

Méthode de décomposition spectrale temporelle pour le calcul d'écoulements incompressibles périodiques en temps

Sylvain Antheaume

LEGI, Grenoble INP

Directeur de thèse : Christophe Corre



Projet Harvest

Définition d'une hydrolienne

Dispositif mécanique permettant de convertir l'énergie cinétique des courants en énergie électrique

Projet Harvest

Définition d'une hydrolienne

Dispositif mécanique permettant de convertir l'énergie cinétique des courants en énergie électrique



LaMCoS

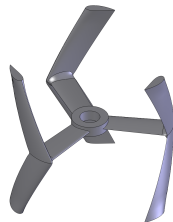
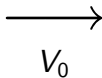


Figure: Turbine Achard

Une physique complexe... mais périodique en temps

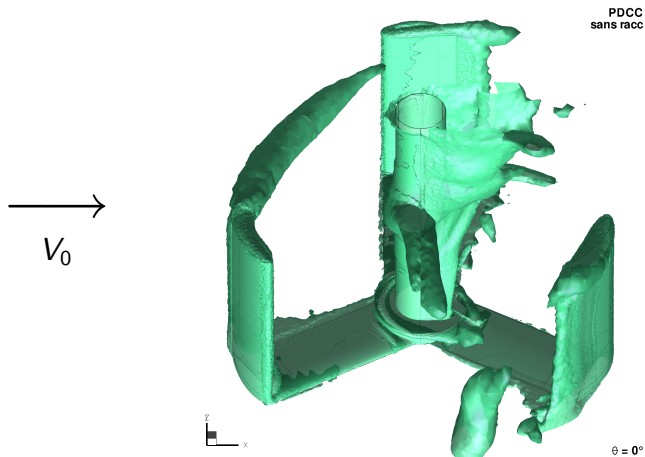
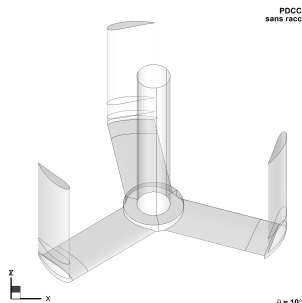


Figure: Isocontours de vorticité (300 s^{-1}), simulation RANS 3D, thèse de J. Zanette (2010)

- Phénomènes périodiques induits par l'excitation harmonique (pales)
- Phénomènes périodiques auto-induits (arbre)

Calcul instationnaire complet



- Calcul avec marche en temps séquentielle :
Pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ correspondant à 1° de rotation
- Période transitoire avant d'atteindre le périodique établi $N_{cycles} = 5$

Temps de calcul RANS 3D \approx 45 jours sur 12 processeurs

Objectif

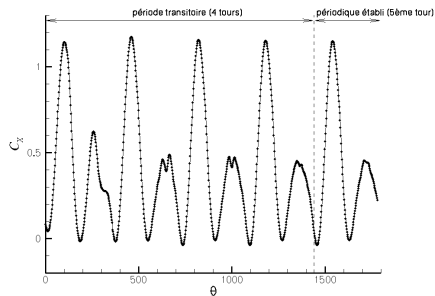
Réduire le temps de calcul d'écoulements incompressibles périodiques en temps

Objectif

Réduire le temps de calcul d'écoulements incompressibles périodiques en temps

Simplification du problème

S'affranchir du calcul du transitoire pour ne rechercher que la solution périodique établie



Objectif

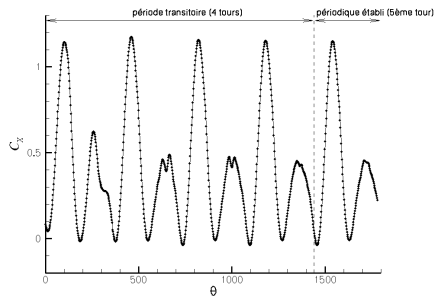
Réduire le temps de calcul d'écoulements incompressibles périodiques en temps

Simplification du problème

S'affranchir du calcul du transitoire pour ne rechercher que la solution périodique établie

Piste de réflexion

Utiliser des pas de temps plus grands



Objectif

Réduire le temps de calcul d'écoulements incompressibles périodiques en temps

Simplification du problème

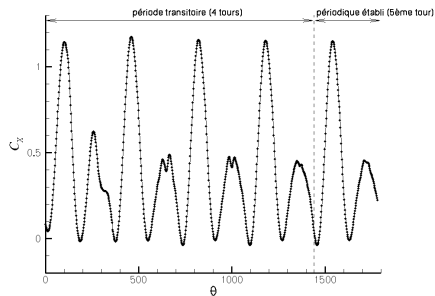
S'affranchir du calcul du transitoire pour ne rechercher que la solution périodique établie

Piste de réflexion

Utiliser des pas de temps plus grands

Contrainte

Facile à mettre en oeuvre dans un solveur temporel



Objectif

Réduire le temps de calcul d'écoulements incompressibles périodiques en temps

Simplification du problème

S'affranchir du calcul du transitoire pour ne rechercher que la solution périodique établie

Piste de réflexion

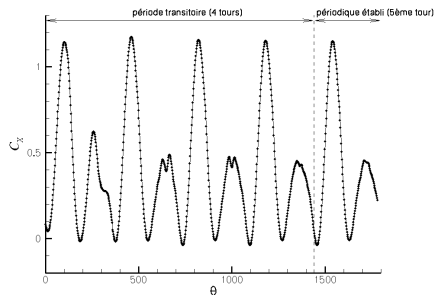
Utiliser des pas de temps plus grands

Contrainte

Facile à mettre en oeuvre dans un solveur temporel

Solution proposée

Utiliser une méthode de décomposition spectrale temporelle



Méthodes harmoniques temporelles pour le compressible

internes

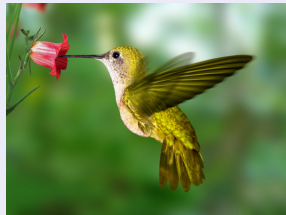


Turboréacteur CFM 56-3

externes



Eurocopter EC 135 T2



Colibri

- K.C. Hall, J.P Thomas et W.S Clark, 2002, "Harmonic Balance Technique" HBT : Application aux turbomachines

Méthodes harmoniques temporelles pour le compressible

internes

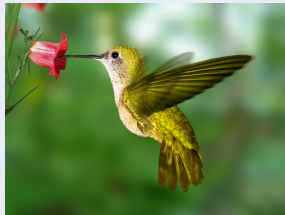


Turboréacteur CFM 56-3

externes



Eurocopter EC 135 T2



Colibri

- K.C. Hall, J.P Thomas et W.S Clark, 2002, "Harmonic Balance Technique" HBT : Application aux turbomachines
- A. Gopinath et A. Jameson, 2005, "**Time Spectral Method**" TSM : Application aux écoulements externes

Méthodes harmoniques temporelles pour le compressible

internes

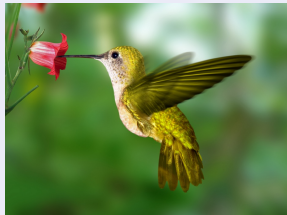


Turboréacteur CFM 56-3

externes



Eurocopter EC 135 T2



Colibri

- K.C. Hall, J.P Thomas et W.S Clark, 2002,
"Harmonic Balance Technique" HBT : Application aux turbomachines
- A. Gopinath et A. Jameson, 2005,
"**Time Spectral Method**" TSM : Application aux écoulements externes
- A. Jameson, 2009,
Tentative d'utilisation de la TSM avec méthode de compressibilité artificielle

Logique de développement

- 1 Point de départ : solveur 2D compressible sur maillages non structurés fixes

Logique de développement

- ➊ Point de départ : solveur 2D compressible sur maillages non structurés fixes
- ➋ Formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) pour prendre en compte le mouvement de maillages

Logique de développement

- ➊ Point de départ : solveur 2D compressible sur maillages non structurés fixes
- ➋ Formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) pour prendre en compte le mouvement de maillages
- ➌ Implémentation et analyse de la TSM sur le cas de l'équation de la chaleur + cas classiques compressibles

Logique de développement

- 1 Point de départ : solveur 2D compressible sur maillages non structurés fixes
- 2 Formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) pour prendre en compte le mouvement de maillages
- 3 Implémentation et analyse de la TSM sur le cas de l'équation de la chaleur + cas classiques compressibles
- 4 Ecriture d'un code incompressible BDF-ALE en utilisant la méthode de compressibilité artificielle

Logique de développement

- 1 Point de départ : solveur 2D compressible sur maillages non structurés fixes
- 2 Formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) pour prendre en compte le mouvement de maillages
- 3 Implémentation et analyse de la TSM sur le cas de l'équation de la chaleur + cas classiques compressibles
- 4 Ecriture d'un code incompressible BDF-ALE en utilisant la méthode de compressibilité artificielle
- 5 Implémentation de la TSM dans le solveur incompressible et analyse

Plan de la présentation

- 1 Contexte de la thèse
- 2 Solver incompressible BDF
- 3 Approche TSM
- 4 Comparaison TSM/BDF
- 5 Conclusion et Perspectives

- 1 Contexte de la thèse
- 2 Solver incompressible BDF**
- 3 Approche TSM
- 4 Comparaison TSM/BDF
- 5 Conclusion et Perspectives

Système Compressibilité Artificielle (CA)

Système incompressible Euler 2D instationnaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Continuité

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

Quantité de mouvement

Système Compressibilité Artificielle (CA)

Système incompressible Euler 2D instationnaire

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

β est le paramètre de compressibilité artificielle

Système Compressibilité Artificielle (CA)

Système incompressible Euler 2D instationnaire

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

β est le paramètre de compressibilité artificielle

Système Compressibilité Artificielle

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0$$

Système Compressibilité Artificielle (CA)

Système incompressible Euler 2D instationnaire

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

β est le paramètre de compressibilité artificielle

Système Compressibilité Artificielle

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0$$

Système Compressibilité Artificielle (CA)

