où  $\text{Disc } A(x)$  désigne la différence entre les valeurs de  $A$  au dessus et en dessous de la coupure,  $\text{Disc } A(x) = A(x + i0) - A(x - i0)$ . La fonction à l'intérieur de la parenthèse possède en revanche une discontinuité sur la coupure symétrique  $-x \in [a, b]$ . On va donc faire intervenir la symétrie  $x \rightarrow -x$  et poser

$$W(x)^2 + W(-x)^2 + nW(x)W(-x) - V'(x)W(x) - V'(-x)W(-x) = Q(x). \quad (\text{IV-18})$$

Cette fonction  $Q(x)$  ne possède ni coupures ni pôles, c'est une fonction holomorphe. En analysant l'équation précédente dans la limite  $x \rightarrow \infty$ , on montre que  $Q(x)$  est un polynôme pair de degré inférieur à deux : c'est une constante,

$$W(x)^2 + W(-x)^2 + nW(x)W(-x) - V'(x)W(x) - V'(-x)W(-x) = -2(b_1W_0 + b_2W_1). \quad (\text{IV-19})$$

### 1.4.1 Méthode du col

La “méthode du col” est présentée dans l’article original [Kos89a], ainsi que dans la revue [DGZJ95]. Cette méthode utilise le fait que l’action est quadratique pour les matrices  $Y_a$ , et qu’il est donc possible d’effectuer les intégrales gaussiennes sur les éléments de matrice. On obtient ainsi  $n$  déterminants dans l’espace tensoriel de deux matrices,

$$\mathcal{Z}_{O(n)} = \int dX (\det [X \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes X])^{-n/2} \exp [-\beta \text{tr} V(X)]. \quad (\text{IV-20})$$

Diagonalisant  $X$ , on peut exprimer la fonction de partition du modèle matriciel comme une intégrale sur les valeurs propres  $x_i$ ,  $i = 1 \cdots N$  :

$$\mathcal{Z}_{O(n)} = \int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-\beta V(x_i)} \prod_{i,j} (x_i + x_j)^{-n/2} \prod_{i,j \neq i} (x_i - x_j) = \int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-S[x_i]}. \quad (\text{IV-21})$$

On voit apparaître une action effective pour les valeurs propres  $x_i$  :

$$S[x_i] = \beta V(x_i) - \sum_{j \neq i} \log |x_i - x_j| + \frac{n}{2} \sum_j \log (x_i + x_j). \quad (\text{IV-22})$$

Lorsque  $n = 0$ , cette action décrit un système de  $N$  charges contraintes à se déplacer sur l’axe réel, appelé “**gaz de Dyson**” [Dys62]. Ces charges, de position  $x_i$ , se repoussent via une interaction Coulombienne, et sont piégées dans le potentiel  $\beta V(x)$ . Lorsque  $n$  est non nul, il se rajoute une interaction attractive avec les charges images aux positions  $-x_i$ . Nous reviendrons sur cette description après avoir effectué la limite planaire.

### EQUATION DU POINT COL

Dans la limite planaire, il suffit d’évaluer la fonction de partition au point col. On obtient ainsi un ensemble de  $N$  équations

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j S[x_j] = \beta V'(x_i) - 2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} + n \sum_j \frac{1}{x_i + x_j} = 0, \quad (\text{IV-23})$$

et la valeur de l’énergie libre correspondante est simplement

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{N^2} \log \mathcal{Z}_{O(n)} = \frac{1}{N^2} \left[ \beta \sum_i V(x_i) - \sum_{i,j \neq i} \log |x_i - x_j| + \frac{n}{2} \sum_{i,j} \log (x_i + x_j) \right]. \quad (\text{IV-24})$$

Pour passer à la limite d’un nombre continu de valeurs propres, on suit la méthode de [BIPZ78] et l’on pose  $x_i = x(i/N)$  où  $x(t)$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Ainsi, dans la limite continue, on peut

transformer les sommes en intégrales, et l'on obtient pour les équations du point col et l'énergie libre :

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \frac{ds}{x(t) - x(s)} - n \int_0^1 \frac{ds}{x(t) + x(s)} = \kappa^2 V'(x(t)), \\ \mathcal{F} = \kappa^2 \int_0^1 dt V(x(t)) - \int_0^1 dt \int_0^1 ds \ln |x(t) - x(s)| + \frac{n}{2} \int_0^1 dt \int_0^1 ds \ln (x(t) + y(s)), \end{aligned} \quad (\text{IV-25})$$

où la valeur principale est sous-entendue à chaque fois que l'intégrale est singulière. On reconnaît évidemment le cas du modèle à une matrice pour  $n = 0$ . Procédons maintenant au changement de variable d'intégration en utilisant la fonction inverse  $t(x)$ , et en introduisant la densité spectrale  $\rho(x) = dt/dx$ , dont le support  $[a, b]$  correspond aux bornes du spectre des valeurs propres ( $x(0) = a, x(1) = b$ ) :

$$\begin{aligned} & 2 \int_a^b \frac{\rho(y)dy}{x - y} - n \int_a^b \frac{\rho(y)dy}{x + y} = \kappa^2 V'(x), \\ \mathcal{F} = \kappa^2 \int_a^b \rho(x)dx V(x) - \int_a^b \rho(x)dx \int_a^b \rho(y)dy \ln |x - y| + \frac{n}{2} \int_a^b \rho(x)dx \int_a^b \rho(y)dy \ln (x + y). \end{aligned} \quad (\text{IV-26})$$

Remarquons que la densité est automatiquement normalisée,  $\int_a^b \rho(x)dx = 1$ . On a donc obtenu une équation intégrale singulière, avec un noyau de Cauchy, sur la densité spectrale. La résolvante de cette équation, définie par

$$W(x) = \kappa^{-2} \int_a^b \frac{\rho(y)dy}{x - y}, \quad \text{Disc } W(x) = -2i\pi\kappa^{-2}\rho(x) \quad (\text{IV-27})$$

satisfait l'équation IV-16.

## LES DEUX RÉSOVANTES

Il reste à montrer l'affirmation non triviale qui consiste à identifier la résolvante matricielle (IV-9) avec la résolvante de l'équation intégrale pour la densité de valeur propre (IV-27). Pour cela, partons du corrélateur IV-9, intégrons comme précédemment sur les matrices  $Y_a$ , et diagonalisons la matrice  $X$ ,

$$W(x) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\mathcal{Z}_{O(n)}} \int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-S[x_i]} \sum_i \frac{1}{x - x_i}. \quad (\text{IV-28})$$

Ainsi, dans la limite planaire,

$$W(x) = \kappa^{-2} \frac{1}{\mathcal{Z}_{O(n)}} \int_{\substack{x(0)=a \\ x(1)=b}} D[x(t)] e^{-S[x(t)]} \int_0^1 \frac{dt}{x - x(t)} \quad (\text{IV-29})$$

où  $x(t)$  désigne une distribution continue de valeurs propres, avec une action effective

$$S[x(t)] = \kappa^2 \int_0^1 dt V(x(t)) - \int_0^1 dt \int_0^1 ds \ln |x(t) - x(s)| + \frac{n}{2} \int_0^1 dt \int_0^1 ds \ln (x(t) + x(s)) \quad (\text{IV-30})$$

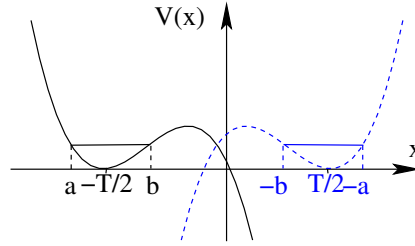


FIGURE IV.5 – Support de la densité de valeur propres et son image.

On peut évaluer l'intégrale de chemin au point col  $y = x_c(t)$ ,

$$W(x) = \kappa^{-2} \int_0^1 \frac{dt}{x - x_c(t)}. \quad (\text{IV-31})$$

Introduisant la densité de valeurs propres  $\rho(x_c) = dt/dx_c$ , on trouve bien

$$W(x) = \kappa^{-2} \int_a^b \frac{\rho(y)dy}{x - y}. \quad (\text{IV-32})$$

### COMPORTEMENT ANALYTIQUE DE $W(x)$

Dans la limite planaire, les valeurs propres se condensent autour du minimum du potentiel en  $-T/2$ , et forment un support compact pour la densité  $\rho$  (figure IV.5). La résolvante est donc une fonction analytique sur le plan complexe, sauf sur le support de la densité où elle possède une coupure  $[a, b] \subset \mathbb{R}^-$ . Le terme proportionnel à  $n$  dans l'action effective s'interprète comme une attraction entre la coupure et son image. La coupure image apparaît aussi dans l'équation intégrale singulière de la densité,

$$\int_a^b \frac{(2-n)x + (2+n)y}{x^2 - y^2} \rho(y) dy = \kappa^2 V'(x), \quad (\text{IV-33})$$

puisque le noyau de l'intégrale possède deux pôles  $y = \pm x$ . La coupure est résolue par une paramétrisation elliptique, et la résolvante s'exprime en termes de fonctions pseudo-elliptiques [EK95, Kos06]. Pour les valeurs spécifiques  $n = \pm 2$ , l'équation se simplifie et se résout par les méthodes standard des équations intégrales [Mus77, Gak90]. Le potentiel IV-4 n'ayant qu'un seul minimum, la résolvante ne possède qu'une unique coupure. Le cas de potentiels plus généraux induisant plusieurs coupures est aussi très intéressant car il mène à une grande richesse de phénomènes critiques, obtenus en faisant converger les coupures [CM91].



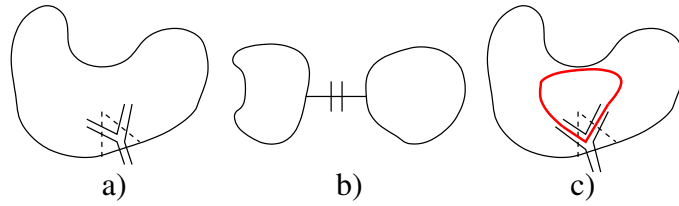


FIGURE IV.6 – Différents cas de figure associés au retrait d'un triangle de bord.

### 1.4.2 Méthode des équations de boucles

Voyons maintenant la seconde méthode, présentée dans [BHK10], qui utilise les équations de boucles. La première équation de IV-12 appliquée à  $F = 1/(x - X)$  donne, en utilisant la propriété de factorisation,

$$W(x)^2 - V'(x)W(x) - P(x) = -\frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} Y_n^2 \right\rangle, \quad (\text{IV-34})$$

en rappelant la notation  $Y_n^2 = \sum_{a=1}^n Y_a^2$ , et où l'on a fait apparaître le polynôme de degré un

$$P(x) = -\frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{V'(x) - V'(X)}{x - X} \right\rangle = -W_0(b_1 + b_2x) - b_2W_1. \quad (\text{IV-35})$$

Le second membre de IV-34 se calcule avec l'aide de l'équation de boucles IV-15 en posant  $G = \frac{1}{x-X} Y_a$ , et le résultat peut être écrit en utilisant le produit IV-107 :

$$\left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} Y_a^2 \right\rangle = \beta W * W. \quad (\text{IV-36})$$

Ce produit de convolution est introduit dans l'appendice B, où l'on développe aussi ses propriétés élémentaires. Regroupant les termes IV-34 et IV-36, on arrive à l'équation intégrale

$$W(x)^2 - V'(x)W(x) + n W * W = P(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}. \quad (\text{IV-37})$$

En prenant la discontinuité de cette équation à travers la coupure, on retrouve IV-16. Par ailleurs, en sommant cette équation avec son symétrique  $x \rightarrow -x$ , et en utilisant l'identité IV-110, on obtient l'équation quadratique IV-19.

### 1.4.3 Méthode combinatoire

La méthode combinatoire a été utilisée pour la première fois dans le contexte des modèles ADE [Kos89b], elle est aussi reprise dans [Kos07a]. Dans cette section, il sera plus simple de travailler à partir du potentiel initial défini avec la matrice  $M$ , et l'on utilisera donc le développement de la résolvante en moments  $\tilde{W} - l$  par rapport à la variable translatée  $z$ .

## EQUATION DE BOUCLES DISCRÈTE

Cette méthode combinatoire, appelée aussi “méthode à la Tutte” consiste à retirer de la fonction à  $l + 1$  pattes son arête marquée. Cette arête peut être associée à un triangle vide ou bien traversée d’une boucle. S’il est vide, le retirer augmente simplement le nombre de pattes d’une unité (cas a) figure IV.6). Toutefois, il peut arriver que l’arête relie deux parties déconnectées de la fonction de partition. Dans ce cas, il faut sommer sur la distribution des pattes externes (cas b) figure IV.6). Enfin, si le triangle est traversé d’une boucle, on va devoir retirer toute la boucle pour se ramener à un  $\tilde{W}_l$ . Supposons que cette boucle contiennent  $p$  pattes externes et  $q$  pattes internes,  $\tilde{W}_{l+1}$  se retrouve donc séparé en  $\tilde{W}_{l+p}$  et  $\tilde{W}_q$  (cas c) figure IV.6). Le facteur de symétrie  $(p + q)!/p!q!$  prend en compte la répartition des triangles, et les  $p + q + 1$  propagateurs traversés d’une boucle génèrent le facteur de température. Sommant les contributions des trois différents cas de figure, on arrive à l’équation de boucle discrète<sup>6</sup>

$$\tilde{W}_{l+1} = \tilde{W}_{l+2} + \sum_{k=1}^{l-1} \tilde{W}_k \tilde{W}_{l-k} + n \sum_{p,q \geq 0} \frac{(p+q)!}{p!q!} T^{-(p+q+1)} \tilde{W}_{l+p} \tilde{W}_q. \quad (\text{IV-38})$$

Remarquons que la seule différence avec le calcul de la phase dense présenté dans [Kos89b, Kos07a] consiste en l’apparition du terme  $\tilde{W}_{l+2}$  obtenu à partir de la configuration a).

## SOMMATION

Le cas  $n = 0$  est relativement facile à traiter, il suffit de multiplier l’équation par  $z^{-l-1}$  et de sommer sur  $l$ . Le terme quadratique fait apparaître le produit de Cauchy  $W(z)^2$  :

$$W(z)^2 - (z - z^2)W(z) = -\tilde{W}_0 + z\tilde{W}_0 + \tilde{W}_1. \quad (\text{IV-39})$$

On retrouve donc l’équation IV-37 pour  $n = 0$  et un potentiel  $V'(z) = z - z^2$ .

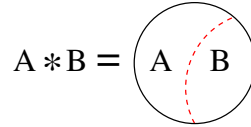
Reste à traiter le terme en facteur de  $n$  dans IV-38. Pour cela, on s’aide du double développement autour de  $(T - z) \rightarrow \infty$  puis  $z \rightarrow 0$

$$W(T - z) = \sum_{p,q \geq 0} \frac{(p+q)!}{p!q!} T^{-(p+q+1)} z^p \tilde{W}_q, \quad (\text{IV-40})$$

qui permet d’écrire le produit de Cauchy

$$W(z)W(T - z) = \sum_{p,q \geq 0} \sum_{l=-p}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} T^{-(p+q+1)} z^{-l-1} \tilde{W}_q \tilde{W}_{l+p}. \quad (\text{IV-41})$$

6. Cette équation est valable pour  $l > 1$ , si  $l = 1$  il faut simplement retirer la somme intermédiaire qui correspond au cas b).

FIGURE IV.7 – Diagramme représentant le produit  $A * B$ .

Pour obtenir le terme correspondant à notre équation de boucle, il ne faut tenir compte que des puissances négatives de  $z$ . C'est exactement le rôle de l'intégrale de contour de  $W * W$  (IV-111). Revenant aux variables  $x$ , on retrouve l'équation de boucle IV-16.

### ÉCRITURE DIAGRAMMATIQUE DES ÉQUATIONS DE BOUCLE

La méthode combinatoire est souvent un chemin plus long et plus complexe pour obtenir les équations de boucle matricielles. L'intérêt du modèle de matrice pour les conditions de bord JS et DJS proposé dans [BH09] est donc de simplifier les résultats obtenus par des considérations combinatoires ([Kos07a]). Toutefois, il est important de garder à l'esprit cette image de découpe des corrélateurs suivant les boucles, et nous représenterons en général les équations matricielles sous forme diagrammatique, faisant implicitement référence à cette dérivation combinatoire. L'opération consistant à retirer une ligne ou une boucle sera figurée par le diagramme de la figure IV.7, et se traduit par le produit  $A * B$ . Dans l'espace "des longueurs"  $\ell$ , le produit  $A * B$  décrit le recollement de deux bords de type Neumann en intégrant sur leur longueur,

$$(A * B)(\ell) = \int_0^\infty d\ell' A(\ell + \ell') B(\ell'). \quad (\text{IV-42})$$

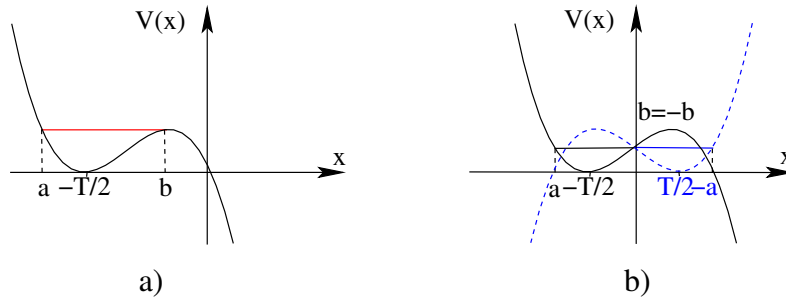
Remarquons que cette intégrale est le pendant de la somme discrète sur les arêtes externes

$$(A * B)_{l+1} = \sum_{p,q \geq 0} \frac{(p+q)!}{p!q!} T^{-(p+q+1)} \tilde{A}_{l+p} \tilde{B}_q. \quad (\text{IV-43})$$

Un dernier avantage de la méthode combinatoire est de proposer une interprétation de la dimension fractale des bords dans la limite continue grâce l'apparition au niveau discret de certains termes "dégénérés", tel celui de la figure IV.6 b), décrivant le bord se touchant lui-même.

#### 1.4.4 Partie critique d'un corrélateur

La partie régulière d'un corrélateur correspond à des termes dégénérés qui disparaissent après un nombre fini de dérivations par rapport aux constantes cosmologiques. C'est donc un polynôme en l'une de ces variables. En règle générale, cette partie diverge dans la limite continue, et il faut la retrancher au corrélateur. On trouvera une discussion plus abondante sur ces contributions "non-universelles" dans le

FIGURE IV.8 – a) Limite critique  $\kappa_I$  du modèle à une matrice b) Limite critique  $\kappa_{II}$ 

contexte de la gravité de Liouville dans [AI05]. On soustrait donc à la résolvante le polynôme  $W_{\text{reg}}$  qui satisfait l'équation IV-16, soit

$$W_{\text{reg}}(x) = \frac{2V'(x) - nV'(-x)}{4 - n^2}. \quad (\text{IV-44})$$

La partie singulière  $\omega = W - W_{\text{reg}}$  de la résolvante satisfait sur la coupure sur  $[a, b]$  une équation sans second membre

$$\omega(x + i0) + \omega(x - i0) + n\omega(-x) = 0. \quad (\text{IV-45})$$

A partir de l'équation IV-19, on peut aussi écrire

$$\omega(x)^2 + \omega(-x)^2 + n\omega(x)\omega(-x) = c_0(\kappa, T) + c_1(T)x^2 + c_2x^4 \quad (\text{IV-46})$$

où les coefficients  $c_i$  sont obtenus à partir de ceux du potentiel  $b_i$  (IV-4),

$$c_0 = 2P(0) + \frac{b_0}{2+n}, \quad c_1 = \frac{2b_0b_2}{2+n} + \frac{b_1^2}{2-n}, \quad c_2 = \frac{b_2^2}{2+n}. \quad (\text{IV-47})$$

On en déduit que  $c_1$  ne dépend que de la température et  $c_2$  est une simple constante. Ces trois coefficients joueront un rôle primordial dans la limite continue.

## 2 Limite continue et comportement critique du *bulk*

### 2.1 Phénomènes critiques de *bulk*

Commençons par une approche heuristique du comportement critique en raisonnant à partir de la description des valeurs propres comme un gaz de Dyson. Nous allons voir que le diagramme de phase du modèle  $O(n)$  sur le réseau aléatoire est similaire à celui obtenu sur le réseau plat au chapitre précédent. La différence majeure concerne la disparition du point *Fully Packed Loops* à température nulle pour des raisons de frustration [GKN99, DGK99]. On va donc retrouver dans l'espace des paramètres  $(\kappa, T)$  une phase haute température et une phase dense, décrites par les lignes critiques  $\kappa_I(T)$  et  $\kappa_{II}(T)$ , qui se rejoignent en un point  $(\kappa_c, T_c)$  correspondant à la phase diluée.

### PHASE DE HAUTE TEMPÉRATURE

La fonction  $\mathcal{Z}(\kappa, T)$  est définie comme une série dans les paramètres  $T$  et  $\kappa$ . Dans le cas du modèle à une matrice la série  $\mathcal{Z}(\kappa)$  possède un rayon de convergence fini  $\kappa = \kappa_c$  [BIPZ78]. Cette valeur critique est associée à la divergence de l'aire moyenne  $\langle A(\Gamma) \rangle = -\partial_\Lambda \mathcal{Z}_{\text{IMM}}$ , ce qui permet d'introduire une limite continue.<sup>7</sup> Dans le cas du modèle  $O(n)$ , on s'attend à observer un tel comportement pour une valeur critique  $\kappa = \kappa_c(T) = \kappa_I(T)$ . En ce point, l'aire diverge mais la longueur moyenne des boucles reste finie, obtenant une théorie vide dans la limite continue. Cette première ligne critique dans l'espace des paramètres  $(\kappa, T)$  est le pendant de la phase haute température du modèle  $O(n)$  sur le réseau plat.

Cette transition peut s'interpréter comme suit dans le modèle du gaz de Dyson. Dans le cas du modèle à une matrice ( $n = 0$ ), il n'y a qu'une seule coupure (figure IV.5 a). Après un léger changement de normalisation pour la densité, on peut voir les charges comme piégées par le potentiel  $V(x)$  et remplissant un niveau  $\kappa^{-2}$ . Les deux extrémités de la coupure dépendent donc de la constante  $\kappa$ . La ligne critique survient lorsque  $b(\kappa)$  atteint le maximum local du potentiel, i.e. pour

$$\frac{\partial b}{\partial \kappa} \rightarrow \infty. \quad (\text{IV-48})$$

Dans ce cas, le potentiel ne contient plus les valeurs propres et la fonction de partition diverge.

### PHASE DENSE

Déterminons maintenant la ligne critique correspondant à la phase de basse température. Sur le réseau plat, la longueur totale moyenne des boucles est maximale dans cette phase. Dans le cas du réseau aléatoire, on conjecture l'existence d'une seconde ligne critique pour laquelle la température est telle que la longueur des boucles diverge  $T_c(\kappa)$  (ou, en inversant la relation,  $\kappa = \kappa_{II}(T)$ ). Les boucles remplissent alors tous les triangles et entraînent la divergence de l'aire. Les deux lignes critiques  $T = T_c(\kappa)$  et  $\kappa = \kappa_c(T)$  se rencontrent en un point  $(\kappa_c, T_c)$  qui correspond à la phase diluée du modèle  $O(n)$ .

Reprenons notre système de charges de la figure IV.5, et plaçons-nous à  $T$  grand. Dans ce cas, les deux coupures sont très loin de l'une de l'autre, elles ne se voient pas et tout se passe comme s'il n'y avait qu'une seule coupure. On retrouve donc le modèle à une matrice décrivant la gravité pure. Lorsque  $T$  diminue, les deux coupures commencent à interagir. La transition a lieu lorsque les deux coupures se chevauchent c'est à dire pour  $b = -b = 0$  (figure IV.8 b). Cette condition détermine la seconde ligne critique  $\kappa_{II}(T)$ .

---

7. En réalité, sur la sphère la limite continue est problématique [Dav85b]. En effet,  $\mathcal{Z}(\kappa) \propto (\Lambda - \Lambda_c)^{5/2}$ , l'aire moyenne saute d'une valeur finie pour  $\kappa < \kappa_c$  vers une valeur infinie. Cependant, sur un disque de longueur  $\ell$ , il est possible de définir une limite continue universelle, à condition de faire tendre simultanément la longueur du bord et l'aire moyenne vers l'infini :  $\langle A_\ell(\Gamma) \rangle \simeq \ell C(\Gamma)$  avec  $C(\Gamma) \propto (\Lambda - \Lambda_c)^{-1/2}$ .

## 2.2 Prédications de la théorie de Liouville

Historiquement, la limite continue des modèles géométriques fut introduite au sein des modèles de matrice avant qu'une description continue ne soit disponible. C'est pourquoi cette approche est suivie par de nombreux articles et revues. Ici, au lieu de comparer les résultats matriciels et gravitationnels, on utilise une présentation plus moderne qui s'appuie sur la théorie de Liouville. L'avantage principal est de favoriser une meilleure intuition sur la limite continue.

### EXPOSANT DE CORDE

On détermine traditionnellement l'exposant  $\gamma_{\text{str}}$  à partir de l'expression de la résolvante dans la limite continue. On peut cependant deviner le résultat, connaissant les charges centrales des théories conformes qui décrivent le modèle dans les phases denses et diluées (III-7). Celles-ci sont en effet reliées via la relation de KPZ, à la charge centrale de la théorie de Liouville, et donc au paramètre  $\mathfrak{b}$  :  $g = 1 - \theta = \mathfrak{b}^2$  pour la phase dense, et  $g = 1 + \theta = \mathfrak{b}^{-2}$  pour la phase diluée.<sup>8</sup> Les exposants de corde associés sont donc  $\gamma_{\text{str}}^{(\text{dense})} = (g - 1)/g$  et  $\gamma_{\text{str}}^{(\text{diluée})} = 1 - g$ .

### RÉSOLVANTE

Voyons maintenant l'expression de la résolvante singulière  $\omega$  dans la limite continue donnée par la théorie de Liouville. Cette résolvante est la fonction de partition du disque avec un point marqué sur le bord, elle peut donc être obtenue comme la dérivée du disque par rapport à la constante cosmologique. Deux cas de figures peuvent se présenter, dépendants du terme de bord présent dans l'action. Pour un terme de bord de type usuel  $\mu_B \int e^{b\phi}$ , la dimension de la constante cosmologique est simplement  $[\mu_B] = 1$ . Le disque ayant pour dimension  $[\mathcal{Z}_{\text{disc}}] = 1 + \mathfrak{b}^{-2}$ , on en déduit  $[\omega] = \mathfrak{b}^{-2}$ . L'expression de la résolvante peut être dérivée de l'expression des corrélateurs bulk-bord [Hos01],

$$\langle {}^s B_{\mathfrak{b}}^s \rangle \propto R(0, \mathfrak{b}) \propto \mu^{1/2\mathfrak{b}^2} \cosh \pi s / \mathfrak{b}, \quad \mu_B \propto \sqrt{\mu} \cosh \pi \mathfrak{b} s. \quad (\text{IV-49})$$

La seconde possibilité consiste à prendre l'action de bord duale  $\tilde{\mu}_B \int e^{\phi/b}$  avec une constante cosmologique de dimension  $[\tilde{\mu}_B] = \mathfrak{b}^{-2}$ . Dans ce cas, la résolvante a pour dimension  $[\omega] = 1$  et s'écrit, avec la paramétrisation duale

$$\langle {}^s B_{\frac{1}{\mathfrak{b}}}^s \rangle \propto R(0, 1/\mathfrak{b}) \propto \mu^{1/2} \cosh \pi \mathfrak{b} s, \quad \tilde{\mu}_B \propto \mu^{1/2\mathfrak{b}^2} \cosh \pi s / \mathfrak{b}. \quad (\text{IV-50})$$

La gravité de Liouville ne permet pas de trancher entre les deux actions de bord possibles, et nous verrons que chacune est réalisée dans une phase différente du modèle matriciel. Une fois la dimension du bord identifiée, la théorie prédit l'expression de tous les corrélateurs à tous les ordres.

8. Ces deux valeurs vérifient la borne de Seiberg  $\mathfrak{b} < 1$ .

## LIMITE ALGÈBRIQUE

Dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ , il n'y a plus qu'un seul paramètre d'échelle, et l'on obtient des résolvantes algébriques :  $\omega(\mu_B) \propto \mu_B^{1/b^2}$  pour le bord usuel, et  $\omega(\tilde{\mu}_B) \propto \tilde{\mu}_B^{b^2}$  pour le bord dual. Cette remarque est consistante avec la paramétrisation de la constante cosmologique de bord : dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ , la condition  $\mu_B \neq 0$  implique  $s \rightarrow \infty$ , et la paramétrisation devient algébrique,  $\mu_B \propto \sqrt{\mu} e^{\pi b s} \in [0, \infty[$ .

## 2.3 Calcul de la résolvante

Nous allons maintenant résoudre l'équation IV-16 dans la limite continue et dériver le comportement critique. La solution sur la ligne critique  $\kappa = \kappa_{II}(T)$  fut trouvée par M. Gaudin et I. Kostov dans [GK89]. On prendra ici une approche différente, basée en partie sur [Kos92]. La limite continue est relativement subtile, et cette section peut sembler assez technique. Elle contient cependant l'essentiel du raisonnement que l'on appliquera aux corrélateurs de bord.

### 2.3.1 Etude de la phase dense

Afin d'introduire la limite continue, focalisons-nous tout d'abord sur la phase dense. Cette phase peut être décrite par le point de température nulle  $T = 0$ . En utilisant l'astuce consistant à renormaliser les matrices par la température  $M \rightarrow TM$ ,  $Y_a \rightarrow \sqrt{T}Y_a$ , on se ramène à un potentiel quadratique

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (\text{IV-51})$$

Cela permet de calculer immédiatement la constante  $P(0) = -\kappa^{-2}$  et les constantes  $c_i$  de l'équation IV-46 :

$$c_0 = \frac{1}{2(2+n)} - 2\kappa^{-2}, \quad c_1 = \frac{1}{2-n}, \quad c_2 = 0. \quad (\text{IV-52})$$

## CONSTANTE COSMOLOGIQUE CRITIQUE

Rappelons que la phase dense correspond au point critique  $\kappa = \kappa_c = \kappa_{II}(0)$ , pour lequel les deux coupures se rejoignent ( $b = 0$ ). Ce point correspond à une aire divergente, en gravité de Liouville  $\mu = 0$  et la résolvante est donc algébrique. Cela implique  $\omega(0) = 0$ , la valeur critique de la constante cosmologique est donc celle qui annule le coefficient  $c_0$ ,  $\kappa_c = 2\sqrt{2+n}$ .

## LIMITE CONTINUE

Prenons maintenant la limite critique  $b \rightarrow 0$  en posant  $b = -\epsilon M$ ,  $x = \epsilon \xi$ , le paramètre  $\epsilon$  tendant

vers zéro dans la limite infrarouge, et la coupure  $x \in [a, b]$  se renormalise vers  $\xi \in ]-\infty, -M]$ . La constante cosmologique de *bulk* tend vers sa valeur critique  $\kappa_c$ , on introduit alors la constante renormalisée  $\kappa = \kappa_c + \epsilon^{\gamma_k} \mu$  avec un exposant  $\gamma_k$  lié à la dimension de la constante cosmologique de bord  $[\xi] = 2/\gamma_k$ . Après renormalisation  $\omega(x) = \epsilon^\nu \omega(\xi)$ , l'équation résolvante singulière IV-46 devient

$$\epsilon^{2\nu} (\omega(\xi)^2 + \omega(-\xi)^2 + n\omega(\xi)\omega(-\xi)) = -\epsilon^{\gamma_k} \frac{4\mu}{\kappa_c^3} + c_1 \epsilon^2 \xi^2. \quad (\text{IV-53})$$

Pour obtenir un comportement critique non-trivial (i.e.  $\nu$  non entier), le terme proportionnel à  $c_1$  doit être sous-dominant, et il faut imposer  $0 < \nu < 1$ . De plus, pour que le paramètre  $\mu$  joue un rôle dans la limite continue, il faut avoir la relation  $\gamma_k = 2\nu$ .

### SOLUTION DE L'ÉQUATION RÉSOVANTE

Dans la limite continue, la coupure  $] -\infty, -M]$  est résolue par  $\xi = M \cosh \tau$ . L'équation résolvante IV-53 devient donc une équation sur la variable  $\tau$ ,

$$\omega(\tau + i\pi) + \omega(\tau - i\pi) + n\omega(\tau) = 0. \quad (\text{IV-54})$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$\omega(\tau) = CM^g \cosh g\tau, \quad n = -2 \cos \pi g, \quad (\text{IV-55})$$

et la constante  $C$  peut être calculée à partir de l'équation IV-46 pour  $\xi = 0$  (ou  $\tau = \pm i\pi/2$ ). On détermine la branche de la paramétrisation  $n(g)$  grâce à la limite algébrique  $\xi \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ). La résolvante satisfait alors  $\omega(\xi) \sim \xi^g$  et donc  $\nu = g$ ,  $0 < g < 1$ . Ainsi, la constante  $C$  est sans dimension, et  $[M] = [\xi] = 1/g$ ,  $[\omega] = 1$ .

### RÉSUMÉ CONCERNANT LA LIMITE CONTINUE

Résumons : dans la phase dense, la limite continue consiste à prendre

$$x = \epsilon\xi, \quad \kappa = \kappa_c + \epsilon^{2g}\mu, \quad W(x) = W_{\text{reg}}(x) + \epsilon^g \omega(\xi). \quad (\text{IV-56})$$

Les dimensions de  $\omega$  et de  $\xi$  nous invitent à identifier  $\xi$  avec la constante cosmologique duale, et l'on peut relier les paramétrisations  $\xi(\tau) \propto \mu^{1/2g} \cosh \tau$  et  $\tilde{\mu}_B \propto \mu^{1/2b^2} \cosh \pi s/b$  en posant  $\tau = \pi s/b$ . La résolvante s'identifie bien avec le corrélateur  $\langle B_{1/b} \rangle$  de la théorie de Liouville. Enfin, l'exposant de corde  $\gamma_{\text{str}}$  est relié à la dimension  $[\omega]$  par  $[\omega] = [\mathcal{Z}_{\text{disc}}] - [\tilde{\mu}_B] = 2 - \gamma_{\text{str}} - 1/g$ , or celle-ci vaut  $[\omega] = 1$ , on retrouve  $\gamma_{\text{str}} = (g - 1)/g$ .



### PERTURBATION THERMIQUE

Anticipant légèrement sur la section suivante, on peut se demander quel est l'effet d'une perturbation par la température. Supposons donc une température non nulle  $T = \epsilon^{\gamma_t} t$ , avec  $t$  le couplage renormalisé associé. D'après l'équation IV-53, on peut supposer que la perturbation ne modifiera pas la condition  $c_0(\kappa_{II}(T), T) = 0$  sur la ligne critique, mais agira plutôt à travers le coefficient  $c_1$  :

$$\epsilon^{2g} (\omega(\xi)^2 + \omega(-\xi)^2 + n\omega(\xi)\omega(-\xi)) = -\epsilon^{2g} \frac{4\mu}{\kappa_c^3} + \epsilon^{2+\gamma_t} c_1' t \xi^2 + O(\epsilon^2). \quad (\text{IV-57})$$

Pour que la perturbation soit non nulle dans la limite continue, il faut donc  $2 + \gamma_t = 2g$ , soit  $\gamma_t = -2\theta$ . On remarque que  $\gamma_t < 0$ , donc la perturbation n'est pas pertinente,  $T \rightarrow 0$  dans la limite continue. D'après les résultats du chapitre II (section 3), l'opérateur nu se couplant au paramètre  $t$  de dimension gravitationnelle  $[t] = -2\theta/(1 - \theta)$  a pour dimension conforme  $\delta_{3,1}$ , ce qui correspond effectivement aux résultats obtenus sur le réseau plat.

#### 2.3.2 Etude de la phase diluée

L'étude de la phase diluée est similaire à celle de la phase dense, bien que plus complexe. Dans la limite continue, on pose de nouveau  $b = -\epsilon M$ ,  $x = \epsilon \xi$ , et l'équation de boucle pour la partie singulière de la résolvante s'écrit (IV-46)

$$\epsilon^{2\nu} (\omega(\xi)^2 + \omega(-\xi)^2 + n\omega(\xi)\omega(-\xi)) = c_0(\kappa, T) + c_1(T) \epsilon^2 \xi^2 + c_2 \epsilon^4 \xi^4. \quad (\text{IV-58})$$

La disparition du coefficient  $c_0$  coïncide toujours avec la ligne critique  $\kappa_{II}(T)$  sur laquelle la résolvante est algébrique ( $\mu = 0$ ). Le second coefficient ne dépend que de  $T$ , et il est raisonnable de penser qu'il disparaît en  $T = T_c$ , permettant d'obtenir ainsi un autre régime critique que celui de la phase dense [KS92]. Cette condition  $c_1 = 0$  détermine donc  $T_c$ ,

$$T_c = 1 + \sqrt{\frac{2-n}{6+n}}. \quad (\text{IV-59})$$

Si l'on impose que le terme proportionnel à  $c_2$  est sous-dominant, il faut  $\nu < 2$ . Rappelons que la solution de l'équation sur la discontinuité s'écrit  $\omega(\xi) = CM^g \cosh g\tau$ , et que la limite algébrique  $\xi \rightarrow \infty$  impose  $\nu = g$  et  $[C] = 1$ . On peut donc choisir une autre branche de la paramétrisation  $n(g)$ , pour laquelle  $1 < g < 2$ .

### DIMENSION DU BORD

Dans la phase diluée, la détermination de l'exposant  $\gamma_k$  associé à la dimension du bord est plus délicate. Celui-ci est relié à la dépendance en  $\kappa$  du coefficient  $c_0$  qui fait intervenir le corrélateur  $W_1(\kappa)$ ,

$$c_0(\kappa) = \frac{b_0}{2+n} - 2\kappa^{-2} b_1 - 2b_2 W_1(\kappa). \quad (\text{IV-60})$$

Les coefficients  $b_i$  du potentiel ne dépendent que de la température, et la seule dépendance non explicite en  $\kappa$  se trouve dans le corrélateur  $W_1$ . Les  $W_k$  sont des corrélateurs de disque avec un bord de longueur finie  $k$ . Dans la limite continue, ce bord microscopique est équivalent à un point marqué de bulk, et celui-ci est introduit en dérivant la fonction de partition par rapport à la constante cosmologique de bulk. Les fonctions de corrélation  $W_k$  sont donc composées d'une partie régulière analytique en  $\kappa$  et d'une partie singulière de dimension  $[\omega_k] = [\mathcal{Z}_{\text{disc}}] - [\mu] = [\omega] + [\xi] - [\mu] = g$ . Ainsi, notre coefficient  $c_0$  se développe comme

$$c_0(\kappa) = c_{01}\epsilon^{\gamma\kappa}\mu + c_{02}\epsilon^{\gamma\kappa g}\mu^g. \quad (\text{IV-61})$$

Dans la phase diluée, le premier coefficient s'annule [KS92]<sup>9</sup>, et l'on en déduit  $\mu \sim M^2$ . La constante cosmologique de bord  $[\xi] = 1$  s'identifie cette fois avec  $\mu_B$ , et la résolvante est de dimension  $[\omega] = g$ .

### PERTURBATION THERMIQUE

La perturbation en température  $T = \epsilon^{\gamma t}$  s'analyse sur le même schéma que dans la phase dense. Le développement du coefficient  $c_1$  dans l'équation IV-53 permet d'obtenir  $\gamma_t = g - 2$ , mais cette fois l'exposant est positif  $\gamma_t = 2\theta$ . On en déduit la dimension de l'opérateur de bulk qui génère l'écoulement en température,  $\delta_{1,3}$ , ce qui est en accord avec les résultats obtenus sur le réseau plat.

#### 2.3.3 Etude sur la courbe critique $\kappa_I(T)$

Combinant les solutions des phases denses et diluées, et après renormalisation de la température  $t$  et de la résolvante afin d'éliminer les coefficients  $C$ , il est possible d'écrire une résolvante  $\omega$  valable sur toute la ligne critique :

$$\omega(\tau) = M^{1+\theta} \cosh(1+\theta)\tau + tM^{1-\theta} \cosh(1-\theta)\tau. \quad (\text{IV-62})$$

Cette résolvante vérifie l'équation IV-53 pour n'importe quelle valeur de  $\mu$  et  $t$ ,

$$\omega(\tau)^2 + \omega(\tau \pm i\pi)^2 + n\omega(\tau)\omega(\tau \pm i\pi) = \frac{\sqrt{4-n^2}}{4}M^2 (M^\theta - tM^{-\theta})^2 - \sqrt{4-n^2}t\xi^2. \quad (\text{IV-63})$$

La dépendance en  $\mu$  et  $t$  de la fonction  $M(\mu, t)$  peut être obtenue en utilisant l'astuce mentionnée plus haut pour déterminer la dimension du bord dans la phase diluée [Kos06, Kos08, BHK10]. Après un changement de normalisation des paramètres, on aboutit à l'équation suivante

$$\mu = (1+\theta)M^2 - tM^{2-2\theta} \quad (\text{IV-64})$$

qui peut être résolue en utilisant astucieusement la transformée de Laplace [Zam05, Kos08].

---

9. L'annulation de ce coefficient est difficile à démontrer explicitement, on utilise généralement un argument indirect présenté dans [Kos06, Kos08, BHK10]. Celui-ci consiste à imposer l'identification des dérivées croisées de la fonction de partition par rapport aux constantes cosmologiques de *bulk* et de bord.

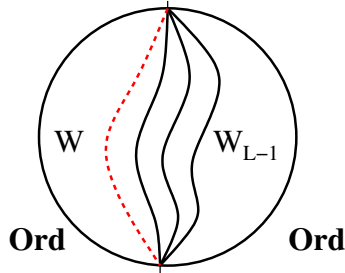


FIGURE IV.9 – Opération consistant à retirer une ligne ouverte d'un disque Ord/Ord.

### 3 Opérateurs fuseaux

Une fois compris le comportement de la résolvante dans la limite continue, on peut s'intéresser à des fonctions de corrélation plus complexes. Cette section intermédiaire, avant l'étude des conditions de bord JS et DJS, permet de rappeler les résultats obtenus pour le bord Ord concernant les opérateurs de fuseaux.

#### 3.1 Opérateurs fuseaux sur le bord

Les opérateurs de fuseaux ont été définis sur le réseau plat dans le chapitre précédent. Ils ont aussi été étudiés sur le réseau aléatoire à l'aide du modèle de matrice [KPS04]. Pour introduire une ligne ouverte sur le disque, on place en deux points du bord le propagateur d'une matrice  $Y_a$ . Ces deux propagateurs n'ont d'autre choix que de se relier l'un à l'autre, ce qui induit la ligne ouverte. De façon plus générale, l'opérateur fuseau à  $L$  pattes s'écrit

$$\mathbb{S}_L = \sum_{a_i \neq a_j} Y_{a_1} \cdots Y_{a_L}. \quad (\text{IV-65})$$

Ces opérateurs matriciels peuvent être insérés entre n'importe quelle condition de bord Ord/Ord, Ord/DJS, DJS/DJS,... Concentrons-nous ici sur le cas le plus simple des corrélateurs Ord/Ord,

$$W_L(x, x') = \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} \mathbb{S}_L \frac{1}{x' - X} \mathbb{S}_L^\dagger \right\rangle. \quad (\text{IV-66})$$

Ces corrélateurs satisfont l'équation de récurrence  $W_L = n W * W_{L-1}$  qui consiste à retirer une ligne ouverte (figure IV.9).<sup>10</sup> On peut supposer (appendice B) que la limite continue de cette relation est simplement  $\omega_L = n \omega * \omega_{L-1}$ , où  $\omega_L$  désigne la partie singulière de  $W_L$ . On en déduit la dimension gravitationnelle des corrélateurs  $[\omega_L] = L[\omega] + [\omega_0]$ . Le terme initial  $W_0$  est donné par

$$W_0(x, x') = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} \frac{1}{x' - X} \right\rangle = \frac{W(x) - W(x')}{x' - x}, \quad \omega_0(\xi, \xi') = \frac{\omega(\xi) - \omega(\xi')}{\xi' - \xi}. \quad (\text{IV-67})$$

10. Cette relation s'obtient à partir de l'équation de boucle IV-15 en posant  $G = \mathbb{W}(x)Y_{a_1} \cdots Y_{a_L} \mathbb{W}(x')Y_{a_1} \cdots Y_{a_{L-1}}$  et en dérivant par rapport à  $Y_{a_L}$ . On somme ensuite sur l'ensemble des  $a_i$ .

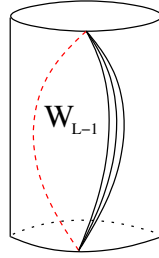


FIGURE IV.10 – Equation de boucle permettant l’obtention du cylindre en recollant deux disques.

Ainsi,  $[\omega_0] = [\omega] - [\xi]$ , ce qui permet d’établir la dimension des opérateurs de fuseaux Ord/Ord à  $L$  pattes :  $\delta_{L+1,1}$  dans la phase diluée, et  $\delta_{1,L+1}$  dans la phase dense.

### EQUATIONS DE BOUNDARY GROUND RING

On cherche maintenant à faire le lien avec la gravité de Liouville. Supposons que l’on soit dans la phase dense, la phase diluée se traitant de la même manière en renversant  $\mathbf{b} \rightarrow 1/\mathbf{b}$ . Dans la limite continue, on paramétrise les constantes cosmologiques de bord  $\xi(s) \propto \mu^{1/2\mathbf{b}^2} \cosh \pi s/\mathbf{b}$ , et les corrélateurs matriciels sont proportionnels à des fonctions à deux points sur le bord dont l’impulsion dépend de la dimension de l’opérateur de bord,

$$\omega_L(\xi, \xi') = d(\beta_L|s, s'), \quad \beta_L = \frac{Q}{2} - |P_{1,L+1}|. \quad (\text{IV-68})$$

Prenons la discontinuité de l’équation de récurrence sur la coupure en utilisant IV-112, avec la paramétrisation  $\xi(s)$  on obtient l’équation

$$d(\beta_L|s + i\mathbf{b}, s') - d(\beta_L|s - i\mathbf{b}, s') \propto \sqrt{\mu} \sinh(\pi \mathbf{b} s) d(\beta_{L-1}|s, s') \quad (\text{IV-69})$$

qui n’est autre que la relation I-46 obtenue en théorie de Liouville. Ceci confirme notre identification du corrélateur matriciel avec la fonction à deux points de la gravité de Liouville. Notons que ces relations peuvent être résolues afin d’obtenir l’expression des corrélateurs en fonction des constantes cosmologiques [Kos04b].

## 3.2 Opérateurs fuseaux dans le bulk

Il est possible d’obtenir aisément la dimension des opérateurs de fuseaux dans le *bulk* ([DK88]) grâce à l’astuce suivante. Autorisons-nous une brève excursion topologique sur le cylindre, et étudions le corrélateur connexe

$$W_L^{\text{cyl}}(x, x') = \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} \mathbb{S}_L \text{tr} \frac{1}{x' - X} \mathbb{S}_L^\dagger \right\rangle_c. \quad (\text{IV-70})$$

FIGURE IV.11 – Poids des vertex pour le bord DJS.

Utilisant l'équation de boucle IV-15, il est possible d'écrire l'équation suivante ( $L > 0$ )

$$W_L^{\text{cyl}}(x, x') = \oint_{[a,b]} \frac{dy}{2i\pi} \frac{W_{L-1}(x, x') + W_{L-1}(y, -y) - W_{L-1}(x, -y) - W_{L-1}(y, x')}{(y-x)(-y-x')} \quad (\text{IV-71})$$

qui correspond à couper le long d'une ligne ouverte, obtenant ainsi à nouveau un disque (figure IV.10). Si l'on fait tendre la longueur des bords du cylindre vers zéro ( $x, x' \rightarrow \infty$ ), les opérateurs de fuseaux deviennent des opérateurs de *bulk* insérés sur une sphère. Au premier ordre, nous obtenons

$$W_L^{\text{cyl}}(x, x') \sim \frac{1}{xx'} \oint_{[a,b]} \frac{dy}{2i\pi} W_{L-1}(y, -y). \quad (\text{IV-72})$$

Dans la limite continue  $y = \epsilon\zeta$ , la partie polynomiale ne contribue pas à l'intégrale de contour, et l'on trouve finalement l'expression du corrélateur gravitationnel de deux opérateurs fuseaux de *bulk*,

$$D(\alpha_L) = \oint_{]-\infty, -M]} \frac{d\zeta}{2i\pi} \omega_{L-1}(\zeta, -\zeta). \quad (\text{IV-73})$$

On en déduit la dimension gravitationnelle de ce corrélateur,  $[D(\alpha_L)] = [\omega_{L-1}] + [\zeta] = L[\omega]$ , d'où la dimension des opérateurs à  $L$  pattes  $\delta_{L/2,0}$  dans la phase diluée, et  $\delta_{0,L/2}$  dans la phase dense.

## 4 Bords JS et DJS

Après maints préliminaires, nous voici enfin sur le seuil de la partie centrale de cette thèse : l'étude des conditions de bord JS et DJS par le modèle matriciel. Dans cette section, nous nous focaliserons sur l'étude des conditions de bord DJS, plus riche en phénomènes critiques de surface [BHK10]. En outre, les conditions de bord JS peuvent être vues comme une limite particulière des conditions DJS, et nous expliquerons comment retrouver les résultats de l'article [BH09] concernant les opérateurs Ord/JS dans la phase dense. Suivant la même idée, plutôt que de résumer l'étude des opérateurs JS/JS [Bou09], nous présenterons ici l'étude des opérateurs DJS/DJS dans le secteur des "boucles fermées" ( $L = 0$ ).

### 4.1 Définition des bords JS et DJS

Concentrons nous sur les opérateurs de bord Ord/DJS. La première étape consiste à définir l'opérateur matriciel qui crée les conditions de bord DJS, ainsi que les corrélateurs dont on prendra ensuite la limite continue.

### OPÉRATEUR MATRICIEL DE CRÉATION DE BORD

Soit  $I$  un sous-ensemble d'entiers de  $\{1, \dots, n\}$ , nous noterons  $\bar{I}$  son complémentaire, et les cardinaux des deux sous-ensembles seront notés respectivement  $n_1^{(I)}$  pour  $I$  et  $n_2^{(I)}$  pour  $\bar{I}$ . L'opérateur matriciel qui crée la condition de bord DJS de fugacité  $m_{1,2}^{(I)}$  pour les boucles de poids  $n_{1,2}^{(I)}$  est le suivant :

$$\mathbb{H}_I(y_I | m_1^{(I)}, m_2^{(I)}) = \frac{1}{y_I - X - m_1^{(I)} Y_I^2 - m_2^{(I)} Y_{\bar{I}}^2}, \quad Y_I^2 = \sum_{a \in I} Y_a^2. \quad (\text{IV-74})$$

Dans la suite de cette section, nous oublierons l'indice  $I$ , sachant toutefois qu'il sera primordial lors de l'étude des opérateurs de bords DJS/DJS. Le point  $m_1 = m_2 = 0$  décrit naturellement des conditions de bord Ord. On peut donc interpréter les paramètres  $m_{1,2}$  comme une perturbation de ce bord par des opérateurs qui introduisent les boucles de type 1, 2.

Le développement  $y \rightarrow \infty$  permet d'obtenir le poids des vertex de bords (figure IV.11). On associe un poids  $1/y$  à chaque élément du bord, ainsi qu'un poids  $m_{1,2}$  chaque fois qu'une boucle de type 1, 2 rebondit sur le bord. Dans le cas isotrope, obtenu en posant  $m_1 = m_2 = m$ , l'opérateur introduit en réalité des boucles de poids  $n$  avec une fugacité  $m$ . Cette ligne est donc équivalente à celle obtenue en posant  $n_1 = n, n_2 = 0$  et  $m_1 = m$ . Cette double description de la ligne isotrope nous sera utile dans la limite continue.

Dans la phase dense, les bords de type JS correspondent à la limite  $m_2 = 0$  et  $y, m_1 \rightarrow \infty$  avec  $y/m = y'$  fixé. En effet, cette limite fait disparaître les propagateurs de matrice  $X$  sur le bord, et il reste uniquement

$$\mathbb{H}_I^{(JS)}(y') = \frac{1}{y' - Y_I^2}. \quad (\text{IV-75})$$

Cet opérateur crée un bord sur lequel se collent des boucles de poids  $n_1^{(i)}$  sur chaque arête.

### OPÉRATEUR DE FUSEAU

Deux types d'opérateurs fuseaux peuvent être introduits ici, selon l'ensemble d'indices  $I$  ou  $\bar{I}$  considérés. Ces deux types d'opérateurs font référence aux deux types de "blobs" apparaissant dans l'étude par la matrice de transfert. Ils sont construits à partir d'un produit de matrices  $Y_a$ ,

$$\mathbb{S}_L^{(1)} = \sum_{\substack{a_i \neq a_j \\ a_i \in I}} Y_{a_1} \cdots Y_{a_L}, \quad \mathbb{S}_L^{(2)} = \sum_{\substack{a_i \neq a_j \\ a_i \in \bar{I}}} Y_{a_1} \cdots Y_{a_L}. \quad (\text{IV-76})$$

L'opérateur  $\mathbb{S}_L^{(i)}$  crée  $L$  lignes ouvertes, la ligne la plus proche du bord DJS générant un facteur  $m_i$  chaque fois qu'elle touche le bord. Le poids de ces lignes est  $n_i$ , mais ce facteur n'est pas déterminant dans la limite continue car elles sont en nombre fini.

FIGURE IV.12 – Interprétation combinatoire de la relation IV-79.

### CORRÉLATEURS ORD/DJS

Avec ces définitions, il est possible de construire les corrélateurs Ord/DJS

$$D_L^{(i)}(x, y|m_1, m_2) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr } \mathbb{W}(x) \mathbb{S}_L^{(i)} \mathbb{H}(y|m_1, m_2) \mathbb{S}_L^{(i)\dagger} \right\rangle, \quad \mathbb{W}(x) = \frac{1}{x - X}. \quad (\text{IV-77})$$

où  $\mathbb{W}$  est l'opérateur qui crée le bord Ord. Pour  $L = 0$ , nous noterons simplement

$$D_0(x, y|m_1, m_2) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr } \mathbb{W}(x) \mathbb{H}(y|m_1, m_2) \right\rangle. \quad (\text{IV-78})$$

Les corrélateurs  $D_L$  satisfont la même relation de récurrence que les  $W_L$ ,  $D_{L+1}^{(i)} = n_i W * D_L^{(i)}$  pour  $L \geq 1$ , ce qui consiste de nouveau à retirer une ligne ouverte. Celle-ci peut être étendue à  $L = 0$  en posant ([BHK10])

$$D_0^{(i)} = \frac{D_0}{1 - m_i D_0} \quad (\text{IV-79})$$

Cette relation possède une interprétation combinatoire si on la développe en série. On voit alors (figure IV.12) que  $D_0^{(1,2)}$  correspond à un ensemble de disques  $D_0$  collés par une arête de fugacité  $m_{1,2}$ , cette arête pouvant être vue comme une boucle microscopique de type 1, 2. Lorsque  $m_1 > m_2$ , les boucles  $n_1$  prolifèrent et la quantité pertinente est  $D_0^{(1)}$ , si au contraire  $m_1 < m_2$ , il faut s'intéresser à  $D_0^{(2)}$ . Introduisant le paramètre d'anisotropie  $\Delta = m_1 - m_2$ , nos deux corrélateurs sont reliés par

$$D_0^{(1)} = \frac{D_0^{(2)}}{1 - \Delta D_0^{(2)}}, \quad D_0^{(2)} = \frac{D_0^{(1)}}{1 + \Delta D_0^{(1)}}. \quad (\text{IV-80})$$

Dans la limite JS, reprenant les notations de [Kos07a, BH09], on retrouve  $D_0 = D_0^{(2)} = m^{-1} D_0^{(\perp)}$  et  $D_0^{(1)} = m^{-1} D_0^{(\parallel)}$ .

### DIMENSION DES CORRÉLATEURS

Dans la limite continue, la relation de récurrence sur les corrélateurs matriciels induit une relation sur les dimensions des fonctions de corrélation de la théorie de Liouville  $[d_{L+1}^{(i)}] = [\omega] + [d_L^{(i)}]$  où  $d_L^{(i)}$  désigne la partie critique du corrélateur  $D_L^{(i)}$ . Cette relation se transmet à la charge de la fonction à deux points de la gravité de Liouville, qui est reliée via les relations de KPZ à la dimension nue des opérateurs *bcc*. Ainsi, si pour  $L = 0$  l'opérateur *bcc* a pour dimension  $\delta_{r,s}$ , l'opérateur à  $L$  lignes ouvertes aura la dimension  $\delta_{r+L,s}$  dans la phase diluée et  $\delta_{r,s-L}$  dans la phase dense.

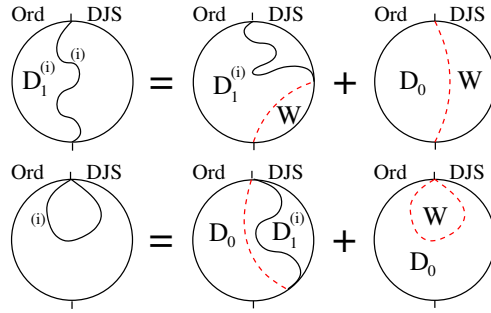


FIGURE IV.13 – Equations de boucles pour les corrélateurs Ord/DJS.

Il existe une interprétation simple en théorie conforme pour la dimension de ces opérateurs de fuseaux. Supposons donc que l'opérateur *bcc* Ord/CB inséré entre des conditions de bord Ord et quelconques (CB) soit de dimension  $\delta_{r,s}$ . L'opérateur fuseau Ord/Ord ayant  $L$  pattes est un opérateur dégénéré au niveau  $L + 2$ , son OPE avec l'opérateur Ord/CB est donc tronqué. Parmi les modules présents, on choisit l'opérateur de plus grande dimension :  $\delta_{r+L,s}$  dans la phase diluée et  $\delta_{r,s-L}$  dans la phase dense.

## 4.2 Opérateurs de bord Ord/DJS

On se concentre maintenant sur la détermination de l'opérateur *bcc* Ord/DJS en l'absence de lignes ouvertes. Il faut pour cela dériver les équations de boucle couplées satisfaites par les corrélateurs  $D_0$  et  $D_1^{(i)}$ . La dérivation de ces équations est légèrement technique [BHK10], et par ailleurs non essentielle à notre propos. Elle se fait à partir des équations IV-12 et IV-15 qui permettent d'obtenir les relations représentées schématiquement sur la figure IV.13. Le produit  $*$  peut ensuite être éliminé en utilisant IV-110, et l'on aboutit à une relation quadratique similaire à celle obtenue pour la résolvante critique (IV-46),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(i)}(x, y) \mathcal{B}^{(i)}(-x, y) &= c_0(y|m_1, m_2) + c_1(y|m_1, m_2)x + c_2(m_1, m_2)x^2 \\ &+ (-1)^i(m_1 - m_2) [\omega(x) + n_i\omega(-x)] \end{aligned} \quad (\text{IV-81})$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(i)}(x) &= m_i D_0(x) - 1 \\ \mathcal{B}^{(i)}(x) &= -(-1)^i(m_1 - m_2) \left( m_i D_1^{(i)}(x) + n_i W(x) \right) - m_{3-i} (W(-x) - V'(-x) + H(y)) - x - y \end{aligned} \quad (\text{IV-82})$$

L'expression des coefficients  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  ne sera pas utile dans notre discussion, seule leur dépendance en  $y$  nous importe, on peut cependant la trouver dans [BHK10]. Remarquons que les équations IV-81 portent uniquement sur la constante cosmologique  $x$ , elles dépendent de fonctions inconnues de la variable  $y$  :  $H(y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr } \mathbb{H}(y) \rangle$  et  $H_1(y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr } X \mathbb{H}(y) \rangle$ . Ces quantités sont des disques de constante cosmologique de bord  $y$ , avec des conditions de bord de type DJS ; elles jouent un rôle similaire au terme  $W_1(\kappa, T)$  de l'équation IV-46.



## LIMITE CONTINUE

Prenons maintenant la limite continue avec un *bulk* et un bord Ord critiques, laissant dans un premier temps le bord DJS fini. Pour cela, on pose de nouveau  $x = \epsilon\xi$ ,  $\epsilon^{2g}\mu = \kappa - \kappa_c$ , et la résolvante s'écrit  $W(x) = W_{\text{reg}}(x) + \epsilon^g\omega(\xi)$ . Les fonctions  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  correspondent aux parties critiques des corrélateurs matriciels  $D_0^{(i)}$  et  $D_1^{(i)}$ . Dans la limite continue on leur attribue une dimension d'échelle  $\alpha[\xi]$  et  $\beta[\xi]$  :  $\mathcal{A}(x) = \epsilon^\alpha\mathcal{A}(\xi)$ ,  $\mathcal{B}(x) = \epsilon^\beta\mathcal{B}(\xi)$ . L'équation précédente s'écrit alors

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha_i+\beta_i}\mathcal{A}^{(i)}(\xi)\mathcal{B}^{(i)}(-\xi) &= c_0(y|m_1, m_2) + \epsilon c_1(y|m_1, m_2)\xi + \epsilon^2 c_2(m_1, m_2)\xi^2 \\ &+ \epsilon^g(-1)^i(m_1 - m_2) [\omega(\xi) + n_i\omega(-\xi)]. \end{aligned} \quad (\text{IV-83})$$

On ne peut parler de comportement critique des corrélateurs que si le terme dominant du membre de droite est donné par  $\omega(\xi) + n_1\omega(-\xi)$ . Il faut donc éliminer les termes d'ordre supérieur à  $O(\epsilon^g)$ , et identifier  $\alpha + \beta = g$ . Ainsi, dans la phase dense,  $0 < g < 1$ , et seul le coefficient  $c_0$  doit s'éliminer, tandis que dans la phase diluée ( $1 < g < 2$ ), il faut aussi imposer  $c_1 = 0$  pour avoir une condition de bord conforme.

### 4.2.1 Branches anisotropes

Concentrons-nous tout d'abord sur l'étude des branches AS du diagramme de phases. Dans la région  $m_1 > m_2$  où les boucles de poids  $n_1$  prolifèrent, c'est le corrélateur  $D_0^{(1)}$  qui est critique, on va donc étudier l'équation portant sur  $\mathcal{A}^{(1)}$ .

## PHASE DENSE

Rappelons que lorsque le *bulk* et le bord DJS sont critiques, les parties singulières des corrélateurs doivent être algébriques en  $\xi$ , ce qui impose  $c_0 = 0$ . La condition  $c_0 = 0$  détermine donc la valeur critique de la constante cosmologique du bord DJS,  $y_c$ . Le diagramme de phase est ici particulièrement simple puisqu'aucune condition n'est imposée sur les paramètres  $(m_1, m_2)$ . Ainsi, la région  $m_1 > m_2$  correspond à une prolifération de boucles 1 sur le bord,  $m_1 < m_2$  à une prolifération des boucles 2, et la ligne isotrope à des boucles de poids  $n$ .

Pour l'étude de la première région, il est donc possible de se ramener aux conditions de bord JS [BH09] en prenant  $m_2 = 0$ ,  $y, m_1 \rightarrow \infty$ ,  $y' = y/m_1$ . Dans ce cas,  $\mathcal{A}^{(1)}$  est la partie critique du corrélateur  $D_0$ ,  $\mathcal{B}^{(1)}$  celle de  $D_1^{(1)}$  et l'équation critique se simplifie

$$d_0(\xi, y')d_1^{(1)}(-\xi, y') + \omega(\xi) + n_1\omega(-\xi) = \epsilon^{-g}(y' - y'_c) \quad (\text{IV-84})$$

où  $y'_c = (n_1 + 1)W(0)$  désigne la valeur critique du paramètre de bord. On en déduit la constante cosmologique renormalisée  $\epsilon^g\zeta = y' - y'_c$  pour le bord DJS, de dimension  $[\zeta] = g[\xi] = 1$  donc correspondant à une action de bord de type "usuel" ( $\mu_B$ ). La dimension des opérateurs peut être obtenue dans la limite

algébrique  $\mu = 0$  et  $\zeta = 0$  : on a alors  $\omega(\xi) \propto \xi^g$ ,  $d_0 \propto \xi^\alpha$ ,  $d_1^{(1)} \propto \xi^\beta$ . L'équation précédente impose la condition  $n_1 = \sin \pi\beta / \sin \pi\alpha$  ce qui permet de déterminer les dimensions  $\alpha$  et  $\beta$ . Utilisant la paramétrisation  $n_1 = k(r)$ , on en déduit la dimension  $\delta_{r,r}$  pour l'opérateur de bord Ord/JS, ce qui confirme les résultats obtenus dans [JS08b].

Mais l'équation IV-84 peut aussi être résolue explicitement par transformée de Fourier, en suivant la méthode développée dans [KK92] pour une équation similaire. Si l'on pose

$$\xi(\tau) = M \cosh \tau, \quad \omega(\xi) \propto M^g \cosh g\tau, \quad \zeta(\sigma) \propto M^g \cosh g\sigma \quad (\text{IV-85})$$

on tombe alors sur une fonction double sinus, ce qui est justement l'expression du corrélateur de la théorie de Liouville pour deux opérateurs de bord [FZZ00]. Ces opérateurs sont insérés entre des bords de constante cosmologique  $\xi$  et  $\zeta$ , leur charge est reliée à la dimension de l'opérateur nu  $\delta_{r,r}$ .

### PHASE DILUÉE

Concentrons-nous maintenant sur la phase diluée. Les conditions de criticalité  $c_0 = 0$  et  $c_1 = 0$  permettent non seulement d'assigner une valeur critique à la constante cosmologique, mais impose aussi une relation entre les fugacités. Cette dernière correspond à la branche AS du diagramme de phase (figure IV.14). Malheureusement, l'expression de cette courbe est compliquée car elle fait intervenir la fonction inconnue  $H(y)$ . Il existe toutefois deux points spécifiques pour lesquels cette expression se simplifie. Le premier est le point spécial  $(m_S^{(c)}, m_S^{(c)})$  de la ligne isotrope où les deux branches se rencontrent. Le second est situé à l'intersection de la branche  $AS_1$  avec l'axe  $m_2 = 0$

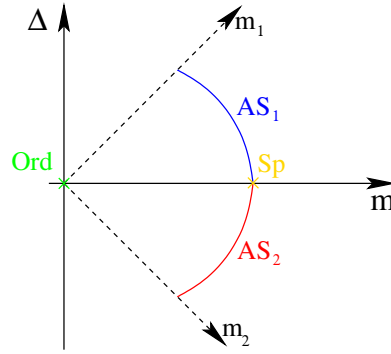
$$(m_1, m_2) = \left( \frac{1-n}{1-n_1} m_S^{(c)}, 0 \right), \quad m_S^{(c)} = \frac{\sqrt{(6+n)(2-n)}}{1-n}. \quad (\text{IV-86})$$

Le diagramme de phases décrit ici est similaire à celui obtenu par l'étude sur le réseau plat III.8, on note cependant une différence majeure : l'étude à proximité du point spécial montre en effet l'absence de *cusps*, ce qui peut être dû à un effet de l'habillage par la gravité.

Afin de déterminer la dimension du paramètre d'anisotropie renormalisé  $\Delta_r$ , il faut étudier la perturbation à proximité de la ligne isotrope. Sur cette ligne, c'est le coefficient  $c_2$  qui contribue au membre de droite de l'équation IV-83, comme nous le verrons à la section 4.2.2. Afin que la perturbation anisotrope soit du même ordre que ce terme, il faut poser  $\Delta_r = \epsilon^{2-g}\Delta$ , i.e.  $[\Delta_r] = (2-g)/g$ . On en déduit la dimension de l'opérateur qui perturbe dans la direction anisotrope sur le réseau plat :  $\delta_{3,3}$ .

Par analogie avec la phase dense, on peut supposer que la perturbation du coefficient  $c_0$  autour de sa valeur critique  $c_0 = 0$  correspond à une constante cosmologique non nulle pour le bord DJS. Malheureusement, il n'est pas possible de déterminer la dépendance de  $c_0$  en  $y$  à cause de la fonction inconnue  $H(y)$ <sup>11</sup>.

11. Ce problème est similaire à la détermination de la dimension du bord Ord dans la phase diluée, rendue difficile par la présence du coefficient  $W_1(\kappa)$

FIGURE IV.14 – Diagramme de phase du bord pour le modèle  $O(n)$  matriciel.

Ce coefficient peut donc s'identifier soit à la constante cosmologique  $\zeta$ , soit à la partie critique du corrélateur  $h(\zeta)$ , et nous noterons simplement ici  $c_0 = \epsilon^g \Delta \mu_B$ .<sup>12</sup> La perturbation du coefficient  $c_1$  s'interprète comme une température de bord  $t_B$  : la dimension  $[t_B] = (g - 1)/g$  de ce couplage correspond à l'opérateur thermique  $\delta_{1,3}$ . La relation non triviale entre les couplages nus  $(y, \Delta, m)$  et renormalisés  $(\mu_B, \Delta_r, t_B)$  est caractéristique des limites d'échelle des modèles de matrices [BZ09].

Au voisinage d'un point sur la ligne anisotrope spéciale  $AS_1$ ,  $\Delta = m_1 - m_2$  est fini, et l'on prend la limite continue suivante :

$$\epsilon \xi = x, \quad c_0 = \epsilon^g \Delta \mu_B, \quad c_1 = -\epsilon^{g-1} \Delta t_B. \quad (\text{IV-87})$$

Dans cette limite, les fonctions  $\mathcal{A}^{(1)}$  et  $\mathcal{B}^{(1)}$  se réduisent à  $\mathcal{A}^{(1)} = \epsilon^\alpha m_1 d_0^{(2)}$  et  $\mathcal{B}^{(1)} = \epsilon^\beta \frac{\Delta}{m_1} d_1^{(1)}$  où  $d_0^{(2)}$  et  $d_1^{(1)}$  sont respectivement les parties critiques des corrélateurs  $D_0^{(2)}$  et  $D_1^{(1)}$ . On trouve alors l'équation de boucle suivante

$$d_0^{(2)}(\xi, \zeta) d_1^{(1)}(-\xi, \zeta) + \omega(\xi) + n_1 \omega(-\xi) = \mu_B - t_B \xi \quad (\text{IV-88})$$

ainsi que la condition  $\alpha + \beta = g$ . La dimension de l'opérateur  $\text{Ord}/AS_1$  s'obtient dans la limite algébrique  $\mu = 0, \mu_B = 0$  de la même manière que dans la phase dense. Le résultat trouvé confirme celui obtenu par J. Dubail, J. Jacobsen et H. Saleur [DJS10]. Il est aussi possible de résoudre l'équation pour  $t_B = 0$ , et l'on retrouve la fonction double sinus caractéristique de la fonction à deux points de bord gravitationnelle.

### SUR LA LIGNE CRITIQUE $\kappa_I(T)$

Dans l'équation IV-88, le comportement du *bulk* est contenu dans la résolvante  $\omega(\xi, t)$  IV-62. L'équation de boucle est donc valable pour n'importe quelle température de *bulk*  $t$  et de bord  $t_B$ , et l'on peut suivre l'évolution des conditions de bord sous les *flows* thermiques.<sup>13</sup> En particulier, on retrouve un résultat obtenu pour certains modèles minimaux [FGSC09] concernant l'évolution des conditions de bord de la

12. La présence du facteur  $\Delta$  permet d'éliminer celui qui apparaît dans la relation de proportionnalité entre  $\mathcal{B}^{(i)}$  et la partie singulière du corrélateur  $D_1^{(i)}$ .

13. On n'est donc plus ici dans le cas évoqué au chapitre II du couplage d'une théorie conforme à la gravité.

phase diluée vers la phase dense,

$$\text{dilute} : \delta_{r,s} \quad \Rightarrow \quad \text{dense} : \delta_{s-1,r} \quad (\text{IV-89})$$

On reviendra sur cette évolution au chapitre suivant. Sous les *flows* de bord, on retrouve les résultats exposés au chapitre précédent (section 3.2.2) concernant la stabilité des transitions Ord, Sp et AS.

L'équation IV-88 peut être résolue dans la limite  $\mu = \mu_B = 0$  [BHK10]. Cette solution s'apparente à la fonction double sinus, et ses différents régimes asymptotiques reproduisent le comportement des conditions de bord DJS sous les *flows* thermiques. En particulier, dans la limite  $t_B \rightarrow \pm\infty$ , on retrouve le phénomène décrit dans [DJS10] : une boucle se colle contre le bord, et  $d_0^{(2)}$  se comporte comme la partie critique de  $D_1^{(1)}$  avec des conditions de bord Ord/Ord, tandis que  $d_0^{(1)}$  se comporte comme  $D_0$  avec toujours des conditions Ord/Ord. Le corrélateur matriciel pour  $\mu = \mu_B = 0$  correspond à la fonction à deux points sur le bord d'une théorie décrite par l'action suivante,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_L(\mu = 0) + \mathcal{S}_M + \mathcal{S}_{\text{ghost}} + t \int_{\Sigma} d^2x V_{1,3}^{(M)} e^{2\alpha_{1,3}\phi} + \xi \int_{\partial\Sigma^-} dx B_{1,1}^{(M)} e^{b\phi} + t_B \int_{\partial\Sigma^+} dx B_{1,3}^{(M)} e^{\beta_{1,3}\phi}. \quad (\text{IV-90})$$

Cette action possède une interaction non triviale entre le champ de matière et le champ de Liouville  $\phi$ . Il serait évidemment très intéressant de pouvoir comparer le résultat matriciel à un calcul gravitationnel. Malheureusement, à notre connaissance, on ne dispose à l'heure actuelle d'aucune information sur les corrélateurs d'une telle théorie.

#### 4.2.2 Ligne isotrope

Sur la ligne isotrope, les deux équations IV-81 pour  $i = 1, 2$  sont identiques, et l'on peut les résoudre pour  $D_0$ ,

$$\mathcal{A}(x, y) = -\frac{c_0(y|m) + c_1(m)x + c_2(m)x^2}{m(W(x) - V'(x) + H(y)) + y - x} = \frac{c_0(y|m) + c_1(m)x + c_2(m)x^2}{d_0(y|m) + d_1(m)x + d_2(m)x^2 + m\omega(x)}. \quad (\text{IV-91})$$

On montre qu'au point spécial, les quatre coefficients  $c_0, c_1, d_0, d_1$  s'annulent, mais n'imposent que deux conditions pour les paramètres  $(y, m)$  qui permettent de trouver la valeur critique de la constante cosmologique du bord DJS et la fugacité au point spécial  $m = m_S^{(c)}$ . La dimension de  $\mathcal{A}$  permet de déterminer l'opérateur Ord/Sp :  $\delta_{1,2}$ .

Rappelons que la ligne isotrope peut être vue comme un cas particulier de conditions de bord DJS, avec  $n_1 = n$ . Dans ce cas, les corrélateurs ne dépendent plus de  $m_2$ , et l'on peut poser  $m_2 = 0$ . Les équations IV-81 permettent alors de déterminer

$$\mathcal{B}^{(1)}(x, y) = \frac{y - x - m(H(y) - W(x) - nW(-x))}{mD_0(x, y) - 1}, \quad (\text{IV-92})$$

et la condition de bord Sp s'identifie à la branche  $AS_1$ . Suivant les remarques faites précédemment, on en déduit que l'opérateur qui perturbe le point spécial dans la direction anisotrope n'est autre que  $\delta_{3,3}$ , et l'opérateur thermique de bord  $\delta_{1,3}$  est relié à la perturbation dans la direction isotrope  $m$ .

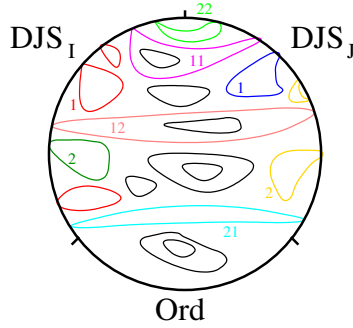


FIGURE IV.15 – Disque avec bord DJS-DJS-Ord.

### 4.3 Opérateur DJS/DJS dans la phase diluée

On s'intéresse maintenant aux opérateurs de bord DJS/DJS dans la phase diluée. Cette étude est similaire à celle des opérateurs JS/JS effectuée dans la phase dense [Bou09]. En particulier, on considère de nouveau des disques possédant trois bords : Ord/DJS/DJS. La présence du bord Ord est nécessaire afin d'utiliser les équations de boucle IV-12 et IV-15 puisque retirer une boucle fait apparaître un bord Ord. Comme sur l'anneau (figures III.6 et III.7), il faut distinguer sur ces disques deux secteurs : les secteurs de **lignes ouvertes** et de **boucles fermées**. Dans le secteur de "lignes ouvertes", on autorise l'insertion d'opérateurs fuseaux entre les deux bords DJS. Ces lignes ouvertes ont pour conséquence d'empêcher les boucles de toucher les deux bords DJS simultanément. Dans la limite critique, ce problème ne possède que trois paramètres continus correspondant aux poids des boucles touchant soit le premier bord DJS, soit le second, soit aucun des deux. Cependant, nous nous concentrerons dans cette section sur le secteur des "boucles fermées" pour lequel un quatrième paramètre continu doit être introduit, en correspondance avec le poids des boucles pouvant toucher les deux bords.

#### DÉFINITION DES CORRÉLATEURS

Introduisons les notations suivantes,

$$D_{IJ}^{(0)}(x, y_I, y_J) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr } \mathbb{W}(x) \mathbb{H}_I(y_I) \mathbb{H}_J(y_J) \rangle, \quad D_{IJ}^{(E)}(x, y_I, y_J) = \frac{1}{\beta} \sum_{a \in E} \langle \text{tr } \mathbb{W}(x) Y_a \mathbb{H}_I(y_I) \mathbb{H}_J(y_J) Y_a^\dagger \rangle \quad (\text{IV-93})$$

où  $E$  est un sous-ensemble d'indices de  $\{1, \dots, n\}$ . Le corrélateur  $D_{IJ}^{(0)}$  décrit un disque Ord/DJS/DJS sans lignes ouvertes, tandis qu'une ligne a été introduite entre les deux jonctions Ord/DJS dans  $D_{IJ}^{(E)}$ . Nous aurons également besoin de nouvelles notations concernant les disques à deux bords Ord-DJS,

$$D_I^{(0)}(x, y_I) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr } \mathbb{W}(x) \mathbb{H}_I(y_I) \rangle, \quad D_I^{(E)}(x, y_I) = \frac{1}{\beta} \sum_{a \in E} \langle \text{tr } \mathbb{W}(x) Y_a \mathbb{H}_I(y_I) Y_a^\dagger \rangle \quad (\text{IV-94})$$

où l'on retrouve  $D_I^{(1)} = D_I^{(I)}$ ,  $D_I^{(2)} = D_I^{(\bar{I})}$ .

### PRÉLIMINAIRES DIMENSIONNELS

Parmi les trois opérateurs de bord insérés sur le disque Ord/DJS/DJS, deux ont déjà été déterminés précédemment. Il suffit donc de connaître la dimension gravitationnelle du corrélateur pour obtenir la dimension du troisième opérateur. Rappelons que les conditions de bord Sp ne sont qu'un cas particulier des branches AS, et supposons que les bords DJS<sub>I</sub> et DJS<sub>J</sub> se trouvent sur les branches critiques AS<sub>i</sub> et AS<sub>j</sub>. La relation entre la dimension du corrélateur et l'impulsion de Liouville  $P$  associée à l'opérateur AS<sub>i</sub>/AS<sub>j</sub> se lit

$$\mathfrak{b} \left[ d_{IJ}^{(0)} \right] = P + \frac{\mathfrak{b}}{2} \left[ \mathcal{A}_I^{(i)} \right] + \frac{\mathfrak{b}}{2} \left[ \mathcal{A}_J^{(j)} \right] - \frac{Q}{2}, \quad \left[ \mathcal{A}_I^{(i)} \right] = 1 - r_i \theta \quad (\text{IV-95})$$

ayant posé  $n_i = k(r_i)$ . La dimension du corrélateur va être obtenue grâce aux équations de boucles. Plus précisément, nous allons relier l'impulsion  $P$  au poids des boucles qui touchent les deux bords DJS.

### POIDS DES BOUCLES

Les boucles qui touchent deux bords DJS peuvent porter quatre couleurs (figure IV.15, violet-rose-cyan-vert), deux pour chaque bord. Le poids de ces boucles est relié au cardinal de l'ensemble des composantes de spins qui peuvent la former,

$$\begin{aligned} n_{11} &= \text{Card} (I \cap J), & n_{12} &= \text{Card} (I \cap \bar{J}) \\ n_{21} &= \text{Card} (\bar{I} \cap J), & n_{22} &= \text{Card} (\bar{I} \cap \bar{J}) \end{aligned} \quad (\text{IV-96})$$

Il est naturel de s'attendre à ce que les boucles de poids  $n_{ij}$  soient prédominantes lorsque les deux bords sont de type AS<sub>i</sub> et AS<sub>j</sub>.

### LIMITE CONTINUE DES ÉQUATIONS DE BOUCLE

La dérivation des équations de boucle est relativement calculatoire, elle peut être trouvée en appendice C. Après avoir introduit les parties critiques des corrélateurs  $d_{IJ}^{(0)}$  et  $d_{IJ}^{(E)}$ , on tombe sur un ensemble de deux équations relativement simples (IV-123, IV-128),

$$\begin{aligned} 0 &= d_{IJ}^{(ij)} * \mathcal{A}_J^{(j)} + \frac{n_{ij}}{n_i^{(I)}} \mathcal{B}_I^{(i)} * d_{IJ}^{(0)} \\ 0 &= m_k^{(J)} d_{IJ}^{(0)} * \left[ m_1^{(I)} \mathcal{B}_I^{(1)} - m_2^{(I)} \mathcal{B}_I^{(2)} \right] + \mathcal{A}_J^{(k)} * \left[ \sum_{ij} m_i^{(I)} m_j^{(J)} d_{IJ}^{(ij)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-97})$$

où  $d_{IJ}^{(ij)}$  est une notation condensée pour  $d_{IJ}^{(I \cap J)}, \dots$ . L'étude détaillée de la limite continue pour ces équations est aussi présentée en appendice (C). Paramétrisant les bords AS<sub>i</sub> et AS<sub>j</sub> par  $n_i^{(I)} = k(r_i)$ ,  $n_j^{(J)} = k(r_j)$ , on y montre que la dimension de l'opérateur AS<sub>i</sub>/AS<sub>j</sub> est donnée par  $\delta_{r,r}$  où  $r$  est relié au

pois des boucles exhaussées touchant les deux bords,

$$n_{ij}(r) = \frac{\sin(r_i^{(I)} + r_j^{(J)} + 1 - r) \pi\theta/2 \sin(r_i^{(I)} + r_j^{(J)} + 1 + r) \pi\theta/2}{\sin(r_i^{(I)} \pi\theta) \sin(r_j^{(J)} \pi\theta)}. \quad (\text{IV-98})$$

où  $r$  appartient à l'intervalle  $[1, 1 + 2/\theta]$ .

### BOUNDARY GROUND RING

Dans la limite continue, le corrélateur  $d_{IJ}^{(0)}$  s'identifie avec la fonction à trois points de la théorie de Liouville,

$$d_{IJ}^{(0)}(-\xi(s), \zeta_I(s_I), \zeta_J(s_J)) \propto \langle {}^s B_{\beta_I}^{s_I} B_{\beta_{IJ}}^{s_J} B_{\beta_J}^s \rangle \propto c(\beta_I, \beta_J, \beta_{IJ} | s_J, s_I, s) \quad (\text{IV-99})$$

où  $\xi(s)$ ,  $\zeta_I(s_I)$  sont les paramétrisations hyperboliques habituelles des constantes cosmologiques de bord, et les charges  $\beta_I$ ,  $\beta_J$  et  $\beta_{IJ}$  sont reliées respectivement à la dimension des opérateurs de bord  $\text{Ord/DJS}_I$ ,  $\text{Ord/DJS}_J$  et  $\text{DJS}_I/\text{DJS}_J$ . Dans le cas présent, ces charges peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Au contraire, dans le secteur des lignes ouvertes, les charges obéissent à une relation de type I-14, I-17, ce qui correspond à un pôle de la fonction à trois points dont le résidu est donné par un corrélateur de gaz de Coulomb [Bou09]. Ces deux secteurs permettent donc de tester dans différents domaines de validité l'accord entre le modèle de matrice et la gravité de Liouville. La relation entre équation de boucle et "boundary ground ring" (I-47 avec  $\mathfrak{b} \rightarrow 1/\mathfrak{b}$ ) est effectué explicitement dans l'appendice C.

### RÈGLES DE FUSION

Les opérateurs  $\text{DJS/DJS}$  considérés ci-dessus ne sont en réalité pas les plus généraux que l'on puisse définir. Il est en effet possible d'insérer entre les deux bords  $\text{DJS}$  un élément de longueur fini  $j$  avec des conditions de bord  $\text{Ord}$  :

$$D_{IJ}^{(0,j)} = (x, y_I, y_J) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr } \mathbb{W}(x) \mathbb{H}_I(y_I) X^j \mathbb{H}_J(y_J) \rangle. \quad (\text{IV-100})$$

Dans la limite continue, ce bord  $\text{Ord}$  devient microscopique, mais il modifie la dimension de l'opérateur  $\text{AS/AS}$  en  $\delta_{r,r+2j}$ . On remarque que ces opérateurs matriciels interviennent naturellement dans le développement suivant

$$\mathbb{H}_I \mathbb{W}(x) \mathbb{H}_J = \sum_{j=0}^{\infty} x^{-j-1} \mathbb{H}_I X^j \mathbb{H}_J \quad (\text{IV-101})$$

qui décrit la limite où la longueur d'un bord ordinaire entre deux bord  $\text{DJS}$  tend vers zéro ( $x \rightarrow \infty$ ). On retrouve donc une relation de fusion entre deux opérateurs  $\text{Ord/DJS}$ ,

$$\delta_{r_i, r_i+1} \times \delta_{r_j, r_j+1} \rightarrow \delta_{r, r+2j}. \quad (\text{IV-102})$$

Cette relation est différente de celles habituellement rencontrées dans les théories rationnelles puisqu'elle fait intervenir un paramètre continu  $r$ . En revanche, dans le secteur des lignes ouvertes ce paramètre  $r$  lié au poids des boucles touchant les deux bords n'est pas présent, et les relations de fusion sont semblables à celles des modèles minimaux.

## 5 Problèmes ouverts

### 5.1 Détermination de $H(y)$

Le principal problème de notre méthode est l'impossibilité de déterminer la fonction de partition du disque avec des conditions de bord DJS dans la phase diluée,  $H(y)$ . Celle-ci est intéressante pour deux raisons. Premièrement, elle intervient dans l'équation de la branche AS pour le diagramme de phase de bord. Ensuite, elle permet de déterminer la dimension du bord DJS. Rappelons que celle-ci n'est pas prédite par la gravité de Liouville, qui restreint simplement le champ des recherches à une dimension unité, ou une dimension fractale  $g$ . Cette dimension traduit les effets de l'interaction entre les conditions de bord anisotropes et la gravité tel que la décrit le modèle de matrice.

Afin de déterminer la fonction  $H(y)$ , deux idées viennent aisément à l'esprit. La première serait d'utiliser un calcul analogue à celui de la résolvante dans la méthode du col. Il s'agirait donc d'intégrer sur la matrice  $X$  puis de diagonaliser les matrices  $Y$ . Malheureusement cette première intégration est difficile à cause du terme cubique pour le potentiel  $V$ . La seconde idée qui peut venir à l'esprit consiste à utiliser un argument indirect, similaire à celui qui permet de contourner le calcul de  $W_1$  dans la détermination de la dimension du bord Ord dans la phase diluée.

### 5.2 Anisotropie de *bulk*

Il est possible d'étudier aussi l'anisotropie dans le *bulk*. Pour cela, on introduit deux températures de *bulk*  $T_{1,2}$ , associées à deux types de boucles 1, 2. On brise alors la symétrie  $O(n)$  directement dans l'action matricielle,

$$\mathcal{S}[M, Y_a] = \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{3}M^3 + \frac{T_1}{2}Y_I^2 + \frac{T_2}{2}Y_{\bar{I}}^2 - M(Y_I^2 + Y_{\bar{I}}^2). \quad (\text{IV-103})$$

Il est commode de poser  $T_1 = T + \Delta$ ,  $T_2 = T - \Delta$ ,  $\Delta$  étant un paramètre d'anisotropie. Utilisant la méthode du point col, il n'est pas difficile de dériver l'équation de boucle suivante pour la résolvante,

$$W(x + i0) + W(x - i0) + n_1 W(-x + \Delta) + n_2 W(-x - \Delta) = V'(x). \quad (\text{IV-104})$$

A cause du paramètre  $\Delta$ , la structure analytique de la résolvante est plus complexe, elle ne se résume plus à un problème à deux coupures. S'il n'a pas encore été possible de résoudre cette équation, on peut



cependant en déduire la dimension de l'opérateur d'anisotropie :  $\delta_{0,1}$  dans la phase dense, et  $\delta_{1,0}$  dans la phase diluée, ce qui correspond à un opérateur fuseau à deux pattes. En développant la perturbation autour de  $\Delta = 0$ , on retrouve au premier ordre la fonction à un point de *bulk* sur le disque  $U(\alpha|\xi)$ .

## Conclusion

L'apport essentiel de notre travail sur le modèle  $O(n)$  a été de montrer que les phénomènes critiques de surface des modèles statistiques sur réseau plat se reproduisaient sur le réseau aléatoire. Nous avons pu ainsi mettre au point une nouvelle méthode pour étudier ces phénomènes en utilisant un modèle de matrice. Ce dernier permet de prendre explicitement la limite continue, ce qu'il est difficile de faire rigoureusement sur le réseau plat. On obtient alors des informations précieuses sur la théorie conforme : dimension des opérateurs de bord, évolution des conditions de bord sous les *flows* de *bulk* et de bord, dimension des opérateurs qui génèrent ces *flows* ; il est même possible d'y décrire la fusion d'opérateurs de bord. C'est donc une méthode très puissante, mais aussi très générale puisqu'elle peut être appliquée à de nombreux modèles statistiques, et nous verrons l'exemple des modèles ADE dans le chapitre suivant.

Mais nos travaux ont aussi un impact important sur la compréhension des relations entre modèles de matrice et gravité de Liouville. L'étude des opérateurs Ord/JS a permis de démontrer l'accord entre ces deux descriptions au niveau de la fonction à deux points de bord. Dans l'article sur les opérateurs JS/JS, nous montrons l'équivalence entre les équations de boucle et les relations de *boundary ground ring* pour la fonction à trois points de bord, dans différents secteurs. Les résultats sont plus intéressants encore dans le cadre de l'étude des opérateurs Ord/DJS. En effet, il ne s'agit plus ici d'une théorie conforme couplée à la gravité, mais d'une théorie massive, le champ de matière interagissant donc avec la métrique de façon non-triviale. Pour l'heure, il n'existe pas de résultat du côté de la gravité de Liouville concernant les corrélateurs de bord étudiés, et en particulier pour notre solution des équations de boucle en  $\mu = \mu_B = 0$ . Certains travaux portant sur les théories conformes rationnelles perturbées thermiquement ont pu être menés à terme grâce à l'intégrabilité de ce *flow* [FSZ93]. Il serait extrêmement intéressant de savoir si une telle approche peut aboutir en ajoutant un couplage à la gravité.

Pour conclure, signalons que de nombreux développements récents sur l'étude des conditions de bord des théories conformes rationnelles utilisent la notion de défaut topologique [PZ01, Pet10, KRW09]. Ceux-ci consistent à coupler deux théories conformes par un bord commun, en imposant la conservation du flux d'énergie-impulsion. Les corrélateurs ne dépendent pas du point sur le bord où sont insérés les défauts topologiques, et l'on peut fusionner allègrement ces défauts entre eux, ou avec un bord, ou même un opérateur, obtenant des relations extrêmement utiles. Ces défauts existent aussi en théorie de Liouville [Sar09], et il serait intéressant de retrouver certaines relations en utilisant le modèle de matrice.

## Annexe A Formulaire de dérivation matricielle

Dans cet appendice sont réunies diverses formules concernant la dérivation matricielle qui sont particulièrement utiles lorsque l'on utilise la technique des équations de boucle. On suppose ici que  $X$  et  $Y$  sont deux matrices indépendantes, et par convention  $(X^0)_{kl} = \delta_{kl}$ . Ces formules se démontrent facilement en décomposant les fonctions en séries, et en faisant apparaître les indices matriciels. La dernière formule est obtenue par transformée de Laplace.

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} (X^n)_{kl} = \sum_{m=0}^{n-1} (X^m)_{ki} (X^{n-1-m})_{jl}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} ((X + Y)^n)_{kl} = \sum_{m=0}^{n-1} ((X + Y)^m)_{ki} ((X + Y)^{n-1-m})_{jl}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} \left( \frac{1}{x - X} \right)_{kl} = \left( \frac{1}{x - X} \right)_{ki} \left( \frac{1}{x - X} \right)_{jl}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} \left( \frac{1}{x - Y - X^2} \right)_{kl} = \left( \frac{1}{x - Y - X^2} X \right)_{ki} \left( \frac{1}{x - Y - X^2} \right)_{jl} + \left( \frac{1}{x - Y - X^2} \right)_{ki} \left( X \frac{1}{x - Y - X^2} \right)_{jl}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} (e^{\ell X})_{kl} = \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} dx e^{\ell x} \left( \frac{1}{x - X} \right)_{ki} \left( \frac{1}{x - X} \right)_{jl}$$

## Annexe B Opérateur \*

### Définition

Tout au long de cet appendice, nous serons amenés à manipuler des fonctions ayant une unique coupure sur le plan complexe  $[a, b]$ . Supposons dans un premier temps que ces fonctions se comportent à l'infini comme  $A(x) \simeq 1/x$ . La transformée inverse de Laplace est bien définie, et l'on peut écrire

$$A(x) = \int_0^{\infty} A(\ell) e^{-\ell x} d\ell. \quad (\text{IV-105})$$

La convolution de deux fonctions dans l'espace  $\ell$  s'écrit

$$C(\ell) = \int_0^{\infty} d\ell' A(\ell + \ell') B(\ell'). \quad (\text{IV-106})$$

On définit alors le produit \* de deux fonctions comme la transformée de Laplace de cette convolution,

$$(A * B)(x) = \oint_{[a,b]} \frac{dx'}{2i\pi} \frac{A(x') - A(x)}{x - x'} B(-x'). \quad (\text{IV-107})$$

Ce produit s'étend aux fonctions ayant un pôle à l'infini d'ordre quelconque. Pour un pôle d'ordre  $n + 2$ , nous noterons

$$A(x) \underset{\infty}{\sim} (A(x))_+ + O\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n a_k x^k + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (\text{IV-108})$$

Par la suite, nous supposerons généralement que les fonctions étudiées ont un pôle d'ordre deux à l'infini ( $n = 0$ ).

## Propriétés élémentaires

Dérivons quelques propriétés élémentaires de ce produit bilinéaire mais non symétrique. Tout d'abord, l'action de tout polynôme  $P(x)$  à gauche l'annule,  $P * A = 0$ , puisque l'intégrant n'a alors ni pôle ni coupure à l'intérieur du domaine d'intégration. L'action à droite est plus complexe, par exemple

$$A * 1 = A(x) - a_0. \quad (\text{IV-109})$$

Cette formule se prouve en déformant le contour d'intégration sur la sphère, le terme  $a_0$  provient du résidu du pôle à l'infini. Cette technique de déformation du contour permet de démontrer l'identité essentielle

$$(A * B)(x) + (B * A)(-x) = A(x)B(-x) - a_0 b_0. \quad (\text{IV-110})$$

Dans le cas où  $A$  et  $B$  ont un pôle d'ordre quelconque à l'infini, il est possible d'étendre cette formule en tenant compte du résidu du pôle de  $A(x)B(-x)$ ,

$$(A * B)(x) + (B * A)(-x) = A(x)B(-x) - (A(x)B(-x))_+. \quad (\text{IV-111})$$

Remarquons que si  $B$  est analytique dans le domaine intérieur au contour encerclant  $[a, b]$ , alors l'intégrale donne la partie des puissances négatives du développement à  $x \rightarrow \infty$  du produit  $A(x)B(-x)$ .

