HAL
open science

Contribution à l'analyse de la dynamique quantique dans des systèmes de Hall en présence d'un flux Aharonov-Bohm dépendant du temps

Cédric Meresse

To cite this version:

Cédric Meresse. Contribution à l'analyse de la dynamique quantique dans des systèmes de Hall en présence d'un flux Aharonov-Bohm dépendant du temps. Physique mathématique [math-ph]. marseille; Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2010. Français. NNT : . tel-00541689

HAL Id: tel-00541689

https://theses.hal.science/tel-00541689v1

Submitted on 1 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université d'Aix-Marseille II
Faculté des Sciences

Thèse

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université d'Aix-Marseille

Spécialité : Physique Théorique et Mathématique

Contribution à l'analyse de la dynamique quantique dans des systèmes de Hall en présence d'un flux Aharonov-Bohm dépendant du temps

Cédric MERESSE

Présentée publiquement le 25 Novembre 2010

Composition du jury :

Claude-Alain Pillet	Université du Sud Toulon-Var	(Président du jury)
Alain Joye	Université de Grenoble I	(Rapporteur)
Pavel Stovicek	Czech Technical University, Prague	(Rapporteur)
Pavel Exner	Nuclear Physics Institute, Prague	(Examinateur)
Claudio Fernandez	Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago	(Examinateur)
Joachim Asch	Université du Sud Toulon-Var	(Directeur de thèse)

Remerciements

C'est avec une grande émotion que se referme ce chapitre de mes études. Mes toutes premières pensées vont bien évidement pour mon directeur de thèse, Joachim Asch. Notre collaboration dure depuis son cours d'option de Master 1 sur la dynamique quantique. Ce sujet m'avait semblé à l'époque passionnant et m'avait poussé à faire un premier stage avec lui. Au cours de ces quelques semaines, j'ai pu découvrir avec quelle passion il s'investissait dans son travail de recherche. Une telle motivation ne pouvait me laisser indifférent et c'est pourquoi j'ai voulu continué avec lui lors du stage de Master 2. Ma joie fut intense lorsque j'appris que notre association allait se poursuivre par cette thèse. Ce fut 5 années qui furent riches en discussions et en apprentissages. Je savais que je trouverais toujours la porte ouverte pour une question, aussi bête soit-elle. Pour tout cela, merci.

Toute ma gratitude va aussi au Professeur Alain Joye et au Professeur Pavel Šťovíček pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et au Professeur Pavel Exner, au Professeur Claudio Fernandez et au Professeur Claude-Alain Pillet de bien vouloir faire partie de mon jury.

Je tiens également à remercier le Professeur Stefan Teufel pour les discussions que nous avons eu et pour m'avoir accueilli dans la magnifique ville de Tübingen en Avril 2008.

Je ne peux pas non plus oublier de remercier les thésards (passé et présent) du Centre de Physique Théorique et du département de Mathématiques de l'USTV, avec qui nous nous sommes mis dans la "même galère". Il est toujours agréable de trouver une personne à qui parler lors d'un coup de mou. Courage, vous aussi vous verrez bientôt le bout du tunnel!

Une pensée pour Seb, perdu de vue depuis quasiment le lycée et retrouvé à une

terrasse de la fac. Depuis, nous avons discuté des heures durant de tout et de rien, en sirotant des litres et des litres de café. J'en profite pour te souhaiter bonne chance pour la suite!

Et enfin, last but not least, une immense et tendre pensée pour celle avec qui je partage ma vie depuis bien longtemps déjà. Sans toi, je ne suis pas certain d'avoir eu le courage de faire autant d'études. Merci d'avoir trouvé un moyen de me défouler, merci d'être partie à chaque fois que je te l'ai demandé, merci de m'avoir supporter ces derniers mois et nous seuls savons à quel point ce fut dur, merci pour le soutien que tu m'as apportée depuis 3 ans. Je te promets que l'on va rattraper le temps perdu! Je t'aime.

Table des Matières

Introduction **4**

1 Analyse spectrale du modèle de Landau à flux Aharonov-Bohm dépendant du temps **10**

1.1 Définition du modèle 11

1.2 Analyse spectrale pour le cas V=0 et N fixé 12

1.2.1 Opérateurs de création et d'annihilation 13

1.2.2 Propriétés des opérateurs de création et d'annihilation et relation avec $H(N)$ et $\bar{H}(N)$ 14

1.2.3 Détermination du spectre joint et des fonctions propres 15

1.3 Propriétés des fonctions propres 24

1.3.1 Continuité en "flux" des fonctions propres 24

1.3.2 Fonctions propres et transformation de jauge 26

1.3.3 Développement dans la base propre des dérivées par rapport au paramètre N des fonctions propres 27

2 Théorèmes adiabatiques **34**

2.1 Théorème adiabatique pour la mécanique quantique 35

2.2 Premier théorème adiabatique 36

2.2.1 Le résultat 36

2.2.2 Choix de la famille de projecteurs pour le cas $H(N(t))$ et $V = 0$ 38

2.2.3 Un résultat adiabatique pour le problème à flux dépendant du temps 39

2.2.4 Dynamique adiabatique du niveau fondamental de Landau . . . 48

2.3 Second théorème de type adiabatique 50

2.3.1 Le modèle 50

2.3.2 Le théorème 51

3 Forme normale de l'hamiltonien $H^{La} + \varepsilon^2 V$ où V est un polynôme du second degré. 54
3.1 Structure symplectique 55
3.2 Hamiltoniens quadratiques et leurs transformations 56
3.3 Mise en place du problème 58
3.4 Diagonalisation du problème 59
3.5 Exemples fondamentaux 63
3.6 Constante du mouvement 68
3.7 Une remarque sur le cas linéaire 70
3.8 Conclusion 71

4 Diagonalisation partielle d'opérateurs du type $H^{La} + V$ 72
4.1 Le résultat principal 73
4.2 Un algorithme de diagonalisation partielle 74
4.2.1 Enoncé de l'algorithme 74
4.2.2 Algorithme formel 76
4.2.3 Les outils 77
4.2.4 Sur l'équation au commutateur 82
4.2.5 Convergence de l'algorithme 83
4.3 Preuve du résultat principal 88
4.4 Application à la dynamique des systèmes 88

5 La classe de potentiels $\mathcal{G}$ 90
5.1 La fonction gaussienne g 91
5.1.1 Outils 91
5.1.2 Les éléments de matrice de g 92
5.1.3 Estimation des éléments de matrice 96
5.2 La classe $\mathcal{G}$ 100
5.2.1 Décaler les potentiels 100
5.2.2 Décroissance des potentiels de $\mathcal{G}$ 101

Bibliographie 106

Introduction

En 1879, E. H. Hall [Hall] observa l'effet Hall classique, c'est-à-dire la valeur

$$R_H = \frac{B}{n|e|}$$

de la composante hors-diagonale du tenseur de résistance pour le problème 2 dimensionnel en champs magnétique et électrique croisé. Ici, e est la charge de l'électron, B la valeur du champ magnétique et n le nombre d'électrons par unité de surface.

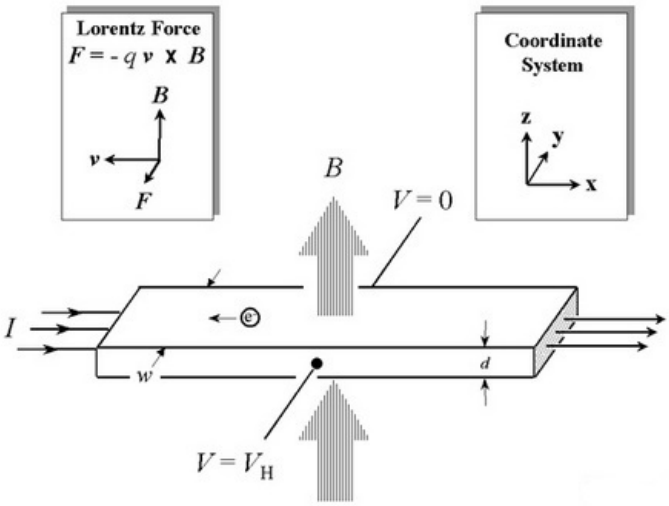


Figure 1: Dans l'effet de Hall, le champ magnétique est appliqué perpendiculairement à l'échantillon suivant la direction z, nous faisons passer un courant suivant x et la tension de Hall est mesuré suivant y. *Crédit : NIST.*

En 1980, K. von Klitzing [KDP] observa un nouveau phénomène qui apparait dans un régime quantique. Cette découverte lui valut le prix Nobel de Physique en 1985.

Il mesura la résistance de Hall en fonction du champ magnétique et s'aperçut quelle n'était pas linéaire mais présentait des plateaux quantifiés selon la relation

$$R_H = \frac{h}{ie^2}$$

avec i est un entier, pendant que la résistance longitudinale s'annule.

Pour les théoriciens, ils fallaient maintenant expliquer d'où venaient ces plateaux, pourquoi leurs quantifications étaient si précises et pourquoi la résistance longitudinale s'annulait lors d'un plateau.

Parmi les premiers travaux donnant une explication à ces résultats, on trouve ceux de Laughlin et Halperin [La, Halp]. Pour cela, le modèle qu'ils utilisèrent fut celui d'un anneau dans lequel on fait passer un tube de flux. Nous pouvons étendre cet anneau à l'infini afin d'obtenir un plan percé par le tube de flux. Ce modèle, que l'on appellera par la suite "modèle de type Aharonov-Bohm avec flux dépendant du temps", a motivé plusieurs études [BvES, ASS1, ASS2, EGS].

Une analyse fine de la dynamique n'était cependant pas un but pour ces travaux. D'un autre côté, le modèle est suffisamment explicite pour que nous précisions l'étude de la dynamique. C'est cette idée qui guida l'analyse produite dans ce document.

La version classique du modèle que nous traitons, a été étudiée dans [AS2]. On y observe un comportement curieux concernant la dynamique des particules dû à la présence d'un tube de flux. Il y a deux régimes différents. Le premier est le mouvement cycloïdale classique avec un centre qui se déplace le long des lignes de niveaux du potentiel. Dans le second régime, la particule, une fois arrivée sur le tube de flux, spirale autour. La figure 2 représente la trajectoire d'une particule pour l'hamiltonien à flux dépendant du temps plus un potentiel périodique $V(z)$. En arrière-plan sont dessinées les lignes de niveaux du potentiel $V(z) + \arg z$. $\arg z$ est formellement le potentiel électrique crée par le flux linéairement en temps.

Le phénomène classique illustré par la figure 2 se résume en coordonnées de gyration comme suit : avant de toucher le tube de flux, l'énergie cinétique est constante et c'est le centre qui bouge. Dès que la particule atteint l'origine, alors le centre se fixe et l'énergie se met à croitre.

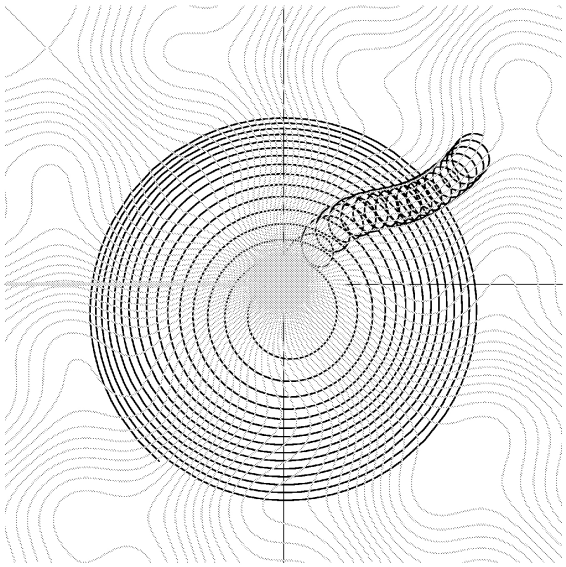


Figure 2: $V(x,y) = \frac{1}{10}(\sin x + \sin y)$, $(x,y) \in [-10,10]^2$

Dans cette thèse, nous contribuons à l'analyse quantique correspondante.

Dans le cas quantique, pour chaque valeur du temps, nous sommes amené à étudier l'opérateur d'énergie cinétique $H(t)$ et son complexe conjugué $\bar{H}(t)$. Ces deux opérateurs commutent entre eux. Leurs spectres sont discrets. Grossièrement parlant, le problème quantique se résume à montrer que $H(t)$ est constant avant que l'électron ne heurte le tube de flux et linéairement croissant après, ainsi que le comportement opposé pour $\bar{H}(t)$.

Le tracé du spectre joint de ces opérateurs $H(t)$ et $\bar{H}(t)$ permettra de donner une signification à ces dernières phrases. Nous démontrerons au cours de la partie 2.2.2 un théorème adiabatique. Il est valable à l'intérieur d'un niveau spectral du hamiltonien et est de premier ordre dans le paramètre adiabatique. L'approximation est donc valable pour un certain intervalle temporel fini.

La singularité du champ pose d'un point de vue mathématique des problèmes techniques. Si l'on remarque que dans le cas classique, la particule se comporte lorsqu'elle part à l'infini comme si elle n'avait pas vu la singularité alors on peut penser que dans l'étude de la dynamique loin du tube de flux, son influence est régularisée. Nous sommes alors amenés à considérer un modèle consistant en l'hamiltonien de Landau

(c'est-à-dire de l'opérateur d'énergie cinétique en champ magnétique constant) auquel on rajoute un champ électrique régulier constant en temps. Par la suite, notre but sera de comprendre le comportement d'une particule dans un champ magnétique et soumis à une perturbation indépendante du temps.

Le premier résultat que nous démontrerons pour la dynamique de modèles sans flux concerne des potentiels bornés, indépendants du temps et de constante de couplage ε petite. Il est de type adiabatique et fourni une approximation au premier ordre dans le paramètre ε pour des temps d'ordre de l'inverse de ε. C'est un résultat du type moyennisation quantique car l'hamiltonien "adiabatique" sera la somme de l'hamiltonien de Landau et de la partie diagonale du potentiel.

Un deuxième résultat que nous avons pu démontrer pour ce dernier modèle est bien plus précis. Nous le considérons comme le résultat clef de ce travail. Ce théorème 4.1.1 donne l'existence d'une constante de mouvement. Il est démontré à l'aide d'un algorithme de diagonalisation partielle. Cet algorithme permet de construire un unitaire transformant la somme de l'hamiltonien de Landau et d'un potentiel appartenant à une certaine classe, en un problème diagonal par rapport aux projecteurs propres de l'hamiltonien de Landau. La convergence du problème initial vers le problème diagonal se fait de manière super-exponentielle. Cette méthode permet la construction d'un invariant du mouvement qui est formellement une perturbation de l'énergie cinétique. L'unitaire construit nous permet également d'obtenir un résultat pour la dynamique du système. L'approximation que l'on obtient est encore au premier ordre mais est cette fois valable pour tous les temps. Ce résultat a fait l'objet d'une publication [AM].

Ce document se compose de 5 chapitres. Dans le premier chapitre, nous allons faire une étude du spectre du modèle à flux. Nous présenterons également diverses propriétés des fonctions propres de cet opérateur. Le chapitre suivant parlera des théorèmes adiabatiques. Nous présenterons ensuite une méthode qui permet de déterminer un opérateur commutant avec l'hamiltonien de Landau à partir du problème donné par la somme de l'hamiltonien en champ magnétique et d'un potentiel de degré au plus 2. Nous continuerons avec le résultat important de cette thèse. Nous expliquerons comment obtenir un unitaire transformant le même type de problème que précédemment en un hamiltonien diagonal. Les potentiels pour lesquels nous pourrons utiliser cette méthode sont des potentiels décroissants. Par exemple, nous montrerons par la suite qu'un potentiel gaussien satisfait aux hypothèses nécéssaires et nous construirons grâce à lui la classe à laquelle appartient V. Nous nous intéresserons ensuite aux conditions

suffisantes d'appartenance à cette classe, nous permettant alors d'en déduire l'existence d'un invariant du mouvement pour des systèmes pertinents dérivés de l'étude de l'effet Hall quantique.

Chapitre 1

Analyse spectrale du modèle de Landau à flux Aharonov-Bohm dépendant du temps

Ce chapitre se centrera autour de l'analyse spectrale d'un modèle de type Aharonov-Bohm dont le flux dépend du temps. Ce modèle présente une singularité non intégrable à l'origine pour modéliser le tube de flux présent dans l'expérience physique. La dépendance du flux implique la même dépendance pour les valeurs propres. On montrera à la section 1.3.1 que celles-ci sont des fonctions continues en flux. Remarquons que lorsque le nombre de flux est entier, alors l'hamiltonien du problème est unitairement équivalent grâce à une transformation de jauge au problème de Landau (cf. 1.3.2).

Nous remarquons que l'analyse spectrale de ce modèle est connue (on pourra consultat par exemple [ESV]). Cependant, nous chercherons ici à introduire l'analyse du spectre joint de $H(t)$ et $\bar{H}(t)$. Nous verrons la dépendance des valeurs spectrales du flux et que les vecteurs propres sont continus dans ce paramètre. L'introduction d'un formalisme d'opérateurs de création / annihilation nous sera d'une grande aide.

Notations

Nous allons introduire en tout premier lieu des notations qui seront régulièrement utilisées par la suite :

$$\boxed{\text{Si } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ alors } x^\perp = (-x_2, x_1)}$$

$\hat{q}$ et $\hat{p}$ désignent respectivement les opérateurs d'impulsion et de position sur $\mathbb{R}^2$:

$$\hat{p} := \begin{pmatrix} -i\partial_x \\ -i\partial_y \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{q} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ces opérateurs sont essentiellement autoadjoints sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

1.1 Définition du modèle

Il s'agit de comprendre la dynamique d'une particule dans le plan soumis à un potentiel $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, à un champ magnétique constant et orthogonal ainsi qu'un champ electrique en partie créé par un flux magnétique dépendant du temps et concentré à l'origine.
Le potentiel vecteur A a donc une décomposition de la forme

$$A := A_c + A_\Phi$$

où A_c crée un champ magnétique homogène

$$A_c := \frac{B}{2}(-q_2, q_1) = \frac{B}{2}q^\perp$$

et où A_Φ décrit la contribution du flux Φ dépendant du temps, que l'on suppose de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, antisymétrique et croissant

$$A_\Phi := \frac{\Phi(t)}{2\pi|q|^2}(-q_2, q_1) = \frac{\Phi(t)}{2\pi|q|^2}q^\perp,\ \Phi(t) = -\Phi(-t).$$

Le champ électrique est donné par la formule

$$\begin{aligned} E &= -\nabla V - \partial_t A(q,t) \\ &= -\nabla V - \frac{\dot{\Phi}(t)}{2\pi}\frac{q^\perp}{|q|^2} \end{aligned}$$

Le champ électrique induit par le potentiel vecteur est dirigé par le vecteur $q^\perp$ qui est orthogonal au vecteur unitaire radial. Le champ électrique est donc circulaire.
On définit la fonction $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$N(t) := \frac{\Phi(t)}{2\pi}.$$

Nous sommes amenés à étudier dans $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^2)$ l'hamiltonien de symbole

$$\begin{aligned} H(N(t)) &:= \frac{1}{2}\left(\hat{p} - (\frac{1}{2} - \frac{N(t)}{|q|^2})\hat{q}^{\perp}\right)^2 + V(\hat{q}) \\ &= \frac{1}{2}\left((-i\partial_{q_1} + (\frac{1}{2} - \frac{N(t)}{|q|^2})q_2)^2 + (-i\partial_{q_2} - (\frac{1}{2} - \frac{N(t)}{|q|^2})q_1)^2\right) + V(\hat{q}). \end{aligned}$$

Pour le cas $V = 0$, nous pouvons associer à cet hamiltonien un second opérateur de symbole :

$$\bar{H}(N(t)) := \frac{1}{2}(\hat{p} + (\frac{1}{2} + \frac{N(t)}{|q|^2})\hat{q}^{\perp})^2.$$

Ces deux hamiltoniens sont reliés par la relation :

$$\bar{H}(N(t)) = CH(-N(t))C$$

où C est l'opérateur de conjugaison complexe.
De plus, pour l'opérateur de moment angulaire L, on a les relations :

$$\begin{aligned} [H(N(t)), \bar{H}(N(t))] &= [H(N(t)), L] = 0, \\ \bar{H}(N(t)) - H(N(t)) &= L + N(t). \end{aligned}$$

Une preuve de ces résultats est présentée dans la proposition 1.2.3.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de la dynamique générée par cet hamiltonien à flux dépendant du temps plus un potentiel électrique régulier V. Remarquons cependant que les résultats démontrés par la suite concernent le cas où $V = 0$ ou $\phi = 0$ et que V est assujetti à des conditions de régularité et décroissance.

1.2 Analyse spectrale pour le cas V=0 et N fixé

Pour $N \in \mathbb{R}$ fixe, l'opérateur $H(N)$ est symétrique sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.
La question sur les extensions autoadjointes de ces deux opérateurs a déjà été discutée, voir par exemple [ESV]. Nous considérons ici l'extension de Friedrichs autoadjointe sur $\mathcal{D}(H(N))$. Rappelons que la famille $N \mapsto H(N)$ n'est pas une famille de type (A) au sens de Kato (voir [AHS]).

1.2.1 Opérateurs de création et d'annihilation

Définissons $v_N := \hat{p} - (\frac{1}{2} - \frac{N}{|q|^2})\hat{q}^\perp$ et $c_N := \hat{q} - v_N^\perp = -\hat{p}^\perp + (\frac{1}{2} + \frac{N}{|q|^2})\hat{q}$. Ces opérateurs sont la quantification de Weyl des coordonnées qui décrivent la vitesse et le centre de la trajectoire classique. On peut maintenant utiliser ces opérateurs pour réécrire les deux hamiltoniens comme

$$\begin{aligned} H(N) &= \frac{1}{2}v_N^2 \\ \bar{H}(N) &= \frac{1}{2}c_N^2. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant nous attacher à trouver une décomposition de cette paire d'opérateur à l'aide d'opérateurs de création et d'annihilation. L'existence d'une telle décomposition pour l'opérateur de Landau nous laisse à penser qu'elle peut également exister pour les opérateurs de type Aharonov-Bohm.

Commençons par introduire deux opérateurs d'annihilation notés $a(N)$ et $b(N)$ définis par :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}a(N) &:= (v_N^\perp)_x + i(v_N^\perp)_y \\ \sqrt{2}b(N) &:= (c_N)_x - i(c_N)_y. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *L'indice x signifie que l'on prend la première composante du vecteur et l'indice y, la seconde composante.*

En ré-exprimant ces opérateurs dans les coordonnées $\hat{q}$ et $\hat{p}$, nous obtenons pour ces opérateurs ainsi que pour leurs adjoints, les opérateurs de création :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}a(N) &= (\frac{1}{2} - \frac{N}{|q|^2})(x + i\,y) + (-\hat{p}_y + i\hat{p}_x) \\ \sqrt{2}a^*(N) &= (\frac{1}{2} - \frac{N}{|q|^2})(x - i\,y) + (-\hat{p}_y - i\hat{p}_x) \\ \sqrt{2}b(N) &= (\frac{1}{2} + \frac{N}{|q|^2})(x - i\,y) + (\hat{p}_y + i\hat{p}_x) \\ \sqrt{2}b^*(N) &= (\frac{1}{2} + \frac{N}{|q|^2})(x + i\,y) + (\hat{p}_y - i\hat{p}_x). \end{aligned}$$

Puisque nous travaillons dans $\mathbb{R}^2$, il est possible d'exprimer les deux paires d'opérateurs

de création et d'annihilation en fonction de la variable complexe z et de son conjugué $\bar{z}$. Pour cela, nous utiliserons les définitions :

$$\begin{aligned} z = x + iy \qquad & \bar{z} = x - iy \\ 2\partial_z := \partial_x - i\partial_y \qquad & 2\partial_{\bar{z}} := \partial_x + i\partial_y. \end{aligned}$$

Ceci nous permet alors de reformuler les opérateurs $a(N)$, $a^*(N)$, $b(N)$ et $b^*(N)$ dans des coordonnées complexes :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}a(N) &= (\frac{1}{2} - \frac{N}{z\bar{z}})z + 2\partial_{\bar{z}} \\ \sqrt{2}a^*(N) &= (\frac{1}{2} - \frac{N}{z\bar{z}})\bar{z} - 2\partial_z \\ \sqrt{2}b(N) &= (\frac{1}{2} + \frac{N}{z\bar{z}})\bar{z} + 2\partial_z \\ \sqrt{2}b^*(N) &= (\frac{1}{2} + \frac{N}{z\bar{z}})z - 2\partial_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés des opérateurs de création et d'annihilation et relation avec $H(N)$ et $\bar{H}(N)$

Les paires d'opérateurs que nous venons d'introduire vont nous permettre d'étudier le spectre joint des opérateurs $H(N)$ et $\bar{H}(N)$.

Définition 1.2.2 *L'opérateur de moment angulaire L est défini par*

$$L = xp_y - yp_x$$

Nous avons alors une série de résultats concernant les opérateurs de création et d'annihilation :

Proposition 1.2.3 *1. Si C est l'opérateur de conjugaison complexe, alors*

$$Ca^\sharp(N)C = b^\sharp(-N)$$

où $a^\sharp$ désigne a ou a^*.

2. Si $[\,.\,,\,.\,]$ désigne le commutateur, alors on a :

$$[a(N), a^*(N)] = [b(N), b^*(N)] = \mathbb{I}$$

et

$$[a(N), b(N)] = [a^*(N), b^*(N)] = [a(N), b^*(N)] = [a^*(N), b(N)] = 0$$

3. $H(N) = a(N)^* a(N) + \frac{1}{2}\mathbb{I}$ *et* $\bar{H}(N) = b^*(N)b(N) + \frac{1}{2}\mathbb{I}$ *où* $\mathbb{I}$ *désigne l'identité sur* $\mathcal{D}(H(N))$.