Système incompressible Euler 2D instationnaire

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

β est le paramètre de compressibilité artificielle

Système Compressibilité Artificielle

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0$$

Système Compressibilité Artificielle (CA)

Système incompressible Euler 2D instationnaire

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

β est le paramètre de compressibilité artificielle

Système Compressibilité Artificielle

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{pmatrix}}_{\nabla \cdot \mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta)} = 0$$

Système Compressibilité Artificielle (CA)

Système incompressible Euler 2D instationnaire

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + p \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

β est le paramètre de compressibilité artificielle

Système Compressibilité Artificielle

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{pmatrix}}_{\nabla \cdot \mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta)} = 0$$

On doit résoudre le problème stationnaire en temps dual

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot \mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta)$$

Choix de discrétisation

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot \left(\mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta) - \mathbf{F}^V(\nabla \mathbf{w}) \right)$$

Choix de discrétisation

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot \left(\mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta) - \mathbf{F}^V(\nabla \mathbf{w}) \right)$$

Méthode Volume Finis : $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_{N_{cells}})^t$

N_{cells}

Choix de discrétisation

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot \left(\mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta) - \mathbf{F}^V(\nabla \mathbf{w}) \right)$$

Méthode Volume Finis : $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_{N_{cells}})^t$ N_{cells}

Discrétisation spatiale : Schéma de ROE, reconstruction MUSCL à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \mathcal{R}(\mathbf{w})$$

Choix de discrétisation

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot \left(\mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta) - \mathbf{F}^V(\nabla \mathbf{w}) \right)$$

Méthode Volume Finis : $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_{N_{\text{cells}}})^t$

N_{cells}

Discrétisation spatiale : Schéma de ROE, reconstruction MUSCL à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \mathcal{R}(\mathbf{w})$$

Discrétisation en temps physique : schéma BDF implicite à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\left(\frac{3}{2} \mathbf{w}^{n+1} - 2 \mathbf{w}^n + \frac{1}{2} \mathbf{w}^{n-1} \right)}{\Delta t} - \mathcal{R}(\mathbf{w}^{n+1})$$

Choix de discrétisation

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot \left(\mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta) - \mathbf{F}^V(\nabla \mathbf{w}) \right)$$

Méthode Volume Finis : $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_{N_{\text{cells}}})^t$ N_{cells}

Discrétisation spatiale : Schéma de ROE, reconstruction MUSCL à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \mathcal{R}(\mathbf{w})$$

Discrétisation en temps physique : schéma BDF implicite à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\left(\frac{3}{2} \mathbf{w}^{n+1} - 2 \mathbf{w}^n + \frac{1}{2} \mathbf{w}^{n-1} \right)}{\Delta t} - \mathcal{R}(\mathbf{w}^{n+1})$$
 $N_{\Delta t} = \frac{T}{\Delta t}$

Choix de discrétisation

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot (\mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta) - \mathbf{F}^V(\nabla \mathbf{w}))$$

Méthode Volume Finis : $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_{N_{\text{cells}}})^t$ N_{cells}

Discrétisation spatiale : Schéma de ROE, reconstruction MUSCL à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \mathcal{R}(\mathbf{w})$$

Discrétisation en temps physique : schéma BDF implicite à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{(\frac{3}{2}\mathbf{w}^{n+1} - 2\mathbf{w}^n + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{n-1})}{\Delta t} - \mathcal{R}(\mathbf{w}^{n+1}) \quad N_{\Delta t} = \frac{T}{\Delta t}$$

Discrétisation en temps dual : Schéma implicite à l'ordre 1

$$\frac{\mathbf{w}^{n,m+1} - \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathbf{K} \frac{(\frac{3}{2}\mathbf{w}^{n,m+1} - 2\mathbf{w}^{n,m} + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{n,m-1})}{\Delta t} - \mathcal{R}(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

Choix de discrétisation

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \nabla \cdot (\mathbf{F}^E(\mathbf{w}, \beta) - \mathbf{F}^V(\nabla \mathbf{w}))$$

Méthode Volume Finis : $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_{N_{\text{cells}}})^t$ N_{cells}

Discrétisation spatiale : Schéma de ROE, reconstruction MUSCL à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}) - \mathcal{R}(\mathbf{w})$$

Discrétisation en temps physique : schéma BDF implicite à l'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}) = -\mathbf{K} \frac{(\frac{3}{2}\mathbf{w}^{n+1} - 2\mathbf{w}^n + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{n-1})}{\Delta t} - \mathcal{R}(\mathbf{w}^{n+1})$$
 $N_{\Delta t} = \frac{T}{\Delta t}$

Discrétisation en temps dual : Schéma implicite à l'ordre 1

$$\frac{\mathbf{w}^{n,m+1} - \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathbf{K} \frac{(\frac{3}{2}\mathbf{w}^{n,m+1} - 2\mathbf{w}^{n,m} + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{n,m-1})}{\Delta t} - \mathcal{R}(\mathbf{w}^{n,m+1})$$
 m_{max}

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\overbrace{\mathbf{w}^{n,m+1} - \mathbf{w}^{n,m}}^{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}}{\Delta \tau^{n,m}} = - \overbrace{\frac{(\frac{3}{2}\mathbf{w}^{n,m+1} - 2\mathbf{w}^n + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{n-1})}{\Delta t} - \mathcal{R}(\mathbf{w}^{n,m+1})}^{-\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})}$$

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

On linéarise le résidu

$$\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1}) \approx \mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m}) + \mathbf{J}^{n,m} \Delta \mathbf{w}^{n,m} + \mathcal{O}((\Delta \mathbf{w}^{n,m})^2)$$

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

On linéarise le résidu

$$\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1}) \approx \mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m}) + \mathbf{J}^{n,m} \Delta \mathbf{w}^{n,m} + \mathcal{O}((\Delta \mathbf{w}^{n,m})^2)$$

Phase implicite complète

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta \tau^{n,m}} + \mathbf{J}^{n,m} \right) \Delta \mathbf{w}^{n,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m})$$

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

On linéarise le résidu

$$\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1}) \approx \mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m}) + \mathbf{J}^{n,m} \Delta \mathbf{w}^{n,m} + \mathcal{O}((\Delta \mathbf{w}^{n,m})^2)$$

Phase implicite complète

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta \tau^{n,m}} + \mathbf{J}^{n,m} \right) \Delta \mathbf{w}^{n,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m})$$

- On a un système linéaire à résoudre de taille $N_{cells} \times 3$

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

On linéarise le résidu

$$\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1}) \approx \mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m}) + \mathbf{J}^{n,m} \Delta \mathbf{w}^{n,m} + \mathcal{O}((\Delta \mathbf{w}^{n,m})^2)$$

Phase implicite complète

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta \tau^{n,m}} + \mathbf{J}^{n,m} \right) \Delta \mathbf{w}^{n,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m})$$

- On a un système linéaire à résoudre de taille $N_{cells} \times 3$
- On résout le système avec une méthode de relaxation de type Point Jacobi

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

On linéarise le résidu

$$\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1}) \approx \mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m}) + \mathbf{J}^{n,m} \Delta \mathbf{w}^{n,m} + \mathcal{O}((\Delta \mathbf{w}^{n,m})^2)$$

Phase implicite complète

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta \tau^{n,m}} + \mathbf{J}^{n,m} \right) \Delta \mathbf{w}^{n,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m})$$

- On a un système linéaire à résoudre de taille $N_{cells} \times 3$
- On résout le système avec une méthode de relaxation de type Point Jacobi
- On utilise un flux numérique simplifié pour la phase implicite

Système implicite BDF

A chaque pas de temps physique, on doit résoudre

$$\frac{\Delta \mathbf{w}^{n,m}}{\Delta \tau^{n,m}} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1})$$

On linéarise le résidu

$$\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m+1}) \approx \mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m}) + \mathbf{J}^{n,m} \Delta \mathbf{w}^{n,m} + \mathcal{O}((\Delta \mathbf{w}^{n,m})^2)$$

Phase implicite complète

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta \tau^{n,m}} + \mathbf{J}^{n,m} \right) \Delta \mathbf{w}^{n,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{n,m})$$

- On a un système linéaire à résoudre de taille $N_{cells} \times 3$
- On résout le système avec une méthode de relaxation de type Point Jacobi
- On utilise un flux numérique simplifié pour la phase implicite

l_{max} , nombre d'itérations nécessaire pour résoudre la phase implicite

Evaluation du coût total BDF

Boucle temps physique $N_{cycles} \times N_{\Delta t}$

$N_{\Delta t}$ nombre de pas de temps par période

N_{cycles} nombre de cycles avant le périodique

Evaluation du coût total BDF

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps physique } N_{\text{cycles}} \times N_{\Delta t} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps dual } m_{\text{max}} \\ \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$N_{\Delta t}$ nombre de pas de temps par période
 N_{cycles} nombre de cycles avant le périodique
 m_{max} nombre d'itérations en temps dual

Evaluation du coût total BDF

{ Boucle temps physique $N_{cycles} \times N_{\Delta t}$
 { { Boucle temps dual m_{max}
 { { Boucle sur les cellules N_{cells}
 { { { Boucle Point Jacobi l_{max}
 { { { { Système Implicite C_u

$N_{\Delta t}$ nombre de pas de temps par période

N_{cycles} nombre de cycles avant le périodique

m_{max} nombre d'itérations en temps dual

N_{cells} nombre de cellules

l_{max} nombre d'itérations Jacobi

C_u cout unitaire (par point et par itération)

Evaluation du coût total BDF

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps physique } N_{cycles} \times N_{\Delta t} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps dual } m_{max} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle sur les cellules } N_{cells} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle Point Jacobi } I_{max} \\ \boxed{\text{Système Implicite } C_u} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$	$N_{\Delta t}$	nombre de pas de temps par période
	N_{cycles}	nombre de cycles avant le périodique
	m_{max}	nombre d'itérations en temps dual
	N_{cells}	nombre de cellules
	I_{max}	nombre d'itérations Jacobi
	C_u	cout unitaire (par point et par itération)