La discontinuité du produit  $*$  en traversant le contour nous donne

$$\text{Disc } (A * B)(x) = B(-x)\text{Disc } A(x), \quad \text{Disc } A(x) = A(x + i0) - A(x - i0). \quad (\text{IV-112})$$

L'intégrale sur le cycle qui entoure le contour peut être remplacée par la discontinuité intégrée sur le contour,

$$(A * B)(x) = \int_a^b \frac{dx'}{2i\pi} \frac{B(-x')}{x' - x} \text{Disc}_{x'} A. \quad (\text{IV-113})$$

On en déduit quelques propriétés de base. Notamment, si deux fonctions ont la même discontinuité sur la coupure alors leur action à gauche est identique. De même, deux fonctions ayant les mêmes valeurs sur le contour symétrique par rapport à l'origine ont une action à droite identique. Ces deux propriétés sont résumées par le couple de relations

$$\begin{aligned} \text{Disc } A_1 = \text{Disc } A_2 &\implies A_1 * B = A_2 * B, \\ B_1(-x) = B_2(-x), \forall x \in [a, b] &\implies A * B_1 = A * B_2. \end{aligned} \quad (\text{IV-114})$$

## Limite continue

Supposons que les deux fonctions  $A$  et  $B$  n'ont aucun pôle à l'infini, et se décomposent en une partie polynomiale (ou régulière)  $A_r, B_r$  et une partie singulière  $a, b$ . Remarquons que l'on a alors  $a_+ = -A_r$  et  $a_- = A$  où  $a_+$  et  $a_-$  désignent respectivement les puissances positives et strictement négatives de  $a$  au voisinage de l'infini. Cette décomposition permet d'écrire

$$(A * B)(x) = \oint_{[a,b]} \frac{dx'}{2i\pi} \frac{a(x') - a(x)}{x - x'} b(-x') + \oint_{[a,b]} \frac{dx'}{2i\pi} \frac{A(x') - A(x)}{x - x'} B_r(-x'). \quad (\text{IV-115})$$

Le second terme du membre de droite correspond à la partie négative du produit  $A(x)B_r(-x)$ . Prenons la limite continue du premier terme en posant  $x = \epsilon\xi$ ,  $x' = \epsilon\xi'$ ,  $b = -\epsilon M$  et  $a(x) = \epsilon^\alpha a(\xi)$ ,  $b(x) = \epsilon^\beta b(\xi)$  :

$$(A * B)(x) = \epsilon^{\alpha+\beta} \oint_{[a/\epsilon, -M]} \frac{d\xi'}{2i\pi} \frac{a(\xi') - a(\xi)}{\xi - \xi'} b(-\xi') + (A(x)B_r(-x))_-. \quad (\text{IV-116})$$

On est alors tenté de remplacer le contour de l'intégrale restante par un encerclement de  $] -\infty, -M]$ . Toutefois, la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  est singulière car on rencontre le pôle à l'infini de  $ab$ , et il faut le retrancher. On peut cependant supposer que la partie singulière de la limite continue du produit  $A * B$  est donnée par

$$(A * B) = (A * B)_r + \epsilon^{\alpha+\beta} (a * b), \quad (a * b)(\xi) = \oint_{]-\infty, -M]} \frac{d\xi'}{2i\pi} \frac{a(\xi') - a(\xi)}{\xi - \xi'} b(-\xi'). \quad (\text{IV-117})$$

Cette hypothèse est confirmée par l'équivalence entre les équations de boucle dans la limite continue et les équations de *boundary ground ring*. Dans le cas algébrique,  $a(\xi) = \xi^\alpha$ ,  $b(\xi) = \xi^\beta$ , il est possible d'effectuer directement le calcul en utilisant la transformée de Laplace [Bou09]. On trouve alors

$$(a * b)(\xi) = \frac{\sin \pi\alpha}{\sin \pi(\alpha + \beta)} \xi^{\alpha+\beta}. \quad (\text{IV-118})$$

## Annexe C Opérateurs DJS/DJS

### Equation de boucle pour les opérateurs DJS/DJS

On dérive ici les équations de boucle satisfaites par les disques Ord/DJS/DJS  $D_{IJ}^{(0)}$  et  $D_{IJ}^{(E)}$ . La première équation est obtenue à partir de  $G = \mathbb{W}\mathbb{H}_I\mathbb{H}_J Y_c$  :

$$\begin{aligned} \langle \text{tr } \mathbb{W}\mathbb{H}_I\mathbb{H}_J Y_c^2 \rangle &= D_{IJ}^{(0)} * W \\ &+ \left( m_1^{(I)} \delta_{c \in I} + m_2^{(I)} \delta_{c \in \bar{I}} \right) D_I^{(0)} * \langle \text{tr } \mathbb{W}\mathbb{H}_I Y_c \mathbb{H}_J Y_c \rangle \\ &+ \left( m_1^{(J)} \delta_{c \in J} + m_2^{(J)} \delta_{c \in \bar{J}} \right) D_{IJ}^{(0)} * \langle \text{tr } \mathbb{W} Y_c \mathbb{H}_J Y_c \rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV-119})$$

Sommant sur  $c$  avec les poids correspondants  $m_j^{(J)}$ , cette équation peut se mettre sous la forme

$$0 = D_{IJ}^{(0)} * \left[ m_1^{(J)2} D_J^{(1)} + m_2^{(J)2} D_J^{(2)} + \left( m_1^{(J)} n_1^{(J)} + m_2^{(J)} n_2^{(J)} \right) W - y_J - x \right] \\ + D_I^{(0)} * \left[ m_1^{(I)} m_1^{(J)} D_{IJ}^{(I \cap J)} + m_1^{(I)} m_2^{(J)} D_{IJ}^{(I \cap \bar{J})} + m_2^{(I)} m_1^{(J)} D_{IJ}^{(\bar{I} \cap J)} + m_2^{(I)} m_2^{(J)} D_{IJ}^{(\bar{I} \cap \bar{J})} + 1 \right]. \quad (\text{IV-120})$$

Il est opportun ici de rappeler qu'à gauche des produits  $*$ , on peut sans danger retirer les parties polynomiales et remplacer les corrélateurs par leur partie critique. En revanche, à droite il faut faire preuve d'un peu plus de soin. Mais en utilisant la définition de  $\mathcal{B}$  (IV-82), on se ramène facilement à une quantité critique dans le premier terme. Quant au second terme, on va supposer qu'il est lui aussi critique et poser :  $d_{IJ}^{(0)} = D_{IJ}^{(0)} + \text{reg.}$ ,  $d_{IJ}^{(E)} = D_{IJ}^{(E)} + \text{reg.}$ . On obtient finalement

$$m_k^{(I)} d_{IJ}^{(0)} * \left[ m_1^{(J)} \mathcal{B}_J^{(1)} - m_2^{(J)} \mathcal{B}_J^{(2)} \right] + (m_1^{(J)} - m_2^{(J)}) \mathcal{A}_I^{(k)} * \left[ \sum_{i,j} m_i^{(I)} m_j^{(J)} d_{IJ}^{(ij)} \right] = 0, \quad (\text{IV-121})$$

avec la notation condensée

$$\sum_{i,j} m_i^{(I)} m_j^{(J)} d_{IJ}^{(ij)} = m_1^{(I)} m_1^{(J)} d_{IJ}^{(I \cap J)} + m_1^{(I)} m_2^{(J)} d_{IJ}^{(I \cap \bar{J})} + m_2^{(I)} m_1^{(J)} d_{IJ}^{(\bar{I} \cap J)} + m_2^{(I)} m_2^{(J)} d_{IJ}^{(\bar{I} \cap \bar{J})} \quad (\text{IV-122})$$

Une équation similaire peut être dérivée en échangeant  $I$  et  $J$ , qui s'écrit, en modifiant légèrement la normalisation  $d_{IJ}^{(E)} = \left( m_1^{(I)} - m_2^{(I)} \right) D_{IJ}^{(E)} + \text{reg.}$ ,<sup>14</sup>

$$m_k^{(J)} d_{IJ}^{(0)} * \left[ m_1^{(I)} \mathcal{B}_I^{(1)} - m_2^{(I)} \mathcal{B}_I^{(2)} \right] + \mathcal{A}_J^{(k)} * \left[ \sum_{i,j} m_i^{(I)} m_j^{(J)} d_{IJ}^{(ij)} \right] = 0. \quad (\text{IV-123})$$

La seconde équation s'obtient à partir de  $G = \mathbb{W}Y_c \mathbb{H}_I \mathbb{H}_J$ ,

$$\langle \text{tr } \mathbb{W}Y_c \mathbb{H}_I \mathbb{H}_J Y_c \rangle = W * D_{IJ}^{(0)} \\ + \left( m_1^{(I)} \delta_{c \in I} + m_2^{(I)} \delta_{c \in \bar{I}} \right) \langle \text{tr } \mathbb{W}Y_c \mathbb{H}_I Y_c \rangle * D_{IJ}^{(0)} \\ + \left( m_1^{(J)} \delta_{c \in J} + m_2^{(J)} \delta_{c \in \bar{J}} \right) \langle \text{tr } \mathbb{W}Y_c \mathbb{H}_I \mathbb{H}_J Y_c \rangle * D_J^{(0)}. \quad (\text{IV-124})$$

En prenant diverses sommes sur  $c$ , on obtient un ensemble de quatre équations pour les quantités

$$D_{IJ}^{(I \cap J)} * \left( m_1^{(J)} D_J^{(0)} - 1 \right) + \left( m_1^{(I)} D_I^{(I \cap J)} + n_{11} W \right) * D_{IJ}^{(0)} = 0 \\ D_{IJ}^{(I \cap \bar{J})} * \left( m_2^{(J)} D_J^{(0)} - 1 \right) + \left( m_1^{(I)} D_I^{(I \cap \bar{J})} + n_{12} W \right) * D_{IJ}^{(0)} = 0 \\ D_{IJ}^{(\bar{I} \cap J)} * \left( m_1^{(J)} D_J^{(0)} - 1 \right) + \left( m_2^{(I)} D_I^{(\bar{I} \cap J)} + n_{21} W \right) * D_{IJ}^{(0)} = 0 \\ D_{IJ}^{(\bar{I} \cap \bar{J})} * \left( m_2^{(J)} D_J^{(0)} - 1 \right) + \left( m_2^{(I)} D_I^{(\bar{I} \cap \bar{J})} + n_{22} W \right) * D_{IJ}^{(0)} = 0 \quad (\text{IV-125})$$

14. Cette normalisation n'a pas d'influence ici car nous nous plaçons à proximité de la ligne anisotrope AS. Au contraire, elle serait significative au voisinage de la ligne isotrope.

On utilise maintenant l'argument de [Bou09] permettant de se débarrasser des quantités  $D_I^{(\dots)}$ . Pour cela, on remarque que les corrélateurs  $D_I^{(1)}$  et  $D_I^{(I \cap J)}$  satisfont

$$D_I^{(1)} * \left[ m_1^{(I)} D_I^{(0)} - 1 \right] = n_1^{(I)} W * D_I^{(0)}, \quad D_I^{(I \cap J)} * \left[ m_1^{(I)} D_I^{(0)} - 1 \right] = n_{11} W * D_I^{(0)}. \quad (\text{IV-126})$$

Ainsi,  $D_I^{(1)}/n_1^{(I)}$  et  $D_I^{(I \cap J)}/n_{11}$  ont la même discontinuité et l'on peut les échanger à gauche de l'opérateur  $*$ . Répétant cet argument pour les trois autres corrélateurs posant problème, on aboutit à

$$\begin{aligned} d_{IJ}^{(I \cap J)} * \mathcal{A}_J^{(1)} + \frac{n_{11}}{n_1^{(I)}} \mathcal{B}_I^{(1)} * d_{IJ}^{(0)} &= 0, & d_{IJ}^{(I \cap \bar{J})} * \mathcal{A}_J^{(2)} + \frac{n_{12}}{n_1^{(I)}} \mathcal{B}_I^{(1)} * d_{IJ}^{(0)} &= 0, \\ d_{IJ}^{(\bar{I} \cap J)} * \mathcal{A}_J^{(1)} + \frac{n_{21}}{n_2^{(I)}} \mathcal{B}_I^{(2)} * d_{IJ}^{(0)} &= 0, & d_{IJ}^{(\bar{I} \cap \bar{J})} * \mathcal{A}_J^{(2)} + \frac{n_{22}}{n_2^{(I)}} \mathcal{B}_I^{(2)} * d_{IJ}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV-127})$$

Ou, de manière plus condensée,

$$d_{IJ}^{(ij)} * \mathcal{A}_J^{(j)} + \frac{n_{ij}}{n_i^{(I)}} \mathcal{B}_I^{(i)} * d_{IJ}^{(0)} = 0. \quad (\text{IV-128})$$

## Limite continue des équations de boucle

Commençons pour simplifier par nous restreindre au cas des branches  $AS_1/AS_1$ , et l'on choisit plus précisément les points de ces branches tels que  $m_2^{(I)} = m_2^{(J)} = 0$ . Les équations précédentes permettent alors d'écrire

$$\frac{d_{IJ}^{(0)} * \mathcal{B}_I^{(1)}}{\mathcal{A}_J^{(1)} * d_{IJ}^{(I \cap J)}} = \frac{n_{11}}{n_1^{(I)}} \frac{\mathcal{B}_I^{(1)} * d_{IJ}^{(0)}}{d_{IJ}^{(I \cap J)} * \mathcal{A}_J^{(1)}} = -1 \quad (\text{IV-129})$$

ainsi que la relation dimensionnelle

$$\left[ d_{IJ}^{(0)} \right] + \left[ \mathcal{B}_I^{(1)} \right] = \left[ d_{IJ}^{(I \cap J)} \right] + \left[ \mathcal{A}_J^{(1)} \right]. \quad (\text{IV-130})$$

Calculant les produits  $*$  dans la limite où les corrélateurs sont algébriques  $\mathbf{B}$ , et en utilisant les relations  $[\mathcal{A}^{(i)}] + [\mathcal{B}^{(i)}] = g$  et  $n_i = \sin \pi [\mathcal{B}^{(i)}] / \sin \pi [\mathcal{A}^{(i)}]$ , on obtient finalement

$$n_{11} = \frac{\sin \pi \left[ d_{IJ}^{(0)} \right] \sin \pi \left( \left[ d_{IJ}^{(0)} \right] + g - \left[ \mathcal{A}_I^{(1)} \right] - \left[ \mathcal{A}_J^{(1)} \right] \right)}{\sin \pi \left[ \mathcal{A}_I^{(1)} \right] \sin \pi \left[ \mathcal{A}_J^{(1)} \right]} \quad (\text{IV-131})$$

En paramétrisant  $n_1^{(I)} = k(r_1^{(I)})$ ,  $n_1^{(J)} = k(r_1^{(J)})$ , on arrive à la paramétrisation de [DJS09a]

$$n_{11}(r) = \frac{\sin \left( r_1^{(I)} + r_1^{(J)} + 1 - r \right) \pi \theta / 2 \sin \left( r_1^{(I)} + r_1^{(J)} + 1 - r \right) \pi \theta / 2}{\sin r_1^{(I)} \pi \theta \sin r_1^{(J)} \pi \theta} \quad (\text{IV-132})$$

où l'opérateur  $AS/AS$  a pour dimension  $\delta_{r,r}$ . Il faut en outre préciser l'intervalle auquel appartient  $r$ , on utilise pour cela la compatibilité avec la limite de phase dense (IV-75), où l'on obtient la condition

$r \in [1, 1 + 2/\theta]$  à partir de cas particuliers pour lesquels les équations de boucle se simplifient [Bou09]. Les autres opérateurs AS/AS se traitent de la même façon, il suffit de remplacer la paramétrisation de  $n_1$  par celle de  $n_2$ , soit

$$n_{ij}(r) = \frac{\sin(r_i^{(I)} + r_j^{(J)} + 1 - r) \pi\theta/2 \sin(r_i^{(I)} + r_j^{(J)} + 1 + r) \pi\theta/2}{\sin r_i^{(I)} \pi\theta \sin r_j^{(J)} \pi\theta}. \quad (\text{IV-133})$$

Ces résultats sont en accord avec [DJS10].

## Relation avec le *boundary ground ring*

Prenons par exemple la discontinuité de l'équation IV-128 sur la coupure,

$$\mathcal{A}_J^{(j)}(-\xi) \text{Disc}_\xi d_{IJ}^{(ij)} + \frac{n_{ij}}{n_i^{(I)}} d_{IJ}^{(0)}(-\xi) \text{Disc}_\xi \mathcal{B}_I^{(i)} = 0. \quad (\text{IV-134})$$

On note  $\beta_I$  la charge de l'opérateur inséré entre le bord Ord et  $\text{AS}_i$  à l'intérieur du corrélateur  $\mathcal{A}_I^{(i)}$ . A partir de la condition  $[\mathcal{A}^{(i)}] + [\mathcal{B}^{(i)}] = g$  sur la dimension des corrélateurs, on en déduit la charge de l'opérateur inséré entre les bords Ord et  $\text{AS}_i$  en présence du ligne ouverte pouvant toucher le bord AS, à l'intérieur du corrélateur  $\mathcal{B}^{(i)}$ ,  $\tilde{\beta}_I = Q - \beta_I - 1/2\mathfrak{b}$ . Utilisant habilement la propriété de réflexion de la fonction à trois points, et avec la paramétrisation usuelle des constantes cosmologiques, il est possible d'écrire les corrélateurs  $d_{IJ}^{(0)}$  et  $d_{IJ}^{(ij)}$  de la manière suivante :

$$d_{IJ}^{(0)}(-\xi, \zeta_I, \zeta_J) \propto c(\beta_I, \beta_J, \beta_{IJ}|s_J, s_I, s), \quad d_{IJ}^{(ij)}(-\xi, \zeta_I, \zeta_J) \propto c(\tilde{\beta}_I, \tilde{\beta}_J, \beta_{IJ}|s_J, s_I, s). \quad (\text{IV-135})$$

Ainsi, l'équation IV-134 peut se mettre sous la forme

$$d(\beta_J|s, s_J) \sin\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\partial_s\right) c(\tilde{\beta}_I, \tilde{\beta}_J, \beta_{IJ}|s_J, s_I, s) \propto c(\beta_I, \beta_J, \beta_{IJ}|s_J, s_I, s) \sin\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\partial_s\right) d(\tilde{\beta}_I, s_I, s) \quad (\text{IV-136})$$

où  $2i \sin\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\partial_s\right) f(s) = f(s + i/\mathfrak{b}) - f(s - i/\mathfrak{b})$ . Utilisant alors la propriété de réflexion des opérateurs de bord  $B_\beta = d(\beta)B_{Q-\beta}$  dans la fonction à trois points du membre de droite, cette dernière équation s'écrit

$$\sin\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\partial_s\right) c(\tilde{\beta}_I, \tilde{\beta}_J, \beta_{IJ}|s_J, s_I, s) \propto c\left(\tilde{\beta}_I + \frac{1}{2\mathfrak{b}}, \tilde{\beta}_J + \frac{1}{2\mathfrak{b}}, \beta_{IJ}|s_J, s_I, s\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{\mathfrak{b}}\partial_s\right) d(\tilde{\beta}_I, s_I, s)}{d(\tilde{\beta}_I + \frac{1}{2\mathfrak{b}}|s_I, s)} \quad (\text{IV-137})$$

On reconnaît ici la différence des relation I-47 pour des translations de signes opposés, prenant  $\mathfrak{b} \rightarrow 1/\mathfrak{b}$  et  $\beta_1 = \tilde{\beta}_I, \beta_2 = \tilde{\beta}_J + \frac{1}{2\mathfrak{b}}, \beta_3 = \beta_{IJ}$ , ainsi que  $s_1 = s_J, s_2 = s_I$  et  $s_3 = s$ .

# LES MODÈLES ADE MATRICIELS

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modèles ADE sur le réseau plat</b> . . . . .	<b>111</b>
1.1	Définition du modèle . . . . .	111
1.2	Etats de bord . . . . .	113
<b>2</b>	<b>Modèle ADE matriciel</b> . . . . .	<b>116</b>
2.1	Définition du modèle . . . . .	116
2.2	Comparaison des modèles matriciels ADE et $O(n)$ . . . . .	118
<b>3</b>	<b>Etats de bord du modèle RSOS matriciel</b> . . . . .	<b>120</b>
<b>A</b>	<b>Ising tri-critique</b> . . . . .	<b>122</b>

---



## Introduction

Les modèles ADE sont une généralisation des modèles RSOS [ABF84] introduite par V. Pasquier [Pas87b, Pas87a] dans laquelle on associe aux sites  $r$  du réseau bidimensionnel le nœud d'un graphe  $\mathcal{G}$ . Imposant certaines restrictions, telles que l'unitarité et une charge centrale  $c_M < 1$  dans la limite continue, on s'aperçoit que le graphe ne peut être que le diagramme de Dynkin d'une algèbre de Lie de type  $A$ ,  $D$  ou  $E$ . Une condition moins restrictive,  $c_M \leq 1$ , autorise également le diagramme des algèbres étendues  $\hat{A}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\hat{E}$  et  $A_\infty$ . Les modèles ADE possédant les diagrammes linéaires  $A_n$  et  $A_\infty$  coïncident avec les modèles RSOS et SOS.

La limite continue des modèles ADE est décrite par une théorie conforme minimale  $(h-1, h)$  où  $h$  est le nombre de Coxeter associé au diagramme. Les modèles introduits par V. Pasquier correspondent à la phase dense d'un modèle de boucle. Les théories conformes unitaires  $(h, h+1)$  peuvent être obtenues comme une version diluée de ces modèles, considérée pour la première fois par I. Kostov [Kos92].

Les conditions de bord des modèles ADE denses furent étudiés par H. Saleur et M. Bauer [SB89]. On distingue deux types de conditions : fixées et alternantes. Les conditions de bord fixées sont des conditions de Dirichlet pour les hauteurs des sites du bord. Les conditions de bord alternantes sont encore plus restrictives, car elles fixent non seulement les hauteurs des sites du bord, mais aussi celles de la ligne suivante. Dans ce chapitre, nous verrons comment étendre les conditions de bord alternantes à la phase diluée.

Tout comme le modèle  $O(n)$ , les modèles ADE peuvent être reformulés en un gaz de boucle. De prime abord, l'intérêt de leur étude semble donc limité, et nous verrons qu'effectivement les équations de boucles des deux modèles sont presque identiques. Ils gardent cependant trois avantages majeurs. Tout d'abord, ils sont décrits dans la limite continue par des modèles minimaux unitaires, modèles sur lesquels la majorité des résultats portant sur les conditions de bord ont été obtenus. Certains de ces résultats viendront confirmer les assertions précédentes concernant le modèle  $O(n)$ . Ensuite, nous verrons que les modèles ADE peuvent aussi éclairer certains points obscurs du modèle  $O(n)$ , tel que la paramétrisation du poids des boucles (III-13). Enfin, pour les séries D et E, il existe un mélange des états de bord qu'il semble intéressant d'étudier avec le modèle matriciel. Toutefois, cette étude étant toujours en cours, nous ne l'évoquerons pas ici.

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler la définition des modèles ADE sur le réseau plat, ainsi que des conditions de bord que l'on peut y introduire. Puis nous présenterons les modèles matriciels et expliquerons comment construire les corrélateurs décrivant les conditions de bord précédemment introduites. Nous nous restreindrons ensuite au modèle RSOS dans lequel nous détaillerons l'étude des états de bord.

Graph	$h$	exponents $h_a$
$A_n$	$n + 1$	$1, 2, \dots, n$
$D_n$	$2(n - 1)$	$1, 3, \dots, 2n - 3, n - 1$
$E_6$	12	1, 4, 5, 7, 8, 11
$E_7$	18	1, 5, 7, 9, 11, 13, 17
$E_8$	30	1, 7, 11, 3, 17, 19, 23, 29

TABLE V.1 – Valeurs du nombre et des exposants de Coxeter pour les graphes ADE.

## 1 Modèles ADE sur le réseau plat

### 1.1 Définition du modèle

On s'intéresse à un réseau triangulaire  $\tilde{\Gamma}^1$ , à chaque site  $r \in \tilde{\Gamma}$  est associé une hauteur  $a(r)$  prenant une valeur dans le diagramme de Dynkin  $\mathcal{G}$  du type  $A, D$  ou  $E$ . Le modèle dense est défini en restreignant les hauteurs de deux sites voisins du réseau ( $r \sim r'$ ) à correspondre à deux nœuds adjacents de  $\mathcal{G}$  ( $a(r) \sim a(r')$ ). Dans la phase diluée, les sites voisins sont autorisés à avoir la même hauteur.

$$\begin{aligned} \text{Dense : } r \sim r' &\implies a(r) \sim a(r') \\ \text{Diluée : } r \sim r' &\implies a(r) \sim a(r') \text{ ou } a(r) = a(r') \end{aligned}$$

### MATRICE D'ADJACENCE

On associe au diagramme  $\mathcal{G}$  sa matrice d'adjacence  $A_{ab}$  d'indices les nœuds du réseaux  $a, b \in \mathcal{G}$ , avec  $A_{ab} = 1$  si les nœuds  $a$  et  $b$  sont connectés et zéro sinon. On introduit aussi le nombre de Coxeter  $h \in \mathbb{Z}^+$ , et les exposants du même nom  $h_a \in \mathbb{Z}^+$  associés aux valeurs propres de la matrice d'adjacence (tableau V.1),

$$\beta_a = 2 \cos(\pi h_a \theta), \quad \theta = 1/h. \quad (\text{V-1})$$

La valeur propre maximale  $n = 2 \cos \pi \theta$  est appelée valeur propre de Perron-Frobenius, elle vérifie  $1 \leq n < 2$ .

### POIDS DES TRIANGLES

On numérote les diagrammes de Dynkin suivant les conventions de [Pas87b] (figure V.1). Dans le modèle dense, seules les configurations de triangles de la figure V.2 a) sont autorisées, ces triangles ont

---

1. Ce réseau est dual au réseau trivalent du modèle  $O(n)$ .

Graph	Perron-Frobenius eigenvector
$A_n$	$S_a = \sqrt{2/h} \sin(\pi a/h)$
$D_n$	$S_a = 2/\sqrt{h} \sin(\pi a/h), \forall a < n-1; S_{n-1} = S_n = 1/\sqrt{h}$
$E_6$	$S_a \in \alpha_6 \left\{ \sin \theta, \sin 2\theta, \sin 3\theta, \sin 4\theta - \frac{1}{n} \sin 3\theta, \sin 5\theta - \sin 3\theta, \frac{1}{n} \sin 3\theta \right\}$
$E_7$	$S_a \in \alpha_7 \left\{ \sin \theta, \sin 2\theta, \sin 3\theta, \sin 4\theta, \sin 5\theta - \frac{1}{n} \sin 4\theta, \sin 6\theta - \sin 4\theta, \frac{1}{n} \sin 4\theta \right\}$
$E_8$	$S_a \in \alpha_8 \left\{ \sin \theta, \sin 2\theta, \sin 3\theta, \sin 4\theta, \sin 5\theta, \sin 6\theta - \frac{1}{n} \sin 5\theta, \sin 7\theta - \sin 5\theta, \frac{1}{n} \sin 5\theta \right\}$

TABLE V.2 – Composante du vecteur de Perron-Frobenius, les coefficients  $\alpha_6, \alpha_7$  et  $\alpha_8$  assurent la normalisation  $\vec{S}^2 = 1$ .

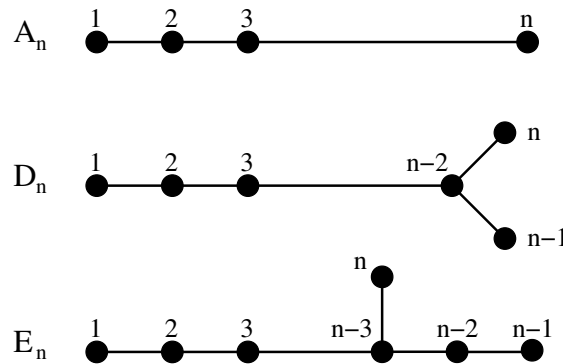


FIGURE V.1 – Numérotation des diagrammes ADE.

un poids  $(S_b/S_a)^{1/6}$ . Dans le modèle généralisé à une température quelconque  $T$ , les triangles a) ont un poids  $T^{-1} (S_b/S_a)^{1/6}$ , et les triangles b) sont aussi présents avec un poids unité. Ces poids sont réels car les composantes du vecteur de Perron-Frobenius sont strictement positives. Remarquons qu’avec ces conventions, dans la limite de haute température  $T \rightarrow \infty$ , ce sont les triangles b) qui prédominent et l’on obtient une phase ordonnée.<sup>2</sup>

### GAZ DE BOUCLES

Les murs entre différents domaines (figure V.2, en pointillés) dessinent des boucles sur le réseau hexagonal dual. Imaginons qu’une boucle entoure un domaine de hauteurs  $b$ , encerclé par des sites de hauteurs  $a$  (figure V.3). Chaque fois que la boucle tourne vers l’intérieur, on a affaire à un triangle  $abb$  et la boucle prend un poids  $T^{-1} (S_b/S_a)^{-1/6}$ . Lorsqu’elle tourne vers l’extérieur, le triangle est du type  $aab$  et de poids

2. La définition de la température est inversée par rapport à la convention habituelle pour laquelle la phase ordonnée est une phase de basse température. Ceci est dû au fait que la température est ici définie pour le gaz de boucle sur le réseau dual  $\Gamma$  et non pour le modèle de hauteur sur le réseau  $\tilde{\Gamma}$ .

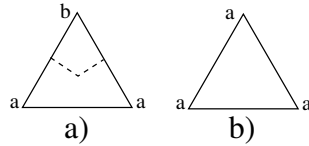


FIGURE V.2 – Poids des triangles des modèles ADE.

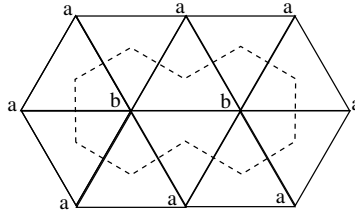


FIGURE V.3 – Une boucle de poids  $T^{-10} S_b/S_a$ .

$T^{-1} (S_b/S_a)^{1/6}$ . Ainsi, ces boucles ont un poids total  $T^{-L} (S_b/S_a)$  où  $L$  désigne la longueur de la boucle.

Imaginons que les hauteurs à l’extérieur d’une boucle soient fixées à  $a$ . Lors du calcul de la fonction de partition, il faut sommer sur les configurations de hauteur à l’intérieur du mur de domaine. Or  $S_a$  est le vecteur propre de la matrice d’adjacence de valeur propre  $n$ , il satisfait donc la relation

$$\sum_{b \sim a} \frac{S_b}{S_a} = n. \tag{V-2}$$

En répétant cette somme sur les configurations internes, on montre que la fonction de partition sur la sphère est la même que celle d’un modèle  $O(n)$  à la température  $T$ . Il y a cependant une différence notable : dans le cas des modèles ADE, la variable  $n$  ne prend qu’une quantité dénombrable de valeurs :  $\theta = 1/h$  avec  $h \in \mathbb{Z}^+$ . Ces valeurs particulières correspondent à des points spécifiques pour lesquels les théories conformes des deux points critiques deviennent rationnelles.

### COMPORTEMENT CRITIQUE

Puisque la description du gaz de boucles est la même que pour le modèle  $O(n)$ , le comportement critique des modèles ADE est similaire. Il existe donc deux températures critiques  $T_{\pm}$ ,  $T_-$  décrit la phase dense, et  $T_+$  une phase diluée. La phase dense est attractive, la phase diluée répulsive, et le modèle à haute température se renormalise vers un point fixe trivial pour lequel tous les sites ont une même hauteur.

## 1.2 Etats de bord

Dans la phase dense, il est possible d’introduire deux types de conditions de bord, **fixées**  $\text{Fix}_a$  et **alternantes**  $\text{Alt}_{\langle ab \rangle}$ , respectivement associées aux nœuds et aux liens du diagramme de Dynkin [SB89].

Celles-ci sont reliées aux conditions Ord et JS par le gaz de boucle. Il faut cependant se restreindre ici à des opérateurs appartenant à la table de Kac ( $\delta_{r,s}$  avec des indices entiers et bornés) puisque la théorie conforme est minimale. Dans la phase diluée, l'introduction des conditions de bord DJS amène à définir des conditions de bord alternantes plus générales  $\text{Alt}_a$  pour les modèles ADE.

### 1.2.1 Conditions de bord fixées

Les conditions de bords fixées  $\text{Fix}_a$  sont conformes dans les deux phases, dense et diluée. Elles consistent à imposer le poids  $a \in \mathcal{G}$  sur le bord. Sur le réseau dual, les boucles viennent toucher le bord avec une fugacité  $T^{-1}$ , et possèdent un poids  $nS_a$ . On en déduit donc une relation entre les fonctions de partition sur le disque pour les modèles  $O(n)$  et ADE :  $\mathcal{Z}_{\text{ADE}}^{(\text{Fix}_a)} = S_a \mathcal{Z}_{O(n)}^{(\text{Ord})}$ .

## MODÈLE RSOS

Pour les modèles minimaux, on peut définir les états de Cardy comme suit. On choisit tout d'abord une condition de bord spécifique, d'entropie minimale, appelée brane de Cardy, et on lui associe l'état vide  $|1, 1\rangle$ . Dans le cas du modèle RSOS, cet état correspond aux conditions  $\text{Fix}_1$ . La dimension  $\delta_{r,s}$  de l'opérateur inséré entre cette condition de bord "vide" et une condition de bord quelconque, permet de remonter à l'état  $|r, s\rangle$  associé, grâce à la dualité sur l'anneau

$$\langle 1, 1 | \tilde{q}^{\hat{L}_0 + \hat{L}_0 - c/12} | r, s \rangle = \text{tr}_{V_{r,s}} q^{L_0 - c/24} \quad (\text{V-3})$$

où  $V_{r,s}$  est le module de Verma associé à l'opérateur de bord de dimension  $\delta_{r,s}$ , et où  $q$  et  $\tilde{q}$  sont les paramètres modulaires conjugués [Car89].

Les opérateurs  $bcc$  insérés entre  $\text{Fix}_1$  et  $\text{Fix}_a$  introduisent  $L = a - 1$  parois de domaines. Ils s'identifient donc aux opérateurs fuseaux du gaz de boucle, de dimension  $\delta_{1,a}$  dans la phase dense et  $\delta_{a,1}$  dans la phase diluée. Ainsi, on associe à la condition de bord  $\text{Fix}_a$  l'état  $|1, a\rangle$  dans la phase dense, et  $|a, 1\rangle$  dans la phase diluée.

## SÉRIES $D_n, E_n$

Pour les séries  $D$  et  $E$ , les conditions de bords  $\text{Fix}_a$  ne sont plus des états purs de Cardy mais un mélange d'états. Le mélange des opérateurs de bord s'explique lorsque l'on plonge ces modèles dans le modèle RSOS [Pas87a], mais nous ne développerons pas ces considérations ici.

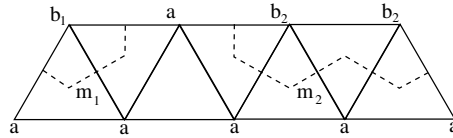


FIGURE V.4 – Conditions de bord alternées généralisées  $\text{Alt}_a$ , une fugacité  $m_{b_i}$  est associée aux hauteurs  $b_i \sim a$  de la seconde rangée.

### 1.2.2 Conditions de bord alternées

Les conditions de bord alternées de la phase dense ( $\text{Alt}_{\langle ab \rangle}$ ) fixent la hauteur des sites sur deux rangées contiguës. Des boucles de poids  $S_b/S_a$  se collent alors au bord, et la fonction de partition est celle du modèle  $O(n)$  avec des conditions de bord JS de paramètre  $k = S_b/S_a$  [JS08b]. Pour le modèle RSOS, il est possible de déterminer l'opérateur  $bcc$  entre  $\text{Fix}_a$  et  $\text{Alt}_{\langle bc \rangle}$ , il s'agit de l'opérateur de dimension  $\delta_{d,a}$  avec  $d = \inf(b, c)$ . La condition de bord  $\text{Alt}_{\langle bc \rangle}$  est donc associée à l'état de Cardy  $|d, 1 \rangle$ . On peut remarquer que les conditions de bord  $\text{Fix}_1$  et  $\text{Alt}_{\langle 12 \rangle}$  sont équivalentes : si les spins de la première rangée sont fixés à 1, ceux de la seconde ne peuvent que prendre la valeur 2. Il en est de même pour  $\text{Fix}_{h-1}$  et  $\text{Alt}_{\langle h-1, h-2 \rangle}$ . On montre aussi que les conditions  $\text{Alt}_{\langle ab \rangle}$  et  $\text{Alt}_{\langle ba \rangle}$  sont équivalentes.

### PHASE DILUÉE

S'inspirant de la généralisation JS en DJS, on définit les conditions de bord  $\text{Alt}_a(m_b)$  dans la phase diluée en contrôlant la fluctuation des hauteurs de la seconde rangée (figure V.4). Cette condition de bord dépend des fugacités associées aux hauteurs de la seconde rangée  $m_b$ , et l'on s'attend à observer une condition de bord critique lorsqu'elles vérifient certaines relations. En terme de gaz de boucles, des boucles de poids  $n_b = S_b/S_a$  ( $b \sim a$ ) rebondissent sur le bord avec la fugacité  $m_b$ , et l'on note que la somme de ces poids vaut  $n$ . Différents cas de figures devront être considérés. Si le nœud  $a$  possède deux voisins, le comportement critique de la condition de bord  $\text{Alt}_a$  est similaire à celui des conditions DJS. Le cas d'un nœud avec un seul voisin s'identifie à la ligne isotrope du diagramme de phase DJS. Enfin, le cas d'un nœud à trois voisins est le plus intéressant puisqu'il impose de briser la symétrie  $O(n)$  en trois sous-groupes.

## 2 Modèle ADE matriciel

### 2.1 Définition du modèle

Les modèles ADE matriciels sont définis à partir de matrices hermitiennes  $M_a$  associées aux nœuds  $a \in \mathcal{G}$ , et de matrices rectangulaires  $C_{ab}$ , vérifiant  $C_{ab}^\dagger = C_{ba}$ , associées aux liens  $a \sim b$  [Kos89b]. Les matrices  $M_a$  sont de taille  $N_a \times N_a$ , et les matrices rectangulaires  $C_{ab}$  de taille  $N_a \times N_b$ , la variable  $N_a$  s'exprimant à l'aide du vecteur de Perron-Frobenius  $N_a = S_a N$ . L'action matricielle est similaire à celle du modèle  $O(n)$ , on y rencontre deux types de vertex : les vertex vides  $M_a^3$  associés aux triangles  $aaa$  (figure V.2 b), et les vertex avec un mur de domaine  $M_a C_{ab} C_{ba}$ , associés aux triangles  $aab$  (figure V.2 a). De nouveau, il est préférable de travailler avec les matrices translattées  $X_a = M_a - T/2$ , et la fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z}_{\text{ADE}} = \int \prod_a dX_a \prod_{\langle ab \rangle} dC_{ab} \exp \left[ -\beta \left( \sum_a S_a \text{tr} V(X_a) - \sum_{\langle ab \rangle} \text{tr} (X_a C_{ab} C_{ba}) \right) \right] \quad (\text{V-4})$$

avec le même potentiel  $V(x)$  que pour le modèle  $O(n)$  matriciel (IV-4).

### OPÉRATEURS DE BORD $\text{Fix}_a$

La fonction de partition avec conditions de bord  $\text{Fix}_a$  et un point marqué correspond aux résolvantes des matrices  $X_a$ ,

$$W_a(x) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \mathbb{W}_a(x) \rangle, \quad \mathbb{W}_a(x) = \frac{1}{x - X_a}. \quad (\text{V-5})$$

La dérivation des équations de boucle pour ces résolvantes montre qu'elles s'expriment à l'aide d'une fonction commune  $W_a(x) = S_a W(x)$  qui n'est autre que la résolvante du modèle  $O(n)$ . La relation entre les fonctions de partition de disque des modèles ADE  $\text{Fix}_a$  et du modèle  $O(n)$  Ord sur le réseau plat (section 1.2.1) reste donc valable sur le réseau aléatoire.

Sur le bord, les parois de domaines entre deux hauteurs adjacentes sont introduites à l'aide des matrices  $C_{ab}$ . Pour passer d'une condition de bord  $\text{Fix}_a$  à une condition  $\text{Fix}_b$ , on utilise l'unique chemin minimal<sup>3</sup>  $a \sim a_1 \sim \dots \sim a_{L-1} \sim b$  entre les nœuds  $a$  et  $b$  pour définir l'équivalent des opérateurs fuseaux

$$\mathbb{S}_{ab}^{(L)} = C_{aa_1} \dots C_{a_{L-1}b}, \quad \mathbb{S}_{ba}^{(L)} = \left( \mathbb{S}_{ab}^{(L)} \right)^\dagger \quad (\text{V-6})$$

Le disque avec deux bords de type  $\text{Fix}_a$  et  $\text{Fix}_b$  correspondra donc au corrélateur

$$W_{ab}^{(L)}(x, y) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \mathbb{W}_a(x) \mathbb{S}_{ab}^{(L)} \mathbb{W}_b(y) \mathbb{S}_{ba}^{(L)} \right\rangle \quad (\text{V-7})$$

3. Les nœuds  $a_i$  de ce chemin n'y sont présents qu'une seule fois.

### OPÉRATEURS DE BORD ALT

Dans la phase dense, les opérateurs matriciels du modèle RSOS créant le bord avec des conditions  $\text{Alt}_{\langle ab \rangle}$  ont été définis dans [BH09], et les corrélateurs  $\text{Fix}_a/\text{Alt}_{\langle bc \rangle}$  y furent étudiés,

$$\mathbb{H}_{ab}(y) = \frac{1}{y - C_{ab}C_{ba}}, \quad D_{a,\langle bc \rangle}^{(L)}(x, y) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \mathbb{W}_a(x) \mathbb{S}_{ab}^{(L)} \mathbb{H}_{bc}(y) \mathbb{S}_{ba}^{(L)} \right\rangle. \quad (\text{V-8})$$

Cette définition s'étend naturellement aux conditions alternantes des séries D et E. Ces opérateurs peuvent être généralisés dans la phase diluée, ainsi que les corrélateurs de disque  $\text{Fix}_a/\text{Alt}_b$  correspondants,

$$\mathbb{H}_b(y|m_c) = \frac{1}{y - X_b - \sum_{c \sim b} m_c C_{bc} C_{cb}}, \quad D_{a,b}^{(L)}(x, y|m_c) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \mathbb{W}_a(x) \mathbb{S}_{ab}^{(L)} \mathbb{H}_b(y|m_c) \mathbb{S}_{ba}^{(L)} \right\rangle. \quad (\text{V-9})$$

Choissant une valeur  $c_1$  parmi les nœuds  $c$  liés à  $b$ , on retrouve l'opérateur  $\mathbb{H}_{\langle bc_1 \rangle}$  à partir de  $\mathbb{H}_b$  dans la limite  $y, m_{c_1} \rightarrow \infty$ ,  $y' = y/m_{c_1}$  fixé.

### EQUATIONS DE BOUCLE

Les équations de boucle des modèles ADE sont semblables à celles du modèle  $O(n)$  (IV-12, IV-15). Ainsi, pour une quantité matricielle  $F$  de taille  $N_a \times N_b$ , on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \langle \partial_{X_a} F \rangle &= \left\langle \text{tr} \left[ \left( S_a V'(X_a) - \sum_{b \sim a} C_{ab} C_{ba} \right) F \right] \right\rangle, \\ \frac{1}{\beta} \langle \partial_{C_{ab}} F \rangle &= - \langle \text{tr} [(C_{ba} X_a + X_b C_{ba}) F] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{V-10})$$

La seconde équation peut se réécrire en utilisant une quantité auxiliaire  $G$ ,

$$\frac{1}{\beta} \left\langle \partial_{C_{ab}} \int_0^\infty d\ell e^{\ell X_a} G e^{\ell X_b} \right\rangle = \langle \text{tr} C_{ba} G \rangle, \quad F = \int_0^\infty d\ell e^{\ell X_a} G e^{\ell X_b}. \quad (\text{V-11})$$

### RELATION DE RÉCURRENCE

Les corrélateurs  $D_{a,\langle bc \rangle}^{(L)}$  et  $D_{a,b}^{(L)}$  satisfont une relation de récurrence sur le nombre  $L$  de parois de domaine entre les bords Fix et Alt. Soit  $a_1$  le nœud adjacent à  $a$  dans le chemin minimal de  $a$  vers  $b$ , on démontre que

$$D_{a,\langle bc \rangle}^{(L)} = S_a W * D_{a_1,\langle bc \rangle}^{(L-1)}, \quad D_{a,b}^{(L)} = S_a W * D_{a_1,b}^{(L-1)}. \quad (\text{V-12})$$

Ces relations nous permettent de réduire l'étude du comportement critique des corrélateurs  $D_{a,b}^{(L)}$  aux deux équations de boucle couplant les corrélateurs  $L = 0$  et  $L = 1$ .



## 2.2 Comparaison des modèles matriciels ADE et $O(n)$

L'étude du modèle RSOS matriciel dans la phase dense [BH09] a fait apparaître les relations entre les corrélateurs matriciels RSOS et  $O(n)$  décrivant le disque avec conditions de bord  $\text{Fix}_a/\text{Alt}_{\langle ab \rangle}$  et  $\text{Ord}/\text{JS}$ ,

$$D_{a,\langle ab \rangle}(x, y) = D_0^\perp(x, y/S_a), \quad D_{b,\langle ba \rangle}(x, y) = \frac{S_b}{y} \left( W(x) + \frac{S_a}{S_b} D_1^\parallel(x, y/S_a) \right), \quad b = a + 1. \quad (\text{V-13})$$

Ces deux relations sont obtenues en comparant les équations de boucle des deux modèles, mais peuvent être justifiées par un raisonnement combinatoire. Le paramètre  $k$  des conditions de bord JS est relié au vecteur de Perron-Frobenius par  $k = S_b/S_a$ , ce qui met en lumière la paramétrisation  $k(a)$  (III-13). Pour  $n$  fixé, le paramètre  $k$  prend donc ici un nombre fini de valeurs, en accord avec le nombre fini d'opérateurs de la table de Kac. L'objectif de cette section est de démontrer des relations similaires pour la phase diluée des modèles ADE.

### 2.2.1 Equations de boucle et comportement critique

Pour étudier les conditions de bord  $\text{Alt}_a$  définies au nœud  $a$ , il faut considérer les corrélateurs à deux bords  $D_{a,a}^{(0)}$  et  $D_{b,a}^{(1)}$  où les nœuds  $b$  sont adjacents à  $a$ . Nous devons aussi définir les quantités suivantes,

$$H_a(y|m_b) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr } \mathbb{H}_a(y|m_b) \rangle, \quad P_a(x) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr } \frac{V'(x) - V'(X_a)}{x - X_a} H_a(y|m_b) \right\rangle, \quad (\text{V-14})$$

$H_a$  est donc la fonction de partition du disque avec un point marqué et des conditions de bord  $\text{Alt}_a$ , et le polynôme  $P_a(x)$  est de degré un. Il est alors possible de dériver les équations de boucles suivantes :

$$\begin{aligned} (x - y)D_{a,a}^{(0)} + W_a - H_a + \sum_{b \sim a} m_b \left[ (m_b D_{a,a}^{(0)} - 1) \overline{D_{b,a}^{(1)}} + \overline{W_b} D_{a,a}^{(0)} \right] &= 0 \\ (W_a + n \overline{W_a} + H_a - S_a V') D_{a,a}^{(0)} + S_a P_a + \sum_{b \sim a} (m_b D_{a,a}^{(0)} - 1) \overline{D_{b,a}^{(1)}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V-15})$$

où l'on a introduit la notation  $\overline{F} = F(-x)$ .

### NOEUD À DEUX VOISINS

Comparons maintenant les équations de boucle précédentes à celles dérivées pour le modèle  $O(n)$  dans [BHK10]. Supposons dans un premier temps que le nœud  $a$  ne possède que deux voisins  $a \pm 1$ . Il est possible de relier les corrélateurs matriciels comme suit,

$$D_{a,a}^{(0)}(x, y) = D_0(x/S_a, y/S_a), \quad D_{a \pm 1, a}^{(1)} = S_{a \pm 1} D_1^{(i)}(x/S_a, y/S_a), \quad H_a = S_a H, \quad P_a = P, \quad (\text{V-16})$$

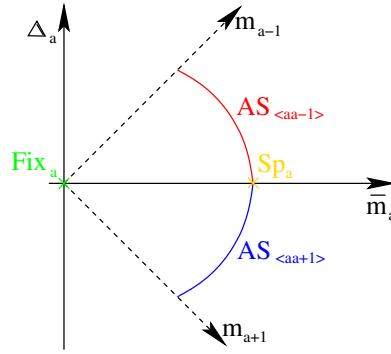


FIGURE V.5 – Diagramme de phase pour les conditions de bord  $\text{Alt}_a$  d'un nœud à deux voisins,  $\bar{m}_a = m_{a-1} + m_{a+1}$ .

avec  $i = 1$  pour le nœud  $a - 1$ . Les fugacités des deux modèles sont simplement reliées par  $m_1 = m_{a-1}$  et  $m_2 = m_{a+1}$ , et le poids des boucles par

$$n_1 = \frac{S_{a-1}}{S_a} = \frac{\sin \pi(a-1)\theta}{\sin \pi a \theta}, \quad n_2 = \frac{S_{a+1}}{S_a} = \frac{\sin \pi(a+1)\theta}{\sin \pi a \theta}. \quad (\text{V-17})$$

On retrouve ainsi le diagramme de phase de la figure V.5 pour les conditions de bord  $\text{Alt}_a$ . On y distingue deux branches  $\text{AS}_{\langle aa \pm 1 \rangle}$  (ici pour **Alternantes Spéciales**) pour lesquelles les nœuds  $a \pm 1$  prédominent sur la seconde rangée. Les deux branches se rencontrent en un point  $\text{Sp}_a$  pour lequel la seconde rangée comporte une quantité critique identique de nœuds  $a + 1$  et  $a - 1$ . Le point  $m_{a+1} = m_{a-1} = 0$  correspond naturellement aux conditions  $\text{Fix}_a$ . Enfin, à haute température de bord  $m_{a \pm 1} \rightarrow \infty$  dans la région  $m_{a+1} > m_{a-1}$ , la condition de bord  $\text{Alt}_a$  se renormalise vers une seconde rangée fixée à  $a + 1$ . Tout se passe donc comme si une paroi de domaine  $a|a + 1$  se collait contre le bord : c'est la symétrie Teflon.

Entre les conditions de bord  $\text{Fix}_a$  et  $\text{Alt}_b$  sont insérés  $L = b - a$  murs de domaine. A partir des résultats sur le modèle  $O(n)$ , on peut déduire la dimension des opérateurs  $bcc \text{Fix}_a / \text{Alt}_{\langle bc \rangle}$ ,  $\delta_{a,d}$  avec  $d = \sup(b, c)$ , ainsi que des opérateurs  $\text{Fix}_a / \text{Sp}_b$  ( $a < b$ ),  $\delta_{1+b-a,2}$ . En outre, sur chaque branche AS, il est possible de déterminer le point suivant,

$$(m_{a+1}, m_{a-1}) = S_a \left( \frac{1-n}{S_a - S_{a+1}} m_S^{(c)}, 0 \right), \quad (m_{a+1}, m_{a-1}) = S_a \left( 0, \frac{1-n}{S_a - S_{a-1}} m_S^{(c)} \right) \quad (\text{V-18})$$

où  $m_S^{(c)}$  désigne la valeur critique de la fugacité au point spécial des conditions DJS (IV-86).

### NOEUD À UN SEUL VOISIN

Si le nœud  $a$  ne possède qu'un seul voisin  $b$ , le poids de la paroi de domaine est simplement  $n = S_b / S_a$ . On se retrouve donc sur la ligne isotrope, et les équations V-15 dégénèrent effectivement en équations de boucles pour les corrélateurs isotropes des conditions DJS. On identifie alors le point spécial  $m_{\text{Sp}}^{(a)} = m_S^{(c)}$ , et l'opérateur  $bcc$  entre  $\text{Fix}_a$  et  $\text{Sp}_a$  est de dimension  $\delta_{1,2}$ .

### NOEUD À TROIS VOISINS

Les équations de boucles montrent que la condition de bord  $\text{Alt}_a$  pour un nœud possédant trois voisins est reliée à une condition de bord brisant la symétrie  $O(n)$  en trois sous-groupes. Chaque sous-groupe  $O(n_b)$  est associé à un nœud voisin  $b \sim a$ , et le poids des boucles est relié aux hauteurs via les composantes du vecteur de Perron-Frobenius  $n_b = S_b/S_a$ . Les fugacités des boucles et des nœuds sont identiques. Les résultats semblent indiquer qu'il n'est possible d'obtenir une condition de bord conforme que si deux des fugacités sont égales, ce qui rejoint l'analyse de champ moyen. En effet, à la transition, la susceptibilité locale  $\chi_{11}$  peut diverger pour aucune composante (Ord), pour  $n_i$  composantes ( $\text{AS}_i$ ), pour  $n_i + n_j$  ( $\text{AS}_{ij}$ ) ou toutes les composantes  $n_1 + n_2 + n_3 = n$  (Sp). La divergence de la susceptibilité impose d'annuler les constantes de couplage des composantes associées (ou de les fixer à la valeur critique pour les couplages renormalisés). Ainsi, pour les transitions Ord,  $\text{AS}_i$ ,  $\text{AS}_{ij}$  et Sp, on doit annuler respectivement zéro, un, deux, et trois couplages. On obtient donc une surface critique pour  $\text{AS}_i$ , des lignes critiques pour les  $\text{AS}_{ij}$  et un unique point Sp. Toutefois, en terme de symétrie de la surface, la brisure effective du groupe  $O(n)$  n'est jamais qu'en deux parties, puisque, suivant les composantes, les spins sont soit alignés soit désordonnés. Ainsi, la description de  $\text{AS}_{ij}$  revient à celle de  $\text{AS}_{i+j}$ , autrement dit on brise le groupe de symétrie en  $O(n) \rightarrow O(n_i + n_j) \times O(n_{6-i-j})$ .

Revenons aux modèles ADE, et notons les trois nœuds  $\pm = a \pm 1$  et  $n$ . On définit donc les trois fugacités  $m_+$ ,  $m_-$  et  $m_n$ . Si ces fugacités sont nulles, on se trouve au point  $\text{Fix}_a$ . Il existe trois surfaces critiques, pour lesquelles la seconde rangée possède des hauteurs  $\pm$  ou  $n$  exhaussées, notées  $\text{AS}_{\langle a \pm \rangle}$  et  $\text{AS}_{\langle an \rangle}$ . Ces surfaces s'intersectent en des lignes critiques sur lesquelles deux types de hauteur sont exhaussés de manière égale :  $\text{AS}_{\langle a + \rangle, \langle an \rangle}$ ,  $\text{AS}_{\langle a - \rangle, \langle an \rangle}$  et  $\text{AS}_{\langle a + \rangle, \langle a - \rangle}$ . Enfin, ces lignes se rencontrent en un point  $\text{Sp}_a$  où les trois hauteurs possibles peuvent être rencontrées sur la seconde rangée. Si ce schéma semble convaincant, il est nécessaire de le confirmer en déterminant la dimension des opérateurs de bord. Pour cela, on doit étudier le mélange des opérateurs dans les modèles D et E, ce qui est hors de propos ici.

## 3 Etats de bord du modèle RSOS matriciel

Dans le cas du modèle RSOS, il suffit pour obtenir les états de bord de considérer les opérateurs  $bcc$   $\text{Fix}_1/\text{CB}$  où CB est une condition de bord quelconque. On aboutit alors au tableau ci-dessous,<sup>4</sup>

---

4. Rappelons que pour le modèle  $A_n$ ,  $h = n + 1$ , dans la phase dense les états de bords  $|r, s\rangle$  ( $1 \leq r < h - 1$ ,  $1 \leq s < h$ ) satisfont  $|r, s\rangle \sim |h - 1 - r, h - s\rangle$ , tandis que dans la phase diluée  $|r, s\rangle \sim |h - r, h + 1 - s\rangle$  ( $1 \leq r < h$ ,  $1 \leq s < h + 1$ ). Par ailleurs, dans les deux phases  $a \in \{1, \dots, h - 1\}$ .

Phase	Condition de Bord	Etat de bord
Dense	$\text{Fix}_a$	$ 1, a \rangle$
Dense	$\text{Alt}_{\langle aa+1 \rangle}$	$ a, 1 \rangle$
Diluée	$\text{Fix}_a$	$ a, 1 \rangle$
Diluée	$\text{Sp}_a$	$ a, 2 \rangle$
Diluée	$\text{AS}_{\langle aa+1 \rangle}$	$ 1, a + 1 \rangle$
Diluée	$\text{AS}_{\langle aa-1 \rangle}$	$ 1, a \rangle$

On est donc amené à identifier les conditions AS aux nœuds adjacents,  $\text{AS}_{\langle a-1a \rangle}$  et  $\text{AS}_{\langle aa-1 \rangle}$  dans la phase diluée. Les deux branches sont en effet reliées aux points suivants, respectivement pour les nœuds  $a - 1$  et  $a$ ,

$$(m_a, m_{a-2}) = S_{a-1} \left( \frac{1-n}{S_{a-1} - S_a} m_S^{(c)}, 0 \right), \quad (m_{a+1}, m_{a-1}) = S_a \left( 0, \frac{1-n}{S_a - S_{a-1}} m_S^{(c)} \right) \quad (\text{V-19})$$

la différence de normalisation étant due à l'échange des nœuds  $a$  et  $a - 1$  sur le bord. Dans le même esprit, il faut identifier en ces mêmes points les conditions  $\text{Sp}_1$  et  $\text{AS}_{\langle 21 \rangle}$ , ainsi que  $\text{Sp}_{h-1}$  et  $\text{AS}_{\langle h-2h-1 \rangle}$ .

## RG FLOWS

On peut transposer au modèle RSOS l'évolution des conditions de bord sous les *flows* de *bulk* et de bord obtenue au chapitre précédent. Les conditions de bord  $\text{Sp}_a$  et  $\text{AS}_{\langle aa\pm 1 \rangle}$  sont instables sous perturbation thermique de bord, elles évoluent toutes deux vers  $\text{Fix}_a$ . Sur les états, cela se traduit par

$$|a, 1 \rangle \xleftarrow{\delta_{1,3}} |1, a \rangle \xrightarrow{\delta_{1,3}} |a-1, 1 \rangle, \quad |a, 2 \rangle \xrightarrow{\delta_{1,3}} |a, 1 \rangle \quad (\text{V-20})$$

pour les *flows* générés par l'opérateur  $\delta_{1,3}$ . Quant à l'opérateur d'anisotropie  $\delta_{3,3}$ , il envoie la condition  $\text{Sp}_a$  sur  $\text{AS}_{\langle aa\pm 1 \rangle}$ , soit

$$|1, a \rangle \xleftarrow{\delta_{3,3}} |a, 2 \rangle \xrightarrow{\delta_{3,3}} |1, a + 1 \rangle. \quad (\text{V-21})$$

Le diagramme total d'évolution des états de bord s'obtient en réunissant ceux correspondant aux différents nœuds. Cette étude est présentée pour le modèle d'Ising tri-critique en appendice A.

Le résultat le plus intéressant est sans doute l'évolution thermique de *bulk* des états de bord. Sous cette évolution, les conditions  $\text{Fix}_a$  restent inchangées, tandis que pour les conditions  $\text{AS}_{\langle aa\pm 1 \rangle}$  les hauteurs de la seconde rangée se figent, obtenant ainsi  $\text{Alt}_{\langle aa\pm 1 \rangle}$ . Enfin, les conditions de bord  $\text{Sp}_a$  se renormalisent vers  $\text{Fix}_a$  dans la phase dense. On en déduit l'évolution des états de bord,

Etat de bord dilué	→	Etat de bord dense
$\text{Fix}_a  a, 1 \rangle$	→	$\text{Fix}_a  1, a \rangle$
$\text{AS}_{\langle aa+1 \rangle}  1, a + 1 \rangle$	→	$\text{Alt}_{\langle aa+1 \rangle}  a, 1 \rangle$
$\text{AS}_{\langle aa-1 \rangle}  1, a \rangle$	→	$\text{Alt}_{\langle aa-1 \rangle}  a-1, 1 \rangle$
$\text{Sp}_a  a, 2 \rangle$	→	$\text{Fix}_a  1, a \rangle$

Ces résultats confirment la conjecture faite sur le réseau plat en étudiant la renormalisation perturbative de la fonction  $g$  [FGSC09].

## Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre un exemple d'application au cas du modèle RSOS de la méthode matricielle précédemment développée. Dans la limite continue, ce modèle est décrit par une théorie conforme minimale unitaire. Cela nous a permis d'obtenir de nombreux résultats concernant les états de bord de ces théories, et en particulier sur leur comportement sous les *flows* du groupe de renormalisation. L'évolution des états de bords est un sujet très dynamique en théorie conforme, et nous avons pu dériver certains résultats fondamentaux qui n'avaient jusqu'ici fait l'objet que de conjecture. Il semble très intéressant d'étendre cette étude aux modèles minimaux  $(p, q)$  quelconques. Il faut pour cela considérer un modèle à deux matrices, avec une limite continue multicritique. L'identification des opérateurs de bords dans la limite continue devient alors plus complexe puisqu'intervient une transformation de type Belavin-Zamolodchikov entre les couplages des modèles matriciels et gravitationnels [BZ09, BR10].

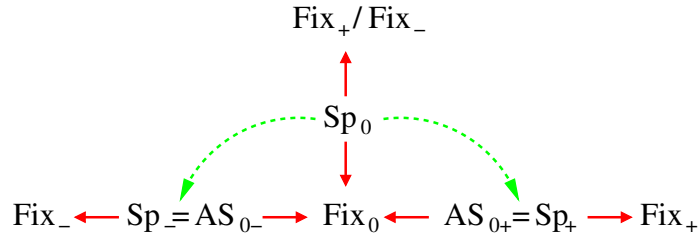
Notre étude des séries D et E est restée très limitée ici, nous n'avons fait que définir les corrélateurs matriciels et dériver leurs équations de boucles. Il reste à analyser ces équations dans la limite continue, et en particulier à comprendre le phénomène de mélange des opérateurs au sein du modèle de matrice. Ce travail est actuellement en cours.

## Annexe A Ising tri-critique

L'étude des modèles minimaux unitaires  $(h, h + 1)$  perturbés par un opérateur thermique a été réalisée pour la première fois par A. Zamolodchikov [Zam87]. La fonction  $c$  qui interpole la charge centrale des modèles minimaux, peut être obtenue grâce à l'intégrabilité du *flow* thermique [Zam91]. Cette méthode a récemment été appliquée à l'étude des conditions de bord du modèle d'Ising tri-critique perturbé thermiquement, par P. Dorey, C. Rim et R. Tateo [DRT10]. La fonction  $g$  joue sur le bord un rôle similaire à celui de la fonction  $c$ , et permet de prédire l'évolution des états de bords. Dans cette section, nous allons comparer nos résultats à leur étude par l'ansatz de Bethe thermodynamique. Nous nous concentrons donc sur le diagramme  $A_3$  ( $h = 4$ ) dont la phase diluée décrit le modèle d'Ising tri-critique  $(4, 5)$  ayant  $c = 7/10$  et la phase dense le modèle d'Ising  $(3, 4)$ ,  $c = 1/2$ .

### CONDITIONS DE BORD

Commençons par énumérer les conditions de bord. Nous noterons  $+, 0, -$  les trois nœuds du dia-

FIGURE V.6 – Diagramme de phase de bord pour le modèle  $A_3$  dilué.

gramme  $A_3$ . Dans la phase dense, nous avons trois conditions de bords fixées  $\text{Fix}_+$ ,  $\text{Fix}_0$  et  $\text{Fix}_-$  correspondant respectivement aux conditions  $|1, 1 \rangle$ ,  $|1, 2 \rangle$  et  $|1, 3 \rangle$ . Il existe aussi deux conditions de bord alternées  $\text{Alt}_{+0} |1, 1 \rangle$  et  $\text{Alt}_{-0} |2, 1 \rangle$  qui de par la trivialité du diagramme s'identifient à  $\text{Fix}_+$  et  $\text{Fix}_-$  respectivement.<sup>5</sup>

Dans la phase diluée, les trois conditions de bord fixées sont toujours présentes,  $\text{Fix}_+ |1, 1 \rangle$ ,  $\text{Fix}_0 |2, 1 \rangle$  et  $\text{Fix}_- |3, 1 \rangle$ . A cela, il faut rajouter les conditions de bord  $Sp$  des nœuds à un seul voisin :  $\text{Sp}_+ |1, 2 \rangle$  et  $\text{Sp}_- |3, 2 \rangle$ . Ces conditions  $\text{Sp}_\pm$  sont des points particuliers des branches  $\text{AS}_{0+}$  et  $\text{AS}_{0-}$ , et seule la condition  $\text{Sp}_0 |2, 2 \rangle$  du diagramme de phase associé au nœud 0 n'a pas encore été prise en compte.

### FLAWS DANS LA PHASE DILUÉE

Combinant les résultats exposés précédemment, on déduit le diagramme d'évolution de la figure V.6 pour les états de bord. Les flèches rouges correspondent à des perturbations thermiques  $\delta_{1,3}$  et les flèches vertes des perturbations anisotropiques  $\delta_{1,2} \sim \delta_{3,3}$ . La flèche rouge supérieure correspond à la limite de haute température sur la ligne isotrope du nœud 0 : un mur de domaine se colle sur le bord, et la seconde rangée de sites du bord est fixée soit avec la hauteur +, soit avec -, ce qui se traduit par une superposition des deux conditions de bord. Ce diagramme est identique à la figure 4 de [DRT10].

5. Mis en rapport avec la phase diluée du diagramme  $A_2$ ,  $\text{Fix}_+$  et  $\text{Fix}_-$  sont les deux conditions de bord associées aux nœuds 1, 2 (notés + et -)  $\text{Fix}_+$  et  $\text{Fix}_-$ . La condition  $\text{Fix}_0$  s'identifie quant à elle à  $\text{Sp}_+$  et  $\text{Sp}_-$ .



## CORDES BIDIMENSIONNELLES

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Un peu d'histoire...</b>	<b>127</b>
<b>2</b>	<b>Dans le bulk</b>	<b>130</b>
2.1	Backgrounds	130
2.2	Tachyons	133
<b>3</b>	<b>Cordes longues</b>	<b>134</b>
3.1	Approche semi-classique	135
3.2	Calcul du facteur de phase $\delta_{CL}$	138
3.3	Interactions de deux cordes longues	139
<b>A</b>	<b>Corrélateur de bord à deux points dans la limite <math>\mathfrak{b} \rightarrow 1</math></b>	<b>141</b>

---



## Introduction

La plupart des efforts pour comprendre la théorie des cordes se concentre sur les théories critiques, en dimension  $D = 26$  pour la version bosonique, et  $D = 10$  dans le cas supersymétrique. Pourtant, les théories non-critiques ont aussi leur intérêt. En particulier, la théorie bidimensionnelle possède de nombreuses simplifications qui en font un modèle jouet extrêmement utile.

La principale caractéristique de la théorie des cordes bidimensionnelle est la réduction drastique du nombre de degrés de liberté. En effet, le nombre de dimension  $y$  est trop faible pour autoriser les modes d'oscillation de la corde, et outre un ensemble discret d'états<sup>1</sup>, le spectre se réduit au mode associé au centre de masse de la corde. En dimension supérieure à deux, ce mode est de masse négative, d'où sa dénomination de **tachyon**. En dimension critique, la présence de ce mode justifie l'introduction de la supersymétrie qui, grâce à la projection GSO, permet de l'éliminer. Au contraire, en dimension deux, ce mode est de masse nulle et la théorie est parfaitement définie. Par ailleurs, les intégrales de Veneziano qui interviennent dans le calcul de ses amplitudes sont suffisamment simples pour être calculées explicitement, ce qui est un attrait certain de cette théorie.

Une autre raison pour étudier la théorie en deux dimensions est la possibilité d'interpréter l'action sur la feuille d'univers dans le cadre de la gravité de Liouville. Nous avons vu au chapitre III la quantification de l'action de Polyakov suivant la méthode DDK : partant d'une théorie de  $d \neq 26$  bosons libres, nous avons obtenu une théorie de corde à  $D = d+1$  dimensions, le champ de Liouville qui décrit les fluctuations de la métrique agissant comme une dimension supplémentaire. Nous avons aussi remarqué que lorsque la dimension  $d$  est supérieure à un, l'un des paramètres de la théorie de Liouville devient imaginaire, ce qui rend difficile l'interprétation de la théorie. Seule la dimension  $d = 1$  est dispensée d'une telle infirmité.

Mais l'intérêt majeur de la théorie bidimensionnelle réside dans la possibilité d'une description duale par un modèle de matrice. Ce type de description est commun à toutes les théories de matière  $c_M \leq 1$  couplée à la gravité bidimensionnelle. Par exemple, dans le cas des modèles minimaux  $c_M < 1$ , la **double limite d'échelle** d'un modèle à deux matrices permet de retrouver le développement topologique de la théorie des cordes minimales. Une description non-perturbative existe aussi grâce à la hiérarchie intégrable KdV sous-jacente. Pour les cordes bidimensionnelles,  $c_M = 1$  et le modèle dual est donné par la **mécanique quantique matricielle** (ou **MQM**) qui fera l'objet du chapitre suivant. Celle-ci décrit la théorie des cordes dans l'espace cible de manière indépendante du *background*. Il est en effet possible de distinguer différents secteurs en relation avec les *background* plat (dilaton linéaire) et de trou noir.

Par la suite, il nous faudra différencier les théories euclidienne et lorentzienne. En théorie euclidienne, le boson libre  $X$  qui décrit le champ de corde initial peut être compactifié à un rayon  $R$ , et la métrique de trou noir correspond au "cigare". La matrice du modèle dual dépend d'une coordonnée continue, in-

---

1. Ces états d'impulsion discrète forment une algèbre  $W_{1+\infty}$ , ils peuvent être générés à partir des opérateurs  $a_{\pm}$  du chapitre III, et forment le *ground ring* [Wit92].

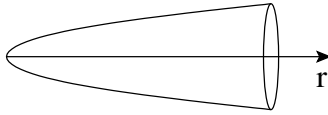


FIGURE VI.1 – Métrique du cigare.

interprétée comme le temps euclidien d'une mécanique statistique. La théorie lorentzienne est obtenue par rotation de Wick du champ de corde  $X$  et le modèle matriciel est donné par une mécanique quantique. La possibilité d'y étudier une dynamique rend la théorie plus riche, et donc plus complexe.

Afin de replacer l'étude des cordes longues dans leur contexte, nous proposons en première section un bref aperçu historique. Nous définirons ensuite plus rigoureusement la théorie des cordes bidimensionnelles et les opérateurs de tachyons. Enfin, nous détaillerons les excitations de bord que constituent les cordes longues, et présenterons le calcul effectué dans [BHKM08].

## 1 Un peu d'histoire...

Le modèle matriciel décrivant la gravité quantique couplé à une matière  $c_M = 1$  a été introduit par E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi et J.-B. Zuber [BIPZ78], mais il ne fut considéré comme discrétisation de l'action de Polyakov qu'un peu plus tard, suite à l'article de V. Kazakov et A. Migdal [KM88]. Dans cet article, les auteurs obtiennent la dépendance logarithmique de la chaleur spécifique  $\partial_\mu^2 \mathcal{Z}$  en la constante cosmologique  $\mu$ . Cette correction aux prédictions de KPZ ( $\gamma_{\text{str}} = 0$ ) s'explique par la présence du mode tachyonique de masse nulle. Elle fut obtenue du côté de la théorie des cordes par J. Polchinski [Pol90] dans une approche semi-classique. Tous les ordres suivants du développement en  $\mu$  de la fonction de partition de la théorie des cordes euclidienne ont été obtenus du côté matriciel grâce à la double limite d'échelle [Par90, GZJ90, BKZ90, GM90c].

Le second résultat important est le calcul des amplitudes de diffusion pour les tachyons. Obtenue dans la théorie matricielle par G. Moore [Moo92a], l'accord avec le calcul de corde effectué par P. Di Francesco et D. Kutasov [DK91] confirma les liens entre le modèle matriciel et les cordes en deux dimensions. Nous reviendrons sur le calcul de ces corrélateurs la section 2.2 ci-dessous.

### LE TROU NOIR EN DEUX DIMENSIONS

En 1991, fut découvert un *background* de la théorie des cordes à deux dimensions<sup>2</sup> qui possédait les propriétés classiques d'un trou noir [EFR91, MSW91] : présence d'un horizon, singularité de la

---

2. Les différents *backgrounds* seront détaillés plus loin, à la section 2.1. En deux dimensions, ils consistent en une solution classique pour la métrique et les champs de dilaton et de tachyon. Ce dernier est nul pour les *backgrounds* présentés ici.

métrique,... E. Witten montra ensuite que ce *background* correspondait au modèle Wess-Zumino-Witten  $Sl(2, \mathbb{C})$  [Wit91]. On distingue deux choix possibles pour le groupe de jauge. Le choix d'un groupe compact (modèle  $\sigma \frac{Sl(2, \mathbb{C})}{SU(2)}/U(1) \simeq H_3^+/U(1)$ ) mène au premier ordre en  $\alpha'$  à la métrique du "cigare" (figure VI.1),

$$\begin{aligned} ds^2 &= k [dr^2 + \tanh^2 r d\theta^2], \\ \Phi &= \Phi_0 - \log \cosh r. \end{aligned} \tag{VI-1}$$

La métrique et le champ de dilaton  $\Phi$  dépendent des coordonnées radiales  $r \in [0, \infty[$  et angulaires  $\theta \in [0, 2\pi]$ . La constante de couplage de la corde,  $g_{\text{str}} = e^{2\Phi}$  dépend de la distance  $r$  à l'extrémité du cigare (ou *tip*). Ce couplage est maximal à l'horizon  $r = 0$  ( $g_{\text{str}}(0) = g_0 = e^{2\Phi_0}$ ) et décroît exponentiellement ensuite. La région asymptotique  $r \rightarrow \infty$  est donc une région de faible couplage pour les cordes, elle s'identifie à un cylindre ( $\tanh r \simeq 1$ ) de rayon  $R = \sqrt{k}$ . Ce paramètre libre  $k$  est relié au niveau de l'algèbre de courant du modèle  $\sigma$  quotient, ainsi qu'à la constante de corde  $\alpha' = 1/k$ .

Le trou noir lorentzien est obtenu par un choix de groupe de jauge non-compact (modèle  $\sigma Sl(2, \mathbb{R})/U(1)$ ). La métrique correspond à la continuation analytique  $\theta = it$  de la solution euclidienne VI-1,

$$\begin{aligned} ds^2 &= k [dr^2 - \tanh^2 r dt^2], \\ \Phi &= \Phi_0 - \log \cosh r. \end{aligned} \tag{VI-2}$$

Ces modèles  $\sigma$  ne décrivent une théorie de cordes que si l'anomalie conforme disparaît, i.e. pour  $c_M = 26$ . Cette charge centrale est obtenue pour la valeur spécifique  $k = 9/4$ , soit un rayon  $R = 3/2$  pour le trou noir euclidien. Asymptotiquement, i.e. dans la région de faible couplage  $r \rightarrow \infty$ , le dilaton devient linéaire, et le modèle  $\sigma$  s'identifie avec la gravité de Liouville  $c_M = 1$  pour une région éloignée du potentiel. La coordonnée de corde décrite par le champ de Liouville correspond alors à la coordonnée radiale  $r$ .

Le modèle quotient  $Sl(2, \mathbb{R})/U(1)$  a été étudié au niveau quantique par R. Dijkgraaf, E. et H. Verlinde [DVV92]. Ces auteurs ont pu dériver le spectre de la théorie, qui coïncide avec celui de la gravité de Liouville  $c_M = 1$ . Ils ont aussi étudié l'amplitude de diffusion d'un tachyon par le trou noir.

## CONJECTURE FZZ

Le modèle euclidien  $H_3^+/U(1)$  peut en réalité s'identifier à la théorie de sine-Liouville couplée à un boson libre. Cette observation, non publiée, est due à V. Fateev, A. Zamolodchikov et Al. Zamolodchikov. Si la théorie de sine-Gordon est la perturbation de la théorie de Liouville par des opérateurs de vertex, sine-Liouville en est la version T-dual : la perturbation par des opérateurs de vortex. Elle est définie par le lagrangien suivant,

$$4\pi\mathcal{L} = (\partial X)^2 + (\partial\phi)^2 + 2\hat{R}\phi + \lambda e^{(2-R)\phi} \cos R(X_L - X_R) \tag{VI-3}$$

où  $X_{L,R}$  sont les composantes chirales du boson  $X$  compactifié et  $R$  le rayon de compactification.

Dans la région de faible couplage  $\phi \rightarrow -\infty$ , le terme de sine-Liouville disparaît. On retrouve donc la théorie des cordes sur une métrique plate décrivant un cylindre de rayon  $R$ . Cette géométrie s'identifie avec celle du trou noir loin de l'horizon, et l'égalité des rayons implique  $R = \sqrt{k} = 3/2$ . Les deux théories ont alors la même charge centrale, et les poids conformes permettent d'identifier les opérateurs de vertex. La conjecture FZZ suppose que cette identification se poursuit lorsque l'on se rapproche de la région du *tip*. Elle se base sur la coïncidence du spectre des théories, ainsi que des pôles et des résidus des fonctions à deux et trois points.

### MÉCANIQUE STATISTIQUE MATRICIELLE

Nous verrons au chapitre suivant que le modèle matriciel peut se décomposer en différents secteurs sous la symétrie  $SU(N)$ . Le secteur singulet décrit la théorie des cordes dans le *background* de dilaton linéaire, de métrique plate, qui coïncide avec la théorie asymptotique dans le *background* du cigare. L'étude de la dualité  $R \rightarrow \alpha'/R$  au sein du modèle de matrice conduit D. Gross et I. Klebanov à conjecturer la description des vortex par les secteurs non singulets [GK90, GK91]. Cette conjecture fut ensuite démontrée par D. Boulatov et V. Kazakov [BK93].

Mais la description matricielle permet aussi l'étude non perturbative de la théorie des cordes euclidienne. Il est en effet possible de calculer la fonction de partition correspondant dans la limite continue au lagrangien suivant

$$4\pi\mathcal{L} = (\partial X)^2 + (\partial\phi)^2 + 2\hat{R}\phi + \mu\phi e^{2\phi} + \lambda e^{(2-R)\phi} \cos R(X_L - X_R) \quad (\text{VI-4})$$

Ce modèle dépend du couplage  $t = \lambda\mu^{R/2-1}$ , et le lagrangien interpole entre la gravité de Liouville  $t = 0$  et la gravité de sine-Liouville  $t \rightarrow \infty$ . Inspiré de l'étude d'un lagrangien similaire pour une perturbation de type sine-Gordon [Moo92b, HK93], V. Kazakov, I. Kostov et D. Kutasov [KKK02] ont mis en évidence la présence d'une transition de type Kosterlitz-Thouless pour  $R = 3/2$  qui décrit la condensation des vortex, et donc la formation du trou noir. Le succès de cette description réside dans l'intégrabilité du modèle, présente sous la forme d'une hiérarchie de Toda.<sup>3</sup>

### MÉCANIQUE QUANTIQUE MATRICIELLE

Les excitations du secteur adjoint de la mécanique quantique matricielle ont été identifiées dans la théorie de corde lorentzienne par J. Maldacena [Mal05] comme décrivant des cordes longues. L'étude de ces cordes longues, dont le rôle dans la formation du trou noir est supposé similaire à celui des vortex dans la théorie euclidienne, est le sujet de ce chapitre. Nous reviendrons donc sur ces modes à la section

3. Cette dernière joue aussi un rôle lors d'une perturbation par des opérateurs de vertex (sine-Gordon) [DMP93].

3. Anticipons simplement en remarquant que la compréhension de la théorie lorentzienne est loin d'égaliser son homologue euclidien, et que la description de la condensation de ces cordes longues est un des objectifs principaux de notre étude des secteurs non-singulets de la MQM.

## 2 Dans le bulk

### 2.1 Backgrounds

Il y a deux manières d'appréhender la théorie des cordes bidimensionnelles. La première consiste à suivre l'approche DDK du chapitre III, c'est à dire à partir de l'action de Polyakov à une dimension, avec un champ de corde  $X$ , et de fixer la métrique dans la jauge conforme. Les fluctuations de la géométrie engendrent alors le champ de Liouville  $\phi$ . On obtient ainsi de manière générale l'action dans le **background de dilaton linéaire** (où LDB), éventuellement perturbée par un champ de tachyon.

Le seconde façon d'introduire l'action de corde est de partir d'un modèle  $\sigma$  non linéaire quelconque,

$$\mathcal{S}_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \sqrt{g} d^2x [g^{ab} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + R\Phi(X) + T(X)]. \quad (\text{VI-5})$$

Les *backgrounds* de dilaton linéaire ont une métrique plate pour l'espace cible, ( $G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  dans le cas euclidien,  $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  lorentzien), mais il est possible de considérer un *background* plus général de métrique courbe. En deux dimensions, l'action VI-5 est la plus complète possible car les tenseurs de plus de deux indices se décomposent sur le dilaton  $\Phi$ , le tachyon  $T$  et la métrique  $G$ . En outre, le tenseur  $B_{\mu\nu}$  peut être éliminé par un choix de jauge. Cette action ne décrit un *background* de théorie des cordes qu'à la condition qu'elle soit invariante conforme au niveau quantique. L'annulation des fonctions  $\beta$  associées aux champs  $G, T, \Phi$  impose alors des contraintes sur ces champs. On se contente parfois d'une version plus faible de la contrainte conforme, imposant l'annulation des fonctions  $\beta$  au premier ordre en  $\alpha'$ , négligeant les éventuelles corrections de plus haute énergie.

Comme dans la première partie de cette thèse, et lorsque la dépendance en l'échelle de corde  $\alpha'$  sera secondaire vis à vis du problème traité, nous choisirons des unités telles que  $\alpha' = 1$ .

#### 2.1.1 Background de Dilaton Linéaire (LDB)

Ce *background* plat correspond à la quantification DDK de l'action de Polyakov avec une constante cosmologique nulle,

$$\mathcal{S}_{\text{LDB}} = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \sqrt{g} d^2x [g^{ab} \partial_a X \partial_b X + g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + 2\hat{R}\phi]. \quad (\text{VI-6})$$

Il est caractérisé par une solution classique linéaire pour le champ de dilaton. L'action précédente étant conforme, ce *background* est défini à tous les ordres en  $\alpha'$ . La constante de couplage de corde dépend

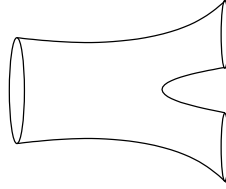


FIGURE VI.2 – Diagramme pantalon décrivant l'interaction de cordes fermées.

exponentiellement du champ de dilaton,  $g_{\text{str}} = g_0 e^{2\phi}$ . Le domaine  $\phi \rightarrow \infty$  de l'espace cible définit une région de fort couplage pour laquelle l'approche perturbative de la théorie des cordes n'est plus valable. On utilisera donc plutôt l'action suivante.

### 2.1.2 Background de Dilaton Linéaire avec champ de Tachyon (LDBT)

Pour remédier au problème de couplage fort de l'action précédente, il est possible d'introduire un champ de tachyon dans l'action  $\mathcal{S}_{\text{LDB}}$  (VI-6). On retrouve alors l'action correspondant à la quantification DDK, avec une constante cosmologique non nulle,

$$\mathcal{S}_{\text{LDTB}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{g} d^2x \left[ g^{ab} \partial_a X \partial_b X + g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + 2\hat{R}\phi + \mu\phi e^{2\phi} \right]. \quad (\text{VI-7})$$

Le champ de tachyon (ou potentiel de Liouville) interdit la zone de couplage fort en repoussant les cordes de la région  $\phi \sim -\frac{1}{2} \log \mu$  vers la région de couplage faible. Ce “mur de Liouville” a des conséquences importantes sur le spectre de la théorie qui se traduisent par la sujétion à la borne de Seiberg.

## ECHELLE DES CORRÉLATEURS

Les corrélateurs gravitationnels ont une dépendance en loi d'échelle dans la constante cosmologique  $\mu$ . Cette dépendance possède une interprétation intéressante en théorie des cordes. En effet, la fonction de partition sur une surface de genre  $h$  correspond au recollement de  $2h$  diagrammes pantalons VI.2, de coefficient  $g_{\text{str}}^{2h}$ . Or, en première approximation, on peut considérer que l'interaction des cordes a lieu dans la région  $\phi \simeq -\frac{1}{2} \log \mu$ , soit  $g_{\text{str}} \propto \mu^{-1}$ , ce qui est en accord avec la loi d'échelle donnée par les relations de KPZ.<sup>4</sup> Ce raisonnement heuristique doit cependant être considéré avec précaution en raison des corrections logarithmiques qui apparaissent.

4. En réalité, la fonction de partition de genre  $h$  est proportionnelle à  $\mu^{2(2-2h)}$ , il faut donc ici considérer la fonction à deux points marqués  $\partial_{\mu}^2 \mathcal{Z}$ , ou diviser par  $\mu^4$ .

### ACTION LORENTZIENNE

L'action dans une métrique lorentzienne est obtenue par rotation de Wick du champ bosonique  $X \rightarrow iX$ ,

$$\mathcal{S}_{\text{LDBT}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sqrt{g} d^2x \left[ g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - g^{ab} \partial_a X \partial_b X + 2\hat{R}\phi + \mu e^{2\phi} \right] \quad (\text{VI-8})$$

Par la suite, nous ferons le choix de jauge qui identifie la coordonnée de l'espace cible à la coordonnée temporelle de la feuille d'univers.

### POTENTIEL DE LIOUVILLE

Afin d'expliquer la différence entre le potentiel de Liouville pour les théories  $c_M = 1$  et  $c_M < 1$ , prenons explicitement la limite  $\mathfrak{b} \rightarrow 1$ . Dans le cas  $\mathfrak{b} < 1$ , les "bébés univers" peuvent être supprimés à l'aide d'un cut-off,  $e^{2\mathfrak{b}\phi} + \lambda e^{2\phi/\mathfrak{b}}$ . La dimension du couplage  $\lambda \sim \mu^{2(\mathfrak{b}-1/\mathfrak{b})}$  étant négative, la perturbation n'est pas relevante et disparaît à grande distance. Toutefois, ce n'est plus le cas lorsque  $\mathfrak{b} = 1$ , et il faut considérer la somme et la différence des deux opérateurs. Si la somme donne le terme usuel  $e^{2\phi}$ , la différence correspond à l'opérateur  $\phi e^{2\phi}$ , et une translation du champ  $\phi$  permet de faire disparaître le premier terme. Ce potentiel de Liouville est à l'origine des corrections logarithmiques à l'échelle de la fonction de partition.

Le choix du potentiel correspond au choix du paramètre associé au développement topologique de la fonction de partition. Nous verrons en effet au chapitre suivant sur la MQM que celle-ci peut se développer en les paramètres  $\Delta$  ou  $\mu$ . Ces deux paramètres sont associés à des potentiels différents, respectivement  $\mu e^{2\phi}$  et  $\Delta \phi e^{2\phi}$ , et seul le second fait intervenir des logarithmes dans le développement perturbatif [KKK00].

#### 2.1.3 Trou noir

Ce *background* est donc donné par les modèles  $\sigma$  sur les groupes  $H_3^+/U(1)$  (euclidien) et  $Sl(2, \mathbb{R})/U(1)$  (lorentzien). Au premier ordre en  $\alpha'$ , on retrouve les métriques et champ dilatoniques VI-1 et VI-2, la coordonnée radiale  $r$  s'identifiant avec le champ de Liouville  $\phi$  et la coordonnée angulaire avec le champ libre  $X$ . La métrique et le champ de Dilaton du modèle  $\sigma$   $Sl(2, \mathbb{R})/U(1)$  peuvent être écrit explicitement à tous les ordres en  $\alpha'$  [DVV92],

$$ds^2 = -l(x)^2 dt^2 + dx^2, \quad l(x) = \frac{(1-p)^{1/2} \tanh 2x}{(1-p \tanh^2 2x)^{1/2}}, \quad (\text{VI-9})$$

$$\Phi = \Phi_0 - \log \cosh 2x - \frac{1}{4} \log (1 - p \tanh^2 2x),$$

avec  $k = 2/p = 9/4$ , et la coordonnée  $x$  est reliée à  $r$  par une transformation non-trivial. Malheureusement, il n'est pas possible d'écrire une action d'où dériver la solution VI-9, ce qui limite l'étude des

propriétés thermodynamiques du trou noir.

## 2.2 Tachyons

### 2.2.1 Opérateurs de création de Tachyon

Les opérateurs tachyoniques (euclidiens) correspondent aux opérateurs de vertex du bosons libre habillés par le champ de Liouville définis au chapitre II (section 1.3),

$$T_e \propto e^{2ieX} e^{2\alpha\phi} \quad (\text{VI-10})$$

Rappelons que les opérateurs de vertex des deux champs doivent être intégrés sur la feuille d'univers, ou multipliés par des champs de fantômes afin de préserver la covariance générale. Introduisons l'énergie  $E$  et l'impulsion  $P$  du tachyon, en posant dans la limite  $\mathfrak{b} \rightarrow 1$ ,  $\alpha = 1 + iP$ ,  $e = -E$ . Si l'on met en relief la dépendance en la constante de corde  $g_{\text{str}}$ , les opérateurs de tachyon prennent une forme familière,

$$T_{E,P} \propto g_{\text{str}} e^{2i(P\phi - EX)}, \quad g_{\text{str}} = g_0 e^{2\phi}. \quad (\text{VI-11})$$

La relation de KPZ est une relation de couche de masse pour les états de tachyon :  $E^2 + P^2 = 0$ . Cette équation quadratique possède deux solutions,  $P_{\pm} = \pm iE$ , mais la borne de Seiberg impose  $\text{Re } \alpha < 1$ . Ainsi, pour  $E > 0$  on choisira l'impulsion  $P_+$  et  $P_-$  pour  $E < 0$ . On définit donc les deux opérateurs de tachyon suivants,

$$T_E^{\pm} \propto g_{\text{str}} e^{-2iE(X \mp i\phi)}. \quad (\text{VI-12})$$

### TACHYONS LORENTZIEN

Les opérateurs de tachyon sont obtenus par continuation analytique  $X = it$ , mais afin de conserver une énergie réelle, il faut maintenant poser  $e = iE$ . La relation de KPZ correspond bien à la condition de couche de masse lorentzienne,  $E^2 - P^2 = 0$ , dont la solution donne des opérateurs de vertex normalisables  $P_{\pm} = \pm E \in \mathbb{R}$ . Les opérateurs tachyoniques considérés seront donc

$$T_E^{\pm} \propto g_{\text{str}} e^{-2iE(t \mp \phi)}. \quad (\text{VI-13})$$

Les tachyons d'énergie positive sont droits (ou entrants), ils ne dépendent que de la combinaison chirale  $\phi - t$  des coordonnées de l'espace cible, tandis que les tachyons d'énergie négative sont gauches.

### NORMALISATION DES OPÉRATEURS

Les matrices de diffusion de tachyon de la théorie des cordes et du modèle de matrice ne diffèrent que par un choix de normalisation des opérateurs de tachyon. Cette normalisation particulière, dénommée



*leg factors*, prend en compte la résonance entre les tachyons et le potentiel de Liouville. Ces facteurs multiplicatifs ont des conséquences dynamiques non triviales dans l'espace des coordonnées puisqu'ils transforment l'interaction locale du modèle de matrice en une interaction gravitationnelle non-locale pour le tachyon [NP94]. Toutefois, notre intérêt portant essentiellement sur la comparaison entre le modèle matriciel et la théorie de corde, nous choisirons d'absorber ces facteurs en définissant les opérateurs tachyoniques de la manière suivante,

$$T_E^{(\pm)} = \frac{1}{\pi} \gamma(\mp 2iE) \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{g} e^{-2iE(t \mp \phi)} e^{2\phi}. \quad (\text{VI-14})$$

Ce choix de normalisation permet aussi d'absorber certaines divergences de la limite  $\mathfrak{b} \rightarrow 1$  (voir l'appendice A).

### 2.2.2 Matrice de diffusion

Les amplitudes de diffusion des tachyons ont été calculées en théorie des cordes par P. Di Francesco et D. Kutasov [DK92],

$$\mathcal{A}_{N-1,1}(E_1^-, \dots, E_n^- | E_N^+) = \left\langle T_{E_1^-}^- \cdots T_{E_{N-1}^-}^- T_{E_N^+}^+ \right\rangle. \quad (\text{VI-15})$$

Ces amplitudes ont en réalité été obtenues par continuation depuis la théorie  $\mathfrak{b} \rightarrow 1$ . Cette astuce permet de se débarrasser de la délicate intégration sur le mode zéro du champ de Liouville. La même astuce est utilisée dans l'étude des corrélateurs de bord de notre article [BHKM08]. Avec la normalisation précédente, l'expression de l'amplitude de diffusion est relativement simple pour  $N \geq 3$ ,

$$\mathcal{A}_{N-1,1}(E_1^-, \dots, E_{N-1}^- | E_N^+) = \delta \left( \sum_{i=1}^N E_i \right) (\partial_{\mu})^{N-3} \mu^{s+N-3}, \quad s = 2 - \sum_{i=1}^N \alpha_{\pm}(E_i^{\pm}), \quad \alpha_{\pm}(E) = 1 \pm iE \quad (\text{VI-16})$$

et la fonction à deux points peut être obtenue par intégration de la fonction à trois points.

## 3 Cordes longues

On s'intéresse maintenant au spectre des états de bord de la théorie des cordes bidimensionnelles dans le *background* LDBT lorentzien. Les premières amplitudes de bord ont été calculées dans [BK92a, BK92b], cependant les opérateurs considérés ne modifient pas les conditions de bord. Avec la découverte des branes FZZT en théorie de Liouville [FZZ00, Tes00], il devient possible d'introduire des opérateurs entre deux bords caractérisés par des constantes cosmologiques  $\mu_B(s)$  différentes. Ce sont ces opérateurs qui ont été étudiés avec le modèle  $O(n)$  matriciel. Mais le cadre de la théorie des cordes impose une interprétation différente de celle utilisée en gravité de Liouville. En effet, ici ces opérateurs créent (ou

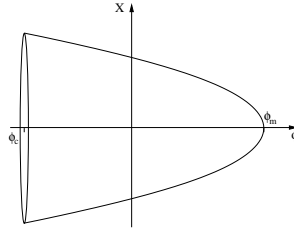


FIGURE VI.3 – Feuille d’univers d’une corde longue dans le LDB.

annihilent) des cordes ouvertes. Le potentiel de bord, lié au terme FZZT de l’action, piège les extrémités des cordes dans la région  $\phi \sim -\log \mu_B$  où la brane se “dissout”. Si l’énergie de la corde ouverte est suffisante, la partie centrale continue de se propager vers la région  $\phi \rightarrow \infty$ , jusqu’à être repoussée par le potentiel de Liouville : ce sont les **cordes longues** introduites par J. Maldacena [Mal05].

### 3.1 Approche semi-classique

Dans cette section,  $\tau$  et  $\sigma$  désignent les coordonnées de la feuille d’univers, respectivement temporelle et curviligne. On choisit pour le champ libre  $X$  la jauge  $\partial_+ X = \partial_- X = 1$  ( $\partial_{\pm} = \partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}$ ) dans laquelle il s’identifie avec le temps,  $X = \tau$ .<sup>5</sup> Au niveau classique, la corde est caractérisée par l’expression du champ de Liouville  $\phi(\tau, \sigma)$  obtenue comme solution des équations du mouvement ainsi que des contraintes de Virasoro.

#### 3.1.1 Dilaton linéaire

On obtient une meilleure intuition sur le comportement classique des cordes longues si on les considère tout d’abord dans le *background* du dilaton linéaire (LDB,  $\mu = 0$ ). La solution classique  $\phi(\tau, \sigma)$  prend alors une forme relativement simple,

$$\phi(\tau, \sigma) = \phi_0 - 2 \log\left(\cosh \frac{\tau}{2} + \cosh \frac{\sigma}{2}\right) \quad (\text{VI-17})$$

et décrit une corde pliée dont les extrémités sont fixées en  $\phi(\tau, \pm\infty) \sim -\infty$ . La partie centrale de la corde  $\phi(\tau, \sigma = 0)$ , ou *tip*, possède l’extension maximale à temps  $\tau$  fixé, elle s’étend de  $\phi(-\infty, 0) \sim -\infty$  jusqu’à une valeur extrême  $\phi(0, 0) = \phi_m = \phi_0 - 2 \log 2$  avant d’être réfléchi vers la région asymptotique  $\phi(\infty, 0) \sim -\infty$  par la tension de la corde (figure VI.3).