4. $$\bar{H}(N) - H(N) = L + N \tag{1.1}$$

5. *On a les relations de commutations suivantes :*

$$[\bar{H}(N), H(N)] = [H(N), L] = 0$$

Preuve : Les identités 1 à 5 sont vérifées par des calculs directs. A titre d'exemple, remarquons que

$$2C\partial_{\bar{z}}C = C(\partial_x - i\partial_y)C = (\partial_x + i\partial_y) = 2\partial_z$$

et

$$\begin{aligned} 2[a(N), b(N)] &= 2[\frac{z}{2} - \frac{N}{\bar{z}} + 2\partial_{\bar{z}}, \frac{\bar{z}}{2} + \frac{N}{z} + 2\partial_z] \\ &= 2[\frac{z}{2}, 2\partial_z] + 2[2\partial_{\bar{z}}, \frac{\bar{z}}{2}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

1.2.3 Détermination du spectre joint et des fonctions propres

Nous allons maintenant nous intéresser au spectre joint des opérateurs $H(N)$ et $\bar{H}(N)$. Cela veut dire que nous cherchons des fonctions à la fois fonctions propres de $H(N)$ et de $\bar{H}(N)$.

Introduisons la fonction p_α pour $\alpha \geq 0$ définie par :

$$p_\alpha(z, \bar{z}) := (z\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}.$$

Nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.4 *Si p_α est considéré comme un opérateur de multiplication alors :*

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\, p_\alpha^{-1}\, a(N)\, p_\alpha &= 2\partial_{\bar z} + \frac{\alpha - N}{\bar z} \\
\sqrt{2}\, p_\alpha^{-1}\, b(N)\, p_\alpha &= 2\partial_z + \frac{N + \alpha}{z} \\
\sqrt{2}\, p_\alpha^{-1}\, a^*(N)\, p_\alpha &= \bar z - 2\partial_z - \frac{N + \alpha}{\bar z} \\
\sqrt{2}\, p_\alpha^{-1}\, b^*(N)\, p_\alpha &= z - 2\partial_{\bar z} + \frac{N - \alpha}{\bar z}.
\end{aligned}$$

Preuve : Ces résultats vont être obtenus par calculs directs. Par exemple,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\, p_\alpha^{-1}\, a(N)\, p_\alpha &= p_\alpha^{-1}((\frac{1}{2} - \frac{N}{z\bar z})z + 2\partial_{\bar z})p_\alpha \\
&= p_\alpha^{-1}((\frac{1}{2} - \frac{N}{z\bar z})z + 2(-\frac{z}{4} + \frac{\alpha}{2\bar z}))p_\alpha + 2\partial_{\bar z} \\
&= 2\partial_{\bar z} + \frac{\alpha - N}{\bar z}
\end{aligned}$$

En notant que $Cp_\alpha = p_\alpha$, on en déduit les résultats pour b par conjugaison complexe.

□

Les polynômes de Laguerre pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \geq 0$, voir [AS1], sont définis par

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \partial_x^n (e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

Nous utiliserons souvent par la suite les notations

$$\begin{aligned}
l &:= m - n \text{ avec } m, n \in \mathbb{N} \\
\mathbb{N} &:= \{0, 1, 2, \ldots\}
\end{aligned}$$

Nous verrons par la suite que le l correspond aux valeurs propres de L. Remarquons que l'équation 1.1 est cruciale.
Nous obtenons

Théorème 1.2.5 *Pour $m, n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{R}$, on a :*

1. • *Si $l + N \geq 0$ alors*

$$\psi_{n,m}(N) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} 2^{-\frac{l+N}{2}} \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(m+N+1)}} z^l L_n^{l+N}(\frac{z\bar z}{2})(z\bar z)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar z}{4}}$$

est tel que :

$$\begin{aligned} H(N)\psi_{n,m}(N) &= (n+\frac{1}{2})\psi_{n,m}(N), \\ \bar{H}(N)\psi_{n,m}(N) &= (m+N+\frac{1}{2})\psi_{n,m}(N). \end{aligned}$$

- *Si $l+N \leq 0$ alors*

$$\varphi_{n,m}(N) := \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} 2^{-\frac{|l+N|}{2}} \sqrt{\frac{m!}{\Gamma(n-N+1)}} \bar{z}^{-l} L_m^{|l+N|}(\frac{z\bar{z}}{2})(z\bar{z})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$$

est tel que $\varphi_{m,n}(-N) = C\psi_{n,m}(N)$ où C est l'opérateur de conjugaison complexe et :

$$\begin{aligned} H(N)\varphi_{n,m}(N) &= (n-N+\frac{1}{2})\varphi_{n,m}(N), \\ \bar{H}(N)\varphi_{n,m}(N) &= (m+\frac{1}{2})\varphi_{n,m}(N). \end{aligned}$$

2. *Soit $\sigma(\bar{H}(N), H(N)) := \left\{(F,E); F \in \sigma(\bar{H}(N)), E \in \sigma(H(N))\right\}$ le spectre joint des opérateurs $H(N)$ et $\bar{H}(N)$.*
   Alors,

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{H}(N), H(N)) &= \left\{(m+N+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}),\ m,n \in \mathbb{N}, m-n+N \geq 0\right\} \\ &\quad \cup \left\{(m+\frac{1}{2}, n-N+\frac{1}{2}),\ m,n \in \mathbb{N}, m-n+N < 0\right\} \end{aligned}$$

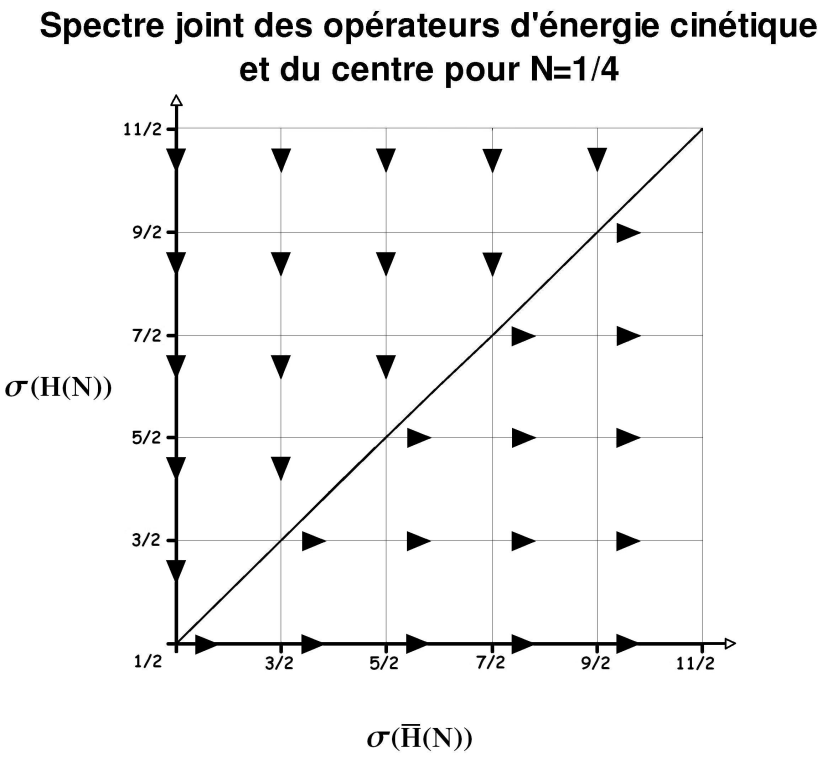
.

Remarque 1.2.6 *Remarquons que pour tout $N \in \mathbb{N}$*

$$\sigma(H(N)) = \left\{n+\frac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{n-N+\frac{1}{2},\ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n-N \geq 0\right\}.$$

La dégénérescence du point spectral $n+\frac{1}{2}$ est infini alors que celle du point spectral $n-N+\frac{1}{2}$ est égale au cardinal de $\mathbb{N} \cap [0, n-N]$.

Dans le graphique ci-dessous, nous avons représenté quelques points de $\sigma(\bar{H}(N), H(N))$ par des flèches afin de visualiser le sens de leur variation pour N croissant.



Preuve : Nous nous plaçons dans un premier temps dans le cas où $N > 0$ et nous cherchons une fonction ψ satisfaisant à $a(N)\psi = 0$ et $\psi = p_\alpha \eta$ pour une certaine fonction η. La proposition 1.2.4 nous permet d'affirmer que de telles fonctions existent et sont dans le domaine de $H(N)$ si $N = \alpha$ et si η est tel que $\partial_{\bar{z}}\eta = 0$, c'est-à-dire η holomorphe. Nous avons alors une première valeur propre et une infinitude de vecteurs propres de $H(N)$ car

$$H(N)\psi = a^*(N)a(N)\psi + \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}\psi.$$

η étant une fonction holomorphe, elle admet un développement en série entière. ψ est donc de la forme :

$$\psi = (z\bar{z})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

avec $\forall i \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}$. Puisque nous cherchons des fonctions qui sont à la fois des vecteurs propres de $H(N)$ et de $\bar{H}(N)$, nous allons appliquer $\bar{H}(N)$ à ψ pour en

déduire la forme de η :

$$\begin{aligned} 2\bar{H}(N)\psi &= 2b^*(N)b(N)\psi + \psi \\ &= 2p_N(z - 2\partial_{\bar{z}})(2\partial_z + \frac{2N}{z})\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \psi \end{aligned}$$

Puisque ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ commutent, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\bar{H}(N)\psi &= 2p_N(z\partial_z + N)\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \psi \\ &= 2p_N \sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+N)z^i + \psi \end{aligned}$$

Donc pour que ψ soit vecteur propre à la fois de $H(N)$ et $\bar{H}(N)$, il faut choisir η comme un monôme de degré quelconque. Si $\eta = z^m$, alors $m + N + \frac{1}{2}$ est valeur propre de $\bar{H}(N)$. Cependant, puisque :

$$\sqrt{2}b^*(N)\psi = z\psi$$

on peut donc choisir $\eta = 1$ et considérer par la suite les fonctions définies par les puissances de $b^*(N)$. Le nom opérateur de création vient de cette dernière équation : $\sqrt{2}b^*(N)$ "crée" un z.
La fonction

$$p_N(z, \bar{z}) = (z\bar{z})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$$

se normalise en la réécrivant en coordonnées polaires et en utilisant la définition de la fonction Γ [AS1]. On obtient alors un état $\psi_{0,0}(N)$:

$$\psi_{0,0}(N) := C_{0,0}(N)(z\bar{z})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$$

où $C_{0,0}(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^N \Gamma(N+1)}}$ et définissons pour $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $m - n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(N) &:= \sqrt{\frac{\Gamma(N+1)}{n!\Gamma(m+N+1)}}(a^*(N))^n(b^*(N))^m\psi_{0,0}(N) \\ &= \frac{(a^*(N))^n}{\sqrt{n!}}\frac{(b^*(N))^m}{\sqrt{\Gamma(m+N+1)}}\frac{(z\bar{z})^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{N}{2}}} \\ &= C_{n,m}(N)(a^*(N))^n(b^*(N))^m p_N(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$C_{n,m}(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n!\, \Gamma(m+N+1)\, 2^N}}$$

Ainsi, à cause des propriétés de commutation entre l'opérateur $H(N)$ et $b^*(N)$, on en déduit que $\psi_{0,m}(N)$ satisfait à :

$$\begin{aligned} H(N)\psi_{0,m}(N) &= \frac{1}{2}\psi_{0,m}(N) \\ \bar{H}(N)\psi_{0,m}(N) &= (m+N+\frac{1}{2})\psi_{0,m}(N) \end{aligned}$$

et $\psi_{0,m}(N)$ vérifie bien la condition de continuité à l'origine puisque l'action de $b^*(N)$ sur $\psi_{0,0}(N)$ est la multiplication par z. Il reste maintenant à vérifier que $\psi_{n,m}(N)$ est une valeur propre de $H(N)$ et de $\bar{H}(N)$. Pour cela, nous allons nous servir du lemme suivant :

Lemme 1.2.7 *Pour $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $m - n \geq 0$ et $N \geq 0$, on a :*

$$a(N)(a^*(N))^n\psi_{0,0}(N) = n(a^*(N))^{n-1}\psi_{0,0}(N)$$

Preuve du lemme : Ce résultat se démontre par récurrence sur n pour un N positif fixe :
Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} a(N)a^*(N)\psi_{0,0}(N) &= [a(N), a^*(N)]\psi_{0,0}(N) + a^*(N)a(N)\psi_{0,0}(N) \\ &= 1(a^*(N))^0\psi_{0,0}(N) \end{aligned}$$

car $a(N)\psi_{0,0}(N) = 0$ et $[a(N), a^*(N)] = 1$.
Supposons maintenant que cette relation soit vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned} a(N)(a^*(N))^{n+1}\psi_{0,0}(N) &= a(N)a^*(N)(a^*(N))^n\psi_{0,0}(N) \\ &= a^*(N)a(N)(a^*(N))^n\psi_{0,0}(N) \\ &\quad +[a(N), a^*(N)](a^*(N))^n\psi_{0,0}(N) \\ &= n\, a^*(N)^n\psi_{0,0}(N) + a^*(N)^n\psi_{0,0}(N) \\ &= (n+1)(a^*(N))^n\psi_{0,0}(N) \end{aligned}$$

□

Les fonctions $\psi_{n,m}(N)$ sont normalisées par la constante $C_{n,m}(N)$ définie plus haut. Montrons maintenant que ce sont des vecteurs propres des hamiltoniens.
Ce résultat s'établit à l'aide des relations de commutation entre $a(N)$, $a^*(N)$, $b(N)$ et $b^*(N)$ et du lemme.

$$\begin{aligned} H(N)\psi_{n,m}(N) &= C_{n,m}(N)a^*(N)a(N)a^*(N)^n b^*(N)^m p_N(z,\bar{z}) + \frac{\psi_{n,m}(N)}{2} \\ &= (n+\frac{1}{2})\psi_{n,m}(N) \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que $\bar{H}(N)\psi_{0,m}(N) = (m+N+\frac{1}{2})\psi_{0,m}(N)$. Puisque $a^*(N)$ commute avec $b(N)$ et $b^*(N)$, on a que :

$$\bar{H}(N)\psi_{n,m}(N) = (m+N+\frac{1}{2})\psi_{n,m}(N)$$

Les $\{\psi_{n,m}(N)\}_{n,m}$ définissent donc bien des vecteurs propres. Cependant, ils sont définis à partir des opérateurs $a^*(N)$ et $b^*(N)$ appliqués à une fonction gaussienne. Nous allons maintenant transformer ces expressions pour nous ramener à une des définitions des polynômes de Laguerre. Nous verrons que pour respecter l'hypothèse de régularité, nous devrons restreindre les combinaisons possibles entre n et m. Pour cela, remarquons en premier lieu que pour $q_N = (z\bar{z})^{\frac{N}{2}} e^{\frac{z\bar{z}}{4}}$, on a :

$$\sqrt{2}q_N^{-1}a^*(N)q_N = -2\partial_z$$

Alors :

$$\begin{aligned} C_{n,m}^{-1}(N)a^*(N)^n b^*(N)^m p_N(z,\bar{z}) &= 2^{-\frac{n+m}{2}} q_{-N}(-2\partial_z)^n \left(z^m (z\bar{z})^N e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\right) \\ &= (-1)^n 2^N 2^{-\frac{n+m}{2}} q_{-N} \left(\frac{2}{\bar{z}}\right)^m (2\partial_z)^n \\ &\quad \left((\frac{z\bar{z}}{2})^{N+m} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\right) \end{aligned}$$

Or en posant $t = \frac{z\bar{z}}{2}$, on obtient que $(2\partial_z)(t^{m+N}e^{-t}) = \partial_t(t^{m+N}e^{-t}) \circ \bar{z}$ d'où

$$\begin{aligned} C_{n,m}^{-1}(N)a^*(N)^n b^*(N)^m p_N(z,\bar{z}) &= (-1)^n 2^N 2^{-\frac{n+m}{2}} q_{-N}\left(\frac{2}{\bar{z}}\right)^m \bar{z}^n \\ & \quad \partial_t^n(t^{m+N}e^{-t}) \\ &= (-1)^n 2^{-\frac{n+m}{2}} 2^{N+m}((z\bar{z})^{-\frac{N}{2}} e^{\frac{z\bar{z}}{4}})\bar{z}^{n-m} \\ & \quad \partial_t^n(t^{n+l+N}e^{-t}) \end{aligned}$$

Remarquons que pour satisfaire la condition de régularité, il faut supposer que $N + m - n \geq 0$. On rappelle que les polynômes de Laguerre généralisés sont définis par :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\partial_x^n(e^{-x}x^{n+\alpha})$$

alors on obtient que

$$\begin{aligned} C_{n,m}^{-1}(N)a^*(N)^n b^*(N)^m p_N(z,\bar{z}) &= (-1)^n 2^{-\frac{n+m}{2}+N+m} n!((z\bar{z})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}) \\ & \quad \bar{z}^{n-m}(\frac{z\bar{z}}{2})^{N+m-n} L_n^{l+N}(\frac{z\bar{z}}{2}) \\ &= (-1)^n 2^{\frac{n-m}{2}} n! L_n^{l+N}(\frac{z\bar{z}}{2})(z\bar{z})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} z^l \end{aligned}$$

ou encore

$$\psi_{n,m}(N) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} 2^{-\frac{l+N}{2}} \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(m+N+1)}} z^l L_n^{l+N}(\frac{z\bar{z}}{2}) p_N(z,\bar{z})$$

Ceci conclut la preuve de la première partie du théorème. Pour conclure cette démonstration, nous allons nous servir de l'opérateur de conjugaison complexe. Notons en premier lieu que :

$$H(N) = C\,\bar{H}(-N)\,C \tag{1.2}$$

car $Cb^\sharp(-N)C = a^\sharp(N)$ par le premier point de la proposition 1.2.3 et donc que si ψ est vecteur propre de $H(N)$ alors $C\psi$ est vecteur propre de $\bar{H}(N)$. Il convient donc de calculer la conjugaison complexe de la famille de vecteurs propres que l'on vient de

trouver :

$$\begin{aligned} C\psi_{n,m}(N) &= C_{n,m}(N)C(a^*(N))^n CC(b^*(N))^m C\left(C(z\bar{z})^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}\right) \\ &= C_{n,m}(N)(b^*(-N))^n(a^*(-N))^m(z\bar{z})^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\ &=: \varphi_{m,n}(-N) \end{aligned}$$

On en déduit à l'aide de l'équation (1.2) que

$$\bar{H}(-N)\varphi_{m,n}(-N) = (n+\frac{1}{2})\varphi_{m,n}(-N)$$

et donc que

$$\bar{H}(N)\varphi_{n,m}(N) = (m+\frac{1}{2})\varphi_{n,m}(N)$$

Ces vecteurs sont définis pour $n-m-N \geq 0$ ou encore $l+N \leq 0$.
On a donc que :

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0}(N) &= C\psi_{0,0}(-N) \\ &= \frac{1}{2^{-\frac{N}{2}}\sqrt{2\pi\,\Gamma(n-N+1)}}(z\bar{z})^{-\frac{N}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}(N) &= C\psi_{m,n}(-N) \\ &= C_{m,n}(-N)(a^*(-N))^m(b^*(-N))^n\xi(-N) \end{aligned}$$

L'action de $a^*(N)$ sur $\varphi_{0,0}(N)$ est la multiplication par $\bar{z}$, tout comme $b^*(N)$ multiplie $\psi_{0,0}(N)$ par z. La forme des fonctions $\psi_{n,m}(N)$ et $\varphi_{n,m}(N)$ est très proche. On remarque que pour obtenir $\varphi_{n,m}(N)$ à partir de $\psi_{n,m}(N)$, il suffit d'effectuer une conjugaison complexe, d'échanger n et m et de changer le signe de N. Ce dernier argument nous permet d'en déduire que

$$H(N)\varphi_{n,m}(N) = (n-N+\frac{1}{2})\varphi_{n,m}(N).$$

Le résultat sur le spectre joint suit du fait que $\{\psi_{n,m}(N), \varphi_{n,m}(N)\}_{n,m}$ forme une base orthonormée de $\mathcal{H}$ [ESV]. Cela nous permet alors de conclure la preuve du théorème 1.2.5.

□

1.3 Propriétés des fonctions propres

1.3.1 Continuité en "flux" des fonctions propres

Pour N fixé et $l := m - n$, nous avons alors à la vue du deux théorème précédents un découpage du réseau $\mathbb{N}^2$. Dans la partie où $l + N \leq 0$, les fonctions $\varphi_{n,m}(N)$ sont bien définies alors que sur $l + N \geq 0$, ce sont les $\psi_{nm,}(N)$ qui sont définies. De plus, pour N entier, la droite $l + N = 0$ qui sépare les deux parties précédentes, coupe les points du réseau. Il apparaît alors naturel de se demander ce qu'il se passe entre les différentes fonctions sur cette droite.

Théorème 1.3.1 *Pour les fonctions propres définies précédemments et $n, m \in \mathbb{Z}$, on a :*

- *Si $m - n \leq 0$,*

$$\varphi_{n,m}(n-m) = \psi_{m,2m-n}(n-m)$$

- *Si $m - n \geq 0$,*

$$\psi_{n,m}(n-m) = \varphi_{2n-m,n}(n-m)$$

Preuve : Nous allons comparer les deux fonctions.

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,m}(n-m) &= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{m!}{\Gamma(m+1)}}\bar{z}^{n-m}L_m^0(\frac{z\bar{z}}{2})(z\bar{z})^{\frac{m-n}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\
&= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}L_m^0(\frac{z\bar{z}}{2})z^{\frac{m-n}{2}}\bar{z}^{\frac{n-m}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}
\end{aligned}$$

en rappelant que pour k entier, on a $\Gamma(k+1) = k!$.
De même :

$$\begin{aligned}
\psi_{m,2m-n}(n-m) &= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{m!}{\Gamma(m+1)}}z^{m-n}L_m^0(\frac{z\bar{z}}{2})(z\bar{z})^{\frac{n-m}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\
&= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}L_m^0(\frac{z\bar{z}}{2})z^{\frac{m-n}{2}}\bar{z}^{\frac{n-m}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\
&= \varphi_{n,m}(n-m)
\end{aligned}$$

Pour obtenir le second résultat, on remarque $\varphi_{n,m}(n-m) = \psi_{\hat{n},\hat{m}}(n-m)$ avec :

$$\begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à :

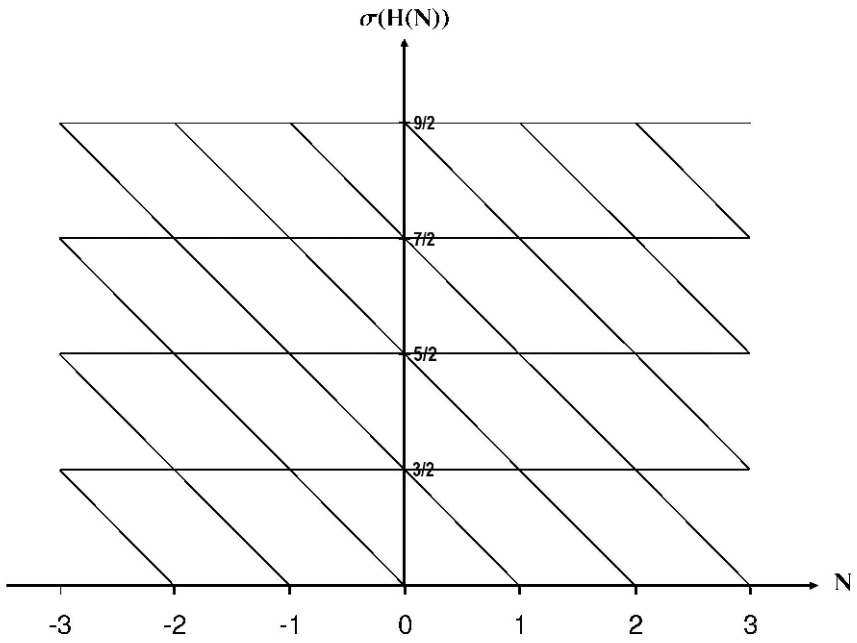
$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{pmatrix}$$

Donc $\psi_{n,m}(n-m) = \varphi_{2n-m,n}(n-m)$.

□

On remarque donc que si l'on suppose N continue et croissante, alors la partie "mobile" du spectre de $H(N)$ (resp. de $\bar{H}(N)$) arrive toujours après un certain temps dans un niveau d'énergie fixe par rapport à N pour $H(N)$ (resp. pour $\bar{H}(N)$).
Nous pouvons représenter l'évolution du spectre de $H(N)$ au cours du temps :

Evolution du spectre de l'opérateur d'énergie cinétique



1.3.2 Fonctions propres et transformation de jauge

Nous allons maintenant montrer, que pour des valeurs entières de N, l'hamiltonien $H(N)$ est unitairement équivalent à l'hamiltonien de Landau.

Soit $N \in \mathbb{Z}$ et $G(N)$ l'unitaire défini par :

$$G(N) := \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{N}{2}}$$

$G(N)$ est en fait une transformation de jauge. Alors l'hamiltonien H(N) se réécrit comme :

$$H(N) = G(N)H(0)G^{-1}(N)$$

Cette relation de jauge fait le lien entre une fonction propre d'un système dont on connait le nombre N de flux et une fonction propre du système auquel on a ajouté un nombre J de flux :

Théorème 1.3.2 *Soit $n, m, J \in \mathbb{Z}$ et N quelconque tel que $m - n + J + N \geq 0$ et soit $G(J)$ la transformation de jauge définie précédemment. Alors*

$$\psi_{n,m}(N+J) = G(J)\psi_{n,m+J}(N)$$

Preuve : En remarquant que $m - n + (N + J) = (m + J) - n + N$, on a tout de suite que

$$C_{n,m}(N+J) = C_{n,m+J}(N)$$

De plus, on a que :

$$G(J) = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{J}{2}} = \frac{(z\bar{z})^{\frac{J}{2}}}{z^J}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
G(J)\psi_{n,m+J}(N) &= G(J)\left(C_{n,m}(N+J)z^{m-n+J}L_n^{l+N+J}(\frac{z\bar{z}}{2})(z\bar{z})^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}\right) \\
&= C_{n,m}(N+J)\frac{(z\bar{z})^{\frac{J}{2}}}{z^J}z^{m-n+J}L_n^{l+N+J}(\frac{z\bar{z}}{2})(z\bar{z})^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\
&= C_{n,m+J}(N)z^{m-n}L_n^{l+N+J}(\frac{z\bar{z}}{2})(z\bar{z})^{\frac{N+J}{2}}e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \\
&= \psi_{n,m}(N+J)
\end{aligned}$$

□

1.3.3 Développement dans la base propre des dérivées par rapport au paramètre N des fonctions propres

Nous allons maintenant montrer des propriétés des fonctions propres qui seront utiles pour l'étude de la propagation adiabatique.