Coût total BDF

$$C^{BDF} = N_{cycles} \times N_{\Delta t} \times m_{max} \times N_{cells} \times I_{max} \times C_u$$

- 1 Contexte de la thèse
- 2 Solver incompressible BDF
- 3 Approche TSM**
- 4 Comparaison TSM/BDF
- 5 Conclusion et Perspectives

Décomposition en série de Fourier



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

"Théorie Analytique de la Chaleur" (1822)

Soit f une fonction périodique en temps $f(x, t + T) = f(x, t)$, T est la période
 $f = \frac{1}{T}$ est la fréquence fondamentale et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation fondamentale

Série de Fourier complète

$$f(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \hat{f}_k(x) e^{ik\omega t}$$

Illustration d'une décomposition

Figure: Décomposition en série de Fourier du C_X de la turbine Achard

Série de Fourier tronquée à N

$$C(x, t) = \sum_{k=-N}^{k=N} \hat{C}_k(x) e^{ik\omega t}$$

Illustration d'une décomposition

Figure: Décomposition en série de Fourier du C_X de la turbine Achard

Série de Fourier tronquée à N

$$C(x, t) = \sum_{k=-N}^{k=N} \hat{C}_k(x) e^{ik\omega t}$$

Harmonique de rang k :

$$H_k(x, t) = \hat{C}_{-k}(x) e^{-ik\omega t} + \hat{C}_k(x) e^{ik\omega t}$$

Illustration d'une décomposition

Figure: Décomposition en série de Fourier du C_X de la turbine Achard

Série de Fourier tronquée à N

$$C(x, t) = \sum_{k=0}^{k=N} H_k(x, t)$$

Harmonique de rang k :

$$H_k(x, t) = \hat{C}_{-k}(x)e^{-ik\omega t} + \hat{C}_k(x)e^{ik\omega t}$$

Reconstruction depuis le domaine temporel

Théorème de Nyquist-Shannon (1928)

La fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal, afin de convertir ce signal d'une forme analogique à une forme numérique.

Reconstruction depuis le domaine temporel

Théorème de Nyquist-Shannon (1928)

La fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal, afin de convertir ce signal d'une forme analogique à une forme numérique.

$$\hat{C}_k(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} C_n e^{-ik\omega t_n}$$

On peut reconstruire exactement les harmoniques jusqu'au rang N à partir de la solution en $2N+1$ points.

Reconstruction depuis le domaine temporel

Théorème de Nyquist-Shannon (1928)

La fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal, afin de convertir ce signal d'une forme analogique à une forme numérique.

$$\hat{C}_k(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} C_n e^{-ik\omega t_n}$$

On peut reconstruire exactement les harmoniques jusqu'au rang N à partir de la solution en $2N+1$ points.

On échantillonne avec des instants équirépartis dans la période

$$t_n = \frac{n T}{2N+1}, \quad n \in [0 : 2N]$$

Principe des méthodes harmoniques temporelles

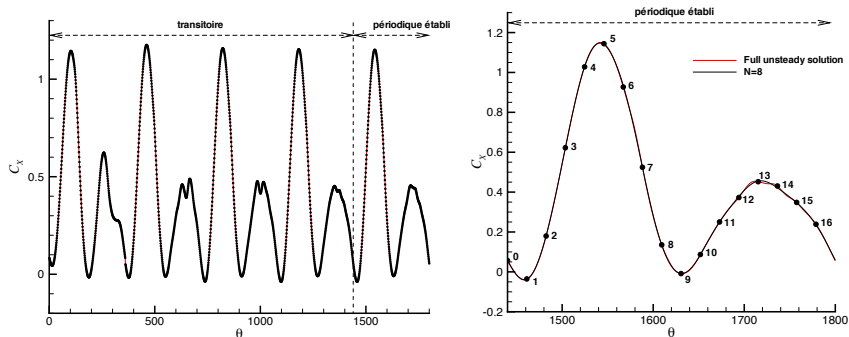


Figure: Approche en temps séquentielle et approche harmonique temporelle

Pour obtenir la solution périodique établie :

Principe des méthodes harmoniques temporelles

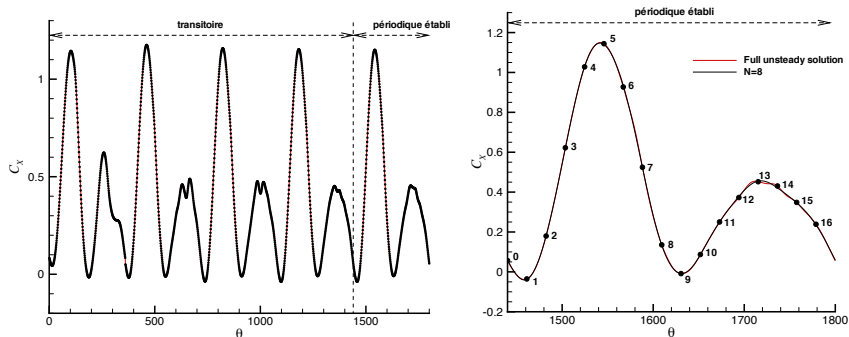


Figure: Approche en temps séquentielle et approche harmonique temporelle

Pour obtenir la solution périodique établie :

- 1 On cherche la solution en un nombre limité d'instant $2N + 1$

Principe des méthodes harmoniques temporelles

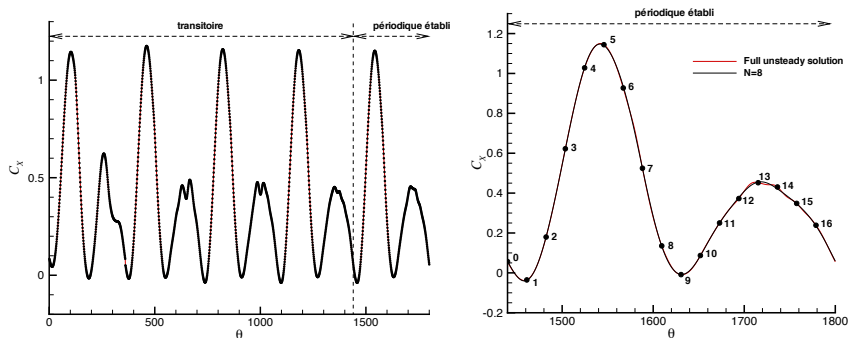


Figure: Approche en temps séquentielle et approche harmonique temporelle

Pour obtenir la solution périodique établie :

- ① On cherche la solution en un nombre limité d'instants $2N + 1$
- ② A partir de $2N + 1$ instants, on obtient les harmoniques jusqu'au rang N

Principe des méthodes harmoniques temporelles

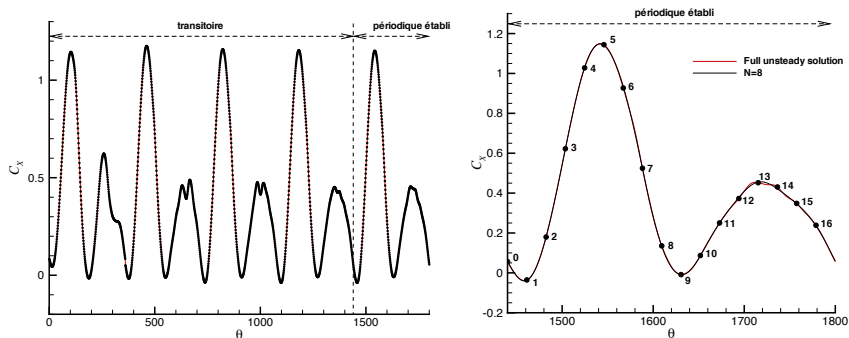


Figure: Approche en temps séquentielle et approche harmonique temporelle

Pour obtenir la solution périodique établie :

- ① On cherche la solution en un nombre limité d'instant $2N + 1$
- ② A partir de $2N + 1$ instants, on obtient les harmoniques jusqu'au rang N
- ③ La série de Fourier tronquée à N donne la solution à n'importe quel instant t

Dérivée Spectrale en temps TSM

On cherche la solution $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}(t_n)$ pour $n \in [0 : 2N]$ au problème

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n)$$

Dérivée Spectrale en temps TSM

On cherche la solution $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}(t_n)$ pour $n \in [0 : 2N]$ au problème

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n)$$

On suppose que \mathbf{w}_n est périodique en temps, on la décompose en série de Fourier tronquée à N

$$\mathbf{w}_n = \sum_{k=-N}^{k=+N} \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{ik\omega t_n}$$

Dérivée Spectrale en temps TSM

On cherche la solution $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}(t_n)$ pour $n \in [0 : 2N]$ au problème

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n)$$

On dérive en temps physique

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial t} = \sum_{k=-N}^{k=+N} i k \omega \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{i k \omega t_n}$$

Dérivée Spectrale en temps TSM

On cherche la solution $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}(t_n)$ pour $n \in [0 : 2N]$ au problème

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n)$$

On dérive en temps physique

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial t} = \sum_{k=-N}^{k=+N} \underline{i}k\omega \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{ik\omega t_n}$$

Expression dans le domaine fréquentiel

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\hat{\mathbf{w}}_k) = -\mathbf{K} \underline{i}k\omega \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{ik\omega t_n} - \hat{\mathcal{R}}_k(\hat{\mathbf{w}}) \quad k \in [-N : N]$$

Dérivée Spectrale en temps TSM

On cherche la solution $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}(t_n)$ pour $n \in [0 : 2N]$ au problème

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n)$$

On dérive en temps physique

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial t} = \sum_{k=-N}^{k=+N} \underline{i}k\omega \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{ik\omega t_n}$$

Expression dans le domaine fréquentiel

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\hat{\mathbf{w}}_k) = -\mathbf{K} \underline{i}k\omega \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{ik\omega t_n} - \hat{\mathcal{R}}_k(\hat{\mathbf{w}}) \quad k \in [-N : N]$$

A cause de la non linéarité de \mathcal{R} : $\hat{\mathcal{R}}_k(\hat{\mathbf{w}}) \neq \mathcal{R}(\hat{\mathbf{w}}_k)$