5. Rappelons que les branes FZZT imposent des conditions de type Neumann au champ  $X$ , compatibles avec ce choix de jauge.

### APPROXIMATION WKB

Le *tip* dont on vient de décrire le comportement, peut se voir comme une particule de masse<sup>6</sup>  $QM_s = 2$ , dans un potentiel linéaire ayant pour origine la tension de la corde. L'impulsion et la fonction d'onde de cette particule peuvent être calculées en utilisant le traitement semi-classique de Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB)

$$p_{\pm} = \pm \frac{2}{2\pi}(\phi_m - \phi), \quad \psi_{\pm}(\phi) \sim e^{i \int p_{\pm} d\phi} \sim e^{\mp i \frac{1}{2\pi}(\phi - \phi_m)^2} \quad (\text{VI-18})$$

où  $\phi = \phi(\tau, 0)$ . Afin de contrôler les divergences dues à la longueur infinie de la corde, nous introduisons un *cut-off*  $\phi_c$  correspondant à la position des extrémités de la corde. L'énergie de la corde est l'énergie potentielle au point de rebroussement,  $E = T(\phi_m - \phi_c)$  où  $T = 2 \times 1/2\pi$  est la tension de la corde pliée.

La fonction d'onde totale est la somme d'une fonction d'onde entrante et d'une fonction d'onde sortante, avec un facteur de réflexion  $e^{i\delta_{\text{CL}}}$ ,

$$\psi = \psi_+(\phi) - e^{i\delta_{\text{CL}}}\psi_-(\phi). \quad (\text{VI-19})$$

Quand  $\mu = 0$ , le problème est invariant par translations temporelle et spatiale, le facteur de phase ne dépend pas de l'énergie. On peut donc le réabsorber dans une renormalisation des fonctions d'ondes, et prendre  $\delta = 0$ .

#### 3.1.2 Dilaton linéaire avec champ de tachyon

Prenons maintenant le cas plus général  $\mu \neq 0$  (LDBT). Les cordes longues peuvent être insérées entre deux branes FZZT de constantes cosmologiques  $\mu_B^{\pm}$ . L'action sur la feuille d'univers possède alors deux termes de bord [BHKM08],

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \int d\tau d\sigma [-(\partial_{\tau}X)^2 + (\partial_{\sigma}X)^2 + (\partial_{\tau}\phi)^2 - (\partial_{\sigma}\phi)^2 - 4\pi\mu e^{2\phi}] - \int d\tau \left[ \mu_B^{(+)} e^{\phi(\sigma_+, \tau)} + \mu_B^{(-)} e^{\phi(\sigma_-, \tau)} \right] \quad (\text{VI-20})$$

Cette action est définie sur le ruban,  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$  ( $\sigma_- < 0 < \sigma_+$ ). Les constantes cosmologiques de bord se paramétrisent de manière similaire au cas  $c_M < 1$ ,  $\mu_B^{(\pm)}(s_{\pm}) = \sqrt{\mu} \cosh 2\pi s_{\pm}$ .

### CORDE LONGUE

La solution classique de la corde longue est donnée par

$$4\pi\mu e^{2\phi} = [\cosh \gamma \cosh \tau + \sinh \gamma \cosh \sigma]^{-2} \quad (\text{VI-21})$$

où  $\gamma = \phi_L - \phi_m$  est un paramètre continu qui correspond à la distance entre l'extension maximale de la corde  $\phi_m$  et la région du potentiel de Liouville  $\phi_L = -\frac{1}{2} \log 4\pi\mu$ . Remarquons que la paramétrisation du

6.  $Q = \mathfrak{b} + 1/\mathfrak{b}$ ,  $M_s = 1/\sqrt{\alpha'}$  est la masse de la corde.

ruban est telle que, à  $\tau$  fixé la coordonnée curviligne du *tip* est de nouveau  $\sigma = 0$ , et l'extension maximale est obtenue en  $\sigma = \tau = 0$ ,  $\phi_m = \phi(0, 0)$ .

Les conditions de bord apportent sur le champ  $\phi$  une contrainte permettant d'exprimer les paramètres de bord  $s_{\pm}$  en fonction de  $(\gamma, \sigma_{\pm})$ ,

$$\partial_{\sigma}\phi \pm 2\pi\mu_B^{(\pm)}e^{\phi} = 0 \quad \implies \quad \sinh^2 \gamma \sinh^2 \sigma_{\pm} = \cosh^2 2\pi s_{\pm}. \quad (\text{VI-22})$$

Le potentiel exponentiel des branes FZZT piège les extrémités de la corde dans une région  $\phi_c = -\log \mu_B$ , agissant comme un *cut-off* pour l'énergie de la corde longue  $E = (\sigma_+ - \sigma_-)/2\pi$ . On distingue deux régimes. Lorsque la corde reste loin de la région du potentiel de Liouville  $\phi_m \ll \phi_L$ , l'énergie de la corde est donnée par sa tension maximale,<sup>7</sup>

$$E = \frac{1}{2\pi} \left( 2\phi_m + \log \mu_B^{(+)} + \log \mu_B^{(-)} \right). \quad (\text{VI-23})$$

On retrouve le résultat de la section précédente ( $\mu = 0$ ), en identifiant  $\log \mu_B^{(+)} = \log \mu_B^{(-)} = -\phi_c$ . Mais la région qui nous intéresse est celle pour laquelle la corde approche le potentiel de Liouville,  $\phi_m \simeq \phi_L$ . Afin d'étudier ce régime, on utilise la **limite de Maldacena**.

### LIMITE DE MALDACENA

Plus précisément, on veut s'intéresser au phénomène de diffusion des cordes longues par le potentiel de Liouville. Il faut donc bloquer les extrémités de ces cordes dans la région asymptotiquement libre en envoyant  $\mu_B^{(\pm)} \rightarrow \infty$ . Mais il faut aussi que le *tip* puisse atteindre la région du potentiel de Liouville sans être repoussé par la tension de la corde  $\gamma = O(1)$ . Cela implique le régime  $\mu_B^2 \gg \mu$  et une énergie infinie pour la corde longue. La limite de Maldacena consiste donc à envoyer simultanément les paramètres de bord  $s_{\pm}$  et l'énergie de la corde vers l'infini,

$$s_{\pm} = L + \delta s_{\pm}, \quad E = 2L + \delta E, \quad L \rightarrow \infty. \quad (\text{VI-24})$$

On définit alors l'énergie régularisée  $\epsilon$  en soustrayant le *cut-off*

$$\mu_B^{(\pm)} \rightarrow \infty, \quad E \rightarrow \infty, \quad \epsilon = E - \frac{1}{2\pi} \log \mu_B^{(+)} - \frac{1}{2\pi} \log \mu_B^{(-)} = \text{finite}. \quad (\text{VI-25})$$

Par la suite, nous utiliserons aussi la variable translattée  $\hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{2\pi} \log \mu \simeq \epsilon - \frac{1}{\pi} \phi_L$ .

### CORDES COURTES

Notons qu'il est aussi possible de considérer les solutions VI-21 avec  $\sigma_- < \sigma_+ < 0$  ou  $\sigma_+ > \sigma_- > 0$ . Ces solutions décrivent des "cordes courtes", i.e. des cordes ouvertes, non pliées et d'énergie finie. Nous verrons que ces cordes jouent un rôle dans l'interaction des cordes longues.

7. On a ici négligé une constante additive sans importance.

### 3.2 Calcul du facteur de phase $\delta_{\text{CL}}$

Au niveau quantique, les cordes longues sont créées par les opérateurs de bord de la gravité de Liouville. Comme pour les tachyons, il faut effectuer la rotation vers un espace de signature minkowskienne, et normaliser les opérateurs en tenant compte des *leg factors*,

$$U_E^\pm = (\pi\mu)^{1\pm iE} \Gamma(\mp 2iE) \int dx g^{1/4} e^\phi e^{-iE(t\mp\phi)}. \quad (\text{VI-26})$$

La borne de Seiberg se traduit par une chiralité droite pour les opérateurs d'énergie positive, et gauche pour une énergie négative. Ces opérateurs peuvent être définis pour  $\mathfrak{b} < 1$ , et la stratégie employée sera similaire à celle développée pour le calcul des amplitudes tachyoniques : on manipule les corrélateurs de cordes longues ayant  $\mathfrak{b} < 1$ , ne prenant la limite  $c_M = 1$  qu'à la toute fin. Par ailleurs, nous allons nous restreindre à une étude au premier ordre en  $g_{\text{str}}$ . La feuille d'univers considérée possède donc la topologie du disque.

Le facteur de phase  $\delta$  est obtenu à partir de la fonction à deux points dans la limite de Maladacena [Mal05],

$$\langle {}^{s_-}U_E^+ {}^{s_+}U_{-E}^- \rangle = \frac{\pi^2 \mu^2}{i \sinh 2\pi E} d(E|_{s_+, s_-}) \sim e^{i(\delta_{\text{div}} + \pi E^2 + \delta_{\text{CL}}(\hat{\epsilon}))}. \quad (\text{VI-27})$$

où  $d(E|_{s_+, s_-})$  est le facteur de réflexion pour les opérateurs de bords,  ${}^{s_-}U_E^+ {}^{s_+}U_{-E}^- = d(E|_{s_-, s_+}) {}^{s_-}U_E^- {}^{s_+}U_{-E}^+$ . La partie divergente  $\delta_{\text{div}}$ , polynomiale, correspond à la propagation de l'infini à  $\phi_c$  ainsi qu'à des termes dépendants de la régularisation, tandis que le facteur  $e^{i\pi E^2}$  est simplement le rapport des ondes planes en  $\phi = \phi_c$ . Seul le facteur de phase  $\delta_{\text{CL}}(\hat{\epsilon})$  nous intéresse, il s'exprime à l'aide de la fonction  $f$  définie en appendice (VI-35) et ne dépend que de l'énergie régularisée  $\hat{\epsilon}$

$$\delta_{\text{CL}}(\hat{\epsilon}) = -f(\pi\hat{\epsilon}), \quad \hat{\epsilon} = E - (s_+ + s_-) \simeq E + \frac{\phi_c - \phi_L}{\pi}. \quad (\text{VI-28})$$

On remarque que dans la limite  $\hat{\epsilon} \rightarrow -\infty$ ,  $\delta(\hat{\epsilon}) \rightarrow 0$  la corde longue est réfléchiée à cause de sa tension, avant de rentrer dans la zone d'influence du potentiel de Liouville. On retrouve donc le résultat du *background* de dilaton linéaire  $\mu = 0$ . La limite de haute énergie  $\epsilon \gg \log \mu$  correspond à un mur à la place du potentiel de Liouville, le facteur de phase est obtenu à partir de la condition  $\psi(\phi_L) = 0$  pour la fonction d'onde,  $\delta_{\text{CL}}(\hat{\epsilon}) = -\pi\hat{\epsilon}^2 = -\frac{1}{\pi}(\phi_L - \phi_m)^2$ .

L'obtention de ce facteur de phase dans le secteur adjoint de la MQM est l'indice prépondérant menant à identifier les cordes longues avec les excitations de ce secteur du modèle matrice. Nous verrons au prochain chapitre, deux manières de l'obtenir dans ce formalisme. L'autre indication confirmant cette identification est le calcul de la diffusion de deux cordes longues, calcul qui coïncide également avec le résultat matriciel.

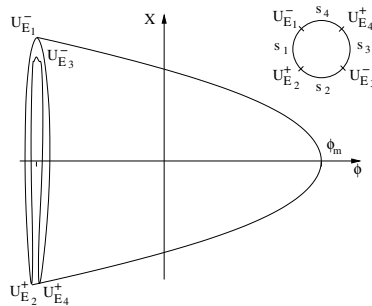


FIGURE VI.4 – Interaction de deux cordes longues au premier ordre (espace cible et feuille d’univers).

### 3.3 Interactions de deux cordes longues

Dans l’article [BHKM08], on cherche à étudier l’interaction de deux cordes longues au premier ordre en  $g_{\text{str}}$ . On considère donc le corrélateur suivant,

$$\mathcal{R}(E_1, E_2, E_3, E_4) = \langle s_4 [U_{E_1}^-]^{s_1} [U_{E_2}^+]^{s_2} [U_{E_3}^-]^{s_3} [U_{E_4}^+]^{s_4} \rangle \quad (\text{VI-29})$$

où deux cordes longues d’énergies  $E_2$  et  $E_4$  sont insérées dans la région asymptotiquement libre à  $t \rightarrow -\infty$ , et annihilées dans cette même région en  $t \rightarrow \infty$ . La feuille d’univers est celle donnée sur la figure VI.4, elle a la topologie d’un disque. La limite de Maldacena consiste à prendre

$$E_{2,4} = 2L + \delta E_{2,4}, \quad E_{1,3} = -2L + \delta E_{1,3}, \quad s_i = L + \delta s_i, \quad L \rightarrow \infty. \quad (\text{VI-30})$$

On introduit donc les énergies régularisées

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= E_1 + (s_1 + s_4), & \hat{e}_2 &= E_2 - (s_1 + s_2), \\ \hat{e}_3 &= E_3 + (s_2 + s_3), & \hat{e}_4 &= E_4 - (s_3 + s_4). \end{aligned} \quad (\text{VI-31})$$

Afin de déterminer le corrélateur VI-29, on utilise les relations de *boundary ground ring* présentées au chapitre II (section 2). Il est ici crucial de considérer  $\mathfrak{b} < 1$ , afin de disposer de deux relations indépendantes reliées par la symétrie  $\mathfrak{b} \rightarrow 1/\mathfrak{b}$ . Prenant en compte la limite de Maldacena, ainsi que la conservation de l’énergie, ces relations se simplifient considérablement. En effet, certains termes, infiniment oscillants, doivent être écartés à l’ordre dominant, ce qui est confirmé par le calcul matriciel. Les relations du *boundary ground ring* font intervenir un corrélateur intermédiaire, la fonction à trois points  $\langle U^+ U^- U^+ \rangle$  calculée par B. Ponsot et J. Teschner [PT02]. Toutefois, il est préférable de déterminer directement ce corrélateur dans la limite de Maldacena à partir des relations simplifiées du *boundary ground ring* plutôt que de partir de l’expression intégrale de [PT02]. La résolution de ces équations permet d’exprimer

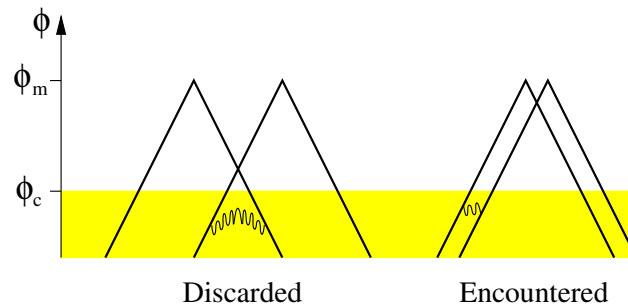


FIGURE VI.5 – Processus d’interaction entre deux cordes longues impliquant l’échange d’une corde courte.

l’amplitude VI-29 à l’aide des coefficients de réflexion  $d(E|s_-, s_+)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(E_1, E_2, E_3, E_4) &= 4i\pi^3 (\mu\pi)^2 \delta \left( \sum_{i=1}^4 E_i \right) e^{-\pi(E_2+E_4)} \\ &\times \frac{d(E_2|s_1, s_2)d(E_4|s_3, s_4) - d(E_1|s_4, s_1)^{-1}d(E_3|s_2, s_3)^{-1}}{\sinh \pi(\hat{\epsilon}_2 + \hat{\epsilon}_3) \sinh \pi(\hat{\epsilon}_3 + \hat{\epsilon}_4)}. \end{aligned} \quad (\text{VI-32})$$

Les coefficients de réflexion décrivent la diffusion d’une corde longue par le potentiel de Liouville, on voit ici qu’ils ne dépendent que des énergies incidentes (ou sortantes pour le second terme). On peut en déduire qu’à l’ordre dominant, l’interaction entre les cordes longues a lieu dans la région asymptotiquement libre, loin du potentiel de Liouville. Cette interaction entre cordes longues peut être modélisée par un échange de cordes courtes. Les processus dominants impliquent des cordes longues simultanément entrantes (ou sortantes). Les processus mixtes impliquant une corde entrante et une corde sortante correspondent aux termes oscillants écartés par le modèle de matrice (figure VI.5).

## Conclusion

Ce bref aperçu de la théorie des cordes est assurément très incomplet. De nombreuses approches ont été négligées, telle la construction de la théorie des champs collectifs pour l’opérateur d’insertion de boucle du modèle de matrice [JS80, DJ90, Jev93]. Celle-ci permet pourtant de relier l’action effective du champ de tachyon dans l’espace cible aux excitations du secteur singulet de la MQM. Le paramètre spectral de la MQM s’identifie asymptotiquement avec la coordonnée de Liouville, et le temps avec le boson libre  $X$ .

Nous avons également été avares en précision sur l’intégrabilité sous-jacente. Celle-ci joue pourtant un rôle prépondérant dans la théorie euclidienne [DMP93]. L’identification et l’exploitation d’une structure intégrable dans la MQM lorentzienne est un des objectifs à long terme de notre travail.

L’apport majeur de l’article [BHKM08] est de montrer la faisabilité de l’étude des cordes longues en utilisant l’approche chirale dans les secteurs non-singlets de la mécanique quantique matricielle. Dans le

chapitre suivant, nous expliquerons comment retrouver l'amplitude de diffusion des deux cordes longues à l'aide du modèle de matrice, ainsi que comment étendre ce calcul à un nombre quelconque de cordes longues, ou à une interaction entre tachyons et cordes longues.

## Annexe A Corrélateur de bord à deux points dans la limite $\mathfrak{b} \rightarrow 1$

Lorsque la charge centrale de la matière tend vers un, le paramètre  $\mathfrak{b}$  de la théorie de Liouville tend lui aussi vers un. Cette limite est singulière pour les corrélateurs [AI05], mais les divergences peuvent être éliminées en choisissant les normalisations II-15 et II-16 des opérateurs.<sup>8</sup>

### CORRÉLATEUR DE BORD À DEUX POINTS

La fonction de corrélation gravitationnelle de deux opérateurs de bord est principalement donnée par le coefficient de réflexion des opérateurs de bord  $d(E|_{s_1, s_2})$  de la gravité de Liouville,

$$\langle s_2 [U_E^+]^{s_1} [U_{-E}^-]^{s_2} \rangle = \frac{\pi \Lambda^Q d(E|_{s_1, s_2})}{i \sinh(2\pi E/\mathfrak{b})}, \quad \Lambda = (\pi \mu \gamma(\mathfrak{b}^2))^{1/2\mathfrak{b}}. \quad (\text{VI-33})$$

Ce coefficient s'exprime à l'aide des fonctions double sinus,  $\mathbf{S}$ ,

$$\begin{aligned} d(E|_{s_1, s_2}) = & \mathbf{S}\left(2iE + \frac{1}{\mathfrak{b}}\right) \mathbf{S}\left(\frac{Q}{2} - i(E + s_1 + s_2)\right) \mathbf{S}\left(\frac{Q}{2} - i(E + s_1 - s_2)\right) \\ & \times \mathbf{S}\left(\frac{Q}{2} - i(E - s_1 + s_2)\right) \mathbf{S}\left(\frac{Q}{2} - i(E - s_1 - s_2)\right). \end{aligned} \quad (\text{VI-34})$$

### FONCTION $f$

La limite  $\mathfrak{b} \rightarrow 1$  des fonctions double sinus n'est pas singulière, on utilisera cependant préférentiellement la fonction  $f$ , définie par

$$e^{if(x)} = \frac{e^{ix^2/2\pi + i\pi/12}}{\mathbf{S}(1 - ix/\pi)}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x d\zeta \left( \frac{\zeta}{\tanh \zeta} + \zeta \right). \quad (\text{VI-35})$$

Cette fonction satisfait une équation fonctionnelle de symétrie  $x \rightarrow -x$  et de pseudo-périodicité  $x \rightarrow x \pm i\pi$ ,

$$f(x) + f(-x) = \frac{x^2}{\pi} + \frac{\pi}{6}, \quad e^{if(x \pm i\pi)} = (1 - e^{2x})^{\mp 1} e^{if(x)}. \quad (\text{VI-36})$$

8. Pour les corrélateurs de bord, il reste cependant des divergences additives liées aux termes de contact. Ces termes décrivent des géométries dégénérées et sont analogues aux parties "non-singulières" des corrélateurs matriciels, ils peuvent être éliminés par soustraction.



Elle possède aussi une propriété de reproduction sous transformée de Fourier [FKV01, KLSTS02],

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{2ipx} e^{2\pi p} e^{if(\pi p)} = e^{\frac{7i\pi}{12}} e^{-2x} e^{-if(-x)}. \quad (\text{VI-37})$$

# MÉCANIQUE QUANTIQUE MATRICIELLE

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Mécanique Statistique Matricielle</b>	<b>145</b>
1.1	Discrétisation de l'action de corde	145
1.2	Décomposition sous $SU(N)$	147
1.3	Fermions libres	150
1.4	Obtention des autres secteurs	153
<b>2</b>	<b>Mécanique Quantique Matricielle</b>	<b>154</b>
2.1	Formalisme chirale	155
2.2	Secteur singulet	156
2.3	Tachyons	158
<b>3</b>	<b>Cordes longues</b>	<b>159</b>
3.1	Corde longue dans le formalisme $(X, P)$	159
3.2	Corde longue dans le formalisme chirale	160
3.3	Diffusion de $n$ cordes longues	161
3.4	Interaction entre un tachyon et une corde longue	164
<b>A</b>	<b>Calculs détaillés dans le formalisme chirale</b>	<b>166</b>
A.1	Fonction de partition	166
A.2	Deux tachyons	168
A.3	Une corde longue	170
A.4	Une corde longue et un tachyon	171

---

## Introduction

Nous savons maintenant, en partie grâce au modèle de matrice, que la théorie des cordes n'est valable que perturbativement dans un *background* donné. La série perturbative est une somme sur les topologies qui n'est, en général, pas sommable. Cependant, les théories en dimension  $D \leq 2$  ont une description duale matricielle qui permet l'étude des corrections non-perturbatives [She90, Dav91]. Jusqu'ici nous n'avons considérés ces modèles que dans la limite planaire où seules les surfaces de genre minimal contribuent (sphère, disque,...). Afin d'obtenir un développement topologique sur des surfaces continues, il faut utiliser une limite plus subtile : la **double limite d'échelle** [BK90, DS90, GM90b, GM90a]. La structure intégrable sous-jacente se traduit par une équation différentielle sur la susceptibilité, appelée **équation de corde**. Pour les théories de cordes minimales, décrite à l'aide d'un modèle à une ou deux matrices, ces équations appartiennent à la hiérarchie de Korteweg–de Vries (KdV) généralisée. Dans la théorie des cordes en deux dimensions, c'est la hiérarchie de Toda qui a pu être identifiée [KKK02]. L'intégrabilité permet la description de phénomènes non-perturbatifs tel que la condensation des vortex.

La discrétisation de la feuille d'univers des théories de cordes bidimensionnelles mènent à un modèle de matrice hermitienne dépendant du temps. Ce modèle peut s'interpréter soit comme une mécanique statistique, soit comme une mécanique quantique (MQM), suivant que l'on s'intéresse aux théories de cordes euclidienne ou lorentzienne. La symétrie  $SU(N)$  associée au modèle matriciel permet de décomposer les fonctions d'ondes en différents secteurs. Dans le secteur singulet, les fonctions d'ondes ne dépendent que des valeurs propres de la matrice, elles décrivent la théorie des cordes dans le *background* LDBT. Adaptant la méthode des polynômes orthogonaux ([BIZ80]) au cas de la MQM, il est possible de réinterpréter ces fonctions d'ondes dans une théorie de fermions libres. Au niveau fondamental, ces fermions remplissent une mer de Fermi donnée par le potentiel matriciel. Les excitations collectives de la mer de Fermi s'identifient aux modes tachyoniques de la théorie des cordes. En revanche, les vortex de la théorie euclidienne, tout comme les cordes longues de la théorie lorentzienne, appartiennent aux secteurs non-singulets.

L'objectif de ce chapitre est l'étude des cordes longues présentes dans les secteurs non-singulets de la mécanique quantique matricielle. Il y a deux manières d'approcher ce problème. La manière usuelle utilise les coordonnées et impulsions matricielles  $(X, P)$ . L'amplitude de diffusion des cordes y est obtenue à partir de la fonction d'onde, solution d'une équation de Schrödinger avec un terme d'interaction de type Calogero. Si le calcul est possible dans le secteur adjoint [Fid05], il semble difficilement réalisable dans les autres secteurs [BHKM08]. L'approche alternative, développée ici, consiste à prendre les coordonnées **chirales**  $X_{\pm} \sim X \pm P$ . Nous verrons que cette méthode combine de nombreux avantages, dont celui de ramener l'obtention de la matrice de diffusion au calcul de corrélateurs d'un modèle à deux matrices.

# 1 Mécanique Statistique Matricielle

## 1.1 Discrétisation de l'action de corde

La mécanique statistique matricielle peut être obtenue comme discrétisation de l'action de Polyakov euclidienne pour la corde unidimensionnelle [KM88]. La discrétisation de la somme sur les géométries est identique au cas des modèles à une matrice, ou du modèle  $O(n)$ . On s'intéresse donc aux triangulations d'une surface de genre  $h$ , et l'on définit  $\Gamma_h$  comme étant le réseau dual associé. On note  $X_\alpha$  la valeur du champ de corde  $X$  au vertex  $\alpha \in \Gamma_h$ , et la fonction de partition discrétisée se réduit à une somme sur les réseaux trivalents,

$$\mathcal{Z}_h = \sum_{\Gamma_h} e^{-\Lambda A(\Gamma_h)} \int \prod_{\alpha \in \Gamma_h} dX_\alpha e^{-\frac{1}{4\pi} \sum_{\langle \alpha\beta \rangle \in \Gamma_h} (X_\alpha - X_\beta)^2} \quad (\text{VII-1})$$

où, comme précédemment, on a introduit une constante cosmologique  $\Lambda$  afin de tenir compte de la taille du réseau. La fonction de partition de la théorie des cordes est définie perturbativement sur les topologies, chaque poignée de la surface correspondant à une auto-interaction, donc au recollement de deux diagrammes pantalons. On obtient ainsi un coefficient  $g_{\text{str}}^{2h}$  pour une feuille d'univers de genre  $h$ , et la fonction de partition est la somme sur les genres

$$\mathcal{Z}_{\text{str}} = \sum_{h=0}^{\infty} g_{\text{str}}^{2h-2} \mathcal{Z}_h, \quad (\text{VII-2})$$

où par convention la sphère est comptée avec un facteur  $g_{\text{str}}^{-2}$ . La constante de couplage pour l'interaction de corde peut être obtenue en ajoutant un terme dilatonique constant  $\Phi = \log g_{\text{str}}$  à l'action initiale. Dans la limite continue, l'action discrète se ramène à l'action suivante,

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{\langle \alpha\beta \rangle \in \Gamma_h} (X_\alpha - X_\beta)^2 + \Phi \chi + \Lambda A(\Gamma_h) \longrightarrow \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} [g^{ab} \partial_a X \partial_b X + R\Phi + \Lambda] \quad (\text{VII-3})$$

qui, après choix de la jauge conforme, donne l'action des cordes bidimensionnelles dans le *background* LDBT.

### FONCTION DE PARTITION DU MODÈLE MATRICIEL

On a vu que la somme sur les géométries pouvait être générée par le développement en diagrammes de Feynman d'un modèle de matrice. Supposons dans un premier temps que le boson soit compactifié sur un cercle de rayon  $R$ ,  $X \sim X + 2\pi R$ , comme c'est le cas pour le *background* du cigare. Afin de prendre en compte l'application de la feuille d'univers sur le segment  $[0, 2\pi R]$ , la matrice doit dépendre d'un indice

$$t \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} t'$$

FIGURE VII.1 – Propagateur matriciel pour le modèle  $c_M = 1$ .

continu que l'on identifiera avec le temps euclidien. Ainsi, nous allons considérer<sup>1</sup>

$$\mathcal{Z}_{\text{MSM}} = \int_{X(t+2\pi R)=X(t)} D[X] e^{-\beta \int_0^{2\pi R} dt \operatorname{tr} \left( \frac{1}{2} (\partial_t X)^2 + V(X) \right)}, \quad V(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3. \quad (\text{VII-4})$$

Pour des surfaces triangulées, le potentiel  $V$  est supposé cubique, mais nous verrons que dans la double limite d'échelle, seul le maximum local du potentiel joue un rôle. L'action matricielle précédente introduit un propagateur dépendant du temps  $\frac{1}{\beta} \delta_{ik} \delta_{jl} e^{-|t-t'|}$  (figure VII.1). Le développement de la fonction de partition VII-4 s'écrit comme une double somme sur les topologies et les réseaux (chapitre IV section 1.1),

$$\mathcal{Z}_{\text{MSM}} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\Gamma_h} N^{2-2h} \left( \frac{\beta}{N} \right)^{-A[\Gamma_h]/2} \int_0^{2\pi R} \prod_{\alpha \in \Gamma_h} dt_{\alpha} \prod_{\langle \alpha \beta \rangle \in \Gamma_h} e^{-|t_{\alpha} - t_{\beta}|}. \quad (\text{VII-5})$$

On remarque que le propagateur matriciel  $e^{-|t|}$  diffère du propagateur gaussien obtenu par la discrétisation de l'action de Polyakov. Cependant, dans l'espace des impulsions, ces deux propagateurs sont identiques au premier ordre pour un développement à faible impulsion. On suppose donc que la différence entre les deux propagateurs n'influence pas la limite continue (infrarouge) [KM88]. Enfin, ne voulant retenir uniquement les diagrammes connectés, il est nécessaire de prendre le logarithme de la fonction de partition.

## DOUBLE LIMITE D'ÉCHELLE

Contrairement à la limite planaire, la double limite d'échelle permet d'obtenir le développement topologique complet. Posons de nouveau  $\kappa = \sqrt{\beta/N}$ , la valeur critique  $\kappa_c$  pour laquelle l'aire des surfaces discrétisées diverge ne dépend pas du genre  $h$  de ces surfaces, et les fonctions de partition se comportent comme

$$\mathcal{Z}_{\text{MSM}}^{(h)} \sim N^{2(1-h)} (\kappa^2 - \kappa_c^2)^{2-\gamma_{\text{str}}(h)} + \text{Reg.}, \quad 2 - \gamma_{\text{str}}(h) = (1-h)(2 - \gamma_{\text{str}}(0)) \quad (\text{VII-6})$$

où  $\gamma_{\text{str}}(0) = 0$  dans le cas  $c_M = 1$ . La double limite d'échelle consiste à envoyer simultanément  $\beta$  vers l'infini, et la constante  $\kappa$  vers sa valeur critique, tout en fixant le rapport

$$g_{\text{str}}^2 = N^{-2} (\kappa^2 - \kappa_c^2)^{\gamma_{\text{str}}(0)-2}. \quad (\text{VII-7})$$

Nous reviendrons sur cette limite dans le cadre de l'étude du secteur singulet, nous verrons en particulier qu'elle permet de se restreindre à un potentiel matriciel quadratique.

1. Bien que les notations soient identiques, il faut prendre garde à ne pas confondre le champ bosonique  $X(z, \bar{z})$  avec la matrice  $X(t)$ ; le champ de corde s'identifie avec la coordonnée temporelle  $t$  du modèle matriciel.

**FORMULATION HAMILTONIENNE**

La fonction de partition  $\mathcal{Z}_{\text{MQM}}$  décrit la mécanique statistique d'une variable matricielle  $X(t)$ . Elle peut s'exprimer comme la trace sur le spectre d'un hamiltonien qui s'exprime en fonction de la matrice impulsion  $P$ , variable canoniquement conjuguée à la matrice  $X$ ,

$$\mathcal{H}[X, P] = \frac{1}{2}P^2 + V(X), \quad P_{ij} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X_{ji}}, \quad [X, P] = i\hbar, \quad \hbar = 1/\beta. \quad (\text{VII-8})$$

On remarque que si dans la limite planaire  $\hbar \rightarrow 0$  les matrices  $X$  et  $P$  commutent, ceci n'est plus vrai à l'ordre suivant dans la double limite d'échelle. La fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z}_{\text{MSM}} = \text{tr} e^{-2\pi R\beta\mathcal{H}} = \int D[X, P] e^{i\beta \int_0^{2\pi R} dt \text{tr} P\partial_t X} e^{-\beta \int_0^{2\pi R} dt \text{tr} (\frac{1}{2}P^2 + V(X))}. \quad (\text{VII-9})$$

**ESPACE CIBLE NON-COMPACT**

Par la suite, on s'intéresse au cas d'un espace cible non-compact pour la corde. Dans la limite d'un rayon de compactification infiniment grand, seule l'énergie de l'état fondamental  $E_0$  contribue à la fonction de partition,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{X(-T/2)=X(T/2)} D[X] e^{-\beta \int_{-T/2}^{T/2} dt \text{tr} (\frac{1}{2}(\partial_t X)^2 + V(X))} = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{tr} e^{-\beta T\mathcal{H}} \simeq e^{-\beta T E_0}. \quad (\text{VII-10})$$

On obtient donc la relation suivante entre le modèle matriciel et la théorie de corde,

$$\mathcal{Z}_{\text{str}} \propto \lim_{\text{DE}} -\beta E_0 = \lim_{\text{DE}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{Z}_{\text{MSM}}}{T} \quad (\text{VII-11})$$

où  $\lim_{\text{DE}}$  désigne la double limite d'échelle.

**1.2 Décomposition sous  $SU(N)$** 

Afin de déterminer l'énergie  $E_0$  de l'état fondamental, nous allons diagonaliser la matrice  $X$ , séparant les degrés de liberté angulaires et les valeurs propres. L'intérêt majeur des modèles de matrices provient du fait que la description des  $N^2$  degrés de liberté matriciels se ramène à celle de  $N$  valeurs propres. Dans le cas  $c_M = 1$ , cette simplification n'a lieu que dans le secteur singulet. Nous allons montrer que c'est justement à ce secteur qu'appartient la fonction propre de l'état fondamental.

On diagonalise la matrice  $X$  en posant  $X = \Omega^\dagger x \Omega$  où  $x_{ij} = x_i \delta_{ij}$  est une matrice diagonale et  $\Omega \in SU(N)$  [MO80]. La diagonalisation de la mesure ne pose aucun problème, et l'on obtient l'habituel déterminant de Vandermonde,

$$D[X] = D[\Omega] \prod_{i=1}^N D[x_i] \Delta(x)^2, \quad \Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j). \quad (\text{VII-12})$$

Cependant, la diagonalisation du terme cinétique est plus complexe car les matrices  $X(t)$  prises en des temps différents ne commutent pas. Par conséquent, ce terme cinétique brise localement l'invariance sous  $SU(N)$ , ce qui se traduit par

$$\text{tr} (\partial_t X)^2 = \text{tr} (\partial_t x)^2 + \text{tr} [x, \partial_t \Omega \Omega^\dagger]^2. \quad (\text{VII-13})$$

La matrice  $\partial_t \Omega \Omega^\dagger$  peut se décomposer sur les générateurs de  $SU(N)$  ;

$$\partial_t \Omega \Omega^\dagger = \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i H_i + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{i < j} \left( \dot{\alpha}_{ij} T_{ij} + \dot{\beta}_{ij} \tilde{T}_{ij} \right) \quad (\text{VII-14})$$

où les  $H_i$  sont les générateurs diagonaux de la sous algèbre de Cartan, et les autres générateurs sont donnés par  $T_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$  et  $\tilde{T}_{ij} = -i(E_{ij} - E_{ji})$  avec les matrices élémentaires  $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$ . Ainsi, le lagrangien de l'action euclidienne matricielle s'écrit

$$\mathcal{L} = \sum_i \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 + V(x_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 (\dot{\alpha}_{ij}^2 + \dot{\beta}_{ij}^2). \quad (\text{VII-15})$$

## HAMILTONIEN

Le Jacobien du changement de variable modifie le terme cinétique de l'hamiltonien qui dépend alors du déterminant de Vandermonde,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{\Delta(x)} \sum_i \partial_i^2 \Delta(x) + \sum_i V(x_i) + \sum_{i < j} \frac{\Pi_{ij}^2 + \tilde{\Pi}_{ij}^2}{(x_i - x_j)^2}, \quad (\text{VII-16})$$

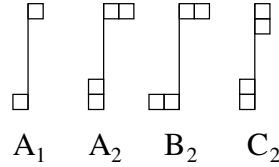
où  $\partial_i = \partial / \partial x_i$ , et  $\Pi_{ij}$  et  $\tilde{\Pi}_{ij}$  sont les impulsions associées aux variables  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$ . Le lagrangien VII-15 ne dépend pas des variables  $\alpha_i$ , il s'ensuit que les fonctions d'onde satisfont la contrainte  $\Pi_i \Phi = 0$  où  $\Pi_i$  est l'impulsion associée à  $\alpha_i$ . Le problème spectral général est donc donné par

$$\mathcal{H} \Phi(x_i, \Omega) = E \Phi(x_i, \Omega), \quad \Pi_i \Phi(x_i, \Omega) = 0. \quad (\text{VII-17})$$

## SYMÉTRIE $SU(N)$

L'action matricielle est invariante sous la symétrie globale  $X \rightarrow \Omega X \Omega^\dagger$  avec  $\Omega \in SU(N)$ . Les fonctions d'ondes stationnaires appartiennent à différents secteurs, selon leur transformation sous cette symétrie,

$$\Phi_I(\Omega X \Omega^\dagger) = \sum_{J=1}^{d_{\mathcal{R}}} \mathcal{R}_I^J(\Omega) \Phi_J(X) \quad (\text{VII-18})$$

FIGURE VII.2 – Représentations irréductibles autorisées de  $SU(N)$  pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .

où  $d_{\mathcal{R}}$  est la dimension de la représentation  $\mathcal{R}$ . A première vue, cette symétrie permet de séparer les degrés de liberté angulaires et de valeurs propres. Il faut cependant prendre en compte la contrainte  $\Pi_i \Phi = 0$ . Celle-ci fait suite à l'invariance sous la permutation des valeurs propres :  $x \rightarrow HxH^\dagger$  et  $\Omega \rightarrow H\Omega$ , la matrice de permutation  $H$  étant une matrice diagonale de  $SU(N)$ . Les fonctions d'onde doivent être symétriques dans leur dépendance en valeurs propres, il faut se restreindre aux représentations de  $SU(N)$  de poids nul.

Les représentations irréductibles de  $SU(N)$  autorisées sont caractérisées par un tableau de Young de  $i + j$  colonnes, ayant des nombres de boîtes donnés par (de la gauche vers la droite)

$$(N - m_1, N - n_2, \dots, N - m_j, n_i, \dots, n_2, n_1), \quad \sum_{k=1}^i n_k = \sum_{k=1}^j m_k = n(\mathcal{R}) \quad (\text{VII-19})$$

avec les contraintes  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_i \leq \frac{N}{2}$ ,  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_j \leq \frac{N}{2}$ . Il est d'usage de remplacer les  $N - m_k$  boîtes des  $j$  premières colonnes par  $m_k$  "anti-boîtes" (figure VII.2). La représentation la plus simple est la représentation adjointe pour laquelle  $n(\mathcal{R}) = 1$ . Les représentations irréductibles possédant  $n(\mathcal{R})$  boîtes sont contenues dans le produit de  $n(\mathcal{R})$  représentations adjointes. Les fonctions d'ondes du secteur adjoint ont été obtenues dans [MO80]. Nous reviendrons sur ces fonctions d'onde dans le formalisme chiral à la section 3.3.

### SECTEUR SINGULET

En examinant l'hamiltonien diagonalisé VII-16, on remarque que la partie angulaire est toujours positive, le minimum d'énergie est donc obtenu en annulant cette partie. Les impulsions  $\Pi_{ij}$  et  $\tilde{\Pi}_{ij}$  sont associées aux rotations gauches  $\Omega \rightarrow U\Omega$ , les conditions  $\Pi_{ij}\Phi = \tilde{\Pi}_{ij}\Phi = 0$  imposent donc que la fonction d'onde appartienne au secteur singulet. Dans ce secteur, la représentation de  $SU(N)$  est triviale, et la transformation VII-18 permet de diagonaliser la matrice. Par conséquent, la fonction d'onde ne dépend pas des degrés de liberté angulaires. L'hamiltonien restreint à ce secteur s'écrit

$$\mathcal{H}_0 \cdot = -\frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{\Delta(x)} \sum_{i=1}^N \partial_i^2 (\Delta(x) \cdot) + \sum_{i=1}^N V(x_i) \cdot \quad (\text{VII-20})$$



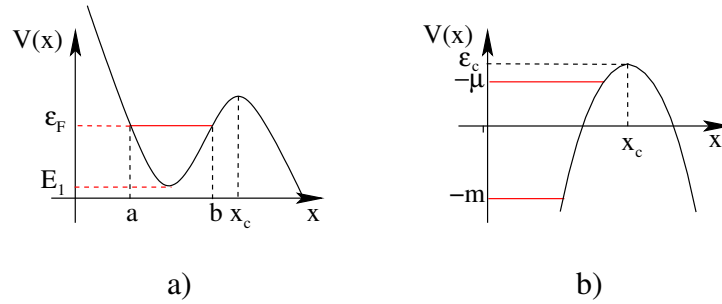


FIGURE VII.3 – a) Remplissage de la mer de Fermi b) La double limite d'échelle ne voit que la surface de la mer de Fermi.

### 1.3 Fermions libres

On note  $\Phi_s$  la fonction d'onde de l'état fondamental dans le secteur singulet, d'énergie  $E_0$ . En raison des contraintes  $\Pi_i \Phi_s = 0$ , cette fonction est symétrique dans les valeurs propres. On préfère toutefois utiliser une fonction d'onde antisymétrique qui permet de réabsorber les déterminants de Vandermonde de l'hamiltonien VII-20,

$$\Psi_s(\Lambda) = \Delta(x) \Phi_s(\Lambda), \quad \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\hbar^2}{2} \partial_i^2 + V(x_i) \right) \Psi_s = E_0 \Psi_s. \quad (\text{VII-21})$$

L'hamiltonien du secteur singulet décrit un ensemble de  $N$  fermions sans interactions, piégés par le potentiel  $V(x)$  [BIPZ78]. L'état fondamental correspond au remplissage des niveaux d'énergie du potentiel jusqu'à l'énergie de Fermi  $E_N = \epsilon_F$  (figure VII.3). Les niveaux excités sont les excitations particule-trou de la théorie de Dirac. La fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par le déterminant de Slater des fonctions d'ondes à un seul fermion  $\psi_E$ ,

$$\Psi_s(X) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{ij} \psi_{E_i}(x_j), \quad \left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_E(x) = E \psi_E(x). \quad (\text{VII-22})$$

La normalisation des états à une particule  $\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle = \delta(E - E')$  induit la normalisation  $\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle = 1$  pour la fonction d'onde à  $N$  corps. L'énergie  $E_0$  de l'état fondamental matriciel est la somme des énergies individuelles, et l'on introduit aussi la densité d'énergie  $\rho(E)$ ,

$$E_0 = \sum_{i=1}^N E_i, \quad \rho(E) = \hbar \sum_{i=1}^N \delta(E - E_i). \quad (\text{VII-23})$$

Nous allons voir que cette représentation du secteur singulet est extrêmement puissante, elle permet notamment d'obtenir la fonction de partition de la théorie des cordes à tous les ordres en  $g_{\text{str}}$  grâce à la double limite d'échelle [GK90], ainsi que l'étude des excitations tachyoniques.

**APPROXIMATION WKB**

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , le spectre en énergie devient continu,

$$\hbar E_0 = \int_{E_1}^{\epsilon_F} E \rho(E) dE, \quad \kappa^{-2} = \hbar N = \int_{E_1}^{\epsilon_F} \rho(E) dE. \quad (\text{VII-24})$$

De plus, puisque  $\hbar \rightarrow 0$ , il est possible d'utiliser l'approche semi-classique WKB. Soit  $h(x, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$  l'énergie classique des fermions, le bord de la mer de Fermi correspond à une énergie  $h(x, p) = \epsilon_F$ . Le nombre de fermions est donné par l'aire de la mer de Fermi, tandis que l'énergie de l'état fondamental matriciel en est l'énergie moyenne

$$N = \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \Theta(\epsilon_F - h(x, p)), \quad E_0 = \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} h(x, p) \Theta(\epsilon_F - h(x, p)), \quad (\text{VII-25})$$

où  $\Theta$  désigne la fonction saut de Heaviside. Ceci permet de déterminer la densité de niveaux  $\rho = \hbar dN/d\epsilon_F$ ,

$$\rho(\epsilon_F) = \int \frac{dx dp}{2\pi} \delta(\epsilon_F - h(x, p)) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(\epsilon_F - V(x))}}. \quad (\text{VII-26})$$

Les extrémités  $a, b$  de la trajectoire classique peuvent être obtenues en fonction de  $N$  via la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld,

$$\int_a^b dx \sqrt{2(\epsilon_F - V(x))} = \pi\hbar N. \quad (\text{VII-27})$$

**DOUBLE LIMITE D'ÉCHELLE**

Les expressions intégrales de  $\rho$ ,  $N$  et  $E$  divergent lorsque le remplissage en valeurs propres  $\epsilon_F$  atteint le maximum du potentiel  $\epsilon_c$  (figure VII.3) [BKZ90],

$$V'(x_c) = 0, \quad V(x_c) = \epsilon_c, \quad V''(x_c) < 0. \quad (\text{VII-28})$$

La double limite d'échelle consiste à prendre simultanément la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$  et la limite  $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_c$  [KM88]. On développe alors le potentiel autour de son maximum en posant la variable renormalisée  $\xi = (x - x_c)/\sqrt{\hbar}$ ,

$$V(x) \simeq \epsilon_c + \frac{1}{2}\hbar\xi^2 V''(x_c) + O(\hbar^{3/2}). \quad (\text{VII-29})$$

Les termes d'ordre plus élevés du potentiel ne jouent aucun rôle dans cette limite, comme on peut le voir à partir de l'équation de Schrödinger fermionique,

$$\left( -\frac{1}{2}\partial_\xi^2 + \frac{1}{2}V''(x_c)\xi^2 + O(\hbar^{1/2}) \right) \psi_E(\xi) = (E - \epsilon_c)\hbar^{-1}\psi_E(\xi). \quad (\text{VII-30})$$

Il en est de même pour les intégrales VII-24 dans lesquelles les corrections dues aux ordres plus élevés du potentiel disparaissent. On peut donc se ramener à l'étude d'un potentiel harmonique renversé  $V(x) = -\frac{1}{2}x^2$ , pour lequel  $x_c = \epsilon_c = 0$ . Cette dépendance quadratique dans le potentiel caractérise l'universalité de la limite continue pour ce modèle de matrice.

Le potentiel harmonique renversé contient deux régions distinctes, ou deux mers de Fermi, appartenant respectivement aux parties positives et négatives de l'axe réel. La perturbation de chacune de ces mers de Fermi décrit une théorie de corde dans le *background* LDBT [MPR92]. On peut alors définir deux types de théories, notés I et II. Dans la théorie de type II, on n'impose aucune restriction sur les valeurs propres, et le modèle de matrice tient compte de l'effet tunnel entre les deux régions. Au contraire, dans la théorie de type I, on applique la contrainte  $x_i > 0$  aux valeurs propres et la matrice de diffusion est unitaire. Ces deux théories sont identiques perturbativement, à un facteur deux près. Par la suite, nous prendrons les conventions de [AK05] : les valeurs propres sont supposées positives, mais afin de simplifier les calculs nous prendrons un noyau exponentiel pour la réflexion des fonctions d'ondes fermioniques, ce qui correspond à une théorie de type II. Cela induit une composante imaginaire exponentiellement faible pour le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}(E)$  (VII-50) qui brise l'unitarité des matrices de diffusion.

### CALCUL DE LA DENSITÉ

Dans la double limite d'échelle, l'aire de la mer de Fermi diverge, on la régularise en introduisant un *cut-off* ultraviolet  $-m = E_1/\hbar \sim N$ . Ce *cut-off* peut être vu comme un effet résiduel des termes d'ordre supérieur du potentiel. Dans la double limite d'échelle, on utilise une variable d'énergie renormalisée  $\epsilon = E/\hbar$ , qui varie entre  $-\mu = \epsilon_F/\hbar$  et  $-m = E_1/\hbar$ ,

$$\beta E_0 = \int_{-m}^{-\mu} \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon, \quad \kappa^{-2} = \hbar N = \hbar \int_{-m}^{-\mu} \rho(\epsilon) d\epsilon \quad (\text{VII-31})$$

avec la densité suivante,

$$\rho(\mu) = \int_{a/\sqrt{\hbar}}^{b/\sqrt{\hbar}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 2\mu}} \simeq \frac{1}{2\pi} \log(m/\mu). \quad (\text{VII-32})$$

Jetant le terme lié au *cut-off*, on trouve donc une densité logarithmique [KM88]. On peut alors en déduire l'énergie de l'état fondamental, ainsi que la chaleur spécifique  $\partial_N^2 E_0$ ,

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_0}{\partial \mu} = \mu \rho(-\mu), \quad \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2} \simeq -\frac{2\pi}{\log \mu}. \quad (\text{VII-33})$$

Cette dépendance logarithmique de la chaleur spécifique en  $\mu$  est caractéristique de la théorie des cordes bidimensionnelle, la constante  $\mu$  étant identifiée avec la constante cosmologique de la gravité de Liouville de potentiel  $\mu \int e^{2\phi}$ . Le calcul se restreint ici au premier ordre, mais il est possible d'utiliser l'approximation semi-classique pour calculer la densité à tous les ordres, cette expression pouvant ensuite être

resommée [GM90c]. Dans la section 2.2, nous verrons comment obtenir cette densité à partir du formalisme chirale. On obtient ensuite par intégration le développement de l'énergie fondamentale  $E_0$  en  $\mu$ .

### CONSTANTE COSMOLOGIQUE

Afin d'obtenir le développement topologique de la fonction de partition de corde, examinons la relation entre les constantes cosmologiques nues  $\kappa = 1/\sqrt{N\hbar}$  et renormalisées  $\mu$ . Dans le cas des modèles de matrices  $c < 1$ , la renormalisation de la constante cosmologique est simplement multiplicative,  $\kappa = \kappa_c = \epsilon^2 \mu$ . Ce n'est plus le cas pour le modèle  $c_M = 1$ , la relation entre les constantes cosmologiques dérive de la relation entre la densité et le nombre de niveaux (VII-31). Posant  $\hbar\Delta = \kappa^{-2} - \kappa_c^{-2}$ , on exprime  $\Delta$  en fonction de  $\mu$  en intégrant la densité  $\rho(\mu)$ ,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\mu} = -\rho(\mu), \quad \frac{\partial E_0}{\partial\Delta} = -\hbar\mu. \quad (\text{VII-34})$$

Intégrant l'équation de gauche, on en déduit l'expression perturbative pour la fonction de partition de la théorie des cordes  $\beta E_0(\Delta)$  avec  $\Delta \propto 1/g_{\text{str}}$ .

## 1.4 Obtention des autres secteurs

Revenons brièvement au cas d'une corde compactifiée. La fonction de partition  $\mathcal{Z}_{\text{MSM}}$  est la somme des énergies sur tous les secteurs de  $SU(N)$ . Afin de restreindre cette trace sur les états du secteur singulet, on peut introduire un champ de jauge matriciel  $A(t)$  qui va agir comme un multiplicateur de Lagrange,

$$\mathcal{Z}_s = \int D[X, A] e^{-\beta \int dt \text{tr} [\frac{1}{2}(\nabla_A X)^2 + V(X)]}, \quad \nabla_A X = \partial_t X - i[A, X]. \quad (\text{VII-35})$$

En formulation hamiltonienne, l'intégration sur le champ  $A$  fait apparaître une fonction  $\delta$  qui contraint les champs  $X(t)$  et  $P(t)$  à commuter,

$$\int D[A] e^{\beta \int dt \text{tr} P[A, X]} = \delta([X(t), P(t)]). \quad (\text{VII-36})$$

Cette contrainte sélectionne naturellement le secteur singulet. Le champ  $A(t)$  jauge ici le groupe de symétrie  $SU(N)$ , rendant l'action invariante sous la symétrie locale  $X \rightarrow \Omega X \Omega^\dagger$ ,  $P \rightarrow \Omega P \Omega^\dagger$  et  $A \rightarrow A - i\Omega^\dagger \dot{\Omega}$ , où  $\Omega(t) \in SU(N)$ .

### LIGNES DE WILSON

Pour une corde compactifiée, la fonction de partition dans un secteur de représentation  $\mathcal{R}$  quelconque est obtenue en modifiant les conditions de cyclicité dans l'intégrale de chemin à l'aide d'une matrice de

*twist* [BK93]. Ce *twist* peut être réalisé grâce au champ de jauge, en introduisant une boucle de Wilson dans la représentation  $\mathcal{R}$ . Dans la limite de rayon de compactification infini, ces boucles deviennent des lignes de Wilson, et l'on étudie les fonctions de partition

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{R}} = \int D[X, A] e^{-\beta \int dt \operatorname{tr} [(\nabla_A X)^2 + V(X)]} \operatorname{tr}_{\mathcal{R}} e^{i \int dt A}. \quad (\text{VII-37})$$

## HAMILTONIEN

Les fonctions de partitions  $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}$  sont données par la trace sur les niveaux d'énergie des hamiltoniens [BK93]

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = \left[ \sum_{i=1}^N \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + V(x_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{T_{ij}^{\mathcal{R}} T_{ji}^{\mathcal{R}}}{(x_i - x_j)^2} \right] P_0. \quad (\text{VII-38})$$

Ces hamiltoniens agissent sur les fonctions d'ondes antisymétriques  $\Psi = \Delta\Phi$ ,  $P_0$  est le projecteur sur les représentations de poids nul ( $\Pi_i \Phi = 0$ ), et  $T_{ij}^{\mathcal{R}}$  est le générateur  $T_{ij}$  de  $SU(N)$  dans la représentation  $\mathcal{R}$ . L'hamiltonien contient donc un terme d'interaction de type Calogero dont la forme précise dépend de la représentation. On montre que le *gap* en énergie entre les états fondamentaux du secteur singulet et des autres secteurs est infini dans la double limite d'échelle [GK90]. Il existe donc une infinité d'excitations de l'état singulet, les tachyons, qui ont une énergie plus basse que l'état fondamental dans les autres secteurs. Dans le secteur adjoint, cette énergie infinie correspond à l'énergie de la corde longue [Mal05].

## 2 Mécanique Quantique Matricielle

On cherche maintenant à décrire la théorie des cordes lorentzienne. Rappelons que nous avons fait le choix de jauge qui identifie la coordonnée  $X$  de l'espace cible avec le temps de la feuille d'univers. Pour obtenir une théorie dans un espace de signature Minkowskienne, il faut effectuer une rotation de Wick sur le champ  $X$ . Dans le modèle de matrice, ce champ s'identifie avec la coordonnée temporelle des matrices. Sous la rotation  $t \rightarrow it$ , l'action matricielle euclidienne se transforme en

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ \frac{1}{2} (\partial_t X)^2 - V(X) \right]. \quad (\text{VII-39})$$

Au lieu de s'intéresser à la fonction de partition, on va maintenant étudier la mécanique quantique associée à l'hamiltonien VII-8. On va en particulier s'attacher à calculer les amplitudes de diffusion des états de cette théorie. Ces amplitudes peuvent être identifiées directement dans la théorie des cordes duale.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons travailler dans la limite planaire, avec un potentiel harmonique renversé. De plus, le facteur  $\beta = 1/\hbar$  devant l'action est absorbé par une redéfinition de la variable

matricielle  $X \rightarrow X/\sqrt{\hbar}$ . On travaille donc directement avec la variable spectrale  $\xi = x/\sqrt{\hbar}$ , et les énergies renormalisées  $E \in [-m, -\mu]$ . La limite planaire correspond au premier ordre du développement en  $1/N$ , en comptabilisant les facteurs matriciels  $X \sim \sqrt{N}$ .

## 2.1 Formalisme chirale

Les calculs effectués précédemment ont été réalisés en utilisant des fonctions d'onde exprimées dans la base des coordonnées matricielles  $\Psi_s(X) = \langle X | \Psi_s \rangle$ . Il est aussi possible de travailler dans les bases chirales  $X_{\pm} \sim X \pm P$  [AKK02]. L'avantage principal est de transformer l'hamiltonien, quadratique en  $X$  et  $P$ , en une forme bilinéaire,

$$X_{\pm} = \frac{X \pm P}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{1}{2} \text{tr} (X_+ X_- + X_- X_+). \quad (\text{VII-40})$$

Les variables chirales  $X_{\pm}$  s'apparentent aux coordonnées du cône de lumière, elles sont par conséquent totalement adaptées au calcul des amplitudes de diffusion. En outre, elles obéissent à une relation de commutation canonique, les bases associées sont donc reliées par transformée de Fourier,

$$[(X_+)_{ij}, (X_-)_{kl}] = -i\delta_{il}\delta_{jk} \implies \langle X_{\pm} | = \int dX_{\mp} e^{\mp i \text{tr} X_+ X_-} \langle X_{\mp} |. \quad (\text{VII-41})$$

On en déduit aussi la représentations des opérateurs dans les différentes bases,

$$\langle X_+ | (X_-)_{kl} = i \frac{\partial}{\partial X_+ lk} \langle X_+ |, \quad \langle X_- | (X_+)_{kl} = -i \frac{\partial}{\partial X_- lk} \langle X_- |. \quad (\text{VII-42})$$

Enfin, pour obtenir les espaces de Hilbert, il faut définir un produit scalaire sur les fonctions d'ondes :

$$\langle \Phi | \Phi' \rangle = \int dX_{\pm} \langle \Phi | X_{\pm} \rangle \langle X_{\pm} | \Phi' \rangle = \int dX_{\pm} \overline{\Phi(X_{\pm})} \Phi'(X_{\pm}). \quad (\text{VII-43})$$

## EQUATION DE SCHRÖDINGER

La simplification de l'hamiltonien (VII-40) est essentielle car elle permet de résoudre l'évolution temporelle des fonctions d'ondes. En effet, l'équation de Schrödinger associée est du premier ordre dans les représentations  $|X_{\pm} \rangle$ ,

$$\partial_t \Phi_{\pm}(X_{\pm}, t) = \mp \left[ \text{tr} \left( X_{\pm} \frac{\partial}{\partial X_{\pm}} \right) + \frac{N^2}{2} \right] \Phi(X_{\pm}, t). \quad (\text{VII-44})$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\Phi_{\pm}(X_{\pm}, t) = e^{\mp \frac{N^2}{2} t} \Phi_{\pm}(e^{\mp t} X_{\pm}). \quad (\text{VII-45})$$

On remarque que les fonctions d'onde  $\Phi_{\pm}$  disparaissent en  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $\Phi_+$  décrit donc un état entrant, et  $\Phi_-$  un état sortant, d'où l'interprétation des valeurs propres des matrices  $X_{\pm}$  comme des variables du cône de lumière.

## 2.2 Secteur singulet

L'invariance globale  $SU(N)$  de la théorie ne dépend pas de la base dans laquelle on l'exprime, en particulier l'hamiltonien chirale VII-40 est invariant sous  $X_+ \rightarrow \Omega X_+ \Omega^\dagger$ ,  $X_- \rightarrow \Omega^\dagger X_- \Omega$  pour  $\Omega \in SU(N)$ . Les fonctions d'onde dans les bases  $\langle X_\pm |$  se décomposent donc aussi sur les représentations  $\mathcal{R}$ . De nouveau, les fonctions d'ondes antisymétrisées  $\Psi_s^\pm = \Delta \Phi_s^\pm$  de l'état fondamental du secteur singulet sont données par un déterminant de Slater,

$$\langle X_\pm | \Psi_s^\pm \rangle = \Psi_s^\pm(x^\pm) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{ij} \psi_{E_i}^\pm(x_j^\pm), \quad \mp i \left( x^\pm \partial_\pm + \frac{N}{2} \right) \psi_E^\pm(x^\pm) = E \psi_E^\pm(x^\pm) \quad (\text{VII-46})$$

et la restriction des valeurs propres à la partie positive de l'axe réel se traduit par la condition  $x_\pm > 0$ . L'expression des fonctions d'onde à un fermion est relativement compliquée dans la base  $\langle x |$ , puisqu'elle fait intervenir des fonctions cylindriques paraboliques. Au contraire, les fonctions d'ondes entrantes et sortantes  $|\psi_E^\pm \rangle$  s'expriment naturellement dans les coordonnées chirales associées,

$$\psi_E^\pm(x_\pm) = \langle x_\pm | \psi_E^\pm \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x_\pm^{\pm iE - \frac{1}{2}}. \quad (\text{VII-47})$$

Remarquons que l'on a normalisé ces fonctions d'ondes en position et énergie,

$$\begin{aligned} \langle \psi_E^\pm | \psi_{E'}^\pm \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_\pm \overline{\psi_E^\pm(x_\pm)} \psi_{E'}^\pm(x_\pm) = \delta(E - E'), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dE \overline{\psi_E^\pm(x_\pm)} \psi_E^\pm(x'_\pm) &= \langle x'_\pm | \int dE |\psi_E^\pm \rangle \langle \psi_E^\pm | x_\pm \rangle = \delta(x_\pm - x'_\pm). \end{aligned} \quad (\text{VII-48})$$

### COEFFICIENT DE RÉFLEXION

Les fonctions d'ondes entrantes et sortantes sont reliées par un changement de base, obtenu via un noyau exponentiel [AK05],

$$\langle x_- | = \int_0^\infty dx_+ e^{ix_+ x_-} \langle x_+ |. \quad (\text{VII-49})$$

Utilisant l'expression précédente des fonctions d'onde, on peut effectuer cette intégration et en déduire le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}(E)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \psi_E^- | \psi_{E'}^+ \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx_+ dx_- e^{ix_+ x_-} x_-^{iE-1/2} x_+^{iE'-1/2} = \mathcal{R}(E) \delta(E - E'), \\ \text{avec } \mathcal{R}(E) &= e^{i\pi/4} e^{-\pi E/2} \Gamma(1/2 + iE). \end{aligned} \quad (\text{VII-50})$$

### MER DE FERMÍ

Dans l'espace des phases  $(x_+, x_-)$ , les trajectoires classiques sont des hyperboles  $x_+ x_- = -E$  et la

mer de Fermi correspond à la région<sup>2</sup>

$$\mu < x_+x_- < \mathbf{m}, \quad x_{\pm} < \sqrt{\mathbf{m}} \quad (\text{VII-51})$$

où en plus du *cut-off* en énergie, nous avons imposé un mur en  $x_{\pm} = \sqrt{\mathbf{m}}$ . Dans ce formalisme, le calcul de la densité d'énergie au premier ordre est relativement simple,

$$\rho_0(\mu) = \int \frac{dx_+dx_-}{2\pi} \delta(\mu - x_+x_-) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu/\sqrt{\mathbf{m}}}^{\sqrt{\mathbf{m}}} \frac{dx_+}{x_+} = \frac{1}{2\pi} \log(\mathbf{m}/\mu). \quad (\text{VII-52})$$

Ce *cut-off* permet aussi de contrôler la divergence du produit des états entrant et sortant VII-50 à énergie coïncidente,

$$\langle \psi_E^- | \psi_E^+ \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{\mathbf{m}}} dx_+ dx_- e^{ix_+x_-} x_-^{iE-1/2} x_+^{iE-1/2} \simeq \mathcal{R}(E) \rho_0(E). \quad (\text{VII-53})$$

On peut approcher cette intégrale en utilisant la méthode du col [AK05], on trouve alors en première approximation la densité  $\rho_0(-E) = \frac{1}{2\pi} \log(\mathbf{m}/E)$ .

## DENSITÉ

Le *cut-off*  $\mathbf{m}$  agit comme un mur réfléchissant placé à la distance  $\sqrt{\mathbf{m}}$  pour les fermions : aux points  $x_{\pm} = \sqrt{\mathbf{m}}$ , les fonctions d'onde entrantes et sortantes coïncident. Cette condition de bord impose une discrétisation des énergies,

$$\psi_E^+(x_-) = \psi_E^-(x_-) \Big|_{x_- = \sqrt{\mathbf{m}}} \implies \mathcal{R}(E) = \mathbf{m}^{iE}. \quad (\text{VII-54})$$

Dans la limite continue, on peut dériver cette restriction, afin d'obtenir la densité d'énergie,

$$-\log \mathcal{R}(E) + iE \log \mathbf{m} = 2i\pi n \implies \rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{\log \mathbf{m}}{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \frac{d}{dE} \log \mathcal{R}(E). \quad (\text{VII-55})$$

On retrouve en première approximation la densité  $\rho_0$ .

## FONCTION DE PARTITION CHIRALE

On calcule en appendice A.1 le produit d'un état singulet entrant et sortant. L'objectif premier est de donner un exemple simple d'emploi du formalisme chirale. Toutefois, cette quantité joue un rôle important dans la théorie euclidienne compactifiée. En effet, lorsque l'on introduit des perturbations intégrables de la mer de Fermi, cette quantité s'identifie à la fonction de partition grand canonique, qui correspond à la

2. En perturbant ce domaine, il est possible d'obtenir d'autres *background* de la théorie des cordes, c'est la stratégie employée dans [AKK02, AK03].



fonction  $\tau$  de la hiérarchie de Toda. Celle-ci permet le calcul des corrélateurs de tachyons à tous les ordres [AKK03, AK05, Kos03].

Dans la théorie lorentzienne, l'interprétation de ce calcul est légèrement différente. L'état singulet décrit le remplissage de la mer de Fermi jusqu'à l'énergie  $-\mu$ . Les tachyons sont des excitations collectives de cette mer de Fermi. On peut donc interpréter l'état singulet comme un "vide" de la théorie à partir duquel sont créés les états de tachyons et cordes longues. Dans l'appendice A.1, on montre que cette amplitude de diffusion, définie comme une intégrale de chemin sur les matrices  $X_{\pm}(t)$ , peut se ramener à celui d'une fonction de partition d'un modèle de matrice. Le potentiel de ces matrices est donné par les fonctions d'onde des états singulets fondamentaux. Malheureusement, leur expression est implicite : ils dépendent des valeurs propres des matrices, et ne peuvent s'écrire simplement comme fonction des matrices elles-mêmes. La réduction de l'intégrale de chemin en intégrale de matrice est valable pour toutes les amplitudes de diffusion, elle est donc au coeur des calculs présentés ci-dessous.

## 2.3 Tachyons

Les corrélateurs des opérateurs de tachyons ont été calculés par G. Moore [Moo92a] en utilisant un formalisme de seconde quantification pour les fermions. Dans ce langage, les tachyons correspondent à des excitations particule-trou au dessus de la mer de Fermi, et l'on peut facilement obtenir l'expression des fonctions de corrélation à  $n$  tachyons sur la sphère. En définissant d'astucieuses règles diagrammatiques, il est possible d'étendre ce calcul à tous les ordres et de tester l'unitarité de la matrice de diffusion [MPR92]. Dans la théorie euclidienne compactifiée, la fonction génératrice des corrélateurs tachyoniques a aussi pu être calculée [DMP93], elle correspond à une perturbation de l'action de corde par des opérateurs de vertex.

Nous allons utiliser ici une approche différente pour dériver le coefficient de réflexion d'un tachyon par le potentiel de Liouville. Celle-ci sera employée ci-dessous pour l'étude des cordes longues. On introduit tout d'abord les opérateurs de création et d'annihilation des tachyons, diagonaux dans le formalisme chiral,

$$\langle X_{\pm} | T_E^{\pm} = \text{tr } X_{\pm}^{\pm iE} \langle X_{\pm} |. \quad (\text{VII-56})$$

Les traces de matrices élevées à une puissance imaginaire s'avérant délicates à manipuler, on utilise la transformée de Mellin afin de se ramener aux fonctions génératrices habituelles des modèles de matrice,

$$T_{\xi}^{\pm} = \pm \frac{i}{2\xi} \int \frac{dE}{\sinh \pi E} T_E^{\pm} \xi^{\mp iE}, \quad \langle X_{\pm} | T_{\xi}^{\pm} = \text{tr} \frac{1}{\xi + X_{\pm}} \langle X_{\pm} |. \quad (\text{VII-57})$$

Comme pour le produit des fonctions propres  $\Phi_s^{\pm}$ , la matrice de diffusion du tachyon se réduit au calcul

du corrélateur de deux traces simples dans le modèle à deux matrices,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_s^- | T_{\xi^-}^- T_{\xi^+}^+ | \Phi_s^+ \rangle &= \int dX_+ dX_- \langle \Phi_s^- | T_{\xi^-}^- | X_- \rangle \langle X_- | X_+ \rangle \langle X_+ | T_{\xi^+}^+ | \Phi_s^+ \rangle \\
&= \int dX_+ dX_- e^{i \text{tr} X_+ X_-} \overline{\Phi_s^-(X_-)} \Phi_s^+(X_+) \text{tr} \frac{1}{\xi^+ + X_+} \text{tr} \frac{1}{\xi^- + X_-} \\
&= \mathcal{Z}_{2\text{MM}} \left\langle \text{tr} \frac{1}{\xi^+ + X_+} \text{tr} \frac{1}{\xi^- + X_-} \right\rangle_{2\text{MM}}.
\end{aligned} \tag{VII-58}$$

Le calcul explicite de cette quantité est effectué en appendice A.2. Dans l'espace des énergies, on retrouve le résultat suivant,

$$\frac{1}{N} \left\langle \text{tr} X_+^{iE_+} \text{tr} X_-^{iE_-} \right\rangle_{2\text{MM}} = \delta(E_+ - E_-) \int_{-\mu - E_+}^{-\mu} d\omega \frac{\mathcal{R}(E_+ + \omega)}{\mathcal{R}(\omega)} \tag{VII-59}$$

qui s'interprète comme la fermionisation du tachyon en une paire particule-trou d'énergie  $(E_+ + \omega, \omega)$  réfléchié par le potentiel de Liouville. Il faut alors intégrer sur toutes les énergies que peut posséder cette paire [GM93].

### 3 Cordes longues

Comme dans le cas des tachyons, il y a deux manières d'étudier les cordes longues, suivant le choix de la base  $(X, P)$  où  $(X_-, X_+)$ . Le coefficient de diffusion de la corde longue par le potentiel de Liouville a pu être obtenu indépendamment en suivant les deux approches [Fid05, Kos07b]. Cependant, comme le montre l'article [BHKM08], l'approche chirale semble plus adaptée puisqu'elle permet de considérer le cas de plusieurs cordes longues. C'est aussi ce formalisme qui fut choisi dans [Kar09] pour l'étude de l'interaction entre un tachyon et une corde longue.

#### 3.1 Corde longue dans le formalisme $(X, P)$

Commençons par le calcul du coefficient de réflexion  $\delta_{\text{CL}}(\hat{\epsilon})$  d'une corde longue dans la base  $\langle X |$ . La fonction propre de l'état fondamental dans le secteur adjoint peut être diagonalisée, on a alors  $\Psi_{ij}(X) = \delta_{ij} \psi_i(X)$ , avec  $\sum_i \psi_i = 0$ . Le terme d'interaction de l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{\text{adj}}$  se traite de manière perturbative [MO80], et au premier ordre en  $1/N$  la fonction d'onde satisfait

$$\mathcal{H}_{\text{adj}} \psi_i = - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (\partial_j^2 + x_j^2) \psi_i + \sum_{j \neq i} \frac{\psi_i - \psi_j}{(x_i - x_j)^2}. \tag{VII-60}$$

### SOLUTION DANS LA LIMITE CONTINUE

Ce problème a été résolu par L. Fidkowski [Fid05] dans la limite  $N \rightarrow \infty$  où le paramètre spectral devient continu,  $\psi_i \rightarrow \psi(x)$ . Introduisant la densité de valeurs propres  $\rho(x) = \sum_i \delta(x - x_i)$ , l'équation de Schrödinger et la condition de trace nulle deviennent

$$\int dy \rho(y) \frac{\psi(x) - \psi(y)}{(x - y)^2} = E\psi(x), \quad \int dx \rho(x) \psi(x) = 0. \quad (\text{VII-61})$$

Posons<sup>3</sup>  $h(x) = \psi(x)\rho(x)$ , et paramétrisons la variable spectrale par  $x = \sqrt{\mu} \cosh \tau$ . Dans la limite  $\tau \rightarrow \infty$ , la variable  $\tau$  s'identifie avec le champ de Liouville dans la région asymptotique [DJ90, Jev93], et l'on retrouve la phase  $\delta_{\text{CL}}(\hat{\epsilon})$  calculée par J. Maldacena [Mal05]

$$h(\tau) \sim e^{-\frac{i}{2\pi}(\tau + \pi\hat{\epsilon})^2} - e^{i\delta_{\text{CL}}(\hat{\epsilon})} e^{\frac{i}{2\pi}(\tau + \pi\hat{\epsilon})^2}, \quad \hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{2\pi} \log \mu. \quad (\text{VII-62})$$

Lors de ce calcul, il faut soustraire à l'énergie propre (infinie)  $E$  un *cut-off*  $\tau_c$  qui s'identifie avec la position de la brane  $\tau_c \simeq -\phi_c$ ,  $\epsilon = E - \frac{1}{\pi}\tau_c + \frac{1}{\pi}$ .

### 3.2 Corde longue dans le formalisme chiral

Les fonctions propres du secteur adjoint ont été considérées dans le formalisme chiral dans [Kos07b]. Dans l'espace des coordonnées  $\xi$ , i.e. après avoir effectué la transformée de Mellin VII-57, elles s'écrivent

$$\Phi_{ij}^{\pm}(\xi^{\pm}) = \left[ \left( \frac{1}{\xi^{\pm} + X_{\pm}} \right)_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{N} \text{tr} \left( \frac{1}{\xi^{\pm} + X_{\pm}} \right) \right] \Phi_s^{\pm}. \quad (\text{VII-63})$$

L'amplitude de diffusion dans ce secteur se réduit de nouveau au calcul d'un corrélateur du modèle à deux matrices,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n=1}(\xi_+, \xi_-) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{2\text{MM}}} \int dX_+ dX_- e^{i\text{tr} X_+ X_-} \sum_{ij} \overline{\Phi_{ij}^-(X_-)} \Phi_{ij}^+(X_+) \\ &= \left\langle \text{tr} \frac{1}{\xi_- + X_-} \frac{1}{\xi_+ + X_+} \right\rangle_{2\text{MM}} - \left\langle \text{tr} \frac{1}{\xi_- + X_-} \text{tr} \frac{1}{\xi_+ + X_+} \right\rangle_{2\text{MM}}. \end{aligned} \quad (\text{VII-64})$$

Le corrélateur de deux traces simples a été étudié dans la section 2.3, il correspond à la réflexion d'un tachyon par le potentiel de Liouville. On se concentre donc sur la trace mixte qui décrit la diffusion d'une corde longue,

$$\mathcal{A}_{1\text{CL}}(\xi_+, \xi_-) = \left\langle \text{tr} \frac{1}{\xi_- + X_-} \frac{1}{\xi_+ + X_+} \right\rangle_{2\text{MM}}. \quad (\text{VII-65})$$

3. L'origine de cette fonction est la suivante : l'état du secteur adjoint peut s'écrire  $|\Psi_{\text{adj}}\rangle = \frac{1}{N} \sum_{ij} \delta_{ij} \psi_i |ij\rangle$ , dans la limite continue  $|\Psi_{\text{adj}}\rangle = \int dx \rho(x) \psi(x) |x\rangle$ .

Le calcul de ce corrélateur a été réalisé au premier ordre en  $1/N$  par I. Kostov dans [Kos07b], on en reprend les grandes lignes en appendice A.3. Étonnamment, on obtient une expression relativement simple,

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_+, \xi_-) = -ie^{iS(\xi^+\xi^-)}, \quad S(\xi^+\xi^-) = \int_{\text{Fermi sea}} \frac{dx_+ dx_-}{2\pi} \frac{1}{(\xi^+ + x_+)(\xi^- + x_-)}. \quad (\text{VII-66})$$

La mer de Fermi doit ici être régularisée par un nouveau *cut-off*  $\tilde{m}$  qui vérifie  $m \gg \tilde{m} \gg \mu$ ,  $\mu < x_+ x_- < \tilde{m}$ . Afin d'obtenir la phase de réflexion d'une corde longue, il faut revenir dans l'espace des énergies en utilisant la transformée de Mellin inverse. Négligent les termes ne dépendant que du *cut-off*  $\tilde{m}$ , on retrouve le résultat de J. Maldacena et L. Fidkowski,  $\mathcal{A}_{\text{ICL}}(E_+, E_-) \propto \delta(E_+ - E_-) e^{-i\delta_{\text{CL}}(\hat{e}_+)}$  avec  $\hat{e} = E + \frac{1}{2\pi} \log \frac{\mu}{\tilde{m}}$ . Le *cut-off*  $\tilde{m}$  correspond au carré de la constante cosmologique de bord  $\mu_B$  reliée à la position de la brane FZZT ( $\tilde{m} = \mu_B^2$ ).

### 3.3 Diffusion de $n$ cordes longues

Dans le formalisme chiral, les fonctions d'ondes du secteur contenant  $n$  particules adjointes s'écrivent [Kos07b]

$$\Phi_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n}^\pm(\xi_1^\pm, \dots, \xi_n^\pm) = \mathcal{P} \left( \frac{1}{\xi_1^\pm + X_\pm} \right)_{i_1 j_{\sigma(1)}} \cdots \left( \frac{1}{\xi_n^\pm + X_\pm} \right)_{i_n j_{\sigma(n)}} \Phi_s^\pm \quad (\text{VII-67})$$

où  $\mathcal{P} = \mathbb{1} - \text{tr } \mathcal{R}$  assure l'invariance  $SU(N)$ , et  $\sigma$  est une permutation de  $\Sigma_n$ . La projection sur les composantes irréductibles du produit tensoriel des  $n$  représentations adjointes est réalisée en utilisant une symétrisation de Young. Cependant nous n'aurons pas besoin de considérer cette réduction ici. Le produit tensoriel contient aussi des fonctions d'onde plus générales qui décrivent un ensemble de  $n$  cordes longues et  $m$  tachyons,

$$\Phi_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n}^\pm(\xi_1^\pm, \dots, \xi_n^\pm | \tilde{\xi}_1^\pm, \dots, \tilde{\xi}_m^\pm) = \left( \frac{1}{\xi_1^\pm + X_\pm} \right)_{i_1 j_1} \cdots \left( \frac{1}{\xi_n^\pm + X_\pm} \right)_{i_n j_n} \text{tr} \frac{1}{\tilde{\xi}_1^\pm + X_\pm} \cdots \text{tr} \frac{1}{\tilde{\xi}_m^\pm + X_\pm} \Phi_s^\pm \quad (\text{VII-68})$$

Ainsi, lors du recollement des indices dans le produit scalaire, nous obtiendrons un corrélateur du modèle à deux matrices dans lequel les traces simples correspondent à l'introduction de tachyon et les traces mixtes à des cordes longues.

#### AMPLITUDES

Concentrons-nous maintenant sur les corrélateurs contenant uniquement des cordes longues. À l'ordre dominant, la diffusion des cordes longues est simplement donnée par le produit des amplitudes  $\mathcal{A}_{\text{ICL}}$  de chaque corde : celles-ci se diffusent sans interagir. À l'ordre suivant, les amplitudes correspondent aux traces de  $2n$  opérateurs matriciels,

$$\mathcal{A}_{\text{nCL}}(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) = \left\langle \text{tr} \frac{1}{\xi_1^+ + X_+} \frac{1}{\xi_1^- + X_-} \cdots \frac{1}{\xi_n^+ + X_+} \frac{1}{\xi_n^- + X_-} \right\rangle_{2MM}. \quad (\text{VII-69})$$

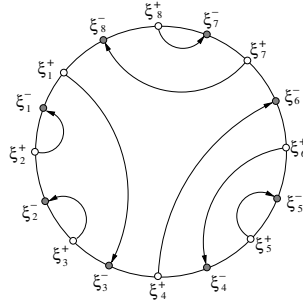


FIGURE VII.4 – Diagramme arc-en-ciel intervenant dans le calcul de l'amplitude de huit cordes longues.

Utilisant les équations de boucle du modèle à deux matrices, B. Eynard et N. Orantin sont parvenus à exprimer ce corrélateur uniquement en terme de la première trace mixte  $\mathcal{A}_{1\text{CL}}$  [EO05a]. La formule obtenue a l'énorme avantage de ne pas dépendre des potentiels matriciels, elle peut donc être appliquée directement à notre modèle,

$$\mathcal{A}_{\text{nCL}}(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} C_\sigma(\xi_i^\pm) \prod_{i=1}^n \mathcal{A}_{1\text{CL}}(\xi_i^+, \xi_{\sigma(i)}^-). \quad (\text{VII-70})$$

La somme s'effectue sur les permutations planaires, en bijection avec les diagrammes arc-en-ciel (figure VII.4). Le coefficient  $C_\sigma$  caractérise l'interaction  $\sigma$  entre les cordes longues, il s'exprime comme un produit sur les  $n + 1$  fenêtres du diagramme arc-en-ciel, avec un coefficient  $C_n$ . Les  $C_n$  sont homogènes et symétriques sous les permutations cycliques, ils s'obtiennent par récurrence :

$$C_n(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) = i \sum_{j=1}^n \frac{C_j(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_j^+, \xi_j^-) C_{n-j}(\xi_{j+1}^+, \xi_{j+1}^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-)}{(\xi_n^+ - \xi_1^+)(\xi_n^- - \xi_j^-)} \quad (\text{VII-71})$$

avec  $C_1(\xi^+, \xi^-) = 1$ .

## ESPACE DES ÉNERGIES

Afin de comparer avec les résultats de la théorie des cordes, il faut effectuer la transformation de Mellin pour revenir dans l'espace des énergies. Cette transformation peut être effectuée explicitement dans le cas  $n = 2$  [BHKM08]. Ce résultat permet une conjecture sur l'amplitude générale de  $n$  cordes longues,

$$\mathcal{A}_{\text{nCL}}(E_1^+, E_1^-, \dots, E_n^+, E_n^-) = \delta \left( \sum_{i,\pm} E_i^\pm \right) \tilde{\Lambda}^{n-i(E_1^+ + \dots + E_n^+)} \overline{\mathcal{A}_{\text{nCL}}(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-)}. \quad (\text{VII-72})$$

Cette proposition est motivée par l'invariance sous transformée de Fourier de la fonction  $f$  qui caractérise l'amplitude à une corde longue (VI-37). On a posé ici  $\xi_i^+ = \mu^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_{2i-2}}$ ,  $\xi_i^- = \mu^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_{2i-1}}$ , ces paramètres étant reliés aux énergies par  $\hat{\epsilon}_i^+ = y_{2i-2} + y_{2i-1}$ ,  $\hat{\epsilon}_i^- = y_{2i-1} + y_{2i}$ . Chaque rayon du diagramme

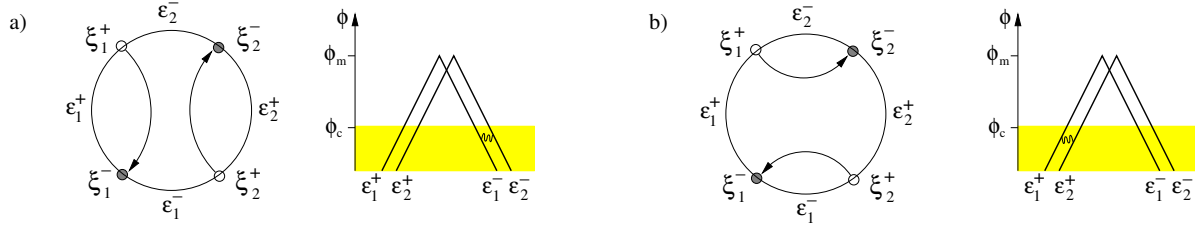


FIGURE VII.5 – Interaction de deux cordes longues, diagramme arc-en-ciel et traduction dans l’espace cible.

arc-en-ciel correspond à une corde longue réfléchiée par le potentiel de Liouville. Cette réflexion est décrite par l’amplitude  $\overline{\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_i^+ \xi_{\sigma(i)}^-)}$ , et l’énergie de cette corde est la somme des énergies intermédiaires sur la feuille d’univers.<sup>4</sup> On remarque que le nombre de cordes longues est conservé, l’interaction se réduit à un simple échange d’énergie dans la région asymptotique.

## DEUX CORDES LONGUES

Le secteur contenant deux cordes longues est relativement simple, il correspond au corrélateur suivant

$$\mathcal{A}_{2\text{CL}}(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-) = i \frac{\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_1^+, \xi_1^-) \mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_2^+, \xi_2^-) - \mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_1^+, \xi_2^-) \mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_2^+, \xi_1^-)}{(\xi_1^+ - \xi_2^+)(\xi_1^- - \xi_2^-)}. \quad (\text{VII-73})$$

La transformée de Mellin qui permet de passer dans l’espace des énergies est effectuée explicitement dans l’appendice de [BHKM08]. On obtient alors le résultat suivant,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2\text{CL}}(E_1^+, E_1^-, E_2^+, E_2^-) &= -\delta(E_1^+ + E_1^- - E_2^+ - E_2^-) \frac{2}{\tilde{m}} e^{\pi(E_1^+ + E_2^+)} \\ &\times \frac{\mathcal{A}_{\text{ICL}}(E_1^+) \mathcal{A}_{\text{ICL}}(E_2^+) - \mathcal{A}_{\text{ICL}}(E_1^-) \mathcal{A}_{\text{ICL}}(E_2^-)}{\sinh \pi(E_1^+ - E_1^-) \sinh \pi(E_2^+ - E_2^-)} \end{aligned} \quad (\text{VII-74})$$

en accord avec le calcul présenté dans le chapitre précédent (VI-32). Les deux termes du membre de gauche correspondent aux deux permutations de  $\Sigma_2$ , ils ont des interprétations cinématiques différentes (figure VII.5). Ainsi, pour le premier terme les cordes diffusent avant d’interagir, contrairement au second terme (le temps s’écoule de la gauche vers la droite). On remarque que le diagramme arc-en-ciel est “dual” à la feuille d’univers, dans le sens où les insertions  $\xi_{\pm}$  correspondent aux bords de la feuille d’univers, et les interstices aux points d’insertion des opérateurs de création et annihilation.

4. Supposons  $\sigma(i) > i$ , l’énergie associée à l’amplitude  $\overline{\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_i^+ \xi_{\sigma(i)}^-)}$  est  $\xi_i^+ \xi_{\sigma(i)}^- = \mu e^{-\frac{1}{2}\pi\epsilon}$  avec  $\epsilon = \epsilon_i^+ - \epsilon_i^- + \epsilon_{i+1}^+ - \epsilon_{i+1}^- + \dots - \epsilon_{\sigma(i)-1}^- + \epsilon_{\sigma(i)}^+$ .

### 3.4 Interaction entre un tachyon et une corde longue

L'interaction entre un tachyon et une corde longue a été étudiée par J. Karczmarek dans [Kar09]. De nouveau, c'est le formalisme chirale qui a été employé afin de réduire le calcul de l'amplitude de diffusion au premier ordre du corrélateur suivant,

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}}(E_+, E_- | E_T) = \left\langle \text{tr} X_-^{-iE_-} X_+^{iE_+} \text{tr} X_+^{iE_T} \right\rangle_{2\text{MM},c}. \quad (\text{VII-75})$$

Ce calcul est reproduit dans l'appendice A.4. Utilisant la transformée de Mellin, on se ramène à la composante connexe du corrélateur d'une trace mixte et d'une trace simple. Toutefois, la présentation du résultat est plus concise en utilisant les coordonnées pour la corde longue et l'énergie pour le tachyon,

$$\frac{\mathcal{A}_{\text{CLIT}}(\xi^+, \xi^- | E_T)}{\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi^+, \xi^-)} = 2i \int_{-E_T/2}^{E_T/2} d\omega \sqrt{\frac{R(\omega - \mu + E_T/2)}{R(\omega - \mu - E_T/2)}} K(\omega - \mu - E_T/2, \omega - \mu + E_T/2). \quad (\text{VII-76})$$

Contrairement au cas des deux cordes longues, il n'est malheureusement pas possible d'effectuer entièrement toutes les intégrations afin d'obtenir un résultat simple, ni dans l'espace des énergies, ni dans celui des coordonnées. Le noyau  $K$  apparaît dans la diffusion d'une corde longue, il dépend des coordonnées  $\xi^\pm$ ,

$$K(E, E') = \frac{1}{\sqrt{R(E)R(E')}} \int_0^\infty dx_+ dx_- \frac{\overline{\psi_E^-(x_-)}}{(\xi^+ + x_+)(\xi^- + x_-)} e^{ix_+ x_-} \psi_{E'}^+(x_+) \quad (\text{VII-77})$$

et peut être évalué en utilisant la méthode du col.

#### COURBE ALGÈBRIQUE

Si nous présentons ce résultat ici, c'est parce que ce corrélateur du modèle à deux matrices peut aussi être obtenu en utilisant la récurrence topologique développée dans [EO05b, EO07a, EO07b, EO08]. Cette méthode permet d'obtenir récursivement tous les corrélateurs, à tous les ordres en  $1/N$ , d'un modèle à deux matrices quelconque. L'ingrédient principal est une courbe algébrique qui s'exprime en fonction des potentiels et des résolvantes planaires des deux matrices. L'obtention de cette courbe est cruciale pour le calcul des amplitudes de diffusion à des ordres plus élevés. Contrairement aux corrélateurs décrivant l'amplitude de  $n$  cordes longues, le calcul du corrélateur connexe trace mixte - trace simple fait intervenir explicitement la courbe algébrique. On espère donc pouvoir la déterminer en comparant son expression avec la formule de récurrence topologique. Malheureusement, cette expression est relativement complexe dans l'espace des coordonnées  $\xi$ , et l'identification semble difficile.

Certaines informations sur la courbe algébrique peuvent être obtenues à partir de l'expression de la trace mixte VII-66 pour  $b < 1$ . En utilisant la représentation des fonctions double sinus comme un produit

infini, il est possible d'écrire

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi^+, \xi^-) = \frac{\prod_{m \in \mathbb{Z}} [1 + e^{i\pi b^2(2m+1)} e^{\pi\epsilon b/2}]}{\prod_{m \in \mathbb{N}} [1 + e^{-i\pi b^{-2}(2m+1)} e^{\pi\epsilon/2b}] \prod_{m \in \mathbb{N}} [1 + e^{-i\pi b^2(2m+1)} e^{\pi\epsilon b/2}]} e^{-if(\frac{1}{2} \log \Lambda / \xi^+ \xi^-)} \quad (\text{VII-78})$$

avec  $\xi^+ \xi^- = \mu e^{\pi\epsilon/2}$ . Dans le formalisme de la récurrence topologique, on considère donc une courbe algébrique  $E(\xi^+, \xi^-) = 0$ , que l'on résoud en paramétrisant  $(\xi^+(z), \xi^-(z))$ . La trace mixte du modèle à deux matrices s'écrit alors

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi^+(z), \xi^-(w)) = \frac{E(\xi^+(z), \xi^-(w))}{(\xi^+(z) - \xi^+(w))(\xi^-(z) - \xi^-(w))}. \quad (\text{VII-79})$$

Les propriétés de transformation sous  $b \rightarrow 1/b$  et d'échange  $\xi^+ \leftrightarrow \xi^-$  que vérifient les expressions VII-78, VII-79 mènent à identifier la courbe algébrique avec le numérateur de VII-78.<sup>5</sup> Malheureusement, sous cette forme, la limite  $b \rightarrow 1$  est singulière. Une possibilité serait d'appliquer la récurrence topologique pour  $b < 1$ , et de prendre la limite  $b \rightarrow 1$  à la fin des calculs. Une telle approche semble pouvoir s'appliquer au corrélateur VII-76.

## Conclusion

L'essentiel des travaux présentés ici concerne l'étude des secteurs non-singulet de la mécanique quantique matricielle dans le formalisme chirale. Nous avons montré que les fonctions d'onde présentes dans le produit de  $n$  représentations adjointes pouvaient être utilisées pour construire l'amplitude de diffusion de  $n$  cordes longues. L'amplitude de deux cordes longues au premier ordre a pu être explicitement calculée, et une conjecture pour l'amplitude générale a été émise.

La mécanique quantique matricielle semble être à la jonction de deux systèmes intégrables. Le premier est présent dans la fonction de partition de la théorie euclidienne compactifiée. Il se traduit par une équation de corde sur la fonction de partition et permet de décrire la condensation des vortex [KKK02, Kos02]. Le second système intégrable intervient lorsque l'on réduit les amplitudes de diffusion de la théorie lorentzienne à des corrélateurs d'un modèle à deux matrices. C'est en effet l'intégrabilité sous-jacente qui permet de dériver les équations de boucle de ce modèle, dont la solution donne les corrélateurs à tous les ordres du développement en  $1/N$ . Récemment, une solution récursive, connue sous le nom de récurrence topologique, a été proposée pour un modèle à deux matrices général. Les corrélateurs  $y$  sont vus comme les invariants symplectiques d'une courbe algébrique qui définit entièrement la théorie. Malheureusement, nous ne connaissons pas explicitement le potentiel de notre modèle à deux matrices, ce qui rend difficile

5. Cet argument est issu de discussions avec N. Orantin.



l'obtention de la courbe algébrique. Une formule peut cependant être intuité à partir de l'expression de la trace mixte, mais reste à vérifier. Par ailleurs, la limite  $b \rightarrow 1$  de cette courbe semble difficile à obtenir.

Les théories de cordes minimales peuvent être obtenues comme limite continue d'un modèle à deux matrices dont la courbe algébrique est connue [EZJ93, DKK93]. La surface associée paramétrise les branes ZZ et FZZT de la théorie [SS04, KK04]. En outre, les déformations de la courbe algébrique ont été identifiées aux perturbations de l'action de la théorie de cordes par des opérateurs de vertex. Certaines déformations spécifiques semblent décrire la perturbation par un opérateur de création de cordes ouvertes sur les branes FZZT. La limite  $c_M \rightarrow 1$  de la courbe algébrique peut être prise [KK04], et l'on retrouve les trajectoires classiques, hyperboliques, des fermions libres du secteur singulet. On rejoint ainsi certains résultats concernant les instantons de la théorie euclidienne compactifiée. Toutefois, à ce jour, le lien entre cette courbe algébrique et celle apparaissant dans le modèle à deux matrices qui décrit les amplitudes de diffusion de la théorie lorentzienne n'est toujours pas compris.

On peut constater que la mécanique quantique matricielle contient encore de nombreux problèmes ouverts, le principal étant la détermination de la courbe algébrique du modèle à deux matrices. Pour cela, le corrélateur corde longue - tachyon semble être le plus simple dont le calcul fasse intervenir le potentiel matriciel. Il semble tout indiqué pour tester le formalisme de la récurrence topologique, et la courbe algébrique proposée.

## Annexe A Calculs détaillés dans le formalisme chiral

### A.1 Fonction de partition

Dans cet appendice, on montre que le calcul de l'amplitude de diffusion de deux états singulets  $|\Psi_s^\pm\rangle$  peut se ramener au calcul de la fonction de partition d'un modèle à deux matrices dont le potentiel est donné par la fonction d'onde des états entrant et sortant. Cette fonction de partition peut être calculée explicitement, et l'on obtient le produit des coefficients de réflexion des fermions constituant la mer de Fermi.