Théorème 1.3.3 *1. Soit $j \in \mathbb{Z}$ et N quelconque tel que $j + N \geq 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \psi_{0,k}(N) \rangle = 0$$

2. Si $m - n + N \geq 0$ et $n \geq 1$, on a :

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \psi_{n,m}(N) \rangle = -\frac{1}{2n} \sqrt{\frac{n!\Gamma(j+N+1)}{\Gamma(m+N+1)}} \delta_{j,m-n}$$

où $\delta_{x,y}$ est le symbole de Kronecker.

3. Si $j + N \geq 0$ et $m - n + N < 0$, on a :

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \varphi_{n,m}(N) \rangle = 0$$

4. Si $m - n + N \leq 0$ et $n \geq 1$, on a :

$$\langle \partial_N \varphi_{j,0}(N), \varphi_{n,m}(N) \rangle = \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{m!\Gamma(-j-N+1)}{\Gamma(n-N+1)}} \delta_{j,m-n}$$

où $\delta_{x,y}$ est le symbole de Kronecker.

5. Si $-j + N < 0$ et $m - n + N \geq 0$, on a :

$$\langle \partial_N \varphi_{j,0}(N), \psi_{n,m}(N) \rangle = 0$$

Preuve :

1. Rappelons que

$$\psi_{0,j}(N) = C_{0,j}(N) z^j (z\bar{z})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$$

où $C_{0,j}(N)$ est la constante de normalisation. Remarquons maintenant que $\partial_N \psi_{0,j}(N)$ satisfait à la relation :

$$\partial_N \psi_{0,j}(N) = \left(\frac{\partial_N C_{0,j}(N)}{C_{0,j}(N)} + \ln(z\bar{z})^{\frac{1}{2}} \right) \psi_{0,j}(N)$$

Pour la propriété qui nous intéresse, nous pouvons nous affranchir des diverses constantes de normalisation. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \neq j$:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \psi_{0,k}(N) \rangle &\sim \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \ln(z\bar{z})^{\frac{1}{2}} r^{j+k} e^{i\theta(k-j)} r^{2N} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{j+k} e^{i\theta(k-j)} r^{2N} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\
&\sim \int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-j)} d\theta \int_0^\infty \dots
\end{aligned}$$

L'intégrale dépendant de θ est nulle, ce qui implique le résultat pour $k \neq j$. Interessons nous maintenant au cas $k = j$. On sait que :

$$\|\psi_{0,j}(N)\|^2 = \langle \psi_{0,j}(N), \psi_{0,j}(N) \rangle = 1$$

En dérivant par rapport à N, on obtient :

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \psi_{0,j}(N) \rangle + \langle \psi_{0,j}(N), \partial_N \psi_{0,j}(N) \rangle = 0$$

ou encore

$$2\Re \langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \psi_{0,j}(N) \rangle = 0$$

où $\Re$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe. Or, $\overline{\partial_N \psi_{0,j}(N)} \psi_{0,j}(N)$ ne dépend plus de θ, c'est donc une intégrale réelle d'où le résultat.

Remarque 1.3.4 *Nous obtenons de plus la relation :*

$$\frac{\partial_N c_{0,j}(N)}{c_{0,j}(N)} = -\int_0^\infty \ln(r) |\psi_{0,j}(N)|^2 r dr$$

2. Soient m,n et N vérifiant les conditions du théorème. Commençons par montrer que

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \psi_{n,m}(N) \rangle = 0$$

si $j \neq m - n$. La preuve précédente nous rappelle que :

$$\partial_N \psi_{0,j}(N) = \left(\frac{\partial_N c_{0,j}(N)}{c_{0,j}(N)} + \ln(z\bar{z})^{\frac{1}{2}} \right) \psi_{0,j}(N)$$

De plus,

$$\psi_{n,m}(N) \sim z^{m-n} L_n^{l+N}(N) (z\bar{z})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4}}$$

Si l'on passe en coordonnées polaires, on trouve donc que :

$$\begin{aligned}\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \psi_{n,m}(N)\rangle &= \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} e^{i(m-n)\theta} d\theta \int_0^{\infty} \dots \\ &= 0 \text{ si } j \neq m-n\end{aligned}$$

Dans un souci de clarté, nous écrirons par la suite $\psi_{n,m}$ au lieu de $\psi_{n,m}(N)$. Le théorème 1.3.3 nous dit que pour $n = 0$, le produit scalaire précédent est égal à 0. On supposera donc $n \geq 1$. Maintenant, si $j = m - n$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \partial_N \psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle &= \frac{\partial_N c_{0,j}}{c_{0,j}} \langle \psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle + \langle \ln(z\bar{z})^{\frac{1}{2}} \psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle \\ &= \langle \ln(z\bar{z})^{\frac{1}{2}} \psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle\end{aligned}$$

car les vecteurs propres forment une base orthonormée. Dorénavant, nous utiliserons les coordonnées polaires. On sait que

$$\ln(r) = \frac{1}{2}(\ln(\frac{r^2}{2}) + \ln 2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\langle \partial_N \psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle &= \langle \frac{1}{2}(\ln(\frac{r^2}{2}) + \ln 2)\psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \ln(\frac{r^2}{2})\psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle\end{aligned}$$

On obtient alors que :

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}, \psi_{n,m}\rangle = 2\pi C_{0,j} C_{n,m} \int_0^{\infty} \ln(\frac{r^2}{2}) r^{2(j+N)} L_n^{l+N}(\frac{r^2}{2}) e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

Or, le polynôme de Laguerre peut s'écrire de façon explicite [AS1]:

$$L_n^{l+N}(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n+l+N}{n-i} \frac{(-1)^i}{i!}}_{\alpha_i :=} x^i$$

De plus, on a :

$$C_{0,j}C_{n,m} = \frac{1}{2\pi 2^{j+N}} \underbrace{\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(j+N+1)\Gamma(m+N+1)}}}_{K:=}$$

En ajoutant ces informations à ce que l'on avait précédemment, on obtient :

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}, \psi_{n,m} \rangle = K \int_0^\infty \ln(\frac{r^2}{2}) \left(\frac{r^2}{2}\right)^{j+N} L_n^{l+N}(\frac{r^2}{2}) e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

En posant $y = \frac{r^2}{2}$, on a $dy = rdr$ et en rappelant que la dérivée de la fonction Γ est donnée par :

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln(t) t^{x-1} e^{-x} dx$$

on trouve que :

$$\begin{aligned}
\langle \partial_N \psi_{0,j}, \psi_{n,m} \rangle &= K \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \int_0^\infty \ln(\frac{r^2}{2}) \left(\frac{r^2}{2}\right)^{j+N+i} L_n^{l+N}(\frac{r^2}{2}) e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \\
&= K \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Gamma'(j+i+N+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} K\alpha_i \Gamma'(j+i+N+1)
\end{aligned}$$

Calculons maitenant le produit $K\alpha_i$. Pour $i \in [0, n]$:

$$K\alpha_i = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(j+N+1)\Gamma(m+N+1)}} \frac{\Gamma(n+j+N+1)}{(n-i)!\Gamma(j+N+i+1)} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Or, $n + j = m$, donc :

$$\begin{aligned}
K\alpha_i &= \sqrt{\frac{\Gamma(m+N+1)}{n!\Gamma(j+N+1)}} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(-1)^i}{\Gamma(j+N+i+1)} \\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(m+N+1)}{n!\Gamma(j+N+1)}} \binom{n}{i} \frac{(-1)^i}{\Gamma(j+N+i+1)}
\end{aligned}$$

Ceci entraine que :

$$\langle \partial_N \psi_{0,j}, \psi_{n,m} \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma(m+N+1)}{n!\Gamma(j+N+1)}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \psi_0(j+i+N+1)$$

avec ψ_0 la fonction digamma [AS1] :

$$\psi_0(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Or un résultat bien connu nous dit que :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \psi_0(j+i+N+1) = -\frac{(n-1)!\Gamma(j+N+1)}{\Gamma(j+N+n+1)}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\langle \partial_N \psi_{0,j}, \psi_{n,m} \rangle &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma(m+N+1)}{n!\Gamma(j+N+1)}} \frac{(n-1)!\Gamma(j+N+1)}{\Gamma(j+N+n+1)} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n-1)!\Gamma(j+N+1)}{n\Gamma(m+N+1)}} \\
&= -\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{n!\Gamma(j+N+1)}{\Gamma(m+N+1)}}
\end{aligned}$$

3. Soient j, m, n et N choisis vérifiant les hypothèses du point discuté. Alors, par les calculs précédents, on sait que la partie angulaire de la fonction $\partial_N \psi_{0,j}(N)$ est la même que la partie angulaire de $\psi_{0,j}(N)$. Ainsi, le produit scalaire s'écrit

$$\begin{aligned}
\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \varphi_{n,m}(N) \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} e^{i(m-n)\theta} d\theta \int_0^{\infty} \dots dr \\
&= 0 \text{ si } j \neq m-n
\end{aligned}$$

Pour que le produit scalaire soit non nul, il faut donc que $j = m - n$. Or, par hypothèses, $j + N \geq 0$ et $m - n + N < 0$, ce qui aboutit à $j \geq 0$ et $j < 0$, ce qui est absurde. Les produits scalaires de la forme $\langle \partial_N \psi_{0,j}(N), \varphi_{n,m}(N) \rangle$ sont donc toujours nuls.

4. et 5. Ces preuves se font de manière analogue aux précédentes en remarquant

que :

$$\partial_N \varphi_{j,0}(N) = (\frac{\partial_N c_{j,0}(N)}{c_{j,0}(N)} - \ln(z\bar{z}))\varphi_{j,0}(N)$$

En particulier, le signe devant le logarithme entraîne le changement de signe devant le terme final.

$\square$

Chapitre 2

Théorèmes adiabatiques

Le théorème adiabatique est un outil important pour l'étude de la dynamique des particules en mécanique quantique. Dans sa forme classique, il permet de faire une approximation du propagateur d'un modèle dépendant lentement du temps par le propagateur d'un système pour lequel on a un contrôle spectral.

Ce chapitre présentera deux théorèmes de type adiabatiques pour des particules soumises à un champ magnétique et à un champ électrique croisés. Le premier concernera l'hamiltonien $H(N(t))$ de type Aharonov-Bohm avec flux dépendant du temps. Nous démontrerons un théorème adiabatique "à l'intérieur du niveau fondamental". Ce résultat nous permettra de faire des analogies avec le cas classique (voir figure 2).

Le second théorème sera de type "moyennisation quantique" et concernera l'application de ces idées au problème de la perturbation de l'hamiltonien de Landau par un petit potentiel électrique constant en temps. Il implique en particulier que le niveau de Landau le plus bas est approximativement invariant pour des temps longs.

Nous présenterons dans un premier temps une brève explication de ce qu'est le théorème adiabatique. Nous continuerons l'application au modèle à flux dépendant du temps. Nous pourrons calculer directement l'évolution d'une base propre du niveau de Landau le plus bas. Finalement, nous présenterons le second théorème adiabatique.

2.1 Théorème adiabatique pour la mécanique quantique

On s'intéresse à la question de la stabilité spectrale des états sous des variations du temps lentes, c'est-à-dire dans quel sens on peut dire qu'un état commençant dans une bande d'énergie séparé du reste du spectre reste dans cette bande.

Soit l'équation d'évolution de Schrödinger :

$$\partial_t \psi_\tau(t) = -i\tau H(t)\psi_\tau(t), \psi_\tau(0) = \psi \tag{2.1}$$

pour $t \in [0,1]$. τ est un grand paramètre et $H(t)$ une famille d'opérateurs autoadjoints.

Le premier résultat rigoureux concernant l'approche adiabatique en mécanique quantique est dû à Born et Fock en 1928 [BF]. Ils supposent que le spectre de $H(t)$ est purement discret.

En 1950, Kato [Ka1] introduit la notion de transformation adiabatique qui est purement géométrique et compare l'évolution géométrique avec l'évolution associée à l'équation (2.1). Son résultat est local en énergie. Pour cela, il introduit

$$H_{AD}(t) := H(t) + \frac{i}{\tau}[\dot{P}(t), P(t)]$$

où $P(t)$ est le projecteur spectral associé à une valeur propre non dégénérée et isolée. Cela lui permet de traiter des cas où le spectre en dehors de l'énergie considérée est d'une forme plus générale.

Des résultats se succédent par la suite afin d'obtenir une meilleure approximation entre la dynamique de l'opérateur et la dynamique adiabatique définie par $H_{AD}(t)$. Citons par exemple [Ne1, JP]. Certaines théories relaxent les conditions spectrales alors que d'autres améliorent l'approximation.
Avron, Seiler et Yaffe généralisent au cas où $P(t)$ projette sur une bande spectrale séparée par un gap [ASY]. De plus, ils montrent que le théorème adiabatique est un outil efficace dans l'étude des systèmes de Hall, dans le cas où ils sont spacialement finis.
Il existe des résultats sans hypothèses de lacunes spectrales [AE, Bo].

2.2 Premier théorème adiabatique

2.2.1 Le résultat

Les théorèmes adiabatiques cités auparavant ne sont pas applicables pour le problème associé à $H(N(t))$ pour deux raisons : premièrement, le sous-espace que l'on considère n'est pas un sous-espace spectral séparé du reste du spectre par un gap uniforme. Deuxièmement, l'existence d'un propagateur n'est pas garanti pour la famille de d'opérateurs $H(N(t))$. Ce second point a déjà été discuté dans [AHS] et nous n'avons pas essayé de donner une contribution à ce problème. La théorie sera donc développée en supposant que les propagateurs existent. Pour contourner le premier point, nous devrons démontrer "à la main" que le projecteur choisi est différentiable et introduire un opérateur $\Gamma(t)$ solution de l'équation aux commutateurs :

$$[H(N(t)), \Gamma(N(t))] = [\partial_t P(N(t)), P(N(t))]. \tag{2.2}$$

Théorème 2.2.1 (Théorème Adiabatique) *Soient $\{H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d'opérateurs autoadjoints dans $\mathcal{H}$, $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et $\{\Gamma(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ deux familles d'opérateurs de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$ où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ est un projecteur orthogonal et $\Gamma(t)$ une solution de (2.2).*
Soit

$$H_{AD}(t) := H(t) + \frac{i}{\tau}[\dot{P}(t), P(t)].$$

Supposons que $H(t)$ et $H_{AD}(t)$ définissent des propagateurs unitaires $U_\tau(t,s)$ et $U_{AD}(t,s)$ et que pour $\psi \in \mathbb{D}(H(0)) = \mathbb{D}(H_{AD}(0))$, les applications $t \mapsto U_\tau(t,0)\psi$ et $t \mapsto U_{AD}(t,0)\psi$ soient des solutions de l'équation d'évolution de Schrödinger (2.1) correspondantes.
Alors,

$$\sup_{t\in[0,1]} \|U_\tau(t,0) - U_{AD}(t,0)\| = \mathcal{O}(\frac{1}{\tau})$$

Remarque 2.2.2 *Par la suite, nous noterons*

$$U_\tau(t) := U_\tau(t,0) \quad U_{AD}(t) := U_{AD}(t,0)$$

Preuve : Soit $t \in [0,1]$. Nous avons premièrement que pour $\psi \in \mathcal{D}(H(0))$:

$$\begin{aligned}
(U_\tau(t) - U_{AD}(t))\psi &= U_\tau(t)(1 - U_\tau^*(t)U_{AD}(t))\psi \\
&= -U_\tau(t)\int_0^t \partial_s(U_\tau^*(s)U_{AD}(s))\psi ds \\
&= -U_\tau(t)\int_0^t U_\tau^*(s)[\dot{P}(s), P(s)]U_{AD}(s)\psi ds.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
i\partial_t(U_\tau^*\Gamma U_{AD})\psi &= U_\tau^*\left(i\dot{\Gamma} + \tau\Gamma H_{AD} - \tau H\Gamma\right)U_{AD}\psi \\
&= U_\tau^*\left(i\dot{\Gamma} - \tau[H,\Gamma] + i\Gamma[\dot{P}, P]\right)U_{AD}\psi
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
U_\tau^*[\dot{P}, P]U_{AD} &= U_\tau^*[H,\Gamma]U_{AD}\psi \\
&= \frac{1}{\tau}\left(-i\partial_t(U_\tau^*\Gamma U_{AD}) + U_\tau^*(i\dot{\Gamma} + i\Gamma[\dot{P}, P])U_{AD}\right)\psi
\end{aligned}$$

et il suit que

$$\begin{aligned}
(U_\tau(t) - U_{AD}(t))\,\psi &= -\frac{U_\tau(t)}{\tau}\left(\int_0^t U_\tau^*(i\dot{\Gamma} + i\Gamma[\dot{P}, P])U_{AD}(s)\psi ds\right) \\
&\quad + \frac{i}{\tau}U_\tau(t)\left(U_\tau\Gamma U_{AD}(t) - \Gamma(0)\right)\psi.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors la majoration suivante pour la norme de la différence des propagateurs :

$$\|U_\tau(t) - U_{AD}(t)\| \leq \frac{1}{\tau}\left(2\|\Gamma\| + t(\|\dot{\Gamma}\| + 2\|\Gamma\|\,\|\dot{P}\|)\right)(t)$$

par unitarité et densité de $\mathbb{D}(H(0))$.
Par l'hypothèse sur P et Γ, le membre de droite est $\mathcal{O}(\frac{1}{\tau})$ uniformément pour $t \in [0,1]$.

□

Rappelons qu'en particulier, par la construction de Kato, le propagateur adiabatique présente la propriété suivante :

Remarque 2.2.3 *On a que*

$$U_{AD}(t)P(0)U_{AD}^{-1}(t) = P(t).$$

Nous remarquons que dans certains cas, on peut déterminer l'action de $U_{AD}(t)$:

Théorème 2.2.4 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.2.1, et pour $\phi(t) \in \mathcal{D}(H(t))$ et $\phi(.) \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ tel que pour tout t, on ait : si*

H1. $\phi(t) \in RanP(t)$

H2. $H(t)\phi(t) = E(t)\phi(t)$, $E \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

H3. $P(t)\dot{\phi}(t) = 0$

alors

$$U_{AD}(t, t_0)\phi(t_0) = e^{-i\tau \int_{t_0}^{t} E(s)ds}\phi(t).$$

Preuve : Nous avons supposé que $U_{AD}(t, t_0)\phi(t_0)$ fournit la solution unique de l'équation d'évolution adiabatique. Il est donc suffisant de vérifier que le membre de droite, qui vaut $\phi(t_0)$ pour $t = t_0$, est solution de l'équation différentielle. Or

$$(i\partial_t - \tau H_{AD})e^{-i\tau \int_{t_0}^{t} E}\phi =_{(H2)} e^{-i\tau \int_{t_0}^{t} E}\left(\tau E\phi + i\dot{\phi} - (\tau E + i[\dot{P}, P])\phi\right) = 0$$

car

$$\begin{aligned} [\dot{P}, P]\phi &=_{(H1)} \dot{P}\phi - P\dot{P}\phi =_{(H1)} \dot{P}\phi - P\dot{P}P\phi \\ &= \dot{P}\phi =_{(H3)} \dot{P}\phi + P\dot{\phi} = \partial_t(P\phi) =_{(H1)} \dot{\phi}. \qquad \square \end{aligned}$$

2.2.2 Choix de la famille de projecteurs pour le cas $H(N(t))$ et $V = 0$

Dans ce chapitre, nous allons définir pour le modèle à flux une famille de projecteurs $P(N(t))$ puis une famille $\Gamma(N(t))$ solution de 2.2. Ensuite, nous démontrerons que les hypothèses du théorème 2.2.1 les concernant sont satisfaites.

Pour $N \in \mathbb{R}$, nous choisissons $P(N)$ le projecteur orthogonal sur l'espace que nous considérons espace fondamentale du couple d'opérateurs $(\bar{H}(N), H(N))$, c'est-à-dire

$$RanP(N) = \left\{\phi \in \mathcal{H}; \bar{H}(N)\phi = \frac{1}{2}\phi \text{ ou } H(N)\phi = \frac{1}{2}\phi\right\}.$$

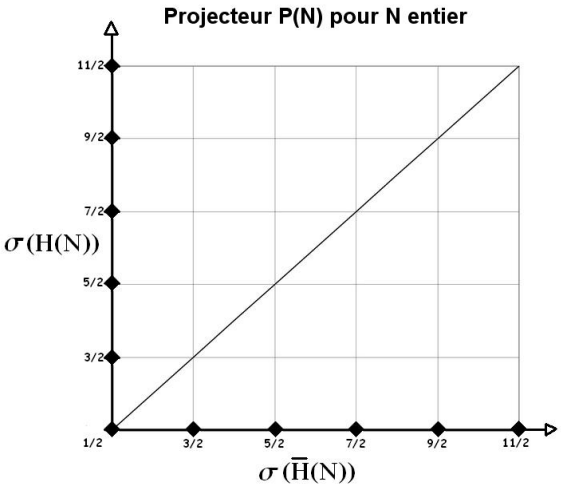
D'après le théorème 1.2.5, nous avons

$$P(N) := \sum_{j+N\geq 0} |\psi_{0,j}(N)\rangle\langle\psi_{0,j}(N)| + \sum_{-j+N<0} |\varphi_{j,0}(N)\rangle\langle\varphi_{j,0}(N)|. \tag{2.3}$$

Remarquons que la partie de $\sigma(\bar{H}(N), H(N))$ concernée est

$$\sigma(\bar{H}(N), H(N)) \cap \left((\frac{1}{2} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \frac{1}{2}) \right)$$

que nous pouvons représenter pour N entier par les points dans le graphique ci-dessous.



2.2.3 Un résultat adiabatique pour le problème à flux dépendant du temps

Nous arrivons maintenant au premier résultat de ce travail. Il s'agit d'une application du théorème 2.2.1 au modèle à flux dépendant du temps. Pour cela, nous allons devoir démontrer que le projecteur que l'on vient de choisir satisfait aux hypothèses du théorème 2.2.1.

Rappelons que pour ce modèle, la dépendance par rapport au temps des fonctions propres, et par conséquent celle des projecteurs, se fait au travers de la fonction N. C'est une fonction à valeur réelle, croissante et lisse.

Théorème 2.2.5 *Soit $N \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
Pour $P(N)$ définie en (2.3), nous avons

1. $P(N(.)) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$
2. *Il existe $\Gamma(N(.)) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$ solution de*

$$[H, \Gamma](N(.)) = [\dot{P}, P](N(.))$$

et tel que

$$\langle \psi, \Gamma\psi \rangle (N(.)) = 0$$

pour $\psi \in \{\psi_{n,m}(N), \varphi_{n,m}(N)\}_{n,m}$.

Preuve du théorème : La preuve s'articulera autour de plusieurs propositions. Nous allons d'abord développer la dérivée par rapport à N du projecteur $\dot{P}(N) = \partial_N P(N)$ sur les vecteurs de la base propre $\{\psi_{n,m}(N), \varphi_{n,m}(N)\}_{n,m}$, les premiers étant definis pour $l + N \geq 0$ et les seconds pour $l + N \leq 0$.
$\dot{P}(N)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\dot{P}(N) &= \sum_{j+N\geq 0} (|\psi_{0,j}(N)\rangle\langle\dot{\psi}_{0,j}(N)| + |\dot{\psi}_{0,j}(N)\rangle\langle\psi_{0,j}(N)|) \\
&\quad + \sum_{-j+N<0} (|\varphi_{j,0}(N)\rangle\langle\dot{\varphi}_{j,0}(N)| + |\dot{\varphi}_{j,0}(N)\rangle\langle\varphi_{j,0}(N)|)
\end{aligned}$$

Nous allons donner les éléments de matrice dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.6 *Appelons*

$$B(x,y) := \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}$$

et

$$f(x,y) := \frac{1}{2x}\sqrt{B(x,y)}$$

Si

$$\dot{P}_{\hat{n},\hat{m},n,m} := \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \dot{P}(N)\psi_{n,m}(N)\rangle$$

et

$$\dot{P}^{\hat{n},\hat{m},n,m} := \langle \varphi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \dot{P}(N)\varphi_{n,m}(N)\rangle$$

alors la matrice $\dot{P}(N)$ *dans la base propre* $\{\psi_{n,m}(N), \varphi_{n,m}(N)\}$ *a pour éléments :*

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{\hat{n},\hat{m},n,m} &= -\Big(f(\hat{n}, \hat{m} - \hat{n} + N)\delta_{n,0}\delta_{m,\hat{m}-\hat{n}} \\
&\quad + f(n, m - n + N)\delta_{\hat{n},0}\delta_{\hat{m},m-n}\chi(n \geq 1)\Big)^1 \\
\dot{P}^{\hat{n},\hat{m},n,m} &= f(\hat{m}, \hat{n} - \hat{m} - N)\delta_{m,0}\delta_{n,\hat{n}-\hat{m}} \\
&\quad + f(m, n - m - N)\delta_{\hat{m},0}\delta_{\hat{n},n-m}\chi(m \geq 1)^1
\end{aligned}$$

Tous les autres éléments sont nulles.
De plus, $\dot{P}(N)$ est un opérateur borné et sa norme vérifie l'estimation

$$\|\dot{P}(N)\| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Preuve de la proposition : Grâce au théorème 1.3.3, nous avons

$$\dot{P}(N)\psi_{0,m}(N) \quad = \quad \dot{\psi}_{0,m}(N)$$

et pour $n \geq 1$

$$\dot{P}(N)\psi_{n,m}(N) = \langle \dot{\psi}_{0,m-n}(N), \psi_{n,m}(N)\rangle \psi_{0,m-n}(N)$$

Calculons maintenant les éléments de matrice. Commençons pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{\hat{n},\hat{m},0,m} &= \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \dot{P}(N)\psi_{0,m}(N)\rangle \\
&= \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \dot{\psi}_{0,m}(N)\rangle \\
&= -\frac{1}{2\hat{n}}\sqrt{\frac{\hat{n}!\Gamma(m+N+1)}{\Gamma(\hat{m}+N+1)}}\delta_{m,\hat{m}-\hat{n}} \\
&= -f(\hat{n}, \hat{m}-\hat{n}+N)\delta_{n,0}\delta_{m,\hat{m}-\hat{n}}
\end{aligned}$$

La valeur du produit scalaire entre $\psi_{\hat{n},\hat{m}}(N)$ et $\dot{\psi}_{0,m}(N)$ fait l'objet du théorème 1.3.3.
Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{\hat{n},\hat{m},n,m} &= \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \dot{P}(N)\psi_{n,m}(N)\rangle \\
&= \langle \dot{\psi}_{0,m-n}(N), \psi_{n,m}(N)\rangle \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \psi_{0,m-n}(N)\rangle \\
&= \langle \dot{\psi}_{0,m-n}(N), \psi_{n,m}(N)\rangle \delta_{\hat{n},0}\delta_{\hat{m},m-n} \\
&= -\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{n!\Gamma(m-n+N+1)}{\Gamma(m+N+1)}}\delta_{\hat{n},0}\delta_{\hat{m},m-n} \\
&= -f(n, m-n+N)\delta_{\hat{n},0}\delta_{\hat{m},m-n}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors une partie du résultat voulu.
Pour $\{\varphi_{n,m}(N)\}$, on utilisera la même technique et le théorème 1.3.3.
Les autres éléments sont nulles à cause de l'orthogonalité des fonctions de la base

[1] $\delta_{x,y}$ est le symbole de Kronecker valant 1 si $x = y$ et 0 sinon et $\chi(x)$ la fonction caractéristique valant 1 si x est vrai et 0 sinon.

propre.