Dérivée Spectrale en temps TSM

On cherche la solution $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}(t_n)$ pour $n \in [0 : 2N]$ au problème

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n)$$

On dérive en temps physique

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial t} = \sum_{k=-N}^{k=+N} \underline{i}k\omega \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{ik\omega t_n}$$

Expression dans le domaine fréquentiel

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\hat{\mathbf{w}}_k) = -\mathbf{K} \underline{i}k\omega \hat{\mathbf{w}}_k(x) e^{ik\omega t_n} - \hat{\mathcal{R}}_k(\hat{\mathbf{w}}) \quad k \in [-N : N]$$

A cause de la non linéarité de \mathcal{R} : $\hat{\mathcal{R}}_k(\hat{\mathbf{w}}) \neq \mathcal{R}(\hat{\mathbf{w}}_k)$

On repasse donc dans le domaine temporel

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K} D_t(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n)$$

Opérateur spectral

On a un nouvel opérateur spectral qui approche la dérivée en temps physique

$$D_t(\mathbf{w}_n) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n)$$

Opérateur spectral

On a un nouvel opérateur spectral qui approche la dérivée en temps physique

$$D_t(\mathbf{w}_n) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n)$$

L'opérateur D_t à l'instant t_n s'écrit :

$$D_t(\mathbf{w}_n) = \sum_{p=-N}^N d_p \mathbf{w}_{n+p}$$

La dérivée spectrale dépend des solutions \mathbf{w}_q , $q \in [0 : 2N]$ et $d_0 = 0$

Opérateur spectral

On a un nouvel opérateur spectral qui approche la dérivée en temps physique

$$D_t(\mathbf{w}_n) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n)$$

L'opérateur D_t à l'instant t_n s'écrit :

$$D_t(\mathbf{w}_n) = \sum_{p=-N}^N d_p \mathbf{w}_{n+p}$$

La dérivée spectrale dépend des solutions \mathbf{w}_q , $q \in [0 : 2N]$ et $d_0 = 0$

On doit donc résoudre un système couplé stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Opérateur spectral

On a un nouvel opérateur spectral qui approche la dérivée en temps physique

$$D_t(\mathbf{w}_n) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_n)$$

L'opérateur D_t à l'instant t_n s'écrit :

$$D_t(\mathbf{w}_n) = \sum_{p=-N}^N d_p \mathbf{w}_{n+p}$$

La dérivée spectrale dépend des solutions \mathbf{w}_q , $q \in [0 : 2N]$ et $d_0 = 0$

On doit donc résoudre un système couplé stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{w}_n) = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Intérêt de la TSM

On simplifie un problème instationnaire en $2N + 1$ problèmes stationnaires couplés

Précision de l'opérateur spectral D_t

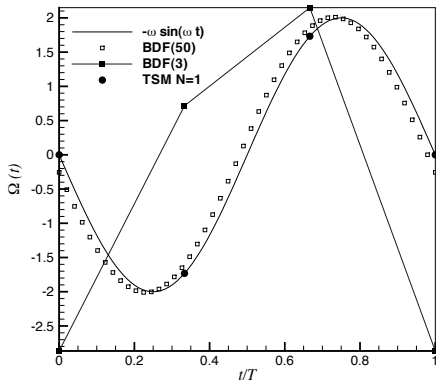
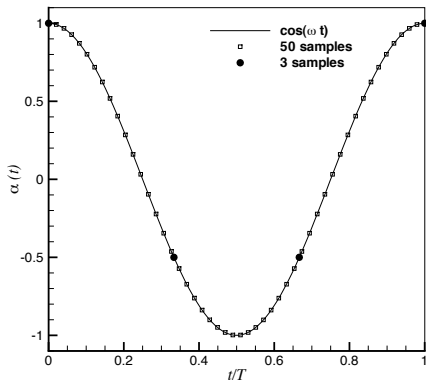


Figure: Dérivée de la fonction α définie par $\alpha(t) = \cos(\omega t)$ avec un schéma BDF et TSM

BDF

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_n) \approx \frac{\left(\frac{3}{2}\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \frac{1}{2}\alpha_{n-1}\right)}{\Delta t}$$

TSM

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t_n) \approx D_t(\alpha_n) = \sum_{p=-N}^N d_p \alpha_{n+p}$$

Précision de l'opérateur spectral D_t

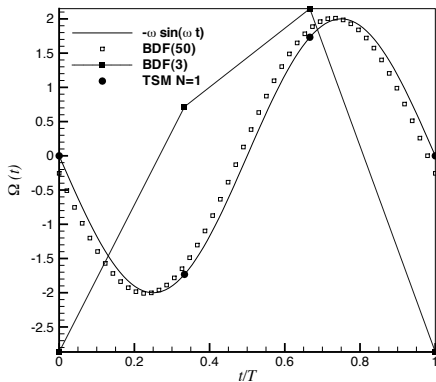
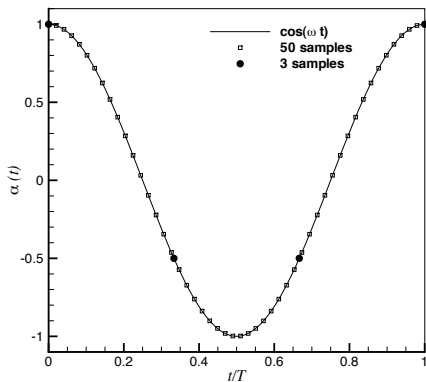


Figure: Dérivée de la fonction α définie par $\alpha(t) = \cos(\omega t)$ avec un schéma BDF et TSM

Avantage

La précision spectrale de D_t permet l'utilisation de grands pas de temps

Discretisation en temps dual TSM

Euler explicite pour l'approximation de la dérivée en temps fictif

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Figure: Principe de convergence en temps dual de la méthode TSM pour $N = 2$

Comparaison algorithmes BDF/TSM

BDF

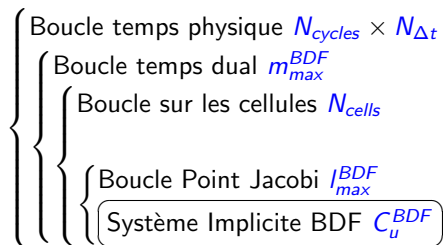
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps physique } N_{\text{cycles}} \times N_{\Delta t} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps dual } m_{\text{max}}^{\text{BDF}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle sur les cellules } N_{\text{cells}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle Point Jacobi } l_{\text{max}}^{\text{BDF}} \\ \boxed{\text{Système Implicite BDF } C_u^{\text{BDF}}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

TSM

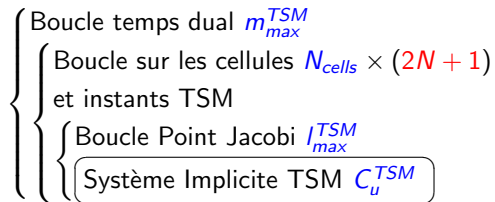
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps dual } m_{\text{max}}^{\text{TSM}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle sur les cellules } N_{\text{cells}} \times (2N + 1) \\ \text{et instants TSM} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle Point Jacobi } l_{\text{max}}^{\text{TSM}} \\ \boxed{\text{Système Implicite TSM } C_u^{\text{TSM}}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Comparaison algorithmes BDF/TSM

BDF



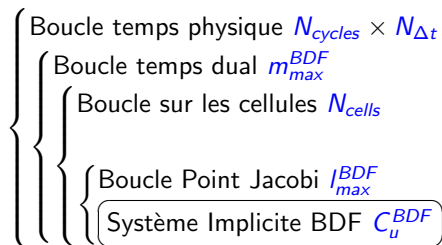
TSM



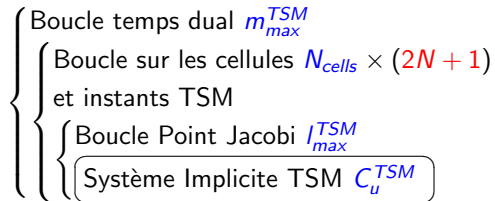
- En terme d'occupation mémoire, la TSM revient à calculer un problème stationnaire sur un maillage "espace-temps" $(2N + 1)$ fois plus grand

Comparaison algorithmes BDF/TSM

BDF



TSM



- En terme d'occupation mémoire, la TSM revient à calculer un problème stationnaire sur un maillage "espace-temps" $(2N + 1)$ fois plus grand

Avec BDF, on cherche

$$\mathbf{w}_i^{n,m}$$

Avec TSM, on cherche

$$\mathbf{w}_{i,n}^m$$

Limitation de Stabilité

Formulation explicite

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau^m} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation de Stabilité

Formulation explicite

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau^m} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation sur le temps dual

$$\Delta\tau^m < \text{CFL} \frac{h}{\|\lambda\|_N^m + \omega Nh}$$

Les hautes fréquences et/ou un grand nombre d'harmoniques N limitent le CFL

Limitation de Stabilité

Formulation explicite

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau^m} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation sur le temps dual

$$\Delta\tau^m < \text{CFL} \frac{h}{\|\lambda\|_N^m + \omega Nh}$$

Les hautes fréquences et/ou un grand nombre d'harmoniques N limitent le CFL

Implication partielle : on implice uniquement le résidu

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^{m+1}) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation de Stabilité

Formulation explicite

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau^m} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation sur le temps dual

$$\Delta\tau^m < \text{CFL} \frac{h}{\|\lambda\|_N^m + \omega Nh}$$

Les hautes fréquences et/ou un grand nombre d'harmoniques N limitent le CFL

Implicitation totale : on implicite le résidu et le terme TSM

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^{m+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^{m+1}) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation de Stabilité

Formulation explicite

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau^m} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation sur le temps dual

$$\Delta\tau^m < \text{CFL} \frac{h}{\|\lambda\|_N^m + \omega Nh}$$

Les hautes fréquences et/ou un grand nombre d'harmoniques N limitent le CFL

Implicitation totale : on implicite le résidu et le terme TSM

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^{m+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^{m+1}) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Linéarisation des opérateurs