#### LIEN AVEC LE MODÈLE À DEUX MATRICES

On cherche donc à évaluer l'amplitude de diffusion des états entrant et sortant, pris respectivement aux

temps  $t_i$  et  $t_f$ , avec  $T = t_f - t_i$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_s^-, t_f | \Phi_s^+, t_i \rangle &= \langle \Phi_s^- | e^{i(t_f - t_i)\mathcal{H}} | \Phi_s^+ \rangle \\
 &= \int dX_+^{(i)} dX_-^{(f)} \langle \Phi_s^- | X_-^{(f)} \rangle \langle X_-^{(f)} | e^{iT\mathcal{H}} | X_+^{(i)} \rangle \langle X_+^{(i)} | \Phi_s^+ \rangle \\
 &= \int dX_+^{(i)} dX_-^{(f)} \overline{\Phi_s^-(X_-^{(f)})} \Phi_s^+(X_+^{(i)}) \int_{\substack{X_+(t_i)=X_+^{(i)} \\ X_-(t_f)=X_-^{(f)}}} D[X_+, X_-] e^{i\mathcal{H}[X_+, X_-]}
 \end{aligned} \tag{VII-80}$$

L'intégrale de chemin dans les variables chirales peut être calculée explicitement. Pour cela on décompose la mesure sur les temps intermédiaires  $t_k$ , de pas de temps  $\delta$ , avec  $t_0 = t_i$ ,  $t_n = t_f$ . Afin de simplifier les notations, on introduit aussi  $X_{\pm}^{(k)} = X_{\pm}(t_k)$  pour les bases intermédiaires. On a alors

$$\begin{aligned}
 \langle X_-, t_f | X_+, t_i \rangle &= \int_{\substack{X_+(t_i)=X_+^{(i)} \\ X_-(t_f)=X_-^{(f)}}} D[X_+, X_-] e^{i\mathcal{H}[X_+, X_-]} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1, \pm}^{n-1} dX_{\pm}^{(k)} \prod_{k=1}^{n-1} \langle X_+^{(k)} | X_-^{(k)} \rangle \prod_{k=0}^{n-1} \langle X_-^{(k+1)} | e^{i\delta\mathcal{H}} | X_+^{(k)} \rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1, \pm}^{n-1} dX_{\pm}^{(k)} \prod_{k=1}^{n-1} e^{i\text{tr} X_+^{(k)} (X_-^{(k+1)} - \delta X_-^{(k+1)} - X_-^{(k)})} e^{(n-1)\frac{\delta N^2}{2}} \langle X_-^{(1)} | e^{i\delta\mathcal{H}} | X_+^{(0)} \rangle.
 \end{aligned} \tag{VII-81}$$

Effectuant l'intégration sur les matrices  $X_{\pm}^{(k)}$ , on trouve un produit de fonction  $\delta$  qui implémentent une version discrétisée des équations du mouvement de la matrice  $X_-$  ( $\partial_t X_- = X_-$ ),

$$\langle X_-, t_f | X_+, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\frac{\delta N^2}{2}} \int \prod_{k=1}^{n-1} dX_-^{(k)} \prod_{k=1}^{n-1} \delta \left( X_-^{(k+1)} (1 - \delta) - X_-^{(k)} \right) e^{-i\delta \text{tr} X_+^{(0)} X_-^{(1)}}. \tag{VII-82}$$

Ces contraintes peuvent être résolues par récurrence, et donnent dans la limite continue la solution de l'équation du mouvement  $X_-^{(f)} = X_-^{(i)} e^T$ . On trouve finalement

$$\langle X_-, t_f | X_+, t_i \rangle = e^{TN^2/2} \exp \left( -ie^{-T} \text{tr} X_+^{(i)} X_-^{(f)} \right). \tag{VII-83}$$

Revenons à l'amplitude initiale, la dépendance temporelle peut être éliminée par un changement de variable pour la matrice  $X_-^{(f)}$ , et l'on obtient,<sup>6</sup>

$$\langle \Phi_s^-, t_f | \Phi_s^+, t_i \rangle = e^{iTE_0 + TN^2} \int dX_+^{(i)} dX_-^{(f)} \overline{\Phi_s^-(X_-^{(f)})} \Phi_s^+(X_+^{(i)}) e^{-i\text{tr} X_+^{(i)} X_-^{(f)}} \tag{VII-84}$$

6. La mesure fait sortir un terme  $e^{N^2 T}$ , la fonction d'onde antisymétrique le terme  $e^{-NT/2} e^{iT E_0}$  obtenu en faisant le produit des contributions de chaque fonction d'onde fermionique. Reste à diviser par le Vandermonde  $\Delta(e^T x) = e^{TN(N-1)/2} \Delta(x)$ .

où  $E_0$  est l'énergie associé à l'état singulet.

### CALCUL DE LA FONCTION DE PARTITION

Calculons maintenant la fonction de partition du modèle à deux matrices,

$$\mathcal{Z}_{2\text{MM}} = \int dX_{\pm} \Phi_s^+(X_+) \overline{\Phi_s^-(X_-)} e^{i\text{tr} X_+ X_-} \quad (\text{VII-85})$$

Pour cela, on diagonalise les matrices  $X_{\pm} = \Omega_{\pm} x_{\pm} \Omega_{\pm}^{\dagger}$ , le traitement de la partie angulaire est standard pour les modèles à deux matrices, il fait intervenir l'intégrale de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber (HCIZ) [IZ80],

$$\int_{\text{SU}(N)} d\Omega e^{i x_+ \Omega x_- \Omega^{\dagger}} = \frac{\det_{i,j} e^{i x_i^+ x_j^-}}{\Delta(x_+) \Delta(x_-)} \quad (\text{VII-86})$$

avec  $\Omega = \Omega_+^{\dagger} \Omega_-$ . La mesure fait apparaître un déterminant de Vandermonde au carré, que l'on peut absorber en utilisant les fonctions d'ondes antisymétriques  $\Delta\Phi = \Psi$ ,

$$\mathcal{Z}_{2\text{MM}} = \int \prod_{i,\pm} dx_i^{\pm} \Psi_s^+(x_+) \overline{\Psi_s^-(x_-)} \det_{i,j} e^{i x_i^+ x_j^-}. \quad (\text{VII-87})$$

Introduisant l'expression des fonctions d'ondes antisymétriques en terme du déterminant de Slater, puis transformant ce produit de déterminant en un déterminant d'un produit de matrices, on aboutit à

$$\mathcal{Z}_{2\text{MM}} = \frac{1}{N!} \det_{ij} \sum_{k,l} \int \prod_{i,\pm} dx_i^{\pm} \psi_{E_i}^+(x_k^+) \overline{\psi_{E_j}^-(x_l^-)} e^{i x_k^+ x_l^-}. \quad (\text{VII-88})$$

Les variables  $k$  et  $l$  sont muettes ici. On effectue ensuite l'intégration sur les valeurs propres en prenant garde à la présence du *cut-off* :

$$\int_0^{\sqrt{m}} dx_+ dx_- e^{i x_+ x_-} \psi_E^+(x_+) \overline{\psi_{E'}^-(x_-)} = \delta(E - E') \mathcal{R}(E) \rho_0, \quad \int_0^{\sqrt{m}} dx_+ dx_- = m. \quad (\text{VII-89})$$

Au premier ordre  $\rho_0 \simeq \frac{1}{2\pi} \log m$  est indépendant de l'énergie, on obtient finalement

$$\mathcal{Z}_{2\text{MM}} = \frac{1}{N!} m^{N-1} N^{2N} \rho_0^N \prod_{i=1}^N \mathcal{R}(E_i). \quad (\text{VII-90})$$

## A.2 Deux tachyons

Dans cette section, on cherche à calculer le corrélateur de deux tachyons,

$$B(E_+, E_-) = \left\langle \text{tr} X_+^{iE_+} \text{tr} X_-^{-iE_-} \right\rangle_{2\text{MM}}. \quad (\text{VII-91})$$

Cette quantité peut être obtenue directement dans l'espace des énergies en diagonalisant les matrices  $X_{\pm}$ ,

$$B(E_+, E_-) = \frac{1}{N!} \frac{1}{\mathcal{Z}_{2MM}} \int \prod_i dx_i^+ dx_i^- \det_{ij} e^{ix_i^- x_j^+} \overline{\det_{ij} \psi_{E_i}^-(x_j^-)} \det_{ij} \psi_{E_i}^+(x_j^+) \sum_{a,b=1}^N x_a^+ x_b^- e^{-iE_-} \quad (\text{VII-92})$$

où l'on a de nouveau utilisé la formule VII-86. Les fonctions d'ondes satisfont la propriété  $x^{iE_T} \psi_E(x) = \psi_{E+E_T}(x)$  qui se traduit par

$$\det_{kl} \psi_{E_k}(x_l) \sum_a x_a^{iE_T} = \sum_a \det_{kl} \psi_{E_k+\delta_{ka}E_T}(x_l). \quad (\text{VII-93})$$

Celle-ci permet de faire passer les puissances de valeurs propres à l'intérieur des déterminants,

$$B(E_+, E_-) = \frac{1}{N!} \frac{1}{\mathcal{Z}_{2MM}} \sum_{a,b=1}^N \int \prod_i dx_i^+ dx_i^- \det_{ij} e^{ix_i^- x_j^+} \overline{\det_{ij} \psi_{E_i+\delta_{ib}E_-}^-(x_j^-)} \det_{ij} \psi_{E_i+\delta_{ia}E_+}^+(x_j^+). \quad (\text{VII-94})$$

On cherche ensuite à formuler le produit des déterminants comme le déterminant d'un produit, i.e.

$$B(E_+, E_-) = \frac{1}{N!} \frac{1}{\mathcal{Z}_{2MM}} \sum_{a,b=1}^N \det_{ij} \int \prod_i dx_i^+ dx_i^- \sum_{k,l} \psi_{E_i+\delta_{ia}E_+}^+(x_k^+) e^{ix_k^+ x_l^-} \overline{\psi_{E_j+\delta_{jb}E_-}^-(x_l^-)}. \quad (\text{VII-95})$$

Cela permet d'effectuer l'intégration sur les valeurs propres,

$$\begin{aligned} B(E_+, E_-) &= \frac{1}{\rho_0^N \prod_i \mathcal{R}(E_i)} \sum_{a,b=1}^N \det_{ij} \left[ \sqrt{\mathcal{R}(E_i + \delta_{ia}E_+) \mathcal{R}(E_j + \delta_{jb}E_-)} \delta(E_i + \delta_{ia}E_+ - E_j - \delta_{jb}E_-) \right] \\ &= \frac{1}{\rho_0^N} \sum_{a,b=1}^N \prod_k \frac{\sqrt{\mathcal{R}(E_k + \delta_{ka}E_+) \mathcal{R}(E_k + \delta_{kb}E_-)}}{\mathcal{R}(E_k)} \det_{ij} \delta(E_i + \delta_{ia}E_+ - E_j - \delta_{jb}E_-). \end{aligned} \quad (\text{VII-96})$$

On suppose la densité d'énergie  $\rho_0$  constante au premier ordre, ce qui implique que les niveaux d'énergie du spectre discret sont équidistants. Soit  $n_{\pm}$  le niveau d'énergie correspondant aux tachyons incidents et partants,  $E_{\pm} = E_{n_{\pm}}$ . En examinant la matrice des fonctions  $\delta$ , on s'aperçoit qu'elle est proportionnelle à une matrice  $S$  qui n'est autre que la matrice identité où la  $a$ th ligne possède un 1 déplacé de la  $a$ th colonne à la  $(a + n_+)$  colonne, et dans la  $b$ th colonne le 1 est déplacé de la ligne  $b$ th à la ligne  $(b + n_-)$ th,

$$\det_{ij} \delta(E_i + \delta_{ia}E_+ - E_j - \delta_{jb}E_-) = \rho_0^N \det_{ij} S, \quad S_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{ia}(\delta_{j, a+n_+} - \delta_{ja}) + \delta_{jb}(\delta_{i, b+n_-} - \delta_{ib}). \quad (\text{VII-97})$$

Le déterminant de cette matrice est nul, à moins que les déplacements ne coïncident,  $a = b$  et  $n_+ = n_-$ , et le déterminant vaut alors un. Ainsi,

$$B(E_+, E_-) = \delta(E_+ - E_-) \sum_{a=1}^N \prod_k \frac{\mathcal{R}(E_k + \delta_{ka}E_+)}{\mathcal{R}(E_k)} = \delta(E_+ - E_-) \sum_{a=1}^N \frac{\mathcal{R}(E_a + E_+)}{\mathcal{R}(E_a)}. \quad (\text{VII-98})$$

Chaque terme de la somme décrit l'excitation d'un état de la mer de Fermi  $E_a \rightarrow E_a + E_+$ , avec  $-\mathfrak{m} < E_a < -\mu$ . L'état excité doit être au-dessus de la mer de Fermi, ce qui impose la restriction  $E_a + E_+ > -\mu$  [Kar09]. Dans la limite continue, la somme se transforme en intégrale, et l'on a

$$\frac{1}{N}B(E_+, E_-) = \delta(E_+ - E_-) \int_{-\mu-E_+}^{-\mu} \frac{\mathcal{R}(E_+ + \omega)}{\mathcal{R}(\omega)} d\omega. \quad (\text{VII-99})$$

### A.3 Une corde longue

On s'intéresse ici au corrélateur d'une trace mixte dans le modèle à deux matrices, au premier ordre en  $1/N$ ,

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_+, \xi_-) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{2\text{MM}}} \int dX_{\pm} \Phi_s^+(X_+) \overline{\Phi_s^-(X_-)} e^{i\text{tr} X_+ X_-} \text{tr} \frac{1}{\xi^- + X_-} \frac{1}{\xi^+ + X_+}. \quad (\text{VII-100})$$

La première étape consiste à diagonaliser les deux matrices  $X_{\pm} = \Omega_{\pm} x_{\pm} \Omega_{\pm}^{\dagger}$ . Afin de calculer l'intégrale angulaire il faut faire appel à la formule de Morozov-Eynard [Eyn04],

$$\begin{aligned} & \int_{\text{SU}(N)} d\Omega \text{tr} \left( \frac{1}{\xi^- + x_-} \Omega \frac{1}{\xi^+ + x_+} \Omega^{\dagger} \right) e^{i\text{tr} x_- \Omega x_+ \Omega^{\dagger}} \\ &= \frac{1}{i\Delta(x_+) \Delta(x_-)} \left( \det \left[ E + i \frac{1}{\xi^- + x_-} E \frac{1}{\xi^+ + x_+} \right] - \det[E] \right) \end{aligned} \quad (\text{VII-101})$$

où l'on a introduit la matrice  $E_{ij} = e^{ix_i^+ x_j^-}$ . Le second terme ne dépend pas des variables  $\xi^{\pm}$  et peut être négligé, l'amplitude se réduit donc à une intégrale sur les valeurs propres

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_+, \xi_-) = -i \frac{1}{N!} \frac{1}{\mathcal{Z}_{2\text{MM}}} \int \prod_{i,\pm} dx_i^{\pm} \det_{ij} \psi_{E_i}^+(x_j^+) \overline{\det_{ij} \psi_{E_i}^-(x_j^-)} \det \left[ E + i \frac{1}{\xi^- + x_-} E \frac{1}{\xi^+ + x_+} \right]. \quad (\text{VII-102})$$

Réunissant les déterminants, on tombe sur

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_+, \xi_-) = -i \frac{1}{N!} \frac{1}{\mathcal{Z}_{2\text{MM}}} \det_{ij} \sum_{kl} \int \prod_{i,\pm} dx_i^{\pm} \psi_{E_i}^+(x_k^+) \overline{\psi_{E_j}^-(x_l^-)} \left[ E_{kl} + i \frac{1}{\xi^+ + x_k^+} E_{kl} \frac{1}{\xi^- + x_l^-} \right]. \quad (\text{VII-103})$$

De nouveau, les variables  $k, l$  sont muettes, et l'on peut effectuer l'intégration. Pour cela, on introduit le noyau

$$K(E, E') = \frac{1}{\sqrt{R(E)R(E')}} \int_0^{\infty} dx_+ dx_- \overline{\psi_E^-(x_-)} \frac{e^{ix_+ x_-}}{(\xi^+ + x_+)(\xi^- + x_-)} \psi_{E'}^+(x_+). \quad (\text{VII-104})$$

Celui-ci peut être calculé en utilisant une approximation de point col,

$$K(E + \epsilon, E - \epsilon) = \left( \frac{\xi^+}{\xi^-} \right)^{i\epsilon} \frac{\left( -\frac{\xi^+ \xi^-}{E} \right)^{i\epsilon} - \left( -\frac{\xi^+ \xi^-}{E} \right)^{-i\epsilon}}{i \sinh 2\pi\epsilon} \frac{\pi}{\xi^+ \xi^- + E}. \quad (\text{VII-105})$$

L'amplitude s'exprime alors comme un déterminant,

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_+, \xi_-) = -i \det_{ij} \left[ \delta_{ij} + \frac{i}{\rho_0} K(E_i, E_j) \right]. \quad (\text{VII-106})$$

Le second terme du déterminant est sous-dominant dans la limite  $m \rightarrow \infty$ , ce qui permet de le développer comme un déterminant de Fredholm. Au premier ordre, le terme dominant est donné par

$$\mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi_+, \xi_-) = -ie^{iS(\xi^+\xi^-)}, \quad S(\xi^+\xi^-) = \int_{-\tilde{m}}^{-\mu} dE K(E, E) \quad (\text{VII-107})$$

où  $\tilde{m}$  est un nouveau *cut-off* introduit pour régulariser la divergence de l'intégrale. Ce facteur de réflexion  $S$  peut aussi se représenter comme une intégrale sur la mer de Fermi.

#### A.4 Une corde longue et un tachyon

Dans cette section, on reproduit le calcul de l'amplitude de diffusion d'un tachyon et d'une corde longue réalisé dans [Kar09], avec toutefois quelques variations. L'idée est d'utiliser la transformée de Mellin uniquement pour la corde longue, on notera donc  $\xi^\pm$  ses coordonnées, et  $E_T$  l'énergie du tachyon. On cherche à évaluer la partie connexe d'une trace mixte et d'une trace simple,

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}}(\xi_+, \xi_-, E_T) = \left\langle \text{tr} \frac{1}{\xi_- + X_-} \frac{1}{\xi_+ + X_+} \text{tr} X_+^{iE_T} \right\rangle_c. \quad (\text{VII-108})$$

Seule la trace mixte contient une partie angulaire, celle-ci se traite de la même manière que dans la section A.3, en utilisant la formule de Morozov. On se réduit donc à une intégrale sur les valeurs propres  $x_i^\pm$ ,

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}} = \frac{-i}{N! \mathcal{Z}_{2\text{MM}}} \int d^N x^\pm \overline{\det_{ij} \psi_{E_i}^-(x_j^-)} \det_{ij} \psi_{E_i}^+(x_j^+) \left( \sum_{a=1}^N x_a^{+iE_T} \right) \det_{ij} \left[ e^{ix_i^- x_j^+} \left( 1 + i \frac{1}{\xi_- + x_i^-} \frac{1}{\xi_+ + x_j^+} \right) \right] \quad (\text{VII-109})$$

Réutilisant la propriété VII-93, et réunissant les déterminants, on se réduit à une intégrale sur deux valeurs propres,

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}} = -\frac{i m^{N-1} N^{2N}}{N! \mathcal{Z}_{2\text{MM}}} \sum_a \det_{kl} \int dx^\pm \overline{\psi_{E_k}^-(x^-)} \psi_{E_l + \delta_{la} E_T}^+(x^+) e^{ix^+ x^-} \left( 1 + i \frac{1}{\xi_- + x^-} \frac{1}{\xi_+ + x^+} \right). \quad (\text{VII-110})$$

Le déterminant est la somme de deux termes, le premier n'est qu'un facteur de réflexion, tandis que le second fait intervenir le noyau  $K(E, E')$  (VII-104)

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}} = -\frac{i}{\rho_0^N} \sum_a \sqrt{\frac{R(E_a + E_T)}{R(E_a)}} \det_{kl} [\delta(E_k - E_l - \delta_{la} E_T) + iK(E_k, E_l + \delta_{la} E_T)]. \quad (\text{VII-111})$$

Examinons maintenant ce déterminant. Supposant que l'énergie du tachyon correspond à un niveau  $n$ ,  $E_T = E_n$ , la matrice des fonctions  $\delta$  est proportionnelle à  $S_{kl} = \delta_{kl} + \delta_{la}(\delta_{k,a+n} - \delta_{k,a})$ , la matrice identité dans laquelle le 1 de la  $a$ ième colonne a été déplacé sur la  $(a+n)$ ième ligne,

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}} = -i \sum_a \sqrt{\frac{R(E_a + E_T)}{R(E_a)}} \det_{kl} \left[ S_{kl} + \frac{i}{\rho_0} K(E_k, E_l + \delta_{la} E_T) \right]. \quad (\text{VII-112})$$

La matrice  $A_{kl} = i \frac{1}{\rho_0} K(E_k, E_l + \delta_{la} E_T)$  est sous dominante par rapport à  $S$ . Au premier ordre, le développement en cofacteurs de la  $a$ ième colonne donne

$$\det_{N \times N} (S + A) = A_{aa} \det_{N-1 \times N-1} (I + A) + A_{aa+n} \det_{N-2 \times N-2} (I + A). \quad (\text{VII-113})$$

Dans le premier déterminant du membre de droite, les  $a$ ième ligne et  $a$ ième colonne ont été supprimées, tandis que dans le seconde, les  $a$ ième et  $(a+n)$ ième lignes et colonnes disparaissent. Dans la limite  $N$  grand, ces déterminants sous tous deux approchés par le déterminant VII-106 donnant le coefficient de diffusion d'une corde longue. Notons que le déplacement  $E_l + \delta_{la} E_T$  disparaît ici car les lignes et colonnes  $a$ ième sont supprimées. Notre corrélateur est donc proportionnel à l'amplitude  $\mathcal{A}_{\text{ICL}}$ ,

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}}(\xi^+, \xi^- | E_T) = \mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi^+, \xi^-) \frac{2i}{\rho_0} \sum_a \sqrt{\frac{R(E_a + E_T)}{R(E_a)}} K(E_a, E_a + E_T). \quad (\text{VII-114})$$

On trouve finalement dans la limite planaire,

$$\mathcal{A}_{\text{CLIT}}(\xi^+, \xi^- | E_T) = 2i \mathcal{A}_{\text{ICL}}(\xi^+, \xi^-) \int_{-\mu-E_T}^{-\mu} d\omega \sqrt{\frac{R(\omega + E_T)}{R(\omega)}} K(\omega, \omega + E_T). \quad (\text{VII-115})$$

où l'énergie du niveau excité est restreint à être au-dessus de la mer de Fermi, et le noyau  $K$  (VII-104) dépend aussi des coordonnées  $\xi^\pm$  de la corde longue.

# Bibliographie

- [ABF84] G. E. Andrews, R. J. Baxter, and P. J. Forrester. Eight vertex sos model and generalized rogers-ramanujan type identities. *J. Stat. Phys.*, 35 :193–266, 1984.
- [AGT10] L. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa. Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories. *Lett. Math. Phys.*, 91 :167–197, 2010.
- [AI05] S. Alexandrov and E. Imeroni.  $c=1$  from  $c<1$  : Bulk and boundary correlators. *Nuclear Physics B*, 731 :242, 2005.
- [AK03] S. Alexandrov and V. A. Kazakov. Thermodynamics of 2d string theory. *JHEP*, 0301 :078, 2003.
- [AK05] S. Alexandrov and Ivan K. Kostov. Time-dependent backgrounds of 2d string theory : Non-perturbative effects. *JHEP*, 02 :023, 2005.
- [AKK02] S. Alexandrov, V. A. Kazakov, and I. Kostov. Time-dependent backgrounds of 2d string theory. *Nuclear Physics B*, 640 :119, 2002.
- [AKK03] S. Alexandrov, V. A. Kazakov, and I. Kostov. 2d string theory as normal matrix model. *Nuclear Physics B*, 667 :90, 2003.
- [AL91] I. Affleck and A. Ludwig. Universal noninteger 'ground state degeneracy' in critical quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :161–164, 1991.
- [AL92] I. Affleck and A. Ludwig. Exact conformal field theory results on the multichannel kondo effect : Single fermion green's function, selfenergy and resistivity. 1992. UBCTP-92-029.
- [Amb94] J. Ambjorn. Quantization of geometry, 1994.
- [Bax80] R. J. Baxter. Hard hexagons : exact solution. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 13(3) :L61, 1980.
- [Bax86] R. J. Baxter. colourings of the triangular lattice. *J. Phys.*, A19 :2821–2839, 1986.



- [BB88] M. T. Batchelor and H. W. J. Bloete. Conformal anomaly and scaling dimensions of the  $o(n)$  model from an exact solution on the honeycomb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :138, 1988.
- [BC97] M. T. Batchelor and J. Cardy. Extraordinary transition in the two-dimensional  $o(n)$  model. *Nuclear Physics B*, 506 :553, 1997.
- [BE09] G. Borot and B. Eynard. Enumeration of maps with self avoiding loops and the  $o(n)$  model on random lattices of all topologies, 2009.
- [BH09] J.-E. Bourgin and K. Hosomichi. Boundary operators in the  $o(n)$  and rsos matrix models. *JHEP*, 0901 :009, 2009.
- [BHK10] J.-E. Bourgin, K. Hosomichi, and I. Kostov. Boundary transitions of the  $o(n)$  model on a dynamical lattice. *Nuclear Physics B*, 832(3) :462–499, 2010.
- [BHKM08] J.-E. Bourgin, K. Hosomichi, I. Kostov, and Y. Matsuo. Scattering of long folded strings and mixed correlators in the two-matrix model. *Nuclear Physics B*, 795 :243, 2008.
- [Bin83] K. Binder. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 8. 1983.
- [BIPZ78] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber. Planar diagrams. *Commun. Math. Phys.*, 59 :35, 1978.
- [BIZ80] D. Bessis, C. Itzykson, and J. B. Zuber. Quantum field theory techniques in graphical enumeration. *Adv. Appl. Math.*, 1 :109–157, 1980.
- [BK87a] D. V. Boulatov and V. A. Kazakov. The ising model on random planar lattice : The structure of phase transition and the exact critical exponents. *Phys. Lett.*, 186B :379, 1987.
- [BK87b] D. V. Boulatov and V. A. Kazakov. Universality, critical exponents and mass gap in  $d \rightarrow 0$  limit of the model of dynamically triangulated random surfaces. *Phys. Lett.*, B184 :247–252, 1987.
- [BK90] E. Brézin and V. A. Kazakov. Exactly solvable field theories of closed strings. *Phys. Lett.*, B236 :144–150, 1990.
- [BK92a] M. Bershadsky and D. Kutasov. Open string theory in 1+1 dimensions. *Physics Letters B*, 274 :331, 1992.
- [BK92b] M. Bershadsky and D. Kutasov. Scattering of open and closed strings in 1+1 dimensions. *Nuclear Physics B*, 382 :213, 1992.
- [BK93] D. V. Boulatov and V. A. Kazakov. One-dimensional string theory with vortices as upside-down matrix oscillator. *International Journal of Modern Physics A*, 8 :809, 1993.

- [BKZ90] E. Brézin, V. A. Kazakov, and A. B. Zamolodchikov. Scaling violation in a field theory of closed strings in one physical dimension. *Nucl. Phys.*, B338 :673–688, 1990.
- [BN89a] H. W. J. Bloete and B. Nienhuis. Critical behavior and conformal anomaly of the  $o(n)$  model on the square lattice. *J. Phys.*, A22 :1415–1438, 1989.
- [BN89b] H. W. J. Bloete and B. Nienhuis. The phase diagram of the  $o(n)$  model. *Physica*, A160 :121–134, 1989.
- [BN94] H. W. J. Bloete and B. Nienhuis. Fully packed loop model on the honeycomb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 72(9) :1372–1375, Feb 1994.
- [Bou09] J.-E. Bourgin. Boundary changing operators in the  $o(n)$  matrix model. *JHEP*, 09 :020, 2009.
- [BPZ84] A. A. Belavin, A. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241 :333–380, 1984.
- [BR10] A. A. Belavin and C. Rim. Bulk one-point function on disk in one-matrix model. *Phys. Lett.*, B687 :264–266, 2010.
- [BSY94] M. T. Batchelor, J. Suzuki, and C. M. Yung. Exact results for hamiltonian walks from the solution of the fully packed loop model on the honeycomb lattice, 1994.
- [BY95a] M. T. Batchelor and C. M. Yung. Exact results for the adsorption of a flexible self-avoiding polymer chain in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 74(11) :2026–2029, Mar 1995.
- [BY95b] M. T. Batchelor and C. M. Yung. Surface critical behaviour of the honeycomb  $o(n)$  loop model with mixed ordinary and special boundary conditions. *J.PHYS.A*, 28 :L421, 1995.
- [BZ09] A. A. Belavin and A. B. Zamolodchikov. On correlation numbers in 2d minimal gravity and matrix models. *J.PHYS.A*, 42 :304004, 2009.
- [Car84] J. Cardy. Conformal invariance and surface critical behavior. *Nucl. Phys.*, B240 :514–532, 1984.
- [Car89] J. Cardy. Boundary conditions, fusion rules and the verlinde formula. *Nucl. Phys.*, B324 :581, 1989.
- [Car04] J. Cardy.  $Sle(\kappa, \rho)$  and conformal field theory, 2004.
- [CM91] C. Crnkovic and G. Moore. Multicritical multicut matrix models. *Phys. Lett.*, B257 :322–328, 1991.

- [Dav85a] F. David. A model of random surfaces with nontrivial critical behavior. *Nucl. Phys.*, B257 :543, 1985.
- [Dav85b] F. David. Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models. *Nucl. Phys.*, B257 :45, 1985.
- [Dav88] F. David. Conformal field theories coupled to 2d gravity in the conformal gauge. *Mod. Phys. Lett.*, A3 :1651, 1988.
- [Dav91] F. David. Phases of the large  $n$  matrix model and nonperturbative effects in 2-d gravity. *Nucl. Phys.*, B348 :507–524, 1991.
- [DB09] F. David and M. Bauer. Another derivation of the geometrical kpz relations. *J.STAT.MECH P*, 03004, 2009.
- [DE84] H. Diehl and E. Eisenriegler. Effects of surface exchange anisotropies on magnetic critical and multicritical behavior at surfaces. *Phys. Rev. B*, 30 :300, 1984.
- [DF84] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev. Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2d statistical models. *Nucl. Phys.*, B240 :312, 1984.
- [DF85] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev. Four point correlation functions and the operator algebra in the two-dimensional conformal invariant theories with the central charge  $c < 1$ . *Nucl. Phys.*, B251 :691, 1985.
- [DGK99] P. Di Francesco, E. Guitter, and C. Kristjansen. Fully packed  $o(n=1)$  model on random eulerial triangulations. *Nuclear Physics B*, 549 :657, 1999.
- [DGZJ95] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. 2-d gravity and random matrices. *Phys. Rept.*, 254 :1–133, 1995.
- [Die82] H. Diehl. Critical behavior of semi-infinite magnets (invited). *J. Appl. Phys.*, 53 :7914, 1982.
- [DJ90] S. Das and A. Jevicki. String field theory and physical interpretation of  $d = 1$  strings. *Mod. Phys. Lett.*, A5 :1639–1650, 1990.
- [DJS09a] J. Dubail, J. Jacobsen, and H. Saleur. Conformal two-boundary loop model on the annulus. *Nucl. Phys.*, B813 :430–459, 2009.
- [DJS09b] J. Dubail, J. Jacobsen, and H. Saleur. Exact solution of the anisotropic special transition in the  $o(n)$  model in 2d. *Physical Review Letters*, 103 :145701, 2009.
- [DJS10] J. Dubail, J. Jacobsen, and H. Saleur. Conformal boundary conditions in the critical  $o(n)$  model and dilute loop models. *Nuclear Physics B*, 827 :457, 2010.

- [DK88] B. Duplantier and I. Kostov. Conformal spectra of polymers on a random surface. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :1433, 1988.
- [DK89] J. Distler and H. Kawai. Conformal field theory and 2d quantum gravity or who's afraid of joseph liouville ? *Nucl. Phys.*, B321 :509, 1989.
- [DK91] P. Di Francesco and D. Kutasov. Correlation functions in 2-d string theory. *Phys. Lett.*, B261 :385–390, 1991.
- [DK92] P. Di Francesco and D. Kutasov. World sheet and space time physics in two dimensional (super) string theory. *Nuclear Physics B*, 375 :119, 1992.
- [DKK93] J.-M. Daul, V. A. Kazakov, and I. Kostov. Rational theories of 2d gravity from the two-matrix model. *Nuclear Physics B*, 409 :311, 1993.
- [DMNS81] E. Domany, D. Mukamel, B. Nienhuis, and A. Schwimmer. Duality relations and equivalences for models with  $o(n)$  and cubic symmetry. *Nucl. Phys.*, B190 :279–287, 1981.
- [DMP93] R. Dijkgraaf, G. Moore, and R. Plesser. The partition function of 2d string theory. *Nuclear Physics B*, 394 :356, 1993.
- [DMS97] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal field theory*. 1997. New York, USA : Springer (1997) 890 p.
- [DN09] J. De Gier and A. Nichols. The two-boundary temperley-lieb algebra. *Journal of Algebra*, 321 :1132, 2009.
- [DO94] H. Dorn and H.-J. Otto. Two and three-point functions in liouville theory. *Nuclear Physics B*, 429 :375, 1994.
- [DRT10] P. Dorey, C. Rim, and R. Tateo. Exact g-function flow between conformal field theories. *Nucl. Phys.*, B834 :485–501, 2010.
- [DS86] B. Duplantier and H. Saleur. Exact surface and wedge exponents for polymers in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 57(25) :3179–3182, Dec 1986.
- [DS90] M. Douglas and S. Shenker. Strings in less than one-dimension. *Nucl. Phys.*, B335 :635, 1990.
- [DS08] B. Duplantier and S. Sheffield. Liouville quantum gravity and kpz, 2008.
- [DS09] B. Duplantier and S. Sheffield. Duality and kpz in liouville quantum gravity. *Physical Review Letters*, 102 :150603, 2009.

- [DVV92] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde. String propagation in a black hole geometry. *Nucl. Phys.*, B371 :269–314, 1992.
- [Dys62] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *J. Math. Phys.*, 3 :140–156, 1962.
- [EFR91] S. Elitzur, A. Forge, and E. Rabinovici. Some global aspects of string compactifications. *Nucl. Phys.*, B359 :581–610, 1991.
- [EK95] B. Eynard and C. Kristjansen. Exact solution of the  $o(n)$  model on a random lattice. *Nuclear Physics B*, 455 :577, 1995.
- [EO05a] B. Eynard and N. Orantin. Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the bethe ansatz. *JHEP*, 0508 :028, 2005.
- [EO05b] B. Eynard and N. Orantin. Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions : diagrammatic rules for a residue formula. *JHEP*, 0512 :034, 2005.
- [EO07a] B. Eynard and N. Orantin. Invariants of algebraic curves and topological expansion. *JHEP*, 2007.
- [EO07b] B. Eynard and N. Orantin. Topological expansion of mixed correlations in the hermitian 2 matrix model and x-y symmetry of the  $f_g$  invariants, 2007.
- [EO08] B. Eynard and N. Orantin. Topological expansion and boundary conditions. *JHEP*, 0806 :037, 2008.
- [Eyn04] B. Eynard. A short note about morozov’s formula, 2004.
- [Eyn06] B. Eynard. Formal matrix integrals and combinatorics of maps. *CRM Series in Mathematical Physics*, 2006.
- [EZJ93] B. Eynard and J. Zinn-Justin. Large order behaviour of 2d gravity coupled to  $d < 1$  matter. *Physics Letters B*, 302 :396, 1993.
- [FGSC09] S. Fredenhagen, M. Gaberdiel, and C. Schmidt-Colinet. Bulk flows in virasoro minimal models with boundaries. *J. Phys.*, A42 :495403, 2009.
- [Fid05] L. Fidkowski. Solving the eigenvalue problem arising from the adjoint sector of the  $c=1$  matrix model, 2005.
- [FKV01] L. Faddeev, R. Kashaev, and A. Volkov. Strongly coupled quantum discrete liouville theory. i : Algebraic approach and duality. *Communications in Mathematical Physics*, 219 :199, 2001.

- [FPS09] P. Furlan, V. Petkova, and M. Stanishkov. Non-critical string pentagon equations and their solutions. *J.PHYS.A*, 42 :304016, 2009.
- [Fri82] *INTRODUCTION TO POLYAKOV'S STRING THEORY*, 1982. To appear in Proc. of Summer School of Theoretical Physics : Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, Les Houches, France, Aug 2-Sep 10, 1982.
- [FS94] P. Fendley and H. Saleur. Exact theory of polymer adsorption in analogy with the kondo problem. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 27(21), 1994.
- [FSZ93] P. Fendley, H. Saleur, and Al. B. Zamolodchikov. Massless flows i : the sine-gordon and o(n) models. *International Journal of Modern Physics A*, 8 :5717, 1993.
- [FZZ00] V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov, and Al. B. Zamolodchikov. Boundary liouville field theory i. boundary state and boundary two-point function, 2000.
- [Gak90] F. D. Gakhov. *Boundary Value Problems*. 1990.
- [GK89] M. Gaudin and I. Kostov. model on a fluctuating planar lattice some exact results o(n). *Phys. Lett. B*, 220 :200–206, March 1989.
- [GK90] D. Gross and I. Klebanov. One-dimensional string theory on a circle. *Nuclear Physics B*, 344(3) :475–498, 1990.
- [GK91] D. Gross and I. Klebanov. Vortices and the non-singlet sector of the c = 1 matrix model. *Nuclear Physics B*, 354 :459–474, 1991.
- [GKN99] E. Guitter, C. Kristjansen, and J. L. Nielsen. Hamiltonian cycles on random eulerian triangulations. *Nuclear Physics B*, 546 :731, 1999.
- [GL91] M. Goulian and M. Li. Correlation functions in liouville theory. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2051–2055, 1991.
- [GM90a] D. Gross and A. Migdal. Nonperturbative solution of the ising model on a random surface. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :717, 1990.
- [GM90b] D. Gross and A. Migdal. A nonperturbative treatment of two-dimensional quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B340 :333–365, 1990.
- [GM90c] D. Gross and N. Miljkovic. A nonperturbative solution of d = 1 string theory. *Phys. Lett.*, B238 :217, 1990.
- [GM93] P. Ginsparg and G. Moore. Lectures on 2d gravity and 2d string theory (tasi 1992), 1993.

- [GZ94] S. Ghoshal and Al. B. Zamolodchikov. Boundary s-matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory. *ERRATUM-IBID.A*, 9 :4353, 1994.
- [GZJ90] P. Ginsparg and J. Zinn-Justin. 2-d gravity + 1-d matter. *Phys. Lett.*, B240 :333–340, 1990.
- [HK93] E. Hsu and D. Kutasov. The gravitational sine-gordon model. *Nuclear Physics B*, 396 :693, 1993.
- [Hos01] K. Hosomichi. Bulk-boundary propagator in liouville theory on a disc. *JHEP*, 0111 :044, 2001.
- [Hos08] K. Hosomichi. Minimal open strings. *JHEP*, 0806 :029, 2008.
- [IC09] Y. Ikhlef and J. Cardy. Discretely holomorphic parafermions and integrable loop models. *Mathematical Systems Theory*, 42 :102001, 2009.
- [IZ80] C. Itzykson and J. B. Zuber. The planar approximation. 2. *J. Math. Phys.*, 21 :411, 1980.
- [Jev93] A. Jevicki. Developments in 2d string theory, 1993. Lectures presented at the Spring School, Trieste, Italy.
- [JS80] A. Jevicki and B. Sakita. The quantum collective field method and its application to the planar limit. *Nucl. Phys.*, B165 :511, 1980.
- [JS08a] J. Jacobsen and H. Saleur. Combinatorial aspects of boundary loop models. *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment*, 2008 :01021, January 2008.
- [JS08b] J. Jacobsen and H. Saleur. Conformal boundary loop models. *Nuclear Physics B*, 788 :137, 2008.
- [Kar09] J. Karczmarek. Scattering in the adjoint sector of the  $c = 1$  matrix model. *JHEP*, 0902 :011, 2009.
- [Kaz86] V. A. Kazakov. Ising model on dynamical planar random lattice : Exact solution. *Phys. Lett. A*, 119(3) :140, 1986. SPI-1121.
- [Kaz88] V. A. Kazakov. Exactly solvable potts models, bond and tree like percolation on dynamical (random) planar lattice. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, 4 :93–97, 1988.
- [KK92] V. A. Kazakov and I. Kostov. Loop gas model for open strings. *Nuclear Physics B*, 386 :520, 1992.
- [KK04] V. A. Kazakov and I. Kostov. Instantons in non-critical strings from the two-matrix model. In *From fields to strings*, volume 3, pages 1864–1894. Shifman, M et. al., 2004.

- [KKK00] V. A. Kazakov, I. Kostov, and D. Kutasov. A matrix model for the 2d black hole. In JHEP, editor, *Nonperturbative Quantum Effects*, 2000.
- [KKK02] V. A. Kazakov, I. Kostov, and D. Kutasov. A matrix model for the two dimensional black hole. *Nuclear Physics B*, 622 :141, 2002.
- [Kle95] I. Klebanov. Touching random surfaces and liouville gravity. *Physical Review D*, 51 :1836, 1995.
- [Kle07] S. Klevtsov. Connecting sle and minisuperspace liouville gravity, 2007.
- [KLSTS02] S. Kharchev, D. Lebedev, and M. Semenov-Tian-Shansky. Unitary representations of  $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ , the modular double, and the multiparticle q-deformed toda chains. *Communications in Mathematical Physics*, 225 :573, 2002.
- [KM88] V. A. Kazakov and A. Migdal. Recent progress in the theory of noncritical strings. *Nucl. Phys.*, B311 :171, 1988.
- [KMS92] D. Kutasov, E. Martinec, and N. Seiberg. Ground rings and their modules in 2d gravity with  $c$  le 1\$ matter. *Physics Letters B*, 276 :437, 1992.
- [Kos89a] I. Kostov.  $O(n)$  vector model on a planar random lattice : Spectrum of anomalous dimensions. *Mod. Phys. Lett.*, A4 :217, 1989.
- [Kos89b] I. Kostov. The adic face models on a fluctuating planar lattice. *Nucl. Phys.*, B326 :583, 1989.
- [Kos92] I. Kostov. Strings with discrete target space. *Nucl. Phys.*, B376 :539–598, 1992.
- [Kos99] I. Kostov. Conformal field theory techniques in random matrix models, 1999. Based on the talk of the author at the Third Claude Itzykson Meeting, Paris, July 27-29, 1998.
- [Kos02] I. Kostov. String equation for string theory on a circle. *Nuclear Physics B*, 624 :146, 2002.
- [Kos03] I. Kostov. Integrable flows in  $c=1$  string theory. *J.PHYS.A* 36, 2003 :S825, 2003.
- [Kos04a] I. Kostov. Boundary ground ring and disc correlation functions in liouville quantum gravity. In *Lie theory and its applications in physics, (Varna, Bulgaria)*, June 2004.
- [Kos04b] I. Kostov. Boundary ground ring in 2d string theory. *Nuclear Physics B*, 689 :3, 2004.
- [Kos06] I. Kostov. Thermal flow in the gravitational  $o(n)$  model. In *Contributed to 4th International Symposium on Quantum Theory and Symmetries (QTS-4) and 6th International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics (LT-6), Varna, Bulgaria, 15-21 Aug 2005.*, 2006.



- [Kos07a] I. Kostov. Boundary loop models and 2d quantum gravity. *J. Stat. Mech.*, 0708 :P08023, 2007.
- [Kos07b] I. Kostov. Long strings and chiral non-singlets in matrix quantum mechanics. *JHEP0701*, 074, 2007.
- [Kos08] I. Kostov. In *Les Houches summer school 2008*, 2008.
- [Kos10] Ivan Kostov. Matrix models as conformal field theories : genus expansion. *Nucl. Phys.*, B837 :221–238, 2010.
- [KPS04] I. Kostov, B. Ponsot, and D. Serban. Boundary liouville theory and 2d quantum gravity. *Nuclear Physics B*, 683 :309, 2004.
- [KPZ88] V. Knizhnik, A. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Fractal structure of 2d-quantum gravity. *Mod. Phys. Lett.*, A3 :819, 1988.
- [KRW09] M. Kormos, I. Runkel, and G. M. T. Watts. Defect flows in minimal models. *JHEP*, 0911 :057, 2009.
- [KS92] I. Kostov and M. Staudacher. Multicritical phases of the  $o(n)$  model on a random lattice. *Nucl. Phys.*, B384 :459–483, 1992.
- [LSW03] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner. Conformal restriction : the chordal case. *J. Am. Math. Soc.*, 16 :917–955, 2003.
- [Mal05] J. Maldacena. Long strings in two dimensional string theory and non-singlets in the matrix model. *JHEP0509*, 078, 2005.
- [Meh88] M. L. Mehta. *Matrix Theory*. 1988.
- [MMSS04] J. Maldacena, G. Moore, N. Seiberg, and D. Shih. Exact vs. semiclassical target space of the minimal string. *JHEP*, 0410 :020, 2004.
- [MO80] G. Marchesini and E. Onofri. Planar limit for  $su(n)$  symmetric quantum dynamical systems. *J. Math. Phys.*, 21 :1103, 1980.
- [Moo92a] G. Moore. Double scaled field theory at  $c = 1$ . *Nucl. Phys.*, B368 :557–590, 1992.
- [Moo92b] G. Moore. Gravitational phase transitions and the sine-gordon model, 1992.
- [MPR92] G. Moore, R. Plesser, and S. Ramgoolam. Exact s-matrix for 2d string theory. *Nuclear Physics B*, 377 :143, 1992.

- [MS93] P. Martin and H. Saleur. The blob algebra and the periodic Temperley-Lieb algebra. *Lett. Math. Phys.*, 30(3) :189–206, 1993.
- [MSS91] G. Moore, N. Seiberg, and M. Staudacher. From loops to states in 2-d quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B362 :665–709, 1991.
- [MSW91] G. Mandal, A. Sengupta, and S. Wadia. Classical solutions of two-dimensional string theory. *Mod. Phys. Lett.*, A6 :1685–1692, 1991.
- [Mus77] N. I. Muskhelishvili. *Singular Integral Equations*. 1977.
- [Nak04] Y. Nakayama. Liouville field theory – a decade after the revolution. *International Journal of Modern Physics A*, 19 :2771, 2004.
- [Nic06a] A. Nichols. Structure of the two-boundary xxz model with non-diagonal boundary terms. *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment*, 0602 :L004, 2006.
- [Nic06b] A. Nichols. The Temperley-Lieb algebra and its generalizations in the Potts and xxz models. *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment*, 0601 :003, 2006.
- [Nie82] B. Nienhuis. Exact critical point and critical exponents of  $o(n)$  models in two-dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :1062, 1982.
- [Nie83] B. Nienhuis. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 11. 1983.
- [Nie84] B. Nienhuis. Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas. *J. Stat. Phys.*, 34 :731–761, 1984.
- [NP94] M. Natsuume and J. Polchinski. Gravitational scattering in the  $c = 1$  matrix model. *Nuclear Physics B*, 424 :137, 1994.
- [Par90] G. Parisi. String theory on the one-dimensional lattice. *Phys. Lett.*, B238 :213, 1990.
- [Pas87a] V. Pasquier. Operator content of the ADE lattice models. *J. Phys.*, A20 :5707, 1987.
- [Pas87b] V. Pasquier. Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams. *Nucl. Phys.*, B285 :162–172, 1987.
- [Pet10] V. Petkova. On the crossing relation in the presence of defects. *JHEP*, 1004 :061, 2010.
- [PJF74] P. Pfeuty, D. Jasnow, and M. Fisher. Crossover scaling functions for exchange anisotropy. *Phys. Rev. B*, 10(5) :2088–2112, Sep 1974.
- [Poi98] H. Poincaré. *J. Math. Pure App.*, 5 se 4 :157, 1898.

- [Pol81] A. Polyakov. Quantum geometry of bosonic strings. *Phys. Lett.*, B103 :207–210, 1981.
- [Pol90] J. Polchinski. Critical behavior of random surfaces in one-dimension. *Nucl. Phys.*, B346 :253–263, 1990.
- [Pol91] A. Polyakov. Selftuning fields and resonant correlations in 2-d gravity. *Mod. Phys. Lett.*, A6 :635–644, 1991.
- [Pol98] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1 : An introduction to the bosonic string*. 1998. Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 402 p.
- [Pot52] R. B. Potts. Some generalized order - disorder transformations. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 48 :106–109, 1952.
- [PT02] B. Ponsot and J. Teschner. Boundary liouville field theory : Boundary three point function. *Nuclear Physics B*, 622 :309, 2002.
- [PZ01] V. Petkova and J. B. Zuber. Generalised twisted partition functions. *Physics Letters B*, 504 :157, 2001.
- [Reg61] T. Regge. General relativity without coordinates. *Il Nuovo Cimento*, 19(3) :558–571, 1961.
- [Sar09] G. Sarkissian. Defects and permutation branes in the liouville field theory. *Nuclear Physics B*, 821 :607, 2009.
- [SB89] H. Saleur and M. Bauer. On some relations between local height probabilities and conformal invariance. *Nucl. Phys.*, B320 :591, 1989.
- [Sei90] N. Seiberg. Notes on quantum liouville theory and quantum gravity. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 102 :319–349, 1990.
- [She90] *The Strength of nonperturbative effects in string theory*, 1990. Presented at the Cargese Workshop on Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings, Cargese, France, May 28 - Jun 1, 1990.
- [SS04] N. Seiberg and D. Shih. Branes, rings and matrix models in minimal (super)string theory. *JHEP*, 0402 :021, 2004.
- [SS05] N. Seiberg and D. Shih. Minimal string theory. *Comptes Rendus Physique*, 6 :165, 2005.
- [Sta68] H. Stanley. Dependence of critical properties on dimensionality of spins. *Phys. Rev. Lett.*, 20 :589, 1968.
- [Tes95] J. Teschner. On the liouville three-point function. *Physics Letters B*, 363 :65, 1995.

- [Tes00] J. Teschner. Remarks on liouville theory with boundary. In *Presented at the 4th Annual European TMR Conference on Integrability, NonPerturbative Effects and Symmetry in Quantum Field THEORY, Paris, France, 7-13 Sep 2000.*, 2000.
- [Tes01] J. Teschner. Liouville theory revisited. *Classical and Quantum Gravity*, 18 :R153, 2001.
- [Wit91] E. Witten. On string theory and black holes. *Phys. Rev.*, D44 :314–324, 1991.
- [Wit92] E. Witten. Ground ring of two dimensional string theory. *Nuclear Physics B*, 373 :187, 1992.
- [WZ92] E. Witten and B. Zwiebach. Algebraic structures and differential geometry in 2d string theory. *Nuclear Physics B*, 377 :55, 1992.
- [Zam87] A. B. Zamolodchikov. Renormalization group and perturbation theory near fixed points in two-dimensional field theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 46 :1090, 1987.
- [Zam91] A. B. Zamolodchikov. From tricritical ising to critical ising by thermodynamic bethe ansatz. *Nucl. Phys.*, B358 :524–546, 1991.
- [Zam05] Al. B. Zamolodchikov. On the three-point function in minimal liouville gravity, 2005. Talk delivered at the International Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems, Dubna.
- [ZZ96] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov. Structure constants and conformal bootstrap in liouville field theory. *Nuclear Physics B*, 477 :577, 1996.
- [ZZ01] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov. Liouville field theory on a pseudosphere, 2001.

# Article I

## Scattering of Long Folded Strings and Mixed Correlators in the Two Matrix Model

[ARXIV:0709.3912]

## Scattering of Long Folded Strings and Mixed Correlators in the Two-Matrix Model

J.-E. BOURGINE\*, K. HOSOMICHI\*, I. KOSTOV\*<sup>o</sup> and Y. MATSUO<sup>†</sup>

\**Service de Physique Théorique, CNRS-URA 2306  
C.E.A.-Saclay  
F-91191 Gif-sur-Yvette, France*

<sup>†</sup>*Department of Physics, Faculty of Science, University of Tokyo  
Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan*

### ABSTRACT

We study the interactions of Maldacena's long folded strings in two-dimensional string theory. We find the amplitude for a state containing two long folded strings to come and go back to infinity. We calculate this amplitude both in the worldsheet theory and in the dual matrix model, the Matrix Quantum Mechanics. The matrix model description allows to evaluate the amplitudes involving any number of long strings, which are given by the mixed trace correlators in an effective two-matrix model.

<sup>o</sup>Associate member of the *Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, 72 Tsarigradsko Chaussée, 1784 Sofia, Bulgaria*

## 1 Introduction

In this paper we study the scattering of long folded strings in 2D string theory. As pointed out by Maldacena [1], long folded strings stretching from infinity correspond to non-singlet states in the dual matrix model. It is expected that condensation of such states can produce curved background with horizon [2, 3]. Our main motivation for this work is to study the possibility of formulating a Lorentzian version of the “black hole matrix model”, discussed in [1]. Our results suggest that the chiral formalism introduced in [4] and further developed in [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] is well adapted for this purpose.

The two-dimensional strings have only longitudinal modes, and the closed string spectrum is that of a single massless particle, the ‘tachyon’ [12]. In addition to the closed string spectrum, the theory has states of infinite energy, associated with long folded strings stretched to infinity in the space direction  $\phi$ . Folded strings in two dimensions were studied in [13] and more recently in [1, 14, 15]. Such strings have infinite energy since they stretch all the way to  $\phi \rightarrow -\infty$ . After subtracting the infinite part, the spectrum is unbounded from below. Any physical observable in such a theory can be formulated as a scattering amplitude relating incoming right moving and outgoing left moving states. The asymptotic states can be thought of as composed of quasiparticles. Each such quasiparticle represents the tip of a folded string.

An exact worldsheet description of folded strings based on Liouville string theory was given by Maldacena [1]. He argued that a stack of FZZT branes placed far away in the asymptotically free region ( $\mu_B \gg \sqrt{\mu}$ ) can be considered as a source for long folded strings. The evolution of a long string starts with a very energetic short open string in the region  $\phi \ll -\log \mu_B$ . When the ends of the string reach  $\phi \sim -\log \mu_B$ , they get trapped by the brane, while the bulk of the string continues to move until it loses all its kinetic energy at distance  $\phi \sim -\log \mu$  and starts to evolve back. This picture allows to express the reflection amplitude for the tip of a long folded string as a certain limit of the boundary two-point function in Liouville theory. Using the expression for this correlation function found in [16], Maldacena gave an explicit formula for this reflection amplitude.

In the dual matrix model, the Matrix Quantum Mechanics (MQM), the closed strings propagate in the singlet sector, while the folded strings propagate in the non-singlet sector of MQM, characterized by the presence of Wilson lines. In MQM, the states containing one folded string are those in the adjoint representation. They can be considered as impurities in the fermi sea. The wave function of such states depends on a collective coordinate giving the position of the tip of the folded string. It satisfies a Calogero type equation, whose collective field formulation was given in [1]. The explicit solution of this equation was found later in [17], and the result for the scattering phase was identical with the one obtained from the worldsheet theory.

The states with  $n$  folded strings, or  $n$  impurities, are described by irreducible representations whose Young tableaux contain  $n$  boxes and  $n$  anti-boxes. These are the representations that occur in the direct product of  $n$  fundamental and  $n$  anti-fundamental representations.

The extension of the canonical formalism of MQM to higher representations passes through the solution of the corresponding Calogero problem, which seems to be a quite difficult, although not impossible, task. Instead one can try to attack the problem using the chiral quantization of MQM, which operates directly in terms of asymptotic incoming and outgoing states. Here the Hamiltonian is first order and therefore has no Calogero term. Using the chiral formalism, the scattering problem in the non-singlet sector of MQM was reformulated by one of the authors [18] in terms of the mixed trace correlators in an effective two-matrix model. This allowed to apply some powerful results derived for the two-matrix model [19, 20]. In particular, it was shown in [18] that the scattering amplitude in the adjoint representation, evaluated originally in [1, 17], coincides with the simplest mixed trace correlator in the effective two-matrix model.

In this paper we evaluate, using the chiral formalism of MQM, the reflection amplitudes of higher non-singlets, focusing mainly on the case  $n = 2$ . The reflection amplitude can be expanded in the inverse cosmological constant  $g_s \sim 1/\mu$ . The leading term is the Young-symmetrized product of the reflection amplitudes for two non-interacting quasiparticles. The interaction appears in the subleading term, for which we find an explicit expression.

We give two independent derivations of the subleading term, performed in the worldsheet theory and in the matrix model. In the worldsheet theory, the subleading term is given by the 4-point boundary amplitude in a suitable limit. In the derivation we make a heavy use of the symmetries imposed by the boundary ground ring. To set the notations and explain the problem, we first present the derivation of the  $n = 1$  amplitude, the reflection factor for a single long string, originally obtained in [1].

The result is unexpectedly simple. We find that the reflection amplitude in the subleading order consists of two terms, which have a natural interpretation in terms of reflection and scattering of the two quasiparticles. The first term describes a scattering of the two quasiparticles with non-zero energy transfer, followed by reflection of each quasiparticle. In the second term the scattering and the reflections occur in the opposite order. The scattering amplitude for two quasiparticles does not depend on  $\mu$  and  $\mu_B$  and therefore occurs in the extreme asymptotic domain  $\phi \ll -\log \mu_B$ , where the incoming and the outgoing strings are short.

The matrix model description allows to evaluate the amplitudes for states with any number  $n$  of quasiparticles. We first evaluate the amplitudes in the coordinate space and then perform a Fourier transformation. We performed explicitly the Fourier transformation for the case  $n = 2$  and reproduced the result of the worldsheet theory. We observed that the  $n = 2$  amplitudes in the

coordinate and momentum space essentially coincide. Assuming that this is a general property, we speculate about the structure of the reflection amplitude for states containing  $n$  long strings having a common worldsheet with the topology of a disk. We argue that such an amplitude again decomposes into elementary processes, reflections of long strings and scattering of any number  $k \leq n$  of short open strings.

## 2 Long folded strings in worldsheet theory

The worldsheet theory is described by a free boson  $X$  and a Liouville field  $\phi$ . The field  $X$  is regarded as time, so it has the opposite signature. As was done in [21], it is convenient to consider a family of theories in which both  $\phi$  and  $X$  couple to the worldsheet curvature. Their background charges are  $Q = b+1/b$  and  $\tilde{Q} = ib - i/b$  respectively, so that matter central charge is critical,

$$c_{\text{matter}} = 2 + 6(Q^2 + \tilde{Q}^2) = 26.$$

We will be mostly interested in the case  $b = 1$ , but will keep  $b$  as arbitrary until the final stage in order to avoid singularities which are peculiar to  $b = 1$ .

Local bulk operators

$$T_k^\pm \sim e^{(Q \pm ik)\phi - i(\tilde{Q} + k)X}$$

of marginal dimension correspond to on-shell tachyon modes with energy  $k$ . They are right or left-moving waves depending on the sign choice. Similarly, local boundary operators

$$U_k^\pm \sim e^{(\frac{Q}{2} \pm ik)\phi - i(\frac{\tilde{Q}}{2} + k)X}$$

correspond to physical open string modes with energy  $k$ . In this paper we focus on the open strings ending on FZZT-branes.

The action for  $\phi$  has a potential  $\mu e^{2b\phi}$  which scatters every incoming (right-moving) tachyon back to  $\phi = -\infty$ . As a consequence, the operators  $T_k^+$  and  $T_k^-$  are proportional to each other. A similar relation holds also for the open string operators  $U_k^+$  and  $U_k^-$ , but the relation becomes more complicated because the end-points of the open strings also feel the boundary potential  $\mu_B e^{b\phi}$ . We label the branes by  $s$ , in terms of which  $\mu_B$  can be expressed as

$$\mu_B(s) = \sqrt{\frac{\mu}{|\sin \pi b^2|}} \cosh(2\pi b s).$$

We consider FZZT-branes with very large  $s$ . If one throws in an open string ending on such branes, its endpoints first reach the boundary potential wall at  $\phi \sim -2\pi s - \frac{1}{2b} \log \mu$ , which is much before the bulk potential wall at  $\phi \sim -\frac{1}{2b} \log \mu$ . When the endpoints are caught by the potential, the string starts to stretch and its tip continues to move towards the strong coupling

region until it uses up all its kinetic energy. The tip of such a string can probe the bulk Liouville wall if it initially has a sufficiently large energy,  $k \sim 2s$ . This is how a long folded string is realized in two-dimensional string theory [1].

## 2.1 Classical analysis

The classical motion of an open string is described by the action

$$S = \int \frac{d\tau d\sigma}{4\pi} \{ (\partial_\tau \phi)^2 - (\partial_\sigma \phi)^2 - (\partial_\tau X)^2 + (\partial_\sigma X)^2 - \mu\pi e^{2b\phi} \} - \int d\tau \{ \mu_B(s_+) e^{b\phi(\sigma_+, \tau)} + \mu_B(s_-) e^{b\phi(\sigma_-, \tau)} \}, \quad (2.1)$$

defined on a strip  $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . The classical argument is known to be valid for small  $b$ . We focus on the solutions parametrized by  $\gamma$ ,

$$X = \tau, \quad 4\mu\pi e^{2b\phi} = \{ \cosh b\gamma \cosh b\tau + \sinh b\gamma \cosh b\sigma \}^{-2}, \quad (2.2)$$

which solve the bulk equation of motion as well as the Virasoro constraint  $T_{\pm\pm} = 0$ . These solutions were first presented in the context of long folded strings in [1]. The tip of the folded string is at  $\sigma = 0$ , and  $\phi$  reaches maximum at  $\sigma = \tau = 0$ .

The boundary conditions on fields,  $\partial_\sigma X = \partial_\sigma \phi \pm 2\pi b \mu_B(s_\pm) e^{b\phi} = 0$ , are satisfied if

$$\sinh^2 b\gamma \sinh^2 b\sigma_\pm = \cosh^2(2\pi b s_\pm). \quad (2.3)$$

These relations allow us to express  $(k, s_\pm)$  as functions of  $(\gamma, \sigma_\pm)$ . For very large  $s_\pm$  and a finite  $\gamma$ ,  $\sigma_\pm$  roughly equals  $2\pi s_\pm$  up to sign. Long folded open strings correspond to the choice  $\sigma_- < 0 < \sigma_+$ . The (spacetime) energy  $k$  of such a string is given by

$$2\pi k = (\sigma_+ - \sigma_-)/2\pi \sim s_+ + s_-. \quad (2.4)$$

See the Figure 1 for an example of a long folded string. The other two choices,  $0 < \sigma_- < \sigma_+$  or  $\sigma_- < \sigma_+ < 0$ , both lead to ‘‘short’’ strings which do not develop long folded worldsheets. The role of short strings is important in understanding the interactions of folded long strings.

**Reflection amplitude.** In the tree approximation, the phase for reflection amplitude of a long folded string is given by the classical value of the action (2.1) on the strip. Let us give a rough evaluation of it for the solution presented above, assuming that  $\gamma$  is reasonably large. The worldsheet strip is decomposed into four regions according to the behavior of  $\phi(\tau, \sigma)$ :

$$(A) : \tau > +|\sigma| \quad \phi \sim \phi_0 - \tau,$$

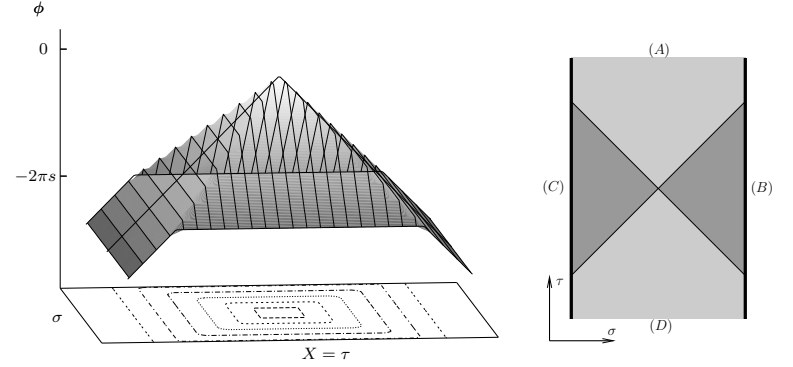


Figure 1: (Left) A classical long folded string for  $\mu = b = 1$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\sigma_\pm = \pm 500$ . Some equal- $\phi$  lines are drawn on the base  $\sigma$ - $\tau$  plane. (Right) The string worldsheet is divided into four regions according to the behavior of  $\phi$ .

$$\begin{aligned} (B) : \sigma > +|\tau| & \quad \phi \sim \phi_0 - \sigma, \\ (C) : \sigma < -|\tau| & \quad \phi \sim \phi_0 + \sigma, \\ (D) : \tau < -|\sigma| & \quad \phi \sim \phi_0 + \tau, \end{aligned} \quad (2.5)$$

where  $\phi_0 = -\gamma - \frac{1}{2b} \log(\frac{\mu\pi}{4})$  is a constant. See the right of the Figure 1. The bulk and boundary potential terms in the action can be neglected in the limit of large  $s_\pm$ . The contributions to the classical action from the kinetic terms of  $\phi$  and  $X$  cancel in the regions (A) and (D), whereas they add up in the regions (B) and (C). The classical action is therefore roughly proportional to the areas of the regions (B) and (C):

$$S_{\text{cl}} \sim -\frac{1}{2\pi}(\sigma_+^2 + \sigma_-^2) \sim -2\pi(s_+^2 + s_-^2). \quad (2.6)$$

## 2.2 Quantum theory

We consider the following physical (on-shell) boundary operators

$$\begin{aligned} U_k^+ &= b^{\frac{1}{2}} \Gamma(-2ikb) \nu^{\frac{\sigma}{2} + ik} c e^{(\frac{\sigma}{2} + ik)\phi - i(\frac{\sigma}{2} + k)X}, \\ U_k^- &= b^{-\frac{1}{2}} \Gamma(2ik/b) \nu^{\frac{\sigma}{2} - ik} c e^{(\frac{\sigma}{2} - ik)\phi - i(\frac{\sigma}{2} + k)X}, \end{aligned} \quad (2.7)$$



corresponding to right- or left-moving open string excitations. Here  $c$  is the reparametrization ghost and we have introduced

$$\nu \equiv \{\mu\pi\gamma(b^2)\}^{1/2b}, \quad \gamma(x) \equiv \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}.$$

The operators  $U_k^+$  and  $U_k^-$  are proportional to each other,

$${}^s[U_k^+]^{s'} = d(k, s, s') \cdot {}^s[U_k^-]^{s'},$$

where one should remember that the properties of boundary operators depend also on the two D-branes. The proportionality constant  $d(k, s, s')$  is essentially given by the Liouville boundary reflection coefficient  $d_L(\beta, s, s')$  [16]:

$$\begin{aligned} d(k, s, s') &= b \nu^{2ik} \frac{\Gamma(-2ikb)}{\Gamma(2ik/b)} d_L(\frac{Q}{2} + ik, s, s') \\ &= \mathbf{S}(2ik + \frac{1}{b}) \mathbf{S}(\frac{Q}{2} - i(k+s+s')) \mathbf{S}(\frac{Q}{2} - i(k+s-s')) \\ &\quad \times \mathbf{S}(\frac{Q}{2} - i(k-s+s')) \mathbf{S}(\frac{Q}{2} - i(k-s-s')). \end{aligned} \quad (2.8)$$

The function  $\mathbf{S}(x)$  is introduced and used in [16]. Some of its properties are collected in Appendix A.

We will consider Maldacena's limit [1] in which all boundary parameters have the form

$$s = L + \delta s$$

with  $L$  assumed to be very large, while  $\delta s$  is kept finite. The FZZT-branes of our interest are all labeled by such  $s$ . A folded long open string is described by a pair of vertex operators  $U_k^+$  and  $U_{-k}^-$  with

$$k \sim 2L.$$

We also consider short open strings carrying finite energy  $k$ , as they will appear as intermediate particles in the scattering of long folded strings. The reflection amplitude of a single open string is given by  $d(k, s, s')$ . Using the asymptotics of  $\mathbf{S}(x)$  one finds

$$\begin{aligned} d(k, s, s')|_{(k,s,s') \sim (0,L,L)} &= e^{-4\pi i L k + \mathcal{O}(L^0)}, \\ d(k, s, s')|_{(k,s,s') \sim (2L,L,L)} &= e^{-2\pi i(s^2+s'^2)+2\pi i L \tilde{Q} + \mathcal{O}(L^0)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

for short and long open strings respectively. To the leading order in  $L$ , the second formula agrees with the classical result (2.6) for long folded strings. The full expression for the reflection amplitude at  $b = 1$  is

$$d(k, s, s')^{\pm 1}|_{(k,s,s') \sim (\pm 2L,L,L)} = e^{-2\pi i(s^2+s'^2) - \frac{i\pi}{4} + i f(\pi(s+s' \mp k))}, \quad (2.10)$$

where the function  $f(x)$  is defined as<sup>1</sup>

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x d\zeta \left( \frac{\zeta}{\tanh \zeta} + \zeta \right), \quad (2.11)$$

see Appendix A for details.

### 2.3 Three-point amplitude

In order to compute the four-point function we need the expression of the three-point function in the Maldacena limit. It gives the amplitude of a long folded string emitting or absorbing a short open string. To the lowest order, the computation boils down to that of three-point function of boundary operators  $B_\beta \equiv e^{\beta\phi}$  in Liouville theory on a disk. The corresponding structure constant has been worked out by [24] but the general formula is quite complicated. It actually simplifies in Maldacena's limit when the conservation of energy,  $k_1 + k_2 + k_3 = -\tilde{Q}/2$ , is taken into account. We evaluate this structure constant as a common solution of the shift relations derived in Appendix B,<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} &\left\langle {}^{s_3}[U_{k_1-ib/2}^-]^{s_1} [U_{k_2}^-]^{s_2} [U_{k_3}^-]^{s_3} \right\rangle + \left\langle {}^{s_3}[U_{k_1}^-]^{s_1 \pm ib/2} [U_{k_2-ib/2}^-]^{s_2} [U_{k_3}^-]^{s_3} \right\rangle \\ &= \frac{\nu u^Q \pi^2 b^{\frac{1}{2}} \cdot d(k_1, s_3, s_1 \pm b/2)^{-1} d(k_2, s_1, s_2)^{-1} d(k_3, s_2, s_3)^{-1}}{\sin(2\pi i k_1 b) \sin(2\pi i k_2 b)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

and

$$\begin{aligned} &\left\langle {}^{s_3}[U_{k_1+i/2b}^+]^{s_1} [U_{k_2}^+]^{s_2} [U_{k_3}^+]^{s_3} \right\rangle + \left\langle {}^{s_3}[U_{k_1}^+]^{s_1 \pm i/2b} [U_{k_2+i/2b}^+]^{s_2} [U_{k_3}^+]^{s_3} \right\rangle \\ &= \frac{\nu u^Q \pi^2 b^{-\frac{1}{2}} d(k_1, s_3, s_1 \pm i/2b) d(k_2, s_1, s_2) d(k_3, s_2, s_3)}{\sin(2\pi i k_1/b) \sin(2\pi i k_2/b)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Let us first solve the relation (2.12) in Maldacena's limit taking  $\{k_1, k_2, k_3\} \sim \{+2L, 0, -2L\}$ . The term on the right hand side scales as

$$\text{r.h.s.} \sim e^{4\pi i L (s'_1 - s_2 + k_2 + ib^{-1})}.$$

One of the two terms on the l.h.s. has to scale in the same way, and the other has to be subdominant or comparable. By inspection one finds,

$$\begin{aligned} s_1 = s'_1 + \frac{ib}{2} &\implies \text{l.h.s.1} \ll \text{l.h.s.2} \sim \text{r.h.s.}, \\ s_1 = s'_1 - \frac{ib}{2} &\implies \text{l.h.s.1} \sim \text{l.h.s.2} \sim \text{r.h.s.} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> The function  $f(x)$  is related to the odd function  $g(x)$  from Appendix A of [1] by  $f(x) = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{\pi}{12} - g(x)$ .  
<sup>2</sup> A variant of these relations has been previously derived by V. Petkova [25].

So (2.12) reduces to a two-term relation for  $s_1 = s'_1 + \frac{i\tilde{b}}{2}$  and is easily solved. The solution, when transformed into the amplitude of  $U_k^+$ , reads

$$\langle s_3 [U_{k_1}^+]^{s_1} [U_{k_2}^+]^{s_2} [U_{k_3}^+]^{s_3} \rangle_{(k_1, k_2, k_3) \sim (2L, 0, -2L)} = \frac{4i\pi^2 \nu^Q b^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi b(k_1+s_2)} - e^{2\pi b(-k_3+s_1)}}. \quad (2.14)$$

By a little more work it can be shown that this solution satisfies all nonequivalent recursion relations which follow from (2.12). It is also easy to see that (2.14) satisfies the homogeneous version of the recursion relation (2.13), i.e. the equation with the r.h.s. set to zero.

The second recursion relation (2.13) can be analyzed in the same way, and one can find a solution which in terms of  $U_k^-$  reads

$$\langle s_3 [U_{k_1}^-]^{s_1} [U_{k_2}^-]^{s_2} [U_{k_3}^-]^{s_3} \rangle_{(k_1, k_2, k_3) \sim (2L, 0, -2L)} = \frac{-4i\pi^2 \nu^Q b^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{2\pi}{b}(k_1+s_2)} - e^{\frac{2\pi}{b}(-k_3+s_1)}}. \quad (2.15)$$

This solution is easily seen to satisfy the homogeneous version of (2.12). The correct three-point amplitude in Maldacena's limit is thus given by the sum of the two expressions (2.14), (2.15).

### The two-point amplitude.

To make a precise comparison between the results of worldsheet computations and Matrix Quantum Mechanics, we need a precise form of the disk two-point amplitude. It turns out slightly different from the reflection coefficient (2.8) for the operators  $U_k^\pm$  by a  $k$ -dependent function. Computing the two-point amplitude from the first principle is rather difficult; the CFT correlator is divergent due to the zero-mode integrals of the fields  $X$  and  $\phi$ , and it has to be divided by the infinite volume of the residual global conformal group that fixes the disk with two boundary insertions. A simple way to avoid these infinities is to differentiate with respect to the boundary cosmological constant to make it a disk three-point amplitude, where the additional boundary operator has the energy  $-\tilde{Q}/2$ .

We recall that the three-point amplitude with  $k_2 = -\tilde{Q}/2$  can be expressed in terms of the two-point function, see e.g. App. D of [22]. This relation can be extended for complex momenta by solving the recursion relations (2.12), (2.13) for  $k_1 = k = -k_3$ ,  $k_2 = -\tilde{Q}/2$ . The result is

$$\langle s_3 [U_k^+]^{s_1} [U_{-k}^-]^{s_2} [cB_b]^{s_3} \rangle = -\frac{\pi \nu^Q}{\sin(2\pi i k/b)} \cdot \frac{d(k, s_1, s_2) - d(k, s_1, s_3)}{\mu_B(s_2) - \mu_B(s_3)}. \quad (2.16)$$

This is indeed a derivative with respect to  $\mu_B$  when  $s_2 = s_3$ . We integrate it with respect to  $\mu_B$  assuming that the naive integration is allowed only when the operators satisfy Seiberg's bound [26]

$$\epsilon \cdot \text{Im} k > 0 \quad \text{for } U_k^\epsilon.$$

The resulting two-point amplitude becomes non-analytic,

$$\langle s_2 [U_k^+]^{s_1} [U_{-k}^-]^{s_2} \rangle = \text{sgn}(\text{Im} k) \frac{\pi \nu^Q d(k, s_1, s_2)}{\sin(2\pi i k/b)}. \quad (2.17)$$

## 2.4 Boundary Ground Ring

Similar recursion relations among higher point disk amplitudes can be derived by making use of the boundary ground ring. The ring is generated by the operators  $a_\pm$ ,

$$\begin{aligned} a_+ &= -\nu^{-\frac{1}{2b}} \{bc - \frac{b}{2}(\partial\phi + \partial X)\} e^{-\frac{1}{2b}(\phi-X)}, \\ a_- &= -\nu^{-\frac{b}{2}} \{bc - \frac{1}{2b}(\partial\phi - \partial X)\} e^{-\frac{b}{2}(\phi+X)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

where  $b, c$  are the reparametrization ghost and antighost fields. Note that, since they are constructed from Liouville degenerate operators,  $a_\pm$  can only join two branes whose  $s$  labels differ by a certain amount. The operator products of  $a_\pm$  with boundary tachyons satisfy the following formulae

$$-U_k^- a_- = a_- U_k^- = U_{k-\frac{i\tilde{b}}{2}}^-, \quad -U_k^+ a_+ = a_+ U_k^+ = U_{k+\frac{i\tilde{b}}{2}}^+. \quad (2.19)$$

The ring relation ( $a_+ a_- = a_- a_+ = 1$  at  $b = 1$ ) is realized on physical open string operators in much the same way as for the bulk ground ring, except that  $a_\pm$  also shifts the label of the brane. The above formulae are simple and independent of the labels of branes, whereas the coefficient of the OPE  $a_\pm U_k^\mp$  becomes a little complicated and can be obtained from (2.19) by reflection,

$$s[a_-]^{s'} [U_k^+]^{s''} = s[U_{k-\frac{i\tilde{b}}{2}}^+]^{s''} \cdot \frac{d(k, s', s'')}{d(k - \frac{i\tilde{b}}{2}, s, s'')}.$$

By inserting an  $a_\pm$  in a disk amplitude and using the fact that  $\partial a_\pm$  is BRST-exact, one can derive a shift relation among disk amplitudes. As an example, consider the difference of four-point amplitudes

$$\langle U_{k_0}^\pm (U_{k_1}^\pm a_\pm) U_{k_2}^\pm U_{k_3}^\pm \rangle - \langle U_{k_0}^\pm U_{k_1}^\pm (a_\pm U_{k_2}^\pm) U_{k_3}^\pm \rangle.$$

Since this can be written as an integral of an amplitude containing  $\partial a_\pm$ , it vanishes by BRST invariance up to contributions from the boundary of moduli space of disks with marked points. As was discussed originally in [23], see also [22], such boundary contributions are summarized by the higher operator products

$$\begin{aligned} a_- U_{k_1}^+ U_{k_2}^+ &= +\frac{b^{\frac{1}{2}} \pi}{\sin(2\pi i b k_1)} U_{k_1+k_2-\frac{i\tilde{b}}{2}}^+, \\ U_{k_1}^+ a_- U_{k_2}^+ &= +\frac{b^{\frac{1}{2}} \pi \sin(2\pi i b(k_1+k_2))}{\sin(2\pi i b k_1) \sin(2\pi i b k_2)} U_{k_1+k_2-\frac{i\tilde{b}}{2}}^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{k_1}^+ U_{k_2}^+ a_- &= -\frac{b^{\frac{1}{2}}\pi}{\sin(2\pi i b k_2)} U_{k_1+k_2-\frac{ib}{2}}^+, \\
a_+ U_{k_1}^- U_{k_2}^- &= -\frac{b^{-\frac{1}{2}}\pi}{\sin(2\pi i k_1/b)} U_{k_1+k_2+\frac{ib}{2}}^-, \\
U_{k_1}^- a_+ U_{k_2}^- &= -\frac{b^{-\frac{1}{2}}\pi \sin(2\pi i(k_1+k_2)/b)}{\sin(2\pi i k_1/b) \sin(2\pi i k_2/b)} U_{k_1+k_2+\frac{ib}{2}}^-, \\
U_{k_1}^- U_{k_2}^- a_+ &= +\frac{b^{-\frac{1}{2}}\pi}{\sin(2\pi i k_2/b)} U_{k_1+k_2+\frac{ib}{2}}^-.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Using them, the four-point amplitude can be shown to satisfy the recursion relation,<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
&\langle U_{k_0}^\pm U_{k_1}^\pm (a_\pm U_{k_2}^\pm) U_{k_3}^\pm \rangle - \langle U_{k_0}^\pm (U_{k_1}^\pm a_\pm) U_{k_2}^\pm U_{k_3}^\pm \rangle \\
&= \langle (U_{k_0}^\pm U_{k_1}^\pm a_\pm) U_{k_2}^\pm U_{k_3}^\pm \rangle - \langle U_{k_0}^\pm (U_{k_1}^\pm a_\pm U_{k_2}^\pm) U_{k_3}^\pm \rangle - \langle U_{k_0}^\pm U_{k_1}^\pm (a_\pm U_{k_2}^\pm U_{k_3}^\pm) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

where the operator products in the parentheses are given by (2.19) and (2.20).

Although the formulae for the operator products were derived in [23, 22] in the theory without Liouville interaction, we assume they remain valid after it is turned on. The interaction will, however, make higher operator products  $a_\pm U^n \rightarrow U$  ( $n \geq 3$ ) non-vanishing as well. The determination of higher point amplitudes along this path will therefore become more and more difficult.

## 2.5 Four-point amplitude (scattering of two long strings)

We will evaluate the amplitude describing the scattering of two long strings,

$$\langle {}^{s_3}[U_{k_0}^-]^{s_0}[U_{k_1}^+]^{s_1}[U_{k_2}^-]^{s_2}[U_{k_3}^+]^{s_3} \rangle; \quad (k_0, k_1, k_2, k_3) \sim (-2L, 2L, -2L, 2L),$$

as the common solution of the two recursion relations (2.21). Both relations (2.21) have inhomogeneous terms on the right hand side. As was the case with three-point amplitude, we can find the solution by working with those inhomogeneous terms one by one and then combining the results together in a manner consistent with the symmetry. Consequently, the four point amplitude will consist of a number of terms.

Some of the terms read,

$$\begin{aligned}
&\langle {}^{s_3}[U_{k_0}^-]^{s_0}[U_{k_1}^+]^{s_1}[U_{k_2}^-]^{s_2}[U_{k_3}^+]^{s_3} \rangle \\
&= 16\pi^3 \nu^Q \frac{d(k_3, s_2, s_3)}{d(k_0, s_3, s_0)} \frac{d(k_0+k_1+\frac{Q}{2}, s_3, s_1) \sin 2\pi i b(k_0+k_1+\frac{Q}{2})}{(e^{2\pi b(k_1+s_3)} - e^{2\pi b(-k_0+s_1)})(e^{\frac{2\pi}{b}(k_3+s_1)} - e^{\frac{2\pi}{b}(-k_2+s_3)})}
\end{aligned}$$

<sup>3</sup> In our convention for disk amplitudes  $\langle U_1 \cdots U_n \rangle$ , the first the second, and the last operators are unintegrated and the rest are integrated (with the factor of  $c$  removed).

$$\begin{aligned}
&+ 16\pi^3 \nu^Q \frac{d(k_3, s_2, s_3)}{d(k_2, s_1, s_2)} \frac{d(k_1+k_2+\frac{Q}{2}, s_0, s_2) \sin 2\pi i b(k_1+k_2+\frac{Q}{2})}{(e^{2\pi b(k_1+s_2)} - e^{2\pi b(-k_2+s_0)})(e^{\frac{2\pi}{b}(k_3+s_0)} - e^{\frac{2\pi}{b}(-k_0+s_2)})} \\
&+ 16\pi^3 \nu^Q \frac{d(k_1, s_0, s_1)}{d(k_2, s_1, s_2)} \frac{d(k_2+k_3+\frac{Q}{2}, s_1, s_3) \sin 2\pi i b(k_2+k_3+\frac{Q}{2})}{(e^{2\pi b(k_3+s_1)} - e^{2\pi b(-k_2+s_3)})(e^{\frac{2\pi}{b}(k_1+s_3)} - e^{\frac{2\pi}{b}(-k_0+s_1)})} \\
&+ 16\pi^3 \nu^Q \frac{d(k_1, s_0, s_1)}{d(k_0, s_3, s_0)} \frac{d(k_3+k_0+\frac{Q}{2}, s_2, s_0) \sin 2\pi i b(k_3+k_0+\frac{Q}{2})}{(e^{2\pi b(k_3+s_0)} - e^{2\pi b(-k_0+s_2)})(e^{\frac{2\pi}{b}(k_1+s_2)} - e^{\frac{2\pi}{b}(-k_2+s_0)})} \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{2.22}$$

From their dependence on the reflection amplitude  $d$ , they seem to describe the processes in which a short open string is exchanged between the incoming leg of one long string and the outgoing leg of the other, as described by the left four of Figure 2. These terms will therefore be physically uninteresting and discarded. Indeed, we will see these terms are not reproduced from MQM. Moreover, in Maldacena's limit these terms are subdominant and infinitely rapidly oscillating as compared to the terms which are reproduced from the MQM.

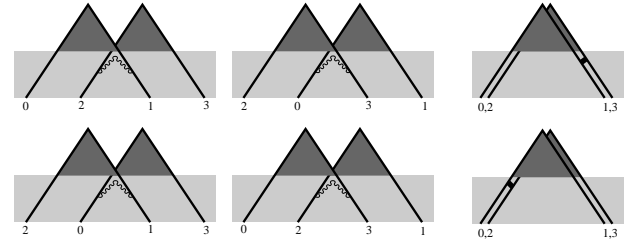


Figure 2: Terms in disk four-point amplitudes. The four figures on the left correspond to physically uninteresting processes and are discarded. The two on the right describe the terms which are reproduced from MQM analysis.

The physically interesting terms, Figure 2 right, are obtained from the recursion relations with the number of inhomogeneous terms reduced,

$$\begin{aligned}
&\frac{d(k_1, s_0, s'_1)}{d(k_1 - \frac{ib}{2}, s_0, s_1)} \langle {}^{s_3}[U_{k_0}^+]^{s_0}[U_{k_1-\frac{ib}{2}}^+]^{s_1}[U_{k_2}^-]^{s_2}[U_{k_3}^+]^{s_3} \rangle \\
&+ \frac{d(k_2, s_1, s_2)}{d(k_2 - \frac{ib}{2}, s'_1, s_2)} \langle {}^{s_3}[U_{k_0}^+]^{s_0}[U_{k_1}^+]^{s'_1}[U_{k_2-\frac{ib}{2}}^+]^{s_2}[U_{k_3}^+]^{s_3} \rangle \\
&= -\frac{8\pi^3 \nu^Q b e^{-2\pi b k_1}}{e^{2\pi b(k_3+s_1)} - e^{2\pi b(-k_2+s_3)}} + \frac{8\pi^3 \nu^Q b e^{2\pi b k_2}}{e^{2\pi b(k_1+s_3)} - e^{2\pi b(-k_0+s_1)}}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

and a similar equation involving  $i/2b$  shifts. We found that they are solved for  $b = 1$  by

$$\begin{aligned}
& \langle {}^{s_3}[U_{k_0}^-]^{s_0}[U_{k_1}^+]^{s_1}[U_{k_2}^-]^{s_2}[U_{k_3}^+]^{s_3} \rangle \\
&= 16i\pi^3 \nu^2 e^{-2\pi k_2} \times \frac{d(k_1, s_0, s_1)d(k_3, s_2, s_3) - d(k_0, s_3, s_0)^{-1}d(k_2, s_1, s_2)^{-1}}{(e^{2\pi(k_1+s_2)} - e^{2\pi(-k_2+s_0)})(e^{2\pi(k_3+s_1)} - e^{2\pi(-k_2+s_3)})} \\
&= 4i\pi^3 \nu^2 e^{-\pi(k_1+k_3)} \times \frac{d(k_1, s_0, s_1)d(k_3, s_2, s_3) - d(k_0, s_3, s_0)^{-1}d(k_2, s_1, s_2)^{-1}}{\sinh \pi(k_1 + k_2 - s_0 + s_2) \sinh(k_2 + k_3 + s_1 - s_3)}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

A remarkable property of (2.24) is that it has a certain symmetry under the exchange of  $k_a$  and  $s_a$ . To see this, let us introduce four positive ‘‘winding’’ parameters  $y_0, y_1, y_2, y_3$  such that

$$k_0 = -(y_3 + y_0), \quad k_1 = y_0 + y_1, \quad k_2 = -(y_1 + y_2), \quad k_3 = y_2 + y_3. \tag{2.25}$$

Then the conservation of momenta is satisfied automatically. The parameters  $y_i$  are determined up to a common translation

$$y_{0,2} \rightarrow y_{0,2} + a, \quad y_{1,3} \rightarrow y_{1,3} - a. \tag{2.26}$$

By inserting them into (2.24) one finds that in Maldacena’s limit the non-trivial part of the amplitude depends only on the differences  $\hat{y}_i = y_i - s_i$ :

$$\begin{aligned}
\langle {}^{s_3}[U_{k_0}^-]^{s_0}[U_{k_1}^+]^{s_1}[U_{k_2}^-]^{s_2}[U_{k_3}^+]^{s_3} \rangle &= 4\pi^3 \nu^2 \prod_{j=0}^3 e^{-2\pi i s_j^2 - \pi(s_j + y_j)} \\
&\times \frac{e^{if(-\pi\hat{y}_0 + \pi\hat{y}_1) + if(-\pi\hat{y}_2 - \pi\hat{y}_3)} - e^{-if(\pi\hat{y}_3 - \pi\hat{y}_0) + if(-\pi\hat{y}_1 - \pi\hat{y}_2)}}{\sinh \pi(\hat{y}_2 - \hat{y}_0) \sinh \pi(\hat{y}_1 - \hat{y}_3)}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

In other words, the four-point amplitude is almost symmetric under  $s_i - L \leftrightarrow L - y_i$ . The change of sign can be understand as follows: increasing the energy makes the tip of the folded string go further while increasing the boundary parameter has the opposite effect. The parameter  $y$  is in some loose sense T-dual to the original time variable; such a duality transformation is discussed for the AdS disk amplitudes in [27].

### 3 Long folded strings in Matrix Quantum Mechanics

#### 3.1 Asymptotic states and chiral formalism of MQM

The dual matrix description of the 2D string theory in the linear dilaton background is given by a dimensional reduction of a 2D YM theory to one dimension, known also as Matrix Quantum

Mechanics [12]. The theory involves one gauge field  $\mathbf{A} = \{A_i^j\}$  and one scalar field  $\mathbf{X} = \{X_i^j\}$ , both hermitian  $N \times N$  matrices. It is formally defined by the action

$$S = \int dt \text{tr} \left[ \mathbf{P} \nabla_{\mathbf{A}} \mathbf{X} - \frac{1}{2} (\mathbf{P}^2 - \mathbf{X}^2) \right], \tag{3.1}$$

where  $\nabla_{\mathbf{A}} \mathbf{X} = \partial_t \mathbf{X} - i[\mathbf{A}, \mathbf{X}]$  is the covariant time derivative. The action (3.1) can be considered as an effective action describing the states near a local maximum of a confining potential for the scalar field. In this approximation a generic potential can be replaced by inverse gaussian potential and a large cutoff parameter  $\Lambda$ . The number of colors  $N$  should be tuned appropriately with the cutoff  $\Lambda$  before taking the large  $N$  limit.

The Hilbert space of MQM decomposes as a direct sum

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n, \tag{3.2}$$

where  $\mathcal{H}_0$  is the singlet sector and the sector  $\mathcal{H}_n$  is obtained by adding  $n$  Wilson lines in the adjoint representation. The sector  $\mathcal{H}_n$  can be further decomposed into a direct sum of irreducible representations of  $U(N)$  whose Young tableaux contain  $n$  boxes and  $n$  ‘antiboxes’. The Young tableaux for the allowed representations with  $n = 1, 2$  are represented in Fig. 3.

In the singlet sector,  $n = 0$ , the action (3.1) describes a system of  $N$  non-relativistic free fermions in the upside-down quadratic potential [12]. The ground state of the system is characterized by the Fermi level  $E_F = -\mu$ . The cutoff  $\Lambda$  then gives the energy (with minus sign) of the  $N$ -th level below the surface of the fermi sea. In the large  $N$  limit, the non-singlet sectors can be described in terms of impurities in the fermi sea. The non-singlet excitations of MQM have been studied in [28, 29, 3]. Let  $\mathcal{D}$  be an allowed irreducible representation of  $SU(N)$ . Then the radial part of the Hamiltonian contains a term with Calogero type interaction between the eigenvalues,

$$H^{(\mathcal{D})} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N \frac{\mathcal{D}(E_j^k) \mathcal{D}(E_k^j)}{(x_j - x_k)^2}. \tag{3.3}$$

where  $\mathcal{D}(E_j^k)$  is a realization of the  $N \times N$  matrix  $(E_j^k)_l^m = \delta_j^m \delta_l^k$ .

In the adjoint representation,  $n = 1$ , the wave function is an  $N \times N$  traceless matrix. By an  $SU(N)$  rotation it can be diagonalized as

$$\Psi_i^j(\mathbf{X}) = \delta_i^j \psi_i(\mathbf{X}),$$

with  $\sum_i \psi_i = 0$ . Then the radial part of the Schrödinger equation closes on the components  $\psi_1, \dots, \psi_N$ :

$$H^{\text{adj}} \psi_i = - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (\partial_i^2 + x_i^2) \psi_i + \sum_{j(\neq i)}^N \frac{(\psi_i - \psi_j)}{(x_i - x_j)^2}. \tag{3.4}$$

The solution of this equation in the large  $N$  limit gives the wavefunction of one quasiparticle.

Once we know the solution of the wave equation in the adjoint, which was found in [17], we can try to explore the higher sectors. To the leading order in  $1/\mu$ , the sector  $\mathcal{H}_n$  describes  $n$  non-interacting quasiparticles. The statistics of the quasiparticles is determined by choice of the irreducible representation. Our analysis of the Calogero type wave equation (see Appendix E) shows that the Hamiltonian indeed decomposes into a sum of terms (3.4) associated with the  $n$  quasiparticles, and a two-body interaction Hamiltonian, which is of order  $1/\mu$ .

Instead of trying to solve the wave equation, in this paper we will follow an alternative approach, the chiral quantization of MQM [4], which proved to be very efficient in the singlet sector. Since the potential is unbounded, any observable can be formulated in terms of scattering amplitudes between asymptotic states that characterize the system at the infinite past and in the infinite future. Usually the scattering matrix relating the incoming and the outgoing asymptotic states is extracted from the asymptotics of the solution of the Schrödinger equation. In the case of quadratic potential it happens that the  $S$ -matrix can be constructed directly, without passing through the evaluation of the wave function. This is possible due to the important property of the MQM that the asymptotic in- and out-states depend on the light cone variables

$$\mathbf{X}_+ = \frac{\mathbf{X} + \mathbf{P}}{\sqrt{2}}, \quad X_- = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{P}}{\sqrt{2}}. \quad (3.5)$$

For example, the operators

$$T_E^+ = \text{tr } \mathbf{X}_+^{iE}, \quad T_E^- = \text{tr } \mathbf{X}_-^{-iE}. \quad (3.6)$$

describe the left- and right-moving tachyons with energy  $E$  [30]. The time evolution of the asymptotic states is governed by the Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{X}_+ \mathbf{X}_- + \mathbf{X}_- \mathbf{X}_+), \quad (3.7)$$

and the general solution of the corresponding Schrödinger equation is

$$\Phi^\pm(\mathbf{X}_\pm, t) = e^{\mp \frac{1}{2} N^2 t} \Phi^\pm(e^{\mp t} \mathbf{X}_\pm). \quad (3.8)$$

Thus any homogeneous function is an eigenstate of the Hamiltonian (3.7).

The outgoing and the incoming states are related by matrix Fourier transformation

$$\Phi^+(\mathbf{X}_+) = \int d\mathbf{X}_- e^{-i \text{tr } \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_-} \Phi^-(\mathbf{X}_-), \quad (3.9)$$

which represents the scattering operator in the chiral basis.

The wave functions in the sector  $\mathcal{H}_n$  transform according to the  $n$ -th power of the adjoint representation,

$$\Phi^\pm(\mathcal{O} \mathbf{X}_\pm \mathcal{O}^\dagger) = \text{Ad}(\Omega)^{\otimes n} \Phi^\pm(\mathbf{X}_\pm), \quad \mathcal{O} \in SU(N). \quad (3.10)$$

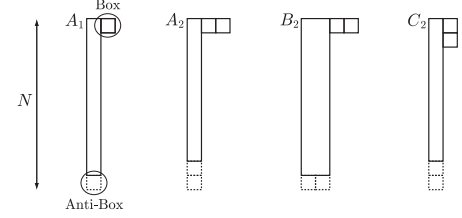


Figure 3: The lowest representations allowed in MQM.

For any  $n$ ,  $\text{Ad}(\Omega)^{\otimes n}$  decomposes into a direct sum of irreducible representations. The projection to any given irreducible representation is obtained by applying the corresponding Young symmetrizer. The scattering amplitude between the states  $\Phi^-$  and  $\Phi^+$  is given by the inner product

$$(\Phi^+, \Phi^-) = \int d\mathbf{X}_+ d\mathbf{X}_- e^{i \text{tr } \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_-} \text{tr}^{(n)} \overline{\Phi^+(\mathbf{X}_+)} \Phi^-(\mathbf{X}_-), \quad (3.11)$$

where  $\text{tr}^{(n)}$  denotes the trace in the  $n$ -th tensor product.