Montrons maintenant que $\dot{P}(N)$ est borné et introduisons dans un premier temps la notation suivante :

$$\boxed{P^{\perp}(N) := \mathbb{I} - P(N)}$$

$P(N)\dot{P}(N)P(N)$ étant nul, nous obtenons la majoration

$$\|\dot{P}(N)\| \leq 2\|\dot{P}(N)P^{\perp}(N)\|.$$

Intéressons nous à la norme de $\dot{P}(N)P^{\perp}(N)$. Soit ψ un vecteur de $\mathcal{H}$. Il admet la décomposition suivante dans la base propre :

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{n\geq 0, m\geq 0} a_{n,m}(N)\psi_{n,m}(N)\chi(m-n+N\geq 0) \\ &\quad + \sum_{n\geq 0, m\geq 0} a_{n,m}(N)\varphi_{n,m}(N)\chi(m-n+N<0)\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}P^{\perp}(N)\psi &= \sum_{n\geq 1, m\geq 1} a_{n,m}(N)\psi_{n,m}(N)\chi(m-n+N\geq 0) \\ &\quad + \sum_{n\geq 1, m\geq 1} a_{n,m}(N)\varphi_{n,m}(N)\chi(m-n+N<0)\end{aligned}$$

Nous cherchons ici à estimer

$$\|\dot{P}(N)P^{\perp}(N)\psi\|^2 =: (1)$$

Posons $\boxed{l := m-n}$. Par la définition de $\dot{P}$, on déduit alors que :

$$\begin{aligned}(1) &= \sum_{\hat{n}\geq 1, \hat{m}\geq 0} \Big| \sum_{n\geq 1, m\geq 1} a_{n,m}(N)\chi(l+N\geq 0)\dot{P}_{\hat{n},\hat{m},n,m} \\ &\quad + a_{n,m}(N)\chi(l+N<0)\dot{P}^{\hat{n},\hat{m},n,m}\Big|^2 \\ &= \sum_{\hat{n}\geq 1, \hat{m}\geq 0} \Big| \sum_{n\geq 1, m\geq 1} a_{n,m}(N)\chi(l+N\geq 0)(-f(n,l+N)\delta_{\hat{n},0}\delta_{\hat{m},l} \\ &\quad + \sum_{n\geq 1, m\geq 1} a_{n,m}(N)\chi(l+N<0)f(m,-l-N)\delta_{\hat{m},0}\delta_{\hat{n},-l}\Big|^2\end{aligned}$$

En remplaçant dans la première somme m par $\hat{m}+n$, on peut supprimer la somme sur m. En faisant de même avec n et $\hat{n}+m$ dans la seconde somme, on trouve que :

$$\begin{aligned}(1) \quad = \quad & \sum_{\hat{n}\geq 1, \hat{m}\geq 0} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\hat{m}+n}(N)\chi(l+N\geq 0)(-\frac{1}{2n})\sqrt{B(n,\hat{m}+n+N)}\delta_{\hat{n},0} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} a_{\hat{n}+m,m}(N)\chi(l+N<0)(\frac{1}{2m})\sqrt{B(m,\hat{n}+m-N)}\delta_{\hat{m},0}\Big|^2\end{aligned}$$

A cause du symbole de Kronecker restant et à cause des conditions sur $\hat{n}$ et $\hat{m}$, l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned}(1) \quad = \quad & \sum_{\hat{m}\geq 0} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\hat{m}+n}(N)\chi(l+N\geq 0)(\frac{1}{2n})\sqrt{B(n,\hat{m}+n+N)}\Big|^2 \\ & + \sum_{\hat{n}\geq 1} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} a_{\hat{n}+m,m}(N)\chi(l+N<0)(\frac{1}{2m})\sqrt{B(m,\hat{n}+m-N)}\Big|^2\end{aligned}$$

Puisque B et χ sont des fonctions bornées, on obtient alors la majoration suivante :

$$(1) \quad \leq \quad \frac{\max\sqrt{B}}{4}\Big(\sum_{\hat{m}\geq 0} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\hat{m}+n}(N)(\frac{1}{2n})\Big|^2 + \sum_{\hat{n}\geq 1} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} a_{\hat{n}+m,m}(N)(\frac{1}{2m})\Big|^2\Big)$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que :

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\hat{m}+n}(N)(\frac{1}{2n})\Big|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,\hat{m}+n}(N)|^2\right)$$

D'où

$$(1) \quad \leq \quad \frac{\max\sqrt{B}}{4}\frac{\pi^2}{6}\left(\sum_{\hat{m}\geq 0}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,\hat{m}+n}(N)|^2 + \sum_{\hat{n}\geq 1}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{\hat{n}+m,m}(N)|^2\right)$$

On reconnait que le terme de droite est majoré par la norme de ψ. On a alors :

$$\|\dot{P}(N)P^{\perp}(N)\|^2 \leq \frac{\pi^2\max\sqrt{B}}{24}$$

On obtient alors que :

$$\|\dot{P}(N)\| \leq \left(\frac{\pi^2 \max \sqrt{B}}{12}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il reste maintenant à déterminer le maximum de la fonction $\sqrt{B}$. On rappelle que :

$$B(x,y) := \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}$$

Cette fonction est symétrique en x et y. Dans tous les cas que l'on considére, on a $x \geq 1$ et $y \geq 0$. Si on montre que $\sqrt{B}$ est monotone en y alors elle le sera également en x. On a :

$$\partial_y \sqrt{B(x,y)} \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{B(x,y)}\,(\psi_0(y+1) - \psi_0(x+y+1))$$

où $\psi_0(t) := \frac{\dot{\Gamma}(t)}{\Gamma(t)}$ est la fonction digamma. Le signe de la dérivée de $\sqrt{B}$ est donc le signe de la différence des fonctions digamma. Or, cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$ [AS1], donc la dérivée de $\sqrt{B(x,y)}$ par rapport à y est négative. On en déduit que $\sqrt{B(x,y)}$ est une fonction décroissante en x et y. Son maximum est donc atteint pour $x = 1$ et $y = 0$ et vaut 1. Cela nous permet d'obtenir la majoration :

$$\|\dot{P}(N)\| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

□

Grâce à ces deux propositions et à la régularité des fonctions propres, on en déduit que $P(N) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathcal{H}))$, ce qui conclut la preuve du premier point du théorème. On poursuit maintenant avec le second point.

Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe un opérateur $\Gamma(N)$ solution de l'équation (2.2). Pour cela, nous allons développer l'opérateur $\Gamma(N)$ dans la base propre mais nous ne considérerons pour l'instant que les vecteurs propres de la forme $\{\psi_{n,m}(N)\}$, les résultats pour les fonctions $\{\varphi_{n,m}(N)\}$ étant obtenus par un calcul analogue. Nous allons encore identifier l'opérateur $\Gamma(N)$ à une matrice dont les coefficients sont obtenus par produit scalaire avec les éléments de la base propre et comparer les éléments de $\Gamma(N)$ et $\dot{\Gamma}(N)$ à celles de $\dot{P}(N)$.
Soient ψ et φ deux vecteurs propres de $H(N)$ associés aux valeurs propres E_ψ et E_φ.

L'équation (2.2) implique alors :

$$\langle \psi, [H(N), \Gamma(N)]\varphi \rangle = \langle \psi, [\dot{P}(N), P(N)]\varphi \rangle. \tag{2.4}$$

Le membre de gauche (m.d.g) est égal à :

$$\begin{aligned} (m.d.g) &= \langle \psi, (H(N)\Gamma(N) - \Gamma(N)H(N))\varphi \rangle \\ &= (E_\psi - E_\varphi)\langle \psi, \Gamma(N)\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Pour le membre de droite (m.d.d) de (2.4), remarquons dans un premier temps que

$$\begin{aligned} (m.d.d) &= \langle \psi, (\dot{P}(N)P(N) - P(N)\dot{P}(N))\varphi \rangle \\ &= \langle \psi, \dot{P}(N)P(N)\varphi \rangle - \langle P(N)\psi, \dot{P}(N)\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Si ni ψ, ni φ appartiennent à l'image de $P(N)$, alors le membre de droite est nul. Supposons par la suite qu'au moins un des vecteurs propres soit dans l'image du projecteur. Les calculs précédents, basés sur le théorème 1.3.3, nous permettent d'en déduire que seul certains des produits scalaires de la forme

$$\langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), (\dot{P}(N)P(N) - P(N)\dot{P}(N))\psi_{n,m}(N) \rangle$$

ou

$$\langle \varphi_{\hat{n},\hat{m}}(N), (\dot{P}(N)P(N) - P(N)\dot{P}(N))\varphi_{n,m}(N) \rangle$$

sont non nuls. Nous allons donc regarder les trois cas associés à la première équation, la deuxième se traitant de la même façon.

1. Considérons maintenant la cas où $n = 0$ et $\hat{n} \geq 1$. Il est suffisant de s'intéresser à ces conditions puisque le commutateur $[\dot{P}(N), P(N)]$ est anti-autoadjoint. Remarquons alors que $\psi_{0,m}(N) = P(N)\psi_{0,m}(N)$:

$$\begin{aligned} (m.d.d) &= \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), (\dot{P}(N)P(N) - P(N)\dot{P}(N))\psi_{0,m}(N) \rangle \\ &= \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \dot{P}(N)\psi_{0,m}(N) \rangle \\ &= \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \dot{\psi}_{0,m}(N) \rangle \\ &= -\frac{1}{2\hat{n}}\sqrt{\frac{\hat{n}!\Gamma(m+N+1)}{\Gamma(\hat{m}+N+1)}}\delta_{m,\hat{m}-\hat{n}} \end{aligned}$$

   par le théorème 1.3.3.

2. Si $n \geq 1$ et $\hat{n} = 0$ alors

$$\begin{aligned}(m.d.d) &= \langle \psi_{0,\hat{m}}(N), (\dot{P}(N)P(N) - P(N)\dot{P}(N))\psi_{n,m}(N)\rangle \\ &= -\langle \dot{\psi}_{0,m-n}(N), \psi_{n,m}(N)\rangle \langle \psi_{0,\hat{m}}(N), \psi_{0,m-n}(N)\rangle \\ &= \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{n!\Gamma(m-n+N+1)}{\Gamma(m+N+1)}}\delta_{\hat{m},m-n}\end{aligned}$$

par le théorème 1.3.3.

3. Enfin, si $n = \hat{n} = 0$. Alors les fonctions propres considérées sont dans l'image du projecteur et comme $P(N)$ est un projecteur autoadjoint, on en déduit que le membre de droite vaut donc 0.

Revenons maintenant à l'équation (2.4). Nous venons de démontrer qu'aucun élément diagonal de la matrice de $[\dot{P}(N), P(N)]$ est non nul donc pour

$$[\dot{P}(N), P(N)]_{\hat{n},\hat{m},n,m} := \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), [\dot{P}(N), P(N)]\psi_{n,m}(N)\rangle$$

Nous définissons

$$\Gamma(N)_{\hat{n},\hat{m},n,m} := \langle \psi_{\hat{n},\hat{m}}(N), \Gamma(N)\psi_{n,m}(N)\rangle$$

et les autres éléments de matrice de $\Gamma(N)$ sont nuls. Alors :

$$\Gamma(N)_{\hat{n},\hat{m},n,m} = \frac{[\dot{P}(N), P(N)]_{\hat{n},\hat{m},n,m}}{\hat{n}-n}\chi(n \neq \hat{n})$$

où χ est la fonction caractéristique.
Pour montrer que $\Gamma(N)$ est bornée, nous utilisons la même méthode que pour $\dot{P}$.
Montrons maintenant, encore en utilisant la même méthode, que $\dot{\Gamma}(N)$ est borné. Pour obtenir cette nouvelle matrice, il faut dériver la matrice $\Gamma(N)$ terme à terme. Les éléments non nulles de la matrice deviennent alors :

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}(N)_{n,m,0,l} &= -\frac{1}{4n^2}\sqrt{\frac{n!\Gamma(l+N+1)}{\Gamma(m+N+1)}}(\psi_0(l+N+1) - \psi_0(l+n+N+1)) \\ &= \frac{\Gamma(N)_{n,m,0,l}}{2}(\psi_0(l+N+1) - \psi_0(l+n+N+1)) \qquad (2.5) \\ &= \frac{\Gamma(N)_{n,m,0,l}}{2}g(l+N,n) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

où $\psi_0(t) := \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ est la fonction digamma et $g(t,n) := \psi_0(t+1) - \psi_0(t+n+1)$. On

introduit la fonction

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{n\geq 0, m\geq 0} a_{n,m}(N)\psi_{n,m}(N)\chi(m-n+N\geq 0)\\ &\quad + \sum_{n\geq 0, m\geq 0} a_{n,m}(N)\varphi_{n,m}(N)\chi(m-n+N<0)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|\dot{\Gamma}(N)\psi\| &= \sum_{\hat{n}\geq 1, \hat{m}\geq 0} \Big| \sum_{n\geq 1, m\geq 1} a_{n,m}(N)\chi(m-n+N\geq 0)\dot{\Gamma}_{\hat{n},\hat{m},n,m}\\ &\quad + a_{n,m}(N)\chi(m-n+N<0)\dot{\Gamma}^{\hat{n},\hat{m},n,m}\Big|^2\end{aligned}$$

On introduit la notation

$$f(t,n) := \chi(t\geq 0)g(t,n)$$

A cause des différents symboles de Kronecker, l'expression devient

$$\begin{aligned}\|\dot{\Gamma}(N)\psi\| &= \sum_{m\geq 0} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}(N)\Big(\frac{f(m-n+N,n)}{4n^2}\Big)\sqrt{B(n,\hat{m}+n+N)}\Big|^2\\ &\quad + \sum_{n\geq 1} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}(N)\Big(\frac{f(-(m-n+N),m)}{4m^2}\Big)\sqrt{B(m,\hat{n}+m-N)}\Big|^2\end{aligned}$$

Puisque B est une fonction bornée, on obtient alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned}(1) := \|\dot{\Gamma}(N)\psi\| &\leq \frac{\max\sqrt{B}}{16}\Bigg(\sum_{m\geq 0} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}(N)\Big(\frac{f(m-n+N,n)}{4n^2}\Big)\Big|^2\\ &\quad + \sum_{n\geq 1} \Big| \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}(N)\frac{f(-(m-n+N),m)}{4m^2}\Big)\Big|^2\Bigg)\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\hat{m}+n}(N)\Big(\frac{f(l+N,n)}{4n^2}\Big)\right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(l+N,n)|^2}{16n^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,\hat{m}+n}(N)|^2\right)$$

Or, f est une restriction de g. Montrons que la fonction $|g|$ est décroissante par rapport

à sa première variable. Calculons sa dérivée :

$$\partial_t |g(t,n)| = sign(\psi_0(t+1) - \psi_0(t+n+1))(\psi_1(t+1) - \psi_1(t+n+1))$$

où $\psi_1(t) := \partial_t \psi_0(t)$ est la fonction trigamma, qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ [AS1] donc $(\psi_1(t+1) - \psi_1(t+n+1)) > 0$. De plus, la fonction $\psi_0(t)$ est une fonction croissante pour t positif [AS1], donc $sign(\psi_0(t+1) - \psi_0(t+n+1))$ est négatif. Pour n fixé, on en déduit que la dérivée de g est négative et donc que $|g|$ est décroissante en t. On a alors que :

$$|g(t,n)| \leq |\psi_0(1) - \psi_0(1+n)|$$

Or la fonction digamma admet pour tout n entier le développement :

$$\psi_0(1+n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

où γ est la constant d'Euler-Mascheroni. On en déduit que $\psi_0(1) = -\gamma$ et donc que g admet alors la majoration suivante :

$$|g(t,n)| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{k} \right| \leq n$$

pour D'où

$$(1) \quad \leq \quad \frac{\max \sqrt{B}}{256} \frac{\pi^2}{6} \left(\sum_{\hat{m} \geq 0} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,\hat{m}+n}(N)|^2 + \sum_{\hat{n} \geq 1} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{\hat{n}+m,m}(N)|^2 \right)$$

Ainsi, $\dot{\Gamma}(N)$ est borné, ce qui nous permet de conclure la preuve du second point du théorème 2.2.5.

□

2.2.4 Dynamique adiabatique du niveau fondamental de Landau

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de déterminer l'évolution adiabatique des vecteurs propres du niveau fondamental de $H(N)$ pour certaines valeurs entières de N. Cela donne le résultat de la proposition suivante :

Proposition 2.2.7 *Soit $N \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ tel que $m + N \geq 0$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} U_{AD}(N)\psi_{0,m}(0) &= e^{\frac{i\tau N}{2}}\psi_{0,m}(N) \\ &= e^{\frac{i\tau N}{2}}\sqrt{\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+N+1)}}G(N)(b^*(0))^N\psi_{0,m}(0) \\ &= e^{\frac{i\tau N}{2}}\sqrt{\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+N+1)}}\left(\frac{z\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{N}{2}}\psi_{0,m}(0) \end{aligned}$$

où $G(N) := \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{N}{2}}$.

Preuve : La première égalité provient du théorème 2.2.4. De plus, on sait par le théorème 1.3.2 que :

$$\psi_{0,m}(N) = G(N)\psi_{0,m+N}(0)$$

Or par la définition des fonctions propres $\psi_{0,m}(0)$, on a :

$$\begin{aligned} \psi_{0,m+N}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\Gamma(m+N+1)}}(b^*(0))^{m+N}\psi_{0,0}(N) \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+N+1)}}(b^*(0))^N\psi_{0,m}(0) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donc

$$\psi_{0,m}(N) = \sqrt{\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+N+1)}}G(N)(b^*(0))^N\psi_{0,m}(0).$$

Or

$$b^*(0)\psi_{0,0}(0) = \frac{z}{\sqrt{2}}\psi_{0,0}(0)$$

donc par la définition de $G(N)$, on obtient le résultat énoncé.

□

Sans difficulté analytique, nous pouvons déterminer l'évolution adiabatique d'une superposition finie d'états du niveau fondamental.

Théorème 2.2.8 *Soit ϕ une superposition d'états propres du niveau fondamental de l'hamiltonien de Landau $H(0)$:*

$$\phi = \sum_{k\in K}\alpha_k\psi_{0,k}(0)$$

avec K un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ tel que $\sum_{k\in K}|\alpha_k|^2 = 1$. Alors pour $N \in \mathbb{Z}$ tel que $\inf_{k\in K}(k+N) \geq 0$, on a :

$$U_{AD}(N)\phi = (z\bar{z})^{\frac{N}{2}} \circ D(N)\phi$$

où $D(N)$ est l'opérateur défini par

$$D(N) \quad : \quad \alpha_k \to \alpha_k e^{\frac{i\tau N}{2}} \sqrt{\frac{\Gamma(k+1)}{2^N \Gamma(k+N+1)}}$$

et $(z\bar{z})^{\frac{N}{2}}$ est un opérateur de multiplication.

2.3 Second théorème de type adiabatique

Nous allons maintenant démontrer un second théorème de type adiabatique mais cette fois pour l'hamiltonien de Landau auquel nous ajoutons une perturbation indépendante du temps. Nous parlons de "type adiabatique" pour trois raisons : nous construisons une approximation du propagateur en ajoutant une pertubation hors diagonale ; cette approximation est valable pour des temps longs ; la technique de la preuve est celle utilisée dans les théorèmes adiabatiques qui concernent le cas d'hamiltoniens dépendants du temps.

Rappelons dans un premier temps le modèle que l'on considère.

2.3.1 Le modèle

Soit V un opérateur borné et autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, ε un paramètre positif et

$$H := \underbrace{\frac{1}{2}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\hat{q}^{\perp}\right)^2}_{=:H^{La}} + \varepsilon V.$$

Ce dernier opérateur est autoadjoint sur le domaine $\mathbb{D}(H)$ qui est la fermeture dans la norme d'opérateur de l'espace de Schwartz.

Nous étudions une approximation du propagateur

$$U(t) := e^{-iHt}$$

pour ε petit.

2.3.2 Le théorème

D'après le théorème 1.2.5, on a la décomposition spectrale 2.2.5

$$H^{La} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n.$$

Pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé et $P_n^{\perp} := \mathbb{I} - P_n$, nous définissons les parties diagonales et off-diagonales de V par :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}V &:= P_n V P_n + P_n^{\perp} V P_n^{\perp} \\ \mathbf{O}V &:= V - \mathbf{D}V = P_n^{\perp} V P_n + P_n V P_n^{\perp} = [[V, P_n], P_n] \end{aligned}$$

ainsi que

$$H^{ad} := H - \varepsilon \mathbf{O}V = H^{La} + \varepsilon \mathbf{D}V$$

qui est autoadjoint sur le domaine $\mathbb{D}(H^{ad}) = \mathbb{D}(H)$. Soit

$$U^{ad}(t) := e^{-iH^{ad}t}.$$

Nous trouvons alors que $U(t)$ est approché par $U^{ad}(t)$ pour des temps longs :

Théorème 2.3.1 *Pour $U(t)$ et $U^{ad}(t)$ définis ci-dessus, nous avons que :*

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]} \|U(t) - U^{ad}(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Remarque 2.3.2 *Remarquons que ce résultat implique en particulier que le n-ième niveau de Landau $Ran\ P_n$ est invariant à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pour des temps longs d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire que*

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]} \left\| P_n^{\perp} U(t) P_n \right\| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

De plus, $U(t)$ est approximé dans ce niveau par la dynamique générée par

$$P_n H P_n = (n + \frac{1}{2}) P_n + \varepsilon P_n V P_n.$$

Nous pouvons remarquer que dans le cas où V est l'opérateur de multiplication par un symbole, $P_n V P_n$ est déterminé par un opérateur pseudodifférentiel. Cependant,

dans cette thèse, nous ne développerons pas ce point et préférerons nous concentrer sur la construction de sous-espaces invariants ainsi que sur la dynamique effective à des ordres plus élevés en ε.

Preuve : Considérons dans un premier temps l'équation

$$[H^{La}, \Gamma] = \mathbf{O}V. \tag{2.8}$$

Soit Γ défini par

$$\Gamma := -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_n} R^{La}(z)[\mathbf{O}V, P_n]R^{La}(z)\mathrm{d}z$$

où $R^{La}(z)$ est la résolvante de l'hamiltonien de Landau au point $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{N} + \frac{1}{2})$ et $\mathcal{C}_n$ est le cercle centré en $n + \frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, alors Γ est solution de (2.8) car

$$\begin{aligned} [H^{La}, \Gamma] &= [H^{La} - z, \Gamma] \\ &= [[\mathbf{O}V, P_n], P_n] \\ &= \mathbf{O}V. \end{aligned}$$

Notons également que Γ est un opérateur borné et que l'on a l'estimation

$$\|\Gamma\| \leq c\|\mathbf{O}V\| \leq c\|V\| \tag{2.9}$$

pour un c positif.
Soit $\psi \in \mathbb{D}(H) = \mathbb{D}(H^{ad})$. Alors

$$\begin{aligned} \left(U(t) - U^{ad}(t)\right)\psi &= U(t)(\mathbb{I} - U^*(t)U^{ad}(t))\psi \\ &= -i\varepsilon U(t) \int_0^t U^*(s)\mathbf{O}VU^{ad}(s)\psi \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Grâce à (2.8), l'intégrant peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} U^*(s)\mathbf{O}VU^{ad}(s) &= U^*(s)[H^{La}, \Gamma]U^{ad}(s) \\ &= U^*(s)[H, \Gamma]U^{ad}(s) - \varepsilon U^*(s)[V, \Gamma]U^{ad}(s) \\ &= -i\partial_s(U^*\Gamma U^{ad})(s) - \varepsilon U^*\Gamma\mathbf{O}VU^{ad}(s) - \varepsilon U^*[V, \Gamma]U^{ad}(s) \end{aligned}$$

On obtient donc, en utilisant l'unitarité de $U(t)$ et $U^{ad}(t)$

$$\begin{aligned}\left\|(U(t)-U^{ad}(t)\psi\right\| &\leq \varepsilon\left\|[U^*\Gamma U^{ad}(s)\psi]_{s=0}^{s=t}\right\|+\varepsilon^2\int_0^t\|U^*\Gamma\mathbf{O}VU^{ad}(s)\psi\|\mathrm{d}s\\ &\quad+\varepsilon^2\int_0^t\|U^*[V,\Gamma]U^{ad}(s)\psi\|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

On trouve alors que :

$$\begin{aligned}\|\left(U(t)-U^{ad}(t)\right)\psi\| &\leq 2\varepsilon\|\Gamma\|\|\psi\|+t\varepsilon^2\|\mathbf{O}V\|^2\|\psi\|+ct\varepsilon^2\|V\|^2\|\psi\|\\ &\leq \left(\mathcal{O}(\varepsilon)+t\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)\|\psi\|\end{aligned}$$

d'après (2.9). Ce résultat et l'unitarité de $U(t)$ et de $U^{ad}(t)$ nous permettent donc de conclure la preuve de ce théorème.

□

Dans le reste de cette thèse, nous nous occuperons à trouver des dynamiques effectives approximant $U(t)$ à tout ordre et pour des temps arbitraires.