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}_n^{m+1}) \approx \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) + \mathbf{J}_n^m \Delta\mathbf{w}_n^m + \mathcal{O}((\Delta\mathbf{w}_n^m)^2)$$

Limitation de Stabilité

Formulation explicite

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau^m} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Limitation sur le temps dual

$$\Delta\tau^m < \text{CFL} \frac{h}{\|\lambda\|_N^m + \omega Nh}$$

Les hautes fréquences et/ou un grand nombre d'harmoniques N limitent le CFL

Implicitation totale : on implicite le résidu et le terme TSM

$$\frac{\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_n^m}{\Delta\tau} = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^{m+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^{m+1}) \quad 0 \leq n < 2N + 1$$

Linéarisation des opérateurs

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}_n^{m+1}) \approx \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m) + \mathbf{J}_n^m \Delta\mathbf{w}_n^m + \mathcal{O}((\Delta\mathbf{w}_n^m)^2)$$

$$D_t(\mathbf{w}_n^{m+1}) = D_t(\mathbf{w}_n^m) + D_t(\Delta\mathbf{w}_n^m)$$

Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m \right) \Delta\mathbf{w}_n^m + \mathbf{K}D_t(\Delta\mathbf{w}_n^m) = -\mathbf{K}D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m)$$

Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m \right) \Delta \mathbf{w}_n^m + \mathbf{K} D_t(\Delta \mathbf{w}_n^m) = \underbrace{-\mathbf{K} D_t(\mathbf{w}_n^m) - \mathcal{R}(\mathbf{w}_n^m)}_{-\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)}$$

Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m \right) \Delta \mathbf{w}_n^m + \mathbf{K} D_t(\Delta \mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m \right) \Delta \mathbf{w}_n^m + \mathbf{K} D_t(\Delta \mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

Sous forme matricielle

$$\mathbf{A}^{*,m} \Delta \mathbf{w}^{*,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{*,m}), \quad \mathbf{w}^* = [\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n, \dots, \mathbf{w}_{2N}]^t$$

Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m \right) \Delta \mathbf{w}_n^m + \mathbf{K} D_t(\Delta \mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

Sous forme matricielle

$$\mathbf{A}^{*,m} \Delta \mathbf{w}^{*,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{*,m}), \quad \mathbf{w}^* = [\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n, \dots, \mathbf{w}_{2N}]^t$$

comme $d_0 = 0$, on a

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau} + \mathbf{J}_0 & d_1 \mathbf{I}_d & \cdots & d_N \mathbf{I}_d & d_{-N} \mathbf{I}_d & \cdots & d_{-1} \mathbf{I}_d \\ d_{-1} \mathbf{I}_d & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_1 \mathbf{I}_d & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_{-N} \mathbf{I}_d & \cdots & d_{-1} \mathbf{I}_d & \frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau} + \mathbf{J}_N & d_1 \mathbf{I}_d & \cdots & d_N \mathbf{I}_d \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_1 \mathbf{I}_d & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & d_1 \mathbf{I}_d \\ d_1 \mathbf{I}_d & \cdots & d_N \mathbf{I}_d & d_{-N} \mathbf{I}_d & \cdots & d_{-1} \mathbf{I}_d & \frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau} + \mathbf{J}_{2N} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2N + 1 \\ \times \\ N_{\text{cells}} \end{matrix}$$

Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta \mathbf{w}_n^m + \mathbf{K} D_t(\Delta \mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

Sous forme matricielle

$$\mathbf{A}^{*,m} \Delta \mathbf{w}^{*,m} = -\mathcal{R}^t(\mathbf{w}^{*,m}), \quad \mathbf{w}^* = [\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n, \dots, \mathbf{w}_{2N}]^t$$

comme $d_0 = 0$, on a

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau} + \mathbf{J}_0 & d_1 \mathbf{I}_d & \cdots & d_N \mathbf{I}_d & d_{-N} \mathbf{I}_d & \cdots & d_{-1} \mathbf{I}_d \\ d_{-1} \mathbf{I}_d & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_1 \mathbf{I}_d & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_{-N} \mathbf{I}_d & \cdots & d_{-1} \mathbf{I}_d & \frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau} + \mathbf{J}_N & d_1 \mathbf{I}_d & \cdots & d_N \mathbf{I}_d \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_1 \mathbf{I}_d & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & d_1 \mathbf{I}_d \\ d_1 \mathbf{I}_d & \cdots & d_N \mathbf{I}_d & d_{-N} \mathbf{I}_d & \cdots & d_{-1} \mathbf{I}_d & \frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau} + \mathbf{J}_{2N} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2N + 1 \\ \times \\ N_{\text{cells}} \end{matrix}$$

Résolution du Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta\mathbf{w}_n^m + \mathbf{K}D_t(\Delta\mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

On résout le système avec une méthode de relaxation de type Point Jacobi

$$\Delta\mathbf{w}_n^{(0)} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 0, l_{max} - 1 \\ \left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta\mathbf{w}_n^{(l+1)} = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m) - \mathbf{K}D_t(\Delta\mathbf{w}_n^{(l)}) \end{array} \right.$$

$$\Delta\mathbf{w}_n^{(l_{max})} = \Delta\mathbf{w}_n^m$$

Résolution du Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta\mathbf{w}_n^m + \mathbf{K}D_t(\Delta\mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

On résout le système avec une méthode de relaxation de type Point Jacobi

$$\Delta\mathbf{w}_n^{(0)} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 0, l_{max} - 1 \\ \left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta\mathbf{w}_n^{(l+1)} = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m) - \mathbf{K}D_t(\Delta\mathbf{w}_n^{(l)}) \end{array} \right.$$

$$\Delta\mathbf{w}_n^{(l_{max})} = \Delta\mathbf{w}_n^m$$

- En relaxant le terme TSM, on facilite le couplage des instants

Résolution du Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta \tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta \mathbf{w}_n^m + \mathbf{K} D_t(\Delta \mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

On résout le système avec une méthode de relaxation de type Point Jacobi

$$\Delta \mathbf{w}_n^{(0)} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 0, l_{max} - 1 \\ \left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta \tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta \mathbf{w}_n^{(l+1)} = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m) - \mathbf{K} D_t(\Delta \mathbf{w}_n^{(l)}) \end{array} \right.$$

$$\Delta \mathbf{w}_n^{(l_{max})} = \Delta \mathbf{w}_n^m$$

- En relaxant le terme TSM, on facilite le couplage des instants
- Même discrétisation spatiale que pour la marche en temps classique

Résolution du Système implicite

$$\left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta\mathbf{w}_n^m + \mathbf{K} D_t(\Delta\mathbf{w}_n^m) = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m)$$

On résout le système avec une méthode de relaxation de type Point Jacobi

$$\Delta\mathbf{w}_n^{(0)} = 0$$

$$\begin{cases} l = 0, l_{max} - 1 \\ \left(\frac{\mathbf{I}_d}{\Delta\tau^m} + \mathbf{J}_n^m + \mathbf{K} \sum_{p=-N}^N |d_p| \mathbf{I}_d \right) \Delta\mathbf{w}_n^{(l+1)} = -\mathcal{R}_n^t(\mathbf{w}^m) - \mathbf{K} D_t(\Delta\mathbf{w}_n^{(l)}) \end{cases}$$

$$\Delta\mathbf{w}_n^{(l_{max})} = \Delta\mathbf{w}_n^m$$

- En relaxant le terme TSM, on facilite le couplage des instants
- Même discrétisation spatiale que pour la marche en temps classique

⇒ Pour chaque instant TSM, on se retrouve avec un système implicite similaire au système stationnaire classique

Effet de la correction diagonale

Figure: Historique de convergence pour l'équation de la chaleur avec TSM et résolution Point Jacobi du système implicite ($I_{max} = 2, N = 1$)

Comparaison des coûts TSM et BDF

BDF

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps physique } N_{\text{cycles}} \times N_{\Delta t} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps dual } m_{\text{max}}^{\text{BDF}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle sur les cellules } N_{\text{cells}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle Point Jacobi } I_{\text{max}}^{\text{BDF}} \\ \boxed{\text{Système Implicite BDF } C_u^{\text{BDF}}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

TSM

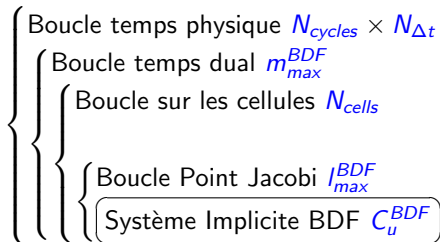
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle temps dual } m_{\text{max}}^{\text{TSM}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle sur les cellules } N_{\text{cells}} \times (2N + 1) \\ \text{et instants TSM} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle Point Jacobi } I_{\text{max}}^{\text{TSM}} \\ \boxed{\text{Système Implicite TSM } C_u^{\text{TSM}}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Coût total TSM

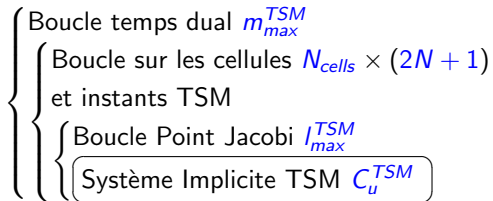
$$C^{\text{TSM}(N)} = (2N + 1) \times m_{\text{max}}^{\text{TSM}} \times I_{\text{max}}^{\text{TSM}} \times N_{\text{cells}} \times C_u^{\text{TSM}}$$

Comparaison des coûts TSM et BDF

BDF



TSM



Coût total TSM

$$C^{\text{TSM}(N)} = (2N + 1) \times m_{\text{max}}^{\text{TSM}} \times I_{\text{max}}^{\text{TSM}} \times N_{\text{cells}} \times C_u^{\text{TSM}}$$