With this description of the non-singlet sectors we can represent any state as a polynomial of the matrix fields  $\mathbf{X}_+$  or  $\mathbf{X}_-$  multiplying a singlet wave function. Below we will see that similarly to the closed strings, the long folded strings are represented in MQM by creation and annihilation operators made of the matrix elements of  $\mathbf{X}_+$  and  $\mathbf{X}_-$ . Thus the eigenfunction representing a state with  $n$  folded strings and  $m$  tachyons is

$$[\Phi^\pm(E_1, \dots, E_n; E'_1, \dots, E'_m)]_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n} = \prod_{a=1}^n [\mathbf{X}_\pm^{\pm i E'_a}]_{j_a}^{i_a} \prod_{b=1}^m \text{tr } \mathbf{X}_\pm^{\pm i E'_b} \Phi_0^\pm(\mathbf{X}_\pm), \quad (3.12)$$

where  $\Phi_0^\pm$  is the ground state wave function.<sup>4</sup>

The scattering amplitude for such states is given by the inner product of an incoming and an outgoing state of the form (3.12) divided by the inner product of the left and right ground states. It is therefore useful to introduce for each pair of functions  $F^+(\mathbf{X}_-)$ ,  $F^-(\mathbf{X}_+)$  the expectation value

$$\langle \mu | F^+ F^- | \mu \rangle := \frac{(\Phi_0^+ F^+, F^- \Phi_0^-)}{(\Phi_0^+, \Phi_0^-)}. \quad (3.13)$$

<sup>4</sup>Such states form a complete, but not orthogonal set. An orthonormal basis of eigenstates is labeled by the irreducible representations of  $SU(N)$ . The construction of such a basis was considered, in the case of MQM with “upside-up” gaussian potential, in [31]. The eigenstates from the two sets are linearly related. The advantage of the first set of states is that the  $N$  limit is easier to construct, as well as the direct interpretation of these states in terms of the worldsheet theory.

In this way all observables in the non-singlet sector of MQM can be obtained as multi trace correlators of an effective two-matrix model with non-confining potential  $\text{tr } \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_-$ . The observables in this “non-compact” matrix model can be evaluated by an appropriate regularization. It happens that some of the results obtained for the usual, “compact” matrix models, can be applied here.

The  $U(N)$  symmetry allows to reduce the original  $N^2$  degrees of freedom to the  $N$  eigenvalues  $x_1^\pm \dots x_N^\pm$  of the matrices  $\mathbf{X}_+$  or  $\mathbf{X}_-$ . The evaluation of the scattering amplitude is achieved in two steps [18]. The first step consists in integrating out the angular degrees of freedom in the matrix integration measure

$$d\mathbf{X}_\pm = d\mathcal{O}_\pm dx_1^\pm \dots dx_N^\pm \Delta^2(x_\pm), \quad (3.14)$$

where  $\Delta(x_\pm) = \prod_{i < j} (x_i^\pm - x_j^\pm)$  is the Vandermonde determinant. The angular integral in the inner product (3.11) is then of the form

$$I_n(\mathbf{X}_+, \mathbf{X}_-) = \int_{SU(N)} d\mathcal{O} \text{Ad}(\mathcal{O})^{\otimes n} e^{i\mathbf{X}_+ \mathcal{O} \mathbf{X}_- \mathcal{O}^\dagger}. \quad (3.15)$$

The second step is to take the large  $N$  limit and express the result in terms of the collective field, the phase space eigenvalue density  $\rho(x^+, x^-)$ . In the well studied singlet sector,  $n = 0$ , the integral (3.15) is the Harish-Chandra-Itzykson-Zuber integral [32]. In this simplest case the transition amplitudes

$$S(E_1^+, \dots, E_m^+, E_1^-, \dots, E_n^-) = \langle \mu | \prod_{a=1}^m \text{tr } \mathbf{X}_+^{iE_a^+} \prod_{b=1}^n \text{tr } \mathbf{X}_-^{iE_b^-} | \mu \rangle$$

then can be formulated in terms of the scalar product in the fermi sea vacuum [4]. In the general case the integral (3.15) was evaluated by Shatashvili [33]. In the case  $n = 1$  a formula suitable for taking the large  $N$  limit was guessed by Morozov [34] and proved later by Eynard and collaborators [35, 19]. More general integrals and other gauge groups were studied in [36, 37]. Taking the large  $N$  expansion of these exact results is a delicate task. In this aspect, the paper [20] proved to be very useful for our problem.

### 3.2 The reflection amplitude in the adjoint sector ( $n = 1$ )

The sector with  $n = 1$  contains only one non-trivial representation, the adjoint. One can think of this sector as the fermi sea in presence of an impurity, or quasiparticle. In terms of the string theory, the adjoint sector describes incoming and outgoing asymptotic states containing one folded string. In absence of tachyons the inner product in this sector gives the reflection

amplitude of the quasiparticle associated with the tip of the folded string [18]. In the compactified Euclidean theory this sector describes states with one vortex and one anti-vortex. The eigenfunction describing a folded string with energy  $E$  is of the form

$$[\Phi^\pm(E)]_j^l = \left( [\mathbf{X}_\pm^{\pm iE}]_j^l - \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{X}_\pm^{\pm iE}) \delta_j^l \right) \Phi_0^\pm(\mathbf{X}_\pm), \quad (3.16)$$

where  $\Phi_0^\pm$  is the ground state wave function. To the leading order in the large  $N$  limit one can replace  $SU(N)$  by  $U(N)$  and neglect the term subtracting the trace. More general wave functions,

$$[\mathbf{X}_\pm^{\pm iE}]_j^l \text{tr } \mathbf{X}_\pm^{\pm iE_1} \text{tr } \mathbf{X}_\pm^{\pm iE_2} \dots \text{tr } \mathbf{X}_\pm^{\pm iE_m} \Phi_0^\pm(\mathbf{X}_\pm),$$

describe a folded string in presence of  $m$  tachyons. We will focus on the states of the form (3.16). For such states the scattering matrix reduces to the reflection factor for one adjoint particle, which is given by the normalized inner product

$$R_1(E_+, E_-) = \langle \mu | \text{tr}(\mathbf{X}_+^{iE_+} \mathbf{X}_-^{iE_-}) | \mu \rangle. \quad (3.17)$$

Evaluating the integral over the angles by the Morozov-Eynard formula, we obtain an expression depending only on the eigenvalues of the matrices  $\mathbf{X}_+$  and  $\mathbf{X}_-$ . In the large  $N$  limit the result can be expressed in terms of the joint eigenvalue density  $\rho(x^+, x^-)$  for the ground state. The Morozov-Eynard formula takes most simple form [19] when expressed in terms of the resolvents

$$W_\pm(\xi^\pm) := \frac{1}{\xi^\pm + \mathbf{X}_\pm}. \quad (3.18)$$

The operators creating eigenstates with given energy (3.16) are related to the operators (3.18) by the integral transformation

$$\mathbf{X}^{-iE} = \frac{i}{\pi} \sinh \pi E \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi + \mathbf{X}} \xi^{-iE}. \quad (3.19)$$

The inverse transformation is

$$\frac{1}{\xi + \mathbf{X}} = -\frac{i}{2\xi} \int_C \frac{dE}{\sinh \pi E} \xi^{iE} \mathbf{X}^{-iE}, \quad (3.20)$$

where the integration contour  $C$  is parallel to the real axes and passing between the poles at  $E = 0$  and  $E = i$  of the integrand. It is most natural to choose  $C = \mathbb{R} + \frac{1}{2}i$ , which we will do in the following.

We therefore first evaluate the normalized inner product for the resolvents (3.18),

$$G_1(\xi^+, \xi^-) := \langle \mu | \text{tr}[W_+(\xi^+)W_-(\xi^-)] | \mu \rangle, \quad (3.21)$$

and then apply the integral transformation (3.19) to obtain the reflection amplitude in the  $E$ -space. The expectation value (3.21) is the basic single-trace mixed correlator in the effective two-matrix model we mentioned before. The result, obtained in [18], is surprisingly simple:

$$G_1(\xi^+, \xi^-) = e^{-iS(\xi^+, \xi^-)},$$

$$S(\xi^+, \xi^-) = \int \frac{dx^+ dx^-}{2\pi} \frac{\rho(x^+, x^-)}{(\xi^+ + x^+)(\xi^- + x^-)}, \quad (3.22)$$

where  $\rho(x^+, x^-)$  is the semiclassical eigenvalue density of the fermionic liquid.

This integral is logarithmically divergent and needs a regularization. We introduce a cutoff  $\tilde{\Lambda} \gg \mu$  as the depth of the Fermi sea explored by the average.<sup>5</sup> We assume that  $\tilde{\Lambda} \ll \Lambda$ , so that we still can use the spectral density for the upside-down harmonic oscillator. The part of the Fermi sea that corresponds to the interval of energies  $-\mu < E < -\tilde{\Lambda}$  is described by the density function

$$\rho(x^+, x^-) = \theta(x^+ x^- - \mu) \theta(\tilde{\Lambda} - x^+ x^-). \quad (3.23)$$

The result of the integration with this density depends only on the product  $\xi^+ \xi^-$ :

$$S(\xi^+, \xi^-) = f(T - t) - f(-t), \quad (3.24)$$

where we denoted

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{\tilde{\Lambda}}{\mu}, \quad t = \frac{1}{2} \log \frac{\xi^+ \xi^-}{\mu} \quad (3.25)$$

and the function  $f$  is the same as in (2.11). Applying the integral transformation (3.19) to both arguments of  $G_1(\xi^+, \xi^-)$ , we get

$$R_1(E_+, E_-) = -\frac{\sinh(\pi E_+) \sinh(\pi E_-)}{\pi^2} \int_0^\infty d\xi^+ d\xi^- (\xi^+)^{iE_+} (\xi^-)^{iE_-} G_1(\xi^+, \xi^-). \quad (3.26)$$

At this point we change the variables as  $\xi^\pm = \sqrt{\mu} e^{t \pm \tau}$ . The integral over  $\tau$  produces a delta function imposing the energy conservation,

$$R_1(E_+, E_-) = \mathcal{R}_1(E_+) \delta(E_+ - E_-). \quad (3.27)$$

The reflection factor for one quasiparticle is given by the remaining integral in  $t$ :

$$\mathcal{R}_1(E) = -\frac{2}{\pi} \sinh^2 \pi E \mu^{-iE+1} \int_{-\infty}^\infty dt e^{2t(-iE+1)-if(T-t)+if(-t)}. \quad (3.28)$$

<sup>5</sup>This means that we consider non-singlet excitations that transform according to a smaller group  $SU(\tilde{N}) \subset U(N)$  with  $\tilde{N} \sim \tilde{\Lambda} \log \tilde{\Lambda}$ .

In the limit  $T \rightarrow \infty$  we can use the approximation  $f(T - t) = (T - t)^2/\pi$  and then write the exponent, using (A.12), as  $2t - if(t) - 2i(E - T/\pi)t + i\pi/6$ . The integral is evaluated using the last equation (A.8). The final result for the reflection factor is

$$\mathcal{R}_1(E) = 2\Lambda e^{-i\alpha} \sinh^2 \pi E \mu^{-iE} e^{-iT^2/\pi} e^{-2E\pi + if(T-\pi E)}. \quad (3.29)$$

We see that the reflection factor depends on the shifted energy  $\hat{\epsilon} = E - T/\pi$ , where the constant  $T = \frac{1}{2} \log \tilde{\Lambda}/\mu$  is in fact the logarithmic energy gap between the singlet and the adjoint sector discovered in [28]. We therefore subtract, as in [1], this constant from the energy and introduce the shifted energy variables

$$\epsilon = E - \frac{1}{2\pi} \ln \tilde{\Lambda}, \quad \hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{2\pi} \ln \mu = E - T/\pi, \quad (3.30)$$

where  $\hat{\epsilon}$  is assumed finite. Then we can approximate  $\sinh \pi E \approx \frac{1}{2} e^{\pi E}$  and the scattering phase takes the form

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(E) &= \frac{1}{2} \Lambda e^{-i\alpha} \mu^{-iE} e^{-iT^2/\pi} e^{if(-\pi\hat{\epsilon})} \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{\Lambda} e^{-i\pi/4} e^{-i \log^2 \tilde{\Lambda}/4\pi} \times e^{i\pi\hat{\epsilon}^2 - if(\pi\hat{\epsilon})}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Let us compare this expression with the two-point function in the worldsheet theory with  $s = s' = M$  and  $k \sim M$ ,

$$\langle U_k^+ U_{-k}^- \rangle = \frac{\pi \nu^2}{\sinh 2\pi |k|} d(|k|) = \pi^2 \nu^2 2e^{-2\pi k} e^{-\pi/4} e^{-4\pi i M^2} e^{if(2\pi M - \pi k)}. \quad (3.32)$$

Remarkably, the two expressions coincide (up to a constant phase, which can be absorbed in the normalization of the wave functions) upon the identification

$$k = E, \quad s = s' = T/2\pi, \quad \nu^2 = \pi\mu. \quad (3.33)$$

Therefore the cutoff  $\tilde{\Lambda}$ , the depth of the fermi sea felt by the collective excitation, is related to the boundary cosmological constant in the worldsheet theory:

$$\tilde{\Lambda} = \mu_B^2. \quad (3.34)$$

The remaining factor can be absorbed into the normalization of the boundary operators  $U_{\pm k}^\pm$ .

Note that the reflection factor (3.31) is given, up to a complex conjugation and a numerical factor, by the same function as the mixed correlator (3.21):

$$\mathcal{R}_1(E) = \tilde{\Lambda}^{1-iE} \overline{G_1(\xi^+, \xi^-)} \quad \xi^+ \xi^- = \tilde{\Lambda} e^{-\pi E} = \mu e^{-\pi \hat{\epsilon}}. \quad (3.35)$$

### 3.3 The reflection amplitude in the sector $n = 2$

Now we will evaluate the reflection amplitudes for the states (3.12) with  $n = 2$ , in the leading and in the subleading order. The scattering matrix is not diagonal for such states. It gets diagonalized in the basis of the irreducible representations with  $n = 2$ , which we describe below.

In the sector  $\mathcal{H}_2$  there are four irreducible representations (denoted as  $A_2, \bar{A}_2, B_2$  and  $C_2$  in [29]). Their Young tableaux are shown in Fig. 3. For general  $n$ , the representations  $B_n$  and  $C_n$  are defined by tensors with  $n$  upper and  $n$  lower indices, respectively totally symmetric and totally antisymmetric under permutations of the upper and lower indices, associated with boxes and antiboxes. The representations  $A_n$  are totally symmetric in boxes and totally antisymmetric in antiboxes, and similarly for  $\bar{A}_n$ . The zero weight states in the sector with  $n = 2$  are of the form

$$\Psi_{ik}^{jl} = P_{ik}^{jl} \psi_{ik},$$

where  $P_{ik}^{jl}$  is a standard tensor associated with the corresponding Young symmetrizer. In the four irreducible representations,  $A_2, \bar{A}_2, B_2$  and  $C_2$ , it is given respectively by  $\delta_{[i}^{[j} \delta_{k]}^{l]}$ ,  $\delta_{\{i}^{[j} \delta_{k]}^{l]}$ ,  $\delta_{\{i}^{[j} \delta_{k]}^{l]}$  and  $\delta_{[i}^{[j} \delta_{k]}^{l]}$ , where  $[\cdot, \cdot]$  denotes antisymmetrization and  $\{\cdot, \cdot\}$  denotes symmetrization. In order to extract the irreducible part, one needs further to impose the tracelessness condition for any pair of upper and lower indices, but this can be skipped in the two leading orders in the large  $N$  limit.

Now let us return to the states (3.12) with  $n = 2$ . As in the case  $n = 1$ , it is advantageous first to evaluate the inner product of the wave functions in the coordinate space

$$\tilde{\Phi}_{j_1, j_2; k_1, k_2}^{\pm}(\xi_1^{\pm}, \xi_2^{\pm}) = [W_{\pm}(\xi_1^{\pm})]_{j_1}^{k_1} [W_{\pm}(\xi_2^{\pm})]_{j_2}^{k_2} \Phi_0^{\pm}. \quad (3.36)$$

The inner product is expressed in terms of mixed two-trace correlator

$$G_{1,1}(\xi_1^+, \xi_1^-; \xi_2^+, \xi_2^-) = \langle \mu | \text{tr} [W_+(\xi_1^+) W_-(\xi_1^-)] \text{tr} [W_+(\xi_2^+) W_-(\xi_2^-)] | \mu \rangle$$

and the mixed one-trace correlator

$$G_2(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-) = \langle \mu | \text{tr} [W_+(\xi_1^+) W_-(\xi_1^-) W_+(\xi_2^+) W_-(\xi_2^-)] | \mu \rangle.$$

The projections to the four irreps in the sector  $n = 2$  are obtained by (anti)symmetrization:

$$\begin{aligned} \langle \mu | \tilde{\Phi}^+ \tilde{\Phi}^- | \mu \rangle_{A_2} &= G_{1,1}(\xi_1^+, \xi_1^-; \xi_2^+, \xi_2^-) - \{\xi_1^- \leftrightarrow \xi_2^-\} = \langle \mu | \tilde{\Phi}^+ \tilde{\Phi}^- | \mu \rangle_{\bar{A}_2} \\ \langle \mu | \tilde{\Phi}^+ \tilde{\Phi}^- | \mu \rangle_{B_2} &= G_{1,1}(\xi_1^+, \xi_1^-; \xi_2^+, \xi_2^-) + G_2(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-) + \{\xi_1^- \leftrightarrow \xi_2^-\}, \\ \langle \mu | \tilde{\Phi}^+ \tilde{\Phi}^- | \mu \rangle_{C_2} &= G_{1,1}(\xi_1^+, \xi_1^-; \xi_2^+, \xi_2^-) - G_2(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-) + \{\xi_1^- \leftrightarrow \xi_2^-\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Each term on the r.h.s. can be expanded in  $1/\mu$ . To the leading order  $\mu^2$  only the first term contributes, where it factorizes to

$$G_{1,1}(\xi_1^+, \xi_1^-; \xi_2^+, \xi_2^-) = G_1(\xi_1^+, \xi_1^-) G_1(\xi_2^+, \xi_2^-) + O(\mu^0).$$

The integral transformation (3.19) gives

$$R_2^{(0)}(E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-) = \delta(E_1^+ - E_1^-) \delta(E_2^+ - E_2^-) \mathcal{R}_1(E_1^+) \mathcal{R}_1(E_2^+). \quad (3.38)$$

To this order the inner product are given by the (anti)symmetrized product of two expectation values (3.21), associated with each trace. This is the approximation of dilute gas of quasiparticles.

The subleading term is given by  $G_2(\xi_1^+, \xi_2^+, \xi_1^-, \xi_2^-)$ . Here we will focus on this amplitude and leave the next order  $\mu^0$ , which is given by the connected correlator of the product of two traces, for future work. The mixed one-trace correlators  $G_n$  in the effective two-matrix model can be expressed through the lowest one-trace correlator  $G_1$  by the general formula derived in [20]. In the case  $n = 2$  it states

$$G_2(\xi_1^+, \xi_2^+, \xi_1^-, \xi_2^-) = i \frac{G_1(\xi_1^+, \xi_1^-) G_1(\xi_2^+, \xi_2^-) - G_1(\xi_1^+, \xi_2^-) G_1(\xi_2^+, \xi_1^-)}{(\xi_1^+ - \xi_2^+)(\xi_1^- - \xi_2^-)}. \quad (3.39)$$

A simpler derivation of this formula, due to L. Cantini, can be found in Orantin's thesis [38]. The advantage of this derivation, which we give in Appendix C, is that it can be applied also for our non-compact effective two-matrix model.

The next step is to perform the integral transformation (3.19) to each of the arguments. The calculation, this time non-trivial, is presented in Appendix B. The result contains a  $\delta$ -function for the energy conservation, so we define the subleading  $n = 2$  reflection amplitude  $\mathcal{R}_2$  by

$$R_2^{(1)}(E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-) = \delta(E_1^+ + E_2^+ - E_1^- - E_2^-) \mathcal{R}_2(E_1^+, E_2^+; E_1^-, E_2^-). \quad (3.40)$$

For energies  $E_j^{\pm} = \epsilon_j^{\pm} + \frac{1}{2\pi} \ln \tilde{\Lambda}$ , with  $\epsilon_j^{\pm}$  finite,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-) &= -\frac{2}{\tilde{\Lambda}} e^{\pi(E_1^+ + E_2^+)} \frac{\mathcal{R}_1(E_1^+) \mathcal{R}_1(E_2^+) - \mathcal{R}_1(E_1^-) \mathcal{R}_1(E_2^-)}{\sinh \pi(\tilde{\epsilon}_1^+ - \tilde{\epsilon}_1^-) \sinh \pi(\tilde{\epsilon}_2^+ - \tilde{\epsilon}_2^-)} \\ &= -\frac{2}{\mu} e^{\pi(\tilde{\epsilon}_1^+ + \tilde{\epsilon}_2^+)} \frac{\mathcal{R}_1(E_1^+) \mathcal{R}_1(E_2^+) - \mathcal{R}_1(E_1^-) \mathcal{R}_1(E_2^-)}{\sinh \pi(\tilde{\epsilon}_1^+ - \tilde{\epsilon}_1^-) \sinh \pi(\tilde{\epsilon}_2^+ - \tilde{\epsilon}_2^-)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

The  $n = 2$  reflection amplitude, given in the first two orders by (3.38) and (3.40), obviously satisfies the unitarity condition

$$\mathcal{R}_1(E_1^+) \mathcal{R}_1(E_2^+) \overline{\mathcal{R}_2(E_1^-, E_2^-, E_1^+, E_2^+)} = \mathcal{R}_2(E_1^+, E_2^+; E_1^-, E_2^-) \overline{\mathcal{R}_1(E_1^-) \mathcal{R}_1(E_2^-)}. \quad (3.42)$$



Let us compare the subleading reflection amplitude (3.41) with the 4-point disk amplitude in the Maldacena limit (2.24), evaluated in the worldsheet theory. If we identify

$$\begin{aligned} k_0 &= -E_1^-, & k_1 &= E_1^+, & k_2 &= -E_2^-, & k_3 &= E_2^+, \\ s_0 &= s_1 = s_2 = s_3 = T/2\pi, & \nu^2 &= \pi\mu, \end{aligned} \quad (3.43)$$

then the two amplitudes are indeed equal to each other, up to a factor of 2. This factor can be absorbed in the normalization of the functional measure in the worldsheet calculation. After fixing the normalization of the boundary operators and the functional measure, there are no more ambiguities left.

If we express the energies in terms of the shifted winding parameters  $y_i$  defined by (2.25),

$$E_1^- = y_3 + y_0, \quad E_1^+ = y_0 + y_1, \quad E_2^- = y_1 + y_2, \quad E_2^+ = y_2 + y_3, \quad (3.44)$$

then we observe that the reflection amplitude in the  $E$ -space has again the same functional form as in the  $\xi$ -space,

$$\mathcal{R}_2(E_1^+, E_1^-, E_2^+, E_2^-) = -2i\tilde{\Lambda}^{2-i(E_1^+ + E_2^+)} \overline{G_2(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-)} \quad (3.45)$$

with

$$\begin{aligned} \xi_1^- &= \tilde{\Lambda}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_0}, & \xi_1^+ &= \tilde{\Lambda}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_1}, \\ \xi_2^- &= \tilde{\Lambda}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_2}, & \xi_2^+ &= \tilde{\Lambda}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_3}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.4 The reflection amplitude for $n > 2$

Using the loop equations for the two-matrix model one can evaluate all mixed one-trace correlators

$$G_n(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) := \langle \mu | \text{tr} [W_+(\xi_1^+) W_-(\xi_1^-) \dots W_+(\xi_n^+) W_-(\xi_n^-)] | \mu \rangle.$$

These correlators satisfy the recurrence equations found in [20], see Appendix C. The unique solution of the recurrence equations is given by the ‘‘Bethe Ansatz like’’ formula of [20] as a sum of products of  $G_1$  with rational coefficients:

$$G_n(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) = \sum_{\sigma \in \tilde{S}_n} C_\sigma(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) G_1(\xi_1^+, \xi_{\sigma_1}^-) \dots G_1(\xi_n^+, \xi_{\sigma_n}^-). \quad (3.47)$$

The sum goes in the set  $\tilde{S}_n$  of planar permutations of  $n$  elements. A planar permutation  $\sigma$  can be defined as follows. Consider a disk with  $2n$  marked points on the boundary, labeled

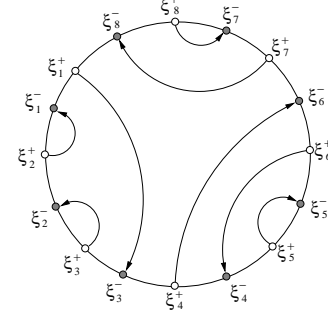


Figure 4: A planar set of arcs on the disk with  $2j$  points along the boundary, labeled by  $\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_j^+, \xi_j^-$ , and its dual tree graph. On the figure  $j = 8$ . The arcs split the disk into  $j+1$  windows. The non-trivial weights of the windows in the figure are  $C_2(\xi_7^+, \xi_8^-, \xi_8^+, \xi_7^-)$ ,  $C_3(\xi_1^+, \xi_3^-, \xi_4^+, \xi_6^-, \xi_7^+, \xi_8^-)$ ,  $C_3(\xi_1^+, \xi_3^-, \xi_3^+, \xi_2^-, \xi_2^+, \xi_1^-)$ ,  $C_2(\xi_4^+, \xi_6^-, \xi_6^+, \xi_4^-)$ ,  $C_2(\xi_6^+, \xi_4^-, \xi_5^+, \xi_5^-)$ .

by  $\xi_1^-, \xi_1^+, \dots, \xi_n^-, \xi_n^+$ . Draw a set of arcs (oriented lines) connecting the points  $\xi_i^+$  with  $\xi_{\sigma_i}^-$ ,  $i = 1, \dots, n$ . The permutation  $\sigma \in S_n$  is planar if the arcs can be drawn without intersections, as shown in Figure 4. We call such a configuration of arcs ‘‘rainbow diagram’’.

It is shown in [20] that the coefficient  $C_\sigma$  is equal to a product of weights associated with the  $n+1$  windows on the rainbow diagram. These weights are determined from the following recurrence relation, which stems from the loop equations (C.6). Denote by  $C_j(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_j^+, \xi_j^-)$  the weight of the window with  $2j$  points  $\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_j^+, \xi_j^-$  along its boundary, labelled following the orientation of the lines. This function is invariant under cyclic permutations of the  $2j$  points. Then the weight  $C_n$  is expressed through  $C_1, \dots, C_{n-1}$  as

$$C_n(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) = i \sum_{j=1}^n \frac{C_j(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_j^+, \xi_j^-) C_{n-j}(\xi_{j+1}^+, \xi_{j+1}^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-)}{(\xi_n^+ - \xi_1^+)(\xi_n^- - \xi_j^-)}, \quad (3.48)$$

where by definition  $C_1(\xi^+, \xi^-) = 1$  [20].

In order to evaluate the amplitude in the  $E$  space, we have to perform the integral transformation (3.19) of the r.h.s. of (3.47). We believe, although we are not able to supply the proof now, that the relations (3.35) and (3.45) hold in fact for any  $n$ . If we introduce the winding parameters  $y_1, \dots, y_{2n-1}, y_{2n} \equiv y_0$ , determined up to a common translation  $y_{2i} \rightarrow y_{2i} + a$ ,  $y_{2i-1} \rightarrow y_{2i-1} - a$ , and express the energies as

$$E_i^+ = y_{2i-2} + y_{2i-1}, \quad E_i^- = y_{2i-1} + y_{2i}, \quad (3.49)$$

we conjecture that for any  $n$

$$\mathcal{R}_n(E_1^+, E_1^-, \dots, E_n^+, E_n^-) = \tilde{\Lambda}^{n-i(E_1^+ + \dots + E_n^+)} \overline{G_n(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-)}, \quad (3.50)$$

where

$$\xi_i^+ = \tilde{\Lambda}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_{2i-2}}, \quad \xi_i^- = \tilde{\Lambda}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi y_{2i-1}} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.51)$$

The energies  $E_i$  and the winding parameters  $y_i$  are logarithmically divergent with the cutoff  $\tilde{\Lambda}$ . In terms of the finite shifted energies  $\hat{e}_i^\pm$  the above relations reads

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^+ &= \hat{y}_{2i-2} + \hat{y}_{2i-1}, & \hat{e}_i^- &= \hat{y}_{2i-1} + \hat{y}_{2i}, \\ \xi_i^+ &= \mu^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi \hat{y}_{2i-2}}, & \xi_i^- &= \mu^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\pi \hat{y}_{2i-1}} \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.52)$$

From the perspective of the worldsheet theory, each term in the solution (3.47) is the contribution of a particular scattering process involving  $n$  long strings sharing a common worldsheet. The arcs in the rainbow diagram on Figure 4 correspond to the tips of the  $n$  long strings. The factorization of the amplitude means that the interaction occurs only in the far past ( $t \sim -\log \mu_B$ ) or in the future ( $t \sim \log \mu_B$ ). For  $-\log \mu_B \ll t \ll \log \mu_B$  the  $n$  long strings evolve independently, contributing a product of reflection factors  $\mathcal{R}_1$ . Furthermore, the recurrence relation (2) for the coefficients  $C_j$  means that each such coefficient can be written as a sum of products of  $C_2$ . Therefore the interaction of the long strings can be decomposed into exchanges of short strings as those illustrated in Figure 2.

## 4 Discussion

In this paper we studied the simplest scattering processes of long folded strings in the two-dimensional string theory. We used the description of the long strings in terms of a FZZT brane with  $\mu_B \gg \sqrt{\mu}$ , as suggested in [1]. We evaluated the four-point disk amplitude in Maldacena's limit of large momenta and large boundary parameters. We observed that the amplitude depends only on the chiral combinations  $\hat{y}_i = y_i - s_i$ , where  $s_a$  are the Liouville boundary parameters and  $y_a$  the "winding parameters", associated with the four segments of the boundary ( $a = 1, 2, 3, 4$ ). Furthermore we observed a symmetry with respect to the Fourier transformation in the time direction. Our result suggests that, to the leading order, the long strings interact *via* exchange of short open strings that happens in the asymptotically free region  $\phi \ll -\log \mu$ .

On the side of MQM the scattering amplitudes are expressed in terms of the mixed trace correlators in an effective non-compact two-matrix model with interaction  $i \text{tr} \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_-$ . However

the worldsheet interpretation of the correlation functions is not the same as in the matrix model description of rational  $c < 1$  string theories. In our case the spectral parameter  $\xi^\pm$  is related by Fourier transformation to the energy of the boundary tachyon, while the boundary condition for the Liouville field is determined by a regularization parameter  $\tilde{\Lambda}$ , the depth of the fermi sea. This is because the boundary is associated to the gauge field  $\mathbf{A}$ , while the fields  $\mathbf{X}_\pm$  create the asymptotic open string states. Since we are modelling a Lorentzian theory, the worldsheet description does not have a statistical interpretation as a sum over surfaces with positive weights.

We evaluated the subleading amplitude for any number  $n$  of long strings using the results for the single-trace mixed correlator in the two-matrix model [20]. We obtained the result in the coordinate space, while the worldsheet calculation gives it in the space of energies. We performed explicitly the Fourier transformation for the cases  $n = 1$  and  $n = 2$  where we reproduced the result of the worldsheet theory up to factors that can be absorbed into the normalization of the boundary tachyons and the integration measure.

We found that the Fourier transformed amplitude takes essentially the same form as that in the coordinate space, after being expressed in terms of the  $2n$  dual coordinates  $y_i$  associated with the boundaries of the disk. We were able to establish this symmetry only for the cases  $n = 1$  and  $n = 2$ , but we believe that it is a general property of the disk  $n$ -point amplitude in Maldacena's limit.

Eventually we are interested taking the limit with a large number of FZZT branes, which would help us, as suggested in [1], to find a matrix model description of the Lorentzian black hole. The results reported in this paper suggest that the effective two-matrix model that stems from the chiral quantization of MQM is the right tool to achieve this limit. In this paper we studied the interactions of long folded strings due to exchange of short open strings, which are described by the single-trace mixed correlators in the effective two-matrix model. We did not consider the interactions due to the exchange of closed strings. Such interactions are described by multi-trace mixed correlators in the effective two-matrix model.

### Acknowledgments

We thank S. Alexandrov and N. Orantin for valuable discussions. This work has been partially supported by the European Union through ENRAGE network (contract MRTN-CT-2004-005616), ANR programs GIMP (contract ANR-05-BLAN-0029-01). Part of this work was done during the "Integrability, Gauge Fields and Strings" focused research group at the Banff International Research Station.

## A Properties of the functions $\mathbf{S}(z)$ and $f(x)$

We give here a short summary of the properties of the double sine function  $\mathbf{S}(z)$  used in [16] and the function  $f(x)$  introduced (for  $b = 1$ ) in [1]. The double sine is related to the double gamma function introduced by Barnes [39]. The function  $e_b(x) = e^{if(\pi x)}$  is also known as non-compact quantum dilogarithm [40].

### A.1 The double sine function $\mathbf{S}(z)$

- Integral representation: [16]

$$\log \mathbf{S}(Q/2 - ix) = \frac{i}{2} \int_0^\infty \left( \frac{\sin 2tx}{\sinh bt \sinh b^{-1}t} - \frac{2x}{t} \right) \frac{dt}{t}, \quad Q = b + 1/b. \quad (\text{A.1})$$

- Functional relations:

$$\frac{\mathbf{S}(z+b)}{\mathbf{S}(z)} = 2 \sin \pi bz, \quad \frac{\mathbf{S}(z+1/b)}{\mathbf{S}(z)} = 2 \sin \frac{\pi z}{b}. \quad (\text{A.2})$$

- Poles and zeroes:

$$\text{poles at } z = n_1 b + n_2/b, \quad n_1, n_2 \leq 0, \quad \text{zeroes at } z = n_1 b + n_2/b, \quad n_1, n_2 \geq 1.$$

- Asymptotics at infinity (for  $\text{Re} b > 0$ ):

$$\mathbf{S}(x) \sim \exp \left( \mp i\pi/2 \left\{ \left( x - \frac{1}{2}Q \right)^2 - \frac{1}{12}(b^2 + b^{-2}) \right\} \right) \quad (\text{Im} x \rightarrow \pm\infty). \quad (\text{A.3})$$

### A.2 The function $f(x)$

- Definition:

$$e^{if(x)} = \frac{e^{ix^2/2\pi + i\pi(b^2 + b^{-2})/24}}{\mathbf{S}(Q/2 - ix/\pi)}. \quad (\text{A.4})$$

- Integral representation:

$$f(x) = -\frac{i}{4} \int_{\mathbb{R}+i0} \frac{dt}{t} \frac{e^{-2itx/\pi}}{\sinh tb \sinh t/b}. \quad (\text{A.5})$$

- Functional equations:

$$f(x) + f(-x) = \frac{x^2}{\pi} + \frac{\pi(b^2 + b^{-2})}{12},$$

$$\begin{aligned} e^{if(x+i\pi b)} &= \frac{e^{if(x)}}{1 + e^{i\pi b^2} e^{2bx}}, \\ e^{if(x+i\pi/b)} &= \frac{e^{if(x)}}{1 + e^{i\pi/b^2} e^{2x/b}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

- Asymptotics at infinity (for  $b > 0$ ):

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & \Re x \rightarrow -\infty \\ x^2/\pi + \pi(b^2 + b^{-2})/12, & \Re x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

- Fourier transform [41, 42]

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi} e^{-Qt} e^{if(-t)} e^{2itx/\pi} &= e^{-i\alpha} e^{Qx} e^{-if(x)} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi} e^{-Qt} e^{-if(-t)} e^{2itx/\pi} &= e^{i\alpha} e^{-Qx} e^{if(-x)} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi} e^{Qt} e^{if(t)} e^{2itx/\pi} &= e^{-i\alpha} e^{-Qx} e^{-if(-x)} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi} e^{Qt} e^{-if(t)} e^{2itx/\pi} &= e^{i\alpha} e^{Qx} e^{if(x)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{where } \alpha = \pi \frac{1+Q^2}{12} - \pi \frac{Q^2}{4}.$$

### A.3 The limit $b \rightarrow 1$

- Integral representation:

Evaluating the derivative

$$\frac{d}{dx} \log \mathbf{S}(1 - ix)|_{b=1} = i \int_0^\infty dt \left[ \frac{\cos 2tx}{\sinh^2 t} - \frac{1}{t^2} \right] = \frac{-i\pi x}{\tanh \pi x}. \quad (\text{A.9})$$

we find another integral representation of the double sine for  $b = 1$ :

$$i\pi \log \mathbf{S}(1 - ix)|_{b=1} = \pi \int_0^x dx' \frac{\pi x'}{\tanh \pi x'} = \int_0^{\pi x} d\zeta \frac{\zeta}{\tanh \zeta}. \quad (\text{A.10})$$

Then (A.4) reproduces the function  $f(x)$  as defined in [18]:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x d\zeta \left( \frac{\zeta}{\tanh \zeta} + \zeta \right). \quad (\text{A.11})$$

- Functional equations:

$$f(x) + f(-x) = \frac{x^2}{\pi} + \frac{\pi}{6}, \quad (\text{A.12})$$

$$e^{if(x-i\pi)} = (1 - e^{2x}) e^{if(x)}, \quad (\text{A.13})$$

- Boundary reflection coefficient  $d(k, s, s')|_{b=1}$ :

$$d(k, s, s') \stackrel{b=1}{=} \mathbf{S}(1 + 2ik)\mathbf{S}(1 - i(k + s + s'))\mathbf{S}(1 - i(k + s - s')) \\ \times \mathbf{S}(1 - i(k - s + s'))\mathbf{S}(1 - i(k - s - s')). \quad (\text{A.14})$$

$$d(k, s, s')^{\pm 1} \Big|_{(k,s,s') \sim (\pm 2M, M, M)} = e^{-2\pi i(s^2 + s'^2) - \frac{\pi}{2} + if(\pi s + \pi s' \mp \pi k)}. \quad (\text{A.15})$$

## B Equation for the boundary Liouville three point function

Here we derive a shift equation for the three-point function of boundary operators  $B_\beta \equiv e^{\beta\phi}$  in Liouville theory on a disk. We denote the relevant structure constant by  $C_{s_1, s_2, s_3}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$ .

$$\langle B_{\beta_1}(x_1) B_{\beta_2}(x_2) B_{\beta_3}(x_3) \rangle_{s_1, s_2, s_3} = C_{s_1, s_2, s_3}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \prod_{\{ijk\}} |x_i - x_j|^{h_k - h_i - h_j}.$$

Our notation is such that  $B_{\beta_1}$  joins the branes  $s_3$  and  $s_1$ ,  $B_{\beta_2}$  joins  $s_1$  and  $s_2$  and so on. The shift equation follows from the bootstrap constraints of four-point functions containing one boundary degenerate operator  $B_{-b/2}$  or  $B_{-1/2b}$ . Note that the two branes joined by  $B_{-b/2}$  have to satisfy [16]

$$s - s' = \pm ib/2 \quad \text{or} \quad s + s' = \pm ib/2,$$

and similarly for those joined by  $B_{-1/2b}$ .

To recall where the constraints arise from, let us consider a four-point function,

$$\langle B_{\beta_1}(x_1) B_{-b/2}(x) B_{\beta_2}(x_2) B_{\beta_3}(x_3) \rangle_{s'_1, s_1, s_2, s_3}.$$

Using the analytic solutions of Virasoro Ward identity with the knowledge of the operator product expansions involving  $B_{-b/2}$ , one can derive linear relations among  $C_{s_1, s_2, s_3}^{\beta_1 \mp b/2, \beta_2, \beta_3}$  and  $C_{s'_1, s_2, s_3}^{\beta_1, \beta_2 \mp b/2, \beta_3}$ . One of them reads, after replacing  $\beta_i$  by  $\frac{Q}{2} - ik_i$ ,

$$-\frac{\Gamma(1 - 2ibk_1)}{\Gamma(\alpha - 2ibk_1)} C_{s_1, s_2, s_3}^{\frac{Q}{2} - ik_1 - \frac{b}{2}, \frac{Q}{2} - ik_2, \frac{Q}{2} - ik_3} + \frac{\Gamma(1 + 2ibk_2 - \alpha)}{\Gamma(2ibk_2)} C_{s_1, s_2, s_3}^{\frac{Q}{2} - ik_1, \frac{Q}{2} - ik_2 - \frac{b}{2}, \frac{Q}{2} - ik_3} \\ = \frac{\Gamma(1 + 2ibk_1)\Gamma(1 + 2ibk_2 - \alpha)}{\Gamma(1 + 2ibk_1 + 2ibk_2 - \alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{d_L(\frac{Q}{2} - ik_1, s_3, s'_1)}{d_L(\frac{Q}{2} - ik_1 + \frac{b}{2}, s_3, s_1)} C_{s_1, s_2, s_3}^{\frac{Q}{2} - ik_1 + \frac{b}{2}, \frac{Q}{2} - ik_2, \frac{Q}{2} - ik_3}.$$

Here  $\alpha \equiv \frac{1}{2} + ib(k_1 + k_2 + k_3)$ , and  $d_L$  is defined in (2.8). See [24] and [43] for more detail. A similar relation is obtained from the four-point function containing  $B_{-1/2b}$ . This kind of shift relations among correlators is often powerful enough to determine the structure constants in Liouville theory.

We translate the above relations on Liouville correlators into a shift relation among the disk amplitudes of three  $U_k^-$  or three  $U_k^+$  in two-dimensional string theory. The conservation of energy requires  $k_1 + k_2 + k_3 = -\tilde{Q}/2$  or  $\alpha = 0$  in the above. We will suppress the corresponding delta function when writing down the formulae for amplitudes. The divergence of  $\Gamma(\alpha)$  in the right hand side is canceled by the bulk divergence [24] of  $C_{s_1, s_2, s_3}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$  at  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2Q$ :

$$C_{s_1, s_2, s_3}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \sim \frac{d_L(\beta_1, s_3, s_1) d_L(\beta_2, s_1, s_2) d_L(\beta_3, s_2, s_3)}{2Q - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3}.$$

So we obtain (2.12) and (2.13).

## C Derivation of the correlator $G_2$ (3.39).

To evaluate the correlator  $G_2$  we use the identity, following from the translation invariance of the matrix measure,

$$\int d\mathbf{X}_+ d\mathbf{X}_- \text{tr}(\nabla_+ W_+^2 W_+^2 W_+^1 W_+^1) \Phi_0^+ \Phi_0^- e^{i\text{tr} X_+ X_-} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Here  $\nabla_\pm = \partial_{\mathbf{X}_\pm}$  is the operator of matrix derivative,  $\Phi_0^+(\mathbf{X}_+)$  and  $\Phi_0^-(\mathbf{X}_-)$  are the wave functions of the left and right ground states in the singlet sector and  $W_\pm^a$  ( $a = 1, 2$ ) denote resolvents (3.18) with spectral parameters  $\xi_\pm^a$ :

$$W_\pm^a \equiv W_\pm(\xi_\pm^a) = \frac{1}{\xi_\pm^a + \mathbf{X}_\pm}.$$

We commute the operator of derivative to the right using that it acts on the resolvents as  $[\nabla_\pm]_j^k \cdot [W_\pm^a]_j^{k'} = -[W_\pm^a]_j^k [W_\pm^a]_j^{k'}$ . As a result we obtain the identity

$$\langle \mu | -\text{tr} W_+^2 \text{tr}(W_+^2 W_-^2 W_+^1 W_-^1) - \text{tr}(W_+^2 W_-^2 W_+^1) \text{tr}(W_+^1 W_-^1) | \mu \rangle \\ + \langle \mu | \text{tr}(W_+^2 W_-^2 W_+^1 W_-^1 (i\mathbf{X}_- + \nabla_+ \ln \Phi_0^+ | \mu) = 0. \quad (\text{C.2})$$

In a similar way, replacing the trace in (C.1) with  $\text{tr}(\nabla_+ W_-^2 W_+^1 W_-^1 W_+^2)$ , we obtain another identity,

$$\langle \mu | -\text{tr}(W_-^2 W_+^1) \text{tr}(W_+^1 W_-^1 W_+^2) - \text{tr}(W_-^2 W_+^1 W_-^1 W_+^2) \text{tr} W_+^2 | \mu \rangle \\ + \langle \mu | \text{tr}(W_-^2 W_+^1 W_-^1 W_+^2 (i\mathbf{X}_- + \nabla_+ \ln \Phi_0^+ | \mu) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Now we subtract (C.3) from (C.2) and use that  $[W_+^2, \nabla_+ \ln \Phi_+^\dagger] = 0$ . As a result we have an identity that does not involve the ground state wave function:

$$\begin{aligned} & \langle \mu | \text{tr}(W_+^1 W_-^2) \text{tr}(W_+^2 W_+^1 W_-^1) - \text{tr}(W_+^1 W_+^2 W_-^2) \text{tr}(W_+^1 W_-^1) | \mu \rangle \\ & + i \langle \mu | \text{tr}(W_+^2 W_-^2 W_+^1 W_-^1 \mathbf{X}_-) - \text{tr}(\mathbf{X}_- W_-^2 W_+^1 W_-^1 W_+^2) | \mu \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Applying the identities

$$W_\pm^1 W_\pm^2 = -\frac{W_\pm^1 - W_\pm^2}{\xi_1^\pm - \xi_2^\pm}, \quad \mathbf{X}_\pm W_\pm^a = 1 - \xi^\pm W_\pm^a$$

we write (C.4) as

$$\begin{aligned} & \langle \mu | \frac{\text{tr}(W_+^1 W_-^2) \text{tr}(W_+^2 W_-^1) - \text{tr}(W_+^1 W_-^1) \text{tr}(W_+^2 W_-^2)}{\xi_1^+ - \xi_2^+} | \mu \rangle \\ & - i \langle \mu | \frac{\text{tr}(W_+^1 W_-^2 - W_+^2 W_-^2 - W_+^1 W_-^1 + W_+^2 W_-^1)}{\xi_1^+ - \xi_2^+} | \mu \rangle \\ & - i \langle \mu | \text{tr}(W_+^1 W_-^1 W_+^2 W_-^2) (\xi_1^+ - \xi_2^+) | \mu \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

In the leading order in the  $1/\mu$  expansion we can use the factorization of the normalized expectation values,  $\langle \mu | \text{tr} A \text{tr} B | \mu \rangle = \langle \mu | \text{tr} A | \mu \rangle \langle \mu | \text{tr} B | \mu \rangle$ . Setting

$$G_2(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-) = \langle \mu | \text{tr} W_+^1 W_-^1 W_+^2 W_-^2 | \mu \rangle,$$

$$G_1(\xi^+, \xi^-) = \langle \mu | \text{tr}(W_+ W_-) | \mu \rangle - i,$$

we retrieve (3.39):

$$G_2(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-) = i \frac{G_1(\xi_1^+, \xi_1^-) G_1(\xi_2^+, \xi_2^-) - G_1(\xi_1^+, \xi_2^-) G_1(\xi_2^+, \xi_1^-)}{(\xi_2^+ - \xi_1^+)(\xi_2^- - \xi_1^-)}.$$

Proceeding in the same way one obtains a recursive formula for the one-trace correlator  $G_n$  [20]

$$\begin{aligned} G_n(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_n^+, \xi_n^-) &= i \sum_{j=1}^{k-1} \frac{G_j(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_j^+, \xi_j^-) G_{k-j}(\xi_{j+1}^+, \xi_{j+1}^-, \dots, \xi_k^+, \xi_k^-)}{(\xi_n^+ - \xi_j^+)(\xi_n^- - \xi_j^-)} \\ &- i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{G_j(\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_j^+, \xi_k^-) G_{n-j}(\xi_{j+1}^+, \xi_{j+1}^-, \dots, \xi_k^+, \xi_j^-)}{(\xi_k^- - \xi_j^-)(\xi_n^+ - \xi_1^+)}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

## D Evaluation of the integral for $R_2(E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-)$

In order to evaluate the disk scattering amplitude in the space of energies, we need to perform the integral transformation (3.19) with respect to all four variables of the amplitude (3.39):

$$\begin{aligned} R_2(E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-) &= \frac{1}{\pi^4} \sinh \pi E_1^+ \sinh \pi E_2^+ \sinh \pi E_1^- \sinh \pi E_2^- \\ &\times \int_0^\infty d\xi_1^+ d\xi_2^+ d\xi_1^- d\xi_2^- (\xi_1^+)^{-iE_1^+} (\xi_2^+)^{-iE_2^+} (\xi_1^-)^{-iE_1^-} (\xi_2^-)^{-iE_2^-} G_2(\xi_1^+, \xi_2^+, \xi_1^-, \xi_2^-). \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

We will use the fact that the integral transform of the two factors  $G_1$  in the expression (3.39) for  $R_2$  is already known. We express the r.h.s. of (D.1) in terms of

$$R_1(E^+, E^-) = \delta(E^+ - E^-) \mathcal{R}_1(E^+) \quad (\text{D.2})$$

by applying the inverse transformation (3.20):

$$G_1(\xi^+, \xi^-) = -\frac{1}{4\xi^+ \xi^-} \int_{\mathbb{R}^{+i/2}} \frac{dE^+}{\sinh \pi E^+} \xi^{iE^+} \frac{dE^-}{\sinh \pi E^-} \xi^{-iE^-} \mathcal{R}_1(E^+, E^-). \quad (\text{D.3})$$

As a result, the original integral takes the form

$$R_2 = \int_{\mathbb{R}^{+i/2}} \prod_{\pm} [dp_1^\pm dp_2^\pm K(E_1^\pm, E_2^\pm; p_1^\pm, p_2^\pm)] \mathcal{R}_1(p_1^+, p_1^-) \mathcal{R}_1(p_2^+, p_2^-), \quad (\text{D.4})$$

where the kernel  $K(E_1, E_2; y_1, y_2)$  is given by the integral

$$K(E_1, E_2; p_1, p_2) = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\xi_1 \xi_2} \frac{\det \xi_j^{i(p_k - E_j)}}{\xi_1 - \xi_2}. \quad (\text{D.5})$$

The factor

$$A = \prod_{j=1,2} \frac{\sinh \pi E_j}{\sinh \pi p_j} \quad (\text{D.6})$$

can be put equal to 1, as we will see later. To evaluate the kernel, change the variables as  $\xi_1 = e^{\tau+t}$ ,  $\xi_2 = e^{\tau-t}$ ,

$$\begin{aligned} A^{-1} K(E_1, E_2; p_1, p_2) &= \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty d\tau dt e^{i\tau(p_1+p_2-E_1-E_2)} e^{it(E_2-E_1)} \frac{\sin(p_2-p_1)t}{e^\tau \sinh t} \\ &= \frac{2}{\pi} i \delta(E_1+E_2-p_1-p_2+i) \int_{-\infty}^\infty dt \frac{\cos(E_1-E_2)t \sin(p_1-p_2)t}{\sinh t} \\ &= 2i \delta(E_1+E_2-p_1-p_2+i) \frac{\sinh \pi(p_1-p_2)}{\cosh \pi(E_1-E_2) + \cosh \pi(p_1-p_2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

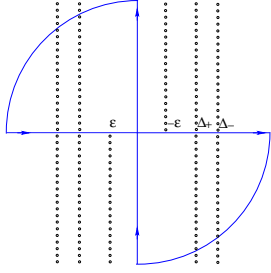


Figure 5: The 8-like contour in the  $\epsilon'$ -plane and the pattern of the poles.

After substituting (D.7) and (D.2) in the integral (D.4), three of the integrations are compensated by  $\delta$ -functions, the remaining  $\delta$ -function imposes the conservation of the total energy:

$$\mathcal{R}_2(E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-) = \delta(E_1^+ + E_2^+ - E_1^- - E_2^-) \mathcal{R}_2. \quad (\text{D.8})$$

It is convenient to introduce the independent variables  $E$ ,  $\Delta_{\pm}$  and  $\epsilon'$  by

$$E_1^{\pm} = E + \Delta_{\pm}, \quad E_2^{\pm} = E - \Delta_{\pm}, \quad p_1 = E + \epsilon' + \frac{1}{2}i, \quad p_2 = E - \epsilon' + \frac{1}{2}i, \quad (\text{D.9})$$

$\epsilon'$  being the integration variable. It is clear that in the Maldacena limit

$$E = \frac{1}{2\pi} \ln \Lambda + \epsilon \quad (\text{D.10})$$

with  $\epsilon$ ,  $\Delta_{\pm}$  finite, the factor (D.6) can be replaced by 1. Then we can write the remaining integral as

$$\mathcal{R}_2 = 4i \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \frac{\sinh^2 2\pi\epsilon' \mathcal{R}_1(E + \epsilon' + \frac{1}{2}i) \mathcal{R}_1(E - \epsilon' + \frac{1}{2}i)}{(\cosh 2\pi\Delta_+ + \cosh 2\pi\epsilon')(\cosh 2\pi\Delta_- + \cosh 2\pi\epsilon')}. \quad (\text{D.11})$$

We are going to evaluate the integral (D.11) as a contour integral. According to (3.31) the integrand behaves at  $\epsilon' \rightarrow \pm\infty$  as  $\exp(-i\pi\epsilon'^2)$ . This leads to the choice of a 8-like contour shown in Fig. 3. We will show later that the integral integration along the imaginary axis is zero, so that the integral (D.11) is given by the sum of the residues trapped inside the 8-shaped contour. The integrand contains two kinds of poles. First, there are the (simple) poles of the kernel at

$$\epsilon' = \pm\Delta_- + (n + \frac{1}{2})i, \quad \pm\Delta_+ + (n + \frac{1}{2})i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Second, there are the poles of the factors  $\mathcal{R}_1(E \pm \epsilon' + \frac{1}{2}i)$  at

$$\epsilon' = \mp\hat{\epsilon} \pm (n + \frac{1}{2})i, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

where by  $\hat{\epsilon}$  we denoted the shifted energy  $\hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{2\pi} \ln \mu = E - \frac{1}{2\pi} \ln(\Lambda/\mu)$ . The order of these poles grow linearly with  $n$ .

We will assume that  $\hat{\epsilon} < 0$ . Then the second kind of poles remain outside the integration contour and the only contribution will come from the poles of the kernel. Let us sum up the contributions of the poles along the lines  $\Re\epsilon = \pm\Delta_{\pm}$ . Assume for definiteness that  $\Delta_- > 0$ . Then we have to sum up the residues at

$$\epsilon' = \pm\Delta_- \mp (n + \frac{1}{2})i, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (\text{D.12})$$

The residues of the kernel are the same for all poles:

$$\text{Res}K = i \frac{\sinh 2\pi\Delta_-}{2\pi(\cosh 2\pi\Delta_+ - \cosh 2\pi\Delta_-)}. \quad (\text{D.13})$$

The factor  $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_1$  in the integrand is evaluated at the  $n$ -th pole using the shifting property

$$\mathcal{R}_1(E + ni) = \mu^{-n}(1 - e^{-2\pi\hat{\epsilon}})^{-n} \mathcal{R}_1(E) = (\mu - e^{-2\pi\hat{\epsilon}})^{-n} \mathcal{R}_1(E). \quad (\text{D.14})$$

The sum over the poles yields a factor

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{R}_1(E + \Delta_- - ni) \mathcal{R}_1(E - \Delta_- + (n+1)i) \\ &= \frac{\mathcal{R}_1(E + \Delta_-) \mathcal{R}_1(E - \Delta_-)}{\mu(1 - e^{-2\pi(\hat{\epsilon} - \Delta_-)})} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-2\pi(\hat{\epsilon} + \Delta_-)}}{1 - e^{-2\pi(\hat{\epsilon} - \Delta_-)}} \right)^n \\ &= -e^{2\pi\hat{\epsilon}} \frac{\mathcal{R}_1(E + \Delta_-) \mathcal{R}_1(E - \Delta_-)}{2 \sinh 2\pi\Delta_-}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Taking into account the contribution of both series of poles (D.12) we get

$$\mathcal{R}_2|_{\text{poles } \Delta_-} = -2e^{2\pi\hat{\epsilon}} \frac{\mathcal{R}_1(E + \Delta_-) \mathcal{R}_1(E - \Delta_-)}{\cosh 2\pi\Delta_+ - \cosh 2\pi\Delta_-}. \quad (\text{D.16})$$

Similarly we evaluate the contribution of the poles with  $\Re\epsilon = \pm\Delta_+$ . Returning to the original variables  $E_j^{\pm}$  we write the final result as

$$\mathcal{R}_2 = -\frac{2}{\Lambda} e^{\pi(E_1^+ + E_2^+)} \frac{\mathcal{R}_1(E_1^+) \mathcal{R}_1(E_2^+) - \mathcal{R}_1(E_1^-) \mathcal{R}_1(E_2^-)}{\sinh \pi(E_1^+ - E_1^-) \sinh \pi(E_1^+ - E_2^-)}. \quad (\text{D.17})$$

In terms of the renormalized energies (3.30),  $\hat{\epsilon}_j^{\pm} = E_j^{\pm} - \frac{1}{2\pi} \ln(\Lambda/\mu)$  the result reads

$$\mathcal{R}_2 = -\frac{2}{\mu} e^{\pi(\hat{\epsilon}_1^+ + \hat{\epsilon}_2^+)} \frac{\mathcal{R}_1(E_1^+) \mathcal{R}_1(E_2^+) - \mathcal{R}_1(E_1^-) \mathcal{R}_1(E_2^-)}{\sinh \pi(\hat{\epsilon}_1^+ - \hat{\epsilon}_1^-) \sinh \pi(\hat{\epsilon}_1^+ - \hat{\epsilon}_2^-)}. \quad (\text{D.18})$$

This expression can be safely analytically continued for  $\hat{\epsilon} > 0$ . Note that the scattering amplitude (D.18) is of order  $1/\mu$  compared to the leading order, as it should.

We still need to show that the integral over the imaginary axis,  $e' = iq$ , vanishes. The integral in question is

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dq F(q), \quad F(q) = 4i \frac{\sin^2 2\pi q \mathcal{R}_1(E + iq + \frac{1}{2}i) \mathcal{R}_1(E - iq + \frac{1}{2}i)}{(\cosh 2\pi\Delta_+ + \cos 2\pi q)(\cosh 2\pi\Delta_- + \cos 2\pi q)}. \quad (\text{D.19})$$

We split the interval into segments of length 1 and use the quasi-periodicity of the integrand:

$$I = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} dq F(q+n) = \int_{-1/2}^{1/2} dq \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\phi(q)} F(q), \quad e^{i\phi(q)} = \frac{e^{2\pi\epsilon} - e^{2\pi iq}}{e^{2\pi\epsilon} - e^{-2\pi iq}}. \quad (\text{D.20})$$

The sum of the unitary numbers gives  $e^{2\pi\epsilon} \delta(q)$ , so that indeed  $I \sim F(0) = 0$ .

## E Calogero Hamiltonian for general representations

In this appendix, we derive the explicit form of the Calogero Hamiltonian for arbitrary representation. In particular, we focus on the second part of the Hamiltonian (E.1) which is important in the continuum limit,

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N \frac{\mathcal{D}(E_j^k) \mathcal{D}(E_k^j)}{(x_j - x_k)^2}. \quad (\text{E.1})$$

In general, the wave function associated with the Young diagram whose box (resp. anti-box) part is described by  $Y_1$  (resp.  $Y_2$ ) is obtained by applying the Young symmetrizer associated with  $Y_1$  to the upper indices and the Young symmetrizer associated with  $Y_2$  to the lower indices and satisfies the traceless condition for any pair of the upper and lower indices. More explicitly, if we write

$$\pi_Y = \sum_{\sigma \in S_n} \pi(Y, \sigma) \sigma \quad (\text{E.2})$$

as the Young symmetrizer for the Young diagram  $Y$ , the state associated with the representation  $Y_1, Y_2$  can be written in terms of the adjoint wave functions as,

$$\Psi_{k_1 \dots k_n}^{j_1 \dots j_n}(\mathbf{X}) = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \pi(Y_1, \sigma) \pi(Y_2, \tau) f_1(\mathbf{X})_{k_{\sigma(1)}}^{j_{\sigma(1)}} \dots f_n(\mathbf{X})_{k_{\tau(n)}}^{j_{\tau(n)}} - \dots. \quad (\text{E.3})$$

Here, again,  $\dots$  represents the terms which are needed to keep the traceless condition for  $\Psi_{k_1 \dots k_n}^{j_1 \dots j_n}(\mathbf{X})$ .

For a general representation (E.3) we need to identify the index sets  $j_1, \dots, j_n$  with  $k_1, \dots, k_n$ . In order to keep track of the original index structure, it will be useful to represent the state vector in the form

$$\sum_{j_n, k_n}^N \Psi_{k_1 \dots k_n}^{j_1 \dots j_n}(\mathbf{X}) |j_1 \dots j_n\rangle \langle k_1, \dots, k_n|$$

$$\rightarrow \sum_{j_n}^N w_{j_1 \dots j_n}(x) |j_1 \dots j_n\rangle \langle j_1, \dots, j_n| \quad (\text{E.4})$$

$$w_{j_1 \dots j_n}(x) = \Psi_{j_1 \dots j_n}^{j_1 \dots j_n}(x) \quad (\text{E.5})$$

The element of the permutation on the upper (resp. lower) indices can be applied to the ket (resp. bra) state as,

$$\vec{\sigma} |j_1 \dots j_n\rangle \langle j_1, \dots, j_n| = |j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(n)}\rangle \langle j_1, \dots, j_n|, \quad (\text{E.6})$$

$$\overleftarrow{\sigma} |j_1 \dots j_n\rangle \langle j_1, \dots, j_n| = |j_1, \dots, j_n\rangle \langle j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(n)}|. \quad (\text{E.7})$$

Via such operators, one can define the projection into the irreducible representations by the Young symmetrizer as (E.3).

We are going to calculate the action of the Hamiltonian to the state of the representation  $(Y_1, Y_2)$ ,

$$\Psi_{Y_2}^{Y_1}(x) = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \pi(Y_1, \sigma) \pi(Y_2, \tau) \sum_{j_1, \dots, j_n}^N w_{j_1, \dots, j_n}(x) \cdot \vec{\sigma} \overleftarrow{\tau} |j_1, \dots, j_n\rangle \langle j_1, \dots, j_n| \quad (\text{E.8})$$

The operator  $\mathcal{D}(E_{jk})$  in the interaction Hamiltonian  $H_1$  takes the form

$$\mathcal{D}(E_{jk}) = \sum_{a=1}^n (\vec{E}_{jk}^{(a)} - \overleftarrow{E}_{jk}^{(a)}) \quad (\text{E.9})$$

where

$$\begin{aligned} \vec{E}_{jk}^{(a)} |l_1 \dots l_n\rangle \langle m_1, \dots, m_n| &= \delta_{k, l_a} |l_1, \dots, j, \dots, l_n\rangle \langle m_1, \dots, m_n| \\ \overleftarrow{E}_{jk}^{(a)} |m_1, \dots, m_n\rangle \langle l_1 \dots l_n| &= \delta_{j, l_a} |m_1, \dots, m_n\rangle \langle l_1, \dots, k, \dots, l_n| \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

It is easy to check that<sup>6</sup>

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{E}_{jk}^{(a)} = \vec{E}_{jk}^{(\sigma^{-1} \cdot a)} \vec{\sigma}, \quad \overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{E}_{jk}^{(a)} = \overleftarrow{E}_{jk}^{(\sigma^{-1} \cdot a)} \overleftarrow{\sigma} \quad (\text{E.11})$$

and

$$[\vec{\sigma}, H_1] = [\overleftarrow{\sigma}, H_1] = 0. \quad (\text{E.12})$$

<sup>6</sup> We note that the operators  $\overleftarrow{\sigma}$  and  $\vec{E}_{jk}^{(a)}$  act on the state from the rightmost operator. Namely  $\overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{\tau} |l_1 \dots l_n\rangle \langle k_1, \dots, k_n| = |l_1 \dots l_n\rangle \langle k_{\sigma\tau(1)}, \dots, k_{\sigma\tau(n)}|$ .

Therefore the action of  $\mathcal{H}$  to  $\Psi_{Y_2}^{Y_1}(x)$  can be written as,

$$\begin{aligned} H_1 \Psi_{Y_2}^{Y_1}(x) &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \pi(Y_1, \sigma) \pi(Y_2, \tau) \overrightarrow{\partial} \overleftarrow{\partial} H_1 w(x) \\ w(x) &= \sum_{j_1, \dots, j_n} w_{j_1, \dots, j_n}(x) |j_1, \dots, j_n\rangle \langle j_1 \dots, j_n|. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

When we evaluate the action of  $H_1$  to the state  $w(x)$ , it is useful to split it into the four parts,

$$H_1 = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4, \quad (\text{E.14})$$

$$\hat{h}_1 = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \sum_{a=1}^n \frac{\overrightarrow{E}_{jk}^{(a)} \overrightarrow{E}_{kj}^{(a)} + \overleftarrow{E}_{jk}^{(a)} \overleftarrow{E}_{kj}^{(a)}}{(x_j - x_k)^2} \quad (\text{E.15})$$

$$\hat{h}_2 = - \sum_{j \neq k} \sum_{a=1}^n \frac{\overrightarrow{E}_{jk}^{(a)} \overleftarrow{E}_{kj}^{(a)}}{(x_j - x_k)^2} \quad (\text{E.16})$$

$$\hat{h}_3 = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \sum_{a \neq b} \frac{\overrightarrow{E}_{jk}^{(a)} \overrightarrow{E}_{kj}^{(b)} + \overleftarrow{E}_{jk}^{(a)} \overleftarrow{E}_{kj}^{(b)}}{(x_j - x_k)^2} \quad (\text{E.17})$$

$$\hat{h}_4 = - \sum_{j \neq k} \sum_{a \neq b} \frac{\overrightarrow{E}_{jk}^{(a)} \overleftarrow{E}_{kj}^{(b)}}{(x_j - x_k)^2} \quad (\text{E.18})$$

The action of  $\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_4$  to  $w(x)$  can be evaluated as

$$\hat{h}_1 w(x) = \sum_a^n v_{j_a}(x) w(x), \quad v_j(x) = \sum_{k(\neq j)}^n \frac{1}{(x_k - x_j)^2}, \quad (\text{E.19})$$

$$\hat{h}_2 w(x) = - \sum_{j_1, \dots, j_n} \left( \sum_a^n \sum_j^n \frac{\delta(j \neq j_a)}{(x_j - x_{j_a})^2} w_{j_1, \dots, j, \dots, j_n} \right) |j_1 \dots j_n\rangle \langle j_1 \dots j_n|, \quad (\text{E.20})$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_3 w(x) &= \frac{1}{2} \sum_{l_1, \dots, l_n} \sum_{a \neq b} \delta(j_a \neq j_b) \frac{w_{j_1, \dots, j, \dots, j_n}}{(x_{j_a} - x_{j_b})^2} (\overrightarrow{ab}) + \overleftarrow{ab}) \cdot \\ &\quad \cdot |j_1 \dots j_n\rangle \langle j_1 \dots j_n|, \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

$$\hat{h}_4 w(x) = - \sum_{a \neq b} \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{w_{j_1, \dots, j_a, \dots, j_b, \dots, j_n}}{(x_{j_b} - x_{j_a})^2} \overleftarrow{ab} |j_1 \dots j_n\rangle \langle j_1 \dots j_n|. \quad (\text{E.22})$$

Here  $(ab)$  represents the transposition and  $\delta(a \neq b) = 1 - \delta_{ab}$ . After the (anti-)symmetrization by Young symmetrizer, the action of  $\mathcal{H}_1$  becomes,

$$H_1 = H^{(\text{free})} + V \quad (\text{E.23})$$

$$(H^{(\text{free})} w)_{j_1, \dots, j_n} = \sum_a^n \left( v(j_a) w_{j_1, \dots, j_n} - \sum_j^N \frac{\delta(j \neq j_a)}{(x_j - x_{j_a})^2} w_{j_1, \dots, j, \dots, j_n} \right) \quad (\text{E.24})$$

$$\begin{aligned} (V w)_{j_1, \dots, j_n} &= \frac{1}{2} \sum_{a \neq b}^L \frac{\delta(j_a \neq j_b)}{(x_{j_a} - x_{j_b})^2} (q_{ab}^L + q_{ab}^R) w_{j_1, \dots, j_a, \dots, j_b, \dots, j_n} \\ &\quad - \sum_{a \neq b}^n \delta(j_a \neq j_b) q_{ab}^R \frac{w_{j_1, \dots, j_b, \dots, j_b, \dots, j_n}}{(x_{l_n} - x_{l_m})^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Here  $q_{ab}^{L,R}$  is the eigenvalues of  $(\overrightarrow{ab}), (\overleftarrow{ab})$  after the projection by Young symmetrizer. It depends on the location of  $a, b$  in the Young tableau  $Y_1, Y_2$ .

The piece  $\mathcal{H}^{(\text{free})}$  is a direct sum of  $\mathcal{H}_1$  for the adjoint representation for the indices  $j_1, \dots, j_n$ . It represents  $n$  non-interacting quasiparticles. In particular, this part depends only on the number of boxes  $|Y_1| = |Y_2| = n$

On the other hand,  $\mathcal{V}$  represents the interaction between the quasiparticles. It depends on the representations  $(Y_1, Y_2)$  and is somehow complicated. The interaction simplified for  $A_n, B_n$  and  $C_n$  representations. The interaction  $\mathcal{V}$  among the tips of the folded string becomes,

$$A_L : V = 0, \quad (\text{E.26})$$

$$B_L : (V w)_{i_1, \dots, i_L} = \sum_{n \neq m}^L \frac{\delta(i_n \neq i_m)}{(x_{i_n} - x_{i_m})^2} (w_{i_1, \dots, i_L} - w_{i_1, \dots, i_m, \dots, i_m, \dots, i_L}), \quad (\text{E.27})$$

$$C_L : (V w)_{i_1, \dots, i_L} = - \sum_{n \neq m}^L \frac{\delta(i_n \neq i_m)}{(x_{i_n} - x_{i_m})^2} w_{i_1, \dots, i_L}. \quad (\text{E.28})$$

## References

- [1] J. Maldacena, *Long strings in two dimensional string theory and non-singlets in the matrix model*, JHEP **0509** (2005) 078 [hep-th/0503112].
- [2] V. Fateev, A. Zamolodchikov and Al. Zamolodchikov, *unpublished notes*
- [3] V. Kazakov, I. K. Kostov and D. Kutasov, *A matrix model for the two-dimensional black hole*, Nucl. Phys. B **622** (2002) 141 [hep-th/0101011].
- [4] S. Y. Alexandrov, V. A. Kazakov and I. K. Kostov, *Time-dependent backgrounds of 2D string theory*, Nucl. Phys. B **640**, 119 (2002) [hep-th/0205079].
- [5] I. K. Kostov, *Integrable flows in  $c = 1$  string theory*, J. Phys. A **36**, 3153 (2003) [Annales Henri Poincare **4**, S825 (2003)] [hep-th/0208034].
- [6] I. K. Kostov, *String equation for string theory on a circle*, Nucl. Phys. B **624**, 146 (2002) [hep-th/0107247].
- [7] S. Y. Alexandrov, V. A. Kazakov and I. K. Kostov, *2D string theory as normal matrix model*, Nucl. Phys. B **667**, 90 (2003) [hep-th/0302106].



- [8] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, *Topological strings and integrable hierarchies*, Commun. Math. Phys. **261**, 451 (2006) [hep-th/0312085].
- [9] X. Yin, *Matrix models, integrable structures, and T-duality of type 0 string theory*, Nucl. Phys. B **714**, 137 (2005) [hep-th/0312236].
- [10] J. Teschner, *On Tachyon condensation and open-closed duality in the  $c = 1$  string theory*, JHEP **0601**, 122 (2006) [hep-th/0504043].
- [11] A. Mukherjee and S. Mukhi, *Noncritical string correlators, finite- $N$  matrix models and the vortex condensate*, JHEP **0607**, 017 (2006) [hep-th/0602119].
- [12] I. Klebanov, *String theory in two dimensions*, [hep-th/9108019]; P. Ginsparg and G. Moore, *Lectures on 2D gravity and 2D string theory*, [hep-th/9304011]; J. Polchinski, *What is string theory?*, [hep-th/9411028].
- [13] W. A. Bardeen, I. Bars, A. J. Hanson and R. D. Peccei, *A Study Of The Longitudinal Kink Modes Of The String*, Phys. Rev. D **13** (1976) 2364; I. Bars and J. Schulze, *Folded Strings Falling Into A Black Hole*, Phys. Rev. D **51** (1995) 1854 [hep-th/9405156].
- [14] D. Gaiotto, *Long strings condensation and FZZT branes*, [hep-th/0503215].
- [15] N. Seiberg, *Long strings, anomaly cancellation, phase transitions, T-duality and locality in the 2d heterotic string*, JHEP **0601**, 057 (2006) [hep-th/0511220].
- [16] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, *Boundary Liouville field theory. I: Boundary state and boundary two-point function*, [hep-th/0001012].
- [17] L. Fidkowski, *Solving the eigenvalue problem arising from the adjoint sector of the  $c = 1$  matrix model*, [hep-th/0506132].
- [18] I. Kostov, *Long strings and chiral non-singlets in matrix quantum mechanics*, JHEP **0701** (2007) 074 [arXiv:hep-th/0610084].
- [19] B. Eynard, *A short note about Morozov's formula*, [math-ph/0406063].
- [20] B. Eynard, N. Orantin, *Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the Bethe Ansatz*, JHEP **0508** (2005) 028 [hep-th/0504029].
- [21] P. Di Francesco and D. Kutasov, *World Sheet And Space-Time Physics In Two-Dimensional (Super)String Theory*, Nucl. Phys. B **375**, 119 (1992) [hep-th/9109005].
- [22] I. K. Kostov, *Boundary ground ring in 2D string theory*, Nucl. Phys. B **689** (2004) 3 [hep-th/0312301].
- [23] M. Bershadsky and D. Kutasov, *Scattering Of Open And Closed Strings In  $(1+1)$ -Dimensions*, Nucl. Phys. B **382**, 213 (1992) [hep-th/9204049].
- [24] B. Ponsot and J. Teschner, *Boundary Liouville field theory: Boundary three point function*, Nucl. Phys. B **622**, 309 (2002) [hep-th/0110244].
- [25] V. Petkova, unpublished notes.
- [26] N. Seiberg, "Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity," Prog. Theor. Phys. Suppl. **102**, 319 (1990).
- [27] L. F. Alday and J. Maldacena, "Gluon scattering amplitudes at strong coupling," [hep-th/0705.0303].
- [28] D. J. Gross and I. R. Klebanov, *Vortices And The Nonsinglet Sector Of The  $C = 1$  Matrix Model*, Nucl. Phys. B **354**, 459 (1991).
- [29] D. Boulatov and V. Kazakov, *One-dimensional string theory with vortices as the upside down matrix oscillator*, Int. J. Mod. Phys. A **8** (1993) 809 [hep-th/0012228].
- [30] A. Jevicki, *Development in 2-d string theory*, [hep-th/9309115].
- [31] Y. Hatsuda and Y. Matsuo, *Symmetry and integrability of non-singlet sectors in matrix quantum mechanics*, [hep-th/0607052].
- [32] Harish Chandra, A.J.Math **80** 241 (1958); C. Itzykson and J.B. Zuber, J.Math.Phys. **21** 411 (1980)
- [33] S. L. Shatashvili, *Correlation functions in the Itzykson-Zuber model*, Commun. Math. Phys. **154**, 421 (1993) [hep-th/9209083].
- [34] A. Morozov, *Pair correlator in the Itzykson-Zuber Integral*, Modern Phys. Lett. A **7**, no. 37 3503-3507 (1992).
- [35] M. Bertola and B. Eynard, *Mixed correlation functions of the two-matrix model*, J. Phys. A **36**, 7733 (2003) [hep-th/0303161].
- [36] B. Eynard and A. P. Ferrer, *2-matrix versus complex matrix model, integrals over the unitary group as triangular integrals*, Commun. Math. Phys. **264** (2006) 115 [hep-th/0502041].
- [37] A. Prats Ferrer, B. Eynard, P. Di Francesco, J.-B. Zuber, *Correlation Functions of Harish-Chandra Integrals over the Orthogonal and the Symplectic Groups*, [math-ph/0610049].
- [38] N. Orantin, *Du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques : combinatoire de surfaces par la géométrie algébrique*, PhD thesis, Saclay 2007 [hep-th/0709.2992].
- [39] E.W. Barnes, *The genesis of the double gamma function*, Proc. London Math. Soc., **31**, (1899), 358-381.
- [40] L. Faddeev, R. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Mod. Phys. Lett., **9**, (1994), 265-282; [hep-th/9310070].
- [41] L. Faddeev, R. Kashaev, A. Volkov, *Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality*, Commun.Math.Phys. **219** (2001) 199; [hep-th/0006156].
- [42] S. Kharchev, D. Lebedev and M. Semenov-Tian-Shansky, *Unitary representations of  $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ , the modular double, and the multiparticle  $q$ -deformed Toda chains*, Commun. Math. Phys. **225** (2002) 573 [hep-th/0102180].
- [43] I. K. Kostov, B. Ponsot and D. Serban, *Boundary Liouville theory and 2D quantum gravity*, Nucl. Phys. B **683**, 309 (2004) [hep-th/0307189].

# Article II

Boundary operators in the  $O(n)$  and  
RSOS matrix models  
[ARXIV:0811.3252]

# Boundary operators in the $O(n)$ and RSOS matrix models

---

Jean-Emile Bourgine<sup>1</sup> and Kazuo Hosomichi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institut de Physique Théorique, CNRS-URA 2306  
C.E.A.-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*

<sup>2</sup> *Korea Institute for Advanced Study, Seoul 103-722, Korea  
jean-emile.bourgine@cea.fr, hosomiti@kias.re.kr*

**ABSTRACT:** We study the new boundary condition of the  $O(n)$  model proposed by Jacobsen and Saleur using the matrix model. The spectrum of boundary operators and their conformal weights are obtained by solving the loop equations. Using the diagrammatic expansion of the matrix model as well as the loop equations, we make an explicit correspondence between the new boundary condition of the  $O(n)$  model and the “alternating height” boundary conditions in RSOS model.

**KEYWORDS:** Matrix theory, Noncritical string theory.

---

## Contents

<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2. Boundary operators in the <math>O(n)</math> model</b>	<b>3</b>
<b>3. Boundary operators in RSOS model</b>	<b>12</b>
<b>4. The map between the two models</b>	<b>19</b>
<b>5. Concluding remarks</b>	<b>23</b>
<b>A. Gravitational dressing, Liouville theory and KPZ</b>	<b>24</b>
<b>B. Solving the loop equation</b>	<b>26</b>

---

## 1. Introduction

Boundary conformal field theories play an important role in many fields of theoretical physics, such as statistical mechanics, condensed matter or string theory. In order to study the properties of boundary conditions and boundary operators, it is useful to have at our disposal a microscopic description of the conformal field theories (CFT). The  $O(n)$  model and solid-on-solid (SOS) models are the familiar examples which provide us with such a description of, in general irrational, CFTs with central charge  $c < 1$ . In the  $O(n)$  model each lattice site is assigned an  $O(n)$  spin, whereas in SOS models one associates an integer-valued height to each lattice point. In both theories, neighbouring sites are then coupled via suitable interactions. The heights are bounded from both sides in the so called restricted SOS (or RSOS) models; these models are known to describe rational CFTs with  $c < 1$ .

Both the  $O(n)$  and SOS models can be reformulated as loop gas models [1]. In this formulation, the  $O(n)$  model makes sense for arbitrary real  $n$  and exhibit critical behaviour for  $|n| \leq 2$ . The phase structure of these models is well understood. Interestingly, they are known to describe two CFTs of different central charges connected by a renormalization group flow. The loops behave differently in the UV (or *dilute*) phase and the IR (*dense*) phase.

Some properties of the  $O(n)$  and SOS models can be studied by putting them on a fluctuating lattice, i.e., coupling them to the two-dimensional gravity. The partition

function of such theories is given by summing up the partition functions of the model on all the different lattices weighted by their area. Actually, the  $O(n)$  and SOS models on random – or dynamical – lattice are known to be described by the Feynman graph expansion of certain matrix models [1–7]. In this context, the continuum limit is achieved by tuning the potential couplings while sending the size of the matrices to infinity. In this limit one recovers the dynamics of the irrational CFT with  $c < 1$  coupled to the Liouville gravity and reparametrization ghosts.

The  $O(n)$  and SOS matrix models are also useful in studying the conformally invariant boundary conditions from the microscopic viewpoint. In this paper, we will be particularly interested in the boundary conditions of the  $O(n)$  model recently proposed by Jacobsen and Saleur [8]. Instead of allowing the loops to touch the boundary freely, they weighted the loops touching the boundary differently from those which do not. They also considered the “ $L$ -leg” boundary operators on which  $L$  open lines end. The properties of such boundary conditions and operators were studied on a fixed annular lattice with  $L$  non-contractible loops introduced. They obtained a continuous spectrum of boundary operators and determined their conformal weights. The new boundary conditions were also put on a dynamical lattice by Kostov [9], where the correlation functions and the conformal weights of the  $L$ -leg operators were computed. The  $L$ -leg operators were also considered in some earlier works [10–12].

Another interesting fact is that the  $O(n)$  model becomes equivalent to the RSOS model for some special values of  $n$ . In [8] it was proposed that the new boundary conditions of Jacobsen and Saleur correspond to the boundary conditions in RSOS model which force the boundary height to alternate between two values [13].

In this paper we study the property of boundary conditions and boundary operators of these models using the loop equations along the line of [9], but with more help of the matrix model formulation which is much simpler to handle than the combinatorics employed in the earlier work. We will be focusing on the dense phase, leaving the analysis of the dilute phase as a future work.

The organization of this paper is as follows. In section 2 we introduce the new boundary conditions and boundary  $L$ -leg operators in the  $O(n)$  matrix model following [9], and rederive the correlation functions and conformal weights of the  $L$ -leg operators from the loop equations. Then in section 3 we propose a description of the boundary conditions of alternating heights in RSOS matrix models. Using this we derive the spectrum of boundary operators as well as their conformal weights and correlators, again by solving the loop equations. Finally, in section 4 we show the equivalence of the  $O(n)$  and RSOS models on discs by establishing a map between their Feynman graphs. We use this to derive some relations between the disc correlators, which are then shown to map the loop equations of one theory to the other. The last section 5 is devoted to some concluding remarks.

In Appendix A we review some basic facts on the Liouville theory approach to conformal field theories coupled to two-dimensional gravity, and summarize the formulae for the conformal weight and gravitational dimension of the operators. Some detail of solving

the loop equation and reading off the gravitational dimension are given in Appendix B.

## 2. Boundary operators in the $O(n)$ model

### 2.1 Definition of the model

Let us consider a triangular lattice  $\Gamma$  with an  $O(n)$  spin component associated to each site  $r$ , normalized so that  $\text{tr } S_a(r)S_b(r') = \delta_{ab}\delta_{rr'}$ . The partition function of the  $O(n)$  model is defined by [14, 15]

$$Z_\Gamma(T) = \text{tr} \prod_{\langle rr' \rangle} \left( 1 + \frac{1}{T} \sum_a S_a(r)S_a(r') \right), \quad (2.1)$$

where  $T$  is called the temperature and the product runs over all links  $\langle rr' \rangle$  of  $\Gamma$ . Expanding the product into a sum of monomials, the partition function can be written as a sum over all configurations of self avoiding, mutually avoiding loops on  $\Gamma$ ,

$$Z_\Gamma(T) = \sum_{\text{loops}} T^{-(\text{length})} n^{\#(\text{loops})}. \quad (2.2)$$

Each loop is counted with a factor  $n$ , and the temperature  $T$  controls the average total length of the loops. When formulated in this way, the model makes sense for arbitrary real  $n$ . This model is known to exhibit a critical behaviour for  $|n| \leq 2$ . Hereafter we parameterize  $n$  in terms of  $g$  or  $\theta$  as follows,

$$n = -2 \cos(\pi g) = 2 \cos(\pi \theta). \quad (2.3)$$

As a function of  $n$ ,  $g$  is multi-valued. Different branches are known to correspond to different phases of the model [1].

The temperature controls the phase of the model. It is in the dilute phase at some critical temperature  $T = T^*$ , and below  $T^*$  it is in the dense phase. For generic  $n$ , the two phases are described by two irrational conformal field theories with central charges

$$c_{\text{dense}} = 1 - \frac{6\theta^2}{1-\theta}, \quad c_{\text{dilute}} = 1 - \frac{6\theta^2}{1+\theta}. \quad (2.4)$$

We will be focusing on the physics in the dense phase, which has the same behaviour as the fully packed loop model corresponding to  $T = 0$ . Hereafter we assume  $\theta \in [0, 1]$  and  $\theta = 1 - g$ .

Turning on the gravity corresponds to taking the sum over all the triangulated surfaces with a suitable weight,

$$Z_{\text{dyn}}(\kappa, T) = \sum_{\Gamma} \kappa^{-A(\Gamma)} Z_\Gamma(T). \quad (2.5)$$

The parameter  $\kappa$  controls the average area  $A(\Gamma)$  (the number of triangles) and is regarded as the bare cosmological constant. The continuum limit is obtained from the vicinity of the

critical line  $\kappa = \kappa^*(T)$  where the average area of the surface diverges. One can also allow the surfaces to have boundaries. For example, a disc partition function can be defined as the sum over the surfaces of disc topology,

$$Z_{\text{dyn}}(\kappa, x, T) = \sum_{\Gamma: \text{disc}} \frac{1}{L(\Gamma)} \kappa^{-A(\Gamma)} x^{-L(\Gamma)} Z_{\Gamma}(T), \quad (2.6)$$

where  $x$  is the boundary cosmological constant controlling the average boundary length (the number of edges along the boundary). In this case, we have to send  $x$  also to a critical value as  $\kappa \rightarrow \kappa^*(T)$  so that the average boundary length diverges in the limit. The continuum limit is therefore parametrized by the renormalized couplings  $\mu \sim \kappa^* - \kappa$  and  $\xi \sim x - x^*$ . Note that, when the disc has more than one boundary, a boundary cosmological constant may be introduced for each.

Until recently, the only boundary condition studied in the  $O(n)$  model was the Neumann boundary condition in which the spins at the boundary fluctuate freely. Based on earlier work [16, 17], Jacobsen and Saleur [8] proposed a new kind of boundary conditions in which the boundary spins are forced to take the first  $k$  of the  $n$  values. We call this the  $k$ -th JS boundary condition. Neumann and Dirichlet boundary conditions correspond to the special cases with  $k = n$  and  $k = 1$ , respectively. In the loop gas picture, the  $k$ -th JS boundary condition amounts to giving a weight  $k$ , instead to the usual  $n$ , to the loops that touch the boundary at least once. Defined in this way, the JS boundaries make sense for non-integer  $k$ .

Following [9], we consider the model on the disc with one Neumann and one JS boundaries connected by the boundary changing operators,

$$\mathbb{S}_L^{\parallel} = \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_L \leq k} S_{a_1} \dots S_{a_L}, \quad \mathbb{S}_L^{\perp} = \sum_{k < a_1 < \dots < a_L \leq n} S_{a_1} \dots S_{a_L}. \quad (2.7)$$

In the loop gas picture, they have  $L$  legs of open lines attached. They are called the blobbed and unblobbed  $L$ -leg operators [8]. They were named after the underlying Temperley-Lieb algebra though we will not need its detailed property in this paper. One of the important characteristics of these operators is that the lines from blobbed operators can touch the JS boundary whereas the line from unblobbed operators cannot. We will give the matrix model equivalent of these operators in the next subsection.

## 2.2 The $O(n)$ matrix model

The  $O(n)$  matrix model is an integral over  $N \times N$  hermitian matrices  $X$  and  $Y_a$ , with  $a$  running from 1 to  $n$ . The partition function is given by [6]

$$Z = \int dX \prod_{a=1}^n dY_a \exp \left[ \beta \text{tr} \left( -\frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3} X^3 - \frac{T}{2} \sum_{a=1}^n Y_a^2 + \sum_{a=1}^n X Y_a^2 \right) \right]. \quad (2.8)$$

The Feynman graph expansion of  $Z$  generates all the dynamical lattices of arbitrary genus but without boundaries. The bare cosmological constant  $\kappa$  is given by

$$\beta = N \kappa^2, \quad (2.9)$$

and each loop formed by the propagators of  $Y_a$  is multiplied by  $n T^{-(\text{length})}$ . Graphs of genus  $h$  are weighted by  $N^{2-2h}$ , so that the planar graphs dominate the partition function in the large  $N$  limit for a fixed  $\kappa$ . Continuum limit is obtained by sending  $\kappa \rightarrow \kappa^*(T)$  and  $N \rightarrow \infty$  in a correlated manner.

The physics in the continuum limit depends on the temperature. Below the critical temperature  $T < T^*$ , partition function is dominated by graphs with densely packed loops. Since the vertices with three legs of  $X$  do not play any role, one could study the dense phase using the definition (2.8) without the  $X^3$  term. Before proceeding, we make a slight redefinitions of the matrices  $X$  and  $Y_a$  so as to simplify the integrand of (2.8),

$$Z = \int dX \prod_{a=1}^n dY_a \exp \left[ -\beta \text{tr} \left( V(X) - \sum_{a=1}^n X Y_a^2 \right) \right]. \quad (2.10)$$

The potential  $V(X)$  is then given by

$$V(X) = \frac{1}{2} \left( X + \frac{T}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( X + \frac{T}{2} \right)^3. \quad (2.11)$$

As was mentioned above, generic quadratic potential  $V(X)$  could capture the physics in the dense phase.

The disc partition function with Neumann boundary condition is given in the large  $N$  limit by

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \log(x - X) \rangle. \quad (2.12)$$

Because of the prefactor  $1/\beta$ , the leading contribution is independent of  $N$  and the higher genus contributions are subleading at large  $N$ . What will become more important later is its derivative, the resolvent

$$W(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} \right\rangle. \quad (2.13)$$

The derivative introduces one marked point along the boundary. One is supposed to take  $x \rightarrow x^* = 0$  in the continuum limit [18]. The disc partition function with the  $k$ -th JS boundary condition and one marked point is given by

$$\tilde{W}(y) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{y - \sum_{a=1}^k Y_a^2} \right\rangle, \quad (2.14)$$

where we suppress the  $k$ -dependence of  $\tilde{W}$  for notational simplicity. To study the boundary changing operators, we also introduce disc two-point functions with one Neumann and one JS boundary conditions,

$$D_0(x, y) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \left( \frac{1}{x - X} \frac{1}{y - \sum_{a=1}^k Y_a^2} \right) \right\rangle. \quad (2.15)$$

We also consider the correlation functions of the  $L$ -leg operators,

$$\begin{aligned} D_L^{\parallel}(x, y) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \left( \frac{1}{x-X} \mathbb{Y}_L^{\parallel} \frac{1}{y - \sum_{a=1}^k Y_a^2} \mathbb{Y}_L^{\parallel} \right) \right\rangle, \\ D_L^{\perp}(x, y) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \left( \frac{1}{x-X} \mathbb{Y}_L^{\perp} \frac{1}{y - \sum_{a=1}^k Y_a^2} \mathbb{Y}_L^{\perp} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.16)$$

where the operators  $\mathbb{Y}_L^{\parallel}$  and  $\mathbb{Y}_L^{\perp}$  are defined analogously to (2.7),

$$\mathbb{Y}_L^{\parallel} = \sum_{\{a_1, \dots, a_L\} \subset \{1, \dots, k\}} Y_{a_1} \cdots Y_{a_L}, \quad \mathbb{Y}_L^{\perp} = \sum_{\{a_1, \dots, a_L\} \subset \{k+1, \dots, n\}} Y_{a_1} \cdots Y_{a_L}. \quad (2.17)$$

The sums are taken over all different sets of  $L$  letters (so  $\mathbb{Y}_L^{\parallel}$  consists of  $k!/L!$  terms). These operators are the analogues in matrix model of the blobbed and unblobbed  $L$ -leg operators.

In the following, we study the loop equations for the above correlators that are associated to  $Y_a$ -derivatives. We will see that the  $Y_a$ -derivative adds or removes one open line between boundary operators, so that the loop equations relate the correlators  $D_L^{\perp, \parallel}$  with  $D_{L+1}^{\perp, \parallel}$ . Among those correlators,  $D_1^{\parallel}$  and  $D_0$  will be of particular importance because they can be determined from a closed system of shift equations.

### 2.3 Loop equations

We start from the loop equation which follows from the translation invariance of the measure  $dY_a$ . For any matrix  $F$  made of  $X$  and  $Y_a$ , the following equality holds:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{ij} \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_{aij}} F_{ij} \right\rangle = -\langle \text{tr}(FX + XF)Y_a \rangle. \quad (2.18)$$

If we introduce  $G = -(XF + FX)$ , then  $F$  is formally expressed in terms of  $G$  as

$$F = \int_0^{\infty} d\ell e^{\ell X} G e^{\ell X}, \quad (2.19)$$

Using them, the loop equation can be rewritten as

$$\sum_{ij} \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_{aij}} \int_0^{\infty} d\ell (e^{\ell X} G e^{\ell X})_{ij} \right\rangle = \langle \text{tr} G Y_a \rangle. \quad (2.20)$$

In the following we will apply this central identity to different  $G$  and derive some relations among our correlators  $D_L^{\perp}$  and  $D_L^{\parallel}$ .

#### 2.3.1 Loop equations for $D_0$ and $D_1^{\parallel}$

For later convenience, we begin by introducing the notation

$$H(y) = \frac{1}{y - \sum_{a=1}^k Y_a^2}. \quad (2.21)$$

Let us first apply (2.20) to  $G = e^{\ell X} H Y_a$  with  $a \leq k$ . Using the well known large  $N$  factorization  $\langle \text{tr} A \text{tr} B \rangle \simeq \langle \text{tr} A \rangle \langle \text{tr} B \rangle$  and dropping the terms containing odd powers of  $Y_a$  in a correlator, we find

$$\beta \langle \text{tr} e^{\ell X} H Y_a^2 \rangle = \int d\ell \langle \text{tr} e^{(\ell+\ell')X} H \rangle \left( \langle \text{tr} e^{\ell X} Y_a H Y_a \rangle + \langle \text{tr} e^{\ell X} \rangle \right). \quad (2.22)$$

Another relation can be obtained by applying (2.20) to  $G = e^{\ell' X} Y_a H$ :

$$\beta \langle \text{tr} e^{\ell' X} Y_a H Y_a \rangle = \int d\ell \left( \langle \text{tr} e^{(\ell+\ell')X} Y_a H Y_a \rangle + \langle \text{tr} e^{(\ell+\ell')X} \rangle \right) \langle \text{tr} e^{\ell' X} H \rangle. \quad (2.23)$$

Now we make a Laplace transform with respect to  $\ell$  and  $\ell'$ , using the relations

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\ell e^{-\ell x} \text{tr}(e^{\ell X} A) &= \text{tr} \left( \frac{1}{x-X} A \right), \\ \int_0^{\infty} d\ell d\ell' e^{-x\ell'} \text{tr}(e^{(\ell+\ell')X} A) \text{tr}(e^{\ell X} B) &= \text{tr} \left( \frac{1}{x-X} A \right) * \text{tr} \left( \frac{1}{x-X} B \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Here we denoted by  $*$  the Laplace transform of the convolution

$$F(x) * G(x) = \oint \frac{dx'}{2\pi i} \frac{F(x') - F(x)}{x - x'} G(-x'), \quad (2.25)$$

and the contour of  $x'$  integration here encircles around the cut where  $F(x)$  has discontinuity. The loop equations (2.22) and (2.23) can then be rewritten into the form

$$\begin{aligned} \left\langle \text{tr} \left( H Y_a^2 \frac{1}{x-X} \right) \right\rangle &= D_0(x, y) * \left( \left\langle \text{tr} \left( Y_a H Y_a \frac{1}{x-X} \right) \right\rangle + \beta W(x) \right), \\ \left\langle \text{tr} \left( Y_a H Y_a \frac{1}{x-X} \right) \right\rangle &= \left( \left\langle \text{tr} \left( Y_a H Y_a \frac{1}{x-X} \right) \right\rangle + \beta W(x) \right) * D_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.26)$$

It only remains to sum over  $a$  from 1 to  $k$ . Using the definitions (2.15) and (2.16) for  $D_0$  and  $D_1^{\parallel}$  as well as the equality

$$\frac{1}{\beta} \sum_{a=1}^k \left\langle \text{tr} \left( H Y_a^2 \frac{1}{x-X} \right) \right\rangle = y D_0(x, y) - W(x), \quad (2.27)$$

we obtain

$$\begin{aligned} y D_0(x, y) - W(x) &= D_0(x, y) * \left( D_1^{\parallel}(x, y) + k W(x) \right), \\ D_1^{\parallel}(x, y) &= \left( k W(x) + D_1^{\parallel}(x, y) \right) * D_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.28)$$

To obtain more useful equations for  $D_0$  and  $D_1^{\parallel}$ , we subtract their non-critical parts and define

$$\begin{aligned} d_0(x, y) &= D_0(x, y) - 1, \\ k d_1(x, y) &= D_1^{\parallel}(x, y) + k W(x) - y. \end{aligned} \quad (2.29)$$

It is natural to assume that  $d_0$  and  $d_1$  have the same cut in the  $x$ -plane as that of  $W(x)$ , since the cut is determined by the eigenvalue distribution of  $X$  and therefore does not depend on the correlators considered. The loop equation (2.28) can then be rewritten in terms of the discontinuity along the cut,

$$\begin{aligned} d_0(-x, y)\text{Disc } d_1(x, y) + \text{Disc } W(x) &= 0, \\ d_1(-x, y)\text{Disc } d_0(x, y) + \frac{1}{k}\text{Disc } W(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

where  $\text{Disc}f(x) \equiv f(x+i0) - f(x-i0)$ . Using this one can show that the following quantity has no discontinuities and no poles in the complex  $x$ -plane,

$$P_{10}(x, y) = d_1(x, y)d_0(-x, y) + W(x) + \frac{1}{k}W(-x) - \frac{y}{k}. \quad (2.31)$$

Moreover, its behaviour at large  $x$  is found from (2.29),

$$d_0 = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right), \quad d_1 = -\frac{y}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right), \quad P_{10} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right). \quad (2.32)$$

Therefore  $P_{10}$  should be identically zero.

$$\begin{aligned} d_1(x, y)d_0(-x, y) + W(x) + \frac{1}{k}W(-x) - \frac{y}{k} &= 0, \\ d_0(x, y)d_1(-x, y) + W(-x) + \frac{1}{k}W(x) - \frac{y}{k} &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

As compare to our loop equation (2.30), the equation obtained in [9] (equations 3.13 and 3.14) has one additional term corresponding to the JS boundary touching itself to break the disc into two pieces. Including such a term may be reasonable from the standpoint of the combinatorics because the JS boundary has fractal dimension  $1/g$ . In the matrix model description, this boundary has classical dimension one and the term is missing. This discrepancy comes from two different possibilities for defining the boundary Liouville potential. Because of the symmetry  $\Delta_{r,s}(g) = \Delta_{s,r}(1/g)$  between the dressed scaling dimensions, both point of view give the same scaling dimension for the boundary operators.