Chapitre 3

Forme normale de l'hamiltonien $H^{La} + \varepsilon^2 V$ où V est un polynôme du second degré.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à trouver une forme normale au problème

$$H = H^{La} + V \tag{3.1}$$

V sera dans un premier temps l'opérateur de multiplication par un potentiel quadratique puis nous étudierons le cas linéaire afin d'obtenir le résultat pour tous les polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2.

Le terme "forme normale" signifie que nous cherchons un opérateur qui va commuter avec l'hamiltonien de Landau H^{La}, c'est-à-dire :

H_∞ est une forme normale de H si H_∞ est unitairement équivalent à H et $[H_\infty, H^{La}] = 0$.

La forme normale sera trouvée à l'aide d'un unitaire qui sera la quantification d'une transformation symplectique effectuant une diagonalisation partielle de la matrice associée à la fonction hamiltonienne du problème classique correspondant.

Nous allons débuter ce chapitre par des rappels concernant le groupe symplectique puis nous construirons l'unitaire afin de trouver la forme normale de l'hamiltonien H dans le cas où V est quadratique. Nous achèverons le chapitre par la construction de la forme normale dans le cas où V est linéaire.

3.1 Structure symplectique

Dans cette partie, nous travaillerons avec des matrices $\mathbb{A}$ de dimension $2n \times 2n$. Nous utiliserons également une écriture par bloc :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A, B, C, D sont des matrices $n \times n$ à coefficients réels ou complexes.
Nous noterons par σ_n la matrice :

$$\sigma_n := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{I}_n$ est la matrice identité dans $\mathbb{R}^n$ et, pour $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ par

$$\omega(v, w) := \langle v, \sigma_n w \rangle$$

la forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$. C'est une forme bilinéaire, antisymétrique et non-dégénérée.
Dans le cas $n = 1$, nous noterons

$$\boxed{\sigma := \sigma_1}.$$

Nous pouvons maintenant définir le groupe et l'algèbre de Lie symplectique :

Définition 3.1.1 *Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices réelles $2n \times 2n$ préservant la forme symplectique :*

$$\mathbb{A} \in Sp(n, \mathbb{R}) \Longleftrightarrow \omega(\mathbb{A}v, \mathbb{A}w) = \omega(v, w) \ pour\ tout\ v, w \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Définition 3.1.2 *L'algèbre de Lie $sp(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $\mathbb{A}$ de dimension $2n \times 2n$ à coefficients réels tel que $e^{t\mathbb{A}}$ soit un élément de $Sp(n, \mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On munit $sp(n, \mathbb{R})$ du crochet de Lie :*

$$Pour\ \mathbb{A}, \mathbb{B} \in sp(n, \mathbb{R}), \quad [\mathbb{A}, \mathbb{B}] := \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Nous avons la caractéristique suivante pour l'algèbre de Lie symplectique :

Proposition 3.1.3 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2n})$. *Alors* $\mathbb{A} \in sp(n, \mathbb{R})$ *si*

$$\sigma_n \mathbb{A} + \mathbb{A}^t \sigma_n = 0$$

Preuve : Voir [Fo] p.171.

□

Nous donnons maintenant une base du groupe symplectique.

3.2 Hamiltoniens quadratiques et leurs transformations

Pour $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré 2, nous avons les représentations

$$\begin{aligned} A(q,p) &= \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, A'' \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\omega\left(\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \mathbb{A} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

où A'' est la matrice hessienne et $\mathbb{A} := -\sigma_n A''$ <u>la matrice hamiltonienne</u> associée à A. Nous appellerons également A'' et $\mathbb{A}$ les matrices hessiennes et hamiltoniennes associées à l'opérateur $\widehat{A}$, essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ de symbole

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, A'' \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{2}\,\omega\left(\begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \mathbb{A} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix} \right).$$

Nous pouvons remarquer que $(\sigma_n \mathbb{A})^t = \sigma_n \mathbb{A}$ et donc que $\mathbb{A} \in sp(n, \mathbb{R})$.
Il s'avèrera que pour construire la forme normale, il sera suffisant de travailler avec les unitaires définis comme l'évolution de tels $\widehat{A}$:

Proposition 3.2.1 *Soient* $A, H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *des polynômes homogènes de degrés 2,* $\mathbb{A}, \mathbb{H}$ *leurs matrices hamiltoniennes associées.*
Alors, la matrice hamiltonienne associée à $e^{it\widehat{A}}\widehat{H}e^{-it\widehat{A}}$ *est* $e^{-t\mathbb{A}}\mathbb{H}e^{t\mathbb{A}}$.

Preuve : Il est connu, voir [Fo], que

$$i\left[\begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \widehat{A} \right] = i\left[\begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\,\omega\left(\begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \mathbb{A} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix} \right) \right] = \mathbb{A} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}.$$

Vérifions le pour $n = 1$. Nous avons que

$$i[\hat{q}, \hat{p}] = i[\hat{q}, -i\partial_q] = -1.$$

Donc

$$\begin{aligned} i\left[\hat{q}, \frac{1}{2}\omega\left(\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}, \mathbb{A}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right)\right] &= \frac{1}{2}\omega\left(\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}, \mathbb{A}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\omega\left(\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}, \mathbb{A}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right) \\ &= \omega\left(\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}, \mathbb{A}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right) \\ &= \left\langle\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}, \sigma\mathbb{A}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \left\langle\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \mathbb{A}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right\rangle. \end{aligned}$$

où nous nous sommes servis du fait que $\mathbb{A} \in sp(n, \mathbb{R})$.
De même,

$$i\left[\hat{p}, \frac{1}{2}\omega\left(\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}, \mathbb{A}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right)\right] = \left\langle\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \mathbb{A}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Cela nous permet alors de conclure que

$$e^{it\widehat{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}e^{-it\widehat{A}} = e^{t\mathbb{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}.$$

En effet, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned} i\partial_t e^{it\widehat{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}e^{-it\widehat{A}}\psi &= [e^{it\widehat{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}e^{-it\widehat{A}}, \widehat{A}]\psi \\ &= \mathbb{A}e^{it\widehat{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}e^{-it\widehat{A}}\psi \end{aligned}$$

or

$$\partial_t e^{t\mathbb{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\psi = \mathbb{A}e^{t\mathbb{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\psi.$$

Donc, ces deux quantités, qui sont égales pour $t = 0$, satisfont la même équation différentielle et sont donc égales pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Il suit

$$\begin{aligned} e^{it\widehat{A}}\frac{1}{2}\,\omega\left(\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}, \mathbb{H}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right)e^{-it\widehat{A}} &= \frac{1}{2}\,\omega\left(e^{it\widehat{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}e^{-it\widehat{A}}, \mathbb{H}e^{it\widehat{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}e^{-it\widehat{A}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\omega\left(e^{t\mathbb{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}, \mathbb{H}e^{t\mathbb{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\omega\left(\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}, e^{-t\mathbb{A}}\mathbb{H}e^{t\mathbb{A}}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

où nous nous sommes servis du fait que $e^{t\mathbb{A}} \in Sp(n, \mathbb{R})$.

□

3.3 Mise en place du problème

Soit maintenant V un potentiel quadratique, il s'écrit donc

$$\begin{aligned} V(q) &= \frac{1}{2}\langle q, V''q\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}V'' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}\right\rangle. \end{aligned}$$

V'' désigne la matrice hessienne de V. Pour l'opérateur de symbole

$$H = H^{La} + \varepsilon^2 V = \frac{1}{2}\left(\hat{p} - \frac{\hat{q}^{\perp}}{2}\right)^2 + V(\hat{q})$$

nous avons la forme matricielle

$$H = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}, H''\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}\right\rangle$$

avec

$$H'' = \begin{pmatrix}\mathbb{I}/4 & \sigma^t/2\\ \sigma/2 & \mathbb{I}\end{pmatrix} + \varepsilon^2\begin{pmatrix}V'' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Au niveau des symboles classiques, il est intéressant de transformer ce problème dans les coordonnées du centre et de la vitesse via l'application linéaire qui transforme le

couple $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ en $\begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ i.e.

$$\begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} := T \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{2} - p^\perp \\ \frac{q}{2} + p^\perp \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

La matrice de cette transformation est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} \mathbb{I}/2 & \sigma \\ \mathbb{I}/2 & \sigma^t \end{pmatrix}.$$

$T \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, elle permet donc de trouver les formules suivantes :

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \frac{\sigma^t}{2} & \frac{\sigma^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + v^\perp \\ \frac{c^\perp + c}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Pour $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré 2, nous avons donc les représentations en coordonnées

$$\begin{aligned} H(q,p) &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, H'' \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\, \omega \left(\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \mathbb{H} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right) \\ H \circ T^{-1}(c, v^\perp) &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix}, \widehat{H''} \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\, \omega \left(\begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix}, \widehat{\mathbb{H}} \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\widehat{\sigma} := (T^{-1})^t \sigma_2 T^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^t & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

on trouve alors les relations

$$H'' = \sigma_2 \mathbb{H} \tag{3.4}$$

$$\widehat{H''} = \widehat{\sigma} \widehat{\mathbb{H}} \tag{3.5}$$

$$H'' = T^t \widehat{H''} T \tag{3.6}$$

$$\mathbb{H} = T^t \widehat{\mathbb{H}} T. \tag{3.7}$$

3.4 Diagonalisation du problème

Nous allons montrer comment construire la forme normale de la matrice associée au problème H. Cela fait l'objet de la proposition suivante :

Théorème 3.4.1 *Soit V un potentiel quadratique. Il existe $\varepsilon_c > 0$ tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_c$ et pour le polynôme quadratique de la matrice hamiltonienne*

$$H'' = \begin{pmatrix} \mathbb{I}/4 & \sigma^t/2 \\ \sigma/2 & \mathbb{I} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} V'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il existe une matrice $\widehat{\mathbb{A}}$ et un $t_c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\widehat{\mathbb{H}}_\infty := e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}}e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{H}}_c & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbb{H}}_v \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{H}}_c &= \beta^2 A\sigma^t A + \varepsilon^2(\alpha^2 A + 2\alpha\beta A\sigma A + \beta^2 A\sigma A\sigma A) \\ \widehat{\mathbb{H}}_v &= -(\alpha^2\sigma + \varepsilon^2(\alpha^2 A + 2\alpha\beta\mathfrak{p}\sigma + \beta^2\mathfrak{p}\sigma A\sigma)) \end{aligned}$$

où $A := \sigma V''$, $\mathfrak{p} := -\det V''$, $\alpha := \cosh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)$ et $\beta := \frac{\sinh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)}{\sqrt{-\mathfrak{p}}}$.

De plus, on a pour les autres matrices associées :

$$\begin{aligned} \widehat{H''}_\infty := e^{-t_c\widehat{A''}}\widehat{H''}e^{t_c\widehat{A''}} &= \begin{pmatrix} \sigma^t\mathbb{H}_c & 0 \\ 0 & \sigma\mathbb{H}_v \end{pmatrix} \\ H''_\infty := e^{-t_cA''}H''e^{t_cA''} &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{4}(\mathbb{H}_v - \mathbb{H}_c) & \frac{1}{2}(\sigma^t\mathbb{H}_c\sigma + \sigma\mathbb{H}_v\sigma^t) \\ -\frac{1}{2}(\mathbb{H}_c + \mathbb{H}_v) & (\mathbb{H}_v - \mathbb{H}_c)\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Preuve : Posons $\mathfrak{p} := -\det V''$, $A := \sigma V''$ et

$$\widehat{\mathbb{A}} := \begin{pmatrix} 0 & A\sigma \\ \sigma A & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la diagonalisation de la matrice hamiltonienne de H dans les coordonnées c et $v^\perp$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{H}} &= \widehat{\mathbb{H}^{La}} + \varepsilon^2\widehat{\mathbb{V}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^t \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2}{2}\begin{pmatrix} A & A \\ -A & -A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour cela, remarquons que pour $\mathfrak{p} \neq 0$

$$\begin{aligned} e^{t\widehat{\mathbb{A}}} &= \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)\mathbb{I} & \frac{\sinh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)}{\sqrt{-\mathfrak{p}}}A\sigma \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)}{\sqrt{-\mathfrak{p}}}\sigma A & \cosh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)\mathbb{I} \end{pmatrix} \\ &= \alpha\mathbb{I} + \beta\widehat{\mathbb{A}} \end{aligned}$$

où $\alpha := \cosh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)$ et $\beta := \frac{\sinh(\sqrt{-\mathfrak{p}}t)}{\sqrt{-\mathfrak{p}}}$.

Premièrement, nous pouvons passer à la limite $\mathfrak{p} \to 0$ ce qui permet de couvrir tous les cas possible de V''. Secondement, nous remarquons que si l'on remplace t par $-t$, alors seul β change de signe. Cela nous permet d'avoir également $e^{-t\mathbb{A}}$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} e^{-t\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}^{La}}e^{t\widehat{\mathbb{A}}} &= (\alpha\mathbb{I} - \beta\widehat{\mathbb{A}})\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^t \end{pmatrix}(\alpha\mathbb{I} + \beta\widehat{\mathbb{A}}) \\ &= \begin{pmatrix} \beta^2 A\sigma^t A & -\alpha\beta A \\ \alpha\beta A & \alpha^2\sigma^t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Faisons de même pour $\widehat{\mathbb{V}}$:

$$\begin{aligned} e^{-t\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{V}}e^{t\widehat{\mathbb{A}}} &= \alpha^2\begin{pmatrix} A & A \\ -A & -A \end{pmatrix} - \alpha\beta\begin{pmatrix} -2A\sigma A & -(A\sigma A + A^2\sigma) \\ \sigma A^2 + A\sigma A & \sigma A^2 + A^2\sigma \end{pmatrix} \\ &\quad -\beta^2\begin{pmatrix} -A\sigma A\sigma A & -A\sigma A^2\sigma \\ \sigma A^2\sigma A & \sigma A^3\sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En remarquant que $A^2 = \mathfrak{p}\mathbb{I}$, nous obtenons :

$$e^{-t\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{V}}e^{t\widehat{\mathbb{A}}} = \begin{pmatrix} \alpha^2 A + 2\alpha\beta A\sigma A + \beta^2 A\sigma A\sigma A & \alpha^2 A + \alpha\beta(A\sigma A + \mathfrak{p}\sigma) - \beta^2\mathfrak{p}A \\ -\alpha^2 A - \alpha\beta(\sigma\mathfrak{p} + A\sigma A) + \beta^2\mathfrak{p}A & -\alpha^2 A - 2\alpha\beta\mathfrak{p}\sigma - \beta^2\mathfrak{p}\sigma A\sigma \end{pmatrix}$$

En sommant ce résultat à (3.8), nous pouvons remarquer que la matrice $e^{-t\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}}e^{t\widehat{\mathbb{A}}}$ est symétrique par blocs et le bloc hors-diagonal s'écrit

$$-\alpha\beta A + \varepsilon^2(\alpha^2 A + \alpha\beta(A\sigma A + \mathfrak{p}\sigma) - \beta^2\mathfrak{p}A).$$

Or, nous voyons que

$$A\sigma A + \mathfrak{p}\sigma = -(\mathrm{tr}V'')A.$$

Nous en déduisons donc que le bloc off-diagonal de la matrice est proportionnel à A multiplié par la fonction

$$f(t,\varepsilon,V'') := \varepsilon^2\alpha^2 - \mathfrak{p}\varepsilon^2\beta^2 - (1+\varepsilon^2 \mathrm{tr} V'')\alpha\beta$$

Nous nous intéressons donc aux zéros de cette fonction. En remplaçant α et β par leurs définitions et en posant $x = \varepsilon^2$, $y = -\mathfrak{p}\varepsilon^2$ et $z = -(1+\varepsilon^2 \mathrm{tr} V'')$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(t,\varepsilon,\widehat{\mathbb{V}}) &= x\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\right) + y\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}\right) + z\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4}\right) \\ &= \frac{x-y}{2} + \frac{e^{2t}}{4}(x+y+z) + \frac{e^{-2t}}{4}(x+y-z) \\ &= \frac{e^{-2t}}{4}\Big((e^{2t})^2(x+y+z) + 2(x-y)e^{2t} + (x+y-z)\Big). \end{aligned}$$

Puisque que nous cherchons les zéros de la fonction, il faut étudier les zéros du membre de droite. En faisant un changement de variable, nous sommes amenés à trouver les zéros d'une équation du second degré. Après calculs, les zéros sont :

$$t_c = \frac{1}{2}\log\left|\frac{(y-x) \pm \sqrt{z^2-4xy}}{x+y+z}\right|$$

Remarquons premièrement que le terme $z^2 - xy$ est toujours positif pour $\varepsilon > 0$ petit. De plus, lorsque ε tend vers 0, t_c tend vers 1.

Nous en déduisons donc que pour un t bien choisi

$$e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}}e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{H}}_c & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbb{H}}_v \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{H}}_c &= \beta^2 A\sigma^t A + \varepsilon^2(\alpha^2 A + 2\alpha\beta A\sigma A + \beta^2 A\sigma A\sigma A) \\ \widehat{\mathbb{H}}_v &= -(\alpha^2\sigma + \varepsilon^2(\alpha^2 A + 2\alpha\beta\mathfrak{p}\sigma + \beta^2\mathfrak{p}\sigma A\sigma)). \end{aligned}$$

A l'aide des relations (3.4) à (3.7), nous trouvons les différentes expressions des matrices indicées par ∞ dans $\mathbb{R}^4$ muni des différentes coordonnées et formes bilinéaires

$$\begin{aligned}
\widehat{H''}_\infty &= \begin{pmatrix} \sigma^t \mathbb{H}_c & 0 \\ 0 & \sigma \mathbb{H}_v \end{pmatrix} \\
H''_\infty &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{4}(\mathbb{H}_v - \mathbb{H}_c) & \frac{1}{2}(\sigma^t \mathbb{H}_c \sigma + \sigma \mathbb{H}_v \sigma^t) \\ -\frac{1}{2}(\mathbb{H}_c + \mathbb{H}_v) & (\mathbb{H}_v - \mathbb{H}_c)\sigma \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.4.2 *Nous pouvons faire de même pour le générateur infinitésimal de la transformation :*

$$\begin{aligned}
\widehat{A''} &= \begin{pmatrix} 0 & V''\sigma \\ \sigma^t V'' & 0 \end{pmatrix} \\
A'' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}[V'', \sigma] & \frac{trV''\mathbb{I}}{2} \\ \frac{trV''\mathbb{I}}{2} & [V'', \sigma] \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu la forme normale de (3.1) dans les coordonnées centre-vitesse dans l'espace muni de la forme symplectique $\widehat{\omega}$.

3.5 Exemples fondamentaux

Nous appliquons le théorème 3.4.1 à 3 modèles apparaissant dans la littérature sur l'effet Hall quantique :

- Le premier est le cas des matrices que nous nommerons elliptique. Ce sont les matrices V'' définies positives c'est-à-dire que les valeurs propres sont toutes réelles et strictement positives. Les lignes de niveaux sont des ellipses.
- Le second cas est celui que nous nommerons hyperbolique. Le spectre de la matrice V'' contient une valeur propre strictement positive alors que l'autre est strictement négative. Les lignes de niveaux sont des hyperboles.
- Le dernier cas, celui des matrices V'' que nous nommerons parabolique est celui où l'une des valeurs propres est non nulle et où la seconde est nulle. Les coniques associées sont des paraboles.

Nous allons traiter dans chacun des 3 cas un exemple pertinent. Nous les traiterons dans l'ordre où nous venons de les énoncer.

Proposition 3.5.1 *Pour les notations du théorème 3.4.1, nous avons :*

1. *Soit* $V'' = \mathbb{I}_2$ *alors avec* $\Omega := 1 + 4\varepsilon^2$, $t_c = \log\sqrt{\Omega}$,

$$\alpha = \frac{1+\Omega}{2\sqrt{\Omega}} \qquad \beta = \frac{\Omega - 1}{2\sqrt{\Omega}}$$
$$\widehat{\mathbb{H}}_c = \left(\frac{\Omega-1}{2}\right)\sigma \qquad \widehat{\mathbb{H}}_v = \left(\frac{\Omega+1}{2}\right)\sigma^t$$
$$\widehat{H''}_\infty = \begin{pmatrix} \frac{\Omega-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Omega+1}{2} \end{pmatrix} \qquad H''_\infty = \begin{pmatrix} \frac{\Omega}{4}\mathbb{I} & -\frac{\sigma}{2} \\ \frac{\sigma}{2} & \Omega\mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

De plus, $A'' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$ *et*

$$\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, A'' \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = (q_1 p_1 + q_2 p_2).$$

2. *Soit* $V'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *alors avec* $\Omega := 2\varepsilon^2 + \sqrt{1+4\varepsilon^4}$, $t_c = \log\sqrt{\Omega}$,

$$\alpha = \cos(\sqrt{\Omega}) \qquad \beta = \sin(\sqrt{\Omega})$$
$$\widehat{\mathbb{H}}_c = \varepsilon^2 A + (-\beta^2 + 2\varepsilon^2\alpha\beta)\sigma^t \qquad \widehat{\mathbb{H}}_v = (\alpha^2 + 2\varepsilon^2\alpha\beta)\sigma^t - \varepsilon^2 A$$

$$\begin{aligned} \widehat{H''}_\infty &= \begin{pmatrix} \varepsilon^2 V'' + (\beta^2 - 2\varepsilon^2\alpha\beta)\mathbb{I} & 0 \\ 0 & (\alpha^2 + 2\varepsilon^2\alpha\beta)\mathbb{I} + \varepsilon^2 V'' \end{pmatrix} \\ H''_\infty &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\mathbb{I} + 2\varepsilon^2 V'') & \frac{\sigma}{2}(\beta^2 - \alpha^2 + 4\varepsilon^2\alpha\beta) \\ \frac{\sigma^t}{2}(\beta^2 - \alpha^2 + 4\varepsilon^2\alpha\beta) & \mathbb{I} - 2\varepsilon^2 V'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, $A'' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$ *et*

$$\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, A'' \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = \left(p_2^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) - \left(p_1^2 - \frac{q_2^2}{4}\right).$$

3. Soit $V'' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* $t_c = \frac{\varepsilon^2}{1+a\varepsilon^2}$,

$$\alpha = 1 \qquad \beta = t$$
$$\widehat{\mathbb{H}}_c = \left(-1 + \frac{1}{1+a\varepsilon^2}\right) F \qquad \widehat{\mathbb{H}}_v = \sigma^t + a\varepsilon^2 F$$

$$\begin{aligned} \widehat{H''}_\infty &= \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{1+a\varepsilon^2}\right)\sigma F & 0 \\ 0 & \mathbb{I} + a\varepsilon^2 \sigma F \end{pmatrix} \\ \left\langle \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix}, \widehat{H''}_\infty \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} \right\rangle &= v^2 + a\varepsilon^2 v_2^2 + \frac{a\varepsilon^2}{1+a\varepsilon^2} c_1^2. \end{aligned}$$

De plus, pour $C := \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, *on a* $A'' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$ *et*

$$\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, A'' \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = 2a\left(p_2 + \frac{q_1}{2}\right)\left(p_1 + \frac{q_2}{2}\right).$$

Preuve :

1. Nous trouvons donc dans ce cas que $A = \sigma$. Cela nous permet de déduire que

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

et que le générateur infinitésimal de la transformation est

$$\left\langle \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, A'' \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = 2\left(q_1 p_1 + q_2 p_2\right)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{H}}_c &= \left(\beta^2 + \varepsilon^2(\alpha-\beta)^2\right)\sigma \\ \widehat{\mathbb{H}}_v &= \left(\alpha^2 + \varepsilon^2(\alpha-\beta)^2\right)\sigma^t \end{aligned}$$

Le t_c permettant d'annuler le bloc off-diagonal peut s'écrire $t = \log\sqrt{\Omega}$ avec

$\Omega = \sqrt{1+4\varepsilon^2}$. Nous trouvons alors

$$\alpha = \frac{1+\Omega}{2\sqrt{\Omega}} \text{ et } \beta = \frac{\Omega - 1}{2\sqrt{\Omega}}$$

d'où les expressions énoncées.

2. Nous trouvons ici que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et nous remarquons tout de suite que $\sigma A = -V''$, donc $\sigma A \sigma = A$. Nous avons alors pour le générateur infinitésimal

$$\begin{aligned} \widehat{A''} &= \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \\ A'' &= \begin{pmatrix} \frac{-A}{2} & 0 \\ 0 & -2A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\left\langle \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, A'' \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = 2\left(p_2^2 - p_1^2 + \frac{q_2^2 - q_1^2}{4}\right)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{H}}_c &= -\beta^2\sigma + \varepsilon^2(\alpha^2 A + 2\alpha\beta\sigma^t + \beta^2)A = \varepsilon^2(\alpha^2+\beta^2)A + (-\beta^2 + 2\varepsilon^2\alpha\beta)\sigma^t \\ \widehat{\mathbb{H}}_v &= -(\alpha^2\sigma + \varepsilon^2(\alpha^2 A + 2\alpha\beta\sigma + \beta^2 A)) = (\alpha^2 + 2\varepsilon^2\alpha\beta)\sigma^t - \varepsilon^2(\alpha^2+\beta^2)A \end{aligned}$$

Si nous choisissons correctement le t_c qui s'écrit encore de la forme $t = \log\sqrt{\Omega}$, nous trouvons que

$$\alpha = \cos(\sqrt{\Omega}) \text{ et } \beta = \sin(\sqrt{\Omega}).$$

Ainsi

$$\widehat{H''}_\infty = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 V'' + (\beta^2 - 2\varepsilon^2\alpha\beta)\mathbb{I} & 0 \\ 0 & (\alpha^2 + 2\varepsilon^2\alpha\beta)\mathbb{I} + \varepsilon^2 V'' \end{pmatrix}$$

et

$$H''_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\mathbb{I} + 2\varepsilon^2 V'') & \frac{\sigma}{2}(\beta^2 - \alpha^2 + 4\varepsilon^2\alpha\beta) \\ \frac{\sigma^t}{2}(\beta^2 - \alpha^2 + 4\varepsilon^2\alpha\beta) & \mathbb{I} - 2\varepsilon^2 V'' \end{pmatrix}$$

3. Le déterminant de V'' étant nul, nous devons passer à la limite quand p tend vers 0 pour obtenir α et β. Nous obtenons dans ce cas que $\alpha = 1$ et $\beta = t$.