Coût total BDF

$$C^{\text{BDF}} = N_{\Delta t} \times N_{\text{cycles}} \times m_{\text{max}}^{\text{BDF}} \times I_{\text{max}}^{\text{BDF}} \times N_{\text{cells}} \times C_u^{\text{BDF}}$$

Rapport des coûts TSM(N)/BDF

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \frac{(2N + 1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}} \times \frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}} \times \frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}$$

Rapport des coûts TSM(N)/BDF

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}} \times \frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1} \times \frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}$$

- Φ_1 dépend du problème considéré

Rapport des coûts TSM(N)/BDF

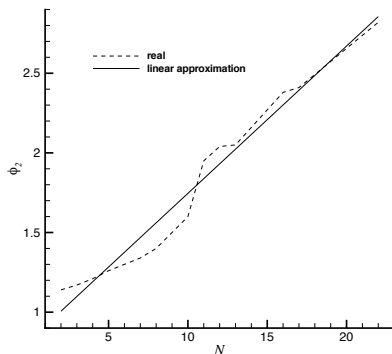
$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}} \times \frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

- Φ_1 dépend du problème considéré
- Φ_2 (rapport des coûts unitaires TSM/BDF) mesure l'efficacité de l'implémentation

Rapport des coûts TSM(N)/BDF

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}} \times \frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

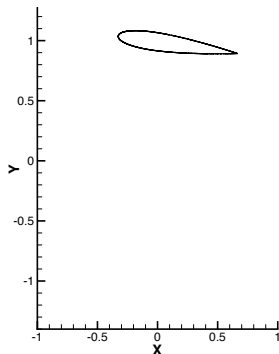
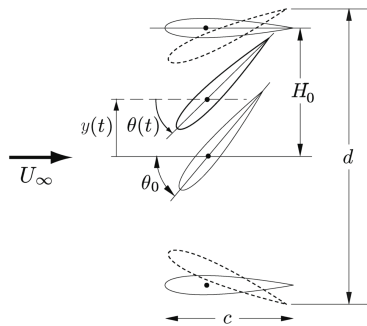
- Φ_1 dépend du problème considéré
- Φ_2 (rapport des couts unitaires TSM/BDF) mesure l'efficacité de l'implémentation



$$\Phi_2(N) \approx 0.8208 + 0.0925 \times N$$

- 1 Contexte de la thèse
- 2 Solver incompressible BDF
- 3 Approche TSM
- 4 Comparaison TSM/BDF**
- 5 Conclusion et Perspectives

Présentation des cas tests



Equations du mouvement

$$\begin{cases} \text{Pitching} & \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) \\ \text{Heaving} & y(t) = H_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

θ_0 , amplitude de rotation

H_0 , amplitude du battement

Pulsation $\omega = 2\pi f$

Fréquence réduite $f^* = \frac{fc}{U_\infty}$

U_∞ est la vitesse à l'infini amont

Régimes de fonctionnement

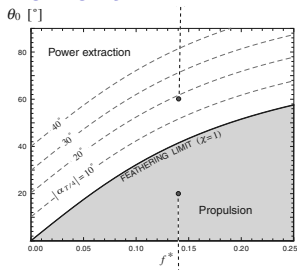


Figure: Régimes $H_0/c = 1$

Régimes de fonctionnement

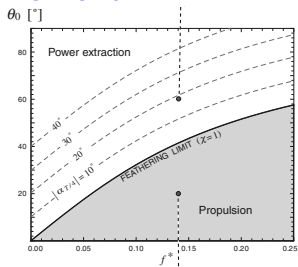
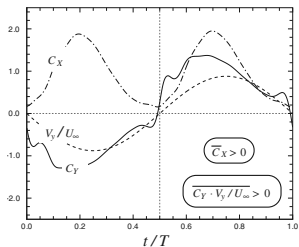
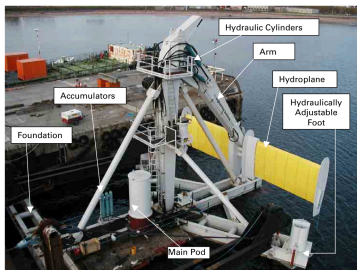


Figure: Mode turbine

Figure: Régimes $H_0/c = 1$



Régimes de fonctionnement

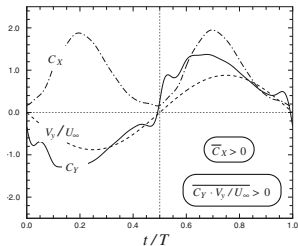


Figure: Mode turbine

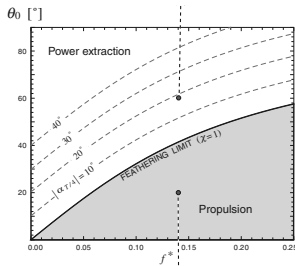


Figure: Régimes $H_0/c = 1$

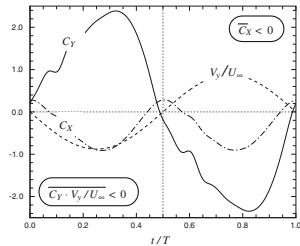
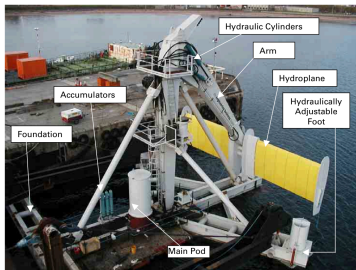


Figure: Mode propulseur



Etude paramétrique du mode turbine

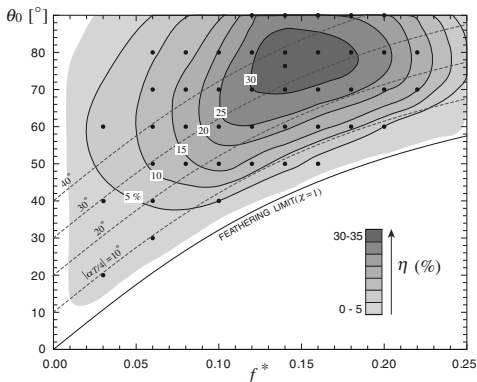


Figure: Carte des rendements dans l'espace paramétrique (f^* , θ_0) NACA0015, $Re=1100$, $H_0/c = 1$, $x_p/c = 1/3$, Résultats de Kinsey et Dumas (2008)

Etude paramétrique du mode turbine

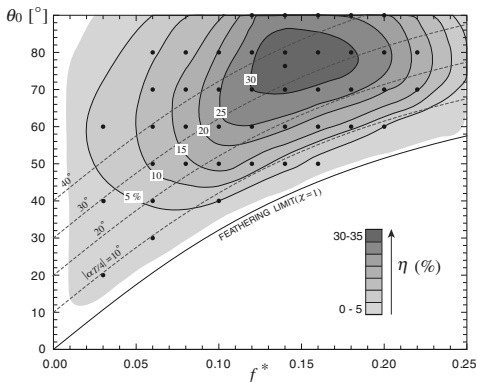


Figure: Carte des rendements dans l'espace paramétrique (f^* , θ_0) NACA0015, $Re=1100$, $H_0/c = 1$, $x_p/c = 1/3$, Résultats de Kinsey et Dumas (2008)

Cas test PH (Pitching Heaving), $\eta = 11.4\%$

Fréquence réduite	f^*	0.18
Amplitude battement	H_0 [m]	1
Amplitude rotation	θ_0 [°]	60

Paramètres numériques communs BDF/TSM

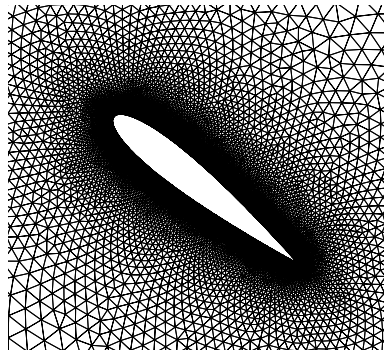
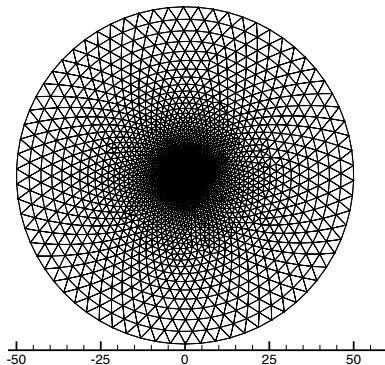


Figure: Maillage NACA0015

Compressibilité artificielle	β	5
Facteur accélération	CFL	10^6
Itérations Jacobi	l_{max}	16
Nombre de cellules	N_{cells}	30000

Formulation ALE variables absolues,
repère absolu

Résultats BDF, cas PH : C_Y

		CA-BDF	Kinsey & Dumas (FLUENT)
Nombre de cellules	N_{cells}	30000	72000
Pas de temps par période	$N_{\Delta t}$	520	2000
Sous itérations temps dual	m_{max}^{BDF}	100	?
Méthode incompressible		Compressibilité artificielle $\beta = 5$	SIMPLE

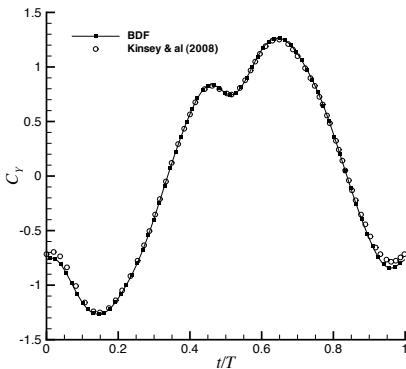


Figure: Comparaison des résultats du solver CA-BDF avec Kinsey & Dumas : Evolution du C_Y

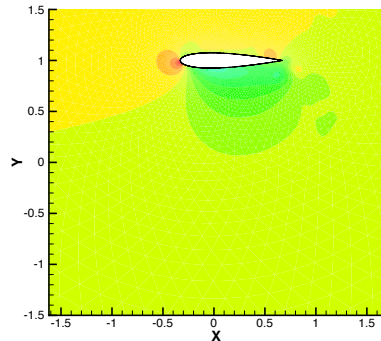


Figure: Vidéo isovaleurs de pression

Comparaison BDF/TSM PH : C_y

Figure: Comparaison des résultats BDF et TSM pour un nombre croissant d'harmoniques : C_Y PH. Les carrés noir représentent les $2N + 1$ instants de calcul TSM