### 2.3.2 Loop equations for $D_L^\perp$ and $D_L^\parallel$

Let us next take  $G = e^{\ell X} Y_a H$  with  $a > k$  and apply (2.20). Following the similar steps as in the previous subsection, we get

$$D_1^\perp(x, y) = (n-k)W(x) * D_0(x, y). \quad (2.34)$$

This is actually a special case of more general recursion relations between  $D_{L+1}^\perp$  and  $D_L^\perp$ , and similarly between  $D_{L+1}^\parallel$  and  $D_L^\parallel$ . To derive them, let us denote by  $\{a_i\}$ ,  $\{b_i\}$  two arbitrary sets of order  $L+1$ . They are both chosen to be subsets of  $\{1, \dots, k\}$  or  $\{k+$

$1, \dots, n\}$  depending on whether we are interested in  $D_L^\parallel$  or  $D_L^\perp$ . Then we apply the loop equation (2.20) to

$$G = Y_{a_L} \cdots Y_{a_1} \frac{1}{y - \sum_{c=1}^k Y_c^2} Y_{b_1} \cdots Y_{b_{L+1}} e^{\ell X}, \quad (2.35)$$

where the derivative is with respect to  $Y_{a_{L+1}}$ , and sum over the sets  $\{a_i\}$  and  $\{b_i\}$ . The final result is

$$\begin{aligned} D_{L+1}^\parallel(x, y) &= (k-L)W(x) * D_L^\parallel(x, y), \\ D_{L+1}^\perp(x, y) &= (n-k-L)W(x) * D_L^\perp(x, y). \end{aligned} \quad (2.36)$$

These relations agree with the result of [9]. In terms of discontinuity along the cut, the loop equations become

$$\begin{aligned} \text{Disc } D_{L+1}^\parallel(x, y) &= (k-L)D_L^\parallel(-x, y)\text{Disc } W(x), \\ \text{Disc } D_{L+1}^\perp(x, y) &= (n-k-L)D_L^\perp(-x, y)\text{Disc } W(x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

The second equation can be extended to the case  $L=0$  if one defines

$$D_0^\perp(x, y) = D_0(x, y), \quad D_0^\parallel(x, y) = \frac{D_0}{1-D_0}. \quad (2.38)$$

It was pointed out in [9] that these relations follow naturally if the Neumann and JS boundaries are allowed to touch in  $D_0^\parallel$  but not allowed in  $D_0^\perp$ .

## 2.4 Solution in the continuum limit

### 2.4.1 The disc amplitude $W$

To study the continuum limit, we introduce a small parameter  $\epsilon$  and set the unit lattice length to  $\epsilon$ . We define the renormalized bulk and boundary cosmological constants  $(\mu, \xi, \zeta)$  by [1]

$$\epsilon^2 \mu = \kappa - \kappa^*, \quad \epsilon^{1/g} \xi = x - x^*, \quad \epsilon \zeta = y - y^*. \quad (2.39)$$

They blow up the neighbourhood of the critical point  $(\kappa^*, x^*, y^*)$  in the scaling limit  $\epsilon \rightarrow 0$ . Note that the JS boundaries have classical dimension 1 whereas the Neumann boundary has fractal dimension  $1/g$ . The renormalized resolvent  $w(\xi)$  is defined by

$$W(x) - \frac{2V'(x) - nV'(-x)}{4-n^2} = \epsilon w(\xi). \quad (2.40)$$

In [1] the resolvent was obtained in the following parametric form,

$$\xi = M \cosh \tau, \quad w(\xi) = -\frac{M^g}{2g} \cosh g\tau. \quad (2.41)$$

Here  $M$  is related to the cosmological constant  $\mu$  and the string susceptibility  $u$  via

$$M^{2g} = 2g\mu, \quad u = \frac{\partial^2 Z_{\text{sphere}}}{\partial \mu^2} = M^{2g}. \quad (2.42)$$

As a function of  $\xi$ , the resolvent has a cut along the interval  $]-\infty, -M]$  where the eigenvalues of the matrix  $X$  are distributed.

### 2.4.2 The disc amplitudes $D_0^\perp$ and $D_1^\parallel$

Here we wish to solve (2.33) in the continuum limit. To begin with, we need to find the critical value  $y^*$  of the  $k$ -th JS boundary cosmological constant. Since it should not depend on  $x$  and  $\kappa$ , one can determine it by requiring that  $d_0$  and  $d_1$  vanish at the critical point  $(x, y, \kappa) = (0, y^*, \kappa^*)$ ,

$$y^* = (k+1)W(0). \quad (2.43)$$

With a slight abuse of notations, we define the renormalized two-point functions by

$$d_i(x, y) = \epsilon^{\alpha_i/g} d_i(\xi, \zeta), \quad (2.44)$$

where the scaling exponents  $\alpha_0, \alpha_1$  will be determined shortly. To the leading order in small  $\epsilon$ , the loop equations (2.33) become

$$\begin{aligned} d_1(\xi, \zeta) d_0(-\xi, \zeta) + w(\xi) + \frac{1}{k} w(-\xi) - \frac{\zeta}{k} &= 0, \\ d_0(\xi, \zeta) d_1(-\xi, \zeta) + w(-\xi) + \frac{1}{k} w(\xi) - \frac{\zeta}{k} &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

We dropped several terms in (2.33) such as polynomial terms in  $W(x)$  because they are subdominant for small  $\epsilon$ . By noticing  $d_i \sim \xi^{\alpha_i}$  for  $\zeta = \mu = 0$  and using the loop equations, one can determine the scaling exponents [9],

$$\alpha_0 = r\theta, \quad \alpha_1 = 1 - \theta - r\theta, \quad (2.46)$$

where  $r$  is related to  $k$  by

$$k(r) = \frac{\sin(r+1)\pi\theta}{\sin r\pi\theta}. \quad (2.47)$$

Hereafter we use  $r$  as the label of JS boundaries; it has a clear physical meaning as we will see later. We also express  $\zeta$  in terms of a new parameter  $\sigma$  as

$$\zeta(\sigma) = \frac{M^g \sin \pi\theta}{2g \sin \pi r\theta} \cosh g\sigma. \quad (2.48)$$

Using (2.41), (2.47) and (2.48) the loop equations can be rewritten as

$$d_1\left(\tau \mp \frac{i\pi}{2}, \sigma\right) d_0\left(\tau \pm \frac{i\pi}{2}, \sigma\right) = C M^g \cosh \frac{g(\tau + \sigma) \pm \alpha}{2} \cosh \frac{g(\tau - \sigma) \pm \alpha}{2}, \quad (2.49)$$

where

$$C = \frac{\sin \pi\theta}{g \sin \pi(r+1)\theta}, \quad \alpha = \frac{i\pi}{2}(2r\theta + \theta - 1). \quad (2.50)$$

We solve these shift relations in Appendix B using a slight generalization of [10]. The result is that  $d_0, d_1$  are given by the Liouville boundary two-point function [19]. See Appendix A for its explicit form. The scaling exponents of the correlators  $d_i \propto \xi^{\alpha_i}$  are then read from their dependence on the boundary cosmological constant, and agree precisely

with (2.46). This is enough to determine the gravitational dimensions of the boundary changing operators in the correlators  $d_0$  and  $d_1$ ,

$$\Delta_0^\perp = \Delta_{r,r}, \quad \Delta_1^\parallel = \Delta_{-r,-r-1}, \quad (2.51)$$

where the gravitational dimension for the  $(r, s)$  operator is given by

$$\Delta_{r,s} = \frac{r-1-g(s-1)}{2g}, \quad (2.52)$$

and is related to the conformal weight of the operators in CFT by KPZ relation (A.6). See Appendix A for more detail.

### 2.4.3 The disc amplitudes $D_L^\perp$ and $D_L^\parallel$

Using the parameters  $(\tau, \sigma)$  in the continuum limit and the equality

$$w(\tau + i\pi) - w(\tau - i\pi) = \frac{M^g}{ig} \sin \pi\theta \sinh g\tau, \quad (2.53)$$

the loop equations (2.37) can be rewritten into the form

$$\begin{aligned} D_{L+1}^\parallel(\tau + i\pi, \sigma) - D_{L+1}^\parallel(\tau - i\pi, \sigma) &= \frac{(k-L)M^g}{ig} \sin \pi\theta \sinh g\tau D_L^\parallel(\tau, \sigma), \\ D_{L+1}^\perp(\tau + i\pi, \sigma) - D_{L+1}^\perp(\tau - i\pi, \sigma) &= \frac{(n-k-L)M^g}{ig} \sin \pi\theta \sinh g\tau D_L^\perp(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (2.54)$$

These shift relations take the same form as (A.12) satisfied by the Liouville boundary two-point function. So, in the continuum limit the correlators  $D_L^\parallel$  and  $D_L^\perp$  are again given by Liouville boundary two-point functions up to factors independent of  $\tau, \sigma$ . The gravitational dimensions of the  $L$ -legs boundary operators are given by

$$\Delta_L^\parallel = \Delta_{-r,-r-L}, \quad \Delta_L^\perp = \Delta_{r,r-L}. \quad (2.55)$$

Through KPZ relation (A.6) this determines the conformal weight of the blobbed and unblobbed operators. The results are in complete agreement with [8] and confirm our identification of matrix model correlators with those of the  $O(n)$  model coupled to gravity.

As was noticed in [8], there is no reason for the parameter  $r$  to be quantized in the  $O(n)$  model. So we have a continuous spectrum of JS boundary conditions and the associated boundary-changing operators. We conclude this section with a few remarks on some special values of  $r$ . First, for  $k = n$  or  $r = 1$  the JS boundary becomes the Neumann boundary. In this case the conformal weights of the boundary operators become  $\delta_L^\perp = \delta_{1,L+1}$  and  $\delta_L^\parallel = \delta_{1,L+1}$ , in agreement with the result [20] on flat lattice and [10] on dynamical lattice. Another interesting special case is the Dirichlet case, which corresponds to  $k = 1$  or

$$r = \frac{1-\theta}{2\theta}. \quad (2.56)$$



In this limit, using the fact that the correlators of odd powers of  $Y_a$  matrices vanish, one can prove the relations

$$\begin{aligned} D_0^\perp(x, y) &= \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} \frac{1}{y-Y_a^2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{y}} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} \frac{1}{\sqrt{y}-Y_a} \right\rangle, \\ D_1^\parallel(x, y) &= y D_0^\perp(x, y) - W(x) = \sqrt{y} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} \frac{1}{\sqrt{y}-Y_a} \right\rangle - W(x). \end{aligned} \quad (2.57)$$

The loop equation for  $k = 1$  then involves only one undetermined quantity,

$$y d_0(x, y) d_0(-x, y) + W(x) + W(-x) - y = 0. \quad (2.58)$$

We recovered the loop equation for the correlation functions of twist operators in loop gas model [10] up to normalization of correlators and parameters. Note that this simplification is a special feature of  $k = 1$  because the resolvents for the JS boundaries with  $k > 1$  involve  $k$  non-commuting matrices  $Y_a$ .

### 3. Boundary operators in RSOS model

#### 3.1 Definition of the model

In the RSOS height model [21], the local fluctuation variable (height) takes values in the integer set  $\{1, \dots, h-1\}$ . This model is also called  $A_{h-1}$ -model, the integer set being identified with the nodes of the Dynkin graph for the  $A$  series. This graph is characterized by its adjacency matrix

$$G_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{if } a \sim b, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.1)$$

The indices  $a, b$  run over the nodes of the Dynkin graph, and  $a \sim b$  means that the nodes  $a, b$  are linked. One can define the so called ADE-models in the same way from the Dynkin graphs of the ADE Lie algebras [22].

The RSOS model on a fixed triangular lattice with possible curvature defects is defined as the statistical sum over all the height configurations. Each height configuration is weighted according to the following rule [23]. To each site of height  $a$  one assigns the local Boltzmann weight

$$W_\circ(a) = S_a, \quad (3.2)$$

and to each triangle with the heights  $a, b, c$  at the three vertices one assigns

$$W_\Delta(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{S_a}} \delta_{ab} \delta_{bc} + \frac{1}{T \sqrt{S_a}} \left( \delta_{ab} G_{bc} + \delta_{bc} G_{ca} + \delta_{ca} G_{ab} \right). \quad (3.3)$$

Here  $T$  is the temperature, and  $S_a$  are the components of the Perron-Frobenius vector

$$S_a = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left(\frac{\pi a}{h}\right), \quad (3.4)$$

which is the eigenvector of the adjacency matrix with the largest eigenvalue  $2 \cos(\pi/h)$ . The weight (3.3) in particular requires that the heights of any two adjacent sites can differ at most by a unit. Thanks to this, the height configurations can also be described by the contour lines (loops) along the edges of the dual lattice [15]. The average total length of the loop is then controlled by the temperature.

The phase diagram of the RSOS model is the same as that for the  $O(n)$  model; it is in the dilute phase at some critical temperature  $T^*$ , and in the dense phase at lower temperatures. Since the lattice is filled by the loops in the dense phase, one can study this phase using the Boltzmann weight (3.3) without the first term.

Conformal boundary conditions are realized microscopically as suitable restrictions on the heights on the boundary. In the dense phase there are two kinds of boundary conditions. The ‘‘fixed’’ boundary condition  $a$  requires the boundary to take the constant height  $a$ . The ‘‘alternating’’ boundary conditions  $\langle ab \rangle$  require the sites at the boundary to take the two adjacent heights  $a$  and  $b$  alternately, like  $ababab\dots ab$ . Bauer and Saleur [13] studied both types of boundary conditions on the flat lattice, and found that conformal weights of the boundary changing operators  ${}^1B^a$  and  ${}^{(12)}B^{\langle ab \rangle}$  are given by  $\delta_{1,a}$  and  $\delta_{a,1}$ . In the following we will show that the boundary operators of conformal weight  $\delta_{r,s}$  can be realized as  ${}^sB^{(r,r+1)}$  when  $r \geq s$  and  ${}^sB^{(r+1,r)}$  when  $r < s$ .

#### 3.2 The RSOS matrix model

The RSOS matrix models [24] are the simplest examples of the ADE-matrix models. The fluctuating variables are  $h-1$  hermitian matrices  $X_a$  associated to the nodes  $a = 1, \dots, h-1$ , and  $h-2$  rectangular complex matrices  $C_{ab} = C_{ba}^\dagger$  associated with the oriented links  $\langle ab \rangle$ .  $X_a$  has the size  $N_a \times N_a$  while  $C_{ab}$  has the size  $N_a \times N_b$ . The partition function is given by the integral

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_a dX_a \prod_{\langle ab \rangle} dC_{ab} \exp(-\beta S[X, C]), \\ S[X, C] &= \sum_a S_a \text{tr} \left( \frac{1}{2} X_a^2 - \frac{1}{3} X_a^3 \right) + \sum_{\langle ab \rangle} \text{tr} \left( \frac{T}{2} C_{ab} C_{ba} - X_a C_{ab} C_{ba} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

where  $\langle ab \rangle$  runs over oriented links of the Dynkin graph.

We take the limit of large  $\beta$ , large  $N_a$  keeping their ratio fixed,

$$\frac{N_a}{\beta S_a} \equiv \kappa^2 = \text{fixed}. \quad (3.6)$$

The constant  $\kappa$  plays the role of the bare cosmological constant. Perturbative expansion of  $Z$  gives the sum over height configurations with Boltzmann weights (3.2) and (3.3), but now on dynamical lattice. The planar graphs dominate the partition function in the large  $\beta$  limit, and the higher genus terms are suppressed by powers of  $\beta^{-2}$ .

One can view the system as the gas of loops on dynamical lattice which are formed by the propagators of  $C_{ab}, C_{ba}$  and separating the domains of heights  $a$  and  $b$ . The temperature

$T$  is regarded as the fugacity for the total loop length. Again, the term  $X_a^3$  in  $S[X, C]$  can be dropped when one is interested in the dense phase.

Also, the Feynman rule is such that each connected domain of height  $a$  gives rise to a factor

$$(S_a)^\chi, \quad (3.7)$$

where  $\chi$  is the Euler number of that domain. For disc graphs, this rule amounts to assigning the factor  $S_a$  to each ‘‘outermost’’ domain of height  $a$  touching the boundary, and  $S_a/S_b$  to each domain of height  $a$  surrounded by that of height  $b$ .

Before proceeding, we make a certain linear change of matrix variables to rewrite the partition function as

$$Z = \int \prod_a dX_a \prod_{(ab)} dC_{ab} \exp \left( -\beta \sum_a S_a \text{tr} V(X_a) + \beta \sum_{(ab)} X_a C_{ab} C_{ba} \right), \quad (3.8)$$

where the potential  $V(x)$  is the same as the one (2.11) for the  $O(n)$  model. As was mentioned above, generic quadratic  $V$  can describe the physics in the dense phase.

We will consider the following correlators

$$\begin{aligned} \Phi_a(x) &= -\frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \log(x - X_a) \rangle, \\ \Phi_{(ab)}(y) &= -\frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \log(y - C_{ab} C_{ba}) \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

They correspond respectively to the disc partition function with the boundary conditions  $a$  or  $\langle ab \rangle$ . The more important quantities in the following analysis are their derivatives, the loop amplitudes

$$\begin{aligned} W_a(x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \Phi_a(x) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \frac{1}{x - X_a} \rangle, \\ W_{(ab)}(y) &= -\frac{\partial}{\partial y} \Phi_{(ab)}(y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \frac{1}{y - C_{ab} C_{ba}} \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

The loop amplitudes  $W_a(x)$  are the Laplace images of the loop amplitudes with fixed boundary length,

$$\tilde{W}_a(\ell) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} e^{\ell X_a} \rangle. \quad (3.11)$$

To study the spectrum of boundary operators, we also consider the disc two-point functions with  $a$  and  $\langle bc \rangle$  boundary segments,

$$D_{a,(bc)}(x, y) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \left( \frac{1}{x - X_a} \mathbf{S}_{ab}^L \frac{1}{y - C_{bc} C_{cb}} \mathbf{S}_{ba}^L \right) \right\rangle. \quad (3.12)$$

Here

$$\mathbf{S}_{ab}^L \equiv C_{ad_1} C_{d_1 d_2} \cdots C_{d_{L-1} b} \quad (3.13)$$

is the product of  $C$ 's along the shortest path from  $a$  to  $b$ , so that each height  $d_i$  appears only once. We also assume that the path does not contain the node  $c$ . There are  $L$  open contour lines stretching between the two boundary changing operators  $\mathbf{S}_{ab}^L$ . Their Laplace transform,

$$\tilde{D}_{a,(bc)}(\ell, y) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \left( e^{\ell X_a} \mathbf{S}_{ab}^L \frac{1}{y - C_{bc} C_{cb}} \mathbf{S}_{ba}^L \right) \right\rangle, \quad (3.14)$$

will also appear in the derivation of the loop equation.

### 3.3 Loop equations

Here we derive some loop equations for disc correlators by using the same technique that was used in the  $O(n)$  model. Let us start from

$$\frac{1}{\beta} \left\langle \frac{\partial F_{ij}}{\partial C_{ab ij}} \right\rangle = -\langle \text{tr} F(C_{ba} X_a + X_b C_{ba}) \rangle, \quad (3.15)$$

where  $F$  is a  $N_a \times N_b$  matrix made of  $X$  and  $C$  matrices. By inserting

$$F = \int_0^\infty dl e^{\ell X_a} G e^{\ell X_b}, \quad (3.16)$$

we obtain the following equation

$$\sum_{ij} \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{\partial}{\partial C_{ab ij}} \int_0^\infty dl (e^{\ell X_a} G e^{\ell X_b})_{ij} \right\rangle = \langle \text{tr} C_{ba} G \rangle. \quad (3.17)$$

#### 3.3.1 Recursion relation for $D_{a,(bc)}$

To begin with, we derive a loop equation involving  $D_{a,(bc)}$  assuming  $a \neq b$  and that  $c$  is not on the shortest path connecting  $a$  and  $b$ . Let  $d$  be the node adjacent to  $a$  along that shortest path, so that  $\mathbf{S}_{ab}^L = C_{ad} \mathbf{S}_{db}^{L-1}$  and  $\mathbf{S}_{ba}^L = \mathbf{S}_{bd}^{L-1} C_{da}$ . Applying (3.17) to

$$G = e^{\ell X_a} C_{ad} \mathbf{S}_{db}^{L-1} \frac{1}{y - C_{bc} C_{cb}} \mathbf{S}_{bd}^{L-1}, \quad (3.18)$$

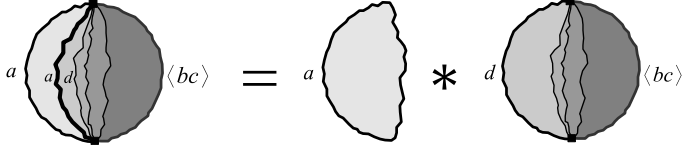
gives the following recursion relation

$$\tilde{D}_{a,(bc)}(\ell, y) = \int_0^\infty dl \tilde{W}_a(\ell + \ell') \tilde{D}_{d,(bc)}(\ell, y). \quad (3.19)$$

Its Laplace image reads

$$D_{a,(bc)}(x, y) = W_a(x) * D_{d,(bc)}(x, y), \quad (3.20)$$

with the  $*$  product defined in (2.25). In this derivation, it is important that  $C_{ad}$  appears only once. The relation (3.20) can also be obtained by an explicit integration over the  $C_{ad}$  matrix using the Gaussian measure. From the viewpoint of height configuration, this can be understood as cutting the disc into two pieces along the contour line that stretches between the two boundary operators and separates the domains of height  $a$  and  $d$ . See Figure 1. This recursion relation allows us to express all the disc correlators  $D_{a,(bc)}$  in terms of the  $2h - 2$  basic correlators  $D_{a,(a \pm 1)}$ .



**Figure 1:** The disc graph contributing to  $D_{a,\langle bc \rangle}$  can be decomposed into two discs along the contour line separating the domains of height  $a$  and  $d$  and connecting the two boundary operators.  $D_{a,\langle bc \rangle}$  is therefore written as a \*-product of  $W_a$  and  $D_{d,\langle bc \rangle}$ .

### 3.3.2 Bilinear functional equation for $D_{a,\langle ab \rangle}$

Let us next apply (3.17) to

$$G = e^{\ell X_a} \frac{1}{y - C_{ab} C_{ba}} C_{ab}. \quad (3.21)$$

Following the similar steps as before we obtain the loop equation

$$y \int_0^\infty d\ell \tilde{D}_{a,\langle ab \rangle}(\ell + \ell', y) \tilde{D}_{b,\langle ba \rangle}(\ell, y) = y \tilde{D}_{a,\langle ab \rangle}(\ell', y) - \tilde{W}_a(\ell'). \quad (3.22)$$

After the Laplace transform with respect to  $\ell$ , it becomes

$$D_{a,\langle ab \rangle}(x, y) = \frac{1}{y} W_a(x) + D_{a,\langle ab \rangle}(x, y) * D_{b,\langle ba \rangle}(x, y). \quad (3.23)$$

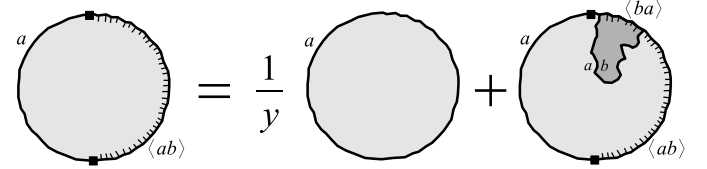
This relation can also be understood from the viewpoint of the height configurations. Recall first of all that the  $\langle ab \rangle$  boundary emanates contour lines separating the heights  $a$  and  $b$ . Let us then think of a graph participating in  $D_{a,\langle ab \rangle}$ , and cut it along the contour line whose endpoint is the closest to the right end of the  $\langle ab \rangle$  boundary. There may be no such contour line because the  $\langle ab \rangle$  boundary may have zero length; in such a case the graph has constant boundary height  $a$  and contributes to  $W_a(x)$ . Otherwise the graph can be decomposed into two pieces contributing respectively to  $D_{a,\langle ab \rangle}$  and  $D_{b,\langle ba \rangle}$ . See Figure 2. These two possibilities correspond to the two terms in the RHS of (3.23).

The disc correlators  $D_{a,\langle ab \rangle}$  and  $D_{b,\langle ba \rangle}$  satisfy two relations, namely (3.23) and another equation obtained by exchanging  $a$  and  $b$ . To get the more useful equation we take the discontinuity of these equations along the cut in the  $x$ -plane,

$$\begin{aligned} \text{Disc} D_{a,\langle ab \rangle}(x, y) &= \frac{1}{y} \text{Disc} W_a(x) + D_{b,\langle ba \rangle}(-x, y) \text{Disc} D_{a,\langle ab \rangle}(x, y), \\ \text{Disc} D_{b,\langle ba \rangle}(x, y) &= \frac{1}{y} \text{Disc} W_b(x) + D_{a,\langle ab \rangle}(-x, y) \text{Disc} D_{b,\langle ba \rangle}(x, y). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Using these and taking into account the large- $x$  asymptotics of  $W_a$  and  $D_{a,\langle ab \rangle}$ , we find

$$\begin{aligned} y D_{a,\langle ab \rangle}(x, y) D_{b,\langle ba \rangle}(-x, y) \\ - y D_{a,\langle ab \rangle}(x, y) - y D_{b,\langle ba \rangle}(-x, y) + W_a(x) + W_b(-x) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$



**Figure 2:** There are two types of graphs contributing to  $D_{a,\langle ab \rangle}$ . The graph may have  $\langle ab \rangle$  boundary of length zero so that the whole boundary has height  $a$ . If  $\langle ab \rangle$  boundary has nonzero length, one can cut it into two pieces contributing to  $D_{a,\langle ab \rangle}$  and  $D_{b,\langle ba \rangle}$ , respectively.

By introducing

$$d_{a,\langle ab \rangle}(x, y) = \sqrt{y} (D_{a,\langle ab \rangle}(x, y) - 1) \quad (3.26)$$

we can rewrite the equation (3.25) into a simpler form,

$$d_{a,\langle ab \rangle}(x, y) d_{b,\langle ba \rangle}(-x, y) + W_a(x) + W_b(-x) = y. \quad (3.27)$$

Here the normalization of  $d_{a,\langle ab \rangle}$  is somewhat arbitrary, and we chose the symmetric normalization for simplicity.

### 3.4 Solution in the continuum limit

To study the continuum limit, we introduce a small parameter  $\epsilon$  and the renormalized couplings  $(\mu, \xi, \zeta)$  in the same way as we did for the  $O(n)$  model,

$$\epsilon^2 \mu = \kappa - \kappa^*, \quad \epsilon^{1/g} \xi = x - x^*, \quad \epsilon \zeta = y - y^*. \quad (3.28)$$

In [1, 7] the loop equations for  $W_a(x)$  has been solved under the natural ansatz,

$$W_a(x) = S_a W(x). \quad (3.29)$$

$W(x)$  was then shown to satisfy the loop equation (2.13) for the resolvent of the  $O(n)$  matrix model with  $n = 2 \cos(\pi/h)$ . So we borrow the solution from the  $O(n)$  model under the identification

$$\theta = 1 - g = \frac{1}{h}. \quad (3.30)$$

We define the renormalized resolvent  $w(\xi)$  in the same way as in (2.40). The solution in the continuum limit is given by

$$\xi = M \cosh \tau, \quad w(\xi) = -\frac{M^g}{2g} \cosh g\tau. \quad (3.31)$$

Again,  $M$  is related to  $\mu$  via (2.42).

Now let us solve the loop equation (3.27) for the correlators  $d_{a,(ab)}$ . First we need to determine the critical value of the  $\langle ab \rangle$ -boundary cosmological constant  $y^*$ . We require that  $d_{a,(ab)}$  and  $d_{b,(ba)}$  vanish at the critical point  $(\kappa^*, x^*, y^*)$  and find

$$y^* = W_a(0) + W_b(0) = (S_a + S_b)W(0). \quad (3.32)$$

Next we renormalize the disc correlators near the critical point as

$$\begin{aligned} d_{a,(ab)}(x, y) &= \epsilon^{\alpha_{a,(ab)}/g} d_{a,(ab)}(\xi, \zeta), \\ \alpha_{a,(ab)} + \alpha_{b,(ba)} &= g = 1 - \frac{1}{h}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

The loop equation in the limit of small  $\epsilon$  is

$$d_{a,(ab)}(\xi, \zeta) d_{b,(ba)}(-\xi, \zeta) + S_a w(\xi) + S_b w(-\xi) = \zeta. \quad (3.34)$$

By substituting (3.31) and

$$\zeta = \frac{M^g S_1}{2g} \cosh g\sigma \quad (3.35)$$

into (3.34), the loop equation finally becomes

$$\begin{aligned} d_{a,(ab)}(\tau - i\pi/2, \sigma) d_{b,(ba)}(\tau + i\pi/2, \sigma) \\ = \frac{M^g S_1}{g} \cosh\left(\frac{g(\tau + \sigma) + \alpha_{ab}}{2}\right) \cosh\left(\frac{g(\tau - \sigma) + \alpha_{ab}}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

where  $\alpha_{ab}$  for  $b = a \pm 1$  is given by

$$\alpha_{ab} = \pm \frac{i\pi}{2} \left(1 - \frac{a+b}{h}\right) = -\alpha_{ba}. \quad (3.37)$$

The above equation has the same structure as (2.49), so the solution is given in terms of the Liouville boundary two-point functions. We can now use the formulae in Appendix A and B and determine the gravitational dimensions of the boundary changing operators

$$\begin{aligned} \Delta_{a,(ab)} &= \Delta_{a,a}, & \Delta_{b,(ba)} &= \Delta_{1-b,-b} & \text{when } b &= a+1, \\ \Delta_{a,(ab)} &= \Delta_{1-a,-a}, & \Delta_{b,(ba)} &= \Delta_{b,b} & \text{when } b &= a-1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

This implies that the boundary operators  ${}^a B^{(a+1)}$  and  ${}^a B^{(a-1)}$  in RSOS model have conformal weights  $\delta_{a,a}$  and  $\delta_{a-1,a}$ , in full agreement with the result of Saleur and Bauer.

From the comparison of the loop equation (3.20) with (A.12), it follows that the correlators  $d_{a,(bc)}$  are all given by Liouville boundary two-point functions. The operators  ${}^{a-L} B^{(a+1)}$  and  ${}^{a+L} B^{(a-1)}$  are then shown to have conformal weights  $\delta_{a,a+L}$  and  $\delta_{a-1,a+L}$ , respectively. By varying the integer parameters  $a$  and  $L$ , the whole spectrum of boundary operators for this rational CFT is recovered. This result proves the conjecture of [13] on the scaling dimensions of boundary changing operators in the RSOS model.

## 4. The map between the two models

It has been known for a long time that the  $O(n)$  model and SOS models are described by the same class of conformal field theories. In particular, the RSOS model with  $h-1$  nodes was known to have the same partition function on the plane as the rational  $O(n)$  model with  $n = 2 \cos(\pi/h)$ . Here we wish to explore this correspondence further, focusing mainly on the theories on the disc.

As was used in the previous section, the  $O(n)$  model on the disc with Neumann boundary condition is equivalent to the RSOS model with fixed-height boundary condition. The disc partition functions are related via

$$W_a(x_{\text{RSOS}}) = S_a W(x_{O(n)}). \quad (4.1)$$

In [8] it was shown that the  $\langle ab \rangle$ -type boundaries of RSOS model correspond to the JS boundaries of the  $O(n)$  model labeled by integer  $r$ . The annulus partition functions of the  $O(n)$  model with Neumann-JS boundary conditions were shown to agree with those of RSOS model with  $a\text{-}\langle bc \rangle$  boundary conditions. It was also noticed there that one needs to introduce  $L$  non-contractible loops on the annulus of the  $O(n)$  model, corresponding to the distance between  $a$  and  $\langle bc \rangle$  labelling the two boundaries of the RSOS model.

Following their idea, we wish to relate the disc correlators of the two models on dynamical lattice. More explicitly, we will find out the relation between  $D_L^{\parallel}, D_L^{\perp}$  of the  $O(n)$  model and  $D_{a+L,(a-1)}, D_{a-L,(a+1)}$  of the RSOS model. Our derivation of the relation is based on the loop equations and the diagrammatics of the matrix models, and does not rely on the continuum limit.

The first step is to relate the boundary cosmological constants. From the relation (4.1) we simply relate the  $x$ 's by

$$x_{\text{RSOS}} = x_{O(n)} \quad (4.2)$$

for Neumann boundary of the  $O(n)$  model and the fixed height boundary in RSOS model. Similarly, it follows from (2.43) and (3.32) that the  $y$ 's for the  $r$ -th JS boundary and the  $\langle ab \rangle$  boundary should be related via

$$\begin{aligned} y_{O(n)} &= \frac{y_{\text{RSOS}}}{S_a} & \langle (a, b) \rangle &= \langle r, r+1 \rangle \text{ or } \langle h-r, h-r-1 \rangle, \\ y_{O(n)} &= \frac{y_{\text{RSOS}}}{S_b} & \langle (a, b) \rangle &= \langle r+1, r \rangle \text{ or } \langle h-r-1, h-r \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

### 4.1 Relations between Feynman graphs

Instead of finding the correspondence of disc correlators quickly from loop equations, let us explain how the correlators of the two matrix models should be related from the viewpoint of Feynman graph expansion.

The underlying idea is very simple. Each Feynman graph of the RSOS matrix model describes a dynamical lattice with a height assigned to every face, so that one can draw

contour lines separating the domains of adjacent heights. If we focus only on the contour lines and forget about the heights, then what we get is nothing but the Feynman graph of the  $O(n)$  matrix model. We thus compare each Feynman graph of the  $O(n)$  matrix model with the sum over all the Feynman graphs of the RSOS model having the same contour line configuration but different height assignments.

#### 4.1.1 Resolvents

To begin with, let us consider the relation between the resolvents of the RSOS and the  $O(n)$  matrix models,

$$W_a(x) = S_a W(x). \quad (4.4)$$

Each graph contributing to  $W_a(x)$  has the unique outermost domain of height  $a$ , and is inscribed by several subdomains of height  $a \pm 1$ . Each subdomain may be inscribed by several subdomains of adjacent heights, and by iterating this a finite number of times one can cover the entire disc. Now let us sum over all the height assignments in the interior. Using the rule explained after (3.7), we first assign  $S_a$  to the outermost domain of height  $a$ . To each of its subdomains one can assign the height  $a + 1$  or  $a - 1$ , which gives rise to a factor

$$\frac{S_{a+1}}{S_a} + \frac{S_{a-1}}{S_a} = 2 \cos \frac{\pi}{h} = n. \quad (4.5)$$

By repeating this and going step by step to the interior, one ends up with the Feynman graph of the  $O(n)$  matrix model with a factor  $n$  assigned to each loop. This explains the relation (4.4) at the level of the Feynman graph sum.

#### 4.1.2 Disc correlators $D_0^\perp$ and $D_{a,(ab)}$

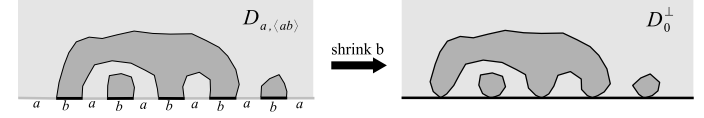
Next, we use a similar argument to show the relation

$$D_{a,(ab)}(x, y) = D_0^\perp(x, y/S_a), \quad (4.6)$$

where we assume  $b = a + 1$  for simplicity, and the JS boundary is expected to be labelled by  $r = a$  from (4.3). To show this, we consider Feynman graphs contributing to the LHS with the power  $1/y^{m+1}$ . Such graphs have the  $\langle ab \rangle$ -boundary of length  $m$ , and there are therefore  $m$  open contour lines ending on the  $\langle ab \rangle$ -boundary. If we cut the graph along these contours, it would decompose into  $m_a$  pieces of boundary height  $a$  and  $m_b$  pieces of boundary height  $b$ , where  $m_a + m_b = m + 1$  and  $m_a > 0$ . This means that the graphs have  $m + 1$  outermost domains of heights  $a$  or  $b$ .

We now take the sum of such graphs over different height assignments in the interior but for a fixed contour line configuration, to obtain a graph of the  $O(n)$  matrix model. Each contour line in the interior is assigned a factor  $n$  in the same way as before. Collecting the factors associated to the outermost domains we find,

$$y^{-m-1} S_a^{m_a} S_b^{m_b} = (S_a/y)^{m+1} \times (S_b/S_a)^{m_b}. \quad (4.7)$$



**Figure 3:** The graphs contributing to  $D_{a,(ab)}$  have open contour lines separating the domains of height  $a$  and  $b$ . By shrinking the  $b$  part of the  $\langle ab \rangle$ -boundary, those contour lines turn to form loops touching the boundary.

We then deform the contour line configuration to a loop configuration by shrinking the  $b$ -part of the  $\langle ab \rangle$ -boundary as shown in Figure 3. The  $m$  open contour lines then turn into  $m_b$  closed loops touching the boundary  $m$  times in total. The expression for the weight (4.7) then implies that the  $\langle ab \rangle$ -boundary of the RSOS matrix model is mapped to the  $k$ -th JS boundary of the  $O(n)$  model, with boundary cosmological constant  $y/S_a$  and

$$k(a) = \frac{S_{a+1}}{S_a} = \frac{\sin \pi(a+1)/h}{\sin \pi a/h}. \quad (4.8)$$

Thus we have shown (4.6). It also implies  $a = r$  in agreement with (4.3).

#### 4.1.3 Disc correlators $D_1^\parallel$ and $D_{b,(ba)}$

Using the same argument, let us next show the equation

$$D_{b,(ba)}(x, y) = \frac{S_b}{y} \left( W(x) + \frac{1}{k} D_1^\parallel(x, y/S_a) \right). \quad (4.9)$$

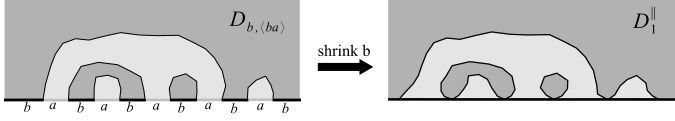
We again focus on the graphs contributing to the LHS with power  $1/y^{m+1}$ , which have  $m$  open contour lines ending on the  $\langle ba \rangle$ -boundary. Such graphs have  $m_a$  outermost domains of height  $a$  and  $m_b$  outermost domains of height  $b$ , with the condition

$$m_a + m_b = m + 1, \quad m_b > 0. \quad (4.10)$$

We perform the sum over the height assignments in the interior and map the graphs to those of the  $O(n)$  matrix model.

By shrinking the  $b$ -part of the  $\langle ba \rangle$ -boundary, we get the graph in the  $O(n)$  matrix model which generically has one open line connecting the two boundary changing operators in addition to  $m_b - 1$  loops. They altogether touch the JS boundary  $m - 1$  times in total. It is important to notice that the open line can end on the JS boundary. We should therefore identify the boundary operators as the one-leg blobbed operators  $\mathbb{Y}_1^\parallel$ . The situation is illustrated in Figure 4. The graph of the  $O(n)$  model we thus obtained has the following weight from the outermost domains,

$$y^{-m-1} S_a^{m_a} S_b^{m_b} = (S_b/y) \times (S_a/y)^m \times (S_b/S_a)^{m_b-1}. \quad (4.11)$$



**Figure 4:** The graphs contributing to  $D_{b,(ba)}$  have open contour lines separating the domains of height  $a$  and  $b$ . By shrinking the  $b$  part of the  $\langle ba \rangle$ -boundary, those contour lines turn into some loops touching the boundary and a line connecting the two boundary-changing operators.

The same graph and weight can be obtained from the Feynman graph expansion of the second term in the RHS of (4.9). Note that the additional factor  $1/k$  is inserted because the line connecting the two  $\mathbb{Y}_1^\parallel$  can be made from propagators of  $Y_1, \dots$  or  $Y_k$ , leading to a factor  $k$ . The first term of the RHS, on the other hand, is the sum over the exceptional graphs of the RSOS model corresponding to  $m = 0$ , namely, those graphs which have the  $\langle ba \rangle$  boundary of length zero. The sum over such graphs is simply the leading term in the  $1/y$ -expansion of the LHS and therefore given by  $W_b(x)/y$ . This finishes the diagrammatic proof of (4.9).

The relations (4.6) and (4.9) can be used to show that the loop equations of the  $O(n)$  matrix model (2.33) and the RSOS model (3.25) are mapped to each other. These relations also explain that the operators  ${}^a B^{(a+1)}$  and  ${}^{a+1} B^{(a+1)}$  have the same conformal weight as that of  $\mathbb{S}_0^\parallel$  and  $\mathbb{S}_1^\parallel$  between the Neumann and the  $k(a)$ -th JS boundaries.

#### 4.1.4 Disc correlators of $L$ -leg operators

It is obvious how to extend the correspondence to the disc correlators of  $L$ -leg operators using the argument of summing over height configurations and shrinking the  $b$ -part of the  $\langle ab \rangle$  boundary. We skip the details and present the final results.

$$\begin{aligned} D_{a-L,(a+1)}(x,y) &= S_{a-1} \cdots S_{a-L} \frac{(n-k-L)!}{(n-k)!} D_L^\perp(x,y/S_a), \\ D_{a+L,(a+1)}(x,y) &= \frac{S_{a+1} \cdots S_{a+L}}{y} \left( W_L(x) + \frac{(k-L)!}{k!} D_L^\parallel(x,y/S_a) \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

where  $W_L(x)$  is determined by the recursion relation

$$\text{Disc} W_{L+1}(x) = W_L(-x) \text{Disc} W(x), \quad W_1(x) = W(x). \quad (4.13)$$

These include the results of the previous subsection as special cases. It is also easy to show that they relate the recursion relation of the  $O(n)$  model (2.36) to that of the RSOS model (3.20). They also explain that the operator  ${}^{a-L} B^{(a+1)}$  has the same conformal weight as  $\mathbb{S}_L^\perp$  between the Neumann and the  $k(a)$ -th JS boundaries, and similarly for  ${}^{a+L} B^{(a+1)}$  and  $\mathbb{S}_L^\parallel$ .

The first term in the second line of (4.12) is equal to the leading term in the  $1/y$ -expansion of the LHS, and the corresponding graphs have  $\langle a+1 \rangle$  boundary of zero

length. Therefore,  $W_L(x)$  is a disc one-point function of a boundary operator with  $L$  nested loops attached, corresponding to the fusion product of two  $L$ -leg operators. Such an operator should be described in terms of *star operators* [11]; the star operator  $S_L$  is a source of  $L$  open lines and is allowed to exist between two Neumann boundaries. In [11] its gravitational dimension was found to be  $\Delta_{1,L+1}$ , and the disc two-point functions were computed in the continuum limit. Our  $W_L$  can be calculated in the same way. Using the standard parameterization  $\xi = M \cosh \tau$  in the continuum limit we find,

$$W_L(\tau) = \prod_{k=1}^L \frac{\sin \pi g}{\sin \pi g(k+1)} \prod_{k=0}^L W(\tau + i\pi(L-2k)). \quad (4.14)$$

## 5. Concluding remarks

In this paper we studied the new boundary condition of the  $O(n)$  model proposed by Jacobsen and Saleur. By using the matrix model formulation, we were able to relate them to the boundary conditions of RSOS model with alternating heights. The loop equations turned out to be a very efficient tool in calculating the spectrum and the conformal weights of boundary changing operators.

Our techniques based on matrix model and loop equations are applicable to the analysis of more involved situations, such as discs with several JS boundaries labelled by different  $k$ . An interesting problem is to study the spectrum of boundary operators between two JS boundaries. (On a regular lattice this has been done in the recent work [25].)

Another natural and interesting question will be to ask how our results can be extended to the dilute phase. Since the lattice will no longer be packed densely by the loops, one would expect a conformal boundary condition for which some sites on the boundary have no open line attached. We will therefore need to generalize the JS boundary so that it can have vacancies. It will be an interesting problem to study the renormalization group flow for the fugacity associated to the vacancy. We hope to address this issue in the future.

## Acknowledgments

We would like to thank I. Kostov for helpful discussions and a careful reading of the manuscript. One of the author (J.E.B.) would like to thank J. Dubail for useful discussions.

## A. Gravitational dressing, Liouville theory and KPZ

Here we summarize some basic facts on conformal field theories coupled to gravity and boundary Liouville field theory. More details can be found in [11, 12] and the original paper [19, 26, 27].

Let us consider the ‘matter CFT’ of the central charge

$$c = 1 - \frac{6\theta^2}{1-\theta} < 1. \quad (\text{A.1})$$

When  $\theta = 1/h$  for a positive integer  $h \geq 3$ , the theory is rational and corresponds to the minimal model of the unitary series  $(h-1, h)$ . Turning on the gravity corresponds to summing over different metrics and topology of the two-dimensional space. After gauge fixing it amounts to coupling the CFT to the Liouville field  $\phi$  and  $bc$  ghost system.

Let us take the matter CFT to be the Coulomb gas model [14, 15] described by a scalar  $\chi$ . The vanishing of the total central charge puts a certain condition on the matter and the Liouville background charges  $e_0$  and  $Q$ . We can parameterize them as

$$Q = \frac{1}{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}, \quad e_0 = \frac{1}{\mathfrak{b}} - \mathfrak{b}. \quad (\text{A.2})$$

Here  $\mathfrak{b} = \sqrt{1-\theta}$  is the Liouville coupling constant.

In this model we consider the matter field  $e^{ie_{r,s}\chi}$  of conformal weight  $\delta_{r,s}$ . With a suitable gravitational dressing it becomes an operator of conformal weight one,

$$B_{r,s} = \frac{\Gamma(2\mathfrak{b}P_{r,s})}{\pi} \exp(i e_{r,s}\chi + \beta_{r,s}\phi). \quad (\text{A.3})$$

Here various parameters are related as follows,

$$e_{r,s} = \frac{e_0}{2} - P_{r,s}, \quad \beta_{r,s} = \frac{Q}{2} - |P_{r,s}|, \quad P_{r,s} = \frac{r}{2\mathfrak{b}} - \frac{s\mathfrak{b}}{2}, \quad (\text{A.4})$$

and  $(r, s)$  is a pair of positive integers labelling degenerate representations of the matter CFT. The matter conformal weight  $\delta_{r,s}$  is given by

$$\delta_{r,s} = \frac{(r/\mathfrak{b} - s\mathfrak{b})^2 - (1/\mathfrak{b} - \mathfrak{b})^2}{4}. \quad (\text{A.5})$$

Introducing *gravitational dimension*  $\Delta \equiv (2P - e_0)/2\mathfrak{b}$  and *string susceptibility*  $\gamma_{\text{str}} \equiv -\theta/(1-\theta)$ , one can write the KPZ scaling formula [28–30],

$$\delta = \frac{\Delta(\Delta - \gamma_{\text{str}})}{1 - \gamma_{\text{str}}}. \quad (\text{A.6})$$

Note that there is another way of gravitational dressing,  $\tilde{\delta} = Q/2 + |P|$ , as was considered in [9]. As an example, the boundary identity operator can be dressed by  $e^{\phi/\mathfrak{b}}$  instead of

$e^{\mathfrak{b}\phi}$ . This suggests that there are two boundary cosmological couplings, and one has a fractional dimension with respect to the other.

After turning on the gravity, correlators no longer depend on the positions of the operators inserted because one has to integrate over the positions of those operators. The dimensions of the operators therefore cannot be read from the position-dependence of their correlators. Instead, they should be read off from the dependence of correlators on the cosmological constant  $\mu$ . If we restrict to discs, then the amplitudes with  $n$  boundary operators  $B_{P_i}$  and  $m$  bulk operators  $V_{K_j}$  scale with  $\mu^\gamma$  as

$$\langle \xi^1 B_{P_1}^{\xi_2} \dots \xi_n B_{P_n}^{\xi_1} V_{K_1} \dots V_{K_m} \rangle \propto \mu^\gamma, \quad (\text{A.7})$$

with

$$\gamma = (1 - m - \frac{n}{2})(1 - \frac{\gamma_{\text{str}}}{2}) + \frac{1}{2\mathfrak{b}} \left( \sum_{i=1}^n |P_i| + \sum_{j=1}^m |K_j| \right). \quad (\text{A.8})$$

Of course, the gravitational dimensions of the operators can be read more explicitly from the more detailed form of the amplitudes.

As an example, let us consider a disc with two boundary segments, labelled by boundary cosmological constants  $\zeta_1$  and  $\zeta_2$  and connected by the operators  ${}^{\zeta_1}B^{\zeta_2}$ . In boundary Liouville theory, boundary cosmological constant  $\zeta$  is the coefficient of the boundary interaction  $e^{\mathfrak{b}\phi}$ . Following [19] we use a parametrization of  $\zeta$  similar to (2.48),

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\sin \pi \mathfrak{b}^2}} \cosh \mathfrak{b}^2 \tau. \quad (\text{A.9})$$

The computation of the disc amplitude involves the disc two-point functions of the Liouville and matter CFTs. The Liouville and matter part of the correlator factorize, and the matter part gives only a  $\zeta$ -independent factor. The Liouville part is given by [19]

$$\langle {}^{\zeta_1}B_P^{\zeta_2}(x) {}^{\zeta_2}B_P^{\zeta_1}(0) \rangle_{\text{Liouville}} = A(P) d(|P|, \tau_1, \tau_2) |x|^{-2\beta(Q-\beta)}, \quad (\text{A.10})$$

with

$$\ln d(P, \tau_1, \tau_2) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \left( \frac{\cos \omega \tau_1 \cos \omega \tau_2 \sinh 2\pi P \omega / \mathfrak{b}}{\sinh \pi \omega \sinh \pi \omega / \mathfrak{b}^2} - \frac{2P\mathfrak{b}}{\pi \omega} \right). \quad (\text{A.11})$$

Here  $A(P)$  is a known function of  $P$  and is related to the ‘‘leg factor’’ arising from different normalization of the wave functions. It is independent of  $\tau$ ’s and therefore unimportant. On the other hand, the  $\tau$ -dependent part (A.11) is expressed in terms of the double-sine function of pseudo-periods  $\mathfrak{b}$  and  $1/\mathfrak{b}$  [31]. It satisfies an important shift relation involving both  $P$  and  $\tau_i$ ,

$$d(P, \tau_1 + i\pi, \tau_2) - d(P, \tau_1 - i\pi, \tau_2) \propto \sinh \mathfrak{b}^2 \tau_1 d(P - \mathfrak{b}/2, \tau_1, \tau_2), \quad (\text{A.12})$$

up to a  $\tau$ -independent factor. Shifting  $P$  by  $-\mathfrak{b}/2$  corresponds to changing the label of the operator from  $(r, s)$  to  $(r, s+1)$ .

## B. Solving the loop equation

Here we solve the loop equation (2.49)

$$d_1\left(\tau \mp \frac{i\pi}{2}, \sigma\right) d_0\left(\tau \pm \frac{i\pi}{2}, \sigma\right) = CM^g \cosh \frac{g(\tau + \sigma) \pm \alpha}{2} \cosh \frac{g(\tau - \sigma) \pm \alpha}{2}.$$

We define the function  $u_a(\tau, \sigma)$  by

$$d_a(\tau, \sigma) = \frac{\sqrt{C}}{2} M^{\alpha_a} \exp u_a(\tau, \sigma) \quad (\text{B.1})$$

with  $\alpha_a + \alpha_b = g$ , and denote by  $\hat{u}_a(\omega, \sigma)$  their Fourier transform with respect to  $\tau$ .

Let us take the log and the Fourier transform of the loop equation. Using

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \log \left( 2 \cosh \frac{g\tau + \alpha}{2} \right) = -\frac{\pi e^{-i\alpha\omega/g}}{\omega \sinh(\pi\omega/g)}, \quad (\text{B.2})$$

the loop equation for  $\hat{u}_a(\omega, \sigma)$  becomes algebraic,

$$e^{\pm \frac{\pi\omega}{2}} \hat{u}_1(\omega, \sigma) + e^{\mp \frac{\pi\omega}{2}} \hat{u}_0(\omega, \sigma) = -\frac{2\pi}{\omega} \frac{\cos \omega \sigma}{\sinh(\pi\omega/g)} e^{\pm i\omega\alpha/g}. \quad (\text{B.3})$$

Solving this in favor of  $\hat{u}_a$  and Fourier transforming back, we find

$$u_a(\tau, \sigma) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\cos \sigma \omega \cos \tau \omega}{\sinh \pi \omega \sinh \pi \omega / g} \sinh \left( \frac{\pi \omega}{2} \pm \frac{i\alpha \omega}{g} \right), \quad (\text{B.4})$$

where plus sign is for  $u_1$  and minus sign for  $u_0$ . One recognizes the same functional form as the Liouville boundary two-point function (A.11).

By comparing (B.4) with (A.11) one finds the value of  $P$  for the boundary-changing operators. Then by using the scaling law (A.8) one can determine the exponents  $\alpha_0$  and  $\alpha_1$

$$2bP_0 = \alpha_0 = r\theta, \quad 2bP_1 = \alpha_1 = 1 - \theta - r\theta. \quad (\text{B.5})$$

Another way to find  $\alpha_a$  is to analyze the two-point function at  $\zeta = \mu = 0$ ,

$$d(\xi, \zeta = 0, \mu = 0) \sim \xi^{\alpha_a} \sim e^{\alpha_a |\tau|}. \quad (\text{B.6})$$

Setting  $\sigma = i\pi/2g$  and  $\tau \rightarrow \infty$  in (B.4), the dominant contribution to the integral is from the vicinity of the second order pole at  $\omega = 0$ . Using

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega e^{i\omega\tau}}{\omega^2} = -\pi |\tau|, \quad (\text{B.7})$$

one finds  $u_a \simeq 2bP|\tau|$  and recovers (B.5) again.

## References

- [1] I. K. Kostov, “*Strings with discrete target space*,” Nucl. Phys. B **376**, 539 (1992) [[hep-th/9112059](#)].
- [2] V. A. Kazakov, “*Exact solution of the Ising model on a random two-dimensional lattice*,” JETP Lett. **44**, 133 (1986) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **44**, 105 (1986)].
- [3] D. V. Boulatov and V. A. Kazakov, “*The Ising model on random planar lattice: the structure of phase transition and the exact critical exponents*,” Phys. Lett. **186B**, 379 (1987).
- [4] B. Duplantier and I. Kostov, “*Conformal spectra of polymers on a random surface*,” Phys. Rev. Lett. **61**, 1433 (1988); “*Geometrical critical phenomena on a random surface of arbitrary genus*,” Nucl. Phys. B **340**, 491 (1990).
- [5] V. K. Kazakov, “*Percolation on a fractal with the statistics of planar Feynman graphs: exact solution*,” Mod. Phys. Lett. A **4**, 1691 (1989).
- [6] I. K. Kostov, “*O(n) vector model on a planar random lattice: spectrum of anomalous dimensions*,” Mod. Phys. Lett. A **4**, 217 (1989).
- [7] I. K. Kostov, “*The ADE face models on a fluctuating planar lattice*,” Nucl. Phys. B **326**, 583 (1989).
- [8] J. L. Jacobsen and H. Saleur, “*Conformal boundary loop models*,” Nucl. Phys. B **788**, 137 (2008) [[math-ph/0611078](#)].
- [9] I. Kostov, “*Boundary loop models and 2D quantum gravity*,” J. Stat. Mech. **0708**, P08023 (2007) [[hep-th/0703221](#)].
- [10] V. A. Kazakov and I. K. Kostov, “*Loop gas model for open strings*,” Nucl. Phys. B **386**, 520 (1992) [[hep-th/9205059](#)].
- [11] I. K. Kostov, B. Ponsot and D. Serban, “*Boundary Liouville theory and 2D quantum gravity*,” Nucl. Phys. B **683**, 309 (2004) [[hep-th/0307189](#)].
- [12] I. K. Kostov, “*Boundary correlators in 2D quantum gravity: Liouville versus discrete approach*,” Nucl. Phys. B **658**, 397 (2003) [[hep-th/0212194](#)].
- [13] H. Saleur and M. Bauer, “*On some relations between local height probabilities and conformal invariance*,” Nucl. Phys. B **320**, 591 (1989).
- [14] B. Nienhuis, “*Exact critical point and critical exponents of O(n) models in two-dimensions*,” Phys. Rev. Lett. **49**, 1062 (1982).
- [15] B. Nienhuis, “*Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas*,” J. Statist. Phys. **34**, 731 (1984) and in C. Domb and J. L. Lebowitz, “*Phase transitions and critical phenomena. vol. 11*,” London, UK: Academic (1987) 210p.



- [16] A. Nichols, V. Rittenberg and J. de Gier, “*One-boundary Temperley-Lieb algebras in the XXZ and loop models*,” J. Stat. Mech. **0503**, P003 (2005) [[cond-mat/0411512](#)]; A. Nichols, “*The Temperley-Lieb algebra and its generalizations in the Potts and XXZ models*,” J. Stat. Mech. **0601**, P003 (2006) [[hep-th/0509069](#)]; A. Nichols, “*Structure of the two-boundary XXZ model with non-diagonal boundary terms*,” J. Stat. Mech. **0602**, L004 (2006) [[hep-th/0512273](#)].
- [17] P. A. Pearce, J. Rasmussen and J. B. Zuber, “*Logarithmic minimal models*,” J. Stat. Mech. **0611**, P017 (2006) [[hep-th/0607232](#)].
- [18] I. K. Kostov, “*Thermal flow in the gravitational  $O(n)$  model*,” [hep-th/0602075](#).
- [19] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “*Boundary Liouville field theory. I: Boundary state and boundary two-point function*,” [hep-th/0001012](#).
- [20] H. Saleur and B. Duplantier, “*Exact determination of the percolation hull exponent in two dimensions*,” Phys. Rev. Lett. **58**, 2325 (1987).
- [21] G. E. Andrews, R. J. Baxter and P. J. Forrester, “*Eight vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan type identities*,” J. Statist. Phys. **35**, 193 (1984).
- [22] V. Pasquier, “*Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams*,” Nucl. Phys. B **285**, 162 (1987).
- [23] I. K. Kostov, “*Solvable statistical models on a random lattice*,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45A**, 13 (1996) [[hep-th/9509124](#)].
- [24] I. K. Kostov, “*Gauge invariant matrix model for the A-D-E closed strings*,” Phys. Lett. B **297**, 74 (1992) [[hep-th/9208053](#)].
- [25] J. Dubail, J. L. Jacobsen and H. Saleur, “*Conformal two-boundary loop model on the annulus*,” [arXiv:0812.2746](#).
- [26] B. Ponsot and J. Teschner, “*Boundary Liouville field theory: Boundary three point function*,” Nucl. Phys. B **622**, 309 (2002) [[hep-th/0110244](#)].
- [27] K. Hosomichi, “*Bulk-boundary propagator in Liouville theory on a disc*,” JHEP **0111**, 044 (2001) [[hep-th/0108093](#)].
- [28] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, “*Fractal structure of 2d-quantum gravity*,” Mod. Phys. Lett. A **3**, 819 (1988).
- [29] F. David, “*Conformal field theories coupled to 2D gravity in the conformal gauge*,” Mod. Phys. Lett. A **3**, 1651 (1988).
- [30] J. Distler and H. Kawai, “*Conformal field theory and 2d quantum gravity or who’s afraid of Joseph Liouville?*” Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).
- [31] S. Kharchev, D. Lebedev and M. Semenov-Tian-Shansky, “*Unitary representations of  $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ , the modular double, and the multiparticle  $q$ -deformed Toda chains*,” Commun. Math. Phys. **225**, 573 (2002) [[hep-th/0102180](#)].

# Article III

Boundary changing operators in the  
 $O(n)$  matrix model

[ARXIV:0904.2297]

# Boundary changing operators in the $O(n)$ matrix model

Jean-Emile Bourgine<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut de Physique Théorique, CNRS-URA 2306  
C.E.A.-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France  
jean-emile.bourgine@cea.fr*

**ABSTRACT:** We continue the study of boundary operators in the dense  $O(n)$  model on the random lattice. The conformal dimension of boundary operators inserted between two JS boundaries of different weight is derived from the matrix model description. Our results are in agreement with the regular lattice findings. A connection is made between the loop equations in the continuum limit and the shift relations of boundary Liouville 3-points functions obtained from Boundary Ground Ring approach.

**KEYWORDS:** Matrix theory, Noncritical string theory.

---

## Contents

<b>1. Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminaries</b>	<b>4</b>
2.1 The $O(n)$ matrix model with boundaries	4
2.2 Continuum limit and boundary Liouville correlators	7
2.3 Derivation of the loop equations	10
<b>3. Closed loops sector</b>	<b>11</b>
3.1 Coupled loop equations for $D_{J,J}^{(0,1)}$	11
3.2 Obtaining the gravitational dimension in the continuum limit	13
3.3 Loop equations and Liouville theory	14
3.4 A few remarks	15
<b>4. Open lines sector</b>	<b>17</b>
4.1 ( $L > 0, 1$ ) open lines sector	17
4.1.1 Unblobbed sector with respect to $JS_J$ boundary	18
4.1.2 Blobbed sector with respect to $JS_J$ boundary	18
4.2 ( $0, L > 1$ ) open lines sector	19
4.3 ( $0, 1$ ) open line sector	19
4.3.1 Unblobbed open line with respect to both boundaries ( $E \cap I = \emptyset = E \cap J$ )	20
4.3.2 Blobbed open line on $JS_J$ , unblobbed on $JS_I$ ( $E \subset J, E \cap I = \emptyset$ )	21
4.3.3 Blobbed open line on both JS boundaries ( $E \subset I \cap J$ )	21
4.4 ( $L_1 > 1, L_2 > 1$ ) open lines sector	22
<b>5. Concluding remarks</b>	<b>23</b>
<b>A. Appendix</b>	<b>24</b>
A.1 Simplification of the shift relations for the boundary Liouville 3-points function	24
A.2 Properties of the star product	25
A.2.1 Main properties	25
A.2.2 The star product in the critical limit	26
A.3 Special cases	27
A.3.1 $I \cap J = \emptyset, k_{IJ} = 0$	27
A.3.2 $I = J, k_I = k_J = k_{IJ}$	28
A.3.3 $J \subset I, k_{IJ} = k_J$	28

---

## 1. Introduction

Boundary conformal field theories have led to a wide range of applications in theoretical physics. From the study of fixed point in quantum impurity problems to the description of branes in open string theory, conformally invariant boundary conditions are the key point of many fascinating problems. Unfortunately several aspects still need a better comprehension, such as the classification of boundary conditions or the fusion of boundary operators in non-rational conformal field theories (CFT).

In this article we concentrate on the  $O(n)$  model which provides a microscopic description of (non-rational) conformal field theories with central charge  $c < 1$ . The  $O(n)$  model can also be investigated on a fluctuating lattice and the introduction of the matrix model proved to be a powerful tool for the analysis of both bulk [1–6] and boundary [7–9] behavior. In the continuum limit, the CFT is coupled to Liouville gravity and can be interpreted as a string theory with target space dimension smaller than two [1].

The  $O(n)$  model is considered on a triangular lattice  $\Gamma$ , to each face is associated a classical  $O(n)$  spin  $S_a(r)$ ,  $a = 1 \cdots n$ . The partition function describes nearest neighbor interactions, the coupling constant being given by the inverse temperature  $T^{-1}$  [10], [11],

$$Z_\Gamma(T) = \text{tr} \prod_{\langle r,r' \rangle} \left( 1 - \frac{1}{T} \sum_a S_a(r) S_a(r') \right). \quad (1.1)$$

Paths of identical spins draw self and mutually avoiding loops of weight  $n$  on the lattice. The partition function can be re-expressed as a sum over loop patterns [1],

$$Z_\Gamma(T) = \sum_{\text{loops}} T^{-(\text{length})} n^{\#(\text{loops})}, \quad (1.2)$$

where the temperature is coupled to the total length of the loops. This formulation allows analytic continuation of the parameter  $n$  to arbitrary real value. For fixed values of  $-2 \leq n \leq 2$  the model develops two phase transitions with respect to the temperature [1, 12]. We will only be interested in the dense phase, and consider the model at zero temperature where loops are fully packed. When put on a dynamical lattice, this point renormalizes to a CFT [13] with central charge

$$c_{\text{dense}} = 1 - \frac{6\theta^2}{1-\theta}, \quad n = 2 \cos \pi\theta, \quad \theta \in [0, 1] \quad (1.3)$$

For the critical values  $n = 2 \cos \frac{\pi}{h}$ ,  $h \in \mathbb{Z}$  this CFT is essentially the rational  $(h, h-1)$  minimal model.

Following the work of [15, 16], a continuous set of boundary conditions was discovered by Jacobsen and Saleur [14, 17]. Such boundary conditions, referred as JS boundary conditions, are introduced as follows. On the boundary a certain subset of the spin components is allowed to fluctuate. Fixing  $n-k$  components, the  $O(n)$  symmetry is broken

into  $O(k) \times O(n-k)$  but the conformal invariance is still present at the critical point. When reformulated in the loop gas language, this boundary condition gives a weight  $k$  to loops that touch the boundary. The parameter  $k$  can be analytically continued to arbitrary real values and interpolates between Dirichlet ( $k=1$ ) and Neumann ( $k=n$ ) boundary conditions. This continuous set of boundary conditions is conveniently parameterized by

$$k(r) = \frac{\sin \pi(r+1)\theta}{\sin \pi r\theta}, \quad r \in \left[0, \frac{1}{\theta}\right]. \quad (1.4)$$

Additionally  $L$  open lines starting or ending between two boundaries are introduced. These “ $L$ -leg” boundary operators can be seen as the fusion of the boundary changing operator with the star operator of [8]. Two different sectors must be discussed, named blobbed and unblobbed, this term referring to the underlying Temperley-Lieb algebra. In the blobbed sector, the open line next to the JS boundary is allowed to touch it, whereas this is forbidden in the unblobbed sector. Reformulated in the spin language, the spin path described by a blobbed (resp. unblobbed) open line has components corresponding to the fluctuating (resp. fixed) boundary spin.

In [14], the  $O(n)$  model was considered on an annulus with Neumann and JS boundary conditions on respectively the inner and outer rims. Furthermore,  $L$  non-contractible blobbed/unblobbed loops surrounding the inner rim were also introduced. The partition function was computed, leading to a conjecture for the scaling dimension of boundary changing operators. This conjecture was further checked on the random lattice in [18] where a disc with Neumann and JS boundaries was studied. This disc partition function can be generated as a matrix model correlator and the previous results were re-derived in this context in [19].

Boundary changing operators between two JS boundaries with different parameter  $k$  were discussed in [20] and the corresponding annulus partition function computed. The purpose of the present article is to carry out a similar investigation on the fluctuating lattice in order to compare the spectrum of JS-JS boundary operators with the results derived on the flat lattice. In a first section we will recall the boundary  $O(n)$  matrix model and some useful results from Liouville theory. Then, both sectors with and without open lines will be considered in respectively section 2 and 3. Scaling exponents will be recovered in the continuum limit and contact with the boundary Liouville 3-points function will be made. Technical points that can be omitted at the first reading are gathered in the Appendix.

**Summary of the results:** We consider the  $O(n)$  model on a random lattice with the disc topology, and impose to the boundary spins one Neumann and two JS boundary conditions of parameter  $k_I$  and  $k_J$ . The insertion of open lines between the boundaries modify the spectrum of the JS-JS boundary operator, and we need to differentiate two sectors. In both sectors disc partition functions can be obtained as matrix model correlators. Using the standard matrix model technique, we derived a set of loop equations and analyzed their

continuum limit. In this way, we found the gravitational scaling of the correlators and, via the KPZ relation, recovered the critical dimension of the JS-JS boundary operators. As a consistency check the critical loop equations were mapped on boundary ground ring relations obeyed by Liouville correlators.

In the closed loop sector, no open lines are introduced between the two JS boundaries and loops touching both boundaries can form. Thus, the scaling dimension of the JS-JS boundary operators also depends on the weight  $k_{IJ}$  assigned to those loops. Parameterizing the weight of the loops as 1.4 and [20]

$$k_{IJ}(r_{IJ}) = \frac{\sin(r_I + r_J + 1 - r_{IJ})\pi\theta/2 \sin(r_I + r_J + 1 + r_{IJ})\pi\theta/2}{\sin r_I\pi\theta \sin r_J\pi\theta}, \quad (1.5)$$

with  $r_{IJ} \in [1, 1 + 2/\theta]$ , the scaling dimension of the JS-JS boundary operators belongs to

$$\delta_{r_{IJ}+2j, r_{IJ}}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1.6)$$

where we used the Kac notation 2.18.

When  $L$  open lines are inserted, loops touching both boundaries are forbidden and the scaling dimension of the JS-JS boundary operators depends only on  $k_I, k_J$  and  $L$ ,

$$\delta_{\epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J + 1 + 2j, \epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J + 1 - L}, \quad j \in \mathbb{Z}^+, \quad (1.7)$$

where the sign  $\epsilon_I = \pm$  (resp.  $\epsilon_J$ ) is plus when the open lines are blobbed with respect to the JS boundary of parameter  $k_I$  (resp.  $k_J$ ).

## 2. Preliminaries

### 2.1 The $O(n)$ matrix model with boundaries

The  $O(n)$  partition function on a fluctuating lattice is obtained by summing the regular lattice partition functions over realizations of a random lattice. In the case of the disc topology it writes,

$$Z_{\text{dyn}}(\kappa, x, T) = \sum_{\Gamma: \text{disc}} \frac{1}{L(\Gamma)} \kappa^{-A(\Gamma)} x^{-L(\Gamma)} Z_{\Gamma}(T), \quad (2.1)$$

where two cosmological constants were introduced. The bulk cosmological constant  $\kappa$  controls the area  $A(\Gamma)$  of lattices and the boundary cosmological constant  $x$  the length  $L(\Gamma)$  of the boundary. Such a boundary cosmological constant must be introduced for each different boundary. In the following, we will use the convention to denote respectively by  $x$  and  $y$  the boundary cosmological constants of Neumann and JS boundaries type.

Disc partition functions on a random lattice are obtained as the planar limit of the  $O(n)$  matrix model simple trace correlators [19]. At the zero temperature point, the partition function of the  $O(n)$  matrix model [6] reduces to

$$Z = \int dX \prod_{a=1}^n dY_a \exp \left[ -\beta \text{tr} \left( \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n Y_a^2 - \sum_{a=1}^n X Y_a^2 \right) \right], \quad (2.2)$$

$X$  and  $Y_a$  being  $N \times N$  hermitian matrices. The planar limit is achieved by sending the size of the matrices  $N$  and the parameter  $\beta$  to infinity, keeping the cosmological constant  $\kappa$  finite,

$$\beta = N\kappa^2. \quad (2.3)$$

The disc partition function with Neumann boundary condition is given by the first order in the large  $N$  limit of the correlator<sup>1</sup>

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \log(x - X) \rangle. \quad (2.4)$$

Here the quantity of importance is actually its derivative, the resolvent

$$W(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} \right\rangle \quad (2.5)$$

where one point on the boundary has been marked. This quantity plays a special role in the study of matrix models. In the planar limit, it is known to have a branch cut on the support of the eigenvalue density  $[a, b] \subset \mathbb{R}^-$ . This branch cut is a common property of correlators involving Neumann boundaries.

To study the disc partition function with two JS boundaries, we need to introduce a third boundary of Neumann kind because loop equations couple both JS and Neumann boundaries. To each JS boundary we associate an integer subset  $I \subset [1, n]$  with  $k_I$  elements corresponding to the spin components allowed to fluctuate. The matrix operator that creates the  $JS_I$  boundary with cosmological constant  $y_I$  will be denoted

$$H_I = \frac{1}{y_I - \sum_{a \in I} Y_a^2}. \quad (2.6)$$

The matrix operators that introduce the open lines were defined in [19]. Here we need to slightly generalize their definition because open lines introduced between JS boundaries can be blobbed with respect to zero, one or both boundaries. Let  $E$  be an integer subset of  $[1, n]$ , we define the  $L$ -legs matrix operators as

$$Y_L^{(E)} = \sum_{\{a_1, \dots, a_L\} \subset E} Y_{a_1} \cdots Y_{a_L}, \quad (2.7)$$

where the sum is taken over all sets of unequal indices  $a_i \neq a_j$ . If  $E \subset I$  then the operator is said to be blobbed with respect to the  $JS_I$  boundary. On the contrary, when  $E \cap I = \emptyset$ , the operator is unblobbed with respect to this boundary. These open lines must be counted with a weight  $k_E = \text{Card } E$ .

<sup>1</sup>It is also possible to obtain Neumann boundary conditions as JS boundary conditions with  $k = n$ . On the random lattice these two Neumann partition functions are inverse of each other because the two boundaries have different dimension.

In [19] were introduced matrix correlators corresponding to disc with mixed Neumann-JS boundaries and  $L$  open lines between them,

$$D_I^{(L,E)}(x, y_I) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} Y_L^{(E)} H_I Y_L^{(E)\dagger} \right\rangle. \quad (2.8)$$

They were denoted  $D_I^{(L, \parallel)}$  when  $E = I$ , i.e. blobbed open lines with weight  $k_I$ , and  $D_I^{(L, \perp)}$  when  $E = [1, n] \setminus I$  corresponding to unblobbed open lines with weight  $n - k_I$ .

We now extend the previous definitions to the three boundaries Neumann-JS $_I$ -JS $_J$  case, where  $I$  and  $J$  are two integer subset of  $[1, n]$  of cardinal respectively  $k_I$  and  $k_J$ . Their intersection describes loops touching both boundaries, such loops having a weight  $k_{I,J} = \text{Card } I \cap J$ . The disc correlator without open lines is given by

$$D_{IJ}^{(0,\perp)}(x, y_I, y_J) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} H_I H_J \right\rangle. \quad (2.9)$$

Considering two integer subsets  $E_1$  and  $E_2$  of  $[1, n]$  let us introduce the disc correlator with an insertion of  $L_1$  open lines between the boundaries Neumann-JS $_I$  and JS $_I$ -JS $_J$ , and  $L_2$  open lines between the boundaries Neumann-JS $_J$  and JS $_I$ -JS $_J$ ,

$$D_{IJ}^{(L_1, L_2 | E_1, E_2)}(x, y_I, y_J) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} Y_{L_1}^{(E_1)} H_I Y_{L_1}^{(E_1)\dagger} Y_{L_2}^{(E_2)} H_J Y_{L_2}^{(E_2)\dagger} \right\rangle. \quad (2.10)$$

If we consider any  $E_1$  and  $E_2$ , there is a redundancy coming from open lines starting between Neumann-JS $_I$  boundaries, bouncing at the frontier JS $_I$ -JS $_J$  and ending between Neumann and JS $_J$  boundaries. To forbid such an open line bouncing at some point, we need to impose  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . All these quantities satisfy the reflection property

$$D_{IJ}(x, y_I, y_J) = D_{JI}(x, y_J, y_I). \quad (2.11)$$

It will be more convenient to use a shortcut notation when only one set of open lines is involved,

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(L,E)}(x, y_I, y_J) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} Y_L^{(E)} H_I Y_L^{(E)\dagger} H_J \right\rangle, \\ D_{IJ}^{(L,E)}(x, y_I, y_J) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} H_I Y_L^{(E)} H_J Y_L^{(E)\dagger} \right\rangle, \\ D_{IJ}^{(E)}(x, y_I, y_J) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} Y_1^{(E)} H_I Y_1^{(E)\dagger} H_J \right\rangle, \\ D_{IJ}^{(E)}(x, y_I, y_J) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} H_I Y_1^{(E)} H_J Y_1^{(E)\dagger} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

We can also insert  $L$  open lines between Neumann-JS $_I$  and Neumann-JS $_J$  boundary points,

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(L,\parallel)}(x, y_I, y_J) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} Y_L^{(I \cap J)} H_I H_J Y_L^{(I \cap J)\dagger} \right\rangle, \\ D_{IJ}^{(L,\perp)}(x, y_I, y_J) &= \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-X} Y_L^{(I \cup J)} H_I H_J Y_L^{(I \cup J)\dagger} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

where  $\overline{I \cup J}$  designate the complementary set of  $I \cup J$  in  $[0, n]$ .

In the continuum limit all parameters  $k_I, k_J, k_{I,J}$  will be analytically continued to any real value. For clarity reasons the dependence of correlators in the JS boundary cosmological constants will be hidden whenever this dependence is not directly relevant.

## 2.2 Continuum limit and boundary Liouville correlators

In this section we recall briefly the main ideas of the continuum limit for the matrix model correlators, more details on this subject can be found in [8, 9, 19]. We also present some useful results of boundary Liouville theory, we address the reader to the original papers [21–23] for further interest.

The continuum limit is achieved by sending the cosmological constants to their critical values where the average area and the average length of boundaries diverge. The renormalized coupling constants are defined by blowing up the region near the critical point,

$$\epsilon^{2g} \mu = \kappa - \kappa^*, \quad \epsilon \xi = x - x^*, \quad \epsilon^g \zeta = y - y^*, \quad (2.14)$$

where was introduced the elementary length  $\epsilon^g$  of the lattice as a cut-off. Boundaries with Neumann boundary conditions have a fractal dimension  $1/g$ ,  $g = 1 - \theta$  so that their boundary cosmological constant scales as  $\xi \sim \mu^{1/2g}$ . Boundaries of JS kind have the usual dimension one and the cosmological constant simply scales as  $\zeta \sim \mu^{1/2}$ . The critical value for the boundary cosmological constant were determined in the previous studies [1], [19],  $x^* = 0$  and  $y^* = (k+1)W(0)$ .

Let us consider a disc correlator with one Neumann boundary and an arbitrary number of JS boundaries  $D(x, y_i)$ . The continuum limit of this correlator is obtained by subtracting the non-critical part,

$$\epsilon^\alpha d(\xi, \zeta_i) = D(x, y_i) - D^*(x, y_i). \quad (2.15)$$

This non-critical part  $D^*$  represents special limits of the disc correlator where one or more boundary disappear, it must vanish after a finite number of derivative with respect to the boundary cosmological constants.<sup>2</sup> The critical correlator  $d$  as function of  $\xi$  has a branch cut on  $] -\infty, -M] \subset \mathbb{R}^-$ , where  $M$  is a function of the bulk cosmological constant and was computed in [12].

Critical points of statistical models on a random lattice are described in the continuum limit as a CFT coupled to 2D gravity. In Polyakov gauge the effective degree of freedom for the gravity is a Liouville field  $\phi$ . The Liouville theory is conformal and coupling to the conformal matter part is achieved through the requirement of vanishing total central charge

$$c_{\text{tot}} = c_{\text{CFT}} + c_{\text{Liouville}} + c_{\text{ghost}}. \quad (2.16)$$

This coupling gives the value  $b = \sqrt{g}$  to the Liouville parameter. Operators are dressed by ghost and Liouville fields and we have to sum over the position of insertion in order to

<sup>2</sup>This interpretation of the non-critical term of matrix model correlators is further explicit in [24].

get diffeomorphism invariant quantities. We also require the vanishing of the total scaling dimension

$$\Delta_{\text{matter}} + \Delta_{\text{Liouville}} + \Delta_{\text{ghost}} = 0. \quad (2.17)$$

This requirement induces an important relation between the bare scaling dimension of CFT operators  $\delta$  and the Liouville momentum of the dressing factors  $P$ . We will extensively make use of the Kac notation for these two quantities,

$$\delta_{r,s} = \frac{(r/b - sb)^2 - (1/b - b)^2}{4}, \quad P_{r,s} = \frac{r}{2b} - \frac{sb}{2}, \quad (2.18)$$

but allow non integer indices  $(r, s)$ . Correlators of 2D gravity factorize into matter, ghost and Liouville parts. The study of the Liouville part is sufficient to determine the scaling exponents of bare operators via the dressing momenta. The Liouville term is also the only dependence on the boundary cosmological constants, through the boundary parameters  $(\tau, \sigma)$  specified as ([19])

$$\zeta(\tau) = M \cosh \tau, \quad \zeta(\sigma) = \frac{M^g}{2g} \frac{\sin \pi \theta}{\sin \pi r_I \theta} \cosh g\sigma. \quad (2.19)$$

Consequently, we can neglect the ghost and matter part, focusing on the boundary parameters dependence. Let us define the Liouville boundary operator of momentum  $P$  inserted between two boundaries labeled by  $\tau$  and  $\sigma$ , as

$${}^\tau B_P^\sigma = e^{(Q/2-P)\phi}. \quad (2.20)$$

with the Liouville charge  $Q = b + \frac{1}{b}$ . Here our convention slightly differs from the one used in [19]. Most of the time, the momentum  $P$  will be positive and this definition corresponds to the usual dressing of boundary CFT operators in the matrix model [8]. It may happen that some momenta reveal to be negative, then the operator is found to have a wrong dressing with respect to 2D gravity. All Liouville boundary operators obey the reflection relation

$${}^\tau B_P^\sigma = 4P d(P | \tau, \sigma) \cdot {}^\tau B_{-P}^\sigma \quad (2.21)$$

involving the Liouville boundary 2-points function,

$$d(P | \sigma, \tau) = \langle {}^\tau B_P^\sigma B_P^\tau \rangle. \quad (2.22)$$

We will not need the explicit expression in terms of double sine functions found in [21] (see also [30]), but the shift relation

$$\frac{\sin \pi \partial_\tau}{C \sinh b^2 \tau} d(P | \tau, \sigma) = d(P - b/2 | \tau, \sigma), \quad (2.23)$$

where  $C$  is some constant independent of the boundary parameters, and the reflection property<sup>3</sup>

$$d(-P | \tau, \sigma) = d(P | \tau, \sigma)^{-1} \quad (2.24)$$

<sup>3</sup>An irrelevant factor of  $8P^2$  was intentionally omitted for a matter of simplicity.

will be useful.

The gravitational scaling of the Liouville correlator  $\gamma$  is linked to the momenta of boundary operators via the KPZ formula [25–27],

$$\langle {}^{\sigma_1} B_{P_1}^{\sigma_2} \dots {}^{\sigma_n} B_{P_n}^{\sigma_1} \rangle \propto \mu^\gamma, \quad (2.25)$$

with

$$2b\gamma = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) + \sum_{i=1}^n P_i. \quad (2.26)$$

The disc with mixed Neumann-JS boundaries was studied by matrix model technique in [19]. Solving the loop equation in the continuum limit, the boundary Liouville 2-points function was recovered. The Liouville momentum of the dressed operator changing from Neumann to JS boundary condition of parameter  $k_I(r_I)$  and with  $L$  open lines inserted was found to be

$$P_I^{(L,\perp,\parallel)} = \pm r_I \left( \frac{1}{2b} - \frac{b}{2} \right) + L \frac{b}{2} \quad (2.27)$$

where the plus sign stands for unblobbed open lines. Such a momentum assign a gravitational scaling  $\gamma_I = \frac{P}{2b}$  to matrix correlators. All momenta excepted  $P^{(0\parallel)}$  and  $P^{(1\parallel)}$  are positive. The operator carrying momentum  $P^{(0\parallel)}$  will be of no use here because the boundary operator with no open line inserted has always momentum  $P^{(0\perp)}$ . Furthermore, if we restrict to  $k_I > 0$  (i.e.  $r_I < (1 - \theta)/\theta$ ),  $P^{(1\parallel)}$  is positive. When  $P^{(1\parallel)}$  is negative, a wrong dressing of the bare operator has to be used.

Let us now focus on the three boundaries case and denote by  $d_{IJ}$  the continuum limit of the correlator

$$e^{\alpha_{IJ}} d_{IJ}(\xi, \zeta_I, \zeta_J) = D_{IJ}(x, y_I, y_J) - D_{IJ}^*(x, y_I, y_J) \quad (2.28)$$

where  $\alpha_{IJ}$  relates to the gravitational scaling  $\mu^{\alpha_{IJ}}$  by  $\alpha_{IJ} = 2b^2 \gamma_{IJ}$ . The expression of the critical part  $d_{IJ}$  is given by the Liouville boundary 3-points function<sup>4</sup>

$$d(P_I, P, P_J | \sigma_I, \sigma_J, \tau) = \langle {}^\tau B_{P_I}^{\sigma_I} B_P^{\sigma_J} B_{P_J}^\tau \rangle. \quad (2.29)$$

The exact expression of this function was found by Ponsot and Tschner in [22]. Here we will only need some properties such as the reflection and cyclic symmetries,

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2, P_3 | \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= d(P_3, P_2, P_1 | \sigma_2, \sigma_1, \sigma_3), \\ d(P_1, P_2, P_3 | \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= d(P_2, P_3, P_1 | \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1) = d(P_3, P_1, P_2 | \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

This function is also known to obey an important shift relation involving both momenta and boundary parameters [29]. This relation simplifies when the momenta obey a specific identity, as explained in Appendix A.1.

<sup>4</sup>up to a factor independent of the boundary parameters, corresponding the ghost and matter part of the correlator.

Specializing the KPZ formula to the 3-points case, we get a relation that allows us to recover the scaling dimension of the operator inserted between the JS boundaries directly from the gravitational scaling  $\gamma_{IJ}$  of the matrix model correlator. Indeed, the expression for the momenta of the operators inserted between Neumann and JS boundaries is already known to be given by 2.27. Then we directly extract

$$P = 2b\gamma_{IJ} + \frac{1}{2b} + \frac{b}{2} - P_I - P_J. \quad (2.31)$$

As an example, let us consider the simplest case of  $d_{IJ}^{(0\perp)}$  correlator. No open lines are inserted between Neumann and JS boundaries so that the momenta of the boundary operators are simply given by  $P_I^{(0\perp)}$ ,  $P_J^{(0\perp)}$  of 2.27. Using 2.31 we deduce from the gravitational dimension  $\gamma_{IJ}^{(0\perp)}$  the momentum of the operator changing JS<sub>I</sub> into JS<sub>J</sub> boundary condition

$$P_{IJ}^{(0\perp)} = 2b\gamma_{IJ}^{(0\perp)} - \frac{r_I + r_J - 1}{2b} + (r_I + r_J + 1)\frac{b}{2}. \quad (2.32)$$

Anticipating over the next section, let us mention that this correlator  $d_{IJ}^{(0\perp)}$  is coupled to  $d_{IJ}^{(1\parallel)}$  in loop equations. The correlator  $d_{IJ}^{(1\parallel)}$  corresponds to a disc with Neumann-JS<sub>I</sub>-JS<sub>J</sub> boundaries and one open line inserted, starting between Neumann and JS<sub>I</sub> boundaries and ending between Neumann and JS<sub>J</sub> boundaries. The open line is allowed to touch both JS boundaries and is introduced by boundary operators of momenta  $P_I^{(1\parallel)}$  and  $P_J^{(1\parallel)}$ . The momentum of the operator changing JS<sub>I</sub> to JS<sub>J</sub> boundary condition remains the same because no open line is inserted at this point. This translates into the relation

$$\gamma_{IJ}^{(1\parallel)} - \gamma_{IJ}^{(0\perp)} = \gamma_I^{(1\parallel)} - \gamma_I^{(0\perp)} = \gamma_I^{(1\parallel)} - \gamma_J^{(0\perp)} \quad (2.33)$$

for the gravitational scalings of  $d_{IJ}^{(0\perp)}$  and  $d_{IJ}^{(1\parallel)}$  correlators.

In the next sections, the gravitational scalings will be read of the matrix model loop equations in the continuum limit. By the use of the previous statements, we will be able to determine the scaling dimensions of the JS<sub>I</sub>-JS<sub>J</sub> boundary changing operator.

### 2.3 Derivation of the loop equations

Using the invariance of the matrix measure, in [19] was derived a powerful loop equation that can be applied to various quantities  $G$ ,

$$\langle \text{tr} GY_a \rangle = \sum_{ij} \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_{aij}} \oint \frac{dx'}{2i\pi} \left( \frac{1}{x' - X} G \frac{1}{-x' - X} \right)_{ij} \right\rangle. \quad (2.34)$$

The contour of integration circles the support of the eigenvalue density that corresponds to the branch cut  $]-\infty, -M]$  of the correlators. This loop equation can be interpreted as follows. In the LHS is inserted on the boundary a matrix  $Y_a$  that describes the starting point of an open line. Because of the gaussian measure for  $Y_a$  matrices, this matrix couple to another  $Y_a$  inside  $G$  corresponding to the end point of the open line. This operation

corresponds to remove an open line from the disc correlator, or loop if the end point is situated nearby the starting point. The action of the  $Y_a$  derivative in the RHS is to split the matrix product in two traces. Using the factorization property in the planar limit

$$\langle \text{tr} A \text{tr} B \rangle \sim \langle \text{tr} A \rangle \langle \text{tr} B \rangle \quad (2.35)$$

we obtain a convolution of correlators in the length space that translates into a ‘‘star product’’ in the boundary cosmological constant space,

$$(A * B)(x) = \oint \frac{dx'}{2i\pi} \frac{A(x') - A(x)}{x - x'} B(-x'). \quad (2.36)$$

This product corresponds to the splitting of the disc into two parts along the open line removed in the LHS. Applied to various disc quantities, the relation 2.34 provides us with several loop equations that can be used to determine the gravitational dimension of the matrix model correlator.

### 3. Closed loops sector

In this section we will be interested in finding the scaling dimension of the operator changing boundary conditions JS<sub>I</sub> to JS<sub>J</sub> but with no open lines inserted between the two boundaries (see Figure 1). Open lines can be introduced between Neumann and JS boundaries without changing the dimension of this operator. Indeed, considering the quantities defined in 2.13 we can obtain the following equations when  $L > 0$  by removing one of the open lines,

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(L+1\parallel)} &= (k_{IJ} - L) W * D_{IJ}^{(L\parallel)}, \\ D_{IJ}^{(L+1\perp)} &= (n - k_I - k_J + k_{IJ} - L) W * D_{IJ}^{(L\perp)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

We deduce a recursion relation for the gravitational scalings  $\gamma_{IJ}^{(L+1)} = \gamma_{IJ}^{(L)} + 1/2$  in agreement with 2.31 where the momenta of operators inserted between Neumann and JS boundaries are given by 2.27, the operator inserted between the two JS boundaries remaining unchanged.

#### 3.1 Coupled loop equations for $D_{IJ}^{(0\perp)}$

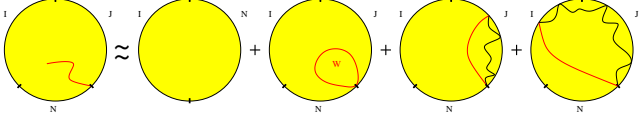
Let us apply the loop equation 2.34 to  $G = \frac{1}{x - X} H_I H_J Y_c$  and use

$$\sum_{c \in J} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} H_I H_J Y_c^2 \right\rangle = y_J D_{IJ}^{(0\perp)} - D_I^{(0\perp)}. \quad (3.2)$$

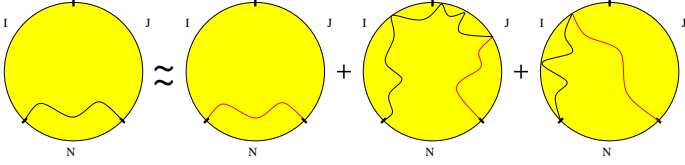
This provides us with a first equation where  $D_{IJ}^{(0\perp)}$  and  $D_{IJ}^{(1\parallel)}$  are coupled,

$$y_J D_{IJ}^{(0\perp)} = D_I^{(0\perp)} + k_J D_{IJ}^{(0\perp)} * W + D_{IJ}^{(0\perp)} * D_J^{(1\parallel)} + D_I^{(0\perp)} * D_{IJ}^{(1\parallel)}. \quad (3.3)$$



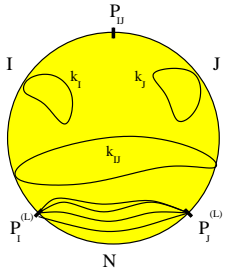


**Figure 2:** Combinatoric diagrams describing the splitting of  $D_{IJ}^{(0\perp)}$ .



**Figure 3:** Combinatoric diagrams describing the splitting of  $D_{IJ}^{(1\parallel)}$ .

Each term of the RHS has an interpretation as splitting the LHS correlator in two parts. The first term corresponds to the vanishing of  $JS_J$  boundary. The second one represents the removal of a close loop. The two last terms correspond to a loop touching  $JS_I$  or  $JS_J$  boundary (Figure 2).



**Figure 1:** A disc with no open lines inserted between the two JS boundaries.

In a similar way, starting with  $G = \frac{1}{x-X} Y_a H_I H_J$  and summing over  $a \in I \cap J$  we derive a second loop equation,

$$D_{IJ}^{(1\parallel)} = k_{IJ} W * D_{IJ}^{(0\perp)} + D_{IJ}^{(1\parallel)} * D_J^{(0\perp)} + D_I^{(1\parallel)} * D_{IJ}^{(0\perp)}. \quad (3.4)$$

Again, a combinatorial interpretation can be given to each term of the RHS as shown in Figure 3. We remove the part of the open line starting between Neumann- $JS_J$  boundaries and ending the first time it touches the boundary. This picture corresponds to three terms, either the open line does not touch any JS boundaries, or it first touches  $JS_J$  or  $JS_I$ .