De plus, il est toujours possible trouver un t_c qui annule le bloc off-diagonal. En effet, nous voyons que

$$f(t,\varepsilon,V'') = \alpha^2\varepsilon^2 - (1+\mathrm{tr}V''\,\varepsilon^2)\alpha\beta$$

Avec ce qui précède, nous pouvons résoudre $f(t,\varepsilon,V'')=0$ et nous trouvons

$$t_c = \frac{\varepsilon^2}{1+a\varepsilon^2}.$$

Posons maintenant $B := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{A''} &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \\ A'' &= \begin{pmatrix} \frac{C}{4} & \frac{a\mathbb{I}}{2} \\ \frac{a\mathbb{I}}{2} & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\langle \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix}, \widehat{A''} \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} \rangle = 2ac_1v_1.$$

Dans un soucis de lisibilité, posons $F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{H}}_c &= \left(-1 + \frac{1}{1+a\varepsilon^2}\right) F \\ \widehat{\mathbb{H}}_v &= \sigma^t + a\varepsilon^2 F. \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'en déduire

$$\widehat{H''}_\infty = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{1+a\varepsilon^2}\right)\sigma F & 0 \\ 0 & \mathbb{I} + a\varepsilon^2\sigma F \end{pmatrix}$$

avec $\sigma F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

3.6 Constante du mouvement

Dans les théorèmes 3.2.1 et 3.4.1, nous avons construit une transformation unitaire $e^{-it\widehat{A}}$ tel que

$$H_\infty = e^{it\widehat{A}} H e^{-it\widehat{A}}$$

commute avec H^{La}. Ceci implique que $e^{-it\widehat{A}} H^{La} e^{it\widehat{A}}$, donc l'opérateur quadratique de la matrice hamiltonienne $e^{t\mathbb{A}}\mathbb{H}e^{-t\mathbb{A}}$ est une constante du mouvement.

Nous déterminons maintenant cette constante du mouvement dans le cas où le potentiel V serait proportionnel à l'identité :

Proposition 3.6.1 *Soit $\varepsilon > 0$ un réel petit. Alors, pour le polynôme quadratique de la matrice hessienne*

$$H'' = \begin{pmatrix} \mathbb{I}/4 & \sigma^t/2 \\ \sigma/2 & \mathbb{I} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et pour $e^{t_c\mathbb{A}}$ la transformation des théorèmes 3.4.1 et 3.5.1, alors $e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}^{La}}e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}$ est une constante du mouvement et

$$\mathbb{H}_{inv} := e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}^{La}}e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}} = \begin{pmatrix} \beta^2\sigma & \alpha\beta\sigma \\ -\alpha\beta\sigma & \alpha^2\sigma^t \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Preuve : Pour que la quantité $e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}^{La}}e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}$ soit une constante du mouvement, il faut qu'elle commute avec $\widehat{\mathbb{H}^{La}}$. Alors :

$$\left[\begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{H}}_c & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbb{H}}_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^t \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2(\alpha^2 - \beta^2)[A, \sigma] \end{pmatrix}$$

Or, rappelons que $A = \sigma V'' = a\,\sigma$ donc

$$[A, \sigma] = 0$$

Ainsi, $e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}}e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}$ commute bien avec $\widehat{\mathbb{H}^{La}}$. Or

$$0 = [e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}}e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}, \widehat{\mathbb{H}^{La}}] = e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}[\widehat{\mathbb{H}}, e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}^{La}}e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}]e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}$$

Cela nous permet d'en déduire que $e^{t_c\widehat{\mathbb{A}}}\widehat{\mathbb{H}^{La}}e^{-t_c\widehat{\mathbb{A}}}$ est une constante de mouvement.

Par 3.5.1 point (1) :

$$t_c = \log \sqrt{\Omega}$$

avec

$$\Omega = 1 + 4\varepsilon^2$$

et

$$\alpha = \frac{1+\Omega}{2\sqrt{\Omega}} \text{ et } \beta = \frac{\Omega - 1}{2\sqrt{\Omega}}$$

donc quand $\varepsilon \to 0$

$$\alpha \to 1 \quad \beta \to 0$$

et montre bien la convergence de l'invariant vers $\widehat{\mathbb{H}^{La}}$ quand ε tend vers 0.

□

Corollaire 3.6.2 *Pour ε suffisamment petit et $\Omega := 1 + 4\varepsilon^2$, l'opérateur de symbole $\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{\Omega}} - \sqrt{\Omega}\frac{\hat{q}}{2}\right)^2$ est une constante du mouvement de $H^{La} + \varepsilon^2\frac{\hat{q}^2}{2}$.*

Preuve : Pour les autres matrices, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{H}}_{inv} &= \begin{pmatrix} \beta^2\sigma & \alpha\beta\sigma \\ -\alpha\beta\sigma & \alpha^2\sigma^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\Omega-1)^2}{4\Omega}\sigma & \left(\frac{\Omega^2-1}{4\Omega}\right)\sigma \\ \left(\frac{\Omega^2-1}{4\Omega}\right)\sigma^t & \frac{(\Omega-1)^2}{4\Omega}\sigma^t \end{pmatrix} \\
\widehat{H''}_{inv} &= \begin{pmatrix} \frac{(\Omega-1)^2}{4\Omega} & \left(\frac{\Omega^2-1}{4\Omega}\right) \\ \left(\frac{\Omega^2-1}{4\Omega}\right) & \frac{(\Omega-1)^2}{4\Omega} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En particulier, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix}, \widehat{H''}_{inv} \begin{pmatrix} c \\ v^\perp \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{1}{4\Omega}\left(c^2(\Omega-1)^2 + 2cv^\perp(\Omega^2-1) + v^2(\Omega+1)^2\right) \\
&= \frac{1}{4\Omega}\left((\Omega-1)c + v^\perp(\Omega+1)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4\Omega}\left(c^\perp(1-\Omega) + v(\Omega+1)\right)^2 \\
&= \frac{1}{\Omega}\left(\frac{c^\perp + v}{2} - \frac{\Omega}{2}(c^\perp - v)\right)^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2H_{inv}(q,p) &= \frac{1}{\Omega}(p-\Omega\frac{q^\perp}{2})^2 \\ &= \left(\frac{p}{\sqrt{\Omega}}-\sqrt{\Omega}\frac{q^\perp}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

car $q = c + v^\perp$ et $p = \frac{c^\perp + v}{2}$ par le système (3.3).

□

3.7 Une remarque sur le cas linéaire

Nous allons maintenant produire la forme normale pour le cas linéaire. Ceci se fait de manière complèment explicite.

Soit

$$H = H^{La} + V$$

où

$$V(q) = \langle E, q\rangle$$

pour $E \in \mathbb{R}^2$. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 3.7.1 *Soit $E \in \mathbb{R}^2$. On considère le potentiel $V(q) = \langle E, q\rangle$. Il existe un opérateur $\mathcal{U}_0$ tel que*

$$\mathcal{U}_0(H_{La} + V)\mathcal{U}_0^{-1} = H_{La} - \langle E, c\rangle - \frac{1}{2}E^2$$

Preuve : Par l'équation (3.2), remarquons que le problème $H = H^{La} + V$ se réécrit

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \langle E, c + v^\perp\rangle$$

Rappelons maintenant les relations de commutations entre les opérateurs c et v :

$$[v_1, v_2] = i \ , \quad [c_2, c_1] = i \ , \quad [c_i, v_j] = 0$$

Ceci nous permet de voir que la seule partie de H ne commutant pas avec H^{La} est $\langle E, v^\perp\rangle$. Or, par les relations de Weyl, nous trouvons

$$e^{i\langle E,v\rangle}\, v\, e^{-i\langle E,v\rangle} = v - E^\perp$$

Ainsi, en posant $\mathcal{U}_0 = e^{i\langle E,v\rangle}$, nous obtenons

$$\mathcal{U}_0(H_{La} + V)\mathcal{U}_0^{-1} = H_{La} - \langle E, c\rangle - \frac{1}{2}E^2$$

Par les relations de commutations énoncées plus haut, nous voyons aisément que le membre de droite commute avec H^{La}. C'est donc la forme normale de H.

□

3.8 Conclusion

Nous avons pu montrer dans un premier temps que si nous considérions les systèmes quantiques décrits par la somme de l'hamiltonien de Landau H^{La} et d'un potentiel quadratique V de matrice hessienne suffisamment petite, nous pouvons trouver une transformation qui le transforme en une forme normale. De plus, nous avons également pu déterminer cette transformation qui est unitaire. C'est la quantification d'une transformation symplectique dont le générateur infinitésimal est explicite. De plus, dans certains cas, nous avons pu construire une constante du mouvement. Nous avons également pu présenter différents exemples caractéristiques et pertinents de cette théorie.

Nous avons ensuite pu montrer qu'un résultat identique existait pour le cas linéaire. Nous savons maintenant comment déterminer la forme normale du problème donné par la somme de l'hamiltonien de Landau et d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, ainsi que la transformation associée à cette normalisation.

Chapitre 4

Diagonalisation partielle d'opérateurs du type $H^{La} + V$

Nous nous intéresserons dans cette partie à construire la forme normale de $H^{La}+V$ avec V appartenant à une classe de potentiels la plus générale possible.

Nous supposons que V est un opérateur de multiplication borné et petit. Soit $\{P_n\}_n$ la famille de projecteurs propres de H^{La}. Comme nous l'avons vu auparavant, l'opérateur V peut-être vu comme une matrice d'éléments P_nVP_m. La partie diagonale désignera les éléments de la forme P_nVP_n alors que la partie hors-diagonale qualifiera les termes qui sont en dehors de la diagonale et qui s'écrivent donc comme P_nVP_m avec $m \neq n$. La dimension des projecteurs propres étant de dimension infinie, les termes de la matrice seront désignés par le mot bloc.

La preuve nécessitera de démontrer la convergence d'un algorithme itératif de diagonalisation partielle (théorème 4.2.2). Ce procédé sera basé sur les méthodes de type KAM introduite par J. Bellisard dans les années 80 [Be] et qui ont été généralisées par la suite (voir par exemple [Co] et [DS]).Notre résultat est une extension du résultat énoncé dans [DLSV].

La seule hypothèse présente dans le théorème de convergence de l'algorithme sera une hypothèse de décroissance des éléments hors-diagonaux de la matrice de V.

Le résultat principal de ce chapitre (théorème 4.1.1) concernera l'hamiltonien de Landau car c'est le modèle qui nous intéresse le plus. Sa preuve sera juste une application directe de l'algorithme. Ce résultat donne l'existence d'une forme normale pour

le problème $H^{La} + V$.

Nous énoncerons dans un premier temps le résultat principal puis nous poursuivrons avec une série de résultats techniques nécessaires à la preuve de la convergence de l'algorithme. Nous enchaînerons alors par la preuve de la convergence de l'algorithme et par celle du théorème principal. Enfin, nous discuterons le cas où le nombre de projecteurs spectraux est fini puis nous conclurons l'implication de ce résultat sur la dynamique du système.

4.1 Le résultat principal

Considérons sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$

$$H = H^{La} + V$$

avec

$$H^{La} = \frac{1}{2}\left(\hat{p} - \frac{\hat{q}^{\perp}}{2}\right)^2.$$

Un coeur d'opérateur de H^{La} est l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. V est un opérateur de multiplication par une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et on rappelle que $(q_1, q_2)^{\perp} := (-q_2, q_1)$.

Pour énoncer le résultat principal, introduisons la fonction gaussienne

$$g(q) := e^{-\frac{q^2}{2}} \qquad (q \in \mathbb{R}^2)$$

et considérons la classe des fonctions définies par la convolution de g avec une mesure finie à valeur réelle μ, $g * \mu(q) := \int_{\mathbb{R}^2} g(q - q')d\mu(q')$:

$$\mathcal{G} := \{V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; V = g * \mu, \int_{\mathbb{R}^2} d|\mu| < \infty\}.$$

Nous pouvons déjà noté que si $V \in \mathcal{G}$ alors V est borné. Cependant, on se reportera au prochain chapitre pour une discussion plus poussée sur cette classe.

Notre résultat principal est l'existence d'une constante du mouvement non triviale associé à cet opérateur dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 4.1.1 (Résultat principal) *Pour $V \in \mathcal{G}$ suffisamment petit en norme*

opérateur, il existe un opérateur unitaire U tel que

$$\left[U^{-1}\left(H_{La}+V\right)U, H_{La}\right]=0.$$

En particulier, $UH_{La}U^{-1}$ est un invariant du flot e^{-iHt} pour tout $t\in\mathbb{R}$.

La preuve de ce théorème sera donnée à la section 4.3 car elle nécéssite l'algorithme que nous allons démontrer dans la partie qui suit. De plus, la signification précise de suffisamment petit sera également explicitée au cours de la preuve de l'algorithme.

4.2 Un algorithme de diagonalisation partielle

Le but de cette section sera de démontrer la convergence d'un algorithme qui permet de diagonaliser d'une manière partielle l'opérateur $H^{La}+V$.

4.2.1 Enoncé de l'algorithme

Rappelons que l'opérateur de Landau H^{La} peut s'écrire comme

$$H^{La}=\sum_{n\geq 0}E_nP_n$$

où $E_n=n+1/2$ et où la famille $\{P_n\}_n$ est un ensemble complet de projecteurs orthogonaux 2 à 2 disjoints de dimension infinie. Nous remarquons donc que H^{La} est un opérateur dont les lacunes spectrales sont constantes. On a alors

$$d(E_n,E_m)=|m-n|.$$

Nous considérons $H^{La}+V$ dont le spectre est consistué de bandes. Dans le cas où leurs nombres est infinis, nous supposons qu'il existe une borne inférieure sur la longueur des lacunes. Cela permet de définir la classe d'opérateurs suivante :

Définition 4.2.1 *Un opérateur autoadjoint H est dans la classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ pour un $\mathfrak{g}>0$ si pour une famille complète de projections orthogonales 2 à 2 disjointes $\{P_n\}_{n\in I\subseteq\mathbb{N}}$ qui commute avec H et I un sous-ensemble fini ou infini de $\mathbb{N}$, on a pour*

$$\sigma_n:=spect\left(P_nHP_n\Big|_{RanP_n}\right)$$

que

$$\min \sigma_{n+1} - \max \sigma_n \geq \mathfrak{g}.$$

Le spectre de H est typiquement de la forme suivante

Pour la famille de projecteurs P_n définie dans 4.2.1 et pour un opérateur borné V, nous introduisons les notations

$$\mathbf{D}V := \sum_{n \in I} P_n V P_n, \qquad \mathbf{O}V := V - \mathbf{D}V.$$

$\mathbf{D}V$ est appellé la partie diagonale de l'opérateur alors que $\mathbf{O}V$ est appellé la partie hors-diagonale.

Nous pouvons maintenant énoncer l'algorithme de diagonalisation partielle.

Théorème 4.2.2 (Diagonalisation partielle) *Soient $H \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ et V un opérateur autoadjoint borné. Supposons que V satisfait aux conditions suivantes*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}V\| &= \sup_{n \geq 0} \|P_n V P_n\| \leq \frac{\mathfrak{g}}{8} \\ \|P_n V P_m\| &\leq \frac{c_0}{|m-n|} \end{aligned}$$

pour $n \neq m$ et pour une constante $c_0 > 0$ suffisamment petite. Alors, il existe un opérateur borné G_∞ et un unitaire $\mathcal{U}_\infty$ tels que

$$H + V = \mathcal{U}_\infty^* (H + G_\infty) \mathcal{U}_\infty$$

avec $[H, G_\infty] = 0$.
Le domaine de l'opérateur H est invariant par rapport à $\mathcal{U}_\infty$:

$$\mathcal{D}(H + G_\infty) = \mathcal{D}(H).$$

Comme pour le théorème 4.1.1, la signification de l'expression suffisamment petite sera donnée au cours de la preuve.

4.2.2 Algorithme formel

Le but de cette section est de construire un unitaire $\mathcal{U}_\infty$ qui satisfait à la relation suivante

$$H + V = \mathcal{U}_\infty (H + G_\infty) \mathcal{U}_\infty^*$$

avec $[H, G_\infty] = 0$. Pour cela, nous allons procéder par récurrence. Nous allons construire de manière itérative un quadruplet. Définissons tout d'abord

$$\mathcal{U}_0 := \mathbb{I}, G_0 := \mathbf{D}V, V_0 := \mathbf{O}V, H_0 := H + V = H + G_0 + V_0$$

$\mathcal{U}_0$ est bien unitaire, G_0 est un opérateur diagonal, V_0 est hors-diagonal et symétrique. Nous définissons maintenant inductivement

$$H_{s+1} := e^{W_s} H_s e^{-W_s}, G_s = \mathbf{D}H_s - H, V_s = \mathbf{O}H_s, \mathcal{U}_s = e^{W_s} \mathcal{U}_{s-1}$$

où W_s est la solution de l'équation au commutateur suivante :

$$ad_{W_s}(\mathbf{D}H_s) := [\mathbf{D}H_s, W_s] = V_s \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}W_s = 0 \tag{4.1}$$

(Pour une discussion concernant la résolution de cette équation, on se référera à la section 4.2.4 .)

Notons maintenant que

$$\begin{aligned} H_{s+1} &= e^{W_s} H_s e^{-W_s} = \sum_{k \geq 0} \frac{ad_{W_s}^k(H_s)}{k!} \\ &= \mathbf{D}H_s + \sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!} ad_{W_s}^k(V_s) \end{aligned} \tag{4.2}$$

d'après ce qui précède .

Or, $H + G_s$ et V_s sont symétriques, W_s est antisymétrique et par conséquent e^{W_s} et donc $\mathcal{U}_s$ sont unitaires. Ainsi

$$H + G_s + V_s = \mathcal{U}_s (H + V) \mathcal{U}_s^*$$

Pour terminer cette preuve, nous devrons démontrer que

$$\begin{aligned} G_s &\to G_\infty \\ \mathcal{U}_s &\to \mathcal{U}_\infty \\ V_s &\to 0 \end{aligned}$$

quand $s \to \infty$ dans un sens que l'on précisera par la suite.

4.2.3 Les outils

Dans cette partie, nous allons introduire les différents outils techniques qui seront nécessaires à la preuve de l'algorithme.

Normes dans l'algèbre des opérateurs

La preuve de l'algorithme va parfois nécessiter de changer de normes. Nous rappellerons ici les différentes normes dont nous allons avoir besoin pour les preuves à venir :

Définition 4.2.3 *Soit $\{P_n\}$ la famille des projecteurs propres de l'opérateur H comme défini auparavant. Soit A un opérateur. On définit les normes :*

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty,1} &:= \sup_{n,m} \|P_n A P_m\| \\ \|A\|_{\infty,\infty} &:= \sup_{m} \sum_{n} \|P_n A P_m\| \\ \|A\|_{1,1} &:= \sup_{n} \sum_{m} \|P_n A P_m\| \\ \|A\|_{SH} &:= \max(\|A\|_{\infty,\infty}, \|A\|_{1,1}) \end{aligned}$$

où $\|.\|$ désigne la norme opérateur.

Nous pouvons maintenant montrer un lemme :

Lemme 4.2.4 *Soient A et B deux opérateurs bornés. On a l'estimation suivante*

$$\|[A, B]\|_{\infty,1} \leq 2\|A\|_{SH}\|B\|_{\infty,1} \tag{4.3}$$

Preuve : Choisissons A et B comme dans les hypothèses du lemme. Alors

$$\begin{aligned}
\|[A,B]\|_{\infty,1} &= \sup_{n,m} \|P_n(AB-BA)P_m\| \\
&= \sup_{n,m} \|P_nA(\sum_{l\geq 0} P_l)BP_m - P_nB(\sum_{l\geq 0} P_l)AP_m\| \\
&\leq \sup_{n,m} \sum_{l\geq 0} (\|P_nAP_l\|\|P_lBP_m\| + \|P_nBP_l\|\|P_lAP_m\|) \\
&\leq \sup_{n,m} \left(\sup_l \|P_lBP_m\| \sum_{l\geq 0} \|P_nAP_l\| + \sup_l \|P_nBP_l\| \sum_{l\geq 0} \|P_lAP_m\| \right) \\
&\leq \sup_{m,l} \|P_lBP_m\| \sup_n \sum_{l\geq 0} \|P_nAP_l\| + \sup_{n,l} \|P_nBP_l\| \sup_m \sum_{l\geq 0} \|P_lAP_m\| \\
&\leq 2\|A\|_{SH}\|B\|_{\infty,1}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du lemme.

□

Fonctions auxiliaires et méthode de Newton

Définissons les fonctions auxiliaires

$$\begin{aligned}
\phi(x) &:= e^x + \frac{1}{x}(1-e^x) = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} x^k \\
\psi(x) &:= x\phi(x) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Remarquons alors que la relation (4.2) peut se réécrire à l'aide de cette fonction comme

$$H_{s+1} = \mathbf{D}H_s + \phi(ad_{W_s}(V_s))$$

En prenant alors la partie diagonale et hors-diagonale de cette dernière expression, nous obtenons les caractérisations

$$G_{s+1} = G_s + \mathbf{D}\phi(ad_{W_s}(V_s)) \qquad (4.5)$$

$$V_{s+1} = \mathbf{O}\phi(ad_{W_s}(V_s)) \qquad (4.6)$$

Ces deux relations joueront un rôle prépondérant dans la preuve de l'algorithme. En effet, nous avons dorénavant une expression exacte de la partie hors-diagonale de H_{s+1} en fonction de celle de H_s. Par exemple, la seconde relation nous permettra de

démontrer que les éléments de matrice de V_{s+1} ont la même décroissance que ceux de V_s.

Nous considérerons dorénavant la suite des itérés définis par ψ.

On voit que ψ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et ses dérivées satisfont

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= xe^x, \psi'(0) = 0 \\ \psi''(x) &= (1+x)e^x, \psi''(0) = 1 \end{aligned}$$

Soit $r > 0$ et soit $x \in B(0,r) \cap \mathbb{R}_+$. Posons

$$\gamma := \max_x |\psi''(x)| = |\psi''(r)|$$

En particulier, choisissons r pour que

$$\lambda := \frac{r\gamma}{2} < 1$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.2.5 *Soient $\|x_0\| < r$ et la suite $\{x_s\}_{s\geq 0}$ définie pour $s \geq 0$ par*

$$x_{s+1} := \psi(x_s)$$

Alors, pour tout $s \geq 0$,

1. $|x_s| \leq r$
2. $|x_{s+1}| \leq \lambda^{2^s}$
3. $\sum_{s\geq 1} x_s \leq \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$

Preuve : Remarquons tout d'abord que le développement de Lagrange de la fonction ψ à l'ordre 1 autour de 0 permet de trouver que

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\psi''(\zeta)x^2$$

pour $\zeta \in [0, x]$.Nous obtenons la majoration suivante pour $x \in [0, r]$

$$\psi(x) \leq \frac{\gamma}{2}x^2$$

En remplaçant x par x_s pour un $s \geq 0$, nous trouvons donc

$$x_{s+1} \leq \frac{\gamma}{2} x_s^2 \leq \lambda x_s < x_s < r$$

Ce qui prouve le premier point du lemme.
Pour le second point du lemme, nous allons procéder par récurrence. La relation est trivialement vraie pour $s = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour un $s \geq 0$. Nous avons alors :

$$x_{s+1} \leq \frac{\gamma}{2} x_s^2$$

D'où

$$\begin{aligned} r x_{s+1} &\leq \lambda x_s^2 \\ &\leq \lambda (\lambda^{2^s})^2 \\ &\leq \lambda \left(\lambda^{2.2^s}\right) \end{aligned}$$

En divisant par r, on trouve le résultat. Ceci permet de conclure la récurrence.
Le dernier point se voit en calculant

$$\sum_{s \geq 1} x_s \leq \sum_{s \geq 1} \lambda^{2^s} \leq \sum_{s \geq 1} (\lambda^2)^s \leq \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}$$

□

Ce lemme donne une estimation de la vitesse de convergence de la suite des $\{x_s\}_s$. Cela nous permettra de démontrer que la suite des potentiels hors-diagonaux $\{V_s\}_s$ décroit de manière super-exponentielle.

Majoration de convolutions discrètes

Cette partie va uniquement présenter des estimations sur le comportement de convolution de fonctions inverses par des mesures à support discret. Nous commençons par énoncer un lemme :

Lemme 4.2.6 *Soient $n, m \geq 0$ tel que $n \neq m$ et $K := 1 + 4\gamma + 2\zeta(2)$ où γ est la constante d'Euler-Mascheroni. Sous ces hypothèses, nous avons que*

$$\sum_{j \geq 0, j \neq n, j \neq m} \frac{1}{|j-n|^2 |j-m|} \leq \frac{K}{|m-n|} \tag{4.7}$$

Preuve : La preuve de ce lemme sera faite explicitement. Pour plus de clarté, nous noterons simplement par j l'indice de la somme au lieu de $j \geq 0, j \neq n, j \neq m$.

$$\begin{aligned}
\sum_j \frac{1}{|j-n|^2|j-m|} &= \frac{1}{|m-n|}\left(\sum_j \frac{|j-n+m-j|}{|j-n|^2|j-m|}\right) \\
&\leq \frac{1}{|m-n|}\left(\sum_j \frac{1}{|j-n|^2} + \sum_j \frac{1}{|j-n||j-m|}\right)
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que le premier terme est borné par $2\zeta(2)$. Il reste donc à prouver que le second terme du membre de droite est borné. Rappelons dans un premier temps le développement en série de la fonction digamma ψ_0 (voir [AS1] par exemple) : si $x \in \mathbb{N}$,

$$\psi_0(x+1) + \gamma = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{j(j+x)} \tag{4.8}$$

Maintenant, puisque le second terme du membre de droite est symétrique en m et n, nous pouvons donc supposer, sans restreindre la généralité, que $m > n$ et nous définissons $a := m - n > 0$. L'expression qui nous intéresse devient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_j \frac{1}{|j-n||j-m|} &= \sum_{j \geq -n} \frac{1}{|j||j-a|} \\
&= \sum_{j=-n}^{a-1} \frac{1}{|j||j-a|} + \sum_{j \geq a+1} \frac{1}{|j||j-a|} \\
&= \sum_{j=-n}^{a-1} \frac{1}{|j||j-a|} + \frac{\gamma + \psi_0(1+a)}{a}
\end{aligned}$$

où nous nous sommes servis de (4.8). Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-n}^{a-1} \frac{1}{|j||j-a|} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|j||j+a|} + \sum_{j=1}^{a-1} \frac{1}{|j||j-a|} \\
&\leq \frac{\gamma + \psi_0(1+a)}{a} + |a-1| \sup_{j \in [1,a-1] \cap \mathbb{N}} \frac{1}{|j||j-a|}
\end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que le terme de gauche est borné par 1 et que le terme de droite est dominé par 2γ. En rassemblant les différentes résultats obtenus dans cette preuve, nous retrouvons le résultat énoncé.