Historiques de convergence en temps dual BDF/TSM

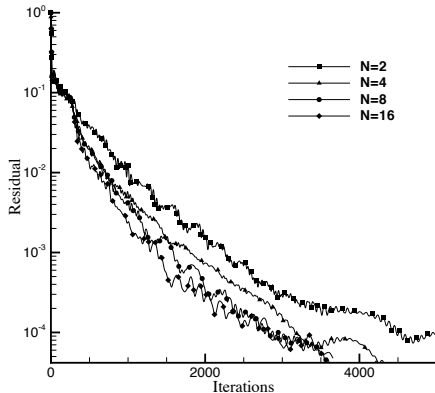
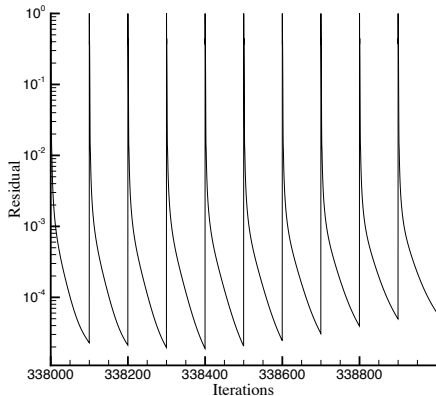


Figure: Méthode BDF, cas PH à $t/T = 0.5$

Figure: Méthode TSM, cas PH pour un nombre croissant d'harmoniques

Pour obtenir un résidu de 10^{-4}

- $m_{max}^{BDF} \approx 100$
- $m_{max}^{TSM} \approx 3300$

$$res_{av}^{TSM,m} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} \sqrt{\frac{1}{N_{cell}} \sum_{i=1}^{N_{cell}} \frac{\Delta p_{i,n}^2}{\Delta \tau_i^2}}$$

Spectre des résultats BDF : C_y PH

Question

Peut-on relier facilement le spectre de la solution BDF et les résultats TSM ?

Spectre des résultats BDF : C_Y PH

Question

Peut-on relier facilement le spectre de la solution BDF et les résultats TSM ?

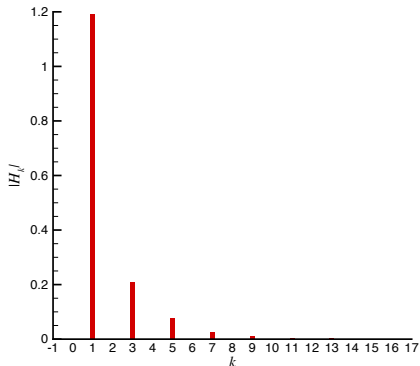
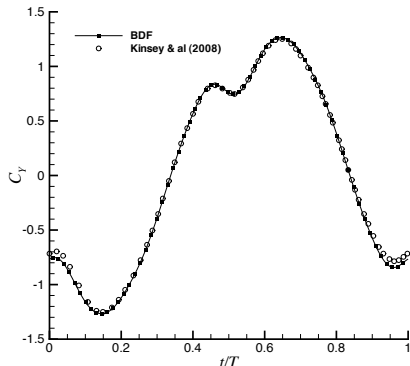


Figure: Comparaison des résultats du solver CA-BDF avec Kinsey & Dumas : Evolution du C_Y

Figure: Spectre de la décomposition du C_Y en série de Fourier

Spectre et résultats TSM : C_Y PH

Figure: Comparaison de la décomposition en série de Fourier de la solution BDF (gauche) avec la solution TSM pour un nombre croissant d'harmoniques (droite) : C_Y PH

Spectre et résultats TSM : C_Y PH

Figure: Comparaison de la décomposition en série de Fourier de la solution BDF (gauche) avec la solution TSM pour un nombre croissant d'harmoniques (droite) : C_Y PH

Réponse

Pas évident à cause de la non linéarité de l'opérateur spatial : $\hat{\mathcal{R}}_k(\mathbf{w}) \neq \mathcal{R}(\hat{\mathbf{w}}_k)$

Résultats BDF, cas PP : C_Y

Cas test PP (Pure Pitching), $\eta = 0.8\%$

Fréquence réduite	f^*	0.12
Amplitude battement	H_0 [m]	0
Amplitude rotation	θ_0 [°]	23

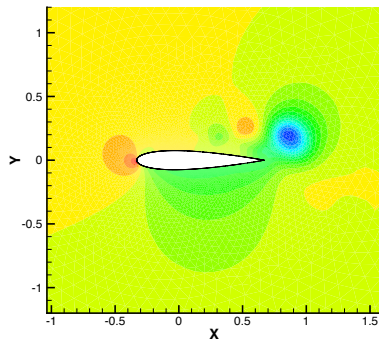
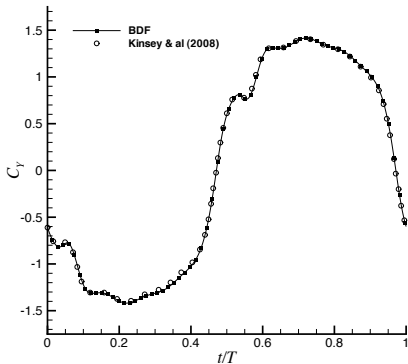


Figure: Comparaison des résultats du solver CA-BDF avec Kinsey & Dumas : Evolution du C_Y

Figure: Vidéo isovaleurs de pression

Comparaison BDF/TSM, cas PP : C_y

Figure: Comparaison des résultats BDF et TSM pour un nombre croissant d'harmoniques : C_Y PP. Les carrés noir représentent les $2N + 1$ instants de calcul TSM

Convergence TSM, cas PP

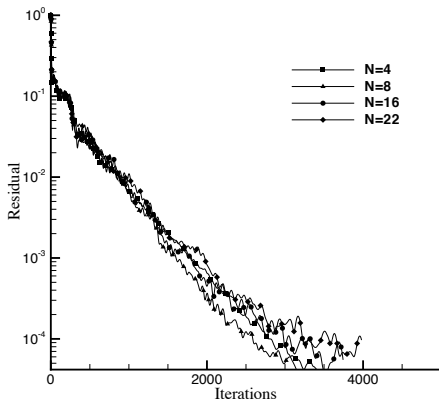
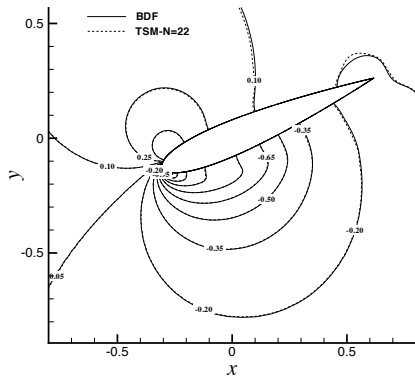


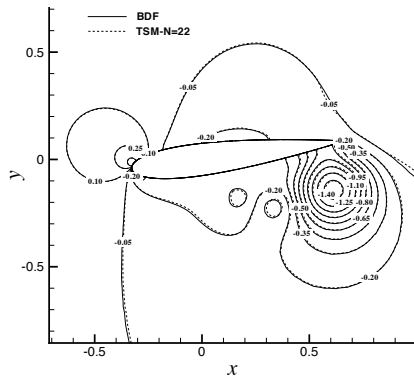
Figure: Historique de convergence de la méthode TSM pour le cas PP et pour un nombre croissant d'harmoniques

Pour obtenir un résidu moyen de 10^{-4} , $m_{max}^{TSM} \approx 2800$

Champs de pression PP



(a)



(b)

Figure: Cas test PP. Comparaison des champs de pression BDF et TSM reconstruit ($N = 22$) à $t/T = 0.25$ (a) et $t/T = 0.45$ (b).

Spectre des résultats BDF : C_Y PP

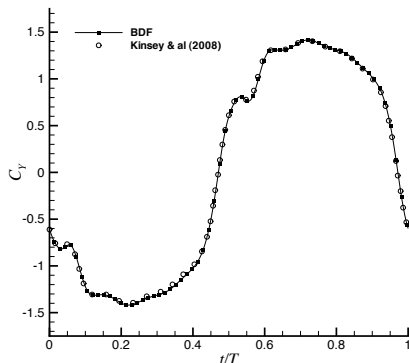


Figure: Comparaison des résultats du solveur CA-BDF avec Kinsey & Dumas : Evolution du C_Y

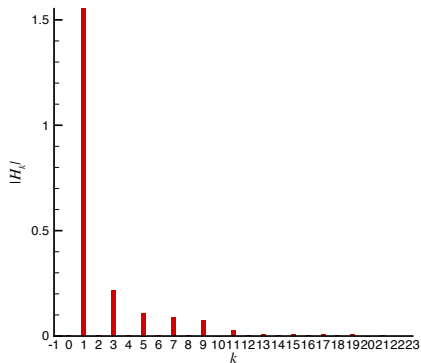


Figure: Décomposition du C_Y en série de Fourier

Spectre et résultats TSM : C_Y PP

Figure: Comparaison de la décomposition en série de Fourier de la solution BDF (gauche) avec la solution TSM pour un nombre croissant d'harmoniques (droite) : C_Y PP

Précision : Calcul de l'erreur

L'erreur RMS sur le coefficient C_Y est définie par :

$$\epsilon_{RMS}(C_Y) = \sqrt{\frac{1}{N_{\Delta t}} \sum_{k=1}^{N_{\Delta t}} \left(\frac{(C_Y)_{TSM(N)}(t_k) - (C_Y)_{BDF}(t_k)}{(\Delta C_Y)_{BDF}} \right)^2}$$

Erreur sur le C_Y

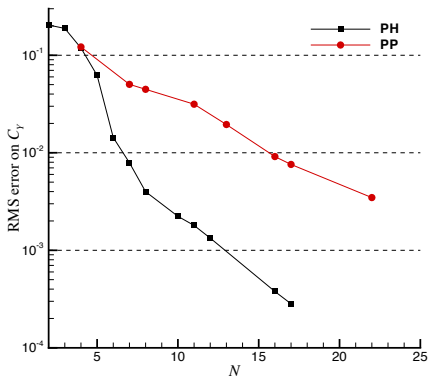


Figure: Erreur RMS de la différence normalisée entre le C_Y calculé avec la méthode BDF et 520 pas de temps par période et la méthode TSM(N) pour un nombre croissant d'harmoniques N .