Note that similar equations can be obtained reversing the roles played by  $I$  and  $J$  boundaries. Using the reflection symmetry of 3-boundaries correlators (2.11) we can finally

write the following set of coupled loop equations,

$$\begin{aligned} y_J D_{IJ}^{(0\perp)} &= D_{IJ}^{(0\perp)} * (k_J W + D_J^{(1\parallel)}) + D_I^{(0\perp)} * D_{IJ}^{(1\parallel)} + D_I^{(0\perp)}, \\ D_{IJ}^{(1\parallel)} &= (k_{IJ} W + D_J^{(1\parallel)}) * D_{IJ}^{(0\perp)} + D_{IJ}^{(1\parallel)} * D_I^{(0\perp)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

In order to subtract the non-critical part of 2-boundaries correlators we introduce the quantities [19],

$$\begin{aligned} d_I^{(0\perp)}(x, y_I) &= D_I^{(0\perp)}(x, y_I) - 1, \\ k_I d_I^{(1\parallel)}(x, y_I) &= D_I^{(1\parallel)}(x, y_I) + k_I W(x) - y_I, \\ k_{IJ} d_I^{(1I \cap J)}(x, y_I) &= D_I^{(1I \cap J)}(x, y_I) + k_{IJ} W(x) - y_I. \end{aligned} \quad (3.6)$$

The non-critical part of  $d_I^{(0\perp)}$  and  $d_I^{(1\parallel)}$  cannot be determined explicitly in general but we do not need their exact expression, let us just denote for simplicity

$$d_{IJ}^{(0\perp)}(x, y_I, y_J) = D_{IJ}^{(0\perp)}(x, y_I, y_J), \quad d_{IJ}^{(1\parallel)}(x, y_I, y_J) = D_{IJ}^{(1\parallel)}(x, y_I, y_J) + 1 \quad (3.7)$$

and write 3.5 as

$$\begin{aligned} 0 &= d_{IJ}^{(0\perp)} * k_J d_J^{(1\parallel)} + d_I^{(0\perp)} * d_{IJ}^{(1\parallel)}, \\ 0 &= k_{IJ} d_J^{(1I \cap J)} * d_{IJ}^{(0\perp)} + d_{IJ}^{(1\parallel)} * d_I^{(0\perp)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

The quantity  $d_I^{(1I \cap J)}$  that appeared in 3.4 is very similar to  $d_I^{(1\parallel)}$ , they both obeys the equation

$$d_I^{(1I \cap J)} * d_I^{(0\perp)} + W(x) = 0. \quad (3.9)$$

This equation implies that  $d_I^{(1I \cap J)}$  and  $d_I^{(1\parallel)}$  have the same discontinuity along their branch cut, and we can replace  $d_I^{(1I \cap J)}$  by  $d_I^{(1\parallel)}$  in the previous equation since it appears on the left side of a star product (see Appendix A.2 for more details),<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} d_I^{(0\perp)} * d_{IJ}^{(1\parallel)} + k_J d_{IJ}^{(0\perp)} * d_J^{(1\parallel)} &= 0, \\ d_{IJ}^{(1\parallel)} * d_I^{(0\perp)} + k_{IJ} d_J^{(1\parallel)} * d_{IJ}^{(0\perp)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

This set of two coupled equations is one of the main results of this paper. In the continuum limit, it allows us to determine the gravitational scaling of  $d_{IJ}^{(0\perp)}$  hence the dimension of the operator inserted between  $JS_I$  and  $JS_J$ . By taking the sum of these two identities at respectively  $x$  and  $-x$ , we can eliminate one of the star products using the property A.10. Unfortunately it is not possible to eliminate the second star product in the general case. This can only be done in some specific cases detailed in appendix A.3. These special cases reveal helpful to remove undeterminations left in the general case.

### 3.2 Obtaining the gravitational dimension in the continuum limit

We take the continuum limit as in 2.14, 2.28. Furthermore, we eliminate all but one scaling parameter by imposing critical bulk and JS boundaries,  $\mu = 0 = \zeta_I = \zeta_J$ . Then, every correlator writes as a power of the remaining cosmological constant  $\xi$ ,  $d_{IJ}(\xi) = d_{IJ} \xi^{\alpha_{IJ}}$

<sup>5</sup>Two more equations can be obtained simply by exchanging  $I$  and  $J$ .

where  $d_{IJ}$  is an unimportant constant. In this limit, the critical part of the star product between two correlators  $d_0(\xi)$  and  $d_1(\xi)$  becomes rather trivial and is given by A.23. Applied to the loop equations 3.10 it gives

$$\begin{aligned} d_I^{(0\perp)} d_{IJ}^{(1\parallel)} \sin \pi \alpha_I^{(0\perp)} + d_{IJ}^{(0\perp)} d_J^{(1\parallel)} k_J \sin \pi \alpha_{IJ}^{(0\perp)} &= 0, \\ d_I^{(0\perp)} d_{IJ}^{(1\parallel)} \sin \pi \alpha_{IJ}^{(1\parallel)} + d_{IJ}^{(0\perp)} d_J^{(1\parallel)} k_{IJ} \sin \pi \alpha_J^{(1\parallel)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

where  $d_I^{(0\perp)}$ ,  $d_J^{(1\parallel)}$ ,  $d_{IJ}^{(0\perp)}$  and  $d_{IJ}^{(1\parallel)}$  are some constants. We recover the relation 2.33 by imposing both terms to have the same scaling in  $\xi$ . The ratio of the previous relations gives

$$\frac{d_{IJ}^{(0\perp)} d_J^{(1\parallel)}}{d_{IJ}^{(1\parallel)} d_I^{(0\perp)}} = -\frac{\sin \pi \alpha_I^{(0\perp)}}{k_J \sin \pi \alpha_{IJ}^{(0\perp)}} = -\frac{\sin \pi \alpha_{IJ}^{(1\parallel)}}{k_{IJ} \sin \pi \alpha_J^{(1\parallel)}} \quad (3.12)$$

and finally

$$k_{IJ} = \frac{\sin \pi \alpha_{IJ}^{(0\perp)} \sin \pi \alpha_{IJ}^{(1\parallel)}}{\sin \pi \alpha_I^{(0\perp)} \sin \pi \alpha_J^{(0\perp)}}. \quad (3.13)$$

It is now convenient to introduce the parameterization 1.5 of [20]. This parameterization  $k_{IJ}(r_{IJ})$  is not well defined because of the periodicity  $r_{IJ} \rightarrow r_{IJ} + 2/\theta$ , that's why we impose  $r_{IJ} \in [1, 1 + 2/\theta]$ . Relations 3.13 and 2.33 translates into

$$\alpha_{IJ}^{(0\perp)} = (1 + r_I + r_J \pm r_{IJ}) \frac{\theta}{2} + j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

A look at the results for  $k_{IJ} = 0$  and  $k_{IJ} = k_J$  detailed in appendix A.3 leads to select the plus sign and  $j = -1$ . This choice provides a dimension  $\delta_{r_{IJ}, r_{IJ}}$  to the boundary operator inserted between the two JS boundaries. This fits in the table of boundary operators dimensions found in [20] on the regular lattice.

### 3.3 Loop equations and Liouville theory

The loop equations 3.10 are not sufficient to recover the exact solution for the Liouville boundary 3-points function of [22]. It is nonetheless possible to transform them into the shift relation A.2. One should also keep in mind the presence of leg factors between matrix model correlators in the continuum limit and boundary Liouville two and three points function. Consequently it makes sense to compare matrix model loop equations and boundary Liouville shift relations only up to an undetermined factor independent of the boundary parameter  $\tau$ . Besides its own interest, the mapping of the matrix model loop equations on Liouville shift relations allows to cross-check the calculation of the gravitational scalings.

Let us start with the discontinuity of equations 3.10 over the support of eigenvalues,

$$\begin{aligned} d_{IJ}^{(1\parallel)}(-\xi) \text{Disc } d_{IJ}^{(0\perp)} + k_J d_J^{(1\parallel)}(-\xi) \text{Disc } d_{IJ}^{(0\perp)} &= 0, \\ d_I^{(0\perp)}(-\xi) \text{Disc } d_{IJ}^{(1\parallel)} + k_{IJ} d_{IJ}^{(0\perp)}(-\xi) \text{Disc } d_J^{(1\parallel)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

This description in terms of discontinuities is totally equivalent to the star product relations, provided we know the behavior of correlators at infinity. In the parameterization 2.19 these relations become shift equations involving the boundary parameter  $\tau \in \mathbb{R}$  of the Neumann boundary,

$$\begin{aligned} &\frac{\sin \pi \partial_\tau}{C_I^{(0\perp)} \sinh b^2 \tau} d(P_I^{(0\perp)}, P_{IJ}, P_J^{(0\perp)} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \\ &= -\frac{d(P_I^{(0\perp)} - b/2 | \tau, \sigma_I)}{k_J d(P_J^{(1\parallel)} | \tau, \sigma_J)} d(P_I^{(1\parallel)}, P_{IJ}, P_J^{(1\parallel)} | \sigma_I, \sigma_J, \tau), \\ &\frac{\sin \pi \partial_\tau}{C_J^{(1\parallel)} \sinh b^2 \tau} d(P_I^{(1\parallel)}, P_{IJ}, P_J^{(1\parallel)} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \\ &= -\frac{d(P_J^{(1\parallel)} - b/2 | \tau, \sigma_J)}{k_{IJ} d(P_I^{(0\perp)} | \tau, \sigma_I)} d(P_I^{(0\perp)}, P_{IJ}, P_J^{(0\perp)} | \sigma_I, \sigma_J, \tau). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Here  $C_I^{(0\perp)}$  and  $C_J^{(1\parallel)}$  are unimportant constants independent of  $\tau$ . To derive this set of equations, we exploited the shift property of boundary Liouville 2-points functions 2.23. If we insert the values of the momenta given by 2.27 we can write

$$\begin{aligned} &\frac{\sin \pi \partial_\tau}{C_I^{(0\perp)} \sinh b^2 \tau} d(P_I^{(0\perp)}, P_{IJ}, P_J^{(0\perp)} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \\ &= -\frac{d(P_I^{(0\perp)} - b/2 | \tau, \sigma_I)}{k_J d(b/2 - P_J^{(0\perp)} | \tau, \sigma_J)} d(b/2 - P_I^{(0\perp)}, P_{IJ}, b/2 - P_J^{(0\perp)} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \end{aligned} \quad (3.17)$$

And an equivalent equation under the trivial change of variables  $P_{I,J}^{(0\perp)} \rightarrow b/2 - P_{I,J}^{(0\perp)}$ . Finally, the reflection property of boundary operators 2.21 bring us the conclusion that the two previous equations coincide with the relation A.2.

### 3.4 A few remarks

Let us conclude the study of the closed loops sector with a few remarks. First, based on an observation made by Kostov in [18] for the disc with Neumann-JS boundaries, we extend the relations 3.1 to the case  $L = 0$ . This defines a new quantity  $D_{IJ}^{(0\parallel)}$  satisfying

$$D_{IJ}^{(1\parallel)} = k_{IJ} W * D_{IJ}^{(0\parallel)}. \quad (3.18)$$

The compatibility of this definition with 3.5 results in the relation

$$D_{IJ}^{(0\parallel)}(x) = \frac{D_{IJ}^{(0\perp)}(x)}{d_I^{(0\perp)}(x) d_J^{(0\perp)}(x)}, \quad (3.19)$$

holding only when the image  $-x$  belongs to the support of the eigenvalue density. But two functions taking the same values on this symmetric support leads to the same results when appearing on the right side of the star product, so that we have the freedom to choose  $D_{IJ}^{(0\parallel)}$

such that the relation 3.19 extends to the whole complex plane. This relation becomes significant when written as

$$D_{IJ}^{(0||)} = \frac{D_{IJ}^{(0\perp)}}{(1 - D_I^{(0\perp)})(1 - D_J^{(0\perp)})} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(D_I^{(0\perp)}\right)^n \left(D_J^{(0\perp)}\right)^m D_{IJ}^{(0\perp)}. \quad (3.20)$$

The sum over  $(m, n)$  counts the number of time  $JS_I$  and  $JS_J$  can touch themselves, boundaries touching eachother being forbidden.

A second remark of importance can be made when we compare to the results derived on the regular lattice [20]. Indeed, the spectrum of boundary operators that was found is actually  $\delta_{r_{IJ}+2j, r_{IJ}}$  with  $j \in \mathbb{Z}$  where the weight of loops touching both JS boundaries  $k_{IJ}(r_{IJ})$  is parameterized as in 1.5 but with no restriction on the range of  $r_{IJ}$ . This kind of parameterization is invariant under the periodicity transformation

$$r_{IJ} \rightarrow r_{IJ} + \frac{2}{\theta}, \quad \delta_{r_{IJ}+2j, r_{IJ}} \rightarrow \delta_{r_{IJ}+2(j+1), r_{IJ}}. \quad (3.21)$$

For concreteness we decided to restrict  $r_{IJ}$  to the interval  $[1, 1 + 2/\theta]$  and we recovered the dimension  $\delta_{r_{IJ}, r_{IJ}}$  ( $j = 0$ ) for the JS-JS boundary operator. It is possible to obtain more general boundary operators if we consider the Neumann- $JS_I$ -Neumann- $JS_J$  matrix correlator,

$$D_{NINJ}(x, y_I, x', y_J) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} H_I \frac{1}{x' - X} H_J \right\rangle. \quad (3.22)$$

This correlator obeys the same loop equation as  $D_{IJ}^{(0\perp)}$  and its critical part have the gravitational dimension,  $d_{NINJ} \sim \mu^{\gamma_{NINJ}^{(0\perp)} - \frac{1}{2\theta}}$ . This dimension can be easily read of the loop equation when  $k_{IJ} = 0$ , the generalization to arbitrary value of  $k_{IJ}$  follow the same steps as the three boundary case. When the boundary cosmological constant  $x'$  diverges, the length of the corresponding Neumann boundary tends toward zero,  $JS_I$ -Neumann and Neumann- $JS_J$  boundary operators fuse to form  $JS_I$ - $JS_J$  boundary operators. This translates into the expansion

$$D_{NINJ}(x, y_I, x', y_J) = \sum_{j=0}^{\infty} x'^{-j-1} \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} H_I X^j H_J \right\rangle. \quad (3.23)$$

In the continuum limit the Neumann boundary of length  $j$  introduced by the matrix product  $X^j$  vanish but the presence of this remnant of the random lattice modifies the  $JS_I$  boundary operator. Hence, the matrix model correlator

$$D_{NINJ}^{(j)}(x, y_I, y_J) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} H_I X^j H_J \right\rangle \quad (3.24)$$

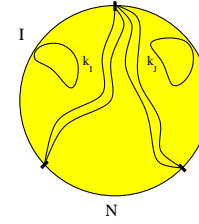
describes in the continuum limit the Neumann- $JS_I$ - $JS_J$  disc partition function with a boundary operator of dimension  $\delta_{r_{IJ}+2j, r_{IJ}}$  inserted between the two JS boundaries.<sup>6</sup> Operators

<sup>6</sup>It is possible to prove by recursion that such correlators have a gravitational dimension  $\gamma_{NINJ}^{(j)} = \gamma_{IJ}^{(0\perp)} + \frac{j}{2\theta}$ . This is easy to do when  $k_{IJ} = 0$ , we generalize then to arbitrary  $k_{IJ}$  arguing that loop equations are the same than in the three boundary case.

of dimension  $\delta_{r_{IJ}-2j, r_{IJ}}$  where  $j$  is a positive integer can be constructed with negative power for the  $X$  matrix. However they are not involved in the fusion of Neumann- $JS$  boundary operators. Furthermore, these peculiar operators are wrongly dressed by the Liouville field.

## 4. Open lines sector

We discuss in this section correlators with open lines inserted between  $JS_I$  and  $JS_J$  boundaries (Figure 4). Amongst these open lines,  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) will end at the transition Neumann- $JS_I$  (resp.  $JS_J$ ). Such correlators should be compared to the annulus with  $L_1 + L_2$  non-contractible lines surrounding the inner ring in [20]. On the annulus the first and the last lines can be authorized (or forbidden) to touch the JS boundary, leading to blobbed and unblobbed sectors. Similarly on the disc, the open line next to the  $JS$  boundary will be able (or not) to touch this boundary.



**Figure 4:** The disc correlator  $D_{IJ}^{(2|E_1 E_2)}$ .

When we remove through the loop equation an open line which is alone, different equations arise due to the possibility of this line to touch the JS boundaries or not. This results in four cases of study corresponding to  $(L_1, L_2) \in \{(0, 1), (0, L > 1), (L > 0, 1), (L_1 > 1, L_2 > 1)\}$ .

The presence of open lines inserted between  $JS_I$  and  $JS_J$  boundaries forbids loops touching both boundaries so that the resulting disc partition function should be independent of the weight  $k_{IJ}$ . To be more precise, these lines divide the disc into two parts containing respectively  $JS_I$  and  $JS_J$  boundaries and our results should not rely upon the intersection  $I \cap J$ . The non-trivial dependence is only on the intersection of the sets describing indices involved in the open lines and the sets characterizing JS boundaries. This gives rise to discussions on blobbed and unblobbed cases with respect to one or two boundaries.

### 4.1 ( $L > 0, 1$ ) open lines sector

Let us start with the most rewarding case of  $L$  open lines on the  $JS_I$  side and only one on the other side. We associate to the  $JS_I$  open lines the integer set  $E_1$  and  $E_2$  to the  $JS_J$  open line, considering the correlator  $D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)}$ . Removing the single  $JS_J$  open line, we get

$$D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)} = k_{E_2} D_I^{(L E_1)} * D_J^{(0\perp)} + D_{IJ}^{(L|E_1 E_2 \cap J)} * D_J^{(0\perp)}. \quad (4.1)$$

This equation requires two different treatments according to the blob of the open line we remove.

#### 4.1.1 Unblobbed sector with respect to $JS_J$ boundary

The simplest case is the unblobbed sector  $E_2 \cap J = \emptyset$  where the second term of the RHS in the loop equation 4.1 describing the open line touching the  $JS_J$  boundary vanishes. Injecting the critical part of  $D_I^{(0\perp)}$  yields to

$$D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)} = k_{E_2} D_I^{(L E_1)} * d_J^{(0\perp)} + k_{E_2} D_I^{(L E_1)}(x). \quad (4.2)$$

The second term  $D_I^{(L E_1)}$  of the RHS cancels with the non-critical part of  $D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)}$  as it describes the vanishing of the  $JS_J$  boundary. We can read directly the gravitational scaling  $\gamma_{IJ}^{(L|E_1 E_2)} = \gamma_I^{(L E_1)} + \gamma_J^{(0\perp)}$ . Plugging the values  $P_I$  and  $P_J$  of the momenta for the Neumann-JS boundary operators into the relation 2.31 we find out the scaling dimension

$$\delta_{r_J \pm r_I + 1, r_J \pm r_I - L} \quad (4.3)$$

for the  $JS_I$ - $JS_J$  boundary operator with  $L + 1$  open lines, the plus sign being affected to the  $JS_I$  unblobbed open lines case.

#### 4.1.2 Blobbed sector with respect to $JS_J$ boundary

When the removed open line is allowed to touch the  $JS_J$  boundary the discussion is more subtle. Indeed,  $E_2 \subset J$  and the loop equation 4.1 reads,

$$D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)} = k_{E_2} D_I^{(L E_1)} * D_J^{(0\perp)} + D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)} * D_J^{(0\perp)}. \quad (4.4)$$

This equation looks quite similar to the one derived in [19] for  $D_I^{(1\parallel)}$ ,

$$D_I^{(1\parallel)} = k_I W * D_I^{(0\perp)} + D_I^{(1\parallel)} * D_I^{(0\perp)}. \quad (4.5)$$

This similarity is not very surprising in the sense that the  $JS_I$  boundary is completely decoupled from the  $JS_J$  boundary by the  $L$  open lines. This  $JS_I$  boundary plays no role in the loop equation and the removed open line sees only an effective Neumann boundary condition corresponding to the rightmost  $JS_I$  open line. Hence we mimic the solution of the one JS boundary case and take a similar a non-critical part for  $D_I^{(1\parallel)}$  and  $D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)}$ ,

$$\begin{aligned} d_I^{(0\perp)}(x) &= D_I^{(0\perp)}(x) - 1, \\ k_I d_I^{(1\parallel)}(x) &= D_I^{(1\parallel)}(x) + k_I W(x) - y_I, \\ k_{E_2} d_{IJ}^{(L|E_1 E_2)}(x) &= D_{IJ}^{(L|E_1 E_2)}(x) + k_{E_2} \left( D_I^{(L E_1)}(x) - c \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

The exact value of the constant  $c$  (independent of  $x$ ) is not important here and will be kept undetermined, the crucial point is to subtract the term corresponding to the vanishing of the  $JS_J$  boundary. The critical loop equation reads

$$D_I^{(L E_1)} + d_{IJ}^{(L E_2)} * d_J^{(0\perp)} = c. \quad (4.7)$$

and the constant  $c$  must cancel with the non-critical part of  $D_I^{(L E_1)}$ . The relation between gravitational scalings is simply  $\gamma_{IJ}^{(L|E_1 E_2)} = \gamma_I^{(L E_1)} - \gamma_J^{(0\perp)}$ , when plugged in 2.31 we end up with the scaling dimension

$$\delta_{-r_J \pm r_I + 1, -r_J \pm r_I - L} \quad (4.8)$$

for the  $JS_I$ - $JS_J$  boundary operator, the plus sign corresponding to unblobbed open lines with respect to the  $JS_I$  boundary.

Following the steps of section 3.3 both equations 4.2 and 4.4 can be transformed into the shift relation A.6 for the Liouville 3-points function. This confirms our identification of the non-critical part for matrix model correlators.

#### 4.2 ( $0, L > 1$ ) open lines sector

This case is very similar to the previous one but we briefly mention how it is solved for completeness. The loop equation reads

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(L E)} &= (k_E - L) D_I^{(0\perp)} * D_J^{(L-1 E)} \\ &+ \sum_{a_i \in E} \delta_{a_i \in I} D_I^{(0\perp)} * \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - X} Y_{a_1} H_I Y_{a_1} \cdots Y_{a_L} H_J Y_{a_L} \cdots Y_{a_2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.9)$$

the second term of the RHS describes the removal of an open line touching the  $JS_J$  boundary. It disappears when we consider an unblobbed open line with respect to this boundary,  $E \cap I = \emptyset$ . We then deduce  $\gamma_{IJ}^{(L E)} = \gamma_I^{(0\perp)} + \gamma_J^{(L E)}$  providing the scaling

$$\delta_{1+r_I \pm r_J, 1+r_I \pm r_J - L} \quad (4.10)$$

for the  $JS_I$ - $JS_J$  boundary operator, the plus sign being assigned to unblobbed open lines with respect to  $JS_J$  boundary.

When the removed open line is unblobbed with respect to the  $JS_I$  boundary,  $E \subset I$  and the first term of the RHS of 4.9 cancel with the non critical part of the second term as it describes the vanishing of the  $JS_I$  boundary. This term is actually  $D_I^{(1\parallel)} * D_J^{(L-2 E)}$ , so that we determine the gravitational scaling  $\gamma_{IJ}^{(L E)} = \gamma_I^{(0\perp)} + \gamma_I^{(1\parallel)} + \gamma_J^{(L-2 E)}$ . It yields to the scaling dimension

$$\delta_{1-r_I \pm r_J, 1-r_I \pm r_J - L} \quad (4.11)$$

for the operator inserted between the JS boundaries, and again the sign plus corresponds to unblobbed open lines with respect to the  $JS_J$  boundary.

#### 4.3 ( $0, 1$ ) open line sector

Here we have to distinguish three subcases, the open line being allowed to touch zero, one or two boundaries. We denote by  $E \subset [1, n]$  the integer set containing the spin components

involved in the open line. The general loop equations can be derived from 2.34 and, with the shortcut notations of 2.12, we can write the following set of loop equations,

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(E)} &= k_E D_I^{(0\perp)} * D_J^{(0\perp)} + D_I^{(0\perp)} * D_{IJ}^{(E\cap I)} + D_{IJ}^{(E\cap J)} * D_J^{(0\perp)}, \\ D_{IJ}^{(E)} &= k_E D_J^{(0\perp)} * D_I^{(0\perp)} + D_J^{(0\perp)} * D_{IJ}^{(E\cap J)} + D_{IJ}^{(E\cap I)} * D_I^{(0\perp)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

The second equation is obtained just by reversing the roles played by  $I$  and  $J$ . Summing both equations at points  $x$  and  $-x$  and using A.10 to get rid of the star products, we end up with

$$\begin{aligned} &D_{IJ}^{(E)}(x) + D_{IJ}^{(E)}(-x) \\ &= k_E D_I^{(0\perp)}(x) D_J^{(0\perp)}(-x) + D_I^{(0\perp)}(x) D_{IJ}^{(E\cap I)}(-x) + D_{IJ}^{(E\cap J)}(x) D_J^{(0\perp)}(-x). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Let us now specialize to the different subcases.

#### 4.3.1 Unblobbed open line with respect to both boundaries ( $E \cap I = \emptyset = E \cap J$ )

When the open line does not touch any of the JS boundaries the star product equations 4.12 simplify into,

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(E)}(x) &= k_E \left( d_I^{(0\perp)} * d_J^{(0\perp)} \right)(x) + k_E D_I^{(0\perp)}(x), \\ D_{IJ}^{(E)}(x) &= k_E \left( d_J^{(0\perp)} * d_I^{(0\perp)} \right)(x) + k_E D_J^{(0\perp)}(x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

These equations look very similar to those of section 4.1.1 therefore we take the same kind of non-critical part for the 3-boundaries correlators,

$$\begin{aligned} k_E d_{IJ}^{(E)}(x) &= D_{IJ}^{(E)}(x) - k_E \left( D_I^{(0\perp)}(x) - c_{I\bar{J}} \right), \\ k_E d_{IJ}^{(E)}(x) &= D_{IJ}^{(E)}(x) - k_E \left( D_J^{(0\perp)}(x) - c_{\bar{I}J} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

The loop equation 4.13 implies  $c_{I\bar{J}} + c_{\bar{I}J} = 1$ , and by symmetry it is tempting to set  $c_{I\bar{J}} = c_{\bar{I}J} = 1/2$ . We finally get

$$d_{IJ}^{(E)}(x) + d_{IJ}^{(E)}(-x) = d_I^{(0\perp)}(x) d_J^{(0\perp)}(-x) \quad (4.16)$$

and the relation  $\gamma_{IJ}^{(E)} = \gamma_{I\bar{J}}^{(E)} = \gamma_I^{(0\perp)} + \gamma_J^{(0\perp)}$  amongst the gravitational scalings. The KPZ relation 2.31 yield to a scaling

$$\delta_{1+r_I+r_J, r_I+r_J} \quad (4.17)$$

for the operator inserted between the two JS boundaries.

#### 4.3.2 Blobbed open line on JS $_J$ , unblobbed on JS $_I$ ( $E \subset J, E \cap I = \emptyset$ )

Again, it is more rewarding to consider the loop equation in the start product form 4.12,

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(E)}(x) &= k_E \left( D_I^{(0\perp)} * D_J^{(0\perp)} \right)(x) + \left( D_{IJ}^{(E)} * D_J^{(0\perp)} \right)(x), \\ D_{IJ}^{(E)}(x) &= k_E \left( D_J^{(0\perp)} * D_I^{(0\perp)} \right)(x) + \left( D_J^{(0\perp)} * D_{IJ}^{(E)} \right)(x). \end{aligned} \quad (4.18)$$

The first equation is very similar to the loop equation obtained for  $D_I^{(1\parallel)}$ , so that we define a similar non-critical part that corresponds to the vanishing of the JS $_J$  boundary,

$$k_E d_{IJ}^{(E)}(x) = D_{IJ}^{(E)}(x) + k_E \left( D_I^{(0\perp)}(x) - c_{I\bar{J}} \right). \quad (4.19)$$

This allows us to rewrite the loop equations as

$$\begin{aligned} 0 &= \left( d_{IJ}^{(E)} * d_J^{(0\perp)} \right)(x) + D_I^{(0\perp)}(x), \\ D_{IJ}^{(E)}(x) &= k_E \left( d_J^{(0\perp)} * d_{IJ}^{(E)} \right)(x) + k_E c_{I\bar{J}} D_J^{(0\perp)}(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

The term proportional to  $D_J^{(0\perp)}$  should cancel with the non-critical part of  $D_{IJ}$ , so we define

$$k_E d_{IJ}^{(E)}(x) = D_{IJ}^{(E)}(x) - k_E \left( c_{I\bar{J}} D_J^{(0\perp)}(x) + c_{\bar{I}J} \right). \quad (4.21)$$

Such a critical part leads to the relation

$$d_{IJ}^{(E)}(-x) = d_{IJ}^{(E)}(x) d_J^{(0\perp)}(-x) + d_I^{(0\perp)}(x) - c_{I\bar{J}} - c_{\bar{I}J} + 1. \quad (4.22)$$

We get  $c_{I\bar{J}} + c_{\bar{I}J} = 1$ , and by analogy with respect to the first section, it is tempting to set  $c_{I\bar{J}} = c_{\bar{I}J} = 1/2$ . The gravitational scalings are related by  $\gamma_{IJ}^{(E)} = \gamma_I^{(0\perp)} = \gamma_{I\bar{J}}^{(E)} + \gamma_J^{(0\perp)}$  and both leads to a scaling dimension

$$\delta_{1+r_I-r_J, r_I-r_J} \quad (4.23)$$

for the operator inserted between the JS boundaries.

#### 4.3.3 Blobbed open line on both JS boundaries ( $E \subset I \cap J$ )

We start from the loop equation 4.13,

$$D_{IJ}^{(E)}(x) + D_{IJ}^{(E)}(-x) = k_E D_I^{(0\perp)}(x) D_J^{(0\perp)}(-x) + D_I^{(0\perp)}(x) D_{IJ}^{(E)}(-x) + D_{IJ}^{(E)}(x) D_J^{(0\perp)}(-x). \quad (4.24)$$

By analogy with the previous case, we define our critical quantities as

$$\begin{aligned} k_E d_{IJ}^{(E)}(x) &= D_{IJ}^{(E)}(x) + k_E \left( \frac{1}{2} D_I^{(0\perp)}(x) + \frac{1}{2} \right), \\ k_E d_{IJ}^{(E)}(x) &= D_{IJ}^{(E)}(x) + k_E \left( \frac{1}{2} D_J^{(0\perp)}(x) + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

thus obtaining the critical loop equation

$$0 = 1 + d_I^{(0\perp)}(x)d_{I\bar{J}}^{(E)}(-x) + d_J^{(0\perp)}(-x)d_{I\bar{J}}^{(E)}(x) \quad (4.26)$$

leading to gravitational scalings  $\gamma_{I\bar{J}} = -\gamma_I^{(0\perp)}$ ,  $\gamma_{I\bar{J}} = -\gamma_J^{(0\perp)}$ , the scaling dimension of the operator inserted between the two JS boundaries reads

$$\delta_{1-r_I-r_J, -r_I-r_J}. \quad (4.27)$$

This case is the only one in the open line sector for which the momentum of the Liouville dressing factor is negative. As explained in the first section, in such a case we have to use a wrong dressing of the bare boundary operator.

To conclude the study of the  $(0, L > 1)$  sector, let us mention that the three critical loop equations 4.16, 4.22, 4.26 lead to the relation A.5 after a few algebraic manipulation. This strong result ensures the correctness of our ansatz for the non-critical parts of the 3-boundaries matrix correlators.

#### 4.4 $(L_1 > 1, L_2 > 1)$ open lines sector

This case is rather trivial because the line we remove is provided to touch JS boundaries by the other open lines. In this way we do not need to specialize to any blobbed/unblobbed sector and the loop equation simply express the splitting of the disc into two parts,

$$D_{IJ}^{(L_1, L_2|E_1, E_2)} = k_{E_2} D_I^{(L_1, E_1)} * D_J^{(L_2-1, E_2)}. \quad (4.28)$$

The gravitational scaling of the LHS is just the sum of the scalings for both RHS correlators. The momenta of Neumann-JS boundary operators are given by

$$P_I = \epsilon_I r_I \left( \frac{1}{2b} - \frac{b}{2} \right) + L_1 \frac{b}{2}, \quad P_J = \epsilon_J r_J \left( \frac{1}{2b} - \frac{b}{2} \right) + L_2 \frac{b}{2} \quad (4.29)$$

where  $\epsilon = \pm 1$  is a sign corresponding to the blob of the open lines,  $\epsilon = +1$  in the unblobbed case. We then derive the scaling dimension

$$\delta_{\epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J + 1, \epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J + 1 - (L_1 + L_2)} \quad (4.30)$$

for the JS<sub>I</sub>-JS<sub>J</sub> boundary operator. From our results of the previous sections, we can extend this formula to any values of  $L_1$  and  $L_2$ . These results are in agreement with the analysis made in [20] on the regular lattice, provided we identify the number of non contractible loops of the annulus to the total number of open lines  $L_1 + L_2$ . Note that all these results are, as expected, independent of the intersection  $I \cap J$ . It is also satisfactory that the scaling of the operator depends only on the total number of open lines  $L_1 + L_2$ , being insensitive to where these open lines end.

As in the closed loops sector, it is possible to construct more general boundary operators with scaling dimension

$$\delta_{\epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J + 1 + 2j, \epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J + 1 - (L_1 + L_2)}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.31)$$

This is done in a similar way, introducing a product of  $j$   $X$  matrices between the two JS boundaries. We then obtain the same kind of loop equations, they correspond to the shift relation A.6 in the continuum limit, where the momentum of the JS-JS boundary operator is

$$P = P_I + P_J + \frac{1}{2b}(2j+1) - \frac{b}{2}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.32)$$

## 5. Concluding remarks

The main results of the present article are formulas 1.6 and 1.7 for the scaling dimension of JS-JS boundary operators in closed loops and open lines sectors. We provide an independent check of the results obtained in [20] using numerics and Coulomb gas arguments. Our method can be easily generalized to more complicated topologies with non-trivial cycles. This matrix model approach carries many interesting features. For instance the fusion of two Neumann-JS boundary operators can be done explicitly in sending the boundary cosmological constant toward infinity. In the closed loop sector, the fusion rules depends not only on the JS parameters  $k_I$  and  $k_J$  but also on the symmetry group that is preserved by both boundaries, through the weight  $k_{IJ}$  of loops touching both JS boundaries. At fixed  $k_{IJ}$ , the fusion rules contain an infinite number of terms,

$$\delta_{r_I, r_I} \times \delta_{r_J, r_J} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \delta_{r_{IJ} + 2j, r_{IJ}} \quad (5.1)$$

where  $r_{IJ}$  is related to  $r_I$  and  $r_J$  via the parameterization 1.5. In the open line sector, loops touching both boundaries are forbidden and the fusion rules only depends on  $k_I$  and  $k_J$ ,

$$\delta_{\epsilon_I r_I, \epsilon_I r_I - L_1} \times \delta_{\epsilon_J r_J, \epsilon_J r_J - L_2} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \delta_{1 + \epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J + 2j, 1 + \epsilon_I r_I + \epsilon_J r_J - (L_1 + L_2)}. \quad (5.2)$$

As a consistency check, we were able to map the critical loop equations on the boundary ground ring relations obtained in Liouville theory. It would be interesting to develop further this mapping, and in particular to investigate the role of Liouville degenerate boundary operator in the matrix model. Furthermore, a connection between the KPZ relation and Schramm-Loewner evolution (SLE) was found recently in [31], [32]. It seems natural to ask for an interpretation of the loop equations in the mathematical framework of SLE.

Finally, for special values of  $n$  the continuum limit of the  $O(n)$  model is given by a minimal model. Then the conformal matter can be described using Coulomb gas techniques. This description imposes severe restrictions on the Liouville momenta [28]. On

the other side, the  $O(n)$  model is known to be mapped on a Restricted Solid On Solid (RSOS) model, JS boundary conditions being transpose to alternating height boundary conditions [14, 19]. It would be very interesting to compare the allowed weight a loop touching two different boundaries with alternating height boundary conditions can take and the restrictions coming from Coulomb gas predictions. Furthermore, one could re-derive the fusion rules of minimal models in this context.

## Acknowledgments

It is a pleasure to thank the hospitality of the NBI where a part of this work has been achieved. The author acknowledges J. Dubail and C. Kristjansen for useful discussion and is debtfull to K. Hosomichi and I. Kostov for their carefull reading of the manuscript.

## A. Appendix

### A.1 Simplification of the shift relations for the boundary Liouville 3-points function

Using the operator product expansion of boundary ground ring operator, a shift relation for the boundary 3-points function can be derived (see [22, 29]):

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1+2bP_I-\alpha)}{\Gamma(2bP_I)} d(P_I + \frac{b}{2}, P, P_J | \sigma_I, \sigma_J, \tau \pm i\pi) \\ & - \frac{\Gamma(1-2bP_J)}{\Gamma(\alpha-2bP_J)} d(P_I, P, P_J + \frac{b}{2} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \\ & = \frac{\Gamma(1+2bP_J)\Gamma(1+2bP_I-\alpha)}{\Gamma(1+2bP_I+2bP_J-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{d(P_J | \sigma_J, \tau \pm i\pi)}{d(P_J - \frac{b}{2} | \sigma_J, \tau)} d(P_I, P, P_J - \frac{b}{2} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

with  $\alpha = \frac{1}{2} + b(P_I + P_J + P)$ .

Taking the difference of shifts with plus and minus sign and using 2.23 we recover the relation of [8],

$$\frac{\sin \pi \partial_\tau}{\sinh b^2 \tau} d(P_I, P, P_J | \sigma_I, \sigma_J, \tau) = C d(P_I - b/2, P, P_J - b/2 | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \quad (\text{A.2})$$

where  $C$  is some constant depending only on the Liouville momenta.

In [29] the momenta conservation  $\alpha = 0$  was taken into account in order to simplify A.1. Simplifications with more general momenta conservations are discussed in [28]. Here we need only to investigate the case  $1 + 2bP_I + 2bP_J - \alpha = 0$ , i.e.

$$P = \frac{1}{2b} + P_I + P_J. \quad (\text{A.3})$$

The zero arising from the gamma function in the RHS of A.1 cancels with the pole of the boundary 3-points function,

$$d(P_I, P, P_J - \frac{b}{2} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) \sim \text{cst} \frac{d(P_J - \frac{b}{2} | \sigma_J, \tau) d(P_I | \sigma_I, \tau)}{\frac{1}{2b} + P_I + P_J - P} \quad (\text{A.4})$$

where the constant is independent of  $\tau$ . The equation A.1 simplifies into

$$\begin{aligned} & 2P_J d(P_I, P_I + P_J, P_J + \frac{b}{2} | \sigma_I, \sigma_J, \tau) + 2P_I d(P_I + \frac{b}{2}, P, P_J | \sigma_I, \sigma_J, \tau \pm i\pi) \\ & = C' d(P_J | \sigma_J, \tau \pm i\pi) d(P_I | \sigma_I, \tau). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Taking the difference of both  $+i\pi$  and  $-i\pi$  shifts of the boundary parameter  $\tau$ , after a convenient change of variable we end up with

$$\frac{\sinh \pi \partial_\tau}{\sinh b^2 \tau} d(P_I, P_I + P_J + \frac{e_0}{2}, P_J | \sigma_I, \sigma_J, \tau) = C'' d(P_J - \frac{b}{2} | \sigma_J, \tau) d(P_I - \frac{b}{2} | \sigma_I, \tau) \quad (\text{A.6})$$

where  $C''$  is independent of the boundary parameters and  $e_0 = \frac{1}{b} - b$ . A similar formula can be obtained for the boundary 3-point function  $d(P_I, P, P_J, \sigma_I, \sigma_J, \tau)$  with a momentum

$$P = P_I + P_J + \frac{e_0}{2} + \frac{j}{b}, \quad j \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{A.7})$$

between the two JS boundaries.

### A.2 Properties of the star product

#### A.2.1 Main properties

In this section we investigate some useful properties of the star product  $*$  previously introduced in [19] to describe the Laplace transformed convolution. Let us first recall its definition,

$$(A * B)(x) = \oint_{[a,b]} \frac{dx'}{2i\pi} \frac{A(x') - A(x)}{x - x'} B(-x') \quad (\text{A.8})$$

where the contour circles the support  $[a, b] \subset \mathbb{R}^-$  of the eigenvalue density.

We will apply this star product to a restricted set of functions with a single branch cut on the set  $[a, b]$ , no poles in  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  and a constant behavior  $A(x) \sim a_0 + O(1/x)$  at infinity. This product is bilinear but not symmetric, e.g. the action of any polynome  $P(x)$  on the right leads to a vanishing result  $P * A = 0$  whereas the action on the left extract the behavior of  $A$  at infinity, for instance:

$$(A * 1)(x) = A(x) - a_0. \quad (\text{A.9})$$

Deforming the contour of integration on the sphere, the integral A.8 gives two contributions corresponding to the singularity at infinity and the branch cut of  $B(-x)$  located on  $\mathbb{R}^+$ . This trick allows us to establish the important relation

$$(A * B)(x) + (B * A)(-x) = A(x)B(-x) - a_0 b_0. \quad (\text{A.10})$$

The star product has the following discontinuity crossing the branch cut  $[a, b]$ ,

$$\text{Disc}(A * B)(x) = B(-x) \text{Disc} A(x) \quad (\text{A.11})$$

where we denoted

$$\text{Disc } A = A(x + i0) - A(x - i0). \quad (\text{A.12})$$

It is sometimes convenient to replace the contour integral by a usual integral over the branch cut,

$$(A * B)(x) = \int_a^b \frac{dx'}{2i\pi} \frac{B(-x')}{x' - x} \text{Disc}_{x'} A. \quad (\text{A.13})$$

We can use this description to prove a few basic properties. If two functions  $A_1$  and  $A_2$  have the same discrepancy crossing the branch cut then  $A_1 * B = A_2 * B$ . Similarly, if two functions  $B_1$  and  $B_2$  take the same values on the symmetric support  $[-b, -a] \subset \mathbb{R}^+$  then  $A * B_1 = A * B_2$ .

### A.2.2 The star product in the critical limit

Let us consider two correlators  $D_0(x)$ ,  $D_1(x)$  in the continuum limit,

$$\epsilon^{\alpha_i} d_i(\xi) = D_i(x) - D_i^*(x) \quad (\text{A.14})$$

where  $x = \epsilon\xi$  and  $D_i^*$  stands for the non-critical part of  $D_i$ . In the continuum limit, correlators have a branch cut along the interval  $] -\infty, 0]$ . The star product of  $D_0$  and  $D_1$  can be written as the sum of a term of order  $\epsilon^{\alpha_0 + \alpha_1}$  corresponding to the star product of  $d_0$  and  $d_1$  plus some higher order terms involving the non-critical part and the behavior of the correlators at infinity:

$$\epsilon^{\alpha_0 + \alpha_1} (d_0 * d_1)(\xi) = (D_0 * D_1)(x) - (D_0 * D_1)^*(x). \quad (\text{A.15})$$

The star product of the critical part being given by

$$(d_0 * d_1)(\xi) = \oint_{]-\infty, 0]} \frac{d\xi'}{2i\pi} \frac{d_0(\xi') - d_0(\xi)}{\xi - \xi'} d_1(-\xi'). \quad (\text{A.16})$$

At the critical point where only the  $\xi$  boundary cosmological constant remains, critical parts of the correlators simply become  $d_i(\xi) = d_i \xi^{\alpha_i}$  and we can easily compute their star product. Indeed, transforming the contour integral using A.13 we get

$$(d_0 * d_1)(\xi) = -\frac{d_0 d_1}{\pi} \sin \pi \alpha_0 \int_0^\infty \frac{\xi'^{\alpha_0 + \alpha_1}}{\xi + \xi'} d\xi' \quad (\text{A.17})$$

since  $\text{Disc } \xi^\alpha = 2i \sin \pi \alpha (-\xi)^\alpha$ . The last integral depends only on the sum  $\alpha_0 + \alpha_1$  and can be computed using the identity

$$\frac{1}{x+a} = \int_0^\infty dl e^{-lx} e^{-la}. \quad (\text{A.18})$$

We write

$$\int_0^\infty \frac{\xi'^{\alpha_0 + \alpha_1}}{\xi + \xi'} d\xi' = \int_0^\infty d\xi' \int_0^\infty dl \xi'^{\alpha_0 + \alpha_1} e^{-l\xi} e^{-l\xi'} \quad (\text{A.19})$$

and perform the change of variable  $\xi' \rightarrow t = \xi'l$ . It leads to the appearance of a gamma function,

$$\int_0^\infty \frac{\xi'^{\alpha_0 + \alpha_1}}{\xi + \xi'} d\xi' = \Gamma(1 + \alpha_0 + \alpha_1) \int_0^\infty dl l^{-1 - \alpha_0 - \alpha_1} e^{-l\xi}. \quad (\text{A.20})$$

A second change of variable  $l \rightarrow l\xi$  finally gives

$$\int_0^\infty \frac{\xi'^{\alpha_0 + \alpha_1}}{\xi + \xi'} d\xi' = \Gamma(1 + \alpha_0 + \alpha_1) \Gamma(-\alpha_0 - \alpha_1) \xi^{\alpha_0 + \alpha_1} \quad (\text{A.21})$$

Using the identity

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad (\text{A.22})$$

we end up with

$$(d_0 * d_1)(\xi) = \frac{\sin \pi \alpha_0}{\sin \pi(\alpha_0 + \alpha_1)} d_0 d_1 \xi^{\alpha_0 + \alpha_1}. \quad (\text{A.23})$$

Note that this quantity satisfies the relation

$$(d_0 * d_1)(\xi) + (d_1 * d_0)(-\xi) = d_0(\xi) d_1(-\xi). \quad (\text{A.24})$$

### A.3 Special cases

In this appendix we consider several cases for which the loop equation simplify. We are then able to compute their solution in the continuum limit. The values found for the critical exponents are necessary to determine the correct dimension of boundary operators in the general situation.

#### A.3.1 $I \cap J = \emptyset$ , $k_{IJ} = 0$

When  $k_{IJ} = 0$ , the loop equation of  $D_{IJ}^{(0\perp)}$  is self consistent and we do not need to consider  $D_{IJ}^{(1\parallel)}$  anymore,

$$0 = D_{IJ}^{(0\perp)} * d_J^{(1\parallel)} + D_I^{(0\perp)}. \quad (\text{A.25})$$

In the continuum limit we deduce the gravitational scaling

$$\gamma_{IJ}^{(0\perp)} = \gamma_I^{(0\perp)} - \gamma_J^{(1\parallel)} = \gamma_J^{(0\perp)} - \gamma_I^{(1\parallel)} \quad (\text{A.26})$$

for the operator inserted between both JS boundaries. The equation  $k_{IJ}(r_{IJ}) = 0$  has for solutions

$$r_{IJ} = \pm(1 + r_I + r_J) + \frac{2j}{\theta}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.27})$$

If we impose the condition  $r_{IJ} \in [1, 1 + 2/\theta]$ , we get  $r_{IJ} = 1 + r_I + r_J$  and  $\gamma_{IJ}^{(0\perp)} = r_{IJ} \frac{\theta}{2b^2} - \frac{1}{2b^2}$ , the dimension of the corresponding JS-JS boundary operator is  $\delta_{r_{IJ}, r_{IJ}}$ .



### A.3.2 $I = J, k_I = k_J = k_{IJ}$

When  $I = J$  correlators simplify into

$$\begin{aligned} D_{IJ}^{(0\perp)}(x, y_I, y_J) &= \frac{D_I^{(0\perp)}(x, y_J) - D_I^{(0\perp)}(x, y_I)}{y_I - y_J} \\ D_{IJ}^{(1\parallel)}(x, y_I, y_J) &= \frac{D_I^{(1\parallel)}(x, y_J) - D_I^{(1\parallel)}(x, y_I)}{y_I - y_J} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

and in the continuum limit,

$$\begin{aligned} d_{IJ}^{(0\perp)}(\xi, \zeta_I, \zeta_J) &= \frac{d_I^{(0\perp)}(\xi, \zeta_J) - d_I^{(0\perp)}(\xi, \zeta_I)}{\zeta_I - \zeta_J} \\ d_{IJ}^{(1\parallel)}(\xi, \zeta_I, \zeta_J) &= k_I \frac{d_I^{(1\parallel)}(\xi, \zeta_J) - d_I^{(1\parallel)}(\xi, \zeta_I)}{\zeta_I - \zeta_J} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

where the non-critical parts were found to be  $D_{IJ}^{(0\perp)*}(x, y_I, y_J) = 0$  and  $D_{IJ}^{(1\parallel)*}(x, y_I, y_J) = -1$ . We easily read the scaling dimensions  $\gamma_{IJ}^{(0\perp)} = \gamma_I^{(0\perp)} - \frac{1}{2}$  and  $\gamma_{IJ}^{(1\parallel)} = \gamma_I^{(1\parallel)} - \frac{1}{2}$ . The boundary operator introduced between the two JS boundaries must be the identity operator  $\delta_{1,1}$ . If we choose the value  $r_{IJ} = 1 \in [1, 1 + 2/\theta]$  for the solution of  $k_{IJ}(r_{IJ}) = k_I = k_J$ , the dimension of the JS-JS boundary operators writes  $\delta_{r_{IJ}, r_{IJ}}$ .<sup>7</sup> Note also the relation

$$D_{IJ}^{(0\parallel)}(x, y_I, y_J) = \frac{D_I^{(0\parallel)}(x, y_J) - D_I^{(0\parallel)}(x, y_I)}{y_I - y_J} \quad (\text{A.30})$$

compatible with the equation 3.19.

### A.3.3 $J \subset I, k_{IJ} = k_J$

When  $I \cap J = J$  (or  $k_{IJ} = k_J$ ) the star product can be eliminated using the property A.10 applied to the sum of the two equations 3.10 at points respectively  $x$  and  $-x$ . We obtain

$$1 + d_I^{(0\perp)}(x) \left( 1 + D_{IJ}^{(1\parallel)}(-x) \right) + k_J D_{IJ}^{(0\perp)}(x) d_J^{(1\parallel)}(-x) = 0. \quad (\text{A.31})$$

In the limit  $k_I \rightarrow k_J$  we retrieve the previous section case. A study of the loop equation A.31 in this limit leads us to define the same non-critical part for  $D_{IJ}^{(0\perp)}$  and  $D_{IJ}^{(1\parallel)}$  as before. Then, the continuum limit of A.31 reads

$$1 + d_I^{(0\perp)}(\xi) d_{IJ}^{(1\parallel)}(-\xi) + k_J d_I^{(0\perp)}(\xi) d_J^{(1\parallel)}(-\xi) = 0. \quad (\text{A.32})$$

It follows  $\gamma_{IJ}^{(0\perp)} = -\gamma_{IJ}^{(1\parallel)}$  and the JS-JS boundary operator has dimension  $\delta_{1+r_J-r_I, 1+r_J-r_I}$ . The equation  $k_{IJ}(r_{IJ}) = k_J$  as for solutions

$$r_{IJ} = \pm(1 + r_J - r_I) + \frac{2j}{\theta}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.33})$$

Restricting to  $r_{IJ} \in [1, 1 + 2/\theta]$  and taking into account that the set  $J$  is included in  $I$ , i.e.  $r_I < r_J$ , the only solution is  $r_{IJ} = 1 + r_J - r_I$ , in agreement with the formula  $\delta_{r_{IJ}, r_{IJ}}$  for the dimension of the JS-JS boundary operator.

<sup>7</sup>There are actually three solutions of  $k_{IJ}(r_{IJ}) = k_I = k_J$  belonging to  $[1, 1 + 2/\theta]$ , namely  $r = 1$  and  $r = \pm 1 + 2/\theta$ . The choice of  $r = 1$  is motivated by the study of the general case  $k_{IJ} = k_I \neq k_J$ .

## References

- [1] I. K. Kostov, “Strings with discrete target space,” Nucl. Phys. B **376**, 539 (1992) [[hep-th/9112059](#)].
- [2] V. A. Kazakov, “Exact solution of the Ising model on a random two-dimensional lattice,” JETP Lett. **44**, 133 (1986) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **44**, 105 (1986)].
- [3] D. V. Boulatov and V. A. Kazakov, “The Ising model on random planar lattice: the structure of phase transition and the exact critical exponents,” Phys. Lett. **186B**, 379 (1987).
- [4] B. Duplantier and I. Kostov, “Conformal spectra of polymers on a random surface,” Phys. Rev. Lett. **61**, 1433 (1988); “Geometrical critical phenomena on a random surface of arbitrary genus,” Nucl. Phys. B **340**, 491 (1990).
- [5] V. K. Kazakov, “Percolation on a fractal with the statistics of planar Feynman graphs: exact solution,” Mod. Phys. Lett. A **4**, 1691 (1989).
- [6] I. K. Kostov, “ $O(n)$  vector model on a planar random lattice: spectrum of anomalous dimensions,” Mod. Phys. Lett. A **4**, 217 (1989).
- [7] V. A. Kazakov and I. K. Kostov, “Loop gas model for open strings,” Nucl. Phys. B **386**, 520 (1992) [[hep-th/9205059](#)].
- [8] I. K. Kostov, B. Ponsot and D. Serban, “Boundary Liouville theory and 2D quantum gravity,” Nucl. Phys. B **683**, 309 (2004) [[hep-th/0307189](#)].
- [9] I. K. Kostov, “Boundary correlators in 2D quantum gravity: Liouville versus discrete approach,” Nucl. Phys. B **658**, 397 (2003) [[hep-th/0212194](#)].
- [10] B. Nienhuis, “Exact critical point and critical exponents of  $O(n)$  models in two-dimensions,” Phys. Rev. Lett. **49**, 1062 (1982).
- [11] B. Nienhuis, “Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas,” J. Statist. Phys. **34**, 731 (1984) and in C. Domb and J. L. Lebowitz, “Phase transitions and critical phenomena. vol. 11,” London, Uk: Academic (1987) 210p.
- [12] I. K. Kostov, “Thermal flow in the gravitational  $O(n)$  model,” [[hep-th/0602075](#)].
- [13] P. Di Francesco, E. Guitter, C. Kristjansen “Fully Packed  $O(n = 1)$  Model on Random Eulerian Triangulations,” Nucl. Phys. B **549**, 657 (1999) [[hep-th/9902082](#)].
- [14] J. L. Jacobsen and H. Saleur, “Conformal boundary loop models,” Nucl. Phys. B **788**, 137 (2008) [[math-ph/0611078](#)].
- [15] A. Nichols, V. Rittenberg and J. de Gier, “One-boundary Temperley-Lieb algebras in the XXZ and loop models,” J. Stat. Mech. **0503**, P003 (2005) [[cond-mat/0411512](#)]; A. Nichols, “The Temperley-Lieb algebra and its generalizations in the Potts and XXZ models,” J. Stat. Mech. **0601**, P003 (2006) [[hep-th/0509069](#)]; A. Nichols, “Structure of the two-boundary XXZ model with non-diagonal boundary terms,” J. Stat. Mech. **0602**, L004 (2006) [[hep-th/0512273](#)].

- [16] P. A. Pearce, J. Rasmussen and J. B. Zuber, “*Logarithmic minimal models*,” J. Stat. Mech. **0611**, P017 (2006) [hep-th/0607232].
- [17] J. Jacobsen and H. Saleur “*Combinatorial aspects of boundary loop models*,” J. Stat. Mech. **2008**, 01 [math-ph/0709.0812].
- [18] I. Kostov, “*Boundary loop models and 2D quantum gravity*,” J. Stat. Mech. **0708**, P08023 (2007) [hep-th/0703221].
- [19] J.-E. Bourgine and K. Hosomichi “*Boundary operators in the  $O(n)$  and RSOS matrix model*,” JHEP **0111**, 009 (2009) [hep-th/0811.3252].
- [20] J. Dubail, J. L. Jacobsen and H. Saleur, “*Conformal two-boundary loop model on the annulus*,” [arXiv:0812.2746].
- [21] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “*Boundary Liouville field theory. I: Boundary state and boundary two-point function*,” [hep-th/0001012].
- [22] B. Ponsot and J. Teschner, “*Boundary Liouville field theory: Boundary three point function*,” Nucl. Phys. B **622**, 309 (2002) [hep-th/0110244].
- [23] K. Hosomichi, “*Bulk-boundary propagator in Liouville theory on a disc*,” JHEP **0111**, 044 (2001) [hep-th/0108093].
- [24] S. Alexandrov and E. Imeroni “ *$c = 1$  from  $c < 1$ : Bulk and boundary correlators*,” Nucl. Phys. B **731**, 242 (2005) [hep-th/0504199].
- [25] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, “*Fractal structure of 2d-quantum gravity*,” Mod. Phys. Lett. A **3**, 819 (1988).
- [26] F. David, “*Conformal field theories coupled to 2D gravity in the conformal gauge*,” Mod. Phys. Lett. A **3**, 1651 (1988).
- [27] J. Distler and H. Kawai, “*Conformal field theory and 2d quantum gravity or who’s afraid of Joseph Liouville?*” Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).
- [28] P. Furlan, V.B. Petkova and M. Stanishkov “*Non-critical string pentagon equations and their solutions*,” Pre-print [hep-th/0805.0134].
- [29] J.-E. Bourgine, K. Hosomichi, I. Kostov and Y. Matsuo “*Scattering of Long Folded Strings and Mixed Correlators in the Two-Matrix Model*,” Nucl. Phys. B **795**, 243 (2008). [hep-th/0709.3912].
- [30] S. Kharchev, D. Lebedev and M. Semenov-Tian-Shansky, “*Unitary representations of  $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ , the modular double, and the multiparticle  $q$ -deformed Toda chains*,” Commun. Math. Phys. **225**, 573 (2002) [hep-th/0102180].
- [31] B. Duplantier, S. Sheffield, “*Duality and KPZ in Liouville Quantum Gravity*,” Phys. Rev. Lett. **102**, 150603 (2009) [0901.0277].
- [32] M. Bauer, F. David, “*Another derivation of the geometrical KPZ relations*,” J. Stat. Mech. **0903** P03004 (2009) [0810.2858].

## Article IV

Boundary transitions of the  $O(n)$  model on a  
dynamical lattice

[ARXIV:0910.1581]

**Boundary transitions of the  $O(n)$  model on a dynamical lattice**Jean-Emile Bourgine\*, Kazuo Hosomichi\* and Ivan Kostov\*<sup>1</sup>*\* Institut de Physique Théorique, CNRS-URA 2306  
C.E.A.-Saclay,  
F-91191 Gif-sur-Yvette, France**\* Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University  
Kyoto 606-8502, Japan*

We study the anisotropic boundary conditions for the dilute  $O(n)$  loop model with the methods of 2D quantum gravity. We solve the problem exactly on a dynamical lattice using the correspondence with a large  $N$  matrix model. We formulate the disk two-point functions with ordinary and anisotropic boundary conditions as loop correlators in the matrix model. We derive the loop equations for these correlators and find their explicit solution in the scaling limit. Our solution reproduces the boundary phase diagram and the boundary critical exponents obtained recently by Dubail, Jacobsen and Saleur, except for the cusp at the isotropic special transition point. Moreover, our solution describes the bulk and the boundary deformations away from the anisotropic special transitions. In particular it shows how the anisotropic special boundary conditions are deformed by the bulk thermal flow towards the dense phase.

<sup>1</sup>Associate member of the Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, 72 Tsarigradsko Chaussée, 1784 Sofia, Bulgaria

**1 Introduction**

The boundary critical phenomena appear in a large spectrum of disciplines of the contemporary theoretical physics, from solid state physics to string theory. The most interesting situation is when the boundary degrees of freedom enjoy a smaller symmetry than those in the bulk. In this case one speaks of surface anisotropy. The D-branes in string theory are perhaps the most studied example of such anisotropic surface behavior. Another example is provided by the ferromagnets with surface exchange anisotropy, which can lead to a critical and multi-critical anisotropic surface transitions. An interesting but difficult task is to study the interplay of surface and the bulk transitions and the related multi-scaling regimes.

For uniaxial ferromagnets as the Ising model, there are four different classes of surface transitions: the ordinary, extraordinary, surface, and special transitions [1]. This classification makes sense also for spin systems with continuous  $O(n)$  symmetry. It was predicted by Diehl and Eisenriegler [2], using the  $\varepsilon$ -expansion and renormalization group methods, that the effects of surface anisotropy can be relevant near the special transitions of the  $d$ -dimensional  $O(n)$  model. These effects lead to ‘anisotropic special transitions’ with different critical exponents.

Recently, an exact solution of the problem for the 2-dimensional  $O(n)$  model was presented by Dubail, Jacobsen and Saleur [3] using its formulation as a loop model [4, 5]. Using an elaborate mixture of Coulomb gas, algebraic and Thermodynamic Bethe Ansatz techniques, the authors of [3] confirmed for the dilute  $O(n)$  model the phase diagram suggested in [2] and determined the exact scaling exponents of the boundary operators. A review of the results obtained in [3], which is accessible for wider audience, can be found in [6]. Their works extended the techniques developed by Jacobsen and Saleur [7, 8] for the dense phase of the  $O(n)$  loop model.

In this paper we examine the bulk and the boundary deformations away from the anisotropic special transitions in the two-dimensional  $O(n)$  model. In particular, we address the question how the anisotropic boundary transitions are influenced by the bulk deformation which relates the dilute and the dense phases of the  $O(n)$  model. To make the problem solvable, we put the model on a dynamical lattice. This procedure is sometimes called ‘coupling to 2D gravity’ [9, 10]. The sum over lattices erases the dependence of the correlation functions on the coordinates, so they become ‘correlation numbers’. Yet the statistical model coupled to gravity contains all the essential information about the critical behavior of the original model such as the qualitative phase diagram and the conformal weights of the scaling operators. When the model is coupled to gravity, the bulk and boundary flows, originally driven by relevant operators, becomes marginal, the Liouville dressing completing the conformal weights to one. This necessitates a different interpretation of the flows. The UV and the IR limits are explored by taking respectively large and small values of the bulk and boundary cosmological constants. Our method of solution is based on the mapping to the  $O(n)$  matrix model [11, 12] and on the techniques developed in [13, 14]. Using the Ward identities of the matrix model, we were able to evaluate the two-point functions of the boundary changing operators for finite bulk and boundary deformations away from the anisotropic special transitions.

The paper is structured as follows. In Sect. 2 we summarize the known results about the boundary transitions in the  $O(n)$  loop model. In Sect. 3 we write down the partition function of the boundary  $O(n)$  model on a dynamical lattice. In particular, we give a microscopic definition of the anisotropic boundary conditions on an arbitrary planar graph. In Sect. 4 we reformulate the problem in terms of the  $O(n)$  matrix model. We construct the matrix model loop observables that correspond to the disk two-point functions with ordinary and anisotropic special boundary conditions. In Sect. 5 we write a set of Ward identities (loop equations) for these loop observables, leaving the derivation to Appendix A. We are eventually interested in the scaling limit, where the volumes of the bulk and the boundary

of the planar graph diverge. This limit corresponds to tuning the bulk and the boundary cosmological constants to their critical values. In Sect. 6 we write the loop equations in the scaling limit in the form of functional equations. From these functional equations we extract all the information about the bulk and the boundary flows. In particular, we obtain the phase diagram for the boundary transitions, which is qualitatively the same as the one suggested in [3, 6], apart of the fact that we do not observe a cusp near the special point. In Sect. 7 we derive the conformal weights of the boundary changing operators. All our results concerning the critical exponents coincide with those of [3, 6]. In Sect. 8 we find the explicit solution of the loop equations in the limit of infinitely large planar graph. The solution represents a scaling function of the coupling for the bulk and boundary perturbations. The endpoints of the bulk and the boundary flows can be found by taking different limits of this general solution. The boundary flows relate the anisotropic special transition with the ordinary or with the extraordinary transition, depending on the sign of the perturbation. The bulk flow relates an anisotropic boundary condition in the dilute phase with another anisotropic boundary condition in the dense phase. For the rational values of the central charge, the boundary conditions associated with the endpoints of the bulk flow match with those predicted in the recent paper [15] using perturbative RG techniques.

## 2 The boundary $O(n)$ model on a regular lattice: a summary

The  $O(n)$  model [4] is one of the most studied statistical models. For the definition of the partition function see Sect. 3. The model has an equivalent description in terms of a gas of self- and mutually avoiding loops with fugacity  $n$ . The partition function of the loop gas depends on the temperature coupling  $T$  which controls the length of the loops:

$$Z_{O(n)} = \sum_{\text{loops}} n^{\#\text{[loops]}} (1/T)^{\#\text{[links occupied by loops]}}. \quad (2.1)$$

In the loop gas formulation of the  $O(n)$  model, the number of flavors  $n$  can be given any real value. The model has a continuum transition if the number of flavors is in the interval  $[-2, 2]$ . Depending on the temperature coupling  $T$  the model has two critical phases, the dense and the dilute phases. At large  $T$  the loops are small and the model has no long range correlations. The dilute phase is achieved at the critical temperature [16, 17]

$$T_c = \sqrt{2 + \sqrt{2 - n}} \quad (2.2)$$

for which the length of the loops diverges. If we adopt for the number of flavors the standard parametrization

$$n = 2 \cos(\pi\theta), \quad 0 < \theta < 1, \quad (2.3)$$

then at the critical bulk temperature the  $O(n)$  model is described by (in general) a non-rational CFT with central charge

$$c_{\text{dilute}} = 1 - 6 \frac{\theta^2}{1 + \theta}. \quad (2.4)$$

The primary operators  $\Phi_{r,s}$  in such a non-rational CFT can be classified according to the generalized Kac table for the conformal weights,

$$h_{rs} = \frac{(rg - s)^2 - (g - 1)^2}{4g}, \quad g = 1 + \theta. \quad (2.5)$$

Unlike the rational CFTs, here the numbers  $r$  and  $s$  can take non-integer values.

When  $T < T_c$ , the loops condense and fill almost all space. This critical phase is known as the dense phase of the loop gas. The dense phase of the  $O(n)$  is described by a CFT with lower value of the central charge,

$$c_{\text{dense}} = 1 - 6 \frac{\theta^2}{1 - \theta}. \quad (2.6)$$

The generalized Kac table for the dense phase is

$$h_{rs} = \frac{(r\tilde{g} - s)^2 - (\tilde{g} - 1)^2}{4\tilde{g}}, \quad \tilde{g} = \frac{1}{1 - \theta}. \quad (2.7)$$

Most of the exact results for the dense and the dilute phases of the  $O(n)$  model were obtained by mapping to Coulomb gas [5, 16].

The boundary  $O(n)$  model was originally studied for the so called *ordinary boundary condition*, where the loops avoid the boundary as they avoid themselves. The ordinary boundary condition is also referred as *Neumann boundary condition* because the measure for the boundary spins is free. The boundary scaling dimensions of the  $L$ -leg operators  $S_L$ , realized as sources of  $L$  open lines, were conjectured for the ordinary boundary condition in [18] and then derived in [19]:

$$\begin{aligned} (Ord|S_L|Ord) &\rightarrow \Phi_{1+L,1}^B && (\text{dilute phase}) \\ (Ord|S_L|Ord) &\rightarrow \Phi_{1,1+L}^B && (\text{dense phase}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Another obvious boundary condition is the *fixed*, or *Dirichlet*, boundary condition, which allows, besides the closed loops, open lines that end at the boundary [20].<sup>2</sup> The dimensions of the  $L$ -leg boundary operators with Dirichlet and Neumann boundary conditions were computed in [21, 22] by coupling the model to 2D gravity and then using the KPZ scaling relation [23, 24]:

$$\begin{aligned} (Ord|S_L|Dir) &\rightarrow \Phi_{1/2+L,0}^B && (\text{dilute phase}) \\ (Ord|S_L|Dir) &\rightarrow \Phi_{0,1/2+L}^B && (\text{dense phase}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

From the perspective of the boundary CFT, these operators are obtained as the result of the fusion of the  $L$ -leg operator and a boundary-condition-changing (BCC) operator, introduced in [25], which transforms the ordinary into Dirichlet boundary condition.

Recently it was discovered that the  $O(n)$  loop model can exhibit unexpectedly rich boundary critical behavior. Jacobsen and Saleur [7, 8] constructed a continuum of conformal boundary conditions for the dense phase of the  $O(n)$  loop model. The *Jacobsen-Saleur boundary condition*, which we denote shortly by JS, prescribes that the loops that touch the boundary at least once are taken with fugacity  $y \neq n$ , while the loops that do not touch the boundary are counted with fugacity  $n$ . The boundary parameter  $y$  can take any real value. The JS boundary conditions contain as particular cases the ordinary ( $y = n$ ) and fixed ( $y = 1$ ) boundary conditions for the  $O(n)$  spins. Jacobsen and Saleur conjectured the spectrum and the conformal dimensions of the  $L$ -leg boundary operators separating the ordinary and the JS boundary conditions. These conformal dimensions were subsequently verified on the model coupled to 2D gravity in [13, 14]. If  $y$  is parametrized in the ‘physical’ interval  $0 \leq y \leq n$  as

$$y = \frac{\sin \pi(r+1)\theta}{\sin \pi r\theta} \quad (1 \leq r \leq 1/\theta - 1), \quad (2.10)$$

<sup>2</sup> In the papers [20, 21, 22] the loop gas was considered in the context of the SOS model, for which the Dirichlet and Neumann boundary conditions have the opposite meaning.

then the BCC operator transforming the ordinary into JS boundary condition is identified as the diagonal operator  $\Phi_{r,r}$ . Note that  $r$  here is not necessarily integer or even rational. The  $L$ -leg operators with  $L \geq 1$  fall into two types. The operator  $S_L^-$  creates open lines which avoid the JS boundary. The operator  $S_L^+$  creates open lines that can touch the JS boundary without restriction. The two types of  $L$ -leg boundary operators are identified as

$$(Ord|S_L^\pm|JS) \rightarrow \Phi_{r,r\pm L}^B \quad (\text{dense phase}). \quad (2.11)$$

The general case of two different JS boundary conditions with boundary parameters  $y_1$  and  $y_2$  was considered for regular and dynamical lattices respectively in [26] and [27].

The JS boundary condition was subsequently adapted to the dilute phase by Dubail, Jacobsen and Saleur [3]. The authors of [3] considered the loop gas analog of the anisotropic boundary interaction studied previously by Diehl and Eisenriegler [2], which breaks the symmetry as

$$O(n) \rightarrow O(n^{(1)}) \times O(n^{(2)}), \quad n^{(1)} + n^{(2)} = n. \quad (2.12)$$

The boundary interaction depends on two coupling constants,  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$ , associated with the two unbroken subgroups. In terms of the loop gas, the anisotropic boundary interaction is defined by introducing loops of two colors, (1) and (2), having fugacities respectively  $n^{(1)}$  and  $n^{(2)}$ . Each time when a loop of color ( $\alpha$ ) touches the JS boundary, it acquires an extra factor  $\lambda_{(\alpha)}$ . We will call this boundary condition *dilute Jacobsen-Saleur boundary condition*, or shortly DJS, after the authors of [3].

Let us summarize the qualitative picture of the surface critical behavior proposed in [3]. Consider first the isotropic direction  $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda$ . In the dilute phase one distinguishes three different kinds of critical surface behavior: ordinary, extraordinary and special. When  $\lambda = 0$ , the loops in the bulk almost never touch the boundary. This is the ordinary boundary condition. When  $w \rightarrow \infty$ , the most probable loop configurations are those with one loop adsorbed along the boundary, which prevents the other loops in the bulk to touch the boundary. The adsorbed loop plays the role of a boundary with ordinary boundary condition. This is the extraordinary transition. In terms of the  $O(n)$  spins, ordinary and the extraordinary boundary conditions describe respectively disordered and ordered boundary spins.<sup>3</sup> The ordinary and the extraordinary boundary conditions describe the same continuous theory except for a reshuffling of the boundary operators. The  $L$ -leg operator with ordinary/ordinary boundary conditions will look, when  $L \geq 1$ , as the  $(L-1)$ -leg operator with ordinary/ordinary boundary conditions, because its rightmost leg will be adsorbed by the boundary. The 0-leg operator with ordinary/extraordinary boundary condition will look like the 1-leg operator with ordinary/ordinary boundary condition because one of the vacuum loops will be partially adsorbed by the extraordinary boundary and the part which is not adsorbed will look as an open line connecting the endpoints of the extraordinary boundary.

The ordinary and the extraordinary boundary conditions are separated by a special transition, which happens at some  $\lambda = \lambda_c$  and describes a conformal boundary condition. For the honeycomb lattice the special point is known [28] to be at

$$\lambda_c = (2-n)^{-1/2} T_c^2 \quad (\text{honeycomb lattice}). \quad (2.13)$$

At the special point the loops touch the boundary without being completely adsorbed by it. The special transition exists only in the dilute phase, because in the dense phase the loops already almost surely

<sup>3</sup>The spontaneous ordering on the boundary does not contradict the Mermin-Wagner theorem. In the interval  $1 < n < 2$  the target space, the  $(n-1)$ -dimensional sphere, has negative curvature and thus resembles a non-compact space.

touch the boundary. The only effect of having small or large  $\lambda$  is the reshuffling of the spectrum of  $L$ -leg operators, which happens in the same way as in the dilute phase.

In the anisotropic case,  $\lambda_{(1)} \neq \lambda_{(2)}$ , there are again three possible transitions: ordinary, extraordinary and special. When  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$  are small, we have the same ordinary boundary condition as in the isotropic case. In the opposite limit, where  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$  are both large, the boundary spins become ordered in two different ways, depending on which of the two couplings prevails. If  $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)}$ , the (1)-type components order, while the (2)-type components remain disordered, and *vice versa*. The  $(\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)})$  plane is thus divided into three domains, characterized by disordered, (1)-ordered and (2)-disordered, and (2)-ordered and (1)-disordered, which we denote respectively by  $Ord$ ,  $Ext_{(1)}$  and  $Ext_{(2)}$ . The domains  $Ext_{(1)}$  and  $Ext_{(2)}$  are separated by the isotropic line starting at the special point and going to infinity. This is a line of first order transitions because crossing it switches from one ground state to the other. The remaining two critical lines,  $Ord/Ext_{(1)}$  and  $Ord/Ext_{(2)}$ , are the lines of the two *anisotropic special transitions*,  $AS_{(1)}$  and  $AS_{(2)}$ . It was argued in [2, 3, 6], using scaling arguments, that the lines  $AS_{(1)}$  and  $AS_{(2)}$  join at the point  $Sp = (\lambda_c, \lambda_c)$  in a cusp-like shape. The model was solved in [3] for a particular point on  $AS_{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)} &= 1 + \frac{1 - n^{(2)} + \sqrt{1 - n^{(1)}n^{(2)}}}{\sqrt{2-n}}, \\ \lambda_{(2)} &= 1 + \frac{1 - n^{(1)} - \sqrt{1 - n^{(1)}n^{(2)}}}{\sqrt{2-n}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

In terms of the loop gas expansion, the anisotropic special transitions are obtained by critically enhancing the interaction with the boundary of the loops of color (1) or (2). The boundary CFT's describing the transitions  $AS_{(1)}$  and  $AS_{(2)}$  were identified in [3]. A convenient parametrization of  $n^{(1)}$  and  $n^{(2)}$  on the real axis is<sup>4</sup>

$$n^{(1)} = \frac{\sin[\pi(r-1)\theta]}{\sin[\pi r\theta]}, \quad n^{(2)} = \frac{\sin[\pi(r+1)\theta]}{\sin[\pi r\theta]} \quad (0 < r < 1/\theta). \quad (2.15)$$

The loop model has a statistical meaning only if both fugacities are positive, which is the case when  $1 < r < 1/\theta - 1$ . With the above parametrization, the BCC operators  $(AS_{(1)}|Ord)$  and  $(AS_{(2)}|Ord)$  are argued to be respectively  $\Phi_{r,r}^B$  and  $\Phi_{r,r+1}^B$ . More generally, one can consider the  $L$ -leg boundary operators,  $S_L^{(1)}$  and  $S_L^{(2)}$ , which create  $L$  open lines of color respectively (1) and (2). The Kac labels of these operators were determined in [3] as follows,

$$\begin{aligned} (Ord|S_L^{(1)}|AS_{(1)}) &\rightarrow \Phi_{r+L,r}^B, & (Ord|S_L^{(2)}|AS_{(1)}) &\rightarrow \Phi_{r-L,r}^B, \\ (Ord|S_L^{(1)}|AS_{(2)}) &\rightarrow \Phi_{r+L,r+1}^B, & (Ord|S_L^{(2)}|AS_{(2)}) &\rightarrow \Phi_{r-L,r+1}^B. \end{aligned} \quad (2.16)$$

In the vicinity of the special transitions the theory is argued to be described by a perturbation of the boundary CFT by the boundary operator  $\Phi_{1,3}^B$  in the isotropic direction and by  $\Phi_{3,3}^B$  in the anisotropic direction.

<sup>4</sup>The correspondence between our notations and the notations used in [6] is  $\{n^{(1)}, n^{(2)}, r, \lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}\}_{\text{here}} = \{n_2, n_1, r, w_2, w_1\}_{\text{there}}$ .

### 3 The boundary $O(n)$ model on a dynamical lattice

#### 3.1 Anisotropic boundary conditions for the $O(n)$ model on a planar graph

The two-dimensional  $O(n)$  loop model, originally defined on the honeycomb lattice [4], can be also considered on a honeycomb lattice with defects, such as the one shown in Fig. 1a. The lattice represents a trivalent planar graph  $\Gamma$ . We define the boundary  $\partial\Gamma$  of the graph by adding a set of extra lines (the single lines in the figure) which turn the original planar graph into a two-dimensional cellular complex. The local fluctuating variable is an  $O(n)$  classical spin, that is an  $n$ -component vector  $\vec{S}(r)$  with unit norm, associated with each vertex  $r \in \Gamma$ , including the vertices on the boundary  $\partial\Gamma$ . The partition function of the  $O(n)$  model on the graph  $\Gamma$  depends on the coupling  $T$ , called temperature, and is defined as an integral over all classical spins,

$$Z_{O(n)}(T; \Gamma) = \int \prod_{r \in \Gamma} [d\vec{S}(r)] \prod_{\langle rr' \rangle} \left( 1 + \frac{1}{T} \vec{S}(r) \cdot \vec{S}(r') \right), \quad (3.1)$$

where the product runs over the lines  $\langle rr' \rangle$  of the graph, excluding the lines along the boundary. The  $O(n)$ -invariant measure  $[d\vec{S}]$  is normalized so that

$$\int [d\vec{S}] S_a S_b = \delta_{a,b}. \quad (3.2)$$

The partition function (3.1) corresponds to the *ordinary boundary condition*, in which there is no interaction along the boundary.

Expanding the integrand as a sum of monomials, the partition function can be written as a sum over all configurations of self-avoiding, mutually-avoiding loops as the one shown in Fig. 1b, each counted with a factor of  $n$ :

$$Z_{O(n)}(T; \Gamma) = \sum_{\text{loops on } \Gamma} T^{-\text{length}} n^{\#\text{loops}}. \quad (3.3)$$

The temperature coupling  $T$  controls the length of the loops. The advantage of the loop gas representation (3.3) is that it makes sense also for non-integer  $n$ . In terms of loop gas, the ordinary boundary condition, which we will denote by *Ord*, means that the loops in the bulk avoid the boundary as they avoid the other loops and themselves.

The *Dirichlet boundary condition*, was originally defined for the dense phase of the loop gas [20, 21, 22] and requires that an open line starts at each point on the boundary. The dilute version of this boundary condition depends on an adjustable parameter, which controls the number of the open lines. In terms of the  $O(n)$  spins the Dirichlet boundary condition is obtained by switching on a constant magnetic field  $\vec{B}$  acting on the boundary spins. This modifies the integration measure in (3.1) by a factor

$$\prod_{r \in \partial\Gamma} \left( 1 + \vec{B} \cdot \vec{S}(r) \right), \quad (3.4)$$

where the product goes over all boundary sites  $r$ . The loop expansion with this boundary measure contains open lines having both ends at the boundary, each weighted with a factor  $\vec{B}^2$ .

The *dilute anisotropic (DJS) boundary condition* is defined as follows. The  $n$  components of the  $O(n)$  spin are split into two sets, (1) and (2), containing respectively  $n^{(1)}$  and  $n^{(2)}$  components, with  $n^{(1)} + n^{(2)} = n$ . This leads to a decomposition of the  $O(n)$  spin as

$$\vec{S} = \vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)}, \quad \vec{S}_{(1)} \cdot \vec{S}_{(2)} = 0. \quad (3.5)$$

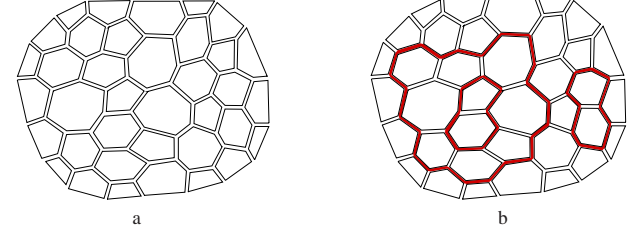


Figure 1: a) A trivalent planar graph  $\Gamma$  with a boundary b) A loop configuration on  $\Gamma$  for the ordinary boundary condition. The loops avoid the boundary as they avoid themselves

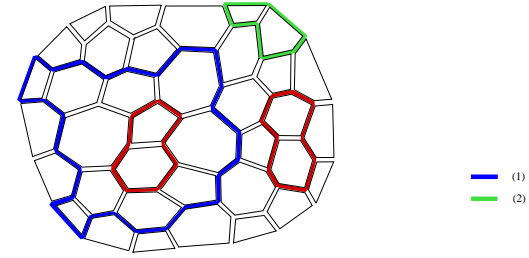


Figure 2: A loop configuration for the JS boundary condition. The loops in the bulk (in red) have fugacity  $n$ , while the loops that touch the boundary (in blue and green) have fugacities  $n^{(1)}$  or  $n^{(2)}$  depending on their color.

The DJS boundary condition is introduced by an extra factor associated with the boundary links,

$$\prod_{\langle rr' \rangle \in \partial\Gamma} \left( 1 + \sum_{\alpha=1,2} \lambda_{(\alpha)} \vec{S}_{(\alpha)}(r) \cdot \vec{S}_{(\alpha)}(r') \right). \quad (3.6)$$

This boundary interaction is invariant under the subgroup of independent rotations of  $\vec{S}_{(1)}$  and  $\vec{S}_{(2)}$ . The boundary term changes the loop expansion. The loops are now allowed to pass along the boundary links as shown in Fig. 2. We have to introduce loops of two colors, (1) and (2), having fugacities respectively  $n^{(1)}$  and  $n^{(2)}$ . A loop of color  $(\alpha)$  that visits  $\mathcal{N}$  boundary links acquires an additional weight factor  $\lambda_{(\alpha)}^{\mathcal{N}}$ . For the loops that do not touch the boundary, the contributions of the two colors sum up to  $n^{(1)} + n^{(2)} = n$  and we obtain the same weight as with the ordinary boundary condition.

#### 3.2 Coupling to 2D discrete gravity

The disk partition function of the  $O(n)$  model on a dynamical lattice is defined as the expectation value of (3.1) in the ensemble of all trivalent planar graphs  $\Gamma$  with the topology of the disk. The measure depends on two more couplings,  $\bar{\mu}$  and  $\bar{\mu}_B$ , called respectively bulk and boundary cosmological con-

stants,<sup>5</sup> associated with the volume  $|\Gamma| = \#(\text{cells})$  and the boundary length  $|\partial\Gamma| = \#(\text{external lines})$ . The partition function of the disk is a function of  $\bar{\mu}$  and  $\bar{\mu}_B$  and is defined by

$$U(T, \bar{\mu}, \bar{\mu}_B) = \sum_{\Gamma \in \{\text{Disk}\}} \frac{1}{|\partial\Gamma|} \left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)^{|\Gamma|} \left(\frac{1}{\bar{\mu}_B}\right)^{|\partial\Gamma|} Z_{O(n)}(T; \Gamma). \quad (3.7)$$

### 3.3 Two-point functions of the $L$ -leg boundary operators

Our aim is to evaluate the boundary two-point function of two  $L$ -leg operators separating ordinary and anisotropic boundary conditions. The  $L$ -leg operator  $S_L$  is obtained by fusing  $L$  spins with flavor indices  $a_1, \dots, a_n \in \{1, \dots, n\}$ . In terms of the loop gas, the operator  $S_L$  creates  $L$  self and mutually avoiding open lines. We would like to exclude configurations where some of the lines contract among themselves. This can be achieved by taking the antisymmetrized product

$$S_L \sim \det_{L \times L} S_{a_i}(r_j), \quad (3.8)$$

where  $r_1, \dots, r_L$  are  $L$  consecutive boundary vertices of the planar graph  $\Gamma$ , and we put the label  $L$  instead of writing its dependence on  $a_1, \dots, a_L$  explicitly. The two-point function of the operator  $S_L$  is evaluated as the partition function of the loop gas in presence of  $L$  open lines connecting the points  $\{r_i\}$  and  $\{r'_i\}$ . The open lines are self- and mutually avoiding, and are not allowed to intersect the vacuum loops.

Since the DJS boundary condition breaks the  $O(n)$  symmetry into  $O(n^{(1)}) \times O(n^{(2)})$ , there are two inequivalent correlation functions of the  $L$ -leg operators with  $Ord/DJS$  boundary conditions. Indeed, the insertion of  $S_a$  has different effects depending on whether  $a$  belongs to the  $O(n^{(1)})$  or the  $O(n^{(2)})$  sectors. In the first case the open line created by  $S_a$  acquires a factor  $\lambda_{(1)}$  each time it visits a boundary link. In the second case, the factor is  $\lambda_{(2)}$ . Therefore the boundary spin operators (3.8) with  $Ord/DJS$  boundary conditions split into two classes,

$$\begin{aligned} S_L^{(1)} &\sim \det[S_{a_i}(r_j)], \quad a_1, \dots, a_L \in (1), \\ S_L^{(2)} &\sim \det[S_{a_i}(r_j)], \quad a_1, \dots, a_L \in (2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

We denote the corresponding boundary two-point functions respectively by  $D_L^{(1)}$  and  $D_L^{(2)}$ .

## 4 Mapping to the $O(n)$ matrix model

The  $O(n)$  matrix model [11, 12] generates planar graphs covered by loops in the same way as the one-matrix models considered in the classical paper [29] generate empty planar graphs. The model involves the hermitian  $N \times N$  matrices  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{Y}_a$ , where the flavor index  $a$  takes  $n$  values. The partition function is given by an  $O(n)$ -invariant matrix integral

$$\mathcal{Z}_N(T) \sim \int d\mathbf{M} d^n \mathbf{Y} e^{-\beta \text{tr} \left( \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 + \frac{T}{2} \bar{\mathbf{Y}}^2 - \frac{1}{3} \mathbf{M}^3 - \mathbf{M} \bar{\mathbf{Y}}^2 \right)}. \quad (4.1)$$

This integral can be considered as the partition function of a zero-dimensional QFT with Feynman rules given in Fig. 3, where we used the 't Hooft double-line notations. The graphs made of such

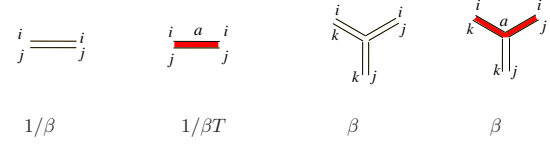


Figure 3: Feynman rules for the  $O(n)$  matrix model

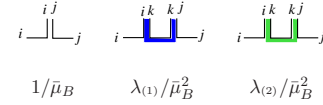


Figure 4: The constituents of the DJS boundary generated by  $\mathbf{M}$ ,  $\bar{\mathbf{Y}}_{(1)}^2$  and  $\bar{\mathbf{Y}}_{(2)}^2$ : a non-occupied site, a sequence of two sites visited by a loop of color (1), and a sequence of two sites visited by a loop of color (1)

double-lined propagators are known as fat graphs. The ‘vacuum energy’ of the matrix model represents a sum over connected fat graphs, which can be also considered as discretized two-dimensional surfaces of all possible genera. As the action is quadratic in the matrices  $\mathbf{Y}_a$ , their propagators arrange in closed loops carrying a flavor  $a$ . The sum of all Feynman graphs with given connectivity can be viewed as the sum over all configurations of self and mutually avoiding loops on a given discretized surface. The weight of each loop is given by the product of factors  $1/T$ , one for each link, and the number of flavors  $n$ . We are interested in the large  $N$  limit

$$N \rightarrow \infty, \quad \beta/N = \bar{\mu}^2 \text{ (fixed)}, \quad (4.2)$$

in which only fat graphs of genus zero survive [30].

The basic observable in the matrix model is the resolvent

$$W(\bar{\mu}_B) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{\bar{\mu}_B - \mathbf{M}} \right\rangle, \quad (4.3)$$

evaluated in the ensemble (4.1). The resolvent is the one-point function with ordinary boundary conditions and is related to the disk partition function by  $W = -\partial_{\bar{\mu}_B} U$ .

The one-point function with Dirichlet boundary condition is obtained by adding a term  $\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{Y}}$  which expresses the coupling with the magnetic field on the boundary. This leads to a more-complicated resolvent

$$R(\bar{\mu}_B, \bar{\mathbf{B}}^2) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{\bar{\mu}_B - \mathbf{M} - \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{Y}}} \right\rangle. \quad (4.4)$$

In order to include the anisotropic boundary conditions in this scheme, we decompose the vector  $\bar{\mathbf{Y}}$  into a sum of an  $n^{(1)}$ -component vector  $\bar{\mathbf{Y}}_{(1)}$  and an  $n^{(2)}$ -component vector  $\bar{\mathbf{Y}}_{(2)}$  as in (3.5):

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}}_{(1)} + \bar{\mathbf{Y}}_{(2)}, \quad \bar{\mathbf{Y}}_{(1)} \cdot \bar{\mathbf{Y}}_{(2)} = 0. \quad (4.5)$$

<sup>5</sup>We used bars to distinguish from the bulk and boundary cosmological constants in the continuum limit.



The one-point function with ordinary and DJS boundary conditions is given by the resolvent

$$H(\bar{\mu}_B, \lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{1}{\bar{\mu}_B - \mathbf{M} - \frac{1}{\bar{\mu}_B} \sum_{\alpha=1,2} \lambda_{(\alpha)} \bar{\mathbf{Y}}_{(\alpha)}^2} \right\rangle. \quad (4.6)$$

The two extra terms are the operators creating boundary links containing segments of lines of type (1) and (2), as shown in Fig.4. Each such operator created two boundary sites, hence the factor  $1/\bar{\mu}_B$ .

The matrix integral measure becomes singular at  $\mathbf{M} = T/2$ . We perform a linear change of the variables

$$\mathbf{M} = T\left(\frac{1}{2} + \mathbf{X}\right), \quad (4.7)$$

which sends this singular point to  $\mathbf{X} = 0$ . After a suitable rescaling of  $\bar{\mathbf{Y}}$  and  $\beta$ , the matrix model partition function takes the canonical form

$$Z_N \sim \int d\mathbf{X} d^n \mathbf{Y} e^{\beta \text{tr}[-V(\mathbf{X}) + \mathbf{X}\bar{\mathbf{Y}}^2]}, \quad (4.8)$$

where  $V(x)$  is a cubic potential

$$V(x) = \sum_{j=0}^3 \frac{g_j}{j} x^j = -\frac{T}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (4.9)$$

We introduce the spectral parameter  $x$  which is related to the lattice boundary cosmological constant  $\bar{\mu}_B$  by

$$\bar{\mu}_B = T\left(x + \frac{1}{2}\right). \quad (4.10)$$

Now the one-point function with ordinary boundary condition is

$$W(x) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \mathbf{W}(x) \rangle, \quad (4.11)$$

where the matrix

$$\mathbf{W}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x - \mathbf{X}}. \quad (4.12)$$

creates a boundary segment with open ends. In the following we will call  $x$  boundary cosmological constant. We also redefine the boundary couplings  $\lambda_{(\alpha)}$  in (4.6) as

$$\lambda_{(\alpha)} \rightarrow \lambda_{(\alpha)} \bar{\mu}_B, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.13)$$

Then the operator that creates a boundary segment with DJS boundary condition is

$$\mathbf{H}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{y - \mathbf{X} - \lambda_{(1)} \bar{\mathbf{Y}}_{(1)}^2 - \lambda_{(2)} \bar{\mathbf{Y}}_{(2)}^2}. \quad (4.14)$$

The boundary  $L$ -leg operators are represented by the antisymmetrized products

$$\mathbf{S}_L \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}_{a_1} \mathbf{Y}_{a_2} \cdots \mathbf{Y}_{a_L} \pm \text{permutations}. \quad (4.15)$$

The boundary two-point function of the  $L$ -leg operator with  $Ord/Ord$  boundary conditions is given by the expectation value

$$D_L(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\beta} \langle \text{tr}[\mathbf{W}(x_1) \mathbf{S}_L \mathbf{W}(x_2) \mathbf{S}_L] \rangle. \quad (4.16)$$

The role of the operators  $\mathbf{W}(x_1)$  and  $\mathbf{W}(x_2)$  is to create the two boundary segments with boundary cosmological constants respectively  $x_1$  and  $x_2$ . The two insertions  $\mathbf{S}_L$  generate  $L$  open lines at the points separating the two segments. It is useful to extend this definition to the case  $L = 0$ , assuming that  $S_0$  is the boundary identity operator. In this simplest case the expectation value (4.16) is evaluated instantly as

$$D_0(x_1, x_2) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr}[\mathbf{W}(x_1) \mathbf{W}(x_2)] \rangle = \frac{W(x_2) - W(x_1)}{x_1 - x_2}. \quad (4.17)$$

The two-point functions (4.16) for  $L \geq 1$  were computed in [21, 22].

In the case of a DJS boundary condition, the matrix model realization of the two types of boundary  $L$ -leg operators is given by the antisymmetrized products (4.15), with the restrictions on the components as in (3.9). The boundary two-point functions with  $Ord/DJS$  boundary conditions are evaluated by the expectation values

$$D_0(x, y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr}[\mathbf{W}(x) \mathbf{H}(y)] \rangle \quad (4.18)$$

and for  $L \geq 1$ ,

$$D_L^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr}[\mathbf{W}(x) \mathbf{S}_L^{(1)} \mathbf{H}(y) \mathbf{S}_L^{(1)}] \rangle, \quad (4.19)$$

$$D_L^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr}[\mathbf{W}(x) \mathbf{S}_L^{(2)} \mathbf{H}(y) \mathbf{S}_L^{(2)}] \rangle. \quad (4.20)$$

Apart of the DJS boundary parameter  $n^{(1)}$  and the boundary couplings  $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$  for the second segment, they depend on the boundary cosmological constants  $x$  and  $y$  associated with the two segments of the boundary.

## 5 Loop equations

Our goal is to evaluate the two-point functions (4.19) in the continuum limit, when the area and the boundary length of the disk are very large. They will be obtained as solution of a set of Ward identities, called loop equations, which follow from the translational invariance of the integration measure in (4.1), and in which the  $n^{(1)}$  enters as a parameter. The solutions of the loop equations are analytic functions of  $n^{(1)}$  which can take any real value. We will restrict our analysis to the ‘physical’ case  $0 \leq n^{(1)} \leq n$ , when the correlation functions have good statistical limit. Here we summarize the loop equations which will be extensively studied in following sections. The proofs are given in Appendix A.

### 5.1 Loop equation for the resolvent

The loop equation for the resolvent is known [31], but we nevertheless recall it here in order to set up a self-contained description of the method. The resolvent  $W(x)$  splits into a singular part  $w(x)$  and a polynomial  $W_{\text{reg}}(x)$ :

$$W(x) \stackrel{\text{def}}{=} W_{\text{reg}}(x) + w(x). \quad (5.1)$$

The regular part is given by

$$\begin{aligned} W_{\text{reg}}(x) &= \frac{2V'(x) - nV'(-x)}{4 - n^2} = -a_0 - a_1x - a_2x^2, \\ a_0 &= -\frac{g_1}{2+n} = \frac{T-2}{4(2+n)}, \\ a_1 &= -\frac{g_2}{2-n} = \frac{T-1}{2-n}, \\ a_2 &= -\frac{g_3}{2+n} = \frac{T}{2+n}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

The function  $w(x)$  satisfies a quadratic identity

$$w^2(x) + w^2(-x) + nw(x)w(-x) = A + Bx^2 + Cx^4. \quad (5.3)$$

The coefficients  $A, B, C$  as functions of  $T, \bar{\mu}$  and  $W_1 = \langle \text{tr} X \rangle$  can be evaluated by substituting the large- $x$  asymptotics

$$w(x) = -W_{\text{reg}}(x) + \frac{\bar{\mu}^{-2}}{x} + \frac{\langle \text{tr} X \rangle}{\beta x^2} + O(x^{-3}) \quad (5.4)$$

in (5.3). The solution of the loop equation (5.3) with the asymptotics (5.4) is given by a meromorphic function with a single cut  $[a, b]$  on the first sheet, with  $a < b < 0$ . This equation can be solved by an elliptic parametrization and the solution is expressed in terms of Jacobi theta functions [32].