□

4.2.4 Sur l'équation au commutateur

Rappelons l'équation au commutateur 4.1 qui est associé à l'algorithme

$$ad_{W_s}(H_s) := [\mathbf{D}H_s, W_s] = V_s \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}W_s = 0.$$

Cette équation est la clef de voûte de l'algorithme. C'est elle qui permet de passer d'une étape à l'autre dans l'itération et qui conditionne l'existence de l'unitaire affirmant que H s'écrit comme la somme de H^{La} et d'un potentiel diagonal. Commençons par rappeler un résultat théorique sur les équations aux commutateurs [BR] :

Proposition 4.2.7 *Supposons que A, B et C soient des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. Alors, il existe X solution de l'équation $AX - XB = C$ qui satisfait à*

$$\|X\| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\|C\|}{dist(spectA, spectB)}$$

Comment peut-on dans notre cas se servir de ce résultat?

Il faut tout d'abord identifier les différents opérateurs : on aura $A = B = \mathbf{D}H_s$, $X = W_s$ et $C = V_s$. Nous pouvons alors projeter l'équation au commutateur (4.1) en multipliant à gauche (resp. à droite) par P_n (resp. par P_m). L'équation (4.1) devient

$$P_n W_s P_m = \frac{P_n V_s P_m}{dist(\sigma_n, \sigma_m)}$$

De plus, nous avons la majoration

$$\begin{aligned} \|P_n W_s P_m\| &\leq \frac{\pi}{2} \frac{\|P_n V_s P_m\|}{\mathfrak{g}|m-n|} \\ &\leq \frac{\pi}{2} \frac{c_s}{\mathfrak{g}|m-n|^2} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Cela nous permet d'écrire

$$\|P_n W_s P_m\|_{SH} \leq \sup_n \sum_{m \geq 0} \frac{\pi}{2\mathfrak{g}} \frac{c_s}{|m-n|^2} \leq \pi c_s \zeta(2) \tag{4.10}$$

Cette dernière expression montre que l'opérateur W_s défini à partir de la matrice dont les éléments sont $P_n W_s P_m$ est un opérateur borné de $\mathcal{H}$ sur lui-même.

4.2.5 Convergence de l'algorithme

Nous avons maintenant toutes les cartes en mains pour démontrer la convergence de l'algorithme. Cette preuve sera divisée en deux parties. Nous montrerons dans un premier temps que la décroissance des éléments hors-diagonaux de matrice du potentiel persiste au cours de l'itération. Ensuite, nous conclurons la preuve en montrant que tous les éléments convergent dans un certain sens.

Rappelons les hypothèses du théorème, nous avons choisi un potentiel V qui, sur les termes hors-diagonaux, satisfait à

$$\|P_n V P_m\| \leq \frac{c_0}{|m-n|}$$

Construisons maintenant une suite $(c_s)_{s\geq 1}$ positive, décroissante et tendant vers 0 quand s tend vers l'infini pour un c_0 positif donné, dans l'objectif de montrer que $\forall s \geq 1$,

$$\|P_n V_s P_m\| \leq \frac{c_s}{|m-n|} \tag{4.11}$$

Pour montrer ceci, nous allons procéder par récurrence. Par les hypothèses du théorème, nous avons l'existence d'une constant c_0 suffisamment petite pour que l'équation (4.11) reste vraie pour $s = 0$.

Supposons que pour un certain s, l'équation (4.11) soit vraie. Alors, d'après l'équation (4.6), nous trouvons que les éléments de matrice de V_{s+1} satisfont à

$$\|P_n V_{s+1} P_m\| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} \|P_n ad^k_{W_s}(V_s) P_m\| \tag{4.12}$$

Il nous faut produire une estimation de la norme des éléments de matrice qui apparaissent dans le terme de droite. Elle est donnée par le lemme suivant :

Lemme 4.2.8 *Supposons que l'équation (4.11) soit vraie. Alors, pour tout $s, k \geq 1$ et pour tout $n, m \geq 0$ tels que $m \neq n$, on a*

$$\|P_n ad^k_{W_s}(V_s) P_m\| \leq \frac{c_s (\pi K c_s)^k}{\mathfrak{g}^k |m-n|}$$

où K est la constante qui apparait dans le lemme 4.2.6.

Preuve du lemme : Fixons $s \geq 1$ et procèdons par récurrence sur k. Pour $k = 1$, nous avons

$$P_n[W_s, V_s]P_m = \sum_{l \geq 0} P_n W_s P_l V_s P_m - P_n V_s P_l W_s P_m$$

alors

$$\begin{aligned}
\|P_n[W_s, V_s]P_m\| &\leq \sum_{l \geq 0} \|P_n W_s P_l\| \|P_l V_s P_m\| + \|P_n V_s P_l\| \|P_l W_s P_m\| \\
&\leq \frac{\pi\, c_s^2}{\mathfrak{g}} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{|l-n|^2 |l-m|} \\
&\leq \frac{c_s(\pi K c_s)}{\mathfrak{g}|m-n|}
\end{aligned}$$

où nous nous sommes servis de (4.9), (4.11) et du lemme 4.2.6.

Supposons maintenant que pour un $k \geq 1$, on ait

$$\|P_n ad^k_{W_s}(V_s) P_m\| \leq \frac{c_s(\pi K c_s)^k}{\mathfrak{g}^k |m-n|} \tag{4.13}$$

Alors à l'étape $k+1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|P_n ad^{k+1}_{W_s}(V_s) P_m\| &= \|P_n[W_s, ad^k_{W_s}(V_s)]P_m\| \\
&\leq \sum_{l \geq 0} \|P_n W_s P_l\| \|P_l ad^k_{W_s}(V_s) P_m\| \\
&\qquad + \|P_m ad^k_{W_s}(V_s) P_l\| \|P_l W_s P_m\| \\
&\leq \frac{\pi\, c_s^2 (\pi K c_s)^k}{2\mathfrak{g}^{k+1}} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{1}{|l-n|^2 |l-m|} + \frac{1}{|l-m|^2 |l-n|} \right) \\
&\leq \frac{c_s(\pi K c_s)^{k+1}}{\mathfrak{g}^{k+1} |m-n|}
\end{aligned}$$

où, comme auparavant, nous nous sommes servis des équations (4.9), (4.11) et du lemme 4.2.6 mais également de (4.13). Cela nous permet de conclure la récurrence et donc la preuve du lemme.

□

En se servant du résultat du lemme 4.2.8 dans (4.12), nous trouvons que

$$\|P_n V_{s+1} P_m\| \leq \frac{\mathfrak{g}\psi(\frac{\pi K c_s}{\mathfrak{g}})}{\pi K|m-n|}$$

Rappelons que 4.6 et que la fonction ψ a été définie en (4.4). Alors, d'après les résultats obtenus à la section 4.2.3, nous pouvons construire itérativement la suite des c_s par :

$$c_{s+1} := \frac{\mathfrak{g}\psi(\frac{\pi K c_s}{\mathfrak{g}})}{\pi K}$$

qui satisfait à $\forall s \geq 0, c_{s+1} < c_s$ et $c_s \to_{s\to\infty} 0$ quand $s \to \infty$, pour un c_0 suffisamment petit.

Il apparait ici clairement l'explication de la condition de petitesse sur c_0 : il faut que c_0 soit choisi pour que $\frac{\pi K c_0}{\mathfrak{g}} < r$.

Nous venons de conclure la première partie de la preuve. Continuons maintenant en démontrant la convergence de l'algorithme. Remarquons grâce à l'étude que l'on vient de faire que pour tout $s \geq 1$,

$$\|V_s\|_{\infty,1} \leq c_s$$

Puisque $c_s \to_{s\to\infty} 0$, nous en concluons que $\|V_s\|_{\infty,1} \to_{s\to\infty} 0$. Puisque $\mathbf{O}V$ est bornée par hypothèse, nous voyons facilement par les mêmes calculs que précédement que V_s est également bornée et décroit vers 0 quand s tend vers l'infini.

Interessons nous maintenant à la partie diagonale du potentiel. Nous déduisons de l'équation (4.5) que

$$\begin{aligned}
\|G_{s+1} - G_s\|_{\infty,1} &\leq \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} \|ad^k_{W_s}(V_s)\|_{\infty,1} \\
&\leq \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} (2^k \|W_s\|_{SH} \|V_s\|_{\infty,1})
\end{aligned}$$

où nous nous sommes servi de l'équation (4.3). D'après le résultat que l'on vient de

voir sur la partie hors-diagonale et par l'équation (4.10), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\|G_{s+1} - G_s\|_{\infty,1} &\leq \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!}(2^k \pi^k c_s^k \zeta(2)^k c_s) \\
&\leq \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!}(\pi^k K^k c_s^k c_s) \\
&\leq c_{s+1}
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc que le membre de gauche tend vers 0 quand s tend vers l'infini. De plus, puisque par construction pour tout $s \geq 0$ G_s est diagonal, cela nous donne que

$$\|G_{s+1} - G_s\| \longrightarrow_{s\to\infty} 0$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\|G_s\| &\leq \sum_{j=1}^{s} \|G_j - G_{j-1}\| + \|G_0\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{s} c_j + 1/4 \leq cst
\end{aligned}$$

Grâce aux résultats de la section 4.2.3, nous savons que la famille $\{c_s\}_s$ décroit de manière très rapide, et suffisamment pour être sommable. De ce fait, pour tout $s \geq 1$, $\|G_s\| < 1/4$ donc les lacunes dans le spectre de H_s restent ouvertes.

Par le même argument, nous trouvons également que les $(W_s)_s$ sont sommables et que U_s et U_s^{-1} converge quand s tend vers l'infini.

Le résultat sur l'invariance du domaine par conjugaison de H_s par W_s se voit facilement car si nous écrivons

$$HW_s = W_s H + V_s - [G_s, W_s]$$

et que nous appliquons une fonction $\psi \in \mathcal{D}(H)$, nous avons que tous les termes du membres de droites sont bornés. Nous pouvons en déduire donc que le membre de gauche est borné et donc que $HW_s\psi$ est borné. Cela signifie que $W_s\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ et implique le résultat.

Il nous faut maintenant démontrer que e^{W_s} laisse $\mathcal{D}(H)$ invariant. Soit $u \in \mathcal{D}(H)$.

Définissons

$$X_k := \sum_{l=1}^{k} \frac{W_s^l}{l!}$$

Nous avons que $X_k \longrightarrow_{k\to\infty} e^{W_s}$ en norme. Posons également

$$v_k := X_k u \longrightarrow_{k\to\infty} e^{W_s} u.$$

Supposons que $w_k := Hv_k$ converge dans $\mathcal{H}$, alors, puisque H est un opérateur fermé, cela signifie que $v_k \longrightarrow v_\infty$ quand $k \to \infty$ dans $\mathcal{D}(H)$ ce qui implique également que $\exp(W_s)u \in \mathcal{D}(H)$.
Il reste alors à prouver que w_k est une suite convergente. Pour montrer cela, écrivons

$$w_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{HW_s^l u}{l!} \quad = \quad \sum_{l=1}^{k} \frac{W_s^l Hu}{l!} + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{m=1}^{l-1} W_s^m [H, W_s] W_s^{l-m-1}$$

Le premier terme du membre de droite converge vers $\exp(W_s)Hu$ quand k croit vers l'infini et

$$\left\| \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{m=1}^{l-1} W_s^m [H, W_s] W_s^{l-m-1} \right\| \quad \leq \quad \|[H, W_s]\| \sum_{l=1}^{k} \frac{\|W_s\|^{l-1}}{(l-1)!} \|u\|$$

qui converge vers un certain vecteur de $\mathcal{H}$.
Cela prouve que $\exp(\pm W_s)$ laisse $\mathcal{D}(H)$ invariant et d'en déduire que U_s laisse également $\mathcal{D}(H)$ invariant pour tout s. De plus, nous avons dans $\mathcal{D}(H)$ l'égalité suivante

$$U_s H - H U_s = -U_s V + V_{s+1} U_s - G_{s+1} U_s$$

En se servant des divers résultats obtenus,nous voyons que le membre de droite est borné et converge vers $-U_\infty V - G_\infty U_\infty$ quand s tend vers l'infini. Cela permet de voir une fois de plus que U_∞ laisse $\mathcal{D}(H)$ invariant et

$$U_\infty H - H U_\infty = -U_\infty V + G_\infty U_\infty$$

dans $\mathcal{D}(H)$ ce qui est équivalent à dire que

$$H + V = U_\infty^{-1}(H + G_\infty)U_\infty$$

Ceci nous permet de conclure la preuve de l'algorithme.

□

4.3 Preuve du résultat principal

Preuve du théorème 4.1.1 : Comme nous l'avons déjà dit, la preuve est une application directe du théorème 4.2.2. Nous choisissons $H = H^{La}$ et $\{P_n\}_n$ les projecteurs propres de H. Alors, $H^{La} \in \mathcal{C}_1$. D'après le théorème 5.2.1, V appartient à $\mathcal{G}$ et a donc des éléments de matrice hors-diagonaux qui satisfont les hypothèses de 4.2.2. Donc par le théorème 4.2.2, il existe un unitaire $\mathcal{U}$ tel que pour tout $n \geq 0$,

$$[\mathcal{U}(H^{La} + V)\mathcal{U}^{-1}, P_n] = 0$$

et donc

$$[\mathcal{U}(H^{La} + V)\mathcal{U}^{-1}, H^{La}] = 0$$

□

Ce résultat est à mettre en parallèle avec certaines méthodes déjà connues, comme par exemple celle de Nenciu [Ne2] ou de Teufel [Te]. Le résultat que l'on vient de présenter est un processus itératif convergent. Il ne produit aucun terme d'erreurs. Cependant, c'est une méthode purement quantique donc l'opérateur obtenu peut ne pas être un opérateur pseudo-différentiel comme pour la méthode de Teufel [Te] par exemple. Cette étude reste à entreprendre.

4.4 Application à la dynamique des systèmes

L'intéret du théorème 4.1.1 est de donner une description, à un unitaire près, de la dynamique par une dynamique effective pour tout temps. Ceci donne en particulier une justification précise, pour le système quantique, du folklore disant que " l'électron suit les lignes de niveaux du potentiel moyennisé" :

Théorème 4.4.1 *Pour $H = H^{La} + \varepsilon V$, $V \in \mathcal{G}$, $\mathcal{U}$ et H_∞ construits dans le théorème 4.1.1, on a*

$$e^{-iHt} = \mathcal{U}^{-1} e^{-iH_\infty t} \mathcal{U}.$$

De plus,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{-iHt} - e^{-iH_\infty t}\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Remarquons qu'au premier ordre

$$\|H_\infty - (H^{La} + \varepsilon DV)\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Remarque 4.4.2 *Remarquons que*

$$DV = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iH^{La}t} V e^{-iH^{La}t} dt.$$

Donc si le symbole V est dans une classe convenable, alors DV est un opérateur pseudodifférentiel de symbole $\langle V\rangle(q,p)$, où $\langle V\rangle(q,p)$ est la moyenne de V sur le cercle de centre $c = \frac{q}{2} - p^\perp$ et de rayon $|p - \frac{q^\perp}{2}| = \sqrt{(p - \frac{q^\perp}{2})^2}$ (cf. [AS2]).

Preuve : C'est un corollaire du théorème 4.1.1. Notons que l'opérateur V est multiplié par ε et par construction, les W_s seront également multipliés par ce facteur. Ainsi,

$$\mathcal{U} = \prod_{s\geq 0} e^{\varepsilon W_s} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Donc

$$e^{-iH_\infty t} = (1 - \mathcal{O}(\varepsilon))e^{-iHt}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = e^{-iHt} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

D'où le résultat du théorème.

□

Ce résultat, valable pour tout temps, est à comparer à celui du théorème 2.3.1 valable pour des temps d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$.

Dans le prochain chapitre, nous allons discuter une classe de potentiels présentant la décroissance suffisante pour appliquer l'algorithme.

Chapitre 5

La classe de potentiels $\mathcal{G}$

Au cours du chapitre précédent, nous avons démontré la convergence d'un algorithme qui permet d'annuler au fur et à mesure des itérations la partie hors-diagonale du potentiel et qui produit donc un opérateur diagonal. Cela signifie qu'il commute avec l'hamiltonien de départ (cf. théorème 4.2.2). Les hypothèses sur cet hamiltonien sont justes spectrales : on demande à ce que les lacunes du spectre restent ouvertes.

Pour montrer la convergence de l'algorithme (cf. théorème 4.2.2), nous avons besoin d'une certaine décroissance dans la partie hors-diagonale des éléments de matrice du potentiel. La majeure partie de ce chapitre traitera du calculs des éléments de matrice et des estimations de ces derniers afin de rentrer dans le cadre de l'algorithme.

Le théorème 4.1.1 est un cas particulier appliqué à l'hamiltonien de Landau et à la classe de potentiels $\mathcal{G}$. Ainsi, par la suite, nous considérerons principalement des problèmes liés à l'hamiltonien de Landau. Le modèle sera décrit par un hamiltonien H défini par

$$H = H^{La} + V$$

avec V un opérateur de multiplication par une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeur réelle.

Dans un premier temps, cette fonction sera la gaussienne g

$$g(q) := e^{-\frac{q^2}{2}} \qquad (q \in \mathbb{R}^2)$$

Nous montrerons que les éléments de matrice de la gaussienne g décroissent comme souhaité dans le théorème 4.2.2. Ceci nous permettra alors de construire la classe $\mathcal{G}$. On rappelle que cette classe de fonctions est définie par les convolutions avec des

mesures finies à valeur réelle de la fonction gaussienne :

Définition *Pour g défini ci-dessus, $\mathcal{G}$ est la classe des fonctions définies précédemment*

$$\mathcal{G} := \{V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; V = g * \mu, \int_{\mathbb{R}^2} d|\mu| < \infty\}.$$

avec

$$g * \mu(q) := \int_{\mathbb{R}^2} g(q - q')d\mu(q')$$

Nous allons donc nous attacher dans un premier temps à montrer que la fonction g satisfait à ces conditions de décroissance. Ensuite, nous nous intéresserons à la classe $\mathcal{G}$ et plus particulièrement aux hypothèses à mettre sur une fonction f quelconque pour qu'elle soit dans la classe $\mathcal{G}$. Finalement, nous conclurons par une application au modèle de type Aharonov-Bohm avec flux dépendant du temps que l'on a rencontré au cours d'un chapitre précédent.

5.1 La fonction gaussienne g

5.1.1 Outils

Dans un premier temps, nous démontrererons des résultats techniques qui nous serons utiles par la suite :

Lemme 5.1.1 *Soient $Y \geq 1$, $X - Y \geq 2$. Nous avons alors que*

$$\frac{Y}{X - Y} \leq 1 + \frac{Y^2}{X}$$

Preuve : L'assertion du lemme est équivalente à montrer que

$$\frac{XY}{(X - Y)(X + Y^2)} \leq 1$$

Réécrivons cette expression comme

$$\frac{XY}{(X - Y)(X + Y^2)} = \frac{Y}{X + Y^2} + \frac{Y^2}{(X - Y)(X + Y^2)}.$$

Or, par les hypothèses, nous avons que $X - Y \geq 2$ et puisque $X \geq Y$, $\frac{Y^2}{X+Y^2} \leq 1$ ainsi, le terme de droite du membre de droite peut-être borné par $1/2$.

Pour le terme de gauche, on trouve

$$\frac{Y}{X+Y^2} = \frac{1}{1+\frac{X}{Y}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{Y}} \leq 1$$

Ceci nous permet de conclure la preuve du lemme.

□

Démontrererons maintenant une inégalité de concavité :

Lemme 5.1.2 *Pour $K \in [0,1[$, on a*

$$(1+K)\log(1+K) + (1-K)\log(1-K) \geq K^2 \tag{5.1}$$

Preuve : Définissons la fonction

$$f(K) := (1+K)\log(1+K) + (1-K)\log(1-K) - K^2$$

Calculons la dérivée de la fonction f.

$$f'(K) = \log(1+K) - \log(1-K) - 2K$$

La fonction est positive sur $[0,1[$, on a donc pour $K \in [0,1[$

$$f(K) \geq f(0) = 0$$

D'où le résultat.

□

5.1.2 Les éléments de matrice de g

Rappellons dans un premier temps que l'hamiltonien de Landau admet sur ses espaces propres la décomposition spectrale suivante

$$H^{La} = \sum_{n\geq 0} E_n P_n \quad , \quad E_n = n + 1/2$$
$$P_n = P_n^* \quad , \quad P_n P_m = \delta_{n,m} P_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, les projecteurs propres $\{P_n\}_n$ sont définis par

$$P_n = \sum_{l \geq -n} |\psi_{n,l}\rangle\langle\psi_{n,l}|$$

avec pour $n \geq 0$, $l \geq -n$

$$\psi_{n,l} := \psi_{n,l}(r,\Theta) = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{2^l(n+l)!}} r^l e^{i\Theta l} L_n^l\left(\frac{r^2}{2}\right) \frac{e^{-\frac{r^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{5.2}$$

où les polynômes de Laguerre sont définis par

$$L_n^l(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{(-x)^j}{j!} \begin{pmatrix} n+l \\ n-j \end{pmatrix} \quad (l \geq 0)$$

$$L_n^l(x) := \frac{(n+l)!}{n!}(-x)^{|l|} L_{n+l}^{|l|}(x) \quad (0 \geq l \geq -n).$$

Nous trouvons alors que

$$P_n g P_m = \sum_{l,k \geq 0} |\psi_{n,l}\rangle\langle\psi_{n,l}|g|\psi_{m,k}\rangle\langle\psi_{m,k}|$$

Remarque 5.1.3 *L'ensemble des vecteurs propres de l'hamiltonien de Landau $\{\psi_{n,l}\}_{n,l}$ forme une base de $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Introduisons d'abord deux notations

$$\begin{aligned} g_{n,m} &:= P_n g P_m \\ g_{n,m,l} &:= \langle\psi_{n,l}|g|\psi_{m,k}\rangle\delta_{k,l} \end{aligned}$$

(la notation $g_{n,m,l}$ est pertinente car g est une fonction radiale dans $\mathbb{R}^2$ et un calcul donne

$$\begin{aligned} g_{n,m,l} &= \frac{(-1)^{m+n}\delta_{l,k}}{2^{\frac{l+k}{2}}} \sqrt{\frac{n!m!}{(l+n)!(k+m)!}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{l+k} L_n^l(\frac{r^2}{2}) L_m^k(\frac{r^2}{2}) r dr \\ &= \delta_{l,k}\langle\psi_{n,l}|g|\psi_{m,k}\rangle \end{aligned}$$

où $\delta_{l,k}$ est le symbole de Kronecker.)

□

Comme nous l'avons déjà noté, nous devons estimer la norme opérateur des éléments de matrice $g_{n,m}$. Démontrons la proposition suivante :

Proposition 5.1.4 *Pour tout $m \neq n$, on a*

$$\|g_{n,m}\| \leq \sup_l |g_{n,m,l}|$$

Preuve : Choisissons deux fonctions φ (resp. ψ) de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Nous pouvons les décomposer dans la base propre de l'hamiltonien de Landau. Nous obtenons alors deux suites de $l^2(\mathbb{N}^2)$ notées $(a_{p,q})_{(p,q)}$ (resp. $(b_{i,j})_{(i,j)}$). On obtient alors

$$\begin{aligned}
|\langle \phi, g_{n,m}\psi\rangle| &= \left|\sum_{i,j,p,q} \overline{a_{p,q}}\, b_{i,j}\, \delta_{n,p}\delta_{q,l}\delta_{l,k}\delta_{k,j}\delta_{m,i} g_{n,m,l}\right| \\
&= \left|\sum_l \overline{a_{n,l}} b_{m,l} g_{n,m,l}\right| \\
&\leq \sup_l |g_{n,m,l}| \left(\sum_l |a_{n,l}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_l |b_{m,l}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_l |g_{n,m,l}| \|\varphi\| \|\psi\|
\end{aligned}$$

Et donc

$$\forall n \neq m, \quad \|P_n g P_m\| \leq \sup_l |g_{n,m,l}|$$

Passons maintenant au calcul des éléments de matrices de g. Le résultat est contenu dans la proposition suivante. La méthode utilisée est la même que celle de [Wa1] et [Wa2] :

Proposition 5.1.5 *Pour $g(q) = \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), \quad (q \in \mathbb{R}^2)$ et $\psi_{n,l}$ défini en (5.2) on a pour $n, m \in \mathbb{N}_0, l \geq -(n \wedge m)$ que*

$$|g_{n,m,l}| = \frac{1}{2^{l+m+n+1}} \frac{(l+m+n)!}{\sqrt{(l+m)!(l+n)!n!m!}} \tag{5.3}$$

Preuve : Par définition

$$|g_{n,m,l}| = \frac{1}{2^l}\sqrt{\frac{n!m!}{(l+n)!(l+m)!}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2l} L_n^l L_m^l \left(\frac{r^2}{2}\right) r dr. \tag{5.4}$$

Considérons dans un premier temps le cas où $l \geq 0$. Pour étudier la dépendance de l'intégrale dans les paramètres l, m, n, nous allons nous servir de l'orthogonalité de la famille des fonctions $n \mapsto L_n^l(x)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, d\nu_l)$, où $d\nu_l := x^l e^{-x} dx$. L'idée est de réécrire le produit des deux polynômes comme

$$L_n^l L_m^l \left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{s \geq 0} B_s^{n,m,l} L_s^l(x).$$

En injectant ce résultat dans $|g_{n,m,l}|$ et en se servant que $L_0^l \equiv 1 \, \forall l$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L_n^l L_m^l (\frac{x}{2}) d\nu_l(x) &= \sum_{s \geq 0} B_s^{n,m,l} \int_0^\infty L_s^l L_0^l(x) d\nu_l(x) \\ &= B_0^{n,m,l} \int_0^\infty d\nu_l(x) \\ &= B_0^{n,m,l} \Gamma(l+1) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à déterminer la valeur du coefficient $B_0^{n,m,l}$. Ceci peut se faire à l'aide d'une fonction génératrice [Ca] :

$$\begin{aligned} g_s(x,y,l) &= \frac{\left(\frac{x}{2(1-x)} + \frac{y}{2(1-y)}\right)^s}{(1-x)^{l+1}(1-y)^{l+1}\left(1 + \frac{x}{2(1-x)} + \frac{y}{2(1-y)}\right)^{l+s+1}} \\ &= \sum_{n,m} B_s^{n,m,l} x^m y^n \end{aligned}$$

g_s est donc la fonction génératrice de la série. Par le raisonnement qui précède, nous pouvons nous interésser uniquement au cas $s = 0$. On trouve alors que :

$$g_0(x,y,l) = \frac{2^{l+1}}{(2-x-y)^{l+1}}$$

Donc

$$B_0^{n,m,l} = \frac{1}{n!m!} \partial_x^m \partial_y^n g_0(x,y,l) \Big|_{x=y=0} = \frac{1}{2^{m+n}} \frac{(l+m+n)!}{l!\, m!\, n!}$$

Le résultat de la proposition suit donc pour $l \geq 0$.