Erreur inférieure à 1% sur le $C_Y \implies \begin{cases} 7 & \text{harmoniques pour PH} \\ 16 & \text{harmoniques pour PP} \end{cases}$

Résultats coûts

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}}$$

$$= \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1} \times \frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

$$\Phi_2(N) \approx 0.8208 + 0.0925 \times N$$

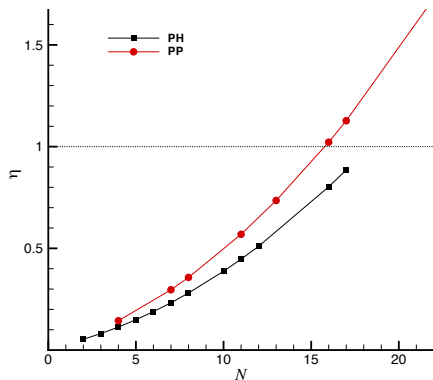


Figure: Rapport de coût TSM sur BDF en fonction du nombre d'harmoniques N

Méthode	m_{max}	$N_{\Delta t}$	N_{cycle}
BDF	100	520	6
TSM	3300		

Table: PH case

Méthode	m_{max}	$N_{\Delta t}$	N_{cycle}
BDF	100	520	4
TSM	2800		

Table: PP case

Résultats combinés de précision et coût

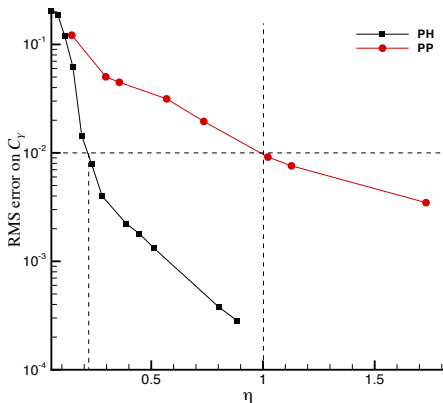


Figure: Erreur RMS sur le C_Y en fonction du rapport de coût η

$$\text{Erreur inférieure à 1\% sur le } C_Y \implies \begin{cases} \eta^{PH} = 0.2 & \text{Gain de facteur 5} & N = 7 \\ \eta^{PP} = 1 & \text{Gain nul} & N = 16 \end{cases}$$

- 1 Contexte de la thèse
- 2 Solver incompressible BDF
- 3 Approche TSM
- 4 Comparaison TSM/BDF
- 5 Conclusion et Perspectives**

Résultats obtenus

Gains en temps de calcul

Pour les cas incompressibles 2D laminaires présentés → gain d'un facteur 1 à 5

Résultats obtenus

Gains en temps de calcul

Pour les cas incompressibles 2D laminaires présentés → gain d'un facteur 1 à 5

Quel gain peut-on espérer pour la turbine Achard ?

Gain estimé pour la turbine Achard

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Gain estimé pour la turbine Achard

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_{1\text{-physique}}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_{1\text{-dual}}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

$\Phi_{1\text{-physique}}$: **rapport indépendant de l'implémentation de la méthode TSM**

Gain estimé pour la turbine Achard

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_{1\text{-physique}}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_{1\text{-dual}}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

$\Phi_{1\text{-physique}}$: **rapport indépendant de l'implémentation de la méthode TSM**

- Nombre de pas de temps par période $N_{\Delta t} = 360$

Gain estimé pour la turbine Achard

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_{1\text{-physique}}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_{1\text{-dual}}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

$\Phi_{1\text{-physique}}$: **rapport indépendant de l'implémentation de la méthode TSM**

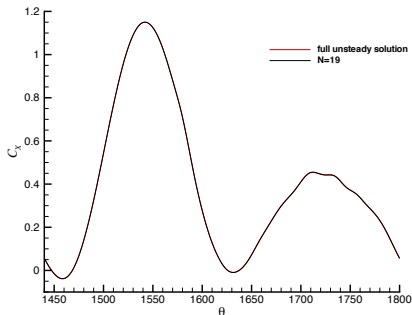
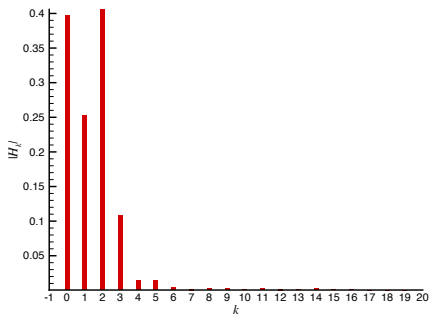
- Nombre de pas de temps par période $N_{\Delta t} = 360$
- Nombre de cycles pour arriver à l'état périodique établi $N_{cycles} = 5$

Gain estimé pour la turbine Achard

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_{1-\text{physique}}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_{1-\text{dual}}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

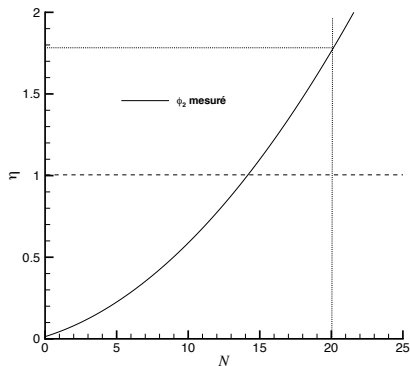
$\Phi_{1-\text{physique}}$: **rapport indépendant de l'implémentation de la méthode TSM**

- Nombre de pas de temps par période $N_{\Delta t} = 360$
- Nombre de cycles pour arriver à l'état périodique établi $N_{cycles} = 5$
- Nombre d'harmoniques N nécessaires pour représenter la solution $N \approx 20$



Gain estimé pour la turbine Achard

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$



Méthode	m_{max}	$N_{\Delta t}$	N_{cycle}
BDF	100	360	5
TSM	3000		

Table: Paramètres de calcul estimés pour la turbine Achard

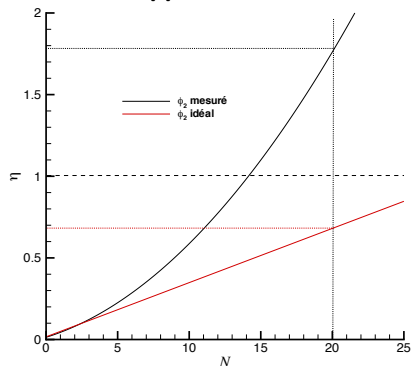
$$\eta_{estime}(20) \approx 1.7$$

Figure: Rapport de coût TSM/BDF estimé pour la turbine Achard

Perspectives d'amélioration de la TSM

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Améliorer le rapport de coût unitaire TSM/BDF Φ_2



Méthode	m_{max}	$N_{\Delta t}$	N_{cycle}
BDF	100	360	5
TSM	3000		

Table: Paramètres de calcul estimés pour la turbine Achard

$$\eta_{estime}(20) \approx 1.7$$

$$\text{Idéalement } \Phi_2 = 1$$

$$\eta_{ideal}(20) \approx 0.7$$

Figure: Rapport de coût TSM/BDF estimé et idéal pour la turbine Achard

Perspectives d'amélioration des approches BDF et TSM

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Amélioration de la convergence en temps dual $m_{max}^{TSM(N)}$ et m_{max}^{BDF}

Perspectives d'amélioration des approches BDF et TSM

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Amélioration de la convergence en temps dual $m_{max}^{TSM(N)}$ et m_{max}^{BDF}

- 1 Amélioration de la résolution du système implicite

Perspectives d'amélioration des approches BDF et TSM

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Amélioration de la convergence en temps dual $m_{max}^{TSM(N)}$ et m_{max}^{BDF}

- ① Amélioration de la résolution du système implicite
 - ▶ Méthode de relaxation Gauss Seidel par point

Perspectives d'amélioration des approches BDF et TSM

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Amélioration de la convergence en temps dual $m_{max}^{TSM(N)}$ et m_{max}^{BDF}

- ① Amélioration de la résolution du système implicite
 - ▶ Méthode de relaxation Gauss Seidel par point
 - ▶ Solveur GMRES (pas sensible à la perte de dominance diagonale)

Perspectives d'amélioration des approches BDF et TSM

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Amélioration de la convergence en temps dual $m_{max}^{TSM(N)}$ et m_{max}^{BDF}

- ① Amélioration de la résolution du système implicite
 - ▶ Méthode de relaxation Gauss Seidel par point
 - ▶ Solveur GMRES (pas sensible à la perte de dominance diagonale)

- ② Amélioration de la phase implicite

Perspectives d'amélioration des approches BDF et TSM

$$\eta = \frac{C^{TSM(N)}}{C^{BDF}} = \underbrace{\frac{(2N+1)}{N_{\Delta t} \times N_{cycles}}}_{\Phi_1 - \text{physique}} \times \underbrace{\frac{m_{max}^{TSM(N)}}{m_{max}^{BDF}}}_{\Phi_1 - \text{dual}} \times \underbrace{\frac{C_u^{TSM(N)}}{C_u^{BDF}}}_{\Phi_2}$$

Amélioration de la convergence en temps dual $m_{max}^{TSM(N)}$ et m_{max}^{BDF}

- ① Amélioration de la résolution du système implicite
 - ▶ Méthode de relaxation Gauss Seidel par point
 - ▶ Solveur GMRES (pas sensible à la perte de dominance diagonale)
- ② Amélioration de la phase implicite
- ③ Implémentation de la TSM dans un solveur purement incompressible

Merci de votre attention