## 5.2 Loop equations for the boundary two-point functions with Ord/DJS boundary conditions

The two-point correlators (4.16) with ordinary boundary conditions are known to satisfy the integral recurrence equations [21, 22]

$$D_{L+1} = W \star D_L. \quad (5.5)$$

The “ $\star$ -product” is defined for any pair of meromorphic functions, analytic in the right half plane  $\text{Re}(x) \geq 0$  and vanishing at infinity,

$$[f \star g](x) \stackrel{\text{def}}{=} - \oint_{\mathcal{C}_-} \frac{dx'}{2\pi i} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} g(-x'), \quad (5.6)$$

with the contour  $\mathcal{C}_-$  encircling the left half plane  $\text{Re} x < 0$ . These equations actually hold for a more general set of two-point correlators, which have ordinary boundary condition on one segment and an arbitrary boundary condition on the other segment [13]. Thus the boundary two-point functions (4.19) and (4.20) for  $L \geq 1$  satisfy the same recurrence equations

$$\begin{aligned} D_{L+1}^{(1)} &= W \star D_L^{(1)}, \\ D_{L+1}^{(2)} &= W \star D_L^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Using the recurrence relation, the correlation functions of the  $L$ -leg operators can be obtained recursively from those of the one-leg operators  $D_1^{(1)}$  and  $D_1^{(2)}$ .

The correlator  $D_0$ , defined by (4.18), and the correlators  $D_1^{(1)}$  and  $D_1^{(2)}$ , which we normalize as

$$D_1^{(\alpha)}(x, y) = \frac{1}{\beta n^{(\alpha)}} \sum_a \left\langle \text{tr} [\mathbf{W}(x) \mathbf{Y}_a^{(\alpha)} \mathbf{H}(y) \mathbf{Y}_a^{(\alpha)}] \right\rangle \quad (\alpha = 1, 2), \quad (5.8)$$

can be determined by the following pair of bilinear functional equations, derived in Appendix A. In order to shorten the expressions, here and below we use the shorthand notation

$$\overline{F(x)} \stackrel{\text{def}}{=} F(-x). \quad (5.9)$$

The two equations then read

$$W - H + D_0(x - y) + \sum_{\alpha=1,2} n^{(\alpha)} \lambda_{(\alpha)} \left( (\lambda_{(\alpha)} D_0 - 1) \overline{D_1^{(\alpha)}} + \overline{W} D_0 \right) = 0, \quad (5.10)$$

$$P + D_0(H - V' + W + n\overline{W}) + \sum_{\alpha=1,2} n^{(\alpha)} (\lambda_{(\alpha)} D_0 - 1) \overline{D_1^{(\alpha)}} = 0. \quad (5.11)$$

The second equation involves an unknown linear function of  $x$ :

$$P(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \frac{V'(x) - V'(\mathbf{X})}{x - \mathbf{X}} \mathbf{H}(y) \right\rangle = g_2 H(y) + g_3 H_1(y) + x g_3 H(y). \quad (5.12)$$

Equations (5.10) and (5.11) can be solved in favor of  $D_1^{(1)}$  or  $D_1^{(2)}$ . If we define

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{(1)} D_0 - 1, \\ \mathcal{B}^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_{(1)} - \lambda_{(2)}) n^{(1)} \{ \lambda_{(1)} D_1^{(1)} + W \} - \lambda_{(2)} (\overline{W} - \overline{V'} + H) - x - y, \\ \mathcal{C}^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{(1)} \lambda_{(2)} P + (\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)}) H - x + y - (\lambda_{(1)} - \lambda_{(2)}) (W + n^{(1)} \overline{W}) - \lambda_{(2)} V', \end{aligned} \quad (5.13)$$

and similarly for  $\mathcal{A}^{(2)}, \mathcal{B}^{(2)}, \mathcal{C}^{(2)}$ , with an obvious exchange (1)  $\leftrightarrow$  (2), then (5.10) and (5.11) take the following factorized form:

$$\mathcal{A}^{(\alpha)} \overline{\mathcal{B}^{(\alpha)}} = \mathcal{C}^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (5.14)$$

Equations (5.14) are the main instrument of our analysis of the DJS boundary conditions.

It is convenient to define the functions  $D_0^{(\alpha)}$  by

$$D_0^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D_0}{1 - \lambda_{(\alpha)} D_0} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (5.15)$$

In Appendix A we show that with this definition the recurrence equations (5.7) hold also for  $L = 0$ . The equation for  $L = 0$  is a consequence of (5.14).

## 5.3 Loop equation for the two-point function with Ord/Dir boundary conditions

On the flat lattice, the DJS boundary condition with  $n^{(1)} = 1$  is equivalent, for a special choice of the boundary parameters, to the Dirichlet boundary condition defined by the boundary factor (3.4). In order to make the comparison on the dynamical lattice, we will formulate and solve the loop equation for the two-point function of the BCC operator with ordinary/Dirichlet boundary conditions.

Assume that the magnetic field points at the direction  $a = 1$ . Then the correlator in question is given in the matrix model by the expectation value

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \mathbf{W}(x) \mathbf{R}(y) \rangle, \quad \mathbf{R}(y) = \frac{1}{y - \mathbf{X} - B \mathbf{Y}_1}. \quad (5.16)$$

To obtain the loop equation we start with the identity

$$W(x) - R(y) = (y - x) \Omega(x, y) - B \Omega_1(x, y), \quad (5.17)$$

where we denoted by  $R(y)$  the one-point function with Dirichlet boundary condition,

$$R(x) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \mathbf{R}(y) \rangle, \quad (5.18)$$

and introduced the auxiliary function

$$\Omega_1(x, y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \mathbf{Y}_1 \mathbf{W}(x) \mathbf{R}(y) \rangle. \quad (5.19)$$

The function  $\Omega_1$  satisfies the identity

$$\Omega_1(x, y) = B \oint_{\mathcal{C}_-} \frac{dx_1}{2\pi i} \frac{\Omega(x_1, y) \Omega(-x_1, y)}{x - x_1}, \quad (5.20)$$

which follows from (A.3). After symmetrizing with respect to  $x$  we get

$$\Omega_1(x, y) + \Omega_1(-x, y) = B \Omega(x, y) \Omega(-x, y). \quad (5.21)$$

From here we obtain a quadratic functional equation for the correlator  $\Omega$ :

$$(x - y) \Omega(x, y) - (x + y) \Omega(-x, y) + W(x) + W(-x) + B^2 \Omega(x, y) \Omega(-x, y) = 2R(y). \quad (5.22)$$

The linear term can be eliminated by a shift

$$G(x, y) = B \Omega(x, y) - \frac{x + y}{B}. \quad (5.23)$$

The function  $G$  satisfies

$$G(x, y) G(-x, y) = -W(x) - W(-x) + 2R(y) - \frac{x^2 - y^2}{B^2}. \quad (5.24)$$

This equation is to be compared with the loop equation (5.14) for Ord/DJS boundary conditions, with  $n^{(1)} = 1$  and  $\lambda_{(2)} = 0$ :

$$\frac{1}{\lambda_{(1)}} \mathcal{A}^{(1)}(x, y) \mathcal{B}^{(1)}(-x, y) = -W(x) - W(-x) + H(y) - \frac{x - y}{\lambda_{(1)}}. \quad (5.25)$$

These two equations coincide in the limit  $B, \lambda_{(1)} \rightarrow \infty$ . To see this it is sufficient to notice that in the limit  $\lambda_{(1)} \rightarrow \infty$  we have the relation  $\mathcal{B}^{(1)} = y \mathcal{A}^{(1)}$ . The exact relation between  $\mathcal{A}^{(1)}$  (with  $n^{(1)} = 1, \lambda_{(2)} = 0$ ) and  $G$  in this limit follows from the definitions of  $D_0$  and  $\Omega$ :

$$\mathcal{A}^{(1)}(x, y') = B \frac{G(x, y) - G(x, -y)}{2y}, \quad \lambda_{(1)} = B^2, \quad y' = y^2 \quad (B \rightarrow \infty). \quad (5.26)$$

## 6 Scaling limit

In this section we will study the continuum limit of the solution, in which the sum over lattices is dominated by those with diverging area and boundary length. The continuum limit is achieved when the couplings  $x, y$  and  $\bar{\mu}$  are tuned close to their critical values.

Once the bulk coupling constants are set to their critical values, we will look for the critical line in the space of the boundary couplings  $y, \lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$ . After the shift (4.7) the boundary cosmological constant  $x$  has its critical value at  $x = 0$ , while the critical value of  $y$  in general depends on the values of  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$ .

### 6.1 Scaling limit of the disk one-point function

Here we recall the derivation of the continuum limit of the one-point function  $W(x)$  from the functional equation (5.3). Even if the result is well known, we find useful to explain how it is obtained in order to set up the logic of our approach to the solution of the functional equations (5.14).

In the limit  $x \rightarrow 0$ , the boundary length  $|\partial\Gamma|$  of the planar graphs in (3.7) becomes critical. The quadratic functional equation (5.3) becomes singular at  $x \rightarrow 0$  when the coefficient  $A$  on the r.h.s. vanishes. This determines the critical value of the cosmological constant  $\bar{\mu}$ , for which the volume  $|\Gamma|$  of a typical planar graph diverges. The condition that the coefficient  $B$  of the linear term vanishes determines the critical value of the temperature coupling  $T = T_c$  for which the length of the loops diverges:

$$T_c = 1 + \sqrt{\frac{2-n}{6+n}} \in [1, 2]. \quad (6.1)$$

Near the critical temperature the coefficient  $B$  is proportional to  $T - T_c$ .

We rescale  $x \rightarrow \epsilon x$ , where  $\epsilon$  is a small cutoff parameter with dimension of length, and define the renormalized coupling constants as

$$\bar{\mu} - \bar{\mu}_c \sim \epsilon^2 \mu, \quad T - T_c \sim \epsilon^{2\theta} t \quad (6.2)$$

and write (5.1) as

$$W(x) \stackrel{\text{def}}{=} W_{\text{reg}} + \epsilon^{1+\theta} w(x). \quad (6.3)$$

The renormalized bulk and boundary cosmological constants are coupled respectively to the renormalized area  $A$  and boundary length  $\ell$  of the graph  $\Gamma$  defined as

$$A = \epsilon^2 |\Gamma|, \quad \ell = \epsilon |\partial\Gamma|. \quad (6.4)$$

In the following we define the dimensions of the scaling observables by the way they scale with  $x$ . We will say that the quantity  $f$  has dimension  $d$  if the ratio  $f/x^d$  is invariant with respect to rescalings. In this case we write  $[f] = d$ . The continuous quantities introduced until now have scaling dimensions

$$[x] = 1, \quad [\mu] = 2, \quad [t] = 2\theta, \quad [w] = 1 + \theta. \quad (6.5)$$

The scaling resolvent  $w(x)$  is a function with a cut on the negative axis in the  $x$ -plane. It can be obtained from the general solution found in [32] by taking the limit in which the cut extends to the semi-infinite interval  $[-\infty, -M]$ . To determine  $M$  as a function of  $\mu$  and  $t$  one has to solve a system of difficult transcendental equations. A simpler indirect method was given in [33]. We begin by noticing that the term  $Cx^d$  in (5.3) drops out because it vanishes faster than the other terms when

$x \rightarrow 0$ , and  $B = B_1 t$ , where  $B_1$  depends only on  $n$ . Introducing a hyperbolic map which resolves the branch point at  $x = -M$ ,

$$x = M \cosh \tau, \quad (6.6)$$

we obtain a quadratic functional equation for the entire function  $w(\tau) \equiv w[x(\tau)]$ :

$$w^2(\tau + i\pi) + w^2(\tau) + n w(\tau + i\pi)w(\tau) = A + B_1 t M^2 \cosh^2 \tau. \quad (6.7)$$

This equation does not depend on the cutoff  $\epsilon$ , which justifies the definition of the renormalized thermal coupling in (6.2). Then the unique solution of this equation is, up a factor which depends on the normalization of  $t$ ,

$$w(\tau) = M^{1+\theta} \cosh(1+\theta)\tau + t M^{1-\theta} \cosh(1-\theta)\tau. \quad (6.8)$$

One finds  $B_1 = 4 \sin^2(\pi\theta)$  and  $A = \sin^2(\pi\theta)(M^{1+\theta} - t M^{1-\theta})^2$  for this solution.

The function  $M = M(\mu, t)$  can be evaluated using the fact that the derivative  $\partial_\mu W(x)$  depends on  $\mu$  and  $t$  only through  $M$ . As a consequence, in the derivative of the solution in  $\mu$  at fixed  $x$ ,

$$\partial_\mu w = -M \partial_\mu M \left( (1+\theta)M^\theta - (1-\theta)tM^{-\theta} \right) \frac{\sinh \theta \tau}{\sinh \tau}, \quad (6.9)$$

the factor in front of the hyperbolic function must be proportional to  $M^{\theta-1}$ :

$$\partial_\mu M \left( (1+\theta)M^\theta - (1-\theta)tM^{-\theta} \right) \sim M^{\theta-1}.$$

Integrating with respect to  $\mu$  one finds, for certain normalization of  $\mu$ ,

$$\mu = (1+\theta)M^2 - tM^{2-2\theta}. \quad (6.10)$$

To summarize, the disk bulk and the boundary one-point functions with ordinary boundary condition,  $-\partial_\mu U$  and  $-\partial_x U$ , are given in the continuum limit in the following parametric form:

$$\begin{aligned} -\partial_x U|_\mu &= M^{1+\theta} \cosh((1+\theta)\tau) + t M^{1-\theta} \cosh(1-\theta)\tau, \\ -\partial_\mu U|_x &\sim M^\theta \cosh \theta \tau, \\ x &= M \cosh \tau, \end{aligned} \quad (6.11)$$

with the function  $M(\mu, t)$  determined from the transcendental equation (6.10). The expression for  $\partial_\mu U$  was obtained by integrating (6.9).

The function  $M(t, \mu)$  plays an important role in the solution. Its physical meaning can be revealed by taking the limit  $x \rightarrow \infty$  of the bulk one-point function  $-\partial_\mu U(x)$ . Since  $x$  is coupled to the length of the boundary, in the limit of large  $x$  the boundary shrinks and the result is the partition function of the  $O(n)$  field on a sphere with two punctures, the susceptibility  $u(\mu, t)$ . Expanding at  $x \rightarrow \infty$  we find

$$-\partial_\mu U \sim x^\theta - M^{2\theta} x^{-\theta} + \text{lower powers of } x \quad (6.12)$$

(the numerical coefficients are omitted). We conclude that the string susceptibility is given, up to a normalization, by

$$u = M^{2\theta}. \quad (6.13)$$

The normalization of  $u$  can be absorbed in the definition of the string coupling constant  $g_s \sim 1/\beta$ . Thus the transcendental equation (6.10) for  $M$  gives the equation of state of the loop gas on the sphere,

$$(1+\theta)u^{\frac{1}{\theta}} - t u^{\frac{1-\theta}{\theta}} = \mu. \quad (6.14)$$

The equation of state (6.14) has three singular points at which the three-point function of the identity operator  $\partial_\mu u$  diverges. The three points correspond to the critical phases of the loop gas on the sphere. At the critical point  $t = 0$  the susceptibility scales as  $u \sim \mu^\theta$ . This is the dilute phase of the loop gas, in which the loops are critical, but occupy an insignificant part of the lattice volume. The dense phase is reached when  $t/x^\theta \rightarrow -\infty$ . In the dense phase the loops remain critical but occupy almost all the lattice and the susceptibility has different scaling,  $u \sim \mu^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ . The scaling of the susceptibility in the dilute and in the dense phases match with the values (2.4) and (2.6) of the central charge of the corresponding matter CFTs. Considered on the interval  $-\infty < t < 0$ , the equation of state (6.14) describes the massless thermal flow [34] relating the dilute and the dense phases.

At the third critical point  $\partial_\mu M$  becomes singular but  $M$  itself remains finite. It is given by

$$t_c = \frac{1+\theta}{1-\theta} M_c^{2\theta} > 0, \quad \mu_c = -\theta \frac{1+\theta}{1-\theta} M_c^2 < 0. \quad (6.15)$$

Around this critical point  $\mu - \mu_c \sim (M - M_c)^2 + \dots$ , hence the scaling of the susceptibility is that of pure gravity,  $u \sim (\mu - \mu_c)^{1/2}$ .

## 6.2 The phase diagram for the DJS boundary condition

We found the scaling limit of the one-point function (4.11) as a function of the renormalized bulk couplings,  $\mu$  and  $t$ , and the coupling  $x$  characterizing the ordinary boundary. Now, analyzing the loop equation (5.14) for the two-point functions, we will look for the possible scaling limits for the couplings  $y$ ,  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$ , characterizing the DJS boundary.

As in the previous subsection, we will write down the conditions that the regular parts of the source terms  $\mathcal{C}^{(\alpha)}$  vanish. Let us introduce the isotropic coupling  $\lambda$  and the anisotropic coupling  $\Delta$  as

$$\lambda_{(1)} = \lambda + \frac{1}{2}\Delta, \quad \lambda_{(2)} = \lambda - \frac{1}{2}\Delta \quad (6.16)$$

and substitute (5.1) in the r.h.s. of (5.14). We obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(1)} &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - \Delta(w + n^{(1)}\overline{w}), \\ \mathcal{C}^{(2)} &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \Delta(w + n^{(2)}\overline{w}), \end{aligned} \quad (6.17)$$

where the coefficients  $c_0$  and  $c_1$  are functions of  $\lambda$  and  $\Delta$ :

$$c_0 = (\lambda^2 - \frac{1}{4}\Delta^2)(g_2 H + g_3 H_1) + 2\lambda H + y - \lambda g_1 - \Delta \frac{g_1(n^{(1)} - n^{(2)})}{2(2+n)} \quad (6.18)$$

$$c_1 = (\lambda^2 - \frac{1}{4}\Delta^2)g_3 H - 1 - \lambda g_2 + \Delta \frac{g_2(n^{(1)} - n^{(2)})}{2(2-n)}. \quad (6.19)$$

$$c_2 = -g_3 \left( \lambda + \frac{n^{(1)} - n^{(2)}}{2(2+n)} \Delta \right). \quad (6.20)$$

For generic values of the couplings  $y$ ,  $\lambda$  and  $\Delta$ , the coefficient  $c_0$  is non-vanishing. The condition  $c_0 = 0$  determines the critical value  $y_c$  where the length of the DJS boundary diverges. <sup>6</sup> Once the

<sup>6</sup> Indeed, the term  $c_0$  is the dominant term when  $x \rightarrow 0$ . For  $c_0 \neq 0$  the solution for  $\mathcal{A}^{(\alpha)}$  and  $\mathcal{B}^{(\alpha)}$  in (5.14) is given by linear functions of  $x$  and  $w$ . Such a solution describes the situation when the length of the DJS boundary is small and the two-point function degenerates to a one-point function.

boundary cosmological constant is tuned to its critical value, the condition  $c_1 = 0$  determines the critical lines in the space of the couplings  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$ , where the DJS boundary condition becomes conformal. The two equations

$$c_0(y, \lambda, \Delta) = 0, \quad c_1(y, \lambda, \Delta) = 0 \quad (\mu = t = 0) \quad (6.21)$$

define a one-dimensional critical submanifold in the space of the boundary couplings  $\{y, m, \Delta\}$ :

$$\lambda = \lambda^*(\Delta). \quad (6.22)$$

Obviously  $\mathcal{A}^{(1)}$  and  $\mathcal{A}^{(2)}$  cannot be simultaneously zero. Therefore the curve (6.22) consists of two branches, which correspond to different conformal DJS boundary conditions, the lines of anisotropic special transitions  $AS_{(1)}$  and  $AS_{(2)}$ :

$$\begin{aligned} AS_{(1)} : \quad & \mathcal{A}^{(1)} = 0, \mathcal{A}^{(2)} \neq 0; \\ AS_{(2)} : \quad & \mathcal{A}^{(2)} = 0, \mathcal{A}^{(1)} \neq 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

The branch  $AS_{(1)}$  corresponds to  $\Delta > 0$ , while the branch  $AS_{(2)}$  corresponds to  $\Delta < 0$ . Consider the behavior of correlators  $D_0^{(\alpha)}$  on the two branches of the critical line. By the definition (5.15), the two correlators  $D_0^{(1)}$  and  $D_0^{(2)}$  are related by

$$D_0^{(1)} = \frac{D_0^{(2)}}{1 - \Delta D_0^{(2)}}, \quad D_0^{(2)} = \frac{D_0^{(1)}}{1 + \Delta D_0^{(1)}}. \quad (6.24)$$

On the branch  $AS_{(1)}$  the correlator  $D_0^{(1)}$  diverges while  $D_0^{(2)}$  remains finite, and *vice versa*. Assume that  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$  are positive. Then  $D_0^{(\alpha)}$  are both positive by construction. If  $\Delta = \lambda_{(1)} - \lambda_{(2)} > 0$ , then the coefficients of the geometric series

$$D_0^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k (D_0^{(2)})^{k+1} \quad (6.25)$$

are all positive and  $D_0^{(1)}$  diverges, while  $D_0^{(2)} \rightarrow 1/\Delta$ . Thus the branch  $AS_{(1)}$ , where  $D_0^{(1)}$  diverges, is associated with  $\Delta > 0$ . On this branch the probability that the loops of color (1) touch the DJS boundary is critically enhanced. In the correlator  $D_0^{(1)}$ , the ordinary boundary behaves as a loop of type (1) and can touch the DJS boundary. The geometrical progression (6.25) reflects the possibility of any number of such events, each contributing a factor  $\Delta$ . Conversely, the ordinary boundary for the correlator  $D_0^{(2)}$  behaves as a loop of type (2), since such loops almost never touch the DJS boundary. On the branch  $AS_{(2)}$  the situation is reversed.

It is not possible to solve explicitly the conditions of criticality (6.21) without extra information, because they contain two unknown functions of the three couplings,  $H$  and  $H_1$ . Nevertheless, the qualitative picture can be reconstructed.

First let us notice that the form of the critical curve can be evaluated in the particular cases  $n^{(1)} = n$  and  $n^{(1)} = 0$ . In the first case  $n^{(2)} = 0$  and the correlation functions do not depend on  $\lambda_{(2)}$  and so the coefficients  $c_1$  and  $c_2$  depend on  $\lambda$  and  $\Delta$  through the combination  $\lambda_{(1)} = \lambda + \Delta/2$ . Similarly one considers the case  $n^{(1)} = 0$ . The phase diagram in these two cases represents an infinite straight line separating the ordinary and the extraordinary transitions:

$$\lambda^*(\Delta) = \begin{cases} \lambda_c - \Delta/2 & \text{if } n^{(1)} = n, \\ \lambda_c + \Delta/2 & \text{if } n^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

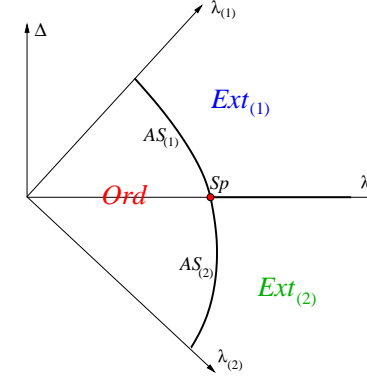


Figure 5: Phase diagram in the rotated  $(\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)})$  plane for  $n < 1$  and  $n^{(1)} > n^{(2)}$ . The ordinary and the extraordinary phases are separated by a line of anisotropic special transitions, which consists of two branches,  $AS_{(1)}$  and  $AS_{(2)}$ . The two extraordinary phases,  $Ext_{(1)}$  and  $Ext_{(2)}$ , are separated by the isotropic line  $\Delta = 0$

The critical line crosses the axis  $\Delta = 0$  at the special point  $\lambda = \lambda_c$ . The value of  $\lambda_c$  can be evaluated by solving (6.21) for  $n^{(1)} = n$  and  $\lambda_{(2)} = 0$ . The result is

$$\lambda_c = \frac{\sqrt{(6+n)(2-n)}}{1-n}. \quad (6.27)$$

For general  $n^{(1)} \in [0, n]$  we can determine three points of the critical curve:

$$\{\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}\} = \left\{ \frac{1-n}{1-n^{(1)}} \lambda_c, 0 \right\}, \quad \left\{ 0, \frac{1-n}{1-n^{(2)}} \lambda_c \right\}, \quad \{\lambda_c, \lambda_c\}. \quad (6.28)$$

In the two limiting cases considered above the critical line, given by equation (6.26), crosses the anisotropic line without forming a cusp. Is this the case in general? Let us consider the vicinity of the special point  $(\lambda, \Delta) = (\lambda_c, 0)$ . In the vicinity of the special point a new scaling behavior occurs. In this regime the term  $x^2$  in (6.17) cannot be neglected. The requirement that all terms in (6.17) have the same dimension determines the scaling of the anisotropic coupling  $\Delta$ :

$$[\Delta] = 1 - \theta. \quad (6.29)$$

In order to determine the form of the critical curve near the special point, we return to the equations (6.21) and consider the behavior near the special point of the unknown functions  $H(y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \mathbf{H}(y) \rangle$  and  $H_1(y) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr} \mathbf{X} \mathbf{H}(y) \rangle$ , which depend implicitly on  $\lambda$  and  $\Delta$ . For  $t = \mu = 0$ , these functions can be decomposed, just as the one-point function with ordinary boundary condition,  $W(x)$ , into regular and a singular parts:

$$H(y) = H^{\text{reg}}(y) + h(y), \quad H_1(y) = H_1^{\text{reg}}(y) + \text{cst} \cdot h(y). \quad (6.30)$$

On the critical curve  $\lambda = \lambda^*(\Delta)$  the singular part of  $H$  vanishes and the coefficient  $c_1$  given by eq. (6.19) can be Taylor expanded in  $\lambda - \lambda_c$  and  $\Delta$ :

$$c_1(m, \Delta) \equiv A_1(\lambda - \lambda_c) + B_1(n^{(1)} - n^{(2)})\Delta + A_2(\lambda - \lambda_c)^2 + B_2\Delta^2 + \dots = 0. \quad (6.31)$$

If  $A_1 \neq 0$ , the critical curve is given by a regular function of  $\lambda$  and  $\Delta$ , the critical curve is a continuous line which crosses the real axis at  $\lambda = \lambda_c$  without forming a cusp. This form of the curve differs from the predictions of [2] and [3], where a cusp-like form is predicted by a scaling argument. We will see later that the fact that the critical curve is analytic at the special point does not contradict the scaling (6.29).

### 6.3 Scaling limit of the functional equation for the disk two-point function

#### 6.3.1 The scaling limit for $\Delta \neq 0$

Consider first the case when the anisotropic coupling  $\Delta$  is finite and assume that we are on the branch  $AS_{(1)}$  where  $\Delta > 0$ . Then the  $x^2$  term on the r.h.s. can be neglected, because it is subdominant compared to  $w \sim x^{1+\theta}$ . The scaling limit corresponds to the vicinity of the critical submanifold where the two coefficients  $c_0$  and  $c_1$  scale respectively as  $x^{1+\theta}$  and  $x^\theta$ .

We are now going to find the scaling limit of the loop equations (5.14). In the scaling limit we can retain only the singular parts of the correlators  $D_L^{(1),(2)}$ , which we denote by  $d_L^{(1),(2)}$  ( $L = 0, 1, \dots$ ). We define the functions  $d_0^{(1)}$  and  $d_0^{(2)}$  by

$$D_0^{(1)} = d_0^{(1)}, \quad D_0^{(2)} = \frac{1}{\Delta - d_0^{(2)}} \approx \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^2} d_0^{(2)}. \quad (6.32)$$

Then the relation (6.24) implies

$$d_0^{(1)} d_0^{(2)} = -1. \quad (6.33)$$

We define in general  $d_L^{(1),(2)}$  as the singular part of  $D_L^{(1),(2)}$ , with the normalization chosen so that the recurrence equation (5.7) holds for any  $L \geq 0$ :

$$\begin{aligned} d_{L+1}^{(1)} &= w \star d_L^{(1)}, \\ d_{L+1}^{(2)} &= w \star d_L^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

On the branch  $AS_{(1)}$  the first of the two equations (5.14) becomes singular, since  $\mathcal{A}^{(1)}$  vanishes while  $\mathcal{A}^{(2)}$  remains finite. We write this equation in terms of  $d_0^{(2)}$  and  $d_1^{(1)}$  using that

$$\mathcal{A}^{(1)} = \lambda_{(1)} d_0^{(2)}, \quad \mathcal{B}^{(1)} = \frac{\Delta}{\lambda_{(1)}} d_1^{(1)}. \quad (6.35)$$

We get

$$d_0^{(2)} \overline{d_1^{(1)}} + w + n^{(1)} \overline{w} = \mu_B - t_B x, \quad (\Delta > 0) \quad (6.36)$$

where  $\mu_B$  and  $t_B$  are defined by

$$\frac{c_0}{\Delta} = \mu_B, \quad \frac{c_1}{\Delta} = -t_B. \quad (6.37)$$

Once the solution of (6.37) is known, all two-point functions  $d_L^{(\alpha)}$  can be computed by using the recurrence equations (6.34).

The scaling limit near the branch  $AS_{(2)}$  ( $\Delta < 0$ ) is obtained by using the symmetry  $n^{(1)} \leftrightarrow n^{(2)}$ ,  $\Delta \leftrightarrow -\Delta$ . In this case one obtains another equation

$$d_0^{(1)} \overline{d_1^{(2)}} + w + n^{(2)} \overline{w} = \mu_B - t_B x. \quad (\Delta < 0) \quad (6.38)$$

Note that the relation (6.33) is true on both branches of the critical line.

The map  $\{y, \lambda\} \rightarrow \{\mu_B, t_B\}$  defined by (6.18), (6.19) and (6.37) represents a coordinate change in the space of couplings which diagonalizes the scaling transformation. The coupling  $\mu_B$  is the renormalized boundary cosmological constant for the DJS boundary.<sup>7</sup> The coupling  $t_B$  is the renormalized boundary matter coupling, which defines the DJS boundary condition. The dimensions of these couplings are

$$[\mu_B] = 1 + \theta, \quad [t_B] = \theta. \quad (6.39)$$

Once we choose  $y$  so that  $\mu_B = 0$ , the condition  $t_B = 0$  gives the critical curve where the anisotropic special transitions take place. If the function  $t_B$  is regular near the critical line  $\lambda = \lambda^*(\Delta)$ , then it can be replaced by the linear approximation

$$t_B \sim \lambda^*(\Delta) - \lambda. \quad (6.40)$$

The deformations in the directions  $t_B$  and  $\Delta$ , are driven by some Liouville dressed boundary operators  $\mathcal{O}_{t_B}^B$  and  $\mathcal{O}_\Delta^B$ . Knowing the dimensions of  $t_B$  and  $\Delta$ , we can determine the Kac labels of these operators with the help of the KPZ formula. The general rule for evaluating the Kac labels in 2D gravity with matter central charge (2.4) is the following. If a coupling constant has dimension  $\alpha$ , then the corresponding operator has Kac labels  $(r, s)$  determined by

$$\alpha = \alpha_{r,s} = \min \left( 1 + \frac{\theta}{2} \pm \frac{(1+\theta)r-s}{2} \right). \quad (6.41)$$

The details of the identification are given in Appendix B. We find

$$\mathcal{O}_{t_B}^B = \mathcal{O}_{1,3}^B, \quad \mathcal{O}_\Delta^B = \mathcal{O}_{3,3}^B. \quad (6.42)$$

Near the special point we have

$$\Delta \sim t_B^{1/\phi}, \quad \phi = \frac{\theta}{1-\theta} = \frac{\alpha_{1,3}}{\alpha_{3,3}} < 1. \quad (6.43)$$

Since  $t_B$  and  $\lambda$  scale differently, there is no contradiction between the scaling (6.43) and the analyticity of the critical curve near the special point.

<sup>7</sup>More precisely, it is a combination of the boundary coupling constant and the disk one-point function with DJS boundary. What is important for us is that the condition  $\mu_B = 0$  fixes the critical value of the bare DJS cosmological constant  $y$ . At  $\mu_B = 0$ , the length of the DJS boundary diverges.

### 6.3.2 The scaling limit in the isotropic direction ( $\Delta = 0$ )

Along the isotropic line  $\Delta = 0$  the two functional equations (5.14) degenerate into a single equation for the correlator  $D_0$ :

$$\mathcal{A} \equiv \lambda D_0 - 1 = -\frac{y-x + \lambda(2H + \lambda P - V')}{y-x + \lambda(W + H - V')}. \quad (6.44)$$

In order to evaluate  $D_1 = D_1^{(1)} = D_1^{(2)}$ , we can consider the linear order in  $\Delta$ . It is however easier to use the fact that  $D_0$  and  $D_1$  do not depend on the splitting  $n = n^{(1)} + n^{(2)}$ . Furthermore, if we choose  $n^{(1)} = n$  and  $\lambda_{(1)} = \lambda$ , the observables do not depend on  $\lambda_{(2)}$ , which can be chosen to be zero. Taking  $n^{(1)} = n$ ,  $\lambda_{(1)} = m$  and  $n^{(2)} = \lambda_{(2)} = 0$ , we obtain from (5.14)

$$\overline{\mathcal{B}^{(1)}}|_{n^{(1)}=n} \equiv \lambda(\lambda \overline{D}_1 + n \overline{W}) + x - y = \frac{y-x + \lambda(H - W - n \overline{W})}{\lambda D_0 - 1}. \quad (6.45)$$

From these expressions it is clear how the scaling of the singular parts of  $D_0$  and  $D_1$ , which we denote respectively by  $d_0$  and  $d_1$ , change when we go from  $\lambda = 0$  to  $\lambda = \lambda_c$ . When  $\lambda = 0$  we have  $H(y) = W(y)$  and  $D_0$  is the disk partition function with ordinary boundary conditions and two marked points on it, eq. (4.17). When  $\lambda = \lambda_c$  and  $y = y_c$ ,

$$d_0 = g_3 \frac{x^2}{w} \sim x^{1-\theta}, \quad d_1 = \frac{w(w + n\bar{w})}{g_3 x^2} \sim x^{2\theta} \quad (\lambda = \lambda_c, y = y_c). \quad (6.46)$$

### 6.3.3 Dirichlet versus DJS

Now we will focus on the special case  $n^{(1)} = 1$  and compare the scaling behavior with that for the Dirichlet boundary conditions. The critical behavior of the two-point correlator in both cases is the same, but the boundary coupling constants correspond to different boundary operators.

Consider the functional equation (5.25) for the correlator with Ord/DJS boundary conditions when  $n^{(1)} = 1$ . The critical value of  $\lambda_{(1)}$  is infinite in this case, see equation (6.28). The scaling limit of (5.25) is

$$d_0^{(1)}(x, y) d_1^{(2)}(-x, y) = -w(x) - w(-x) + \mu_B - \frac{x}{\lambda_{(1)}}. \quad (6.47)$$

The last term remains finite if  $\lambda_{(1)}$  tends to infinity as  $x^{-\theta}$ . The scaling boundary coupling can be identified as  $t_B = 1/\lambda_{(1)}$  and equation (6.47) takes the general form (6.36). What is remarkable here is that the boundary temperature constant need not to be tuned. Equation (6.47) holds for any value of  $\lambda_{(1)}$ . On the other hand, when  $t_B = 1/\lambda_{(1)}$  is small, the last term describes the perturbation of the  $AS_{(1)}$  boundary condition by the thermal operator  $\mathcal{O}_{1,3}$  with  $\alpha_{1,3} = \theta$ . When  $\lambda_{(1)}$  is small, the last term accounts for the perturbation of the ordinary boundary condition by the two-leg boundary operator  $\mathcal{O}_{3,1}$  with  $\alpha_{3,1} = -\theta$ , whose matter component is an irrelevant operator.

Now let us take the scaling limit of the quadratic functional equation (5.24) for the correlator with Ord/Dir boundary conditions. At  $x = 0$  the equation (5.24) becomes algebraic. The critical value  $y = y_c$ , where the solution develops a square root singularity, is determined by

$$2W(0) - 2R(y_c) + y_c^2/B^2 = 0.$$

We can write equation (5.24) as

$$G(x, y)G(-x, y) = \mu_B - w(x) - w(-x) - \frac{x^2}{B^2}, \quad (6.48)$$

where

$$\mu_B = 2w(0) + 2[R(y) - R(y_c)] + \frac{y^2 - y_c^2}{B^2}. \quad (6.49)$$

For any finite value of  $B$ , the scaling limit of this equation is

$$G(x, y)G(-x, y) = \mu_B - w(x) - w(-x). \quad (6.50)$$

The  $x^2$  term survives only if  $B$  vanishes as  $x^{\frac{1-\theta}{2}}$ :

$$[B] = (1 - \theta)/2 = \alpha_{2,1}. \quad (6.51)$$

This is the expected answer, because  $\mathcal{O}_{2,1}^B$  is the one-leg boundary operator which creates an open line starting at the boundary. We conclude that the Dirichlet and the DJS boundary conditions have the same scaling limit, but in the first case the boundary coupling  $\lambda$  corresponds to a relevant perturbation and it is sufficient give it any finite value, while in the second case the boundary coupling  $\lambda_{(1)}$  corresponds to an irrelevant perturbation and therefore must be infinitely strong.

## 7 Spectrum of the boundary operators

Let us denote by  $\alpha_L^{(1)}$  and  $\alpha_L^{(2)}$  the scaling dimensions respectively of  $d_L^{(1)}$  and  $d_L^{(2)}$ :

$$\alpha_L^{(\alpha)} = [d_L^{(\alpha)}] \quad (L \geq 0, \alpha = 1, 2). \quad (7.1)$$

The recurrence equations (6.34) tell us that the dimensions grow linearly with  $L$ :

$$\alpha_L^{(\alpha)} = L[w] + \alpha_0^{(\alpha)}. \quad (7.2)$$

These relations make sense in the dilute phase, where  $[w] = 1 + \theta$ , as well as in the dense phase, where  $[w] = 1 - \theta$ . In addition, by (6.33) we have

$$\alpha_0^{(1)} + \alpha_0^{(2)} = 0. \quad (7.3)$$

Thus all scaling dimensions are expressed in terms of  $\alpha_0^{(1)}$ .

Let us evaluate  $\alpha_0$  for the branch  $AS_{(1)}$  of the critical line. We thus assume that  $\Delta$  is finite and positive sufficiently far from the isotropic special point. Take  $\mu = \mu_B = t_B = 0$  and write the shift equations which follow from (6.36),

$$AS_{(1)} : \quad \frac{d_0^{(1)}(e^{i\pi}x)}{d_0^{(1)}(e^{-i\pi}x)} = \frac{w(e^{-i\pi}x) + n^{(1)}w(x)}{w(e^{i\pi}x) + n^{(1)}w(x)}. \quad (7.4)$$

The one-point function (6.8) behaves as  $w \sim x^{1+\theta}$  in the dilute phase ( $t = 0$ ) and as  $w \sim x^{1-\theta}$  in the dense phase ( $t \rightarrow -\infty$ ). In both cases the r.h.s. is just a phase factor. Since all the couplings except for  $x$  have been turned off,  $d_0^{(1)}(x)$  should be a simple power function of  $x$ . Substituting  $d_L^{(1)}(x) \sim x^{\alpha_L^{(1)}}$  in (7.4), we find

$$n^{(1)} = \frac{\sin \pi(\alpha_0^{(1)} \pm \theta)}{\sin \pi \alpha_0^{(1)}}, \quad (+ \text{ for dilute, } - \text{ for dense}). \quad (7.5)$$

This equation determines the exponent  $\alpha_0^{(1)}$  up to an integer. In the parametrization (2.15) we have  $\alpha_0^{(1)} = -\theta r + j_{\text{dil}}$  in the dilute phase and  $\alpha_0^{(1)} = \theta r + j_{\text{den}}$  in the dense phase.

The integers  $j_{\text{dil}}$  and  $j_{\text{den}}$  can be fixed by additional restrictions on the exponents. Let us assume that  $\lambda_{(1)}$  and  $\lambda_{(2)}$  are non-negative,  $n \geq 0$  and the boundary parameter  $r$  is in the ‘physical’ interval  $1 \leq r \leq 1/\theta - 1$ , where both  $n^{(1)}$  and  $n^{(2)}$  are non-negative. These assumptions guarantee that the Boltzmann weights are positive and the loop expansion of the observables has good statistical meaning. Since all loop configurations that enter in the loop expansion of the one-point function  $W(x)$  are present in the loop expansions of  $\mathcal{A}^{(\alpha)}$  and  $\mathcal{B}^{(\alpha)}$ , the singularity of these observables when  $\lambda \rightarrow \lambda^*(\Delta)$  must not be weaker than that of  $W$ . In other words, the scaling dimensions of  $d_0^{(2)} \sim \mathcal{A}^{(1)}$  and  $d_1^{(1)} \sim \mathcal{B}^{(1)}$  must not be larger than the scaling dimension of the one-point function  $w$ :

$$\alpha_0^{(2)} < [w], \quad \alpha_1^{(1)} < [w]. \quad (7.6)$$

Since  $\alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(1)} = [w]$ , this also means that  $\alpha_0^{(2)}$  and  $\alpha_1^{(1)}$  are non-negative. Taking into account that  $[w] = 1 \pm \theta$  in the dilute/dense phase, we get the bound

$$-(1 \pm \theta) \leq \alpha_0^{(1)} \leq 0 \quad (+ \text{ for dilute, } - \text{ for dense}). \quad (7.7)$$

This bound determines  $j_{\text{dil}} = 0$  and  $j_{\text{den}} = -1$ . As a consequence, on the branch  $AS_{(1)}$  of the critical line the dimensions  $\alpha_L^{(1)} = [d_L^{(1)}]$  in the dilute and in the dense phases are given by

$$AS_{(1)} : \quad \begin{aligned} \alpha_L^{(1)} &= L(1 + \theta) - \theta r, & \alpha_L^{(2)} &= L(1 + \theta) + \theta r & (\text{dilute phase}) \\ \alpha_L^{(1)} &= L(1 - \theta) + \theta r - 1, & \alpha_L^{(2)} &= L(1 - \theta) - \theta r + 1 & (\text{dense phase}). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Note that the results for the dense phase are valid not only in the vicinity of the critical line  $AS_{(1)}$ , but in the whole half-plane  $\Delta > 0$ .

By the symmetry (1)  $\leftrightarrow$  (2), the exponents  $\alpha_L^{(1)}$  on the branch  $AS_{(1)}$  and the exponents  $\alpha_L^{(2)}$  on the branch  $AS_{(2)}$  should be related by  $n^{(1)} \leftrightarrow n^{(2)}$ , or equivalently  $r \leftrightarrow 1/\theta - r$ :

$$AS_{(2)} : \quad \begin{aligned} \alpha_L^{(1)} &= L(1 + \theta) - \theta r + 1, & \alpha_L^{(2)} &= L(1 + \theta) + \theta r - 1, & (\text{dilute phase}) \\ \alpha_L^{(1)} &= L(1 - \theta) + \theta r, & \alpha_L^{(2)} &= L(1 - \theta) - \theta r & (\text{dense phase}). \end{aligned} \quad (7.9)$$

The scaling exponents of the two-point functions of the  $O(n)$  model coupled to 2D gravity allow, through the KPZ formula [23, 24], to determine the conformal weights of the matter boundary operators. In the dilute phase, where the Kac parametrization is given by (2.5), the correspondence between the scaling dimension  $\alpha$  of a boundary two-point correlator and the conformal weight  $h_{r,s}$  of the corresponding matter boundary field is given by

$$\alpha = (1 + \theta)r - s \quad \rightarrow \quad h = h_{r,s} \quad (\text{dilute phase}). \quad (7.10)$$

In the dense phase, where the Kac labels are defined by (2.7), one obtains, taking into account that the identity boundary operator for the ordinary boundary condition has ‘wrong’ dressing,

$$\alpha = r - s(1 - \theta) \quad \rightarrow \quad h = h_{r,s} \quad (\text{dense phase}). \quad (7.11)$$

From (7.10) and (7.11) we determine the scaling dimensions of the  $L$ -leg boundary operators (3.9):

$$AS_{(1)} : \quad \begin{aligned} S_L^{(1)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r-L,r}^B, & S_L^{(2)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r+L,r}^B & (\text{dilute phase}) \\ S_L^{(1)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r-1,r-L}^B, & S_L^{(2)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r-1,r+L}^B & (\text{dense phase}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$AS_{(2)} : \quad \begin{aligned} S_L^{(1)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r-L,r+1}^B, & S_L^{(2)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r+L,r+1}^B & (\text{dilute phase}) \\ S_L^{(1)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r,r-L}^B, & S_L^{(2)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r,r+L}^B & (\text{dense phase}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

These conformal weights are in accord with the results of [7], [13], [14], [3]. We remind that the scaling dimensions are determined up to a symmetry of the Kac parametrization:

$$h_{r,s} = h_{-r,-s}, \quad h_{r,s-1} = h_{r+1/\theta,s+1/\theta} \quad (\text{dilute phase}) \quad (7.14)$$

$$h_{r,s} = h_{-r,-s}, \quad h_{r+1,s} = h_{r+1/\theta,s+1/\theta} \quad (\text{dense phase}). \quad (7.15)$$

Comparing the scaling dimensions in the dilute and in the dense phase, we see that the bulk thermal flow  $t\mathcal{O}_{1,3}$  transforms the boundary operator  $\mathcal{O}_{r,s}$  in the dilute phase into the boundary operator  $\mathcal{O}_{s-1,r}$  in the dense phase. For the rational points  $\theta = 1/p$ , our results for the endpoints of the bulk thermal flow driven by the operator  $t\mathcal{O}_{1,3}$  match the perturbative calculations performed recently in [15].

In the  $O(n)$  model the boundary parameter  $r$  is continuous and we can explore the limit  $r \rightarrow 1$ , in which the BCC operator  $\mathcal{O}_{r,r}$  carries the same Kac labels as the identity operator. Let us call this operator  $\tilde{\mathcal{O}}_{1,1}^B$ . The bulk thermal flow transforms the operators  $\tilde{\mathcal{O}}_{1,1}^B$  and  $\mathcal{O}_{1,1}^B$  into two different boundary operators in the dense phase. Hence there are at least two distinct boundary operators with Kac labels (1, 1): the identity operator and the limit  $r \rightarrow 1$  of the operator  $\mathcal{O}_{r,r}^B$ .

## 8 Solution of the loop equations in the scaling limit

We are going to study two particular cases where the analytic solution of the functional equations (6.36) and (6.38) is accessible. First we will evaluate the two-point function on the two branches  $AS_{(1)}$  and  $AS_{(2)}$  of the critical line, where the  $O(n)$  field is conformal invariant both in the bulk and on the boundary. In this case  $t = t_B = 0$  and the boundary two-point function is that of Liouville gravity. The three couplings are introduced by the world sheet action of Liouville gravity with matter central charge (2.4), which we write symbolically as

$$\mathcal{S}_{\text{Liouv}} = \mathcal{S}_{\text{free}} + \int_{\text{bulk}} \mu \mathcal{O}_{1,1} + \int_{\text{Ord. boundary}} x \mathcal{O}_{1,1}^B + \int_{\text{DJS boundary}} \mu_B \mathcal{O}_{1,1}^B. \quad (8.1)$$

Since the perturbing operators in this case are Liouville primary fields,

$$\mathcal{O}_{1,1} \sim e^{2b\phi}, \quad \mathcal{O}_{1,1}^B \sim e^{b\phi},$$

the two-point function is given by the product of matter and Liouville two-point functions. Up to a numerical factor, the solution as a function of  $\mu$  and  $\mu_B$  must be given by the boundary two-point function in Liouville theory [35]. We will see that indeed the functional equation (6.36) is identical to a functional equation obtained in [35] using the operator product expansion in boundary Liouville theory.

In the second case we are able to solve, we take  $\mu = \mu_B = 0$  and non-zero matter couplings  $t$  and  $t_B$ . This case is more interesting, because it is not described by the standard Liouville gravity. The corresponding world sheet action is symbolically written as

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{free}} + \int_{\text{bulk}} t \mathcal{O}_{1,3} + \int_{\text{Ord. boundary}} x \mathcal{O}_{1,1}^B + \int_{\text{DJS boundary}} t_B \mathcal{O}_{1,3}^B. \quad (8.2)$$



The worldsheet theory described by this action is more complicated than Liouville gravity, because it does not enjoy the factorization properties of the latter. The boundary two-point correlator does not factorize, for finite  $t$  and/or  $t_B$ , into a product of matter and Liouville correlators, as is the case for the action (8.1). This is because the perturbing operators  $\mathcal{O}_{1,3}$  and  $\mathcal{O}_{1,3}^B$  have both matter and Liouville components:

$$\mathcal{O}_{1,3} \sim \Phi_{1,3} e^{2b(1-\theta)\phi}, \quad \mathcal{O}_{1,3}^B \sim \Phi_{1,3}^B e^{b(1-\theta)\phi}.$$

Let us mention that the theory of random surfaces described by the action (8.2) has no obvious direct microscopic realization. Our solution interpolates between the two-point functions for the dilute ( $t = 0$ ) and the dense ( $t \rightarrow -\infty$ ) phases of the loop gas, on one hand, and between the anisotropic special ( $t_B = 0$ ) and ordinary/extraordinary boundary conditions ( $t_B \rightarrow \pm\infty$ ), on the other hand.

### 8.1 Solution for $t = 0, t_B = 0$

In the dilute phase ( $t = 0$ ) the solution (6.6) - (6.8) for the boundary one-point function takes the form

$$x = M \cosh \tau, \quad w(x) = M^{1+\theta} \cosh(1 + \theta)\tau. \quad (8.3)$$

Then the loop equations (6.36) become a shift equation

$$d_0^{(2)}(\tau) d_1^{(1)}(\tau \pm i\pi) + w_0 \cosh[(1 + \theta)\tau \pm i\pi(1 - r)\theta] = \mu_B - t_B M \cosh \tau, \quad (8.4)$$

where we introduced the constant

$$w_0 = M^{1+\theta} \frac{\sin \pi\theta}{\sin \pi r\theta}. \quad (8.5)$$

At the point  $t_B = 0$ , where the DJS boundary condition is conformal, this equation can be solved explicitly. After a shift  $\tau \rightarrow \tau \mp i\pi$  we write it, using (6.33), as

$$d_1^{(1)}(\tau) = [w_0 \cosh[(1 + \theta)\tau \pm i\pi r\theta] - \mu_B] d_0^{(1)}(\tau \pm i\pi). \quad (8.6)$$

If we parametrize  $\mu_B$  in terms of a new variable  $\sigma$  as

$$\mu_B = w_0 \cosh(1 + \theta)\sigma, \quad (8.7)$$

the loop equation turns out to be identical to the functional identity for the boundary Liouville two-point function [35], which we recall in Appendix B. In the Liouville gravity framework,  $\tau$  and  $\sigma$  parametrize the FZZT branes corresponding to the ordinary and anisotropic special boundary conditions.

The loop equations for the dense phase ( $t \rightarrow -\infty$ ), are given by (8.6) with  $\theta$  sign-flipped. This equation describes the only scaling limit in the dense phase. The term with  $t_B$  is absent in the dense phase, because it has dimension  $1 + \theta$ , while the other terms have dimension  $1 - \theta$ . In this case, the loop equation gets identical to the functional identity for the Liouville boundary two-point function if we parametrize  $\mu_B$  as

$$\mu_B = w_0 \cosh(1 - \theta)\sigma. \quad (8.8)$$

### 8.2 Solution for $\mu = 0, \mu_B = 0$

Here we solve the loop equation (6.36) in the scaling limit with  $\mu = \mu_B = 0$  but keeping  $x, t$  and  $t_B$  finite. Let us first find the expression for the one-point function  $w(x)$  for  $\mu = 0$ . The equation (6.10) has in this case two solutions,  $M = 0$  and  $M = (1 + \theta)^{-1} t^{\frac{1}{2\theta}}$ . One can see [33] that the first solution is valid for  $t < 0$ , while the second one is valid for  $t > 0$ . Therefore when  $\mu = 0$  and  $t \leq 0$ , the solution (6.6)-(6.8) takes the following simple form:

$$w(x) = x^{1+\theta} + tx^{1-\theta} \quad (t \leq 0). \quad (8.9)$$

Introduce the following exponential parametrization of  $x, t, t_B$  in terms of  $\tau, \gamma, \tilde{\gamma}$ :

$$x = e^\tau, \quad t = -e^{2\gamma\theta}, \quad t_B = -2w_0 e^{\gamma\theta} \sinh(\tilde{\gamma}\theta), \quad w_0 = \frac{\sin(\pi\theta)}{\sin(\pi r\theta)}. \quad (8.10)$$

In terms of the new variables, equation (6.36) with  $\mu_B = \mu = 0$  acquires the form

$$\begin{aligned} d_1^{(1)}(\tau)/d_0^{(1)}(\tau \pm i\pi) &= w_0 \left( -2e^{\gamma\theta} \sinh(\tilde{\gamma}\theta) e^\tau + e^{(1+\theta)\tau \pm i\pi r\theta} - e^{2\theta\gamma} e^{(1+\theta)\tau \pm i\pi r\theta} \right) \\ &= 4w_0 e^{\tau+\gamma\theta} \cosh \frac{\theta(\tau - \gamma + \tilde{\gamma} \pm i\pi r)}{2} \sinh \frac{\theta(\tau - \gamma - \tilde{\gamma} \pm i\pi r)}{2}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Taking the logarithm of both sides we obtain a linear difference equation, which can be solved explicitly. The solution is given by

$$AS_{(1)}: \quad \begin{aligned} d_0^{(1)}(\tau) &= \frac{1}{w_0} e^{-\frac{\tau}{2} - \gamma(r\theta - \frac{1}{2}) + \frac{\tilde{\gamma}}{2}} V_{-r}(\tau - \gamma + \tilde{\gamma}) V_{\frac{1}{2}-r}(\tau - \gamma - \tilde{\gamma}), \\ d_1^{(1)}(\tau) &= -e^{\frac{\tau}{2} + \gamma(\frac{1}{2} + \theta - r\theta) + \frac{\tilde{\gamma}}{2}} V_{-r}(\tau - \gamma + \tilde{\gamma}) V_{1+\frac{1}{2}-r}(\tau - \gamma - \tilde{\gamma}), \end{aligned} \quad (8.12)$$

where the function  $V_r(\tau)$  is defined by

$$\log V_r(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{\omega} \left[ \frac{e^{-i\omega\tau} \sinh(\pi r\omega)}{\sinh(\pi\omega) \sinh \frac{\pi\omega}{\theta}} - \frac{r\theta}{\pi\omega} \right]. \quad (8.13)$$

The properties of the function  $V_r(\tau)$  are listed in Appendix C.

The solution (8.12) reproduces correctly the scaling exponents (7.8) and it is unique, assuming that the correlators  $d_0^{(1)}$  and  $d_1^{(1)}$  have no poles as functions of  $x$ . Near the branch  $AS_{(2)}$ , the functions  $d_0^{(2)}$  and  $d_1^{(2)}$  are given by the same expressions (8.12), but with  $r$  replaced by  $1/\theta - r$ .

### 8.3 Analysis of the solution

To explore the scaling regimes of the solution (8.12) we use the expansion (C.2) and return to the original variables,

$$e^\tau = x, \quad e^{\gamma\theta} = (-t)^{\frac{1}{\theta}}, \quad e^{(\gamma \pm \tilde{\gamma})\theta} = \left( \mp \frac{t_B}{2} + \sqrt{\frac{t_B^2}{4} - t} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \quad (8.14)$$

Let us define the function  $\hat{V}(x)$  by  $V_r(\tau) = \hat{V}_r(e^\tau)$ . The large  $x$  expansion of  $\hat{V}_r$  goes, according to (C.5), as

$$\hat{V}_r(x) = x^{r\theta/2} \left( 1 + \frac{\sin \pi r}{\sin \pi/\theta} x^{-1} + \frac{\sin \pi r\theta}{\sin \pi\theta} x^{-\theta} + \dots \right). \quad (8.15)$$

The expansion at small  $x$  follows from the symmetry  $\hat{V}(x) = \hat{V}(1/x)$ . Written in terms of the original variables, the scaling solution near the branch  $AS_{(1)}$  takes the form

$$d_0^{(1)}(x) = \frac{1}{w_0} \frac{(-t)^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{x}} \left( -t_B/2 + \sqrt{t_B^2/4 - t} \right)^{\frac{1}{2\theta}} \\ \times \hat{V}_{-r} \left[ x \left( t_B/2 + \sqrt{t_B^2/4 - t} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right] \hat{V}_{\frac{1}{\theta}-r} \left[ x \left( -t_B/2 + \sqrt{t_B^2/4 - t} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right] \quad (8.16)$$

$$d_1^{(1)}(x) = -\sqrt{x} t^{\frac{1-r}{2}} \left( -t_B/2 + \sqrt{t_B^2/4 - t} \right)^{\frac{1}{2\theta}} \\ \times \hat{V}_{1-r} \left[ x \left( t_B/2 + \sqrt{t_B^2/4 - t} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right] \hat{V}_{1+\frac{1}{\theta}-r} \left[ x \left( -t_B/2 + \sqrt{t_B^2/4 - t} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right]. \quad (8.17)$$

The critical regimes of this solution are associated with the limits  $t \rightarrow -0, -\infty$  and  $t_B \rightarrow 0, \pm\infty$  of the bulk and the boundary temperature couplings.

(i) *Dilute phase, anisotropic special transitions*

This critical regime is achieved when both  $t$  and  $t_B$  are small. Using the asymptotics (8.15), we find that in the limit ( $t_B \rightarrow 0, t \rightarrow -0$ ) the expressions (8.16)-(8.17) reproduce the correct scaling exponents (7.8) in the dilute phase:

$$AS_{(1)}: \quad d_0^{(1)} \sim x^{-r\theta}, \quad d_1^{(1)} \sim x^{1+\theta-\theta r} \quad (t_B = 0, t \rightarrow -0). \quad (8.18)$$

The regime  $AS_{(2)}$  is obtained by replacing (1)  $\rightarrow$  (2),  $r \rightarrow \frac{1}{\theta} - r$ .

(ii) *Dilute phase, ordinary transition*

At  $t \rightarrow -0$ , the leading behavior of  $d_0^{(2)} = 1/d_0^{(1)}$  and  $d_1^{(1)}$  for large  $t_B$  is (we omitted all numerical coefficients)

$$d_0^{(2)} \sim t_B^r \left( 1 + t_B^{-\frac{1}{\theta}} x + t_B^{-1} x^\theta + \dots \right) \\ d_1^{(1)} \sim t_B^{1-r} \left( x + t_B^{-\frac{1}{\theta}} x^2 + t_B^{-1} x^{\theta+1} + t_B^{-2} x^{2\theta+1} + \dots \right) \quad (t \rightarrow -0, t_B \rightarrow +\infty). \quad (8.19)$$

In the expansion for  $d_0^{(2)}$ , the first singular term,  $x^\theta$ , is the singular part of  $D_0$  with ordinary/ordinary boundary conditions. In the expansion for  $d_1^{(1)}$ , the first singular term,  $x^{1+\theta}$ , is the one-point function  $w$ , while the next term,  $x^{2\theta+1}$ , is the singular part of the boundary two-point function  $D_1^{(1)}$  with ordinary/ordinary boundary conditions.

(iii) *Dilute phase, extraordinary transition*

Now we write the asymptotics of (8.16)-(8.17) in the opposite limit,  $t \rightarrow -0$ , and  $t_B \rightarrow -\infty$ :

$$d_0^{(2)} \sim t_B^{-\frac{1}{\theta}+r} \left( x + t_B^{-\frac{1}{\theta}} x^2 + t_B^{-1} x^{\theta+1} + t_B^{-2} x^{2\theta+1} + \dots \right) \\ d_1^{(1)} \sim t_B^{\frac{1}{\theta}+1-r} \left( 1 + t_B^{-\frac{1}{\theta}} x + t_B^{-1} x^\theta + \dots \right) \quad (t = 0, t_B \rightarrow -\infty). \quad (8.20)$$

This asymptotics reflects the symmetry of the solution (8.12) which maps

$$r \rightarrow 1 + 1/\theta - r, \quad d_0^{(2)} \leftrightarrow d_1^{(1)} \quad (8.21)$$

which is also a symmetry of the loop equations (5.14). In the limit of large and negative  $t_B$ , the function  $d_0^{(2)}$  behaves as the singular part of the correlator  $D_1^{(1)}$  with ordinary/ordinary boundary conditions, while  $d_1^{(1)}$  behaves as the singular part of the correlator  $D_0$  with ordinary/ordinary boundary conditions.

The asymptotics of the solution at  $t_B \rightarrow \pm\infty$  confirms the qualitative picture proposed in [3] and explained in the Introduction. When  $t_B$  is large and positive, the loops avoid the boundary and we have the ordinary boundary condition. In the opposite limit,  $t_B \rightarrow -\infty$ , the DJS boundary tends to be coated by loop(s). Therefore the typical loop configurations for  $D_1^{(1)}$  in the limit  $t_B \rightarrow -\infty$  will look like those of  $D_0^{(1)}$  in the ordinary phase, because the open line connecting the two boundary-changing points will be adsorbed by the DJS boundary. Conversely, the typical loop configurations for  $D_0^{(1)}$  will look like those of  $D_1^{(1)}$  in the ordinary phase, because free part of the loop that wraps the DJS boundary will behave as an open line connecting the two boundary-changing points.

We saw that the solution reproduces the qualitative phase diagram for the dilute phase, shown in Fig. 5. Now let us try to reconstruct the phase diagram in the dense phase.

(iv) *Dense phase, anisotropic special transitions*

For any finite value of  $t_B$ , the dense phase is obtained in the limit  $t \rightarrow -\infty$ . The asymptotics of (8.16)-(8.17) in this limit does not depend on  $t_B$ :

$$d_0^{(1)} \sim x^{r\theta-1} (-t)^{\frac{1}{2\theta}-r}, \quad d_1^{(1)} \sim x^{-(1-r)\theta} (-t)^{1-r+\frac{1}{2\theta}} \quad (t \rightarrow -\infty). \quad (8.22)$$

This means that in the dense phase the DJS boundary condition is automatically conformal for any value of  $t_B$ . The boundary critical behavior does not change with the isotropic boundary coupling  $t_B$ , but it can depend on the anisotropic coupling  $\Delta$ . The solution (8.16)-(8.17) holds for any positive value of  $\Delta$ . For negative  $\Delta$  we have another solution, which is obtained by replacing (1)  $\rightarrow$  (2) and  $r \rightarrow 1/\theta - r$ . Thus in the dense phase there are two possible critical regimes for the DJS boundary, one for positive  $\Delta$  and the other for negative  $\Delta$ , which are analogous to the two anisotropic special transitions in the dilute phase. The domains of the two regimes are separated by the isotropic line  $\Delta = 0$ .

The above is true when  $t_B$  is finite. If  $t_B$  tends to  $\pm\infty$ , we can obtain critical regimes with the properties of the ordinary and the extraordinary transitions.

(v) *Dense phase, ordinary and extraordinary transitions*

If we expand the solution (8.16)-(8.17) for  $-t \gg x^{2\theta}$  and  $t_B \gg -tx^{-\theta}$ , the singular parts of the two correlators will be the same as the correlators with ordinary boundary condition on both sides. For example, instead of the term  $t_B^{-1} x^\theta$  in the expression for  $d_0^{(2)}$ , we will obtain  $t^{-1} t_B x^{-\theta}$ . This is the singular part of the correlator  $D_0$  with ordinary boundary conditions in the dense phase. Further, the asymptotics of the solution in the limit  $-t \gg x^{2\theta}$  and  $t_B \ll tx^{-\theta}$  is determined by the symmetry (8.21). This critical regime has the properties of the extraordinary transition, in complete analogy with the dilute case. We conclude that the ordinary and the extraordinary transitions exist also in the dense phase, but they are pushed to  $t_B \rightarrow \pm\infty$ .

Finally, let us comment on the possible origin of the square-root singularity of the solution (8.16)-(8.17) at  $t_B^2 = 4t$ . This singularity appears in the disordered phase,  $t > 0$ , which is outside the domain of validity of the solution. Nevertheless, one can speculate that this singularity is related to the surface transition, which separates the phases with ordered and disordered spins near the DJS boundary. The singularity in our solution has two branches,  $t_B = \pm 2\sqrt{t}$ , while in the true solution for  $t > 0$  the negative branch should disappear.

## 9 Conclusions

In this paper we studied the dilute boundary  $O(n)$  model with a class of anisotropic boundary conditions, using the methods of 2D quantum gravity. The loop gas formulation of the anisotropic boundary conditions, proposed by Dubail, Jacobsen and Saleur (DJS), involves two kinds of loops having fugacities  $n^{(1)}$  and  $n^{(2)} = n - n^{(1)}$ . Besides the bulk temperature, which controls the length of the loops, the model involves two boundary coupling constants, which define the interaction of the two kinds of loops with the boundary.

The regime where the DJS boundary condition becomes conformal invariant is named in [3] anisotropic special transition. The enhanced symmetry of the model after coupling to gravity system allowed us to solve the model analytically away from the anisotropic special transition. We used the solution to explore the deformations away from criticality which are generated by the bulk and boundary thermal operators.

Our main results can be summarized as follows.

1) We found the phase diagram for the boundary transitions in the dilute phase of the  $O(n)$  model with anisotropic boundary interaction. The phase diagram is qualitatively the same as the one obtained in [3] and sketched in the Introduction. The critical line consists of two branches placed above and below the isotropic line. Near the special point the critical curve is given by the same equation on both sides of the isotropic line, which means that the two branches of the critical line meet at the special point without forming a cusp. We also demonstrated that the analytic shape of the critical curve does not contradict the scaling of the two boundary coupling constants. This contradicts the picture drawn in [2] on the basis of scaling arguments, which seems to be supported by the numerical analysis of [3]. Of course we do not exclude the possibility that the origin of the discrepancy is in the fluctuations of the metric.

2) From the singular behavior of the boundary two-point functions we obtained the spectrum of conformal dimensions of the  $L$ -leg boundary operators between ordinary and anisotropic special boundary conditions, which is in agreement with [3]. In order to establish the critical exponents we used substantially the assumption that  $n^{(1)}$  and  $n^{(2)}$  are both non-negative.

3) We showed that the two-point functions of these operators coincide with the two-point functions in boundary Liouville theory [35]. The functional equation for the boundary two-point function obtained from the Ward identities in the matrix model is identical to the functional equation derived by using the OPE in boundary Liouville theory.

4) The result which we find the most interesting is the expression for the two-point functions away from the critical lines. For any finite value of the anisotropic coupling  $\Delta$ , the deviation from the critical line is measured by the renormalized bulk and the boundary thermal couplings,  $t$  and  $t_B$ . Our result, given by eqs. (8.16)-(8.17), gives the boundary two-point function in a theory which is similar to boundary Liouville gravity, except that the bulk and the boundary Liouville interactions are replaced by the Liouville dressed bulk and boundary thermal operators,  $t\mathcal{O}_{1,3}$  and  $t_B\mathcal{O}_{1,3}^B$ . The boundary flow, generated by the boundary operator  $\mathcal{O}_{1,3}^B$ , relates the anisotropic special transition with the ordinary and the extraordinary ones. The bulk thermal flow, generated by the operator  $\mathcal{O}_{1,3}$ , relates the dilute and the dense phases of the  $O(n)$  model coupled to gravity. At the critical value of the boundary coupling, the bulk flow induces a boundary flow between one DJS boundary condition in the dilute phase and another DJS boundary condition in the dense phase. For the rational values of the central charge, the boundary conditions associated with the endpoints of the bulk flow match with those predicted by the recent study using perturbative RG techniques [15].

Here we considered only the boundary two-point functions with ordinary/DJS boundary conditions. It is not difficult to write the loop equations for the boundary  $(n+1)$ -point functions with one

ordinary and  $n$  DJS boundaries. The loop equations for  $n > 1$  will depend not only on the parameters characterizing each segment of the boundary, but also on a hierarchy of overlap parameters that define the fugacities of loops that touch several boundary segments. The loop equations for the case  $n = 2$  were studied for the dense phase in [27]. In this case there is one extra parameter, associated with the loops that touch both DJS boundaries, which determines the spectrum of the boundary operators compatible with the two DJS boundary conditions. In the conformal limit, the loop equations for the  $(1+n)$ -point functions should turn to boundary ground ring identities, which, compared to those derived in [36] for gaussian matter field, will contain a number of extra contact terms with coefficients determined by the overlap parameters. It would be interesting to generalize the calculation of [27] to the dilute case and compare with the existing results [37, 38] for the 3-point functions in Liouville gravity with non-trivial matter field.

The method developed in this paper can be generalized in several directions. Our results were obtained for the  $O(n)$  model, but they can be easily extended to other loop models, as the dilute ADE high models. It is also clear that the method works for more general cases of anisotropic boundary conditions, with the  $O(n)$  invariance broken to  $O(n_1) \times \cdots \times O(n_k)$ .

Finally, let us mention that there is an open problem in our approach. The loop equations do not allow to evaluate the one-point function with DJS boundary conditions,  $H(y)$ , except in some particular cases. There are two possible scaling limits for this function, which correspond to the two Liouville dressings of the identity operator with DJS boundary condition, and it can happen that both dressings are realized depending on the boundary parameters. This ambiguity does not affect the results reported in this paper.

## Acknowledgments

We thank J. Dubail, J. Jacobsen and H. Saleur for useful discussions. This work has been supported in part by Grant-in-Aid for Creative Scientific Research (project #19GS0219) from MEXT, Japan, European Network ENRAGE (contract MRTN-CT-2004-005616) and the ANR program GIMP (contract ANR-05-BLAN-0029-01).

## A Derivation of the loop equations

Here we give the derivation of the loop equations which are extensively discussed in this work.

We first summarize our technique to derive loop equations. The translation invariance of the matrix measure implies, for any matrix  $\mathbf{F}$  made out of  $\mathbf{X}$  and  $\mathbf{Y}_a$ , the identities

$$\frac{1}{\beta} \langle \partial_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \rangle + \langle \text{tr} [(-V'(\mathbf{X}) + \vec{\mathbf{Y}}^2) \mathbf{F}] \rangle = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{1}{\beta} \langle \partial_{\mathbf{Y}_a} \mathbf{F} \rangle + \langle \text{tr} [\mathbf{Y}_a (\mathbf{X} \mathbf{F} + \mathbf{F} \mathbf{X})] \rangle = 0, \quad (\text{A.2})$$

where the derivatives with respect to matrices are defined by  $\partial_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \equiv \partial F_{ij} / \partial X_{ij}$  summed over the indices  $i$  and  $j$ , and are generally given by sums of double traces. Written for the observable  $\mathbf{G} = -(\mathbf{X} \mathbf{F} + \mathbf{F} \mathbf{X})$ , the second equation states<sup>8</sup>

$$\langle \text{tr} (\mathbf{Y}_a \mathbf{G}) \rangle = \frac{1}{\beta} \oint_{i\mathbb{R}} \frac{dx}{2\pi i} \langle \partial_{\mathbf{Y}_a} [\mathbf{W}(x) \mathbf{G} \mathbf{W}(-x)] \rangle. \quad (\text{A.3})$$

<sup>8</sup> Here it is assumed that the eigenvalues of  $\mathbf{X}$  are all in the left half plane. This is indeed true in the large  $N$  limit of our matrix integral.

These identities are used along with the large  $N$  factorization

$$\langle \text{tr} \mathbf{A} \cdot \text{tr} \mathbf{B} \rangle \simeq \langle \text{tr} \mathbf{A} \rangle \langle \text{tr} \mathbf{B} \rangle \quad (\text{A.4})$$

to derive various relations among disk correlators.

### A.1 Loop equation for the resolvent

An equation for the resolvent (4.11) is obtained if we take  $\mathbf{F} = \mathbf{W}(x)$ . The identity (A.1) then gives

$$W^2(x) = \frac{1}{\beta} \langle \text{tr}[V'(\mathbf{X})\mathbf{W}(x)] \rangle - \sum_{a=1}^n \frac{1}{\beta} \langle \text{tr}[\mathbf{Y}_a^2 \mathbf{W}(x)] \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Then the identity (A.3) applied to the last term gives

$$\begin{aligned} \langle \text{tr}[\mathbf{Y}_a^2 \mathbf{W}(x)] \rangle &= \frac{1}{\beta} \oint_{i\mathbb{R}} \frac{dx'}{2\pi i} \langle \partial_{\mathbf{Y}_a} [\mathbf{W}(x')\mathbf{W}(x)\mathbf{Y}_a\mathbf{W}(-x')] \rangle \\ &= \frac{1}{\beta} \oint_{i\mathbb{R}} \frac{dx'}{2\pi i} \langle \text{tr}[\mathbf{W}(x')\mathbf{W}(x)] \text{tr}[\mathbf{W}(-x')] \rangle \\ &= -\beta \int_{i\mathbb{R}} \frac{dx'}{2\pi i} \frac{W(x) - W(x')}{x - x'} W(-x'). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Using the  $\star$ -product introduced in (5.6), the last line can be written as  $\beta[W \star W](x)$ . The equation (A.5) can then be written as

$$W(x)^2 - V'(x)W(x) + n[W \star W](x) = \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr} \left( \frac{V'(\mathbf{X}) - V'(x)}{x - \mathbf{X}} \right) \right\rangle. \quad (\text{A.7})$$

For a cubic potential the expectation value on the r.h.s. is a polynomial of degree one. Using an important property of the  $\star$ -product

$$[f \star g](x) + [g \star f](-x) = f(x)g(-x), \quad (\text{A.8})$$

which can be proved by deforming the contour of integration, one obtains a loop equation [31], which is a quadratic functional equation for  $W(x)$ . The term linear in  $W$  can be eliminated by a shift

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} W(x) - \frac{2V'(x) - nV'(-x)}{4 - n^2}. \quad (\text{A.9})$$

The loop equation for  $w(x)$  is given by (5.3).

### A.2 Loop equations for the boundary two-point functions

The boundary two-point functions of  $L$ -leg operators satisfy the recurrence equations

$$D_{L+1}^{(1)} = W \star D_L^{(1)}, \quad D_{L+1}^{(2)} = W \star D_L^{(2)} \quad (L \geq 1)$$

which can be derived by applying (A.3) with  $\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{S}_{L+1}\mathbf{H}\mathbf{S}_L$ . By applying (A.3) to  $\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{Y}_a\mathbf{H}$  and  $\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{Y}_a$ , we find

$$\begin{aligned} D_1^{(1)} &= (\lambda_{(1)} D_1^{(1)} + W) \star D_0, \\ \frac{1}{\beta n^{(1)}} \left\langle \text{tr}[\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{Y}_{(1)}^2] \right\rangle &= D_0 \star (\lambda_{(1)} D_1^{(1)} + W), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

and a similar pair of equations for  $D_0$  and  $D_1^{(2)}$ . The first equation of (A.10) can be rewritten into an equation for the discontinuity along the branch cut,

$$\text{Disc} D_1^{(1)}(x) = D_0(-x) \text{Disc}(\lambda_{(1)} D_1^{(1)}(x) + W(x)), \quad (\text{A.11})$$

which implies that the recurrence equation can be extended to  $L = 0$  by defining

$$D_0^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D_0}{\lambda_{(1)} D_0 - 1}, \quad D_0^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D_0}{\lambda_{(2)} D_0 - 1}.$$

Also, by applying (A.1) to  $\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{H}$  one finds

$$(W + H)D_0 = V'(x)D_0 - P(x) - \frac{1}{\beta} \left\langle \text{tr}[\mathbf{W}\mathbf{H} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{Y}_{(\alpha)}^2] \right\rangle, \quad (\text{A.12})$$

where  $P(x)$  is defined in (5.12).

By using (A.8) to combine the two equations in (A.10) and noticing that

$$\text{tr}[\mathbf{W}\mathbf{H} \sum_{\alpha=1,2} \lambda_{(\alpha)} \mathbf{Y}_{(\alpha)}^2] = \text{tr}[\mathbf{H} + (y - x)\mathbf{W}\mathbf{H} - \mathbf{W}],$$

one finds a quadratic relation

$$\begin{aligned} (y - x)D_0(x) + H - W(x) + \sum_{\alpha=1,2} \lambda_{(\alpha)} n^{(\alpha)} D_1^{(\alpha)}(-x) \\ = D_0(x) \sum_{\alpha=1,2} \left( \lambda_{(\alpha)}^2 n^{(\alpha)} D_1^{(\alpha)}(-x) + \lambda_{(\alpha)} n^{(\alpha)} W(-x) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

By inserting the second of the equation (A.10) into (A.12) one finds another quadratic equation,

$$\begin{aligned} (W(x) + H)D_0(x) + P(x) - V'(x)D_0(x) - \sum_{\alpha=1,2} n^{(\alpha)} D_1^{(\alpha)}(-x) \\ = -D_0(x) \left\{ \sum_{\alpha=1,2} \lambda_{(\alpha)} n^{(\alpha)} D_1^{(\alpha)}(-x) + nW(-x) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

These two equations are equivalent to (5.10) and (5.11).

## B 2D Liouville gravity

In 2D Liouville gravity formalism, the  $c \leq 1$  matter CFTs are coupled to the Liouville theory with central charge  $26 - c$  and the reparametrization ghosts. For Liouville theory, we denote the standard coupling by  $b$  and the background charge by  $Q = b + 1/b$ . The central charge is given by  $26 - c = 1 + 6Q^2$ . In our convention,  $b$  is always smaller than one. When the matter CFT is  $(p, q)$  minimal model, we have

$$b = \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad c = 1 - \frac{6(p - q)^2}{pq}. \quad (\text{B.1})$$

In studying the  $O(n)$  model we used the parametrization  $n = 2 \cos \pi \theta$ . If  $\theta = 1/p$  with  $p \in \mathbb{Z}$ , the model describes the flow between  $(p, p+1)$  and  $(p-1, p)$  minimal models corresponding respectively to the dilute and dense phase critical points.

The primary operators in  $(p, q)$  minimal model fit in the Kac table which has  $(p - 1)$  rows and  $(q - 1)$  columns. The operator  $\Phi_{r,s}$  has the conformal dimension

$$h_{r,s} = \frac{(rq - sp)^2 - (q - p)^2}{4pq} = \frac{(r/b - sb)^2 - (1/b - b)^2}{4}, \quad (\text{B.2})$$

and are subject to the identification  $\Phi_{r,s} = \Phi_{p-r, q-s}$ . In 2D Liouville gravity coupled to the  $(p, q)$  minimal CFT, the operator  $\Phi_{r,s}$  is dressed by the Liouville exponential  $e^{2\alpha_{r,s}\phi}$  or  $e^{\alpha_{r,s}\phi}$  depending on whether it is a bulk or boundary operator, so that the total conformal weight becomes one. This requires

$$\alpha_{r,s}(Q - \alpha_{r,s}) + h_{r,s} = 1, \quad 2\alpha_{r,s} = Q \pm (r/b - sb). \quad (\text{B.3})$$

### B.1 Conformal weight and scaling exponents of couplings

In making the comparison between the matrix model and Liouville gravity, we start from the fact that the resolvent  $w(x)$  and its argument  $x$  correspond to the two boundary cosmological constants  $\mu_B$  and  $\tilde{\mu}_B$ . They couple respectively to the boundary cosmological operators  $e^{b\phi}$  and  $e^{\phi/b}$ , and are therefore proportional to  $\mu^{\frac{1}{2}}$  and  $\mu^{\frac{1}{2b^2}}$ , where  $\mu$  is the Liouville bulk cosmological constant. Since  $w(x) \sim x^{1 \pm \theta}$  in the dilute and dense phases, we find

$$\begin{aligned} (\text{dilute}): \quad & x = \mu_B, \quad w(x) \sim x^{1+\theta} = \tilde{\mu}_B, \quad b = (1 + \theta)^{-1/2}, \\ (\text{dense}): \quad & x = \tilde{\mu}_B, \quad w(x) \sim x^{1-\theta} = \mu_B, \quad b = (1 - \theta)^{+1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Suppose a boundary condition has a deformation parametrized by a coupling which scales like  $x^\rho$ . Then the corresponding boundary operator should be dressed by the Liouville operator with momentum  $\alpha = \rho b$  in the dilute phase and  $\alpha = \rho/b$  in the dense phase. Then using (B.3) one can determine the conformal dimension of the operator responsible for the boundary deformation. Let us apply this idea to the deformations parametrized by  $\mu_B$ ,  $t_B$  and  $\Delta$  in Sect. 6.

**Deformation by  $\mu_B$ .**  $\mu_B$  scales like  $x^{1+\theta}$  in the dilute phase and  $x^{1-\theta}$  in the dense phase. So the corresponding operators are dressed by  $e^{(1+\theta)b\phi} = e^{\phi/b}$  in the dilute phase and  $e^{(1-\theta)\phi/b} = e^{b\phi}$  in the dense phase. The matter conformal dimension is zero, i.e., the operator responsible for the deformation is the identity  $\Phi_{1,1}$ .

**Deformation by  $t_B$ .**  $t_B$  scale like  $x^\theta$  in the dilute phase and  $x^{-\theta}$  in the dense phase, so the corresponding operator gets dressings with Liouville momentum  $b\theta = \frac{1}{b} - b$  in the dilute phase and  $-\theta/b = b - \frac{1}{b}$  in the dense phase. We identify the operator with  $\Phi_{1,3}$  (relevant) in the dilute phase and  $\Phi_{3,1}$  (irrelevant) in the dense phase.

**Deformation by the anisotropy coupling  $\Delta$ .** The coupling scales like  $x^{1-\theta}$  in the dilute phase. The corresponding operator is dressed by the Liouville momentum  $b(1 - \theta) = 2b - \frac{1}{b}$  and therefore identified with  $\Phi_{3,3}$ .

### B.2 Conformal weight and scaling exponents of correlators

After turning on the gravity, correlators no longer depend on the positions of the operators inserted because one has to integrate over the positions of those operators. The dimensions of the operators therefore should then be read off from the dependence of correlators on the cosmological constant  $\mu$ .

If we restrict to disk worldsheets, the amplitudes with  $n$  boundary operators  $\mathcal{O}_i^B$  dressed by Liouville operators  $e^{\beta_i\phi}$  and  $\lambda$  bulk operators  $\mathcal{O}_i$  dressed by  $e^{2\alpha_j\phi}$  scale with  $\mu$  as

$$\langle \mathcal{O}_1^B \dots \mathcal{O}_n^B \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_m \rangle \propto \mu^{\frac{1}{2b}(Q-2\sum\alpha_j-\sum\beta_i)}. \quad (\text{B.5})$$

Suppose a disk two-point function of a boundary operator  $\mathcal{O}^B$  scales like  $x^\rho$ . Then  $\mathcal{O}^B$  should be dressed with Liouville momentum  $\beta = \frac{1}{2}(Q - b\rho)$  in the dilute phase and  $\beta = \frac{1}{2}(Q - \rho/b)$  in the dense phase. We thus identify  $\mathcal{O}^B$  with the  $(r, s)$  operator in the Kac table if

$$\pm \rho = r(1 + \theta) - s \quad (\text{dilute phase}), \quad \pm \rho = r - s(1 - \theta) \quad (\text{dense phase}). \quad (\text{B.6})$$

### B.3 Boundary two-point function

In Liouville theory with FZZT boundaries, the disk two-point structure constant is

$$d(\beta|t, s) = \frac{(\mu\pi\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{(Q-2\beta)/2b} \mathbf{G}(Q-2\beta) \mathbf{G}^{-1}(2\beta-Q)}{\mathbf{S}(\beta+it+is) \mathbf{S}(\beta+it-is) \mathbf{S}(\beta-it+is) \mathbf{S}(\beta-it-is)}. \quad (\text{B.7})$$

Here the special functions  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{S}$  satisfy

$$\mathbf{S}(x+b) = 2 \sin(\pi b x) \mathbf{S}(x), \quad \mathbf{G}(x+b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} b^{\frac{1}{2}-bx} \Gamma(bx) \mathbf{G}(x), \quad (\text{B.8})$$

and similar equations with  $b$  replaced by  $1/b$ . The boundary parameter  $s$  is related to the boundary cosmological constant by

$$\mu_B = \left( \frac{\mu}{\sin \pi b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cosh(2\pi b s), \quad \tilde{\mu}_B = \left( \frac{\tilde{\mu}}{\sin \pi b^{-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cosh(2\pi s/b). \quad (\text{B.9})$$

where  $\mu$  is the bulk cosmological constant and  $\tilde{\mu}$  is its dual,

$$(\mu\pi\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{1/b} = (\tilde{\mu}\pi\gamma(b^{-2})b^{-2+2b^{-2}})^b. \quad (\text{B.10})$$

Our loop equation (5.14) can be compared with

$$\begin{aligned} d(\beta|t, s) d(Q - \beta - \frac{1}{2}|t \pm \frac{ib}{2}, s) &= F(\beta) \left\{ \cosh 2\pi b(t \pm i\beta) - \cosh 2\pi b s \right\}, \\ F(\beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\sin \pi b^2} \frac{\Gamma(2b\beta - b^2 - 1) \Gamma(1 - 2b\beta)}{\Gamma(-b^2)}}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

or the one with  $b$  replaced by  $1/b$ . Similarly, the recurrence equation (5.7) among disk correlators of  $L$ -leg operators can be compared with

$$\begin{aligned} \frac{d(\beta|t + \frac{ib}{2}, s) - d(\beta|t - \frac{ib}{2}, s)}{d(\beta + \frac{b}{2}|t, s)} &= G(\beta) \left\{ \cos 2\pi i b(t + \frac{ib}{2}) - \cos 2\pi i b(t - \frac{ib}{2}) \right\}, \\ G(\beta) &\stackrel{\text{def}}{=} - \sqrt{\frac{\mu}{\sin \pi b^2} \frac{\Gamma(1 + b^2) \Gamma(1 - 2b\beta)}{\Gamma(2 + b^2 - 2b\beta)}}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

## C Properties of the function $V_r(\tau)$

The function  $V_r(\tau)$  defined by

$$\log V_r(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \left[ \frac{e^{-i\omega\tau} \sinh(\pi r \omega)}{\sinh(\pi \omega) \sinh \frac{\pi \omega}{\theta}} - \frac{r\theta}{\pi \omega} \right] \quad (\text{C.1})$$

satisfies the shift relations

$$\begin{aligned} V_{r+1}(\tau) &= 2 \cosh \left( \frac{\theta(\tau \pm i\pi r)}{2} \right) V_r(\tau \mp i\pi), \\ V_{r+\frac{1}{\theta}}(\tau) &= 2 \cosh \left( \frac{\tau \pm i\pi r}{2} \right) V_r(\tau \mp \frac{i\pi}{\theta}), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

which follow from the integration formula

$$\log(2 \cosh t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\omega} \left[ -\frac{e^{-2i\omega t}}{\sinh(\pi\omega)} + \frac{1}{\pi\omega} \right]. \quad (\text{C.3})$$

By deforming the contour of integration and applying the Cauchy theorem we can write the integral (C.1) as the following formal series which makes sense for  $\text{Re}[\tau] > 0$ :

$$\ln V_r(\tau) = \frac{\theta r}{2} \tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} e^{-n\tau} \frac{\sin(n\pi r)}{\sin(\pi n/\theta)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} e^{-n\theta\tau} \frac{\sin(n\pi\theta r)}{\sin(n\pi\theta)}. \quad (\text{C.4})$$

The expansion for  $\text{Re}[\tau] < 0$  follows from the symmetry  $V_r(\tau) = V_r(-\tau)$ . The expansion of the function  $V_r$  at infinity is

$$V_r(\tau) = e^{\theta r|\tau|/2} \left( 1 + \frac{\sin(\pi r)}{\sin(\pi/\theta)} e^{-|\tau|} + \frac{\sin(\pi\theta r)}{\sin(\pi\theta)} e^{-\theta|\tau|} + \dots \right), \quad \tau \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{C.5})$$

## References

- [1] H.W. Diehl, J. Appl. Phys. **53**, 7914 (1982)
- [2] H. W. Diehl and E. Eisenriegler, "Effects of surface exchange anisotropies on magnetic critical and multicritical behavior at surfaces", Phys. Rev. B **30** (1984) 300
- [3] J. Dubail, J. L. Jacobsen and H. Saleur, "Conformal boundary conditions in the critical  $O(n)$  model and dilute loop models", arXiv:0905.1382v1 [math-ph]
- [4] E. Domany, D. Mukamel, B. Nienhuis and A. Schwimmer, "Duality Relations And Equivalences For Models With  $O(N)$  And Cubic Symmetry," Nucl. Phys. B **190** (1981) 279.
- [5] B. Nienhuis, "Exact Critical Point And Critical Exponents Of  $O(N)$  Models In Two-Dimensions," Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1062.
- [6] J. Dubail, J. L. Jacobsen and H. Saleur, "Exact solution of the anisotropic special transition in the  $O(n)$  model in 2D", Phys. Rev. Lett. **103** (14):145701, 2009 [cond-math,stat-mech 0909.2949]
- [7] J. L. Jacobsen and H. Saleur, "Conformal boundary loop models," Nucl. Phys. B **788**, 137 (2008) [math-ph/0611078].
- [8] J. L. Jacobsen and H. Saleur, "Combinatorial aspects of boundary loop models", arXiv:0709.0812v2 [math-ph]
- [9] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, "2D Gravity and Random Matrices", Phys.Rept. 254 (1995) 1-133, hep-th-9306153
- [10] P. Ginsparg and G. Moore, "Lectures on 2D gravity and 2D string theory (TASI 1992)", hep-th/9304011.
- [11] I. K. Kostov, " $O(n)$  vector model on a planar random lattice: spectrum of anomalous dimensions", Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 217.
- [12] M. Gaudin and I. Kostov, " $O(n)$  model on a fluctuating planar lattice. Some exact results" Phys. Lett. B **220** (1989) 200.
- [13] I. Kostov, "Boundary loop models and 2D quantum gravity," J. Stat. Mech. **0708** (2007) P08023 [arXiv:hep-th/0703221].
- [14] J. E. Bourgine and K. Hosomichi, "Boundary operators in the  $O(n)$  and RSOS matrix models," JHEP **0901** (2009) 009 [arXiv:0811.3252 [hep-th]].
- [15] S. Fredenhagen, M. R. Gaberdiel, and C. Schmidt-Colinet. Bulk flows in virasoro minimal models with boundaries. 07 2009.
- [16] B. Nienhuis, "Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas," J. Statist. Phys. **34**, 731 (1984).
- [17] B. Nienhuis, "Critical spin-1 vertex models and  $O(n)$  models", Int. J. Mod. Phys. B **4**, 929 (1990)
- [18] B. Duplantier and H. Saleur, "Exact surface and wedge exponents for polymers in two dimensions," Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 3179.
- [19] H. Saleur and M. Bauer, "On some relations between local height probabilities and conformal invariance", Nucl. Phys. B **320**, 591 (1989).
- [20] V. A. Kazakov and I. K. Kostov, "Loop gas model for open strings," Nucl. Phys. B **386** (1992) 520 [arXiv:hep-th/9205059].
- [21] I. K. Kostov, "Boundary correlators in 2D quantum gravity: Liouville versus discrete approach," Nucl. Phys. B **658**, 397 (2003) [arXiv:hep-th/0212194].
- [22] I. K. Kostov, B. Ponsot and D. Serban, "Boundary Liouville theory and 2D quantum gravity," Nucl. Phys. B **683** (2004) 309 [arXiv:hep-th/0307189].
- [23] V. Knizhnik, A. Polyakov and A. Zamolodchikov, "Fractal Structure of 2D Quantum Gravity", Mod. Phys. Lett. **A3** 819 (1988).
- [24] F. David, "Conformal field theories coupled to 2D gravity in the conformal gauge", Mod. Phys. Lett. **A3** 1651 (1988); J. Distler and H. Kawai, "Conformal Field Theory and 2-D Quantum Gravity or Who's Afraid of Joseph Liouville?", Nucl. Phys. **B321** 509 (1989).
- [25] J. L. Cardy, "Conformal Invariance And Surface Critical Behavior," Nucl. Phys. B **240** (1984) 514.
- [26] J. Dubail, J. L. Jacobsen and H. Saleur, "Conformal two-boundary loop model on the annulus", Nucl. Phys. B **813**, 430 (2009).
- [27] J. E. Bourgine, "Boundary changing operators in the  $O(n)$  matrix model," JHEP **0909** (2009) 020, arXiv:0904.2297 [hep-th].
- [28] M. T. Batchelor, C. M. Yung, "Surface critical behaviour of the honeycomb  $O(n)$  loop model with mixed ordinary and special boundary conditions", J.Phys. A28 (1995) L421-L426, arXiv:cond-mat/9507010v2
- [29] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, "Planar diagrams", Comm. Math. Phys. **35** **59** (1978)
- [30] G 't Hooft, "A Planar diagram theory for strong interactions, Nucl. Phys. **B 72**, 461 (1974).
- [31] I. K. Kostov, "Strings with discrete target space," Nucl. Phys. B **376**, 539 (1992) [arXiv:hep-th/9112059].
- [32] B. Eynard and C. Kristjansen, "Exact solution of the  $O(n)$  model on a random lattice", Nucl. Phys. **B455**, 577 (1995); Nucl. Phys. **B466**, 463 (1996).
- [33] I. Kostov, "Thermal flow in the gravitational  $O(n)$  model," arXiv:hep-th/0602075.
- [34] P. Fendley, H. Saleur and Al. Zamolodchikov, "Massless Flows I: the sine-Gordon and  $O(n)$  models", Int.J.Mod.Phys. **A8** 5751 (1993)
- [35] V. Fateev, A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, Boundary Liouville Field Theory I. Boundary State and Boundary Two-point Function, hep-th/0001012.
- [36] I. K. Kostov. Boundary ground ring in 2d string theory. Nucl.Phys., B689:3–36, 2004.
- [37] A. Basu and E. J. Martinec, Phys. Rev. D **72** (2005) 106007 [arXiv:hep-th/0509142].
- [38] P. Furlan, V. B. Petkova and M. Stanishkov, J. Phys. A **42** (2009) 304016 [arXiv:0805.0134 [hep-th]].

## Résumé :

L'objet de cette thèse est l'étude de divers problèmes de bord de la gravité bidimensionnelle en utilisant à la fois les méthodes de la gravité de Liouville et les modèles de matrices aléatoires. Elle s'articule autour de deux grands thèmes : le modèle  $O(n)$  matriciel et la théorie des cordes en deux dimensions.

La première partie expose la méthode développée pour analyser les conditions de bord des modèles statistiques sur réseaux. Celle-ci consiste à utiliser la formulation matricielle du modèle sur réseau aléatoire afin de dériver des équations de boucle dont on prend la limite continue. L'accent est mis sur l'étude des conditions de bords anisotropes récemment introduites pour le modèle  $O(n)$ . Cette méthode a permis d'obtenir le diagramme de phase associé aux conditions de bord, ainsi que la dimension des opérateurs de bord et le comportement sous les *flows* du groupe de renormalisation. Ces résultats peuvent être étendus à d'autres modèles statistiques tels que les modèles ADE.

En seconde partie, on s'intéresse à une gravité de Liouville Lorentzienne couplée à un boson libre. Ce modèle peut se réinterpréter comme une théorie des cordes dans un espace cible à deux dimensions dont la version discrète est donnée par une mécanique quantique matricielle (MQM). L'amplitude de diffusion de deux cordes longues à l'ordre dominant est obtenue en utilisant le formalisme chirale de la MQM, le résultat trouvé est en accord avec les calculs effectués dans la théorie continue. En outre, une conjecture a été émise concernant l'amplitude d'un nombre quelconque de cordes longues.

## Summary :

The present thesis concerns the study of boundary 2d gravity using both the methods of Liouville gravity and the matrix models. It hinges on two main topics : the  $O(n)$  matrix model and the 2D non-critical string theory.

In a first part, we explain the new method developed to study boundary conditions of lattice statistical models. It consists in using a matrix model formulation of the random lattice model in order to derive loop equations, of which we take the continuum limit. We concentrate on the anisotropic boundary conditions recently introduced in the  $O(n)$  model. This method allows to find out the boundary phase diagram, the spectrum of boundary operators and the behavior under bulk and boundary RG flows. These results can be extended to other statistical models, such as the ADE models.

In a second part, we consider the Lorentzian Liouville gravity coupled to a free boson, which can be re-interpreted as a string theory with a two-dimensional target space. The discrete version of the model is given by a matrix quantum mechanics (MQM). We computed the scattering amplitude of two long strings at the leading order using the chiral formalism of the MQM, and compared the result with a continuum computation. We also conjectured a formula for the scattering of an arbitrary number of long strings.