Maintenant pour $l < 0$, on remarque simplement que

$$\psi_{n,l} = \overline{\psi}_{n+l,-l}$$

et donc

$$|\langle \psi_{n,l}, g\psi_{m,l}\rangle| = |\langle \psi_{n+l,-l}, g\psi_{m+l,-l}\rangle| \tag{5.5}$$

ce qui permet de conclure pour le cas $l < 0$ et également la preuve de la proposition.

□

5.1.3 Estimation des éléments de matrice

Grâce à la proposition précédente, nous connaissons la valeur de chaque $g_{n,m,l}$. La proposition 5.1.4 nous donne une estimation de la norme des éléments de matrice $g_{n,m}$ par le suprémum sur l des $g_{n,m,l}$. Si l'on arrive à démontrer que les $g_{n,m,l}$ décroissent comme requis dans le théorème 4.2.2 et que l'on peut contrôler le suprémum sur l, alors on pourra en déduire le résultat pour $g_{n,m}$. Cela fait l'objet de la proposition suivante :

Proposition 5.1.6 *Soit* $g(q) = \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), \quad (q \in \mathbb{R}^2)$ *et* P_n *le projecteur propre de l'hamiltonien de Landau sur le n-ième niveau d'énergie. Alors, il existe une constante* $cst > 0$ *pour tous* $n, m \geq 0$ *tel que*

$$\|g_{n,m}\| \leq \frac{cst}{\max(1, |m-n|)}$$

Preuve : Remarquons premièrement que l'expression (5.3) est symétrique en m et n. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $m \geq n$. De plus, par l'équation (5.5), on remarque que l'on peut se restreindre au cas où $l \geq 0$.

Rappelons maintenant la formule de Stirling :

$$\forall n \geq 1, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\lambda_n} \tag{5.6}$$

avec $\forall n \geq 1, \frac{1}{12n+1} < \lambda_n < \frac{1}{12n}$.

Nous allons séparer deux cas : nous étudirons d'abord le cas où $n = 0$ et ensuite le cas où $n > 0$.

Cas n=0 : En remplaçant n par 0 dans (5.3) on trouve que

$$g_{0,m,l} = \frac{1}{2^{l+m+1}}\sqrt{\frac{(l+m)!}{l!\,m!}}$$

En se servant de l'équation (5.6), on obtient que :

$$\begin{aligned}|g_{0,m,l}| &= \frac{1}{2^{l+m+1}}\left(\frac{\sqrt{2\pi(l+m)}(l+m)^{l+m}}{2\pi\sqrt{m\,l}\,l^l\,m^m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\lambda_{l+m}-\lambda_l-\lambda_m}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{l+m}{l\,m}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\left(\frac{l+m}{4m}\right)^m\left(\frac{l+m}{4l}\right)^l\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

puisque $\frac{\lambda_{l+m}-\lambda_l-\lambda_m}{2} \leq 0$ pour tout $m, l \geq 0$. Posons maintenant

$$\begin{array}{ccc} X := l+m & Y := l-m & K := \dfrac{Y}{X} \\ 2m = X-Y & 2l = X+Y & 0 < K < 1 \end{array}$$

Alors,

$$|g_{0,m,l}|^2 \leq \frac{1}{42^X\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{X}{X^2-Y^2}}e^{-\frac{Y^2}{2X}}$$

où l'on s'est servi de (5.1).

Cette dernière expression dépend uniquement de Y^2, on peut donc supposer que $Y \geq 0$. Le résultat énoncé dans la proposition est équivalent à démontrer que $|X-Y|^2|g_{0,m,l}|^2$ est borné et c'est ce que nous allons faire. En effet, puisque $X > Y$, il existe un entier $a \geq 2$ tel que $X = Y + a$. Nous obtenons alors que

$$|X-Y|^2|g_{0,m,l}|^2 \leq \frac{a^2}{2^{Y+a}\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{Y+a}{2Ya+a^2}}e^{-\frac{Y^2}{2(Y+a)}}$$

En dérivant les deux côtés par rapport à Y, on a la majoration suivante

$$\partial_Y|X-Y|^2|g_{0,m,l}|^2 \leq -\frac{e^{-\frac{Y^2}{2(Y+a)}}P_a(Y)}{2^{Y+a+1}(a+Y)^2(a+2Y)}\sqrt{\frac{Y+a}{2aY+Y^2}}$$

où $P_a(Y)$ est un polynôme dans la variable Y à coefficients positifs qui dépendent de puissances de a. Cela implique que le membre de droite est négatif car Y et a sont positifs et alors $|X-Y|^2|V_{0,m,l}|^2$ atteint son maximum pour $Y = 0$. On trouve alors que

$$|X-Y|^2|g_{0,m,l}|^2 \leq \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2^a\sqrt{2\pi}} \leq cst$$

ou encore

$$|g_{0,m,l}| \leq \frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}(m\pi)^{\frac{1}{4}}} \leq cst$$

ce qui conclut la preuve pour $n = 0$.
(Nous avons prouvé bien plus dans ce cas : dans le niveau fondamental, la décroissance se faisait de manière exponentielle et pas seulement de manière polynomiale.)

Cas n $>$ 0 : Supposons maintenant que m et n vérifie $m > n > 0$. Rappelons que

$$g_{n,m,l} = \frac{\delta_{l,k}}{2^{l+m+n+1}} \frac{(l+m+n)!}{\sqrt{(l+n)!\,(l+m)!\,m!\,n!}}$$

Utilisons une fois de plus la formule (5.6) pour obtenir que

$$\begin{aligned} |g_{n,m,l}| &= \frac{\sqrt{2\pi(l+m+n)}(l+m+n)^{l+m+n} e^{\lambda_{l+m+n} - \frac{\lambda_{l+m}-\lambda_{l+n}-\lambda_m-\lambda_n}{2}}}{2^{l+m+n+1}(4\pi^2\sqrt{(l+m)\,(l+n)\,m\,n}(l+m)^{l+m}\,(l+n)^{l+n}\,m^m\,n^n)^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{2\pi 2^{l+m+n+1}} \sqrt{\frac{l+m+n}{\sqrt{(l+m)(l+n)\,m\,n}}} \frac{(l+m+n)^{l+m+n}}{(l+m)^{\frac{l+m}{2}}(l+n)^{\frac{l+n}{2}} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

puisque $\lambda_{l+m+n} - \frac{\lambda_{l+m}-\lambda_{l+n}-\lambda_m-\lambda_n}{2} \leq 0$ pour tous $m > n \geq 0$ et $l \geq 0$.

Posons

$$\begin{array}{rrr} X := l+m+n & Y := l+m-n & Z := l-m+n \\ 2m = X - Z & 2n = X - Y & 2(l+m) = X + Y \\ 2(l+n) = X + Z & X \geq Y \geq Z & Y \geq 0 \\ Z \geq n - m & |Z| \leq Y & \end{array}$$

Nous avons alors grâce au lemme 5.1.1 que

$$|g_{n,m,l}| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{X}{[(X^2-Y^2)(X^2-Z^2)]^{\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{Y^2}{4X}} e^{-\frac{Z^2}{4X}}$$

Définissons alors la fonction auxiliaire

$$f(X,Z) := \frac{X}{\sqrt{X^2-Z^2}}\, e^{-\frac{Z^2}{2X}}$$

pour $X \geq 0$ et $Z \geq n - m$. Notons que Z peut être négatif car on a supposé que $m > n$. Constatons également que cette fonction n'a aucune singularité sur le domaine que l'on considère puisque $X^2 - Z^2 = 0$ est équivalement à $m(l+n) = 0$ ce qui est impossible car nous avons supposé que $m > n > 0$ et $l \geq 0$. Remarquons maintenant que la fonction f ne dépend que de Z^2, nous pouvons donc étudier ses variations uniquement pour $Z \geq 0$. Prenons maintenant la dérivée de la fonction f par rapport à la variable Z pour obtenir

$$\partial_Z f(X,Z) = \frac{e^{-\frac{Z^2}{2X}} Z(X - X^2 - Z^2)}{(X^2 - Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le signe de la dérivée est donc donné par le signe de $(X - X^2 - Z^2)$. Puisque $X \geq Z \geq 0$, il existe un $a \geq 2$ tel que $X = Z + a$. Nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} sign(X - X^2 - Z^2) &= sign(Z + a - 2Za - a^2) \\ &= sign(Z(1-a) + a(1-a) - a^2) \leq 0 \end{aligned}$$

Cela signifie que f décroit dans la direction Z, elle est donc maximale pour $Z = 0$ et

$$f(X,Z) \leq f(X,0) = 1$$

pour tout $X \geq 0$.
Cela nous permet d'obtenir la majoration suivante :

$$|g_{n,m,l}| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(X^2 - Y^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{Y^2}{4X}}$$

Une fois encore, nous allons chercher à montrer que $|m-n||g_{n,m,l}|$ est borné. Puisque $2|m-n| = |Y - Z| \leq 2Y$, on obtient alors que

$$\begin{aligned} |m-n|^2 |g_{n,m,l}|^2 &\leq \frac{8}{\pi} \frac{Y^2}{\sqrt{X^2 - Y^2}} e^{-\frac{Y^2}{2X}} \\ &\leq \frac{8}{\pi} \frac{Y^2}{X - Y} e^{-\frac{Y^2}{2X}} \end{aligned}$$

Mais remarquons que cette dernière expression peut se réécrire (on omettra le terme $\frac{8}{\pi}$)

$$\begin{aligned}\frac{Y^2}{X}e^{-\frac{Y^2}{2X}}\frac{X}{X-Y} &= \frac{Y^2}{X}e^{-\frac{Y^2}{2X}}\left(1+\frac{Y}{X-Y}\right)\\ &\leq \frac{Y^2}{X}e^{-\frac{Y^2}{2X}}\left(2+\frac{Y^2}{X}\right)\end{aligned}$$

par le lemme 5.1.1.
Définissons$t$ par $t := \frac{Y^2}{X}$. Alors, on remarque que $t > 0$ et

$$\frac{Y^2}{X-Y}e^{-\frac{Y^2}{2X}} \leq t(2+t)e^{-\frac{t}{2}} \leq cst$$

Nous en déduisons que

$$|m-n|^2|g_{n,m,l}|^2 \leq cst$$

ce qui est équivalent à

$$|g_{n,m,l}| \leq \frac{cst}{|m-n|}$$

Le membre de droite étant uniforme en l, le résultat précédent reste inchangé si nous prenons le supremum sur l. Par la proposition 5.1.4, nous trouvons pour $m \neq n$ que

$$\|g_{n,m}\| \leq \frac{cst}{|m-n|}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition.

□

C'est à partir du résultat de cette proposition que nous pouvons démontrer la décroissance des potentiels de $\mathcal{G}$. Cela fait l'objet de la prochaine partie de ce chapitre.

5.2 La classe $\mathcal{G}$

5.2.1 Décaler les potentiels

Une propriété intéressante de l'hamiltonien de Landau réside dans l'existence de l'opérateur de translation magnétique. Cet opérateur est défini sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour un $a \in \mathbb{R}^2$ par

$$T(a)\psi(q) = e^{\frac{i}{2}q\wedge a}\psi(q-a)$$

Cette transformation commute avec l'hamiltonien et commute en particulier avec ses projecteurs propres $\{P_n\}_n$: pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$

$$[T(a), P_n] = 0$$

La conjugaison du potentiel par cette transformation produit une translation dans la variable du potentiel :

$$T(a)\, g\, T^*(a) = g(. - a)$$

Et en particulier, on a

$$\|P_n\, g(. - y) P_m\| = \|P_n\, g\, P_m\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

C'est en particulier cette dernière égalité sur l'opérateur de translation magnétique qui va nous permettre de montrer que les éléments hors-diagonaux de matrice des potentiels de $\mathcal{G}$ décroissent comme la fonction g.

5.2.2 Décroissance des potentiels de $\mathcal{G}$

Rappelons qu'une définition de la classe $\mathcal{G}$ se situe au début de ce chapitre. Un potentiel V de $\mathcal{G}$ est défini à travers une convolution de la gaussienne g avec une mesure finie μ. Par la discussion que l'on vient d'avoir sur l'opérateur de translation magnétique, on voit que

$$\begin{aligned} P_n V P_m &= P_n \int g(. - y) d\mu(y) P_m \\ &= \int P_n g(. - y) P_m d\mu(y) \end{aligned}$$

car les $\{P_n\}_n$ sont des projecteurs agissants sur la variable du potentiel et pas sur la variable d'intégration. En prenant la norme de chaque côté, on obtient la majoration suivante

$$\|P_n V P_m\| \leq \int |d\mu(y)|\, \|P_n g(. - y) P_m\|$$

De plus, l'opérateur de translation magnétique nous permet d'avoir l'estimation suivante

$$\|P_n\, g(. - y) P_m\| = \|P_n\, g\, P_m\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi, par la proposition 5.1.6, nous déduisons que

$$\|P_n V P_m\| \leq \frac{\int |d\mu(y)|}{|m-n|}$$

Puisque par hypothèse, μ est une mesure finie à valeur finie à valeur réelle, on en déduit que les éléments de matrice hors-diagonaux de V admettent la même décroissance que ceux de g.

Nous venons de démontrer le théorème suivante :

Théorème 5.2.1 *Soient V un élément de $\mathcal{G}$ et $\{P_n\}_n$ les projecteurs propres de H^{La} sur le n-ième niveau d'énergie. Alors on a, en norme opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour un $c > 0$ et tout $n, m \in \mathbb{N}, m \neq n$, l'estimation suivante :*

$$\|P_n V P_m\| \leq \frac{c}{\max(1, |m-n|)}$$

Nous cherchons maintenant une condition plus explicite d'appartenance à $\mathcal{G}$.

Remarquons dans un premier temps que $V = g * \mu$ s'étend toujours en une fonction entière. En effet, si l'on prend la transformée de Fourier de cette expression, puisque le membre de droite est une convolution, on trouve que

$$\widehat{V}(p) = e^{\frac{-p^2}{2}} \widehat{\mu}$$

Ainsi, $\widehat{V}(p) e^{\frac{p^2}{2}}$ est la transformée de Fourier d'une mesure finie et doit donc décroitre à l'infini.

Le but de ceci est de montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ contient suffisamment de potentiels pour en faire une classe intéressante pour la physique et notamment pour l'étude de l'effet Hall quantique.

Pour cela, nous introduisons la classe $\mathcal{A}$:

Définition 5.2.2 *On définit $\mathcal{A}$ la classe des fonctions $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que*

1. *V possède une extension entière sur $\mathbb{C}^2$*
2. *$\mathbb{R}^2 \ni y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}} V(iy) \in L^1(\mathbb{R}^2)$*
3. *Soit $\tilde{V}(q) := e^{\frac{q^2}{2}} \int e^{-iqy} e^{-\frac{y^2}{2}} V(iy) \frac{dy}{(2\pi)^2}$ alors $\tilde{V} \in L^1(\mathbb{R}^2)$*

Le lien entre la classe $\mathcal{A}$ et la classe $\mathcal{G}$ se fait dans la proposition suivante :

Proposition 5.2.3 *Pour $V \in \mathcal{A}$ on a*

$$V = g * (\tilde{V} dq).$$

Preuve : Par le théorème de Fourier, on trouve pour $q \in \mathbb{R}^2$ que

$$e^{-\frac{q^2}{2}} V(iq) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\tilde{q}(q-y)} e^{-\frac{y^2}{2}} V(iy) \frac{dy}{(2\pi)^2} d\tilde{q}.$$

Donc

$$V(iq) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(q+i\tilde{q})^2}{2}} \tilde{V}(\tilde{q}) d\tilde{q}.$$

Cela permet de conclure la preuve de la proposition car les deux côtés sont analytiques en q.

□

Illustrons maintenant la classe $\mathcal{A}$ que nous venons d'introduire avec quelques exemples de potentiels bien choisis. Le premier point montre que le résultat concernant g peut s'étendre à un plus large ensemble de fonctions dont la décroissance à l'infini se fait de manière gaussienne. Le second résultat parle des mesures ponctuelles distribuées sur le réseau $\mathbb{Z}^2$.

Corollaire 5.2.4 *$\mathcal{G}$ contient*

1. *pour un polynôme réel à 4 variables p avec $\alpha \in]0,1[$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$:*

$$p(q_1, q_2, e^{ik_1 q_1}, e^{ik_2 q_2}) e^{-\alpha \frac{q^2}{2}}$$

2. $\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \mu_i \, g(q-i)$ *avec $\mu \in l^1(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$.*

La fonction $q \mapsto e^{ikq}$ pour $k \in \mathbb{R}^2$ n'est pas un élément de $\mathcal{G}$.

Preuve : Pour $1.$, il est suffisant de démontrer que

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}} f(iy) \in L^1(\mathbb{R})$$

et

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-ixy} e^{-\frac{y^2}{2}} f(iy) dy \in L^1(\mathbb{R})$$

pour $f(y) = y^n e^{iky} e^{-\alpha \frac{y^2}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{R}$.
La preuve se fait via des propriétés standards de l'analyse de Fourier. Dans le cas où $k = 0$ et $n \neq 0$, on a

$$|f(iy)e^{-\frac{y^2}{2}}| = |y|^n e^{-(1-\alpha)\frac{y^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

et

$$|e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-ixy} y^n e^{-(1-\alpha)\frac{y^2}{2}} dy| = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} |poly(x) e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{1}{1-\alpha}\frac{x^2}{2}}| \in L^1(\mathbb{R})$$

où $poly$ est un polynôme de degré au plus n.
Dans le cas où $n = 0$ et $k \neq 0$, nous obtenons

$$|f(iy)e^{-\frac{y^2}{2}}| \leq e^{|k||y|} e^{-(1-\alpha)\frac{y^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$|e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-ixy} e^{-ky} e^{-(1-\alpha)\frac{y^2}{2}} dy| = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} e^{\frac{k^2}{2(1-\alpha)}} e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{1}{1-\alpha}\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Le cas $n \neq 0$ et $k \neq 0$ se démontre par un argument semblable.
Le $2.$ est relié à la mesure pure point

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \mu_i \delta(x - i)$$

Le résultat suit de la discussion sur l'opérateur de translation magnétique que nous avons menée précédemment.
Concernant la fonction $q \mapsto e^{ikq}$ pour $k \in \mathbb{R}^2$, nous avons au final que

$$e^{ikx} = g * \mu$$

avec $\mu = e^{-ikx} e^{\frac{k^2}{2}} dx$ qui n'est pas une mesure finie.

□

Remarque 5.2.5 *La condition de sommabilitée de la suite des μ_i du point 2. peut être omise si l'on considère une partie compact du réseau. En effet, soit Λ une partie finie de $\mathbb{Z}^2$. On a alors*

$$|\sum_{i \in \Lambda} \mu_i| \leq \max_i \mu_i |\Lambda|$$

où $|\Lambda|$ est la mesure de Λ.

Bibliographie

[AE] Avron J.E., Elgart A., *An Adiabatic Theorem without a Gap Condition*, Operator theory advances and Applications, **108**, J. Dittrich, P. Exner, and M. Tater editors, Birkhauser (1999).

[AHS] Asch J.,Hradecky I.,Šťovíček P., *Propagators weakly associated to a family of Hamiltonians and the adiabatic theorem for the Landau Hamiltonian with a time-dependent Aharonov-Bohm flux*, Journal of Mathematical Physics **46**, 053303 (2005).

[AM] J. Asch, C. Meresse, *A constant of quantum motion in two dimensions in crossed magnetic and electric fields*, Journal of Physycs A **43**, 474002 (2010).

[AS1] Abramowitz M., Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions* Dover Publication Inc, New York (1970).

[AS2] Asch J., Šťovíček P., *Dynamics of a classical Hall system driven by a time-dependent Aharonov-Bohm flux*, Journal of Mathematical Physics **48**, 052901 (2007).

[ASS1] Avron, J. E., Seiler, R., Simon, B., *Quantum Hall Effect and the Relative Index for Projections*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2185 (1990).

[ASS2] Avron J. E., Seiler R., Simon B., *Charge deficiency, charge transport and comparison of dimensions*, Comm. Math. Phys. **159**, 399 (1994).

[ASY] Avron J. E., Seiler R., Yaffe L. G., *Adiabatic theorems and applications to the quantum Hall effect*, Comm. Math. Phys. **110**, 33 (1987), (Erratum: Comm. Math. Phys. **153**, 649 (1993)).

[Be] Bellissard J., *Stability and Instability in Quantum Mechanics.*, Trends and developments in the eighties (Bielefeld, 1982/1983), World Sci. Publishing, Singapore, 1 (1985).

[BF] Born M., Fock V., *Beweis des Adiabatensatzes*, Z. Phys. **51**, 165 (1928).

[Bo] Bornemann F., *Homogenization in time of singularly perturbed mechanical systems*, Lecture Notes in Mathematics **1687**, Springer, Heidelberg, (1998).

[BvES] Bellissard J., van Elst A., Schultz-Baldes H., *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect*, J. Math. Phys. **35**, 5373 (1994).

[BR] Bhatia R., Rosenthal P., *How and Why to Solve the Operator Equation* $AX - XB = Y$. Bulletin of the London Mathematical Society **29**, 1 (1997).

[Ca] Carlitz, L., *The product of several Hermite or Laguerre polynomials*, Monatshefte für Mathematik **66**, 393 (1962).

[CGH] Combes J.-M., Germinet F., Hislop, P.D. *On the Quantization of Hall Currents in Presence of Disorder*, In Asch, J. and Joye, A. (eds), Mathematical Physics of Quantum Mechanics, Lecture Notes in Physics, **690**, Springer, New York, (2006).

[Co] Combescure, M., *The quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **47** 6282 (1987) ; Erratum: Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **47** 451454 (1987).

[DLSV] Duclos P., Lev O., Šťovíček P., Vittot M., *Progressive diagonalization and applications*, Proceedings of the Conference "Operator Algebras & Mathematical Physics", Constanța (Roumanie, 2001), R. Purice Ed., Theta Foundation, Bucarest (2003).

[DS] Duclos P., Šťovíček P., *Floquet hamiltonians with pure point spectrum*, Commun. Math. Phys., **177**, 327 (1996).

[El] Elgart A., *Equality of the Bulk and Edge Hall Conductances in 2D*, In Asch, J. and Joye, A. (eds), Mathematical Physics of Quantum Mechanics, Lecture Notes in Physics , **690**, Springer, New York, (2006).

[EGS] Elgart A., Graf G. M., Schenker J. H., *Equality of the bulk and edge Hall conductances in a mobility gap*, Comm. Math. Phys. **259**, 185221 (2005).

[ESV] Exner P., Šťovíček P., Vytras, P., *Generalized boundary conditions for the Aharonov-Bohm effect combined with a homogeneous magnetic field*, J. Math. Phys. **43**, 2151 (2002).

[FP] Falomir H., Pisani P. A. G., *Hamiltonian self-adjoint extensions for (2+1)-dimensional Dirac particles* , J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 4143 (2001).

[Fo] Folland G. B., *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton, (1989).

[Gir] Girvin S. M., *The quantum hall effect: Novel excitations and broken symmetries* Arxiv:cond-mat/9907002, (1999).

[Gra] Graf G. M., *Aspects of the integer quantum Hall effect*, Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday, Proc. Sympos. Pure Math., **76**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 429 (2007)

[Hall] Hall E. H., *On a new action of the magnet on electric currents*, American Journal of Mathematics **2**, 287 (1879).

[Halp] Halperin B. I., *Quantized hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential*, Physical Review B, **25**, 2185 (1982).

[Hu] Huckestein B., *Scaling theory of the integer quantum hall effect*, Reviews of Modern Physics, **67**, 357 (1995).

[Ka1] Kato T., *On the adiabatic theorem of quantum mechanics*, Phys Soc Jap., **5**, 435 (1958).

[Ka2] Kato T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin (1966).

[KDP] Klitzing K. V. , Dorda G., Pepper M., *New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance*, Physical Review Letters, **45**, 494 (1980).

[La] Laughlin R. B., *Quantized hall conductivity in two dimensions*, Physical Review B, **23**, 5632 (1981).

[JP] Joye A., Pfister C.-E., *Exponentially small adiabatic invariant for the Schrödinger equation*, Commun Math. Phys., **140**, 15 (1991).

[Ne1] Nenciu G., *Adiabatic theorems and spectral concentration*, Commun. Math. Phys., **82**, 121 (1981).

[Ne2] Nenciu G., *Linear Adiabatic Theory: Exponential Estimates*, Comm. Math. Phys. **152**, 479 (1993).

[RS1] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.1, "Functional analysis", Academic Press, (1972).

[RS2] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics,* Vol.2, "Fourier Analysis, Self-Adjointness", Academic Press, (1975).

[Si] Simon, B., *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms.*, Princeton Series in Physics, Princeton University press, New Jersey (1971).

[Te] Teufel S., *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*, Lecture Notes in Mathematics **1821**, Springer-Verlag, Berlin, (2003).

[Wa1] Wei-Min Wang, *Integrals of products of Hermite functions*, arXiv.org:0s901.3970, (2009).

[Wa2] Wang, W.M., *Pure point spectrum of the Floquet Hamiltonian for the quantum harmonic oscillator under quasi-periodic perturbations*, Comm. Math. Phys., **277, No. 2**, 459 (2008).